Н.И.Портенко, А.В.Скороход, В.М.Шуренков

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

(Итоги науки и техн. Соврем, пробл. матем. Фундам. направления. — ВИНИТИ, 1989, — 46, — 2 С.5—248)

Систематически излагается теория марковских процессов — важного самостоятельного раздела теории случайных процессов. Основным определениям предшествует рассмотрение ряда модельных примеров. После детального изучения марковского свойства (существование переходной вероятности, законы входа и т. п.) рассматриваются марковские процессы, траектории которых обладают определенными свойствами регулярности. Особое внимание уделяется диффузионным процессам, их связям с дифференциальными уравнениями в частных производных и стохастическими дифференциальными уравнениями. Отдельно излагается теория однородных процессов (полугрупповая теория, строго марковские процессы, скачкообразные процессы, мультипликативные и аддитивные функционалы). Описывается локальное строение непрерывных марковских процессов со значениями конечномерном линейном пространстве. Завершается изложение эргодической теорией, традиционно содержащей теоремы типа закона больших чисел, утверждения о существовании пределов переходных вероятностей, «интегральные» предельные теоремы для отношений.

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

СОДЕРЖАНИЕ

Именной указатель

Предметный указатель

УДК 519.217

МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

Н. И. Портенко, А. В. Скороход, В. М. Шуренков

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1

МАРКОВСКОЕ СВОЙСТВО

Марковское свойство выделяет из всего множества случайных процессов класс марковских процессов, которые являются естественным обобщением динамической системы. Как физические и механические системы при правильном выборе фазового пространства превращаются в динамические (это значит, что состояние системы в данный момент определяет ее эволюцию в будущем), так и произвольный случайный процесс может при соответствующем выборе фазового пространства превращаться в марковский процесс, т. е. такой, для которого дальнейшая эволюция зависит от прошлого только через состояние в настоящий момент. Это свойство и называется марковским. Эта глава посвящена строгому определению марковского свойства и рассмотрению его непосредственных следствий.

§ 1. Стохастически определенные системы

Системы, обладающие марковским свойством, впервые рассмотрел А. Н. Колмогоров. Он называл их стохастически определенными. Они естественно возникают при обобщении понятия динамической системы на системы, зависящие от случая.

1.1. Динамические системы со случайными возмущениями. Случайность в реальных системах может появляться в результате случайного изменения параметров системы или в результате случайного возмущения, действующий на систему. Можно также рассматривать и системы, случайность которых определяется случайностью начального положения системы. Мы рассмотрим одну общую схему построения систем со случайным изменснием.

а) **Динамические системы.** Пусть $(X, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, являющееся фазовым пространством динамической системы. Динамическая система определяется двупараметрическим семейством отображений $F_{s,t}(x)$ пространства X в себя, заданном для $-\infty < t_0 \leqslant s < t < \infty$. $F_{s,t}(x)$ интерпретируется как положение системы в момент t, если в начальный момент s она находилась в состоянии x. Эти отображения связаны эволюционным уравнением: при $s < t < u$

$$F_{s,u}(x) = F_{t,u}(F_{s,t}(x)). \tag{1}$$

Естественно требовать также, чтобы отображение было измеримым по x относительно σ-алгебры $\mathscr{B}$ и удовлетворяло определенным условиям регулярности как функция t. Наиболее характерным примером динамической системы является динамическая система, порождаемая дифференциальным уравнением.

Пример. Пусть $X = R^d$, $\mathscr{B} = \mathscr{B}_{R^d}$ — борелевская σ-алгебра в R^d, функция $a(t, x)$ определена на $R \times R^d$, принимает значения в R^d, непрерывна по совокупности переменных. Предположим, что уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = a(t, x(t)) \tag{2}$$

имеет единственное решение с начальным условием $x(t_0) = x_0$, каковы бы ни были $x_0 \in R^d$, $t_0 \in R$. Положим $F_{s,t}(x) = x(t)$, где $x(t)$ — решение (2) при $t \geqslant s$ с начальным условием $x(s) = x$. Тогда $F_{s,t}(x)$ удовлетворяет (1).

б) **Динамические системы с дискретным вмешательством случая.**

Пусть задана динамическая система $F_{s,t}(x)$. Будем предполагать, что функция $F_{s,t}(x)$ измерима относительно $\mathscr{B}_R \otimes \mathscr{B}_R \otimes \mathscr{B}_{R^d}$ по совокупности всех своих переменных. Случайное воздействие на динамическую систему состоит в том, что в некоторые случайные моменты времени τ система «перескакивает» в некоторое случайное положение ξ в фазовом пространстве и начинает двигаться по траектории $F_{\tau,t}(\xi)$ (начинающейся в момент τ из состояния ξ), она движется по этой траектории до очередного случайного перескока на другую траекторию. Эти моменты τ есть моменты вмешательства случая. Дискретность вмешательства случая означает, что эти моменты можно рассматривать как некоторую возрастающую последовательность случайных величин $\tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n < \ldots$, где $\tau_n \to \infty$. Если ξ_k обозначает состояние системы в момент τ_k (это состояние непосредственно после k-го вмешательства случая), а $\xi_{s,x}(t)$ обозначает положение системы в момент t, если она начала движение в момент s из состояния x, то $\xi_{s,x}(t) = F_{\tau,t}(\xi_k)$ при $\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}$. Естественно считать, что величины τ_k и ξ_k связаны между собой и их распределение зависит и от s, x, и от значений τ_i, ξ_i при $i \leqslant k$.

Пример. Свободное движение частицы с импульсным изменением скорости. Фазовым пространством системы служит $R^d \times R^d$, ее состояние определяется парой $(x;\ v)$, $x \in R^d$, $v \in R^d$, где x — положение в пространстве, v — скорость. Функция $F_{s,t}(x,\ v)$ — функция со значениями в $R^d \times R^d$, определяемая равенством

$$F_{s,t}(x,\ v) = (x + (t-s)v;\ v).$$

Если τ_k — момент вмешательства случая, то в этот момент положения частицы в пространстве не меняется, а скорость становится равной η_k. Поэтому, обозначив положение частицы в фазовом пространстве в момент t через $\xi_{s,x,v}(t)$, $\xi_{s,x,v}(s) = (x;\ v)$, будем иметь

$$\xi_{s,x,v}(t) = (x + (t-s)v;\ v),\quad s \leqslant t < \tau_1,$$

$$\xi_{s,x,v}(t) = \left(x + (\tau_1 - s)v + \sum_{i=1}^{k-1} (\tau_{i+1} - \tau_i)\eta_i + (t - \tau_k)\eta_k;\ \eta_k \right),$$

$$\tau_k \leqslant t < \tau_{k+1}.$$

1.2. Стохастически определенные системы. Вероятности перехода. Пусть у нас имеется динамическая система с дискретным вмешательством случая. Будем предполагать, что невозмущенная динамическая система $F_{s,t}(x)$ определена при $0 \leqslant s < t$, величины $\{\tau_k,\ k = 1,\ 2, \ldots\}$ удовлетворяют условию: τ_1, $\tau_2 - \tau_1, \ldots, \tau_{k+1} - \tau_k$ независимы, одинаково распределены и $\mathsf{P}\{\tau_1 > t\} = e^{-\alpha t}$, (т. е. τ_1, $\tau_{k+1} - \tau_k$ имеет показательное распределение с параметром α), распределение ξ_k при заданных $\tau_1,\dots, \tau_k$ и $\xi_1,\dots,\xi_k$ зависит лишь от τ_k и $F_{\tau_{k-1},\tau_k}(\xi_{k-1})$. Наиболее просто удовлетворить условие на ξ_k следующим образом. Пусть $\eta_1, \eta_2, \dots$ — последовательность независимых величин, принимающих значения в R и не зависящих от $\{\tau_i\}$. Определим некоторую функцию $g(s, u, x)$ из $R_+ \times R\times R^d$ в R^d измеримую по совокупности переменных. Тогда $\xi_k = g(\tau_k, \eta_k, F_{\tau_{k-1},\tau_k}(\xi_{k-1}))$. Таким образом, условное распределение состояния после воздействия в момент τ_k, если $\tau_k=s$ и положение перед водействием было y, совпадает с $g(s, \eta_k, y)$. Рассмотрим процесс с независимыми приращениями

$$\eta(t)=\sum_k I_{\{\tau_k\leqslant t\}}\eta_k.$$

(Это *обобщенный процесс Пуассона.*) Будем строить процесс $\xi_{s,x}(t)$ следующим образом. Пусть τ_{ν_s} — первый из моментов τ_k, удовлетворяющий неравенству $\tau_k > s$. Тогда $\xi_{s,x}(t)=F_{s,t}(x)$ при $t\in[s, \tau_{\nu_s}[$, $\xi_{s,x}(\tau_{\nu_s})=g(\tau_{\nu_s}, \eta_{\nu_s}, F_{s,\tau_{\nu_s}}(x))$, для $k\geqslant \nu_s$ полагаем последовательно

$$\xi_{s,x}(\tau_{k+1})=g(\tau_{k+1}, \eta_{k+1}, F_{\tau_k,\tau_{k+1}}(\xi_{s,x}(\tau_k))),$$

$$\xi_{s,x}(t)=F_{\tau_k,t}(\xi_{s,x}(\tau_k)), \quad t\in[\tau_k, \tau_{k+1}[.$$

Легко видеть, что так построенная функция удовлетворяет следующим условиям:

1) при $s<t<u$ $\xi_{s,x}(u)=\xi_{t,\xi_{s,x}(t)}(u)$,

2) $\xi_{s,x}(t)$ при $t\in[s, u]$ полностью определяется величинами $\{\eta(t)-\eta(s),\ t\in[s, u]\}$. Из свойства 2) вытекает, что случайные функции $\xi_{s_k,x}(u)$, $u\in[s_k, t_k]$ (аргументами функции являются x и u) независимы, если промежутки $[s_k, t_k]$ при различных k не имеют общих внутренних точек. Отсюда и из условия 1) вытекает, что условное распределение $\xi_{s,x}(t)$, если задано $\xi_{s,x}(u)$, $u\leqslant t_1$, $t_1<t$, совпадает с условным распределением $\xi_{t_1,\xi_{s,x}(t_1)}(t)$ при заданном $\xi_{s,x}(t_1)$, т. е. с распределением $\xi_{t_1,y}(t)$ при $y=\xi_{s,x}(t_1)$. Это свойство является наиболее важным для вычисления распределения процесса.

а) Определение стохастически определенных систем. Семейство случайных функций $\xi_{s,x}(t)$ со значениями в $(X, \mathscr{B})$, определенных при $s\in R^+$, $x\in X$, $t\in[s, \infty[$, является стохастически определенной системой, если выполнены следующие условия:

1) при фиксированных $s<t$ $\xi_{s,x}(t)$ измеримо по x, ω; $\xi_{s,x}(s)=x$;

2) условное распределение $\xi_{s,x}(t)$ при заданном $\xi_{s,x}(u)$, $u\leqslant t_1$, $t_1<t$, совпадает с распределением величины $\xi_{t_1,y}(t)$, если в это распределение вместо y подставить $\xi_{s,x}(t_1)$.

Пример. Пусть $X=R$, $\nu(t)$ — пуассоновский процесс. Определим $\xi_{s,x}(t)$ следующим образом. На интервалах постоянства $\nu(t)$ $\xi_{s,x}(t)$ удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d}{dt}\xi_{s,x}(t)=a\xi_{s,x}(t).$$

Если τ — момент разрыва $\nu(t)$, то $\xi_{s,x}(\tau+)-\xi_{s,x}(\tau-)=1$. Наконец, $\xi_{s,x}(s)=1$. Будем считать, что $\xi_{s,x}(t)$ непрерывно справа. Тогда если $\nu(u)$ имеет скачки на отрезке $[s, t]$ в точках τ_1, $\tau_2, \ldots, \tau_k$, то

$$\xi_{s,x}(t)=xe^{a(t-s)}+\sum_{i=1}^{k}e^{a(t-\tau_i)}.$$

Распределение величины $\zeta_{s,t}=\sum\limits_{i=1}^{k}e^{a(t-\tau_i)}$ зависит только от $t-s$. Если обозначить фуикцию распределения $\zeta_{s,t}$ через $\Phi_{t-s}(y)=$ $=\mathbf{P}\{\zeta_{s,t}<y\}$, то функция распределения $\xi_{s,x}(t)$ определяется формулой

$$G_{s,x}(t, y)=P\{\xi_{s,x}(t)<y\}=\Phi_{t-s}(y-xe^{a(t-s)}).$$

Условное распределение $\xi_{s,x}(t)$ при заданном $\xi_{s,x}(u)$, $u\leqslant t_1$, будет определяться равенством:

$$\mathbf{P}\{\xi_{s,x}(t)<y/\xi_{s,x}(u),\ u\leqslant t_1\}=G_{t_1,\xi_{s,x}(t_1)}(t, y)=$$
$$=\Phi_{t-t_1}(y-\xi_{s,x}(t_1)e^{a(t-t_1)}).$$

(То, что в примере мы имеем дело со стохастически определенной системой, вытекает из построения.)

б) Вероятность перехода. Обозначим

$$P(s, x, t, A)=\mathbf{P}\{\xi_{s,x}(t)\in A\},\ A\in\mathscr{B},\ x\in X,\ 0\leqslant s\leqslant t.$$

Функция $P(s, x, t, A)$ называется *вероятностью перехода* стохастически определенной системы. Она удовлетворяет следующим условиям:

А) $P(s, x, t, A)$ является вероятностной мерой по A на $\mathscr{B}$.

Б) Функция $P(s, x, t, A)$ при любых $s\leqslant t$ и $A\in\mathscr{B}$ является $\mathscr{B}$-измеримой по x. Это свойство вытекает из свойства 1) стохастически определенной системы.

Заметим, что из условия 2) вытекает, что при $s<t_1<t$

$$\mathbf{P}\{\xi_{s,x}(t)\in A/\xi_{s,x}(u),\ u\leqslant t_1\}=P(t_1, y, t, A)|_{y=\xi_{s,x}(t_1)}=$$
$$=P(t_1, \xi_{s,x}(t_1), t, A). \tag{3}$$

Беря математическое ожидание от обеих сторон этого равенства, получаем такое уравнение для вероятности перехода:

В) При $s<t_1<t$ справедливо соотношение

$$P(s, x, t, A)=\int P(s, x, t_1, dy)\,P(t_1, y, t, A),\quad x\in X,\quad A\in\mathscr{B}. \tag{4}$$

Соотношение (4) называется *уравнением Колмогорова—Чепмена* для вероятности перехода. Используя соотношение (3), можем выразить через вероятность перехода конечномерные распределения процесса $\xi_{s,x}(t)$ (при фиксированных s, x). Так при $s<t_1<t_2$, $A_1, A_2\in\mathscr{B}$

$$\mathbf{P}\{\xi_{s,x}(t_1)\in A_1,\ \xi_{s,x}(t_2)\in A_2\}=\mathbf{M}I_{A_1}(\xi_{s,x}(t_1))\,I_{A_2}(\xi_{s,x}(t_2))=$$
$$=\mathbf{M}I_{A_1}(\xi_{s,x}(t_1))\mathbf{M}(I_{A_2}(\xi_{s,x}(t_2))/\xi_{s,x}(u),\ u\leqslant t_1)=$$
$$=\mathbf{M}I_{A_1}(\xi_{s,x}(t_1))P(t_1, \xi_{s,x}(t_1), t_2, A_2)=$$
$$=\int\limits_{A_1}\int\limits_{A_2}P(s, x, t_1, dy_1)\,P(t_1, y_1, t_2, dy_2).$$

Точно так для всех n при $s<t_1<\ldots<t_n$, $A_1, \ldots, A_n\in\mathscr{B}$

$$\mathbf{P}\{\xi_{s,x}(t_k)\in A_k,\ k=1, \ldots, n\}=$$
$$=\int\limits_{A_1}\ldots\int\limits_{A_n}P(s, x, t_1, dy_1)\ldots P(t_{n-1}, y_{n-1}, t_n, dy_n). \qquad (5)$$

Из определения условного математического ожидания вытекает, что (3) и (5) эквивалентны. Поэтому стохастически определенную систему можно определить как такую, для которой выполнено условие 1) и существует функция $P(s, x, t, A)$, для которой выполнены условия A)—B) и справедлива формула (5).

1.3. Процессы с конечным множеством состояний. Пусть X — конечное множество, $\mathscr{B}$ — σ-алгебра всех его подмножеств. Вероятность перехода $P(s, x, t, A)$ определяется своими значениями на одноточечных множествах. Положим $p(s, x, t, y)=P(s, x, t, \{y\})$ ($\{y\}$ — множество, состоящее из одной точки y). Тогда

$$P(s, x, t, A)=\sum_{y\in A}p(s, x, t, y).$$

Функция $p(s, x, t, y)$ удовлетворяет условиям

A$^{\text{I}}$) $p(s, x, t, y)\geqslant 0$ и $\sum\limits_{y}p(s, x, t, y)=1$,

B$^{\text{I}}$) при $s<t<u$

$$p(s, x, t, y)=\sum_{z}p(s, x, t, z)\,p(t, z, u, y). \qquad (6)$$

Отождествим X с множеством $\{1, \ldots, m\}$, где m — число элементов X. Пусть $\Pi(s, t)$ есть матрица с элементами $p(s, i, t, j)$, i — номер строки, j — столбца. Из (6) вытекает равенство: при $s<t<u$

$$\Pi(s, u)=\Pi(s, t)\,\Pi(t, u). \qquad (7)$$

Кроме того, из A$^{\text{I}}$) вытекает, что *матрица* $\Pi(s, t)$ является *стохастической*: ее элементы неотрицательны и суммы их по строкам равны 1. (7) можно рассматривать как уравнение для определения вероятности перехода. Мы рассмотрим некоторые случаи, когда это уравнение можно решить.

а) Однородный стохастически непрерывный процесс. Будем предполагать, что вероятность перехода зависит лишь от разности $t-s: P(s, x, t, A)=P(0, x, t-s, A)$. Тогда матрица $\Pi(s, t)$ также зависит от $t-s$. Обозначим $\Pi(s, t)=\Pi(t-s)$. Из (7) вытекает равенство

$$\Pi(s+t)=\Pi(s)\Pi(t). \tag{8}$$

Найдем решение уравнения (8) в предположении, что $\Pi(t)$ — непрерывная функция и $\Pi(t)\to I$ при $t\to 0$ (I — единичная матрица). Покажем сначала, что существует предел

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\Pi(h)-I)=A. \tag{9}$$

Действительно, пусть $s>0$. Тогда

$$\int_0^s \Pi(u+h)\,du-\int_0^s \Pi(u)\,du=(\Pi(h)-I)\int_0^s \Pi(u)\,du=$$

$$=\int_s^{s+h}\Pi(u)\,du-\int_0^h \Pi(u)\,du.$$

Так как $\left\|I-\frac{1}{s}\int_0^s \Pi(u)\,du\right\|\leqslant\frac{1}{s}\int_0^s\|\Pi(u)-I\|\,du$ можно выбором s сделать меньше 1, то матрица $\frac{1}{s}\int_0^s \Pi(u)\,du$ при таком выборе s будет обратима. Поэтому

$$\frac{1}{h}(\Pi(h)-I)=\left(\frac{1}{h}\int_s^{s+h}\Pi(u)\,du-\frac{1}{h}\int_0^h \Pi(u)\,du\right)\left(\int_0^s \Pi(u)\,du\right)^{-1}. \tag{10}$$

Очевидно правая часть (10) имеет предел, так что справедливо (9) и $A=(\Pi(s)-I)\left(\int_0^s \Pi(u)\,du\right)^{-1}$. Отсюда

$$\Pi(s)-I=A\int_0^s \Pi(u)\,du. \tag{11}$$

Из соотношнеия (11) вытекает, что при достаточно малых s

$$\Pi(s)=\exp\{sA\}. \tag{12}$$

С помощью формулы (8) можно продолжить равенство (12) на все $s>0$.

б) Неоднородные стохастически непрерывные процессы. Будем предполагать, что матрица вероятностей перехода удовлетворяет следующему условию непрерывности: для всех $a>0$

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{\substack{t-s\leqslant\delta\\ t\leqslant a}}\|\Pi(s, t)-I\|=0. \tag{13}$$

(норма матрицы в (13) определяется как норма соответствующего линейного оператора в R^m).

Имеем

$$1-p(s, i, t+h, i)=1-\sum_{k=1}^{m}p(s, i, t, k)\,p(t, k, t+h, i)=$$

$$=1-p(s, i, t, i)+1-p(t, i, t+h, i)-$$

$$-(1-p(s, i, t, i))(1-p(t, i, t+h, i)-$$

$$-\sum_{k\neq i}p(s, i, t, k)\,p(t, k, t+h, i).$$

Обозначим $\psi(s, t)=\sum_i(1-p(s, i, t, i))$. Тогда

$$\psi(t, t+h)(1-2\psi(s, t))\leqslant\psi(s, t+h)-\psi(s, t)\leqslant\psi(t, t+h),$$

так как

$$\sum_i\sum_{k\neq i}p(s, i, t, k)\,p(t, k, t+h, i)\leqslant\psi(s, t)\,\psi(t, t+h).$$

Если выбрать отрезок $[0, a]$ так, чтобы $\psi(s, t)<\frac{1}{2}$ при $s, t\in[0, a]$, то функция $\psi(0, t)$ возрастает при $t\in[0, a]$. Пусть $a_k\to\infty$, $k=0, 1, \ldots, a_0=0$, и $\psi(s, t)<\frac{1}{3}$ при $s, t\in[a_k, a_{k+2}]$, каково бы ни было k. Обозначим

$$\lambda(t)=\sum[\psi(a_k, a_{k+2})\,I_{\{a_{k+2}<t\}}+\psi(a_k, t)\,I_{\{a_k\leqslant t<a_{k+2}\}}]$$

Это возрастающая функция и при $a_k\leqslant s<t<t+h\leqslant a_{k+2}$ будет

$$\psi(s, t+h)-\psi(s, t)\leqslant\psi(t, t+h)\leqslant 3\psi(t, t+h)(1-2\psi(a_k, t))\leqslant$$

$$\leqslant 3(\psi(a_k, t+h)-\psi(a_k, t))\leqslant 3(\lambda(t+h)-\lambda(t)).$$

Так как $|p(s, i, t+h, j)-p(s, i, t, j)|\leqslant\psi(t, t+h)$, то вероятности перехода дифференцируемы по функции $\lambda(t)$ почти всюду по мере $d\lambda(t)$. Если

$$p'_\lambda(s, i, t, j)=\frac{d}{d\lambda(t)}\,p(s, i, t, j)=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{p(s, i, t+h, j)-p(s, i, t, j)}{\lambda(t+h)-\lambda(t)},$$

то

$$p'_\lambda(s, i, t, j)=\lim_{h\to 0}\sum_k p(s, i, t, k)\,\frac{p(t, k, t+h, i)-\delta_{ki}}{\lambda(t+h)-\lambda(t)}.$$

Обозначим через $\Pi'_\lambda(s, t)$ матрицу с элементами $p'_\lambda(s, t)$. Тогда

$$\Pi'_\lambda(s, t) = \lim_{h\to 0} \Pi(s, t) \frac{1}{\lambda(t+h)-\lambda(t)} (\Pi(t, t+h) - I).$$

Так как матрица $\Pi(s, t)$ при $s, t \in [a_k, a_{k+2}]$ обратима, то для почти всех t существует предел

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{\lambda(t+h)-\lambda(t)} (\Pi(t, t+h) - I) = A(t) = (\Pi(s, t))^{-1} \Pi'_\lambda(s, t)$$

и справедлива система уравнений

$$\frac{d}{d\lambda(t)} \Pi(s, t) = \Pi(s, t) A(t). \tag{14}$$

Матричная функция $A(t)$ ограниченна и измерима. Переписывая (14) в интегральной форме

$$\Pi(s, t) = I + \int_s^t \Pi(s, u) A(u) d\lambda(u) \tag{15}$$

можем записать решение (14), или, что эквивалентно, (15), в виде ряда

$$\Pi(s, t) = I + \sum_{n\geqslant 1} \int_{s<u_1<\ldots<u_n<t} A(u_1) A(u_2) \ldots A(u_n) d\lambda(u_1) \ldots$$
$$\ldots d\lambda(u_n). \tag{16}$$

Из (16) можно получить такое уравнение

$$\frac{d}{d\lambda(s)} \Pi(s, t) = -A(s) \Pi(s, t). \tag{17}$$

Уравнения (14) и (17) называются прямым и обратным уравнением Колмогорова (они обычно выводятся в предположении, что $\lambda(t) = t$).

1.4. Диффузионные процессы.

а) Вероятностная модель явления диффузии. Рассмотрим движение частицы в некоторой среде под влиянием взаимодействий молекул среды. Примером может служить движение частицы, взвешенной в жидкости. Предполагаем, что молекулы среды, находящиеся в тепловом хаотическом движении, воздействуют на частицу независимо в различные моменты времени. Поэтому так двигающуюся частицу можно рассматривать как стохастически определенную систему. Пусть $P(s, x, t, A)$ — вероятность перехода для этой системы (фазовым пространством естественно считать R^d, $\mathscr{B}$ — σ-алгебра борелевских множеств). Предположим, что выполнены условия:

I. Для всякого $\varepsilon > 0$

$$P(s, x, s+h, V_\varepsilon(x)) = o(h), \quad V_\varepsilon(x) = \{y : |y-x| > \varepsilon\},$$

II. $$\int_{|y-x|\leqslant\varepsilon} (y-x) P(s, x, s+h, dy) = a(s, x) h + o(h),$$

($a(s, x)$ — вектор в R^d с координатами $a_i(s, x)$).

III. $\int\limits_{|y-x|\leqslant\varepsilon} (y^i - x^i)(y^j - x^j) P(s, x, s+h, dy) = b_{ij}(s, x) h + o(h)$,

(x^i — координаты x),

где $a(s, x)$, $b_{ij}(s, x)$ — некоторые непрерывные функции. Условие I характеризует непрерывность движения: поскольку вероятность смещения за время h на величину больше ε есть $o(h)$, то вероятность, что произойдет хотя бы одно такое смещение за время t будет $\frac{t}{h}\, o(h) \to 0$ при $h \to 0$; $a(s, x)$ определяет среднюю скорость смещения частицы, находящейся в момент s в точке x; наконец, матрица $B(s, x)$ с элементами $b_{ij}(s, x)$ определяет средний квадрат смещения частицы по всем направлениям: квадрат смещения по направлению $z \in R^d$, $|z| = 1$ будет $\sum\limits_{i,j} b_{ij}(s, x) z^i z^j = (B(s, x) z, z)$.

б) Уравнение Колмогорова. Пусть функция $f(x)$ на R^d такова, что при $0 \leqslant s \leqslant t$ функция $u(s, x) = \int f(y) P(s, x, t, dy)$ является дважды непрерывно дифференцируемой по x с ограниченными производными. Тогда она дифефренцируема по s и удовлетворяет следующему *(обратному) уравнению Колмогорова*:

$$\frac{\partial u}{\partial s}(s, x) + \sum_{i=1}^{d} a_i(s, x) \frac{\partial u}{\partial x^i}(s, x) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} b_{ij}(s, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^i \partial x^j}(s, x) = 0, \quad u(t, x) = f(x). \qquad (18)$$

Действительно, пусть $g(x)$ ограничена, дважды непрерывно дифферндируема и имеет ограниченные производные. Тогда, используя формулу Тейлора, получим

$$\int P(s, x, s+h, dy) g(y) - g(x) =$$

$$= \int\limits_{|y-x|\leqslant\varepsilon} (g(y) - g(x)) P(s, x, s+h, dy) + o(h) =$$

$$= \sum_{i=1}^{d} \int\limits_{|y-x|\leqslant\varepsilon} \frac{\partial g}{\partial x^i}(x)(y^i - x^i) P(s, x, s+h, dy) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \int\limits_{|y-x|\leqslant\varepsilon} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j} + \alpha_\varepsilon\right)(y^i - x^i)(y^j - x^j) P(s, x, s+h, dy) +$$

$$+ o(h) = \left(\sum_{i=1}^{d} a_i(s, x) \frac{\partial g}{\partial x^i}(s, x) + \right.$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} b_{ij}(s, x)\frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j}(s, x)+\hat{\alpha}_\varepsilon\Bigg)h+o(h),$$

где $\alpha_\varepsilon \to 0$ и $\hat{\alpha}_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Так как

$$u(s, x)=\int P(s, x, s+h, dy)\, u(s+h, y),$$

то

$$u(s, x)-u(s+h, x)=hLu(s+h, x)+h\hat{\alpha}_\varepsilon+o(h),$$

$$Lu=\sum_{i=1}^{d} a_i(s, x)\frac{\partial}{\partial x^i}u+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} b_{ij}(s, x)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}u.$$

Отсюда и получается (18).

в) Хинчиновские граничные задачи для диффузии. Рассмотрим движение по прямой, в котором частица, находящаяся в точке x смещается за время Δt на случайную величину Δx, распредление которой зависит только от x (не зависит от того, как двигалась частица до попадания в точку x). Будем считать, что величина Δt фиксирована, и рассматривать положения частицы в моменты кратные Δt. Нас будет интересовать предельное поведение при $\Delta t \to 0$. Пусть $c<d$. Точки c и d играют роль границ, между которыми происходит диффузия.

Задача 1. Найти вероятность того, что частица, стартующая из точки $x \in (c, d)$ за время t, не выйдет за пределы отрезка (c, d).

Задача 2. Найти вероятность того, что частица, стартующая из точки $x \in (c, d)$ попадет в область $[d, +\infty)$ раньше, чем в $(-\infty, c]$.

При решении этих задач будем предполагать, что условное распределение смещения Δx при заданном x удовлетворяет условиям:

I¹. Для всякого $\varepsilon>0$

$$\mathbf{P}_x\{|\Delta x|>\varepsilon\}=o(\Delta t),$$

II¹.

$$\mathbf{M}_x \Delta x I_{\{|\Delta x|\leqslant\varepsilon\}}=a(x)\Delta t+o(\Delta t),$$

III¹.

$$\mathbf{M}_x(\Delta x)^2 I_{\{|\Delta x|\leqslant\varepsilon\}}=b(x)\Delta t+o(\Delta t),$$

где $a(x)$ и $b(x)$ — непрерывные на $[c, d]$ функции, $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{M}_x$ — условная вероятность и математическое ожидание, если начальная точка x.

Решение задачи 1. Пусть $Q(t, x)$ есть искомая вероятность. Тогда

$$Q(t, x)=\int_c^d \mathbf{P}_x\{\Delta x \in dy\}\, Q(t-\Delta t, y)$$

(справа записана вероятность того, что частица за время Δt сместится из x в некоторую точку $y \in (c, d)$, а затем за время $t-\Delta t$, стартуя из точки y, не выйдет из (c, d) Предполагая, что $Q(t, y)$ дважды непрерывно дифференцируема и используя I$^{\text{I}}$—III$^{\text{I}}$ аналогично выводу (18), убеждаемся, что при $x \in (c, d)$

$$Q(t, x) = Q(t-\Delta t, x) +$$
$$+ \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(-\Delta t, x) a(x) + \frac{b(x)}{2} \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}(t-\Delta t, x)\right] \Delta t + o(\Delta t).$$

Поэтому в пределе (при $\Delta t \to 0$) $Q(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = a(x) \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{1}{2} b(x) \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \tag{19}$$

$c < x < d,\ t > 0$.

К уравнению (19) естественно присоединить граничные условия: $Q(0, x) = 1,\ c < x < d,\ Q(t, c) = Q(t, d) = 0,\ t > 0$

Решение задачи 2. Пусть $V(x)$ — искомая вероятность. Тогда

$$V(x) = \int_c^d \mathbf{P}_x \{\Delta x \in dy\} V(y).$$

Опять, предполагая, что $V(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, получаем предельное уравнение (при $\Delta t \to 0$)

$$a(x) \frac{dV}{dx} + \frac{1}{2} b(x) \frac{d^2 V}{dx^2} = 0, \quad V(c) = 0, \quad V(d) = 1. \tag{20}$$

В силу (20), находим

$$V(x) = \Phi(x)/\Phi(d),$$
$$\Phi(x) = \int_c^x \exp\left\{-\int_c^z \frac{2a(u)}{b(u)} du\right\} dz.$$

§ 2. Марковское свойство

2.1. Определение марковского процесса. Понятие *марковского процесса* в наиболее общем и четком виде отражает основное свойство стохастически определенной системы: независимость дальнейшей эволюции системы от прошлого при фиксированном настоящем.

а) Определение. Пусть $(X, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, называемое фазовым пространством процесса, $(\Omega, \mathscr{F})$ — измеримое пространство элементарных событий (вероятность $\mathbf{P}$ пока не задается). Пусть для всех $t \in R_+$ определены σ-алгебры $\mathscr{F}_t$, удовлетворяющие условия: при $0 \leqslant s < t$ $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t \subset \mathscr{F}$. ($\mathscr{F}_t$ — σ-алгебра событий, которые наблюдаются до момента t включительно). Рассмотрим, далее, функцию $x(t, \omega)$ из $R_+ \times \Omega$

в X, обладающую следующим свойством измеримости: для каждого $t \in R_+$ $x(t, \omega)$ — измеримое отображение $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ в $(X, \mathcal{B})$. Функции $x(\cdot, \omega)$ (при фиксированном ω) называются выборочными функциями (траекториями) процесса. Через $x^s(t, \omega)$ будем обозначать ограничение функции $x(t, \omega)$ на $[s, \infty)$. Это траектории процесса, начинающегося в момент s. Пусть, наконец, на $(\Omega, \mathcal{F})$ задано семейство вероятностных мер $\{\mathbf{P}_{s,x},\ s \in R_+,\ x \in X\}$. (Эти меры отвечают процессу, начинающемуся в момент s из точки x). Совокупность $\{x(t, \omega),\ \mathcal{F}_t,\ \mathbf{P}_{t,x}\}$ определяет марковский процесс, если выполнены следующие условия:

1) для всех $t \in R_+$, $x \in X$

$$\mathbf{P}_{t,x}(\{\omega : x(t, \omega) = x\}) = 1;$$

2) для всех $B \in \mathcal{B}$, $t \in R_+$, $s > t$ функция $\mathbf{P}_{t,x}(\{\omega : x(s, \omega) \in B\})$ является $\mathcal{B}$-измеримой по x;

3) для всех $t \in R_+$, $t < s < u$, $B \in \mathcal{B}$ с вероятностью $\mathbf{P}_{t,x} = 1$

$$\mathbf{P}_{t,x}(\{\omega : x(u, \omega) \in B\} / \mathcal{F}_s) = \mathbf{P}_{s, x(s,\omega)}(\{\omega : x(u, \omega) \in B\}).$$

Легко видеть, что

$$P(t, x, s, B) = \mathbf{P}_{t,x}(\{\omega : x(s, \omega) \in B\}),\quad 0 \leqslant t \leqslant s,\ B \in \mathcal{B},$$

является вероятностью перехода (т. е. удовлетворяет условиям А)—В) § 1).

В дальнейшем марковский процесс будет обозначаться просто своими траекториями ($x(t, \omega)$, $x_t(\omega)$, $x(t)$, $\xi(t, \omega)$, $\xi_t(\omega)$, и т. д.). Знаки $\mathbf{P}_{t,x}$, $\mathbf{M}_{t,x}$ будут использоваться для обозначения вероятностей, входящих в определение марковского процесса, и математического ожидания по этой вероятности. Через $\mathcal{F}_t$ будут обозначаться σ-алгебры, входящие в определение процесса. Наиболее простой случай, когда σ-алгебры $\mathcal{F}_t$ порождены значениями $x(s, \omega)$ при $s \leqslant t$.

Покажем, как можно построить марковский процесс по вероятности перехода (в предположении, что для фазового пространства $(X, \mathcal{B})$ справедлива теорема Колмогорова о существовании процесса с заданными конечномерными распределениями). В качестве Ω возьмем множество всех функций на R_+ со значениями в X; $\mathcal{F}$ — σ-алгебра цилиндрических множеств в Ω, $\mathcal{F}_t$ — σ-алгебра цилиндрических множеств с основаниями в $[0, t]$; если $\omega = \omega(t)$, то $x(t, \omega) = \omega(t)$; наконец, для цилиндрического множества

$$C_{t_1, \ldots, t_n}(B_1, \ldots, B_n) = \{\omega : \omega(t_k) \in B_k,\ k = 1, \ldots, n\}, \tag{21}$$

где $0 \leqslant t_1 < \ldots < t_n$, полагаем

$$\mathbf{P}_{s,x}(C_{t_1, \ldots, t_n}(B_1, \ldots, B_n)) = \prod_{k=1}^{i-1} I_{B_k}(x) \times$$

$$\times \int_{B_i} \ldots \int_{B_n} P(s, x, t_i, dx_i) \ldots P(t_{n-i}, x_{n-1}, t_n, dx_n) \tag{22}$$

при $t_{i-1}<s\leqslant t_i$, при $s>t_n$ в этой формуле остается только произведение индикаторов. Формула (22) по теореме Колмогорова (см. [2]) определяет вероятность $\mathbf{P}_{s,x}$. Чтобы проверить условие 3) (очевидно 1) и 2) выполнены автоматически), достаточно убедиться, что для всякого цилиндрического множества $C\subset\mathcal{F}_s$ при $u>s$ справедливо равенство

$$\mathbf{P}_{t,x}(\{\omega : x(\cdot,\omega)\in C\}\cap\{\omega : x(u,\omega)\in B\}) = \\ =\mathbf{M}_{t,s}I_C P(s, x(s,\omega), u, B). \tag{23}$$

Предположим, что C имеет вид (21), при этом

$$0\leqslant t_1<\ldots<t_{i-1}<t\leqslant t_i<\ldots<t_n=s<u.$$

Тогда левая часть (23) имеет вид

$$\prod_{k=1}^{i-1} I_{B_k}(x)\cdot\int\limits_{B_i}\ldots\int\limits_{B_n} P(s, x, t_i, dx_i)\ldots P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n)\times \\ \times P(t_n, x_n, u, B).$$

Легко видеть, что правая часть (23) равна этому же выражению.

б) Условная независимость „прошлого" и „будущего" при фиксированном настоящем. Рассмотрим некоторое обобщение свойства 3). Будем обозначать через $\mathcal{X}_t^s$ $(s<t)$ σ-алгебру в Ω, порожденную величинами $x(u,\omega)$ при $u\in[s,t]$, $\mathcal{X}_t^0$ будем обозначать $\mathcal{X}_t$, $\mathcal{X}^s=\bigvee\limits_{t>s}\mathcal{X}_t^s$, а $\mathcal{X}_t^t=\hat{\mathcal{X}}_t$ — σ-алгебра, порожденная величиной $x(t,\omega)$, $\hat{\mathcal{X}}_{t_1,\ldots,t_k}=\bigvee\limits_{i=1}^{k}\hat{\mathcal{X}}_{t_i}$. Заметим, что справедливы равенства

$$\mathcal{X}_t^s=\bigvee_{t_1,\ldots,t_k\in[s,t]}\hat{\mathcal{X}}_{t_1,\ldots,t_k},\quad \mathcal{X}^s=\bigvee_{t_1,\ldots,t_k>s}\hat{\mathcal{X}}_{t_1,\ldots,t_k}. \tag{24}$$

Теорема 1. Для всех $G\in\mathcal{X}^u$ при $t<s<u$ справедливо с вероятностью $\mathbf{P}_{t,x}=1$ соотношение

$$\mathbf{P}_{t,x}(G/\mathcal{F}_s)=\mathbf{P}_{s,x(s,\omega)}(G). \tag{25}$$

Доказательство. Из (24) вытекает, что достаточно доказать (25), когда $G\in\hat{\mathcal{X}}_{t_1,\ldots,t_k}$, где $s\leqslant t_1<\ldots<t_k$. Имеем для $B_1,\ldots,B_k\in\mathcal{B}$

$$\mathbf{M}_{t,x}\left(\prod_{i=1}^{k} I_{B_i}(x(t_i,\omega))/\mathcal{F}_s\right)=$$

$$=\mathbf{M}_{t,x}\left(\prod_{i=1}^{k-1} I_{B_i}(x(t_i,\omega)\mathbf{M}_{t,x}(I_{B_k}(x(t_k,\omega)/\mathcal{F}_{t_{k-1}}/\mathcal{F}_s\right)=$$

$$=\mathbf{M}_{t,x}\left(\prod_{i=1}^{k-1} I_{B_i}(x(t_i,\omega))\,P(t_{k-1},\ x(t_{k-1},\omega),\ t_k,\ B_k/\mathcal{F}_s\right)=$$

$$=\mathbf{M}_{t,x}\left(\prod_{i=1}^{k-2} I_{B_i}(x(t_i,\omega))\times\right.$$

$$\left.\times\mathbf{M}_{t,x}(I_{B_{k-1}}(x(t_{k-1},\omega))\,P(t_{k-1},\ x(t_{k-1},\omega),\ t_k,\ B_k)/\mathcal{F}_{t_{k-2}})/\mathcal{F}_s\right)=\ldots$$

$$\ldots=\int\limits_{B_1}P(s,\ x,\ t_1,\ dy_1)\ldots\int\limits_{B_k}P(t_{k-1},\ y_{k-1},\ t_k,\ dy_k).$$

Значит, (25) справедливо для цилиндрических множеств из $\hat{\mathcal{X}}_{t_1,\ldots,t_k}$, а значит, и для всех $G\in\hat{\mathcal{X}}_{t_1,\ldots,t_k}$.

Следствие. Пусть $A\in\mathcal{F}_s$, $G\in\mathcal{X}^s$, тогда с вероятностью $\mathbf{P}_{t,x}=1$ при $t<s$

$$\mathbf{P}_{t,x}(A\cap G/\hat{\mathcal{X}}_s)=\mathbf{P}_{t,x}(A/\hat{\mathcal{X}}_s)\cdot\mathbf{P}_{t,x}(G/\hat{\mathcal{X}}_s). \tag{26}$$

Действительно, умножая равенство (25) на I_A и беря $\mathbf{M}_{t,x}(\cdot/\hat{\mathcal{X}}_s)$, найдем

$$\mathbf{M}_{t,x}(I_A P_{t,x}(G/\mathcal{F}_s)/\hat{\mathcal{X}}_s)=$$

$$=\mathbf{M}_{t,x}(I_G I_A/\hat{\mathcal{X}}_s)=\mathbf{M}_{t,x}(P_{s,x(s,w)}(G)\,I_A/\hat{\mathcal{X}}_s)=$$

$$=\mathbf{P}_{s,x(s,w)}(G)\,M_{t,x}(I_A/\mathcal{F}_s)=\mathbf{P}_{t,x}(A/\mathcal{F}_s)\mathbf{P}_{s,x(s,w)}(G).$$

Но из (25) вытекает, что $\mathbf{P}_{s,x(s,w)}(G)=\mathbf{P}_{t,x}(G/\hat{\mathcal{X}}_s)$. Соотношение (26) и есть утверждение об условной независимости $\mathcal{F}_s$ и $\mathcal{X}^s$ при заданном $x(s,\omega)$.

в) Мартингалы, связанные с марковским процессом. Замечательным свойством марковских процессов является существование достаточно широкого класса функций $u(t,x)$ из $R_+\times X$ в R, для которых $u(t,x(t,\omega))$ является мартингалом относительно меры $P_{s,x}$. Обозначим через $\mathbf{B}_X$ пространство ограниченных $\mathcal{B}$-измеримых числовых функций. Пусть $\tau>s$ и $f\in\mathbf{B}_X$. Положим

$$u_\tau(t,\ x)=\int f(y)\,P(t,\ x,\ \tau,\ dy.) \tag{27}$$

Тогда $u_\tau(t,x(t,\omega))$ является мартингалом на $[s,\tau]$ относительно потока $\mathcal{F}_t$ на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P}_{s,x})$, каково бы ни было $x\in X$. Действительно, пусть $s<v<t$,

$$\mathbf{M}_{s,x}(u_\tau(t,\ x(t,\ w))/\mathcal{F}_v)=\mathbf{M}_{s,x}(M_{t,x(t,w)}\,f(x(\tau,\ w))/\mathcal{F}_v)=$$

$$=\mathbf{M}_{s,x}(\mathbf{M}_{s,x}(f(x(\tau,\ w))/\mathcal{F}_t)/\mathcal{F}_v)=\mathbf{M}_{s,x}(f(x(\tau,\ w))/\mathcal{F}_v)=$$

$$=\mathbf{M}_{v,x(v,\omega)}\,f(x(\tau,\ \omega))=u_\tau(v,\ x(v,\ \omega)).$$

Если $v(t,x)$ такая функция, что при $t\in[s,\tau]$ $v(t,x)\in\mathbf{B}_X$ и $v(t,x(t,\omega)$ является мартингалом на $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathbf{P}_{s,x})$, то с вероятностью $\mathbf{P}_{s,x}=1$

$$v(t,\ x(t,\ \omega))=\mathbf{M}_{s,x}(v(\tau,\ x(\tau,\ \omega)/\mathcal{F}_t)=$$
$$=\mathbf{M}_{t,x(t,\omega)}\,v(\tau,\ x(\tau,\ \omega))=\int v(\tau,\ y)\,P(t,\ x(t,\ \omega),\ \tau,\ dy).$$

Значит, если $\hat{v}_\tau(t,\ x)=\int v(\tau,\ y)\,P(t,\ x,\ \tau,\ dy)$, то для всех t

$$\mathbf{P}_{s,x}(\{\omega:v(t,\ x(t,\ \omega))=\hat{v}_\tau(t,\ x(t,\ w))\})=1$$

Таким образом, формула (27) задает все функции (с точностью до стохастической эквивалентности), значения которых вдоль траектории процесса является мартингалами.

2.2. Марковская случайная функция.

а) Определение. Пусть $(X,\mathcal{B})$ — измеримое пространство, $T\subset R$. Случайный процесс $\xi(t)$, определенный на T, со значениями в X называется марковской случайной функцией, если существует такая функция $P(s,x,t,B)$, определенная при $s,t\in T$, $s\leqslant t$, $x\in X$, $B\in\mathcal{B}$, для которой выполнены условия: I. Она $\mathcal{B}$-измерима по x, II. Она вероятностная мера по B, III. При $s<t_1<t$, s, t_1, $t\in T$ выполнено уравнение Колмогорова—Чепмена (24), IV. Конечномерные распределения процесса $\xi(t)$ задаются формулой: при $t_1<\ldots<t_n$, $t_i\in T, i=1,\ldots,n$

$$\mathbf{P}\{\xi(t_i)\in B_i,\ i=1,\ldots,\ n\}=$$
$$\int\limits_{B_1}\ldots\int\limits_{B_r}\mathbf{P}\{\xi(t_1)\in dx_1)\prod_{k=1}^{n-1}P(t_k,\ x_k,\ t_{k+1},\ dx_{k+1})\tag{28}$$

Функция $P(s,x,t,B)$ называется вероятностью перехода марковской случайной функции. Простейшим примером марковской случайной функции является марковский процесс $x(t,\omega)$, рассматриваемый на множестве $T=[s,\infty)$ на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P}_{s,x})$, где x — фиксированная точка из X. Пусть μ — вероятностная мера на $\mathcal{B}$. Тогда для всех $s\in R_+$ можно определить вероятность на $\mathcal{F}$ по формуле

$$\mathbf{P}_{s,\mu}(C)=\int\mathbf{P}_{s,x}(C)\ \mu(dx).\tag{29}$$

Процесс $x(t,\omega)$ при $t\in[s,\infty)$ на вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},\mathbf{P}_{s,\mu})$, где меры $\mathbf{P}_{s,\mu}$ определены согласно (29), также является марковской случайной функцией с вероятностью перехода $P(u,x,t,B)$. Одной и той же вероятности перехода соответствуют различные марковские случайные функции (они различаются областью определения, конечномерными распределениями, вероятностными пространствами). Существенно тут различие конечномерных распределений.

б) Закон входа и конечномерные распределения. Рассмотрим, как можно задать всевозможные конечномерные распределения марковской случайной функции при заданной области определения T и вероятности перехода $P(s,x,t,A)$. Из формулы (28) вытекает, что для этого должно быть задано $\mathbf{P}\{\xi(t)\in B\}$ для всех $t\in T$ (одномерные распределения процесса). Обозначим $\mu_t(B)=\mathbf{P}\{\xi(t)\in B\}$. Очевидно, что семейство вероятностных мер $\{\mu_t(B),\ t\in T\}$ удовлетворяет соотношению: при $s<t,\ s,\ t\in T$

$$\mu_t(B)=\int P(s,\ x,\ t,\ B)\mu_s\ (dx). \tag{30}$$

Всякое семейство вероятностных мер $\{\mu_t(B), t\in T\}$ на $\mathscr{B}$, удовлетворяющее соотношению (30), называется *законом входа*, отвечающим вероятности перехода $P(s, x, t, B)$. Если понятно, о какой вероятности перхода идет речь, будем говорить просто закон входа. Для множеств T, имеющих минимальный элемент t_0, законы входа полностью определяются мерой μ_{t_0}

$$\mu_t(B)=\int P(t_0,\ x,\ t,\ B)\ \mu_{t_0}(dx),\ t\in T \tag{31}$$

(ср. (31) с (30)). Пусть теперь T не имеет наименьшего элемента. Положим $t_0=\inf T$ (если T неограниченно снизу, то $t_0=-\infty$). Выберем произвольно $\tau\in T$, $f(x)\in\mathbf{B}_X$ и пусть $u_\tau(t, x)$ при $t\in T\cap(-\infty,\tau]$ определяется равенством (27). Тогда $u_\tau(t,\xi(t))$ является мартингалом, здесь $\xi(t)$ — марковская случайная функция с вероятностью перехода $P(s, x, t, B)$. То, что $u_\tau(t,\xi(t))$ — мартингал, доказывается так, как и для марковского процесса. Так как $u_\tau(t,\xi(t))$ ограниченный мартингал, то с вероятностью 1 существует предел

$$\lim_{t\downarrow t_0} u_\tau(t,\ \xi(t)). \tag{32}$$

Пусть X — полное сепарабельное метрическое пространство, $\mathscr{B}$ — борелевская σ-алгебра. Можно указать такую последовательность непрерывных функций $f_n(x)$, $\|f_n(x)\|\leqslant 1$, что из существования пределов $\lim\limits_{m\to\infty}\int f_n(x)\mu_m(dx)$ для всех n, где μ_m — борелевские меры на X, вытекает слабая сходимость мер μ_m к некоторой мере μ. Выберем $T_0\subset T$ счетным и плотным в T. Поскольку предел (32) существует с вероятностью 1 для всех u_τ, представимых по формуле (27) при $f=f_n$, $n=1, 2, \ldots$, то можно указать такое $\Omega_0\subset\Omega$, $\Omega_0\subset\mathscr{F}$, что существует

$$\lim_{t\downarrow t_0, t\in T_0}\int P(t,\ \xi(t,\ \omega),\ \tau,\ dx)\, f_n(x) \tag{33}$$

для всех $\tau\in T_0$, $n=1, 2, \ldots, \omega\in\Omega_0$. Для $\mathbf{P}\in K_P$ будет $\mathbf{P}\{\Omega_0\}=1$, если K_P множество тех мер $\mathbf{P}$, для которых $\xi(t,\ \omega)$ — марковская случайная функция с вероятностью перехода $P(t, x, \tau, B)$.

Таким образом существует такая вероятностная мера $P(t_0,\ \omega,\ \tau,\ B)$, $\tau\in T_0$, $\omega\in\Omega_0$, что (33) представимо в виде $\int f_n(y)\, P(t_0,\ \omega,\ \tau,\ dy)$ при $\omega\in\Omega_0$. Обозначим через $\hat{\mathscr{F}}_0$ наименьшую σ — алгебру подмножеств Ω_0, относительно которой измеримы

$P(t_0, \omega, \tau, B)$, $\tau \in T_0$, $B \in \mathscr{B}$, как функции ω. Легко видеть, что при $\tau_1 < \tau_2$, $\tau_1, \tau_2 \in T_0$

$$P(t_0, \omega, \tau_2, B) = \int P(t_0, \omega, \tau_1, dx) P(\tau_1, x, \tau_2, B). \qquad (34)$$

Этой формулой можно воспользоваться для определения $P(t_0, \omega, \tau_2, B)$ для $\tau_2 \in T \setminus T_0$ (при этом τ_1 нужно выбрать из T_0, левая часть от выбора τ_1 не зависит в силу уравнения Колмогорова—Чепмена).

После этого легко убеждаемся, что (34) остается в силе для $\tau_1 < \tau_2$ из T. Если μ — ограничение меры $\mathbf{P}$ на $\{\Omega_0, \hat{\mathscr{F}}_0\}$, то формула

$$\mathbf{P}\{\xi(t) \in A\} = \int \mu(d\omega) P(t_0, \omega, t, A) \qquad (35)$$

определяет закон входа для марковской случайной функции с мерой $\mathbf{P}$. С другой стороны, беря произвольную вероятностную меру μ на $\{\Omega_0, \hat{\mathscr{F}}_0\}$ и определяя $\mathbf{P}\{\xi(t) \in A\}$ по формуле (35), а затем конечномерные распределения по формуле (28) мы получим все возможные меры $\mathbf{P} \in K_P$.

Обозначим $\mathscr{F}_{t_0} = \cap \mathscr{F}_t$. Как связаны σ—алгебры $\hat{\mathscr{F}}_0$ и $\mathscr{F}_{t_0}$? Очевидно $\hat{\mathscr{F}}_0 \subset \mathscr{F}_{t_0}$. Пусть ξ $\mathscr{F}_{t_0}$—измерима, $|\xi| \leqslant 1$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и $\tau > t_0$ найдутся такие n, $s_k < \tau$, $k = 1, \ldots, n$, $s_k \in T$ и борелевская функция f из X^n в R, $|f| \leqslant 1$, что

$$\mathbf{M}\,|\xi - f(\xi(s_1), \ldots, \xi(s_n))\,|^2 \leqslant \varepsilon.$$

Значит при $t < \min s_k$, $t \in T_0$

$$\mathbf{M}\,|\xi - \mathbf{M}(f(\xi(s_1), \ldots, \xi(s_n))/\mathscr{F}_t)\,|^2 \leqslant \varepsilon,$$

$\mathbf{M}(f(\xi(s_1), \ldots, \xi(s_n))/\mathscr{F}_t)$ есть мартингал $u_{\min s_k}(t)$ вида (27), а так как $\lim\limits_{t \downarrow t_0, t \in T} u_{\min s_k}(t)$ почти всюду совпадает с $\hat{\mathscr{F}}_0$ измеримой величиной, то и ξ совпадает с $\hat{\mathscr{F}}_0$—измеримой величиной. Значит $\mathscr{F}_{t_0}$ содержится в пополнении $\hat{\mathscr{F}}_0$ по мере $\mathbf{P}$, соответствующей марковской случайной функции. Заметим, что отличие от $\mathscr{F}_{t_0}$ σ-алгебра $\hat{\mathscr{F}}_0$ от $\mathbf{P}$ не зависит.

в) Пространство входов. Пространство выходов. Легко видеть аналогию между формулами (31) и (35). Поэтому измеримое пространство $(\Omega_0, \hat{\mathscr{F}}_0)$ естественно рассматривать как «пространство начальных значений» марковской случайной функции. Но это пространство существенно сложней, чем исходное фазовое пространство X процесса (его элементами являются функции $\omega(t)$ из T в X). Мы построим некоторое отображение этого измеримого пространства в некоторое другое $(Y, \mathscr{C})$, определяемое только фазовым пространством $(X, \mathscr{B})$. На $(Y, \mathscr{C})$ будет определена $\mathscr{C}$ — измеримая функция по y $\widetilde{P}(t_0, y, \tau, B)$ для $\tau \in T$, $B \in \mathscr{B}$, являющаяся мерой по B, такая что при $\tau_1 < \tau_2$,

$\tau_1, \tau_2 \in B$, $B \in \mathscr{B}$

$$\widetilde{P}(t_0, y, \tau_2, B) = \int \widetilde{P}(t_0, y, \tau_1, dx) P(\tau_1\ x, \tau_2, B) \qquad (36)$$

и всякая мера $\mathbf{P} \in K_P$ определяется законом входа $\mathbf{P}\{\xi(t) \in B\}$, однозначно представимым в виде

$$\mathbf{P}\{\xi(t) \in B\} = \int \widetilde{P}(t_0, y, t, B)\ \nu(dy), \qquad (37)$$

где ν — вероятностная мера на $(Y, \mathscr{C})$. При этом для всякой вероятностной меры ν на $(Y, \mathscr{C})$ формула (37) определяет закон входа для вероятности перехода $P(t, y, \tau, B)$. Пространство $(Y, \mathscr{C})$, удовлетворяющее перечисленным условиям будем называть пространством входов для марковской случайной функции.

Пусть $(M, \mathscr{M})$ — пространство вероятностных мер на $(X, \mathscr{B})$, σ — алгебра $\mathscr{M}$ — наименьшая σ — алгебра, относительно которой измеримы множества $\{\mu \in M : \mu(B) < \alpha\}$, $\alpha \in R_+$, $B \in \mathscr{B}$. Если X — полное сепарабельное метрическое пространство, $\mathscr{B}$ — борелевская σ-алгебра, то M можно рассматривать как сепарабельное метрическое пространство, при этом $\mathscr{M}$ будет его борелевской σ-алгеброй. В качестве метрики в M можно взять

$$r(\mu_1, \mu_2) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \left| \int f_k d\mu_1 - \int f_k d\mu_2 \right|,$$

где f_k — указанная выше последовательность функций.

Рассмотрим отображение $(\Omega_0, \mathscr{F}_0)$ в $(M, \mathscr{M})$, задаваемое функцией $P(t_0, \omega, \tau, \cdot)$ для $\tau \in T_0$. Область значений этого отображения обозначим $S_\tau \subset M$, покажем, что $S_\tau \in \mathscr{M}$. Занумеруем точки множества $T_0 \cap (-\infty, \tau) = \{t_i,\ i = 1, 2, \ldots\}$. Тогда отображение $P(t_0, \omega, \tau, \cdot)$ можно представить как суперпозицию отображений:

$$\Omega_0 \xrightarrow{\varphi_1} X^N \xrightarrow{\varphi_2} M^N \xrightarrow{\varphi_3} M,$$

где

$$\varphi_1(\omega) = \{\omega(t_1), \omega(t_2), \ldots\},$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, \ldots) = \{P(t_1, x_1, \tau, \cdot), P(t_2, x_2, \tau, \cdot), \ldots\},$$

$$\varphi_3(\mu_1, \mu_2, \ldots) = \begin{cases} \mu, \text{ если } \int f_k d\mu_i \to \int f_k d\mu \text{ при } t_i \to t_0\ \forall k \\ \text{не определено в остальных случаях.} \end{cases}$$

Утверждение вытекает из того, что φ_3 — борелевская функция и функция $P(t_1, x_1, \tau, \cdot)$ борелевская из X в M. Занумеруем точки $T_0 = \{\tau_1, \tau_2, \ldots\}$ и построим отображение

$$\Omega_0 \to (M^N, \mathscr{M}^N) : \omega \to (P(t_0, \omega, \tau_1, \cdot), \ldots),$$

его область значений S определяется соотношениями

$$S = \Big\{(\mu_1, \mu_2, \ldots) : \mu_i \in S_{\tau_i},\ i = 1, 2, \ldots,$$
$$\mu_k = \int P(\tau_i, x, \tau_k, \cdot)\, d\mu_i,\ \tau_i < \tau_k,\ i, k = 1, 2, \ldots\Big\}.$$

Очевидно S — борелевское подмножество M^N (т. е. принадлежит $\mathscr{M}^N$). Если $\mathscr{M}_S^N$ — ограничение $\mathscr{M}^N$ на S, то $(S, \mathscr{M}_S^N)$ — борелевское пространство.

Теорема 2. $(S, \mathscr{M}_S^N)$ есть пространство входов. Доказательство вытекает из построения.

Следствие. Если $(X, \mathscr{B})$ борелевское пространство, то существует такое же пространство входов.

Рассмотрим теперь пространство выходов. Как «входы» описывают различные возможности «начала» процесса, так «выходы» — возможности его окончания.

Пусть $t_\infty = \sup T$. Будем через $\mathscr{F}^s$ обозначать σ-алгебру, порожденную значениями $\xi(u)$, $u \in T \cap [s, \infty)$. События, входящие в σ-алгебру

$$\mathscr{F}^{t_\infty} = \bigcap_{s \in T} \mathscr{F}^s,$$

и определяют «выходы». Если $t_\infty \in T$, то окончание траектории есть просто $\xi(t_\infty)$. В случае $t_\infty \overline{\in} T$ мы построим аналогично пространству входов некоторое пространство выходов, которое и будет характеризовать окончательное поведение процесса.

Функция $g(t, x)$, определенная на $T \times X$, $\mathscr{B}$ — измеримая по x, называется гармонической для вероятности перехода $P(t, x, s, B)$, если для всех $t < s$, $t, s \in T$

$$g(t, x) = \int g(s, y) P(t, x, s, dy). \tag{38}$$

Будут рассматриваться только ограниченные гармонические функции. Если $g(t, x)$ такая функция, то $g(t, \xi(t))$ — мартингал относительно $(\mathscr{F}_t)_{t \in T}$ для всякой меры $\mathbf{P} \in K_P$. Поэтому для всякой ограниченной гармонической функции $g(t, x)$ существует с вероятностью 1 предел

$$g(t_\infty, \omega) = \lim_{t \to t_\infty} g(t, \xi(t)). \tag{39}$$

Оказывается, что пределы (39) порождают $\mathscr{F}^{t_\infty}$ с точностью до множеств меры $\mathbf{P}$ нуль. Пусть ξ ограничена, $\mathscr{F}^{t_\infty}$ — измерима и $|\xi| \leqslant 1$. Для данной меры $\mathbf{P}$ можно построить последовательность непрерывных функций $f_n : X^n \to [-1, 1]$ и $t_{n1} < t_{n2} < \ldots < t_{nn} < t_\infty$, $t_{ni} \in T$ таких, что

$$t_{n1} \to t_\infty, \quad \int |\xi - f_n(\omega(t_{n1}), \ldots, \omega(t_{nn}))|^2 d\mathbf{P} \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

Положим

$$\xi^*(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} f_n(\omega(t_{n1}), \ldots, \omega(t_{nn})), & \text{если предел существует,} \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда $\mathbf{P}\{\xi^*(\omega))=\xi\}=1$. Для $\tau\in T$ обозначим через $\mathbf{P}_{\tau,x}$ меру, отвечающую марковской функции $\xi(t)$ на $T\cap[\tau,\infty)$, для которой $\mathbf{P}_{\tau,x}\{\xi(\tau)=x\}=1$. Положим

$$g(\tau, x)=\int \xi^*(\omega)\,\mathbf{P}_{\tau,x}(d\omega).$$

Это будет гармоническая функция и

$$\mathbf{P}\{\xi=\lim_{\tau\to t_\infty} g(\tau, \xi(\tau))\}=1.$$

Таким образом σ-алгебра $\mathscr{F}^{t_\infty}$ с точностью до множеств меры нуль описывается гармоническими функциями.

Поскольку $L_2(\mathbf{P})$ сепарабельно, то из предыдущего построения вытекает существование такой счетной последовательности гармонических функций $g_k(t,x)$, $0\leqslant g_k(t,x)\leqslant 1$ таких, что σ-алгебра $\mathscr{F}^{t_\infty}$ с точностью до множеств меры $\mathbf{P}$ нуль определяется пределами

$$\lim_{t\to t_\infty} g_k(t, \xi(t)), \quad k=1, 2, \ldots.$$

Построим теперь пространство выходов $\mathscr{Y}_{\mathbf{P}}$, отвечающее мере $\mathbf{P}$. Выберем последовательность $s_k\to t_\infty$. Существует такое множество $\Omega_\infty\in\mathscr{F}$, для которого $\mathbf{P}(\Omega_\infty)=1$, для всех k существуют пределы $\lim\limits_{u\to\infty} g_k(s_n, \xi(s_n,\omega))$. Обозначим через $\mathscr{F}^\infty$ ограничение $\mathscr{F}$ на Ω_∞. Отображение Ω_∞ в $[0,1]^N$

$$i(\omega)\colon \omega\to(\lim_{n\to\infty} g_k(s_n, \omega(s_n)), \ k=1, 2, \ldots)$$

переводит Ω_∞ в борелевское подмножество $\mathscr{Y}_{\mathbf{P}}\subset[0,1]^N$, это подмножество с борелевской σ-алгеброй и будем называть пространством выходов $\mathscr{Y}_{\mathbf{P}}$.

Для $t\in T$ и борелевского множества $V\subset\mathscr{Y}$ определена вероятность перехода

$$\widetilde{P}(t, x, t_\infty, V)=\mathbf{P}_{t,x}\{(\lim_{n\to\infty} g_k(s_n, \xi(s_n, \omega))), \ k=1, \ldots)\in V\},$$

являющаяся вероятностной мерой по V. При этом для $t_1<t_2$, t_1, $t_2\in T$

$$\widetilde{P}(t_1, x, t_\infty, V)=\int P(t_1, x, t_2, dz)\,\widetilde{P}(t_2, z, t_\infty, V). \tag{40}$$

Определена и вероятность перехода $\widetilde{P}(t_0, y, t_\infty, V)$, причем для всех $t\in T$, $y\in S$

$$\widetilde{P}(t_0, y, t_\infty, V)=\int \widetilde{P}(t_0, y, t, dz)\,\widetilde{P}(t, z, t_\infty, V). \tag{41}$$

Заметим, что пространство выходов нужно при построении продолжений марковской случайной функции. Пространства входов и выходов были введены Е. Б. Дынкиным (Начальное и финальное поведение траекторий марковских процессов. Успехи матем. наук XXVI, 4 (1971), 153—172).

г) Марковская случайная функция в широком смысле. Пусть $T \subset R$, $\xi(t)$ — случайный процесс, определенный на T с фазовым пространством $(X, \mathscr{B})$. Для $t \in R$ через $\mathscr{F}_t$ обозначим σ-алгебру, порожденную величина $\{\xi(s),\ s \leqslant t\}$, через $\mathscr{F}^t$ — σ-алгебру, порожденную величинами $\{\xi(s),\ s \geqslant t\}$, через $\mathscr{F}^{[t]}$ — σ-алгебру, порожденную величиной $\xi(t)$, $t \in T$ (если множество величин пусто, то соответствующая σ-алгебра считается тривиальной). $\xi(t)$ называется марковской случайной функцией в широком смысле, если при $t_1, t_2 \in T$, $t_1 < t_2$ с вероятностью 1

$$\mathbf{P}\{\xi(t_2) \in B / \mathscr{F}_{t_1}\} = \mathbf{P}\{\xi(t_2) \in B / \mathscr{F}_{[t_1]}\}. \tag{42}$$

Из (42) получаем, что для $f \in \mathbf{B}_X$ с вероятностью 1

$$\mathbf{M}(f(\xi(t_2)/\mathscr{F}_{t_1}) = \mathbf{M}(f(\xi(t_2))/\mathscr{F}_{[t_1]}). \tag{43}$$

Поэтому для всех $t_1, \ldots, t_n \in T$; $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$; $f_2, \ldots, f_n \in \mathbf{B}_X$

$$\mathbf{M}\left(\prod_{k=2}^{n} f_k(\xi(t_k))/\mathscr{F}_{t_1}\right) = \mathbf{M}\left(\prod_{k=2}^{n} f_k(\xi(t_k))/\mathscr{F}_{[t_1]}\right) \tag{44}$$

с вероятностью 1 (это легко установить с помощью (43) по индукции). Из этого соотношения вытекает следующее свойство марковской в широком смысле функции

Теорема 3. Каково бы ни было $t \in T$, $A_1 \in \mathscr{F}_t$, $A_2 \in \mathscr{F}^t$, с вероятностью 1

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2/\mathscr{F}_{[t]}) = \mathbf{P}(A_1/\mathscr{F}_{[t]})\,\mathbf{P}(A_2/\mathscr{F}_{[t]}) \tag{45}$$

(т. е. σ-алгебры $\mathscr{F}_t$ и $\mathscr{F}^t$ условно независимы относительно σ-алгебры $\mathscr{F}_{[t]}$).

Доказательство. Достаточно установить формулу (45) для того случая, когда

$$A_2 = \bigcap_{j=1}^{m} \{\omega : \xi(s_j) \in B_j\}, \quad B_j \in \mathscr{B}, \quad t = s_1 < \ldots < s_m, \quad s_i \in T.$$

Из формулы (44) находим, что для $B \in \mathscr{B}$

$$\mathbf{MP}(A_1/\mathscr{F}_{[t]})\,\mathbf{P}(A_2/\mathscr{F}_{[t]})\,I_B(\xi(t)) = \mathbf{M}I_B(\xi(t))\,I_{A_1}M(I_{A_2}/\mathscr{F}_{[t]}) =$$
$$= \mathbf{M}I_B(\xi(t))\,I_{A_1}\mathbf{M}(I_{A_2}/\mathscr{F}_t) = \mathbf{M}I_B(\xi(t))\,I_{A_1}I_{A_2} =$$
$$= MI_B(\xi(t))\mathbf{P}(A_1 \cap A_2/\mathscr{F}_{[t]}).$$

Теорема доказана.

Замечание. Из (45) вытекает, что для всех $A_1 \in \mathscr{F}_t$, $A_2 \in \mathscr{F}^t$

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbf{M}I_{A_1}\mathbf{P}(A_2/\mathscr{F}_{[t]}),$$

т. е. с вероятностью 1 выполнено (42).

Таким образом, (45) эквивалентно (42). С другой стороны, (45) не зависит от направления времени.

Следствие 1. Если $\xi(t)$ — марковская случайная функция в широком смысле, то какой будет и функция $\xi^*(t) = \xi(-t)$, $t \in T^*$, где $t \in T^*$, если $-t \in T$.

Следствие 2. Каково бы ни было $A \in \mathcal{F}_t$ с вероятностью 1

$$\mathbf{P}(A/\mathcal{F}^t) = \mathbf{P}(A/\mathcal{F}_{[t]}).$$

д) Существование вероятности перехода. Рассмотрим марковскую случайную функцию в широком смысле $\xi(t)$, определенную на множестве T с фазовым пространством $(X, \mathscr{B})$. Если $(X, \mathscr{B})$ — борелевское пространство, тогда для всех $s<t$, $s, t \in T$ можно определить вероятностное ядро $P(s, x, t, B)$ такое, что с вероятностью 1

$$\mathbf{P}\{\xi(t) \in B/\mathcal{F}_{[t]}\} = P(s, \xi(s), t, B).$$

Эта функция измерима по x, является вероятностью по B, но не обязана удовлетворять уравнению Колмогорова—Чепмена. Конечно, функция $P(s, x, t, B)$ может быть выбрана неоднозначно. Цель этого пункта доказать, что в случае борелевского фазового пространства $(X, \mathscr{B})$ $P(s, x, t, B)$ можно выбрать так, чтобы выполнялось уравнение Колмогорова—Чепмена. Это результат С. Е. Кузнецова (Любой марковский процесс в борелевском пространстве имеет переходную функцию, Теория вероятн. и ее применен., 1980, 25, 2, 389—393). Другими словами, будет доказано, что существует вероятность перехода и для марковской случайной функции в широком смысле, тем самым будет установлено, что для борелевского фазового пространства определения марковской случайной функции в широком смысле и марковской случайной функции эквивалентны.

Будем предполагать, что $(X, \mathscr{B})$ совпадает с $\left([0, 1]^N, \mathscr{B}^N_{[0,1]}\right.$

Лемма 1. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — величины со значениями в $(X, \mathscr{B})$, образующие цепь Маркова:

$$\mathbf{P}\{\xi_3 \in B/\xi_1, \xi_2\} = \mathbf{P}\{\xi_3 \in B/\xi_2\}$$

с вероятностью 1. Если $Q_3(x, B)$ — марковское ядро, для которого

$$Q_3(\xi_1, B) = \mathbf{P}\{\xi_3 \in B/\xi_1\}, \quad B \in \mathscr{B}X$$

с вероятностью 1, то найдутся такие марковские ядра $Q_1(x, B)$ и $Q_2(x, B)$, что с вероятностью 1 $Q_1(\xi_1, B) = \mathbf{P}(\xi_2 \in B/\xi_1)$, $Q_2(\xi_2, B) = \mathbf{P}\{\xi_3 \in B/\xi_2\}$ и для всех $x \in X$, $B \in \mathscr{B}X$

$$Q_3(x, B) = \int Q_2(y, B)\, Q_1(x, dy). \tag{46}$$

Доказательство. Выберем в X подмножество вида $S = \mathop{\times}\limits_{k=1}^{\infty} \Delta_k$, где отрезок $\Delta_k \subset [0, 1]$, такое, что $\mathbf{P}\{\xi_2 \in S\} = 0$. Пусть $\widetilde{Q}_1$ и $\widetilde{Q}_2$ — марковские ядра, для которых с вероятностью 1

$$\widetilde{Q}_i(\xi_i, B) = \mathbf{P}\{\xi_{i+1} \in B/\xi_i\}, \quad i = 1, 2, \quad B \in \mathscr{B}X.$$

Положим

$$U=\left\{x:\tilde{Q}_1(x,S)=0,\ Q_3(x,B)=\int\tilde{Q}_1(x,dy)\tilde{Q}_2(y,B),\ B\in\mathscr{B}X\right\},$$

$g(x)$ — некоторое непрерывное взаимно однозначное отображение S на X. Так как $\mathscr{B}$ счетно порождена, то U — борелевское множество, $\mathbf{P}\{\xi_1\in U\}=1$. Положим

$$Q_1(x,B)=\begin{cases}\tilde{Q}_1(x,B), & x\in U,\\ I_{\{g^{-1}(x)\in B\}}, & x\bar{\in}U,\end{cases}\quad Q_2(x,B)=\begin{cases}\tilde{Q}_2(x,B), & x\bar{\in}S,\\ Q_3(g(x),B), & x\in S.\end{cases}$$

При таком выборе Q_1 и Q_2 выполнено (46). Лемма доказана.

Теорема 4. Пусть $\xi(t)$, $t\in R$, — марковская случайная функция в широком смысле с борелевским фазовым пространством $(X,\ \mathscr{B})$. Тогда для нее существует вероятность перехода.

Доказательство. Используя лемму 1 можем построить вероятность перехода $P(t,x,s,B)$ при $t,s\in T_0\subset R$, где T_0 счетно и плотно. Обозначим через Y_t — пространство входов марковской случайной функции $\{\xi(s,\omega),\ s\in T_0\cap(t,\infty)\}$, а через $\xi(t+,\omega)$ — соответствующее отображение Ω в Y_t. Выберем последовательность непрерывных функций $f_k(x)$ из $[0,1]^N$ в $[0,1]$, порождающих борелевскую σ-алгебру и для каждого $t\in T_0$ рассмотрим гармонические функции на $T_0\cap(-\infty,t)$

$$\tilde{g}_k^{\bar{s}}(s,x)=\int f_k(y)P(s,x,\bar{s},dy),\quad \bar{s}\in T_0\cap(t,\infty).$$

Это счетный набор гармонических функций, зависящий от t, занумеруем: $\{g_k{}^t(s,x),\ k=1,2,\ldots\}$. Построим пространство выходов $\mathcal{Y}_t$, — используя эти гармонические функции так, как это указывалось в п. в). Соответствующее отображение обозначим $\xi(t-,\omega)$.

Для всех $z\in\mathcal{Y}_t$, $\bar{s}\in T_0\cap(t,\infty)$ определена вероятность перехода $P(t-,z,\bar{s},B)$, такая что

$$P(t-,\xi(t-,\omega),\bar{s},B)=\tilde{\mathbf{P}}\{\xi(\bar{s},\omega))\in B/\xi(t-,\omega)\}$$

с вероятностью $\tilde{\mathbf{P}}=1$, какова бы ни была мера $\tilde{\mathbf{P}}\in K_P$. Эта мера определяется равенствами $\int f_k(y)P(s-,z,\bar{s},dy)=z_m$, где $z=(z_1,z_2,\ldots)$, $g_m^t=\tilde{g}_k^{\bar{s}}$. Обозначим через $Q_{t-,z}$, $t\in T$, $z\in\mathcal{Y}_t$ меру, отвечающую марковской случайной функции $\{\xi(s,\omega),\ s\in T_0\cap\cap(t,\infty)\}$ с законом входа

$$Q_{t-,z}\{\xi(s,\omega)\in B\}=P(t-,z,s,B).$$

Для $C\in Y_t$ положим

$$Q(t-,z,t+,C)=Q_{t-,z}\{\xi(t+,\omega)\in B\}.$$

Используя теорему 3 можно убедиться, что $\xi(t-,\omega)$, $\xi(t,\omega)$, $\xi(t+,\omega)$ образуют марковскую последовательность, при этом

$$Q(t-,\xi(t-,\omega),t+,C)=\tilde{\mathbf{P}}\{\xi(t+,\omega)\in C/\xi(t-,\omega)\}$$

с вероятностью 1 по любой мере $\tilde{\mathbf{P}}\in K_P$. Используя лемму 1 можно построить вероятности перехода $Q_t^-(z,B)$, $z\in\mathcal{J}_t$, $B\in\mathscr{B}$, $Q_t^+(x,C)$, $x\in X$, $C\in Y_t$, для которых

$$Q(t-,z,t+,C)=\int Q_t^-(z,dx)\,Q_t^+(x,C). \tag{47}$$

Будем сокращенно обозначать $P(s,\cdot,t,\cdot)=P_{s,t}$, $Q(t-,\cdot,t+,\cdot)=Q_{t-,t+}$, $Q_t^{\pm}(\cdot,\cdot)=Q_t^{\pm}$, а свертку вероятностных ядер P и Q через $P*Q$. Так (47) перепишется: $Q_{t-,t+}=Q_t^-*Q_t^+$. Определим теперь вероятность перехода равенствами

$$P_{s,t}=\begin{cases}P_{s,t-}*Q_t^-, & s\in T_0,\ t\bar{\in}T_0;\\ Q_s^+*P_{s+,t}, & s\bar{\in}T_0,\ t\in T_0;\\ Q_s^+*P_{s+,t-}*Q_t^-, & s\bar{\in}T_0,\ t\bar{\in}T_0.\end{cases} \tag{48}$$

Докажем выполнение уравнения Колмогорова — Чепмена. Пусть $s<t<u$. Равенство

$$P_{s,t}*P_{t,u}=P_{s,u} \tag{49}$$

справедливо при $t\in T_0$ в силу (40) и (41). Пусть s, $u\in T_0$, $t\bar{\in}T_0$. Тогда

$$\mathbf{P}_{s,x}\{\xi(t+)\in C\}=\int\mathbf{P}_{s,x}\{\xi(t-)\in dz\}\,Q(t-,z,t+,C),$$
$$\mathbf{P}_{s,x}\{\xi(u)\in B\}=\mathbf{M}_{s,x}P(t+,\xi(t+),u,B),$$
$$P_{s,u}=P_{s,t-}*Q_{t-,t+}*P_{t+,u}$$

и (49) есть следствие (47). Наконец, если $s<s_1<t<t_1<u$, s_1, $t_1\in T_0$, то

$$P_{s,t}*P_{t,u}=P_{s,s_1}*P_{s_1,t}*P_{t,t_1}*P_{t_1,u}=P_{s,s_1}*P_{s_1,t_1}*P_{t_1,u}=P_{s,u}.$$

Теорема доказана.

2.3. Марковские случайные функции на случайных интервалах. Марковская случайная функция $\xi(t)$ на случайном интервале (α,β) с фазовым пространством $(X,\mathscr{B})$ может быть определена следующим образом. Доопределим X двумя **точками** θ_- и θ_+, $\tilde{X}=X\cup\{\theta_-\}\cup\{\theta_+\}$, $\tilde{\mathscr{B}}$ — это σ-алгебра в $\tilde{X}$, порожденная $\mathscr{B}$ и одноточечными множествами $\{\theta_-\}$, $\{\theta_+\}$. Положим $\tilde{\xi}(t)=\theta_-$ при $t\leqslant\alpha$, $\tilde{\xi}(t)=\theta_+$ при $t\geqslant\beta$, $\tilde{\xi}(t)=\xi(t)$ при $\alpha<t<\beta$. Если $\tilde{\xi}(t)$ — марковская случайная функция на R с фазовым пространством $(\tilde{X},\tilde{\mathscr{B}})$, то $\xi(t)$ — марковская случайная функция на случайном интервал

(α, β). Будем предполагать, что $(X, \mathscr{B})$ — борелевское пространство, тогда таким будет и $(\tilde{X}, \tilde{\mathscr{B}})$, поэтому для $\tilde{\xi}(t)$ существует вероятность перехода $\tilde{P}(s, x, t, B)$, $B \in \tilde{\mathscr{B}}$.

Введем вероятность перехода для марковской случайной функции $\xi(t)$:

$$P(s, x, t, B) = \tilde{P}(s, x, t, B), \quad B \in \mathscr{B}.$$

Если еще ввести одномерные распределения

$$\mu_t(B) = \mathbf{P}\{\xi(t) \in B, \alpha < t < \beta\} = \mathbf{P}\{\tilde{\xi}(t) \in B\}, \quad B \in \mathscr{B},$$

то конечномерные распределения $\xi(t)$ запишутся по формуле: для $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$

$$\mathbf{P}\{\xi(t_1) \in B_1, \ldots, \xi(t_n) \in B_n, \alpha < t_1 < \ldots < t_n < \beta\} =$$
$$= \int_{B_1} \mu_{t_1}(dx_1) \int_{B_2} P(t_1, x_1, t_2, dx_2) \ldots \int_{B_n} P(t_{n-1}, x_{n-1}, t_n, dx_n).$$

В частности,

$$\mathbf{P}\{\alpha < t_1 < t_2 < \beta\} = \int_X \mu_{t_1}(dx)\, P(t_1, x, t_2, X)$$

определяет совместное распределение концов интервала (α, β).

Пусть σ-алгебра $\mathscr{F}_t$ порождена значениями $\tilde{\xi}(s)$, $s \leqslant t$. Тогда $(\{\beta \leqslant t\} = \{\tilde{\xi}(t) = \theta_+\} \in \mathscr{F}_t$, т. е. β — момент остановки относительно потока $\{\mathscr{F}_t\}$, $\{\alpha \geqslant t\} = \{\tilde{\xi}(t) = \theta_-\} \in \mathscr{F}_t$ и, значит, α — момент остановки относительно потока $\{\mathscr{F}_{t+}\}$.

Определим так, как при доказательстве теоремы 3 величины $\xi(t+)$, $t \in [\alpha, \beta[$ и пусть $P^+(t, x, s, B)$, определенная так же, как в теореме 3 вероятность перехода. Тогда можно установить следующее соотношение

$$\mu_t(B) = \int_{-\infty}^{t} \int_X \nu(dx, ds)\, P^+(s, x, t, B),$$

где $\nu(dx, ds)$ определяет совместное распределение $\xi(\alpha+)$ и α.

Глава 2

РЕГУЛЯРНЫЕ МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

§ 1. Условия непрерывности и отсутствия разрывов второго рода

1.1. Стохастически непрерывные процессы. Марковский процесс $x(t)$ в топологическом фазовом пространстве $(X, \mathscr{B})$ (в таком пространстве σ-алгебра $\mathscr{B}$ считается наименьшей σ-алгеброй подмножеств X, содержащей все открытые подмножества

X), называется стохастически непрерывным в момент времени t_0, если его вероятность перехода $P(t, x, s, A)$ удовлетворяет следующему условию: для всякого открытого $G \subset X$

$$\lim_{\substack{s \to t_0, t \to t_0, \\ s > t}} P(t, x, s, X \setminus G) = 0, \tag{1}$$

каково бы ни было $x \in G$. Если процесс $x(t)$ стохастически непрерывен в каждый из моментов времени t, то его называют просто стохастически непрерывным.

Если топология в X порождается метрикой, то это определение упрощается: процесс $x(t)$ в метрическом фазовом пространстве $(X, \mathscr{B})$ стохастически непрерывен в момент времени t_0, если для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\substack{t \to t_0, s \to t_0, \\ s > t}} P(t, x, s, V_\varepsilon(x)) = 0, \tag{2}$$

каково бы ни было $x \in X$. Здесь $V_\varepsilon(x)$ — дополнение к шару радиуса ε с центром в точке x, то есть $V_\varepsilon(x) = \{y \in X : \rho(y, x) > \varepsilon\}$ (ρ — метрика в X).

Марковская случайная функция $x(t)$ с вероятностью перехода, удовлетворяющей условию (2), стохастически непрерывна справа. В самом деле, если $\mu_t(dx)$ — закон входа рассматриваемой марковской случайной функции, то при $t \downarrow t_0$ имеем

$$\mathbf{P}(\{\rho(x(t), x(t_0)) > \varepsilon\}) = \int \mu_{t_0}(dx) P(t_0, x, t, V_\varepsilon(x)) \to 0$$

в силу (2) и теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

Пусть $x(t)$ — стохастически непрерывный марковский процесс в топологическом фазовом пространстве $(X, \mathscr{B})$. Если функция f с числовыми значениями задана на X, ограничена, измерима и непрерывна в точке $x \in X$, то

$$\lim_{s \uparrow t} \mathbf{M}_{s,x} f(x(t)) = \lim_{t \downarrow s} \mathbf{M}_{s,x} f(x(t)) = f(x).$$

Это следует из неравенств

$$|\mathbf{M}_{s,x} f(x(t)) - f(x)| \leqslant \int |f(y) - f(x)| P(s, x, t, dy) \leqslant$$

$$\leqslant \int_G |f(y) - f(x)| P(s, x, t, dy) + 2\|f\| \cdot P(s, x, t, X \setminus G),$$

где $\|f\| = \sup_{y \in X} |f(y)|$, G — некоторая окрестность точки x.

В силу непрерывности функции f в точке x окрестность G можно выбрать так, чтобы разность $|f(y) - f(x)|$ была достаточно малой при всех $y \in G$. Если теперь зафиксировать G, то второе слагаемое в правой части последнего неравенства становится сколь угодно малым, когда $t - s$ достаточно мало, в силу (1).

1.2. Условия отсутствия разрывов второго рода. Понятие стохастической непрерывности выделяет среди марковских процессов такие из них, для которых маловероятны переходы за малое время из данной точки в точки неблизкие. Оказывается, если потребовать, чтобы условие (2) выполнялось равномерно по $x \in X$ и по t, s в каждом конечном промежутке, то марковский процесс с такой вероятностью перехода можно заменить таким стохастически эквивалентным ему процессом, траектории которого устроены достаточно регулярным образом. При этом стохастически эквивалентными в широком смысле мы называем два марковских процесса, определенных при $t \geqslant 0$ в одном и том же фазовом пространстве, если у них совпадают вероятности перехода. В соответствии с общей теорией случайных процессов, две марковские случайные функции стохастически эквивалентны в широком смысле, если они определены на одном и том же временно́м множестве, в одном и том же фазовом пространстве и у них совпадают все конечномерные распределения. Последнее будет выполнено, если обе марковские случайные функции имеют одну и ту же вероятность перехода и один и тот же закон входа (либо начальное распределение в случае, когда временно́е множество имеет минимальный элемент).

Наряду с этим, рассматриваются и процессы, стохастически эквивалентные в более узком смысле. Два марковских процесса $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$, заданные при $t \geqslant 0$ на одном и том же вероятностном пространстве, с одним и тем же фазовым пространством $(X, \mathscr{B})$ с одним и тем же семейством мер $\mathbf{P}_{t,x}$, $t \geqslant 0$, $x \in X$, называются стохастически эквивалентными, если $\mathbf{P}_{t,s}(\{x(s) \neq \tilde{x}(s)\}) = 0$, каковы бы ни были $t < s$, $x \in X$. Аналогично, две марковские случайные функции $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$, заданные на одном и том же вероятностном пространстве, с одним и тем же фазовым пространством и временны́м множеством, называются стохастически эквивалентными, если при всех t $\mathbf{P}(\{x(t) \neq \tilde{x}(t)\}) = 0$. Ясно, что стохастическая эквивалентность влечет за собой стохастическую эквивалентность в широком смысле.

Замечание. Пусть при $t \geqslant 0$ в фазовом пространстве $(X, \mathscr{B})$ задан марковский процесс $x(t)$ и пусть на том же вероятностном пространстве определена случайная функция $\tilde{x}(t)$, $t \geqslant 0$, со значениями в X, такая, что $\mathbf{P}_{t,x}(\{x(s) \neq \tilde{x}(s)\}) = 0$ при всех $0 \leqslant t < s$, $x \in X$. Тогда процесс $\tilde{x}(t)$ является также марковским и он стохастически эквивалентен процессу $x(t)$.

Упомянутая выше регулярность траекторий будет заключаться в отсутствии разрывов второго рода почти наверное и непрерывности справа почти наверное. Эти понятия определяются так (фазовое пространство считаем топологическим):

а) говорят, что марковский процесс $x(t)$ почти наверное не имеет разрывов второго рода, если для всех $x \in X$ и $t \geqslant 0$ при почти всех ω по мере $\mathbf{P}_{t,x}$ функции $x(s, \omega)$ как функции аргумента s не имеют разрывов второго рода на $[t, \infty[$;

б) говорят, что марковский процесс $x(t)$ почти наверное непрерывен справа, если для всех $x \in X$ и $t \geqslant 0$ при почти всех ω по мере $\mathbf{P}_{t,x}$ функции $x(s, \omega)$ как функции аргумента s непрерывны справа на $[t, \infty[$.

Очевидным образом эти определения могут быть переформулированы для марковской случайной функции.

В приведенных ниже теоремах даны достаточные условия, при которых среди всех марковских процессов, стохастически эквивалентных (в широком смысле) данному, существует процесс, не имеющий почти наверное разрывов второго рода и непрерывный справа почти наверное.

