КЛАССИКА И СОВРЕМЕННОСТЬ

М. А. Наймарк

НОРМИРОВАННЫЕ КОЛЬЦА

КЛАССИКА И СОВРЕМЕННОСТЬ

М. А. Наймарк

НОРМИРОВАННЫЕ КОЛЬЦА

Издание третье

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2010

УДК 512.5
ББК 22.144
Н 20

Наймарк М. А. **Нормированные кольца.** — 3-е изд., — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 688 с. — ISBN 978-5-9221-1273-4.

В книге излагаются основы теории нормированных колец и их обобщений и приложения этой теории к анализу, теории приближений функций в комплексной области, теории представлений групп, гармоническому анализу на коммутативной группе и другим вопросам.

Краткое содержание книги.

Глава I — основные сведения из топологии, функционального анализа и теории интегрирования в форме, удобной для использования в остальных частях книги. Глава II — основные сведения из теории нормированных колец. Глава III — теория коммутативных нормированных колец. Глава IV — теория представлений симметричных колец. Глава V — теория различных классов колец. Глава VI — групповые кольца, теория унитарных представлений топологических групп. Глава VII — слабо замкнутые кольца. Глава VIII — разложение кольца операторов в гильбертовом пространстве на неприводимые кольца и применение к разложению унитарного представления группы на неприводимые представления (написана заново).

Добавление I — частично упорядоченные множества и лемма Цорна. Добавление II — борелевские множества и борелевские функции. Добавление III — аналитические множества. (Добавления II и III написаны специально для понимания главы VIII.)

В книгу включены примеры, поясняющие основной текст и указывающие на различные применения теории, а также литературные указания о полученных главным образом в последнее время усилениях излагаемых в основном тексте результатов.

Во втором издании число примеров, литературных указаний, а также библиография существенно увеличены, текст подвергся переработке, для многих результатов написаны новые, более простые доказательства, многие новые результаты добалены в главах II–VII.

В книге 3 рисунка. Библиография содержит 1118 названий.

ISBN 978-5-9221-1273-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие ко второму изданию

В этом втором издании переработан и улучшен первоначальный текст, отдельные части написаны заново; заново и более доступно написана глава VIII. При этом учтены изменения и дополнения, сделанные автором в японском, немецком, первом и втором американских, а также в румынском (литографированном) изданиях.

Для удобства читателя в книгу включены добавления II и III, необходимые для понимания главы VIII.

В книге отражены многие новые результаты теории, интенсивно развивавшейся за десятилетие, прошедшее после выхода в свет первого издания. Разумеется, ограничения на объем книги заставили автора произвести при этом жесткий отбор и во многих случаях ограничиться лишь формулировкой новых результатов или литературными указаниями. Автор вынужден был также сделать отбор в исключительно обширном количестве новых работ при составлении дополненного списка литературы. В этот список и в литературные указания к главам включены монографии и обзоры по отдельным вопросам теории, вышедшие в свет за последнее десятилетие. Автор надеется, что эти дополнения и литературные указания дадут читателю возможность ориентироваться также в новых вопросах теории.

Автор весьма признателен всем коллегам, указавшим после выхода в свет первого издания на отдельные содержавшиеся в нем опечатки и неточности.

Д. А. Райков и М. Г. Сонис тщательно отредактировали рукопись и своими замечаниями способствовали улучшению отдельных мест книги; кроме того, М. Г. Сонисом написаны пп. 3, 5 § 9, п. 7 § 11, IX п. 2 § 18, следствия 1–4 из I п. 3 § 23 и IV, V п. 3 § 23.

Автор считает своим приятным долгом выразить Д. А. Райкову и М. Г. Сонису глубокую благодарность. Автор благодарен А. З. Рывкину за внимательное отношение к рукописи и выражает признательность Д. П. Желобенко за помощь при чтении корректур.

Москва, февраль 1967 г.

М. А. Наймарк

Из предисловия к первому изданию

Теория нормированных колец, несмотря на свое недавнее возникновение, развилась в обширную отрасль функционального анализа, имеющую многочисленные применения в различных других областях математики.

Первый цикл работ, посвященных конкретным нормированным кольцам, именно кольцам ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве, был начат в 1930 г. фон Нейманом [1] и затем продолжен в работах Мюррея и фон Неймана [1]. Уже в этих работах выяснилась целесообразность рассмотрения колец операторов. Однако наиболее плодотворной оказалась абстрактная точка зрения; при этой точке зрения природа элементов кольца никакой роли не играет, так что нормированное кольцо есть просто какая угодно совокупность элементов, образующая кольцо в алгебраическом смысле и снабженная нормой, удовлетворяющей простым требованиям.

Эта точка зрения была систематически развита И. М. Гельфандом [1–7] в его теории коммутативных нормированных колец. Решающее значение здесь имели обнаруженная И. М. Гельфандом роль максимальных идеалов, построение бикомпактного пространства максимальных идеалов и представление элементов полупростого кольца в виде кольца непрерывных функций на этом пространстве. Уже первые приложения показали силу теории нормированных колец. Так, при помощи нормированных колец получилось неожиданно простое доказательство теоремы Винера [1] о тригонометрических рядах, получились также простые доказательства и обобщения многих теорем тауберовского типа и т. д.

Существенную роль в развитии этих приложений сыграл большой цикл работ Г. Е. Шилова [1–22], посвященных исследованию различных классов коммутативных нормированных колец и структуры идеалов в них.

Особенно важным оказалось применение теории коммутативных нормированных колец к теории локально бикомпактных коммутативных групп, которое привело к построению И. М. Гельфандом, М. Г. Крейном и Д. А. Райковым (см. Гельфанд и Райков [1], Крейн [6], Райков [2–6]) гармонического анализа на таких группах и, в частности, к простому аналитическому доказательству Д. А. Райковым [4] теоремы двойственности Л. С. Понтрягина.

Другой важный класс уже некоммутативных колец, именно колец с инволюцией (см. § 10), был рассмотрен в работе И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка [1]. В этой работе было показано, что всякое такое кольцо, при соблюдении некоторых естественных условий, можно так изоморфно отобразить в кольцо ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве, что операция инволюции переходит в операцию $A \to A^*$ (где A^* — сопряженный оператор), а норма переходит в норму оператора.

Важную роль здесь сыграло понятие положительного функционала, т. е. линейного функционала f в кольце, удовлетворяющего условию $f(x^*x) \geqslant 0$. Методы, разработанные в этой статье, в частности понятие положительного функционала, были в дальнейшем использованы в работах И. М. Гельфанда и в многочисленных работах других авторов при изучении колец с инволюцией и построении теории представлений таких колец; для частного случая групповых колец эти методы были использованы при изучении унитарных представлений топологических групп.

Другое построение теории представлений локально бикомпактных групп, при помощи положительно определенных функций, было впервые дано И. М. Гельфандом и Д. А. Райковым [2], в частности ими была доказана полнота системы всех неприводимых унитарных представлений локально бикомпактной группы.

В дальнейшем эти результаты И. М. Гельфанда и Д. А. Райкова были отчасти независимо повторены и затем развиты в работах Р. Годмана [3].

Несмотря на наличие большого числа результатов, теорию нормированных колец, особенно некоммутативных, нельзя считать завершенной и многие интересные вопросы этой теории до сих пор остаются открытыми.

Особый интерес представляет дальнейшее развитие теории характеров и гармонического анализа на локально бикомпактных группах, построенной в работах И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка [1–8] для комплексных классических групп и перенесенной в многочисленных работах ряда авторов на другие классы локально бикомпактных групп. Кроме того, остается нерешенным ряд вопросов, связанных с разложением данного представления группы или кольца на неприводимые представления.

Несмотря на важность теории нормированных колец для многих приложений и на большое количество результатов, в ней уже полученных, до сих пор имеется очень мало книг, посвященных этой теории. Так, имеется книга Люмиса [2], в которой, однако, главное внимание уделено теории коммутативных и гильбертовых колец и ее приложению к гармоническому анализу на локально бикомпактной коммутативной группе и на бикомпактной некоммутативной группе. Кроме того, некоторые вопросы теории нормированных колец изложены в книге Хилла «Функциональный анализ и полугруппы».

В настоящей книге излагается теория нормированных, а также некоторых топологических колец как коммутативных, так и некоммутативных, и различные ее приложения, главным образом к теории представлений локально бикомпактных групп. Для удобства читателя в первой главе книги даны необходимые сведения из функционального анализа.

Автор выражает глубокую благодарность Д. А. Райкову, прочитавшему книгу в рукописи и сделавшему ряд ценных замечаний. Автор выражает также глубокую благодарность И. М. Гельфанду и Г. Е. Шилову за ряд ценных советов.

Москва, август 1955 г.

М. А. Наймарк

Глава I

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТОПОЛОГИИ И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

§ 1. Линейные пространства

1. Определение линейного пространства. Множество R называют *линейным* или *векторным пространством*, если:

а) для любых двух элементов x, y из R определена их *сумма* $x+y$, также являющаяся элементом множества R;

б) для любого вещественного или комплексного числа α и любого элемента x из R определено их *произведение* αx, также являющееся элементом множества R;

в) эти операции сложения элементов и умножения элемента на число удовлетворяют следующим условиям:

а$_1$) $x+y=y+x$;

а$_2$) $(x+y)+z=x+(y+z)$;

а$_3$) в R существует элемент 0 такой, что $x+0=x$ для любого элемента x из R;

а$_4$) для каждого элемента x из R существует элемент $-x$ такой, что $x+(-x)=0$;

б$_1$) $1\cdot x=x$;

б$_2$) $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)\,x$;

б$_3$) $(\alpha+\beta)\,x=\alpha x+\beta x$;

б$_4$) $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

Если при этом в R определено умножение лишь на вещественные числа, то R называют *вещественным* линейным пространством; если же в R определено умножение на произвольные комплексные числа, то R называют *комплексным* линейным пространством.

Очевидно, *всякое комплексное линейное пространство R можно также рассматривать как вещественное линейное пространство*.

Элементы линейного пространства R называют обычно *векторами*.

Отметим, что природа элементов пространства R, а также способ определения операций сложения и умножения на число могут оставаться совершенно произвольными; важно только, чтобы выполнялись условия а$_1$)–а$_4$) и б$_1$)–б$_4$).

П р и м е р ы. 1. Обозначим через C^n совокупность всех систем $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — комплексные числа. Определим операции сложения и умножения на комплексное число по формулам

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) + (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots, \xi_n + \eta_n),$$
$$\alpha(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \ldots, \alpha\xi_n).$$

Очевидно, условия а$_1$)–а$_4$) и б$_1$)–б$_4$) будут выполнены, так что C^n — комплексное линейное пространство.

Если же считать ξ_j и η_j только вещественными, то мы получим вещественное линейное пространство R^n.

В частности, C^1 есть просто совокупность всех комплексных чисел, а R^1 — совокупность всех вещественных чисел, с обычными операциями сложения и умножения.

2. Пусть $\mathfrak{P}_n$ — совокупность всех многочленов $p(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$ степени $\leqslant n$ с комплексными коэффициентами; определим в $\mathfrak{P}_n$ операции сложения и умножения на комплексное число обычным образом. Легко видеть, что тогда $\mathfrak{P}_n$ станет комплексным линейным пространством.

3. Пусть $C(a, b)$ — совокупность всех непрерывных комплексных функций $x = x(t)$ на фиксированном отрезке $[a, b]$; определим операции сложения и умножения на комплексное число обычным образом. Легко проверить, что $C(a, b)$ станет тогда комплексным линейным пространством.

2. Линейная зависимость н независимость векторов. *Линейной комбинацией* векторов $x_1, x_2, \ldots, x_k$ называют всякую сумму вида $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k$. Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_k$ называют *линейно независимыми*, если их линейная комбинация $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_k x_k$ обращается в нуль лишь когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, и *линейно зависимыми* в противном случае.

Пространство R называют *конечномерным* (именно *n-мерным*), если в R существует не более конечного числа (именно n и не более) линейно независимых векторов; в противном случае пространство R называют *бесконечномерным*. В случае n-мерного пространства R всякую совокупность n линейно независимых векторов называют *базисом* в R.

Пространство C^n примера 1 п. 1 n-мерно; базисом в нем является, например, совокупность векторов $x_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $x_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $x_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$.

Пространство $C(a, b)$ примера 3 п. 1 бесконечномерно, ибо в нем имеется сколько угодно линейно независимых функций, например,

$$1, t, \ldots, t^N \quad (N = 1, 2, 3, \ldots).$$

Если R n-мерно и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — базис в R, то всякий вектор x из R представляется, и притом единственным образом, в виде

$$x = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_n x_n. \tag{1}$$

Действительно, так как R n-мерно, то векторы $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно зависимы; это означает, что существуют числа $c, c_1, \ldots, c_n$, не все равные нулю, для которых

$$cx + c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = 0. \tag{2}$$

При этом $c \neq 0$, ибо из $c = 0$ следовало бы $c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n = 0$, что в силу линейной независимости векторов $x_1, \ldots, x_n$ возможно лишь при $c_1 = c_2 = \ldots = c_n$. Но тогда из (2) следует

$$x = -\frac{c_1}{c} x_1 - \ldots - \frac{c_n}{c} x_n,$$

т. е. формула (1) с коэффициентами $\xi_i = -\dfrac{c_i}{c}$. Если одновременно $x = \xi_1' x_1 + \xi_2' x_2 + \ldots + \xi_n' x_n$, то, вычтя это равенство из (1), получим

$$0 = (\xi_1 - \xi_1')\, x_1 + (\xi_2 - \xi_2')\, x_2 + \ldots + (\xi_n - \xi_n')\, x_n.$$

В силу линейной независимости векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ это возможно лишь тогда, когда $\xi_1 - \xi_1' = \xi_2 - \xi_2' = \ldots = \xi_n - \xi_n' = 0$, т. е. $\xi_1 = \xi_1'$, $\xi_2 - \xi_2'$, $\ldots$, $\xi_n = \xi_n'$. Тем самым доказана единственность представления (1).

Числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ называют *координатами* вектора x относительно базиса $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Два линейных пространства R и R' называют *изоморфными*, если между совокупностями их векторов существует взаимно однозначное соответствие $x \leftrightarrow x'$, обладающее следующими свойствами:

1) если $x \leftrightarrow x'$, то $\alpha x \leftrightarrow \alpha x'$;

2) если $x \leftrightarrow x'$ и $y \leftrightarrow y'$, то $x + y \leftrightarrow x' + y'$.

Само такое соответствие $x \leftrightarrow x'$ называют *изоморфизмом* пространств R и R'.

Упражнения. 1). Доказать, что соответствие $x \leftrightarrow (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ между векторами n-мерного пространства R и их координатами $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ относительно фиксированного базиса есть изоморфизм пространств R и C^n (см. пример 1 п. 1).

2). Доказать, что векторы

$$\begin{array}{l} y_1 = \xi_{11} x_1 + \xi_{12} x_2 + \ldots + \xi_{1n} x_n, \\ y_2 = \xi_{21} x_1 + \xi_{22} x_2 + \ldots + \xi_{2n} x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_k = \xi_{k1} x_1 + \xi_{k2} x_2 + \ldots + \xi_{kn} x_n \end{array} \tag{3}$$

n-мерного пространства R с базисом $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ линейно независимы тогда и только тогда, когда ранг матрицы [1])

$$\begin{Vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \ldots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \ldots & \xi_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \xi_{k1} & \xi_{k2} & \ldots & \xi_{kn} \end{Vmatrix}$$

равен k.