Прежде чем сформулировать эти теоремы, введем некоторые понятия. Пусть E — произвольное подмножество R_+. Говорят, что заданная на E функция f со значениями в метрическом пространстве X имеет на E не менее k ε-колебаний (ε — произвольное положительное число), если в E найдутся точки $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ такие, что при $j = 1, 2, \ldots, k$ $\rho(f(t_{j-1}), f(t_j)) > \varepsilon$. Здесь ρ — метрика в X. Согласно этому определению, функция f имеет на E ровно k ε-колебаний, если она на этом множестве имеет не менее k и менее $k+1$ ε-колебаний.

Пусть функция f определена на $[0, T]$ и принимает значения в X. Элементарно доказывается следующий факт: функция f на $[0, T]$ не имеет разрывов второго рода тогда и только тогда, когда она при любом $\varepsilon > 0$ имеет на $[0, T]$ лишь конечное число ε-колебаний. Наконец, нам понадобится следующее утверждение. Пусть на некотором счетном всюду плотном множестве $S \subset [0, T]$ определена такая функция f со значениями в полном метрическом пространстве, что при любом $\varepsilon > 0$ она имеет на S лишь конечное число ε-колебаний. Тогда она продолжается до функции f, заданной на $[0, T]$ и не имеющей разрывов второго рода. Это продолжение можно осуществить, например, следующим образом. Для $t \in [0, T[\setminus S$ выбираем произвольную последовательность $t_n \in S$ так, чтобы $t_n \downarrow t$ при $n \to \infty$. Полагаем $f(t) = \lim\limits_{n \to \infty} f(t_n)$. Этот предел обязан существовать и не зависеть от выбора последовательности t_n, иначе нашлось бы $\varepsilon > 0$, для которого функция f имела бы на S бесконечно много ε-колебаний. Если $T \in S$, то нужная функция построена. Если же $T \notin S$, то полагаем $f(T) = \lim\limits_{n \to \infty} f(t_n)$, где $t_n \in S$ — такая произвольная последовательность, что $t_n \to T$, когда $n \to \infty$. Как и выше, этот предел существует и не зависит от выбора последовательности, сходящейся к T.

Пусть при $t \geqslant 0$ задан марковский процесс $x(t)$ в метрическом фазовом пространстве $(X, \mathscr{B})$ с вероятностью перехода

$P(t, x, s, A)$. Для фиксированных $\varepsilon > 0$, $T > 0$, $h > 0$ положим

$$\alpha_T^\varepsilon(h) = \sup P(t, x, s, V_\varepsilon(x)),$$

где точная верхняя грань берется по всем $x \in X$ и всем $t, s \in [0, T]$ таким, что $0 \leqslant t < s \leqslant t+h \leqslant T$. Пусть, далее, на $[0, T]$ задано конечное число точек $t_0 < t_1 < \ldots < t_n$. Совокупность этих точек обозначим через J. Пусть $\Delta_\varepsilon^{(k)}(J)$ обозначает событие, состоящее в том, что на множестве J траектории $x(t)$ имеют не менее k ε-колебаний,

Лемма 1. При всех $\varepsilon > 0$, $k = 1, 2, \ldots, x \in X$ справедлива оценка

$$\mathbf{P}_{t_0, x}\left(\Delta_\varepsilon^{(k)}(J)\right) \leqslant \left[2\alpha_T^{\varepsilon/4}(t_n - t_0)\right]^k.$$

Доказательство. Оценим сначала $\mathbf{P}_{t_0, x}\left(\Delta_\varepsilon^{(1)}(J)\right)$. Положим для $r = 1, 2, \ldots, n$

$$\Gamma_r = \Big\{\omega : \rho(x(t_k), x(t_0)) < \frac{\varepsilon}{2},\ k = 1, 2, \ldots, r-1,$$

$$\rho(x(t_r), x(t_0)) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\Big\},$$

$$\Lambda_r = \Big\{\omega : \rho(x(t_n), x(t_r)) \geqslant \frac{\varepsilon}{4}\Big\},$$

$$\Lambda_0 = \Big\{\omega : \rho(x(t_n), x(t_0)) \geqslant \frac{\varepsilon}{4}\Big\}.$$

События Γ_r при разных r несовместимы и ясно, что если происходит событие $\Delta_\varepsilon^{(1)}(J)$, то происходит некоторое Γ_r. Если при этом не происходит событие Λ_r с тем же номером (здесь $r > 0$), то тем самым наступает событие Λ_0. Поэтому

$$\Delta_\varepsilon^{(1)}(J) \subset \Lambda_0 \cup \left(\bigcup_{r=1}^{n}(\Gamma_r \cap \Lambda_r)\right),$$

откуда

$$\mathbf{P}_{t_0, x}\left(\Delta_\varepsilon^{(1)}(J)\right) \leqslant \mathbf{P}_{t_0, x}(\Lambda_0) + \sum_{r=1}^{n} \mathbf{P}_{t_0, x}(\Gamma_r \cap \Lambda_r).$$

Очевидно, почти наверное по мере $\mathbf{P}_{t_0, x}$

$$\mathbf{P}_{t_0, x}(\Lambda_r / \mathcal{F}_{t_r}) = \mathbf{P}_{t_0, x}\left(\Big\{\rho(\boldsymbol{x}(t_r), x(t_n)) \geqslant \frac{\varepsilon}{4}\Big\} \Big/ \mathcal{F}_{t_r}\right) =$$

$$= P\left(t_r, \boldsymbol{x}(t_r), t_n, V_{\frac{\varepsilon}{4}}(x(t_r))\right) \leqslant \alpha_T^{\varepsilon/4}(t_n - t_0),$$

и потому при $r = 1, 2, \ldots, n$ (I_Γ — индикатор события Γ)

$$\mathbf{P}_{t_0, x}(\Gamma_r \cap \Lambda_r) = \mathbf{M}_{t_0, x}\{I_{\Gamma_r} \mathbf{P}_{t_0, x}(\Lambda_r / \mathcal{F}_{t_r})\} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha_T^{\frac{\varepsilon}{4}}(t_n - t_0)\, \mathbf{P}_{t_0, x}(\Gamma_r).$$

Кроме того,

$$\mathbf{P}_{t_0,x}(\Lambda_0)=P\left(t_0,\ x,\ t_n, V_{\frac{\varepsilon}{4}}(x)\right)\leqslant\alpha_T^{\frac{\varepsilon}{4}}(t_n-t_0).$$

Значит,

$$\mathbf{P}_{t_0,x}(\Lambda_0)\leqslant\alpha_T^{\frac{\varepsilon}{4}}(t_n-t_0)+\alpha_T^{\frac{\varepsilon}{4}}(t_n-t_0)\sum_{r=1}^{n}\mathbf{P}_{\xi_0,x}(\Gamma_r)\leqslant 2\alpha_T^{\frac{\varepsilon}{4}}(t_n-t_0).$$

Теперь оценим $\mathbf{P}_{t_0,x}(\Delta_\varepsilon^{(k)}(J))$. Положим для $i=0, 1, \ldots, n$ $J_i=\{t_0, t_1, \ldots, t_i\}$, $J^i=\{t_i, t_{i+1}, \ldots, t_n\}$ и пусть для $k\geqslant 2$, $1\leqslant r\leqslant n$

$$\Gamma_\varepsilon^r=\Delta_\varepsilon^{(k-1)}(J_r)\cap\left[\Omega\diagdown\Delta_\varepsilon^{(k-1)}(J_{r-1})\right].$$

Другими словами, событие Γ_ε^r состоит в том, что на множестве J_r траектории $x(t)$ имеют не менее $k-1$, а на множестве J_{r-1} — менее $k-1$ ε-колебаний. Ясно, что события Γ_ε^r при разных r несовместимы, и

$$\bigcup_{r=1}^{n}\Gamma_\varepsilon^r=\Delta_\varepsilon^{(k-1)}(J)\supset\Delta_\varepsilon^{(k)}(J).$$

Следовательно,

$$\Delta_\varepsilon^{(k)}\subset\bigcup_{r=1}^{n}\left(\Gamma_\varepsilon^r\cap\Delta_\varepsilon^{(1)}(J^r)\right).$$

Поэтому согласно уже полученной оценке,

$$\mathbf{P}_{t_0,x}\left(\Delta_\varepsilon^{(k)}(J)\right)\leqslant\sum_{r=1}^{n}\mathbf{P}_{t_0,x}\left(\Gamma_\varepsilon^r\cap\Delta_\varepsilon^{(1)}(J^r)\right)=$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon^r}\mathbf{P}_{t_0,x}\left(\Delta_\varepsilon^{(1)}(J^r)/\mathcal{F}_{t_r}\right)d\mathbf{P}_{t_0,x}=$$

$$=\sum_{r=1}^{n}\int\limits_{\Gamma_\varepsilon^r}\mathbf{P}_{t_r,x(t_r)}\left(\Delta_\varepsilon^{(1)}(J^r)\right)d\mathbf{P}_{t_0,x}\leqslant$$

$$\leqslant 2\alpha_T^{\frac{\varepsilon}{4}}(t_n-t_0)\sum_{r=1}^{n}\mathbf{P}_{t_0,x}\left(\Gamma_\varepsilon^r\right)=2\alpha_T^{\frac{\varepsilon}{4}}(t_n-t_0)\,\mathbf{P}_{t_0,x}\left(\bigcup_{r=1}^{n}\Gamma_\varepsilon^r\right).$$

Таким образом,

$$\mathbf{P}_{t_0,x}\left(\Delta_\varepsilon^{(k)}(J)\right)\leqslant 2\alpha_T^{\frac{\varepsilon}{4}}(t_n-t_0)\,\mathbf{P}_{t_0,x}\left(\Delta_\varepsilon^{(k-1)}(J)\right),$$

откуда и следует утверждение леммы.

Теорема 1. Предположим, что на $[0, \infty[$ задан марковский процесс $x(t)$ в полном метрическом фазовом пространстве

$(X, \mathscr{B})$, и пусть при каждых $\varepsilon > 0$, $T > 0$ функция $\alpha_T^\varepsilon(h)$, построенная по вероятности перехода процесса $x(t)$, обладает свойством

$$\lim_{h \downarrow 0} \alpha_T^\varepsilon(h) = 0.$$

Тогда существует марковский процесс $x(t)$, стохастически эквивалентный процессу $x(t)$, не имеющий почти наверное разрывов второго рода и почти наверное непрерывный справа.

Доказательство. Пусть J — произвольное счетное всюду плотное подмножество R_+ и пусть $(J_n)_{n \geq 1}$ — такая монотонно возрастающая последовательность конечных подмножеств J, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} J_n = J$. Фиксируем некоторые $t_0 \geq 0$, $x \in X$, $T > t_0$, $\varepsilon > 0$. Разобьем отрезок $[t_0, T]$ точками $t_0 = T_0 < T_1 < \ldots < T_N = T$ так, чтобы $\max\limits_{1 \leq i \leq N} 2\alpha_T^{\frac{\varepsilon}{4}}(T_i - T_{i-1}) < 1$. Обозначим через $\Delta_\varepsilon^{(\infty)}(J \cap [T_{i-1}, T_i])$ событие, состоящее в том, что траектории процесса $x(t)$ имеют бесконечно много ε-колебаний на множестве $J \cap [T_{i-1}, T_i]$. Тогда, согласно лемме 1, будем иметь

$$\mathbf{P}_{t_0, x}\left(\Delta_\varepsilon^{(\infty)}(J \cap [T_{i-1}, T_i])\right) \leq \mathbf{P}_{t_0, x}\left(\Delta_\varepsilon^{(k)}(J \cap [T_{i-1}, T_i])\right) =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \mathbf{M}_{t_0, x} \mathbf{P}_{T_{i-1}, x(T_{i-1})}\left(\Delta_\varepsilon^{(k)}(J_n \cap [T_{i-1}, T_i])\right) \leq$$

$$\leq \left(2\alpha_T^{\frac{\varepsilon}{4}}(T_i - T_{i-1})\right)^k,$$

откуда следует, что при данном $\varepsilon > 0$ траектории процесса $x(t)$ имеют на множестве $J \cap [T_{i-1}, T_i]$ лишь конечное число ε-колебаний почти наверное по мере $\mathbf{P}_{t_0, x}$. Значит, почти наверное по этой мере их будет конечное число и на всем множестве $J \cap [t_0, T]$.

Так как $\varepsilon > 0$ и $T > t_0$ в предыдущем рассуждении произвольны, то мы приходим к выводу: каковы бы ни были $t_0 \geq 0$ и $x \in X$, почти все ω по мере $\mathbf{P}_{t_0, x}$ таковы, что при любых $T > t_0$ и $\varepsilon > 0$ число ε-колебаний функции $x(\cdot, \omega)$ на множестве $[t_0, T] \cap J$ конечно.

Построим теперь новый процесс $x^*(t)$, полагая $x^*(t, \omega) = x(t, \omega)$ при $t \in J$, $\omega \in \Omega$, а для $t \notin J$

$$x^*(t, \omega) = \begin{cases} \lim\limits_{t_n \in J, t_n \downarrow t} x(t_n, \omega), & \text{если этот предел существует,} \\ x(t, \omega) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Покажем, что при любых $t_0 \leq t$, $x \in X$

$$\mathbf{P}_{t_0, x}(\{x(t) \neq x^*(t)\}) = 0. \tag{3}$$

Для $t \in J$ это очевидно. Пусть теперь $t \notin J$ и последовательность

$(t_n)_{n\geqslant 1}\subset J$ такова, что $t_n\downarrow t$. Тогда

$$\mathbf{P}_{t_0,x}(\{x(t)\neq x^*(t)\})=\lim_{m\to\infty}\mathbf{P}_{t_0,x}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\left\{\rho(x(t),\,x(t_k))>\frac{1}{m}\right\}\right)=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}_{t_0,x}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}\left\{\rho(x(t),\,x(t_k))>\frac{1}{m}\right\}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}_{t_0,x}\left(\left\{\rho(x(t),\,x(t_n))>\frac{1}{m}\right\}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\alpha_T^{\frac{1}{m}}(t_n-t)=0,$$

где T выбрано так, чтобы $t_n\in[t_0,T]$ при всех $n\geqslant 1$. Тем самым (3) доказано.

Из построения видно, что процесс $x^*(t)$ не имеет разрывов второго рода, а из (3) в силу замечания, сформулированного выше, заключаем, что процесс $x^*(t)$ является марковским, стохастически эквивалентным исходному процессу $x(t)$.

Определим теперь процесс $\tilde{x}(t)$, полагая $\tilde{x}(t,\,\omega)=x^*(t+,\,\omega)$ если для данных ω и t существует предел $\lim\limits_{s\downarrow t}x^*(s,\,\omega)=x^*(t+,\,\omega)$ В противном случае полагаем $\tilde{x}(t,\,\omega)=x^*(t,\,\omega)$. Очевидно, при всех $t_0\geqslant 0$, $x\in X$ почти все ω по мере $\mathbf{P}_{t_0,x}$ таковы, что функции $\tilde{x}(t,\,\omega)$ как функции t на множестве $[t_0,\,\infty[$ не имеют разрывов второго рода и непрерывны справа. Для произвольных $t_0\leqslant t$, $x\in X$ и последовательности $t_n\downarrow t$, подобно предыдущему, находим

$$\mathbf{P}_{t_0,x}(\{\tilde{x}(t)\neq x^*(t)\})=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}_{t_0,x}\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}\left\{\rho(x^*(t_k),\,x^*(t))>\frac{1}{m}\right\}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}_{t_0,x}\left(\left\{\rho(x^*(t_n),\,x^*(t))>\frac{1}{m}\right\}\right)=$$

$$=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}_{t_0x}\left(\left\{\rho(x(t_n),\,x(t))>\frac{1}{m}\right\}\right)=0,$$

а значит,

$$\mathbf{P}_{t_0,x}(\{\tilde{x}(t)\neq x(t)\})=0.$$

Поэтому $\tilde{x}(t)$ является марковским процессом, стохастически эквивалентным процессу $x(t)$. При этом процесс $\tilde{x}(t)$ почти наверное не имеет разрывов второго рода и почти наверное непрерывен справа. Теорема доказана.

Сформулируем теперь «локальный» вариант теоремы 1, введя предварительно необходимые понятия.

Пусть $x(t)$ — марковский процесс в фазовом пространстве $(X,\,\mathscr{B})$. Для $A\subset X$ полагаем $\tau_A(\omega)=\inf\{t\geqslant 0: x(t,\,\omega)\notin A\}$, если множество в фигурных скобках непусто; в противном случае полагаем $\tau_A(\omega)=+\infty$. Для последовательности $(A_n)_{n\geqslant 1}$ подмножеств X положим $\tau=\sup\limits_n \tau_{A_n}$. Момент времени τ (он может быть бесконечным) называется моментом первого выхода процесса $x(t)$ из системы подмножеств $(A_n)_{n\geqslant 1}$.

Пусть $\xi=\xi(\omega)$ — произвольная функция с неотрицательными (возможно, бесконечными) значениями. Говорят, что марковский процесс $x(t)$ в метрическом фазовом пространстве $(X, \mathscr{B})$ не имеет разрывов второго рода до момента времени ξ, если для всякого $\omega\in\Omega$ и всякого $s<\xi(\omega)$ существуют пределы $\lim\limits_{t\uparrow s} x(t,\omega)=x(s-,\omega)$ и $\lim\limits_{t\downarrow s} x(t,\omega)=x(s+,\omega)$.

Аналогично определяется понятие непрерывности справа до момента времени ξ: этим свойством обладает процесс $x(t)$, если для всякого $\omega\in\Omega$ и всякого $s<\xi(\omega)$ имеем $x(s,\omega)=$ $=x(s+,\omega)$.

Если $x(t)$ — марковский процесс в фазовом пространстве $(X, \mathscr{B})$ с вероятностью перехода $P(t,x,s,A)$, то для $\varepsilon>0$, $T<\infty$, $h>0$, $F\subset X$ определим величину

$$\alpha^{\varepsilon}_{T,F}(h)=\sup \mathbf{P}(t, x, s, \bar{V}_\varepsilon(x)),$$

где точная верхняя грань берется по $x\in F$, а также по t и s таким, что $0\leqslant t<s\leqslant t+h\leqslant T$. Введенная ранее величина $\alpha^{\varepsilon}_{T}(h)$ получится из этой, если положить $F=X$.

Теорема 1[1]. Пусть $x(t)$, $t\geqslant 0$ — марковский процесс в полном метрическом фазовом пространстве $(X, \mathscr{B})$ и пусть $(F_n)_{n\geqslant 1}$ — монотонно возрастающая последовательность замкнутых подмножеств X. Через τ обозначим момент первого выхода процесса $x(t)$ из системы подмножеств $(F_n)_{n\geqslant 1}$. Если при любых фиксированных $\varepsilon>0$, $T>0$ и $n=1, 2,\ldots$ $\lim\limits_{h\downarrow 0}\alpha^{\varepsilon}_{T,F_n}(h)=0$, то существует марковский процесс $\tilde{x}(t)$, стохастически эквивалентный процессу $x(t)$ и такой, что до момента времени τ он непрерывен справа и не имеет разрывов второго рода.

Доказательство этой теоремы лишь в деталях отличается от доказательства теоремы 1, и мы его не приводим. Заметим лишь, что если X — локально компактное пространство, представимое в виде $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$, где $(K_n)_{n\geqslant 1}$ — монотонно возрастающая последовательность компактов, то теорема 1[1] дает условие, при котором существует марковский процесс, не имеющий до момента выхода из всех компактов разрывов второго рода и непрерывный справа до этого момента. Это условие состоит в том, что $\lim\limits_{h\downarrow 0}\alpha^{\varepsilon}_{T,K}(h)=0$, каковы бы ни были $\varepsilon>0$, $T>0$ и компакт $K\subset X$.

Заметим также, что обе эти теоремы с очевидными изменениями могут быть сформулированы и для марковских случайных функций.

В заключение этого пункта приведем достаточное условие отсутствия разрывов второго рода у марковских процессов, основанное на других идеях.

Пусть задан марковский процесс $x(t)$ в фазовом пространстве $(X, \mathscr{B})$. Будем предполагать, что вероятность перехода $P(t, x, s, A)$ этого процесса при фиксированном $A \in \mathscr{B}$ измерима по совокупности переменных t, x, s $(0 \leqslant t < s, x \in X)$. Тогда для $\lambda > 0$ определен оператор R_λ, действующий на ограниченную измеримую функцию $f(s, x)$, $s \geqslant 0$, $s \in X$ по формуле

$$(R_\lambda f)(s, x) = \int_s^\infty e^{-\lambda (t-s)} dt \int P(s, x, t, dy) f(t, y).$$

Очевидно, результат действия — функция $R_\lambda f$ — снова ограниченная и измеримая функция аргументов $s \geqslant 0$, $x \in X$.

Лемма 2. Для всякой неотрицательной ограниченной измеримой по совокупности переменных функции $f(t, x)$, $t \geqslant 0$, $x \in X$ и любого $\lambda > 0$ функция $R_\lambda f$ обладает тем свойством, что процесс $e^{-\lambda t}(R_\lambda f)(t, x(t))$, $t \in [s, \infty[$, является супермартингалом относительно потока σ-алгебр $(\mathscr{X}_t^s)_{t \geqslant s}$ и меры $\mathbf{P}_{s,x}$ при любых $s \geqslant 0$, $x \in X$.

Доказательство. Пусть $0 \leqslant s < t < u$, $x \in X$, $\lambda > 0$. Используя марковское свойство процесса $x(t)$, находим (здесь равенства почти наверное относительно меры $\mathbf{P}_{s,x}$)

$$\mathbf{M}_{s,x}\{e^{-\lambda u}(R_\lambda f)(u, x(u))/\mathscr{X}_t^s\} = e^{-\lambda u}\mathbf{M}_{t,x(t)}(R_\lambda f)(u, x(u)) =$$

$$= e^{-\lambda u}\mathbf{M}_{t,x(t)} \int_u^\infty e^{-\lambda(\tau-u)} d\tau \int P(u, x(u), \tau, dy) f(\tau, y) =$$

$$= \int_u^\infty e^{-\lambda\tau} d\tau \int P(t, x(t), u, dz) \int P(u, z, \tau, dy) f(\tau, y) =$$

$$= \int_u^\infty e^{-\lambda\tau} d\tau \int P(t, x(t), \tau, dy) f(\tau, y) \leqslant$$

$$\leqslant \int_t^\infty e^{-\lambda\tau} d\tau \int P(t, x(t), \tau, dy) f(\tau, y) = e^{-\lambda t}(R_\lambda f)(t, x(t)),$$

что и требовалось.

В этой лемме, разумеется, вместо потока $(\mathscr{X}_t^s)_{t \geqslant s}$ можно поставить любой поток, относительно которого процесс $x(t)$ обладает марковским свойством.

Следующая лемма показывает, что при некоторых условиях преобразование λR_λ для больших λ в известном смысле близко к тождественному преобразованию.

Лемма 3. Предположим, что X — метрическое пространство, и пусть при любых $s \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$, $x \in X$

$$\lim_{t \downarrow s} P(s, x, t, V_\varepsilon(x)) = 0.$$

Тогда для любой ограниченной непрерывной функции f на X и любого $s \geqslant 0$ при всех $x \in X$

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda (R_\lambda f)(s, x) = f(x).$$

Доказательство. Имеем

$$|\lambda (R_\lambda f)(s, x) - f(x)| =$$

$$= \left| \lambda \int_s^\infty e^{-\lambda(t-s)} dt \int [f(y) - f(x)] P(s, x, t, dy) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{y \in U_\varepsilon(x)} |f(y) - f(x)| + 2 \| f \| \int_0^\infty e^{-t} P\left(s, x, s + \frac{t}{\lambda}, V_\varepsilon(x)\right) dt,$$

где $\| f \| = \sup_{x \in X} | f(x)|$, $U_\varepsilon(x) = \{y \in X : \rho(y, x) \leqslant \varepsilon\}$. В силу непрерывности функции f, первое слагаемое в правой части последнего неравенства сколь угодно мало, если только ε достаточно мало. Из предположения леммы следует, что при фиксированном $\varepsilon > 0$ второе слагаемое становится сколь угодно малым, когда λ достаточно большое. Лемма доказана.

Дальнейшие рассмотрения будут зависеть от того, является ли X компактом, или X — локально компактное пространство. Пусть сначала X — метрический компакт, $\mathscr{B}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств X. Через $\mathbf{C}(X)$ обозначим пространство всех вещественных непрерывных функций, заданных на X.

Теорема 2. Предположим, что марковский процесс $x(t)$ в метрическом компакте $(X, \mathscr{B})$ с вероятностью перехода $P(s, x, t, A)$ удовлетворяет условиям:

1) для любых $\varepsilon > 0$, $s \geqslant 0$, $x \in X$

$$\lim_{t \downarrow s} P(s, x, t, V_\varepsilon(x)) = 0;$$

2) для любой функции $f \in \mathbf{C}(X)$ функция

$$\int P(s, x, t, dy) f(y)$$

как функция аргументов s, x, t непрерывна по их совокупности.

Тогда существует марковский процесс $\tilde{x}(t)$, стохастически эквивалентный процессу $x(t)$ и такой, что он почти наверное не имеет разрывов второго рода и почти наверное непрерывен справа. Более того, если процесс $x(t)$ обладает марковским свойством относительно потока σ-алгебр $(\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$, то $\tilde{x}(t)$ обладает марковским свойством относительно потока $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geqslant 0}$.

Доказательство. Фиксируем некоторые $x\in X$, $t_0\geqslant 0$ и пусть J — множество всех неотрицательных рациональных чисел. Для всякого $\lambda>0$ и любой неотрицательной функции $f\in\mathbf{C}(X)$ процесс $e^{-\lambda t}(R_\lambda f)(t, x(t))$, $t\in[t_0, \infty[$, согласно лемме 2 является неотрицательным супермартингалом относительно потока σ-алгебр $(\mathcal{X}_t^{t_0})_{t\geqslant t_0}$ и меры $\mathbf{P}_{t_0,x}$. Рассматривая его значения лишь в точках $s\in J$ и используя известное неравенство Дуба для числа пересечений ограниченным супермартингалом произвольного интервала с рациональными концами, легко приходим к выводу: почти все ω по мере $\mathbf{P}_{t_0,x}$ таковы, что при любом $t\geqslant t_0$ существует предел $\lim\limits_{s\in J, s\downarrow t}(R_\lambda f)(s, x(s, \omega))$, а при любом $t>t_0$ — предел $\lim\limits_{s\in J, s\uparrow t}(R_\lambda f)(s, x(s, \omega))$. Этим же свойством обладает $(R_\lambda f)(s, x(s,\omega))$ и для любой функции $f\in\mathbf{C}(X)$, поскольку последняя может быть представлена в виде разности двух неотрицательных функций из $\mathbf{C}(X)$.

Пусть теперь $(f_n)_{n\geqslant 1}$ — последовательность функций из $\mathbf{C}(X)$, которая разделяет точки пространства X. Это означает, что для любых двух различных точек x_1, $x_2\in X$ найдется такой номер n_0, что $f_{n_0}(x_1)\neq f_{n_0}(x_2)$. Далее, пусть $(\lambda_m)_{m\geqslant 1}$ — возрастающая последовательность положительных чисел, стремящаяся к ∞. Согласно предыдущему, можно выделить такое множество $\tilde{\Omega}$ полной меры $\mathbf{P}_{t_0,x}$, что при $\omega\in\tilde{\Omega}$ существует предел $\lim\limits_{s\in J, s\downarrow t}(R_{\lambda_m}f_n)(s, x(s, \omega))$ при любом $t\geqslant t_0$ и предел $\lim\limits_{s\in J, s\uparrow t}(R_{\lambda_m}f_n)(s, x(s, \omega))$ при любом $t>t_0$, каковы бы ни были $m=1, 2, \ldots$, $n=1, 2, \ldots$. Если бы для некоторого $\omega\in\tilde{\Omega}$ функция $x(s, \omega)$ не имела бы какого-либо одностороннего предела (скажем, правого) при подходе к некоторой точке $s_0\geqslant t_0$, то нашлись бы такие две последовательности $(s_k')_{k\geqslant 1}\subset J$ и $(s_k'')_{k\geqslant 1}\subset J$, что

$$\lim_{s_k'\downarrow s_0} x(s, \omega)=y, \qquad \lim_{s_k''\downarrow s_0} x(s, \omega)=z$$

и при этом $y\neq z$ $(y, z\in X)$. Покажем, что это допущение приводит к противоречию. Выберем n_0 так, чтобы $f_{n_0}(y)\neq f_{n_0}(z)$, и положим $c=|f_{n_0}(y)-f_{n_0}(z)|$. Функция

$$u(s, x, t)=\int f_{n_0}(v)\,P(s, x, t, dv),$$

согласно предположению 2) теоремы, непрерывна по совокупности переменных s, x, t, а следовательно, непрерывна по совокупности переменных s, x функция

$$\lambda_m (R_{\lambda_m} f_{n_0})(s, x) = \int_0^\infty e^{-t} u\left(s, x, s + \frac{t}{\lambda_m}\right) dt,$$

причём, как нетрудно заметить, равномерно относительно $m = 1, 2, \ldots$. Но тогда для всякого $m = 1, 2, \ldots$ найдётся такой номер $k_0(m)$, что при всех $k \geqslant k_0(m)$ выполнены неравенства

$$|(R_{\lambda_m} f_{n_0})(s_k', x(s_k', \omega)) - (R_{\lambda_m} f_{n_0})(s_0, y)| < \frac{c}{8\lambda_m},$$

$$|(R_{\lambda_m} f_{n_0})(s_k'', x(s_k'', \omega)) - (R_{\lambda_m} f_{n_0})(s_0, z)| < \frac{c}{8\lambda_m}.$$

Далее, в силу леммы 3, существует такой номер m_0, что при $m > m_0$ имеют место неравенства

$$|\lambda_m (R_{\lambda_m} f_{n_0})(s_0, y) - f_{n_0}(y)| < \frac{c}{8},$$

$$|\lambda_m (R_{\lambda_m} f_{n_0})(s_0, z) - f_{n_0}(z)| < \frac{c}{8}.$$

Фиксируем теперь некоторое $m > m_0$. Тогда для всех $k > k_0(m)$

$$|\lambda_m (R_{\lambda_m} f_{n_0})(s_k'', x(s_k'', \omega)) - \lambda_m (R_{\lambda_m} f_{n_0})(s_k', x(s_k', \omega))| =$$
$$= |\lambda_m (R_{\lambda_m} f_{n_0})(s_k'', x(s_k'', \omega)) - \lambda_m (R_{\lambda_m} f_{n_0})(s_0, z) +$$
$$+ \lambda_m (R_{\lambda_m} f_{n_0})(s_0, y) - \lambda_m (R_{\lambda_m} f_{n_0})(s_k', x(s_k', \omega)) +$$
$$+ \lambda_m (R_{\lambda_m} f_{n_0})(s_0, z) - f_{n_0}(z) + f_{n_0}(y) -$$
$$- \lambda_m (R_{\lambda_m} f_{n_0})(s_0, y) + f_{n_0}(z) - f_{n_0}(y)| \geqslant$$
$$\geqslant |f_{n_0}(z) - f_{n_0}(y)| - \frac{c}{2} = \frac{c}{2}.$$

Но это противоречит тому, что функция $(R_{\lambda_m} f_{n_0})(s, x(s, \omega))$ для $\omega \in \tilde{\Omega}$ должна иметь предел справа при $s \downarrow s_0$, $s \in J$. Значит, почти все ω по мере $\mathbf{P}_{t_0, x}$ таковы, что при любом $t \geqslant t_0$ существует предел $\lim\limits_{s \in J, s \downarrow t} x(s, \omega)$, а при любом $t > t_0$ — предел $\lim\limits_{s \in J, s \uparrow t} x(s, \omega)$. Теперь для $t \geqslant 0$, $\omega \in \Omega$ положим $x^*(t, \omega) = \lim\limits_{s \in J, s \downarrow t} x(s, \omega)$, если ω и t таковы, что этот предел существует. В противном случае полагаем $x^*(t, \omega) = x(t, \omega)$. Тогда процесс $x^*(t)$ почти наверное по мере $\mathbf{P}_{t_0, x}$ не имеет разрывов второго рода. Как и при доказательстве теоремы 1, находим ($t_n \downarrow t$, $t_n \in J$)

$$\mathbf{P}_{t_0, x}(\{x(t) \neq x^*(t)\}) \leqslant \lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} \mathbf{P}_{t_0, x}\left(\left\{\rho(x(t), x(t_n)) > \frac{1}{m}\right\}\right) =$$
$$= \lim_{m \to \infty} \lim_{n \to \infty} \int P(t_0, x, t, dy) P\left(t, y, t_n, V_{\frac{1}{m}}(y)\right) = 0.$$

Значит, $x^*(t)$ — марковский процесс почти наверное без разрывов второго рода, стохастически эквивалентный процессу $x(t)$. Наконец, полагая $\tilde{x}(t, \omega) = x^*(t+, \omega) = \lim_{s \downarrow t} x^*(s, \omega)$ в случае, когда этот предел существует, и $\tilde{x}(t, \omega) = x^*(t, \omega)$ в противном случае, получим марковский процесс $\tilde{x}(t)$, стохастически эквивалентный процессу $x(t)$ и такой, что он почти наверное непрерывен справа и не имеет разрывов второго рода.

Покажем, что процесс $\tilde{x}(t)$ обладает марковским свойством относительно потока $(\mathscr{F}_{t+})_{t\geqslant 0}$, если только этим свойством относительно потока $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ обладает исходный процесс $x(t)$.

Действительно, пусть $f \in \mathbf{C}(X)$, $\Lambda \in \mathscr{F}_{t+}$, $0 \leqslant s < t < u$, $x \in X$. Для последовательностей $(t_n)_{n\geqslant 1} \subset J$, $(u_n)_{n\geqslant 1} \subset J$ таких, что $t_n \downarrow t$, $u_n \downarrow u$, будем иметь

$$\mathbf{M}_{s,x} I_\Lambda f(\tilde{x}(u)) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}_{s,x} I_\Lambda f(x(u_n)) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}_{s,x} I_\Lambda \int f(y) P(t_n, x(t_n), u_n, dy) =$$

$$= \mathbf{M}_{s,x} I_\Lambda \int f(y) P(t, \tilde{x}(t), u, dy)$$

в силу условия 2) теоремы. Значит,

$$\mathbf{P}_{s,x}(\{\tilde{x}(u) \in A\} / \mathscr{F}_{t+}) = P(t, \tilde{x}(t), u, A)$$

почти наверное относительно меры $\mathbf{P}_{s,x}$, каковы бы ни были $0 \leqslant s < t < u$, $x \in X$, $A \in \mathscr{B}$. Теорема доказана.

Допустим теперь, что X — локально компактное сепарабельное пространство (не сводящееся к компакту), $\mathscr{B}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств X. Через $\mathbf{C}_0(X)$ обозначаем пространство всех вещественных непрерывных функций на X, стремящихся к нулю, когда x выходит из всех компактов. Символически это будем записывать в виде $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Совокупность всех неотрицательных рациональных чисел обозначаем попрежнему J.

Теорема 2[1]. Пусть задан марковский процесс $x(t)$ в локально компактном сепарабельном метрическом пространстве $(X, \mathscr{B})$ с вероятностью перехода $P(s, x, t, A)$, удовлетворяющей условиям:

1) при всех $x \in X$, $s \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t \downarrow s} P(s, x, t, V_\varepsilon(x)) = 0;$$

2) при всех s, t $(0 \leqslant s < t)$ и $f \in \mathbf{C}_0(X)$ функция

$$\int f(y) P(s, x, t, dy),$$

как функция аргумента x является функцией класса $\mathbf{C}_0(X)$, а как функция аргументов s, x, t непрерывна по их совокупности;

3) для любого компакта $K \subset X$ и любого $t > 0$

$$\lim_{x \to \infty} \sup_{s \in J \bigcap [0,t]} P(s, x, t, K) = 0.$$

Тогда существует марковский процесс $\widetilde{x}(t)$, стохастически эквивалентный процессу $x(t)$ и такой, что он почти наверное не имеет разрывов второго рода и почти наверное непрерывен справа. Если процесс $x(t)$ обладает марковским свойством относительно потока σ-алгебр $(\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$, то $\widetilde{x}(t)$ обладает марковским свойством относительно потока $(\mathscr{F}_{t+})_{t \geqslant 0}$.

Доказательство. Из свойств пространства X следует существование такой возрастающей последовательности компактов $(K_n)_{n \geqslant 1}$, что $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_n$. Фиксируем некоторые $t_0 \geqslant 0$, $x \in X$, $t > t_0$ и покажем, что

$$\lim_{n \to \infty} \mathbf{P}_{t_0, x}\Big(\bigcup_{s \in J \bigcap [0,t]} \{x(s) \notin K_n\}\Big) = 0. \tag{4}$$

Иначе говоря, почти все ω по мере $\mathbf{P}_{t_0, x}$ таковы, что совокупность значений функции $x(s, \omega)$ на множестве $J \bigcap [0, t]$ содержится в некотором компакте.

Чтобы это доказать, рассмотрим значения функции $x(s, \omega)$ на конечном множестве точек $t_0 < t_1 < \ldots < t_k < t$. Для фиксированных n и r имеем

$$\mathbf{P}_{t_0, x}\Big(\bigcup_{j=1}^{k} \{x(t_j) \notin K_n\}\Big) \leqslant \mathbf{P}_{t_0, x}(\{x(t) \notin K_r\}) +$$
$$+ \mathbf{P}_{t_0, x}\Big(\Big[\bigcup_{j=1}^{k} \{x(t_j) \notin K_n\}\Big] \cap \{x(t) \in K_r\}\Big).$$

Для $A \in \mathscr{B}$ положи:

$$q_j(t_0, x, A) = \mathbf{P}_{t_0, x}(\{x(t_1) \in K_n, \ldots, x(t_{j-1}) \in K_n,\ x(t_j) \notin K_n, x(t_j) \in A\}).$$

Тогда, считая точки $t_1, \ldots, t_k$ рациональными, будем иметь

$$\mathbf{P}_{t_0, x}\Big(\Big[\bigcup_{j=1}^{k} \{x(t_j) \notin K_n\}\Big] \cap \{x(t) \in K_r\}\Big) =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \int\limits_{X \setminus K_n} q_j(t_0, x, dy)\, P(t_j, y, t, K_r) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{y \notin K_n} \sup_{s \in J \bigcap [0,t]} P(s, y, t, K_r).$$

Значит, для фиксированных n и r

$$\mathbf{P}_{t_0,x}\left(\bigcup_{j=1}^{k}\{x(t_j)\notin K_n\}\right)\leqslant P(t_0,\ x,\ t,\ X\setminus K_r)+$$
$$+\sup_{y\notin K_n}\ \sup_{s\in J\bigcap[0,t]} P(s,\ y,\ t,\ K_r).$$

Аппроксимируя теперь множество J возрастающей последовательностью конечных множеств, найдём

$$\mathbf{P}_{t_0,x}\left(\bigcup_{s\in J\bigcap[0,t]}\{x(s)\notin K_n\}\right)\leqslant P(t_0,\ x,\ t,\ X\setminus K_r)+$$
$$+\sup_{y\notin K_n}\ \sup_{s\in J\bigcap[0,t]} P(s,\ y,\ t,\ K_r).$$

Переходя здесь к пределу сначала при $n\to\infty$, а затем при $r\to\infty$, получим (4).

Допустив теперь, что функция $x(s,\ \omega)$ не имеет какого-либо одностороннего (скажем, правого) предела при подходе к некоторой точке s_0, в силу (4) придем к выводу о существовании таких убывающих к точке s_0 последовательностей $(s_k')_{k\geqslant 1}\subset J$ и $(s_k'')_{k\geqslant 1}\subset J$, что пределы $\lim\limits_{k\to\infty} x(s_k',\ \omega)$, $\lim\limits_{k\to\infty} x(s_k'',\ \omega)$ лежат в X и не совпадают. Дальнейшая аргументация в точности совпадает с той, которая была использована при доказательстве теоремы 2. Теорема доказана.

Замечание. Из условия 2) легко вывести, что

$$\lim_{x\to\infty} P(s,\ x,\ t,\ K)=0$$

для фиксированных $s,\ t\ (s<t)$ и компакта $K\subset X$. В условии 3) требуется, чтобы эта сходимость была равномерной относительно $s\in J\bigcap[0,\ t]$ при фиксированном $t>0$.

1.3. Непрерывные процессы. Марковский процесс $x(t)$ в топологическом пространстве $(X,\mathscr{B})$ называется непрерывным почти наверное, если для любых $t\geqslant 0$, $x\in X$ при почти всех ω относительно меры $\mathbf{P}_{t,x}$ функции $x(s,\omega)$ непрерывны как функции аргумента $s\in[t,\ \infty[$.

Из этого определения следует, что $\lim\limits_{s\downarrow t} P\ (t,\ x,\ s,\ X\setminus G=0$ для всякого открытого $G\subset X$ и любого $x\in G$.

Марковская случайная функция $x(t)$ в топологическом фазовом пространстве $(X,\mathscr{B})$ называется непрерывной почти наверное, если при почти всех ω функции $x(t,\omega)$ непрерывны как функции аргумента t. Для почти наверное непрерывной марковской случайной функции $x(t)$ в метрическом фазовом пространстве, очевидно, справедливо соотношение

$$\lim_{t\to t_0,\,s\to t_0} \mathbf{P}(\{\rho(x(t),\ x(s))>\varepsilon\})=0,$$

каковы бы ни были t_0 и $\varepsilon>0$.

Приведем условия на вероятность перехода, позволяющие утверждать, что среди всех стохастически эквивалентных марковских процессов с данной вероятностью перехода существует почти наверное непрерывный.

Теорема 3. Предположим, что при $t \geqslant 0$ задан марковский процесс $x(t)$ в полном метрическом пространстве $(X, \mathscr{B})$ и пусть его вероятность перехода $P(s, x, t, A)$ удовлетворяет условиям:

1) $$\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} P(s, x, s+h, V_\varepsilon(x))=0,$$

каковы бы ни были $s \geqslant 0$, $x \in X$, $\varepsilon > 0$;

2) при любых $\varepsilon > 0$, $T < \infty$ функция $\frac{1}{h} P(s, x, s+h, V_\varepsilon(x))$ аргументов $(s, x) \in [0, T] \times X$ ограничена равномерно относительно $h \in]0, h_0]$ $(h_0 > 0)$ и кроме того, $\lim\limits_{h \downarrow 0} \alpha_T^\varepsilon(h)=0$, где $\alpha_T^\varepsilon(h)$ — функция, построенная выше по вероятности перехода $P(s, x, t, A)$ (см. п. 1.2).

Тогда существует непрерывный почти наверное марковский процесс $\tilde{x}(t)$, стохастически эквивалентный процессу $x(t)$.

Доказательство. Процесс $x(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, и, стало быть, он стохастически эквивалентен процессу $\tilde{x}(t)$, почти наверное не имеющему разрывов второго рода и непрерывному справа. Фиксируем некоторые $s \geqslant 0$, $x \in X$, $\varepsilon > 0$ и $T > s$. Обозначим через ν_T^ε число таких $t \in [s, T]$, для которых $\rho(\tilde{x}(t), \tilde{x}(t-)) > 2\varepsilon$. Ясно, что $\mathbf{P}_{s,x}(\{\nu_T^\varepsilon < \infty\})=1$. Так как

$$\nu_T^\varepsilon < \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^T I_{\{\rho(x(t+h), x(t))>\varepsilon\}} dt,$$

то, согласно лемме Фату,

$$\mathbf{M}_{s,x} \nu_T^\varepsilon \leqslant \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \mathbf{M}_{s,x} \int_0^T I_{\{\rho(x(t+h), x(t))>\varepsilon\}} dt=$$

$$=\lim_{h \downarrow 0} \int P(s, x, t, dy) \frac{1}{h} \int_0^T P(t, y, t+h, V_\varepsilon(y)) dt,$$

откуда в силу условий 1) — 2) заключаем, что $\mathbf{M}_{s,x} \nu_T^\varepsilon=0$ при любых $\varepsilon > 0$, $0 \leqslant s < T$, $x \in X$. Значит, траектории процесса $\tilde{x}(t)$ почти наверное по мере $\mathbf{P}_{s,x}$ вообще не имеют разрывов. Теорема доказана.

Замечание 1. Условия теоремы 3 выполняются, если при любых $\varepsilon > 0$, $T < \infty$ $\lim\limits_{h \downarrow 0} h^{-1} \alpha_T^\varepsilon(h)=0$.

Замечание 2. Для $\delta>0$, $T<\infty$, $h>0$ положим

$$\beta_T^\delta(h)=\sup\int[\rho(x,\ y)]^\delta P(s,\ x,\ t,\ dy),$$

где точная верхняя грань берется по $x\in X$ и s, t таким, что $0\leqslant s<t\leqslant s+h\leqslant T$. Условия теоремы 3 будут, очевидно, выполнены, если при некотором $\delta>0$ и всех $T<\infty$

$$\lim_{h\downarrow 0} h^{-1}\beta_T^\delta(h)=0.$$

1.4. Винеровский процесс. Пусть $X=R^d$ — d-мерное евклидово пространство, $\mathscr{B}$ — σ-алгебра его борелевских подмножеств. Для $0\leqslant t<s$, x, $y\in R^d$ положим $g(t,\ x,\ s,\ y)=(2\pi\ (s-t))^{-\frac{d}{2}}\times\exp\{-|y-x|^2/2(s-t)\}$. Очевидно, функция $g(t,\ x,\ s,\ y)$ непрерывна по совокупности переменных в области $0\leqslant t<s<\infty$, x, $y\in R^d$ и справедливы равенства

$$\int g(t,\ x,\ s,\ y)\,dy=1,\ \int g(t,\ x,\ s,\ y)\,g(s,\ y,\ r,\ z)\,dy=$$
$$=g(t,\ x,\ r,\ z)$$

при всех $0\leqslant t<s<r$, x, $z\in R^d$. Первое из них является простым следствием известного равенства $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2}\right\}d\lambda=\sqrt{2\pi}$, а второе легко проверяется с помощью преобразования Фурье. Это позволяет определить вероятность перехода

$$P(t,\ x,\ s\ A)=\int\limits_A g(t,\ x,\ s,\ y)\,dy$$

для $t<s$, $x\in R^d$, $A\in\mathscr{B}$, т. е. функцию, удовлетворяющую условиям A)—B) § 1 главы 1. Покажем, что эта вероятность перехода удовлетворяет условиям замечания 1 к теореме 3.

В самом деле, имеем

$$P(t,x,s,V_\varepsilon(x))=\int\limits_{V_\varepsilon(x)}(2\pi(s-t))^{-\frac{d}{2}}\exp\left\{-\frac{|y-x|^2}{2(s-t)}\right\}dy\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{4(s-t)}\right\}\int(2\pi(s-t))^{-\frac{d}{2}}\exp\left\{-\frac{|y-x|^2}{4(s-t)}\right\}dy=$$

$$=2^{\frac{d}{2}}\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{4(s-t)}\right\},$$

так что если $s-t\leqslant h$, то

$$P(t,\ x,\ s,\ V_\varepsilon(x))\leqslant 2^{\frac{d}{2}}\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{4h}\right\},$$

и функция $\alpha^\varepsilon(h)=2^{\frac{d}{2}}\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{4h}\right\}$ (она не зависит от T), очевидно, удовлетворяет условию замечания 1 к теореме 3.

Таким образом, согласно теореме 3, существует почти наверное непрерывный марковский процесс $x(t)$, $t \geqslant 0$ с вероятностью перехода

$$P(t, x, s, A) = \int_A (2\pi(s-t))^{-\frac{d}{2}} \exp\{-|y-x|^2/2(s-t)\}\, dy,$$

где $0 \leqslant t < s$, $x \in R^d$, $A \in \mathscr{B}$. Этот процесс и называется d-мерным винеровским.

Пусть на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ с потоком σ-алгебр $(\mathscr{F}_t)_{t \geqslant t_0}$ задана согласованная с этим потоком марковская случайная функция $x(t)$, $t \geqslant t_0$ со значениями в R^d такая, что

$$\mathbf{P}(\{x(t) \in A\}/\mathscr{F}_s) = \int_A (2\pi(t-s))^{-\frac{d}{2}} \exp\{-|y-x(s)|^2/2(t-s)\}\, dy$$

для любых $t_0 \leqslant s < t$ и борелевских $A \subset R^d$. Можно считать, что $x(t)$ почти наверное непрерывно по t. Такую марковскую случайную функцию будем называть винеровской случайной функцией.

Покажем, что винеровская случайная функция является случайным процессом с независимыми приращениями. Действительно, для $t_0 \leqslant s < t$, $\theta \in R^d$ имеем почти наверное

$$\mathbf{M}\{\exp[i(\theta, x(t))]/\mathscr{F}_s\} =$$

$$= \int e^{i(\theta, y)} (2\pi(t-s))^{-\frac{d}{2}} \exp\{-|y-x(s)|^2/2(t-s)\}\, dy =$$

$$= \exp\left[i(\theta, x(s)) - \frac{1}{2}|\theta|^2(t-s)\right],$$

откуда находим (равенство почти наверное)

$$\mathbf{M}\{\exp[i(\theta, x(t)-x(s))]/\mathscr{F}_s\} = \exp\{-|\theta|^2(t-s)/2\}. \qquad (5)$$

Значит, условная характеристическая функция приращения $x(t)-x(s)$ при фиксированной σ-алгебре $\mathscr{F}_s$ совпадает почти наверное с безусловной и является характеристической функцией d-мерного гауссова распределения с нулевым средним (вектором) и матрицей вторых моментов $(t-s)\cdot I$ (I — единичная матрица). Отсюда следует, что случайный вектор $x(t)-x(s)$ при $t > s \geqslant t_0$ не зависит от σ-алгебры $\mathscr{F}_s$, а это и означает, что процесс $x(t)$ имеет независимые приращения.

Из соотношения (5) следует также, что процесс $(x(t), \mathscr{F}_t)_{t \geqslant t}$ является непрерывным d-мерным квадратично интегрируемым мартингалом с характеристикой $\langle x\rangle_t = t\cdot I$. Это утверждение допускает обращение.

Теорема 4. Предположим, что d-мерный случайный процесс $x(t)$, $t \geqslant t_0$ непрерывен почти наверное и является квадратично интегрируемым мартингалом относительно потока σ-алгебр $(\mathscr{F}_t)_{t\geq t_0}$ с характеристикой $\langle x\rangle_t = t\cdot I$. Тогда процесс $x(t)$ является d-мерной винеровской случайной функцией.

Доказательство. Для $\theta\in R^d$ положим $\xi(t) = \exp\{i(\theta, x(t))\}$. Применяя к процессу $\xi(t)$ формулу Ито для непрерывных квадратично интегрируемых мартингалов (см. [4]), получаем

$$\xi(t) = \xi(s) + i\int_s^t \xi(\tau)(\theta, dx(\tau)) - \frac{1}{2}|\theta|^2\int_s^t \xi(\tau)\,d\tau.$$

Зафиксировав здесь $s\geqslant t_0$ и положив

$$f(t) = \mathbf{M}\{\xi(t)/\mathscr{F}_s\},\ t_0\leqslant s<t,$$

найдем

$$f(t) = f(s) - \frac{1}{2}|\theta|^2\int_s^t f(\tau)\,d\tau,\quad t\geqslant s.$$

Очевидно, $f(t)$ непрерывно зависит от t и потому последнее соотношение влечет равенство

$$f(t) = \xi(s)\cdot\exp\{-|\theta|^2(t-s)/2\},$$

которое может быть записано в виде

$$\mathbf{M}\{\exp[i(\theta, x(t)-x(s))]/\mathscr{F}_s\} = \exp[-|\theta|^2(t-s)/2].$$

Отсюда и следует утверждение теоремы.

Функция $g(s, x, t, y)$, представляющая собой плотность вероятности перехода винеровского процесса, является, как известно, фундаментальным решением уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2}\Delta u = 0 \tag{6}$$

(здесь Δ — оператор Лапласа по переменной x, то есть $\Delta u = \left.\sum_{j=1}^{d}\frac{\partial^2 u}{(\partial x^j)^2}\right)$. Это означает, что функция $g(s, x, t, y)$ непрерывна по совокупности переменных в области $0\leqslant s<t$, $x, y\in R^d$, как функция (s, x) при фиксированных (t, y) в области $0\leqslant s<t$, $x\in R^d$ удовлетворяет уравнению (6) и для любой непрерывной ограниченной функции $\varphi(x)$, $x\in R^d$ выполнено соотношение

$$\lim_{s\uparrow t}\int g(s, x, t, y)\varphi(y)\,dy = \varphi(x).$$

1.5. Диффузионные процессы. Фундаментальные решения существуют и для уравнений, более общих, по сравнению с (6). Именно, справедлива следующая теорема (см. [14]).

Теорема 5. Предположим, что при $(t, x)\in[0, T]\times R^d$ заданы ограниченные вещественные функции $a^j(t, x)$, $j=1, 2, \ldots, d$, $b_{kj}(t, x)$, $j, k=1, \ldots, d$ такие, что:

1) для всех $k, j=1, 2, \ldots, d$; $t, s \in [0, T]$; $x, y \in R^d$

$$|b_{kj}(t, x)-b_{kj}(s, y)| \leqslant L\left(|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}+|x-y|^{\alpha}\right),$$

где L и α — положительные постоянные, $\alpha \leqslant 1$;

2) каковы бы ни были вещественные числа θ^j, $j=1, 2, \ldots, d$, при всех $(t, x) \in [0, T] \times R^d$ справедливо неравенство

$$\sum_{j,k=1}^{d} b_{kj}(t, x)\theta^k\theta^j \geqslant c \sum_{k=1}^{d} (\theta^k)^2$$

с некоторой положительной постоянной c;

3) при всех $j=1, 2, \ldots, d$ функции $a^j(t, x)$ непрерывны по совокупности переменных и

$$|a^j(t, x)-a^j(t, y)| \leqslant L|x-y|^{\alpha},$$

каковы бы ни были $t \in [0, T]$, $x, y \in R^d$.

Тогда существует вещественная функция $G(t, x, s, y)$ переменных $0 \leqslant t < s \leqslant T$, $x, y \in R^d$, обладающая свойствами:

а) она непрерывна по совокупности переменных;

б) при фиксированных (s, y) как функция переменных (t, x) она удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{d} b_{jk}(t, x) \frac{\partial^2 G}{\partial x^j \partial x^k}+\sum_{j=1}^{d} a^j(t, x) \frac{\partial G}{\partial x^j}=0 \qquad (7)$$

в области $(t, x) \in [0, s[\times R^d$;

в) для любой непрерывной и ограниченной на R^d функции φ справедливо соотношение

$$\lim_{t \uparrow s} \int_{R^d} G(t, x, s, y)\varphi(y)\,dy=\varphi(x),$$

каковы бы ни были $(s, x) \in]0, T] \times R^d$;

г) существуют такие положительные постоянные K и μ (они зависят от постоянных α, c, L, а также от констант, ограничивающих функции $a^j(t, x)$ и $b_{jk}(t, x)$), что при $0 \leqslant t < s \leqslant T$, $x, y \in R^d$ справедливы неравенства

$$|D_t^m D_x^n G(t, x, s, y)| \leqslant K(s-t)^{\frac{-d+2m+n}{2}} \exp\left\{-\mu \frac{|y-x|^2}{s-t}\right\},$$

где m и n — целые неотрицательные числа, для которых $2m+n \leqslant 2$, D_t^m — символ частной производной по t порядка m, D_x^n — символ любой частной производной по x порядка n.

Функция переменных (t, x, s, y) в области $0 \leqslant t < s \leqslant T$, $x, y \in R^d$, удовлетворяющая условиям а)—в), называется по определению фундаментальным решением уравнения (7), так что в теореме 5 утверждается существование такого фундаментального решения этого уравнения, которое обладает свойством г). Частным случаем свойства г) (при $m=n=0$) является следующее важное неравенство

$$|G(t, x, s, y)| \leqslant K(s-t)^{-\frac{d}{2}} \exp\left\{-\mu \frac{|y-x|^2}{s-t}\right\}, \tag{8}$$

справедливое при всех $0 \leqslant s < t \leqslant T$, $x, y \in R^d$.

С помощью фундаментального решения можно записать в квадратурах решение следующей задачи Коши (см. [14]):

в области $[0, s[\times R^d$ (s фиксировано, $0 < s \leqslant T$) ищется такая функция $u(t, x)$ с вещественными значениями, которая в этой области удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + (\mathscr{L}u)(t, x) = -f(t, x) \tag{9}$$

и «начальному» условию

$$\lim_{t \uparrow s} u(t, x) = \varphi(x) \tag{10}$$

при всех $x \in R^d$. Здесь f и φ — заданные вещественные функции — первая в области $[0, s[\times R^d$, вторая в R^d, а $\mathscr{L}$ — дифференциальный оператор, действующий на гладкую функцию $h(t, x)$ по формуле

$$(\mathscr{L}h)(t, x) = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{d} b_{jk}(t, x) \frac{\partial^2 h(t, x)}{\partial x^j \partial x^k} + \sum_{j=1}^{d} a^j(t, x) \frac{\partial h(t, x)}{\partial x^j}. \tag{11}$$

Теорема 6. Допустим, что в области $[0, T]\times R^d$ заданы коэффициенты оператора (11), удовлетворяющие условиям теоремы 5, и пусть непрерывная в R^d вещественная функция φ удовлетворяет всюду в R^d неравенству $|\varphi(x)| \leqslant \mathrm{const} \cdot \exp\{\varkappa |x|^2\}$ при некоторой постоянной $\varkappa < \frac{c}{T}$ (здесь c — постоянная из условия 2 теоремы 5). Далее, пусть непрерывная в $[0, T]\times R^d$ функция $f(t, x)$ по переменной x локально непрерывна по Гёльдеру равномерно относительно $t \in [0, T]$ и также удовлетворяет неравенству $|f(t, x)| \leqslant \mathrm{const} \cdot \exp\{\lambda |x|^2\}$ при некоторой постоянной $\lambda < \frac{c}{T}$. Тогда при любом $s \in]0, T]$ решение задачи Коши (9)—(10) в области $[0, s[\times R^d$ существует и с помощью фундаментального решения может быть записано в виде

$$u(t, x) = \int G(t, x, s, y)\varphi(y)\,dy + \int_t^s d\tau \int G(t, x, \tau, y) f(\tau, y)\,dy. \tag{12}$$

Теорема 6 — это теорема существования решения рассматриваемой задачи Коши. Вопрос о его единственности обычно решается с привлечением принципа максимума для параболических операторов. Одна из форм этого принципа приведена в следующей теореме (см. [14]).

Теорема 7. Предположим, что коэффициенты оператора (11) непрерывны и ограничены в области $[0, T]\times R^d$ и пусть заданная в этой области вещественная функция $u(t, x)$ такова, что для всех $(t, x)\in[0, T[\times R^d$, во-первых, $\frac{\partial u}{\partial t}+(\mathcal{L}u)(t, x)\leqslant 0$, и, во-вторых, $u(t, x)\geqslant -B\exp\{\beta|x|^2\}$ при некоторых неотрицательных постоянных B и β. Если к тому же $u(T, x)\geqslant 0$ при всех $x\in R^d$, то $u(t, x)\geqslant 0$ при всех $(t, x)\in[0, T]\times R^d$.

Из этой теоремы легко следует неотрицательность фундаментального решения $G(t, x, s, y)$. В самом деле, если φ — произвольная ограниченная непрерывная функция на R^d, то, согласно теоремам 6, 7, $\int G(t, x, s, y)\varphi(y)\,dy\geqslant 0$ при условии, что $\varphi(x)\geqslant 0$ для всех $x\in R^d$.

Непосредственным следствием теоремы 7 является следующая теорема единственности решения задачи Коши (9)—(10) (см. [14]).

Теорема 8. Допустим, что коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ в области $[0, T]\times R^d$ непрерывны и ограничены. Тогда существует не более одного решения задачи Коши (9)—(10), удовлетворяющего условию

$$|u(t, x)|\leqslant B\exp\{\beta|x|^2\} \tag{13}$$

при некоторых неотрицательных постоянных B и β.

Из этой теоремы вытекают следующие соотношения для фундаментального решения (мы предполагаем выполненными условия теоремы 5)

$$\int G(t, x, s, y)\,dy=1, \tag{14}$$

$$\int G(t, x, s, y)\,G(s, y, r, z)\,dy=G(t, x, r, z),$$

справедливые при $0\leqslant t<s<r\leqslant T$, $x, z\in R^d$. Первое из них есть следствие того факта, что и левая и правая части его есть решение одной и той же задачи Коши (см. (8), (13) и теорему 8). Чтобы доказать второе, сравним две функции (здесь φ — произвольная ограниченная непрерывная на R^d функция)

$$u_1(t, x)=\int G(t, x, r, z)\,\varphi(z)\,dz$$

и

$$u_2(t, x)=\int G(t, x, s, y)\,u_1(s, y)\,dy$$

в области $(t, x)\in[0, s[\times R^d$. Обе они являются в этой области решением одной и той же задачи Коши (9)—(10): в уравнении (9) нужно положить $f(t, x)=0$, а в качестве «начального» условия взять $u_1(s, x)$. Поэтому, согласно теореме 8, $u_1(t, x)=u_2(t, x)$. Но функция $u_2(t, x)$ может быть записана в виде (см. (12))

$$u_2(t, x)=\int\left[\int G(t, x, s, y)\,G(s, y, r, z)\,dy\right]\varphi(z)\,dz.$$

Отсюда непосредственно выводим второе из соотношений (14).

Таким образом, в условиях теоремы 5 фундаментальное решение $G(t, x, s, y)$ существует и определяет вероятность перехода

$$P(t, x, s, A) = \int_A G(t, x, s, y)\, dy, \quad A \in \mathscr{B},$$

в фазовом пространстве $(R^d, \mathscr{B})$. Оценка (8) позволяет точно так же, как и выше в случае винеровского процесса, заключить, что эта вероятность удовлетворяет условиям теоремы 3, и потому в условиях теоремы 5 существует непрерывный почти наверное марковский процесс $x(t)$ в фазовом пространстве $(R^d, \mathscr{B})$. Этот процесс, как будет показано в § 1 главы 3, является диффузионным процессом в R^d.

Предыдущие построения относились к конечному промежутку времени. Если теперь коэффициенты оператора (11) определены при $(t, x) \in [0, \infty[\times R^d$ и на каждом множестве вида $[0, T] \times \times R^d$ удовлетворяют условиям теоремы 5 (постоянные L, α и c могут зависеть от T), то при всех $0 \leqslant s < t < \infty$, $x, y \in R^d$ определена функция $G(t, x, s, y)$, обладающая свойствами а) — г), причем в свойстве г) постоянные K и μ могут также зависеть от T. Тем самым рассматриваемый диффузионный процесс будет определен при всех $t \in [0, \infty[$.

Пусть $x(t)$ — построенный диффузионный процесс в R^d и пусть $(\mathscr{X}_t^s)_{0 \leqslant s \leqslant t}$ — система σ-алгебр, относительно которой процесс $x(t)$ обладает марковским свойством:

$$\mathbf{P}_{s,x}(\{x(u) \in A\} / \mathscr{X}_t^s) = \mathbf{P}_{t, x(t)}(\{x(u) \in A\})$$

почти наверное относительно меры $\mathbf{P}_{s,x}$ для любых $0 \leqslant s < t < u$, $x \in R^d$, $A \in \mathscr{B}$. Положим

$$\xi_s(t) = x(t) - x(s) - \int_s^t a(\tau, x(\tau))\, d\tau, \quad t \geqslant s,$$

где $a(t, x)$ — вектор в R^d с координатами $a^j(t, x)$, $j = 1, 2, \ldots, d$. Из приведенной выше теоремы единственности нетрудно вывести следующую характеризацию процесса $x(t)$. Через $b(t, x)$ обозначаем $d \times d$-матрицу с элементами $b_{jk}(t, x)$.

Теорема 9. Каково бы ни было $s \geqslant 0$, процесс $\xi_s(t)$ при $t \in [s, \infty[$ является непрерывным d-мерным квадратично интегрируемым мартингалом относительно потока σ-алгебр $(\mathscr{H}_T^s)_{t \geqslant s}$ и меры $\mathbf{P}_{s,x}$ (для любого $x \in R^d$), причем его характеристика определяется формулой

$$\langle \xi_s(\cdot) \rangle_t = \int_s^t b(\tau, x(\tau))\, d\tau. \qquad (15)$$

Доказательство. Простым упражнением на применение теоремы 8 является проверка справедливости следующих двух равенств

$$\int G(s, x, t, y)(y-x, \theta)\, dy = \int_s^t \int G(s, x, \tau, z)(a(\tau, z), \theta)\, d\tau dz,$$

$$\int G(s, x, t, y)(y-x, \theta)^2\, dy = \int_s^t \int G(s, x, \tau, z)(b(\tau, z)\theta, \theta)\, d\tau dz + \tag{16}$$

$$+2\int_s^t \int G(s, x, \tau, z)(a(\tau, z), \theta)(z-x, \theta)\, d\tau dz,$$

имеющих место при всех $0 \leqslant t < s$, $x, \theta \in R^d$. Равенства (16) могут быть записаны в виде

$$\mathbf{M}_{s,x}(\xi_s(t), \theta) = 0, \tag{17}$$

$$\mathbf{M}_{s,x}(\xi_s(t), \theta)^2 = \mathbf{M}_{s,x}\int_s^t (b(\tau, x(\tau))\theta, \theta)\, d\tau.$$

При выводе второго из соотношений (17) используется следующее рассуждение

$$\mathbf{M}_{s,x}(x(t)-x(s), \theta)\int_s^t (a(\tau, x(\tau)), \theta)\, d\tau =$$

$$= \mathbf{M}_{s,x}\left[\int_s^t (a(\tau, x(\tau)), \theta)\mathbf{M}_{\tau, x(\tau)}(x(t)-x(\tau), \theta)\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_s^t (a(\tau, x(\tau)), \theta)(x(\tau)-x(s), \theta)\, d\tau\right] =$$

$$= \mathbf{M}_{s,x}\int_s^t (a(\tau, x(\tau)), \theta)\, d\tau \int_\tau^t (a(\sigma, x(\sigma)), \theta)\, d\sigma +$$

$$+ \mathbf{M}_{s,x}\int_s^t (a(\tau, x(\tau)), \theta)(x(\tau)-x(s), \theta)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\mathbf{M}_{s,x}\left(\int_s^t (a(\tau, x(\tau)), \theta)\, d\tau\right)^2 +$$

$$+ \int_s^t d\tau \int (a(\tau, y), \theta)(y-x, \theta)\, G(s, x, \tau, y)\, dy.$$

Из первого соотношения в (17) при $s \leqslant t < u$ с использованием марковского свойства получаем равенство (почти наверное относительно $\mathbf{P}_{s,x}$)

$$\mathbf{M}_{s,x}\{(\xi_s(u)-\xi_s(t), \theta)/\mathscr{X}_t^s\} = \mathbf{M}_{t,x(t)}(\xi_t(u), \theta) = 0,$$

которое означает, что процесс $\xi_s(t)$ является мартингалом. Легко видеть, что он интегрируем с квадратом. Снова с использованием марковского свойства из второго равенства в (17) находим (и здесь равенство почти наверное относительно $\mathbf{P}_{s,x}$)

$$\mathbf{M}_{s,x}\{(\xi_s(u)-\xi_s(t),\theta)^2/\mathscr{X}_t^s\}=\mathbf{M}_{t,x(t)}(\xi_t(u),\theta)^2=$$

$$=\mathbf{M}_{t,x(t)}\int_t^u(b(\tau,x(\tau))\theta,\theta)\,d\tau=\mathbf{M}_{s,x}\left\{\int_t^u(b(\tau,x(\tau))\theta,\theta)\,d\tau/\mathscr{X}_t^s\right\},$$

откуда следует (15). Теорема доказана.

Замечание. Теорема 9 означает, что построенный диффузионный процесс представляет собой слабое решение стохастического дифференциального уравнения

$$dx(t)=a(t,x(t))\,dt+b^{1/2}(t,x(t))\,dw(t),$$

где $w(t)$ — d-мерная винеровская случайная функция, а $b^{1/2}(t,x)$ — положительный квадратный корень из положительно определенной матрицы $b(t,x)$ (см. § 2 гл. 3).

1.6. Процессы с независимыми приращениями. Предположим, что фазовое пространство $(X,\mathscr{B})$ наделено линейной структурой, согласованной со структурой измеримого пространства. Это, в частности, означает, что: 1) сдвиг $A+x$ любого измеримого множества A на любой вектор $x\in X$ представляет собой снова измеримое множество; 2) операция сложения есть измеримое отображение пространства $(X\times X,\mathscr{B}\otimes\mathscr{B})$ в $(X,\mathscr{B})$, то есть при любом $A\in\mathscr{B}$ $\{(x,y):x+y\in A\}\in\mathscr{B}\otimes\mathscr{B}$.

В таких пространствах можно выделить естественный подкласс марковских процессов, обладающих пространственной однородностью. Это означает, что переходы за время от момента s до момента t из точки x в одну из точек множества A происходят с такой же вероятностью, что и переходы за то же время из сдвинутой точки $x+y$ в одну из точек сдвинутого множества $A+y$, каковы бы ни были $s<t$, $x,y\in X$, $A\in\mathscr{B}$. Другими словами, марковский процесс $x(t)$ обладает свойством пространственной однородности, если его вероятность перехода $P(s,x,t,A)$ такова, что функция $P(s,x+y,t,A+y)$ не зависит от $y\in X$ при любых $s<t$, $x\in X$, $A\in\mathscr{B}$.

Для пространственно однородного марковского процесса с вероятностью перехода $P(s,x,t,A)$ положим $\mathbf{P}^{s,t}(A)=P(s,x,t,A+x)$ для $s<t$, $A\in\mathscr{B}$. Тогда будем иметь двупараметрическое семейство мер $\mathbf{P}^{s,t}$, заданных на σ-алгебре $\mathscr{B}$ и обладающих свойством

$$\mathbf{P}^{s,t}*\mathbf{P}^{t,u}=\mathbf{P}^{s,u},\qquad 0\leqslant s<t<u, \tag{18}$$

где символом $*$ обозначается операция свертки двух мер (если μ и ν — две меры на $\mathscr{B}$, то их сверткой $\mu*\nu$ называется мера на $\mathscr{B}$, определяемая равенством $\mu*\nu(A)=\int\mu(A-x)\nu(dx)=$

$=\int \nu(A-x)\mu(dx)$, $A\in\mathscr{B}$). Соотношение (18) является непосредственным следствием уравнения Колмогорова—Чепмена.

Заметим теперь, что если $x(t)$ — пространственно однородный марковский процесс, то при любых $s\leqslant t<u$, $x\in X$, $A\in\mathscr{B}$ имеем

$$\mathbf{P}_{s,x}\left(\{x(u)-x(t)\in A\}/\mathscr{X}_t^s\right)=\mathbf{P}_{t,y}(\{x(u)\in A+y\})|_{y=x(t)}=$$
$$=P(t,y,u,A+y)|_{y=x(t)}=\mathbf{P}^{t,u}(A).$$

Отсюда следует, что при фиксированных $s\geqslant 0$, $x\in X$ функция $x(t)$, $t\geqslant s$ с мерой $\mathbf{P}_{s,x}$ представляет собой процесс с независимыми приращениями, для которого $x(s)=x$.

В самом деле, при $s<t_1<t_2<\ldots<t_n$ и $A_1, A_2, \ldots, A_n\in\mathscr{B}$ имеем, согласно предыдущему

$$\mathbf{P}_{s,x}(\{x(t_1)\in A_1,\ x(t_2)-x(t_1)\in A_2,\ \ldots,\ x(t_n)-x(t_{n-1})\in A_n\})=$$
$$=\mathbf{P}_{s,x}(\{x(t_1)\in A_1\})\prod_{k=2}^{n}\mathbf{P}^{t_{k-1},\,t_k}(A_k)=$$
$$=\mathbf{P}_{s,x}(\{x(t_1)\in A_1\})\prod_{k=2}^{n}\mathbf{P}_{s,x}(\{x(t_k)-x(t_{k-1})\in A_k\}),$$

что и требовалось.

Таким образом, меру $\mathbf{P}^{t,u}$ можно рассматривать как распределение приращения $\xi(u)-\xi(t)$ процесса с независимыми приращениями $\xi(\cdot)$. Наоборот, если на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ задан процесс $\xi(t)$, $t\geqslant 0$ с независимыми приращениями, принимающий значения в линейном измеримом пространстве $(X,\mathscr{B})$, то, положив $P(s,x,t,A)=$ $=\mathbf{P}\{x+\xi(t)-\xi(s)\in A\}$ для $0\leqslant s<t$, $x\in X$, $A\in\mathscr{B}$, получим вероятность перехода, который соответствует пространственно однородный марковский процесс $x(t)$ в фазовом пространстве $(X,\mathscr{B})$.

Значит, все пространственно однородные марковские процессы в линейном фазовом пространстве $(X,\mathscr{B})$ находятся во взаимно однозначном соответствии с процессами с независимыми приращениями в X, если не различать два таких процесса, у которых одинаковые распределения приращений, но, возможно, разные начальные распределения.

Пусть теперь X — линейное метрическое пространство. В таком пространстве сдвиг открытого множества есть множество открытое, а операция сложения непрерывна по совокупности переменных. Отсюда следует, что если $\mathscr{B}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств X, то структура измеримого пространства $(X,\mathscr{B})$ согласована с его линейной структурой.

Предположим, что в таком фазовом пространстве задан пространственно однородный процесс $x(t)$, для которого $\mathbf{P}^{s,t}(A)=P(s,x,t,A+x)$ при $0\leqslant s<t$, $A\in\mathscr{B}$, $x\in X$. Стохастическая непрерывность процесса $x(t)$ в момент времени t означает, что

при любом $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\substack{s \to t, u \to t, \\ s < u}} \mathbf{P}^{s,u}(V_\varepsilon) = 0, \qquad (19)$$

где через V_ε обозначено дополнение в X к шару радиуса ε с центром в точке $x=0$. Далее, нетрудно доказать, что процесс $x(t)$, стохастически непрерывный в каждый из моментов времени $t \in [0, T]$ (в граничных точках имеется в виду односторонняя стохастическая непрерывность), является равномерно стохастически непрерывным на интервале $[0, T]$, т. е. (19) выполняется равномерно относительно $t \in [0, T]$: при любых $\varepsilon > 0$, $T < \infty$

$$\lim_{h \downarrow 0} \sup_{0 \leqslant s < t \leqslant s+h \leqslant T} \mathbf{P}^{s,t}(V_\varepsilon) = 0.$$

Отсюда следует, что стохастически непрерывный процесс с независимыми приращениями в линейном полном метрическом пространстве удовлетворяет условиям теоремы 1 и, стало быть, можно считать его не имеющим разрывов второго рода и непрерывным справа почти наверное.

Некоторым усилением теоремы 3 применительно к процессам с независимыми приращениями является следующее утверждение.

Теорема 10. Процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, с независимыми приращениями в линейном полном метрическом пространстве X непрерывен почти наверное тогда и только тогда, когда для любых $\varepsilon > 0$, $T > 0$ и любой последовательности разбиений отрезка $[0, T]$ точками $0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} < \ldots < t_n^{(n)} = T$, такой что

$$\lim_{n \to \infty} \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \left(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}\right) = 0,$$

выполнено соотношение (ρ — метрика в X)

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}^{t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}}(V_\varepsilon) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{P}\left(\left\{\rho\left(\xi\left(t_{k-1}^{(n)}\right), \xi\left(t_k^{(n)}\right)\right) > \varepsilon\right\}\right) = 0.$$

Доказательство этой теоремы мы опускаем.

§ 2. Строго марковские процессы

2.1. Моменты остановки и порождаемые ими σ-алгебры. Пусть $(\Omega, \mathscr{F})$ — пространство элементарных событий. Всякую функцию на Ω со значениями в $[0, +\infty]$ можно рассматривать как случайный момент времени. Если на $(\Omega, \mathscr{F})$ задан поток σ-алгебр $(\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$, то естественным образом выделяется класс согласованных с этим потоком случайных моментов времени. Именно, случайный момент времени τ согласован с потоком σ-алгебр $(\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$, если с этим потоком согласован случайный процесс $(I_{\{\tau \leqslant t\}})_{t \geqslant 0}$. Такие случайные величины будем называть моментами остановки относительно потока σ-алгебр $(\mathscr{F}_t)_{t \geqslant 0}$

или просто моментами остановки, если ясно, о каком потоке σ-алгебр идет речь. Как синонимы употребляются также термины: марковские моменты; величины, не зависящие от будущего.

Иначе говоря, неотрицательная случайная величина τ, возможно, несобственная, называется моментом остановки относительно потока σ-алгебр $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, если $\{\omega : \tau(\omega)\leqslant t\}\in\mathscr{F}_t$ при любом $t\geqslant 0$.

Простейшим примером момента остановки может служить постоянная случайная величина $\tau(\omega)\equiv t$ при некотором $t\geqslant 0$. Очевидно, если τ — момент остановки, то $\tau+t$ при любом $t\in$ $\in[0, +\infty[$ также является моментом остановки.

Если неотрицательная случайная величина τ такова, что $\{\tau<t\}\in\mathscr{F}_t$ при всех $t\geqslant 0$, то, очевидно, $\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}_{t+}$, и потому τ будет моментом остановки относительно потока $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, если последний непрерывен справа (это означает, что $\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_{t+}$ при всех $t\geqslant 0$).

Простым упражнением является доказательство следующих предложений:

а) если τ и σ — моменты остановки относительно потока σ-алгебр $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, то случайные величины $\tau\wedge\sigma$, $\tau\vee\sigma$ также являются моментами остановки относительно того же потока σ-алгебр;

б) если $(\tau_n)_{n\geqslant 1}$ — последовательность моментов остановки относительно потока σ-алгебр $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$, то случайная величина $\sup\limits_n \tau_n$ также является моментом остановки относительно того же потока; величина $\inf\limits_n \tau_n$ является моментом остановки относительно потока $(\mathscr{F}_{t+})_{t\geqslant 0}$.

В случае, когда поток σ-алгебр $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ порождается случайным процессом $(x(t))_{t\geqslant 0}$ со значениями в измеримом пространстве $(X, \mathscr{B})$ и множество траекторий этого процесса замкнуто относительно остановок (это означает, что для любых $\omega\in\Omega$ и $t\geqslant 0$ существует такое $\omega'\in\Omega$, что $x(s, \omega')=x(s\wedge t, \omega)$ при всех $s\geqslant 0$), справедлив следующий критерий:

$\mathscr{F}_\infty$-измеримая неотрицательная (возможно, несобственная) случайная величина $\tau(\omega)$ является моментом остановки относительно потока $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ тогда и только тогда, когда из того, что $\tau(\omega)\leqslant t$ и $x(s, \omega)=x(s, \omega')$ при всех $s\leqslant t$ следует, что $\tau(\omega)=$ $=\tau(\omega')$ (здесь $\mathscr{F}_\infty$ — это минимальная σ-алгебра событий, содержащая $\mathscr{F}_t$ при всех $t\geqslant 0$).

Доказательство этого факта весьма просто и предоставляется читателю.

Для произвольного потока σ-алгебр $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ и момента остановки τ относительно этого потока определим σ-алгебру $\mathscr{F}_\tau$, состоящую из событий $\Lambda\in\mathscr{F}_\infty$ таких, что $\Lambda\cap\{\tau\leqslant t\}\in\mathscr{F}$, каково бы ни было $t\geqslant 0$. Нетрудно проверить, что $\mathscr{F}_\tau$ действительно является σ-алгеброй. Она называется σ-алгеброй событий, предшествующих моменту τ. Очевидно, если при всех $\omega \in \Omega$ $\tau(\omega)=t$, то $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}_t$. Ясно также, что τ является $\mathcal{F}_\tau$-измеримой случайной величиной.

2.2. Прогрессивная измеримость. Пусть на пространстве элементарных событий $(\Omega, \mathcal{F})$ с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ задан случайный процесс $x(t, \omega)$, $t\geqslant 0$, со значениями в измеримом пространстве $(X, \mathcal{B})$, согласованный с этим потоком. В это понятие входит требование измеримости при каждом $t\geqslant 0$ отображения $x(t, \cdot)$ пространства $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ в $(X, \mathcal{B})$. Часто бывает необходимым рассматривать значения процесса $x(t)$ в случайные моменты времени $\tau(\omega)$. Такое рассмотрение приводит к суперпозиции $x(\tau(\omega), \omega)$, и для того, чтобы это был случайный элемент в $(X, \mathcal{B})$, нужно, чтобы $\tau(\omega)$ было неотрицательной (собственной) случайной величиной, а $x(t, \omega)$ было измеримо по совокупности переменных (то есть должно быть измеримым отображение $(x(\cdot,\cdot):(R_+\times\Omega, \mathcal{B}(R_+)\otimes\mathcal{F})\to(X, \mathcal{B})$, где $\mathcal{B}(R_+)$ — σ-алгебра борелевских подмножеств R_+). Если при этом $\tau(\omega)$ — момент остановки, то естественно ожидать, что суперпозиция $x(\tau(\omega), \omega)$ должна привести к случайному элементу, измеримому относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_\tau$ событий, предшествующих моменту τ. Однако, вообще говоря, это не так; данное свойство выполнено, если процесс обладает более сильным свойством измеримости. Приведем это понятие.

Заданный на пространстве элементарных событий $(\Omega, \mathcal{F})$ с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ случайный процесс $x(t)$, $t\geqslant 0$, со значениями в измеримом пространстве $(X, \mathcal{B})$ называется прогрессивно измеримым относительно потока $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, если при каждом $t\geqslant 0$ измеримым является отображение $x(\cdot,\cdot)$ измеримого пространства $([0, t]\times\Omega, \mathcal{B}([0, t])\otimes\mathcal{F}_t)$ в измеримое пространство $(X, \mathcal{B})$, где $\mathcal{B}([0, t])$ — σ-алгебра борелевских подмножеств отрезка $[0, t]$. Говоря иначе, процесс $x(t)$ прогрессивно измерим относительно потока σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, если для каждого $t\geqslant 0$ справедливо включение $\{(s, \omega)\in[0, t]\times\Omega : x(s, \omega)\in A\}\in\mathcal{B}[0, t])\otimes\mathcal{F}_t$, каково бы ни было $A\in\mathcal{B}$. Как обычно, говорят о прогрессивной измеримости процесса без указания потока σ-алгебр, если ясно, о каком потоке идет речь.

Покажем, что если случайный процесс $x(t)$ со значениями в $(X, \mathcal{B})$ прогрессивно измерим относительно потока σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$, а τ — конечный момент остановки относительно этого же потока, то случайный элемент $x(\tau(\omega), \omega)$ в $(X, \mathcal{B})$ $\mathcal{F}_\tau$-измерим.

Действительно, элемент $x(\tau(\omega), \omega)$ в $(X, \mathcal{B})$, очевидно, является $\mathcal{F}_\infty$-измеримым. Для $A\in\mathcal{B}$ и $t\geqslant 0$ имеем $\{\omega : x(\tau(\omega), \omega)\in A\}\cap\}\omega : \tau(\omega)\leqslant t\} = \}x(\tau\wedge t)\in A\}\cap\{\tau\leqslant t\}$. Очевидно, случайная величина $\sigma(\omega)=\tau(\omega)\wedge t$, будучи моментом остановки, представляет собой измеримое отображение пространства $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ в пространство $([0, t], \mathcal{B}([0, t]))$, а $x(\tau\wedge t)$ есть результат подстановки величины $\sigma(\omega)$ в отображение $x(/, \cdot):([0, t]\times\Omega, \mathcal{B}([0, t])\otimes$

$\otimes\mathscr{F}_t)\to(X,\mathscr{B})$, которое измеримо, поскольку процесс $x(t)$ прогрессивно измерим. Значит, $\{x(\tau\wedge t)\in A\}\in\mathscr{F}_t$, что и требовалось.

Следующая теорема показывает, что свойством прогрессивной измеримости обладают широкие классы случайных процессов.

Теорема 11. Пусть X — метрическое пространство, а $x(t)$ — случайный процесс со значениями в X, согласованный с потоком σ-алгебр $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$. Если процесс $x(t)$ почти наверное непрерывен справа (или слева), то он прогрессивно измерим.

Доказательство. Пусть $x(t)$ непрерывен справа. Фиксируем $\bar{t}>0$ и для $n=1, 2, \ldots$ положим $x_n(s, \omega))=x\left(\frac{k}{n}\bar{t}, \omega\right)$, если $s\in\left]\frac{k-1}{2^n}\bar{t}, \frac{k}{2^n}\bar{t}\right]$ (здесь $k\leqslant 2^n$), и $x_n(0, \omega)=x(0, \omega)$. Тогда в силу согласованности процесса $x(t)$ с потоком $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ отображение $x_n(\cdot, \cdot):([0, \bar{t}]\times\Omega, \mathscr{B}([0, \bar{t}])\otimes\mathscr{F}_{\bar{t}})\to(X, \mathscr{B})$ измеримо. Но тогда этим же свойством обладает и отображение $x(\cdot, \cdot)$: $:([0, \bar{t}]\times\Omega, \mathscr{B}([0, \bar{t}])\otimes\mathscr{F}_{\bar{t}})\to(X, \mathscr{B})$, являющееся поточечным пределом последовательности отображений x_n. Аналогично рассматривается случай процесса, непрерывного слева. Теорема доказана.

Пусть $(\Omega, \mathscr{F})$ — пространство элементарных событий с потоком σ-алгебр $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$. Совокупность подмножеств Q множества $R_+\times\Omega$ таких, что $Q\cap([0, t]\times\Omega)\in\mathscr{B}([0, t])\otimes\mathscr{F}_t$ при любом $t\geqslant 0$ образует σ-алгебру, которую называют σ-алгеброй прогрессивно измеримых множеств. Если Q — прогрессивно измеримое множество, то процесс $I_Q(t, \omega)$ является прогрессивно измеримым относительно потока $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$. Обратно, если процесс $x(t)$, $t\geqslant 0$ со значениями в $(X, \mathscr{B})$ прогрессивно измерим, то множество $\{(t, \omega) : x(t, \omega)\in A\}$ при любом $A\in\mathscr{B}$ является прогрессивно измеримым.

Следующая важная теорема позволяет строить широкие классы моментов остановки. Прежде чем ее сформулировать, определим понятие дебюта подмножества $R_+\times\Omega$.

Если Q — подмножество $R_+\times\Omega$, то его дебютом называется функция D_Q, заданная на Ω и определяемая формулой

$$D_Q(\omega)=\inf\{t\in R_+ : (t, \omega)\in Q\},$$

где, как обычно, полагаем $\inf\{\varnothing\}=+\infty$.

Теорема 12. Если на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}\}$ задан непрерывный справа поток σ-алгебр $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$ таких, что каждая σ-алгебра $\mathscr{F}_t$ полна относительно меры $\mathbf{P}$, то дебют любого прогрессивно измеримого множества Q является моментом остановки относительно потока $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$.

Доказательство. Из прогрессивной измеримости множества Q следует, что множество $Q\cap([0, t[\times\Omega)$ входит в σ-алгебру $\mathscr{B}([0, t[)\otimes\mathscr{F}_t$ при любом $t>0$. Фиксируем некоторое $t\geqslant 0$.

Проекция множества $Q \cap ([0, t[\times\Omega)$ на Ω (то есть совокупность $\omega\in\Omega$ таких, что $(s, \omega)\in Q$ при некотором $s<t$) входит в σ-алгебру $\mathcal{F}_t$ в силу полноты последней (см. [5]). Но эта проекция совпадает с множеством $\{\omega : D_Q(\omega)<t\}$. Значит, при любом $t\geqslant 0$ имеем включение $\{D_Q<t\}\in\mathcal{F}_t$, откуда, как выше отмечалось, следует, что D_Q — момент остановки относительно потока $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geqslant 0}$. Согласно предположению, поток $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ непрерывен справа, и потому D_Q — момент остановки относительно $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$. Теорема доказана.

Следствие. Пусть X — метрическое пространство, $\mathcal{B}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств X, случайный процесс $x(t)$, $t\geqslant 0$, со значениями в $(X, \mathcal{B})$ почти наверное непрерывен справа и согласован с непрерывным справа потоком полных σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$. Тогда при любом $A\in\mathcal{B}$ велнчина $\tau_A(\omega) = \inf\{t : x(t, \omega)\in A\}$ (напоминаем, что $\inf\{\varnothing\}=+\infty$) является моментом остановки относительно потока $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$.

В самом деле, при $A\in\mathcal{B}$ множество $Q=\{(t, \omega) : x(t, \omega)\in A\}$ является прогрессивно измеримым, согласно теореме 11. Его дебют совпадает с $\tau_A(\omega)$ и, стало быть, является моментом остановки по теореме 12.

Определенная выше величина τ_A называется моментом первого попадания процесса $x(t)$ во множество A. Таким образом, при весьма широких условиях моменты первого попадания в измеримые множества представляют собой моменты остановки.

2.3. Строго марковские процессы. Марковский характер эволюции системы во времени означает, как отмечалось, условную независимость связанных с этой эволюцией событий в «будущем» и «прошлом» по отношению к любому неслучайному «настоящему» моменту времени при условии, что в этот момент фиксирован полный набор возможных событий. Отсюда, вообще говоря, не следует, что такая условная независимость имеет место и тогда, когда в качестве настоящего выбран случайный момент времени. Естественно поэтому выделить подкласс марковских процессов, которые обладают указанным свойством независимости «будущего» и «прошлого» по отношению ко всем таким случайным «настоящим» моментам времени, какими являются, скажем, моменты остановки (напомним, что неслучайные моменты времени являются частным случаем моментов остановки). Так приходим к понятию строго марковского процесса.

Пусть $x(t)$, $t\geqslant 0$, — марковский процесс в фазовом пространстве $(X, \mathcal{B})$, $(\mathcal{F}_t^s)_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant\infty}$ (обозначаем $\mathcal{F}^s=\mathcal{F}_\infty^s$, $\mathcal{F}_t=\mathcal{F}_t^0$) — система σ-алгебр событий, относительно которой процесс $x(t)$ обладает марковским свойством, то есть $x(t)$ является $\mathcal{F}_t^s$-измеримым при любом $s\leqslant t$ элементом в $(X, \mathcal{B})$ и для всех $0\leqslant s\leqslant t<u$, $x\in X$, $A\in\mathcal{B}$ почти наверное относительно меры $\mathbf{P}_{s,x}$

выполнено соотношение

$$\mathbf{P}_{s,x}\left(\{x(u)\in A\}/\mathcal{F}_t^s\right)=\mathbf{P}_{t,x(t)}(\{x(u)\in A\}).$$

В частности, возможно $\mathcal{F}_t^s=\mathcal{X}_t^s$ (см. § 2 гл. 1).

Скажем, что марковский процесс $x(t)$ прогрессивно измерим, если при любом $s\geqslant 0$ ограничение функции $x(t)$ на $[s, \infty[$ является прогрессивно измеримым относительно потока $(\mathcal{F}_t^s)_{t\geqslant s}$. Иначе говоря, процесс $x(t, \omega)$ прогрессивно измерим, если при любых $0\leqslant s\leqslant t$ отображение $x(\cdot, \cdot)$: $([s, t]\times\Omega, \mathcal{B}([s, t])\otimes\mathcal{F}_t^s)\to\to(X, \mathcal{B})$ является измеримым.

Случайную величину $\tau=\tau(\omega)$, принимающую значения в $[s, \infty]$, будем называть s-моментом остановки, если при любом $t\geqslant s$ выполнено включение $\{\tau\leqslant t\}\in\mathcal{F}_t^s$. Если τ — s-момент остановки, то можно определить σ-алгебру $\mathcal{F}_\tau^s$ так же, как это было сделано выше.

Марковский процесс $x(t)$ назовем строго марковским, если он прогрессивно измерим и выполнены следующие условия:

1) при любых $t\geqslant 0$, $A\in\mathcal{B}$ функция

$$P(s, x, t, A)=\mathbf{P}_{s,x}(\{x(t)\in A\})$$

является $\mathcal{B}([0, t])\otimes\mathcal{B}$-измеримой функцией пары аргументов $(s, x)\in[0, t]\times X$;

2) для любых $s\geqslant 0$, $x\in X$, $A\in\mathcal{B}$, $t\geqslant 0$ и конечного s-момента остановки τ выполнено соотношение

$$\mathbf{P}_{s,x}\left(\{x(t+\tau)\in A\}/\mathcal{F}_\tau^s\right)=P(\tau, x(\tau), t+\tau, A) \tag{20}$$

почти наверное относительно меры $\mathbf{P}_{s,x}$.

Заметим прежде всего, что из прогрессивной измеримости процесса и предположения 1) следует, что функция $P(s, x, t, A)$ при фиксированном A является $\mathcal{B}(R_+)\otimes\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}(R_+)$-измеримой функцией аргументов (s, x, t). Поэтому правая часть формулы (20) есть $\mathcal{F}_\tau{}^s$-измеримая случайная величина.

Покажем теперь, что прогрессивно измеримый марковский процесс, удовлетворяющий условию 1), всегда удовлетворяет условию 2), если конечный момент остановки τ принимает не более счетного числа различных значений.

В самом деле, пусть $\tau=\sum\limits_k t_k I_{\Delta_k}$, где $t_k\geqslant s$, $\Delta_k\in\mathcal{F}_{t_k}$ при всех $k=1, 2, \ldots$ Для $\Lambda\in\mathcal{F}_\tau^s$, $A\in\mathcal{B}$, $x\in X$ имеем

$$\int\limits_\Lambda \mathbf{P}_{s,x}(\{x(t+\tau)\in A\}/\mathcal{F}_\tau^s)\,d\mathbf{P}_{s,x}=\int\limits_\Lambda I_{\{x(t+\tau)\in A\}}d\mathbf{P}_{s,x}=$$

$$=\sum_k\int\limits_{\Delta_k\cap\Lambda}\mathbf{P}_{s,x}(\{x(t+t_k)\in A\}/\mathcal{F}_{t_k}^s)\,d\mathbf{P}_{s,x}=$$

$$=\sum_k \int_{\Delta_k \cap \Lambda} P(t_k,\, x(t_k),\, t+t_k,\, A)\, d\mathbf{P}_{s,x} = \int_\Lambda P(\tau,\, x(\tau),\, t+\tau,\, A) d\mathbf{P}_{s,x},$$

откуда и следует (20).

Используя это обстоятельство, а также аппроксимацию произвольных моментов остановки дискретными, можем доказать следующее утверждение о достаточных условиях строгой марковости.

Теорема 13. Пусть задан непрерывный справа марковский процесс $x(t)$, $t \geqslant 0$ в метрическом фазовом пространстве $(X, \mathscr{B})$. Предположим, что вероятность перехода $P(s, x, t, A)$ этого процесса обладает следующим свойством непрерывности: для любых $0 \leqslant s < t$, $x \in X$ и непрерывной ограниченной функции f на X справедливо соотношение

$$\lim_{u \downarrow s,\, y \to x} \int f(z) P(u, y, t, dz) = \int f(z) P(s, x, t, dz). \tag{21}$$

Тогда процесс $x(t)$ является строго марковским.

Доказательство. Согласно теореме 11, процесс $x(t)$ прогрессивно измерим. Из (21) легко выводится, что он удовлетворяет условию 1) определения строго марковского процесса. Пусть фиксированы $0 \leqslant s < t$, $x \in X$ и произвольный s-момент остановки τ, для которого $\tau(\omega) \leqslant t$. Покажем, что для всякой непрерывной ограниченной функции f на X выполняется соотношение

$$\mathbf{M}_{s,x} \{ f(x(t)) / \mathscr{F}_\tau^s \} = \int P(\tau,\, x(\tau),\, t,\, dz) f(z) \tag{22}$$

почти наверное относительно меры $\mathbf{P}_{s,x}$. С этой целью введем последовательность разбиений отрезка $[s, t]$ на куски точками $t_k^{(n)} = s + \frac{k}{2^n}(t-s)$, $k = 0, 1, \ldots, 2^n$; $n = 1, 2, \ldots$. Обозначим $\Delta_k^{(n)} = \{\omega \in \Omega : t_{k-1}^{(n)} < \tau(\omega) \leqslant t_k^{(n)}\}$, $k = 1, 2, \ldots, 2^n$, $\Delta_0^{(n)} = \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) = s\}$. Положим

$$\tau^{(n)}(\omega) = \sum_{k=0}^{2^n} t_k^{(n)} \cdot I_{\Delta_k^{(n)}}(\omega).$$

Для $\Lambda \in \mathscr{F}_\tau^s$ имеем $\Delta_k^{(n)} \cap \Lambda \in \mathscr{F}^s_{t_k^{(n)}}$ и потому

$$\int_\Lambda f(x(t))\, d\mathbf{P}_{s,x} = \sum_{k=0}^{2^n} \int_{\Lambda \cap \Delta_k^{(n)}} f(x(t))\, d\mathbf{P}_{s,x} =$$

$$= \sum_{k=0}^{2^n} \int_{\Lambda \cap \Delta_k^{(n)}} \mathbf{M}_{s,x} \left\{ f(x(t)) / \mathscr{F}^s_{t_k^{(n)}} \right\} d\mathbf{P}_{s,x} =$$

$$=\sum_{k=0}^{2^n}\int_{\Lambda\cap\Delta_k^{(n)}}\mathbf{M}_{t_k^{(n)},x\left(t_k^{(n)}\right)}f(x(t))\,d\mathbf{P}_{s,x}=$$

$$=\int_{\Lambda}\mathbf{M}_{\tau^{(n)},x(\tau^{(n)})}f(x(t))\,d\mathbf{P}_{s,x}=$$

$$=\int_{\Lambda}\left[\int f(z)P(\tau^{(n)},\ x(\tau^{(n)}),\ t,\ dz)\right]d\mathbf{P}_{s,x}.$$

Так как $\tau^{(n)}\downarrow\tau$, процесс $x(\cdot)$ непрерывен справа, а функция f непрерывна и ограничена, то отсюда в силу (21) находим

$$\int_{\Lambda}f(x(t))\,d\mathbf{P}_{s,x}=\int_{\Lambda}\left[\int f(z)P(\tau,\ x(\tau),\ t,\ dz)\right]d\mathbf{P}_{s,x}.$$

Тем самым равенство (22) доказано.

Предположим теперь, что $\tau(\omega)$ — произвольный конечный s-момент остановки и пусть задана $\mathscr{F}_\tau^s$-измеримая конечная случайная величина $\sigma(\omega)$ такая, что $\sigma(\omega)\geqslant\tau(\omega)$ при всех $\omega\in\Omega$. Покажем, что в (22) вместо t можно подставить величину σ (из условий на нее нетрудно вывести, что она также является s-моментом остановки). Положим $s_j^{(n)}=s+j\cdot 2^{-n}$ теперь уже для $j=0,1,2,\ldots$. Определим события $\Gamma_0=\{\omega\in\Omega:\sigma(\omega)=s\}$, $\Gamma_j^{(n)}=\{\omega\in\Omega:s_{j-1}^{(n)}<\sigma(\omega)\leqslant\leqslant s_j^{(n)}\}$ для $j=1,2,\ldots$ и случайную величину

$$\sigma^{(n)}(\omega)=\sum_{j=0}^{\infty}s_j^{(n)}I_{\Gamma_j^{(n)}}(\omega).$$

Снова для произвольного $\Lambda\in\mathscr{F}_\tau^s$ имеем

$$\int_{\Lambda}f(x(\sigma^{(n)}))\,d\mathbf{P}_{s,x}=\sum_{j=0}^{\infty}\int_{\Lambda\cap\Gamma_j^{(n)}}f(x(s_j^{(n)}))\,d\mathbf{P}_{s,x}.\tag{23}$$

Вычислим отдельное слагаемое в правой части последнего соотношения. Так как $\Lambda\cap\Gamma_j^{(n)}\in\mathscr{F}^s_{\tau\wedge s_j^{(n)}}$, то применяя формулу (22) к s-моменту остановки $\tau\wedge s_j^{(n)}$ (который не превосходит $s_j^{(n)}$), получаем

$$\int_{\Lambda\cap\Gamma_j^{(n)}}f\left(x\left(s_j^{(n)}\right)\right)d\mathbf{P}_{s,x}=\int_{\Lambda\cap\Gamma_j^{(n)}}\mathbf{M}_{\tau\wedge s_j^{(n)},x\left(\tau\wedge s_j^{(n)}\right)}f\left(x\left(s_j^{(n)}\right)\right)d\mathbf{P}_{s,x}.$$

Для $\omega\in\Gamma_j^{(n)}$ имеем $\sigma(\omega)\leqslant s_j^{(n)}$. Значит, и подавно $\tau(\omega)\leqslant s_j^{(n)}$. Поэтому (23) можно записать в виде

$$\int_{\Lambda}f(x(\sigma^{(n)}))\,d\mathbf{P}_{s,x}=\sum_{j=0}^{\infty}\int_{\Lambda\cap\Gamma_j^{(n)}}\mathbf{M}_{\tau,x(\tau)}f\left(x\left(s_j^{(n)}\right)\right)d\mathbf{P}_{s,x}=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty} \int_{\Lambda \cap \Gamma_j^{(n)}} \left[\int f(z) P(\tau, x(\tau), s_j^{(n)}, dz) \right] d\mathbf{P}_{s,x} =$$

$$= \int_{\Lambda} \left[\int f(z) P(\tau, x(\tau), \sigma^{(n)}, dz) \right] d\mathbf{P}_{s,x}.$$

Заметим, что для непрерывной ограниченной функции f на X функция

$$\int f(z) P(u, y, t, dz) = \mathbf{M}_{u,y} f(x(t))$$

непрерывна справа по t. Поэтому, переходя к пределу при $n \to \infty$ в предыдущем соотношении и учитывая, что $\sigma^{(n)} \downarrow \sigma$, получаем

$$\int_{\Lambda} f(x(\sigma))\, d\mathbf{P}_{s,x} = \int_{\Lambda} \left[\int f(z) P(\tau, x(\tau), \sigma, dz) \right] d\mathbf{P}_{s,x}.$$

Отсюда и следует соотношение (22) с заменой в нем t на σ:

$$\mathbf{M}_{s,x} \{ f(x(\sigma)) / \mathscr{F}_{\tau}^{s} \} = \int f(z) P(\tau, x(\tau), \sigma, dz). \tag{24}$$

Полагая здесь $\sigma = t + \tau$, легко приходим к равенству

$$\mathbf{P}_{s,x} \left(\{ x(t+\tau) \in A \} / \mathscr{F}_{\tau}^{s} \right) = P(\tau, x(\tau), t+\tau, A),$$

справедливому при любом $A \in \mathscr{B}$ почти наверное относительно меры $\mathbf{P}_{s,x}$. Теорема доказана.

Замечание. В условиях теоремы 13 для любых $s \geqslant 0$, $x \in X$, $A \in \mathscr{B}$, s-момента остановки τ и конечной $\mathscr{F}_{\tau}^{s}$-измеримой случайной величины $\sigma \geqslant \tau$ справедливо соотношение

$$\mathbf{P}_{s,x} \left(\{ x(\sigma) \in A \} / \mathscr{F}_{\tau}^{s} \right) = P(\tau, x(\tau), \sigma, A)$$

почти наверное относительно меры $\mathbf{P}_{s,x}$.

Это непосредственно следует из формулы (24).

Следующее утверждение непосредственно выводится из определения строго марковского процесса подобно тому, как теорема 1 § 2 гл. 1 была следствием определения марковского свойства.

Теорема 14. Пусть $x(t)$ — строго марковский процесс, τ — s-момент остановки. Тогда для любых натуральных $n \geqslant 1$, $x \in X$, $t_1 \geqslant 0, \ldots, t_n \geqslant 0$, $\Gamma_1 \in \mathscr{B}, \ldots, \Gamma_n \in \mathscr{B}$ справедливо соотношение

$$\mathbf{P}_{s,x} \left(\{ x(\tau + t_1) \in \Gamma_1, \ldots, x(\tau + t_n) \in \Gamma_n \} / \mathscr{F}_{\tau}^{s} \right) =$$
$$= F(\tau, x(\tau), t_1 + \tau, \Gamma_1, \ldots, t_n + \tau, \Gamma_n)$$

почти наверное относительно меры $\mathbf{P}_{s,x}$, где

$$F(u, y, s_1, \Gamma_1, \ldots, s_n, \Gamma_n) =$$
$$= \mathbf{P}_{u,y} (\{ x(s_1) \in \Gamma_1, \ldots, x(s_n) \in \Gamma_n \})$$

при $u \geqslant 0$, $y \in X$, $s_1 \geqslant u, \ldots, s_n \geqslant u$, $\Gamma_1 \in \mathscr{B}, \ldots, \Gamma_n \in \mathscr{B}$.

В заключение этого пункта приведем пример непрерывного марковского процесса, не являющегося строго марковским.

Пример. Пусть $X=R^1$, $\mathscr{B}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств R^1. Определим вероятность перехода $P(s, x, t, A)$ для $0\leqslant s<t<+\infty$, $x\in R^1$, $A\in\mathscr{B}$ формулой

$$P(s, x, t, A)=$$
$$=\begin{cases}(2\pi(t-s))^{-\frac{1}{2}}\int\limits_A \exp\{-(y-x)^2/2(t-s)\}\,dy, & \text{если } x\neq 0,\\ I_A(x), & \text{если } x=0.\end{cases}$$

Очевидно, эта функция удовлетворяет условиям теоремы 3 § 1, и потому существует непрерывный марковский процесс $x(t)$ с системой σ-алгебр $\mathscr{X}_t^s$ (см. § 2 гл. 1) и мерами $\mathbf{P}_{s,x}$, определенными на $\mathscr{X}^s$ при $s\geqslant 0$, $x\in R^1$.

Введем в рассмотрение момент τ первого попадания процесса $x(t)$ в точку $x=0$: $\tau=\inf\{t: x(t)=0\}$, полагая, как обычно, $\tau(\omega)=+\infty$, если $x(t,\omega)\neq 0$ при всех $t\geqslant 0$. Величина τ является 0-моментом остановки для рассматриваемого процесса. Это следует из включения

$$\{\tau>t\}=\bigcup_{m=1}^{\infty}\bigcap_{r\in Q_t}\left\{|x(r)|\geqslant\frac{1}{m}\right\}\in\mathscr{X}_t,$$

где через Q_t обозначена совокупность всех рациональных неотрицательных чисел, не превосходящих числа t (аналогичное обозначение: Q^t — все рациональные числа, не меньшие числа t).

Покажем, что величина τ конечна почти наверное относительно меры $\mathbf{P}_{0,x}$ при любом $x\in R^1$. Для $x=0$, очевидно, $\tau=0$. Пусть $x>0$. Непосредственным подсчетом легко убедиться в справедливости равенства

$$\mathbf{M}_{0,x}\exp\{-\sqrt{2\alpha}x(t)\}=e^{\alpha t-x\sqrt{2\alpha}},$$

каковы бы ни были $t\geqslant 0$ и $\alpha\geqslant 0$. Отсюда заключаем, что процесс $(\eta_\alpha(t))_{t\geqslant 0}$, определяемый формулой

$$\eta_\alpha(t)=\exp\{-\alpha t-x(t)\sqrt{2\alpha}\},\quad t\geqslant 0,$$

является мартингалом относительно потока σ-алгебр $(\mathscr{X}_t)_{t\geqslant 0}$ и меры $\mathbf{P}_{0,x}$. В самом деле, при $0\leqslant s<t$ почти наверное относительно меры $\mathbf{P}_{0,x}$ имеем

$$\mathbf{M}_{0,x}\{\eta_\alpha(t)/\mathscr{X}_s\}=e^{-\alpha t}\mathbf{M}_{0,x}\{e^{-x(t)\sqrt{2\alpha}}/\mathscr{X}_s\}=$$
$$=e^{-\alpha t}\mathbf{M}_{s,x(s)}\{e^{-x(t)\sqrt{2\alpha}}\}=e^{-\alpha t}\mathbf{M}_{0,x(s)}\{e^{-x(t-s)\sqrt{2\alpha}}\}=$$
$$=e^{-\alpha t}e^{\alpha(t-s)-x(s)\sqrt{2\alpha}}=\eta_\alpha(s),$$

что и требовалось. Для $n=1, 2, \ldots$ положим $\tau^n=\tau\wedge n$. Из теоремы о свободном выборе (см. [4]) следует, что

$$\mathbf{M}_{0,x}\eta_\alpha(\tau^n)=\exp\{-x\sqrt{2\alpha}\}$$

справедливо при всех $\alpha>0$ и $n=1, 2, \ldots$. Последнее равенство можно записать в виде

$$\mathbf{M}_{0,x}I_{\{\tau\leqslant n\}}\exp\{-\alpha\tau-x(\tau)\sqrt{2\alpha}\}+$$

$$+\mathbf{M}_{0,x}I_{\{\tau>n\}}\exp\{-\alpha n-x(n)\sqrt{2\alpha}\}=\exp\{-x\sqrt{2\alpha}\},$$

откуда, учитывая, что $x(\tau)=0$ при $\tau<+\infty$, а $x(n)>0$ при $n<<\tau$ (напомним, что $x>0$), находим

$$e^{-x\sqrt{2\alpha}}\leqslant e^{-\alpha n}\mathbf{P}_{0,x}\{\tau>n\}+\mathbf{M}_{0,x}I_{\{\tau\leqslant n\}}e^{-\alpha\tau}.$$

Если считать, что $e^{-\alpha\tau}=0$ на множестве $\{\omega:\tau(\omega)=+\infty\}$, то переход к пределу при $n\uparrow\infty$ в последнем неравенстве приводит к соотношению

$$\mathbf{M}_{0,x}e^{-\alpha\tau}\geqslant e^{-x\sqrt{2\alpha}}.$$

Перейдем теперь к пределу при $\alpha\downarrow 0$. Получим

$$\mathbf{P}_{0,x}\{\tau<+\infty\}=1.$$

Для $x<0$ эти рассуждения можно повторить с той лишь разницей, что вместо процесса $\eta_\alpha(t)$ следует рассмотреть процесс $(\xi_\alpha(t))_{t\geqslant 0}$, определяемый формулой

$$\xi_\alpha(t)=\exp\{-\alpha t+x(t)\sqrt{2\alpha}\}$$

для неотрицательных α. Тем самым доказано, что $\mathbf{P}_{0,x}\{\tau<<+\infty\}=1$ при всех $x\in R^1$.

Введем теперь в рассмотрение событие Λ, состоящее из всех ω, для которых найдется $t\geqslant 0$ такое, что $x(s)=0$ при всех $s\geqslant t$. Событие Λ можно представить в виде

$$\Lambda=\bigcup_{r\in Q}\bigcap_{q\in Q^r}\{x(q)=0\},$$

где через Q обозначена совокупность всех неотрицательных рациональных чисел (обозначение Q^r введено выше). Так как $x(t)\neq 0$ для $t<\tau$, то можем записать

$$\Lambda=\bigcup_{r\in Q}\bigcap_{q\in Q^r}\{x(\tau+q)=0\}.$$

Если бы рассматриваемый процесс был строго марковским, то на основании теоремы 14 с использованием очевидного свойства однородности по времени мы бы имели

$$\mathbf{P}_{0,x}(\Lambda)=\mathbf{P}_{0,x}\Big(\bigcup_{r\in Q}\bigcap_{q\in Q^r}\{x(\tau+q)=0\}\Big)=$$

$$=\mathbf{M}_{0,x}\mathbf{P}_{0,x}\Big(\bigcup_{r\in Q}\bigcap_{q\in Q^r}\{x(\tau+q)=0\}/\mathscr{X}_\tau\Big)=$$

$$=\mathbf{M}_{0,x}\mathbf{P}_{0,x(\tau)}\Big(\bigcup_{r\in Q}\bigcap_{q\in Q^r}\{x(q)=0\}\Big).$$

По доказанному $\tau<+\infty$ почти наверное относительно меры

$\mathbf{P}_{0,x}$ и потому $x(\tau)=0$. Значит, обладай наш процесс строго марковским свойством, мы бы имели равенство

$$\mathbf{P}_{0,x}(\Lambda)=\mathbf{P}_{0,0}(\Lambda).$$

Покажем, что это равенство неверно, если $x\neq 0$.

Действительно, так как $\Lambda\subset\bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=N}^{\infty}\{x(n)=0\}$, а $\mathbf{P}_{0,x}\{x(n)=0\}=0$ при $x\neq 0$, то $\mathbf{P}_{0,x}(\Lambda)=0$ для $x\neq 0$. С другой стороны, очевидно, $\Lambda\supset\bigcap\limits_{r\in Q}\{x(r)=0\}$ и так как $\mathbf{P}_{0,0}\{x(r)=0\}=1$, то $\mathbf{P}_{0,0}(\Lambda)=1$.

Полученное противоречие показывает, что рассмотренный процесс, будучи непрерывным марковским, не обладает строго марковским свойством.

Заметим, что построенный в этом примере процесс не удовлетворяет условию (21) теоремы 13: существуют такие непрерывные ограниченные на R^1 функции, для которых

$$f(0)\neq\lim_{x\to 0}\int[2\pi(t-s)]^{-1/2}\exp\{-(y-x)^2/2(t-s)\}f(y)\,dy.$$

Глава 3

ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ

Рассматривая в 1827 г. под микроскопом взвешенную в жидкости мелкую частицу (это была крупинка пыльцы растения), английский ботаник Р. Броун обнаружил, что она пребывает в непрестанном хаотическом движении (броуновское движение). Современная наука называет это явление диффузией и объясняет его столкновениями диффундирующей частицы с молекулами жидкости, находящимися в постояннном тепловом движении. Как отмечалось в § 1, гл. 1, математической моделью явления диффузии может служить марковский процесс $x(t)$, обладающий неким свойством непрерывности и такой, что его приращение $x(t+\Delta t)-x(t)$ за время от t до $t+\Delta t$ слагается из двух векторов: 1) неслучайного вектора $a(t,x(t))\Delta t+o(\Delta t)$, где векторная функция $a(t,x)$ определяет макроскопическую скорость движения среды в момент времени t в точке x; 2) случайного вектора $\delta(t,t+\Delta t)$, являющегося результатом столкновений частицы с молекулами среды; при этом предполагается, что $\mathbf{M}_{t,x}\delta(t,t+\Delta t)=0$, а для любого направления θ второй момент проекции вектора $\delta(t,t+\Delta t)$ на это направление имеет вид $\mathbf{M}_{t,x}(\delta(t,t+\Delta t),\theta)^2=(b(x,t)\theta,\theta)\Delta t+o(\Delta t)$, где $b(t,x)$ — симметричная неотрицательно определенная матрица[1], характеризующая «интенсив-

[1] Правильнее было бы говорить о линейном операторе. Всюду в этой главе считаем фиксированным некоторый ортонормированный базис в R^d и не различаем линейные операторы в R^d и их матричные представления в этом базисе. Векторы в этом базисе представляем координатными векторами-столбцами.

ность» теплового движения молекул в различных направлениях в момент времени t в точке x. Векторная функция $a(t, x)$ называется вектором переноса или сносом диффузионного процесса, матричная функция $b(t, x)$ — его матрицей диффузии. Важная проблема — какими должны быть функции $a(t, x)$, $b(t, x)$, чтобы существовал диффузионный процесс, для которого эти функции были бы соответственно вектором переноса и матрицей диффузии? Единственен ли такой процесс?

§ 1. Аналитические методы

1.1. Определение диффузионного процесса. Марковский процесс в d-мерном евклидовом пространстве R^d с вероятностью перехода $P(s, x, t, A)$ называется диффузионным, если выполнены следующие условия:

1) при всех $\varepsilon>0$, $t\geqslant 0$, $x\in R^d$

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{V_\varepsilon(x)} P(t,\ x,\ t+\Delta t,\ dy)=0,$$

где $V_\varepsilon(x)=\{y\in R^d : |y-x|>\varepsilon\}$;

2) при некотором $\varepsilon>0$ и всех $t\geqslant 0$, $x\in R^d$ существует предел

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{U_\varepsilon(x)} (y-x)\,P(t,\ x,\ t+\Delta t,\ dy),$$

где $U_\varepsilon(x)=\{y\in R^d : |y-x|\leqslant\varepsilon\}$;

3) при некотором $\varepsilon>0$ и всех $t\geqslant 0$, $x\in R^d$, $\theta\in R^d$ существует предел

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{U_\varepsilon(x)} (y-x,\ \theta)^2\,P(t,\ x,\ t+\Delta t,\ dy).$$

Нетрудно видеть, что из условия 1) и существования пределов в условиях 2)—3) при некотором $\varepsilon>0$ следует их существование при любом $\varepsilon>0$ и независимость этих пределов от ε.

Предел в 2) определяет функцию $a(t, x)$, заданную на $[0, \infty[\times R^d$ и принимающую значения в R^d. Эта функция называется вектором переноса или сносом диффузионного процесса. Предел в 3) определяет квадратическую форму $(b(t, x)\theta, \theta)$, где $t\geqslant 0$, $x\in R^d$, $\theta\in R^d$. Очевидно, матрица $b(t, x)$ порядка $d\times d$ обязана быть симметричной неотрицательно определенной. Она называется матрицей диффузии диффузионного процесса.

Достаточными условиями для того, чтобы марковский процесс в R^d с вероятностью перехода $P(s, x, t, A)$ был диффузионным, являются условия:

1^1) при некотором $\delta > 0$ и всех $t \geqslant 0$, $x \in R^d$

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int |y-x|^{2+\delta} P(t, x, t+\Delta t, dy) = 0;$$

2^1) при всех $t \geqslant 0$, $x \in R^d$ существует предел

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int (y-x) P(t, x, t+\Delta t, dy);$$

3^1) при всех $t \geqslant 0$, $x \in R^d$, $\theta \in R^d$ существует предел

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int (y-x, \theta)^2 P(t, x, t+\Delta t, dy).$$

Очевидно, предел в 2^1) есть вектор переноса $a(t, x)$, а предел в 3^1) — квадратическая форма $(b(t, x)\theta, \theta)$, где $b(t, x)$ — матрица диффузии.

Описанные в п. 1.5 § 1 главы 2 процессы являются диффузионными. В самом деле, как отмечалось в п. 1.5 § 1 главы 2, эти процессы удовлетворяют условию 1) (или 1^1)), причем равномерно относительно $x \in R^d$, $t \in [0, T]$ при любом $T < \infty$. Далее, вероятность перехода такого процесса имеет плотность $G(s, x, t, y)$ относительно лебеговой меры, и эта плотность представляет собой фундаментальное решение уравнения (7) § 1 главы 2. Из соотношений (16) § 1 главы 2 легко вывести равенства

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int G(t, x, t+\Delta t, y)(y-x, \theta)\, dy = (a(t, x), \theta),$$

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int G(t, x, t+\Delta t, y)(y-x, \theta)^2\, dy = (b(t, x)\theta, \theta),$$

справедливые при всех $t \geqslant 0$, $x \in R^d$, $\theta \in R^d$. Здесь вектор $a(t, x)$ и матрица $b(t, x)$ образованы соответственно из коэффициентов $a^j(t, x)$ и $b_{jk}(t, x)$, $j, k = 1, 2, \ldots, d$, уравнения (7) § 1 главы 2. Таким образом, справедлив следующий результат.

Теорема 1. Если функции $a(t, x)$ и $b(t, x)$, заданные при $t \geqslant 0$, $x \in R^d$ и принимающие значения соответственно в R^d и во множестве всех симметричных $d \times d$-матриц, таковы, что для любого $T < \infty$ при $(t, x) \in [0, T] \times R^d$ функции $a^j(t, x)$ и $b_{jk}(t, x)$, $j, k = 1, 2, \ldots, d$ удовлетворяют условиям теоремы 5 § 1 гл. 2, то существует дифузионный процесс, для которого $a(t, x)$ — вектор переноса, а $b(t, x)$ — матрица диффузии.

В § 1 главы 2 мы видели, что условие 1), выполненное равномерно относительно переменных $(t, x) \in [0, T] \times R^d$ при любом $T < \infty$, влечет непрерывность почти наверное соответствующего процесса. Приведем пример, показывающий, что существуют непрерывные марковские процессы, для которых пределы в условиях 2)—3) существуют не при всех x.

Пример. Пусть $d=1$. Для $0\leqslant s<t$, $x, y\in R^1$ положим

$$G(s, x, t, y)=(2\pi(t-s))^{-\frac{1}{2}}\left[\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}\right\}+\right.$$
$$\left.+c(\operatorname{sign} y)\exp\left\{-\frac{(|y|+|x|)^2}{2(t-s)}\right\}\right],$$

где c — фиксированная постоянная из интервала $[-1, 1]$. Легко проверить, что функция

$$P(s, x, t, A)=\int_A G(s, x, t, y)\,dy,$$

определенная при $0\leqslant s<t$, $x\in R^1$ для борелевских множеств $A\subset R^1$, является вероятностью перехода. Несложный подсчет приводит к формулам

$$\int (y-x)^4\, G(s, x, s+t, y)\,dy=$$
$$=3t^2-4x\int_0^t (t-\tau)\,e^{-\frac{x^2}{2\tau}}\frac{d\tau}{\sqrt{2\pi\tau}}-4cx^2\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2\tau}}\frac{d\tau}{\sqrt{2\pi\tau}},$$

$$\frac{1}{t}\int (y-x)^2 G(s, x, s+t, y)\,dy=\frac{c}{t}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2\tau}}\frac{d\tau}{\sqrt{2\pi\tau}}, \qquad (1)$$

$$\frac{1}{t}\int (y-x)^2\, G(s, x, s+t, y)\,dy=1-\frac{2cx}{t}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2\tau}}\frac{d\tau}{\sqrt{2\tau\pi}}.$$

Первая из них означает, что

$$\sup_x \int (y-x)^4 G(s, x, s+t, y)\,dy\leqslant \mathrm{const}\cdot t^2,$$

и, стало быть, согласно теореме 3 § 1 главы 2, марковский процесс с плотностью вероятности перехода $G(s, x, t, y)$ можно считать почти наверное непрерывным. Далее, из второй и третьей формул (1) следуют соотношения

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0}\frac{1}{\Delta t}\int (y-x)\,G(t, x, t+\Delta t, y)\,dy=$$
$$=\begin{cases} 0 & \text{при } x\neq 0,\ c\in[-1, 1],\\ 0 & \text{при } x\in R^1,\ c=0,\\ +\infty & \text{при } x=0,\ 0<c\leqslant 1,\\ -\infty & \text{при } x=0,\ -1\leqslant c<0,\end{cases}$$

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0}\frac{1}{\Delta t}\int (y-x)^2 G(t, x, t+\Delta t, y)\,dy=1, \quad x\in R^1,$$

означающие, что при $c\neq 0$ рассматриваемый процесс не является диффузионным (при $c=0$ это винеровский процесс). Диффузионный характер процесса нарушается в точке $x=0$

(при $c \neq 0$): в этой точке не выполняется условие 2) определения диффузионного процесса.

1.2. Уравнения А. Н. Колмогорова. В § 1 главы 1 был дан набросок вывода обратного уравнения А. Н. Колмогорова для диффузионного процесса. Сформулируем соответствующий точный результат.

Теорема 2. Предположим, что для диффузионного процесса в R^d с вероятностью перехода $P(s, x, t, A)$ вектор переноса $a(s, x)$ и матрица диффузии $b(s, x)$ представляют собой непрерывные функции по совокупности переменных $s \geqslant 0$, $x \in R^d$. Пусть вещественная непрерывная ограниченная функция f на R^d обладает тем свойством, что функция

$$u(s, x, t) = \int f(y) P(s, x, t, dy)$$

при любых фиксированных $s < t$ дважды непрерывно дифференцируема по переменной x. Тогда функция $u(s, x, t)$ при фиксированных $t > 0$, $x \in R^d$ дифференцируема по s, причем

$$\frac{\partial u(s, x, t)}{\partial s} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{d} b_{jk}(s, x) \frac{\partial^2 u(s, x, t)}{\partial x^j \partial x^k} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{d} a^j(s, x) \frac{\partial u(s, x, t)}{\partial x^j} = 0 \tag{2}$$

в области $(s, x) \in [0, t[\times R^d$ и выполнено «начальное» условие

$$\lim_{s \uparrow t} u(s, x, t) = f(x). \tag{3}$$

Вероятность перехода диффузионного процесса может обладать плотностью относительно лебеговой меры

$$P(s, x, t, A) = \int_A G(s, x, t, y)\, dy.$$

Если при этом функция $G(s, x, t, y)$ достаточно гладкая как функция от (t, y), то она удовлетворяет по этим переменным прямому уравнению А. Н. Колмогорова. Это уравнение называют также уравнением Фоккера—Планка. Более точно, справедлив следующий результат.

Теорема 3. Предположим, что для диффузионного процесса предельные соотношения в определении диффузионного процесса выполняются локально равномерно относительно $x \in R^d$ и пусть существуют непрерывные производные

$$\frac{\partial G(s, x, t, y)}{\partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial y^j} (a^j(t, y) G(s, x, t, y)),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^j \partial y^k} (b_{jk}(t, y) G(s, x, t, y)).$$

Тогда функция $G(s, x, t, y)$ при $(t, y) \in]s, \infty[\times R^d$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial G(s, x, t, y)}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial y^j \partial y^k} (b_{jk}(t, y) G(s, x, t, y)) - \\ - \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial y^j} (a^j(t, y) G(s, x, t, y)). \tag{4}$$

Доказательство. Пусть f — дважды непрерывно дифференцируемая финитная функция на R^d с вещественными значениями. Из условий теоремы следует соотношение

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int [f(y) - f(z)] G(t, z, t+\Delta t, y) \, dy = \\ = \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{d} b_{jk}(t, z) \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^j \partial z^k} + \sum_{j=1}^{d} a^j(t, z) \frac{\partial f(z)}{\partial z^j},$$

причем сходимость здесь локально равномерна относительно $z \in R^d$. Поэтому

$$\int f(y) \frac{\partial G(s, x, t, y)}{\partial t} dy = \\ = \lim_{\Delta t \downarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \left[\int G(s, x, t+\Delta t, y) f(y) \, dy - \int G(s, x, t, z) f(z) \, dz \right] = \\ = \lim_{\Delta t \downarrow 0} \int G(s, x, t, z) \frac{1}{\Delta t} \left[\int G(t, z, t+\Delta t, y) f(y) \, dy - f(z) \right] dz = \\ = \int G(s, x, t, z) \left[\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{d} b_{jk}(t, z) \frac{\partial^2 f(z)}{\partial z^j \partial z^k} + \sum_{j=1}^{d} a^j(t, z) \frac{\partial f(z)}{\partial z^j} \right] dz.$$

Интегрирование по частям приводит к соотношению

$$\int f(y) \left[- \frac{\partial G(s, x, t, y)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial y^j \partial y^k} (b_{jk}(t, y) G(s, x, t, y)) - \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial y^j} (a^j(t, y) G(s, x, t, y)) \right] dy = 0,$$

справедливому для любой дважды непрерывно дифференцируемой финитной функции $f(z)$. Отсюда, учитывая непрерывность соответствующих производных, получаем уравнение (4). Теорема доказана.

В случае диффузионного процесса, построенного в п. 1.5 § 1 гл. 2, при дополнительном условии существования непрерывных производных

$$\frac{\partial a^j(s, x)}{\partial x^m}, \quad \frac{\partial b_{jk}(s, x)}{\partial x^m}, \quad \frac{\partial^2 b_{jk}(s, x)}{\partial x^m \partial x^n}, \quad j, k, m, n = 1, \ldots, d,$$

из общей теории уравнений параболического типа (см. [14]) следует существование непрерывных производных

$$\frac{\partial G(s, x, t, y)}{\partial t}, \quad \frac{\partial G(s, x, t, y)}{\partial y^j}, \quad \frac{\partial^2 G(s, x, t, y)}{\partial y^j \partial y^k}, \quad j, k=1, \ldots, d,$$

фундаментального решения $G(s, x, t, y)$ уравнения (2). Это решение представляет собой плотность вероятности перехода рассматриваемого диффузионного процесса. Стало быть, как функция переменных (t, y) эта плотность удовлетворяет прямому уравнению А. Н. Колмогорова — уравнению (4).

1.3. Обобщенные диффузионные процессы. Представление о диффундирующей частице в жидкости, макроскопическое движение которой весьма нерегулярно (например, в жидкости могут быть завихрения), приводит к необходимости рассматривать диффузионные процессы с вектором переноса, представляющим собой разрывную (локально неограниченную, обобщенную) функцию. Те же соображения относятся и к матрице диффузии (например, диффузия рассматривается в многослойных средах с резко выраженной границей между средами; температура отдельных частей среды может быть очень высокой и т. п.). Таким образом приходим к задаче о выделении класса марковских процессов, для которого пределы в определении диффузионного процесса существовали бы в некотором слабом смысле.

Обозначим через $\mathbf{C}_f$ пространство всех непрерывных вещественных функций на $[0, \infty[\times R^d$ с компактными носителями. Марковский процесс в R^d с вероятностью перехода $P(s, x, t, A)$ назовем обобщенным диффузионным, если он удовлетворяет следующим условиям:

А) при всех $\varepsilon>0$, $\varphi\in\mathbf{C}_f$

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0}\int_0^\infty\int \varphi(t, x)\left[\frac{1}{\Delta t}\int_{V_\varepsilon(x)} P(t, x, t+\Delta t, dy)\right] dt\,dx=0;$$

Б) при некотором $\varepsilon>0$ и всех $\varphi\in\mathbf{C}_f$ существует предел

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0}\int_0^\infty\int \varphi(t, x)\left[\frac{1}{\Delta t}\int_{U_\varepsilon(x)} (y-x)\, P(t, x, t+\Delta t, dy)\right] dt\,dx;$$

В) при некотором $\varepsilon>0$ и всех $\varphi\in\mathbf{C}_f$, $\theta\in R^d$ существует предел

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0}\int_0^\infty\int \varphi(t, x)\left[\frac{1}{\Delta t}\int_{U_\varepsilon(x)} (y-x, \theta)^2 P(t, x, t+\Delta t, dy)\right] dt\,dx.$$

Как и в случаях диффузионных процессов, нетрудно видеть, что из условия А) и существования пределов в условиях Б) — В) при некотором $\varepsilon>0$ вытекает их существование при любом $\varepsilon>0$ и, кроме того, независимость этих пределов от ε.

Предел в Б) определяет линейный функционал $A(\varphi)$, $\varphi \in \mathbf{C}_f$, со значениями в R^d. Предел в условии В) определяет линейный функционал $B(\varphi)$, $\varphi \in \mathbf{C}_f$, значениями которого являются симметричные $d \times d$-матрицы. При этом $B(\varphi)$ — неотрицательно определенная матрица, если только $\varphi(t, x) \geqslant 0$ при всех $t \geqslant 0$, $x \in R^d$.

Достаточными условиями для того, чтобы марковский процесс в R^d с вероятностью перехода $P(s, x, t, A)$ был обобщенным диффузионным, являются условия:

А^1) при некотором $\delta > 0$ и всех $\varphi \in \mathbf{C}_f$

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \int_0^\infty \int \varphi(t, x) \left[\frac{1}{\Delta t} \int |y - x|^{2+\delta} P(t, x, t + \Delta t, dy) \right] dt dx = 0,$$

Б^1) при всех $\varphi \in \mathbf{C}_f$ существует предел

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \int_0^\infty \int_0 \varphi(t, x) \left[\frac{1}{\Delta t} \int (y - x) P(t, x, t + \Delta t, dy) \right] dt dx,$$

В^1) при всех $\varphi \in \mathbf{C}_f$, $\theta \in R^d$ существует предел

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \int_0^\infty \int \varphi(t, x) \left[\frac{1}{\Delta t} \int (y - x, \theta)^2 P(t, x, t + \Delta t, dy) \right] dt dx.$$

Ясно, что предел в Б^1) есть $A(\varphi)$, а предел в В^1) есть квадратичная форма $(B(\varphi)\theta, \theta)$.

Если процесс является диффузионным с локально суммируемыми вектором переноса $a(t, x)$ и матрицей диффузии $b(t, x)$ и если сходимость в предельных соотношениях 1)—3) локально равномерна относительно (t, x), то такой процесс является, очевидно, обобщенным диффузионным и для него при $\varphi \in \mathbf{C}_f$

$$A(\varphi) = \int_0^\infty \int \varphi(t, x) a(t, x) dt dx,$$

$$B(\varphi) = \int_0^\infty \int \varphi(t, x) b(t, x) dt dx.$$

Ясно, что локальная равномерность в этом утверждении может быть заменена, например, локальной ограниченностью (равномерно относительно $\Delta t > 0$) допредельных выражений в условиях 1)—3) определения диффузионного процесса.

Заметим, что определение (обобщенного) диффузионного процесса имеет дело лишь с вероятностью перехода $P(s, x, t, A)$. Если эта вероятность однородна по времени (это означает существование такой функции трех переменных $P(\tau, x, A)$, что $P(s, x, t, A) = P(t - s, x, A)$), то определение (обобщенного) диффузионного процесса существенно упрощается. Именно, марковский процесс в R^d с однородной вероятностью перехода

$P(t, x, A)$ называется обобщенным диффузионным, если он удовлетворяет следующим условиям:

A^0) при всех $\varepsilon>0$, $\varphi\in\mathbf{C}_f$ (на сей раз $\mathbf{C}_f$ обозначает совокупность всех вещественных непрерывных финитных функций на R^d)

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0}\int \varphi(x)\left[\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{V_\varepsilon(x)} P(\Delta t, x, dy)\right]dx=0;$$

B^0) при некотором $\varepsilon>0$ и всех $\varphi\in\mathbf{C}_f$ существует предел

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0}\int \varphi(x)\left[\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{U_\varepsilon(x)} (y-x)P(\Delta t, x, dy)\right]dx,$$

определяющий линейный функционал $A(\varphi)$ на $\mathbf{C}_f$ со значениями в R^d;

B^0) при некотором $\varepsilon>0$ и всех $\varphi\in\mathbf{C}_f$, $\theta\in R^d$ существует предел

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0}\int \varphi(x)\left[\frac{1}{\Delta t}\int\limits_{U_\varepsilon(x)} (y-x, \theta)^2P(\Delta t, x, dy)\right]dx,$$

определяющий квадратическую форму $(B(\varphi)\theta, \theta)$, $\theta\in R^d$, $\varphi\in\mathbf{C}_f$, где $B(\varphi)$ — линейный функционал на $\mathbf{C}_f$ со значениями во множестве всех симметричных матриц порядка $d\times d$.

Как и в неоднородном случае, можно привести достаточные условия, аналогичные условиям A^1)—B^1), для того чтобы процесс с однородной вероятностью перехода был обобщенным диффузионным.

Примером обобщенного диффузионного процесса, не являющегося диффузионным, может служить процесс, рассмотренный в примере п. 1.1, при условии, что $c\neq 0$ (вероятность перехода этого процесса однородна по времени).

Действительно, мы видели, что этот процесс не является диффузионным. Проверим, что для него выполнены условия A^0)—B^0) последнего определения. Условие A^0) очевидным образом выполняется. Умножая второе и третье соотношения в (1) на $\varphi\in\mathbf{C}_f$ и интегрируя по R^1, находим

$$\lim_{t\downarrow 0}\int \varphi(x)\frac{1}{t}\left[\int (y-x)\,G(s, x, s+t, y)\,dy\right]dx=c\cdot\varphi(0),$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\int \varphi(x)\frac{1}{t}\left[\int (y-x)^2G(s, x, s+t, y)\,dy\right]dx=\int\varphi(x)\,dx.$$

Значит, рассматриваемый процесс является обобщенным диффузионным и для него

$$A(\varphi)=c\cdot\varphi(0),\quad B(\varphi)=\int\varphi(x)\,dx,\quad \varphi\in\mathbf{C}_f.$$

Можно сказать, что снос этого процесса является обобщенной функцией вида $c\delta(x)$, где $\delta(x)$ — δ-функция Дирака.

Следующие два утверждения касаются существования обобщенных диффузионных процессов с достаточно регулярной матрицей диффузии и сносом, интегрируемым в некоторой достаточно высокой степени.

Теорема 4. Пусть при $t \geqslant 0$, $x \in R^d$ заданы функция $a(t, x)$ со значениями в R^d и функция $b(t, x)$, значениями которой служат симметричные матрицы порядка $d \times d$ такие, что выполнены условия:

а) при некотором $p > d+2$ (в частности, возможно, $p = +\infty$) и всех $T < \infty$

$$\|a\|_{p,T} = \left(\int_0^T \int |a(t, x)|^p dt dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty;$$

б) при каждом $T < \infty$ найдутся постоянные c_1, c_2, L и α ($0 < c_1 \leqslant c_2$, $L > 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$), зависящие, вообще говоря, от T, для которых

$$c_1 |\theta|^2 \leqslant (b(t, x)\theta, \theta) \leqslant c_2 |\theta|^2$$

при любых $(t, x) \in [0, T] \times R^d$, $\theta \in R^d$ и, кроме того,

$$|b_{jk}(s, x) - b_{jk}(t, y)| \leqslant L \left(|x-y|^\alpha + |t-s|^{\frac{\alpha}{2}} \right)$$

при любых $s, t \in [0, T]$, x, $y \in R^d$, $j, k = 1, 2, \ldots, d$.

Тогда

1) существует обобщенный диффузионный процесс, для которого при $\varphi \in \mathbf{C}_f$

$$A(\varphi) = \int_0^\infty \int a(t, x) \varphi(t, x) dt dx, \quad B(\varphi) = \int_0^\infty \int b(t, x) \varphi(t, x) dt dx$$

и, если $P(s, x, t, dy)$ его вероятность перехода, то при любом T

$$\lim_{\Delta t \downarrow 0} \sup_{\substack{0 \leqslant s < t \leqslant s + \Delta t \leqslant T \\ x \in R^d}} \frac{1}{\Delta t} \int |y-x|^4 P(s, x, t, dy) = 0$$

(последнее условие позволяет считать этот процесс почти наверное непрерывным);

2) при $0 \leqslant s < t$, x, $y \in R^d$

$$P(s, x, t, dy) = G(s, x, t, y) dy,$$

где $G(s, x, t, y)$ единственное непрерывное и непрерывно дифференцируемое по x решение интегро-дифференциального уравнения

$$G(s, x, t, y) = g(s, x, t, y) +$$

$$+ \int_s^t d\tau \int g(s, x, \tau, z) (\nabla_z G(\tau, z, t, y), a(\tau, z)) dz, \tag{5}$$

удовлетворяющее при любом $T<\infty$ неравенству

$$|\nabla_x G(s, x, t, y)| \leqslant K(t-s)^{-\frac{d+1}{2}} \exp\left\{-\mu \frac{|y-x|^2}{t-s}\right\}, \tag{6}$$

какими бы ни были $0 \leqslant s < t \leqslant T$, $x, y \in R^d$. Здесь K и μ — некоторые положительные постоянные, зависящие, быть может, от T; $\nabla_x G(s, x, t, y)$ — вектор с координатами $\frac{\partial G(s, x, t, y)}{\partial x^j}$, $j=1, 2, \ldots$ $\ldots, d$; $g(s, x, t, y)$ — фундаментальное решение уравнения (см. п. 1.5 § 1 гл. 2)

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{d} b_{jk}(s, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^k} = 0; \tag{7}$$

в частности, если $a(s, x)$ непрерывна по совокупности переменных и при любом $T<\infty$

$$\sup_{(s,x)\in[0,T]\times R^d} |a(s, x)| < \infty,$$

$$\max_{0\leqslant s\leqslant T} |a(s, x) - a(s, y)| \leqslant \tilde{L} |x-y|^{\alpha} \tag{8}$$

(здесь $\tilde{L}$ — некоторая положительная постоянная, вообще говоря, зависящая от T, а α — то же, что и в условии б)), то решение уравнения (5) является фундаментальным решением уравнения (2);

3) если $a(t, x)$ удовлетворяет условию а) и последовательность непрерывных функций $(a_n(t, x))_{n\geqslant 1}$ на $[0, \infty[\times R^d$ со значениями в R^d такова, что при каждых $T<\infty$ и $n=1, 2, \ldots$ выполнены условия (8) (постоянная $\tilde{L}$ может зависеть от n) и, кроме того, при любом $T<\infty$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \int |a_n(t, x) - a(t, x)|^p \, dt dx = 0$$

(здесь p то же, что и в условии а)), то равномерно в каждой области вида $0 \leqslant s < t \leqslant T$, $x, y \in R^d$, $t-s \geqslant \delta$ при любом $\delta > 0$ выполнено соотношение

$$\lim_{n\to\infty} G_n(s, x, t, y) = G(s, x, t, y),$$

где $G_n(s, x, t, y)$ — плотность вероятности перехода диффузионного процесса с коэффициентами $a_n(t, x)$, $b(t, x)$; $G(s, x, t, y)$ — решение уравнения (5);

4) если $x(t)$ — непрерывный марковский процесс с плотностью вероятности перехода $G(s, x, t, y)$, то при любых $s \geqslant 0$, $x \in R^d$ случайный процесс

$$x(t) - x(s) - \int_s^t a(\tau, x(\tau))\, d\tau, \quad t \in [s, \infty[$$

является непрерывным квадратично интегрируемым мартингалом относительно $(\mathscr{X}_t^s, \mathbf{P}_{s,x})$ с характеристикой

$$\int_s^t b(\tau, x(\tau))\,d\tau.$$

Доказательство. Используя оценки фундаментального решения уравнения (7) (см. теорему 5 § 1 гл. 2), с помощью метода последовательных приближений легко доказать существование и единственность удовлетворяющего условию (6) решения уравнения (5). В случае, когда функция $a(t, x)$ удовлетворяет условиям (8), теорема 6 § 1 гл. 2 позволяет заключить, что $G(s, x, t, y)$ является фундаментальным решением уравнения (2). Из уравнения (5) снова с использованием метода последовательных приближений оцениваем разность $G_n(s, x, t, y) - G(s, x, t, y)$ и получаем утверждение 3). Из него следует, что решение уравнения (5) в общем случае неотрицательно и удовлетворяет уравнению Колмогорова—Чепмена. Проинтегрировав уравнение (5) по y, найдем

$$\int G(s, x, t, y)\,dy \equiv 1.$$

Значит, существует марковский процесс, для которого $G(s, x, t, y)$ — плотность вероятности перехода.

Далее, из уравнения (5) с использованием неравенства (8) § 1 гл. 2 для функции $g(s, x, t, y)$ находим, что решение уравнения (5) само удовлетворяет неравенству (8) § 1 гл. 2, и, стало быть, построенный процесс можно считать почти наверное непрерывным.

Если теперь записать соотношения (16) § 1 гл. 2 для последовательности $G_n(s, x, t, y)$, аппроксимирующей $G(s, x, t, y)$ согласно утверждению 3) доказываемой теоремы, и перейти в них к пределу при $n \to \infty$, то получится, что решение уравнения (5) также удовлетворяет этим соотношениям. Из них теперь уж совсем легко получить как утверждение 1), так и утверждение 4). Этим завершается доказательство теоремы.

Замечание. Оценки последовательных приближений решения уравнения (5) показывают, что константы в неравенстве (6) зависят от функции a только через $\|a\|_{p,T}$ и потому оценка (6) равномерна относительно функций a, для которых $\|a\|_{p,T} \leqslant \tilde{K}$ при некотором $\tilde{K} > 0$.

В однородном случае, то есть в случае, когда функции a и b не зависят от t, условия и утверждения теоремы 4 упрощаются. Именно, справедлива

Теорема 4⁰. Пусть при $x \in R^d$ заданы функция $a(x)$ со значениями в R^d и функция $b(x)$, значениями которой служат симметричные матрицы порядка $d \times d$ такие, что выполнены условия:

а^0) при некотором $p>d$ (в частности, возможно $p=+\infty$)

$$\|a\|_p=\left(\int |a(y)|^p\, dy\right)^{\frac{1}{p}}<\infty;$$

б^0) существуют постоянные c_1, c_2, L и α ($0<c_1<c_2$, $L>0$, $0<\alpha\leqslant 1$) такие, что

$$c_1|\theta|^2\leqslant(b(x)\theta,\ \theta)\leqslant c_2|\theta|^2$$

при любых $x\in R^d$, $\theta\in R^d$ и, кроме того,

$$|b_{jk}(x)-b_{jk}(y)|\leqslant L|x-y|^\alpha$$

при любых x, $y\in R^d$, j, $k=1, 2,\ldots, d$.

Тогда

1^0) существует обобщенный диффузионный процесс с однородной вероятностью перехода $P(t,\ x,\ dy)$, для которого

$$\lim_{\Delta t\downarrow 0}\sup_{x\in R^d}\frac{1}{\Delta t}\int |y-x|^4 P(\Delta t,\ x,\ dy)=0$$

и для всякой финитной непрерывной функции $\varphi(x)$, $x\in R^d$

$$A(\varphi)=\int a(x)\varphi(x)\,dx, \quad B(\varphi)=\int b(x)\varphi(x)\,dx;$$

2^0 при $t>0, x, y\in R^d$ $P(t, x, dy)=G(t, x, y)\,dy$, где $G(t, x, y)$ — единственное непрерывное и непрерывно дифференцируемое решение интегро-дифференциального уравнения

$$G(t,\ x,\ y)=g(t,\ x,\ y)+$$
$$+\int_0^t d\tau\int g(t-\tau,\ x,\ y)(\nabla_z G(\tau,\ z,\ y),\ a(z))\,dz, \qquad (5^0)$$

удовлетворяющее при любом $T<\infty$ неравенству

$$|\nabla_x G(t,\ x,\ y)|\leqslant K\cdot t^{-\frac{d+1}{2}}\cdot\exp\left\{-\mu\frac{|y-x|^2}{t}\right\}, \qquad (6^0)$$

какими бы ни были $0<t\leqslant T$, $x\in R^d$; здесь K и μ — положительные постоянные, причем первая из них может зависеть от T; $g(t, x, y)$ — фундаментальное решение уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{d} b_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^j\partial x^k}; \qquad (7^0)$$

в частности, если функция $a(x)$ ограничена и удовлетворяет условию Гёльдера

$$|a(x)-a(y)|\leqslant\tilde{L}|x-y|^\alpha, \qquad (8^0)$$

то решение уравнения (5^0) совпадает с фундаментальным решением уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{d} b_{jk}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^j \partial x^k}+\sum_{j=1}^{d} a^j(x)\frac{\partial u}{\partial x^j}; \qquad (*)$$

3^0) если $a(x)$ удовлетворяет условию a^0), а последовательность функций $(a_n(x))_{n\geqslant 1}$ на R^d со значениями в R^d такова, что при каждом $n=1, 2, \ldots$ выполнено условие (8^0) с постоянной $\tilde{L}$, зависящей, быть может, от n, и, кроме того, $\|a_n-a\|_p\to\to 0$ при $n\to\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} G_n(t, x, y)=G(t, x, y),$$

где $G(t, x, y)$ — решение уравнения (5^0), а $G_n(t, x, y)$ — фундаментальное решение уравнения (*) с функциями $a_n{}^j(x)$ вместо $a^j(x)$; при этом сходимость равномерна относительно $t\in\in[\delta, T]$, $x, y\in R^d$, каковы бы ни были $\delta>0$, $T<\infty$;

4^0) если $x(t)$ — однородный непрерывный марковский процесс с плотностью вероятности перехода $G(t, x, y)$, то случайный процесс

$$x(t)-x(0)-\int_0^t a(x(\tau))\,d\tau, \quad t\geqslant 0,$$

является непрерывным квадратично интегрируемым мартингалом относительно $(\mathcal{F}_t, \mathbf{P}_x)$ (здесь $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ — естественный поток σ-алгебр, связанный с процессом $x(t)$, а $\mathbf{P}_x$ — система мер на $\bigvee_t \mathcal{F}_t$ см. гл. 4) с характеристикой

$$\int_0^t b(x(\tau))\,d\tau.$$

В заключение этого пункта приведем ряд примеров обобщенных диффузионных процессов, не укладывающихся в теоремы 4, 4^0.

Примеры. 1. Пусть ν — фиксированный вектор в R^d, для которого $|\nu|=1$. Обозначим $S=\{x\in R^d\colon (x, \nu)=0\}$. Для ограниченной измеримой функции $\varphi(x)$, $x\in R^d$, с вещественными значениями положим

$$u(t, x; \varphi)=u_0(t, x; \varphi)+$$
$$+\int_0^t d\tau\int_S g(t-\tau, x, y)\frac{\partial u_0(\tau, y; \varphi)}{\partial\nu}q(y)\,d\sigma_y, \qquad (9)$$

где внутренний интеграл в правой части — поверхностный интеграл по переменной y; $q(y)$ — заданная на S вещественная непрерывная и ограниченная функция; $\frac{\partial}{\partial\nu}$ есть производная в направлении ν, то есть $\frac{\partial f(x)}{\partial\nu}=(\nabla f(x), \nu)$; функция $g(t, x, y)$ определяется формулой $g(t, x, y)=(2\pi t)^{-\frac{d}{2}} \exp\left\{-\frac{|y-x|^2}{2t}\right\}$, наконец, $u_0(t, x, \varphi)=\int g(t, x, y)\varphi(y)\,dy$.

Можно показать, что при фиксированных $t>0$ и φ функция $u(t, x; \varphi)$ измерима и ограничена как функция переменной x, причем для $s>0$, $t>0$, $x\in R^d$ и всех ограниченных измеримых функций φ справедливо неравенство $|u(t, x; \varphi)|\leqslant K\cdot\|\varphi\|_\infty$ (K — постоянная) и соотношение

$$u(s+t, x; \varphi)=u(s, x; u(t,\cdot; \varphi))=u(t, x; u(s,\cdot; \varphi)),$$

показывающее, что при $t>0$ линейные преобразования $\varphi\to u(t,\cdot; \varphi)$ обладают полугрупповым свойством. Далее, нетрудно показать, что в случае $|q(x)|\leqslant 1$ эти преобразования неотрицательные функции переводят в неотрицательные. Наконец, очевидно, $u(t, x; \varphi_0)\equiv 1$ при $t\geqslant 0$, $x\in R^d$, где $\varphi_0(x)\equiv 1$.

Значит, семейство преобразований $\varphi\to u(t, \cdot; \varphi)$ при $t>0$ порождается однородной вероятностью перехода $P(t, x, dy)$ в R^d:

$$u(t, x; \varphi)=\int P(t, x, dy)\,\varphi(y).$$

Сравнительно простые оценки показывают, что

$$\sup_{x\in R^d}\int |y-x|^4 P(t, x, dy)=O(t^2), \quad t\downarrow 0, \tag{10}$$

и, стало быть, существует непрерывный однородный марковский процесс $x(t)$ с вероятностью перехода $P(t, x, dy)$. Элементарным подсчетом находим формулы

$$\int (y-x, \theta)\,P(t, x, dy)=(\nu, \theta)\int_0^t d\tau\int_S g(\tau, x, y)\,q(y)\,d\sigma_y,$$

$$\int (y-x, \theta)^2 P(t, x, dy)=|\theta|^2\cdot t+ \tag{10*}$$

$$+2(\nu, \theta)\int_0^t d\tau\int_S g(\tau, x, y)(y-x, \theta)\,q(y)\,d\sigma_y,$$

Из (10*) следует, что построенный процесс является (однородным) обобщенным диффузионным, и для него

$$A(\varphi)=\nu\int_S \varphi(x)\,q(x)\,d\sigma, \quad B(\varphi)=I\cdot\int\varphi(x)\,dx,$$

какой бы ни была непрерывная финитная функция φ на R^d. Здесь I — единичная матрица порядка $d\times d$. Иначе говоря, снос этого процесса представляет собой обобщенную функцию $\nu\cdot q(x)\cdot\delta_S(x)$, где $\delta_S(x)$, $x\in R^d$, такая обобщенная функция, что ее действие на непрерывную финитную функцию сводится к интегрированию последней по гиперплоскости S.

Этот пример является обобщением на многомерный случай примера п. 1.1. В самом деле, при $d=1$ «поверхность» S состоит из одной точки $x=0$. Полагая $q(0)=c$, из формулы (9) несложно вывести, что $u(t, x; \varphi)=\int \varphi(y) G(t, x, y)\,dy$, где $G(t, x, y)$ определяется при $t>0$, x, $y \in R^1$ формулой

$$G(t, x, y)=(2\pi t)^{-\frac{1}{2}}\left[\exp\left\{\frac{(y-x)^2}{2t}\right\}+\right.$$

$$\left.+c\cdot\operatorname{sign} y\cdot\exp\left\{-\frac{(|y|+|x|)^2}{2t}\right\}\right],$$

то есть совпадает с плотностью вероятности перехода процесса, рассмотренного в примере п. 1.1.

Другим (теперь уже одномерным) обобщением является следующий пример.

2. Процесс определяется значениями трех параметров — двух положительных b_1, b_2 и одного вещественного q, для которого $|q|\leqslant 1$. Фиксируем тройку таких чисел. Положим

$$q_1=\frac{(1+q)\sqrt{b_1}}{(1+q)\sqrt{b_1}+(1-q)\sqrt{b_2}}, \quad q_2=\frac{(1-q)\sqrt{b_2}}{(1+q)\sqrt{b_1}+(1-q)\sqrt{b_2}},$$

и для $t>0$, x, $y \in R^1$ определим функцию $G(t, x, y)$, равную

$$\frac{2q_1}{\sqrt{2\pi b_2 t}}\exp\left\{-\frac{1}{2t}\left(\frac{y}{\sqrt{b_2}}-\frac{x}{\sqrt{b_1}}\right)^2\right\} \quad \text{при} \quad x\leqslant 0, \quad y>0;$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi b_1 t}}\left[\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2b_1 t}\right\}-(q_1-q_2)\exp\left\{-\frac{(y+x)^2}{2b_1 t}\right\}\right] \text{при } x\leqslant 0,\ y<0;$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi b_2 t}}\left[\exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2b_2 t}\right\}+(q_1-q_2)\exp\left\{-\frac{(y+x)^2}{2b_2 t}\right\}\right] \text{при } x\geqslant 0,\ y>0;$$

$$\frac{2q_2}{\sqrt{2\pi b_1 t}}\exp\left\{-\frac{1}{2t}\left(\frac{y}{\sqrt{b_1}}-\frac{x}{\sqrt{b_2}}\right)^2\right\} \text{при} \quad x\geqslant 0, \ y<0.$$

Нетрудно показать, что функция

$$P(t, x, A)=\int_A G(t, x, y)\,dy,$$

определенная при $t>0$, $x \in R^1$, для борелевских множеств $A\subset R^1$, является однородной вероятностью перехода, и для нее выполнено условие (10). Несложный подсчет показывает также, что процесс с такой вероятностью перехода является обобщенным диффузионным, и для любой непрерывной финитной функции φ на R^1 справедливы равенства

$$A(\varphi)=\tilde{q}\cdot\varphi(0), \quad B(\varphi)=\int b(x)\varphi(x)\,dx,$$

где

$$\tilde{q}=\frac{q\sqrt{b_1 b_2}(\sqrt{b_1}+\sqrt{b_2})}{(1+q)\sqrt{b_1}+(1-q)\sqrt{b_2}}, \quad b(x)=\begin{cases} b_1 & \text{при } x<0, \\ b_2 & \text{при } x>0. \end{cases}$$

Пример п. 1.1 получится из этого, если положить $b_1=b_2=1$.

3. Пусть в R^d задана замкнутая поверхность S, разделяющая все пространство на две открытые области — внутреннюю D_i и внешнюю D_e, так что $R^d = D_i \cup D_e \cup S$. Пусть в каждой точке $x \in S$ существует касательная плоскость, $\nu(x)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S в точке x. В каждой точке $x \in S$ можно построить прямоугольную систему координат $(y^1, y^2, \ldots, y^d)$ с началом в точке x и направлением оси Oy^d вдоль $\nu(x)$. Предположим, что при некотором $r_0 > 0$ для любой точки $x \in S$ кусок поверхности $S \cap U_{r_0}(x)$ в этой системе координат (с началом в точке x) может быть задан уравнением $y^d = F(y^1, y^2, \ldots, y^{d-1})$, где F — однозначная, непрерывно дифференцируемая функция своих аргументов, причем производные $\frac{\partial F}{\partial y^i}$ предполагаются непрерывными по Гёльдеру с фиксированным показателем $\lambda > 0$ и постоянной, не зависящей от x. Если эти условия выполнены, то говорят, что поверхность S принадлежит классу $H^{1+\lambda}$.

Далее, пусть в R^d задана функция $b(x)$, значениями которой служат симметричные матрицы порядка $d \times d$, и пусть эта функция удовлетворяет условию б^0) теоремы 4^0. Тогда существует фундаментальное решение $g(t, x, y)$ уравнения (7^0) и оно удовлетворяет неравенствам в утверждении г) теоремы 5 § 1 гл. 2. Через $N(x)$, $x \in S$, обозначим направление конормали к поверхности S в точке x: $N(x) = b(x)\nu(x)$. Производная от функции f в точке $x \in R^d$ в направлении конормали $N(x_0)$, $x_0 \in S$, определяется обычным образом

$$\frac{\partial f(x)}{\partial N(x_0)} = (\nabla f(x), N(x_0)) = \sum_{i,j=1}^{d} b_{ij}(x_0)\, \nu^j(x_0) \frac{\partial f(x)}{\partial x^i},$$

где $b_{ij}(x)$ — элементы матрицы $b(x)$, $\nu^j(x)$ — координаты вектора $\nu(x)$.

Рассмотрим в области $t > 0$, $x \in S$ интегральное уравнение

$$V(t, x; \varphi) = \int \frac{\partial g(t, x, y)}{\partial N(x)} \varphi(y)\, dy + \int_0^t d\tau \int_S \frac{\partial g(t-\tau, x, y)}{\partial N(x)} V(\tau, y; \varphi)\, q(y)\, d\sigma_y, \tag{11}$$

где φ — произвольная ограниченная измеримая функция на R^d с вещественными значениями, $q(y)$ — некоторая заданная вещественная непрерывная функция на S, а $V(t, x; \varphi)$ — искомая функция. Это интегральное уравнение Вольтерра. Можно показать, что ядро этого уравнения имеет слабую особенность. Тогда к этому уравнению можно применить метод последовательных приближений и доказать существование решения этого уравнения для любой ограниченной измеримой функции φ.

Более того, для решения получается оценка

$$|V(t, x; \varphi)| \leqslant K_T \cdot t^{-\frac{1}{2}} \cdot \|\varphi\|,$$

справедливая при $t \in]0, T]$, $x \in S$ для любого $T < \infty$, где K_T — некоторая постоянная, зависящая от T, а $\|\varphi\| = \sup\limits_{x \in R^d} |\varphi(x)|$.

Теперь для ограниченных измеримых функций φ на R^d положим ($t > 0$, $x \in R^d$)

$$u(t, x; \varphi) = u_0(t, x, \varphi) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_S g(t-\tau, x, y) V(\tau, y; \varphi) q(y) d\sigma_y, \quad (12)$$

где $u_0(t, x; \varphi) = \int g(t, x, y) \varphi(y) dy$, а $V(t, x; \varphi)$ — решение уравнения (11).

Нетрудно проверить, что линейное преобразование $\varphi \to u(t, \cdot; \varphi)$ удовлетворяет неравенству $|u(t, x; \varphi)| \leqslant K \cdot \|\varphi\|$ с некоторой постоянной K, обладает полугрупповым свойством (см. пример 1) и, кроме того, $u(t, x; \varphi_0) \equiv 1$, где $\varphi_0(x) \equiv 1$. Это преобразование будет определяться вероятностью перехода, если установить, что оно неотрицательные функции φ переводит в неотрицательные $u(t, \cdot; \varphi)$. Можно показать, что это будет так, если $|q(x)| \leqslant 1$ при всех $x \in S$, а каждая точка поверхности S обладает свойством сферичности как изнутри, так и извне. (Точка $x_0 \in S$ обладает свойством сферичности изнутри, если существует такой замкнутый шар $B \subset D_i \cup S$, что $B \cap S = \{x_0\}$. Аналогично определяется свойство сферичности извне).

Итак, если поверхность S принадлежит классу $H^{1+\lambda}$ при некотором $\lambda > 0$ и если каждая точка поверхности S обладает свойством сферичности как изнутри, так и извне, то существует однородная вероятность перехода $P(t, x, dy)$, такая, что при $t > 0$, $x \in R^d$ преобразование (12) определяется формулой

$$u(t, x; \varphi) = \int P(t, x, dy) \varphi(y),$$

какова бы ни была ограниченная измеримая функция φ на R^d. Несложные оценки приводят к заключению, что для этой вероятности перехода выполнено условие (10) и, значит, существует однородный непрерывный марковский процесс $x(t)$ в R^d, для которого

$$\mathbf{M}_x \varphi(x(t)) = u(t, x; \varphi).$$

Несложный подсчет показывает, что этот процесс является обобщенным диффузионным и для него

$$A(\varphi) = \int\limits_S \varphi(x) N(x) q(x) d\sigma_x,$$

$$B(\varphi) = \int \varphi(x) b(x) dx.$$

Значит, вектор переноса этого процесса есть обобщенная функция $N(x)q(x)\delta_S(x)$, где функция $\delta_S(x)$ определяется соотношением

$$\int \delta_S(x)\varphi(x)\,d\boldsymbol{x} = \int_S \varphi(x)\,d\sigma,$$

справедливым для любой непрерывной на R^d функции φ.

1.4. Квазидиффузионные процессы. Пусть $x(t)$, $t\geqslant 0$, — почти наверное непрерывный диффузионный процесс в R^d с ограниченными и непрерывными (по совокупности переменных) вектором переноса $a(t, x)$ и матрицей диффузии $b(t, x)$. Для вещественной функции $f(t, x)$, $t\geqslant 0$, $x\in R^d$, непрерывно дифференцируемой по t, дважды непрерывно дифференцируемой по x и ограниченной вместе со своими производными, имеем (см. доказательство теоремы 3)

$$\mathbf{M}_{t,x} f(t+\Delta t, x(t+\Delta t)) - f(t, x) =$$
$$= \Delta t \left[\frac{\partial f(t, x)}{\partial t} + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{d} b_{jk}(t, x) \frac{\partial^2 f(t, x)}{\partial x^j \partial x^k} + \right.$$
$$\left. + \sum_{j=1}^{d} a^j(t, x) \frac{\partial f(t, x)}{\partial x^j} \right] + o(\Delta t).$$

Обозначим через $\mathbf{C}_b{}^{1,2}$ совокупность всех вещественных функций $f(t, x)$, $t\geqslant 0$, $x\in R^d$, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными по t первого порядка и по x до второго порядка включительно; через $\mathscr{L}$ обозначим оператор, который функции $f\in\mathbf{C}_b{}^{1,2}$ ставит в соответствие функцию в квадратных скобках последнего соотношения. Тогда, разбивая отрезок $[s, t]$ на все более мелкие куски и используя предыдущее соотношение, легко приходим к равенству

$$\mathbf{M}_{s,x} f(t, x(t)) = f(s, x) + \mathbf{M}_{s,x} \int_s^t (\mathscr{L} f)(\tau, x(\tau))\,d\tau, \tag{13}$$

справедливому при любых $0\leqslant s<t$, $x\in R^d$, $f\in\mathbf{C}_b{}^{1,2}$. С помощью вероятности перехода $P(s, x, t, dy)$ это равенство можно записать в виде (ср. с (13^0) ниже)

$$\int f(t, y) P(s, x, t, dy) = f(s, x) +$$
$$+ \int_s^t d\tau \int (\mathscr{L} f)(\tau, y) P(s, x, \tau, dy). \tag{13^1}$$

Обратно, если марковский процесс $x(t)$ почти наверное непрерывен и при всех $0\leqslant s\leqslant t$, $x\in R^d$, $f\in\mathbf{C}_b{}^{1,2}$ выполнено соотношение (13), где $\mathscr{L}$ — параболический оператор указанного вида с непрерывными и ограниченными коэффициентами, то такой процесс является диффузионным, и его вектор переноса — это вектор, составленный из коэффициентов оператора $\mathscr{L}$ при первых производных по x, а матрица диффузии — матрица, составленная из коэффициентов оператора $\mathscr{L}$ при вторых производных по x.

Назовем квазидиффузионным всякий почти наверное непрерывный марковский процесс $x(t)$ в R^d, для которого найдется параболический оператор $\mathscr{L}$ (его коэффициенты теперь уже не обязательно непрерывны и ограничены), такой что при всех $0 \leqslant s \leqslant t$, $x \in R^d$, $f \in \mathbf{C}_b^{1,2}$ выполнено соотношение (13). Вектор, составленный из коэффициентов оператора $\mathscr{L}$ при первых производных по x, будем называть по-прежнему вектором переноса, а матрицу, составленную из коэффициентов оператора $\mathscr{L}$ при вторых производных по x, — матрицей диффузии квазидиффузионного процесса.

Однородный непрерывный марковский процесс $x(t)$ в R^d (см. гл. 4) называется квазидиффузионным, если найдутся такие функции $a(x)$ и $b(x)$, $x \in R^d$ со значениями соответственно в R^d и во множестве всех симметричных неотрицательно определенных матриц порядка $d \times d$, что при любых $t \geqslant 0$, $x \in R^d$

$$\mathbf{M}_x f(x(t)) = f(x) +$$
$$+ \mathbf{M}_x \int_0^t \left[\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{d} b_{jk}(x(\tau)) \frac{\partial^2 f(x(\tau))}{\partial x^j \partial x^k} + \sum_{j=1}^{d} a^j(x(\tau)) \frac{\partial f(x(\tau))}{\partial x^j} \right] d\tau, \quad (13^0)$$

какой бы ни была дважды непрерывно дифференцируемая и ограниченная вместе со своими производными функция $f(x)$ на R^d.

Из теоремы 9 § 1 гл. 2 с помощью формулы Ито (см. [4]) легко вывести, что построенный в п. 1.5 § 1 гл. 2 диффузионный процесс является квазидиффузионным. Примерами квазидиффузионных процессов, не являющихся, вообще говоря, диффузионными, могут служить процессы, описанные в теоремах 4,4^0, что также легко доказать с помощью формулы Ито. В § 2 будут построены другие классы квазидиффузионных процессов.

§ 2. Метод стохастических дифференциальных уравнений

2.1. Стохастические дифференциальные уравнения Ито. Аналитические методы построения диффузионных (квазидиффузионных) процессов так или иначе связаны с задачей Коши (2)—(3): если при некоторых заданных функциях $a(s, x)$ и $b(s, x)$ эта задача допускает единственное решение для широкого класса «начальных» функций (такого, что любая мера однозначно определяется своими интегралами от функций этого класса), то можно ожидать, что тем самым определяется вероятность перехода диффузионного (квазидифузионного) процесса с вектором переноса $a(t, x)$ и матрицей диффузии $b(t, x)$. Разумеется, если коэффициенты уравнения (2) не являются непрерывными функциями, то решения этого уравнения не будут классическими. В этом случае приходится расширять тем или иным способом само понятие решения задачи Коши (2)—(3) (одно из таких расширений описано в теоремах 4, 4^0; см. также [9], [14], [11], [16] и проч.). Отметим еще, что аналитический подход к конструированию диффузионных и квазидиффузионных процессов, как правило, использует те или иные предположения о невырожденности матрицы диффузии, хотя имеется ряд работ, в которых это предположение не используется (см., например, [11], [16] и др.).

Есть однако другой метод построения диффузионных и квазидиффузионных процессов. Он основан на прямом конструировании траекторий искомого процесса по заданным коэффициентам $a(t, x)$, $b(t, x)$ и траекториям простейшего диффузионного процесса — винеровского (для него $a(t, x) \equiv 0$, $b(t, x) \equiv I$, что соответствует представлению о диффузии в однородной изотропной среде). Согласно этому подходу, приращение $x(t+\Delta t) - x(t)$ конструируемого процесса с точностью до бесконечно малых высшего порядка малости представляется в виде

$$x(t+\Delta t) - x(t) \simeq a(t, x(t))\Delta t + \sigma(t, x(t))(w(t+\Delta t) - w(t)), \tag{14}$$

где $w(t)$ — d_1-мерный винеровский процесс, а матрица $\sigma(t, x)$ порядка $d \times d_1$ такова, что $\sigma(t, x)\sigma^*(t, x) = b(t, x)$. Можно было бы считать, что переход к дифференциалам в приближенном равенстве (14) приведет к уравнению

$$dx(t) = a(t, x(t))dt + \sigma(t, x(t))dw(t), \tag{15}$$

если бы только имел смысл дифференциал $dw(t)$.

Записав (15) в виде интегрального уравнения

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(s, x(s))\,ds + \int_{t_0}^{t} \sigma(s, x(s))\,dw(s), \quad t \geqslant t_0, \tag{16}$$

придем к необходимости придать смысл интегралу

$$\int_{t_0}^{t} \sigma(s, x(s))\,dw(s). \tag{17}$$

Заметим, что этот интеграл нельзя понимать как интеграл Лебега—Стилтьеса, поскольку почти все траектории винеровского процесса имеют неограниченную вариацию на любом промежутке времени.

В самом деле, пусть $w(t)$ — одномерный винеровский процесс, заданный при $t \geqslant 0$, и для $n = 1, 2, \ldots$ положим $t_{nk} = \alpha + \frac{k}{n}(\beta - \alpha)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, где $[\alpha, \beta]$ — некоторый промежуток, содержащийся в $[0, +\infty]$. Положим

$$V_n = \sum_{j=1}^{n} |w(t_{nj}) - w(t_{n\,j-1})|, \quad S_n = \sum_{j=1}^{n} (w(t_{nj}) - w(t_{n\,j-1}))^2.$$

Так как при $n \to \infty$

$$\mathbf{M}(S_n - (\beta - \alpha))^2 = \mathbf{M}\left(\sum_{j=1}^{n}\left[(w(t_{nj}) - w(t_{n\,j-1}))^2 - \frac{1}{n}(\beta - \alpha)\right]\right)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{M}\left[(w(t_{nj}) - w(t_{n\,j-1}))^2 - \frac{1}{n}(\beta - \alpha)\right]^2 = 2\frac{(\beta - \alpha)^2}{n} \to 0,$$

то существует подпоследовательность $n_k \to \infty$ такая, что $S_{n_k} \to \beta - \alpha$ почти наверное. Но $S_n \leqslant V_n \cdot \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |w(t_{nj}) - w(t_{n\,j-1})|$ и в силу непрерывности почти наверное винеровского процесса $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |w(t_{nj}) - w(t_{n\,j-1})| = 0$. Поэтому V_{n_k} почти наверное стремится к бесконечности, если только $\alpha < \beta$.

Все же смысл интегралам типа (17) можно придать, как показывает следующая теорема.

а) Стохастические интегралы. Пусть задано полное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, причем предполагаем, что σ-алгебра $\mathcal{F}_t$ при всех $t\in[0, T]$ содержит все события нулевой вероятности. Пусть на этом пространстве задан одномерный винеровский процесс $w(t)$, $t\in[0, T]$, согласованный с этим потоком. Это означает, что $w(t)$ является квадратически интегрируемым мартингалом относительно этого потока с характеристикой t (считаем, что $w(0)=0$). Через $H_2[0, T]$ обозначим пространство всех прогрессивно измеримых относительно потока $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ вещественных случайных функций $f(t)=f(t, \omega)$, заданных на $[0, T]$ и таких, что

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^T f^2(t)\,dt < \infty\right\} = 1.$$

Теорема 5. Каждому процессу $f(t)$, $t\in[0, T]$, из пространства $H_2[0, T]$ можно поставить в соответствие некоторую вещественную случайную величину $\mathcal{J}(f)$, определенную на пространстве $(\Omega, \mathcal{F}\ \mathbf{P})$ и обладающую следующими свойствами:

1) для любых $\alpha, \beta\in R^1$ и $f, g\in H_2[0, T]$ почти наверное

$$\mathcal{J}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{J}(f) + \beta\mathcal{J}(g);$$

2) если $I_{[\alpha,\beta]}(t)$ — индикатор отрезка $[\alpha, \beta]\subset[0, T]$, то $\mathcal{J}(I_{[\alpha,\beta]}) = w(\beta) - w(\alpha)$;

3) если $f \in H_2[0, T]$ и $\mathbf{M}\int\limits_0^T f^2(t)\,dt < \infty$, то

$$\mathbf{M}\mathcal{I}(f) = 0, \quad \mathbf{M}(\mathcal{I}(f))^2 = \mathbf{M}\int\limits_0^T f^2(t)\,dt;$$

4) каковы бы ни были $f \in H_2[0, T]$ и постоянные $C > 0$, $N > 0$, справедливо неравенство

$$\mathbf{P}\{|\mathcal{I}(f)| > C\} \leqslant \mathbf{P}\left\{\int\limits_0^T f^2(t)\,dt > N\right\} + \frac{N}{C^2};$$

5) случайный процесс $g(t) = \mathcal{I}(f \cdot I_{[0,t]})$, $t \in [0, T]$, согласован с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$ и почти наверное непрерывен.

Доказательство. Функцию $f \in H_2[0, T]$ назовем ступенчатой, если существует такое разбиение отрезка $[0, T]$ точками $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$, что $f(t) \equiv f(t_k)$ при $t \in [t_k, t_{k+1}[$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Согласно свойствам 1)—2), для ступенчатых функций должно быть

$$\mathcal{I}(f) = \sum_{k=1}^{n} f(t_{k-1})\,[w(t_k) - w(t_{k-1})].$$

Если теперь $f \in H_2[0, T]$ и $\mathbf{M}\int\limits_0^T f^2(t)\,dt < \infty$, то существует последовательность функций $(f_n)_{n\geqslant 1}$ таких, что при каждом n функция f_n ступенчата и $\mathbf{M}\int\limits_0^T |f_n(t) - f(t)|^2\,dt \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда в силу свойства 3), которое для ступенчатых функций легко проверяется, получаем

$$\mathbf{M}(\mathcal{I}(f_n) - \mathcal{I}(f_m))^2 = \mathbf{M}\int\limits_0^T |f_n(t) - f_m(t)|^2\,dt \to 0,$$

когда $n, m \to \infty$. Значит, существует предел в среднем квадратичном последовательности случайных величин $\mathcal{I}(f_n)$. Этот предел и есть $\mathcal{I}(f)$. Для этих величин несложно получить неравенство 4).

В общем случае, когда $f \in H_2[0, T]$ существует последовательность ступенчатых функций $(f_n)_{n\geqslant 1}$ таких, что при каждом n $f_n \in H_2[0, T]$ и

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left\{\int\limits_0^T |f_n(t) - f(t)|^2\,dt > \varepsilon\right\} = 0,$$

каково бы ни было $\varepsilon > 0$. Используя неравенство свойства 4), находим

$$\mathbf{P}\{|\mathcal{J}(f_n)-\mathcal{J}(f_m)|>\varepsilon\}\leqslant \mathbf{P}\left\{\int_0^T |f_n(t)-f_m(t)|^2\,dt>\rho\right\}+\frac{\rho}{\varepsilon^2},$$

откуда следует, что величины $\mathcal{J}(f_n)$ сходятся по вероятности к некоторой предельной величине. Она и есть $\mathcal{J}(f)$ в общем случае.

Заметим теперь, что в случае ступенчатой функции f, для которой $\mathbf{M}\int_0^T f^2(t)dt<\infty$, случайный процесс $\mathcal{J}(f\cdot I_{[0,t]})$, $t\in[0, T]$, согласован с потоком $(\mathcal{F}_t)$, непрерывен почти наверное и является мартингалом, Поэтому, согласно известному неравенству для мартингалов (см. [2]), если последовательность процессов $f_n\in \in H_2[0, T]$, $n=1, 2, \ldots$, такова, что при каждом n функция f_n ступенчата и $\mathbf{M}\int_0^T |f_n(t)-f(t)|^2\,dt\to 0$, когда $n\to\infty$, то

$$\mathbf{M}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}[\mathcal{J}(f_n\cdot I_{[0,t]})-\mathcal{J}(f_m\cdot I_{[0,t]})]^2\leqslant 4\mathbf{M}\int_0^T |f_n(t)-f_m(t)|^2\,dt.$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом случае процесс $\mathcal{J}(f\cdot I_{[0,t]})$ можно считать непрерывным почти наверное. В общем случае это следует из неравенства (см. ниже (19))

$$\mathbf{P}\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|\mathcal{J}(f\cdot I_{[0,t]})|>\varepsilon\}\leqslant \mathbf{P}\left\{\int_0^T |f(s)|^2 ds>\rho\right\}+\frac{\rho}{\varepsilon^2},$$

справедливого при произвольных $\rho>0$, $\varepsilon>0$ и $f\in H_2[0, T]$. Последнее является следствием того, что процесс $\mathcal{J}(f\cdot I_{[0,t]})$, $t\in[0, T]$, представляет собой локально квадратически интегрируемый мартингал относительно потока σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$. Теорема доказана.

Случайная величина $\mathcal{J}(f\cdot I_{[0,t]})$ называется стохастическим интегралом от функции $f\in H_2[0, T]$ по винеровскому процессу на интервале $[0, t]$ и обозначается

$$\mathcal{J}(f\cdot I_{[0,t]})=\int_0^t f(s)\,dw(s).$$

Из построения видно, что в случае, когда $f\in H_2[0, T]$ и $\mathbf{M}\int_0^T f^2(t)\,dt<\infty$, случайный процесс $\int_0^t f(s)\,dw(s)$ при $t\in[0, T]$ является непрерывным (почти наверное) квадратически интегрируемым мартингалом относительно потока σ-алгебр $\mathcal{F}_t$ и его характеристика равна $\int_0^t f^2(s)\,ds$. В общем случае, когда $f\in H_2[0, T]$ этот процесс является локальным квадратически интегрируемым мартингалом относительно того же потока и с той же характеристикой.

Отметим те важные неравенства для стохастических интегралов, которые являются частными случаями общих теорем о мартингалах.

Если $f\in H_2[0, T]$ и $\mathbf{M}\int_0^T f^2(s)\,ds<\infty$, то

$$\mathbf{M}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left[\int_0^t f(s)\,dw(s)\right]^2\leqslant 4\mathbf{M}\int_0^T f^2(s)\,ds. \tag{18}$$

Для любой функции $f\in H_2[0, T]$ и любых $\varepsilon>0$, $\rho>0$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\int_0^t f(s)\,dw(s)\right|>\varepsilon\right\}\leqslant\frac{\rho}{\varepsilon^2}+\mathbf{P}\left\{\int_0^T f^2(s)\,ds>\rho\right\}. \tag{19}$$

б) Формула Ито. Мы скажем, что случайный процесс $\xi(t)$ на промежутке $[0, T]$ имеет стохастический дифференциал

$$d\xi(t)=\alpha(t)\,dt+\beta(t)\,dw(t), \tag{20}$$

если существуют такой процесс $\beta\in H_2[0, T]$ и такой процесс $\alpha(t)$, прогрессивно измеримый относительно потока σ-алгебр $\mathcal{F}_t$ и обладающий свойством

$$\int_0^T|\alpha(t)|\,dt<\infty$$

почти наверное, что почти наверное сразу при всех $t\in[0, T]$

$$\xi(t)=\xi(0)+\int_0^t\alpha(s)\,ds+\int_0^t\beta(s)\,dw(s). \tag{21}$$

Если процесс $\xi(t)$ имеет стохастический дифференциал (20) и функция $f(t, x)$, $t\in[0, T]$, $x\in R^1$, непрерывно дифференцируема по t и дважды непрерывно дифференцируема по x, то случайный процесс $f(t, \xi(t))$, $t\in[0, T]$ также имеет стохастический дифференциал, причем

$$df(t, \xi(t))=\left[\frac{\partial f(t, \xi(t))}{\partial t}+\alpha(t)\frac{\partial f(t, \xi(t))}{\partial x}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\beta^2(t)\frac{\partial^2 f(t, \xi(t))}{\partial x^2}\right]dt+\beta(t)\frac{\partial f(t, \xi(t))}{\partial x}\,dw(t). \tag{22}$$

Эта формула показывает, как преобразуется стохастический дифференциал процесса при гладкой замене переменной $x\to f(t, x)$. Она носит название формулы Ито.