3. Подпространства. Подмножество $\mathfrak{M}$ линейного пространства R называют его *подпространством*, если: а) сумма любых двух элементов множества $\mathfrak{M}$ также принадлежит $\mathfrak{M}$; б) произведение любого элемента из $\mathfrak{M}$ на произвольное число также принадлежит $\mathfrak{M}$. Очевидно, $\mathfrak{M}$ также образует линейное пространство, если сохранить в нем то же определение операций сложения и умножения на число, что и во всем пространстве.

Примеры. 1. Совокупность всех систем $x = (0, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ в C^n есть подпространство в C^n.

2. Совокупность всех функций $x(t)$ из $C(a, b)$, равных нулю в фиксированной точке $t_0 \in [a, b]$, есть подпространство в $C(a, b)$.

Отметим, что само R, а также множество (0), состоящее из одного только элемента 0, являются подпространствами в R. Мы будем называть их *тривиальными подпространствами*.

Очевидно, *пересечение любого множества подпространств в R есть подпространство в R*. В частности, пересечение всех подпространств, содержащих данное множество $\mathfrak{S} \subset R$, есть *минимальное подпространство, содержащее* $\mathfrak{S}$; это минимальное подпространство называют *линейной оболочкой множества* $\mathfrak{S}$ или *подпространством, натянутым на* $\mathfrak{S}$.

I. *Линейная оболочка множества $\mathfrak{S}$ есть совокупность всех конечных линейных комбинаций $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k$ элементов x_i этого множества.*

Действительно, совокупность всех таких линейных комбинаций есть подпространство, содержащее $\mathfrak{S}$; с другой стороны, всякое подпространство, содержащее $\mathfrak{S}$, должно содержать все эти линейные комбинации.

Частным случаем линейной оболочки является сумма конечного числа подпространств $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_k$. *Суммой* подпространств $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_k$ называется совокупность всех сумм $x_1 + x_2 + \ldots + x_k$,

[1]) Напомним, что *рангом* матрицы называется наивысший порядок отличных от нуля определителей, составленных из матрицы вычеркиванием некоторых ее строк и столбцов.

$x_i \in \mathfrak{M}_i$. Очевидно, эта совокупность есть минимальное подпространство, содержащее все векторы из подпространств $\mathfrak{M}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, т. е. линейная оболочка совокупности всех векторов этих подпространств.

Сумму подпространств $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_k$ мы будем обозначать $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots + \mathfrak{M}_k$.

Подпространства $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_k$ называются *линейно независимыми*, если равенство $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 0$, где $x_i \in \mathfrak{M}_i$, возможно лишь тогда, когда $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$.

II. *Если подпространства $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_k$ линейно независимы, то всякий вектор x из суммы $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots + \mathfrak{M}_k$ представляется единственным образом в виде*

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k, \quad k_i \in \mathfrak{M}_i.$$

Действительно, если также $x = x_1' + x_2' + \ldots + x_k'$, $x_i' \in \mathfrak{M}$, то $0 = (x_1 - x_1') + (x_2 - x_2') + \ldots + (x_k - x_k')$, $x_i - x_i' \in \mathfrak{M}_i$, откуда в силу линейной независимости подпространств $\mathfrak{M}_i$

$$x_1 - x_1' = x_2 - x_2' = \ldots = x_k - x_k' = 0,$$
$$x_1 = x_1', \quad x_2 = x_2', \ \ldots, x_k = x_k'.$$

4. Факторпространство. Пусть $\mathfrak{M}$ — фиксированное подпространство в R. Два вектора x_1, x_2 мы будем называть *эквивалентными по модулю* $\mathfrak{M}$ и писать

$$x_1 \equiv x_2 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{M}), \tag{1}$$

если $x_1 - x_2 \in \mathfrak{M}$. Понятие эквивалентности по модулю обладает всеми общими свойствами эквивалентности, именно:

1) $x \equiv x \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{M})$;

2) если $x_1 \equiv x_2 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{M})$, то $x_2 \equiv x_1 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{M})$;

3) если $x_1 \equiv x_2 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{M})$ и $x_2 \equiv x_3 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{M})$, то $x_1 \equiv x_3 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{M})$.

Действительно, $x - x = 0 \in \mathfrak{M}$, и потому 1) имеет место. Далее, если $x_1 \equiv x_1 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{M})$, то $x_1 - x_2 \in \mathfrak{M}$; тогда также $x_2 - x_1 = -(x_1 - x_2) \in \mathfrak{M}$, т. е. $x_2 \equiv x_1 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{M})$; следовательно, 2) имеет место. Наконец, если $x_1 \equiv x_2 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{M})$, $x_2 \equiv x_3 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{M})$, то $x_1 - x_2 \in \mathfrak{M}$, $x_2 - x_3 \in \mathfrak{M}$; но тогда также $x_1 - x_2 = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) \in \mathfrak{M}$, т. е. $x_1 \equiv x_2 \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{M})$ и 3) также имеет место.

Обозначим через ξ_x совокупность всех векторов, эквивалентных фиксированному вектору x по модулю $\mathfrak{M}$; в силу свойств 2) и 3) все векторы из ξ_x эквивалентны между собой; ξ_x называется *классом эквивалентных векторов*, а каждый вектор из ξ_x — *представителем класса*. Очевидно, класс полностью определяется любым своим представителем; другими словами, если $y \in \xi_x$, то $\xi_y = \xi_x$. Отсюда следует, что два класса ξ_x, ξ_y либо вовсе не пересекаются (при $y \notin \xi_x$), либо совпадают (при $y \in \xi_x$). Поэтому все пространство R распадается на классы ξ_x эквивалентных между собой векторов [1]).

Будем рассматривать эти классы как векторы некоторого нового линейного пространства, причем действия сложения классов и умножения класса на число определим по формулам

$$\xi_x + \xi_y = \xi_{x+y}, \quad \alpha\xi_x = \xi_{\alpha x}. \tag{2}$$

Это определение не зависит от выбора представителей x, y классов ξ_x, ξ_y. Действительно, если $\xi_{x_1} = \xi_x$ и $\xi_{y_1} = \xi_y$, то $x_1 - x \in \mathfrak{M}$, $y_1 - y \in \in \mathfrak{M}$, и потому также $(x_1 + y_1) - (x + y) = (x_1 - x) + (y_1 - y) \in \mathfrak{M}$, т. е. $\xi_{x_1+y_2} = \xi_{x+y}$; далее, $\alpha x_1 - \alpha x = \alpha(x_1 - x) \in \mathfrak{M}$, и потому $\xi_{\alpha x_1} = \xi_{\alpha x}$. Легко проверить, что условия а$_1$)–а$_4$) и б$_1$)–б$_4$) определения векторного пространства (см. п. 1) будут выполнены; при этом нулевым вектором является класс ξ_0, содержащий нулевой вектор, т. е. само подпространство $\mathfrak{M}$; следовательно, при таком определении операций сложения и умножения на число совокупность всех классов образует линейное пространство. Это пространство называют *факторпространством* R по $\mathfrak{M}$ и обозначают $R/\mathfrak{M}$.

Пример. Пусть R — совокупность всех векторов вещественного трехмерного пространства, исходящих из начала координат, а $\mathfrak{M}$ — совокупность тех из них, которые лежат на фиксированной прямой l. Тогда всякий класс ξ_x будет состоять из векторов, концы которых лежат на прямой l', проходящей через конец вектора x параллельно l. Таким образом, классам эквивалентных векторов отвечают в этом случае прямые, параллельные прямой l.

5. Линейные операторы. Пусть R и R' — линейные пространства, а $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{R}$ — некоторые множества соответственно в R и R'. Если каждому вектору x из $\mathfrak{D}$ поставлен в соответствие вектор y из $\mathfrak{R}$, причем каждый вектор y из $\mathfrak{R}$ есть образ хотя бы одного вектора x из $\mathfrak{D}$, то мы будем говорить, что *задан оператор* $y = A(x)$ *из* R *в* R' *с областью определения* $\mathfrak{D}$ *и областью значений* $\mathfrak{R}$.

Если $R' = R$, то A называется *оператором* в R.

Таким образом, понятие оператора является естественным обобщением понятия функции на тот случай, когда аргумент и значение функции являются элементами векторных пространств. В дальнейшем мы будем опускать скобки и писать просто $y = Ax$; буква A обозначает сам оператор, т. е. то правило, согласно которому векторам x из $\mathfrak{D}$ ставятся в соответствие векторы y из $\mathfrak{R}$. Если надо подчеркнуть, что $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{R}$ являются областями определения и значений именно оператора A,

[1]) Проведенное здесь рассуждение носит общий характер и в действительности применимо к любому множеству $\mathfrak{A}$, в котором определено некоторое соотношение эквивалентности, удовлетворяющее условиям 1)–3). Множество $\mathfrak{A}$ распадается тогда на классы эквивалентных между собой элементов.

то пишут $\mathfrak{D}_A$ и $\mathfrak{R}_A$. Два оператора A и B из R в R' считаются равными, если $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{D}_B$ и $Ax = Bx$ для всех векторов x из $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{D}_B$.

Если, в частности, в качестве R' взято C^1, так что значениями оператора являются комплексные числа, то оператор называют *функционалом*; для функционала сохраняют обычное обозначение функции и пишут $f(x)$ вместо Ax.

Оператор B называют *расширением* оператора A, а оператор A — *сужением* оператора B, если $\mathfrak{D}_A \subset \mathfrak{D}_B$ и $Ax = Bx$ для всех $x \in \mathfrak{D}_A$. Если B — расширение оператора A (и значит, A — сужение оператора B), то пишут

$$B \supset A \quad \text{или} \quad A \subset B.$$

Если A — оператор из R в R' и $M \subset \mathfrak{D}_A$, то AM означает совокупность всех Ax, где x пробегает M.

Примеры. 1. $R = \mathfrak{D}_A = C^n$, $R' = C^m$ (см. пример 1 п. 1),

$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (\xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi'_m), \tag{1}$$

где

$$\xi'_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\xi_k \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{2}$$

и a_{jk} — некоторые постоянные. Таким образом, A есть оператор из C^n в C^m; при $m = n$ A есть оператор в C^n. Матрицу

$$a = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

называют *матрицей оператора* A.

2. $R = R' = C(a, b)$, $\mathfrak{D}_B = C'(a, b)$, $Bx = \dfrac{dx}{dt}$, где $C(a, b)$ — совокупность всех непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ (см. пример 3 п. 1), а $C'(a, b)$ — совокупность всех непрерывно дифференцируемых функций на этом отрезке. Очевидно, при этом $\mathfrak{R}_B = C(a, b)$, B есть оператор в $C(a, b)$.

3. $R = R' = C(a, b)$, $\mathfrak{D}_A$ — совокупность всех функций $x(t)$ из $C'(a, b)$, удовлетворяющих условиям $x(a) = x(b) = 0$; $Ax = \dfrac{dx}{dt}$, A — оператор в R. Очевидно, A — сужение оператора B примера 2, а B — расширение оператора A.

4. $R = R' = C(a, b)$, $\mathfrak{D}_B = C'(a, b)$, $Bx = x\,\dfrac{dx}{dt}$; B — оператор в $C(a, b)$.

5. $R = C(a, b)$, $\mathfrak{D}_f = C'(a, b)$, $f(x) = \displaystyle\int_a^b \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt$; $f(x)$ — функционал в $C(a, b)$.

6. $R = C(a, b)$, $\mathfrak{D}_f = C(a, b)$, $f(x) = \int\limits_a^b x(t)\,dt$; $f(x)$ — функционал в $C(a, b)$.

7. $R = R' = \mathfrak{D}_A = C(a, b)$; $Ax(t) = \int\limits_a^b K(t, s)\,x(s)\,ds$, где $K(t, s)$ — непрерывная функция по совокупности переменных t, s в квадрате $a \leqslant t$, $s \leqslant b$; A есть оператор в $C(a, b)$. Его называют *интегральным оператором*, а функцию $K(t, s)$ — *ядром* этого оператора.

Оператор A называется *линейным*, если $\mathfrak{D}_A$ — подпространство в R, которое может совпадать со всем пространством, и

$$A(\alpha x) = \alpha Ax, \quad A(x + y) = Ax + Ay \tag{3}$$

для всех x, $y \in \mathfrak{D}_A$ и всех чисел α. В частности, функционал f называют *линейным*, если $\mathfrak{D}_f$ — подпространство и

$$f(\alpha x) = \alpha f(x), \quad f(s + y) = f(x) + f(y) \tag{4}$$

для всех x, $y \in \mathfrak{D}_A$ и всех чисел α.

Если надо подчеркнуть, что f есть линейный функционал в вещественном пространстве R, так что $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ для всех вещественных α, то f называют *вещественно линейным*; аналогично, f называют *комплексно линейным*, если $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ для всех комплексных α. В дальнейшем мы будем рассматривать главным образом линейные операторы и функционалы.

Оператор A в примерах 1, 2, 3, 7 линеен; в примере 4 нелинеен; функционал f в примере 6 линеен, в примере 5 нелинеен.

Рассмотрим в качестве примера случай линейного функционала f в конечномерном пространстве C^n, имеющего областью определения все C^n. Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис в C^n; полагая $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$ и $c_k = f(e_k)$, $k = 1, 2 \ldots, n$, имеем

$$f(x) = \xi_1 f(e_1) + \ldots + \xi_n f(e_n) = c_1\xi_1 + \ldots + c_n\xi_n.$$

Таким образом, всякий линейный функционал f в C^n задается формулой

$$f(x) = c_1\xi_1 + \ldots + c_n\xi_n, \tag{5}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — координаты вектора x относительно фиксированного базиса, а $c_1, \ldots, c_n$ — фиксированные числа.

Очевидно, что верно и обратное: всякий функционал, определенный формулой (5), линеен.

В частности, всякий линейный функционал в трехмерном вещественном пространстве R^3, имеющий областью определения все R^3, задается формулой $f(x) = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3$, и потому уравнение $f(x) = c$ при фиксированном c определяет плоскость в R^3.

Пусть теперь f — произвольный линейный функционал в произвольном линейном пространстве X и пусть $\mathfrak{D}_f = X$. По аналогии со случаем пространства R^3 совокупность всех векторов x из X, удовлетворяющих уравнению $f(x) = c$ при фиксированном c, называют *гиперплоскостью* в X.

Гиперплоскость $f(x) = c$ в вещественном пространстве R делит все пространство X на две части, определенные соответственно неравенствами $f(x) \leqslant c$ и $f(x) \geqslant c$, пересекающиеся по самой гиперплоскости.

Если некоторое множество M целиком находится в какой-нибудь одной из этих частей, то говорят, что оно находится *по одну сторону* от гиперплоскости $f(x) = c$.

Оператор T_a, определенный формулой $T_a x = x + a$, где a — фиксированный вектор, называют *оператором сдвига*. Очевидно, *при сдвиге всякая гиперплоскость $f(x) = c$ переходит в гиперплоскость $f(x) = f(a) + c$.*

Упражнение. Доказать, что всякий линейный оператор из C^n в C^m с областью определения $\mathfrak{D}_A = C^n$ имеет вид, указанный в примере 1.

6. Действия с операторами. а). Сложение операторов. *Суммой* $A + B$ двух операторов A, B из R в R' называют оператор из R в R', определенный условиями

$$\mathfrak{D}_{A+B} = \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{D}_B, \tag{1}$$

$$(A + B)\,x = Ax + Bx \quad \text{при} \quad x \in \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{D}_B. \tag{2}$$

Легко проверить, что

$$A + B = B + A, \quad A + (B + C) = (A + B) + C. \tag{3}$$

Обозначим через 0 оператор из R в R', определенный условиями $\mathfrak{D}_0 = R$ и $0x = 0$, где 0 в правой части есть нулевой вектор в R'. Оператор 0 называют *нулевым оператором*; как легко видеть,

$$A + 0 = A. \tag{4}$$

б). Умножение оператора на число. *Произведением αA оператора A из R в R' на число α* называют оператор из R в R', определенный условиями

$$\mathfrak{D}_{\alpha A} = \mathfrak{D}_A, \tag{5}$$

$$(\alpha A)\,x = \alpha\,(Ax) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathfrak{D}_A. \tag{6}$$

При этом

$$\alpha\,(\beta A) = (\alpha\beta)A, \tag{7}$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A, \tag{8}$$

$$\alpha\,(A + B) = \alpha A + \alpha B, \tag{9}$$

$$1A = A, \tag{10}$$

$$0A \subset 0 \tag{11}$$

(в соотношении (11) 0 слева — число, справа — нулевой оператор).

Проверим, например, соотношение (9); проверку остальных соотношений (7), (8), (10), (11) предоставим читателю. Имеем

$$\mathfrak{D}_{\alpha(A+B)} = \mathfrak{D}_{A+B} = \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{D}_B,$$
$$\mathfrak{D}_{\alpha A+\alpha B} = \mathfrak{D}_{\alpha A} \cap \mathfrak{D}_{\alpha B} = \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{D}_B,$$

так что

$$\mathfrak{D}_{\alpha(A+B)} = \mathfrak{D}_{\alpha A+\alpha B}; \tag{12}$$

кроме того, при $x \in \mathfrak{D}_{\alpha(A+B)}$

$$\alpha\,(A+B)\,x = \alpha\,(Ax+Bx) = \alpha Ax + \alpha Bx = (\alpha A+\alpha B)\,x. \tag{13}$$

По определению равенства операторов (12) и (13) означают, что

$$\alpha\,(A+B) = \alpha A + \alpha B.$$

в). Произведение операторов. Пусть B — оператор из R в R', A — оператор из R' в R''. *Произведением* AB операторов A и B называют оператор из R в R'', область определения $\mathfrak{D}_{AB}$ которого состоит из тех и только тех векторов $x \in \mathfrak{D}_B$, для которых $Bx \in \mathfrak{D}_A$, и который определяется равенством

$$(AB)\,x = A(Bx) \quad \text{для} \quad x \in \mathfrak{D}_{AB}.$$

Легко показать, что

$$A(BC) = (AB)\,C, \tag{14}$$
$$(A+B)\,C = AC + BC, \tag{15}$$

и, если оператор A линеен,

$$A(B+C) \supset AB + AC. \tag{16}$$

Доказательство этих соотношений мы предоставляем читателю.

Обозначим через 1_R оператор в R с областью определения $\mathfrak{D}_1 = R$, определенный условием

$$1_R x = x \quad \text{для всех} \quad x \in R; \tag{17}$$

1_R называют *единичным оператором* в R. Индекс R обычно опускают, если только это не может вызвать недоразумений. Если A — оператор из R в R', то, очевидно,

$$1_{R'}A = A1_R = A. \tag{18}$$

г). Степени оператора; многочлены от оператора. Пусть A — оператор в R; произведение AA называют *квадратом* оператора A и обозначают A^2. Далее, произведение A^2A называют *кубом* оператора A и обозначают A^3. Аналогичным образом можно по индукции определить *степень* A^n при любом натуральном n, полагая

$$A^{n+1} = A^n A. \tag{19}$$

Кроме того, положим еще

$$A^0 = 1_R. \tag{20}$$

Имеем:

$$A^n A^m = A^{n+m}. \tag{21}$$

Действительно, при $m = 1$ это соотношение совпадает с (19); применяя индукцию и пользуясь свойством ассоциативности (14), легко убедиться в справедливости соотношения (21) при любом натуральном m.

Пусть теперь $p(\lambda)$ — произвольный многочлен:

$$p(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \ldots + c_n\lambda^n; \tag{22}$$

многочленом $p(A)$ от оператора A в R называют оператор

$$p(A) = c_0 1 + c_1 A + \ldots + c_n A^n. \tag{23}$$

Применяя основные свойства операций сложения, умножения на число и перемножения операторов (в частности, соотношение (21)), заключаем:

При фиксированном линейном операторе A соответствие $p(\lambda) \to p(A)$ обладает следующими свойствами:

1) *если* $p(\lambda) = \alpha_1 p_1(\lambda) + \alpha_2 p_2(\lambda)$, *то* $p(A) = \alpha_1 p_1(A) + \alpha_2 p_2(A)$;

2) *если* $p(\lambda) = p_1(\lambda)\, p_2(\lambda)$, *то* $p(A) = p_1(A)\, p_2(A)$.

д). Обратный оператор. Оператор B из R' в R называют *обратным* к оператору A из R в R', если $\mathfrak{D}_B = \mathfrak{R}_A$ и

$$BAx = x \quad \text{для всех} \quad x \in \mathfrak{D}_A. \tag{24}$$

Отметим, что тогда также $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{R}_B$ и

$$ABy = y \quad \text{для всех} \quad y \in \mathfrak{D}_B, \tag{25}$$

так что A является также обратным к B.

Действительно, когда x пробегает $\mathfrak{D}_A$, то Ax пробегает все $\mathfrak{R}_A = \mathfrak{D}_B$, и потому $x = BAx$ пробегает в точности $\mathfrak{R}_B$, другими словами, $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{R}_B$. Далее, применяя оператор A к обеим частям (24) и полагая $y = Ax$, получаем $ABy = y$, где $y = Ax$ пробегает все $\mathfrak{D}_B = \mathfrak{R}_A$.

Оператор, обратный к A, обозначают A^{-1}. Таким образом, по самому определению обратного оператора

$$\mathfrak{D}_{A^{-1}} = \mathfrak{R}_A, \quad \mathfrak{R}_{A^{-1}} = \mathfrak{D}_A \tag{26}$$

и

$$A^{-1}Ax = x, \quad AA^{-1}y = y \quad \text{для всех} \quad x \in \mathfrak{D}_A, y \in \mathfrak{D}_{A^{-1}}. \tag{27}$$

Операторы A и A^{-1} входят в эти соотношения симметрично и потому A (как уже отмечалось выше) обратен к A^{-1}:

$$(A^{-1})^{-1} = A. \tag{28}$$

Очевидно, соотношения (27) означают, что

$$A^{-1}A \subset 1_R, \quad AA^{-1} \subset 1_{R'}. \tag{29}$$

Если A — оператор в R, то можно определить целые отрицательные степени оператора A, полагая при $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$A^{-n} = (A^{-1})^n. \tag{30}$$

Следует, однако, отметить, что не для всякого оператора A существует обратный оператор, следовательно, не для всякого оператора A в R существуют целые отрицательные степени A^{-n}.

I. *Если оператор A линеен и A^{-1} существует, то A^{-1} линеен.*

Действительно, если $y_1, y_2 \in \mathfrak{D}_{A^{-1}} = \mathfrak{R}_A$, то

$$A(\alpha_1 A^{-1}y_1 + \alpha_2 A^{-1}y_2) = \alpha_1 AA^{-1}y_1 + \alpha_2 AA^{-1}y_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2;$$

поэтому $\alpha_1 A^{-1}y_1 + \alpha_2 A^{-1}y_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$.

II. *Линейный оператор A имеет обратный тогда и только тогда, когда равенство*

$$Ax = 0, \quad \text{где} \quad x \in \mathfrak{D}_A, \tag{31}$$

возможно лишь при $x = 0$.

Доказательство. Если оператор A имеет обратный, то, применяя A^{-1} к обеим частям (31), в силу (27) получим $x = A^{-1}Ax = 0$; следовательно, высказанное условие необходимо. Обратно, пусть это условие выполнено. Определим оператор B, полагая $\mathfrak{D}_B = \mathfrak{R}_A$ и

$$By = x \quad \text{при} \quad y = Ax, \quad x \in \mathfrak{D}_A. \tag{32}$$

Этими условиями оператор B определяется однозначно. Действительно, если $y = Ax_1 = Ax_2$, то $A(x_1 - x_2) = 0$, следовательно, в силу условия $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 = x_2$, т. е. x по y в формуле $y = Ax$ определяется однозначно. Из (32) следует, что $x = By = BAx$ для всех $x \in \mathfrak{D}_A$, т. е. B есть оператор, обратный к A.

Пусть A — линейный оператор в линейном пространстве X. Число λ называется *собственным значением оператора A*, если существует вектор $x \neq 0$, $x \in \mathfrak{D}_A$, для которого $Ax = \lambda x$; вектор x называется в этом случае *собственным вектором оператора A, отвечающим собственному значению λ*, а подпространство $\mathfrak{M}_\lambda = \{x\colon x \in \mathfrak{D}_A,\ Ax = \lambda x\}$ — *собственным подпространством оператора A, отвечающим собственному значению λ.*

Из предложения II вытекает, что *оператор $A - \lambda 1$ имеет обратный тогда и только тогда, когда λ — не собственное значение оператора A*; в частности, A имеет обратный тогда и только тогда, когда 0 не собственное значение оператора A.

Упражнения. Доказать, что: а) сложению двух линейных операторов из C^n в C^m с областью определения C^n отвечает сложение их матриц (см. пример 1 к п. 5); б) умножению такого оператора на число отвечает умножение его матрицы на число; в) умножению двух таких операторов из C^n в C^m и из C^m в C^p отвечает умножение их матриц (точнее, если B — оператор из C^n в C^m, а A — оператор из C^m в C^p, то матрицей оператора AB будет произведение в том же порядке матриц операторов A и B; г) линейный оператор из C^n в C^m с областью определения C^n имеет обратный тогда и только тогда, когда ранг матрицы оператора A равен n; д) произведение A_1A_2 двух интегральных операторов в $C(a, b)$ с ядрами K_1 и K_2 соответственно (см. пример 7 п. 5) есть интегральный оператор с ядром

$$K(t_1, t_2) = \int_a^b K_1(t_1, t)\, K_2(t, t_2)\, dt \tag{33}$$

(ядро K называют *композицией* ядер K_1 и K_2); е) если A — всюду определенный линейный оператор в пространстве C^n, то число λ есть собственное значение оператора A тогда и только тогда, когда определитель матрицы оператора $A - \lambda 1$ равен нулю.

7. Инвариантные подпространства. Пусть A — линейный оператор в R с областью определения $\mathfrak{D}_A = R$. Подпространство $\mathfrak{M} \subset R$ называют *инвариантным* относительно A, если оператор A переводит каждый вектор из $\mathfrak{M}$ в вектор из $\mathfrak{M}$, т. е.

$$\text{из } \xi \in \mathfrak{M} \text{ следует } A\xi \in \mathfrak{M}. \tag{1}$$

Если $\mathfrak{M}$ инвариантно относительно оператора A, то A можно также рассматривать как оператор в $\mathfrak{M}$. Точнее, можно определить оператор $A_{\mathfrak{M}}$ в $\mathfrak{M}$, положив $A_{\mathfrak{M}}\xi = A\xi$ для всех $\xi \in \mathfrak{M}$.

Рассмотрим теперь факторпространство $R/\mathfrak{M}$ (см. п. 4); если $\mathfrak{M}$ инвариантно относительно оператора A, то можно определить оператор $A^\frown$ в $R/\mathfrak{M}$, положив $A^\frown \xi_x = \xi_y$ при $Ax = y$. Это определение не зависит от выбора представителя $x \in \xi_x$. Действительно, если $\xi_{x_1} = \xi_x$, то $x_1 - x \in \mathfrak{M}$; отсюда, в силу инвариантности $\mathfrak{M}$, $Ax_1 - Ax = A(x_1 - x) \in \mathfrak{M}$, так что векторы $y_1 = Ax_1$ и $y = Ax$ определяют один и тот же класс ξ_y.

8. Выпуклые множества. *Отрезком* $[x_1, x_2]$, *соединяющим векторы* x_1 *и* x_2, называют совокупность всех векторов $x = (1 - t)\, x_1 + tx_2$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$; сами векторы x_1, x_2 называют *концами* отрезка $[x_1, x_2]$, а все остальные точки этого отрезка — его *внутренними* точками; если $x_1 = x_2$, то отрезок $[x_1, x_2]$ состоит из одной точки $x_1 = x_2$.

Множество K в R называют *выпуклым*, если оно вместе с каждыми двумя своими векторами x_1, x_2 содержит весь соединяющий их отрезок.

Из этого определения непосредственно следует, что пересечение выпуклых множеств есть также выпуклое множество. Кроме того, если

A — линейный оператор из R в R' и $K \subset \mathfrak{D}_A$ — выпуклое множество, то AK — выпуклое множество в R'.

I. *Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежат выпуклому множеству K, то при $t_1 \geqslant 0, \ldots, t_n \geqslant 0$ и $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = t$ также $t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n \in K$.*

При $n = 2$ это утверждение совпадает с определением выпуклого множества (ибо $t_1x_1 + t_2x_2$ принадлежит отрезку $[x_1, x_2]$), а при больших n доказывается по индукции. Так, например, если $t_1 + t_2 > 0$ и $t_1 + t_2 + t_3 = 1$, то $\dfrac{t_1}{t_1+t_2}\,x_1 + \dfrac{t_2}{t_1+t_2}\,x_2 \in K$, и потому также

$$t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3 = (t_1 + t_2)\left(\frac{t_1}{t_1+t_2}\,x_1 + \frac{t_2}{t_1+t_2}\,x_2\right) + t_3x_3 \in K.$$

Пусть K — выпуклое множество, содержащее не менее двух точек. Точку x_0 называют *граничной точкой* множества K, если существует такой отрезок $[x_1, x_2]$, содержащий x_0 внутри, что все внутренние точки отрезка $[x_1, x_0]$ принадлежат, но ни одна внутренняя точка отрезка $[x_0, x_2]$ не принадлежит множеству K. Если K состоит из одной точки x_0, то будем считать x_0 граничной точкой множества K. Вообще же граничная точка x_0 может как принадлежать, так и не принадлежать множеству K. Совокупность всех граничных точек выпуклого множества называют его границей [1]).

II. *При сдвиге $T_ax = x + a$ выпуклое множество K переходит в выпуклое множество [2]) $K + a$ и граница множества K переходит в границу множества $K + a$.*

Утверждение непосредственно следует из того, что при указанном сдвиге всякий отрезок $[x_1, x_2]$ переходит в отрезок $[x_1 + a, x_2 + a]$.