в) Стохастические интегралы по многомерному винеровскому процессу. По-прежнему считается заданным полное вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, каждая из которых содержит все события вероятности нуль. Считаем, что на этом пространстве задано d_1 независимых между собой одномерных винеровских процессов $w^1(t)$, $w^2(t)$, ..., ..., $w^d(t)$, согласованных (в указанном выше смысле) с потоком σ-алгебр $\mathcal{F}_t$. Через $w(t)$ обозначаем векторный d_1-мерный винеровский процесс с координатами $w^1(t)$, $w^2(t), \ldots, w\quad(t)$. Далее, пусть $f(t)$, $t\in[0, T]$,— матричнозначный процесс ($f(t)$ — матрица порядка $d\times d_1$) такой, что элементы $f_{ij}(t)$, $i=1, \ldots, d$, $j=1, \ldots, d_1$, матрицы $f(t)$ представляют собой процессы из пространства $H_2[0, T]$. Совокупность таких матричнозначных процессов будем по-прежнему обозначать через $H_2[0, T]$. Другими словами, $H_2[0, T]$ теперь обозначает совокупность всех прогрессивно измеримых относительно потока $(\mathcal{F}_t)_{t\ [0,T]}$ случайных процессов со значениями в пространстве $d\times d_1$-матриц таких, что

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^T \mathrm{Sp}\,(f(s)\,f^*(s))\,ds < \infty\right\} = 1, \tag{23}$$

где $\mathrm{Sp}\,(f(s)\,f^*(s)) = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d_1} f_{ij}^2(s)$ (мы рассматриваем матрицы с вещественными элементами).

Согласно теореме 5, если $f\in H_2[0, T]$, то при каждых $i=1, \ldots, d$; $j=1, \ldots, d_1$ определен стохастический интеграл

$$\int_0^t f_{ij}(s)\,dw^j(s), \quad t\in[0, T],$$

обладающий свойствами 1)—5). Случайный d-мерный процесс с координатами

$$\sum_{j=1}^{d}\int_0^t f_{ij}(s)\,dw^j(s), \quad i=1, 2, \ldots, d,$$

будем называть стохастическим интегралом от мартичнозначного процесса $f(t)$ по d_1-мерному винеровскому процессу на интервале $[0, t]$ и обозначать

$$\int_0^t f(s)\,dw(s). \tag{24}$$

Согласно теореме 5, этот интеграл как функция t представляет собой непрерывный d-мерный локально квадратически интегрируемый мартингал с характеристикой

$$\int_0^t f(s) f^*(s)\, ds, \quad t \in [0, T]. \tag{25}$$

(см. (23)). Если $f \in H_2[0, T]$ и, кроме того, $\mathbf{M}\int_0^T \operatorname{Sp}(f(s) f^*(s)) \times \times ds < \infty$, то интеграл (24) как функция t является квадратически интегрируемым мартингалом с характеристикой (25).

Пусть f, $g \in H_2[0, T]$. Тогда взаимная характеристика d-мерных локально квадратически интегрируемых мартингалов $\int_0^t f(s)\, dw(s)$ и $\int_0^t g(s)\, dw(s)$ представима в виде интеграла

$$\int_0^t f(s) g^*(s)\, ds.$$

В частности, если $f \in H_2[0, T]$ и, кроме того,

$$\mathbf{M}\int_0^T \operatorname{Sp}(f(s) f^*(s))\, ds < \infty, \quad \mathbf{M}\int_0^T \operatorname{Sp}(g(s) g^*(s))\, ds < \infty,$$

то

$$\mathbf{M}\left(\int_0^t f(s)\, dw(s), \int_0^t g(s)\, dw(s)\right) = \mathbf{M}\int_0^t \operatorname{Sp}(f(s) g^*(s))\, ds. \tag{26}$$

В случае, когда $d = 1$, а $d_1 > 1$ (то есть процесс $f(t)$ является d_1-мерным) интеграл (24) будем записывать в виде

$$\int_0^t (f(s), dw(s)).$$

Это скалярный процесс. Если f и g — два таких процесса, то формула (26) запишется в виде

$$\mathbf{M}\left(\int_0^t f(s)\, dw(s), \int_0^t g(s)\, dw(s)\right) = \mathbf{M}\int_0^t (f(s), g(s))\, ds,$$

при условии, что $\mathbf{M}\int_0^T |f(s)|^2 ds < \infty$ и $\mathbf{M}\int_0^T |g(s)|^2 ds < \infty$.

Если для некоторого d-мерного случайного процесса $\xi(t)$, $t \in [0, T]$, существуют процесс $\beta \in H_2[0, T]$ и d-мерный процесс $\alpha(t)$, $t \in [0, T]$, являющийся прогрессивно измеримым относительно потока σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ и обладающий свойством

$$\int_0^T |\alpha(t)|\, dt < \infty$$

почти наверное, и эти процессы таковы, что почти наверное сразу при всех $t \in [0, T]$

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t \alpha(s)\,ds + \int_0^t \beta(s)\,dw(s), \tag{27}$$

то говорят, что процесс $\xi(t)$ имеет стохастический дифференциал

$$d\xi(t) = \alpha(t)\,dt + \beta(t)\,dw(t) \tag{28}$$

(ср. (27), (28) с (20), (21) в одномерном случае).

Предположим, что d-мерный процесс $\xi(t)$ имеет стохастический дифференциал, и пусть вещественная функция $f(t, x)$, $t \in [0, T]$, $x \in R^d$ непрерывно дифференцируема по t и дважды непрерывно дифференцируема по x. Тогда случайный процесс $f(t, \xi(t))$ также имеет стохастический дифференциал, причем

$$df(t, \xi(t)) = \left[\frac{\partial f(t, \xi(t))}{\partial t} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial f(t, \xi(t))}{\partial x^j} \alpha^j(t) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} \sum_{k=1}^{d_1} \frac{\partial^2 f(t, \xi(t))}{\partial x^i \partial x^j} \beta_{ik}(t) \beta_{jk}(t)\right] dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{d} \sum_{k=1}^{d_1} \frac{\partial f(t, \xi(t))}{\partial x^j} \beta_{jk}(t)\,dw^k(t). \tag{29}$$

Формула (29) является обобщением на многомерный случай формулы (22) и также называется формулой Ито.

г) Теорема существования и единственности решения стохастического дифференциального уравнения. Вернемся теперь к уравнениям (16), (17). Пусть заданы:

а) вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ (предполагаем, что σ-алгебра $\mathcal{F}$ полна, а σ-нлгебры $\mathcal{F}_t$ содержат все события вероятности нуль);

б) согласованный с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ d_1-мерный винеровский процесс $w(t) = (w^1(t), \ldots, w^{d_1}(t))$;

в) $\mathcal{F}_0$-измеримый случайный вектор $x_0 \in R^d$;

г) функции $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$, заданные при $t \in [0, T]$, $x \in R^d$, принимающие значения соответственно в R^d и во множестве всех $d \times d_1$-матриц и измеримые по совокупности переменных.

Решением стохастического дифференциального уравнения

$$dx(t) = a(t, x(t))\,dt + \sigma(t, x(t))\,dw(t) \tag{30}$$

с начальным условием

$$x(0) = x_0, \tag{31}$$

или, что то же, решением интегрального уравнения

$$x(t)=x_0+\int_0^t a(s, x(s))\,ds+\int_0^t \sigma(s, x(s))\,dw(s), \quad t\in[0, T], \quad (32)$$

называется d-мерный прогрессивно измеримый относительно потока σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ случайный процесс $x(t)$ такой, что:

А) векторный процесс $a(t, x(t))$ почти наверное интегрируем на отрезке $[0, T]$:

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^T |a(\tau, x(\tau))|\,d\tau<\infty\right\}=1;$$

Б) матричнозначный процесс $\sigma(t, x(t))$ принадлежит пространству $H_2[0, T]$;

В) процесс $x(t)$ имеет стохастический дифференциал (30) и удовлетворяет начальному условию (31), или, что то же, почти наверное сразу для всех $t\in[0, T]$ выполнено равенство (32).

Говорят, что уравнение (30) имеет единственное решение, удовлетворяющее начальному условию (31), если для любых двух его решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ выполнено

$$\mathbf{P}\{\max_{0\leqslant t\leqslant T}|x_1(t)-x_2(t)|>0\}=0.$$

Теорема 6. Предположим, что коэффициенты уравнения (30) удовлетворяют условиям:

1) при всех $t\in[0, T]$, $x\in R^d$

$$|a(t, x)|^2+\mathrm{Sp}(\sigma(t, x)\sigma^*(t, x))\leqslant K(1+|x|^2),$$

где K — некоторая постоянная;

2) для любого $R>0$ найдется постоянная C_R такая, что при $|x|\leqslant R$, $|y|\leqslant R$ и $t\in[0, T]$

$$|a(t, x)-a(t, y)|^2+\mathrm{Sp}[(\sigma(t, x)-\sigma(t, y))(\sigma(t, x)-\sigma(t, y))^*]\leqslant$$
$$\leqslant C_R|x-y|^2.$$

Тогда существует единственное решение уравнения (30), удовлетворяющее начальному условию (31).

Доказательство. Предположим сначала, что $\mathbf{M}|x_0|^2<<\infty$ и вместо условия 2) выполнено условие:

2^1) существует постоянная C такая, что при $x, y\in R^d$, $t\in[0, T]$ имеет место неравенство

$$|a(t, x)-a(t, y)|^2+\mathrm{Sp}[(\sigma(t, x)-\sigma(t, y))(\sigma(t, x)-\sigma(t, y))^*]\leqslant$$
$$\leqslant C|x-y|^2.$$

При $t\in[0, T]$ полагаем $x_0(t)=x_0$, а для $n\geqslant1$

$$x_n(t)=x_0+\int_0^t a(\tau, x_{n-1}(\tau))\,d\tau+\int_0^t \sigma(\tau, x_{n-1}(\tau))\,dw(\tau).$$

С использованием условия 1), неравенства типа (18) и леммы Гронуолла получаем оценку

$$\mathbf{M}\max_{0\leqslant t\leqslant T}|x_{n+1}(t)-x_n(t)|\leqslant\frac{L^nT^n}{n!},\quad n=1,2,\ldots,$$

из которой следует, что ряд

$$x_0(t)+\sum_{n=0}^{\infty}(x_{n+1}(t)-x_n(t))$$

сходится почти наверное равномерно относительно $t\in[0, T]$ и представляет собой решение уравнения (30) с начальным условием (31). Такая же оценка позволяет заключить, что в рассматриваемом случае решение уравнения (30) единственно.

В общем случае, когда коэффициенты a и σ удовлетворяют условиям 1)—2), а величина x_0 по-прежнему имеет второй момент, для $n=1, 2, \ldots$ выберем функции $a_n(t, x)$ и $\sigma_n(t, x)$ так, чтобы они, во-первых, совпадали соответственно с $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ при $t\in[0, T]$ $|x|\leqslant n$ и, во-вторых, при каждом n удовлетворяли условию 2^1) с постоянной C_n, зависящей, вообще говоря, от n. Тогда по доказанному уравнение с коэффициентами a_n, σ_n и начальным условием x_0 будет иметь единственное решение, которое обозначим через $x^{(n)}(t)$. Если положить $\tau^n=\inf\{t: |x^{(n)}(t)|\geqslant n\}$ (в случае, когда множество в фигурных скобках пусто, полагаем $\tau^n=T$), то, очевидно, $x^{(k+n)}(t)=x^{(n)}(t)$ для $t<\tau^n$. Теперь нетрудно заключить, что случайные процессы $x^{(n)}(t)$ сходятся почти наверное к некоторому процессу $x(t)$, который и есть решение уравнения (30). Переход к произвольной величине x_0 не составляет труда. Теорема доказана.

Замечание 1. Из построения решения и его единственности следует, что оно согласовано с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t^{x_0,w})_{t\in[0,T]}$, где $\mathcal{F}_t^{x_0,w}$ — минимальная σ-алгебра событий, порожденная значениями винеровского процесса w в моменты времени $s\leqslant t$, а также начальным условием x_0.

Замечание 2. Если выполнены условия теоремы 6 и $\mathbf{M}|x_0|^{2p}<\infty$ при некотором $p\geqslant 0$, то решение уравнения (30) с начальным условием x_0 удовлетворяет условиям

$$\mathbf{M}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|x(t)|^{2p}\leqslant K_p(1+\mathbf{M}|x_0|^{2p}),$$

$$\mathbf{M}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}|x(t)-x_0|^{2p}\leqslant K_p' t^p(1+\mathbf{M}|x_0|^{2p}),$$

где K_p и K_p' — постоянные, зависящие от p, K и T.

Замечание 3. Пусть заданы функции a и b, удовлетворяющие условиям теоремы 6. Предположим, что последовательность $(x_0^{(n)})_{n\geqslant 1}$ $\mathcal{F}_0$-измеримых случайных векторов в R^d такова, что $\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{M}|x_0^{(n)}-x_0|^2=0$. Если обозначить через $x^{(n)}(t)$ и $x(t)$ решения уравнения (30) с начальным условием $x_0^{(n)}$ и x_0 соответственно, то нетрудно показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M} \sup_{0\leqslant t\leqslant T} |x^{(n)}(t)-x(t)|^2=0.$$

Это свойство характеризует непрерывную зависимость решения от начальных данных.

Замечание 4. Пусть имеется две пары коэффициентов уравнения (30): $(a(t, x), \sigma(t, x))$ и $(\tilde{a}(t, x), \tilde{\sigma}(t, x))$, каждая из которых удовлетворяет условиям теоремы 6. Предположим, что при некотором $R>0$ на множестве $(t, x)\in[0, T]\times U_R(0)$ ($U_R(0)$ — шар в R^d радиуса R с центром в точке $x=0$) выполнены равенства $a(t, x)=\tilde{a}(t, x)$ и $\sigma(t, x)=\tilde{\sigma}(t, x)$, и пусть x_0 — $\mathscr{F}_0$-измеримый случайный вектор такой, что $|x_0|\leqslant R$ почти наверное. Обозначим через $x(t)$ и $\tilde{x}(t)$ решения уравнения (30) с начальным условием x_0, отвечающие коэффициентам (a, σ) и $(\tilde{a}, \tilde{\sigma})$ соответственно. Положим $\tau_R=\inf\{t:|x(t)|\geqslant R\}$, если множество в фигурных скобках пусто, полагаем $\tau_R=T$. Аналогично определим величину $\tilde{\tau}_R$. Тогда почти наверное $\tau_R=\tilde{\tau}_R$ и для $t\leqslant\tau_R$ имеет место равенство $x(t)=\tilde{x}(t)$. Это свойство характеризует локальную зависимость решений уравнения (30) от коэффициентов a и σ.

Замечание 5. Предположим, что коэффициенты $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ уравнения (30) заданы при всех $t\geqslant 0$, $x\in R^d$, и пусть d_1-мерный винеровский процесс $w(t)$ задан при всех $t\geqslant 0$ и согласован с потоком σ-алгебр $(\mathscr{F}_t)_{t\geqslant 0}$. Предположим далее, что для всякого $R>0$ существует постоянная C_R такая, что при $t\in[0, R]$, $|x|\leqslant R$, $|y|\leqslant R$ выполнено неравенство условия 2) теоремы 6. Тогда построим функции $a_R(t, x)$ и $\sigma_R(t, x)$ так, чтобы при $(t, x)\in[0, R]\times U_R(0)$ они совпадали соответственно с функциями $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ и, кроме того, чтобы они для $t\in[0, R]$, $x\in R^d$ при каждом R удовлетворяли условию 1) теоремы 6 с константой, быть может, зависящей от R. Тогда при каждом R можно построить единственное решение $x_R(t)$, $t\in[0, R]$, уравнения (30) с коэффициентами a_R и σ_R и некоторым фиксированным начальным условием x_0. Обозначим $\tau_R=\inf\{t : |x_R(t)|>R\}$, полагая $\tau_R=R$, если $|x_R(t)|\leqslant R$ при всех $t\in[0, R]$. Тогда ясно, что $x_R(t)=x_{R_1}(t)$ для $t<\tau_R$ при $R<R_1$ и, кроме того, $\tau_R\leqslant\tau_{R_1}$ почти наверное. Значит, существует конечный или бесконечный предел $\zeta=\lim\limits_{R\to\infty}\tau_R$ и для $t<\zeta$ существует предел $x(t)=\lim\limits_{R\to\infty}x_R(t)$. Если $\zeta=+\infty$ почти наверное, то уравнение (30) с начальным условием x_0 имеет единственное решение $x(t)$ при всех $t\geqslant 0$. Это будет так, если, например, коэффициенты $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ удовлетворяют условию 1) теоремы 6 при всех $t\geqslant 0$, $x\in R^d$. Если же $\mathbf{P}\{\zeta=+\infty\}>0$, то единственное решение уравнения (30) существует лишь до момента ζ. Этот момент называется моментом взрыва.

Покажем теперь, что решение уравнения (30) определяет марковскую случайную функцию. Предположим, что выполнены условия теоремы 6. Для $s \geqslant 0$ и произвольной $\mathscr{F}_s$-измеримой случайной величины ξ рассмотрим уравнение

$$x(t) = \xi + \int_s^t a(\tau, x(\tau))\, d\tau + \int_s^t \sigma(\tau, x(\tau))\, dw(\tau) \tag{33}$$

при $t \geqslant s$. Рассуждения, доказывающие теорему 6, применимы и к этому уравнению. В результате получаем, что решение этого уравнения на отрезке $[s, T]$ существует и единственно. Обозначим через $x_{s,x}(t)$ решение этого уравнения на отрезке $[s, T]$ с неслучайным начальным условием $x(s) = x$, так что решение уравнения (33) можно записать в виде $x_{s,\xi}(t)$. Из единственности решения уравнения (30) легко получаем соотношение

$$x_{0,x}(t) = x_{s,y}(t)\big|_{y = x_{0,x}(s)}, \tag{34}$$

справедливое при всех $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, $x \in R^d$. Из соотношения (34) теперь несложно получить, что

$$\mathbf{P}(\{x(t) \in A\} / \mathscr{F}_s) = \mathbf{P}(\{x_{s,y} \in A\})\big|_{y = x(s)},$$

где $x(t)$ — решение уравнения (30) с начальным условием x_0, A — произвольное борелевское подмножество R^d. Значит, случайный процесс $x(t)$ обладает марковским свойством, и его вероятность перехода определяется равенством

$$P(s, x, t, A) = \mathbf{P}(\{x_{s,x}(t) \in A\}).$$

Далее, используя формулу Ито, легко находим

$$\int f(t, y) P(s, x, t, dy) = f(s, x) + \\ + \int_s^t d\tau \int \left[\frac{\partial f(\tau, y)}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} b_{ij}(\tau, y) \frac{\partial^2 f(\tau, y)}{\partial y^i \partial y^j} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{d} a^i(\tau, y) \frac{\partial f(\tau, y)}{\partial y^j} \right] P(s, x, \tau, dy), \tag{35}$$

где f — произвольная непрерывно дифференцируемая по t, дважды непрерывно дифференцируемая по x, ограниченная вместе со своими производными функция, а матрица $b(t, x)$ с элементами $b_{ij}(t, x)$, $i, j = 1, 2, \ldots, d$, определяется равенством $b(t, x) = \sigma(t, x)\sigma^*(t, x)$. Сравнивая (35) с формулой (13^1), замечаем, что решение стохастического дифференциального уравнения (30) определяет квазидиффузионный процесс с вектором переноса $a(t, x)$ и матрицей диффузии $b(t, x) = \sigma(t, x)\sigma^*(t, x)$.

Этот процесс будет диффузионным, если коэффициенты $a(s, x)$ и $\sigma(s, x)$ непрерывны по совокупности переменных.

Замечание 6. Условия теоремы 6 гарантируют существование квазидиффузионных (диффузионных) процессов с характеристиками $a(s, x)$, $b(s, x)$ без каких-либо предположений о невырожденности матрицы $b(s, x)$ и это существенное преимущество методов стохастических дифференциальных уравнений перед аналитическими методами.

Замечание 7. При выводе обратного уравнения Колмогорова для диффузионного процесса (см. теорему 2 § 1) использовалось следующее предположение: вероятность перехода процесса $P(s, x, t, dy)$ и функция $f(y)$ должны быть такими, что функция

$$u(s, x, t) = \int f(y) P(s, x, t, dy), \ 0 \leqslant s < t, \ x \in R^d$$

при фиксированных s и t как функция переменной x дважды непрерывно дифференцируема. В связи с этим естественно поставить вопрос: каким должен быть процесс, чтобы можно было считать это предположение выполненным? Следующая теорема показывает, что в случае, когда процесс задан как решение стохастического дифференциального уравнения с достаточно гладкими коэффициентами, ответ на поставленный вопрос положителен.

Теорема 7. Предположим, что функции $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$ удовлетворяют условиям теоремы 6, непрерывны, дважды непрерывно дифференцируемы по x и при некоторых постоянных $p \geqslant 0$ и $K \geqslant 0$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,k=1}^{d} \left| \frac{\partial a^i(t, x)}{\partial x^k} \right| + \sum_{i,j,k=1}^{d} \left| \frac{\partial^2 a^i(t, x)}{\partial x^j \partial x^k} \right| + \sum_{i,k=1}^{d} \sum_{j=1}^{d_1} \left| \frac{\partial \sigma_{ij}(t, x)}{\partial x^k} \right| +$$

$$+ \sum_{i,k,l=1}^{d} \sum_{j=1}^{d_1} \left| \frac{\partial^2 \sigma_{ij}(t, x)}{\partial x^k \partial x^l} \right| \leqslant K(1 + |x|^p).$$

Далее, пусть заданная на R^d вещественная функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, причем

$$|f(x)| + \sum_{i=1}^{d} \left| \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \right| + \sum_{i,k=1}^{d} \left| \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i \partial x^k} \right| \leqslant K(1 + |x|^p).$$

Тогда функция $u(s, x, t) = \mathbf{M}(f(x_{s,x}(t)))$, $0 \leqslant s < t \leqslant T$, $x \in R^d$, где $x_{s,x}(t)$ — решение уравнения (33) при $\xi = x$ (x — произвольный неслучайный вектор из R^d), дважды непрерывно дифференцируема по x, непрерывно дифференцируема по s и удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u(s, x, t)}{\partial s} + \sum_{i=1}^{d} a^i(s, x) \frac{\partial u(s, x, t)}{\partial x^i} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{d}\sum_{j=1}^{d_1}\sigma_{ij}(s, x)\sigma_{kj}(s, x)\frac{\partial^2 u(s, x, t)}{\partial x^i \partial x^k}=0 \tag{36}$$

в области $(s, x)\in[0, t[\times R^d$ с «начальным» условием

$$\lim_{s\uparrow t} u(s, x, t)=f(x). \tag{37}$$

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений

$$\eta^{ik}_{s,x}(t)=\delta_{ik}+\int_s^t\sum_{r=1}^{d}\frac{\partial a^i}{\partial x^r}(\tau, x_{s,x}(\tau))\,\eta^{rk}_{s,x}(\tau)\,d\tau+$$

$$+\int_s^t\sum_{r=1}^{d}\sum_{j=1}^{d_1}\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x^r}(\tau, x_{s,x}(t))\,\eta^{rk}_{s,x}(\tau)\,dw^j(\tau), \tag{38}$$

где $0\leqslant s<t\leqslant T$, $x\in R^d$, $i, k=1, 2, \ldots, d$; δ_{ik} — символ Кронекера. Относительно неизвестных функций $\eta^{ik}_{s,x}(t)$ — это линейная система стохастических дифференциальных уравнений, правда, со случайными коэффициентами. Используя рассуждения, доказывающие теорему 6, можно доказать, что решение системы уравнений (38) существует и единственно. Теперь несложно показать, что при всех $0\leqslant s<t\leqslant T$, $x\in R^d$, $i, k=1, 2, \ldots, d$

$$\lim_{h\to 0}\mathbf{M}\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left|\frac{1}{h}\left(x^i_{s,x+he_k}(t)-x^i_{s,x}(t)\right)-\eta^{ik}_{s,x}(t)\right|^2=0,$$

где e_k — k-ый базисный вектор в R^d, $h\in R^1$. Но тогда

$$\lim_{h\to 0}\frac{u(s, x+he_k, t)-u(s, x, t)}{h}=\sum_{i=1}^{d}\mathbf{M}\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_{s,x}(t))\,\eta^{ik}_{s,x}(t)$$

(существование математического ожидания справа следует из предположения теоремы и замечания 7), и, стало быть, функция $u(s, x, t)$ дифференцируема по x. Нетрудно видеть, что эти производные непрерывны по совокупности переменных.

Аналогичный прием можно применить еще раз и таким образом доказать существование и непрерывность вторых производных по x. Так как процесс $x_{s,x}(t)$ является диффузионным, то отсюда следует (см. теорему 2), что функция $u(s, x, t)$ дифференцируема по s и является решением задачи Коши (36)—(37). Этим завершается доказательство теоремы.

Доказанная теорема содержит достаточные условия существования решения задачи Коши (36)—(37). Более того, для этого решения справедливо представление

$$u(s, x, t)=\mathbf{M}f(x_{s,x}(t)),$$

что дает возможность разработки численных методов решения этой задачи по способу Монте Карло. Еще раз подчеркнем, что никаких условий невырожденности матрицы $b(t, x)$ здесь не предполагается.

2.2. Мартингальная постановка задачи.

а) Сильные и слабые решения стохастических дифференциальных уравнений. Условие Липшица на коэффициенты стохастического дифференциального уравнения является слишком жестким. Многочисленные приложения приводят к необходимости рассматривать стохастические дифференциальные уравнения с коэффициентами, не столь гладко зависящими от пространственной переменной. В связи с этим приходится пересмотреть само понятие решения стохастического дифференциального уравнения. В п. 2.1 считались заданными не только коэффициенты уравнения, но и вероятностное пространство с определенным на нем винеровским процессом. Можно отказаться от такого подхода и считать, что заданы лишь коэффициенты уравнения $a(t,x)$ и $\sigma(t,x)$. Требуется построить вероятностное пространство и такие непрерывные случайные процессы $x(t)$ и $w(t)$ на нем, чтобы процесс $w(t)$ был винеровским, а процесс $x(t)$ имел стохастический дифференциал (30). Это на первый взгляд безобидное расширение приводит к интересным эффектам, как показывает следующий пример.

Пример. Пусть на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ задан согласованный с этим потоком одномерный винеровский процесс $x(t)$, $t\geqslant 0$, (считаем $x(0)=0$). Положим

$$w(t)=\int_0^t \operatorname{sign} x(s)\,dx(s),\quad t\geqslant 0. \tag{39}$$

Процесс $w(t)$, будучи непрерывным квадратически интегрируемым мартингалом (относительно потока $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$) с характеристикой t, представляет собой винеровский процесс (см. теорему 4 § 1 гл. 2). Теперь, записав $x(t)$ в виде

$$x(t)=\int_0^t \operatorname{sign} x(s)\,dw(s),\quad t\geqslant 0, \tag{40}$$

замечаем, что процесс $x(t)$ является решением стохастического дифференциального уравнения (30) с $a(t,x)\equiv 0$, $\sigma(t,x)=$ $=\operatorname{sign} x$. При этом винеровский процесс $w(t)$ не был задан заранее, а наоборот, был задан заранее процесс $x(t)$, являющийся решением уравнения (40); процесс же $w(t)$ получался из процесса $x(t)$ с помощью операции стохастического интегрирования (39).

Построенное решение уравнения (40) обладает еще одной особенностью, странной с точки зрения замечания 1 к теореме 6. Именно, если мы обозначим через $(\mathcal{F}_t^w)_{t\geqslant 0}$ поток σ-алгебр, порожденный процессом $w(t)$, то обнаружим, что процесс $x(t)$ не согласован с этим потоком. Это следует из представления

$$w(t)=|x(t)|-\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\varepsilon}\int_0^t I_{[0,\varepsilon]}(|x(s)|)\,ds$$

(здесь $I_{[0,\varepsilon]}(x)$ — индикатор интервала $[0, \varepsilon]$), которое легко может быть доказано с помощью формулы Ито, примененной к гладким аппроксимациям функции $f(x)=|x|$ с последующим предельным переходом. Значит, $\mathcal{F}_t^w\subseteq\mathcal{F}_t^{|x|}$ при всех $t\geqslant 0$, где через $(\mathcal{F}_t^{|x|})_{t\geqslant 0}$ обозначен поток σ-алгебр, порожденный процессом $(|x(t)|)_{t\geqslant 0}$. Ясно, что поток σ-алгебр $(\mathcal{F}_t^x)_{t\geqslant 0}$, порожденный процессом $(x(t))_{t\geqslant 0}$, существенно шире потока $(\mathcal{F}_t^{|x|})_{t\geqslant 0}$, и потому $x(t)$ не является $\mathcal{F}_t^w$-измеримым.

Как видим, решение стохастического дифференциального уравнения, построенное в примере, существенно отличается от тех решений, которые строились в условиях теоремы 6. Там в принципе решение $x(t)$ могло быть сконструировано как функционал от винеровской траектории w на отрезке времени $[0, t]$; здесь этого сделать в принципе нельзя.

Заметим еще, что решение уравнения (40) не единственно: вместе с процессом $x(t)$ решением является и процесс $-x(t)$. Однако, как нетрудно видеть, всякое решение является винеровским процессом, то есть все решения имеют одни и те же распределения.

Итак, возможна такая точка зрения: заданы лишь коэффициенты стохастического дифференциального уравнения $a(t, x)$ и $\sigma(t, x)$, начальное значение считается произвольным фиксированным $x\in R^d$. Требуется построить вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ и на нем два непрерывных процесса: $w(t)$ со значениями в R^{d_1} и $x(t)$ со значениями в R^d так, чтобы первый из них был винеровским и чтобы почти наверное сразу при всех t

$$x(t)=x+\int_0^t a(\tau, x(\tau))\,d\tau+\int_0^t \sigma(\tau, x(\tau))\,dw(\tau). \tag{41}$$

Заметим, что для того чтобы второй интеграл здесь был определен, необходимо, согласно теореме 5, чтобы $w(t)$ был квадратично интегрируемым мартингалом с характеристикой $t\cdot I$ относительно потока σ-алгебр, порожденного процессом $x(t)$. Если все это построить можно, то говорят, что уравнение (41) имеет слабое решение. Подчеркнем, что решение — это пара процессов $(w(t), x(t))$, хотя, допуская некоторую вольность речи, слабым решением называют процесс $x(t)$.

Если слабое решение $(w(t), x(t))$ уравнения (41) таково, что процесс $x(t)$ согласован с потоком σ-алгебр $(\mathcal{F}_t^w)_{t\geqslant 0}$, порожденным процессом $w(t)$, то такое решение называют сильным. Сильными являются решения стохастических дифференциальных уравнений, построенные в условиях теоремы 6. Напротив, построенное в примере решение уравнения (40) является слабым и не является сильным.

Различают и два вида единственности решений стохастических дифференциальных уравнений. Говорят, что решение уравнения (41) единственно в сильном смысле (единственно по траекториям, сильно единственно), если для любых двух решений $(w_1(t), x_1(t))$ и $(w_2(t), x_2(t))$, заданных на одном и том же вероятностном пространстве, из равенств $w_1(t) \equiv w_2(t)$, $x_1(0) = x_2(0)$ следует, что

$$\mathbf{P}\{\sup_{t \geqslant 0} |x_1(t) - x_2(t)| > 0\} = 0.$$

Если же любые два решения $(w_1(t), x_1(t))$ и $(w_2(t), x_2(t))$ уравнения (41) имеют одинаковые конечномерные распределения, то говорят, что решение уравнения (41) единственно в слабом смысле.

Например, решение уравнения (41) в условиях теоремы 6 (на коэфициенты) сильно единственно. Решение уравнения (40), как мы видели, неединственно в сильном смысле, однако слабо единственно.

Далее, в отношении уравнения (41) заметим, что если $(w(t), x(t))$ — его решение, то процесс

$$\xi(t) = x(t) - x - \int_0^t a(\tau, x(\tau))\, d\tau, \quad t \geqslant 0, \tag{42}$$

является квадратически интегрируемым мартингалом с характеристикой

$$\langle \xi \rangle_t = \int_0^t в(\tau, x(\tau))\, d\tau, \quad в(t,x) = \sigma(t,x)\sigma^*(t,x). \tag{43}$$

Наборот, если на некотором вероятностном пространстве имеется процесс $x(t)$ такой, что построенный по нему процесс (42) является квадратически интегрируемым мартингалом с характеристикой (43), то, расширяя, когда это необходимо, исходное пространство, можно построить на нем винеровский процесс $w(t)$ со значениями в R^{d_1} так, чтобы он с процессом $x(t)$ был связан соотношением (41) сразу при всех t почти наверное.

Таким образом, задача может быть упрощена: заданы функции $a(s,x)$ и $b(s,x)$, $s \geqslant 0$, $x \in R^d$, со значениями соответственно в R^d и во множестве всех симметричных неотрицательно определенных матриц порядка $d \times d$; требуется построить вероятностное пространство и на нем d-мерный случайный процесс $x(t)$ так, чтобы построенный по нему процесс (42) был квадратически интегрируемым мартингалом с характеристикой (43). Более того, поскольку процесс $x(t)$ является непрерывным, то можно считать, что вероятностное пространство совпадает с пространством непрерывных функций, заданных при $t \geqslant 0$ и принимающих значения в R^d, а задача заключается в построении меры на этом пространстве такой, что почти все функции по этой мере удовлетворяют указанным условиям.

Сформулируем точно постановку задачи.

Обозначим через Ω пространство всех непрерывных функций, заданных на $[0, +\infty[$ и принимающих значения в R^d. Пусть $\mathscr{M}_t^s$ при $0 \leqslant s \leqslant t$ обозначает минимальную σ-алгебру подмножеств Ω, содержащую все множества вида $\{x(\cdot) \in \Omega : x(\tau) \in A\}$, где $\tau \in [s, t]$, A — борелевское подмножество R^d. Как обычно, полагаем $\mathscr{M}_t = \mathscr{M}_t^0$, $\mathscr{M}^s = \mathscr{M}_\infty^s$. Предположим, что при $(s, x) \in [0, +\infty[\times R^d$ заданы измеримые функции $a(s, x)$ и $b(s, x)$ со значениями соответственно в R^d и во множестве всех симметричных неотрицательно определенных матриц порядка $d \times d$.

Для заданных $s \geqslant 0$, $x \in R^d$ требуется построить вероятностную меру $\mathbf{P}_{s,x}$ на измеримом пространстве $(\Omega, \mathscr{M}^s)$ такую, что

1) $\mathbf{P}_{s,x}(\{x(\cdot) \in \Omega : x(s) = x\}) = 1$;

2) процесс

$$x(t) - x(s) - \int_s^t a(\tau, x(\tau))\, d\tau, \quad t \in [s, +\infty[$$

является квадратически интегрируемым мартингалом относительно $(\mathscr{M}_t^s, \mathbf{P}_{s,x})$ с характеристикой

$$\int_0^t b(\tau, x(\tau))\, d\tau.$$

Так поставленная задача называется проблемой мартингалов, а мера $\mathbf{P}_{s,x}$ называется мерой, решающей проблему мартингалов.

Говорят, что проблема мартингалов для данных коэффициентов $a(s, x)$, b, (s, x) имеет единственное решение, если при каждых $s \geqslant 0$ и $x \in R^d$ из того, что меры $\mathbf{P}_{x,x}$ и $\mathbf{P}'_{s,x}$ решают проблему мартингалов, следует, что $\mathbf{P}_{s,x}(\Lambda) = \mathbf{P}'_{s,x}(\Lambda)$, каково бы ни было $\Lambda \in \mathscr{M}^s$.

С точки зрения введенных выше определений существование и единственность решения проблемы мартингалов есть существование слабого решения соответствующего стохастического дифференциального уравнения и его слабая единственность.

Покажем, что в случае, когда проблема мартингалов имеет единственное решение, система объектов $x(t)$, $\mathscr{M}_t^s$, $\mathbf{P}_{s,x}$ обладает марковским свойством, то есть, при всех $0 \leqslant s \leqslant t < \tau$, $x \in R^d$, борелевских $A \subset R^d$

$$\mathbf{P}_{s,x}\{x(\tau) \in A / \mathscr{M}_t^s\} = \mathbf{P}_{t,x(t)}\{x(\tau) \in A\}. \tag{44}$$

В самом деле, рассмотрим меру на $\mathscr{M}^t$, задаваемую как регулярное условное распределение меры $\mathbf{P}_{s,x}$ при фиксированном

$\mathscr{M}^s_t$. Относительно этой меры, как нетрудно видеть, процесс

$$x(\tau)-x(t)-\int_t^\tau a(\rho,\ x(\rho))\,d\rho,\ \tau\in[t,+\infty[$$

является квадратически интегрируемым мартингалом с характеристикой

$$\int_t^\tau b(\rho,\ x(\rho))\,d\rho.$$

В силу единственности решения проблемы мартингалов указанное регулярное условное распределение на измеримом пространстве $(\Omega,\ \mathscr{M}^t)$ совпадает с мерой $\mathbf{P}_{t,\,x(t)}$. Отсюда следует (44), что и требовалось.

Далее, предполагая, что проблема мартингалов для данных коэффициентов $a(t,x)$ и $b(t,x)$ имеет решение, для всякой непрерывно дифференцируемой по t и дважды непрерывно дифференцируемой по x вещественной функции $f(t,x)$, $t\geqslant 0$, $x\in R^d$, ограниченной вместе со своими производными, в силу формулы Ито получаем

$$\mathbf{M}_{s,x}f(t,\ x(t))=f(s,\ x)+\mathbf{M}_{s,x}\int_s^t(\mathscr{L}f)(\tau,\ x(\tau))\,d\tau, \qquad (45)$$

где

$$(\mathscr{L}f)(t,\ x)=\frac{\partial f(t,\ x)}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^d b_{jk}(t,\ x)\frac{\partial^2 f(t,\ x)}{\partial x^k\partial x^j}+$$
$$+\sum_{j=1}^d a^j(t,\ x)\frac{\partial f(t,\ x)}{\partial x^j}.$$

Таким образом, если коэффициенты $a(t,x)$ и $b(t,x)$ таковы, что соответствующая проблема мартингалов имеет единственное решение, то существует квазидиффузионный процесс с вектором переноса $a(t,x)$ и матрицей диффузии $b(t,x)$ (ср. (45) с (13)).

б) Построение решений с помощью предельного перехода. Рассмотрим некоторые методы построения решения проблемы мартингалов и доказательства его единственности.

Теорема 8. Предположим, что на $[0,\infty[\times R^d$ заданы последовательности функций $(a_n(t,\ x))_{n\geqslant 1}$ и $(b_n(t,\ x))_{n\geqslant 1}$ со значениями соответственно в R^d и во множестве всех симметричных неотрицательно определенных матриц порядка $d\times d$, и пусть для данных $s\geqslant 0$, $x\in R^d$, $n=1,2,\ldots$ существует решение $\mathbf{P}^{(n)}_{s,x}$ проблемы мартингалов для коэффициентов $a_n(t,\ y)$ и $b_n(t,\ y)$. Если выполнены условия

$$\sup_{\substack{t\geqslant 0,\, y\in R^d\\ n=1,2\ldots}} |a_n(t, y)| < \infty, \qquad \sup_{\substack{t\geqslant 0,\, y\in R^d,\\ n=1,2,\ldots,|\theta|\leqslant 1}} (b_n(t, y)\,\theta, \theta) < \infty,$$

то семейство мер $(\mathbf{P}^{(n)}_{s,x})_{n\geqslant 1}$ компактно относительно слабой сходимости (меры $\mathbf{P}^{(n)}_{s,x}$ определены на метрическом пространстве $(\Omega, \mathscr{M}^s)$).

Доказательство. Хорошо известно, что для компактности семейства мер $(\mathbf{P}^{(n)}_{s,x})_{n\geqslant 1}$ на пространстве $(\Omega, \mathscr{M}^s)$ необходимо и достаточно, чтобы любых $\rho > 0$ и $T\in [s, \infty[$

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \sup_n \mathbf{P}^{(n)}_{s,x} \{\sup_{0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant t_1+\delta\leqslant T} |x(t_2)-x(t_1)| > \rho\} = 0 \tag{46}$$

(см. [2]). В свою очередь, (46) будет выполнено, если доказать, что при любых $T\in[s, \infty[$ существует постоянная K_T такая, для которой

$$\sup_n \mathbf{M}^{(n)}_{s,x} |x(t_2)-x(t_1)|^4 \leqslant K_T |t_2-t_1|^2, \tag{47}$$

каковы бы ни были $t_1, t_2\in [s, T]$. Здесь $\mathbf{M}^{(n)}_{s,x}$ — символ операции взятия математического ожидания по мере $\mathbf{P}^{(n)}_{s,x}$. Полагая для $t\geqslant s$

$$\xi_n(t) = x(t) - x(s) - \int_s^t a_n(\tau, x(\tau))\, d\tau$$

и замечая, что $\xi_n(t)$ — мартингал с характеристикой

$$\int_s^t b_n(\tau, x(\tau))\, d\tau,$$

из условий теоремы легко выводим

$$\sup_n \mathbf{M}^{(n)}_{s,x} |\xi_n(t_2)-\xi_n(t_1)|^4 \leqslant K\cdot |t_2-t_1|^2$$

при любых $t_1, t_2\in[s, T]$, а так как при таких t_1, t_2

$$\sup_n \mathbf{M}^{(n)}_{s,x} \left|\int_{t_1}^{t_2} a(\tau, x(\tau))\, d\tau\right|^4 \leqslant K\cdot |t_2-t_1|^4,$$

то отсюда заключаем, что верно (47). Теорема доказана.

Пусть выполнены условия теоремы 8. Согласно утверждению этой теоремы, существует подпоследовательность $n_k\to\infty$ такая, что меры $\mathbf{P}^{(n_k)}_{s,x}$ слабо сходятся к некоторой мере $\mathbf{P}_{s,x}$ заданной на пространстве $(\Omega, \mathscr{M}^s)$. Очевидно, $\mathbf{P}_{s,x}(\{x(s)=x\})=1$, и естественно поставить вопрос: как описать меру $\mathbf{P}_{s,x}$? будет ли она решением некоторой проблемы мартингалов?

Дадим ответы на эти вопросы при дополнительных предположениях, а именно:

а) матрица $b_n(t, x)$ равномерно невырождена, то есть существует постоянная $c>0$, для которой $(b_n(t, x)\theta, \theta)\geqslant c|\theta|^2$ при всех $t\geqslant 0$, $x\in R^d$, $n=1, 2,\ldots$, $\theta\in R^d$;

б) существуют функции $a(s, x)$ и $b(s, x)$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} a_n(s, x)=a(s, x),\ \lim_{n\to\infty} b_n(s,x)=b(s, x)$$

при почти всех $s\geqslant 0$, $x\in R^d$.

Далее, воспользуемся следующим утверждением (см. [9]).

Лемма 1. Если выполнены условия теоремы 8, а также условие а), то для любой функции $f(t, y)$, $t\geqslant 0$, $y\in R^d$ с вещественными значениями, для которой при некотором $p\geqslant d+1$ и любом $T<\infty$

$$\|f\|_{p,T}=\left(\int_0^T\int|f(t, y)|^p dt dy\right)^{\frac{1}{p}}<\infty,$$

справедливо неравенство

$$\mathbf{M}_{s,x}^{(n)}\int_s^T|f(\tau, x(\tau))|\,d\tau\leqslant N_T\left(\int_s^T\int|f(\tau, y)|^p d\tau dy\right)^{\frac{1}{p}},$$

где N_T — некоторая постоянная (она зависит лишь от T, p, c, d и констант, ограничивающих все $a_n(t, x)$ и $b_n(t, x)$).

Заметим, что если выполнены условия леммы 1 и мера $\mathbf{P}_{s,x}$ является слабым пределом подпоследовательности мер $\mathbf{P}_{s,x}^{(n_k)}$ то для нее также верно неравенство

$$\mathbf{M}_{s,x}\int_s^T|f(\tau, x(\tau))|\,d\tau\leqslant N_T\left(\int_s^T\int|f(\tau, y)|^p d\tau dy\right)^{\frac{1}{p}},$$

какова бы ни была функция $f(t, y)$, для которой $\|f\|_{p,T}<\infty$ при некотором $p\geqslant d+1$ и всех $T<\infty$.

Докажем теперь, что в условиях теоремы 8, а также а)—б), предельная мера $\mathbf{P}_{s,x}$ является решением проблемы мартингалов для коэффициентов $a(t, y)$ и $b(t, y)$.

Достаточно проверить, что процесс

$$\xi(t)=x(t)-x(s)-\int_s^t a(\tau, x(\tau))\,d\tau,\ t\in[s, \infty[,$$

является квадратически интегрируемым мартингалом относительно $(\mathscr{M}_t^s, \mathbf{P}_{s,x})$ с характеристикой

$$\int_s^t b(\tau, x(\tau))\,d\tau.$$

Пусть η_t^s — произвольный непрерывный скалярный функционал на пространстве непрерывных функций, заданных на $[s, t]$ и принимающих значения в R^d. Наше утверждение будет доказано, если мы убедимся в том, что

$$\mathbf{M}_{s,x}\eta_t^s(\xi(\tau)-\xi(t), \theta=0,$$

$$\mathbf{M}_{s,x}\eta_t^s(\xi(\tau)-\xi(t), \theta)=\mathbf{M}_{s,x}\eta_t^s\int_t^\tau (b(r, x(r)\theta, \theta))\,dr, \tag{48}$$

каковы бы ни были $t\leqslant\tau$, $\theta\in\mathbf{R}^d$. Так как при $n=1, 2\ldots$

$$\mathbf{M}_{s,x}^{(n)}\eta_t^s\ (\xi_n(\tau)-\xi_n(t), \theta)=0,$$

$$\mathbf{M}_{s,x}^{(n)}\eta_t^s\ (\xi_n(\tau)-\xi_n(t), \theta)^2=\mathbf{M}_{s,x}^{(n)}\eta_t^s\int_t^\tau (b_n(r, x(r))\theta, \theta)\,dr, \tag{49}$$

то нужно показать, что предельный переход в равенствах (49) приводит к (48).

Из условия (47) заключаем

$$\lim_{n_k\to\infty}\mathbf{M}_{s,x}^{(n_k)}\eta_t^s\,[x(\tau)-x(t)]=\mathbf{M}_{s,x}\eta_t^s\,[x(\tau)-x(t)].$$

Далее, если задано сколь угодно малое число $\varepsilon>0$, то меры $\mathbf{P}_{s,x}^{(n)}$ с точностью до этого ε сосредоточены на компакте в Ω, а значит, можно считать, что при некотором $R>0$ $\max\limits_{t\leqslant r\leqslant\tau}|x(r)|\leqslant R$. Но тогда, согласно лемме 1,

$$\mathbf{M}_{s,x}^{(n)}\left|\int_t^\tau a_n(r, x(r))\,dr-\int_t^\tau a(r, x))\,dr\right|\cdot|\eta_t^s|\cdot I_{V_{t,\tau}(R)}\leqslant$$

$$\leqslant\mathbf{M}_{s,x}^{(n)}\ |\eta_t^s|\cdot\left|\int_t^\tau|a_n(r, x(\mathrm{r}))\,dr-a(r, x(r))\right|\cdot I_{\{|x(r)|\leqslant R\}}\,dr\leqslant$$

$$\leqslant N_\tau\left(\int_{\{|y|\leqslant R\}}|a_n r, y)-a(r, y)|^p dr dy\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $V_{t,\tau}(R)=\{x(\cdot)\in\Omega\colon \max\limits_{t\leqslant r\leqslant\tau}|x(r)|\leqslant R\}$. Это означает, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}_{s,x}^{(n)}\eta_t^s\int_t^\tau a_n(r, x(r))\,dr=\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}_{s,x}^{(n)}\eta_t^s\int_t^\tau a(r, \mathrm{x}(r))\,dr.$$

Далее, ясно, что функционал

$$\int_t^\tau a(r, x(r))dr$$

в силу замечания к лемме 1 непрерывен почти всюду по мере $\mathbf{P}_{s,x}$ и потому

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}_{s,x}^{(n_k)} \eta_t^s \int_t^\tau a(r, x(r))\,dr = \mathbf{M}_{s,x} \eta_t^s \int_t^\tau a(r, x(r))\,dr.$$

Таким образом, предельный переход в первом из равенств (49) приводит к первому из равенств (48). Аналогично обосновывается предельный переход и во втором равенстве (49).

Теорема 9. Предположим, что на $[0, \infty[\times R^d$ заданы ограниченные измеримые функции $a(s, x)$ и $b(s, x)$ со значениями соответственно в R^d и во множестве всех симметричных матриц порядка $d\times d$. Пусть существует такая постоянная $c>0$, что $(b(s, x)\theta, \theta)\geqslant c\cdot|\theta|^2$ при всех $s\geqslant 0$, $x\in R^d$, $\theta\in R^d$. Тогда при любых $s\geqslant 0$, $x\in R^d$ существует мера $\mathbf{P}_{s,x}$ на пространстве $(\Omega, \mathscr{M}^s)$, решающая проблему мартингалов для коэффициентов $a(s, x)$ и $b(s, x)$.

Доказательство. Построим последовательности функций $(a_n(s, x))_{n\geqslant 1}$ и $(b_n(s, x))_{n\geqslant 1}$ так, чтобы они удовлетворяли условиям теоремы 8, условиям а)—б) и чтобы при каждом n функции $a_n(t, x)$ и $b_n(t, x)$ удовлетворяли условию Липшица по переменной x локально равномерно относительно t с постоянной, возможно, зависящей от n. Согласно теореме 6, существует мера $\mathbf{P}_{s,x}^{(n)}$, решающая проблему мартингалов для коэффициентов $a_n(t,x)$ и $b_n(t,x)$. По доказанному любая мера $\mathbf{P}_{s,x}$, предельная для семейства мер $(\mathbf{P}_{s,x}^{(n)})_{n\geqslant 1}$, удовлетворяет соотношениям (48), а значит, решает проблему мартингалов для коэффициентов $a(t,y)$, $b(t,y)$. Теорема доказана.

Замечание. Если коэффициенты $a(s, x)$, $b(s, x)$ непрерывны и ограничены, то, аппроксимируя их (локально равномерно) липшицевыми функциями, можем доказать, что

$$\lim_{n_k\to\infty} \mathbf{M}_{s,x}^{(n_k)} \eta_t^s \int_t^\tau a_{n_k}(r, x(r))\,dr = \mathbf{M}_{s,x} \eta_t^s \int_t^\tau a(r, x(r))\,dr$$

без использования леммы 1, а значит, без предположения о равномерной невырожденности матриц $b_n(t, x)$.

В самом деле, так как функционал

$$\int_t^\tau a(r, x(r))\,dr$$

в рассматриваемом случае непрерывен на Ω, то

$$\lim_{n_k\to\infty} \mathbf{M}_{s,x}^{(n)} \eta_t^s \int_t^\tau a(r, x(r)\,dr = \mathbf{M}_{s,x} \eta_t^s \int_t^\tau a(r, x(r))\,dr.$$

Далее, используя то обстоятельство, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n(r, x(r)) = a(r, x(r))$$

равномерно относительно r и $x(\cdot)$ на компактах, а также то, что меры $\mathbf{P}_{s,x}^{(n)}$ с точностью до сколь угодно малой величины сосредоточены на компактах, заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{M}_{s,x}^{(n)} \left[\int_t^\tau a_n(r, x(r))\, dr - \int_t^\tau a(r, x(r))\, dr \right] = 0.$$

Аналогично доказывается и второй предельный переход. Тем самым доказана

Теорема 9^1. Предположим, что на $[0, \infty[\times R^d$ заданы непрерывные ограниченные функции $a(s, x)$ и $b(s, x)$ со значениями соответственно в R^d и во множестве всех симметричных неотрицательно определенных матриц порядка $d\times d$. Тогда при любых $s\geqslant 0$, $x\in R^d$ существует мера $\mathbf{P}_{s,x}$ на пространстве $(\Omega, \mathscr{M}^s)$, решающая проблему мартингалов для коэффициентов $a(t, y)$ и $b(t, y)$.

Доказанные теоремы есть теоремы существования слабых решений стохастических дифференциальных уравнений. Рассмотрим вопрос об их единственности.

в) Теорема единственности. Введем операторы G_λ, $\lambda>0$, действующие на ограниченную измеримую функцию $f(s, x)$, $s\geqslant 0$, $x\in R^d$ по формуле

$$(G_\lambda f)(s, x) = \mathbf{M}_{s,x} \int_s^\infty e^{-\lambda(t-s)} f(t, x(t))\, dt, \tag{50}$$

где $x(t)$ — винеровский процесс в R^d.

Нам понадобятся две леммы.

Лемма 2. Обозначим через $\mathscr{L}$ дифференциальный оператор, действующий на функцию $f(s, x)$ по формуле

$$(\mathscr{L} f)(s, x) = \sum_{j=1}^d m^j(s, x) \frac{\partial f(s, x)}{\partial x^j} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d c_{ij} \frac{\partial^2 f(s, x)}{\partial x^i \partial x^j},$$

где функции $m(s, x) = (m^1(s, x), \ldots, m^d(s, x))$, $c(s, x) = (c_{ij}(s, x))_{i,j=1,\ldots,d}$ заданы при $s\geqslant 0$, $x\in R^d$, измеримы и удовлетворяют неравенствам

$$|m(s, x)| \leqslant \delta, \quad \operatorname{Sp} c(s, x) c^*(s, x) \leqslant \rho^2.$$

Тогда для каждого $\varepsilon > 0$

$$\iint |\mathscr{L}(G_\lambda g)(s, x)|^2 ds\, dx \leqslant (\rho^2 + \varepsilon) \iint g^2(s, x)\, ds\, dx \tag{51}$$

при всех достаточно больших λ.

Доказательство. Записывая функцию $g(s, x)$ в виде преобразования Фурье от функции $\tilde{g}(\alpha, \theta)$ и применяя равенство Парсеваля, находим

$$\iint \left| \frac{\partial}{\partial x^j} (G_\lambda g)(s, x) \right|^2 ds\,dx =$$

$$= (2\pi)^d \iint \frac{|\theta^j|^2}{\left(\lambda + \frac{1}{2}|\theta|^2\right)^2 + \alpha^2} |\tilde{g}(\alpha, \theta)|^2 d\alpha\, d\theta,$$

$$\iint \left| \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} (G_\lambda g)(s, x) \right|^2 ds\,dx =$$

$$= (2\pi)^d \iint \frac{|\theta^k \theta^j|^2}{\left(\lambda + \frac{1}{2}|\theta|^2\right)^2 + \alpha^2} |\tilde{g}(\alpha, \theta)|^2 d\alpha\, d\theta.$$

Отсюда при любом $\varepsilon_1 > 0$

$$\iint |\mathscr{L}(G_\lambda g)(s, x)|^2 ds\,dx \leqslant$$

$$\leqslant (1+\varepsilon_1)\frac{\rho^2}{4} \iint \sum_{k,j=1}^{d} \left| \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^k} (G_\lambda g)(s, x) \right|^2 ds\,dx +$$

$$+ \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\delta^2 \iint \sum_{j=1}^{d} \left| \frac{\partial}{\partial x^j} (G_\lambda g)(s, x) \right|^2 ds\,dx =$$

$$= (2\pi)^d \iint \frac{\frac{1}{4}(1+\varepsilon_1)\rho^2 |\theta|^4 + \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\delta^2 |\theta|^2}{\left(\lambda + \frac{1}{2}|\theta|^2\right)^2 + \alpha^2} |\tilde{g}(\alpha, \theta)|^2 d\alpha\, d\theta \leqslant$$

$$\leqslant (2\pi)^d (1+\varepsilon_1)\rho^2 \iint |\tilde{g}(\alpha, \theta)|^2 d\alpha\, d\theta =$$

$$= (1+\varepsilon_1)\rho^2 \iint |g(s, x)|^2 ds\,dx,$$

если только $\lambda > \frac{\delta^2}{\varepsilon_1 \rho^2}$. Лемма доказана.

Пусть теперь заданы функции $a(s, x)$ и $b(s, x)$, удовлетворяющие условиям теоремы 9. Фиксируем некоторые $s_0 \geqslant 0$, $x_0 \in R^d$ и обозначим через $\mathbf{P}_{s_0, x_0}$ меру на $(\Omega, \mathscr{M}^{s_0})$, решающую проблему мартингалов для коэффициентов $a(s, x)$ и $b(s, x)$. При $\lambda > 0$ определим на пространстве ограниченных измеримых функций $f(s, x)$, $s \geqslant 0$, $x \in R^d$ функционал $H_\lambda f$, который такой функции ставит в соответствие число

$$H_\lambda f = \mathbf{M}_{s_0, x_0} \int_{s_0}^{\infty} e^{-\lambda(t - s_0)} f(t, x(t))\, dt,$$

где $\mathbf{M}_{s_0, x_0}$ — символ операции усреднения по мере $\mathbf{P}_{s_0, x_0}$. С помощью формулы Ито и интегрирования по частям получаем

$$\lambda H_\lambda f = f(s_0, x_0) + \mathbf{M}_{s_0, x_0} \int_{s_0}^{\infty} e^{-\lambda(t - s_0)} (\mathscr{L}^{a,b} f)(t, x(t))\, dt, \quad (52)$$

где

$$(\mathscr{L}^{a,b}f)(t, y)=$$

$$=\frac{\partial f(t, y)}{\partial t}+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{d} b_{jk}(t, y)\frac{\partial^2 f(t, y)}{\partial y^j \partial y^k}+\sum_{j=1}^{d} a^j(t, y)\frac{\partial f(t, y)}{\partial y^j}.$$

Равенство (52) можно записать в виде

$$f(s_0, x_0)=H_\lambda(\lambda f-\mathscr{L}^{a,b}f). \tag{53}$$

Далее, для достаточно гладкой функции $g(s, x)$, $s\geqslant 0$, $x\in R^d$ функция $(G_\lambda g)(s, x)$ также является гладкой и при $s\geqslant 0$, $x\in R^d$ удовлетворяет уравнению (см. теорему 6 § 1 гл. 2)

$$\frac{\partial}{\partial s}(G_\lambda g)(s, x)+\frac{1}{2}\Delta(G_\lambda g)(s, x)=-g(s, x)+\lambda(G_\lambda g)(s, x),$$

где Δ — оператор Лапласа по переменной x. Подставим теперь в (53) вместо $f(s, x)$ функцию $(G_\lambda g)(s, x)$. Будем иметь

$$(G_\lambda g)(s_0, x_0)=H_\lambda(g-\mathscr{L}_1 G_\lambda g), \tag{54}$$

где $\mathscr{L}_1$ — дифференциальный оператор, действующий на функцию $f(s, x)$ по формуле

$$(\mathscr{L}_1 f)(s, x)=\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{d}(b_{jk}(s, x)-\delta_{jk})\frac{\partial^2 f(s, x)}{\partial x^j \partial x^k}+\sum_{j=1}^{d} a^j(s, x)\frac{\partial f(s, x)}{\partial x^j};$$

здесь δ_{jk} — символ Кронекера.

Равенство (54) получено пока для гладких функций g, однако пользуясь леммой 2, можно теперь распространить его на пространство функций $L_2(R_+\times R^d)$ с конечной нормой

$$\|g\|_2=\left(\int_0^\infty\int|g(s, x)|^2\,ds\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Обозначим через $\mathbf{I}$ тождественный оператор в этом пространстве, а через I по-прежнему обозначаем единичную матрицу порядка $d\times d$.

Лемма 3. Предположим, что при некотором $q\in]0, 1[$ измеримые функции $a(s, x)$ и $b(s, x)$ удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Sp}(b(s, x)-I)^2\leqslant 1-q, \quad |a(s, x)|\leqslant\frac{1}{q}.$$

Тогда

$$H_\lambda f=(G_\lambda(\mathbf{I}-\mathscr{L}_1 G_\lambda)^{-1}f)(s_0, x_0) \tag{55}$$

при достаточно больших λ (оператор G_λ определен в (50)).

Доказательство. Заметим прежде всего, что условия леммы обеспечивают, согласно теореме 9, существование решения проблемы мартингалов, так что функционал H_λ определен. Далее, из условий леммы следует, что оператор $\mathscr{L}_1$ удовлетворяет условиям леммы 2 при $\rho^2=1-q$, $\delta=\frac{1}{q}$, но тогда по лемме 2 при достаточно больших λ в $L_2(R_+\times R^d)$ существует оператор, обратный оператору $\mathbf{I}-\mathscr{L}_1(C_\lambda)$ (из оценки (51) вытекает, что норма оператора $\mathscr{L}_1 G_\lambda$ в пространстве $L_2(R_+\times R^d)$ при достаточно больших λ строго меньше единицы). Положим в равенстве (54)

$$g=(\mathbf{I}-\mathscr{L}_1 G_\lambda)^{-1}f,$$

считая λ достаточно большим. Получим представление (55) для функционала H_λ. Лемма доказана.

Заметим, что оператор в правой части (55) однозначно определяется коэффициентами $a(t, y)$ и $b(t, y)$ проблемы мартингалов. Значит, если эти коэффициенты удовлетворяют условиям леммы 3, то каковы бы ни были $s\geqslant 0$, $x\in R^d$ для любых двух решений $\mathbf{P}_{s,x}$ и $\mathbf{P}'_{s,x}$ соответствующей проблемы мартингалов при всех достаточно больших λ и всех ограниченных измеримых f

$$\mathbf{M}_{s,x}\int_s^\infty e^{-\lambda(t-s)}f(t, x(t))\,dt=\mathbf{M}'_{s,x}\int_s^\infty e^{-\lambda(t-s)}f(t, x(t))\,dt,$$

где $\mathbf{M}'_{s,x}$ — символ операции усреднения по мере $\mathbf{P}'_{s,x}$. Отсюда следует, что функция

$$P(s, x, t, A)=\mathbf{P}_{s,x}(\{x(t)\in A\}),$$

определенная при $0\leqslant s\leqslant t$, $x\in R^d$, для борелевских множеств $A\subset R^d$ однозначно определяется коэффициентами $a(t, y)$ и $b(t, y)$. Более того, из соотношения (55) вытекает, что эта функция измерима по переменным s, x.

Далее, так как при $t\geqslant s$ регулярное условное распределение меры $\mathbf{P}_{s,x}$ при фиксированном $\mathscr{M}_t^s$ является решением проблемы мартингалов для тех же коэффициентов, то по доказанному при $t_1\geqslant t\geqslant s$

$$\mathbf{P}_{s,x}(\{x(t_1)\in A\}/\mathscr{M}_t^s)=P(t, x(t), t_1, A).$$

Таким образом, в условиях леммы 3 система мер $\mathbf{P}_{s,x}$ (существующих в силу теоремы 9) образует марковский процесс с вероятностью перехода $P(s, x, t, A)$, однозначно определяемой по коэффициентам $a(t, y)$ и $b(t, y)$. Но тогда и сами меры $\mathbf{P}_{s,x}$ определяются однозначно этими же коэффициентами. Тем самым доказана

Лемма 4. При любых $s\geqslant 0$ и $x\in R^d$ существует единственное решение $\mathbf{P}_{s,x}$ проблемы мартингалов для коэффициентов $a(t, y)$ и $b(t, y)$, удовлетворяющих условиям леммы 3.

Теперь докажем теорему единственности решения проблемы мартингалов.

Теорема 10. Предположим, что функции $a(s, x)$ и $b(s, x)$

удовлетворяют условиям теоремы 9, и пусть выполнено условие:

при всех $s_0 \geqslant 0$, $x_0 \in R^d$

$$\overline{\lim_{s\to s_0, x\to x_0}} \operatorname{Sp}(b(s, x) - b(s_0, x_0))^2 < \|b^{-1}(s_0, x_0)\|^{-2},$$

где $b^{-1}(s_0, x_0)$ — матрица, обратная к матрице $b(s_0, x_0)$ (она существует в силу невырожденности матрицы $b(s_0, x_0)$), а $\|\cdot\|$ — обычная норма матрицы.

Тогда при всех $s \geqslant 0$, $x \in R^d$ существует единственное решение $\mathbf{P}_{s,x}$ проблемы мартингалов для коэффициентов $a(t, y)$ и $b(t, y)$.

Доказательство. Фиксируем некоторые $s_0 \geqslant 0$ и $x_0 \in R^d$. Согласно условию теоремы, найдется окрестность точки (s_0, x_0) такая, внутри которой

$$\operatorname{Sp}(b^{-\frac{1}{2}}(s_0, x_0)\, b(s, x)\, b^{-\frac{1}{2}}(s_0, x_0) - I)^2 \leqslant 1 - q$$

при некотором $q > 0$. Определим функции $\bar{a}(s, x)$ и $\bar{b}(s, x)$, полагая в указанной окрестности

$$\bar{a}(s, x) = b^{-\frac{1}{2}}(s_0, x_0)\, a(s, x),$$

$$\bar{b}(s, x) = b^{-\frac{1}{2}}(s_0, x_0)\, b(s, x)\, b^{-\frac{1}{2}}(s_0, x_0).$$

Вне этой окрестности полагаем $\bar{b}(s, x) = I$, $\bar{a}(s, x) = 0$. Тогда, согласно лемме 4, проблема мартингалов для коэффициентов $\bar{a}(s, x)$ и $\bar{b}(s, x)$ имеет единственное решение. Обозначим его $\bar{\mathbf{P}}_{s_0, x_0}$.

Ясно, что тогда единственная мера $\mathbf{P}^*_{s_0, x_0}$, которая решает проблему мартингалов для коэффициентов $a_*(s, x) = b^{\frac{1}{2}}(s_0, x_0)\, \bar{a}(s, x)$ и $b_*(s, x) = b^{\frac{1}{2}}(s_0, x_0)\, \bar{b}(s, x)\, b^{\frac{1}{2}}(s_0, x_0)$, так как преобразование $x(\cdot) \to b^{\frac{1}{2}}(s_0, x_0)\, x(\cdot)$ два различных процесса преобразовывает в два различных же.

Итак, $\mathbf{P}^*_{s_0, x_0}$ — единственная мера, решающая проблему мартингалов для коэффициентов $a_*(s, x)$ и $b_*(s, x)$. Эти коэффициенты в упомянутой выше окрестности точки (s_0, x_0) совпадают с функциями $a(s, x)$ и $b(s, x)$. Обозначим через τ момент первого выхода из этой окрестности процесса $(t, x(t))$. Мы доказали, что на σ-алгебре $\mathcal{M}_\tau^{s_0}$ решение проблемы мартингалов однозначно определяется коэффициентами $a(s, x)$ и $b(s, x)$. Теперь следует заметить, что если $\mathbf{P}_{s_0, x_0}$ — решение проблемы мартингалов для коэффициентов a и b, то условное регулярное распределение меры $\mathbf{P}_{s_0, x_0}$ при фиксированном $\mathcal{M}_\tau^{s_0}$ снова будет решением проблемы мартингалов на отрезке $[\tau, \infty[$ для тех же коэффициентов.

Поэтому мы можем повторить предыдущую процедуру и установить, что решение проблемы мартингалов однозначно определяется на σ-алгебре $\mathcal{M}_{\tau_1}^{s_0}$, где τ_1 — момент первого выхода процесса $(t, x(t))$ из некоторой окрестности точки $(\tau, x(\tau))$. Повторяя эту процедуру, придем к заключению, что мера $\mathbf{P}_{s_0,x_0}$ единственна. Теорема доказана.

Метод, примененный к доказательству этой теоремы, носит название метода локализации.

Следствие 1. В условиях теоремы 10 существует единственный квазидиффузионный процесс, для которого $a(s, x)$ — вектор переноса, а $b(s, x)$ — матрица диффузии. В частности, условию теоремы 10 удовлетворяют непрерывные равномерно невырожденные матричнозначные функции $b(t, x)$ и ограниченные измеримые векторнозначные функции $a(t, x)$. Более того, так как в случае непрерывной функции $b(s, x)$ условие

$$(b(s, x)\theta,\theta)\geqslant c(s, x)\,|\theta|^2,$$

где $c(s, x)>0$ при $s\geqslant 0$, $x\in R^d$ (здесь $\theta\in R^d$), влечет равномерную невырожденность матрицы $b(s, x)$ на компактах $(s, x)\in\in[0, T]\times U_R(0)$, а решение $\mathbf{P}_{s,x}$ проблемы мартингалов локально зависит от коэффициента $b(s, x)$, то нетрудно заключить, что существует единственный с точностью до стохастической эквивалентности квазидиффузионный процесс с непрерывной ограниченной положительно определенной матрицей диффузии $b(s,x)$ и ограниченным измеримым вектором переноса $a(s, x)$.

Заметим еще, что последнее заключение не опирается на лемму 1. Использовалась эта лемма лишь один раз — при доказательстве теоремы существования решения проблемы мартингалов для ограниченных измеримых коэффициентов.

Следствие 2. Заметим, что построенные в условиях теоремы 10 квазидиффузионные процессы являются строго марковскими. Это следует из того, что для всякого s-момента остановки τ регулярное условное распределение меры $\mathbf{P}_{s,x}$ при фиксированном $\mathcal{M}_\tau^s$ совпадает с $\mathbf{P}_{\tau,x(\tau)}$ в силу единственности решения соответствующей проблемы мартингалов.

2.3. Абсолютно непрерывная замена меры. Пусть $b(s, x)$, $s\geqslant 0$, $x\in R^d$, — функция со значениями в пространстве симметричных положительно определенных матриц и предположим, что она удовлетворяет условиям теоремы 10. Обозначим через $\mathbf{P}_{s,x}^{0,b}$ единственное решение проблемы мартингалов для коэффициентов $a(s, x)\equiv 0$ и $b(s, x)$.

Далее, пусть для $s\geqslant 0$, $x\in R^d$ задана такая измеримая функция $a(s, x)$ со значениями в R^d, что при любом $T>s$

$$\mathbf{P}_{s,x}^{0,b}\left\{\int_s^T |a(\tau, x(\tau))|^2 d\tau < \infty\right\}=1. \tag{56}$$

Тогда определены стохастические интегралы вида

$$\int_s^t (b^{-1}(\tau, x(\tau))\,a(\tau, x(\tau)),\ dx(\tau)),\ t \geqslant s,$$

по мартингалу $x(t)$ и эти интегралы представляют собой квадратически интегрируемые мартингалы относительно $\left(\mathcal{M}_t^s,\ \mathbf{P}_{s,x}^{0,b}\right)$ с характеристикой

$$\int_s^t (b^{-1}(\tau, x(\tau))\,a(\tau, x(\tau)),\ a(\tau, x(\tau)))\,d\tau.$$

Последний интеграл существует в силу (56) и равномерной невырожденности матрицы $b(t, x)$.

Положим для $t \geqslant s$

$$R_s(t) = \exp\left\{\int_s^t (b^{-1}(\tau, x(\tau))\,a(\tau, x(\tau)),\ dx(\tau)) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\int_s^t (b^{-1}(\tau, x(\tau))\,a(\tau, x(\tau)),\ a(\tau, x(\tau)))\,d\tau\right\}.$$

Легко доказать, что процесс $\left(R_s(t), \mathcal{M}_t^s,\ \mathbf{P}_{s,x}^{0,b}\right)$ при $t \in [0, \infty]$ является супермартингалом, и если при всех $T < \infty$

$$\mathbf{M}_{s,x}^{0,b} R_s(T) = 1, \tag{57}$$

то это мартингал. Положим для $\Lambda \in \mathcal{M}_T^s$

$$\mathbf{P}_{s,x}^{a,b}(\Lambda) = \int_\Lambda R_s(T)\,d\mathbf{P}_{s,x}^{0,b}. \tag{58}$$

Нетрудно видеть, что на пространстве $(\Omega, \mathcal{M}^s)$ существует единственная мера, сужения которой на σ-алгебру $\mathcal{M}_T^s$ при $T < \infty$ определяются формулой (58). Обозначим эту меру $\mathbf{P}_{s,x}^{a,b}$.

Лемма 5. Если функция $a(s, x)$, $s \geqslant 0$, $x \in R^d$, со значениями в R^d удовлетворяет условиям (56), (57) (относительно $b(s, x)$ предполагаем выполненными условия теоремы 10), то вероятностная мера $\mathbf{P}_{s,x}^{a,b}$ является решением проблемы мартингалов для коэффициентов $a(s, x)$ и $b(s, x)$.

Доказательство. Используя свойство (57) и мультипликативное свойство функции $R_s(t)$:

$$R_s(t)\,R_t(T) = R_s(T),$$

устанавливаем, что процесс $\left(x(t), \mathcal{M}_t^s, \mathbf{P}_{s,x}^{a,b}\right)$ является марковским. Поэтому достаточно проверить справедливость равенств

$$\mathbf{M}_{s,x}^{a,b}(x(t)-x(s))=\mathbf{M}_{s,x}^{a,b}\int_s^t a(\tau, x(\tau))\,d\tau,$$
$$\mathbf{M}_{s,x}^{a,b}(\xi_s(t), \theta)^2=\mathbf{M}_{s,x}^{a,b}\int_s^t (b(\tau, x(\tau))\theta, \theta)\,d\tau, \tag{59}$$

где

$$\xi_s(t)=x(t)-x(s)-\int_s^t a(\tau, x(\tau))\,d\tau, \quad \theta\in R^d.$$

Докажем первое из этих равенств. Заметим сначала, что вследствие формулы Ито процесс $R_s(t)$ является решением уравнения

$$R_s(t)=1+\int_s^t (R_s(\tau)\,b^{-1}(\tau, x(\tau))\,a(\tau, x(\tau)), dx(\tau)). \tag{60}$$

Поэтому $(\theta\in R^d)$

$$\mathbf{M}_{s,x}^{a,b}(x(t)-x(s), \theta)=\mathbf{M}_{s,x}^{0,b}(x(t)-x(s), \theta)\,R_s(t)=$$
$$=\mathbf{M}_{s,x}^{0,b}\int_s^t (\theta, dx(\tau))\int_s^t (R_s(\tau)\,b^{-1}(\tau, x(\tau))\,a(\tau, x(\tau)), dx(\tau)).$$

Для подсчета математического ожидания в правой части этого равенства воспользуемся формулой (26). Будем иметь

$$\mathbf{M}_{s,x}^{a,b}(x(t)-x(s), \theta)=$$
$$=\mathbf{M}_{s,x}^{0,b}\int_s^t R_s(\tau)\left(b^{\frac{1}{2}}(\tau, x(\tau))\,\theta, b^{-\frac{1}{2}}(\tau, x(\tau))\times a(\tau, x(\tau))\right)d\tau=$$
$$=\mathbf{M}_{s,x}^{0,b}\int_s^t R_s(\tau)(a(\tau, x(\tau)), \theta)\,d\tau=\mathbf{M}_{s,x}^{a,b}\int_s^t (a(\tau, x(\tau)), \theta)\,d\tau,$$

что и требовалось. Аналогично с использованием (60) можно доказать и второе из равенств (59). Этим завершается доказательство леммы.

Наиболее трудно проверяемым условием в лемме 5 является условие (57). Достаточное условие для того, чтобы (57) выполнялось, содержится в следующей лемме (см. [3]).

Лемма 6. Условие (57) выполнено, если функции $a(s, x)$ и $b(s, x)$ таковы, что

$$\mathbf{M}_{s,x}^{0,b}\exp\left\{\frac{1}{2}\int_s^T (b^{-1}(\tau, x(\tau))\,a(\tau, x(\tau)), a(\tau, x(\tau)))\,d\tau\right\}<\infty \tag{61}$$

при всех $T > s$ (разумеется, мы предполагаем, что решение $\mathbf{P}_{s,x}^{0,b}$ проблемы мартингалов для коэффициентов $a(t, y) \equiv 0$ и $b(t, y)$ существует).

В частности, если $b(t, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 10, а $a(t, y)$ — ограничена и измерима, то (61), очевидно, выполняется, и, значит, мера $\mathbf{P}_{s,x}^{a,b}$, определяемая своими сужениями на σ-алгебры $\mathcal{M}_T^s$ по формуле (58), является решением проблемы мартингалов для коэффициентов $a(t, y)$, $b(t, y)$.

Значит, справедлива

Теорема 11. В условиях теоремы 10 решение $\mathbf{P}_{s,x}^{a,b}$ проблемы мартингалов для коэффициентов $a(t, y)$ и $b(t, y)$ обладает тем свойством, что его сужение на σ-алгебру $\mathcal{M}_T^s$ при $T < \infty$ абсолютно непрерывно относительно соответствующего сужения на ту же σ-алгебру решения $\mathbf{P}_{s,x}^{0,b}$ проблемы мартингалов для коэффициентов $a(t, y) \equiv 0$ и $b(t, y)$. При этом справедлива формула (58).

Пусть, по-прежнему, функции a и b удовлетворяют условиям теоремы 10. Введенный при доказательстве леммы 5 процесс $\xi_s(t)$ является квадратически интегрируемым мартингалом относительно $\left(\mathcal{M}_t^s, \mathbf{P}_{s,x}^{a,b}\right)$ и потому определены стохастические интегралы (ради краткости записи аргументы функций a и b опускаем)

$$\int_s^t (b^{-1}a, d\xi_s(\tau)),$$

которые представляют собой снова квадратически интегрируемые мартингалы с характеристикой

$$\int_s^t (b^{-1}a, a)\, d\tau.$$

Теперь можно определить интегралы вида

$$\int_s^t (b^{-1}a, dx(\tau)),$$

полагая

$$\int_s^t (b^{-1}a, dx(\tau)) = \int_s^t (b^{-1}a, d\xi_s(\tau)) + \int_s^t (b^{-1}a, a)\, d\tau.$$

Далее, определим процесс

$$\overline{R}_s(t) = \exp\left\{-\int_s^t (b^{-1}a, dx(\tau)) + \frac{1}{2}\int_s^t (b^{-1}a, a)\, d\tau\right\}, \quad t \geqslant s,$$

который можно записать в виде

$$\overline{R}_s(t) = \exp\left\{-\int_s^t (b^{-1}a, d\xi_s(\tau)) - \frac{1}{2}\int_s^t (b^{-1}a, a)\, d\tau\right\}.$$

Используя лемму 6, легко доказать, что

$$\mathbf{M}_{s,x}^{a,b}\overline{R}_s(T)=1,$$

каковы бы ни были $s\geqslant 0$, $x\in R^d$, $T>s$ (по-прежнему считаем, что функции a и b удовлетворяют условиям теоремы 10). Если теперь определить для $s\geqslant 0$, $x\in R^d$ на σ-алгебре $\mathscr{M}^s$ меру $\overline{\mathbf{P}}_{s,x}$, полагая для $\Lambda\in\mathscr{M}_T^s$

$$\overline{\mathbf{P}}_{s,x}(\Lambda)=\int\limits_{\Lambda}\overline{R}_s(T)\,d\mathbf{P}_{s,x}^{a,b},$$

то точно так же, как была доказана лемма 5, можно доказать, что относительно меры $\overline{\mathbf{P}}_{s,x}$ процесс $x(t)-x(s)$, $t\in[s,\infty]$ является квадратически интегрируемым мартингалом с характеристикой

$$\int\limits_s^t b(\tau,\ x(\tau))\,d\tau.$$

Но тогда в силу единственнности решения проблемы мартингалов имеем $\overline{\mathbf{P}}_{s,x}=\mathbf{P}_{s,x}^{0,b}$. Значит, в усиление теоремы 11 получаем следующее утверждение.

Теорема 11[1]. В условиях теоремы 10 решения $\mathbf{P}_{s,x}^{a,b}$ и $\mathbf{P}_{s,x}^{0,b}$ проблемы мартингалов для коэффициентов соответственно $(a;\ b)$ и $(0;\ b)$ обладают тем свойством, что их сужения на σ-алгебру $\mathscr{M}_T^s$ при $T<\infty$ эквивалентны и для $\Lambda\in\mathscr{M}_T^s$

$$\mathbf{P}_{s,x}^{a,b}(\Lambda)=\int\limits_{\Lambda}R_s(T)\,d\mathbf{P}_{s,x}^{0,b},\quad \mathbf{P}_{s,x}^{0,b}(\Lambda)=\int\limits_{\Lambda}[R_s(T)]^{-1}\,d\mathbf{P}_{s,x}^{a,b}.$$

В случаях, когда функция $a(s,\ x)$ не является локально ограниченной, проверка условия (61) затруднительна. В этих случаях может пригодиться следующее утверждение.

Лемма 7. Предположим, что на некотором вероятностном пространстве $(\Omega,\ \mathscr{F},\ \mathbf{P})$ задан измеримый неотрицательный процесс $\beta(t)$, $t\in[0,\ T]$, согласованный с потоком σ-алгебр $(\mathscr{F}_t)_{t\in[0,T]}$. Предположим еще, что при $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ выполнено неравенство

$$\mathbf{M}\left\{\int\limits_s^t\beta(\tau)\,d\tau/\mathscr{F}_s\right\}\leqslant\rho(s,\ t),$$

где $\rho(s,\ t)$ — неслучайная функция интервала $[s,\ t]$ такая, что $\rho(t_1,\ t_2)\leqslant\rho(t_3,\ t_4)$, если $[t_1,\ t_2]\subset[t_3,\ t_4]$. Положим

$$\varkappa=\lim_{h\downarrow 0}\sup_{0\leqslant s\leqslant t\leqslant s+h\leqslant T}\rho(s,\ t).$$

Тогда при любом вещественном $\lambda<\varkappa^{-1}$ (если $\varkappa=0$, то $\varkappa^{-1}=\infty$)

$$\mathbf{M}\exp\left\{\lambda\int\limits_0^T\beta(\tau)\,d\tau\right\}<\infty.$$

Доказательство. Положим

$$\beta_N(t)=\begin{cases}\beta(t) & \text{при } \beta(t)\leqslant N;\\ 0 & \text{при } \beta(t)>N.\end{cases}$$

Тогда

$$\mathbf{M}\exp\left\{\lambda\int_0^T\beta_N(t)\,dt\right\}<\infty$$

и, полагая для $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$ и вещественных λ

$$\varphi_\lambda(s,\ t,\ N)=\mathbf{M}\left[\exp\left\{\lambda\int_s^t\beta_N(\tau)\,d\tau\right\}\Big/\mathcal{F}_s\right],$$

получаем уравнение для функции $\varphi_\lambda(s,\ t,\ N)$

$$\varphi_\lambda(s,\ t,\ N)=1+i\,\lambda\mathbf{M}\left\{\int_s^t\beta_N(\tau)\,\varphi_\lambda(s,\ t,\ N)\,d\tau/\mathcal{F}_s\right\}.$$

Решение этого уравнения представимо в виде ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_\lambda^{(k)}(s,\ t,\ N),$$

где $\varphi_\lambda^{(0)}\equiv 1$, а при $k\geqslant 1$

$$\varphi_\lambda^{(k)}(s,\ t,\ N)=\lambda\mathbf{M}\left\{\int_s^t\beta_N(\tau)\,\varphi_\lambda^{(k-1)}(\tau,\ t,\ N)\,d\tau/\mathcal{F}_s\right\}.$$

Индукцией по k легко получить неравенства

$$|\varphi_\lambda^{(k)}(s,\ t,\ N)|\leqslant[\lambda\rho(s,\ t)]^k,\quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

Если $\lambda<\varkappa^{-1}$, то можно выбрать h_0 так, чтобы $\lambda\rho(s,\ t)<1$, если только $t-s\leqslant h_0$. Поэтому для данного $\lambda<\varkappa^{-1}$

$$\varphi_\lambda(s,\ t,\ N)=\sum_{k=0}^{\infty}\varphi_\lambda^{(k)}(s,\ t,\ N)\leqslant\frac{1}{1-\lambda\rho(s,\ t)}<\infty$$

при всех $0\leqslant s\leqslant t\leqslant T$, для которых $t-s\leqslant h_0$. Разобьем теперь отрезок $[0,T]$ точками $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=T$ так, чтобы $\max\limits_k(t_k-t_{k-1})\leqslant h_0$. Тогда

$$\mathbf{M}\exp\left\{\lambda\int_0^T\beta_N(\tau)\,d\tau\right\}=\mathbf{M}\prod_{k=1}^{n-1}\exp\left\{\lambda\int_{t_{k-1}}^{t_k}\beta_N(\tau)\,d\tau\right\}\varphi_\lambda(t_{n-1},\ t_n,\ N)\leqslant$$

$$\leqslant(1-\lambda\rho(t_{n-1},\ t_n))^{-1}\,\mathbf{M}\prod_{k=1}^{n-1}\exp\left\{\lambda\int_{t_{k-1}}^{t_k}\beta_N(\tau)\,d\tau\right\}\leqslant\ldots$$

$$\ldots \leqslant \prod_{k=1}^{n} (1-\lambda\rho(t_{k-1}, t_k))^{-1}.$$

Значит, при $\lambda < \varkappa^{-1}$

$$\mathbf{M} \exp \left\{ \lambda \int_0^T \beta(t)\, dt \right\} = \lim_{N\to\infty} \mathbf{M} \exp \left\{ \lambda \int_0^T \beta_N(t)\, dt \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \prod_{k=1}^{n} (1-\lambda\rho(t_{k-1}, t_k))^{-1} < \infty,$$

что и требовалось.

Используем это утверждение для проверки условия (61) в случае локально неограниченной функции $a(s, x)$

Теорема 12. Предположим, что функция $b(s, x)$ удовлетворяет условиям теоремы 10, а функция $a(s, x)$ такова ,что при некотором $p \geqslant 2d+2$ и всех $T < \infty$

$$\int_0^T \int |a(\tau, y)|^p\, d\tau dy < \infty.$$

Тогда выполнены условия (56), (57) и, стало быть, существует решение проблемы мартингалов для коэффициентов $a(s, x)$ и $b(s, x)$. Обозначая, как и прежде, это решение через $\mathbf{P}_{s,x}{}^{a,b}$, будем иметь для него формулу (58). При этом процесс $(x(t), \mathscr{M}_t{}^s, \mathbf{P}_{sx}{}^{a,b})$ является марковским.

Доказательство. Условия (56) и (57) будут доказаны, если мы покажем, что при $T < \infty$

$$\mathbf{M}_{s,x}^{0,b} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_s^T (b^{-1}(\tau, x(\tau))\, a(\tau, x(\tau)),\ a(\tau, x(\tau)))d\tau \right\} < \infty.$$

В свою очередь, для этого достаточно проверить, что при любом $\lambda < \infty$

$$\mathbf{M}_{s,x}^{0,b} \exp \left\{ \lambda \int_s^T |a(\tau, x(\tau))|^2\, d\tau \right\} < \infty, \tag{62}$$

поскольку матрица $b(t, y)$ равномерно невырождена. Для доказательства (62) воспользуемся леммами 1 и 7. Будем иметь в силу марковости процесса $(x(t), \mathbf{P}_{s,x}^{0,b})$

$$\mathbf{M}_{s,x}^{0,b} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} |a(\tau, x(\tau))|^2\, d\tau / \mathscr{M}_{t_1}^s \right\} = \mathbf{M}_{t_1, x(t_1)}^{0,b} \int_{t_1}^{t_2} |a(\tau, x(\tau))|^2\, d\tau \leqslant$$

$$\leqslant N_T \left(\int_{t_1}^{t_2} \int |a(\tau, y)|^p\, d\tau dy \right)^{\frac{2}{p}},$$

где $s \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$. Полагая

$$\rho(t_1, t_2) = N_T \left(\int_{t_1}^{t_2} \int | a(\tau, y) |^p \, d\tau dy \right)^{\frac{2}{p}},$$

замечаем, что эта функция удовлетворяет условиям леммы 7 с $\varkappa = 0$. Значит, (62) выполнено, и, определяя меру $\mathbf{P}_{s,x}^{a,b}$ ее сужениями на σ-алгебру $\mathscr{M}_T^s$ при $T < \infty$ по формуле (58), получим, согласно лемме 5, решение проблемы мартингалов для коэффициентов $a(t, y)$, $b(t, y)$. Теорема доказана.

В случае, когда функция $b(s, x)$ непрерывна, этот результат можно уточнить (ср. с теоремой 4).

Теорема 13. Предположим, что на пространстве $[0, \infty[\times R^d$ заданы функция $b(t, x)$, значениями которой служат симметричные матрицы порядка $d \times d$, и функция $a(t, x)$ со значениями в R^d такие, что:

1) функция $b(t, x)$ равномерно непрерывна;

2) при всех $\theta \in R^d$, $x \in R^d$, $t \geqslant 0$ выполнены неравенства

$$c_1 |\theta|^2 \leqslant (b(t, x)\theta, \theta) \leqslant c_2 |\theta|^2,$$

где c_1 и c_2 — положительные постоянные;

3) при некотором $p > d+2$ и всех $T < \infty$

$$\int_0^T \int |a(t, y)|^p \, dt dy < \infty.$$

Тогда при любых $s \geqslant 0$, $x \in R^d$ на пространстве $(\Omega, \mathscr{M}^s)$ существует мера $\mathbf{P}_{s,x}^{a,b}$, решающая проблему мартингалов для коэффициентов $a(t, y)$ и $b(t, y)$. Сужения меры $\mathbf{P}_{s,x}^{a,b}$ на σ-алгебры $\mathscr{M}_T^s$ при $T < \infty$ определяются по формуле (58). Процесс $(x(t), \mathbf{P}_{s,x}^{a,b})$ является марковским, а значит, квазидиффузионным с вектором переноса $a(t, y)$ и матрицей диффузии $b(t, y)$.

Доказательство этой теоремы в точности повторяет доказательство теоремы 12 с той лишь разницей, что вместо леммы 1 нужно пользоваться следующим утверждением (см. [17], [12]).

Лемма 8. Предположим, что функция $b(t, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 13. Тогда для всякой функции $f(t, x)$, $t \geqslant 0$, $x \in R^d$, для которой

$$\| f \|_{p', T} = \left(\int_0^T \int | f(t, y)|^{p'} \, dt dy \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty$$

при некотором $p' > 1 + \frac{d}{2}$ и всех $T < \infty$, справедливо неравенство

$$\mathbf{M}_{s,x}^{0,b} \int_s^t | f(\tau, x(\tau)) | \, d\tau \leqslant N_T \left(\int_s^t \int | f(\tau, y)|^{p'} \, d\tau dy \right)^{\frac{1}{p'}},$$

где $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, $x \in R^d$, N_T — некоторая постоянная, не зависящая от f.

Таким образом, в условиях теоремы 13 существует квазидиффузионный процесс, для которого $a(t, x)$ — вектор переноса, $b(t, x)$ — матрица диффузии. Следующее утверждение имеет отношение к вопросу о единственности такого процесса (см. [12]).

Теорема 14. Пусть функции $a(s, x)$ и $b(s, x)$ удовлетворяют условиям теоремы 13 и пусть $(x(t), \mathscr{M}_t^s, \mathbf{P}'_{s,x})$ — квазидиффузионный процесс с вектором переноса $a(t, y)$ и матрицей диффузии $b(t, y)$. Предположим, что для всякой функции $f(t, y)$, для которой $\|f\|_{p',T} < \infty$ при некотором $p' > 1 + \frac{d}{2}$ и всех $T < \infty$ выполнено неравенство

$$\mathbf{M}'_{s,x} \int_s^t |f(\tau, x(\tau))|\, d\tau \leqslant \bar{N}_T \left(\int_s^t \int |f(\tau, x(\tau))|^{p'}\, d\tau dy \right)^{\frac{1}{p'}},$$

где $\mathbf{M}'_{s,x}$ — символ математического ожидания по мере $\mathbf{P}'_{s,x}$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$, $x \in R^d$, $\bar{N}_T$ — некоторая постоянная.

Тогда мера $\mathbf{P}'_{s,x}$ совпадает с мерой $\mathbf{P}^{a,b}_{s,x}$, построенной в теореме 13. При этом для любого $T \in [s, \infty[$ сужения мер $\mathbf{P}^{a,b}_{s,x}$ и $\mathbf{P}^{0,b}_{s,x}$ на σ-алгебру $\mathscr{M}_T^s$ эквивалентны и соответствующие плотности можно выразить точно так же, как и в теореме 11[1].

Последнее утверждение этой теоремы означает качественно, что диффундирующая частица «не замечает» особенностей макроскопической скорости, если только эта скорость интегрируема в некоторой достаточно высокой степени. Что это не всегда так, показывает следующий пример.

Пример. Рассматриваемый процесс будет однородным и одномерным. Пусть $b(x) \equiv 1$, а функция $a(x)$ такова, что $\|a\|_p < \infty$ при некотором $p > 1$. Тогда, согласно теореме 4°, существует квазидиффузионный (однородный) процесс $(x(t), \mathscr{M}_t, \mathbf{P}_x^{a,1})$, для которого $a(x)$ — снос, а $b(x) \equiv 1$ — коэффициент диффузии. Заметим, что $\mathbf{P}_x^{0,1}$ — винеровская мера на $(\Omega, \mathscr{M}^0)$ и, как известно, сужение меры $\mathbf{P}_x^{a,1}$ на σ-алгебру $\mathscr{M}_T$ будет эквивалентно сужению меры $\mathbf{P}_x^{0,1}$ на ту же σ-алгебру тогда и только тогда (см. [3]), когда

$$\mathbf{P}_x^{a,1} \left\{ \int_0^T |a(x(\tau))|^2 d\tau < \infty \right\} = 1,$$

$$\mathbf{P}_x^{0,1} \left\{ \int_0^T |a(x(\tau))|^2 d\tau < \infty \right\} = 1.$$

Последнее соотношение не выполняется ни при каком $T<\infty$, если функция $a(x)$ такова, что

$$\int_{-N}^{N}|a(x)|^2dx=+\infty$$

для некоторого $N<\infty$ (см. [7]). Значит, сужения мер $\mathbf{P}_x^{a,1}$ и $\mathbf{P}_x^{0,1}$ на σ-алгебру $\mathscr{M}_T$, вообще говоря, не эквивалентны ни при каком $T<\infty$.

Глава 4

ОДНОРОДНЫЕ МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ

§ 1. Общие свойства однородных марковских процессов

1.1. Однородный марковский процесс. Общее определение марковского процесса приведено в гл. 1, 1.2 а). Грубо говоря, процесс называется однородным, если его вероятность перехода обладает следующим условием однородности:

$$P(s, x, t, B)=P(0, x, t-s, B) \tag{1}$$

(т. е. вероятность перехода зависит только от разности временных аргументов). Соотношение (1) означает, что находясь в точке x в некоторый момент времени s, процесс попадает в множество B по истечении времени h с вероятностью, не зависящей от s. Можно еще сказать так: вероятностные свойства процесса не зависят от выбора начала отсчета времени. Для динамических систем это будет выполнено, если силы, действующие на систему, зависят лишь от ее положения в фазовом пространстве (и не зависят от времени), такие системы порождаются дифференциальными уравнениями с коэффициентами, не зависящими от времени. Если марковский процесс описывает систему, находящуюся под случайными воздействиями, то однородность процесса означает не постоянство этих случайных воздействий во времени, а неизменность (во времени) их вероятностных характеристик.

Так, если $\{\xi_{s,x}(t)\}$ описывает стохастически определенную систему, то она будет однородной, если распределение случайного процесса

$$\eta_{s,x}(t)=\xi_{s,x}(s+t)$$

не зависит от s (сам процесс $\eta_{s,x}(t)$ зависит от s и x как от параметров).

а) **Однородные динамические системы с дискретным вмешательством случая.** Для пояснения того, как могут возникать однородные стохастически определенные системы, мы рассмотрим систему, получаемую из динамической системы при дискретном вмешательстве случая. Однородность здесь может появиться, если однородна динамическая система и «однородно» по времени само вмешательство случая. Пусть $(X, \mathscr{B})$ — фазовое пространство системы, $f(x, t)$ — положение невозмущенной системы во время t, если ее начальное положение x. Однородность означает выполнение равенства: $f(x, t+s)=f(f(x, t), s)$. Пусть, далее, $\tau_1<\tau_2<\ldots<\tau_n<\ldots$ — моменты воздействий на систему, сами воздействия характеризуются некоторым параметром $\theta \in R$ таким образом, что система, находящаяся в состоянии x, в результате воздействия θ мгновенно переходит в состояние $y=g(\theta, x)$, g — измеримая функция из $R\times X$ в X. Обозначая значение θ в момент τ_k через θ_k можем так определить процесс $\xi_x(t)$, описывающий эволюцию системы с дискретным вмешательством случая, если начальное состояние было x. При $t<\tau_1$ будет $\xi_x(t)=f(x, t)$. Положение системы в момент воздействия обозначим $\xi_x(\tau_1-)$ (считаем, что оно определено). Тогда $\xi_x(\tau_1)=g(\theta_1, \xi_x(\tau_1-))$. Далее полагаем $\xi_x(\tau_1+t)=f(\xi_x(\tau_1), t)$ при $t<\tau_2-\tau_1$. Если $\xi_x(t)$ уже определено при $t<\tau_k$ и определено $\xi_x(\tau_k-)$, то

$$\xi_x(\tau_k)=g(\theta_k, \xi_x(\tau_k-))$$

и $\xi_x(\tau_k+t)=f(\xi_x(\tau_k), t)$ при $t<\tau_{k+1}-\tau_k$, тем самым $\xi_x(t)$ уже определено на $[0, \tau_{k+1})$.

Как определить однородность случайных воздействий во времени? Воздействия полностью определяются случайным процессом

$$\theta(t)=\sum_k \theta_k I_{\{\tau_k\leqslant t\}}. \tag{2}$$

Если рассмотреть динамическую систему, которая начинает эволюционировать из точки x в момент s, то воздействия на эту систему будут определяться процессом

$$\theta_s(t)=\sum_k \theta_k I_{\{s<\tau_k\leqslant t\}}=\theta(t)-\theta(s), \quad t\geqslant s. \tag{3}$$

Однородность означает, что процессы $\theta_s(s+t)$ и $\theta(t)$, определенные согласно (2) и (3), имеют одинаковые распределения, т. е. $\theta(s+t)-\theta(s)$ и $\theta(t)$ имеют одинаковые распределения. Если потребовать, чтобы процесс $\xi_{s,x}(t)$ определяющий эволюцию системы после момента s, не зависел от воздействий до момента s, то тогда $\theta_s(t)$ не должно зависеть от $\theta(u)$ при $u\leqslant s$. Это означает, что $\theta(t)$ — процесс с независимыми приращениями и в силу сказанного выше он будет однородным процессом с независимыми приращениями.

б) **Определение однородного марковского процесса.** Однородный марковский процесс определяется набором следующих объектов:

1) измеримым пространством $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ элементарных событий;

2) измеримым пространством $\{X, \mathcal{B}\}$ — фазовым пространством процесса;

3) функцией $x(t, \omega) = x_t(\omega)$ из $R_+ \times \Omega$ в X такой, что: а) для всех $t \in R_+$ $x_t(\omega)$ измеримо отображает $(\Omega, \mathcal{F})$ в $(X, \mathcal{B})$, б) для всех $s \in R_+$ и $\omega \in \Omega$ найдется такое ω_s, что $x(t+s, \omega) = x(t, \omega_s)$, $t \in R_+$ (функции $x(t, \omega)$ при фиксированных ω — множество траекторий процесса, в силу б) это множество переходит в себя при сдвигах);

4) семейством σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \in R_+\}$, $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, удовлетворяющих условием: а) $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ при $s < t$, б) $x(t, \omega)$ является $\mathcal{F}_t$-измеримым, это поток наблюдаемых событий;

5) семейством вероятностных мер $\{\mathbf{P}_x, x \in X\}$, определенных на $\{\Omega, \mathcal{F}\}$, для которых выполнены свойства:
а) $\mathbf{P}_x\{x(0, \omega) = x\} = 1$, б) для всех $s > 0$, $t > 0$, $A \subset \mathcal{B}$

$$\mathbf{P}_x\{x(t+s, \omega) \in A / \mathcal{F}_s\} = \mathbf{P}_{x(s,\omega)}\{x(t, \omega) \in A\} \tag{4}$$

почти всюду по мере $\mathbf{P}_x$ (это марковское свойство в однородном случае).

Обозначать марковский процесс будем $x(t, \omega)$ или $x_t(\omega)$, при этом символы $\mathcal{F}_t$ и $\mathbf{P}_x$ будут обозначать σ-алгебры и вероятности, фигурирующие в определении процесса.

Будем, как и в гл. 1, обозначать через $\mathcal{X}_t^s$ σ-алгебру, порожденную событиями $\{x(u, \omega) \in A\}$, $u \in [s, t]$, $A \in \mathcal{B}$, $\mathcal{X}^s = \bigvee_t \mathcal{X}_t^s$, $\mathcal{X}_t = \mathcal{X}_t^0$, $\mathcal{X} = \bigvee_t \mathcal{X}_t$. На множествах $C \in \mathcal{X}$ можно определить *операцию сдвига* $\theta_s C$, $s > 0$ так, чтобы выполнялись условия:

I. $\theta_s(\bigcup C_n) = \bigcup \theta_s C_n$, $\theta_s(\bigcap C_n) = \bigcap \theta_s C_n$, $\theta_s(C_1 \setminus C_2) = \theta_s C_1 \setminus \theta_s C_2$.

II. $\theta_s(\{\omega : x_t(\omega) \in A\}) = \{\omega : x_{t+s}(\omega) \in A\}$, $t \geqslant 0$, $A \in \mathcal{B}$.

Из условия (4) можно получить такое более общее:

$$\mathbf{P}_x(\theta_s C / \mathcal{F}_s) = \mathbf{P}_{x(s)}(C), \quad C \in \mathcal{X}, \quad s > 0 \tag{5}$$

почти всюду по мере $\mathbf{P}_x$. Доказательство равенства (5) по сути содержится в доказательстве теоремы 1 § 2 гл. 1.

б) **Обрывающиеся однородные процессы.** Обрывающийся однородный процесс $x(t, \omega)$ с пространством элементарных событий $\{\Omega, \mathcal{F}\}$ и фазовым пространством $\{X, \mathcal{B}\}$ характеризуется еще одним дополнительным параметром: измеримой функцией $\zeta(\omega)$ из Ω в R_+, которая называется *временем жизни процесса*. Эта функция может принимать и значение $+\infty$, траектория процесса $x(t, \omega)$ определена на интервале $[0, \zeta(\omega)[$, таким образом функция $x(t, \omega)$ определена при $\omega \in \Omega$, $0 \leqslant t < \zeta(\omega)$, для всех t множество $\Omega_t = \{\omega : \zeta(\omega) > t\}$ принадлежит $\mathcal{F}$ и $x(t, \omega)$ измеримо отображает Ω_t в X, при этом для всех $s \in R_+$ и $\omega \in \Omega_s$ существует такое $\omega_s \in \Omega$, что $\zeta(\omega_s) = \zeta(\omega) - s$ и $x(t, \omega_s) = x(t+s, \omega)$ при $t \in [0, \zeta(\omega_s))$. Свойства 4) и 5) определения сохраняются при их правильном понимании. Свойство 4 б) нужно понимать так: каково бы ни было $t \in R_+$ и $B \subset \mathscr{B}$, событие $\{x(t, \omega) \in B\} \cap \{\zeta(\omega) > t\}$ принадлежит $\mathscr{F}_t$. Отсюда, в частности, вытекает, что $\{\zeta(\omega) > t\} \in \mathscr{F}_t$ и $\{\zeta(\omega) \leqslant t\} \subset \mathscr{F}_t$, т. е. $\zeta(\omega)$ является моментом остановки относительно потока $\{\mathscr{F}_t\}$.

Свойство 5 б) можно переформулировать так: для всех $s > 0$, $t > 0$, $A \in \mathscr{B}$

$$\mathbf{P}_x\{x(t+s, \omega) \in A,\ \zeta(\omega) > t+s / \mathscr{F}_s\} =$$
$$= \mathbf{P}_{x(s,\omega)}\{x(t, \omega) \in A, \zeta(\omega) > t\} I_{\{\zeta(\omega) > s\}}, \tag{6}$$

P_x — почти всюду на множестве $\{\omega : \zeta(\omega) > t\}$. Из соотношения (6), в частности, вытекает равенство

$$\mathbf{P}_x\{\zeta(\omega) > t+s / \mathscr{F}_s\} = \mathbf{P}_{x(s,\omega)}\{\zeta(\omega) > t\} I_{\{\zeta(\omega) > s\}}, \tag{7}$$

P_x — почти всюду. Равенство (7) показывает, что не всякий момент остановки относительно потока $\{\mathscr{F}_t\}$ может служить временем жизни однородного марковского процесса.

Замечание. Пусть $\tilde{x}(t, \omega)$ — однородный необрывающийся процесс, $\{\tilde{\mathscr{F}}_t\}$ и $\{\tilde{\mathbf{P}}_x\}$ — отвечающие ему поток σ-алгебр и набор вероятностей. Если $\zeta(\omega)$ — момент остановки относительно потока $\{\tilde{\mathscr{F}}_t\}$, для которого выполнено равенство (7) при замене $\mathbf{P}_x$ на $\tilde{\mathbf{P}}_x$, $\mathscr{F}_s$ на $\tilde{\mathscr{F}}_s$, то процесс $x(t, \omega) = \tilde{x}(t, \omega)$ при $t \in [0, \zeta(\omega))$ с временем жизни $\zeta(\omega)$, потоком $\{\tilde{\mathscr{F}}_t\}$ и вероятностями $\{\tilde{\mathbf{P}}_x\}$ будет однородным марковским процессом.

Пример. Пусть $\tilde{x}(t, \omega)$ — непрерывный однородный марковский процесс в сепарабельном полном метрическом фазовом пространстве $(X, \mathscr{B})$, где $\mathscr{B}$ — борелевская σ-алгебра X. Положим $\zeta(\omega) = \inf\{t : \tilde{x}(t, \omega) \bar{\in} U\}$, $U \subset X$ — открытое множество. Тогда процесс со временем жизни $\zeta(\omega)$ будет однородным марковским процессом. Действительно, событие

$$B_t = \{\zeta(\omega) > t\} = \{\omega : x(s, w) \in U, s \leqslant t\}$$

входит в σ-алгебру $\tilde{\mathscr{X}}$ (она построена по $\tilde{x}(\cdot, \omega)$ так, как $\mathscr{X}$ по $x(\cdot, \omega)$). Очевидно,

$$\theta_s B_t = \{\omega : x(u, \omega) \in U,\ s \leqslant u \leqslant s+t\}$$

и $B_s \cap \theta_s B_t = B_{s+t}$. Поэтому при $\omega \in B_s$ почти всюду по мере $\mathbf{P}_x$

$$\mathbf{P}_x\{B_{t+s} / \mathscr{F}_s\} = \mathbf{P}_x\{\theta_s B_t / \mathscr{F}_s\} = \mathbf{P}_{x(s)}\{B_t\},$$

т. е. выполнено (7).

1.2. Вероятность перехода. Вероятность перехода $P(t, x, A)$

однородного марковского процесса $x(t, \omega)$ определяется равенством

$$P(t, x, A) = \mathbf{P}_x\{x(t, \omega) \in A\} \tag{8}$$

для необрывающегося процесса, а для обрывающегося — равенством

$$P(t, x, A) = \mathbf{P}_x\{\zeta(\omega) > t,\ x(t, \omega) \in A\}. \tag{9}$$

Функция $P(t, x, A)$, определенная согласно (8) или (9), удовлетворяет условию:

1. $P(t, x, A)$ является мерой по A, при этом $P(t, x, X) \leqslant 1$ (если для всех $t>0$ и $x \in X$ будет $P(t, x, X) = 1$, то процесс необрывающийся). Поскольку должно выполняться равенство (4) или (6), то естественно считать, что выполнено также условие

2. $P(t, x, A)$ $\mathscr{B}$-измеримая функция x.

а) Уравнение Колмогорова—Чепмена. Это основное содержательное условие, которому удовлетворяет вероятность перехода. Для необрывающегося процесса такое уравнение можно получить из аналогичного уравнения для общего марковского процесса (см. гл. 1).

3. При $s>0$, $t>0$, $x \in X$, $A \in \mathscr{B}$ справедливо равенство

$$P(s+t, x, A) = \int P(s, x, dy)\, P(t, y, A), \tag{10}$$

оно справедливо и для обрывающихся процессов, это и есть *уравнение Колмогорова—Чепмена* для однородного процесса. Доказательство (10) получаем из равенства (6):

$$P(s+t, x, A) = \mathbf{M}_x \mathbf{P}_x\{x(t+s, \omega) \in A,\ \zeta(\omega) > t+s / \mathscr{F}_s\} =$$
$$= \mathbf{M}_x \mathbf{P}_{x(s,\omega)}\{x(t, \omega) \in A,\ \zeta(\omega) > t\}\, I_{\{\zeta(\omega)>s\}} =$$
$$= \mathbf{M}_x P(t, x(s, \omega), A)\, I_{\{\zeta(\omega)>s\}} = \int P(s, x, dy)\, P(t, y, A).$$

Здесь $\mathbf{M}_x$ обозначает математическое ожидание по мере $\mathbf{P}_x$.

Функцию $P(t, x, A)$, удовлетворяющую перечисленным условиям 1—3, будем называть *однородной вероятностью перехода.*

В дальнейшем для сокращения записи будем писат $\mathbf{P}_x\{x(t, \omega) \in B\}$ вместо $\mathbf{P}_x\{x(t, \omega) \in B,\ \ \zeta(\omega) > t\}$ и $\mathbf{M}_x \varphi(x(t, \omega)$ вместо $\mathbf{M}_x \varphi(x(t, \omega))\, I_{\{\zeta(\omega)>t\}}$. Вообще при подсчете математи ческого ожидания некоторого функционала от процесса будем считать, что там, где этот функционал не определен, он равен нулю.

б) Построение однородного марковского процесса по однородной вероятности перехода. Пусть $(X, \mathscr{B})$ — измеримое пространство, на котором задана однородная вероятность перехода $P(t, x, A)$. Наша цель — построить (вообще говоря, обрывающийся) однородный марковский процесс с такой вероятностью перехода. Рассмотрим некоторое одноточечное множество $\{x_\infty\}$, не принадлежащее X, и введем расширение исходного фазового пространства $\tilde{X} = X \cup \{x_\infty\}$, $\tilde{\mathscr{B}}$ — σ-алгебра подмножеств из X, $\tilde{\mathscr{B}} = \mathscr{B} \vee \{x_\infty\}$.

На пространстве $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathscr{B}})$ определим вероятность перехода $\widetilde{P}(t, x, A)$ равенствами

$$\widetilde{P}(t, x, A) = P(t, x, A), \quad x \in X, \quad A \in \mathscr{B};$$

$$\widetilde{P}(t, x, \{x_\infty\}) = 1 - P(t, x, X), \quad x \in X; \quad \widetilde{P}(t, x_\infty, \{x_\infty\}) = 1.$$

То, что это однородная вероятность перехода, легко проверяется.

Предположим теперь, что измеримое пространство $(X, \mathscr{B})$ таково, что для него справедлива теорема Колмогорова о существовании случайного процесса с заданными конечномерными распределениями (см. [2]). Тогда таковым будет и пространство $(\widetilde{X}, \widetilde{\mathscr{B}})$. Рассмотрим пространство всех функций $x(t)$ на R_+ со значениями в $\widetilde{X}$, удовлетворяющих такому условию: если для некоторого $s \in R_+$ $x(s) = x_\infty$, то $x(t) = x_\infty$ для всех $t > s$. Обозначим это пространство функций $\mathbf{X}^\infty$. На цилиндрических множествах $\mathbf{X}^\infty$ определим меру $\mathbf{P}_x$ равенством

$$\mathbf{P}_x(C) = \int_{B_1} \widetilde{P}(t_1, x, dx_1) \int_{B_2} \widetilde{P}(t_2 - t_1, x_1, dx_2) \ldots$$
$$\ldots \int_{B_n} \widetilde{P}) t_n - t_{n-1}, x_{n-1}, dx_n), \qquad (11)$$

где

$$C = \{x(\cdot) \in \mathbf{X}^\infty : x(t_1) \in B_1, \ldots, x(t_n) \in B_n\}, \quad 0 < t_1 < \ldots < t_n.$$

Заметим, что такое множество пусто, если $B_i = \{x_\infty\}$, а при $j > i$ $B_j \cap \{x_\infty\} = \varnothing$. Но, как вытекает из определения $\widetilde{P}$, в этом случае и $\mathbf{P}_x(C) = 0$. Поэтому мера $\mathbf{P}_x$ на наименьшей σ-алгебре, содержащей все цилиндрические множества, существует. Обозначая эту σ-алгебру $\mathscr{C}_{\mathbf{X}^\infty}$, мы можем в качестве $\{\Omega, \mathscr{F}\}$ взять $\{\mathbf{X}^\infty, \mathscr{C}_{\mathbf{X}^\infty}\}$, в качестве $\zeta(\omega) = \zeta(\omega(\cdot)) = \inf\{t : \omega(t) = x_\infty\}$, $x(t, \omega) = \omega(t)$ при $t < \zeta(\omega)$, σ-алгебра $\mathscr{F}_t$ порождается цилиндрическими множествами $\{\omega(\cdot) : \omega(s) \in B\}$, $B \in \widetilde{\mathscr{B}}$, $s \leqslant t$. Из формулы (11) вытекает выполнение (6).

§ 2. Полугрупповая теория однородных марковских процессов

Первая задача, возникающая в теории однородных марковских процессов — изучение однородных вероятностей перехода. Этим и занимается полугрупповая теория.

2.1. Связанная с процессом полугруппа операторов. Пусть $(X, \mathscr{B})$ — измеримое пространство со счетно-порожденной σ-алгеброй $\mathscr{B}$. На этом пространстве задана однородная вероятность перехода $P(t, x, B)$. Обозначим через $\mathbf{B}$ пространство ограниченных $\mathscr{B}$-измеримых функций $f(x)$, $\|f\| = \sup_x |f(x)|$. Для всякой $f \in \mathbf{B}$ определена функция

$$T_t f(x) = \int f(y) P(t, x, dy), \tag{12}$$

она также принадлежит $\mathbf{B}$. Очевидно, что соотношение (12) определяет линейный оператор из $\mathbf{B}$ в $\mathbf{B}$. Операторы $\{T_t, t>0\}$ удовлетворяют условиям:

1) $\|T_t\| = \sup\limits_{\|f\| \leqslant 1} \|T_t f\| \leqslant 1$ (свойство сжимаемости),

2) для $f \in \mathbf{B}$, $f \geqslant 0$ и $T_t f \geqslant 0$ (свойство сохранения положительности),

3) $T_{t+s} = T_t T_s$, $t>0$, $s>0$ (полугрупповое свойство).

Полугруппа для необрывающегося процесса характеризуется тем, что $T_t 1 = 1$ для всех $t>0$ (в общем случае $T_t 1 \leqslant 1$).

Все эти свойства вытекают из определения (12) и свойств вероятности перехода. В частности, равенство

$$T_{t+s} I_A = T_t T_s I_A$$

есть уравнение Колмогорова — Чепмена ($A \in \mathscr{B}$, I_A — индикатор A). Будем считать, что $T_0 = I$ — тождественный оператор. Совокупность операторов $\{T_t, t \in R_+\}$ образует сжимающую, сохраняющую положительность полугруппу операторов.

а) Слабо измеримые полугруппы. *Полугруппа* называется *слабо измеримой*, если функция $T_t f(x)$ измерима по совокупности переменных относительно $\mathscr{B}_{R_1} \otimes \mathscr{B}$. Легко видеть, что для этого достаточно, чтобы функция $P(t, x, A)$ была измерима относительно $\mathscr{B}_{R_1} \otimes \mathscr{B}$ для всех $A \in \mathscr{B}$.

Введем множество функций $\mathbf{B}_0 \subset \mathbf{B}$, это множество таких $f \in B$, для которых

$$\lim_{t \to 0} \|T_t f - f\| = 0.$$

Это множество непусто. Для всякого $f \in \mathbf{B}$ функция $\int\limits_\alpha^\beta T_s f(x)\, ds$ принадлежит $\mathbf{B}_0$ (ее измеримость вытекает из слабой измеримости полугруппы). Действительно (меняя порядок интегрирования), имеем

$$T_t \left(\int\limits_\alpha^\beta T_s f(x)\, ds \right) = \int\limits_\alpha^\beta T_{t+s} f(x)\, ds = \int\limits_{\alpha+t}^{\beta+t} T_s f(x)\, ds,$$

$$\left\| T_t \int\limits_\alpha^\beta T_s f\, ds - \int\limits_\alpha^\beta T_s f\, ds \right\| = \left\| \int\limits_\beta^{\beta+t} T_s f\, ds - \int\limits_\alpha^{\alpha+t} T_s f\, ds \right\| \leqslant 2t \|f\|.$$

Лемма 1. $\mathbf{B}_0$ совпадает с замыканием в норме $\mathbf{B}$ множества функций

$$\left\{ \int\limits_\alpha^\beta T_s f\, ds,\ f \in \mathbf{B},\ 0 \leqslant \alpha < \beta \right\}. \tag{13}$$

Доказательство. То, что множество (13) входит в $\mathbf{B}_0$, показано выше. Если $f_n \in \mathbf{B}_0$, $\|f_n - f\| \to 0$, то для всех n

$$\|T_t f - f\| \leqslant \|T_t f_n - T_t f\| + \|T_t f_n - f_n\| + \|f_n - f\| \leqslant$$
$$\leqslant 2\|f_n - f\| + \|T_t f_n - f_n\|.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{t \to 0}} \|T_t f - f\| \leqslant 2\|f_n - f\| \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

$\mathbf{B}_0$ — замкнуто.

Пусть $g \in \mathbf{B}_0$. Тогда

$$\left\| g - \frac{1}{h} \int_0^h T_s g\, ds \right\| \leqslant \frac{1}{h} \int_0^h \|g - T_s g\|\, ds \to 0 \text{ при } h \to 0,$$

а функции $\frac{1}{h} \int_0^h T_s g\, ds$ принадлежат множеству (13).

Замечание. Если $g \in \mathbf{B}_0$, то функция $T_s g \in \mathbf{B}_0$, так как

$$\|T_t T_s f - T_s g\| = \|T_s (T_t g - g)\| \leqslant \|T_t g - g\| \to 0$$

при $t \to 0$. Значит, $T_s g$ непрерывна (по норме $\mathbf{B}$) для всех $g \in \mathbf{B}_0$.

Наиболее интересный случай, когда полугруппа на $\mathbf{B}$ определяется своими значениями на $\mathbf{B}_0$. Это будет, например, в том случае, когда $\mathbf{B}_0$ — *тотальное множество функций* для σ-алгебры $\mathscr{B}$: последнее означает, что если для двух мер μ и ν на $\mathscr{B}$ выполнено равенство

$$\int f(x)\, \mu(dx) = \int f(x)\, \nu(dx)$$

для всех $f \in \mathbf{B}_0$, то $\mu = \nu$.

б) Резольвента полугруппы. Рассмотрим семейство операторов $\{R_\lambda\}$ на $\mathbf{B}_0$, определенных для комплексных λ равенствами

$$R_\lambda f(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T_t f(x)\, dt, \quad \mathrm{Re}\, \lambda > 0. \tag{14}$$

Операторная функция R_λ называется резольвентой полугруппы. Так как преобразование Лапласа непрерывной функции однозначно определяет эту функцию, то резольвента определяет полугруппу на $\mathbf{B}_0$ (если $\mathbf{B}_0$ — тотальное множество, то тем самым полугруппа определяется и на $\mathbf{B}$).

Отметим свойства резольвенты:

1) $\|R_\lambda\| \leqslant \frac{1}{\mathrm{Re}\, \lambda}$, 2) $R_\lambda f \geqslant 0$ при $f \geqslant 0$, $\lambda > 0$, 3) при $f \in \mathbf{B}_0$ $\|f - \lambda R_\lambda f\| \to 0$ при $\lambda > 0$, $\lambda \to \infty$, 4) при $\mathrm{Re}\, \lambda > 0$, $\mathrm{Re}\, \mu > 0$ выполнено *резольвентное уравнение*

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda. \tag{15}$$

Свойство 3) вытекает из определения (14) и соотношений

$$\| f-\lambda R_\lambda f \| = \left\| \lambda \int_0^\infty e^{-\lambda t}(f-T_t f)\,dt \right\| \leqslant \int_0^\infty e^{-u} \left\| f - T_{\frac{u}{\lambda}} f \right\| du$$

и того, что подынтегральная функция в интеграле справа ограничена величиной $2\|f\|e^{-u}$ и стремится к нулю при $\lambda\to\infty$. Свойство 4) — уравнение (15) — получается из равенств

$$R_\mu R_\lambda = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t-\mu s} T_t T_s\,dt\,ds =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\lambda t-\lambda s} T_{t+s}\,dt\,ds = \int_0^\infty \int_0^u e^{-\lambda t-\mu(u-t)}\,dt\,T_u\,du =$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-\lambda u}-e^{-\mu u}}{\mu-\lambda} T_u\,du = \frac{1}{\mu-\lambda}(R_\lambda - R_\mu).$$

Замечание. Если полугруппа соответствует необрывающемуся процессу, то $R_\lambda 1 = \frac{1}{\lambda}$ для всех $\lambda > 0$

в) Производящий оператор полугруппы. Обозначим через $D\in\mathbf{B}_0$ множество тех $f(x)$, для которых существует предел по норме $\mathbf{B}$

$$g(x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T_t f(x) - f(x)),$$

этот предел и есть значение *производящего оператора* A *полугруппы* на функции f, т. е. для $f\in D$ $Af=g$.

Теорема 1. D совпадает с $R_\lambda(\mathbf{B}_0)$, каково бы ни было $\lambda > 0$ и

$$R_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}. \tag{16}$$

Доказательство. Пусть $\varphi = R_\lambda f$. Покажем, что $\varphi\in D$ и вычислим $A\varphi$. Имеем

$$\frac{1}{t}(T_t\varphi-\varphi) = \frac{1}{t}\left(T_t \int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s f\,ds - \int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s f\,ds \right) =$$

$$= \frac{1}{t}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda s} T_{s+t} f\,ds - \int_0^\infty e^{-\lambda s} T_s f\,ds \right) =$$

$$= \frac{1}{t}(e^{\lambda t}-1)\varphi - \frac{1}{t} e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s} T_s f\,ds.$$

Поэтому

$$A\varphi = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(e^{\lambda t}-1)\varphi - \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\int_0^t e^{\lambda(t-s)}T_s f\,ds = \lambda\varphi - f.$$

Тем самым доказано, что $D\supset R_\lambda(\mathbf{B}_0)$, и установлено равенство

$$(\lambda I - A)R_\lambda f = f,\ f\in\mathbf{B}_0. \tag{17}$$

Покажем теперь, что

$$R_\lambda(\lambda I - A)\varphi = \varphi,\quad \varphi\in D. \tag{18}$$

Действительно, воспользовавшись ограниченностью R_λ и тем, что $R_\lambda T_t = T_t R_\lambda$ имеем

$$R_\lambda(\lambda I - A)\varphi = \lambda R_\lambda\varphi - R_\lambda\left(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(T_t\varphi-\varphi)\right) =$$

$$= \lambda R_\lambda\varphi - \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(R_\lambda T_t\varphi - R_\lambda\varphi) = \lambda R_\lambda\varphi - \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(T_t R_\lambda\varphi - R_\lambda\varphi).$$

Последний предел вычислен при выводе (17), он равен $\lambda R_\lambda\varphi - \varphi$. Тем самым (18) установлено. Из (18) вытекает также, что для $\varphi\in D$ найдется $g\in\mathbf{B}_0$ такое, что $\varphi = R_\lambda g$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Оператор R_λ взаимно однозначно отображает $\mathbf{B}_0$ на D, и оператор $\lambda I - A$ взаимно однозначно отображает D на $\mathbf{B}_0$

З а м е ч а н и е 1. Формула (16) показывает, что производящий оператор A определяет резольвенту полугруппы на $\mathbf{B}_0$, а следовательно, и саму полугруппу на $\mathbf{B}_0$.

З а м е ч а н и е 2. Легко видеть, что A и T_t коммутируют на D и справедлнвы соотношения

$$\frac{dT_t\varphi}{dt} = T_t A\varphi = AT_t\varphi \tag{19}$$

(это *прямое* и *обратное уравнения Колмогорова*). Из уравнений (19) вытекают такие равенства:

$$T_t\varphi = \varphi + \int_0^t T_s A\varphi\,ds = \varphi + \int_0^t AT_s\varphi\,ds. \tag{20}$$

2.2. Теорема Хилле — Иосида. Эта теорема дает условия, которым должен удовлетворять оператор A, чтобы быть производящим для слабо измеримой сжимающей сохраняющей положительность полугруппы.

Т е о р е м а 2. Пусть оператор A определен на некотором линейном множестве $D\subset\mathbf{B}$. Для того чтобы он был производящим оператором для некоторой сжимающей, сохраняющей положительность полугруппы, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

1) A — оператор замкнут,

2) для всех $\lambda>0$ и $g\in D$ уравнение $\lambda f-Af=g$ имеет решение, при этом для $g\geqslant 0$ будет также и $f\geqslant 0$ и для всех g выполняется неравенство $\|f\|\leqslant\lambda^{-1}\|g\|$.

Доказательство. Необходимость легко проверяется. Докажем достаточность. Обозначим решение уравнения $\lambda f-Af=g$ через $f=R_\lambda g$. Очевидно, что это линейный оператор из D в D, для которого $\|R_\lambda\|\leqslant\lambda^{-1}$. Так как A замкнут, то уравнение $\lambda f-Af=g$ имеет решение для всех $g\in\mathbf{B}_0$, где $\mathbf{B}_0$ — замыкание D в норме $\mathbf{B}$. В силу условия 2) $R_\lambda g\geqslant 0$ для $g\geqslant 0$. R_λ взаимно однозначно отображает $\mathbf{B}_0$ на D и $R_\lambda=(\lambda I-A)^{-1}$. Отсюда вытекает резольвентное уравнение для R_λ: при $\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$

$$R_{\lambda_1}-R_{\lambda_2}=(\lambda_2-\lambda_1)R_{\lambda_1}R_{\lambda_2}.$$

Используя резольвентное уравнение, устанавливаем существование производной: при $\lambda>0$

$$\frac{d}{d\lambda}R_\lambda=-R_\lambda^2,\qquad \frac{d^n}{d\lambda^n}R_\lambda=(-1)^n n!\,(R_\lambda)^{n+1}.$$

Построим теперь аналитическое продолжение R_z в область $\operatorname{Re} z>0$ с помощью формул

$$R_z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-\lambda)^n(R_\lambda)^{n+1}, \tag{21}$$

ряд (21) сходится при $|z-\lambda|<\lambda$. Можно убедиться, что правая часть (21) не зависит от выбора λ. Пусть $z=\alpha+i\beta$. Тогда

$$\|R_z\|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda-\alpha-i\beta|^n\lambda^{-(n+1)}=\frac{1}{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{(\lambda-\alpha)^2+\beta^2}}{\lambda}\right)^n=$$

$$=\frac{1}{\lambda-\sqrt{(\lambda-\alpha)^2+\beta^2}}=\frac{\lambda+\sqrt{(\lambda-\alpha)^2+\beta^2}}{2\lambda\alpha+\alpha^2+\beta^2}.$$

Переходя к пределу при $\lambda\to\infty$, находим

$$\|R_z\|\leqslant\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\operatorname{Re} z}.$$

Обозначим $D_1=R_1(D)$. Так как D плотно в $\mathbf{B}_0$, то D_1 плотно в D, а значит, и в $\mathbf{B}_0$. Для $\varphi\in D_1$ справедливо представление

$$R_\lambda\varphi=\frac{1}{\lambda}\varphi+\frac{1}{\lambda^2}A\varphi+\frac{1}{\lambda^2}R_\lambda A^2\varphi$$

(при $\varphi\in D_1$ определено $A^2\varphi$). Пусть для $\varphi\in D_1$

$$U_t(\varphi)=\varphi+tA\varphi+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\operatorname{Re}\lambda=\alpha}\frac{e^{i\lambda t}R_\lambda A^2\varphi}{\lambda^2}\,d\lambda$$

$\left(\text{так как } \| R_\lambda A^2\varphi \| \leqslant \frac{1}{\alpha} \| A^2\varphi \|, \text{ то интеграл существует}\right)$. Тогда

$$R_\lambda\varphi = \int_0^\infty e^{-\lambda t} U_t(\varphi)\, dt,$$

где $U_t(\varphi)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая соотношению $|U_t(\varphi)| = O(e^{\alpha t})$. Воспользуемся следующей формулой обращения для преобразования Лапласа: если

$$\hat{g}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} g(t)\, dt,$$

$g(t)$ непрерывна и при некотором $\alpha > 0$ $g(t) = O(e^{\alpha t})$, то

$$g(t) = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^{n+1}}{n!\,t^{n+1}} \cdot \frac{d^n}{d\lambda^n} \hat{g}\left(\frac{n}{t}\right).$$

Имеем

$$U_t(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{t} R_{\frac{n}{t}}\right)^{n+1} \varphi.$$

Значит, $\| U_t(\varphi) \| \leqslant \varphi$ и $U_t(\varphi)$ по непрерывности продолжаются на $\mathbf{B}_0$. Так как $\lambda R_\lambda \varphi \geqslant 0$ при $\varphi \geqslant 0$, то и $\left(\frac{n}{t} R_{\frac{n}{t}}\right)^{n+1} \varphi \geqslant 0$ для $\varphi \geqslant 0$, и значит, $U_t(\varphi) \geqslant 0$. По определению $U_t(\varphi)$ — линейная функция от φ. Наконец, используя резольвентное уравнение, можем установить, что $U_t(\varphi)$ полугруппа (ср. с доказательством свойства 4) резольвенты в 2.1 б)).

Замечание. Для того, чтобы A был производящим оператором полугруппы, отвечающей необрывающемуся процессу, дополнительно требуется, чтобы $1 \in D$ и $A1 = 0$. Действительно, в этом случае

$$\lambda 1 - A1 = \lambda 1, \quad R_\lambda 1 = \frac{1}{\lambda} \cdot 1, \quad T_t 1 = 1, \quad t > 0.$$

2.3. Стохастически непрерывные процессы в топологическом пространстве. Пусть X — топологическое пространство со счетной базой окрестностей, $\mathscr{B}$ — борелевская σ-алгебра (она счетно порождена). *Однородный марковский процесс* называется *стохастически непрерывным*, если для всякого $x \in X$ и $U \ni x$

$$\lim_{t\to 0} P(t, x, U) = 1.$$

Если процесс слабо измерим и стохастически непрерывен, а топологическое пространство таково, что пространство $\mathbf{C}$ ограниченных непрерывных функций является тотальным множеством, тогда и $\mathbf{B}_0$ будет тотальным. Покажем это.

Лемма 2. Если процесс стохастически непрерывен, то для всех $f \in \mathbf{C}$ и $x \in X$ $\lim\limits_{t \to 0} T_t f(x) = f(x)$.

Доказательство.

$$\overline{\lim_{t \to 0}} |T_t f(x) - f(x)| \leqslant \overline{\lim_{t \to 0}} \int |f(y) - f(x)| P(t, x, dy) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{\lim_{t \to 0}} \left(\varepsilon + \int\limits_{|f(y) - f(x)| > \varepsilon} |f(y) - f(x)| P(t, x, dy) \right) \leqslant \varepsilon,$$

каково бы ни было $\varepsilon > 0$, так как $\lim\limits_{t \to 0} P(t, x, \{y : |f(y) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$.

Следствие. Если $\int g(x) \mu(dx) = \int g(x) \nu(dx)$ для всех $g \in \mathbf{B}_0$, то это равенство выполняется и для всех $g \in \mathbf{C}$. Действительно, для таких g

$$\int \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t T_s g(x)\, dx \right) \mu(dx) = \int \left(\frac{1}{t} \int\limits_0^t T_s g(x)\, ds \right) \nu(dx), \qquad (22)$$

так как $\frac{1}{t} \int\limits_0^t T_s g(x)\, ds \in \mathbf{B}_0$. Так как $\left\| \frac{1}{t} \int\limits_0^t T_s g\, ds \right\| \leqslant \| g \|$ и $\frac{1}{t} \int\limits_0^t T_s g(x)\, ds \to g(x)$ при $t \to 0$ для всех x, то, переходя в (22) к пределу при $t \to 0$, получим требуемое.

Обозначим через $\widetilde{\mathbf{B}}_0$ множество тех $f \in \mathbf{B}$, для которых $T_t f(x) \to f(x)$ при $t \to 0$ для всех $x \in X$. Очевидно, $\mathbf{C} \in \widetilde{\mathbf{B}}_0$. При $f \in \widetilde{\mathbf{B}}_0$ и $T_s f \in \widetilde{\mathbf{B}}_0$, каково бы ни было $s > 0$:

$$\lim_{t \to 0} T_t T_s f(x) = \lim_{t \to 0} T_s T_t f(x) =$$

$$= \lim_{t \to 0} \int P(s, x, dy) T_t f(y) = \int P(s, x, dy) f(y) = T_s f(x)$$

мы воспользовались возможностью предельного перехода под знаком интеграла). Очевидно $\widetilde{\mathbf{B}}_0$ замкнуто в норме $\mathbf{B}$.

Пусть $R_\lambda f(x)$ — резольвента полугруппы. Легко видеть, что для $f \in \widetilde{\mathbf{B}}_0$ и $R_\lambda f \in \widetilde{\mathbf{B}}_0$. Определим слабый производящий оператор полугруппы $\widetilde{A}$:

$$\widetilde{A} f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{T_t f(x) - f(x)}{t}, \qquad (23)$$

если предел справа существует для всех x и выражение под знаком предела ограничено. Множество тех $f \in \widetilde{\mathbf{B}}_0$, для которых предел (23) существует, обозначим $\widetilde{D}$. Очевидно $\widetilde{D} \supset D$ и $\widetilde{A} = A$ на D.

Теорема 3. Для всех $\lambda > 0$ $\widetilde{D} = R_\lambda(\widetilde{\mathbf{B}}_0)$ и

$$(\lambda I - \widetilde{A}) R_\lambda f = f, \quad f \in \widetilde{\mathbf{B}}_0, \quad R_\lambda (\lambda I - \widetilde{A}) \varphi = \varphi, \quad \varphi \in \widetilde{D}.$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1 и мы не будем ее приводить.

Замечание. Если X таково, что $\mathbf{C}$ — тотальное множество, то $\widetilde{A}$ определяет полугруппу, отвечающую стохастически непрерывному слабо измеримому процессу. Это вытекает из того, что $\widetilde{A}$ определяет полугруппу на $\mathbf{B}_0$, а $\mathbf{B}_0$ является тотальным множеством.

а) **Феллеровские процессы.** Однородный марковский процесс называется феллеровским, если $T_t f \in \mathbf{C}$ для всех $f \in \mathbf{C}$. Если при этом $\mathbf{C}$ является тотальным множеством, то имеет смысл рассматривать полугруппу только на $\mathbf{C}$. Для стохастически непрерывного феллеровского процесса слабый производящий оператор определяется равенством (23), но при этом требуется, чтобы функции $(T_t f(x) - f(x)) t^{-1}$ были ограничены в совокупности, а предел их был непрерывной функцией. Будем использовать и в этом случае для слабого производящего оператора символ $\widetilde{A}$, а через $\widetilde{D}$ обозначать его область определения. Теорема 3 остается справедливой, если в ней $\widetilde{\mathbf{B}}_0$ заменить на $\mathbf{C}$.

Для всякой функции $f \in \widetilde{D}$ справедливо соотношение

$$\frac{d}{dt} T_t f = T_t \widetilde{A} f,$$

а значит, и равенство

$$T_t f(x) - f(x) = \int_0^t T_s \widetilde{A} f(x)\, ds. \tag{24}$$

2.4. Процессы со счетным множеством состояний. Пусть $\mathscr{N}$ — конечное или счетное множество, являющееся фазовым пространством процесса, σ-алгебра $\mathscr{B}$ порождается одноточечными множествами. Вероятность перехода процесса определяется набором функций

$p_{ij}(t) = P(t, i, \{j\}), \ i, j \in \mathscr{N}, \ \{j\}$ — одноточечное множество.

Будем предполагать, что процесс стохастически непрерывен: $p_{ii}(t) \to 1$ при $t \to 0$. Если наделить $\mathscr{N}$ дискретной топологией, то пространства $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ совпадают с пространством всех ограниченных функций на $\mathscr{N}$. Уравнение Колмогорова — Чепмена в этом случае имеет вид:

$$p_{ij}(t+s) = \sum_{k \in \mathrm{N}} p_{ik}(t) p_{kj}(s). \tag{25}$$

а) **Теоремы о производных в нуле для вероятностей перехода.** Докажем две теоремы Колмогорова о вероятностях перехода.

Теорема 4. Для всех i существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1-p_{ii}(t)}{t}=-a_{ii},$$

(возможно $-a_{ii}=+\infty$).

Доказательство. Пусть $s\in(nt,\ nt+t)$. Тогда, используя (25), можем записать

$$p_{ii}(s)\geqslant p_{ii}(t)\,p_{ii}(s-t)\geqslant p_{ii}^n(t)\,p_{ii}(s-nt),$$

$$\frac{1-p_{ii}(s)}{s}\leqslant\frac{1-p_{ii}^n(t)}{nt}+\frac{1-p_{ii}(s-nt)}{s}\leqslant\frac{1-p_{ii}(t)}{t}+$$
$$+\frac{1-p_{ii}(s-nt)}{s}.$$

Пусть $c=\sup\limits_{t>0}\frac{1-p_{ii}(t)}{t}\geqslant\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\frac{1-p_{ii}(t)}{t}$. Покажем, что $\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}\frac{1-p_{ii}(t)}{t}\geqslant c$. Если $c_1<c$, то найдется такое s, что

$$c_1<\frac{1-p_{ii}(s)}{s},\quad c_1<\frac{1-p_{ii}(t)}{t}+\frac{1-p_{ii}(s-nt)}{s},$$

и переходя к пределу при $t\to 0$, найдем, учитывая, что $s-nt<t\to 0$,

$$c_1\leqslant\underline{\lim_{t\to 0}}\frac{1-p_{ii}(t)}{t}.$$

Теорема 5. При $i\neq j$ существует конечный предел

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}p_{ij}(t)=a_{ij}.$$

Доказательство. Пусть $nt<s<(n+1)t$. Опять используя уравнения Колмогорова — Чепмена убеждаемся в справедливости неравенства

$$p_{ij}(s)\geqslant\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{\substack{k_1\neq j\\ \cdots\cdots\\ k_{r-1}\neq j}}p_{ik_1}(t)\ldots p_{k_{r-1}i}(t)\,p_{ij}(t)\,p_{jj}(s-(r+1)\,t).$$

Оценим для данного r сумму $S_r=\sum\limits_{\substack{k_1\neq j\\ \cdots\cdots\\ k_{r-1}\neq j}}p_{ik_1}(t)\ldots p_{k_{r-1}i}(t)$. S_r есть вероятность того, что процесс, находясь в состоянии i в начальный момент, перейдет за время rt в состояние i, не попадая в моменты $t,\ 2t,\ldots,\ (r-1)t$ в состояние j. Пусть A_k — событие, заключающееся в том, что процесс попадет в состояние j в момент kt, а в моменты $t, \ldots, (k-1)t$ не попадает в это состояние. Тогда

$$p_{ii}(rt) - S_r = \sum_{k=1}^{r-1} \mathbf{P}_i(A_k)\, p_{ji}((r-k)t).$$

Если $p_{ii}(u) \leqslant 1-\delta$, $p_{jj}(u) \leqslant 1-\delta$ при $0 \leqslant u \leqslant s$, то

$$p_{ii}(rt) - S_r \leqslant \delta \sum_{k=1}^{r-1} \mathbf{P}_i(A_k) \leqslant \delta,$$

так как A_k — несовместимые события,

$$p_{ij}(s) \geqslant (1-\delta) \sum_{r=0}^{n-1} S_r p_{ij}(t)\, p_{jj}(t) \geqslant (1-\delta) \sum_{r=0}^{n-1} (p_{ii}(rt) - \delta)\, p_{ij}(t) \geqslant$$

$$\geqslant (1-\delta)(1-2\delta)\, n p_{ij}(t).$$

Поэтому

$$\frac{p_{ij}(t)}{t} \leqslant \frac{1}{(1-\delta)(1-2\delta)} \cdot \frac{p_{ij}(s)}{s-t},$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{p_{ij}(t)}{t} \leqslant \frac{1}{(1-\delta)(1-2\delta)} \cdot \frac{p_{ij}(s)}{s}.$$

Отсюда вытекает конечность верхнего предела. Значит,

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{p_{ij}(t)}{t} \leqslant \frac{1}{(1-\delta)(1-2\delta)} \underline{\lim_{s\to 0}} \frac{p_{ij}(s)}{s}.$$

Доказательство вытекает из того, что $\delta > 0$ можно выбрать сколь-угодно малым.

Замечание. Для всех i справедливо неравенство

$$\sum_{j\neq i} a_{ij} \leqslant -a_{ii}. \tag{26}$$

Действительно,

$$\sum_j p_{ij}(t) \leqslant 1, \quad \sum_{j\neq i} \frac{1}{t} p_{ij}(t) \leqslant \frac{1-p_{ii}(t)}{t}, \quad \sum_{j\in S} \frac{1}{t} p_{ij}(t) \leqslant \frac{1-p_{ii}}{t},$$

каково бы ни было конечное множество $S \in \mathcal{N}$, не содержащее i. Переходя к пределу при $t \to 0$, а затем по $S \uparrow \mathcal{N} - \{i\}$, получим (26).

б) Уравнение Колмогорова. Точка $i \in \mathcal{N}$ называется регулярной, если $-a_{ii} < +\infty$ и $\sum_{j\in\mathcal{N}} a_{ij} = 0$.

Теорема 6. Если точка i регулярна, то справедливо соотношение

$$\frac{d}{dt} p_{ik}(t) = \sum_{j \in \mathcal{N}} a_{ij} p_{jk}(t). \tag{27}$$

Доказательство.

$$\frac{1}{h}(p_{ik}(t+h) - p_{ik}(t)) = \frac{1}{h}\left(\sum_{j \in \mathcal{N}} p_{ij}(h) p_{jk}(t) - p_{ik}(t)\right) =$$

$$= \frac{1}{h} \sum_{j \in \mathcal{N}} (p_{ij}(h) - \delta_{ij}) p_{jk}(t),$$

$$\left| \frac{1}{h}(p_{ik}(t+h) - p_{ik}(t)) - \sum_{j \in \mathcal{N}} a_{ij} p_{jk}(t) \right| =$$

$$= \left| \sum_{j \in \mathcal{N}} \left(\frac{p_{ij}(h) - \delta_{ij}}{h} - a_{ij} \right) p_{jk}(t) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{j \in S} \left(\frac{p_{ij}(h) - \delta_{ij}}{h} - a_{ij} \right) p_{jk}(t) \right| + \sum_{j \bar{\in} S} \frac{p_{ij}(h)}{h} + \sum_{j \bar{\in} S} a_{ij},$$

где S — конечное множество, содержащее i. Так как

$$\sum_{j \bar{\in} S} \frac{p_{ij}(h)}{h} = \sum_{j \in S} \frac{\delta_{ij} - p_{ij}(h)}{h},$$

то

$$\varlimsup_{h \to 0} \left| \frac{1}{h}(p_{ik}(t+h) - p_{ik}(t)) - \sum a_{ij} p_{jk}(k) \right| \leqslant$$

$$\leqslant -\sum_{j \in S} a_{ij} + \sum_{j \bar{\in} S} a_{ij} = 2 \sum_{j \bar{\in} S} a_{ij}.$$

Последнюю сумму выбором S можно сделать сколь угодно малой. Отсюда вытекает, что $p_{ik}(t)$ имеет правую производную, совпадающую с правой частью (27). Поскольку это непрерывная функция, то существует и производная $\frac{d}{dt} p_{ik}(t)$, совпадающая с правой производной.

Следствие. Если все состояния процесса регулярны (он называется тогда локально регулярным), то соотношения (27) выполнены для всех i и k. Совокупность равенств (27) называется *первой* (или обратной) *системой уравнений Колмогорова.*

§ 3. Строго марковские процессы

Понятие строгой марковости введено в главе 2. Здесь мы рассмотрим однородные строго марковские процессы.

3.1. Определение. Достаточные условия. Строго марковское свойство означает сохранение марковского свойства в моменты остановки. Это утверждение нуждается в расшифровке.

Для того чтобы можно было рассматривать значения процесса в случайные моменты времени, необходимо наложить на процесс определенные условия измеримости.

Пусть $x(t, \omega)$ — однородный марковский процесс с фазовым пространством $(X, \mathscr{B})$, потоком σ-алгебр $\{\mathscr{F}_t\}$ и набором вероятностей $(\mathbf{P}_x)$. Будем называть его *прогрессивно измеримым,* если $x(t, \omega)$ прогрессивно измерим на каждом вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}_x\}$ относительно потока $(\mathscr{F}_t)$. Если τ — момент остановки относительно потока $(\mathscr{F}_t)$, то тогда величина $x(\tau, \omega)$ измерима относительно σ-алгебры $\mathscr{F}_\tau$ (см. гл. 2, § 2). Для всякого момента остановки τ и множества $C \in \mathscr{X}$ можно определить множество $\theta_\tau C$ аналогично тому, как в 1.1 б) была введена операция сдвига θ_t в частности,

$$\theta_\tau\{\omega : x(t, \omega) \in B\} = \{\omega : x(\tau+t, \omega) \in B\}. \tag{28}$$

Вообще говоря, τ может принимать значение $+\infty$, тогда левая часть (28) определяется на множестве $\{\omega : \tau < \infty\}$.

Определение. Однородный марковский процесс $x(t, \omega)$ называется строго марковским, если 1) он прогрессивно измерим. 2) для всех $C \in \mathscr{X}$, $x \in X$ и моментов остановки выполнено соотношение

$$\mathbf{P}_x\{\theta_\tau C / \mathscr{F}_\tau\} = \mathbf{P}_{x(\tau)}(C) \tag{29}$$

почти всюду по мере $\mathbf{P}_x$ на множестве $\tau < \infty$.

Замечание. Для того, чтобы выполнялось (29) для всех моментов остановки, достаточно, чтобы оно выполнялось для конечных моментов остановки и множеств C вида $C = \{\omega : x(t, \omega) \in \mathrm{B}\}$, $t \in R_+$, $B \in \mathscr{B}$.

Понятие строгой марковости естественно распространяется и на обрывающиеся процессы. Если $\zeta(\omega)$ — время жизни процесса, то для $C = \{\omega : x(t, \omega) \in B\}$ равенство (29) (см. 1.2 а)) следует понимать так:

$$\mathbf{P}_x\{x(t+\tau, \omega) \in B, \ \zeta(\omega) > t+\tau / \mathscr{F}_\tau\} = \mathbf{P}_{x(\tau)}\{x(t, \omega) \in B, \ \zeta(\omega) > t\}.$$

а) Достаточные условия строгой марковости. Пусть X — топологическое пространство со счетной базой, $\mathscr{B}$ — σ-алгебра борелевских множеств. Будем предполагать также, что $\mathbf{C}$ (пространство непрерывных ограниченных функций) является тотальным множеством на $(X, \mathscr{B})$. Рассмотрим некоторое подмножество $\mathbf{C}^0 \subset \mathbf{C}$, также являющееся тотальным.

Будем говорить, что марковский процесс $x(t, \omega)$ является $\mathbf{C}^0$-непрерывным справа, если для всякой функции $\varphi \in \mathbf{C}^0$ числовой процесс $\varphi(x, (t, \omega))$ является непрерывным справа с вероятностью $\mathbf{P}_x=1$, каково бы ни было $x \in X$. Процесс $x(t, \omega)$ называется $\mathbf{C}^0$-феллеровским, если $T_t\varphi(x) \in \mathbf{C}^0$ для всех $\varphi \in \mathbf{C}^0$.

Теорема 7. Для того, чтобы прогрессивно измеримый однородный марковский процесс $x(t, \omega)$ являлся строго марковским, достаточно, чтобы он был $\mathbf{C}^0$-непрерывным справа и $\mathbf{C}^0$-феллеровским.

Доказательство. Пусть τ — конечный момент остановки $\tau_n=\frac{k+1}{n}$ при $\frac{k}{n}<\tau\leqslant\frac{k+1}{k}$. Тогда τ_n — также момент остановки и $\mathscr{F}_\tau\subset\mathscr{F}_{\tau_n}$. Если $A\subset\mathscr{F}_\tau$, то $A\subset\mathscr{F}_{\tau_n}$. Легко видеть, что для $\varphi \in \mathbf{C}^0$

$$\mathbf{M}_x\varphi(x(t+\tau_n, \omega))\, I_A=\sum_k \mathbf{M}_x\varphi\left(x\left(t+\frac{k}{n}, \omega\right)\right) I_A I_{\left\{\tau_n=\frac{k}{n}\right\}}=$$

$$=\mathbf{M}_x\mathbf{M}_{x\left(\frac{k}{n}, \omega\right)}\varphi(x(t, \omega))\, I_{\left\{\tau_n=\frac{k}{n}\right\}}=\mathbf{M}_x\mathbf{M}_{x(\tau_n, \omega)}\varphi(x(t, \omega))\, I_A. \quad (30)$$

По предположению функция $T_t\varphi(x)=\mathbf{M}_x\varphi(x(t, \omega)) \in \mathbf{C}^0$. Поэтому $T_t\varphi(x(s, \omega))$ непрерывно справа по s с вероятностью $\mathbf{P}_x=1$. Значит,

$$\mathbf{P}_x\{\lim_{n\to\infty} T_t\varphi(x(\tau_n, \omega))=\varphi(x(\tau, \omega))\}=1. \quad (31)$$

Переходя к пределу при $n\to\infty$ в равенстве (30), с учетом (31) находим

$$\mathbf{M}_x\varphi(x(t+\tau, \omega))\, I_A=\mathbf{M}_x\mathbf{M}_{x(\tau, \omega)}\varphi(x(t, \omega))\, I_A,$$

$$\mathbf{M}_x(\varphi(x(t+\tau, \omega))/\mathscr{F}_\tau)=\mathbf{M}_{x(\tau, \omega)}\varphi(x(t, \omega))$$

для всех $\varphi \in \mathbf{C}^0$. Остается воспользоваться тотальностью множества $\mathbf{C}^0$.

Следствие. Непрерывный справа феллеровский однородный марковский процесс является строго марковским. Действительно, как непрерывный справа он прогрессивно измерим (см. гл. 2, § 2), а условие теоремы для него выполнено при $\mathbf{C}^0=\mathbf{C}$.

3.2. Характеристический оператор.

а) Об одном классе мартингалов, связанных с однородным марковским процессом. Рассмотрим однородный марковский процесс $x(t, \omega)$ в фазовом пространстве $(X, \mathscr{B})$ со счетно порожденной σ-алгеброй $\mathscr{B}$. Пространства $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}_0$ определяются, как в § 2, A — производящий оператор соответствующей полугруппы, D — его область определения. Для $\varphi \in D$ справедливы равенства (20).

Лемма 3. Пусть $\varphi \in D$, тогда процесс

$$\eta_\varphi(t)=\varphi(x(t, \omega))-\varphi(x(0, \omega))-\int_0^t A\varphi(x(s, \omega))\, ds \quad (32)$$

является мартингалом относительно потока $(\mathscr{F}_t)$ на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P}_x\}$ для всех $x \in X$.

Доказательство. Пусть $s>0$, $t>0$. Тогда из (32) вытекает

$$\mathbf{M}_x(\eta_\varphi(t+s)/\mathcal{F}_t)=\eta_\varphi(t)+\mathbf{M}_x\{\varphi(x(t+s,\ \omega))-$$

$$-\varphi(x(t,\ \omega))-\int_t^{t+s} A\varphi(x(u,\ \omega))\,du/\mathcal{F}_t\}=\eta_\varphi(t)+$$

$$\mathbf{M}_x\{\theta_t[\varphi(x(s,\ \omega))-\varphi(x(0,\ \omega))-\int_0^s A\varphi(x(u,\ \omega))\,du]/\mathcal{F}_t\}=$$

$$=\eta_\varphi(t)+\mathbf{M}_{x(t,\omega)}\,\eta_\varphi(s).$$

Далее,

$$\mathbf{M}_x\eta_\varphi(s)=\mathbf{M}_x\eta(x(s,\ \omega))-\varphi(x)-\int_0^s \mathbf{M}_xA\varphi(x(u,\ \omega))\,du=$$

$$=T_s\varphi(x)-\varphi(x)-\int_0^s T_uA\varphi(x)\,du=0$$

в силу (20).

Следствие. Пусть τ — момент остановки, для которого $\mathbf{M}_x\tau<\infty$. Тогда для $\varphi\in D$

$$\mathbf{M}_x\varphi(x(\tau,\ \omega))=\varphi(x)+\mathbf{M}_x\int_0^\tau A\varphi(x(s,\ \omega))\,ds. \tag{33}$$

Это формула Дынкина. Действительно, $\mathbf{M}_x\eta(\tau\wedge n)=0$ для всех n. Значит,

$$\mathbf{M}_x\varphi(x(\tau\wedge n,\ \omega))=\eta(x)+\mathbf{M}_x\int_0^{\tau\wedge n} A\varphi(x(s,\ \omega))\,ds.$$

В последнем равенстве можно перейти к пределу при $n\to\infty$, так как

$$\left|\int_0^{\tau\wedge n} A\varphi(x(s,\ \omega))\,ds\right|\leqslant\|\varphi\|\,\tau.$$

Если процесс $x(t,\ \omega)$ является обрывающимся, время жизни его $\zeta(\omega)$, то тогда полагаем

$$\eta_\varphi(t)=\varphi(x(t,\ \omega))\,I_{\{\zeta>t\}}-\varphi(x(0,\ \omega))-\int_0^{t\wedge\zeta(\omega)} A\varphi(x,(s,\ \omega))\,ds,$$

при этом сохраняется утверждение леммы I, а формула (33) принимает вид

$$\mathbf{M}_x\varphi(x(\tau,\ \omega))\,I_{\{\tau<\zeta(\omega)\}}=\varphi(x)+\mathbf{M}_x\int_0^{\tau\wedge\zeta(\omega)} A\varphi(x(s,\ \omega))\,ds. \tag{34}$$

б) Характеристический оператор. Будем предполагать, что X — топологическое пространство со счетной базой. Пусть для данного x U_n — такая последовательность окрестностей X, что для всякого открытого множества $G \ni x$, начиная с некоторого номера n, будет $U_n \subset G$. Тогда будем писать $U_n \downarrow x$.

Предположим далее, что процесс $x(t, \omega)$ непрерывен справа. Тогда величина

$$\tau_U = \inf\{t : \operatorname{mes}\{u < t : x(u, \omega) \overline{\in} U\} > 0\}$$

является моментом остановки.

Определение. Характеристический оператор C определен на функции φ, если для всех x определен предел

$$\lim_{U_n \downarrow x} \frac{\mathbf{M}_x \varphi(x(\tau_{U_n}, \omega)) - \varphi(x)}{\mathbf{M}_x \tau_{U_n}} = g(x) \tag{35}$$

(если $\mathbf{M}_x \tau_{U_n} = +\infty$, считаем отношение равным 0). При этом полагаем $C\varphi = g$. Область определения оператора C обозначим D_C.

Замечание. Если процесс $x(t, \omega)$ обрывающийся, то вместо формулы (35) нужно пользоваться формулой

$$C\varphi = \lim_{U \downarrow x} \frac{\mathbf{M}_x \varphi(x(\tau_U, \omega)) I_{\{\tau_u < \zeta\}} - \varphi(x)}{\mathbf{M}_x \tau_U \wedge \zeta(\omega)}. \tag{36}$$

в) Феллеровские процессы. Пусть $x(t, \omega)$ — непрерывный справа (а, значит, стохастически непрерывный) феллеровский прогрессивно измеримый процесс, топологическое пространство X предполагается таким, что $\mathbf{C}$ — тотальное множество.

Теорема 1. Если $f \in \tilde{D}$, где $\tilde{D}$ — область определения слабо производящего оператора A, то $f \in D_C$ и $\tilde{A}_f = \tilde{C} f$.

Доказательство. Используя соотношение (24), убеждаемся точно так, как в лемме 3, что

$$\tilde{\eta}_f(t) = f(x(t, \omega)) - f(x(0, \omega)) - \int_0^t \tilde{A} f(x(s, \omega))\, ds.$$

Отсюда получаем формулу, аналогичную (33):

$$\mathbf{M}_x f(x(\tau_{U_n}, \omega)) = f(x) + \mathbf{M}_x \int_0^{\tau_{U_n}} \tilde{A} f(x(s, \omega))\, ds =$$

$$f(x) + \tilde{A} f(x) \mathbf{M}_x \tau_{U_n} + \mathbf{M}_x \int_0^{\tau_{U_n}} [\tilde{A} f(x(s, \omega)) - \tilde{A} f(x)]\, ds.$$

Если для некоторого n будет $\mathbf{M}_x\tau_{U_n} < \infty$, то поскольку $\tau_n \downarrow 0$ будет $\mathbf{M}\tau_{U_n} \downarrow 0$. Поэтому

$$\frac{\mathbf{M}_x f(x(\tau_{U_n}, \omega)) - f(x)}{\mathbf{M}_x\tau_{U_n}} = \tilde{A}f(x) + O(\sup_{y \in U_n} |\tilde{A}f(y) - \tilde{A}f(x)|), \qquad (37)$$

так как почти для всех $s < \tau_{U_n}$ будет $x(s, \omega) \in U_n$. В силу непрерывности $\tilde{A}f$ величина под знаком $O(\quad)$ стремится к нулю. Значит, существует предел левой части (37) и он совпадает с $\tilde{A}f(x)$. Если $\tilde{A}f(x) \neq 0$, то выберем n таким, чтобы при $y \in U_n$

$$|\tilde{A}f(x) - \tilde{A}f(y)| \leqslant 2^{-1} |\tilde{A}f(x)|.$$

Тогда

$$|\mathbf{M}_x f(x(\tau_{U_n}, \omega)) - f(x)| \geqslant \frac{1}{2} |\tilde{A}f(x)| \mathbf{M}_x\tau_{U_n}$$

и, значит, $\mathbf{M}_x\tau_{U_n} < \infty$. Таким образом, если $\mathbf{M}_x\tau_{U_n} = +\infty$. для всех n, то $\tilde{A}f(x) = 0$. Но тогда и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbf{M}_x f(x(\tau_{U_n}, \omega)) - f(x)}{\mathbf{M}_x\tau_{U_n}} = 0.$$

Тем самым доказано, что предел в левой части (35) при $\varphi = f$ существует и равен $\tilde{A}f$, т. е. ограничен.

Замечание. Теорема остается справедливой и для обрывающихся процессов. При этом надо использовать формулы (34) и (36).

г) Поглощающие точки. Рассмотрим стохастически непрерывный феллеровский процесс. Пусть x_0-такая точка, что для всех $U \ni x_0$ будет $\mathbf{M}_{x_0}\tau_U = +\infty$. Тогда $\tilde{A}f(x_0) = 0$ для всех $f \in \tilde{D}$. Значит, $\frac{d}{dt} T_t f(x_0) = \tilde{A} T_t f(x_0) = 0$ при $f \in \tilde{D}$, т. е. $T_t f(x_0) = f(x_0)$, $f \in \tilde{D}$, $t > 0$. Если $f \in \mathbf{C}$, то $R_\lambda f \in \tilde{D}$, и поэтому $T_t R_\lambda f(x_0) = R_\lambda f(x_0)$ для $f \in \mathbf{C}$, $t > 0$. Используя то, что $\lambda R_\lambda f \to f$ при $\lambda \to \infty$, находим, что

$$T_t f(x_0) = f(x_0).$$

Если $\mathbf{C}$ является тотальным множеством, то из равенства вытекает

$$P(t, x_0, A) = I_A(x_0).$$

Другими словами точка x_0 такова, что, попав в нее, процесс остается там навсегда. Такие *точки* называются *поглощающими*. Очевидно, что для поглощающей точки x_0 $\mathbf{M}_{x_0}\tau_U = \infty$ для всех $U \ni x_0$ и, значит, $\mathcal{C}f(x_0) = 0$ для всех $f \in D_{\mathcal{C}}$.

Таким образом, справедлива

Теорема 8. Если $x(t, \omega)$ — стохастически непрерывный феллеровский процесс в топологическом пространстве X, для которого $\mathbf{C}$ — тотальное множество, то для того, чтобы точка x_0 была поглощающей, необходимо, чтобы $Cf(x_0)=0$ для всех $f \in D_C$, и достаточно, чтобы $\tilde{A}f(x_0)=0$ для всех $f \in \tilde{D}$.

3.3. Феллеровские процессы на компакте. Пусть X — метрический компакт с расстоянием $r(\cdot, \cdot)$, процесс $x(t, \omega)$ стохастически непрерывный феллеровский.

Теорема 9. Справедливы утверждения

а) для всех $f \in \mathbf{C}$ $\|T_t f - f\| \to 0$,

б) для всех $\varepsilon > 0$ $\lim\limits_{t \to 0} \sup\limits_{x} P(t, x, V_\varepsilon(x)) = 0$, $V_\varepsilon(x) =$

$$= \{y : r(x, y) > \varepsilon\}.$$

Доказательство. Пусть $\mathbf{C}^0$ множество тех f, для которых $\|T_t f - f\| \to 0$, $\mathbf{C}^0$ — замкнутое линейное подпространство в $\mathbf{C}$, для всех $f \in \mathbf{C}$ (см. лемму 1)

$$\frac{1}{t} \int_0^t T_s f \, ds \in \mathbf{C}^0.$$

Предположим, что $\mathbf{C}^0 \neq \mathbf{C}$. Тогда существует такой линейный функционал $l(f)$ на $\mathbf{C}$, что $l(f)=0$ для $f \in \mathbf{C}^0$ и $l(f) \neq 0$ тождественно. Но всякий линейный функционал на $\mathbf{C}$ в нашем случае имеет вид

$$l(f) = \int f(y) \lambda_l(dy),$$

где λ_l — счетно аддитивная функция ограниченной вариации. Поэтому для всех $f \in \mathbf{C}$

$$\int \frac{1}{t} \int_0^t T_s f(y) \, ds \lambda_l(dy) = 0.$$

Переходя к пределу при $t \to 0$, убеждаемся, что $l(f)=0$ для всех $f \in \mathbf{C}$. Значит, $\mathbf{C}^0 = \mathbf{C}$. а) доказано. б) Очевидно, что если $F \subset \mathbf{C}$ компактное множество функций, то из а) вытекает

$$\lim_{t \to 0} \sup_{f \in F} \|T_t f - f\| = 0. \tag{38}$$

Возьмем в качестве F семейство функций $\{\varphi_{x_0}(x) = r(x_0, x), x_0 \in X\}$. Его компактность вытекает из равномерной ограниченности и равномерной непрерывности семейства. Заметим теперь, что

$$P(t, x_0, V_\varepsilon(x_0)) = \int\limits_{r(x_0, x) > \varepsilon} P(t, x_0, dx) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int r(x, x_0) P(t, x_0, dx) = \frac{1}{\varepsilon} \int (\varphi_{x_0}(x) -$$

$$- \varphi_{x_0}(x_0)) P(t, x_0, dx) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \|T_t \varphi_{x_0} - \varphi_{x_0}\|.$$

Значит,

$$\sup_{x_0} P(t,\ x_0,\ V_\varepsilon(x_0)) \leqslant \varepsilon^{-1} \sup_{x_0} \| T_t\varphi_{x_0} - \varphi_{x_0} \|.$$

Используя (38), получаем требуемое.

Следствие. Для стохастически непрерывного феллеровского однородного марковского процесса на компакте существует стохастически эквивалентный процесс без разрывов второго рода (см. гл. 2, § 1.2).

В дальнейшем не оговаривая этого специально, будем считать процесс не имеющим разрывов второго рода.

а) Характеристический и производящий операторы. Из теоремы 3 а) вытекает, что $\tilde{D}=D$ и $\tilde{A}=A$. Будем рассматривать характеристический оператор также только в $\mathbf{C}$. Оказывается тогда он **тоже совпадает с** A.

Теорема 10. $\{f\in D_C : Cf\in \mathbf{C}\}=D$.

Доказательство. Обозначим множество в равенстве слева через D_1. Тогда $D_1\supset D$. Пусть $g\in D_1$. Функция $\lambda g - Cg = h_\lambda \in \mathbf{C}$, поэтому найдется такая $\varphi_\lambda\in D$, что $\lambda\varphi_\lambda - A\varphi_\lambda = h_\lambda$, а значит,

$$\lambda(g-\varphi_\lambda) - C(g-\varphi_\lambda) = 0,\ \lambda(g-\varphi_\lambda) = C(g-\varphi_\lambda).$$

Непрерывная функция $\psi = g - \varphi_\lambda$ достигает в некоторой точке максимального значения. Пусть это точка x_0. Если $\psi(x_0)\geqslant 0$, то

$$C\psi(x_0) = \lim_{U\downarrow x_0} \frac{\mathbf{M}_{x_0}\psi(x(\tau_U,\ \omega)) - \psi(x_0)}{\mathbf{M}_{x_0}\tau_U} \leqslant 0,$$

так как

$$\psi(x_0) - \mathbf{M}_{x_0}\psi(x(\tau_U,\ \omega)) \geqslant \mathbf{M}_{x_0}(\psi(x_0) - \psi(x(\tau_U,\ \omega)))\, I_{\{\tau_U<\zeta\}} +$$
$$+ \mathbf{M}_{x_0}\psi(x_0)\, I_{\{\tau_U\geqslant\zeta\}} \geqslant 0.$$

Итак, $\sup_x \psi(x) \leqslant 0$. Аналогично $\sup_x(-\psi(x))\leqslant 0$, $g-\varphi_\lambda = 0$, $g = \varphi_\lambda\in D$, т. е. $D=D_1$, $C=A$. □

б) **Операторы, удовлетворяющие принципу максимума.** Оператор D, заданный на некотором множестве $L\subset \mathbf{C}$, удовлетворяет принципу максимума, если какова бы ни была $\varphi\in L$ и точка $x_0\in X$, для которой $\varphi(x)\leqslant\varphi(x_0)$, $\varphi(x_0)\geqslant 0$ при $x\in X$, $D\varphi(x_0)\leqslant 0$.

Лемма 4. Если оператор D удовлетворяет принципу максимума, то при $\lambda>0$, $f\in\mathbf{C}$ решение уравнения

$$\lambda\varphi - D\varphi = f \tag{39}$$

в L единственно и удовлетворяет неравенству $\|\varphi\|\leqslant\lambda^{-1}\|f\|$.

Доказательство. Пусть $\varphi\in L$ и выполнено (39). Если x_0 — точка положительного максимума φ (на компакте непрерывная функция достигает максимума), то $D\varphi(x_0)\leqslant 0$ и, значит, $\varphi(x_0)\leqslant\lambda^{-1}f(x_0)$. Точно так, в точке x_1 отрицательного минимума $\varphi(x)$ будет $\varphi(x_1) \geqslant \lambda^{-1} f(x_0)$. Значит, $\|\varphi\| \leqslant \lambda^{-1}\|f\|$. Если φ_1 и φ_2 — два решения (10), то

$$\lambda(\varphi_1-\varphi_2)-D(\varphi_1-\varphi_2)=0, \ \|\varphi_1-\varphi_2\|=0.$$

Следствие. Оператор D, удовлетворяющий принципу максимума, допускает замыкание. Действительно, пусть $\lambda>0$, тогда отображение $\lambda I-D$ взаимно однозначно отображает L на его образ S_λ, при этом отображении, а оператор $(\lambda I-D)^{-1}$ отображает S_λ в L и $\|(\lambda I-D)^{-1}\| \leqslant \lambda^{-1}$. Пусть $\hat{S}_\lambda$ — замыкание S_λ, $\hat{L}$ — образ S_λ при отображении $\widehat{(\lambda I-D)^{-1}}$, являющимся продолжением $(\lambda I-D)^{-1}$ по непрерывности, $\hat{D}$ определяется на $\hat{L}$ равенством

$$\hat{D}=\lambda I-\{\widehat{(\lambda I-D)^{-1}}^{-1}\}.$$

Это замкнутый оператор, являющийся продолжением D.

Теорема 11. Пусть A — замкнутый оператор, удовлетворяющий принципу максимума. Он будет производящим оператором некоторой полугруппы, отвечающей стохастически непрерывному феллеровскому процессу, если его область определения D плотна в $\mathbf{C}$, при некотором $\lambda_0>0$ множество $\{\lambda_0 f-Af, f\in D\}$ плотно в $\mathbf{C}$ (см. лемму 2).

Доказательство. Воспользуемся теоремой 2 § 2. Из принципа максимума вытекает, что оператор R_λ, определенный на замкнутом подпространстве $S_\lambda=\{\lambda f-Af, f\in D\}$ (замкнутость есть следствие замкнутости A), удовлетворяет условию $\|R_\lambda\| \leqslant \lambda^{-1}$. При $\lambda=\lambda_0$ R_λ определен на $\mathbf{C}$. Используя формулу (10) § 2, убеждаемся, что R_λ определен на $\mathbf{C}$ для всех $\lambda>0$. Пусть $f \geqslant 0$. Тогда для решения уравнения $\lambda\varphi-A\varphi=f$ в точке минимума x_1 функции φ имеем

$$\lambda\varphi(x_1)=f(x_1)+A\varphi(x_1) \geqslant f(x_1),$$

т. е. $\varphi \geqslant 0$. Все условия теоремы Хилле—Иосида выполнены.

Замечание. Процесс будет необрывающимся, если $1\in D$ и $A1=0$. Обрывающийся процесс не имеет разрывов второго рода на $[0, \zeta(\omega))$ при $\zeta(\omega)<\infty$, в частности существует $\lim\limits_{t\to\zeta} x(t, \omega)$.

3.4. Регулярно-феллеровские процессы в локально компактном пространстве. Пусть X — локально компактное метрическое пространство (всякое ограниченное замкнутое множество компактно), $\mathscr{B}$ — борелевская σ-алгебра. Обозначим через $\mathbf{C}_0$ пространство непрерывных функций f, для которых $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$. Процесс называется регулярно-феллеровским, если соответствующая полугруппа T_t обладает свойством: $T_t\mathbf{C}_0 \subset \mathbf{C}_0$. Заметим, что $\mathbf{C}_0$ — тотальное множество и значение полугруппы на $\mathbf{C}_0$ определяет вероятность перехода. Можно превратить X в компакт, добавляя одну точку ∞, окрестностями этой точки будут дополнения компактов. Обозначим это расширение $\hat{X}_0$. Используя результаты предыдущего пункта, можно доказать следующий результат.

Теорема 12. Пусть процесс регулярно-феллеровский и стохастически непрерывен. Тогда

1) для всех $f \in \mathbf{C}_0$ $\|T_t f - f\| \to 0$ при $t \to 0$,

2) для всякого компакта K и $\varepsilon > 0$

$$\lim_{t\to 0} \sup_{x\in K} P(t, x, V_\varepsilon(x)) = 0,$$

3) существует непрерывная справа модификация процесса $x(t, \omega)$,

4) пусть A — замкнутый в $\mathbf{C}_0$ оператор, определенный на плотном в $\mathbf{C}_0$ множестве D, удовлетворяющий условиям: а) он удовлетворяет принципу максимума, б) при некотором $\lambda > 0$ множество функций $\{\lambda f - Af : f \in D\}$ плотно в $\mathbf{C}_0$, тогда A есть производящий оператор полугруппы T_t на $\mathbf{C}_0$, отвечающей стохастически непрерывному регулярно-феллеровскому процессу.

Замечание 1. Если полугруппа T_t отвечает регулярно-феллеровскому стохастически непрерывному процессу, а производящий оператор определяется равенством

$$Af = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(T_t f - f)$$

для тех $f \in \mathbf{C}_0$, для которых существует равномерный предел справа, то A удовлетворяет перечисленным в 4) свойствам.

Если регулярно-феллеровский процесс не обрывается, то $T_t 1 = 1$ и если $\hat{\mathbf{C}}$ — множество всех непрерывных функций $f(x)$, для которых существует $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(\infty)$, то $T_t(\hat{\mathbf{C}}) \subset \hat{\mathbf{C}}$ ($f(x) - f(\infty) \in \mathbf{C}_0$), $\hat{\mathbf{C}}_0$ отождествляется с пространством непрерывных функций на $\hat{X}$. Если продолжить вероятность перехода P на $\hat{X}$ равенством $P(t, \infty, \{\infty\}) = 1$, то полугруппа

$$\hat{T}_t f(x) = T_t f(x)$$

отвечает некоторому стохастически непрерывному феллеровскому процессу на $\hat{X}$. Он не имеет разрывов второго рода и точка ∞ — поглощающая. Если τ_X — момент выхода из $X = \{\hat{X}\} \setminus \{\infty\}$, то $P_x\{\tau_X < t\} = 1 - P\{t, x, X\}$. Значит, $\tau_X = +\infty$.

Пусть U_n — возрастающая последовательность ограниченных открытых множеств, $\bigcup_n U_n = X$. Тогда $\tau_{U_n} \uparrow \tau_X$ и для всякого t найдется такое n, что $\tau_{U_n} > t$. Значит, процесс $x(s, \omega)$ на каждом конечном интервале $[0, t]$ ограничен и не имеет разрывов второго рода. Это означает, что процесс $x(t, \omega)$ регулярен.

Теорема 13. Всякий стохастически непрерывный неубывающий регулярно-феллеровский процесс является регулярным.

а) Обрывающиеся на бесконечности регулярно-феллеровские процессы. Рассмотрим непрерывный справа процесс $x(t, \omega)$ со временем жизни $\zeta(\omega)$. Он называется обрывающимся на бесконечности, если для всякого $\varepsilon > 0$ функция $x(t, \omega)$ ограничена на отрезке $[0, \zeta(\omega) - \varepsilon]$, а $\lim\limits_{t \to \zeta(\omega)} x(t, \omega) = \infty$. Для такого процесса $\tau_U < \zeta(\omega)$, если U открытое множество с компактным замыканием.

Предположим, что процесс является регулярно-феллеровским (стохастическая непрерывность вытекает из непрерывности справа).

Теорема 14. Пусть C — характеристический оператор процесса, A — производящий оператор на $\mathbf{C}_0$ (он определен на $\mathbf{C}_0 \cap D$). Тогда

$$\mathbf{C}_0 \cap D = \mathbf{C}_0 \cap D_C \cap \{f \in D_C : Cf \in \mathbf{C}_0\}.$$

Доказательство. Так как при $f \in \mathbf{C}_0 \cap D$ и $Af \in \mathbf{C}_0$, $Cf = Af$, то

$$\mathbf{C}_0 \cap D \subset \mathbf{C}_0 \cap D_C \cap \{f \in D_C : Cf \in \mathbf{C}_0\}.$$

Если $g \in \mathbf{C}_0 \cap D_C \cap \{f \in D_C : Cf \in \mathbf{C}_0\}$ и $\varphi \in D \cap \mathbf{C}_0$ решение уравнения

$$\lambda\varphi - A\varphi = \lambda g - Cg,$$

то $\lambda(\varphi - g) = A\varphi - Cg = C(\varphi - g)$. Так как C удовлетворяет принципу максимума (это вытекает из того, что $\tau_U < \zeta(\omega)$ для всякого ограниченного открытого множества U), то из равенства $\lambda(\varphi - g) = C(\varphi - g)$ вытекает $\varphi = g$ (см. доказательство теоремы 10).

б) Условия регулярности регулярно-феллеровского процесса. Пусть $x(t, \omega)$ — непрерывный справа регулярно-феллеровский процесс, $\tau_X = \lim \tau_{U_n}$, U_n были введены ранее. Так как $x(\tau_{U_n}, \omega) \bar{\in} U_n$, то $x(\tau_{U_n}, \omega) \to \infty$ при $n \to \infty$. Если процесс не обрывается внутри X, т. е. время жизни $\zeta(\omega) \geqslant \tau_X$, то $x(\tau_{U_n}, \omega)$ определены с вероятностью 1. Положим для $\Phi \in \mathbf{C}_0$

$$g(x) = \mathbf{M}_x \Phi(x(\tau_X, \omega)) I_{\{\tau_X < \zeta(\omega)\}}.$$

Используя непрерывность справа и то, что $\tau_{U_n} \to \tau_X$, можем записать

$$g(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \mathbf{M}_x \Phi(x(\tau_{U_n} + \varepsilon, \omega)) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{n \to \infty} \int P_x\{x(\tau_{U_n}, \omega) \in dz\} \int P(\varepsilon, z, dy) \Phi(y).$$

Последнее выражение равно нулю, так как для всех $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{z \bar{\in} U_n} T_\varepsilon \Phi(z) = 0.$$

Таким образом, $g(x)=0$, значит, $\mathbf{P}_x\{\tau_X<\zeta(\omega)\}=0$. Поэтому $\tau_X=\zeta(\omega)$. Для регулярно-феллеровского процесса, не обрывающегося внутри X, момент τ_X будет временем жизни. Найдем условие, при котором $\mathbf{P}_x\{\tau_X=+\infty\}=0$ для всех x. При $f\in\mathbf{C}_0$ имеем $R_\lambda f\in D$. Пусть $f_n\geqslant 0$, $f_n\leqslant 1$ и $f_n\uparrow 1$ для всех x. Тогда $R_\lambda f_n\uparrow R_\lambda 1$. Для регулярности нужно, чтобы $R_\lambda 1=1/\lambda$. Но тогда $\lambda R_\lambda f_n\uparrow 1$ и

$$A(\lambda R_\lambda f_n)=\lambda^2 R_\lambda f_n-\lambda f_n\to 0,$$

причем $\|\lambda^2 R_\lambda f_n-\lambda f_n\|\leqslant 2\lambda\|f_n\|\leqslant 2\lambda$.

Предположим, что существует последовательность $\varphi_n\in D\cap\mathbf{C}_0$, для которой $A\varphi_n$ и φ_n ограничены и для всех x $A\varphi_n(x)\to 0$, $\varphi_n(x)\to 1$. Тогда $R_\lambda\varphi_n$ для всех $\lambda>0$ ограничено и стремится к $R_\lambda 1$, $AR_\lambda\varphi_n=R_\lambda A\varphi_n$ также ограничено и стремится к нулю. Поэтому

$$R_\lambda 1=\lim_{n\to\infty}R_\lambda\varphi_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\varphi_n+\frac{1}{\lambda}R_\lambda A\varphi_n\right)=\frac{1}{\lambda}.$$

Мы доказали следующее утверждение.

Теорема 15. Для того чтобы непрерывный справа регулярно-феллеровский процесс был регулярным, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая последовательность $\varphi_n\in D\cap\mathbf{C}_0$, для которой $\sup_n(\|\varphi_n\|+\|A\varphi_n\|)<\infty$, $\varphi_n\to 1$, $A\varphi_n\to 0$.

3.5. Скачкообразные процессы. Пусть X — локально компактное пространство, $x(t,\omega)$ — непрерывный справа процесс. Точка x_0 называется задерживающей точкой, если

$$\mathbf{P}_{x_0}\{\inf\{t:x(t,\omega)\neq x(0,\omega)\}>0\}=1.$$

Процесс называется *скачкообразным*, если у него все точки задерживающие. Пусть τ — момент выхода из начального состояния. Определена величина $x(\tau,\omega)$.