Выпуклое множество K в R называется *поглощающим*, если для каждого $x \in R$ существует такое положительное число α, что $\alpha x \in K$, т. е. $x \in \dfrac{1}{\alpha}K$. Ясно, что $0 \in K$, и если $x \in \beta K$, а $\gamma > \beta$, то $x \in \gamma K$.

III. *Пусть K — поглощающее выпуклое множество в R. Тогда формула*

$$p(x) = \inf\{\beta\colon \beta > 0,\, x \in \beta K\} \tag{1}$$

---

[1]) Это понятие границы не совпадает с понятием топологической границы, определенным ниже в п. 3 § 2. Примером может служить выпуклое множество на плоскости (с естественным определением топологии и операций линейного пространства, см. примеры 1 в п. 1 § 1 и в п. 2 § 2), состоящее из всех точек некоторого отрезка.

[2]) Через $M_1 + M_2$, где M_1, M_2 — произвольные множества в линейном пространстве X, обозначают совокупность всех векторов $x + y$, $x \in M_1$, $y \in M_2$; в частности, $M_1 + a$ обозначает совокупность всех векторов $x + a$, $x \in M_1$. Аналогично, αM обозначает совокупность всех векторов αx, $x \in M$, и если $\mathfrak{A}$ — числовое множество, то $\mathfrak{A}M$ — совокупность всех векторов αx, $\alpha \in \mathfrak{A}$, $x \in M$.

определяет функционал p на R, обладающий следующими свойствами:

1) $p(x) \geqslant 0$ *для всех* $x \in R$;
2) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ *для всех* $x,\ y \in R$;
3) $p(\alpha x) = \alpha\, p(x)$ *для всех* $\alpha \geqslant 0$ *и всех* $x \in R$;
4) *если* $x \in K$, *то* $p(x) \leqslant 1$;
5) *если* $p(x) < 1$, *то* $x \in K$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что по определению выпуклого поглощающего множества числа β, участвующие в формуле (1), существуют для каждого $x \in R$, так что p определен на всем R. По самому его определению

$$p(x) \geqslant 0,$$

и при каждом $\varepsilon > 0$

$$x \in [p(x) + \varepsilon]K. \tag{2}$$

Докажем, что выполняется условие 2). Положим для этого

$$t = \frac{p(y) + \varepsilon}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon};$$

следовательно,

$$1 - t = \frac{p(x) + \varepsilon}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon}. \tag{3}$$

Из (2) заключаем, что

$$\frac{1}{p(x) + \varepsilon}\, x \in K, \quad \frac{1}{p(y) + \varepsilon}\, y \in K,$$

следовательно, в силу выпуклости множества K

$$(1 - t)\, \frac{1}{p(x) + \varepsilon}\, x + t\, \frac{1}{p(y) + \varepsilon}\, y \in K.$$

Учитывая (3), получаем

$$\frac{1}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon}\, (x + y) \in K,$$

т. е.

$$x + y \in [p(x) + p(y) + 2\varepsilon]K.$$

По определению $p(x+y)$ это означает, что $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) + 2\varepsilon$, откуда ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$ и следует 2). Далее, при $\alpha > 0$

$$p(\alpha x) = \inf\{\beta\colon \beta > 0,\, \alpha x \in \beta K\} = \inf\left\{\beta\colon \beta > 0,\, x \in \frac{\beta}{\alpha}\, K\right\} = \\ = \inf\{\alpha\beta\colon \beta > 0,\, x \in \beta K\} = \alpha\, p(x);$$

при $\alpha = 0$

$$p(0x) = \inf\{\beta\colon \beta > 0,\, 0x \in \beta K\} = \inf\{\beta\colon \beta > 0\} = 0;$$

отсюда следует 3). Наконец, если $x \in K$, то $1 \in \{\beta\colon x \in \beta K\}$, откуда следует 4). Если же $p(x) < 1$, то, положив в (2) $\varepsilon = 1 - p(x)$, получим, что $x \in K$.

Функционал p, построенный в предложении III, называется *функционалом Минковского* множества K.

IV. *Каждый функционал p на R, удовлетворяющий условиям* 1)–3) *предложения* III, *является функционалом Минковского поглощающего выпуклого множества.*

Доказательство. Пусть $K = \{x\colon x \in R, p(x) \leqslant 1\}$. K выпукло. Действительно, если x_1, $x_2 \in K$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$, то

$$p((1-t)\,x_1 + tx_2) \leqslant (1-t)\,p(x_1) + tp(x_2) \leqslant (1-t) + t = 1,$$

следовательно, $[x_1, x_2] \in K$. Далее, для каждого $x \in R$ и $\varepsilon > 0$ имеем $\dfrac{1}{p(x)+\varepsilon}\,x \in K$, так что K — поглощающее множество. Наконец,

$$p(x) = \inf\{\beta\colon \beta > 0, p(x) \leqslant \beta\} = \inf\{\beta\colon \beta > 0, x \in \beta K\},$$

т. е. p — функционал Минковского множества K.

Основываясь на этом, мы каждый функционал p на R, обладающий свойствами 1)–3) предложения III, будем называть *функционалом Минковского*. Заметим, однако, что p будет функционалом Минковского не только множества $K = \{x\colon x \in R, p(x) \leqslant 1\}$, но и множества $K_0 = \{x\colon x \in R, p(x) < 1\}$, а также каждого выпуклого множества, заключенного между K_0 и K.

Отметим, что если p — функционал Минковского, то $\alpha\, p$ — также функционал Минковского для любого $\alpha \geqslant 0$.

V. *Если p — функционал Минковского, то при любом $c > 0$ и любом $a \in R$ множество K всех векторов x, удовлетворяющих условию*

$$p(x-a) \leqslant c,$$

выпукло и его граница состоит из тех и только тех векторов x, для которых $p(x-a) = c$. Если, кроме того, $a = 0$, то K — поглощающее множество.

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что $a = 0$; в силу II общий случай сводится к этому сдвигом $T_a x = x + a$. Пусть x_1, $x_2 \in K$, т. е. $p(x_1) \leqslant c$, $p(x_2) \leqslant c$. Тогда в силу условий 2) и 3) при $0 \leqslant t \leqslant 1$

$$p((1-t)\,x_1 + tx_2) \leqslant p((1-t)\,x_1) + p(tx_2) = \\ = (1-t)\,p(x_1) + t\,p(x_2) \leqslant (1-t)\,c + tc = c;$$

следовательно, и весь отрезок $[x_1, x_2]$ принадлежит K, т. е. K выпукло.

Докажем теперь второе утверждение. Пусть $p(x_0) = c$. Положим $x_1 = \alpha x_0$, $x_2 = \beta x_0$, где $0 < \alpha < 1$ и $\beta > 1$. Тогда при $0 < t < 1$

$$p((1-t)\,x_0 + tx_1) = p((1-t+\alpha t)\,x_0) = [1-(1-\alpha)\,t]\,c < c,$$
$$p((1-t)\,x_0 + tx_2) = p((1-t+\beta t)\,x_0) = [1+(\beta-1)\,t]\,c > c,$$

так что все внутренние точки отрезка $[x_1, x_0]$ принадлежат K, но ни одна внутренняя точка отрезка $[x_0, x_2]$ не принадлежит K; следовательно, x_0 — граничная точка множества K.

Обратно, пусть x_0 — граничная точка множества K и пусть все внутренние точки отрезка $[x_1, x_0]$ принадлежат, но ни одна внутренняя точка отрезка $[x_0, x_2]$ не принадлежит K. Это означает, что при $0 < t < 1$

$$p((1-t)\,x_0 + tx_1) \leqslant c, \quad p((1-t)\,x_0 + tx_2) > c.$$

Но тогда

$$(1-t)\,p(x_0) = p((1-t)\,x_0) = p((1-t)\,x_0 + tx_1 - tx_1) \leqslant \\ \leqslant p((1-t)\,x_0 + tx_1) + tp(-x_1) \leqslant c + tp(-x_1)$$

и

$$c < p((1-t)\,x_0) + p(tx_2) = (1-t)\,p(x_0) + tp(x_2),$$

т. е.

$$(1-t)\,p(x_0) \leqslant c + tp(-x_1) \quad \text{и} \quad c < (1-t)\,p(x_0) + tp(x_2).$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $t \to 0$, получим

$$p(x_0) \leqslant c \quad \text{и} \quad c \leqslant p(x_0),$$

откуда $p(x_0) = c$.

Последнее утверждение предложения V очевидно.

Замечание. Предложение V остается справедливым и для множества всех векторов x, удовлетворяющих неравенству вида $p(x-a) < c$.

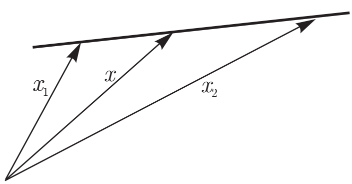

Рис. 1.

Примеры. 1. В трехмерном вещественном пространстве R^3 концы векторов $x = (1-t)\,x_1 + tx_2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, образуют отрезок, соединяющий концы векторов x_1 и x_2 (рис. 1).

2. Положим в двумерном вещественном пространстве R^2

$$p(x) = \sqrt{a_1\xi_1^2 + a_2\xi_2^2},$$

где $x = (\xi_1, \xi_2)$, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Легко проверить, что p — функционал Минковского. Концы всех векторов x, удовлетворяющих условию $p(x) < c$, заполняют внутренность эллипса

$$a_1\xi_1^2 + a_2\xi_2^2 = c^2.$$

9. Теоремы о продолжении линейного функционала.

Лемма. *Пусть $\mathfrak{M}$ — подпространство вещественного линейного пространства R, а $\mathfrak{M}'$ — подпространство, натянутое на $\mathfrak{M}$, и вектор $x_0 \notin \mathfrak{M}$. Пусть, далее, p — функционал Минковского в $\mathfrak{M}'$, а f — линейный функционал в $\mathfrak{M}$, удовлетворяющий условию*

$$f(x) \leqslant p(x) \quad \textit{для всех} \quad x \in \mathfrak{M}. \tag{1}$$

Тогда f можно продолжить до линейного функционала f', определенного во всем $\mathfrak{M}'$ и удовлетворяющего условию

$$f'(x) \leqslant p(x) \quad \textit{для всех} \quad x \in \mathfrak{M}'. \tag{2}$$

Доказательство. В силу (1) при $y', y'' \in \mathfrak{M}$

$$f(y') - f(y'') = f(y' - y'') \leqslant p(y' - y'') = p((y' + x_0) - (y'' + x_0)) \leqslant \\ \leqslant p(y' + x_0) + p(-y'' - x_0),$$

откуда

$$-p(-y'' - x_0) - f(y'') \leqslant p(y' + x_0) - f(y').$$

Поэтому

$$m = \sup_{y \in \mathfrak{M}} \{-p(-y - x_0) - f(y)\} \quad \text{и} \quad M = \inf_{y \in \mathfrak{M}} \{p(y + x_0) - f(y)\}$$

конечны и

$$m \leqslant M.$$

Пусть c_0 — произвольное число, заключенное между m и M:

$$m \leqslant c_0 \leqslant M;$$

тогда для всех $y \in \mathfrak{M}$

$$-p(-y - x_0) - f(y) \leqslant c_0 \leqslant p(y + x_0) - f(y). \tag{3}$$

По определению $\mathfrak{M}'$ есть совокупность всех векторов x вида

$$x = y + \alpha x_0, \tag{4}$$

где $y \in \mathfrak{M}$, а α — вещественные числа. Определим функционал f' в $\mathfrak{M}'$, полагая для вектора x вида (4)

$$f'(x) = f(y) + \alpha c_0.$$

Отметим, что всякий вектор x из $\mathfrak{M}'$ представляется по формуле (4) единственным образом и потому $f'(x)$ определяется по вектору $x \in \mathfrak{M}'$ однозначно. Действительно, если $x = y_1 + \alpha_1 x_0$ и $x = y_2 + \alpha_2 x_0$, то

$$y_1 - y_2 = (\alpha_2 - \alpha_1)\, x_0; \tag{5}$$

но $y_1 - y_2 \in \mathfrak{M}$, а $(\alpha_2 - \alpha_1)\, x_0 \notin \mathfrak{M}$ при $\alpha_2 - \alpha_1 \neq 0$; поэтому (5) возможно лишь при $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$, $y_1 - y_2 = 0$. Легко проверить, что функционал f' линеен; остается доказать, что условие (2) выполнено, т. е. что

$$f(y) + \alpha c_0 \leqslant p(y + \alpha x_0) \qquad (2')$$

для всех $y \in \mathfrak{M}$ и всех вещественных α. При $\alpha = 0$ это неравенство совпадает с условием (1); поэтому достаточно рассмотреть случай $\alpha \neq \neq 0$. Пусть $\alpha > 0$; заменив в правом неравенстве (3) y на $\frac{1}{\alpha} y$, получим

$$c_0 \leqslant p\left(\frac{y}{\alpha} + x_0\right) - f\left(\frac{y}{\alpha}\right).$$

Отсюда

$$\alpha f\left(\frac{y}{\alpha}\right) + \alpha c_0 \leqslant \alpha\, p\left(\frac{y}{\alpha} + x_0\right),$$

т. е.

$$f(y) + \alpha c_0 \leqslant p(y + \alpha x_0).$$

Пусть теперь $\alpha < 0$; заменив в левом неравенстве (3) y на $-y$, получим

$$-p\left(-\frac{y}{\alpha} - x_0\right) - f\left(\frac{y}{\alpha}\right) \leqslant c_0.$$

Отсюда

$$(-\alpha)\, p\left(-\frac{y}{\alpha} - x_0\right) \geqslant \alpha c_0 + \alpha f\left(\frac{y}{\alpha}\right),$$

т. е.

$$p(y + \alpha x_0) \geqslant f(y) + \alpha c_0.$$

Таким образом, условие (2) в обоих случаях выполнено, и лемма доказана.

Теорема 1 (Хан [1]–Банах [1]). *Пусть p — функционал Минковского, определенный в вещественном линейном пространстве R, а f — линейный функционал, определенный в некотором подпространстве $\mathfrak{M} \subset R$ и удовлетворяющий условию*

$$f(x) \leqslant p(x) \quad \textit{для всех} \quad x \in \mathfrak{M}. \qquad (6)$$

Тогда f можно продолжить до линейного функционала F, определенного во всем пространстве R и удовлетворяющего условию

$$F(x) \leqslant p(x) \quad \textit{для всех} \quad x \in R. \qquad (7)$$

Доказательство. Пусть F_p — множество всех линейных функционалов f', являющихся продолжениями функционала f и удовлетворяющих неравенству $f'(x) \leqslant p(x)$ для всех $x \in \mathfrak{D}_{f'}$. Для двух функционалов f_1', $f_2' \in F_p$ условимся писать $f_1' \prec f_2'$, если f_2' является продолжением функционала f_1'. Тогда F_p станет частично упорядоченным множеством, удовлетворяющим условию леммы Цорна (см. добавление I); именно, верхней гранью линейно упорядоченного множества $F_p' \subset F_p$ будет функционал $f^\frown$, определенный на $\bigcup\limits_{f' \in F_p'} \mathfrak{D}_{f'}$ равенством $f^\frown(x) = f'(x)$ при $x \in \mathfrak{D}_{f'}$, $f' \in F_p'$. Следовательно, F_p имеет максимальный элемент F, который в силу предыдущей леммы должен быть определен во всем пространстве R.