Лемма 5. Величина τ имеет показательное распределение. Для всех $f\in\mathbf{C}$, для которых определен характеристический оператор C и непоглощающая точка x

$$Cf(x)=\frac{\mathbf{M}_x f(x(\tau,\omega))-f(x)}{\mathbf{M}_x\tau}. \tag{40}$$

Доказательство. Так как на множестве $\tau>t$ $\theta_t\tau=\tau-t$, то

$$I_{\{\tau>s+t\}}=I_{\{\tau>t\}}I_{\{\theta\tau>s\}},\quad \mathbf{M}_x I_{\{\tau>s+t\}}=\mathbf{M}_x I_{\{\tau>t\}}\mathbf{M}_{x(t,\omega)}I_{\{\tau>s\}}.$$

На множестве $\{\tau>t\}$ будет $x(t,\omega)=x(0,\omega)$, значит,

$$\mathbf{P}_x\{\tau>s+t\}=\mathbf{P}_x\{\tau>t\}\mathbf{P}_x\{\tau>s\}.$$

Отсюда вытекает первое утверждение. Второе утверждение вытекает из соотношений $\tau_U\downarrow\tau$ при $U\downarrow x$, если x — начальное состояние процесса. При этом $f(x(\tau_U,\omega))\to f(x(\tau,\omega))$.

Будем предполагать, что процесс может обрываться только на бесконечности. Тогда $x(\tau,\omega)$ — случайная величина со значениями в X. Обозначим

$$\pi(x, B)=\mathbf{P}_x\{x(\tau,\omega)\in B\},$$

при $x\in X$ это вероятностное распределение по B. Будем считать, что для поглощающих точек $\pi(x,\{x\})=1$. Положим $\lambda(x)=1/\mathbf{M}_x\tau$ (при $\mathbf{M}_x\tau=+\infty$ считаем $\lambda(x)=0$). Тогда формула (40) перепишется так:

$$Cf(x)=\lambda(x)\left(\int f(y)\pi(x, dy)-f(x)\right). \tag{41}$$

(41) дает общий вид характеристического оператора скачкообразного процесса.

а) Вложенная цепь Маркова. Если наделить X дискретной топологией, то процесс $x(t,\omega)$ будет феллеровским и непрерывным справа и, следовательно, строго марковским. Поэтому процесс $x(\tau+t,\omega)$ также будет марковским и условное распределение для этого процесса относительно σ-алгебры $\mathscr{F}_\tau$ будет $\mathbf{P}_{x(\tau)}$. Рассмотрим величины

$$\tau_1=\tau,\quad \tau_2=\theta_{\tau_1}\tau,\ \ldots,\ \tau_{n+1}=\theta_{\tau_n}\tau,\ \ldots,\ x_n(\omega)=x(\tau_n),\quad n=1, 2, \ldots$$

$\theta_{\tau_n}\tau$ — момент выхода из начального состояния для процесса $x(t+\tau_n,\omega)$. В силу строгой марковости

$$\mathbf{P}\{x_{n+1}(\omega)\in B/\mathscr{F}_{\tau_n}\}=\mathbf{P}_{x(\tau_n,\omega)}\{x(\tau)\in B\}=\pi(x_n(\omega), B). \tag{42}$$

Кроме того

$$\mathbf{P}\{\tau_{n+1}>t/\mathscr{F}_{\tau_n}\}=\mathbf{P}_{x(\tau_n,\omega)}\{\tau>t\}=e^{-\lambda(x_n(\omega))t}. \tag{43}$$

Из соотношения (42) вытекает, что последовательность $x_1(\omega)$, $x_2(\omega)$, — есть цепь Маркова с вероятностью перехода $\pi(x,B)$. Эта *цепь* называется *вложенной*.

Заметим, что

$$\mathbf{P}_x\{x(\tau,\omega)\in B,\ \tau>t\}=\mathbf{M}_x I_{\{\tau>t\}} I_{\{\theta_t x(\tau,\omega)\in B\}}=$$
$$=\mathbf{M}_x I_{\{\tau>t\}}\mathbf{P}_{x(t,\omega)}\{x(t,\omega)\in B\}=\mathbf{M}_x I_{\{\tau>t\}}\mathbf{P}_x\{x(\tau,\omega)\in B\}=$$
$$=\mathbf{P}_x\{x(\tau,\omega)\in B\}\,\mathbf{P}_x\{\tau>t\}.$$

Поэтому

$$\mathbf{P}\{x_n(\omega)\in B,\ \tau_n>t/\mathscr{F}_{\tau_{n-1}}\}=\mathbf{P}_{x_{n-1}(\omega)}\{x_1(\omega)\in B\}\,\mathbf{P}_{x_{n-1}(\omega)}\{\tau_1>t\},$$
$$\mathbf{P}\{\tau_n>t/\mathscr{F}_{\tau_{n-1}},\ x_n(\omega)\}=\mathbf{P}_{x_{n-1}(\omega)}\{\tau_1>t\},$$

и, значит, в силу (43)

$$\mathbf{P}_x\{\tau_1>t_1,\ \ldots,\ \tau_n>t_n/x_1(\omega),\ \ldots,\ x_n(\omega)\}=\prod_{k=0}^{n-1}e^{-\lambda(x_k(\omega))t_{k+1}} \tag{44}$$

(здесь $x_0(\omega)=x$). Из (44) вытекает, что величина $\tau_1,\ldots,\tau_n$

при фиксированных $x_0(\omega), \ldots, x_n(\omega)$ независимы и имеют показательное распределение с параметрами $\lambda(x_0(\omega)), \ldots$ $\ldots, \lambda(x_{n-1}(\omega))$.

б) Регулярность. Для определения совместного распределения величин $x_1(\omega), \ldots, x_n(\omega), \ldots, \tau_1, \ldots, \tau_n, \ldots$ нужно знать лишь вероятность перехода $\pi(x, B)$ и функцию $\lambda(x)$, которые определяются характеристическим оператором процесса. Таким образом, характеристический оператор процесса определяет поведение процесса до момента

$$\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k.$$

Скачкообразный процесс называется регулярным, если $\mathbf{P}_x\{\zeta = +\infty\} = 1$ для всех x. Это определение регулярности отличается от приведенного выше, хотя, как будет показано, при естественном предположении локальной ограниченности функции $\lambda(x)$ оба определения регулярности совпадают.

Теорема 16. Процесс регулярен тогда и только тогда, когда для всех x

$$\mathbf{P}_x\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda(x_k(\omega))} = +\infty\right\} = 1$$

(если $\lambda(x) = 0$, считаем $\lambda^{-1}(x) = +\infty$).

Доказательство. Рассмотрим величину $e^{-\lambda\zeta}$, $\lambda > 0$, считая $e^{-\lambda\zeta} = 0$ при $\zeta = +\infty$. Тогда

$$\mathbf{M}_x e^{-\lambda\zeta} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}_x \exp\left\{-\lambda \sum_{k=1}^{n} \tau_k\right\} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}_x \mathbf{M}\left(\exp\left\{-\lambda \sum_{k=1}^{n} \tau_k\right\} \Big/ x_1(\omega), \ldots, x_n(\omega)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbf{M}_x \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda(x_k(\omega))}{\lambda + \lambda(x_k(\omega))} = \mathbf{M}_x \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \lambda \cdot \lambda^{-1}(x_k(\omega))}.$$

Поскольку

$$I_{\{\zeta<\infty\}} = \lim_{\lambda\downarrow 0} e^{-\lambda\zeta},$$

$$I_{\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-1}(x_k(\omega)) < \infty\right\}} = \lim_{\lambda\downarrow 0} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \lambda \cdot \lambda^{-1}(x_k(\omega))},$$

то

$$\mathbf{P}_x\{\zeta < \infty\} = \lim_{\lambda\downarrow 0} \mathbf{M}_x e^{-\lambda\zeta} =$$

$$= \lim_{\lambda\downarrow 0} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \lambda \cdot \lambda^{-1}(x_k(\omega))} = \mathbf{P}_x\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-1}(x_k(\omega)) < \infty\right\}.$$

Следствие 1. Если $\lambda(x)$ локально ограничено, τ_U — момент выхода из ограниченного множества U, то $\zeta \geqslant \tau_U$. Действительно, если $\zeta > \tau_u$, то $\lambda(x_k(\omega)) \leqslant b = \sup_{x \in U} \lambda(x)$, $\lambda^{-1}(x_k(\omega)) \geqslant \frac{1}{b} > 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{-1}(x_k(\omega)) = +\infty$. Но тогда $\zeta = +\infty$, что противоречит предположению $\zeta < \tau_U$.

Следствие 2. Если $\lambda(x)$ локально ограничено, а вложенная цепь $x_k(\omega)$ *топологически возвратна*, т. е. для каждого открытого множества U с вероятностью $\mathbf{P}_x = 1$

$$\Sigma I_U(x_k(\omega)) = +\infty,$$

каково бы ни было x, то процесс регулярен. Действительно, пусть для некоторого U будет $\sup_{x \in U} \lambda(x) = b < \infty$, тогда

$$\Sigma\lambda^{-1}(x_k(\omega)) \geqslant b^{-1} \Sigma I_U(x_k(\omega)) = +\infty.$$

Замечание. Функция $u_\lambda(x) = \mathbf{M}_x \exp\{-\lambda\zeta\}$ удовлетворяет уравнению

$$u_\lambda(x) = \mathbf{M}_x e^{-\lambda\tau_1} \mathbf{M}\left(\exp\left\{-\lambda \sum_{k=2}^{\infty} \tau_k\right\} \Big/ \mathcal{F}_{\tau_1}\right) = \\ = \mathbf{M}_x e^{-\lambda\tau_1} u_\lambda(x(\tau_1, \omega)),$$

$$u_\lambda(x) = \frac{\lambda(x)}{\lambda + \lambda(x)} \int u_\lambda(y) \Pi(x, dy). \tag{45}$$

Поэтому для нерегулярного процесса уравнение (45) имеет неотрицательное ограниченное, отличное от нуля решение. Если процесс регулярен и $u_\lambda(x)$ — ограниченное решение (45), то

$$u_\lambda(x) = \mathbf{M}_x e^{-\lambda\tau_1} u_\lambda(x(\tau_1, \omega)) = \mathbf{M}_x e^{-\lambda\tau_1} \mathbf{M}(e^{-\lambda\tau_2} u_\lambda(x(\tau_2, \omega)) / \mathcal{F}_{\tau_1}) = \\ = \mathbf{M}_x e^{-\lambda(\tau_1+\tau_2)} u_\lambda(x(\tau_2(\omega)) = \mathbf{M}_x \exp\left\{-\lambda \sum_{k=1}^{n} \tau_k\right\} u_\lambda\left(x\left(\sum_1^n \tau_k, \omega\right)\right).$$

Значит,

$$\| u_\lambda(x) \| \leqslant \mathbf{M}_x \exp\left\{-\lambda \sum_{k=1}^{n} \tau_k\right\} \| u_\lambda \|.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$ и учитывая регулярность, убеждаемся, что $u_\lambda(x) = 0$.

Таким образом, процесс регулярен тогда и только тогда, когда уравнение (45) не имеет ограниченных ненулевых решений.

Приведем еще одно простое достаточное условие регулярности.

Теорема 17. Пусть $\lambda(x)$ локально ограничено и существует неотрицательная локально ограниченная функция $v(x)$ такая, что выполнены условия: а) $v(x)\to\infty$ при $x\to\infty$, б) $\int v(y)\pi(x, dy)$ существует для всех x, в) при некотором $k>0$, $l>0$

$$\lambda(x)\int v(y)\pi(x, dy)\leqslant(\lambda(x)+k)v(y).$$

Тогда процесс регулярен.

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$\eta_n=\exp\left\{-k\sum_{i=1}^{n}\tau_i\right\}U(x_n(\omega)).$$

Эта последовательность является неотрицательным супермартингалом:

$$\mathrm{M}\left(\eta_n/\mathcal{F}_{\sum\limits_{i=1}^{n-1}\tau_i}\right)=\exp\left\{-k\sum_{i=1}^{n-1}\tau_i\right\}\mathrm{M}_{x_{n-1}(\omega)}e^{-\lambda\tau_1}V(x_1(\omega))=$$

$$=\exp\left\{-k\sum_{i=1}^{n-1}\tau_i\right\}\frac{\lambda(x_{n-1}(\omega))}{k+\lambda(x_{n-1}(\omega))}\int\Pi(x_{n-1}(\omega)), dy)V(y)\leqslant$$

$$\leqslant\exp\left\{-k\sum_{i=1}^{n-1}\tau_i\right\}V(x_{n-1}(\omega))\leqslant\eta_{n-1}.$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}V(x_n(\omega))<\infty\, x_n(\omega)\to\infty$.

§ 4. Мультипликативные и аддитивные функционалы. Преобразования процессов

4.1. Моменты обрыва процесса. Пусть $x(t, \omega)$ — однородный, вообще говоря, обрывающийся марковский процесс, ζ — его время жизни. Нас интересуют такие моменты остановки θ, для которых процесс $x(t, \omega)$, $t\in[0, \theta)$ также является однородным марковским процессом. Если это так, то вероятность перехода для процесса с временем жизни θ будет

$$\hat{P}(t, x, B)=\mathrm{M}_xI_B(x(t, \omega))\,I_{\{\theta>t\}}. \tag{46}$$

Введем величину

$$\alpha_t=\mathrm{M}_x(I_{\{\theta>t\}}/\mathcal{X}_t), \tag{47}$$

где $\mathcal{X}_t$ — σ-алгебра, порожденная значениями $x(s, \omega)$, $s\leqslant t$. Формула (46) перепишется так:

$$\hat{P}(t, x, B)=\mathrm{M}_xI_B(x(t, \omega))\,\alpha_t.$$

Аналогично, при $0<t_1<\ldots<t_n$ $B_i\subset\mathscr{B}$ в силу (47) будем иметь

$$\mathbf{M}_x\prod_{k=1}^{n} I_{Bk}(x(t_k,\omega))I_{\{\theta>tn\}}=\mathbf{M}_x\alpha_{tn}\prod_{k=1}^{n} I_{Bk}(x(t_k,\omega)).$$

На множестве $\theta>t$ должно выполняться для всех $0<s_1<$ $<\ldots<s_n$, $B_1,\ldots,B_n\in\mathscr{B}$

$$\mathbf{M}_x\left(\prod_{k=1}^{n} I_{B_k}(x(t+s_k,\omega))\,I_{\{\theta>t+s_n\}}\Big/\mathscr{F}_t\right)=$$

$$=\mathbf{M}_x\mathbf{M}_{x(t,\omega)}\prod_{k=1}^{n} I_{B_k}(x(s_k,(\omega))\,I_{\{\theta>s_k\}}\,I_{\{\theta>t\}}$$

Пусть ξ_t — любая $\mathscr{X}_t$-измеримая ограниченная величина. Тогда

$$\mathbf{M}_x\xi_t\prod_{k=1}^{n} I_{Bk}(x(t+s_k,\omega))\,I_{\{\theta>t+s_n\}}=$$

$$=\mathbf{M}_x\xi_t\alpha_t\mathbf{M}_{x,(t,\omega)}\alpha_{s_n}\prod_{k=1}^{n} I_{B_k}(x(s_k,\omega)),$$

$$\mathbf{M}_x\xi_t\prod_{k=1}^{n} I_{Bk}(x(t+s_k,\omega))\,\alpha_{t+s_n}=$$

$$=\mathbf{M}_x\xi_t\alpha_t\theta_t\alpha_{sn}\prod_{k=1}^{n} I_{B_k}(x(s_k+t,\omega)). \tag{48}$$

Из (48) вытекает, что с вероятностью $\mathbf{P}_x=1$ выполнено равенство

$$\alpha_{t+s_n}=\alpha_t\theta_t\alpha_{s_n}. \tag{49}$$

Свойство, выражаемое равенством (49), — основное свойство мультипликативного функционала.

а) Определение мультипликативного функционала. Случайная функция $\alpha_t(\omega)$, определенная при $t\in R_+$, называется мультипликативным функционалом, если выполнены условия:

1. $\alpha_t(\omega)\geqslant 0$, $\alpha_t(\omega)$ является $\mathscr{X}_t$-измеримой величиной для всех $t\in R_+$.

2. При $t>0$, $s>0$ с вероятностью $\mathbf{P}_x=1$ выполнено равенство

$$\alpha_{t+s}(\omega)+\alpha_t(\omega)\,\theta_t\alpha_s(\omega)).$$

3. $\alpha_t(\omega)$ — непрерывная функция t.

Среди мультипликативных функционалов выделяются те, которые удовлетворяют дополнительному условию

4. $\mathbf{P}_x\{\alpha_t(\omega)\leqslant 1\}=1$ для всех $x\in X$, $t\in R_+$. Такие функционалы могут использоваться для построения обрывающихся процессов.

Рассмотрим наиболее характерный пример мультипликативного функционала. Пусть $g(x)\geqslant 0$ — измеримая функция. Процесс $x(t,\omega)$ измерим. Положим

$$\alpha_t(\omega)=\exp\left\{-\int_0^t g(x(s,\omega))\,ds\right\} \tag{50}$$

(считаем, что $e^{-\infty}=0$). Поскольку

$$\theta_t\alpha_s(\omega)=\exp\left\{-\int_0^s g(x(u+t,\omega))\,du\right\}=\exp\left\{-\int_s^{s+t} g(x(u,\omega))\,du\right\},$$

то все условия 1—4 выполнены. С этим мультипликативным функционалом связана полугруппа операторов:

$$T_t^{(\alpha)}f(x)=\mathbf{M}_x T_t f(x(t,\omega))\,\alpha_t(\omega) \tag{51}$$

(если процесс $x(t,\omega)$ обрывается в момент ζ, то в правой части (50) подразумевается множитель $I_{\{\zeta>t\}}$).

Следующий результат указывает на связь между производящими операторами полугруппы T_t, отвечающей исходному марковскому процессу: $T_t f(x)=\mathbf{M}_x f(x(t,\omega))$, и $T_t^{(\alpha)}$.

Лемма 6. Пусть процесс $x(t,\omega)$ измерим и локально ограничен, функция $g(x)\in\widetilde{\mathbf{B}}_0$. Обозначим через $\widetilde{A}$ и $\widetilde{A}^{(\alpha)}$ слабые производящие операторы полугрупп T_t и $T_t^{(\alpha)}$ (в норме $\mathbf{B}$), D и $D^{(\alpha)}$ — их области определения. Тогда $\widetilde{D}=\widetilde{D}^{(\alpha)}$ и

$$\widetilde{A}^{(\alpha)}f=\widetilde{A}f-gf. \tag{52}$$

Доказательство. Имеем для $f\in\mathbf{B}$

$$\frac{T_t^{(\alpha)}f(x)-T_tf(x)}{t}=\frac{1}{t}\mathbf{M}_x f(x(t,\omega))\,[\alpha_t(\omega)-1]=$$

$$f(x)\,\mathbf{M}_x\frac{\alpha_t(\omega)-1}{t}+\mathbf{M}_x(f(x(t,\omega))-f(x))\frac{\alpha_t(\omega)-1}{t}.$$

Так как $\left|\frac{\alpha_t(\omega)-1}{t}\right|\leqslant\|g\|$, $\mathbf{M}_x\frac{\alpha_t(\omega)-1}{t}\to-g(x)$ при $t\to0$ для всех x, то для всех x

$$\lim_{t\to0}\frac{1}{t}(T_t^{(\alpha)}f(x)-T_tf(x))=-g(x)f(x) \tag{53}$$

и величина, стоящая под знаком предела слева в (53), ограничена. Тем самым, установлено (52).

Замечание 1. Функция $g(x)$ имеет следующий смысл: если процесс $x(t,\omega)$ не оборвался до момента t, то условная вероятность того, что он оборвется за время от t до $t+h$, относительно $\mathscr{X}_t$ равна $g(x(t,\omega))h+o(h)$.

Замечание 2. Если в формуле (5) $g(x)$ — локально ограниченная измеримая функция, то в условиях леммы 6 $\alpha_t(\omega)$ определено. Если предположить дополнительно, что g ограничено снизу, то имеет смысл полугруппа $T_t^{(\alpha)}$, определяемая равенством (51), формула (53) также остается справедливой.

4.2. Аддитивные функционалы. Пусть $x(t, \omega)$ — однородный (возможно обрывающийся) марковский процесс. Случайная функция $\varphi_t(\omega)$ называется аддитивным функционалом (от этого процесса), если она удовлетворяет таким условиям:

А.1. Она $\mathscr{X}_t$ — измерима для всех $t \in R_+$.

А.2. При $t>0$, $s>0$ с вероятностью $\mathbf{P}_x=1$ для всех $x \in X$, $\varphi_0=0$ выполняется равенство

$$\varphi_{t+s}(\omega)=\varphi_s(\omega)+\theta_s\varphi_t(\omega).$$

Простейший пример аддитивного функционала — это $\varphi_t(\omega)=$ $=\ln\alpha_t(\omega)$, где $\alpha_t(\omega)$ — мультипликативный функционал. Аддитивный функционал называется непрерывным, если $\alpha_t(\omega)$ как функция t непрерывен с вероятностью 1. Он называется неотрицательным, если $\mathbf{P}_x\{\varphi_t(\omega)\geqslant 0\}=1$ для всех $x \in X$. Между мультипликативными функционалами, удовлетворяющими 1—4, и неотрицательными непрерывными аддитивными функционалами соотношение $\alpha_t=e^{-\varphi_t}$ устанавливает взаимно однозначное соответствие.

а) W — функции, связанные с непрерывными неотрицательными аддитивными функционалами. Пусть φ_t — такой функционал и $\sup\limits_x \mathbf{M}_x\varphi_t<\infty$ при некотором $t>0$. Будем называть его *W-функционалом.* Связанная с этим функционалом *W-функция* определяется равенством:

$$W_\varphi(t, x)=\mathbf{M}_x\varphi_t.$$

Заметим, что эта функция определена для всех t и при некоторых c_1 и c_2 $W_\varphi(t, x)\leqslant c_1+c_2t$.

Действительно, по предположению при некотором t_0 $\mathbf{M}_x\varphi_{t_0}\leqslant$ $\leqslant c_1$. Так как при $s>t$

$$\varphi_s-\varphi_t=\theta_t\varphi_{s-t}\geqslant 0,$$

то φ_t — возрастающая функция,

$$\mathbf{M}_x[\varphi_{t+t_0}-\varphi_t]=\mathbf{M}_x\theta_t\varphi_{t_0}=\mathbf{M}_x\mathbf{M}_{x(t,\omega)}\varphi_{t_0}\leqslant c_1.$$

Поэтому $\mathbf{M}_x\varphi_{nt_0}\leqslant nc_1$. Отсюда $\mathbf{M}_x\varphi_t\leqslant c_1+t\dfrac{c_1}{t_0}$. Функция $W_\varphi(t, x)$ удовлетворяет соотношению

$$W_\varphi(t+s, \varphi)=W(t, x)+\mathbf{M}_xW_\varphi(s, x(t, \omega)). \qquad (54)$$

Кроме того, $W_\varphi(t, x)$ — возрастающая непрерывная функция t, $W_\varphi(0, x)=0$.

Покажем, что W — функция, отвечающая W-функционалу φ определяет его при каждом t с вероятностью $\mathbf{P}_x=1$, каково бы ни было $x \in X$.

Предварительно получим одну простую оценку моментов W-функционала.

Л е м м а 7. Если $\|W_\varphi(t, x)|\leqslant c$, то $\mathbf{M}_x\varphi_t{}^m\leqslant m!c^m$ для всех натуральных m.

Доказательство. Используя непрерывность φ_t, легко получить равенство

$$\frac{1}{m}\varphi_t^m=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\varphi_{\frac{k}{n}t}-\varphi_{\frac{k-1}{n}t}\right]\left[\varphi_t-\varphi_{\frac{k}{n}t}\right]^{m-1}.$$

Поэтому

$$\mathbf{M}_x\varphi_t^m\leqslant m\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}_x\left[\varphi_{\frac{k}{n}t}-\varphi_{\frac{k-1}{n}t}\right]\mathbf{M}\left(\left[\varphi_t-\varphi_{\frac{k}{n}t}\right]^m\Big/\mathcal{F}_{\frac{k}{n}t}\right).$$

При $m=2$ отсюда получаем из (54)

$$\mathbf{M}_x\varphi_t^2\leqslant 2\varlimsup_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}_x\left[\varphi_{\frac{k}{n}t}-\varphi_{\frac{k-1}{n}t}\right]\mathbf{M}_{x\left(\frac{k}{n}t\right)}\varphi_{t-\frac{k}{n}t}\leqslant$$

$$\leqslant 2\varlimsup_{n\to\infty}c\sum_{k=1}^{n}\mathbf{M}_x\left[\varphi_{\frac{k}{n}t}-\varphi_{\frac{k-1}{n}t}\right]\leqslant 2c^2.$$

Дальнейшее получаем по индукции.

Лемма 8. Для всех $t>0$ в смысле сходимости в среднем квадратическом

$$\varphi_t=\lim\sum_{k=0}^{n-1}W_\varphi\left(\frac{t}{n},\ x\left(\frac{k}{n}t,\ \omega\right)\right). \tag{55}$$

Доказательство. Имеем

$$\varphi_t=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\varphi_{\frac{k+1}{n}t}-\varphi_{\frac{k}{n}t}\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left[\varphi_{\frac{k+1}{n}t}-\varphi_{\frac{k}{n}t}\right]-\mathbf{M}\left(\varphi_{\frac{k+1}{n}t}-\varphi_{\frac{k}{n}t}/\mathcal{F}_{\frac{k}{n}t}\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1}W\left(\frac{t}{n},\ x\left(\frac{k}{n}t,\ \omega\right)\right),$$

так как

$$\mathbf{M}\left(\theta_{\frac{k}{n}t}\varphi_{\frac{t}{n}}/\mathcal{F}_{\frac{k}{n}t}\right)=\mathbf{M}_{x\left(\frac{k}{n}t,\omega\right)}\varphi_{\frac{t}{n}}=W\left(\frac{t}{n},\ x\left(\frac{k}{n}t,\ \omega\right)\right).$$

Положим $\eta_k=\varphi_{\frac{k+1}{n}t}-\varphi_{\frac{k}{n}t}$. Тогда

$$\mathbf{M}_x\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\eta_k-\mathbf{M}\left(\eta_k/\mathcal{F}_{\frac{k}{n}t}\right)\right)\right)^2=\mathbf{M}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\eta_k-\mathbf{M}\left(\eta_k/\mathcal{F}_{\frac{k}{n}t}\right)\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant\mathbf{M}_x\sum_{k=0}^{n-1}\eta_k^2.$$

Очевидно, $\sum_{k=0}^{n-1}\eta_k^2 \leqslant \varphi_t^2$ и $\sum_{k=0}^{n-1}\eta_k^2 \to 0$ при $n\to\infty$ в силу непрерывности φ_t. Значит,

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}_x\left(\varphi_t-\sum_{k=0}^{n-1}W_\varphi\left(\frac{t}{n},\ x\left(\frac{k}{n}t,\ \omega\right)\right)\right)^2 \leqslant \lim_{n\to\infty}\mathbf{M}_x\sum_{k=0}^{n-1}\eta_k^2=0$$

(мы воспользовались леммой 7).

б) Аппроксимация аддитивных функционалов интегралами. Выражение, стоящее в правой части (55) под знаком предела, напоминает интегральную сумму. Поэтому естественно аппроксимировать функционал непосредственно интегралами. Будем предполагать, что $x(t,\omega)$ — измеримый процесс. Функция $W_\varphi(t, x)$ измерима по x, так как $\mathbf{P}_x$ измеримо зависит от x.

Теорема 18. Если φ_t — W-функционал, то в среднем квадратическом по мере $\mathbf{P}_x$ для всех $x\in X$

$$\varphi_t=\lim_{h\to 0}\int_0^t\frac{1}{h}W_\varphi(h,\ x(s,\omega))\,ds. \tag{56}$$

Доказательство. Пусть $n=\left[\frac{t}{h}\right]$. Положим

$$\Delta_s=\varphi_{nh+s}-\varphi_s-\sum_{k=0}^{n-1}W_\varphi(h,\ x(s+kh,\ \omega)).$$

Тогда

$$\frac{1}{h}\int_0^h\Delta_s ds=\frac{1}{h}\int_0^h\varphi_{nh+s}ds-\frac{1}{h}\int_0^h\varphi_s ds-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n}\int_{kh}^{(k+1)h}W_\varphi(h,\ x(u,\omega))\,du.$$

Очевидно, что

$$\frac{1}{h}\int_0^h\varphi_{nh+s}ds\to\varphi_t,\quad t\to 0,\quad \frac{1}{h}\int_0^h\varphi_s ds\to 0,$$

кроме того,

$$\frac{1}{h}\int_0^t W_\varphi(x(u,\omega))\,du-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{h}\int_{kh}^{(k+1)h}W_\varphi(h,\ x(u,\omega))\,du\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{h}\int_{t-h}^t W_\varphi(h,\ x(u,\omega))\,du=\frac{1}{h}\int_{t-h}^t\mathbf{M}(\varphi_{u+h}-\varphi_u/\mathscr{F}_u)\,du.$$

Поэтому

$$\mathbf{M}_x\frac{1}{h}\int_0^t W_\varphi(x(u,\omega))\,du=\mathbf{M}_x\frac{1}{h}\int_{t-h}^t(\varphi_{u+h}-\varphi_u)\,du\leqslant 2\mathbf{M}_x[\varphi_{t+h}-\varphi_{t-h}],$$

а последнее выражение стремится к нулю при $h \to 0$. Таким образом для доказательства (56) достаточно показать, что

$$\mathbf{M}_x \left(\frac{1}{h} \int_0^h \Delta_s ds \right)^2 \leqslant \frac{1}{h} \int_0^h \mathbf{M}_x \Delta_s^2 ds \to 0. \tag{57}$$

При доказательстве леммы 8 установлено неравенство

$$\mathbf{M}_x \Delta_s^2 \leqslant \mathbf{M}_x \sum_{k=0}^{n-1} [\varphi_{s+(k+1)h} - \varphi_{s+kh}]^2.$$

Очевидно при $0 \leqslant s \leqslant h$

$$\sum_{k=0}^{n-1} [\varphi_{s+(k+1)h} - \varphi_{s+kh}]^2 \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} [\varphi_{(k+2)h} - \varphi_{kh}]^2,$$

$$\mathbf{M}_x \Delta_s^2 \leqslant \mathbf{M}_x \sum_{k=0}^{n-1} [\varphi_{(k+2)h} - \varphi_{kh}]^2,$$

выражение под знаком $\mathbf{M}_x$ ограничено величиной φ_{t+2h}^2 и стремится к нулю при $h \to 0$. Значит, (57) выполнено.

Для непрерывного аддитивного функционала φ_t введем функцию

$$v_\varphi(t, x) = \mathbf{M}_x \exp\{-\varphi_t\}.$$

Аналогично тому, как была доказана теорема 18, можно установить следующее утверждение:

Теорема 19. Для всякого непрерывного аддитивного функционала φ_t в смысле сходимости по вероятности $\mathbf{P}_x$, каково бы ни было $x \in X$, выполнено равенство

$$\varphi_t = \lim_{h \to 0} \int_0^t \frac{1}{h} [1 - v_\varphi(h, x(s, \omega))] ds. \tag{58}$$

Заметим, что в формуле (58) не накладываются никакие моментные ограничения на φ_t.

в) Характеризация W-функций. Здесь мы приведем условия, которым должна удовлетворять функция $W(t, x)$, чтобы для нее существовал такой W-функционал φ_t, что $\mathbf{M}_x \varphi_t = W(t, x)$. Некоторые необходимые условия приводились в предыдущем пункте.

Теорема 20. Функция $W(t, x)$ представима в виде $W(t, x) = \mathbf{M}_x \varphi_t$, φ_t — W-функционал, тогда и только тогда, когда выполнены условия

1) $W(t, x)$ измерима, непрерывна и не убывает по t, $W(0, x) = 0$, $\sup\limits_x W(t, x) < \infty$;

2) для $x \in X$ и $t > 0$, $s > 0$ выполняется соотношение

$$W(t+s, x) = W(t, x) + T_t W(s, x);$$

3) для всех $t>0$, $s>0$ и $x\in X$

$$\lim_{\substack{h\downarrow 0\\ \Delta\downarrow 0}}\int_0^t \frac{1}{h} T_s [W(h, x) W(\Delta, x)]\, ds = 0.$$

Доказательство. Необходимость условий 1) и 2) уже обсуждалась. Условие 3) эквивалентно следующему:

$$\lim_{\substack{h\downarrow 0\\ \Delta\downarrow 0}} \mathbf{M}_x \int_0^t \frac{1}{h} W(h, x(s, \omega)) W(\Delta, x(s, \omega))\, ds = 0. \tag{59}$$

Величина, стоящая под знаком предела, совпадает с

$$\mathbf{M}_x \int_0^t \frac{1}{h} W(h, x(s, \omega)) [\varphi_{s+\Delta} - \varphi_s]\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \mathbf{M}_x \sup_{u\leqslant t} [\varphi_{u+\Delta} - \varphi_u] \int_0^t \frac{1}{h} W(h, x(s, \omega))\, ds \leqslant$$

$$\leqslant (\mathbf{M}_x \sup_{u\leqslant t} [\varphi_{u+\Delta} - \varphi_u]^2)^{1/2} \left(\mathbf{M}_x \left[\int_0^t \frac{1}{h} W(h, x(s, \omega))\, ds\right]^2\right)^{1/2}.$$

Второй сомножитель справа стремится к $\mathbf{M}_x\varphi_t^2$ при $h\to 0$ на основании теоремы 18. Первый сомножитель стремится к нулю при $\Delta\to 0$, в силу непрерывности φ_s и неравенства $\varphi_{u+h}-\varphi_u\leqslant\varphi_{t+\Delta}$.

Для доказательства достаточности покажем, что для всех $t>0$ существует предел в среднем квадратическом

$$\varphi_t = \lim \int_0^t \frac{1}{h} W(h, x(s, \omega))\, ds.$$

Для этого достаточно доказать, что

$$\lim_{\substack{h\downarrow 0\\ \Delta\downarrow 0}} \mathbf{M}_x \left[\int_0^t \frac{1}{h} W(h, x(s, \omega))\, ds - \int_0^t \frac{1}{\Delta} W(\Delta, x(s, \omega))\, ds\right]^2 = 0. \tag{60}$$

Если $\alpha(\Delta, h)$ — величина, стоящая под знаком предела в (60), то

$$\alpha(\Delta, h) = J(h, h) - J(h, \Delta) - J(\Delta, h) + J(\Delta, \Delta),$$

где

$$J(\Delta, h) = 2\mathbf{M}_x \int_0^t \frac{1}{\Delta} W(\Delta, x(s, \omega)) \int_0^t \frac{1}{h} W(h, x(u, \omega))\, du\, ds =$$

$$= 2\mathbf{M}_x \int_0^t \frac{1}{\Delta} W(\Delta, x(s, \omega))\, ds \frac{1}{h} \int_0^t [W(u-s+h, x(s, \omega)) -$$

$$-W(u-s,\ x(s,\omega))]\,ds=2\mathbf{M}_x\int_0^t \frac{1}{\Delta} W(\Delta,\ x(s,\omega))\frac{1}{h}\times$$

$$\times\left[\int_0^t W(u,\ x(s,\omega))\,du-\int_0^h W(u,\ x(s,\omega))\,du\right]ds=$$

$$=2\mathbf{M}_x\int_0^t W(\Delta,\ x(s,\omega))\,W(t-s,\ x(s,\omega))\,ds+$$

$$+O\left(\mathbf{M}_x\int_0^t \frac{1}{\Delta} W(\Delta,\ x(s,\omega))\,[W(t-s+h,\ x(s,\omega))-\right.$$

$$\left.-W(t-s,\ x(s,\omega))+W(h,\ x(s,\omega))]\,ds\right).$$

При подсчете $\alpha(\Delta, h)$ главные (первые) слагаемые взаимно уничтожаются, так что достаточно доказать, что стремится к нулю величина под знаком O. Она оценивается выражением

$$\mathbf{M}_x\int_0^t \frac{1}{\Delta} W(\Delta,\ x(s,\omega))\,[\mathbf{M}(W(h,\ x(t,\omega)/\mathcal{F}_s)+W(h,\ x(s,\omega))]\,ds=$$

$$=\mathbf{M}_x\int_0^t \frac{1}{\Delta} W(\Delta,\ x(s,\omega))\,ds\cdot W(h,\ x(t,\omega))+$$

$$+\mathbf{M}_x\int_0^t \frac{1}{\Delta} W(\Delta,\ x(s,\omega))\,W(h,\ x(s,\omega))\,ds.$$

Второе слагаемое стремится к нулю в силу (59). Первое слагаемое не превосходит величины

$$[J(\Delta,\ \Delta)]^2\sqrt{\mathbf{M}_x W^2(h,\ x(t,\omega))}.$$

Из представления для $J(\Delta, h)$ легко убедиться, что

$$J(\Delta,\ \Delta)=O\left(\mathbf{M}_x\int_0^t \frac{1}{\Delta} W(\Delta,\ x(s,\omega))\,ds\right)=$$

$$=O\left(\mathbf{M}_x\int_0^t \frac{1}{\Delta}[W(s+\Delta,\ x(s,\omega))-W(s,\ x(s,\omega))\,ds\right)=$$

$$=O(\sup_x W(t+\Delta,\ x)),$$

второй сомножитель стремится к нулю.

4.3. Случайная замена времени. Пусть $x(t, \omega)$ — однородный марковский процесс в фазовом пространстве $(X, \mathcal{B})$, $(\mathcal{F}_t)$ — соответствующий поток σ-алгебр, $\mathbf{P}_x$ — набор вероятностей. Будем предполагать, что процесс $x(t, \omega)$ строго марковский относительно потока $(\mathscr{F}_t)$. Рассмотрим семейство моментов остановки τ_s, $s \geqslant 0$, относительно потока $(\mathscr{F}_t)$, удовлетворяющий следующим условиям: τ_s является строго возрастающим непрерывным процессом (как функция s), $\tau_0 = 0$.

Обозначим через $\hat{\mathscr{F}}_s$ σ-алгебру $\mathscr{F}_{\tau_s}$, и пусть $\hat{x}(s, \omega) = x(\tau_s, \omega)$. Величина $\hat{x}(s, \omega)$ при всех $s \geqslant 0$ измерима относительно $\hat{\mathscr{F}}_s$. В силу строгой марковости процесса при $s_1 < s_2$

$$\mathbf{P}_x\{\hat{x}(s_2, \omega) \in B / \hat{\mathscr{F}}_{s_1}\} = \mathbf{P}_x\{x(\tau_{s_2}, \omega) \in B / \mathscr{F}_{\tau_{s_1}}\} =$$
$$= \mathbf{P}_{x(\tau_{s_1}, \omega)}\{x(\tau_{s_2} - \tau_{s_1}, \omega) \in B\} = \mathbf{P}_{\hat{x}(s_1, \omega)}\{x(\tau_{s_2} - \tau_{s_1}, \omega) \in B\}.$$

Это соотношение показывает, что $\hat{x}(s, \omega)$ является марковским (вообще говоря неоднородным) процессом. Когда этот процесс будет однородным? Из предыдущего соотношения вытекает, что вероятность перехода для процесса $\hat{x}(s, \omega)$ будет

$$\hat{P}(s_1, x, s_2, B) = \mathbf{P}_x(x(\tau_{s_2} - \tau_{s_1}, \omega) \in B\}.$$

Для однородности процесса нужно, чтобы для всех x выполнялось равенство

$$\mathbf{P}_x\{x(\tau_{s_2} - \tau_{s_1}, \omega) \in B\} = \mathbf{P}_x\{x(\tau_{s_2 - s_1}, \omega) \in B\}. \tag{61}$$

Равенство (61) в силу строгой марковости влечет такое:

$$\mathbf{P}_x\{x(\tau_{s_2}, \omega) \in B / \mathscr{F}_{\tau_{s_1}}\} = \mathbf{P}_x\{x(\tau_{s_1} + \theta_{\tau_{s_1}} \tau_{s_2 - s_1}, \omega) \in B / \mathscr{F}_{\tau_{s_1}}\} \tag{62}$$

с вероятностью 1 (мы воспользовались соотношением

$$\theta_{\tau_s} x(\tau_{s_2 - s_1}, \omega) = x(\tau_{s_1} + \theta_{\tau_{s_1}} \tau_{s_2 - s_1}, \omega)).$$

Очевидно (62) выполняется, если для $s > 0$ и $t > 0$

$$\tau_{s+t} = \tau_s + \theta_{\tau_s} \tau_t. \tag{63}$$

а) Случайная замена времени, связанная с аддитивным функционалом. Пусть $\varphi(t)$ — положительный аддитивный функционал для процесса $x(t, \omega)$. Предположим, что 1) $\varphi(t)$ строго возрастает, т. е. $\mathbf{P}_x\{\varphi(s) < \varphi(t)\} = 1$ при $s < t$ для всех $x \in X$, 2) $\mathbf{P}_x\{\lim\limits_{t \to \infty} \varphi_t = +\infty\} = 1$.

Тогда для всех $t > 0$ определен момент остановки τ_t, для которого $\varphi(\tau_t) = t$. Тот факт, что τ_t есть момент остановки, вытекает из равенства

$$\{\tau_t \leqslant s\} = \{\varphi(s) \geqslant t\} \in \mathscr{F}_s.$$

Очевидно, что семейство моментов остановки $\{\tau_t\}$ удовлетворяет условиям непрерывности, строгой монотонности. Следовательно, можно рассматривать марковский процесс $\hat{x}(t, \omega) = x(\tau_t, \omega)$. Покажем, что $\hat{x}(t, \omega)$ — однородный процесс, для этого установим равенство (63).

Нам понадобится следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 9. Пусть $\tau<\theta$ — два момента остановки. Тогда с вероятностью $\mathbf{P}_x=1$, каково бы ни было $x\in X$, выполнено равенство

$$\varphi(\theta)=\varphi(\tau)+\theta_\tau\varphi(\theta-\tau).$$

Доказательство. Если $\varphi(t)=\int_0^t g(x(s,\omega))\,ds$, то утверждение леммы легко проверяется. Остается воспользоваться теоремой 19.

Теперь можем записать

$$\varphi(\tau_s+\theta_{\tau_s}\tau_t)=\varphi(\tau_s)+\theta_{\tau_s}\varphi(\theta_{\tau_s}\tau_t)=s+t=\varphi(\tau_{s+t}).$$

Так как $\varphi(s)$ строго возрастает, то отсюда вытекает (63).

Заметим, что если τ_t определено равенством $\varphi(\tau_t)=1$, то τ_t — момент остановки относительно потока $(\mathscr{X}_s)$ и поэтому τ_t измеримо относительно $\hat{\mathscr{X}}_t=\mathscr{X}_{\tau_t}$ (точно так, как и $\hat{x}(t,\omega)=$ $=x(\tau_t,\omega)$).

Из равенства (63) вытекает, что

$$\tau_{s+t}=\tau_s+\hat{\theta}_s\tau_t,\quad \hat{\theta}_s=\theta_{\tau_s}.$$

Это означает, что τ_t — аддитивный функционал для процесса $\hat{x}(t,\omega)$. Пусть $\hat{\tau}_t$ удовлетворяет соотношению $\tau_{\hat{\tau}_t}=t$. Тогда $\hat{x}(\hat{\tau}_t,\omega)$ также однородный марковский процесс. Но

$$\hat{\tau}_t=\varphi(\tau_{\hat{\tau}_t})=\varphi(t),\quad \hat{x}(\varphi(t),\omega)=x(\varphi(\tau_t),\omega)=x(t,\omega),$$

т. е. исходный процесс получается из преобразованного также с помощью случайной замены времени, связанной с аддитивным функционалом.

Замечание 1. Если аддитивный функционал таков, что $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\varphi_\infty$ не обязательно равно $+\infty$, то процесс $x(\tau_t,\omega)=$ $=\hat{x}(t,\omega)$ определен только на $[0,\varphi_\infty)$, это обрывающийся процесс Обратная замена времени превращает его уже в необрывающийся процесс (если таким был $x(t,\omega)$), но при этом используется аддитивный функционал, который может принимать значение $+\infty$ (это функционал непрерывно и строго монотонно возрастает до бесконечности, после чего становится тождественно равным $+\infty$, свойство А.2 для него выполнено, если считать $a+\infty=+\infty+\infty=+\infty$).

б) Случайная замена времени с помощью аддитивного функционала интегрального вида. Будем предполагать, что аддитивный функционал $\varphi(t)$, о котором шла речь в а), имеет вид

$$\varphi(t)=\int_0^t g(x(s,\omega))\,ds,$$

$g > 0$ — такая измеримая функция, что интеграл в правой части существует для достаточно малых t с вероятностью $\mathbf{P}_x = 1$ для всех $x \in X$. В частности, при $0 < c_1 < g(x) < c_2 < \infty$ интеграл существует для всех t, строго возрастает и $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = +\infty$. Пусть τ_t определяется из равенства

$$t = \int_0^{\tau_t} g(x(s, \omega))\, ds, \quad x(\tau_t, \omega) = \hat{x}(t, \omega).$$

Тогда

$$\tau_t = \int_0^t \frac{ds}{g(\hat{x}(s, \omega))}, \quad t = \int_0^{\varphi(t)} \frac{ds}{g(\hat{x}(s, \omega))}, \quad x(t, \omega) = \hat{x}(\varphi(t), \omega)$$

($\varphi(t)$ — момент остановки для процесса $\hat{x}(t, \omega)$). Найдем связь между характеристическими операторами процессов $x(t, \omega)$ и $\hat{x}(t, \omega)$.

Теорема 21. Пусть X — топологическое отделимое пространство, $\mathscr{B}$ — борелевская σ-алгебра, $x(t, \omega)$ — непрерывный справа процесс, $g(x)$ — непрерывная функция и при некоторых $c_1 > 0$ и $c_2 < \infty$, $c_1 < g(x) < c_2$. Тогда если C — характеристический оператор для $x(t, \omega)$, $\hat{C}$ — характеристический оператор для $\hat{x}(t, \omega)$, D_C и $D_{\hat{C}}$ — их области определения, то $D_{\mathscr{C}} = D_{\hat{\mathscr{C}}}$ и для $\varphi \in D_C$

$$\hat{\mathscr{C}}\varphi(x) = g(x)\, \mathscr{C}\varphi(x). \tag{64}$$

Доказательство. Если τ_U — момент выхода процесса $x(t, \omega)$ из U, $\hat{\tau}_U$ — момент выхода из U процесса $\hat{x}(t, \omega)$, то $x(\tau_U, \omega) = \hat{x}(\hat{\tau}_U, \omega)$ и $\tau_U = \int_0^{\hat{\tau}_U} g(x(s, \omega))\, ds$. Значит, $\frac{1}{c_2} \leqslant \frac{\hat{\tau}_U}{\tau_U} \leqslant \frac{1}{c_1}$ и при $U \downarrow x$ $\frac{\hat{\tau}_U}{\tau_U} \to \frac{1}{g(x)}$ с вероятностью 1 по мере $\mathbf{P}_x$, поэтому для $\varphi \in D_C$

$$\lim_{U \downarrow x} \frac{\mathbf{M}_x \hat{\tau}_U}{\mathbf{M}_x \tau_U} = \frac{1}{g(x)},$$

$$\hat{C}\varphi(x) = \lim_{U \downarrow x} \frac{\mathbf{M}_x \varphi(\hat{x}(\hat{\tau}_U, \omega)) - \varphi(x)}{\mathbf{M}_x \hat{\tau}_U} =$$

$$= \lim_{U \downarrow x} \frac{\mathbf{M}_x \varphi(x(\tau_U, \omega)) - \varphi(x)}{\mathbf{M}_x \tau_U} \lim_{U \downarrow x} \frac{\mathbf{M}_x \tau_U}{\mathbf{M}_x \hat{\tau}_U},$$

т. е. $\varphi \in D_{\mathscr{C}}$. Аналогично, для $\varphi \in D_{\hat{\mathscr{C}}}$ $\mathscr{C}\varphi(x) = \frac{1}{g(x)} \hat{\mathscr{C}}\varphi(x)$ и $\varphi \in D_{\mathscr{C}}$. (64) доказано.

§ 5. Непрерывные процессы в R^d

Пусть $x(t, \omega)$ — непрерывный однородный феллеровский марковский процесс в R^d, $P(t, x, B)$ — его вероятность перехода, T_t — соответствующая полугруппа, A — её слабый производящий оператор, D_A — его область определения. Для $\varphi \in D_A$ процесс

$$\zeta_\varphi(t) = \varphi(x(t, \omega)) - \int_0^t A\varphi(x(s, \omega))\, ds \tag{65}$$

является мартингалом. Поскольку характеристика непрерывного мартингала (65) определяется равенством (см. [1])

$$\langle \zeta_\varphi \rangle_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k<2^n t} \left(\zeta_\varphi\left(\frac{k}{2^n}\right) - \zeta_\varphi\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right)^2,$$

то

$$\langle \zeta_\varphi \rangle_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{k<2^n t} \left[\varphi\left(x\left(\frac{k}{2^n}, \omega\right)\right) - \varphi\left(x\left(\frac{k-1}{2^n}, \omega\right)\right)\right]^2,$$

откуда вытекает, что $\langle\zeta_\varphi\rangle_t$ есть неотрицательный аддитивный функционал.

5.1. Случайная замена времени и квазидиффузионные процессы. Покажем, что существует такой аддитивный функционал γ_t, что $\langle\zeta_\varphi\rangle_t$ абсолютно непрерывно относительно γ_t как функция t, какова бы ни была $\varphi \in D_A$.

Пусть φ_n — такая последовательность из D_A, что для всех $\varphi \in D_A$, $\|\varphi\| \leqslant 1$ можно указать такую подпоследовательность n_k, что $\varphi_{n_k} \to \varphi$, $A\varphi_{n_k} \to A\varphi$ равномерно на каждом ограниченном множестве. Обозначим $\zeta_n(t) = \zeta_{\varphi_n}(t)$. Ортогонализуем последовательность $\zeta_n(t)$. Положим

$$\hat\zeta_1(t) = \zeta_1(t), \quad \hat\zeta_2(t) = \zeta_2(t) - \int_0^t \frac{d\langle \hat\zeta_1, \zeta_2\rangle_s}{d\langle\hat\zeta_1\rangle_s}\, d\zeta_1(s), \ \ldots,$$

$$\hat\zeta_k(t) = \zeta_k(t) - \sum_{i=1}^{k-1} \int_0^t \frac{d\langle \zeta_k, \hat\zeta_i\rangle_s}{d\langle\hat\zeta_i\rangle_s}\, d\hat\zeta_i(s),$$

здесь $\langle \zeta_1, \zeta_2\rangle_t$ — взаимная характеристика мартингалов ζ_1 и ζ_2, она абсолютно непрерывна относительно $\langle\zeta_1\rangle_t$ и $\langle\zeta_2\rangle_t$ (см., например, [1]). Тогда 1) мартингалы $\hat\zeta_i(t)$ будут таковы, что $\langle\hat\zeta_i\rangle_t$ — аддитивный функционал, 2) для всех $\varphi \in D_A$ функция $\langle\zeta_\varphi, \hat\zeta_i\rangle_t$ абсолютно непрерывна относительно $\langle\hat\zeta_i\rangle_t$, при этом $\dfrac{d\langle\zeta_\varphi, \hat\zeta_i\rangle_t}{d\langle\hat\zeta_i\rangle_t} = a_i(\varphi, x(t, \omega))$ с вероятностью 1 почти для всех ω

(по мере $\mathbf{P}_x$, каково бы ни было x); 3) для всех $\varphi \in D_A$ справедливо разложение

$$\zeta_\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t a(\varphi, x(s, \omega))\, d\hat{\zeta}_n(s), \tag{66}$$

и в силу равенства (66) получаем

$$\langle \zeta_\varphi \rangle_t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t |a_n(\varphi, x(s, \omega))|^2 d \langle \hat{\zeta}_n \rangle_s. \tag{67}$$

Если последовательность $\varepsilon_n \downarrow 0$ такова, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \langle \hat{\zeta}_n \rangle_t < \infty$ для всех t, то можем положить

$$\gamma_t = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \langle \hat{\zeta}_n \rangle_t + t. \tag{68}$$

Из формулы (67) вытекает, что $\langle \zeta_\varphi \rangle_t$ абсолютно непрерывно относительно γ_t для всех $\varphi \in D_A$.

а) Квадратично интегрируемые мартингалы, связанные с марковским процессом. Как и ранее, обозначим через $\mathscr{X}_t$ σ-алгебру, порожденную $x(s, \omega)$, $s \leqslant t$, и будем рассматривать мартингалы, относительно потока $(\mathscr{X}_t)$.

Лемма 10. Если $\eta(t)$ — $\mathscr{X}_t$-мартингал, $\mathbf{M}_x \eta^2(t) < \infty$, $x \in R^d$, то

$$\eta(t) = \eta(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \psi_n(s, \omega)\, d\hat{\zeta}_n(s), \tag{69}$$

где $\psi_n(s, \omega)$ $\mathscr{X}_s$-измеримо,

$$\langle \eta \rangle_t = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \psi_n^2(s, \omega)\, d \langle \hat{\zeta}_n \rangle_s. \tag{70}$$

Доказательство. Если $\eta(t)$ — мартингал, удовлетворяющий условиям леммы, то для всякого $x \in R^d$, $T > 0$ и $\varepsilon > 0$ можно указать такие $t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leqslant T$ и непрерывную $G(x_1, \ldots, x_m) \in C((R^d)^m)$, что $\mathbf{M}_x |\eta(t) - G(x(t_1, \omega), \ldots, x(t_m, \omega))| < \varepsilon$. Тогда при $t < T$

$$\mathbf{M}_x |\eta(t) - \mathbf{M}(G(x(t_1, \omega), \ldots, x(t_m, \omega)) / \mathscr{F}_t)|^2 < \varepsilon.$$

Так как при $t_{k-1} \leqslant t \leqslant t_k$

$$\mathbf{M}[G(x(t_1, \omega), \ldots, x(t_m, \omega)) / \mathscr{F}_t] = \mathbf{M}[G_k(x(t_1, \omega), \ldots, x(t_{k-1}, \omega), x(t_k, \omega)) / \mathscr{F}_t],$$

где

$$G_m(x_1, \ldots, x_m) = G(x_1, \ldots, x_m),$$

$$G_k(x_1, \ldots, x_k) = [T_{t_{k+1}-t_k} G_{k+1}(x_1, \ldots, x_k, x)]_{x=x_k},$$

(полугруппа T_t применяется к G_{k+1} при фиксированных первых k аргументах). Если будет доказано, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие функции $\psi_n^\varepsilon(s, \omega)$, что для всех x и T, $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{M}_x \left| \eta(t) - \eta(0) - \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \psi_n^\varepsilon(s, \omega)\, d\hat{\zeta}_n(s) \right|^2 < \varepsilon, \quad t \leqslant T,$$

то лемма будет доказана. Поэтому достаточно доказать справедливость представления (69) для $\mathbf{M}(G_{k+1}(x(t_1, \omega), \ldots, \ldots, x(t_k, \omega), x(t_{k+1}, \omega))/\mathscr{F}_t)$ при $t_k \leqslant t < t_{k+1}$. Используя для G_{k+1} аппроксимации вида

$$\sum_{l=1}^{n} \Phi_l(x_1, \ldots, x_k)\, f_l(x),$$

где $f_l \in D_A$, убеждаемся, что достаточно доказать лемму для мартингалов вида $\eta_f(t) = \mathbf{M}(f(x(t_0, \omega))/\mathscr{F}_t)$, $t \leqslant t_0$, где $f \in D_A$.

Так как

$$\eta_f(t) = T_{t_0-t} f(x(t, \omega)),$$

то

$$d\eta_f(t) = d\zeta_{T_{t_0-t}f}(t) + AT_{t_0-t} f(x(t, \omega))\, dt - AT_{t_0-t} f(x(t, \omega)) dt = \\ = d\zeta_{T_{t_0}f}(t) \qquad (71)$$

(мы воспользовались равенством (65); дифференциал $dT_{t_0-t} f(x(t, \omega))$ можно вычислять как дифференциал от произведения). Соотношение (71) можно еще переписать так:

$$\eta_f(t) = \eta_f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0 a_k(T_{t_0-t} f, x(t, \omega))\, d\hat{\zeta}_k(t);$$

(70) вытекает из (69).

Следствие. Каков бы ни был мартингал $\eta(t)$ относительно потока $(\mathscr{X}_t)$, его характеристика $\langle \eta \rangle_t$ абсолютно непрерывна относительно γ_t.

б) Случайная замена времени. Пусть τ_t определяется соотношением $\gamma_{\tau_t} = t$. Из (68) вытекает, что $\tau_t \leqslant t$, $\tau_t \to \infty$ при $t \to \infty$. Значит, процесс $y(t, \omega) = x(\tau_t, \omega)$ также будет однородным феллеровским марковским процессом. Если $\mathscr{Y}_t = \mathscr{X}_{\tau_t}$, то всякий $\mathscr{Y}_t$-согласованный локальный мартингал $\tilde{\eta}(t)$ имеет вид $\eta(\tau_t)$, где $\eta(t)$ — $(\mathscr{X}_t)$-мартингал. Его характеристика имеет вид $\langle \eta \rangle_{\tau_t}$, она абсолютно непрерывна относительно $\gamma_{\tau_t} = t$, т. е. абсолютно непрерывна. В частности, если $\tilde{A}$ — производящий оператор процесса $y(t, \omega)$, то для всех $\varphi \in D_{\tilde{A}}$ мартингал

$$\tilde{\zeta}_\varphi(t)=\varphi(y(t,\omega))-\int_0^t \tilde{A}\varphi(y(s,\omega))\,ds$$

имеет абсолютно непрерывную характеристику, т. е. существует измеримая функция b_φ такая, что

$$\langle \tilde{\zeta}_\varphi \rangle_t=\int_0^t b_\varphi(y(s,\omega))\,ds \tag{72}$$

(то что под интегралом в. (72) стоит функция указанного вида вытекает из того, что $\langle \tilde{\zeta}_\varphi \rangle_t$ — аддитивный функционал).

Используя формулу Ито, находим, что для всякой дважды дифференцируемой функции $\Phi(s_1, \ldots, s_r)$ и $\varphi_k \in D_{\tilde{A}}$, $k=1, \ldots, r$

$$\Phi(\varphi_1(y(t,\omega)), \ldots, \varphi_r(y(t,\omega)))-\Phi(\varphi_1(y(0,\omega)), \ldots, \varphi_r(y(0,\omega)))=$$

$$=\sum_{k=1}^r \int_0^t \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_k}(\varphi_1(y(s,\omega)), \ldots, \varphi_r(y(s,\omega)))\,d\tilde{\zeta}_{\varphi_k}(s)+$$

$$+\int_0^t\Bigg[\sum_{k=1}^r \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_k}(\varphi_1(y(s,\omega)), \ldots, \varphi_r(y(s,\omega)))\,\tilde{A}\varphi_k(y(s,\omega))\,ds+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^r \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi_k\partial\varphi_l}(\varphi_1(y(s,\omega)), \ldots, \varphi_r(y(s,\omega)))\,b_{\varphi_k\varphi_l}(y(s,\omega))\Bigg]ds, \tag{73}$$

где $b_{\varphi\psi}(y)=\dfrac{b_{\varphi+\psi}-b_\varphi-b_\psi}{2}$.

в) Квазидиффузионные процессы. Процесс $\varphi(t,\omega)$, полученный с помощью случайной замены времени в предыдущем пункте, является квазидиффузионным. Ниже приводятся несколько эквивалентных определений такого процесса. Рассмотрим непрерывный марковский процесс в локально компактном фазовом пространстве X. Определим *квазиинфинитезимальный оператор* $\tilde{A}$ на тех $\varphi \in \mathbf{C}_X$, для которых существует такая ограниченная измеримая функция $g(x)$, что

$$\varphi(x(t,\omega))-\int_0^t g(x(s,\omega))\,ds,$$

является мартингалом, при этом полагаем $\tilde{A}\varphi=g$. Обозначим через $D_{\tilde{A}}$ область определения.

Определение. Непрерывный марковский процесс $x(t,\omega)$ называется *квазидиффузионным*, если $D_{\tilde{A}}$ является кольцом функций: при $\varphi, \psi \in D_{\tilde{A}}$, $\varphi\psi \in D_{\tilde{A}}$.

Это эквивалентно следующему: процесс является квазидиффузионным, если для всех r, $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in D_{\tilde{A}}$ и $\Phi \in C^{(2)}(R^r)$ и $\Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) \in D_{\tilde{A}}$.

Действительно, для квазидиффузионного процесса взаимная характеристика мартингалов

$$\tilde{\zeta}_{\varphi_k}(t) = \varphi_k(x(t, \omega)) - \int_0^t \tilde{A}\varphi_k(x(s, \omega))\, ds,$$

для $k = i$, $k = l$ будет

$$\int_0^t b_{\varphi_i \varphi_l}(x(s, \omega))\, ds, \quad b_{\varphi_i \varphi_l} = \tilde{A}\varphi_i\varphi_l - \varphi_i \tilde{A}\varphi_l - \varphi_l \tilde{A}\varphi_l,$$

так как

$$\tilde{\zeta}_{\varphi_i}(t)\tilde{\zeta}_{\varphi_l}(t) - \int_0^t b_{\varphi_k \varphi_l}(x(s, \omega))\, ds =$$

$$= \varphi_i(x(t, \omega))\varphi_l(x(t, \omega)) - \int_0^t \tilde{A}[\varphi_i\varphi_l](x(s, \omega))\, ds -$$

$$- \int_0^t \int_0^s \tilde{A}\varphi_k(x(u, \omega))\, du\, d\tilde{\zeta}_{\varphi_l}(s) - \int_0^t \int_0^s \tilde{A}\varphi_l(x(u, \omega))\, du\, d\tilde{\zeta}_{\varphi_k}(s),$$

является мартингалом. Для доказательства того, что $\Phi(\varphi_1, \ldots$ $\ldots, \varphi_n) \in D_{\tilde{A}}$, можно воспользоваться формулой (73), из которой вытекает, что

$$\tilde{A}\Phi(\varphi_1, \ldots, \varphi_r) = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_k}(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)\tilde{A}\varphi_k +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi_k \partial \varphi_l}(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)\, b_{\varphi_k \varphi_l}. \tag{74}$$

г) Локальное поведение процесса. Назовем точку $\bar{x}$ регулярной, если в некоторой ее окрестности $U_{\bar{x}}$ можно выбрать координаты $\bar{\varphi}_1(x), \ldots, \bar{\varphi}_d(x)$ такие, что $\bar{\varphi}_i \in D_{\tilde{A}}$. До момента выхода из окрестности $U_{\bar{x}}$ процесс определяется значениями $\bar{\varphi}_i(x(s, \omega))$, $i \leqslant d$. Пусть Φ отображает $U_{\bar{x}}$ на некоторое открытое множество $V \in R^d$ по формуле $x \to (\bar{\varphi}_1(x), \ldots, \bar{\varphi}_d(x))$. Тогда процесс $\bar{x}(t, \omega) = \Phi(x(t, \omega))$, определенный до момента τ, является обрывающимся процессом, заданным в V. Легко проверить, что для этого процесса всякая дважды непрерывно дифференцируемая функция $g(x)$ будет входить в область определения квазиинфинитезимального оператора $\bar{A}$ и в силу (74)

$$\bar{A}g(x)=\sum a_k(x)\frac{\partial g}{\partial x_k}+\frac{1}{2}\sum b_{ik}(x)\frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_k},$$

где $a_k(x)$, $b_{ik}(x)$ — ограниченные измеримые функции.

Такой процесс отличается от диффузионного только тем, что a_k и b_{ik} не обязательно непрерывны.

5.2. Одномерные непрерывные процессы. Будем рассматривать непрерывные строго марковские процессы в R. Здесь существенную роль играет упорядоченность прямой. Для непрерывного процесса можно рассматривать момент τ_y первого попадания в заданную точку y. Это позволяет просто классифицировать состояния процесса. Ранее уже вводились поглощающие и задерживающие состояния.

Состояние x называется регулярным, если существует такая окрестность $(x-\delta, x+\delta)$, что для всех $x_1, x_2 \in (x-\delta, x+\delta)$ будет $\mathbf{P}_{x_1}\{\tau_{x_2}<\infty\}>0$.

а) Регулярные состояния. Пусть $x_1<x_2$ и $\mathbf{P}_{x_1}\{\tau_{x_2}<<\infty\}\mathbf{P}_{x_2}\{\tau_{x_1}<\infty\}>0$. Тогда все $x \in (x_1, x_2)$ являются *регулярными состояниями.* Множество регулярных состояний открыто и представимо в виде объединения интервалов. Рассмотрим процесс в замкнутом интервале $[a, b]$, все точки которого регулярны. Это означает, что $\mathbf{P}_a\{\tau_b<\infty\}>0$ и $\mathbf{P}_b\{\tau_a<\infty\}>0$. Пусть $x\in(a, b)$ — начальное положение процесса. Обозначим через ζ момент первого выхода из интервала (a, b). Тогда $(x(\zeta, \omega)-a)\cdot(x(\zeta, \omega)-b)=0$.

Лемма 11. При $x\in(a, b)$ $\mathbf{M}_x\zeta<\infty$.

Доказательство. При $x\in(a, b)$ $\zeta=[\tau_a\wedge\tau_b]$,

$$\mathbf{P}_x\{\zeta<c\}\geqslant\mathbf{P}_x\{\tau_a<c\}\vee\mathbf{P}_x\{\tau_b<c\}.$$

Так как при $a<x_1<x<x_2<b$ будет

$$\mathbf{P}_x\{\tau_a<c\}<\mathbf{P}_{x_1}\{\tau_a<c\},\quad \mathbf{P}_x\{\tau_b<c\}<\mathbf{P}_{x_2}\{\tau_b<c\},$$

то

$$\mathbf{P}_x\{\zeta<c\}\geqslant\mathbf{P}_b\{\tau_a<c\}\vee\mathbf{P}_b\{\tau_b<c\}=\alpha(c),$$

и для достаточно больших c величина справа положительна. Тогда

$$\mathbf{P}_x\{\zeta\geqslant kc\}=\mathbf{M}_x I_{\{\zeta>k-1\}}\mathbf{M}_{x((k-1)c,\omega)}I_{\{\zeta\geqslant c\}}\leqslant$$
$$\leqslant(1-\alpha(c))\,\mathbf{P}_x\{\zeta\geqslant(k-1)c\}\leqslant(1-\alpha(c))^k,$$

$$\mathbf{M}_x\zeta\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)\,c\,(1-\alpha(c))^k=\frac{c}{\alpha(c)^2}.$$

Введем функцию $m(x)=\mathbf{P}_x\{x(\zeta, \omega)=b\}$. Очевидно, что $m(x)$ не убывает на (a, b).

Лемма 12. Функция $m(x)$ непрерывна, строго возрастает, $m(a+)=0$, $m(b-)=1$.

Доказательство. Пусть $a \leqslant x_1 < x < x_2 \leqslant b$. Покажем, что $m(x_1) < m(x_2)$. Если $m(x_1) = m(x_2)$, то из равенства

$$m(x_1) = \mathbf{P}_{x_1}\{\tau_b < \tau_a\} =$$
$$= \mathbf{P}_{x_1}\{\tau_{x_2} < \tau_a\} \mathbf{P}_{x_2}\{\tau_b < \tau_a\} = \mathbf{P}_{x_1}(\tau_{x_2} < \tau_a\} m(x_2), \qquad (75)$$

вытекает, что $\mathbf{P}_{x_1}\{\tau_{x_2} < \tau_a\} = 1$. Но тогда точка a не достижима из x_2, так как для попадания в a из x_2 нужно сначала попасть в x_1, а из точки x_1 процесс не может попасть в a, не заходя опять в x_1. Итак, $m(x_1) < m(x_2)$.

Обозначим через τ момент выхода процесса из интервала (x_1, x_2). Имеем в силу (75)

$$m(x) = \mathbf{P}_x\{x(\tau, \omega) = x_1\} m(x_1) + \mathbf{P}_x\{x(\tau, \omega) = x_2\} m(x_2). \qquad (76)$$

Отсюда вытекает, что доказательство непрерывности $m(x)$ в точке x_1 справа и в точке x_2 слева эквивалентно доказательству равенств

$$\lim_{x \downarrow x_1} \mathbf{P}_x\{x(\tau, \omega) = x_1\} = \lim_{x \uparrow x_2} \mathbf{P}_x\{x(\tau, \omega) = x_2\} = 1.$$

Эти соотношения доказываются точно так, как равенство $m(b-)=1$, которое мы и будем доказывать. Воспользуемся равенством

$$m(x) = \mathbf{P}_x\{\tau_a > \tau_{\bar{x}}\} \cdot m(\bar{x}). \qquad (77)$$

Поскольку

$$\lim_{\bar{x} \uparrow b} \mathbf{P}_x\{\tau_a < \tau_{\bar{x}}\} = \lim_{\bar{x} \uparrow b} \mathbf{P}_x\{\sup_{t \leqslant \tau_a} x(t, \omega) < \bar{x}\} = \mathbf{P}_x\{\sup_{t \leqslant \tau_a} x(t, \omega) < b\} =$$
$$= 1 - m(x),$$

то, переходя в (77) к пределу при $x \uparrow b$, получим $m(x) = m(x) m(b-)$. Но $m(x) > m(a) = 0$.

б) Преобразование процесса в мартингал. Так как $m(x)$ — строго возрастающая непрерывная функция, то процесс $y(t, \omega) = m(x(t, \omega))$ также будет однородным непрерывным марковским процессом с фазовым пространством $(0, 1)$ (будем считать, что процесс обрывается в момент ζ выхода из $(0, 1)$). Процесс $y(t, \omega)$ на интервале $(0, \zeta)$ является мартингалом. Действительно, пусть $[y_1, y_2] \in (0, 1)$, $\tau_{[y_1, y_2]}$ — момент выхода из этого интервала. Тогда $y(\tau_{[y_1, y_2]}, \omega)$ — величина, принимающая два значения: y_1 и y_2.

Пусть $y_1 = m(x_1)$, $y_2 = m(x_2)$, $y = m(x)$, $x \in (x_1, x_2)$. Из (76) вытекает

$$y = \mathbf{P}_x\{y(\tau_{[y_1, y_2]}, \omega) = y_1\} y_1 + \mathbf{P}_x\{y(\tau_{[y_1, y_2]}, \omega) = y_2\} y_2. \qquad (78)$$

Если обозначить через $\bar{\mathbf{P}}_y$ и $\bar{\mathbf{M}}_y$ — вероятность и математическое ожидание для процесса $y(t, \omega)$, то предыдущее соотношение эквивалентно равенству

$$\overline{\mathbf{M}}_y y(\tau_{[y_1,y_2]}, \omega) = y.$$

В силу строгой марковости процесса,

$$\overline{\mathbf{M}}_y (y(\tau_{[y_1,y_2]}, \omega)/\mathcal{F}_{t\wedge\tau_{[y_1,y_2]}}) = y(t\wedge\tau_{[y_1,y_2]}, \omega).$$

Это означает, что $y(t, \omega)$ является мартингалом на каждом отрезке $[0, \tau_{[y_1,y_2]}]$.

Введем функцию $n(y) = \mathbf{M}_y\zeta$, $y = y(0, \omega) \in (0, 1)$.

Лемма 13. Функция $n(y)$ выпукла вверх.

Доказательство. Пусть $0 < y_1 < y < y_2 < 1$. Тогда

$$\overline{\mathbf{M}}_y\zeta = \overline{\mathbf{M}}_y\tau_{[y_1,y_2]} + \overline{\mathbf{M}}_{y_1}\zeta\overline{\mathbf{P}}_y\{y(\tau_{[y_1,y_2]}, \omega) = y_1\} +$$
$$+ \overline{\mathbf{M}}_{y_2}\zeta\cdot\overline{\mathbf{P}}_y\{y(\tau_{[y_1,y_2]}, \omega) = y_2\}.$$

Из соотношения (78) и равенства

$$\mathbf{P}_y\{y(\tau_{[y_1,y_2]}, \omega) = y_1\} + \mathbf{P}_y\{y(\tau_{[y_1,y_2]}, \omega) = y_2\} = 1$$

вытекает, что

$$\mathbf{P}_y\{y(\tau_{[y_1,y_2]}, \omega) = y_1\} = \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1}, \quad \mathbf{P}_y\{y(\tau_{[y_1,y_2]}, \omega) = y_2\} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Значит,

$$n(y) - \frac{y_2 - y}{y_2 - y_1} n(y_1) - \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} n(y_2) = \overline{\mathbf{M}}_y\tau_{[y_1,y_2]} > 0.$$

Отсюда и вытекает утверждение леммы.

в) Формула для характеристического оператора. Пусть $h_1 > 0$, $h_2 > 0$ и $0 < y - h_1 < y + h_2 < 1$. Обозначим через τ момент выхода процесса $y(t, \omega)$ из $(y - h_1, y + h_2)$. Тогда значение характеристического оператора $\mathscr{E}$ на функции φ в точке y есть

$$C\varphi(y) = \lim_{h_1\to 0, h_2\to 0} \frac{\varphi(y - h_1)h_2 + \varphi(y + h_2)h_1 - \varphi(y)(h_1 + h_2)}{n(y)(h_1 + h_2) - n(y - h_1)h_2 - n(y + h_2)h_1}.$$

Перепишем это соотношение так:

$$C\varphi(y) = \lim_{h_1\to 0, h_2\to 0} \frac{\dfrac{\varphi(y + h_2) - \varphi(y)}{h_2} - \dfrac{\varphi(y) - \varphi(y - h_1)}{h_1}}{\dfrac{n(y) - n(y - h_1)}{h_1} - \dfrac{n(y + h_2) - n(y)}{h_2}}. \tag{79}$$

В силу выпуклости $n(y)$ функция $n_1(y) = -n'(y)$ определена (за исключением, быть может, счетного числа точек) и возрастает. Исследуем выражение (79) в двух случаях: 1) в точке разрыва $n_1(y)$, 2) если $n_1(y)$ непрерывно в некоторой окрестности точки y. В случае 1) знаменатель имеет отличный от нуля предел $n_1(y+) - n_1(y-)$. Поэтому должен существовать и предел числителя, т. е. функция φ имеет в точке y правую и левую производные: $\frac{d^+}{dy}\varphi(y)$ и $\frac{d^-}{dy}\varphi(y)$, при этом

$$C\varphi(y) = \left[\frac{d^+}{dy}\varphi(y) - \frac{d^-}{dy}\varphi(y)\right][n_1(y+) - n_1(y-)]^{-1}.$$

Рассмотрим случай 2). Будем предполагать, что $n_1(y)$ непрерывна на $(0, 1)$, $C\varphi(y) = g(y)$ также непрерывна и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Положим

$$\varphi_1(y) = \int_0^y dz \int_0^z g(t)\, dn_1(t) - y \int_0^1 dz \int_0^z g(t)\, dn_1(t).$$

Тогда $\varphi_1(0) = \varphi_1(1) = 0$. Простой подсчет показывает, что $C\varphi_1(y) = g(y)$. Значит, $C[\varphi - \varphi_1] = 0$ и поэтому $\varphi = \varphi_1$. Легко видеть, что $g(y) = \dfrac{d\varphi_1'(y)}{dn_1(y)}$. Таким образом, если $C\varphi$ непрерывно, то существует непрерывная производная и

$$C\varphi = \frac{d\varphi'(y)}{dn_1(y)}. \tag{80}$$

г) Интервал нерегулярных точек. Пусть x_1 — нерегулярная, но не поглощающая точка. Тогда найдется такая точка $x_2 \neq x_1$, что $\mathbf{P}_{x_1}\{\tau_{x_2} < \infty\} > 0$. Будем предполагать, что $x_1 < x_2$ и что точки $y \in (x_1, x_2)$ также нерегулярны. Очевидно при $y \in (x_1, x_2)$ $\mathbf{P}_y\{\tau_{x_2} < \infty\} \geqslant \mathbf{P}_{x_1}\{\tau_{x_2} < \infty\}$. Если бы было $\mathbf{P}_y\{\tau_{x_1} < \infty\} > 0$, то точка y была бы регулярной. Точно так, при $x_1 < z < y$ должно быть $\mathbf{P}_y\{\tau_z < \infty\} = 0$. Таким образом, траектория $x(t, \omega)$ при $x(t, \omega) \in (x_1, x_2)$ непрерывная возрастающая функция. Точно так, как в лемме 12, устанавливаем, что $\mathbf{M}_y \tau_{x_2} < \infty$. Это убывающая функция y. При $y < z < x_2$ $\mathbf{M}_y \tau_{x_2} = \mathbf{M}_y \tau_z + \mathbf{M}_z \tau_{x_2}$. Если точка y не является задерживающей, то $\tau_z \downarrow 0$ при $z \downarrow y$ и, значит, $\mathbf{M}_y \tau_z \downarrow 0$, т. е. функция $\mathbf{M}_z \tau_{x_2}$ непрерывна справа.

Лемма 14. Если процесс строго марковский и непрерывный, то у него нет задерживающих точек.

Доказательство вытекает из того, что если τ' — момент выхода из начального состояния, то $x(\tau', \omega) = x(0, \omega)$. τ' имеет показательное распределение и либо $\mathbf{P}_y\{\tau' = 0\} = 1$, либо $\mathbf{P}_y\{\tau' > 0\} = 1$. Так как $\tau' + \theta_{\tau'}\tau' = \tau'$, то возможно лишь $\tau' = 0$. ■

Покажем теперь, что $\mathbf{M}_y \tau_z \to 0$ при $y \uparrow z$. Так как

$$\mathbf{M}_y \tau_z = \int_0^\infty \mathbf{P}_y\{\tau_z > t\}\, dt = \int_0^\infty \mathbf{P}_y\{\sup_{s \leqslant t} x(s, \omega) < z\}\, dt,$$

то $\mathbf{M}_y \tau_z$ непрерывно по z. С другой стороны, $\mathbf{M}_y \tau_z = \mathbf{M}_y \tau_{z-\varepsilon} + \mathbf{M}_{z-\varepsilon} \tau_z$. Если $\lim\limits_{y \uparrow z} \mathbf{M}_y \tau_z = c$, то, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, находим $\mathbf{M}_y \tau_z = \mathbf{M}_y \tau_z + c$, $c = 0$.

Значит, функция $l(y) = \mathbf{M}_y \tau_{x_2}$ — строго убывающая непрерывная функция. Рассмотрим процесс $y(\tau, \omega) = l(x(t, \omega))$. Пусть $\hat{\tau}_y$ — момент достижения процессом $y(t, \omega)$ состояния $y \in [0, l(x_1)]$. Легко вычислить, что при $0 < y_1 < y_2 \leqslant l(x_1)$ будет

$$\mathbf{M}_{y_2} \hat{\tau}_{y_1} = y_2 - y_1.$$

Так как при $y_1 < y < y_2$ момент $\hat{\tau}_{[y_1, y_2]}$ выхода из интервала (y_1, y_2) совпадает с $\hat{\tau}_{y_1}$ и $y(\hat{\tau}_{y_1}, \omega) = y_1$, то

$$C\varphi(y) = \lim_{y_1 \uparrow y} \frac{\varphi(y_1) - \varphi(y)}{y - y_1} = -\varphi'(y).$$

Отсюда вытекает, что $y(t, \omega) = y(0) - t$ при $t \leqslant y(0)$, а $x(t, \omega) = l^{-1}(l(x(0, \omega)) - t)$, где l^{-1} — обратная функция к функции l. На интервалах указанного вида процесс движется детерминировано.

Глава 5

ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

§ 1. Однородные цепи Маркова (элементы общей теории)

Однородная цепь Маркова — суть однородный марковский процесс с дискретным временем $t = 0, 1, \ldots$ (с точки зрения эргодической теории представляют интерес только необрывающиеся процессы). Таким образом, со всякой однородной цепью Маркова $x_0, x, \ldots$ в фазовом пространстве $(X, \mathscr{B})$ по определению (см. § 1 гл. 1) связаны регулярное семейство условных (при условии $x_0 = x$) вероятностей $\mathbf{P}_x$, $x \in X$ на σ-алгебре $\mathscr{F}$ и неубывающая последовательность (поток) σ-алгебр $\mathscr{F}_n \subset \mathscr{F}_{n+1} \subset \mathscr{F}$, $n = 0, 1, \ldots$, причем x_n должно быть $\mathscr{F}_n$-измеримым для всех $n \geqslant 0$. Марковское свойство цепи $x_0, x_1, \ldots$ по определению заключается в равенстве

$$\mathbf{P}_x\{x_{n+1} \in B \mid \mathscr{F}_n\} = \mathbf{P}_{x_n}\{x_1 \in B\}, \tag{1}$$

которое должно иметь место $\mathbf{P}_x$-п. н. для всех $n = 0, 1, \ldots, x \in X$, $B \in \mathscr{B}$. Правую часть в (1) следует понимать как результат подстановки случайной величины x_n вместо переменной y в выражение $\mathbf{P}_y\{x_1 \in B\}$.

Определяющей характеристикой однородной цепи Маркова является *вероятность перехода* за один шаг

$$P(x, B) = \mathbf{P}_x\{x_1 \in B\}, \quad x \in X, \quad B \in \mathscr{B}.$$

Как функция перемененой x вероятность перехода $\mathscr{B}$-измерима, а как функция переменной B является неотрицательной мерой на $\mathscr{B}$. Эти два свойства характеризуют так называемое неотрицательное ядро на фазовом пространстве $(X, \mathscr{B})$. Вероятность перехода — далеко не единственное неотрицательное ядро, связанное с цепью Маркова. Именно поэтому изложение элементов общей теории цепей Маркова мы считаем целесообразным начать с ряда общих свойств неотрицательных ядер.

1.1. Неотрицательные ядра. Пусть $(X, \mathscr{B})$ — произвольное измеримое (фазовое) пространство. *Неотрицательным ядром* на $(X, \mathscr{B})$ называется неотрицательная функция $K(x, B)$ двух переменных $x \in X$, $B \in \mathscr{B}$, которая при каждом фиксированном $x \in X$ является неотрицательной мерой по $B \in \mathscr{B}$, и при каждом фиксированном $B \in \mathscr{B}$ является неотрицательной $\mathscr{B}$-измеримой функцией по $x \in X$ (принимающей, возможно, значение $+\infty$).

Другими словами, неотрицательное ядро на $(X, \mathscr{B})$ — это $\mathscr{B}$-измеримым образом зависящая от $x \in X$ неотрицательная мера на $\mathscr{B}$.

Неотрицательные ядра можно складывать и умножать на неотрицательные числа. Очевидно также, что предел неубывающей последовательности неотрицательных ядер есть снова неотрицательное ядро.

Неотрицательное ядро $K = K(x, B)$ называется *стохастическим*, если $K(x, X) = 1$ для всех $x \in X$; *ограниченным*, если $\sup\limits_{x \in X} K(x, X) < \infty$; *конечным*, если $K(x, X) < \infty$ для всех $x \in X$.

С каждым неотрицательным ядром естественным образом связаны два линейных отображения. Первое из них переводит неотрицательную $\mathscr{B}$-измеримую функцию $f(x)$ в неотрицательную $\mathscr{B}$-измеримую функцию

$$Kf(x) = \int K(x, dy) f(y). \tag{2}$$

Второе отображение ставит в соответствие всякой неотрицательной мере $m(B)$ на $\mathscr{B}$ неотрицательную меру

$$mK(B) = \int m(dx) K(x, B). \tag{3}$$

Проверим корректность этих определений. Для доказательства $\mathscr{B}$-измеримости функции Kf достаточно заметить, что класс тех $\mathscr{B}$-измеримых функций $f \geqslant 0$, для которых функция Kf также $\mathscr{B}$-измерима, замкнут относительно сложения функций, умножения их на неотрицательные константы, а также относительно монотонно неубывающего предельного перехода. Кроме того, он по определению содержит индикаторы $\mathscr{B}$-измеримых множеств. Значит, этот класс содержит все неотрицательные $\mathscr{B}$-измеримые функции.

Далее, неотрицательность и аддитивность по $B \in \mathscr{B}$ правой части (3) очевидна. Кроме того, так как $K(x, \varnothing) \equiv 0$, то и $mK(\varnothing) = 0$. Наконец, пусть множества $B_1, B_2, \ldots$ из $\mathscr{B}$ попарно непересекаются. Тогда последовательность неотрицательных функций $f_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} K(x, B_i)$, монотонно не убывая, сходится к функции $f(x) = K\left(x, \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} K(x, B_i)$. Отсюда

$$\sum_{i=1}^{n} mK(B_i) = \int m(dx) f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_X m(dx) f(x) =$$

$$= \int m(dx) K(x, \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i),$$

то есть

$$\sum_{i\geqslant 1} mK(B_i) = mK\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right)$$

и правая часть (3) действительно является неотрицательной мерой на $\mathscr{B}$.

Произведением ядер K и L с общим фазовым пространством $(X, \mathscr{B})$ называется ядро

$$KL(x, B) = \int K(x, dy) L(y, B).$$

Корректность этого определения достаточно очевидна. Действительно, при фиксированном $B \in \mathscr{B}$ функция $f(x) = L(x, B)$ неотрицательна и $\mathscr{B}$-измерима. Значит, отображение $x \to Kf(x) = KL(x, B)$ также $\mathscr{B}$-измеримо. Если же фиксировано $x \in X$, то $KL(x, B) = mL(B)$ с $m(A) = K(x, A)$, и, следовательно, $KL(x, B)$ — неотрицательная мера по B.

Произведение неотрицательных ядер очевидным образом ассоциативно, то есть $(KL)M = K(LM)$ для любых трех неотрицательных ядер K, L, M.

Произведение стохастических ядер снова есть ядро стохастическое.

Степенью (точнее, n-ой степенью) называется результат последовательного n-кратного умножения ядра K на себя, то есть $K^1(x, B) = K(x, B)$ по определению, и далее по индукции $K^{n+1}(x, B) = \int K^n(x, dy) K(y, B)$, $n = 1, 2, \ldots$

Ядро K называется *абсолютно непрерывны* мотносительно ядра L, если для всех $x \in X$, $B \in \mathscr{B}$

$$K(x, B) = \int_B f(x, y) L(x, dy) \tag{4}$$

с некоторой $\mathscr{B} \otimes \mathscr{B}$-измеримой функцией $f(x, y) \geqslant 0$.

Тривиальное необходимое условие абсолютной непрерывности ядра K относительно ядра L состоит в абсолютной непрерывности меры $K(x, dy)$ относительно меры $L(x, dy)$ при каждом $x \in X$. Обратное оказывается верным при одном только условии счетной порожденности σ-алгебры $\mathscr{B}$. Последнее по определению означает существование такой последовательности множеств $B_1, B_2, \ldots$ из $\mathscr{B}$, что наименьшая σ-алгебра, их содержащая, совпадает с $\mathscr{B}$.

Теорема 1. Если σ-алгебра $\mathscr{B}$ счетно порождена, то конечное ядро K абсолютно непрерывно относительно конечного ядра L тогда и только тогда, когда при каждом $x \in X$ мера $K(x, dy)$ абсолютно непрерывна относительно меры $L(x, dy)$.

Доказательство. В проверке нуждается только достаточность. Ядро L, не ограничивая общности, будем считать стохастическим. По теореме Радона—Никодима

$$K(x, B)=\int_B f_x(y) L(x, dy), \tag{5}$$

где $f_x(y)$ при каждом $x\in X$ $\mathscr{B}$-измеримым образом зависит от y. Нужно построить $\mathscr{B}\otimes\mathscr{B}$-измеримую функцию $f(x, y)$, совпадающую $L(x, \cdot)$-п. в. с $f_x(y)$ при всяком $x\in X$. Это позволяет сделать счетная порожденность $\mathscr{B}$. Именно, пусть последовательность множеств $B_1, B_2, \ldots$ порождает $\mathscr{B}$. Обозначим через $\mathscr{B}_n$ σ-алгебру, порожденную первыми n множествами из этой последовательности. Тогда $\mathscr{B}_n\subset\mathscr{B}_{n+1}$, и $\sigma\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathscr{B}_n\right)=\mathscr{B}$.

Так как σ-алгебра $\mathscr{B}_n$ порождена конечным числом множеств, то каждое множество из $\mathscr{B}_n$ равно сумме некоторого числа ее атомов — попарно непересекающихся множеств $A_n^1, A_n^2, \ldots$, в сумме составляющих все пространство X. Положим

$$f_n(x, y)=\frac{K\left(x, A_n^j\right)}{L\left(x, A_n^j\right)} \text{ при } y\in A_n^j, \quad L\left(x, A_n^j\right)>0,$$

$$\text{и } f_n(x, y)=0 \text{ при } y\in A_n^j, \quad L\left(x, A_n^j\right)=0.$$

Так определенные функции $f_1(x, y), f_2(x, y), \ldots$, очевидно, $\mathscr{B}\otimes\mathscr{B}$-измеримы. Кроме того, при фиксированных $x\in X$, $n\geqslant 1$ функция $f_n(x, y)$ $\mathscr{B}_n$-измерима по y, и

$$\int_{A_n^j} f_n(x, y) L(x, dy)=\int_{A_n^j} f_x(x, y) L(x, dy). \tag{6}$$

Рассмотрим при фиксированном $x\in X$ вероятностное пространство $(X, \mathscr{B}, L(x,\cdot))$ и случайные величины на нем $f_x(\cdot)$, $f_n(x, \cdot)$. Уравнение (6) в точности означает, что случайная величина $f_n(x, \cdot)$ есть условное математическое ожидание $f_x(\cdot)$ при условии $\mathscr{B}_n$. По теореме Леви о сходимости замкнутого мартингала [2] имеем

$$f_x(y)=\lim_{n\to\infty} f_n(x, y) \tag{7}$$

для $L(x, \cdot)$-почти всех $y\in X$. Положим $f(x, y)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x, y)$, если этот предел существует и конечен, и $f(x, y)=0$ в противном случае. Функция $f(x, y)$ $\mathscr{B}\otimes\mathscr{B}$-измерима, и в силу (7) $f(x, y)=f_x(y)$ $L(x, dy)$-почти всюду. Это вместе с (5) влечет (4), что и требовалось доказать.