Следствие 1. *Если p — функционал Минковского в вещественном линейном пространстве R, то для любого вектора $x_0 \in R$ существует линейный функционал F, определенный во всем R и удовлетворяющий условиям*

$$F(x_0) = p(x_0), \tag{8}$$

$$F(x) \leqslant p(x) \quad \textit{для всех} \quad x \in R. \tag{7}$$

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{M}$ совокупность всех векторов αx_0, где α пробегает все вещественные числа; $\mathfrak{M}$ — подпространство в R. Определим в $\mathfrak{M}$ линейный функционал f формулой

$$f(\alpha x_0) = \alpha\, p(x_0), \tag{9}$$

так что

$$f(x_0) = p(x_0). \tag{10}$$

Докажем, что f удовлетворяет условию (6); на основании теоремы 1 его можно тогда продолжить до линейного функционала F, определенного во всем R и удовлетворяющего условию (7); в силу (10) условие (8) будет при этом также выполнено, и следствие 1 будет доказано.

Но условие (6) для f сводится к выполнению неравенства

$$f(\alpha x_0) \leqslant p(\alpha x_0) \tag{11}$$

для всех вещественных α. При $\alpha \geqslant 0$ оно выполняется (и превращается в равенство), ибо в силу (9)

$$f(\alpha x_0) = \alpha\, p(x_0) = p(\alpha x_0).$$

Чтобы доказать (11) при $\alpha < 0$, заметим сначала, что так как $p(x) \geqslant 0$ для каждого $x \in R$, то

$$-p(x_0) \leqslant p(-x_0).$$

Отсюда при $\alpha < 0$

$$f(\alpha x_0) = \alpha\, p(x_0) \leqslant -\alpha\, p(-x_0) = p(\alpha x_0).$$

Замечание. Утверждения леммы, теоремы 1 и следствия из нее остаются справедливыми для функционалов p, удовлетворяющих только условиям 2) и 3) предложения III. Действительно, в доказательствах леммы н теоремы 1 условие $p(x) \geqslant 0$ не было использовано; при доказательстве же следствия достаточно заметить, что $0 = p(x - x) \leqslant p(x) + p(-x)$ и потому $-p(-x) \leqslant p(x)$ для всех $x \in R$.

Функционал Минковского p (в вещественном или комплексном линейном пространстве R) называют *полунормой*, если $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ для всех (соответственно вещественных или комплексных) чисел α и всех $x \in R$. Полунорма p называется *нормой*, если $p(x) > 0$

при $x \neq 0$; обычно для обозначения нормы вместо $p(x)$ пишут $\|x\|$ или $|x|$. Множество M в (вещественном или комплексном) пространстве R называют *симметричным*, если из $x \in M$ и $|\alpha| = 1$ следует $\alpha x \in M$.

I. *Если p — полунорма, то*:

1) *совокупность $\mathfrak{M}$ всех векторов x из R, удовлетворяющих условию $p(x) = 0$, есть подпространство в R*;

2) *при фиксированном $c > 0$ совокупность K всех векторов x из R, удовлетворяющих неравенству $p(x) \leqslant c$, есть симметричное поглощающее выпуклое множество в R. Обратно, если K — симметричное поглощающее выпуклое множество, то его функционал Минковского p есть полунорма.*

Действительно, если $x,\ y \in \mathfrak{M}$, то $p(x) = 0$, $p(y) = 0$, и потому $p(\alpha x) = |\alpha| p(x) = 0$, $0 \leqslant p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) = 0$; следовательно, также αx и $x + y \in \mathfrak{M}$, т. е. $\mathfrak{M}$ — подпространство.

Далее, если $x \in K$, $|\alpha| = 1$, то $p(\alpha x) = |\alpha| p(x) = p(x) \leqslant c$, и потому $\alpha x \in K$; следовательно, K симметрично. Остальные свойства K были доказаны в п. 8.

Обратно, пусть K — симметричное поглощающее выпуклое множество и p — его функционал Минковского. Пусть $|\alpha| = 1$. Тогда $\alpha^{-1}K = K$, и потому

$$p(\alpha x) = \inf\{\beta\colon \beta > 0,\, \alpha x \in \beta K\} = \inf\{\beta\colon \beta > 0,\, x \in \beta\,(\alpha^{-1}K)\} = \\ = \inf\{\beta\colon \beta > 0,\, x \in \beta K\} = p(x).$$

Отсюда при любом $\alpha = re^{i\theta}$, где $r \geqslant 0$ и θ вещественно, имеем $p(\alpha x) = p(re^{i\theta}x) = p(rx) = r\,p(x) = |\alpha| p(x)$.

Теорема 2 (Сухомлинов[1]) [1]). *Пусть p — полунорма в комплексном линейном пространстве R, а f — линейный функционал, определенный в некотором подпространстве $\mathfrak{M} \subset R$ и удовлетворяющий условию*

$$|f(x)| \leqslant p(x) \quad \textit{для всех} \quad x \in \mathfrak{M}. \tag{12}$$

Тогда f можно продолжить до линейного функционала F, определенного во всем пространстве $\mathfrak{M} \subset R$ и удовлетворяющего условию

$$|F(x)| \leqslant p(x) \quad \textit{для всех} \quad x \in R. \tag{13}$$

Доказательство. Будем рассматривать R как вещественное пространство и положим

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x), \tag{14}$$

[1]) Этот результат был также получен независимо Боненблустом и Собжиком [1].

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ вещественны. Очевидно, f_1 и f_2 — вещественно линейные функционалы в $\mathfrak{M}$, рассматриваемом как вещественное пространство; так как

$$l[f_1(x) + if_2(x)] = if(x) = f(ix) = f_1(ix) + if_2(ix),$$

то

$$f_1(ix) = -f_2(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathfrak{M}. \tag{15}$$

Из (12) следует, что $f_1(x) \leqslant p(x)$ для всех $x \in \mathfrak{M}$, так что на основании теоремы 1 f_1 можно продолжить до вещественно линейного функционала F_1, определенного во всем R и удовлетворяющего условию

$$F_1(x) \leqslant p(x) \quad \text{для всех} \quad x \in R. \tag{16}$$

Положим

$$F(x) = F_1(x) - iF_1(ix); \tag{17}$$

в силу (14) и (15) $F(x) = f(x)$ на $\mathfrak{M}$.

Из (17) вытекает, что $F(ix) = iF(x)$; следовательно, F — комплексно линейный функционал в комплексном пространстве R. Для завершения доказательства остается установить, что F удовлетворяет условию (13). При $F(x) = 0$ это очевидно. Пусть $F(x) \neq 0$; положим $0 = \arg F(x)$. Тогда в силу (16)

$$|F(x)| = F(e^{-i\theta}x) = F_1(e^{-i\theta}x) \leqslant p(e^{-i\theta}x) = p(x),$$

и теорема доказана.

Следствие 2. *Если p — полунорма в комплексном линейном пространстве R, то для любого вектора $x_0 \in R$ существует линейный функционал F, определенный во всем R и удовлетворяющий условиям*

$$F(x_0) = p(x_0), \tag{18}$$

$$|F(x)| \leqslant p(x) \quad \textit{для всех} \quad x \in R. \tag{13}$$

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{M}$ совокупность всех векторов αx_0, где α пробегает все комплексные числа, и определим в $\mathfrak{M}$ линейный функционал f формулой

$$f(\alpha x_0) = \alpha\, p(x_0). \tag{19}$$

Условие (12) для f будет выполнено, ибо $|f(\alpha x_0)| = |\alpha| p(x_0) = p(\alpha x_0)$. На основании теоремы 2 $f(x)$ можно продолжить до линейного функционала F, удовлетворяющего условию (13). Из (19) следует, что условие (18) также будет выполнено.

Доказанные предложения имеют простой геометрический смысл. Выясним, например, геометрический смысл следствия 1. Пусть K — выпуклое множество, определенное неравенством $p(x) < c$ при фиксированном $c > 0$, x_0 — граничная точка множества K, а P —

гиперплоскость, определенная уравнением $F(x) = c$. Так как $F(x_0) = p(x_0) = c$, то эта гиперплоскость проходит через граничную точку x_0. С другой стороны, $F(x) \leqslant p(x) < c$ для $x \in K$; следовательно, K находится по одну сторону от гиперплоскости $F(x) = c$. Гиперплоскость, проходящую через точку выпуклого множества K, называют *опорной* к K, если K находится по одну сторону от этой гиперплоскости. Предыдущие рассуждения показывают, что *если p — функционал Минковского в вещественном линейном пространстве R, то через любую граничную точку выпуклого множества K, определенного неравенством вида $p(x - a) < c$ (или $p(x - a) \leqslant c$), можно провести опорную к K гиперплоскость.*

Предположим теперь, что некоторый вектор x_1 не принадлежит ни множеству K, ни его границе. Не нарушая общности, можно считать, что $a = 0$; тогда $p(x_1) > c$. Положим $t = \dfrac{c}{p(x_1)}$ и $x_2 = tx_1$; тогда $p(x_2) = c$, следовательно, x_2 принадлежит границе K. Пусть $f(x) = c$ — опорная гиперплоскость к K, проходящая через x_2, так что $f(x_2) = c$. Тогда $f(x_1) = f\left(\dfrac{1}{t}\, x_2\right) = \dfrac{1}{t}\, f(x_2) = \dfrac{c}{t} = p(x_1) > c$. Но это означает, что K и x_1 находятся по разные стороны от гиперплоскости $f(x) = c$. Мы будем в этом случае говорить, что гиперплоскость $f(x) = c$ *отделяет* x_1 от K. Таким образом, если *p — функционал Минковского, а x_1 — вектор, не принадлежащий ни выпуклому множеству K, определенному неравенством $p(x - a) < c$, ни его границе, то существует опорная к K гиперплоскость, отделяющая x_1 от K.*

§ 2. Топологические пространства

1. Определение топологического пространства. Множество X называют *топологическим пространством*, если в нем выделена некоторая система $\mathfrak{U}$ подмножеств U, обладающая следующими свойствами [1]):

1) $\varnothing \in \mathfrak{U}$, $X \in \mathfrak{U}$;
2) *объединение любой совокупности множеств, принадлежащих $\mathfrak{U}$, также принадлежит $\mathfrak{U}$;*
3) *пересечение любого конечного числа множеств, принадлежащих $\mathfrak{U}$, также принадлежит $\mathfrak{U}$.*

Множества $U \in \mathfrak{U}$ называются тогда *открытыми множествами* топологического пространства X, а элементы $x \in X$ — *точками* этого пространства. Говорят также, что система множеств $\mathfrak{U}$ *определяет топологию T в множестве X.*

В одном и том же множестве X можно задавать различные системы $\mathfrak{U}$; они определяют тогда в X различные топологии. Мы будем

---

[1]) $\varnothing$ здесь и в дальнейшем обозначает пустое множество.

говорить, что топология T_1, определенная системой $\mathfrak{U}_1$, *слабее* топологии T_2, определенной системой $\mathfrak{U}_2$, и писать $T_1 < T_2$ и $T_2 > T_1$, если $\mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{U}_2$ и $\mathfrak{U}_1 \neq \mathfrak{U}_2$; в этом случае мы будем говорить также, что топология T_2 *сильнее* топологии T_1. Если же только известно, что $\mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{U}_2$, то мы будем писать $T_1 \leqslant T_2$ и $T_2 \geqslant T_1$ и говорить, что T_2 мажорирует T_1. Систему $\mathfrak{B}$ открытых множеств будем называть *базой* топологического пространства X, если каждое не пустое открытое множество в X есть объединение множеств $U \in \mathfrak{D}$.

Примеры. 1. Пусть $X = R^1$ есть совокупность всех вещественных чисел. Условимся открытыми множествами в X считать всевозможные объединения открытых интервалов и пустое множество $\varnothing$. Очевидно, условия 1)–3) будут выполнены и R^1 станет тогда топологическим пространством. Сами открытые интервалы образуют базу этого пространства.

2. Пусть $X = C^1$ есть совокупность всех комплексных чисел. Будем считать базой в C^1 совокупность всех множеств $|z - z_0| < \varepsilon$ при всевозможных $z_0 \in C^1$ и $\varepsilon > 0$. Тогда C^1 станет топологическим пространством.

2. Внутренность множества; окрестности. Пусть M — произвольное подмножество в X. *Внутренностью множества* M называют объединение всех открытых множеств, содержащихся в M. Внутренность множества M обозначают $\operatorname{int} M$. Очевидно, $\operatorname{int} M$ есть максимальное открытое множество, содержащееся в M.

Окрестностью $U(x)$ *точки* x называют всякое открытое [1] множество U, содержащее x. Очевидно, пересечение двух окрестностей точки x есть также окрестность этой точки. Систему окрестностей $W(x)$ точки x называют *базой окрестностей* этой точки, если каждая окрестность $U(x)$ содержит также некоторую окрестность $W(x)$ из рассматриваемой системы.

Из этого определения непосредственно видно, что база окрестностей должна обладать следующими свойствами:

1) $x \in W(x)$;
2) всякое пересечение $W_1(x) \cap W_2(x)$ окрестностей из базы содержит окрестность, принадлежащую базе;
3) если $y \in W(x)$, то в базе окрестностей точки y существует окрестность $W(y) \subset W(x)$.

Обратно, если каждой точке $x \in X$ поставлена в соответствие система множеств $W(x)$, удовлетворяющая условиям 1)–3), то можно определить топологию в X, объявив открытыми множествами $\varnothing$ всевозможные объединения множеств $W(x)$. При этом сами множества $W(x)$ станут базой этого топологического пространства. Поэтому

[1] В «Общей топологии» Н. Бурбаки окрестностью точки x_0 называют всякое множество M, для которого $x_0 \in \operatorname{int} M$. Переход к этому определению не оказывает влияния на вводимые ниже топологические понятия.

топологию в X можно также задавать, указывая базу окрестностей каждой точки $x \in X$.

Так, в примере 1 п. 1 в качестве базы окрестностей числа x_0 можно взять всевозможные открытые интервалы $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

Очевидно, две системы окрестностей $\{W'\}$, $\{W''\}$ тогда и только тогда определяют одно и то же топологическое пространство, когда каждая окрестность W' содержит некоторую окрестность W'', и обратно, каждая окрестность W'' содержит некоторую окрестность W'.

Далее, топология, определенная системой W', слабее топологии, определенной системой W'', тогда и только тогда, когда эти топологии различны и каждая окрестность W' содержит некоторую окрестность W''.

Примеры. 1. В n-мерном вещественном пространстве R^n зададим топологию, объявив базой окрестностей каждой точки $x_0 = \{\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0\}$ систему множеств $W(x)$, определенных неравенствами

$$|\xi_k - \xi_k^0| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Легко видеть, что условия 1)–3) будут при этом выполнены, так что R^n станет топологическим пространством.