1.2. Вероятности перехода. «Главным» неотрицательным ядром, связанным с однородной цепью Маркова $x_0, x_1, \ldots$ в фазовом пространстве $(X, \mathscr{B})$ является ее вероятность перехода (или, иначе, переходная вероятность) за один шаг

$$P(x,\ B)=\mathbf{P}_x\{x_1\in B\}.$$

Степени ядра P дают вероятности перехода за несколько шагов:

$$P^n(x,\ B)=\mathbf{P}_x\{x_n\in B\}.$$

Через переходные вероятности выражаются все условные (при условии $x_0=x$) конечномерные распределения цепи $x_0,\ x_1,\ \ldots$

Например,

$$\mathbf{P}_x\{x_1\in B_1,\ x_2\in B_2\}=\int_{B_1} P(x,\ dy)\,P(y,\ B_2),$$

$$\mathbf{P}_x\{x_1\in B_1\ x_2\in B_2,\ x_3\in B_3\}=\int_{B_1} P(x,\ dy_1)\int_{B_2} P(y_1,\ dy_2)\,P(y_2\ B_3)$$

и т. д.,

$$\mathbf{P}_x\{x_1\in B_1,\ x_2\in B_2,\ \ldots,\ x_n\in B_n\}=$$
$$=\int_{B_1} P(x,\ dy_1)\int_{B_2} P(y_1,\ dy_2)\ \ldots \int_{B_{n-1}} P(y_{n-2},\ dy_{n-1})\,P(y_{n-1},\ B_n). \quad (8)$$

Если фазовое пространство $(X,\mathscr{B})$ является борелевским, то формула (8) и теорема Колмогорова [2] гарантируют существование вероятностного пространства и цепи Маркова на нем с данной вероятностью перехода.

Оказывается, что последнее справедливо без каких бы то ни было ограничений топологического (или другого) характера на фазовое пространство. Соответствующий результат принадлежит Ионеску Тулче [10].

Прежде чем переходить к точной формулировке, введем ряд обозначений. Пусть $(X,\mathscr{B})$ — произвольное измеримое пространство и $P(x,B)$ — переходная вероятность на нем. Обозначим через Ω множество всех X-значных последовательностей $\omega=(\omega_0,\ \omega_1,\ \ldots,\ \omega_n,\ \ldots)$. Через $\mathscr{F}_n$ обозначим σ-алгебру, порожденную множествами $\{\omega:\omega_k\in B\}$ при $0\leqslant k\leqslant n$, $B\in\mathscr{B}$, а через $\mathscr{F}$ обозначим σ-алгебру, порожденную такими же множествами, но уже при всевозможных $k\geqslant 0$.

Совокупность множеств $\mathscr{A}=\bigcup\limits_n \mathscr{F}_n$ образует алгебру, и $\mathscr{F}$ есть наименьшая σ-алгебра, ее содержащая. На каждой из σ-алгебр $\mathscr{F}_n$ определим систему вероятностных мер $\mathbf{P}_{y_0,\ldots,y_m}$, $y_9,\ \ldots,\ y_m\in X$ следующим образом

$$\mathbf{P}_{y_0,\ldots,y_m}\{\omega:\ \omega_0\in B_0,\ \ldots,\ \omega_n\in B_n\}=$$
$$=\begin{cases} I_{B_0}(y_0)\ \ldots\ I_{B_n}(y_n), & \text{если } m\geqslant n,\\ I_{B_0}(y_0)\ \ldots\ I_{B_m}(y_m)\displaystyle\int_{B_{m+1}} P(y_n,\ dy_{m+1})\ \ldots \int_{B_n} P(y_{n-1},\ dy_n), & \\ \text{если } m<n. & \end{cases} \quad (9)$$

Этим на алгебре $\mathscr{A}$ определена система аддитивных функций $\mathbf{P}_{y_0,\ldots,y_m}$, таких что

$$\mathbf{P}_{y_0,\ldots,y_{m-1}}(\Gamma)=\int\limits_X P(y_{m-1}, dy_m)\mathbf{P}_{y_0,\ldots,y_{m-1},y_m}(\Gamma) \tag{10}$$

для всех $\Gamma\in\mathscr{A}$, $m\geqslant 1$.

Теперь задача построения цепи Маркова с данной вероятностью перехода свелась к продолжению каждой из функций $\mathbf{P}_{y_0}$, $y_0\in X$ с алгебры $\mathscr{A}$ до меры на σ-алгебре $\mathscr{F}$.

Теорема 2. Каждая из функций $\mathbf{P}_{y_0,\ldots,y_m}$, $y_0, \ldots, y_m\in X$, $m=0, 1, \ldots$, единственным образом продолжается с $\mathscr{A}$ до вероятностной меры на $\mathscr{F}$.

Доказательство. Достаточно проверить непрерывность $\mathbf{P}_{y_0,\ldots,y_m}$ на $\mathscr{A}$ в $\varnothing$. Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots\in\mathscr{A}$, $\Gamma_k\supset\Gamma_{k+1}$, и $\inf\limits_k \mathbf{P}_{y_0,\ldots,y_m}(\Gamma_k)>0$. Требуется доказать, что $\bigcap\limits_k \Gamma_k\neq\varnothing$.

Из (10) по индукции вытекает существование такой последовательности $y_{m+1}, \ldots, y_n, \ldots$, что

$$\inf_k \mathbf{P}_{y_0,\ldots,y_n}(\Gamma_k)>0 \text{ для всех } n\geqslant 0. \tag{11}$$

Положим $\omega^*=(y_0, y_1, \ldots, y_n, \ldots)$ и покажем, что $\omega^*\in\Gamma_k$ для всех $k\geqslant 1$. Зафиксируем k, выберем такое большое n, что $\Gamma_k\in\mathscr{F}_n$. Согласно определению (9), ограничение меры $\mathbf{P}_{y_0,\ldots,y_n}(\Gamma)$ на σ-алгебру $\mathscr{F}_n$ принимает только значения 1 или 0, а именно: если $\Gamma\in\mathscr{F}_n$, то $\mathbf{P}_{y_0,\ldots,y_n}(\Gamma)=I_\Gamma(\omega^*)$. Поэтому (11) возможно только при условии $\omega^*\in\Gamma_k$, что и требовалось доказать.

1.3. Операторы сдвига. Все изложенные в п. 1.1 главы 4 понятия и приемы, связанные со сдвигами траекторий, работают и в случае дискретного времени $t=0, 1, \ldots$ Более того, в этом случае достаточно определить оператор сдвига $S=S_1$ на единицу времени, после чего можно положить $S_k=S^k$ для всех $k\geqslant 1$. Напомним, что для любой $\mathscr{X}$-измеримой величины ξ через ξS мы обозначаем $\mathscr{X}$-измеримую величину такую, что $\xi S(\omega)=\xi(S\omega)$. Марковское свойство цепи $x_0, x_1, \ldots$ в терминах оператора сдвига S выглядит так:

$$\mathbf{P}_x(S_k^{-1}\Gamma\,|\,\mathscr{F}_k)=\mathbf{P}_{x_k}(\Gamma) \quad \mathbf{P}_x\text{-п.н.} \tag{12}$$

для всех $x\in X$, $\Gamma\in\mathscr{X}$, $\Gamma\in\mathscr{X}$, $k\geqslant 1$ или

$$\mathbf{M}_x(\xi S_k\,|\,\mathscr{F}_k)=\mathbf{M}_{x_k}\xi \quad \mathbf{P}_x\text{-п.н.} \tag{13}$$

для всех $x\in X$, $k\geqslant 1$ и всех ограниченных $\mathscr{X}$-измеримых величин ξ.

1.4. Строго марковское свойство. Равенства (12), (13) сохраняют силу при замене натурального k на так называемый *момент остановки* τ — случайную величину с целыми неотрицательными значениями, обладающую свойством

$$\{\tau=k\}\in\mathcal{F}_k \quad \text{для всех } k\geqslant 0. \tag{14}$$

Оператор случайного сдвига S_τ определяется естественным образом: $S_\tau\omega=S_{\tau(\omega)}\omega$, а σ-алгебра $\mathcal{F}_\tau$ по определению порождается событиями $\Gamma\cap\{\tau=k\}$ с $\Gamma\in\mathcal{F}_k$ при всех $k=0, 1, \ldots$ При таком определении S_τ и $\mathcal{F}_\tau$ из (12), (13), (14) для тех же x, Γ, ξ следуют

$$\mathbf{P}_x\left(S_\tau^{-1}\Gamma\,|\,\mathcal{F}_\tau\right)=\mathbf{P}_{x\tau}(\Gamma) \quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.},$$

$$\mathbf{M}_x(\xi S_\tau\,|\,\mathcal{F}_\tau)=\mathbf{M}_{x_\tau}\xi \quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.}$$

§ 2. Марковские процессы и эргодическая теория

Исторически эргодическая теория марковских процессов ведет свое начало от динамических систем с интегральным инвариантом. Современное состояние предмета позволяет начать изложение, не обращаясь к историческим корням. Однако нам представляется целесообразным напомнить основные положения абстрактной эргодической теории с тем, чтобы помочь интересующемуся читателю лучше представить себе происхождение и понять разнообразие задач эргодической теории.

2.1. Физические предпосылки. Удобной отправной точкой для изложения эргодической теории является задача об адекватности реальных систем их математическому описанию. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ — последовательные состояния некоторой физической (химической, биологической, социологической и т. п.) системы σ, эволюционирующей в дискретном времени $t=0, 1, \ldots$ и в фазовом пространстве E. Математическое описание системы σ — суть оператор перехода S, действующий из E в E таким образом, что $x_n=Sx_{n-1}$, и, следовательно, $x_n=S^nx_0$. При ответе на вопрос, является ли данный оператор перехода S (выбор которого продиктован, разумеется, достаточно убедительными соображениями) математическим описанием системы σ возникают по крайней мере две трудности. Во-первых, невозможность точно определить состояние системы (всякое измерение неизбежно сопряжено с ошибкой), и, во-вторых, чисто математическая трудность вычисления S^nx_0. Кроме того, точное состояние системы может определяться необозримым числом факторов, в связи с чем приходится измерять не собственно последовательные состояния $x_0, x_1, \ldots$, а некоторые числовые функции от них $f(x_0), f(x_1), \ldots$

Если ошибка измерения ограниченной функции f от состояний системы не систематическая, то она может быть сведена к минимуму переходом к среднему арифметическому

$$\frac{1}{n}\left(f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})\right). \tag{15}$$

Затем это выражение сравнивается с

$$\frac{1}{n}(f(x_0)+f(Sx_0)+\ldots+f(S^{n-1}x_0)).$$

Если n велико, то это среднее должно мало отличаться от своего предельного значения

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(S^k x_0), \tag{16}$$

разумеется, в предположении его существования. Ситуация еще больше упрощается, если предел (16) не зависит от x_0. В этом случае при широких предположениях предел (16) может быть записан в виде интеграла

$$\int f(x)\,\mu(dx) \tag{17}$$

по некоторой вероятностной мере μ. Для этого достаточно предположить, что пространство E наделено σ-алгеброй измеримых множеств $\mathscr{A}$, относительно которой измеримы как отображение $S: E\to E$, так и функция f из (15), (16). Мера μ связана с отображением S уравнением инвариантности

$$\mu(S^{-1}A)=\mu(A), \qquad A\in\mathscr{A}. \tag{18}$$

Здесь $S^{-1}A$ — полный прообраз множества A при отображении S. Когда хотят отразить связь (18) между S и μ говорят также, что преобразование S *сохраняет меру* μ. Если уравнение (18) имеет единственное вероятностное решение, то процедура проверки адекватности системы σ ее математическому описанию S состоит в сравнении среднего арифметического (15) с интегралом (17). Если оператор S неадекватно описывает систему σ, то для некоторой ограниченной функции f и при достаточно большом n между (15) и (17) должно наблюдаться заметное различие.

Математической основой для такого заключения являются утверждения о существовании предела (16) или о совпадении его с интегралом (17), что и называют *эргодическими теоремами.*

2.2. Абстрактные эргодические теоремы. Одной из исторически первых эргодических теорем явилась теорема Биркгофа—Хинчина [10], которая, в свою очередь, является частным случаем следующего утверждения, охватывающего и ту ситуацию, когда уравнение инвариантности (18) неразрешимо в конечных мерах, но имеет σ-конечное решение.

Теорема 3. Пусть измеримое преобразование S измеримого пространства $(E,\mathscr{A})$ в себя сохраняет меру μ. Тогда если $\mathscr{A}$-измеримые функции f и g μ-интегрируемы и

$$g(x)>0, \quad \sum_{k\geqslant 0} g(S^k x)=\infty \quad \mu\text{-п. в.}, \tag{19}$$

то предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} f(S^k x)}{\sum_{k=0}^{n} g(S^k x)} = f^*(x)$$

существует μ-почти всюду, $f^*(Sx) = f^*(x)$ μ-п. в., и

$$\int f^*(x)\, g(x)\, \mu(dx) = \int f(x)\, \mu(dx). \qquad (20)$$

При $\mu(E) < \infty$, $g = 1$ это утверждение превращается в теорему Биркгофа—Хинчина.

Теорема 4. Пусть измеримое преобразование S измеримого пространства $(E, \mathscr{A})$ в себя сохраняет конечную меру μ. Тогда если $\mathscr{B}$-измеримая функция f μ-интегрируема, то предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(S^k x) = f^*(x) \qquad (21)$$

существует μ-почти всюду, $f^*(Sx) = f^*(x)$ μ-п. в., и

$$\int f^*(x)\, \mu(dx) = \int f(x)\, \mu(dx).$$

Замечание 1. Сходимость в (21) имеет место и в смысле сходимости в пространстве $L^1(E, \mathscr{A}, \mu)$.

Замечание 2. С преобразованием S связана σ-алгебра S-инвариантных множеств $\mathscr{I}$, состоящая из тех $\mathscr{A}$-измеримых множеств A, для которых $S^{-1}A = A$. Будем говорить, что *σ-алгебра $\mathscr{I}$ тривиальна* $(\mathrm{mod}\,\mu)$, если каждый ее элемент A отличается от пустого множества $\varnothing$ или от всего пространства E не более чем на μ-нулевое множество, т. е. если

$$\mu(A)\,\mu(E \setminus A) = 0.$$

В условиях теоремы функция f^* может быть выбрана $\mathscr{I}$-измеримой функцией. Если σ-алгебра $\mathscr{I}$ тривиальна $(\mathrm{mod}\,\mu)$, то $f^*(x)$, как и вообще всякая $\mathscr{I}$-измеримая функция, необходимо есть константа μ-п. в., удовлетворяющая помимо всего прочего уравнению (20). Таким образом, имеют место

Следствие 1. Если в условиях теоремы σ-алгебра $\mathscr{I}$ тривиальна $(\mathrm{mod}\,\mu)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} f(S^k x)}{\sum_{k=0}^{n} g(S^k x)} = \int f(y)\, \mu(dy) \Big/ \int g(y)\, \mu(dy) \quad \mu\text{-п. в.};$$

и

Следствие 2. Если в условиях теоремы $\mu(E)=1$, и σ-алгебра $\mathcal{J}$ тривиальна $(\mathrm{mod}\,\mu)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(S^k x)=\int\mu(dy)\,f(y)\ \mu\text{-п. в.}$$

Даже беглого взгляда на эти теоремы достаточно, чтобы заметить, что на самом деле они имеют дело не с точечным преобразованием $x\to Sx$, а с функциональным преобразованием T пространства $L^1(E,\mathcal{A},\mu)=L^1$ в себя, переводящим функцию f в функцию

$$Tf(x)=f(Sx). \tag{22}$$

Естественно возникает вопрос, при каких условиях на отображение $T:L^1\to L^1$ имеют место аналоги эргодических теорем?

Необходимые условия очевидны. Отображение T должно быть линейным и положительным. Последнее по определению означает, что $Tf(x)\geqslant 0$ μ-п. в., как только $f(x)\geqslant 0$ μ-п. в.

Аналогом уравнения инвариантности (18) является условие:

$$\int Tf(x)\,\mu(dx)=\int f(x)\,\mu(dx) \tag{23}$$

для всех $f\in L^1(\mu)$. Это условие в частности, означает, что линейный оператор T ограничен, и его норма равна единице.

Перечисленных условий достаточно, чтобы утверждать истинность следующей, принадлежащей Чакону и Орнштейну, эргодической теоремы [10].

Теорема 5. Пусть линейный положительный оператор $T:L^1(E,\mathcal{A},\mu)\to L^1(E,\mathcal{A},\mu)$ удовлетворяет условию (23). Тогда если функция g из $L^1(E,\mathcal{A},\mu)$ положительна, и

$$\sum_{n\geqslant 0} T^n g(x)=\infty\ \ \mu\text{-п. в.}, \tag{24}$$

то для всех $f\in L^1(E,\mathcal{A},\mu)$ существует μ-почти всюду предел

$$f^*(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} T^k f(x)}{\sum\limits_{k=0}^{n} T^k g(x)} \tag{25}$$

и

$$\int f^*(x)\,g(x)\,\mu(dx)=\int f(x)\,\mu(dx). \tag{26}$$

Замечание. Если оператор T построен по сохраняющему меру μ преобразованию S в соответствии с (22), то условие (24) вытекает из конечности меры μ (достаточно взять $g(x)\equiv 1$). В общем случае это не так. Например, пусть $E=R^1$, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра борелевских множеств,

$$\mu(dx)=e^{-x^2}dx,$$
$$Tf(x)=e^{-2x-1}f(x+1).$$

Условие (23) тривиально проверяется. Его левая часть равна интегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2x-1} f(x+1) e^{-x^2} dx,$$

который в результате замены переменной $x'=x+1$ превращается в интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-x^2} dx$, совпадающий с правой частью (23). Очевидно также, что

$$T^k f(x) = e^{-2kx-k^2} f(x+k).$$

Предположим, что

$$\sum_{n\geqslant 0} e^{-2nx-n^2} g(x+n) = \infty \quad \mu\text{-п. в.} \tag{27}$$

для некоторой положительной функции $g \in L^1(E, \mathscr{A}, \mu)$ и применим теорему 5 к функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Так как

$$T^k f(x) = 0 \qquad \text{для} \qquad x > -k,$$

то при таком выборе f левая, а значит, и правая часть (25) тождественно равна 0. Но это противоречит уравнению (26), левая часть которого в данном случае есть 0, а правая положительна. Значит, соотношение (27) не может иметь места.

В основе доказательства теоремы 5 (а также ее частного случая — теоремы 4) лежит следующее вспомогательное утверждение, известное под названием максимальной эргодической теоремы [10]. Для ее формулировки свяжем со всякой μ-интегрируемой функцией h множество

$$C_h^+ = \left\{ x \in E : \sup_{n\geqslant 0} \sum_{k=0}^{n} T^k h(x) \geqslant 0 \right\}.$$

Теорема 6. Пусть линейный положительный оператор $T : L^1(E, \mathscr{A}, \mu) \to L^1(E, \mathscr{A}, \mu)$ удовлетворяет условию (23). Тогда

$$\int_{C_h^+} h(x)\, \mu(dx) \geqslant 0$$

для всех $h \in L^1(E, \mathscr{A}, \mu)$.

Замечание 4. Из максимальной эргодической теоремы в частности следует, что левая часть в (25) положительна μ-почти всюду, как только функция f всюду положительна. Действительно, пусть $B = \{x : f^*(x) = 0\}$. Тогда $B \subset C^+_{\varepsilon g - f}$ для всякого $\varepsilon > 0$. Значит,

$$\int_{C^{+}_{\varepsilon g-f}} \varepsilon g(x)\,\mu(dx) \geqslant \int_{C^{+}_{\varepsilon g-f}} f(x)\,\mu(dx),$$

и, следовательно,

$$\varepsilon \int_E g(x)\,\mu(dx) \geqslant \int_B f(x)\,\mu(dx).$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\int_B f(x)\,\mu(dx) = 0$, что в силу положительности f возможно только при $\mu(B) = 0$. Отсюда, в частности, следует, что в условиях теоремы

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k f(x) = \infty \quad \mu\text{-п. в.}$$

для любой всюду положительной μ-интегрируемой функции f. Удовлетворяющий этому условию оператор T называется консервативным.

Если консервативный оператор T порождается сохраняющим меру μ преобразованием S по формуле (22), то преобразование S также называется *консервативным.* Другими словами, сохраняющее меру μ преобразование S консервативно, если условие (19) имеет место для некоторой (а значит, и для любой) положительной $\mathscr{A}$-измеримой μ-интегрируемой функции g. Может так случиться, что одно и то же преобразование S сохраняет различные меры. В этом случае, чтобы подчеркнуть о какой мере μ идет речь, будем говорить о μ-консервативности S.

Последняя из рассматриваемых в этом пункте абстрактных эргодических теорем принадлежит Хопфу [10] и является операторным обобщением теоремы Биркгофа—Хинчина.

Теорема 7. Пусть в условиях теоремы 5 существует такая положительная функция $h \in L^1(E, \mathscr{A}, \mu)$, что

$$Th(x) = h(x) \qquad \mu\text{-п. в.} \tag{28}$$

Тогда для всех $f \in L^1(E, \mathscr{A}, \mu)$ μ-п. в. существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k f(x) = f^*(x) \tag{29}$$

и

$$\int f^*(x)\,\mu(dx) = \int f(x)\,\mu(dx).$$

Замечание 5. Предельное соотношение (29) имеет место и в смысле сходимости по норме пространства $L^1(E, \mathscr{A}, \mu)$.

Замечание 6. σ-алгебра S-инвариантных множеств $\mathscr{I}$ из следствий 1 и 2 имеет свой аналог и в условиях теоремы 5. Именно, обозначим через $\mathscr{I}_\mu$ совокупность таких множеств $B \in \mathscr{A}$, что

$$\int_B Tf(x)\mu(dx)=\int_B f(x)\mu(dx)$$

для всех $f\in L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$.

Если оператор T консервативен, то $\mathcal{I}_\mu$ есть σ-алгебра [10]. Этот факт нетривиален, как и то обстоятельство, что предел в (25) $\mathcal{I}_\mu$-измерим. Если оператор T построен согласно (22) по сохраняющему меру μ преобразованию S, то $\mathcal{I}_\mu$ есть минимальная σ-алгебра, содержащая $\mathcal{I}$ и все μ-нулевые множества из $\mathcal{A}$. В общем случае ограниченная $\mathcal{A}$-измеримая функция g $\mathcal{I}_\mu$-измерима тогда и только тогда, когда

$$\int g(x)Tf(x)\mu(dx)=\int g(x)f(x)\mu(dx)$$

для всех $f\in L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$.

$\mathcal{I}_\mu$-измеримость предела (25) и уравнение (26) позволяют формулировать еще два следствия.

Следствие 3. Если в условиях теоремы 5 σ-алгебра $\mathcal{I}_\mu$ тривиальна $(\bmod\,\mu)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n} T^k f(x)}{\sum_{k=0}^{n} T^k g(x)}=\int f(x)\mu(dx)\Big/\int g(y)\mu(dy)\quad \mu\text{-п. в.}$$

Следствие 4. Если в условиях теоремы 7 σ-алгебра $\mathcal{I}_\mu$ тривиальна $(\bmod\,\mu)$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} T^k f(x)=h(x)\int_E f(y)\mu(dy)\Big/\int_E h(y)\mu(dy)\quad \mu\text{-п. в.}$$

Отметим, что в условиях теоремы 4 (Биркгофа—Хинчина) уравнению (28) при соответствующем T удовлетворяет функция $h\equiv 1$.

Связь абстрактных эргодических теорем с марковскими процессами осуществляется двумя способами: через сдвиги траекторий случайных процессов (теоремы 1 и 2) и через преобразования пространств суммируемых функций, порождаемых переходными вероятностями (теоремы 3 и 5).

2.3. Применения к операторам сдвига. Согласно данным в п. 1.1 гл. 4 и п. 1.3 настоящей главы определениям, оператор сдвига S сохраняет меру $\mathbf{P}$ на $(\Omega, \mathcal{X})$ тогда и только тогда, когда последовательность $x_0, x_1, \ldots$ стационарна.

Стационарность однородной цепи Маркова $x_0, x_1, \ldots$ в точности означает, что ее начальное распределение $\pi(A)=\mathbf{P}\{x_0\in A\}$ связано с переходной вероятностью за один шаг $P(x, A)$, $x\in X$, $A\in\mathcal{B}$ *уравнением инвариантности*

$$\int \pi(dx)P(x, A)=\pi(A),\qquad A\in\mathcal{B}. \tag{30}$$

Нередка ситуация, когда уравнение инвариантности (30) не имеет вероятностного решения, но имеет σ-конечное решение π. Тогда оператор сдвига S сохраняет σ-конечную меру $\mathbf{P}_\pi = \int \pi(dx)\mathbf{P}_x$.

Такое преобразование S консервативно тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n\geqslant 0} f(x_n) = \infty \quad \mathbf{P}_\pi\text{-п. в.}$$

для всех $\mathscr{A}$-измеримых положительных π-интегрируемых функций f.

Консервативность оператора сдвига S позволяет дать полное $(\operatorname{mod} \mathbf{P}_\pi)$ описание σ-алгебры S-инвариантных событий $\mathscr{I}$ в терминах *поглощающих подмножеств* фазового пространства X, то есть таких множеств $D\in\mathscr{B}$, что $P(x, D) = 1$ при $x\in D$. Именно [10], всякому событию $\Gamma\in\mathscr{I}$ отвечает такое поглощающее множество D, что

$$\Gamma = \{x_0\in D\} \qquad (\operatorname{mod} \mathbf{P}_\pi). \tag{31}$$

Поглощающее множество нулевой или полной меры π будем называть тривиальным $(\operatorname{mod} \pi)$. Таким образом, σ-алгебра $\mathscr{I}$ тривиальна $(\operatorname{mod} \mathbf{P}_\pi)$ тогда и только тогда, когда все поглощающие множества тривиальны $(\operatorname{mod} \pi)$. Вместе со следствиями 1 и 2 это позволяет сформулировать следующее утверждение.

Теорема 8. Пусть цепь x_n, $n=0, 1, \ldots$ имеет σ-конечную инвариантную меру π, и все поглощающие множества тривиальны $(\operatorname{mod} \pi)$. Тогда если оператор сдвига S $\mathbf{P}_\pi$-консервативен, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \xi S^k}{\sum\limits_{k=0}^{n} \eta S^k} = \frac{\mathbf{M}_\pi \xi}{\mathbf{M}_\pi \eta}\, \mathbf{P}_\pi\text{-п.} \tag{32}$$

для всех $\mathscr{X}$-измеримых $\mathbf{P}_\pi$-интегрируемых величин ξ, η с $\mathbf{M}_\pi\eta \neq 0$; и если $\pi(E) = 1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \xi S^k = \mathbf{M}_\pi \xi \quad \mathbf{P}_\pi\text{-п. н.} \tag{33}$$

для всех $\mathscr{X}$-измеримых $\mathbf{P}_\pi$-интегрируемых величин ξ.

В частном случае, когда $\xi = f(x_0)$, $\eta = g(x_0)$ утверждение теоремы 8 приобретает следующий вид.

Следствие 5. В условиях теоремы 8

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} f(x_k)}{\sum\limits_{k=0}^{n} g(x_k)} = \int f(y)\pi(dy) \Big/ \int g(y)\pi(dy) \quad \mathbf{P}_\pi\text{-п. в.} \tag{34}$$

для всех $\mathscr{B}$-измеримых π-интегрируемых функций f, g с $\int g(y)\pi(dy)\neq 0$; и если $\pi(X)=1$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)=\int f(y)\pi(dy) \quad \mathbf{P}_\pi\text{-п. н.} \tag{35}$$

для всех $\mathscr{B}$-измеримых π-интегрируемых функций f.

Замечание 7. При $f=I_A$ сумма $\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ есть число посещений цепью множества $A\in\mathscr{B}$ за первые n шагов — обозначим это число $\nu_n(A)$.

Согласно (34), (35) (или (32), (33)) имеем

Следствие 6. В условиях теоремы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\nu_n(A)}{\nu_n(B)}=\frac{\pi(A)}{\pi(B)} \quad \mathbf{P}_\pi\text{-п. в.} \tag{36}$$

для всех A, $B\in\mathscr{B}$ с $\pi(A)<\infty$, $0<\pi(B)<\infty$; и если $\pi(X)=1$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\nu_n(A)}{n}=\pi(A) \quad \mathbf{P}_\pi\text{-п. в.} \tag{37}$$

для всех $A\in\mathscr{B}$.

Замечание 8. Соотношения (35), (37) имеют место и в смысле сходимости по норме пространства $L^1(\Omega, \mathscr{X}, \mathbf{P}_\pi)$.

2.4. Эргодические теоремы для переходных вероятностей. Если уравнение инвариантности (30) имеет σ-конечное решение π, то переходная вероятность $P(x, A)$ порождает два линейных положительных оператора P и $\widetilde{P}$ в пространстве $L^1(X, \mathscr{B}, \pi)$.

Оператор P действует на $\mathscr{B}$-измеримую π-интегрируемую функцию f по формуле

$$Pf(x)=\int P(x, dy)f(y).$$

При этом, очевидно,

$$\int \pi(dx)Pf(x)=\int \pi(dx)f(x). \tag{38}$$

Оператор $\widetilde{P}$ в некотором смысле сопряжен с P. Он переводит функцию $f\in L^1(X, \mathscr{B}, \pi)$ в функцию $\widetilde{P}f$ такую, что

$$\int_A \pi(dx)\widetilde{P}f(x)=\int_X \pi(dx)f(x)P(x, A) \tag{39}$$

для всех $A\in\mathscr{B}$.

Уравнение (30) гарантирует корректность данного определения. В самом деле, пусть $f\in L^1(X,\mathscr{B},\pi)$ и $f(x)\geqslant 0$ π-п. в. Тогда мера $\mu(A)=\int \pi(dx)f(x)P(x, A)$ на $\mathscr{B}$ конечна и абсолютно непрерывна относительно π, ибо если $\pi(A)=0$, то, как показывает (30), $P(x, A)=0$ π-п. в. и, следовательно, $\mu(A)=0$. Поэтому существует единственная с точностью до π-эквивалентности неотрицательная функция $g\in L^1(X, \mathscr{B}, \pi)$ такая, что

$$\mu(A)=\int_A \pi(dy)\,g(y),\quad A\in\mathscr{B},$$

и (39) выполнено с $\tilde{P}f=g$. Полагая в (39) $A=X$, получаем

$$\int \pi(dx)\,\tilde{P}f(x)=\int \pi(dx)\,f(x) \tag{40}$$

для всех $f\in L^1(X,\mathscr{B},\pi)$; (40) есть аналог условия (38).

Степени операторов P и $\tilde{P}$ определяются теми же формулами, что и сами операторы, но с заменой переходной вероятности за один шаг $P(x,A)$ на переходную вероятность за k шагов

$$P^k(x,\ A)=\mathbf{P}_x\{x_k\in A\},\ x\in X,\ A\in\mathscr{B}.$$

Так,

$$P^k f(x)=\int_X P^k(x,\ dy)\ f(y),$$

и

$$\int_A \pi(dx)\,\tilde{P}^k f(x)=\int_X \pi(dx)\,f(x)\,P^k(x,\ A),\ A\in\mathscr{B}.$$

Последнее также эквивалентно тому, что

$$\int \pi(dx)\,g(x)\,\tilde{P}^k f(x)=\int \pi(dx)\,f(x)\int P^k(x,\ dy)\,g(y)$$

для любой ограниченной $\mathscr{B}$-измеримой функции g.

Консервативность каждого из операторов P и $\tilde{P}$ равносильна $\mathbf{P}_\pi$-консервативности оператора сдвига S. Это дает основания называть π-консервативной самое цепь Маркова x_0, x_1, ... с инвариантной мерой π, не уточняя, о каком из операторов: P, $\tilde{P}$ или S идет речь.

В роли σ-алгебры $\mathscr{I}_\mu$ как по отношению к оператору P, так и по отношению к оператору $\tilde{P}$, выступает σ-алгебра $\mathscr{E}_\pi$, состоящая из инвариантных и π-нулевых множеств. То, что совокупность $\mathscr{E}_\pi$ образует σ-алгебру, достаточно очевидным образом вытекает из представления (31).

Таким образом, применительно к рассматриваемой ситуации на основании следствий 3 и 4 можно утверждать следующее.

Теорема 9. Пусть цепь Маркова x_0, x_1, ... имеет σ-конечную инвариантную меру π, и все инвариантные множества тривиальны $(\mathrm{mod}\,\pi)$. Тогда если цепь π-консервативна, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} P^k f(x)}{\sum\limits_{k=0}^{n} P^k g(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \tilde{P}^k f(x)}{\sum\limits_{k=0}^{n} \tilde{P}^k g(x)}=$$

$$=\int f(y)\,\pi(dy)\Big/\int g(y)\,\pi(dy)\quad \pi\text{-п. в.} \tag{41}$$

для всех $\mathscr{B}$-измеримых π-интегрируемых функций f, g с $\int \pi(dy) g(y) \neq 0$; и, если $\pi(X)=1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \widetilde{P}^k f(x) =$$

$$= \int f(y) \pi(dy) \quad \pi\text{-п. в.} \tag{42}$$

для всех $\mathscr{B}$-измеримых π-интегрируемых f.

Замечание 9. Соотношение (42) выполняется и в смысле сходимости в пространстве $L^1(X, \mathscr{B}, \pi)$.

Впрочем, последнее утверждение, как и (42), тривиально следует из (35) и замечания 8.

Полагая в (41) $f=I_A$, $g=I_B$, получаем

Следствие 7. В условиях теоремы 9

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} P^k(x, A)}{\sum_{k=0}^{n} P^k(x, B)} = \frac{\pi(A)}{\pi(B)} \quad \pi\text{-п. в.}$$

для всех $A, B \in \mathscr{B}$ с $\pi(A) < \infty$, $0 < \pi(B) < \infty$; и если $\pi(X)=1$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k(x, A) = \pi(A) \quad \pi\text{-п. в.} \tag{43}$$

для всех $A \in \mathscr{B}$.

Сформулированные эргодические теоремы и их следствия выдвигают на первый план вопросы о существовании и единственности инвариантной меры, о консервативности цепи, о структуре поглощающих множеств и т. п. Соотношение (43) ставит также вопрос о предельном поведении $P^n(x, A)$ при $n\to\infty$. Наиболее полные ответы на все эти (и другие подобные им) вопросы могут быть даны в том случае, когда фазовое пространство X цепи $x_0, x_1, \ldots$ конечно или счетно. Кроме того, счетные цепи образуют удобную начальную базу для изучения более общих фазовых пространств.

§ 3. Счетные цепи Маркова

Счетное фазовое пространство X мы отождествим с множеством натуральных чисел $\{0, 1, \ldots\}$ и переобозначим переходные вероятности $p_{ij}=P(i, \{j\})$ — за один шаг $p_{ij}^{(k)} = P^k(i, \{j\})$ — за k шагов, $i, j=0, 1, \ldots$ Здесь и в дальнейшем мы, не ограничивая общности, считаем, что σ-алгебра $\mathscr{B}$ содержит все одноточечные, а значит, и вообще все подмножества X.

3.1. Классификация состояний. Будем говорить, что состояние j достижимо из состояния i, если $p_{ij}^{(n)} > 0$ для некоторого

$n=n(i, j)$. Если j достижимо из i, а i в свою очередь достижимо из j, то говорят, что состояния i и j *сообщаются*.

Состояние i называется *существенным*, если оно сообщается со всяким достижимым из него состоянием. Обозначим через X_0 множество несущественных состояний. Оставшиеся состояния разделим на непересекающиеся классы сообщающихся состояний $X_1, X_2, \ldots$ В итоге получим разложение

$$X=X_0\cup X_1\cup X_2\cup\ldots; \quad X_i\cap X_j=\varnothing \quad \text{при } i\neq j;$$
$$p_{ij}=0 \quad \text{при } i\in X_k,\ j\notin X_k,\ k\geqslant 1;$$

все состояния из X_k при $k\geqslant 1$ сообщаются между собой, и после попадания цепи в одно из множеств $X_1, X_2, \ldots$ она остается в нем навсегда.

С точки зрения эргодической теории наиболее интересен случай, когда все состояния цепи сообщаются. Тем более, что при отсутствии несущественных состояний ограничение фазового пространства до любого из множеств $X_1, X_2, \ldots$ приводит к цепи с одним классом сообщающихся состояний.

Итак, пусть любые два состояния цепи $x_0, x_1, \ldots$ сообщаются — такая цепь называется *неприводимой*. Состояние i называется *возвратным*, если

$$\mathbf{P}_i\{x_n=i \text{ для некоторого } n\geqslant 1\}=1,$$

и *невозвратным*, если эта вероятность меньше единицы. Обозначим $\tau_j=\min\{n\geqslant 1\colon x_n=j\}$ — *момент первого возвращения* в состояние j. Если $x_n\neq j$ ни при каком $n\geqslant 1$, то $\tau_j=+\infty$ по определению.

Состояние i возвратно тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{P}_i\{\tau_i<\infty\}=1.$$

В неприводимой цепи все состояния либо возвратны, либо невозвратны [2]. Поэтому неприводимая цепь с возвратными состояниями называется *возвратной*.

Обозначим $f_{ij}^{(n)}=\mathbf{P}_i\{\tau_j=n\}$, $n\geqslant 1$. Ясно, что состояние i возвратно тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n\geqslant 1} f_{ii}^{(n)}=1. \tag{44}$$

Вероятности $f_{ij}^{(n)}$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$p_{ij}^{(n)}=\delta_{0n}\delta_{ij}+\sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)}p_{jj}^{(n-k)}. \quad n\geqslant 0. \tag{45}$$

Полагая в (45) $i=j$ и переходя к производящим функциям, находим

$$\sum_{n\geqslant 0} t^n p_{ii}^{(n)}=\frac{1}{1-\sum\limits_{n\geqslant 1} t^n f_{ii}^{(n)}}, \quad 0\leqslant t<1.$$

Следовательно (см. (44)), состояние i возвратно тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n\geqslant 0} p_{ii}^{(n)}=+\infty. \tag{46}$$

Если цепь неприводима, то $\mathbf{P}_i\{\tau_j<\infty\}>0$ для всех $i, j\in X$, и, стало быть, (46) вместе с (45) влечет

$$\sum_{n\geqslant 1} p_{ij}^{(n)}=+\infty, \quad i, j\in X. \tag{47}$$

Таким образом, условие (46) достаточно, а условие (47) необходимо для возвратности неприводимой цепи Маркова.

Производящие функции моментов первого возвращения связаны уравнением

$$\mathbf{M}_i s^{\tau_j}=\frac{\mathbf{M}_i\,(s^{\tau_j},\ \tau_j<\tau_i)}{1-\mathbf{M}_i\,(s^{\tau_i},\ \tau_j>\tau_i)}, \quad i\neq j;\ 0\leqslant s<1. \tag{48}$$

Кроме того, цепь x_n неприводима тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{P}_i\{\tau_j<\tau_i\}>0 \qquad \text{для всех } i\neq j.$$

Отсюда и из (48) вытекает, что для возвратной цепи

$$\mathbf{P}_i\{\tau_j<\infty\}=1 \qquad \text{для всех } i, j\in X. \tag{49}$$

Возвратное состояние $i\in X$ называется *положительным*, если

$$\mathbf{M}_i\tau_i<\infty,$$

и *нулевым*, если

$$\mathbf{M}_i\tau_i=\infty.$$

В неприводимой возвратной цепи либо все состояния положительные, либо все состояния нулевые. В соответствии с этим и сама цепь именуется либо *положительно возвратной*, либо *возвратной нулевой* (или нуль-возвратной).

Уравнение (48) показывает, что

$$\mathbf{M}_i\tau_j=\mathbf{M}_i(\tau_i\wedge\tau_j)/\mathbf{P}_i\{\tau_j\leqslant\tau_i\} \qquad \text{для всех } i, j\in X.$$

Отсюда

$$\mathbf{M}_i\tau_j<\infty \qquad \text{для всех } i, j\in X$$

в случае положительно возвратной цепи, и

$$\mathbf{M}_i(\tau_i\wedge\tau_j)=\infty \qquad \text{для всех } i, j\in X$$

в случае нуль-возвратной цепи.

Обозначим

$$\Delta_i=\text{Н. О. Д. }\{n: p_{ii}^{(n)}>0\}.$$

Состояние i называется непериодическим, если $\Delta_i=1$; если же $\Delta_i>1$, то Δ_i называется *периодом состояния* i. В неприводимой цепи либо все состояния непериодичны, либо все состояния периодичны с одним и тем же периодом Δ. В этом последнем случае цепь x_n называется *периодической*, а число Δ — *периодом цепи* x_n.

Если цепь x_n, $n=0, 1, \ldots$ периодична с периодом Δ, то все множество состояний X разбивается на Δ непересекающихся непустых классов $C_0, C_1, \ldots, C_{\Delta-1}$ таких, что

$$p_{ij}=1 \quad \text{при} \quad i\in C_k, \quad j\in C_{k+1}, \quad k=1, \ldots, \Delta-1; \qquad (50)$$

$$p_{ij}=1 \quad \text{при} \quad i\in C_{\Delta-1}, \quad j\in C_0.$$

Каждое из множеств *циклического разложения* $C_0, C_1, \ldots$ $\ldots, C_{\Delta-1}$ является поглощающим для вложенной цепи $x_0, x_\Delta, \ldots, x_{n\Delta}, \ldots$ Ограничение множества состояний цепи x_n, $n=0, 1, \ldots$ до любого из множеств C_k, $k=0, 1, \ldots, \Delta-1$ дает в силу определения (50) неприводимую непериодическую цепь в силу (50).

3.2. Возвратные цепи. Инвариантная σ-конечная мера цепи Маркова $x_0, x_1, \ldots$ со счетным множеством состояний $X=\{0, 1, \ldots\}$ — суть набор неотрицательных чисел π_i, $i=0, 1, \ldots$, удовлетворяющих уравнению

$$\pi_j=\sum_{i\in X}\pi_i p_{ij}, \quad j\in X.$$

σ-конечность в данной ситуации просто означает, что $\pi_j<\infty$ для всех $j\in X$. Меру π будем называть положительной, если $\pi_j>0$ для всех $j\in X$.

Замечание 9. Для положительной меры π утверждения «π-почти всюду» и «всюду» равнозначны.

Теорема 10. Неприводимая возвратная цепь имеет единственную с точностью до положительного множителя инвариантную σ-конечную положительную меру.

Доказательство. Обозначим

$$m_{ij}=\sum_{n\geqslant 0}\mathbf{P}_i\{x_n=j,\ n<\tau_i\}, \qquad (51)$$

и покажем, что

$$m_{ij}<\infty \qquad \text{для всех } i, j\in X.$$

Зафиксируем $i\in X$ и введем в рассмотрение неубывающую последовательность функций $\varphi_r(j)=\mathbf{P}_j\{\tau_i\leqslant r\}$. В силу (49) $\varphi_r(j)\uparrow$ $\uparrow 1$ при $r\to\infty$ для всех $j\in X$. Поэтому для доказательства конечности правой части (51) достаточно убедиться в сходимости ряда

$$\sum_{j\in X} m_{ij}\varphi_r(j), \qquad (52)$$

для всех $r\geqslant 1$. По определению функций φ_r ряд (52) равен

$$\sum_{n\geqslant 0}\mathbf{M}_i[\tau_i>n,\ \mathbf{P}_{x_n}\{\tau_i\leqslant r\}]. \qquad (53)$$

По марковскому свойству слагаемое с номером n в (53) совпадает с

$$\mathbf{P}_i\{\tau_i>n,\ \tau_i S^n\leqslant r\}. \tag{54}$$

Но $\tau_i S^n=\tau_i-n$ при $\tau_i>n$. Значит, вероятность (54) равна $\mathbf{P}_i\{n<\tau_i\leqslant n+r\}$.

Сумма же этих вероятностей по всем $n=0, 1, \ldots$ не может быть больше r. Конечность m_{ij} доказана.

Далее, покажем, что при каждом $i\in X$ набор $\{m_{ij},\ j\in X\}$ определяет инвариантную меру цепи $x_0, x_1, \ldots$, то есть что

$$\sum_{j\in X} m_{ij}p_{jk}=m_{ik}, \tag{55}$$

для всех $i, k\in X$.

Имеем

$$\sum_{j\in X} m_{ij}p_{jk}=\sum_{n\geqslant 0}\mathbf{M}_i\,[\tau_i>n,\ \mathbf{P}_{x_n}\{x_1=k\}].$$

По марковскому свойству слагаемое с номером n в последней сумме равно

$$\mathbf{P}_i\{\tau_i>n,\ x_1S^n=k\}=\mathbf{P}_i\{\tau_i>n,\ x_{n+1}=k\}=$$
$$=\mathbf{P}_i\{\tau_i=n+1,\ x_{n+1}=k\}+\mathbf{P}_i\{\tau_i>n+1,\ x_{n+1}=k\}=$$
$$=\mathbf{P}_i\{\tau_i=n+1\}\,\delta_{ik}+\mathbf{P}_i\{x_{n+1}=k,\ \tau_i>n+1\}.$$

Сумма полученного выражения по всем $n=0, 1, \ldots$ равна

$$\delta_{ik}+\sum_{n\geqslant 1}\mathbf{P}_i\{x_n=k,\ n<\tau_i\},$$

что, очевидно, совпадает с правой частью (55) при $j=k$.

Таким образом, при каждом $i\in X$ мера $m_{i\cdot}$ является σ-конечной инвариантной мерой цепи $x_0, x_1, \ldots$, и, кроме того, $m_{ii}=1$.

Из возвратности цепи тривиально следует, что $m_{ij}>0$ для всех $i, j\in X$. Кроме того, неприводимая цепь не имеет нетривиальных поглощающих множеств, а возвратность цепи обеспечивает согласно (47) ее консервативность. Отсюда и из теоремы 9 вытекает, что любая другая σ-конечная инвариантная мера π пропорциональна мере $m_{i\cdot}$, что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е 10. Попутно мы установили, что

$$m_{ij}=\frac{\pi_j}{\pi_i},\quad i, j\in X, \tag{56}$$

для любой ненулевой инвариантной σ-конечной меры π.

Из равенства (56), а также из теорем 9, 10 немедленно вытекают следующие утверждения. (Формула (57), см. ниже, получается из (56), (51) суммированием по всем j).

Т е о р е м а 11. Инвариантная мера неприводимой возвратной цепи конечна тогда и только тогда, когда цепь положительно возвратна; единственное инвариантное распределение вероятностей π_j, $j\in X$, положительно возвратной цепи определяется по формуле

$$\pi_j = \frac{1}{\mathbf{M}_j \tau_j}, \quad j \in X. \tag{57}$$

Теорема 12. Пусть неприводимая цепь x_n, $n=0, 1, \ldots$, положительно возвратна с инвариантным распределением вероятностей π_j, $j\in X$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \sum_{j\in X} \pi_j f(j) \quad \mathbf{P}_i\text{-п. н.},$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k f(i) = \sum_{j\in X} \pi_j f(j),$$

для всех $i\in X$ и всех π-интегрируемых функций f.

Следствие 8. В условиях теоремы 12

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\nu_n(j)}{n} = \pi_j \quad \mathbf{P}_i\text{-п. н.},$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p_{ij}^{(k)} = \pi_j, \tag{58}$$

для всех i, $j\in X$.

Теорема 13. Пусть цепь $x_0, x_1, \ldots$ неприводима и возвратна с инвариантной мерой π. Тогда для всех $i\in X$ и всех π-интегрируемых функций f и g с $\sum\limits_{j\in X} \pi_j g(j) \neq 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} f(x_k)}{\sum\limits_{k=0}^{n} g(x_k)} = \frac{\sum\limits_{j\in X} \pi_j f(j)}{\sum\limits_{j\in X} \pi_j g(j)} \quad \mathbf{P}_i\text{-п.-н.} \tag{59}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} P^k f(i)}{\sum\limits_{k=0}^{n} P^k g(i)} = \frac{\sum\limits_{j\in X} \pi_j f(j)}{\sum\limits_{j\in X} \pi_j g(j)}, \tag{60}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \widetilde{P}^k f(i)}{\sum\limits_{k=0}^{n} \widetilde{P}^k g(i)} = \frac{\sum\limits_{j\in X} \pi_j f(j)}{\sum\limits_{j\in X} \pi_j g(j)}. \tag{61}$$

В рассматриваемой ситуации операторы $\widetilde{P}^k$ из (41), (42) действуют по формуле

$$\widetilde{P}^k f(i)=\sum_{j\in X} f(j)\pi_j p_{ji}^{(k)}/\pi_i, \quad i\in X.$$

Отсюда и из (60), (61) при $f(j)=\delta_{lj}$, $g(j)=\delta_{kj}$ получаем для всех $i, j, k, l\in X$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{t=0}^{n} p_{il}^{(t)}}{\sum\limits_{t=0}^{n} p_{ik}^{(t)}}=\frac{\pi_l}{\pi_k}, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{t=0}^{n} p_{lj}^{(t)}}{\sum\limits_{t=0}^{n} p_{kj}^{(t)}}=1.$$

Собирая вместе два последних утверждения и формулу (59), получаем

Следствие 9. В условиях теоремы 13

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\nu_n(j)}{\nu_n(k)}=\frac{\pi_j}{\pi_k} \quad \mathbf{P}_i\text{-п. н.},$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{t=0}^{n} p_{ij}^{(t)}}{\sum\limits_{t=0}^{n} p_{lk}^{(t)}}=\frac{\pi_j}{\pi_k},$$

для всех $i, j, k, l\in X$.

3.3. Пределы переходных вероятностей. В свете соотношения (58) возникает вопрос о предельном поведении переходных вероятностей $p_{ij}^{(n)}$ при $n\to\infty$. В частности, когда

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}=\pi_j \text{ для всех } i, j\in X.$$

Достаточно полный ответ на него может быть дан на основе уравнения (45) и следующей, принадлежащей Феллеру, Эрдешу и Полларду [13], теоремы, известной также под названием теоремы восстановления и устанавливающей существование предела решения так называемого уравнения восстановления

$$z_n=a_n+\sum_{k=1}^{n} q_k z_{n-k}, \quad n=0, 1, \ldots, \tag{62}$$

где $q_k\geqslant 0$, $\sum\limits_{k\geqslant 1} q_k=1$.

Теорема 14. Если

$$\mu=\sum_{k\geqslant 1} kq_k<\infty, \tag{63}$$

$$\sum_{n\geqslant 0} |a_n| < \infty, \tag{64}$$

и

$$\text{Н. О. Д. } \{k : q_k > 0\} = 1, \tag{65}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \frac{1}{\mu} \sum_{n\geqslant 0} a_n.$$

Полагая в (45) $i = j$, видим, что $p_{jj}^{(n)}$ удовлетворяет уравнению типа (62) с $a_n = \delta_{0n}$, $q_k = f_{jj}^{(k)}$. Условие (63) в этой ситуации означает не что иное как положительную возвратность цепи, (64) тривиально выполнено. Значит, если цепь положительно возвратна, и (ср. с (65))

$$\text{Н. О. Д. } \{k : f_{jj}^{(k)} > 0\} = 1, \tag{66}$$

то

$$\lim_{n\to\infty} p_{jj}^{(n)} = \frac{1}{\mathbf{M}_j \tau_j}. \tag{67}$$

Вместе с (45) равенство (67) влечет

$$\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mathbf{M}_j \tau_j} \tag{68}$$

для всех i, $j \in X$. Покажем теперь, что условие (66) равносильно непериодичности цепи. С этой целью зафиксируем $j \in X$ и обозначим

$$M = \{n \geqslant 1 : p_{jj}^{(n)} > 0\},$$
$$N = \{n \geqslant 1 : f_{jj}^{(n)} > 0\}.$$

Мы получим требуемое, если убедимся в том, что всякий элемент множества M есть сумма конечного числа элементов множества N. Имеем

$$p_{jj}^{(n)} = \sum_{k\geqslant 1} \mathbf{P}_j \{\tau_j^{(k)} = n\}, \tag{69}$$

$\tau_j^{(k)}$ — момент k-ого по порядку посещения цепью состояния j, то есть $\tau_j^{(1)} = \tau_j$, и $\tau_j^{(k+1)} = \min\{n > \tau_j^{(k)} : x_n = j\}$. Величины $\tau_j^{(1)}$, $\tau_j^{(2)} - \tau_j^{(1)}$, $\ldots$, $\tau_j^{(k+1)} - \tau_j^{(k)}$, $\ldots$ независимы и одинаково (при условии $x_0 = j$) распределены. Следовательно,

$$\mathbf{P}_j \{\tau_j^{(k)} = n\} = \sum_{n_1 + \ldots + n_k = n} f_{jj}^{(n_1)} \ldots f_{jj}^{(n_k)}.$$

Правая часть здесь положительна тогда и только тогда, когда n есть сумма k элементов множества N. С другой стороны, (69) показывает, что $n \in M$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{P}_j\{\tau_j^{(k)} = n\} > 0$

для некоторого $k \geqslant 1$. Таким образом, конечные суммы элементов множества N и только они составляют множество M. В частности, наибольшие общие делители множеств M и N совпадают. Этим доказано даже несколько больше, чем требовалось. Именно, период Δ неприводимой возвратной цепи при любом $j \in X$ равен левой части (66), то есть

$$\Delta = \text{Н. О. D.}\, \{n : f_{jj}^{(n)} > 0\}. \tag{70}$$

Собирая вместе соотношения (68), (70), получаем следующий результат.

Теорема 15. Если цепь неприводима, положительно возвратна и непериодична, то

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n)} = \frac{1}{\mathbf{M}_j \tau_j}$$

для всех $i, j \in X$.

Пусть теперь положительно возвратная неприводимая цепь $x_0, x_1, \ldots$ периодична с периодом Δ и циклическим разложением $C_0, C_1, \ldots, C_{\Delta-1}, \ldots$ Тогда цепь $x_0, x_\Delta, \ldots, x_{n\Delta}, \ldots$ в фазовом пространстве C_k также неприводима и положительно возвратна, но уже непериодична. Следовательно, по теореме 15

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n\Delta)} = \frac{\Delta}{\mathbf{M}_j \tau_j}$$

при $i, j \in C_k$. Отсюда и из (50) вытекает окончательный результат.

Теорема 16. Пусть неприводимая положительно возвратная цепь $x_0, x_1, \ldots$ периодична с периодом Δ и циклическим разложением $C_0, C_1, \ldots, C_{\Delta-1}$. Тогда

$$\lim_{n \to \infty} p_{ij}^{(n\Delta + r)} = \frac{\Delta}{\mathbf{M}_j \tau_j}$$

при $i \in C_k$, $j \in C_l$, $r \equiv l - k \pmod{\Delta}$.

§ 4. Харрисовы цепи

Соотношение (36) в точности утверждает, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\nu_n(A)}{\nu_n(B)} = \frac{\pi(A)}{\pi(B)} \quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.} \tag{71}$$

для π-почти всех $x \in X$. Весь этот параграф посвящен цепям, для которых (71) выполнено *при всех $x \in X$*. Это равносильно тому, что

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\nu_n(A)}{\nu_n(B)} = \frac{\pi(A)}{\pi(B)}$$

с вероятностью единица при любом начальном распределении цепи $x_0, x_1, \ldots$ Таким образом, настоящий параграф имеет дело с цепями, эргодические свойства которых не зависят от начального распределения.

4.1. Возвратность по Харрису. Если (71) имеет место для всех $x \in X$, то необходимо

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(A) = \infty \quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.}$$

для всех $x \in X$, как только $\pi(A) > 0$.

Это свойство цепи $x_0, x_1, \ldots$ называется *π-возвратностью по Харрису*. Здесь в роли π может выступать любая (не обязательно инвариантная) σ-конечная ненулевая мера m на фазовом пространстве $(X, \mathscr{B})$.

Таким образом, цепь m-возвратна (по Харрису), если при $m(A) > 0$

$$\mathbf{P}_x\{x_n \in A \text{ для бесконечного числа значений } n\} = 1$$

для всех $x \in X$.

Цепь Маркова называется возвратной, если она m-возвратна по Харрису при подходящем выборе нетривиальной σ-конечной меры m.

На языке моментов первого достижения m-возвратность по Харрису означает, что все m-положительные множества достижимы с вероятностью единица из любого начального состояния.

Свойство меры m доставлять возвратность цепи Маркова определяется лишь запасом m-положительных множеств. Поэтому, если цепь m-возвратна, и мера m' абсолютно непрерывна относительно m, то цепь будет и m'-возвратной.

Следует считать замечательным и нетривиальным то обстоятельство, что при одном лишь дополнительном условии счетной порожденности σ-алгебры $\mathscr{B}$ на фазовом пространстве $(X, \mathscr{B})$ возвратность по Харрису обеспечивает существование инвариантной меры π и справедливость (71) для всех $x \in E$.

Точные формулировки составляют содержание двух следующих (принадлежащих Харрису) теорем.

Теорема 17. Возвратная цепь со значениями в фазовом пространстве со счетно порожденной σ-алгеброй имеет единственную с точностью до положительного множителя нетривиальную σ-конечную инвариантную меру π.

Доказательство опирается на следующую лемму, представляющую и самостоятельный интерес.

Пусть m — нетривиальная σ-конечная мера на $(X, \mathscr{B})$. Цепь $x_0, x_1, \ldots$ называется *m-неприводимой*, если

$$\sum_{n\geqslant 0} P^n(x, B) > 0$$

для всех $x \in X$, как только $m(B) > 0$.

Другими словами, цепь m-неприводима, если всякое m-положительное множество достижимо с положительной вероятностью из любого начального состояния.

Для $0<\alpha<1$ обозначим

$$Q_\alpha(x, B)=(1-\alpha)\sum_{n\geqslant 0}\alpha^n P^{n+1}(x, B).$$

Лемма 1. Пусть цепь m-неприводима и σ-алгебра $\mathscr{B}$ счетно порождена. Тогда для каждого $\alpha\in(0, 1)$ найдутся $\mathscr{B}$-измеримая положительная функция q_α и эквивалентное мере m распределение вероятностей ρ_α, такие, что

$$Q_\alpha(x, B)\geqslant q_\alpha(x)\rho_\alpha(B) \tag{72}$$

для всех $x\in X$, $B\in\mathscr{B}$.

Доказательство. Зафиксируем $\alpha\in(0, 1)$ и положим $\beta=1-\sqrt{1-\alpha}$. Меру m, не ограничивая общности, будем считать вероятностной. По теореме 1 счетная порожденность $\mathscr{B}$ гарантирует существование $\mathscr{B}\times\mathscr{B}$-измеримой функции $p(x, y)>0$ такой, что

$$Q_\beta(x, B)\geqslant\int_B p(x, y)m(dy)$$

для всех $x\in X$, $B\in\mathscr{B}$. По теореме Фубини функции

$$\varphi_n(x)=m\{y\in X: p(x, y)\geqslant\frac{1}{n}\}$$

$\mathscr{B}$-измеримы, и $\varphi_n(x)\uparrow 1$ при $n\to\infty$ для всех $x\in X$. Следовательно, существует минимальное натуральное $n(x)$, для которого $\varphi_{n(x)}(x)\geqslant 3/4$. Функция $n(x)$, очевидно, $\mathscr{B}$-измерима, и

$$m\left\{y\in X: p(x, y)\geqslant\frac{1}{n(x)}\right\}\geqslant\frac{3}{4}.$$

Аналогично существует $\mathscr{B}$-измеримая положительная целочисленная функция $k(y)$, для которой

$$m\left\{x\in X: p(x, y)\geqslant\frac{1}{k(y)}\right\}\geqslant\frac{3}{4}.$$

Отсюда

$$m\left\{y\in X: p(x, y)\geqslant\frac{1}{n(x)},\ p(y, z)\geqslant\frac{1}{k(z)}\right\}\geqslant\frac{1}{2}$$

и

$$\int_X p(x, y)p(y, z)m(dy)\geqslant\frac{1}{2n(x)k(z)}$$

для всех $x, z\in X$.

Далее, тривиально проверяется, что

$$\sum_{n\geqslant 0}(1-\beta)\beta^n Q_\beta^{n+1}(x, B)=Q_\alpha(x, B).$$

Следовательно,

$$Q_\alpha(x, B)\geqslant(1-\beta)\beta Q_\alpha^2(x, B)\geqslant(1-\beta)\beta\int_X p(x, y)Q_\beta(y, B)m(dy)\geqslant$$

$$\geqslant (1-\beta)\beta\int_B m(dz)\int_X p(x, y)\,p(y, z)\,m(dy) \geqslant \frac{(1-\beta)\beta}{2n(x)}\int_B \frac{m(dz)}{k(z)}.$$

Значит, (72) имеет место с

$$q_\alpha(x) = \frac{(1-\beta)\beta c}{2n(x)}, \quad \rho_\alpha(B) = \frac{1}{c}\int_B \frac{m(dz)}{k(z)},$$

где $c = \int_X \frac{m(dz)}{k(z)}$. Лемма доказана. Далее, предполагая цепь m-возвратной, положим в (72) $\alpha = 1/2$ и переобозначим для краткости

$$Q(x, B) = Q_{\frac{1}{2}}(x, B), \quad q(x) = q_{1/2}(x),$$

$$\rho(B) = \rho_{1/2}(B), \; R(x, B) = Q(x, B) - q(x)\rho(B).$$

По лемме 1 $R(x, B) \geqslant 0$ для всех $x \in X$, $B \in \mathscr{B}$. В основе доказательства теоремы лежит тождество

$$\sum_{n\geqslant 0}\iint \rho(dx)\,R^n(x, dy)\,q(y) = 1. \tag{73}$$

Для доказательства запишем два уравнения, по индукции вытекающие из очевидного

$$Q(x, B) = R(x, B) + q(x)\rho(B).$$

Первое (по поводу обозначений см. п. 1.1 этой главы)

$$Q^n(x, B) = R^n(x, B) + \sum_{k=1}^{n} R^{k-1}q(x)\,\rho Q^{n-k}(B); \tag{74}$$

и второе

$$Q^n(x, B) = R^n(x, B) + \sum_{k=1}^{n} Q^{n-k}q(x)\,\rho R^{k-1}(B). \tag{75}$$

Здесь $n \geqslant 1$ и, как обычно, $R^0(x, B) = Q^0(x, B) = I_B(x)$. Каждое из уравнений (74), (75) влечет при $0 < t < 1$ следующее

$$1 + \sum_{n\geqslant 0} t^{n+1}\int \rho(dx)\,Q^n q(x) = \left\{1 - \sum_{n\geqslant 0} t^{n+1}\int \rho(dx)\,R^n q(x)\right\}^{-1}. \tag{76}$$

Левая часть здесь не меньше, чем

$$\frac{t^2}{2}\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1+t}{2}\right)^n \iint \rho(dx)\,P^{n+1}q(x).$$

В силу возвратности это выражение стремится к ∞ при $t \uparrow 1$. Поэтому левая, а значит, и правая часть в (76) стремятся к ∞ при $t \uparrow 1$, что и доказывает (73).

Тождество (73) может быть переписано в виде

$$\int_X \pi(dy)\,q(y) = 1, \tag{77}$$

где

$$\pi(B)=\sum_{n\geqslant 0}\int_X \rho(dx)R^n(x, B). \tag{78}$$

Так как $q(x)>0$, то (77) влечет σ-конечность меры π. Ее инвариантность следует из (73). Действительно, (30) эквивалентно уравнению

$$\pi(dx)Q(x, B)=\pi(B). \tag{79}$$

Его левая часть, согласно (78), равна

$$\sum_{n\geqslant 0}\int\rho(dx)\int R^n(x, dy)R(y, B)+\sum_{n\geqslant 0}\int\rho(dx)R^n q(x)\rho(B),$$

что в силу (73) совпадает с

$$\rho(B)+\sum_{n\geqslant 1}\int\rho(dx)\int R^n(x, B).$$

Но это есть иначе записанная правая часть (79).

Единственность инвариантной меры (с точностью до положительного множителя) вытекает из (75). В самом деле, пусть мера π' инвариантна и σ-конечна. Отбрасывая первое слагаемое в правой части (75), получаем неравенство

$$\pi'(B)\geqslant\sum_{k=1}^{n}\int\pi'(dx)q(x)\int\rho(dx)R^{k-1}(x, B).$$

Так как n здесь произвольно, то

$$\pi'(B)\geqslant\pi(B)\int\pi'(dx)q(x)\quad\text{для всех } B\in\mathscr{B}.$$

Вместе с (77) это возможно только при $\pi'=\mathrm{const}\,\pi$. Теорема доказана.

Замечание 11. Первое слагаемое в правой части (78) равно $\rho(B)$. Значит, $\pi(B)\geqslant\rho(B)$ для всех $B\in\mathscr{B}$. В свою очередь $\rho\gg m$. Таким образом, любая доставляющая возвратность мера m абсолютно непрерывна относительно инвариантной меры π.

Замечание 12. Если множество X конечно или счетно, то данное в предыдущем параграфе определение возвратности совпадает, очевидно, с определением m-возвратности по Харрису относительно любой положительной меры m. Так что теорема 13 является частным случаем только что доказанной теоремы.

В дальнейшем удовлетворяющие условиям теоремы 17 цепи будем для краткости называть *харрисовыми*. Таким образом, цепь *харрисова*, если она возвратна, и сигма-алгебра на ее фазовом пространстве счетно порождена.

Теорема 18. Пусть цепь $x_0, x_1, \ldots$ — харрисова с инвариантной мерой π. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\xi S^k}{\sum\limits_{k=0}^{n}\eta S^k}=\frac{\mathbf{M}_\pi\xi}{\mathbf{M}_\pi\eta}\quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.} \tag{80}$$

для всех $x\in X$ и всех $\mathscr{X}$-измеримых $\mathbf{P}_\pi$-интегрируемых величин ξ, η с $\mathbf{M}_\pi\eta\neq 0$.

Доказательство достаточно провести для $\eta=g(x_0)$, где $\mathscr{B}$-измеримая функция g всюду положительна и π-интегрируема. В силу возвратности имеем

$$\sum_{n\geqslant 0} g(x_n)=\infty\quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.} \tag{81}$$

для всех $x\in X$. В частности, цепь $x_0, x_1, \ldots$ консервативна.

Возвратная цепь не имеет также поглощающих множеств положительной инвариантной меры. Для доказательства этого нам понадобится следующая

Лемма 2. В условиях теоремы 18

$$\sum_{n\geqslant 0} P^n(x, B)=\infty \tag{82}$$

для всех $x\in X$ и $B\in\mathscr{B}$ с $\pi(B)>0$.

Доказательство. Так как

$$\sum_{n\geqslant 1} t^{n-1}Q^n(x, B)=\frac{1}{2}\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{t+1}{2}\right)^{n-1}P^n(x, B)$$

при $0\leqslant t<1$, то достаточно убедиться в том, что

$$\sum_{n\geqslant 0} Q^n(x, B)=\infty \tag{83}$$

для всех $x\in X$ и $B\in\mathscr{B}$ с $\pi(B)>0$. Интегрируя тождество (74) по мере ρ, находим

$$\sum_{n\geqslant 0} t^n\int\rho(dx)\,Q^n(x, B)=\frac{\sum\limits_{n\geqslant 0} t^n\int\rho(dx)\,R^n(x, B)}{1-\sum\limits_{k\geqslant 0} t^{k+1}\int\rho(dx)\,R^k q(x)}.$$

Согласно (78), числитель последней дроби при $t\uparrow 1$ стремится к $\pi(B)$, а знаменатель, согласно (73), стремится к нулю. Значит, если $\pi(B)>0$, то

$$\sum_{n\geqslant 0}\int\rho(dx)\,Q^n(x, B)=\infty.$$

В то же время тождество (74) влечет неравенство

$$Q^n(x, B)\geqslant q(x)\rho Q^{n-1}(B),$$

которое в силу положительности $q(x)$ обеспечивает (83), а вместе с ним и утверждение леммы.

Для поглощающего множества D имеем

$$P^n(x, X\setminus D)=0 \text{ при всех } x\in D,\ n\geqslant 0.$$

По лемме 2 это возможно только при $\pi(X\setminus D)=0$.

Таким образом, цепь $x_0, x_1, \ldots$ консервативна и все ее поглощающие множества тривиальны $(\mathrm{mod}\,\pi)$. По теореме 8 (точнее, по следствию 5) соотношение (80) выполняется для π-почти всех $x\in X$. Обозначим через Γ событие, состоящее в том, что имеют место (80) и (81). Тогда $S^{-1}\Gamma=\Gamma$ и $\mathbf{P}_x(\Gamma)=1$ для π-почти всех $x\in X$. Осталось доказать, что $\mathbf{P}_x(\Gamma)=1$ всюду на X. Обозначим $h(x)=\mathbf{P}_x(\Gamma)$.

S-инвариантность события Γ влечет *инвариантность функции* h, то есть

$$\int P(x, dy)\,h(y)=h(x), \quad x\in X. \tag{84}$$

Завершает доказательство теоремы

Лемма 3. Возвратная цепь не имеет ограниченных инвариантных функций, отличных от константы.

Доказательство. Пусть $\mathscr{B}$-измеримая функция h ограниченна и инвариантна. Тогда при любом начальном распределении цепи $x_0, x_1, \ldots$ последовательность $h(x_n)$, $n=0, 1, \ldots$, образует ограниченный мартингал. Значит, предел $\eta=\lim\limits_{n\to\infty} h(x_n)$ существует $\mathbf{P}_x$-п. н., и $\mathbf{M}_x\eta=\lim\limits_{n\to\infty}\mathbf{M}_x h(x_n)=h(x)$ для всех $x\in X$ [2].

Далее, m-возвратная цепь $x_0, x_1, \ldots$ посещает всякое m-положительное множество D бесконечно много раз $\mathbf{P}_x$-п. н. Пусть $\tau_D^{(k)}$ есть момент k-го возвращения цепи $x_0, x_1, \ldots$ в множество $D\in\mathscr{B}$, то есть $\tau_D^{(1)}=\tau_D=\inf\{n\geqslant 1 : x_n\in D\}$ — момент первого возвращения в D, и далее по индукции

$$\tau_D^{(k)}=\inf\{n>\tau_D^{(k-1)}:\ x_n\in D\}, \quad k>1.$$

Тогда $\tau_D^{(k)}<\infty$ $\mathbf{P}_x$-п. н. для всех $x\in D$, $k\geqslant 1$, и, кроме того

$$\tau_D^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}\infty \quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.},$$

$$x_{\tau_D^{(k)}}\in D \quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.}$$

для любого множества $D\in\mathscr{B}$ с $m(D)>0$.

Полагая $D=\{x\in X:\ a\leqslant h(x)\leqslant b\}$, получаем

$$a\leqslant h\left(x_{\tau_D^{(k)}}\right)\leqslant b \quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.}$$

Отсюда $a\leqslant\eta\leqslant b$ $\mathbf{P}_x$-п. н., и, следовательно, $a\leqslant h(x)\leqslant b$ для всех $x\in X$, как только $m\{x\in X : a\leqslant h(x)\leqslant b\}>0$. Последнее же возможно только при $h=\mathrm{const}$, что и требовалось доказать.

Следствие 10. В условиях теоремы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=0}^{n} f(x_k)}{\sum_{k=0}^{n} g(x_k)}=\frac{\int f(y)\pi(dy)}{\int g(y)\pi(dy)} \quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.}$$

для всех $x\in X$ и всех $\mathscr{B}$-измеримых π-интегрируемых функций f и g с $\int g d\pi\neq 0$.

Следствие 11. Харрисова цепь с инвариантной мерой π π-возвратна по Харрису.

Вместе с замечанием 11 это, в частности, означает, что из всех доставляющих возвратность мер наибольшим запасом «положительных» множеств располагает инвариантная мера.

Замечание 13. Следствие 11 позволяет в качестве меры m из леммы 1 взять инвариантную меру π. Значит, распределение вероятностей ρ_α из неравенства (72) можно считать эквивалентным инвариантной мере π.

Следствие 12. Пусть в условиях теоремы 18 $\pi(X)=1$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\nu_n(B)/n=\pi(B) \quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.}, \tag{85}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P^k(x, B)=\pi(B) \tag{86}$$

для всех $x\in X$, $B\in\mathscr{B}$.

Замечание 14. Несложный анализ доказательства теоремы показывает, что условие возвратности цепи можно заменить на совокупность из трех условий: существование инвариантной нетривиальной σ-конечной меры; консервативность цепи; и отсутствие нетривиальных ограниченных инвариантных функций. Немногим более внимательный анализ позволяет заключить, что существование и единственность нетривиальной σ-конечной инвариантной меры π вытекает из неравенства (72) и из расходимости ряда

$$\sum_{n\geqslant 0}\int \rho_\alpha(dx)\int P^n(x, dy)\,q_\alpha(y).$$

Более того, в этих условиях тождество (73) влечет (82), что гарантирует $\mathbf{P}_\pi$-консервативность цепи.

Пусть теперь инвариантная мера π харрисовой цепи $x_0, x_1, \ldots$ конечна, а именно: $\pi(X)=1$. Тогда в силу (86)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P^k f(x)=\int\pi(dy)\,f(y) \tag{87}$$

для всех $x\in X$ и всех ограниченных $\mathscr{B}$-измеримых функций f. Если f ограниченна и инвариантна, то выражение под знаком предела в (87) равно $f(x)$ и, следовательно, $f=\text{const}$. С другой стороны, если предел в левой части (86) существует для всех $x\in X$ и $B\in\mathscr{B}$, то его значение определяет единственное инвариантное распределение вероятностей π. Согласно замечанию 14, это вместе со счетной порожденностью σ-алгебры $\mathscr{B}$ влечет π-возвратность цепи. Другими словами, при условии счетной порожденности $\mathscr{B}$ соотношения (86) и (85) эквивалентны.

Точное утверждение содержит

Теорема 19. Если σ-алгебра $\mathscr{B}$ счетно порождена, то предел

$$\lim_{n\to\infty} \nu_n(B)/n \tag{88}$$

существует почти наверное и неслучаен для всех $B\in\mathscr{B}$ при любом начальном распределении цепи тогда и только тогда, когда для всех $x\in X$, $A\in\mathscr{B}$ существует не зависящий от $x\in X$ предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}P^k(x,\ B); \tag{89}$$

при выполнении одного из двух этих условий значения пределов (88) и (89) совпадают и равны инвариантной вероятности множества $B\in\mathscr{B}$.

4.2. „Искусственная“ регенерация. Возвратная цепь x_0, $x_1, \ldots$ в конечном или счетном фазовом пространстве X с неслучайным началом $x_0=i$ является регенерирующей последовательностью с «естественным» *моментом регенерации* $\tau_i=\inf\{n\geqslant 1\colon\ x_n=i\}$. Это по определению означает, что обрывающаяся цепь $x_0=i,\ x_1,\ \ldots,\ x_{\tau_i-1}$ не зависит от сдвинутой последовательности $x_{\tau_i}=i,\ x_{\tau_i+1},\ \ldots,\ x_{\tau_i+n},\ \ldots$, причем распределение последней совпадает с распределением исходной цепи $x_0=i,\ x_1,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$

«Естественность» момента регенерации τ_i состоит в том, **что τ_i как** случайная величина $\mathscr{X}$-измерима и, более **того, является** моментом остановки относительно «естественного» потока σ-алгебр $\mathscr{X}_k$, $k=0, 1, \ldots$, порождаемого цепью $x_0, x_1, \ldots$

Если множество X несчетно, но инвариантная мера π Имеет атом (скажем, $\pi\{o\}>0$), то харрисова цепь $x_0=o$, $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ также является регенерирующей последовательностью с τ_o в качестве момента регенерации.

В общем случае харрисова цепь в несчетном пространстве не обязана быть регенерирующей последовательностью. Однако она всегда содержит регенерирующую подпоследовательность. Но чтобы построить соответствующий момент регенерации, одной лишь траектории $x_0, x_1, \ldots$ недостаточно. Приходится привлекать дополнительные, не зависящие от цепи $x_0, x_1, \ldots$ случайные величины. Именно в этом смысле регенерация является «искусственной». Для формулировки точного результата нам понадобится одно определение. Поток σ-алгебр $\mathcal{G}_k$, $k=0, 1, \ldots$, будем называть *допустимым* для цепи $x_0, x_1, \ldots$, если $\mathcal{X}_k \subset \mathcal{G}_k \subset \mathcal{F}$, и

$$\mathbf{P}_x\left(S_k^{-1}\Gamma \mid \mathcal{G}_k\right) = \mathbf{P}_{x_k}(\Gamma) \quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.}$$

для всех $k=0, 1, \ldots$, $x \in X$, $\Gamma \in \mathcal{X}$. Простейший пример допустимого потока, не совпадающего с $\mathcal{X}_k$, $k=0, 1, \ldots$, дают σ-алгебры

$$\mathcal{G}_k = \sigma\{\mathcal{X}_k, \theta_k\},$$

где величины $\theta_0, \theta_1, \ldots$ не зависят от цепи $x_0, x_1, \ldots$

Теорема 20. Пусть при подходящем выборе распределения вероятностей ρ на $(X, \mathcal{B})$ и $\mathcal{B}$-измеримой функции $q(x) \geqslant 0$ переходная вероятность харрисовой цепи $x_0, x_1, \ldots$ с инвариантной мерой π удовлетворяет неравенству

$$P(x, B) \geqslant q(x)\rho(B) \tag{90}$$

для всех $x \in X$, $B \in \mathcal{B}$, и

$$\int \pi(dx) q(x) > 0.$$

Тогда найдется такой момент остановки $\varkappa$ относительно некоторого допустимого потока, что

$$\varkappa < \infty \quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.}$$

для всех $x \in X$; цепь $x_0, x_1, \ldots$ с начальным распределением ρ является регенерирующей последовательностью с моментом регенерации $\varkappa$; и

$$\pi(B) = \text{const} \sum_{k \geqslant 0} \mathbf{P}_\rho \{x_k \in B, \ k < \varkappa\} \tag{91}$$

для всех $B \in \mathcal{B}$.

Доказательство. Неравенство (90) и теорема 1 гарантируют существование такой $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$-измеримой функции $p(x, y)$, что $0 \leqslant p(x, y) \leqslant 1$, и

$$\int_B p(x, y) P(x, dy) = q(x)\rho(B)$$

для всех $x, y \in X$, $B \in \mathcal{B}$.

Пусть случайные величины $\theta_1, \theta_2, \ldots$ взаимно независимы, не зависят от цепи $x_0, x_1, \ldots$ и равномерно распределены на $[0, 1]$. Положим $\mathcal{G}_0 = \mathcal{X}_0$,

$$\mathcal{G}_k = \sigma\{x_0, x_1, \ldots, x_k, \theta_1, \ldots, \theta_k\}, \quad k \geqslant 1,$$
$$\varkappa = \inf\{n \geqslant 1 \colon p(x_{n-1}, x_n) > \theta_n\},$$

и покажем, что поток $\mathcal{G}_k$, $k=0, 1, \ldots$, и момент остановки $\varkappa$ удовлетворяют требуемым условиям.

Допустимость потока $\mathcal{G}_k$, $k=0, 1, \ldots$, сомнений не вызывает. По определению $\varkappa$ имеем

$$\mathbf{P}_x\{\varkappa>n\}=\mathbf{M}_x\prod_{k=1}^{n}[1-p(x_{k-1}, x_k)].$$

Переходя здесь к пределу при $n\to\infty$, видим, что для доказательства конечности $\varkappa$ достаточно установить расходимость $\mathbf{P}_x$-п. н. ряда $\sum\limits_{n\geqslant 1}[1-p(x_{k-1}, x_k]$. В силу π-возвратности цепи $x_0, x_1, \ldots$ это следует из неравенства

$$\iint\pi(dx)P(x, dy)p(x, y)>0.$$

По определению функции $p(x, y)$ левая часть здесь равна интегралу $\int\pi(dx)q(x)$, который больше нуля по условию.

Далее, зафиксируем натуральное $n\geqslant 1$ и пару событий $\Lambda\in\mathcal{G}_{n-1}$, $\Gamma\in\mathscr{X}$. Требуется доказать, что

$$\mathbf{P}_\rho\{\Lambda, \varkappa\geqslant n, S_\varkappa^{-1}\Gamma\}=\mathbf{P}_\rho\{\Lambda, \varkappa\geqslant n\}\mathbf{P}_\rho(\Gamma).$$

Мы покажем несколько больше, а именно:

$$\mathbf{P}_x\{\Lambda, \varkappa\geqslant n, S_\varkappa^{-1}\Gamma\}=\mathbf{P}_x\{\Lambda, \varkappa\geqslant n\}\mathbf{P}_\rho(\Gamma) \tag{92}$$

для всех $x\in X$. Этим, в частности, будет установлено свойство регенерации в момент времени τ. Левая часть (92) равна

$$\sum_{k=n}^{\infty}\mathbf{P}_x\{\Lambda, \varkappa=k, S_k^{-1}\Gamma\}. \tag{93}$$

Слагаемое с номером k здесь, в свою очередь, равно

$$\mathbf{P}_x\{\Lambda, \varkappa>k-1, p(x_{k-1}, x_k>\theta_k, S_k^{-1}\Gamma\}.$$

Так как $\{\varkappa>k-1\}\in\mathcal{G}_{k-1}$, то по марковскому свойству в момент времени $k-1$ полученное выражение совпадает с

$$\int_X\mathbf{P}_x\{\Lambda, \varkappa>k-1, x_{k-1}\in dy\}\mathbf{P}_y\{p(y, x_1)>\theta_1, S^{-1}\Gamma\}.$$

По определению функции $p(x, y)$

$$\mathbf{P}_y\{p(y, x_1)>\theta_1, S^{-1}\Gamma\}=\int_X\mathbf{P}(y, dz)p(y, z)\mathbf{P}_y(\Gamma)=$$

$$=q(y)\mathbf{P}_\rho(\Gamma).$$

Это позволяет разделить переменные x и Γ и утверждать, что слагаемое с номером k в (93) имеет вид $f(x)\mathbf{P}_\rho(\Gamma)$. При $\Gamma=\Omega$ находим $f(x)=\mathbf{P}_x\{\Lambda, \varkappa=k\}$. Таким образом,

$$\mathbf{P}_x\{\Lambda, \varkappa=k, S_k^{-1}\Gamma\}=\mathbf{P}_x\{\Lambda, \varkappa=k\}\mathbf{P}_\rho(\Gamma)$$

для всех $x\in X$, $\Lambda\in\mathcal{G}_{k-1}$, $\Gamma\in\mathscr{X}$.

Суммируя по $k\geqslant n$ (при $\Lambda\in\mathcal{G}_{n-1}$), приходим к (92).

Для доказательства уравнения (91) достаточно проверить, что его правая часть представляет собой инвариантную меру по $B \in \mathscr{B}$. Соответствующая выкладка была проделана (правда, на несколько другом языке) при доказательстве инвариантности правой части (78). Теорема доказана.

Применительно к неравенству (72) теорема 20 дает существование регенерирующей подпоследовательности у любой харрисовой цепи. Именно, пусть возрастающая последовательность случайных величин $0=\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots$ такова, что величины $\sigma_n - \sigma_{n-1}$, $n \geqslant 1$, независимы в совокупности, не зависят от цепи $x_0, x_1, \ldots$ и одинаково геометрически (с параметром α) распределены, то есть

$$\mathbf{P}\{\sigma_n - \sigma_{n-1} = k\} = (1-\alpha)\,\alpha^{k-1}, \quad k \geqslant 1, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Тогда последовательность $x_{\sigma_n}, n=0, 1, \ldots,$ образует однородную харрисову цепь Маркова с переходной вероятностью за один шаг $Q_\alpha(x, B)$ и с той же инвариантной мерой π. Применяя теорему 20 и замечание 13, получаем

Следствие 13. Если цепь $x_0, x_1, \ldots$ — харрисова с инвариантной мерой π, то можно указать такое распределение вероятностей ρ_α, эквивалентное мере π, что цепь $x_{\sigma_n}, n=0, 1, \ldots,$ с начальным распределением ρ_α явится регенерирующей последовательностью, момент регенерации которой может быть реализован как момент остановки относительно допустимого потока.

Замечание 14. Пусть $\varkappa$ — момент регенерации цепи x_{σ}, $n=0, 1, \ldots$ Тогда $\sigma_\varkappa$ — момент остановки относительно некоторого допустимого (для исходной цепи x_0, x_1, ...) потока σ-алгебр, и, как показывает (92),

$$\mathbf{P}_x\{x_{\sigma_\varkappa} \in B\} = \rho(B)$$

для всех $x \in X$, $B \in \mathscr{B}$. Это обстоятельство заслуживает отдельной формулировки.

Теорема 21. Для харрисовой цепи x_0, x_1, ... с инвариантной мерой π существуют такой момент остановки $\mathfrak{m}$ (относительно допустимого потока) и распределение вероятностей ρ, эквивалентное мере π, что

$$\mathbf{P}_x\{x_{\mathfrak{m}} \in B\} = \rho(B) \tag{94}$$

для всех $x \in X$, $B \in \mathscr{B}$, и

$$\pi(B) = \mathrm{Const} \sum_{k \geqslant 0} \mathbf{P}_\rho\{x_k \in B, \ k < \mathfrak{m}\} \tag{95}$$

для всех $B \in \mathscr{B}$.

4.3. Предельные теоремы для переходных вероятностей. Как установлено при доказательстве теоремы, харрисова цепь консервативна и все ее поглощающие множества тривиальны. Согласно теореме 9, это влечет сходимость

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} P^k f(x)}{\sum\limits_{k=0}^{n} P^k g(x)} = \frac{\int \pi(dy) f(y)}{\int \pi(dy) g(y)} \tag{96}$$

для π-почти всех $x \in X$ и всех π-интегрируемых функций f, g с $\int \pi(dy) g(y) \neq 0$.

Однако для харрисовых цепей (и в этом их одно из несомненных достоинств) утверждение (96) может быть существенно усилено до следующего, доказательство которого (как, впрочем, и доказательства всех теорем этого пункта) мы откладываем до § 5 по той простой причине, что там будет рассмотрена более общая ситуация.

Теорема 22. Пусть $x_0, x_1, \ldots$ — харрисова цепь с инвариантной мерой π. Тогда для любой π-интегрируемой ограниченной функции $h \geqslant 0$ найдется такое π-нулевое множество $X_h \in \mathscr{B}$, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} P^k f(x)}{\sum\limits_{k=0}^{n} P^k g(y)} = \frac{\int \pi(dz) f(z)}{\int \pi(dz) g(z)} \tag{97}$$

для всех $x \notin X_h$ и всех $\mathscr{B}$-измеримых функций f, g с $|f| \leqslant h$, $\int \pi(dz) g(z) \neq 0$.

Исключительное множество X_h из этой теоремы допускает расшифровку через момент остановки $\mathfrak{m}$ из теоремы 21. Именно, введем в рассмотрение неотрицательное ядро

$$M(x, B) = \sum_{k \geqslant 0} \mathbf{P}_x (x_k \in B,\ k < \mathfrak{m}\}. \tag{98}$$

В терминах ядра M обещанная расшифровка имеет весьма простой вид

$$X_h = \{x \in X : Mh(x) = \infty\}.$$

Утверждение теоремы 22, кроме всего прочего, ставит вопрос о структуре тех вероятностных мер $m(dx)$ и $l(dx)$ на $(X, \mathscr{B})$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int m(dx) \sum\limits_{k=0}^{n} P^k f(x)}{\int l(dx) \sum\limits_{k=0}^{n} P^k g(x)} = \frac{\int \pi(dy) f(y)}{\int \pi(dy) g(y)} \tag{99}$$

при тех же условиях на f и g.

Ядро M позволяет ответить и на этот вопрос. Оказывается, что в условиях теоремы 22 (99) имеет место для тех вероятностных мер m и l, для которых

$$\int m\, dx)\, Mh(x) < \infty, \quad \int l(dx)\, Mh(x) < \infty.$$

Асимптотическое поведение переходных вероятностей харрисовых цепей вполне аналогично тому, что мы имели в случае счетной фазы. Определяющими факторами по-прежнему являются конечность инвариантной меры π и периодичность цепи.

Харрисова цепь $x_0, x_1, \ldots$ с инвариантной мерой π называется *периодической*, если множество состояний X представимо в виде объединения конечного числа попарно непересекающихся множеств $C_0, C_1, \ldots, C_{\Delta-1}$ (плюс еще, может быть π-нулевое множество) таких, что

$$P(x, C_j)=1 \text{ при } x \in C_{j-1},\ j=1, \ldots, \Delta-1,$$
$$P(x, C_0)=1 \text{ при } x \in C_{\Delta-1}.$$

Максимально возможное число Δ таких множеств называется *периодом цепи*, а совокупность множеств $C_0, C_1, \ldots, C_{\Delta-1}$ — ее *циклическим разложением*.

Если же ни при каком $\Delta>1$ циклическое разложение невозможно, то цепь называется *непериодической*.

Следующие две теоремы содержат полное описание предельного поведения $P^n(x, A)$ в случае $\pi(X)=1$. Как уже отмечалось, их доказательство откладывается до следующего параграфа, в котором будет рассмотрена более общая ситуация (см. п. 5.6).

Теорема 23. Если харрисова цепь с инвариантным распределением вероятностей π непериодична, то

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{B \in \mathscr{B}} |P^n(x, B)-\pi(B)|=0$$

для всех $x \in X$.