2. Аналогично определяется топология в комплексном пространстве C^n.

3. Замкнутые множества; замыкание множеств. Дополнения открытых множеств называют *замкнутыми множествами*. Из свойств открытых множеств (см. п. 1) вытекает, что:

1) *пустое множество и все пространство замкнуто*;
2) *пересечение любой совокупности замкнутых множеств замкнуто*;
3) *объединение любого конечного числа замкнутых множеств замкнуто*.

Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих данное множество $M \subset X$, есть минимальное замкнутое множество, содержащее M. Его называют *замыканием* множества M и обозначают $\overline{M}$. Очевидно, $\overline{M} = M$ тогда и только тогда, когда M замкнуто. Далее, очевидно:

1′) $M \subset \overline{M}$;
2′) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ (ибо $\overline{M}$ замкнуто);
3′) $\overline{M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n} = \overline{M}_1 \cup \overline{M}_2 \cup \ldots \cup \overline{M}_n$ для любого конечного числа множеств $M_1, M_2, \ldots, M_n$;
4′) $\overline{\varnothing} = \varnothing$.

Можно также определить топологическое пространство как множество, на котором задана операция замыкания, удовлетворяющая условиям 1′)–4′). Это определение эквивалентно исходному. Действительно, достаточно объявить открытыми множествами дополнения замкнутых множеств, т. е. множеств M, удовлетворяющих условию $\overline{M} = M$. Тогда условия 1)–3) п. 1 будут выполнены, и топология, заданная этими открытыми множествами, определит операцию замыкания, совпадающую с исходной. Мы предоставляем читателю проверку справедливости этих утверждений.

$x \in \overline{M}$ тогда и только тогда, когда $x \notin \operatorname{int}(X - M)$, т. е. когда каждая окрестность $U(x)$ содержит по крайней мере одну точку множества M. Каждую точку $x \in \overline{M}$ называют *точкой прикосновения* множества M. С этим понятием тесно связано понятие предельной точки. Точку x называют *предельной* точкой множества M, если каждая окрестность $U(x)$ содержит точку множества M, отличную от x. Очевидно, всякая точка прикосновения множества M, не принадлежащая M, является его предельной точкой.

Множество M называют *совершенным*, если оно совпадает с множеством всех своих предельных точек. Множество $\overline{M} - \operatorname{int} M$ называют *границей* множества M.

Близким к понятию точки прикосновения является понятие предела последовательности. Точку x называют *пределом последовательности* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ и обозначают $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если всякая окрестность $U(x)$ содержит все члены этой последовательности, начиная с некоторого; последовательность, имеющую предел, называют *сходящейся*.

Очевидно, возможны только следующие случаи:

1). Все члены последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots$, начиная с некоторого, совпадают; тогда они совпадают с пределом x этой последовательности.

2). Имеется бесконечное множество различных членов последовательности; тогда предел последовательности есть предельная точка множества ее членов.

Множество M в топологическом пространстве X называют *плотным* в X, если $\overline{M} = X$. Пространство называют *сепарабельным*, если в X существует счетное множество, плотное в X.

Если в данном множестве X заданы две различные топологии T_1 и T_2, то T_1 слабее T_2 тогда и только тогда, когда замыкание всякого множества в топологии T_2 содержится в его замыкании в топологии T_1; это непосредственно вытекает из определения, данного в п. 1.

4. Подпространства. Всякое подмножество Y топологического пространства X можно превратить в топологическое пространство, считая открытыми множествами в Y пересечения с Y открытых множеств из X. Пространство Y с таким образом определенной в нем топологией называют *подпространством* топологического пространства X и говорят, что топология в Y *индуцирована* топологией пространства X. Из этого определения непосредственно следует, что:

1) *если* $\{U\}$ — *база открытых множеств в* X, *то* $\{U \cap Y\}$ — *база открытых множеств в* Y;
2) *если* $\{W\}$ — *база окрестностей в* X, *то* $\{W \cap Y\}$ — *база окрестностей в* Y;

3) *всякое замкнутое множество в Y есть пересечение с Y некоторого замкнутого множества из X;*
4) *замыкание в Y всякого множества $M \subset Y$ есть пересечение с Y замыкания множества M в X.*

5. Отображения топологических пространств. Пусть X и Y — два произвольных множества. Будем говорить, что задано *отображение f множества X в множество Y*, если каждой точке $x \in X$ поставлена в соответствие точка $y \in Y$.

Точку Y называют *образом* точки x при отображении f и пишут

$$y = f(x).$$

Вообще, совокупность всех образов точек $x \in M$, где M — произвольное подмножество из X', называют *образом множества M при отображении f* и обозначают $f(M)$. Совокупность же всех точек $x \in X$, для которых $f(x) \in N$, где $N \subset Y$, называют *прообразом множества N* и обозначают $f^{-1}(N)$. Если образом $f(X)$ множества X служит все пространство Y, то отображение f называют отображением X *на* Y.

Отображение X в Y называют взаимно однозначным, если прообраз каждой точки $y \in f(X)$ состоит из одной точки. Отображение X на X, при котором каждый образ совпадает со своим прообразом, называют *единичным* или *тождественным отображением*.

Пусть f — отображение X в Y, а φ — отображение Y в Z; *произведением φf* отображения φ на отображение f называют отображение, состоящее в последовательном применении сначала отображения f, а затем отображения φ.

Пусть f — отображение X в Y. Отображение φ множества $f(X)$ в X называют *обратным* к f и обозначают f^{-1}, если φf — единичное отображение в X. В этом случае из равенств $(\varphi f)(x) = x$, $(f\varphi f)(x) = f(x)$ следует, что φ есть отображение на X и что $f\varphi$ — единичное отображение в $f(X)$; следовательно, f, рассматриваемое как отображение в $f(X)$, обратно к $\varphi = f^{-1}$.

I. *Обратное отображение f^{-1} существует тогда и только тогда, когда отображение f взаимно однозначно.*

Действительно, необходимость условия очевидна. Обратно, если отображение f взаимно однозначно, то, отнеся каждой точке $y \in Y$ ее прообраз при отображении f, получим обратное отображение f^{-1}.

До сих пор мы рассматривали отображения произвольных множеств. Предположим теперь, что f есть отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y. По аналогии с обычным определением непрерывной функции отображение f называют *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если прообраз каждой окрестности $V(y_0)$ точки $y_0 = f(x_0)$ содержит некоторую окрестность $U(x_0)$ точки x_0. Отображение f пространства X в пространство Y называют *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке x пространства X. Из этого определения непосредственно следует:

II. *Отображение f пространства X в пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз всякого открытого множества из Y есть открытое множество* (*или когда прообраз всякого замкнутого множества из Y есть замкнутое множество*).

Кроме того:

III. *Если непрерывное отображение пространства X в пространство Y отображает множество $M \subset X$ в множество $N \subset Y$, то оно отображает также $\overline{M}$ в $\overline{N}$.*

Действительно, прообраз множества $\overline{N}$ замкнут и содержит M, а значит, и $\overline{M}$.

Отображение f пространства X на пространство Y называют *гомеоморфизмом*, если:

1) f взаимно однозначно;
2) отображения f и f^{-1} непрерывны.

Отображение f пространства X в пространство Y называют «*гомеоморфизмом в*», если f — гомеоморфизм X на $f(X)$, рассматриваемое как топологическое подпространство пространства Y.

Два топологических пространства X и Y называют *гомеоморфными*, если существует гомеоморфизм X на Y.

Из предложения II непосредственно следует

IV. *При гомеоморфизме открытые множества переходят в открытые множества, замкнутые — в замкнутые и замыкание всякого множества переходит в замыкание образа этого множества.*

Таким образом, при гомеоморфизме сохраняются свойства множества быть замкнутым, открытым или замыканием некоторого множества.

Свойства, сохраняющиеся при гомеоморфизмах, называют *топологическими*, а отрасль математики, изучающую топологические свойства, — *топологией*.

6. Бикомпактные множества. Систему $\{G\}$ множеств называют *покрытием* множества M, если объединение всех множеств G содержит M.

Топологическое пространство X называют *бикомпактным* [1]), если всякое его покрытие $\{G\}$ открытыми множествами G содержит конечное число множеств $\{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$, также образующих покрытие X.

Множество $M \subset X$ называют *бикомпактным*, если оно, рассматриваемое как подпространство в X, бикомпактно.

Переходя к дополнительным множествам, заключаем:

---

[1]) В зарубежной литературе (а в последнее время часто и в русской) бикомпактные пространства и множества называются *компактными* (см., например, Н. Бурбаки [3] гл. I, § 10, п. 2); см. также вторую сноску на с. 61.

I. *Пространство* X *бикомпактно тогда и только тогда, когда в нем всякая система* $\{F\}$ *замкнутых множеств с пустым пересечением содержит конечное число множеств* $F_1, F_2, \ldots, F_n$ *с пустым пересечением.*

Из I следует, что

II. *Замкнутое подмножество бикомпактного пространства бикомпактно.*

Можно дать еще следующее эквивалентное определение бикомпактного пространства. Систему $\{M\}$ множеств называют *центрированной*, если любое конечное число множеств M этой системы имеет непустое пересечение. В силу I *пространство* X *бикомпактно тогда и только тогда, когда в нем всякая центрированная система замкнутых множеств имеет непустое пересечение.*

Этому предложению можно придать еще следующую форму.

III. *Пространство* X *бикомпактно тогда и только тогда, когда в нем всякая центрированная система множеств* X *имеет по крайней мере одну общую точку прикосновения.*

Доказательство. Пусть X бикомпактно, а $\{M\}$ — центрированная система множеств X. Тогда $\{\overline{M}\}$ есть центрированная система замкнутых множеств в X, следовательно, $\{\overline{M}\}$ имеет непустое пересечение; любая точка этого пересечения есть общая точка прикосновения множеств M.

Обратно, пусть всякая центрированная система множеств в M имеет общую точку прикосновения. В частности, всякая центрированная система замкнутых множеств должна иметь общую точку прикосновения; но в силу замкнутости этих множеств она принадлежит их пересечению; следовательно, X бикомпактно.

IV. *Непрерывный образ бикомпактного пространства есть бикомпактное пространство.*

Доказательство. Пусть f — непрерывное отображение бикомпактного пространства X на пространство Y и пусть $\{G'\}$ — покрытие пространства Y открытыми множествами G'. Тогда прообразы G множеств G' открыты и образуют покрытие $\{G\}$ пространства X. В силу бикомпактности $X\{G\}$ содержит конечное покрытие $\{G_1, \ldots, G_n\}$. Но тогда $\{G'_1, G'_2, \ldots, G'_n\}$ есть содержащееся в $\{G'\}$ конечное покрытие пространства Y. Итак, каждое покрытие $\{G'\}$ пространства Y открытыми множествами содержит конечное его покрытие, т. е. Y бикомпактно.

7. Хаусдорфовы пространства. Топологическое пространство X называют *хаусдорфовым* или *отделимым*, если оно удовлетворяет следующей аксиоме отделимости: каждые две различные точки в X имеют непересекающиеся окрестности.

Так, пространства R^n и C^n в примерах п. 2 хаусдорфовы.

I. *Если F — бикомпактное множество в хаусдорфовом пространстве X и $x \notin F$, то существуют непересекающиеся открытые множества U и V, содержащие соответственно x и F.*

Доказательство. Для любой точки $y \in F$ существуют непересекающиеся открытые множества U_y, V_y, содержащие соответственно x и y. В силу бикомпактности F среди множеств V_y есть конечное число $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$, образующее покрытие F. Тогда множества $U = \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_{y_k}$, $V = \bigcup\limits_{k=1}^{n} V_{y_k}$ удовлетворяют поставленным требованиям.

II. *Бикомпактное множество в хаусдорфовом пространстве замкнуто.*

Доказательство. Пусть F бикомпактно и $x \notin F$. В силу I также $x \notin \overline{F}$; следовательно, $\overline{F} \subset F$, и потому $\overline{F} = F$.

Рассмотрим в качестве примера бикомпактные множества в пространстве R^n (пример 1 п. 2). На основании известной леммы Бореля–Лебега всякое замкнутое ограниченное множество в R^n есть бикомпактное пространство. Легко убедиться в том, что верно и обратное утверждение.

Действительно, в силу II бикомпактное множество M в R^n замкнуто. Докажем, что оно ограничено. Для этого покроем каждую точку M шаром радиуса 1; в силу бикомпактности из покрытия можно выбрать конечное покрытие. Шар, включающий это покрытие, покрывает все M. Таким образом:

III. *Подпространство в R^n бикомпактно тогда и только тогда, когда оно есть замкнутое ограниченное множество в R^n.*

IV. *При непрерывном отображении бикомпактного пространства в хаусдорфово пространство образы замкнутых множеств замкнуты.*

Доказательство. Так как замкнутое подмножество M бикомпактного пространства X бикомпактно (см. II п. 6), то непрерывный образ множества M также бикомпактен (см. IV п. 6) и потому замкнут в содержащем его хаусдорфовом пространстве (см. II).

V. *Взаимно однозначное непрерывное отображение f бикомпактного пространства X на хаусдорфово пространство есть гомеоморфизм.*

Доказательство. В силу I п. 5 обратное отображение f^{-1} существует, и достаточно доказать его непрерывность, т. е. установить, что прообраз всякого замкнутого множества из X при отображении f^{-1} есть замкнутое множество (см. II п. 5). Но это утверждение совпадает с IV, ибо оно означает, что образ замкнутого множества при отображении f в хаусдорфово пространство есть замкнутое множество.

VI. *Если множество X есть хаусдорфово пространство в топологии T_1 и бикомпактно в топологии T_2 и если $T_1 \leqslant T_2$, то $T_1 = T_2$.*

Доказательство. Пусть X_1, X_2 — множества X, снабженные соответственно топологиями T_1, T_2. В силу условия $T_1 \leqslant T_1$ тождественное отображение $f(x) = x$ бикомпактного пространства X_2 на хаусдорфово пространство X_1 непрерывно и потому (см. V) есть гомеоморфизм. Но это означает, что $T_1 = T_2$.

Применим предложение IV п. 6 к тому случаю, когда f есть непрерывное отображение пространства X в пространство R^1 всех вещественных чисел (пример 1 п. 1). В этом случае f называют *непрерывной вещественной функцией* на X. Если X бикомпактно, то в силу IV п. 6 его образ в R^1 есть бикомпактное пространство и потому (см. III) — замкнутое ограниченное множество. Но замкнутое ограниченное множество в R^1 имеет наибольший и наименьший элементы. Это означает, что функция f принимает на X наибольшее и наименьшее значения. Итак:

VII. *Непрерывная вещественная функция на бикомпактном пространстве принимает в этом пространстве наибольшее и наименьшее значения.*

VIII. *Если f и φ — два непрерывных отображения пространства X в хаусдорфово пространство Y, то множество M всех точек x, в которых $f(x) = \varphi(x)$, замкнуто.*

Доказательство. Докажем, что дополнение CM множества M, равное $\{x\colon\ f(x) \neq \varphi(x)\}$, открыто. Пусть $x_0 \in CM$; тогда $f(x_0) \neq \neq \varphi(x_0)$. Следовательно, существуют непересекающиеся окрестности $U = U(f(x_0))$, $V = V(\varphi(x_0))$. Им отвечает окрестность $W(x_0)$, образы которой при отображениях f и φ содержатся соответственно в U и V. Так как U и V не пересекаются, то $W(x_0) \subset CM$, т. е. CM открыто и M замкнуто.

IX. *Если два непрерывных отображения f и φ пространства X в хаусдорфово пространство Y совпадают на множестве $N \subset X$, то они совпадают также на его замыкании $\overline{N}$.*

Доказательство. Пусть M — то же, что и в VIII. Тогда $N \subset M$, и потому $\overline{N} \subset \overline{M}$; следовательно, $f(x) = \varphi(x)$ на $\overline{N}$.

8. Нормальные пространства. Топологическое пространство X называют *нормальным*, если для любых двух непересекающихся замкнутых множеств F_1, $F_2 \subset X$ существуют непересекающиеся открытые множества U_1, U_2, содержащие соответственно F_1 и F_2. Это условие эквивалентно следующему: для любого замкнутого множества F и открытого множества $U \supset F$ существует открытое множество V, такое, что $F \subset V$ и $\overline{V} \subset U$. Действительно, достаточно рассмотреть замкнутое множество $X - U$, не пересекающееся с F.

I. *Бикомпактное хаусдорфово пространство X нормально.*

Доказательство. Пусть F_1, F_2 — замкнутые (и потому бикомпактные) непересекающиеся множества в X. В силу I п. 7 для любой точки $y \in F_2$ существуют непересекающиеся открытые множества U_y, V_y, содержащие F_1 и y соответственно. Среди множеств V_y есть конечное число V_{y_1}, V_{y_2}, …, V_{y_n}, образующее покрытие F_2. Тогда

$$U = \bigcap_{k=1}^{n} U_{y_k}, \quad V = \bigcup_{k=1}^{n} V_{y_k}$$

— открытые непересекающиеся множества, содержащие F_1 и F_2 соответственно.

II. (Лемма Урысона.) *Для любых двух замкнутых непересекающихся подмножеств F_0, F_1 нормального пространства X существует непрерывная в X вещественная функция f, удовлетворяющая условиям:*

1) $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$;
2) $f(x) = 0$ *на* F_0;
3) $f(x) = 1$ *на* F_1.

Доказательство. Утверждение тривиально, если одно из множеств F_0, F_1 пусто. Так, если F_0 — пустое множество, то достаточно положить $f(x) = 1$ для всех $x \in X$. Поэтому мы предположим, что F_0 и F_1 — непустые множества. Положим $V_1 = X - F_1$. В силу нормальности пространства X существует открытое множество — обозначим его V_0 — такое, что $F_0 \subset V_0$, $\overline{V}_0 \subset V_1$.

Аналогично, существует открытое множество — обозначим его $V_{1/2}$ — такое, что $\overline{V}_0 \subset V_{1/2}$ и $\overline{V}_{1/2} \subset V_1$. Повторяя это рассуждение, мы для каждого числа r вида $\frac{m}{2^n}$, $0 \leqslant m \leqslant 2^n$, определим открытое множество V_r так, что $F_0 \subset V_r$, $\overline{V}_{r_1} \subset V_{r_2}$ при $r_1 < r_2$.

Положим теперь для любого вещественного числа t из интервала $0 < t < 1$

$$V_t = \bigcup_{r \leqslant t} V_r,$$

а также $V_t = \varnothing$ при $t < 0$ и $V_t = X$ при $t > 1$. Тем самым открытые множества V_t будут определены для всех вещественных значений t. При этом

$$\overline{V}_{t_1} \subset V_{t_2}, \text{ если } t_1 < t_2. \tag{1}$$

Действительно, при $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1$ существуют рациональные числа r_1, r_2 вида $\frac{m}{2^n}$, удовлетворяющие условиям $t_1 < r_1 < r_2 < t_2$, и потому $\overline{V}_{t_1} \subset \overline{V}_{r_1} \subset V_{r_2} \subset V_{t_2}$.

Если же $t_1 < 0$ или $t_2 > 1$, то соотношение (1) очевидно, ибо тогда $V_{t_1} = \varnothing$, соответственно $V_{t_2} = X$.

Положим

$$f(x) = \inf\{t\colon x \in V_t\} \tag{2}$$

и докажем, что $f(x)$ удовлетворяет всем поставленным требованиям. При $t > 1$ множество $V_t = X$ содержит любую точку x; поэтому

$\{t\colon x \in V_t\} \supset (1, \infty)$, откуда в силу (2) $f(x) \leqslant 1$. При $t < 0$ множество $V_t = \varnothing$ не содержит никакой точки x. Поэтому множество $\{t\colon x \in V_t\}$ не содержит точек $t < 0$, так что в силу (2) $f(x) \geqslant 0$. Если $x \in V_0$, то $0 \in \{t\colon x \in V_t\}$; следовательно, $f(x) \leqslant 0$. В соединении с неравенством $f(x) \geqslant 0$ это дает $f(x) = 0$ на V_0; в частности, $f(x) = 0$ на $F_0 \subset V_0$. Аналогично, из $x \notin V_1$, т. е. $x \in F_1$, вытекает, что $1 \notin \{t\colon x \in V_t\}$; отсюда в силу (1) $f(x) \geqslant 1$. С другой стороны, по доказанному выше, $f(x) \leqslant 1$. Поэтому $f(x) = 1$ на F_1. Остается доказать непрерывность функции $f(x)$. Пусть $x_0 \in X$ и $\varepsilon > 0$; положим $y_0 = f(x_0)$. В силу (1) $x_0 \in \overline{V}_t$ при $t > y_0$ и $x_0 \notin \overline{V}_t$ при $t < y_0$. В частности, $x_0 \in U(x_0) = V_{y_0+\varepsilon} - \overline{V}_{y_0-\varepsilon}$, так что, будучи открытым множеством, $U(x_0)$ — окрестность точки x_0. Если $x \in V_{y_0+\varepsilon} - \overline{V}_{y_0-\varepsilon}$, то $y_0 + \varepsilon \in \{t\colon x \in V_t\}$ и $y_0 - \varepsilon \notin \{t\colon x \in V_t\}$. Поэтому в силу (1) и (2) $y_0 - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant y_0 + \varepsilon$, т. е.

$$f(x_0) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon. \tag{3}$$

Это означает, что f непрерывна.

9. Локально бикомпактные пространства. Топологическое пространство X называют *локально бикомпактным*, если каждая точка $x \in X$ имеет окрестность, замыкание которой бикомпактно.

I. *Локально бикомпактное не бикомпактное пространство X можно так дополнить еще одним элементом $x_\infty \notin X$, чтобы оно стало бикомпактным.*

Действительно, положим $X_\infty = X \cup x_\infty$ и будем считать открытыми множествами в X_∞ все открытые множества из X, а также все множества вида $U \cup x_\infty$, где U — открытое множество в X, дополнение которого бикомпактно.

Легко проверить, что X_∞ — бикомпактное пространство. При этом если X хаусдорфово, то X_∞ также хаусдорфово. Действительно, две различные точки x_1, x_2, если обе они $\in X$, имеют непересекающиеся окрестности по условию. Если же $x_1 = x_\infty$, $x_2 \in X$, то существует окрестность U точки x_2, замыкание которой бикомпактно. Тогда $(X - \overline{U}) \cup x_\infty$ и U — непересекающиеся окрестности точек x_∞ и x_2.

Комбинируя этот результат с леммой Урысона, получаем:

II. *Если в локально бикомпактном хаусдорфовом пространстве X заданы открытое множество U и бикомпактное множество $F \subset U$, то существует вещественная функция f на X, удовлетворяющая условиям*

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1 \quad \textit{для всех} \quad f(x) \quad \textit{на} \quad F, \quad f(x) = 0 \quad \textit{вне} \quad U.$$

Действительно, достаточно применить лемму Урысона к замкнутым множествам F и $X_\infty - U$ в бикомпактном пространстве X_∞ [1]).

[1]) Если само X бикомпактно, то принимаем по определению $X_\infty = X$. В этом случае утверждение предложения II совпадает с леммой Урысона.

Если f — произвольная числовая функция на локально бикомпактном не бикомпактном пространстве X, то равенство $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ будет означать, что при любом $\varepsilon > 0$ множество $\{x\colon |f(x) - A| \geqslant \varepsilon\}$ бикомпактно; легко видеть, что этим условием число A, если оно вообще существует, определяется однозначно. В частности, равенство $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ будет означать, что при любом $\varepsilon > 0$ множество $\{x\colon |f(x)| \geqslant \varepsilon\}$ бикомпактно; в этом случае мы будем говорить, что f *обращается в нуль на бесконечности*.

10. Теорема Стоуна. Пусть Q — произвольное множество. Введем для вещественных функций f на Q обозначения

$$(f_1 \cup f_2 \cup \ldots \cup f_n)(q) = \max\{f_1(q),\, f_2(q),\, \ldots,\, f_n(q)\},$$
$$(f_1 \cap f_2 \cap \ldots \cap f_n)(q) = \min\{f_1(q),\, f_2(q),\, \ldots,\, f_n(q)\}.$$

Будем говорить, что некоторая совокупность $\mathfrak{A}$ вещественных функций на Q образует *решетку*, если она вместе с каждыми двумя функциями f_1, f_2 содержит также $f_1 \cup f_2$ и $f_1 \cap f_2$; очевидно, в этом случае она вместе с каждыми $f_1, \ldots, f_n$ содержит также $f_1 \cup f_2 \cup \ldots \cup f_n$ и $f_1 \cap f_2 \cap \ldots \cap f_n$. Совокупность $\mathfrak{A}$ вещественных функций на Q называется *вещественным линейным кольцом функций*, если она вместе с каждой функцией содержит ее произведение на любое вещественное число и вместе с каждыми двумя функциями содержит их сумму и произведение. В дальнейшем мы будем рассматривать только линейные кольца и термин «кольцо» будет всегда означать линейное кольцо [1)]. Вещественное кольцо функций $\mathfrak{A}$ называется *равномерно замкнутым*, если предел каждой равномерно сходящейся на Q последовательности функций $f_n \in \mathfrak{A}$ принадлежит $\mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ не является равномерно замкнутым, то, присоединив к нему все такие пределы, мы получим новое множество функций, содержащее $\mathfrak{A}$ и, как легко видеть, являющееся равномерно замкнутым кольцом. Это кольцо называется *равномерным замыканием кольца* $\mathfrak{A}$ и обозначается $\overline{\mathfrak{A}}$.

Примером равномерно замкнутого кольца функций является совокупность $C^r(T)$ всех непрерывных вещественных функций на данном топологическом пространстве T, а также совокупность $C^r_{t_0}(T)$ всех непрерывных вещественных функций на T, равных нулю в точке t_0.

I. *Всякое равномерно замкнутое вещественное кольцо R ограниченных функций, содержащее все константы, образует решетку.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если $x \in R$, то также $|x| \in R$, ибо тогда из x, $y \in R$ следует, что функции

$$x \cup y = \frac{1}{2}\,(x + y + |x - y|), \quad x \cap y = \frac{1}{2}\,(x + y - |x - y|)$$

также принадлежат кольцу R.

1) По поводу этих терминов см. сноску на с. 182.

Пусть $x \in R$ и $|x(t)| \leqslant c$ для всех $t \in T$. Тогда

$$|x(t)| = \sqrt{c^2 - [c^2 - x^2(t)]} = c\sqrt{1 - \left(1 - \frac{x^2(t)}{c^2}\right)} =$$

$$= c\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2n} \left(1 - \frac{x^2(t)}{c^2}\right)^n\right\},$$

где ряд сходится на T равномерно, ибо $0 \leqslant 1 - \dfrac{x^2(t)}{c^2} \leqslant 1$. Следовательно, $|x| = R$.

Замечание. Утверждение предложения I верно и для кольца функций, не содержащего отличных от нуля констант. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть совокупность R_1 всех функций вида $y(t) = c + x(t)$, $x \in R$; R_1 — равномерно замкнутое кольцо функций, содержащее все константы. Действительно, нам надо показать, что если $c_n + x_n(t)$, где $x_n \in R$, сходится равномерно к $y(t)$, то $y(t) = c + x(t)$, где $x \in R$. Прежде всего отметим, что последовательность c_n должна быть ограниченной; в противном случае мы выделили бы подпоследовательность (обозначим ее снова $c_n + x_n(t)$), для которой $c_n \to \infty$, и потому $1 + \dfrac{1}{c_n} x_n(t)$ равномерно сходится к нулю, так что, вопреки предположению, $1 \in R$ как равномерный предел функций $-\dfrac{1}{c_n} x_n(t) = R$. Но если c_n ограничена, то можно выделить подпоследовательность (обозначим ее снова $c_n + x_n(t)$), для которой c_n сходится. Пусть $c_n \to c$; тогда $x_n(t)$ сходится равномерно к $y(t) - c$. Следовательно, в силу полноты R, $x(t) = y(t) - c \in R$ и $y(t) = c + x(t)$. Если теперь $x \in R$, то, по доказанному в I, $|x| \in R_1$. Пусть $|x(t)| = c + x_1(t)$, $x_1 \in R$. Тогда $x^2(t) = c^2 + 2cx_1(t) + x_1^2(t)$ и $c^2 = x^2(t) - 2cx_1(t) - x_1^2(t) \in R$; следовательно, $c^2 = 0$, $c = 0$ и $|x| = x_1 \in R$.

II. *Пусть $\mathfrak{A}$ — совокупность непрерывных вещественных функций $x = x(t)$ на бикомпактном пространстве T, удовлетворяющая условиям*:

1) *$\mathfrak{A}$ образует решетку*;
2) *для любых двух различных точек $\tau, \sigma \in T$ и любых вещественных чисел a, b существует функция $x_{\tau\sigma} \in \mathfrak{A}$ такая, что $x_{\tau\sigma}(\tau) = a$, $x_{\tau\sigma}(\sigma) = b$.*

Тогда всякая непрерывная на T вещественная функция есть предел равномерно сходящейся последовательности функций $x_n \in \mathfrak{A}$.

Доказательство. Пусть x — произвольная непрерывная на T вещественная функция, ε — произвольное положительное число, а $x_{\tau\sigma}(t)$ — функция из $\mathfrak{A}$, удовлетворяющая условию 2) при $a = x(\tau)$, $b = x(\sigma)$. Обозначим через $U_{\tau\sigma}$, $V_{\tau\sigma}$ множества точек t, на которых $x_{\tau\sigma}(t) < x(t) + \varepsilon$ и $x_{\tau\sigma}(t) > x(t) - \varepsilon$ соответственно; $U_{\tau\sigma}$ и $V_{\tau\sigma}$ — открытые множества, содержащие τ и σ соответственно.