Теорема 24. Если харрисова цепь с инвариантным распределением π имеет период Δ и $C_0, C_1, \ldots, C_{\Delta-1}$ — ее циклическое разложение, то

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{B \in \mathscr{B}} |P_x^{n\Delta+r}(BC_l)-\Delta\pi(BC_l)|=0$$

при $x \in C_k$, $r \equiv l-k \pmod{\Delta}$.

§ 5. Марковское вмешательство случая

Неотрицательная случайная величина τ называется *моментом марковского вмешательства* в эволюцию случайного процесса $x(t)$, $t \geqslant 0$, если при данном значении $x(\tau)$ обрывающийся процесс $x(t)$, $t<\tau$ не зависит от сдвинутого процесса $x(\tau+t)$, $t \geqslant 0$, и условное распределение последнего при условии $x(\tau)=y$ совпадает с распределением исходного процесса $x(t)$, $t \geqslant 0$ при условии $x(0)=y$.

Образно говоря, марковское вмешательство случая в момент времени τ приводит к полной потере памяти и после момента τ процесс $x(t)$, $t \geqslant 0$ стартует заново из состояния $x(\tau)$. Так что после момента τ наступает второй момент марковского вмешательства, после второго третий и т. д.

Таким образом, каждый момент марковского вмешательства индуцирует неубывающую последовательность $\tau_1 \leqslant \tau_2 \leqslant \ldots$ моментов марковского вмешательства, к которым удобно отнести и начальный момент времени $\tau_0 = 0$.

Последовательность $x(\tau_k)$, $k=0, 1, \ldots$, образует так называемую *вложенную цепь Маркова*, которая и определяет эргодические свойства процесса $x(t)$, $t \geqslant 0$.

Класс случайных процессов, для которых можно указать момент марковского вмешательства, весьма широк. Так, этот класс содержит все однородные марковские процессы (для которых любой неслучайный момент времени по определению является моментом марковского вмешательства) и полумарковские процессы, для которых $x(t) = x(0)$ при $0 \leqslant t < \tau$. Кроме того, понятие марковского вмешательства применимо и к случайным процессам с дискретным временем, то есть к случайным последовательностям. В частности, в этот класс входят и однородные цепи Маркова. Для них $\tau = 1$ и, следовательно, $\tau_k = k$, так что вложенная цепь совпадает с исходной.

Сколь-нибудь содержательная теория марковского вмешательства невозможна без целого ряда дополнительных ограничений на момент времени τ, случайный процесс $x(t)$, $t \geqslant 0$, его фазовое пространство $(X, \mathscr{B})$ и порождаемую процессом $x(t)$, $t \geqslant 0$ под-σ-алгебру $\mathscr{X}$ σ-алгебры $\mathscr{F}$ в основном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$.

Это, во-первых, *счетная порожденность σ-алгебры $\mathscr{B}$*; во-вторых, *измеримость* случайного процесса $x(t)$, $t \geqslant 0$ в следующем смысле: отображение $(t, \omega) \to x(t, \omega)$ измеримо как отображение измеримого пространства $(R_+ \times \Omega, \mathscr{B}(R_+) \otimes \mathscr{X})$ в измеримое пространство $(X, \mathscr{B})$; в-третьих, *регулярность условных вероятностей* $\mathbf{P}_x$ при условии $x(0) = x$ на σ-алгебре $\sigma(\mathscr{X}, \tau)$; и, в-четвертых, *замкнутость множества траекторий процесса* $x(t)$ *относительно сдвигов*. Как было показано в п. 1.1 гл. 4, это условие всегда можно обеспечить с помощью расширения основного вероятностного пространства. Причем описанная там процедура расширения не нарушает, что крайне важно, измеримости случайного процесса в только что указанном смысле.

Еще одно, пятое, предположение состоит в том, что σ-алгебра $\mathscr{X}$ содержится в пополнении по системе мер $\mathbf{P}_x$, $x \in X$, некоторой счетно порожденной σ-алгебры.

Первые четыре из пяти перечисленных ограничений предполагаются безоговорочно выполненными в течение всего дальнейшего изложения. Пятое может быть опущено, если момент времени τ не зависит от σ-алгебры $\mathscr{X}$ или измерим относительно нее. Во всех остальных случаях пятое ограничение имеет силу наравне с другими.

Кроме того, будем, не ограничивая общности, считать, что σ-алгебра $\mathscr{X}$ содержит все одноточечные множества, и что $\mathbf{P}_x\{x(0)=x\}=1$.

5.1. Вложенные цепи Маркова. Для того, чтобы дать формальное определение марковского вмешательства, свяжем с каждым (случайным или нет) моментом времени τ σ-алгебру $\mathscr{X}_\tau$ предшествующих моменту τ событий, которая по определению порождается всеми событиями вида

$$\{x(s)\in A,\ s\leqslant\tau,\ x(\tau)\in B\},\ A,\ B\in\mathscr{B},\ s\geqslant 0.$$

Пусть S_u — оператор сдвига на u траектории процесса $x(t)$, $t\geqslant 0$ (см. § 1 гл. 4). При случайном τ оператор сдвига S_τ действует по естественному правилу: $S_\tau\omega=S_{\tau(\omega)}\omega$.

Неотрицательная случайная величина τ называется *моментом марковского вмешательства* в эволюцию случайного процесса $x(t)$, $t\geqslant 0$, если

$$\mathbf{P}_x(S_\tau^{-1}\Gamma\,|\mathscr{X}_\tau)=\mathbf{P}_{x(\tau)}(\Gamma)\quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.} \tag{100}$$

для всех $v\in X$, $\Gamma\in\mathscr{X}$.

Если бы момент времени τ оказался $\mathscr{X}$-измеримым, то рекуррентная формула

$$\tau_{k+1}=\tau_k+\tau S_{\tau_k}$$

определила бы требуемую последовательность моментов марковского вмешательства. В общем случае эта формула неприменима, но ее можно модифицировать. Для этого и привлекается (первый и последний раз) условие счетной порожденности (с точностью до пополнения по системе мер $\mathbf{P}_x$, $x\in X$) σ-алгебры $\mathscr{X}$, которое вместе с теоремой 1 обеспечивает существование неубывающего непрерывного справа $\mathscr{X}$-измеримого процесса $\mathfrak{g}(t)$, $t\geqslant 0$, задающего условное распределение величины τ при условии $\mathscr{X}$, то есть

$$\mathfrak{g}(t)=\mathbf{P}_x\{\tau\leqslant t\,|\,\mathscr{X}\}\quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.}$$

Для $0\leqslant u<1$ положим

$$\mathfrak{f}(u)=\inf(t\leqslant 0:\quad \mathfrak{g}(t)\geqslant u\}.$$

Случайный процесс $\mathfrak{f}(u)$, $0\leqslant u<1$ непрерывен слева, не убывает, $\mathscr{X}$-измерим, и

$$\mathbf{P}_x\{\tau\leqslant t\,|\,\mathscr{X}\}=\mathbf{P}_x\{\mathfrak{f}(\theta)\leqslant t\,|\,\mathscr{X}\}\quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.},$$

если только случайная величина θ не зависит от σ-алгебры $\mathscr{X}$ и равномерно распределена на [0, 1].

Теперь последовательность моментов марковского вмешательства τ_k, $k=0, 1,\ldots$, может быть определена по рекуррентной формуле

$$\tau_{k+1}=\tau_k+\mathfrak{f}_k(\theta_k),\quad \tau_0=0,$$

где $\mathfrak{f}_k(u)=\mathfrak{f}(u)S_{\tau_k}$, а величины θ_0, $\theta_1,\ldots$ независимы в совокупности, не зависят от процесса $x(t)$, $t\geqslant 0$ и имеют равномерное распределение на [0,1].

На самом деле имеет место нечто большее, чем сохранение равенства (100) при замене τ на τ_k. Именно, сдвинутый процесс $x(\tau_k+t)$, $t\geqslant 0$ условно (при данном $x(\tau_k)$) не зависит не только от σ-алгебры $\mathscr{X}_{\tau_k}$, но и от совокупности σ-алгебр $\mathscr{X}_{\tau_1},\ldots,\mathscr{X}_{\tau_k}$ (так как τ_k не обязательно $\mathscr{X}$-измеримы, то $\mathscr{X}_{\tau_k}$ не обязано монотонно зависеть от k).

Отсюда, в частности следует, что последовательность $x(\tau_k)$, $k=0, 1,\ldots$, образует однородную цепь Маркова, которая называется *вложенной цепью Маркова*, отвечающей моменту марковского вмешательства τ.

Неубывающую последовательность σ-алгебр $\mathscr{G}_k$, $k=0, 1,\ldots$, назовем допустимым потоком для момента марковского вмешательства τ, если $\mathscr{X}_{\tau_k}\subset\mathscr{G}_k\subset\mathscr{F}$, и

$$\mathbf{P}_x\left(S_{\tau_k}^{-1}\Gamma\mid\mathscr{G}_k\right)=\mathbf{P}_{x(\tau_k)}(\Gamma)\quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.} \tag{101}$$

для всемх $k=0, 1, \ldots$, $x\in X$, $\Gamma\in\mathscr{X}$.

Примером допустимого потока может служить последовательность

$$\mathscr{G}_k=\sigma\{\mathscr{X}_{\tau_j},\ \theta_j',\ j=0,1,\ldots,\ k\},\quad k=0,1,\ldots,$$

где величины θ_j', $j\geqslant 0$, независимы в совокупности и не зависят от процесса $x(t)$, $t\geqslant 0$, и последовательности θ_k, $k\geqslant 0$.

Пусть целочисленная неотрицательная случайная величина $\varkappa$ является моментом остановки относительно допустимого потока $\mathscr{G}_k$, $k=0, 1,\ldots$ Обозначим через $\mathscr{G}_\varkappa$ σ-алгебру, порожденную событиями $\Gamma\cap\{\varkappa=k\}$, $\Gamma\in\mathscr{G}_k$, $k=0, 1,\ldots$ Тогда момент времени $\tau_\varkappa$ также является моментом марковского вмешательства. Точнее, (101) сохраняет силу при замене k на $\varkappa$.

Последнее, помимо всего прочего, говорит о том, что всякий момент остановки относительно допустимого потока является моментом марковского вмешательства в эволюцию вложенной цепи Маркова.

Фундаментом всего последующего изложения является предположение о возвратности по Харрису вложенной цепи Маркова $x(\tau_k)$, $k=0, 1,\ldots$

Это предположение вместе со счетной порожденностью $\mathscr{B}$ позволяет, отправляясь от теоремы 21, построить распределение вероятностей ρ и момент марковского вмешательства $\mathfrak{t}$, такие, что

$$\mathbf{P}_x\{x(\mathfrak{t})\in B\}=\rho(B),\ x\in X,\ B\in\mathscr{B}, \tag{102}$$

причем распределение вероятностей ρ эквивалентно (в смысле абсолютной непрерывности) инвариантной мере π вложенной цепи $x(\tau_k)$, $k=0, 1, \ldots$

Для этого достаточно положить $\mathfrak{t}=\tau_{\mathfrak{m}}$, где $\mathfrak{m}$ — момент остановки из теоремы 21. При этом, конечно, последовательность дополнительных величин, участвующих в построении момента $\mathfrak{m}$, следует выбирать не зависящей от процесса $x(t)$, $t\geqslant 0$, и последовательности τ_k, $k=0, 1, \ldots$

Пусть $\mathfrak{t}_n$, $n=0, 1, \ldots,$ — последовательность моментов марковского вмешательства, порожденная моментом $\mathfrak{t}$. Тогда

$$\mathbf{P}_x\{x(\mathfrak{t}_k)\in B\}=\rho(B), \quad x\in X, \quad B\in\mathscr{B}, \quad k\geqslant 1,$$

и, стало быть, вложенная цепь Маркова, отвечающая моменту $\mathfrak{t}$, вырождается в последовательность независимых одинаково распределенных величин. Это влечет следующее свойство процесса $x(t)$, $t\geqslant 0$, напоминающее свойство регенерации: при каждом натуральном k обрывающийся процесс $x(t)$, $0\leqslant t<\mathfrak{t}_{k-1}$ не зависит от сдвинутого процесса $x(\mathfrak{t}_k+t)$, $t\geqslant 0$, или, точнее,

$$\mathbf{P}_x\{S_{\mathfrak{t}_k}^{-1}\Gamma \mid \mathscr{X}_{\mathfrak{t}_1}, \ldots, \mathscr{X}_{\mathfrak{t}_{k-1}}\}=\mathbf{P}_\rho(\Gamma) \tag{103}$$

для всех $x\in\Gamma\in\mathscr{X}$, $k\geqslant 1$.

Образно говоря, течение процесса $x(t)$, $t\geqslant 0$ до момента $\mathfrak{t}_{k-1}$ никак не влияет на его течение после момента $\mathfrak{t}_k$, которое является вероятностной копией процесса $x(t)$, $t\geqslant 0$ с распределенным по закону ρ начальным значением $x(0)$.

Моменты времени τ и $\mathfrak{t}$ связаны уравнением

$$\mathbf{M}_\pi\int_0^\tau \xi S_u du=\mathrm{Const}\,\mathbf{M}_\rho\int_0^{\mathfrak{t}} \xi S_u du, \tag{104}$$

где величина ξ неотрицательна и $\mathscr{X}$-измерима, а Const та же, что и в (95).

По моменту марковского вмешательства $\mathfrak{t}$ и любой $\mathscr{B}$-измеримой функции h с $0\leqslant h(x)\leqslant 1$ можно построить момент марковского вмешательства $\mathfrak{t}(h)$, обладающий всеми достоинствами момента. Именно, пусть $\int\rho(dx)h(x)>0$. Положим

$$\mathfrak{n}(h)=\min\{j\geqslant 1: h(x(\mathfrak{t}_j))\geqslant\theta_j'\},$$

$$\mathfrak{t}(h)=\mathfrak{t}_{\mathfrak{n}(h)},$$

где, как обычно, величины θ_j', $j\geqslant 1$, независимы в совокупности, равномерно распределены на $[0, 1]$ и не зависят от процесса $x(t)$, $t\geqslant 0$, и последовательности $\mathfrak{t}_n$, $n\leqslant 1$. Так как $\mathfrak{n}(h)$ — момент остановки относительно допустимого потока (для $\mathfrak{t}$), то $\mathfrak{t}(h)$ — момент марковского вмешательства, и, в силу взаимной независимости и одинаковой распределенности величин $x(\mathfrak{t}_1)$, $x(\mathfrak{t}_2), \ldots,$

$$\mathbf{P}_x\{x(\mathfrak{t}(h))\in B\}=\int_B h(y)\rho(dy)\Big/\int_X h(y)\rho(dy). \tag{105}$$

Последующие моменты марковского вмешательства $\mathfrak{T}_k(h)$, $k>1$, определяются без привлечения дополнительных величин:

$$\mathfrak{t}_k(h)=\mathfrak{t}_{\mathfrak{n}_k(h)}, \quad \mathfrak{n}_k(h)=\min\{j>\mathfrak{n}_{k-1}(h): h(x(\mathfrak{t}_j))\geqslant\theta_j'\}.$$

Эта конструкция вместе с эквивалентностью мер ρ и π позволяет связать с каждым π-положительным подмножеством D из определенного класса связать такой момент марковского вмешательства $\mathfrak{m}(D)$, что

$$\mathbf{P}_x\{x(\mathfrak{m}(D))\in B\}=\pi_D(B), \tag{106}$$

где, напомним, $\pi_D(B)=\pi(BD)/\pi(D)$ по определению.

Действительно, $\rho(dx)=p(x)\pi(dx)$, где $p(x)>0$. Для $\varepsilon>0$ обозначим $X^\varepsilon=\{x\in X : p(x)\geqslant\varepsilon\}$. Предположим, что для некоторого $\varepsilon>0$

$$D\subset X^\varepsilon,\quad D\in\mathscr{B},\ 0<\pi(D)<\infty \tag{107}$$

и рассмотрим моменты времени $\mathfrak{m}(D)=\mathfrak{n}(h)$ и

$$\mathfrak{w}(D)=\mathfrak{t}(h) \text{ с } h(x)=\frac{\varepsilon}{p(x)}I_D(x). \tag{108}$$

Чтобы проверить, что этот момент реализует (106), достаточно заметить, что $\int\limits_B h(y)\rho(dy)=\varepsilon\pi(BD)$, и сослаться на (105).

Инвариантная мера π выражается через распределение π_D и момент времени $\mathfrak{m}(D)$ так же, как и через распределение ρ и момент $\mathfrak{m}$, то есть

$$\pi(B)=\mathrm{Const}\sum_{k\geqslant 0}\mathbf{P}_{\pi_D}\{x(\tau_k)\in B,\ k<\mathfrak{w}(D)\}. \tag{109}$$

Отсюда вытекает аналогичная связь между τ и $\mathfrak{w}(D)$,

$$\mathbf{M}_\pi\int\limits_0^\tau \xi S_u du=\mathrm{Const}\,\mathbf{M}_{\pi_D}\int\limits_0^{\mathfrak{w}(D)} \xi S_u du. \tag{110}$$

Это уравнение так же, как и (104), имеет местодля всех $\mathscr{X}$-измеримых $\xi\geqslant 0$, причем Const здесь та же, что и в (109), но не в (104), (95).

5.2. Эргодичность. Обычно случайный процесс $x(t)$, $t\geqslant 0$, называют *эргодическим*, если для всех $\mathscr{X}$-измеримых ограниченных величин ξ с вероятностью единица существует неслучайный предел

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int\limits_0^t \xi S_u du. \tag{111}$$

Однако с точки зрения марковского вмешательства случая на первый план выходит не основная вероятность $\mathbf{P}$ на исходном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, а семейство условных вероятностей $\mathbf{P}_x$, $x\in X$.

Поэтому представляется целесообразным сузить данное определение эргодичности и потребовать, чтобы *предел (111) существовал* $\mathbf{P}_x$-*п. н. для всех* $x\in X$ *и не зависел при этом от* x. Дальнейшее изложение придерживается именно такого определения. Аналогично, случайный процесс с дискретным временем, или случайная последовательность $x(t)$, $t=0, 1, \ldots$, называется *эргодической*, если для всех $x \in X$ предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi S^k$$

существует $\mathbf{P}_x$-п. н., неслучаен и не зависит от $x \in X$.

Теорема 25. Если вложенная цепь Маркова $x(\tau_k)$, $k=0, 1, \ldots,$ — харрисова с инвариантной мерой π, и

$$0<\mathbf{M}_\pi \tau<\infty, \tag{112}$$

то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \xi S_u du = \frac{1}{\mathbf{M}_\pi \tau} \mathbf{M}_\pi \int_0^\tau \xi S_u du \quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.} \tag{113}$$

для всех $x \in X$ и тех $\mathscr{X}$-измеримых величин ξ, для которых $\mathbf{M}_\pi \int_0^\tau |\xi S_u| du < \infty$.

Доказательство достаточно провести для $\xi \geqslant 0$. Рассмотрим неотрицательные величины

$$\zeta_k = \int_{\mathfrak{t}_k}^{\mathfrak{t}_{k+1}} \xi S_u du \text{ при } k=1, 2, \ldots.$$

Согласно (103), сдвинутые процессы $x(\mathfrak{t}_k+t)$, $t \geqslant 0$ при $k \geqslant 1$ не зависят от $x(0)$ и имеют общее распределение, совпадающее с $\mathbf{P}_\rho$-распределением процесса $x(t)$, $t \geqslant 0$. Следовательно, последовательность ζ_k, $k=1, 2, \ldots,$ не зависит от $x(0)$, стационарна, и

$$\mathbf{M}_x \zeta_1 = \mathbf{M}_\rho \int \xi S_u du$$

для всех $x \in X$. В силу (104) последнее выражение конечно по условию. По эргодической теореме Биркгофа-Хинчина

$$\zeta^* = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \tag{114}$$

существует $\mathbf{P}_x$-п. н., и

$$\mathbf{M}_x \zeta^* = \mathbf{M}_\rho \int_0^{\mathfrak{t}} \xi S_u du. \tag{115}$$

Далее, покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathfrak{t}_n}{n} = \mathbf{M}_\rho \mathfrak{t} \quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.}, \ x \in X. \tag{116}$$

Для этого представим $\mathfrak{t}_n$ в виде

$$\mathfrak{t}_n = \mathfrak{t}_1 + \sum_{1 \leqslant k < n/2} (\mathfrak{t}_{2k} - \mathfrak{t}_{2k-1}) + \sum_{1 \leqslant k < n/2} (\mathfrak{t}_{2k+1} - \mathfrak{t}_{2k}).$$

Согласно (103), слагаемые в каждой из этих двух сумм взаимно независимы, одинаково распределены, не зависят от $x(0)$, и $\mathbf{M}_x(\mathfrak{t}_2 - \mathfrak{t}_1) = \mathbf{M}_\rho \mathfrak{t}$. В силу (104), (112) правая часть здесь конечна и положительна.

Применяя усиленный закон больших чисел, получаем (116). Соотношение (116), в частности, дает неограниченность $\mathbf{P}_x$-п. н. последовательности $\mathfrak{t}_n$, $n \geqslant 0$, что, в свою очередь, влечет существование $\mathbf{P}_x$-п. н. предела в левой части (113) и совпадение его с величиной $\xi^* = \zeta^* / \mathbf{M}_\rho \mathfrak{t}$ $\mathbf{P}_x$-п. н.

Заметим, далее, что

$$\xi^* = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_{\mathfrak{t}_{k+1}}^{t} \xi S_u du \quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.}$$

при любом натуральном k. Согласно (103), это влечет независимость ξ^* от совокупности σ-алгебр $\mathscr{X}_{\mathfrak{t}_1}, \ldots, \mathscr{X}_{\mathfrak{t}_k}$ при любом $k = 1, 2, \ldots$, и, стало быть, ξ^* не зависит от σ-алгебры $\mathscr{X}$. Значит, величина ξ^* не зависит от себя, то есть $\xi^* = \mathbf{M}_x \xi^*$ $\mathbf{P}^x$-п. н. Но, как показывают (115), (104), $\mathbf{M}_x \xi^*$ равно правой части (113), что и требовалось доказать.

Следствие 14. В условиях теоремы 25

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(x(u))\, du = \frac{1}{\mathbf{M}_\pi \tau} \mathbf{M}_\pi \int_0^\tau f(x(u))\, du \quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.}$$

для всех $x \in X$ и тех $\mathscr{B}$-измеримых функций f, для которых

$$\mathbf{M}_\pi \int_0^\tau |f(x(u))|\, du < \infty.$$

Отказ от условия (112) приводит к следующему утверждению.

Теорема 26. Если вложенная цепь Маркова $x(\tau_k)$, $k = 0, 1, \ldots$, — харрисова с инвариантной мерой π, и $\mathbf{P}_\pi\{\tau > 0\} > 0$, то

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\int_0^t \xi S_u du}{\int_0^t \eta S_u du} = \frac{\mathbf{M}_\pi \int_0^\tau \xi S_u du}{\mathbf{M}_\pi \int_0^\tau \eta S_u du} \quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.} \tag{117}$$

для всех $x \in X$ и для тех $\mathscr{X}$-измеримых величин ξ, η, для которых

$$\mathbf{M}_\pi \int_0^\tau |\xi S_u|\, du < \infty, \quad \mathbf{M}_\pi \int_0^\tau |\eta S_u|\, du < \infty, \quad \mathbf{M}_\pi \int_0^\tau \eta S_u du \neq 0.$$

Доказательство. До соотношений (114), (115) включительно условие (112) не использовалось. Дальнейшие изменения достаточно очевидны.

Следствие 15. В условиях теоремы 26

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t f(x(u))\,du}{\int_0^t g(x(u))\,du} = \frac{\mathbf{M}_\pi \int_0^\tau f(x(u))\,du}{\mathbf{M}_\pi \int_0^\tau g(x(u))\,du} \quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.}$$

для всех $x \in X$ и всех $\mathscr{B}$-измеримых функций f, g с $\mathbf{M}_\pi \int_0^\tau |f(x(u))|\,du < \infty$, $\mathbf{M}_\pi \int_0^\tau |g(x(u))|\,du < \infty$, $\mathbf{M}_\pi \int_0^\tau g(x(u))\,du \neq 0$.

Следствие 16. Если в условиях теоремы 26 $\mathbf{M}_\pi \tau = \infty$, то

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \xi S_u\,du = 0 \quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.}$$

для всех $x \in X$ и тех $\mathscr{X}$-измеримых величин ξ, для которых $\mathbf{M}_\pi \int_0^\tau |\xi S_u|\,du < \infty$.

Теорема 25, помимо всего прочего, ставит вопрос о существовании *финальных вероятностей*, то есть пределов $\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{M}_x \xi S_t$. Достаточно полный ответ на него может быть получен с помощью так называемых теорем марковского восстановления [15].

5.3. Марковское восстановление. Введем в рассмотрение неотрицательные ядра в произведении пространств $(X \times R_+, \mathscr{B} \otimes \mathscr{B}_+)$:

$$Q(x, dy \times dt) = \mathbf{P}_x \{x(\tau) \in dy,\ \tau \in dt\},$$

$$Q_k(x, dy \times dt) = \mathbf{P}_x \{x(\tau_k) \in dy,\ \tau_k \in dt\},$$

$$U(x, dy \times dt) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}_x \{x(\tau_k) \in dy,\ \tau_k \in dt\}.$$

Здесь и далее $\mathscr{B}_+ = \mathscr{B}(R_+)$ — борелевская σ-алгебра на R_+. Три теоремы этого пункта дают условия существования предела при $t \to \infty$ свертки

$$U * g(x, t) = \int_X \int_0^t U(x, dy \times du)\, g(y, t-u).$$

Правая часть здесь всегда определена, если только функция $g(x, t)$ неотрицательна и $\mathscr{B} \otimes \mathscr{B}_+$-измерима (значение $+\infty$ не исключается). Здесь и в дальнейшем символ $\int\limits_0^t$ обозначает интегрирование по замкнутому интервалу $[0, t]$.

Ядро $Q(x, dy\times dt)$ будем называть *решетчатым*, если найдутся $\mathscr{B}$-измеримая комплексная функция h и вещественное число $\lambda\neq 0$, такие, что

$$\int\limits_X\int\limits_0^\infty Q(x,\ dy\times dt)\,h(y)\,e^{i\lambda t}=h(x)\quad \pi\text{-п. в.},$$

и (118)

$$|h(x)|=1\quad \pi\text{-п. в.}$$

В условиях теоремы 26 среди удовлетворяющих уравнению (118) чисел λ существует минимальное по модулю положительное число $\lambda_{\min}$. Соответствующая функция $h_{\min}$ единственна с точностью до постоянного множителя и π-эквивалентности. Положим

$$h_{\min}(x)=\exp\{i\lambda_{\min}c(x)\},$$

где $0\leqslant c(x)<\Delta$. Тогда функция $c(x)$ единственна с точностью до аддитивной $(\operatorname{mod}\Delta)$ добавки и π-эквивалентности. Будем называть ее *функцией сдвига*, а число Δ — *шагом* решетчатого ядра $Q(x, dy\times dt)$.

Далее, обозначим

$$Q(x, dy)=\mathbf{P}_x\{x(\tau)\in dy\},$$
$$F(x, y, dt)=\mathbf{P}_x\{\tau\in dt\,|\,x(\tau)=y\},$$

причем в силу счетной порожденности σ-алгебры $\mathscr{B}$, распределенице вероятностей $F(x, y, dt)$ может быть выбрано $\mathscr{B}\otimes\mathscr{B}$-измеримым по x, y.

Пусть $f(x, y, t)$ есть плотность абсолютно непрерывной (относительно меры Лебега) компоненты распределения вероятностей $F(x, y, dt)$.

Ядро $Q(x, dy\times dt)$ будем называть *сингулярным*, если

$$\int\pi(dx)\int Q(x,\ dy)\int\limits_0^\infty f(x,\ y,\ t)\,dt=0. \qquad (119)$$

Нам еще понадобится класс функций $\mathscr{K}^+(\pi)$. Этот класс по определению тогда и только тогда содержит $\mathscr{B}\otimes\mathscr{B}_+$-измеримую функцию $g(x,\ t)\geqslant 0$, когда для всякого $\varepsilon>0$ можно указать $\delta>0$ и такую пару $\mathscr{B}\otimes\mathscr{B}_+$-измеримых функций $g^+(x,\ t)$, $g^-(x, t)$, что

$$g^\pm(x, t)=g^\pm(x, n\delta)\quad \text{при } n\delta\leqslant t<n\delta+\delta,\ n=0, 1, \ldots$$

для π-почти всех $x\in X$;

$$g^-(x,t)\leqslant g(x,t)\leqslant g^+(x,t)$$

для всех $t\geqslant 0$ и π-почти всех $x\in X$;

$$\int\pi(dx)\int_0^\infty|g^\pm(x,t)|\,dt<\infty;$$

$$\int\pi(dx)\int_0^\infty[g^+(x,t)-g^-(x,t)]\,dt<\varepsilon.$$

Если функция $g(x,t)$ такова, что для всех $\alpha<\beta$ функции

$$g^*(x)=\sup_{\alpha\leqslant t<\beta}g(x,t)\ \text{ и }\ g_*(x)=\inf_{\alpha\leqslant t<\beta}g(x,t)$$

измеримы относительно пополнения σ-алгебры $\mathscr{B}$ по мере π, то $g\in\mathscr{K}^+(\pi)$ тогда и только тогда

$$\int\pi(dx)\sum_{n\geqslant 0}\sup_{n\leqslant t\leqslant n+1}g(x,t)<\infty$$

и (120)

$$\lim_{\Delta\downarrow 0}\Delta\int\pi(dx)\sum_{n\geqslant 0}\left\{\sup_{n\Delta\leqslant t\leqslant n\Delta+\Delta}g(x,t)-\inf_{n\Delta\leqslant t\leqslant n\Delta+\Delta}g(x,t)\right\}=0.$$

Для сокращения формулировок теорем восстановления свяжем с мерой π так называемую *внутреннюю меру* π_*, определенную на всех подмножествах множества X соотношением

$$\pi_*(A)=\sup_{\substack{B\subset A\\ B\in\mathscr{B}}}\pi(B).$$

Для любой функции $f(x)\geqslant 0$ на X определим *верхний интеграл*

$$\int{}^*\pi(dx)f(x)$$

как точную нижнюю грань интегралов $\int\pi(dx)g(x)$ с $\mathscr{B}$-измеримой функцией $g(x)\geqslant f(x)$.

Теорема 27. Пусть вложенная цепь Маркова $x(\tau_k)$, $k=0,1,\ldots$, харрисова с инвариантной мерой π; $0<\mathbf{M}_\pi\tau<\infty$; ядро $Q(x,dy\times dt)$ нерешетчато, и $g\in\mathscr{K}^+(\pi)$. Тогда если

$$\pi_*\left\{x\in X:\sup_{t\geqslant 0}U*g(x,t)<\infty\right\}>0, \tag{121}$$

то

$$\lim_{t\to\infty}U*g(x,t)=\frac{1}{\mathbf{M}_\pi\tau}\int\pi(dy)\int_0^\infty dv\,g(y,v)\quad \pi\text{-п. в.}$$

Теорема 28. Пусть вложенная цепь Маркова $x(\tau_k)$, $k=0,1,\ldots,$ — харрисова с инвариантной мерой π; $0<\mathbf{M}_\pi\tau<\infty$; ядро $Q(x,dy\times dt)$ решетчато с шагом Δ и функцией сдвига $c(x)$. Тогда если функция $g(x,t)$ $\mathscr{B}\otimes\mathscr{B}_+$-измерима, $g(x,t)\geqslant 0$, и

$$\int \pi(dx) \sum_{k\geqslant 0} g(x, n\Delta + c(x)) < \infty,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} U * g(x, n\Delta + c(x)) = \frac{\Delta}{\mathbf{M}_\pi \tau} \int \pi(dy) \sum_{k\geqslant 0} g(y, k\Delta + c(y)) \quad \pi\text{-п. в.}$$

Замечание 15. Функция сдвига $c(x)$ определена с точностью до аддитивной $(\mathrm{mod}\,\Delta)$ добавки. Поэтому в условиях теоремы

$$\lim_{n\to\infty} U * g(x, n\Delta + c(x) + s) = \\ = \frac{\Delta}{\mathbf{M}_\pi \tau} \int \pi(dy) \sum_{k} g(y, n\Delta + c(y) + s) \quad \pi\text{-п. в.} \tag{122}$$

для всех вещественных s. Это, в частности, означает отсутствие предела $U * g(x, t)$ при $t\to\infty$, если только правую часть в (122) можно изменить с помощью параметра s. Так что условие нерешетчатости в теореме 27 нельзя ослабить без уменьшения класса функций g.

Замечание 16. В отличие от теоремы 27, условие (121) в теореме 28 отсутствует. Это дает основания надеяться, что утверждение теоремы 27 также справедливо без этого, наиболее неудобопроверяемого условия. Однако на сегодняшний день это только гипотеза.

Теорема 29. Пусть вложенная цепь Маркова $x(\tau_k)$, $k=0, 1, \ldots$, харрисова с инвариантной мерой π; $0 < \mathbf{M}_\pi \tau < \infty$; ядро $Q_k(x, dy \times dt)$ при некотором натуральном k несингулярно. Тогда если $\mathscr{B} \otimes \mathscr{B}_+$ — измеримая функция $g(x, t) \geqslant 0$ удовлетворяет условию (121);

$$\lim_{t\to\infty} g(x, t) = 0 \quad \pi\text{-п. в.};$$

$$\int \pi(dx) \int_0^\infty g(x, t)\, dt < \infty;$$

$$\int^* \pi(dx) \sup_{t\geqslant 0} g(x, t) < \infty;$$

то

$$\lim_{t\to\infty} U * g(x, t) = \frac{1}{\mathbf{M}_\pi \tau} \int \pi(dy) \int_0^\infty g(y, v)\, dv \quad \pi\text{-п. в.}$$

Замечание 17. Утверждения теорем 28 и 29 имеют место равномерно по классу $\mathscr{B} \otimes \mathscr{B}_+$-измеримых функций

$$\mathscr{H}^+(b) = \{g : 0 \leqslant g(x, t) \leqslant b(x, t)\},$$

если только $\mathscr{B}\times\mathscr{B}_+$-измеримая функция $b(x,t)\geqslant 0$ удовлетворяет условиям этих теорем, то есть

$$\int \pi(dx)\sum_{k\geqslant 0} b(x,\ k\Delta+c(x))<\infty,$$

для теоремы 28 и

$$\pi_*\{x\in X:\sup_{t\geqslant 0} U*b(x,t)<\infty\}>0,$$

$$\lim_{t\to\infty} b(x,t)=0 \quad \pi\text{-п. в.};$$

$$\int \pi(dx)\int_0^\infty b(x,t)\,dt<\infty;$$

$$\int^* \pi(dx)\sup_{t\geqslant 0} b(x,t)<\infty,$$

для теоремы 29.

5.4. Финальные вероятности. Их изучение основано на представлении

$$\mathbf{M}_x \xi S_t = U*g(x,t), \tag{123}$$

с

$$g(x,t)=\mathbf{M}_x(\xi S_t)\,I_{\{0\leqslant t<\tau\}},$$

которое достаточно просто следует из (101) и неограниченности последовательности τ_k, $k=0, 1, \ldots$

Заметим также, что соотношение (118) в точности означает, что

$$\tau-c(x(0))+c(x(\tau))\in\{0,\ \Delta,\ 2\Delta, \ldots\} \quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.}$$

для π-почти всех $x\in X$, и, следовательно, случайная величина

$$\nu=\frac{1}{\Delta}[\tau-c(x(0)+c(x(\tau))], \tag{124}$$

принимает $\mathbf{P}_\pi$-п. в. целые неотрицательные значения. Аналогичное утверждение справедливо и для момента времени $\mathfrak{t}$, причем с теми же Δ и функцией $c(x)$, т. е. случайная величина

$$\varkappa=\frac{1}{\Delta}[\mathfrak{t}-c(x(0))+c(x(\mathfrak{t}))], \tag{125}$$

$\mathbf{P}_\rho$-п. н. целочисленна и неотрицательна.

Вообще [15], ядро $P(x,\ dy\times dt)=\mathbf{P}_x\{x(\mathfrak{t})\in dy,\ \mathfrak{t}\in dt\}$ решетчато, нерешетчато, сингулярно или несингулярно одновременно с ядром $Q(x,\ dy\times dt)$.

Теорема 30. Если в условиях теоремы 25 ядро $Q(x,dy\times dt)$ решетчато с шагом Δ и функцией сдвига $c(x)$, то найдется такое π-нулевое множество X_0, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}_x\xi S_{n\Delta+c(x)}=\frac{1}{\mathbf{M}_\pi\nu}\mathbf{M}_\pi\sum_{k=0}^{\nu-1}\xi S_{k\Delta+c(x(0))}, \tag{126}$$

для всех $x\notin X_0$ и всех ограниченных $\mathscr{X}$-измеримых величин ξ.

Доказательство достаточно провести для $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. В этом случае $g(x, t) \geqslant 0$, и

$$\int \pi(dx) \sum_{k \geqslant 0} g(x, k\Delta + c(x)) = \mathbf{M}_\pi \sum_{k=0}^{\nu-1} \xi S_{k\Delta + c(x(0))}.$$

Кроме того,

$$\mathbf{M}_\pi \tau = \Delta \mathbf{M}_\pi \nu.$$

Применяя к (123) теорему 28, убеждаемся, что (126) имеет место π-п. в. на X. Обозначим через X_0 множество тех $x \in X$, для которых

$$\mathbf{P}_x\{[\mathfrak{t} - c(x(0)) + c(x(\mathfrak{t}))] \text{ кратно } \Delta\} < 1. \qquad (127)$$

Тогда $\rho(X_0) = 0$ в силу (125). Значит, и $\pi(X_0) = 0$. Кроме того, из (102) следует, что при $x \notin X_0$ левая часть (126) представима в виде

$$\mathbf{M}_x [(\xi S_{n\Delta + c(x)}) I_{\{n < \varkappa\}}] +$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} \int \rho(dy) \mathbf{P}_x \{\varkappa = k \mid x(\mathfrak{t}) = y\} \mathbf{M}_y \xi S_{(n-k)\Delta + c(y)}.$$

Первое слагаемое для всех $x \notin X_0$ стремится к нулю при $n \to \infty$, а второе в силу абсолютной непрерывности ρ относительно π — к правой части (126) также для всех $x \notin X_0$, что и требовалось доказать.

Теорема 31. Пусть в условиях теоремы 25 ядро $Q(x, dy \times dt)$ нерешетчато. Тогда если $\mathscr{X}$-измеримая величина ξ ограниченна, и случайный процесс ξS_t, $t \geqslant 0$ стохастически непрерывен относительно π-почти всех вероятностей $\mathbf{P}_x$, $x \in X$, то

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{M}_x \xi S_t = \frac{1}{\mathbf{M}_\pi \tau} \mathbf{M}_\pi \int_0^\tau \xi S_u du, \qquad (128)$$

для всех $x \in X$.

Доказательство. Пусть, как и в предыдущей теореме, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. Обозначим

$$f(x, t) = \mathbf{M}_x (\xi S_t) I_{\{0 \leqslant t < \mathfrak{t}\}};$$

$$V(x, dy \times dt) = \sum_{k \geqslant 0} \mathbf{P}_x \{x(\mathfrak{t}_k) \in dy, \ \mathfrak{t}_k \in dt\},$$

и применим представление (123) с $\mathfrak{t}$ в качестве τ. Получим

$$\mathbf{M}_x \xi S_t = V * f(x, t). \qquad (129$$

Условие (121) в данном случае тривиально выполнено. Чтобы применить к представлению (129) теорему 27, осталось убедиться в том, что $f \in \mathscr{K}^+(\rho)$. С этой целью заметим, что стохастическая непрерывность процесса ξS_t, $t \geqslant 0$, обеспечивает правую непрерывность по t функции $f(x, t)$ для π-почти всех $x \in X$.

Значит, достаточно проверить следующие аналоги условий (120):

$$\int \rho(dx) \sum_{n\geqslant 0} \sup_{n\leqslant t\leqslant n+1} f(x, t) < \infty, \tag{130}$$

и

$$\lim_{\Delta\downarrow 0} \Delta \int \rho(dx) \sum_{n\geqslant 0} \left\{ \sup_{n\Delta\leqslant t\leqslant n\Delta+\Delta} f(x, t) - \inf_{n\Delta\leqslant t\leqslant n\Delta+\Delta} f(x, t) \right\} = 0. \tag{131}$$

Для проверки (130) воспользуемся очевидным неравенством

$$\sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} f(x, t) \leqslant \mathbf{P}_x\{\alpha < \mathfrak{t}\}, \tag{132}$$

в силу которого интеграл в (130) не больше, чем

$$\sum_{n\geqslant 0} \mathbf{P}_\rho\{n < \mathfrak{t}\} \leqslant 1 + \mathbf{M}_\rho \mathfrak{t} < \infty.$$

Условие (131) аналогично вытекает из немногим более сложного, чем (132), неравенства

$$\sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} f(x, t) - \inf_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta} f(x, t) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\alpha\leqslant t\leqslant u\leqslant\beta} \mathbf{M}_x |\xi S_t - \xi S_u| + \mathbf{P}_x\{\alpha < \mathfrak{t} \leqslant \beta\}.$$

Действительно, зафиксируем произвольное число $c>0$ и оценим по этому неравенству слагаемые с номерами $n<c/\Delta$ подынтегральной суммы в (131). В слагаемых с бóльшими номерами отбросим inf, а sup оценим по неравенству (132). В результате получим, что выражение под знаком предела в (131) не превосходит

$$2\Delta + c\int \rho(dx) \sup_{\substack{0\leqslant t\leqslant u\leqslant c\\ |t-u|\leqslant\Delta}} \mathbf{M}_x |\xi S_t - \xi S_u| + \int_c^\infty \mathbf{P}_\rho\{\mathfrak{t} > t\}\, dt.$$

Выбором достаточно большого c третье слагаемое здесь может быть сделано сколь-угодно малым, а второе слагаемое для данного c стремится к нулю при $\Delta\downarrow 0$ в силу равномерной стохастической непрерывности процесса ξS_t, $0\leqslant t\leqslant c$, относительно π-почти всех, а значит, и ρ-почти всех $x\in X$. Этим доказано (131), а вместе с ним и включение $f\in\mathscr{K}^+(\rho)$.

Применяя теорему 27 и учитывая (104), получаем, что (128) имеет место ρ-почти всюду на X. С другой стороны,

$$\mathbf{M}_x \xi S_t = f(x, t) + \int \rho(dy) \int_0^t G(x, y, du)\, \mathbf{M}_y \xi S_{t-u}, \tag{133}$$

где $G(x, y; du) = \mathbf{P}_x(\mathfrak{t}\in du \mid x(\mathfrak{t}) = y)$.

Так как $0 \leqslant f(x, t) \leqslant \mathbf{P}_x\{t < \mathfrak{t}\} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ для всех $x\in X$, то (133) влечет (128) в полном объеме.

Наконец, непосредственно из представления (129), теоремы 29 с $\mathfrak{t}$ в качестве τ и ρ вместо π, и уравнения (133) вытекает

Теорема 32. Если в условиях теоремы 25 ядро $Q_k(x, dy \times dt)$ при некотором $k \geqslant 1$ несингулярно, то

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{M}_x \xi S_t = \frac{1}{\mathbf{M}_\pi \tau} \mathbf{M}_\pi \int_0^\tau \xi S_u du$$

для всмех $x \in X$ и всех ограниченных $\mathscr{X}$-измеримых величин ξ.

Замечание 18. Согласно замечанию 16, утверждения теорем 30 и 32 имеют место *равномерно* по любому равномерно ограниченному классу $\mathscr{X}$-измеримых величин ξ. В роли функции $b(x, t)$ из замечания 16 выступает функция $b(x, t) = c\mathbf{P}_x\{\mathfrak{t} \geqslant t\}$, где c — константа, ограничивающая все величины ξ из данного класса. При этом, конечно, имеется в виду вариант теорем 28 и 29 с $\mathfrak{t}$ в качестве τ.

Замечание 19. Пусть X — метрическое полное сепарабельное пространство, $\mathscr{B}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств, а процесс $x(t)$, $t \geqslant 0$, стохастически непрерывен относительно π-почти всех вероятностей $\mathbf{P}_x$, $x \in X$. Тогда для любой непрерывной ограниченной функции f на X случайная величина $\xi = f(x(0))$ ограниченна, $\mathscr{X}$-измерима, а случайный процесс $\xi S_t = f(x(t))$ стохастически непрерывен относительно π-почти всех вероятностей $\mathbf{P}_x$, $x \in X$. Значит, в условиях теоремы

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{M}_x f(x(t)) = \frac{1}{\mathbf{M}_\pi \tau} \mathbf{M}_\pi \int_0^\tau f(x(s))\, ds.$$

Другими словами, при каждом $x \in X$ распределение вероятностей $P_t(x, B) = \mathbf{P}_x\{x(t) \in B\}$, $B \in \mathscr{B}$ слабо сходится при $t \to \infty$ к распределению вероятностей

$$P^{\cdot}(B) = \frac{1}{\mathbf{M}_\pi \tau} \int_0^\infty \mathbf{P}_\pi\{x(t) \in B,\ t < \tau\}\, dt, \quad B \in \mathscr{B}.$$

В условиях же теоремы 32 имеем

$$\sup_{B \in \mathscr{B}} |P_t(x, B) - P^{\cdot}(B)| \underset{t\to\infty}{\to} 0$$

для всех $x \in X$.

5.5. Предельные теоремы для отношений. Так же, как теорема 25 ставит задачу о предельном поведении $\mathbf{M}_x \xi S_t$ при $t \to \infty$, так и теорема 26 поднимает вопрос о сходимости отношений $\mathbf{M}_x \int_0^t \xi S_u du / \mathbf{M}_y \int_0^t \eta S_u du$ к правой части (117) при $t \to \infty$.

Переобозначим для краткости $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_3(D)$ — третий член последовательности моментов марковского вмешательства, индуцированной моментом $\mathfrak{m}(D)$ из (106). На множество D, кроме условий (107), наложим еще два:

$$\sup_{x \in D} \mathbf{P}_x\{\mathfrak{t} > t\} \underset{t\to\infty}{\to} 0; \quad \sup_{y \in D} \mathbf{P}_\rho\{\mathfrak{t} > t \mid x(\mathfrak{t}) = y\} \underset{t\to\infty}{\to} 0. \tag{134}$$

Покажем, что при таком выборе D

$$\sup_{x, y \in D} \mathbf{P}_x\{\mathfrak{m} > t \mid x(\mathfrak{m}) = y\} \underset{t\to\infty}{\to} 0. \tag{135}$$

Так как $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}(D)$, то, согласно (106),

$$\mathbf{P}_x\{\mathfrak{m} > t \mid x(\mathfrak{m}) = y\} \leqslant \mathbf{P}_x\{\mathfrak{m}(D) > t/3) + \mathbf{P}_{\pi_D}\{\mathfrak{m}(D) > t/3\} +$$
$$+ \mathbf{P}_{\pi_D}\{\mathfrak{m}(D) > t/3 \mid x(\mathfrak{m}(D)) = y\}.$$

Значит, для доказательства (135) достаточно убедиться в том, что

$$\sup_{x \in D} \mathbf{P}_x\{\mathfrak{m}(D) > t\} \underset{t\to\infty}{\to} 0,$$

$$\sup_{y \in D} \mathbf{P}_{\pi_D}\{\mathfrak{m}(D) > t \mid x(\mathfrak{m}(D)) = y\} \underset{t\to\infty}{\to} 0. \tag{136}$$

Для $\lambda \leqslant 0$ обозначим

$$\varphi_\lambda(x, y) = \mathbf{M}_x(e^{\lambda\mathfrak{t}} \mid x(\mathfrak{t}) = y);$$
$$\varphi_\lambda(x) = \mathbf{M}_x e^{\lambda\mathfrak{t}};$$
$$\varphi^*_\lambda(y) = \mathbf{M}_\rho(e^{\lambda\mathfrak{t}} \mid x(\mathfrak{t}) = y);$$
$$\psi_\lambda(x, y) = \mathbf{M}_x(e^{\lambda\mathfrak{m}(D)} \mid x(\mathfrak{m}(D)) = y);$$
$$\psi_\lambda(x) = \mathbf{M}_x e^{\lambda\mathfrak{m}(D)};$$
$$\psi^*_\lambda(y) = \mathbf{M}_{\pi_D}(e^{\lambda\mathfrak{m}(D)} \mid x(\mathfrak{m}(D)) = y).$$

Соотношения (136) эквивалентны следующим

$$\inf_{x \in D} \psi_\lambda(x) \underset{\lambda\to 0}{\to} 1; \quad \inf_{y \in D} \psi^*_\lambda(y) \underset{\lambda\to 0}{\to} 1. \tag{137}$$

Непосредственно из определения момента времени $\mathfrak{m}(D)$ имеем для функции $\Psi_\lambda(x, y)$ пару уравнений — «прямое»:

$$\psi_\lambda(x, y) = \varepsilon\pi(D)\varphi_\lambda(x, y) + \int \psi_\lambda(x, z)\varphi_\lambda(z, y)[1 - h(z)]\rho(dz), \tag{138}$$

и «обратное»:

$$\psi_\lambda(x, y) = \varepsilon\pi(D)\varphi_\lambda(x, y) + \int \varphi_\lambda(x, z)\psi_\lambda(z, y)[1 - h(z)]\rho(dz). \tag{139}$$

Число ε и функция h здесь те же, что и в (103). Интегрируя (138) по $\pi_D(dx)$ и учитывая, что $\varepsilon\pi(D)\pi_D(dx) = h(x)\rho(dx)$, получаем

$$\psi^*_\lambda(y) = \varphi^*_\lambda(y) - \int [1 - \psi^*_\lambda(z)]\varphi_\lambda(z, y)[1 - h(z)]\rho(dz).$$

Заменяя в интеграле сомножитель $\varphi_\lambda(z, y)$ на единицу, приходим к неравенству

$$\psi_\lambda^*(y) \geqslant \varphi_\lambda^*(y) - \int [1-\psi_\lambda^*(z)]\,[1-h(z)]\,\rho(dz),$$

которое вместе со вторым из условий (134) влечет второе из условий (137).

Первое вполне аналогично вытекает из «обратного» уравнения (139).

Попутно мы установили, что

$$\sup_{y \in D} \mathbf{P}_x \{\mathfrak{m} > t \mid x(\mathfrak{m}) = y\} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0 \tag{140}$$

для всех $x \in X$.

Теорема 33. В условиях теоремы 26 для всякой ограниченной $\mathscr{X}$-измеримой величины $\xi \geqslant 0$ с $\mathbf{M}_\pi \int\limits_0^\tau \xi S_u du < \infty$ существует такое π-нулевое множество $X_\xi \in \mathscr{B}$, что

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_0^t \mathbf{M}_x \xi S_u du \Big/ \int\limits_0^t \mathbf{M}_y \eta S_u du = \mathbf{M}_\pi \int\limits_0^\tau \xi S_u du / \mathbf{M}_\pi \int\limits_0^\tau \eta S_u du \tag{141}$$

для всех $x, y \notin X_\xi$ и всех $\mathscr{X}$-измеримых величин ξ, η с $|\xi| \leqslant \xi$, $|\eta| \leqslant \xi$.

Доказательство. Считая выполненным условие (135), обозначим

$$W(x, dy \times dt) = \sum_{k \geqslant 0} \mathbf{P}_x \{x(\mathfrak{m}_k) \in dy,\ \mathfrak{m}_k \in dt\};$$

$$W(t) = \int\limits_D \pi_D(dx)\, W(x, t) = \sum_{k \geqslant 0} \mathbf{P}_{\pi_D} \{\mathfrak{m}_k \leqslant t\}.$$

Здесь, как обычно $\mathfrak{m}_k$ обозначает k-ый момент марковского вмешательства, индуцированный моментом $\mathfrak{m}$. В данной ситуации можно взять $\mathfrak{m}_k = \mathfrak{m}_{3k}(D)$.

Лемма 4. В условиях теоремы 26 существует $\delta > 0$ такое, что

$$W(t+s) - W(t) \leqslant \frac{s+\delta}{\delta^2}$$

для всех $s, t \geqslant 0$.

Доказательство. По определению момента $\mathfrak{m}$ имеем

$$\mathbf{P}_x \{\mathfrak{m} > t \mid x(\mathfrak{m}) = y\} \geqslant \mathbf{P}_x \{\mathfrak{m}_2(D) - \mathfrak{m}_1(D) > t \mid x(\mathfrak{m}_3(D)) = y\}.$$

Согласно (106), правая часть здесь равна $\mathbf{P}_{\pi_D} \{\mathfrak{m}(D) > t\}$. Значит,

$$\mathbf{P}_x \{\mathfrak{m} > \delta \mid x(\mathfrak{m}) = y\} \geqslant \delta \tag{142}$$

при некотором $\delta > 0$ сразу для всех x, y.

Теперь требуемое вытекает из неравенства

$$\int_X \int_0^t W(x, dy \times du)\, \mathbf{P}_y\{\mathfrak{m} > t - u\} \leqslant 1.$$

В силу (142) его левая часть при $t > \delta$ не меньше, чем $\delta W(x, X \times [t-\delta, t])$. Следовательно,

$$W(t) - W(t-\delta) \leqslant 1/\delta,$$

что уже очевидным образом влечет утверждение леммы.

Лемма 5. В условиях теоремы 26

$$\lim_{t \to \infty} \int_0^t \mathbf{M}_x \xi S_u du \Big/ \int_0^t \mathbf{M}_{\pi_D} \xi S_u du = 1$$

для тех $x \in X$ и тех ограниченных $\mathscr{X}$-измеримых $\xi > 0$, для которых

$$\mathbf{M}_x \int_0^{\mathfrak{m}} \xi S_u du < \infty.$$

Доказательство. Пусть $0 < \xi \leqslant 1$. Обозначим

$$h(x, t) = \mathbf{M}_x (\xi S_t) I_{\{t < \mathfrak{m}\}};$$

$$H(x, y; du) = \mathbf{P}_x \{\mathfrak{m} \in du \mid x(\mathfrak{m}) = y\}.$$

Согласно (106), имеем

$$\mathbf{M}_x \xi S_t = h(x, t) + \int_D \pi_D(dy) \int_0^t H(x, y; du)\, \mathbf{M}_y \xi S_{t-u}.$$

Отсюда

$$\int_0^t \mathbf{M}_x \xi S_u du - \int_0^t \mathbf{M}_{\pi_D} \xi S_u du = \int_0^t h(x, u)\, du -$$

$$- \int_D \pi_D(dy) \int_0^t \overline{H}(x, y; u)\, \mathbf{M}_y \xi S_{t-u} du,$$

где $\overline{H}(x, y; u) = 1 - H(x, y; [0, u])$. В силу (140), для всякого $\varepsilon > 0$ и всякого $x \in X$ найдется такое $T = T(x, \varepsilon)$, что

$$\overline{H}(x, y; T) > \varepsilon.$$

Пусть $\mathbf{M}_x \int_0^{\mathfrak{m}} \xi S_u du < \infty$ и $t \geqslant T$. Тогда $\int_0^{\infty} h(x, u)\, du < \infty$, и

$$\left| \int_0^t \mathbf{M}_x \xi S_u du - \int_0^t \mathbf{M}_{\pi_D} \xi S_u du \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty h(x,\ u)\,du + T + \varepsilon \int_0^t \mathbf{M}_{\pi_D}\xi S_u\,du.$$

Теперь, чтобы завершить доказательство, достаточно заметить, что

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t \mathbf{M}_{\pi_D}\xi S_u\,du = +\infty.$$

Лемма 6. В условиях теоремы 26

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{W(t)}\int_0^t \mathbf{M}_x\xi S_u\,du = \mathbf{M}_{\pi_D}\int_0^{\mathfrak{m}} \xi S_u\,du,$$

для тех $x \in X$ и тех ограниченных $\mathscr{X}$-измеримых величин ξ, для которых

$$\mathbf{M}_x\int_0^{\mathfrak{m}} |\xi S_u|\,du < \infty,\quad \mathbf{M}_\pi\int_0^{\tau} |\xi S_u|\,du < \infty.$$

Доказательство. Пусть, как обычно, $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. Согласно лемме 5, достаточно убедиться в том, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{W(t)}\int_0^t \mathbf{M}_{\pi_D}\xi S_u\,du = \mathbf{M}_{\pi_D}\int_0^{\mathfrak{m}} \xi S_u\,du.$$

Вариант представления (123) с $\mathfrak{m}$ в качестве τ влечет

$$\mathbf{M}_x\xi S_t = h(x,\ t) +$$

$$+\int_X\int_0^t W(x,\ dy \times du)\int_D \pi_D(dz)\int_0^{t-u} H(y,\ z;\ dv)\,h(z,\ t-u-v).$$

Отсюда

$$\int_0^t \mathbf{M}_{\pi_D}\xi S_u\,du - \int_0^t h(t-u)\,W(u)\,du = \int_0^t h(u)\,du -$$

$$-\int_D \pi_D(dx)\int_D\int_0^t W(x,\ dy\times du)\int_D \pi_D(dz)\times$$

$$\times\int_0^{t-u}\overline{H}(y,\ z;\ v)\,h(z,\ t-u-v)\,dv,$$

где $h(t) = \int_D \pi_D(dx)\,h(x,\ t) = \mathbf{M}_{\pi_D}(\xi S_t,\quad t < \mathfrak{m})$.

Используя те же соображения, что и при доказательстве леммы 5, получаем

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \mathbf{M}_{\pi_D} \xi S_u du \Big/ \int_0^t h(t-u) W(u)\, du = 1.$$

Далее, по лемме 4 при $t > T$ имеем

$$\left| \int_0^t h(t-u) W(u)\, du - W(t) \int_0^\infty h(u)\, du \right| \leqslant$$

$$\leqslant W(t) \int_T^\infty h(v)\, dv + \frac{T+\delta}{\delta^2} \int_0^\infty h(v)\, dv.$$

Так как $W(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, то после деления на $W(t)$ второе слагаемое в последней сумме стремится к нулю при $t\to\infty$ для всякого T, а первое, также после деления на $W(t)$, может быть сделано сколь-угодно малым за счет выбора достаточно большого T. Таким образом,

$$\int_0^t h(t-u) W(u)\, du / W(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty h(u)\, du = \mathbf{M}_{\pi_D} \int_0^{\mathfrak{m}} \xi S_u du,$$

что и завершает доказательство.

Из лемм 5, 6 тривиально следует, что (141) имеет место для x, y вне множества $X_\zeta = \left\{ x \in X : \mathbf{M}_x \int_0^{\mathfrak{m}} \zeta S_u du = \infty \right\}$. По определению моментов $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{m}(D)$ имеем

$$\mathbf{M}_x \int_0^{\mathfrak{m}} \zeta S_u du = \mathbf{M}_x \int_0^{\mathfrak{m}(D)} \zeta S_u du + 2\mathbf{M}_{\pi_D} \int_0^{\mathfrak{m}(D)} \zeta S_u du,$$

и

$$\mathbf{M}_x \int_0^{\mathfrak{m}(D)} \zeta S_u du = \mathbf{M}_x \int_0^t \zeta S_u du +$$

$$+ \int \rho(dy) [1 - h(y)]\, \mathbf{M}_y \int_0^{\mathfrak{m}(D)} \zeta S_u du.$$

Согласно (110), второе слагаемое в правой части первого из этих равенств конечно. Следовательно, конечно и второе слагаемое в правой части второго равенства. Значит,

$$X_\zeta = \left\{ x \in X : \mathbf{M}_x \int_0^t \zeta S_u du = \infty \right\}.$$

В силу (104) $\rho(X_\xi) = 0$, или, что то же самое, $\pi(X_\xi) = 0$. Теорема доказана.

Несложный анализ ее доказательства позволяет утверждать, что имеет место

Теорема 34. В условиях теоремы 33

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \mathbf{M}_l \xi S_u du \Big/ \int_0^t \mathbf{M}_m \eta S_u du = \mathbf{M}_\pi \int_0^\tau \xi S_u du \Big/ \mathbf{M}_\pi \int_0^\tau \eta S_u du,$$

для тех вероятностных мер l, m на $(X, \mathscr{B})$ и тех ограниченных $\mathscr{X}$-измеримых величин ξ, η, для которых $\mathbf{M}_l \int_0^t |\xi S_u| du < \infty$,

$$\mathbf{M}_m \int_0^t |\eta S_u| du < \infty, \quad \mathbf{M}_\pi \int_0^\tau |\xi S_u| du < \infty,$$

$$\mathbf{M}_\pi \int_0^\tau |\eta S_u| du < \infty, \quad \mathbf{M}_\pi \int_0^\tau \eta S_u du \neq 0.$$

Следствие 17. В условиях теоремы 26.

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t \mathbf{M}_m f(x(u)) du \Big/ \int_0^t \mathbf{M}_l g(x(u)) du =$$

$$= \mathbf{M}_\pi \int_0^\tau f(x(u)) du / \mathbf{M}_\pi \int_0^\tau g(x(u)) du,$$

для тех ограниченных $\mathscr{B}$-измеримых функций f, g и тех вероятностных мер m, l на $\mathscr{B}$, для которых

$$\mathbf{M}_m \int_0^t |f(x(u)) du| < \infty, \quad \mathbf{M}_l \int_0^t |g(x(u))| du < \infty,$$

$$\mathbf{M}_\pi \int_0^\tau |f(x(u))| du < \infty, \quad \mathbf{M}_\pi \int_0^\tau |g(x(u))| du < \infty,$$

$$\mathbf{M}_\pi \int_0^\tau g(x(u)) du \neq 0.$$

5.6. Применения к харрисовым цепям. Пусть x_k, $k = 0, 1, \ldots,$ — харрисова цепь с инвариантной мерой π в фазовом пространстве $(X, \mathscr{B})$. Тогда $\tau = 1$ — момент марковского вмешательства в эволюцию случайного процесса $x(t) = x_n$ при $n \leqslant t < n+1$, $n = 0, 1, \ldots$ В этой ситуации $\tau_n = n$, и, стало быть, вложенная в процесс $x(t)$, $t \geqslant 0$ цепь Маркова, отвечающая моменту $\tau = 1$, совпадает с исходной харрисовой цепью x_k, $k = 0, 1, \ldots$ Момент марковского вмешательства $\mathfrak{t}$ из (102) в данном случае совпадает с моментом $\mathfrak{m}$ из (94). Кроме того,

$$\int_0^t f(x(u))\,du = \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k),$$

и, следовательно,

$$\mathbf{M}_x \int_0^t f(x(u))\,du = Mf(x),$$

где, напомним, ядро $M(x, B)$ определено по (98). Очевидно также, что $\mathbf{M}_\pi \int_0^\tau f(x(u))\,du = \int \pi(dx)\, f(x)$. Таким образом, утверждения (97), (99) являются прямыми следствиями теорем 33, 34.

Переходя к теоремам 23 и 24, заметим, что ядро $Q(x, dy \times dt)$ из п. 5.3 в рассматриваемой ситуации очевидным образом решетчато, причем шаг решетки Δ равен периоду цепи x_k, $k=0, 1, \ldots$, а функция сдвига $c(x)$ самым тесным образом связана с циклическим разложением $C_0, C_1, \ldots, C_{\Delta-1}$, а именно: $c(x)=0$ при $x \in C_0$, и $c(x)=\Delta-k$ при $x \in C_k$, $k=1, \ldots, \Delta-1$.
Последнее утверждение не столь очевидно, как решетчатость ядра $Q(x, dy \times dt)$, но и не настолько нетривиально, чтобы доказывать его здесь.

Случайная величина ν из (124) в данном случае равна $I_{\{c(x_0)=0\}}$ или, что то же самое, $I_{C_0}(x_0)$.

Если цепь непериодична, то $\Delta=1$ и $c(x)=0$, а множество X_0 из (127) пусто. Теперь, чтобы получить теоремы 23 и 24 из теоремы 30 и замечания 18, осталось заметить, что условие $\mathbf{M}_\pi \tau < \infty$ при $\tau=1$ равнозначно условию конечности меры π.

§ 6. Эргодические процессы Маркова

По самому определению однородного марковского процесса $x(t)$, $t \geqslant 0$ каждый неслучайный момент времени является моментом марковского вмешательства в его эволюцию. Отсюда следует, что любая не зависящая от процесса $x(t)$, $t \geqslant 0$, случайная величина $\tau \geqslant 0$ также является моментом марковского вмешательства.

Как отмечено в начале § 5, если τ не зависит от процесса $x(t)$, $t \geqslant 0$, то условие счетной порожденности (с точностью до пополнения по системе мер $\mathbf{P}_x$, $x \in X$) σ-алгебры $\mathscr{X}$ может быть опущено (остальные четыре требования на процессе $x(t)$, $t \geqslant 0$ из § 5 предполагаются выполненными). В этом случае последовательность моментов марковского вмешательства $0 = \tau_0 \leqslant \tau_1 \leqslant \ldots$ есть не что иное, как последовательность сумм независимых одинаково распределенных с τ величин. Из всех возможных распределений величины τ нам более других подходит показательное.

Итак, пусть момент марковского вмешательства τ не зависит от однородного марковского процесса $x(t)$, $t \geqslant 0$, и $\mathbf{P}\{\tau > t\} = e^{-t}$, $t \geqslant 0$. При таком выборе τ переходная вероятность соответствующей вложенной цепи Маркова приобретает вид

$$Q(x, B) = \int_0^\infty e^{-t} P_t(x, B)\, dt, \quad x \in X, \quad B \in \mathscr{B},$$

где $P_t(x, B) = \mathbf{P}_x\{x(t) \in B\}$ — переходная вероятность процесса $x(s)$, $s \geqslant 0$ за время t.

6.1. Эргодичность. Очевидным необходимым условием эргодичности процесса $x(t)$, $t \geqslant 0$, является существование и независимость от $x \in X$ предела

$$\pi(B) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t P_u(x, B)\, du \tag{143}$$

для всех $x \in X$, $B \in \mathscr{B}$.

Менее очевидно, что, как утверждает следующая теорема, условие (143) достаточно для эргодичности.

Теорема 35. Однородный марковский процесс $x(t)$, $t \geqslant 0$, эргодичен тогда и только тогда, когда предел (143) существует для всех $x \in X$, $B \in \mathscr{B}$ и не зависит от x.

Доказательство. Левая часть (143) как предел сходящейся на всех множествах из $\mathscr{B}$ последовательности вероятностных мер сама является вероятностной мерой на $\mathscr{B}$, и

$$\int_X \pi(dx) P_s(x, B) = \pi(B)$$

для всех $s \geqslant 0$, $B \in \mathscr{B}$. Отсюда вытекают Q-инвариантность меры π и следующий аналог соотношения (143):

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Q^k(x, B) = \pi(B), \quad x \in X, \quad B \in \mathscr{B}.$$

По теореме 19 это влечет π-возвратность вложенной цепи Маркова $x(\tau_k)$, $k = 0, 1, \ldots$, а так как σ-алгебра $\mathscr{B}$ счетно порождена по предположению, то вложенная цепь — харрисова. При этом $\mathbf{M}_\pi\ \tau = 1$. По теореме 25 процесс $x(t)$, $t \geqslant 0$, эргодичен, что и требовалось доказать.

В рассматриваемой ситуации правая часть (113) равна

$$\int_0^\infty e^{-t} \mathbf{M}_\pi \int_0^t \xi S_u\, du = \int_0^\infty e^{-u} \mathbf{M}_\pi \xi S_u\, du,$$

что в силу марковского свойства и P_s-инвариантности меры π совпадает с $\mathbf{M}_\pi \xi$.

Таким образом, мы получили

Следствие 18. Если однородный марковский процесс $x(t)$, $t\geqslant 0$ удовлетворяет условию (143), то

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \xi S_u du = \mathbf{M}_\pi \xi \quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.}$$

для всех $x\in X$ и всех $\mathbf{P}_\pi$-интегрируемых $\mathscr{X}$-измеримых величин ξ.

В частном случае, когда $\xi = f(x(0))$, следствие дает сходимость

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(x(u))\,du = \int f(y)\,\pi(dy) \quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.}$$

для всех $x\in X$ и всех π-интегрируемых $\mathscr{B}$-измеримых функций f.

6.2. Финальные вероятности. Прежде всего заметим, что для марковского процесса $\mathbf{M}_x\xi S_t = \int P_t(x, dy) f(y)$, где $f(y) = \mathbf{M}_y\xi$. Поэтому вопрос о существовании финальных вероятностей эргодического процесса Маркова сводится к вопросу о поведении переходной вероятности $P_t(x, B)$ при $t\to\infty$.

Далее, для не зависящего от процесса $x(t)$, $t\geqslant 0$, показательно (с параметром единица) распределенного момента марковского вмешательства τ ядро $Q(x, dy\times dt)$ из п. 5.3 принимает вид

$$Q(x, dy\times dt) = P_t(x, dy)\, e^{-t} dt. \tag{144}$$

Решетчатость такого ядра равносильна существованию вещественного числа $\lambda\neq 0$ и комплексной $\mathscr{B}$-измеримой функции h с $|h(x)| = 1$ π-п. в., таких что

$$h(x(t)) = e^{-i\lambda t} h(x(0)) \quad \mathbf{P}_\pi\text{-п. н.}$$

для почти всех (по мере Лебега) $t\geqslant 0$.

Это дает основание называть *периодическим* эргодический процесс Маркова с решетчатым ядром (144), а шаг Δ — *периодом*. За функцией сдвига $c(x)$ название сохраняется.

Если пренебречь множествами меры нуль, то структуру периодического процесса $x(t)$, $t\geqslant 0$, можно описать следующим образом. Свяжем с каждой точкой z единичной окружности в комплексной плоскости множество $E_z = \{x\in X\colon h(x) = z\}$, где $h(x) = \exp\{2\pi i c(x)/\Delta\}$, $\pi = 3, 14\ldots$ Множества E_z при различных z не пересекаются и в сумме составляют все пространство X. Представим себе частицу, блуждающую в фазовом пространстве X по траектории периодического марковского процесса $x(t)$, $t\geqslant 0$, с периодом Δ и функцией сдвига $c(x)$. Тогда $c(x)$ равно времени, которое потратит частица, чтобы добраться из точки x до множества E_1 (или до любого другого заранее выделенного множества E_{z_0}). Если наблюдатель не различает положений частицы внутри множества E_z и в состоянии лишь фиксировать факт попадания в одно из множеств E_z, то ему траектория процесса будет представляться как равномерное движение по единичной окружности со скоростью $2\pi/\Delta$ по часовой стрелке.

Теорема 36. Пусть эргодический марковский процесс $x(t)$, $t\geqslant 0$, периодичен с периодом Δ и функцией сдвига $c(x)$. Тогда найдется такое π-нулевое множество X_0, что

$$\lim_{n\to\infty} P_{n\Delta+c(x)}(x, B)=\int \pi(dy)\,P_{c(y)}(y, B) \tag{145}$$

для всех $x\notin X_0$ равномерно по $B\in\mathscr{B}$.

Доказательство. Применительно к процессу $x(t)$, $t\geqslant 0$, с не зависящим от него показательно распределенным моментом марковского вмешательства τ теорема 30 и замечание 17 дают существование предела в левой части (145) для всех x вне некоторого π-нулевого множества X_0 равномерно по $B\in\mathscr{B}$. Обозначим этот предел $\pi_\Delta(B)$. Для его вычисления проинтегрируем левую часть (145) по мере π и перейдем к среднему арифметическому. В результате получим

$$\pi_\Delta(B)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k\langle 1}^{n}\int \pi(dx)\,P_{k\Delta+c(x)}(x, B). \tag{146}$$

Рассмотрим $\mathscr{X}$-измеримую величину $\eta=I_{\{x(c(x(0)))\in B\}}$. Заметим, что $\mathbf{M}_\pi\eta=\int \pi(dy)\,P_{c(y)}(y, B)$. По следствию 18 имеем

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t \eta S_u du=\mathbf{M}_\pi\eta \quad \mathbf{P}_x\text{-п. н.}$$

Следовательно, правая часть (145) совпадает $\mathbf{P}_\pi$-почти наверное с

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\Delta}\int_{c(x(0))}^{c(x(0))+n\Delta}\eta S_u du.$$

С другой стороны,

$$c(x(u))=c(x(0))+k\Delta+\Delta-u \qquad \mathbf{P}_\pi\text{-п. н.}$$

для почти всех $u\in(c(x(0))+k\Delta,\ c(x(0))+k\Delta+\Delta]$, $k=0, 1,\ldots$ Отсюда

$$x(c(x(0)))S_u=x(c(x(0))+k\Delta+\Delta)$$

для тех же u и k. Следовательно, выражение под знаком последнего предела равно

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_{\{x(c(x(0))+k\Delta)\in B\}},$$

а его среднее значение по вероятности $\mathbf{P}_\pi$ есть не что иное как выражение под знаком предела в правой части (146). Но в таком случае левая часть (146) должна совпадать с $\mathbf{M}_\pi\eta$, то есть с правой частью (145), что и требовалось доказать.

Следствие 19. В условиях теоремы 36

$$\lim_{n\to\infty} P_{n\Delta+s}(x, B) = \int \pi(dy) P_{c(y)-c(x)+s+\Delta}(y, B) \tag{147}$$

для всех $x \notin X_0$, $s \geqslant 0$, равномерно по $B \in \mathscr{B}$.

Формальная зависимсть правой части (147) от s подсказывает, что в условиях теоремы 36 предел $\lim\limits_{t\to\infty} P_t(x, B)$ не существует по крайней мере для некоторых $x \notin X_0$, $B \in \mathscr{B}$. Это в самом деле так, ибо для π-почти всех $x \in X$ и почти всех $t \geqslant 0$ условное распределение $x(t)$ при условии $x(0) = x$ сосредоточено на множестве $E_{z_t(x)}$, где $z_t(x) = \exp\left\{\frac{2\pi i}{\Delta}[c(x) - t]\right\}$, а при несравнимых $(\mathrm{mod}\,\Delta)$ значениях t множества $E_{z_t(x)}$ не пересекаются.

Следующее утверждение является прямым следствием теоремы

Теорема 37. Если эргодический марковский процесс $x(t)$, $t \geqslant 0$, непериодичен, то

$$\lim_{t\to\infty} \int P_t(x, dy) f(y) = \int \pi(dy) f(y) \tag{148}$$

для всех $x \in X$ и тех ограниченных $\mathscr{B}$-измеримых функций f, для которых случайный процесс $f(x(t))$, $t \geqslant 0$ стохастически непрерывен относительно π-почти всех вероятностей $\mathbf{P}_x$, $x \in X$.

Замечание. Пусть X — метрическое полное сепарабельное пространство, $\mathscr{B}$ — σ-алгебра его борелевских подмножеств. Тогда, если дополнительно к условиям теоремы 37 процесс $x(t)$, $t \geqslant 0$, стохастически непрерывен для π-почти всех начальных значений, то (148) имеет место для всех непрерывных ограниченных функций f на X, или, что то же самое, переходная вероятность $P_t(x, \cdot)$ слабо сходится к $\pi(\cdot)$ при $t \to \infty$ для всех $x \in X$.

Для формулировки следующего утверждения обозначим через $p(x, y, t)$ измеримый по совокупности переменных x, y, t вариант плотности абсолютно непрерывной компоненты переходной вероятности $P_t(x, dy)$ относительно инвариантной вероятности $\pi(dy)$.

Теорема 38. Переходная вероятность $P_t(x, B)$ эргодического марковского процесса сходится к $\pi(B)$ при $t \to \infty$ для всех $x \in X$, $B \in \mathscr{B}$ тогда и только тогда, когда

$$\sup_{t>0} \iint \pi(dx) \pi(dy) p(x, y, t) > 0. \tag{149}$$

При выполнении условия (149) сходимость $P_t(x, B)$ к $\pi(B)$ равномерна по $B \in \mathscr{B}$.

Доказательство. Необходимость. Условие (149) в точности означает, что при некотором $t > 0$ мера $\pi(dx) P_t(x, dy)$

на $(X \times X, \mathscr{B} \otimes \mathscr{B})$ несинглярна относительно меры $\pi(dx)\pi(dy)$. Пусть

$$\lim_{t \to \infty} P_t(x, B) = \pi(B), \quad x \in X, \quad B \in \mathscr{B}. \tag{150}$$

Тогда

$$\lim_{n \to \infty} \iint \pi(dx) P_n(x, dy) f(x, y) = \iint \pi(dx) \pi(dy) f(x, y) \tag{151}$$

для всех $\mathscr{B} \otimes \mathscr{B}$-измеримых ограниченных функций f. Если бы мера $\pi(dx)\pi(dy)$ оказалась сингулярна относительно каждой из мер $\pi(dx) P_n(x, dy)$, $n = 0, 1, \ldots$, то нашлась бы последовательность $\mathscr{B} \otimes \mathscr{B}$-измеримых функций $f_n(x, y)$, $n = 0, 1, \ldots$, таких, что $0 \leqslant f_n(x, y) \leqslant 1$,

$$\iint \pi(dx) \pi(dy) f_n(x, y) = 0, \quad \iint \pi(dx) P_n(x, dy) f_n(x, y) = 1$$

для всех $n = 0, 1, \ldots$ Положим $f(x, y) = \sup\limits_n f_n(x, y)$. Так как $f(x, y) \leqslant \sum\limits_{n \geqslant 0} f_n(x, y)$, то $\iint \pi(dx) \pi(dy) f(x, y) = 0$, а так как $f(x, y) \geqslant f_n(x, y)$, то

$$\iint \pi(dx) P_n(x, dy) f(x, y) = 1,$$

что противоречит (151).

Достаточность (схема доказательства). Интеграл под знаком sup в (149) не убывает по $t \geqslant 0$. Кроме того, в данном частном случае левая часть (119) не меньше, чем

$$\int_0^\infty e^{-u} du \iint \pi(dx) \pi(dy) p(x, y, u).$$

Следовательно, (149) влечет несингулярность ядра $Q(x, dy \times dt)$. Ссылка на теорему 32 и замечание 18 завершает доказательство.

Эргодические марковские процессы, не удовлетворяющие условию (149), будем называть *сингулярными*.

Примечательно, что свойство процесса быть несингулярным может оказаться связанным со свойствами его траекторий. Так, эргодический марковский процесс со ступенчатыми (то есть непрерывными справа в дискретной топологии пространства X) траекториями автоматически оказывается несингулярным [15]. Другими словами, если марковский процесс имеет ступенчатые траектории, то (143) влечет (150).

Замечание 21. Теоремы 36, 37, 38 показывают, что по асимптотическому поведению переходной вероятности эргодические марковские процессы делятся на три типа: периодические, непериодические сингулярные и несингулярные.

Переходная вероятность $P_t(x, B)$ периодического процесса с периодом Δ и функцией сдвига $c(x)$ не имеет, вообще говоря, предела при $t\to\infty$. В то же время, если t стремится к бесконечности по точкам арифметической прогрессии $s+n\Delta$, $n=0, 1, \ldots$, то предел $P_t(x, B)$ существует для всех $x\in X$, $B\in\mathscr{B}$, $s\geqslant 0$ и равен правой части (147).

Переходная вероятность $P_t(x, B)$ несингулярного процесса сходится при $t\to\infty$ к $\pi(B)$ для всех $x\in X$, $B\in\mathscr{B}$.

Наконец, в непериодическом сингулярном случае класс тех $\mathscr{B}$-измеримых ограниченных функций f, для которых имеет место (148) может быть весьма широк (см. замечание 20), но в то же время наверняка не совпадает с классом всех $\mathscr{B}$-измеримых ограниченных функций.

Все эти три возможности могут быть реализованы на процессе восстановления.

6.3. Пример: процесс восстановления. Пусть неотрицательные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots$ независимы в совокупности и имеют общую функцию распределения $F(x)=\mathbf{P}\{\xi_k\leqslant x\}$.
Положим $\tau_n=\xi_1+\ldots+\xi_n$,

$$x(t)=\begin{cases} t, & \text{если } 0\leqslant t<\tau_1, \\ t-\tau_n, & \text{если } \tau_n\leqslant t<\tau_{n+1}. \end{cases} \tag{152}$$

Тогда $x(t)$, $t\geqslant 0$ — однородный марковский процесс, который называется *процессом восстановления*.

Переходная вероятность $P_t(x, B)$ процесса восстановления (152) является единственным ограниченным решением уравнения

$$P_t(x, B)=I_B(x+t)\frac{1-F(x+t)}{1-F(x)}+\int_0^t P_{t-u}(0, B)\,dF(u).$$

На последовательность $0=\tau_0\leqslant\tau_1\leqslant\ldots$ удобно смотреть как на последовательные моменты марковского вмешательства, индуцированные моментом остановки (и, стало быть, моментом марковского вмешательства) $\tau=\inf\{t>0\colon\ x(t)=0\}$. В самом деле, при таком взгляде из теорем 25, 30, 31, 32, а также из следствия 16 и теоремы 38 немедленно вытекают как критерий эргодичности процесса восстановления, так и полное описание предельного поведения его переходной вероятности. Обозначим $\mu=\mathbf{M}\xi_k$.

Функцию распределения $F(x)$ будем называть *решетчатой с шагом* Δ, если все ее точки роста сосредоточены на решетке $\{0, \Delta, \ldots, n\Delta, \ldots\}$ и не сосредоточены ни на какой более крупной решетке.

Теорема 39. Процесс восстановления эргодичен тогда и только тогда, когда $0<\mu<\infty$; в эргодическом случае инвариантное распределение вероятностей абсолютно непрерывно относительно меры Лебега с плотностью $[1-F(x)]/\mu$.

Теорема 40. Пусть $0<\mu<\infty$. Тогда если функция распределения F решетчата с шагом Δ, то

$$\lim_{n\to\infty} P_{n\Delta-x}(x, B)=\frac{\Delta}{\mu}\sum_{k\Delta\in B}[F(k\Delta+)-F(k\Delta-)]$$

для всех $x\geqslant 0$ равномерно по $B\in\mathscr{B}_+$;

если функция распределения F нерешетчата, но все ее свертки с собой сингулярны относительно меры Лебега, то

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^\infty P_t(x, dy)\, f(y)=\frac{1}{\mu}\int_0^\infty f(y)[1-F(y)]\, dy$$

для всех $x\geqslant 0$ и всех ограниченных непрерывных функций f, и для каждого $x\geqslant 0$ найдется множество $B\in\mathscr{B}_+$, такое что

$$\lim_{t\to\infty} P_t(x, B)\neq\frac{1}{\mu}\int_B[1-F(y)]\, dy;$$

если же некоторая свертка функции распределения F с собой несингулярна относительно меры Лебега, то

$$\sup_{B\in\mathscr{B}_+}\left|P_t(x, B)-\frac{1}{\mu}\int_B[1-F(y)]\, dy\right|\underset{t\to\infty}{\to}0.$$

КОММЕНТАРИИ К ЛИТЕРАТУРЕ

Приведенный список ни в коей мере не претендует на полноту. В него включены лишь работы, в которых содержатся те или иные конкретные результаты, понадобившиеся авторам при изложении материала.

Теория марковских процессов ведет свое начало от основополагающей работы [8], в которой впервые введено понятие марковского процесса и выведены уравнения для переходных вероятностей (уравнения Колмогорова). Результаты дальнейшего развития теории подытожены в монографиях [6], [7]. В [6] введены основные понятия, связанные с марковскими процессами, определяется строго марковское свойство, изучаются условия регулярности траекторий. В [7] изложена полугрупповая теория марковских процессов, введен характеристический оператор, изучаются аддитивные и мультипликативные функционалы. Рассмотрены конкретные классы марковских процессов. В [5] систематически изучаются моменты остановки.

В книгах [1], [3], [4], [17] отражено современное состояние теории стохастических дифференциальных уравнений, основанной на понятиях стохастических интегралов по мартингалам и мартингальным мерам, включая ту ее часть, которая относится к диффузии на многообразиях. В [3] изучается также проблема локального строения непрерывных марковских процессов.

В [9] аппарат теории стохастических дифференциальных уравнений используется для построения теории управляемых объектов, находящихся под случайным воздействием. В частности, устанавливаются оценки распределений стохастических интегралов, играющие важную роль в построении решений стохастических дифференциальных уравнений с измеримыми коэффициентами.

В [12] построен ряд классов обобщенных диффузионных процессов (с вектором переноса, представляющим собой либо интегрируемую в достаточно высокой степени функцию, либо обобщенную функцию типа производной от меры, сосредоточенной на гиперповерхности).

В [11], [14], [16] развиваются необходимые для теории марковских процессов аналитические методы исследования параболических и эллиптиских (возможно, вырождающихся) дифференциальных операторов. В частности, в [14] приведено построение фундаментального решения, изучена проблема единственности.

Книга [10] содержит компактное изложение оснований теории вероятностей с элементами эргодической теории марковских процессов. Основные результаты о счетных цепях Маркова, включая эргодические теоремы, можно найти в [2], [13].

Детальному исследованию эргодических марковских (и близких к ним) процессов посвящена монография [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнеиия и диффузионные процессы.— М.: Наука, 1986.— 448 с.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов. Т. I.— М.: Наука, 1971.— 664 с.
3. —, — Теория случайных процессов. Т. III.— М.: Наука, 1979.— 496 с.
4. —, — Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.— Киев: Наук. думка, 1982.— 612 с.
5. *Деллашери К.* Емкости и случайные процессы.— М.: Мир, 1975.— 190 с.
6. *Дынкин Е. Б.* Основания теории марковских процессов.— М.: Физматгиз, 1959.— 227 с.
7. — Марковские процессы.— М.: Физматгиз, 1963.— 860 с.
8. *Колмогоров А. Н.* Об аналитических методах в теории вероятностей // УМН.— 1938.— Вып. 5.— С. 5—41.
9. *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа.— М.: Наука, 1977.— 400 с.
10. *Невё Ж.* Математические основы теории вероятностей.— М.: Мир, 1969.— 310 с.
11. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. Итоги науки. Мат. анализ 1969.— М.: ВИНИТИ, 1971. 252 с.
12. *Портенко Н. И.* Обобщенные диффузионные процессы.— Киев: Наук. думка, 1982.— 208 с.
13. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1.— М.: Мир, 1984.— 528 с.
14. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа.— М.: Мир, 1968.— 424 с.
15. *Шуренков В. М.* Эргодические процессы Маркова.— М.: Наука, 1989.— 336 с.
16. *Kohn J. J., Nirenberg L.* Degenerate elliptic—parabolic equations of second order // Comm. Pure and Appl. Math.,— 1967.— *20,* № 4.— С. 551—585.
17. *Stroock D. W., Varadhan S. R. S.* Multidimensional Diffusion Processes.— Berlin—Heidelberg—New York: Springer-Verlag, 1979.— 338c.

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Технический редактор *И. А. Орлова* Корректор *А. В. Антонова*

Сдано в набор 02.10.89 Подписано в печать 06.12.89
Формат бумаги 60×90$^1/_{16}$ Бум. кн.-журн. Литературная гарнитура.
Высокая печать. Усл. печ. л. 15,5 Усл. кр.-отт. 15,5 Уч.-изд. л. 12,70
Тираж 1000 экз. Заказ 7529 Цена 2 р. 60 к.

Адрес редакции: 125219, Москва, А-219, Балтийская ул., 14. Тел. 155-42-41

Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ,
140010, Люберцы, 10, Московской обл., Октябрьский просп., 403

Индекс 56877

ISSN 0233—6723 ИНТ, Современные проблемы математики. Фундаментальные направления, т. 46, 1989, — 248

ОПЕЧАТКИ

ИНТ, Соврем. пробл. матем. Фундаментальные направления. Т. 46, 1989 г.

Строка	Напечатано	Следует читать
1, 6, 9 снизу	$\mathscr{B}X$	$\mathscr{B}_X$
7, 8, 10 снизу	$\lim\limits_{h\downarrow 0}$	$\underline{\lim}_{h\downarrow 0}$
6 снизу	$(\mathscr{H}_T{}^s)_{t\geqslant s}$	$(\mathscr{X}_T{}^s)_{t\geqslant s}$
18 снизу	$\ldots$ в$(\tau, x(\tau))\,d\tau$, в$(t, x) = \ldots$	$\ldots b(\tau, x(\tau))\,d\tau$, $b(t, x) = \ldots$
8 сверху	$\mathbf{M}_x\eta(x(s, \omega)) - \ldots$	$\mathbf{M}_x\eta_\varphi(x(s, \omega)) - \ldots$
7 снизу	$\ldots\lambda(x_{\mathrm{k}}(\omega)\ldots$	$\ldots\lambda(x_k(\omega))\ldots$
2 сверху	$\mathscr{X}$	$\mathscr{B}$
4 снизу	$\mathfrak{T}_k(h)$	$\mathfrak{t}_k(h)$
15 сверху	$\mathfrak{m}(D)$	$\mathfrak{w}(D)$
7 снизу	21)	(121)
6 снизу	(129	(129)
12 сверху	ремы	ремы 31.
1 снизу	—248	5—248

УДК 519.217

Н. И. Портенко, А. В. Скороход, В. М. Шуренков. Марковские процессы // Итоги науки и техн. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления. — ВИНИТИ, 1989, — *46*, — 2 С 5—248

Систематически излагается теория марковских процессов — важного самостоятельного раздела теории случайных процессов. Основным определениям предшествует рассмотрение ряда модельных примеров. После детального изучения марковского свойства (существование переходной вероятности, законы входа и т. п.) рассматриваются марковские процессы, траектории которых обладают определенными свойствами регулярности. Особое внимание уделяется диффузионным процессам, их связям с дифференциальными уравнениями в частных производных и стохастическими дифференциальными уравнениями. Отдельно излагается теория однородных процессов (полугрупповая теория, строго марковские процессы, скачкообразные процессы, мультипликативные и аддитивные функционалы). Описывается локальное строение непрерывных марковских процессов со значениями конечномерном линейном пространстве. Завершается изложение эргодической теорией, традиционно содержащей теоремы типа закона больших чисел, утверждения о существовании пределов переходных вероятностей, «интегральные» предельные теоремы для отношений. Библ. 17.