При фиксированном σ множества $U_{\tau\sigma}$ образуют покрытие бикомпактного пространства T; выделяя из этого покрытия конечное покрытие $\{U_{\tau_1\sigma}, U_{\tau_2\sigma}, \ldots, U_{\tau_n\sigma}\}$ и полагая $y_\sigma = x_{\tau_1\sigma} \cap x_{\tau_2\sigma} \cap \ldots \cap x_{\tau_n\sigma}$, мы получим функцию $y_\sigma \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющую условиям

$$y_\sigma(t) < x(t) + \varepsilon \quad \text{на всем} \quad T,$$
$$y_\sigma(t) > x(t) - \varepsilon \quad \text{при} \quad t \in V_\sigma = \bigcap_{j=1}^{n} V_{\tau_j\sigma}.$$

Выделяя теперь из покрытия $\{V_\sigma\}$ пространства T конечное покрытие $\{V_{\sigma_1}, \ldots, V_{\sigma_m}\}$ и полагая $z = y_{\sigma_1} \cup y_{\sigma_2} \cup \ldots \cup y_{\sigma_m}$, мы получим функцию $z \in \mathfrak{A}$, удовлетворяющую на всем T неравенствам $x(t) - \varepsilon < z(t) < x(t) + \varepsilon$, чем доказательство и завершается.

Множество $\mathfrak{A}$ функций на Q называется *отделяющим точки*, если для любых двух различных точек q_1, $q_2 \in Q$ существует функция $x \in \mathfrak{A}$ такая, что $x(q_1) \neq x(q_2)$.

Теорема 1 (Стоун [3]). *Пусть R — вещественное кольцо непрерывных функций на бикомпактном пространстве T, отделяющее точки. Тогда равномерное замыкание $\overline{R}$ кольца R либо совпадает с $C^r(T)$, либо совпадает с $C^r_{t_0}(T)$ при некотором $t_0 \in T$.*

Доказательство. а). Предположим сначала, что для всякого $t_0 \in T$ в кольце R существует функция x такая, что $x(t_0) \neq 0$. Тогда для t_1, $t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$, в кольце R существует функция x такая, что

$$x(t_1) \neq 0, \quad x(t_1) \neq x(t_2). \tag{1}$$

Действительно, существуют функции $y \in R$, $z \in R$, удовлетворяющие условиям: $y(t_1) \neq y(t_2)$, $z(t_1) \neq 0$, и мы полагаем

$$x(t) = \begin{cases} y(t) & \text{при} \quad y(t_1) \neq 0, \\ z(t) & \text{при} \quad y(t_1) = 0,\ z(t_1) \neq z(t_2), \\ y(t) + z(t) & \text{при} \quad y(t_1) = 0,\ z(t_1) = z(t_2). \end{cases} \tag{2}$$

При этом мы можем считать, что $x(t_2) = 0$; в противном случае мы заменим $x(t)$ функцией

$$u(t) = \frac{1}{x(t_2)}\, x(t) - \left[\frac{1}{x(t_2)}\, x(t)\right]^2.$$

Но тогда, положив $x_1(t) = \dfrac{1}{x(t_1)}\, x(t)$, мы получим функцию $x_1 \in R$, удовлетворяющую условиям $x_1(t_1) = 1$, $x_1(t_2) = 0$. Аналогично, существует функция $x_2 \in R$ такая, что $x_2(t_1) = 0$, $x_2(t_2) = 1$. Следовательно, полагая далее $y = ax_1 + bx_2$, заключаем, что для любых t_1, $t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$, и любых вещественных a, b в R существует функция y такая, что $y(t_1) = a$, $y(t_2) = b$. В силу замечания к I, кольцо $\overline{R}$ удовлетворяет всем условиям предложения II и потому совпадает с $C^r(T)$.

б). Если случай а) не имеет места, то все функции из R обращаются в нуль в некоторой точке $t_0 \in T$. Тогда для кольца R' всех функций вида $y(t) = c + x(t)$, $x \in R$, имеет место случай а). Поэтому для любой непрерывной вещественной функции z, в частности, для функции, равной нулю в точке t_0, и любого $\varepsilon > 0$ существует функция $y(t) = c + x(t)$, $x \in R$, такая, что $|z(t) - [c + x(t)]| < \varepsilon$ для всех $t \in T$. Полагая здесь $t = t_0$, получаем, что $|c| < \varepsilon$, и потому $|z(t) - x(t)| < 2\varepsilon$. Но это означает, что $\overline{R} = C^r_{t_0}(T)$.

Теорема 2 (Теорема Вейерштрасса). *Пусть T — замкнутое ограниченное множество в n-мерном вещественном пространстве R^n; тогда всякая непрерывная на T вещественная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть предел равномерно сходящейся на T последовательности многочленов от переменных $x_1, \ldots, x_n$ с вещественными коэффициентами.*

Для доказательства достаточно применить теорему Стоуна к кольцу $\mathfrak{A}$ всех многочленов от $x_1, \ldots, x_n$ с вещественными коэффициентами, рассматриваемых как функции на T. При этом случай $\overline{\mathfrak{A}} \in C^r_{t_0}(T)$ здесь невозможен, ибо $\mathfrak{A}$ содержит все константы.

11. Слабая топология, определенная семейством функций. Пусть Q — произвольное множество. Один из способов задания топологии в Q состоит в следующем.

Пусть $\{f_\alpha\}$ — семейство функций на Q со значениями каждой в своем топологическом пространстве X_α. Будем считать базой в Q совокупность всевозможных пересечений конечного числа множеств $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, где U_α — открытые множества в X_α. Топологию в Q, определенную этой базой, называют *слабой топологией в Q, определенной семейством $\{f_\alpha\}$*. Очевидно:

I. *Слабая топология, определенная семейством $\{f_\alpha\}$, есть наиболее слабая из топологий, в которых все функции f_α непрерывны.*

II. *Пусть F — семейство непрерывных комплексных функций на локально бикомпактном пространстве X, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) *все функции из F обращаются в нуль на бесконечности;*
2) *F отделяет точки пространства X;*
3) *в X нет точки, в которой обращались бы в нуль все функции из F.*

Тогда слабая топология в X, определенная семейством F, совпадает с исходной топологией.

Доказательство. Очевидно, функции из F можно рассматривать как непрерывные функции на X_∞, равные нулю в точке x_∞. Пусть T_1 — слабая топология в X_∞, определенная семейством F, а T_2 — топология в X_∞, определенная исходной топологией в X. В силу I $T_1 \leqslant T_2$; в силу условий 2) и 3) семейство F отделяет точки на X_∞, и потому топология T_1 хаусдорфова. На основании VI п. 7 заключаем, что $T_1 = T_2$ в X_∞, а значит, и в X.

12. Топологическое произведение пространств. Пусть $X_1, X_2, \ldots$ $\ldots, X_n$ — топологические пространства. Обозначим через $X_1 \times X_2 \times$ $\times \ldots \times X_n$ совокупность всех систем $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, где $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$; вообще, если $M_1, M_2, \ldots, M_n$ — произвольные множества в $X_1, X_2, \ldots, X_n$ соответственно, то $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$ будет обозначать совокупность всех систем $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, которые получаются, когда $x_1, x_2, \ldots, x_n$ независимо друг от друга пробегают $M_1, M_2, \ldots, M_n$.

Введем в $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ топологию, считая базой окрестностей точки $x^0 = \{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\}$ совокупность всех множеств $U_1(x_1^0) \times$ $\times U_2(x_2^0) \times \ldots \times U_n(x_n^0)$, где $U_i(x_i^0)$ — произвольные окрестности точек x_i^0, $i = 1, 2 \ldots, n$. Очевидно, аксиомы базы окрестностей (см. п. 2) будут выполнены, так что $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ станет топологическим пространством; это пространство называют *топологическим произведением пространств* $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Определение топологического произведения можно распространить на случай бесконечного числа пространств. Именно, пусть дано семейство $\{X_\alpha\}$ топологических пространств X_α, где индекс α пробегает произвольное фиксированное множество $\mathfrak{A}$ (какой угодно мощности). Обозначим через $\prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ совокупность всех функций $x = \{x_\alpha\}$, определенных для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$ и со значениями $x_\alpha \in X_\alpha$. При этом базой окрестностей точки $x^0 = \{x_\alpha^0\}$ будем считать систему множеств $U(x^0)$ в $\prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$, получающуюся следующим образом (А. Н. Тихонов): выберем (произвольное) конечное число n элементов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и для каждой точки $x_{\alpha_i}^0$ фиксированную окрестность $U(x_{\alpha_i}^0)$, $i = 1,$ $2, \ldots, n$, и обозначим через $U(x_0)$ совокупность всех точек $x = \{x_\alpha\}$, которые получаются, когда x_{α_i} независимо друг от друга пробегают $U(x_{\alpha_i}^0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, а все остальные x_n пробегают X_α. Заставляя n принимать все натуральные значения, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ пробегать всевозможные системы из n элементов множества $\mathfrak{A}$, а $U(x_{\alpha_1}^0), \ldots,$ $U(x_{\alpha_n}^0)$ — всевозможные окрестности точек $x_{\alpha_1}^0, \ldots, x_{\alpha_n}^0$, мы получим систему множеств $\{U(x^0)\}$, которую и будем считать базой окрестностей точки x^0.

Снова легко проверить, что при таком определении базы окрестностей $\prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ станет топологическим пространством. Его и называют *топологическим произведением пространств* X_α.

Если $x = \{x_\alpha\}$, то x_α называют α-й координатой точки x и *проекцией точки x на X_α*. Соответствие $x \to x_\alpha$ есть отображение пространства $X = \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ на X_α; образ множества $M \subset X$ при этом отображении называют *проекцией M на X_α*.

Из данного выше определения базы окрестностей в топологическом произведении $X = \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ видно, что топология в X есть слабая топология, определенная семейством функций $f_\alpha(x) = x_\alpha$. Поэтому функции $f_\alpha(x) = x_\alpha$ непрерывны и при отображении $f_\alpha(x) = x_\alpha$ прообразы открытых множеств открыты и замкнутых множеств замкнуты.

I. *Если Y бикомпактно, то проекция на X всякого замкнутого множества $F \subset X \times Y$ замкнута.*

Доказательство. Пусть M — проекция множества F на X и $x_0 \in \overline{M}$. Тогда всякая окрестность $U(x_0)$ имеет непустое пересечение с M, следовательно, множества

$$N_U = \{y\colon x \times y \in F,\, x \in U(x_0)\}$$

образуют центрированную систему в бикомпактном пространстве Y и потому имеют общую точку прикосновения y_0 (см. III п. 6). Но тогда $x_0 \times y_0 \in \overline{F} = F$; следовательно, $x_0 \in M$. Итак, если $x_0 \in \overline{M}$, то $x_0 \in M$; это и означает, что M замкнуто.

II. (А. Н. Тихонов [1].) *Топологическое произведение любого семейства бикомпактных топологических пространств бикомпактно.*

Доказательство[1]. Пусть $X = \prod\limits_{X_\alpha} X_\alpha$ — топологическое произведение бикомпактных пространств X_α. Согласно III п. 6 достаточно показать, что всякая центрированная система множеств в X имеет по крайней мере одну общую точку прикосновения. Пусть $\{M^\lambda\}$ — центрированная система множеств в X (при этом λ обозначает индекс, пробегающий некоторое множество Λ). Не нарушая общности, можно считать, что $\{M^\lambda\}$ есть максимальная центрированная система множеств, т. е. что систему $\{M^\lambda\}$ нельзя дополнить новыми множествами так, чтобы она осталась центрированной. Действительно, если система $\{M^\lambda\}$ не максимальна, то, применяя лемму Цорна (см. добавление I), можно расширить $\{M^\lambda\}$ до максимальной центрированной системы[2]; очевидно, достаточно доказать существование общей точки прикосновения этой максимальной системы, ибо эта точка будет также общей точкой прикосновения исходной системы $\{M^\lambda\}$. Итак, пусть $\{M^\lambda\}$ — максимальная центрированная система в X. Обозначим через M^λ_α проекцию множества M^λ на X_α. Тогда при фиксированном α множества M^λ образуют центрированную систему в X_α; ввиду бикомпактности X_α множества M^λ_α имеют общую точку прикосновения (см. III п. 6); обозначим ее x^0_α. Докажем, что $x^0 = \{x^0_\alpha\}$ есть общая точка прикосновения системы множеств $\{M^\lambda\}$, т. е. что всякая окрестность $U(x_0)$ из базы окрестностей точки x^0 пересекается с каждым из множеств M^λ.

---

[1] Изложенное здесь доказательство принадлежит Шевалле и Фринку [1].

[2] Совокупность всех центрированных систем в X является частично упорядоченным по включению множеством, удовлетворяющим условию леммы Цорна; верхней гранью линейно упорядоченного множества центрированных систем является центрированная система, полученная путем объединения всех центрированных систем этого множества.

По определению топологии в X всякая такая окрестность $U(x^0)$ задается конечной системой α_1, α_2, …, α_n индексов α и окрестностей $U(x^0_{\alpha_i})$, $i = 1, 2, \ldots, n$, условиями

$$x_{\alpha_i} \in U(x^0_{\alpha_i}), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Пусть $U_i(x^0)$ обозначает окрестность точки x^0, определенную одним только из условий (1) при фиксированном i, т. е. совокупность всех точек $x = \{x_\alpha\}$ таких, что $x_{\alpha_i} \in U(x^0_{\alpha_i})$, а все остальные x_α произвольны. Тогда $U(x^0)$ есть пересечение окрестностей $U_i(x^0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Так как $x^0_{\alpha_i}$ есть точка прикосновения каждого $M^\lambda_{\alpha_i}$, то $U(x^0_{\alpha_i})$ пересекается с каждым $M^\lambda_{\alpha_i}$; это означает, что $U_i(x^0)$ пересекается с каждым M^λ. Но пересечение конечного числа множеств M^λ есть также множество системы $\{M^\lambda\}$: в противном случае присоединение такого пересечения привело бы к центрированной системе, являющейся расширением системы $\{M^\lambda\}$, что противоречит максимальности $\{M^\lambda\}$. Поэтому можно также сказать, что $U_i(x^0)$ пересекается с пересечением любого конечного числа множеств M^λ. Однако отсюда следует, что окрестности $U_i(x^0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, должны принадлежать системе $\{M^\lambda\}$, ибо в противном случае присоединение окрестностей $U_i(x^0)$ привело бы к центрированной системе, являющейся расширением системы $\{M^\lambda\}$, что противоречит максимальности $\{M^\lambda\}$. Но тогда пересечение $U(x^0)$ окрестностей $U_i(x^0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, также принадлежит системе $\{M^\lambda\}$ и потому пересекается с каждым M^λ. Тем самым предложение II доказано.

III. *Топологическое произведение хаусдорфовых пространств хаусдорфово.*

Доказательство. Если $x, y \in \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ и $x \neq y$, то $x_\alpha \neq y_\alpha$ при некотором α. Так как X_α хаусдорфово, то существуют непересекающиеся окрестности U_α, V_α точек x_α, y_α. Их прообразы при отображении $x \to x_\alpha$ будут непересекающимися окрестностями точек x и y.

IV. *Если G и F — открытое и замкнутое множества в топологическом произведении $X \times Y$ топологических пространств X, Y, а Q — бикомпактное множество в X, то множество $\bigcup\limits_{x \in Q} \{y\colon x \times y \in F\}$ замкнуто, а множество $\bigcap\limits_{x \in Q} \{y\colon x \times y \in G\}$ открыто.*

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что $\bigcup\limits_{x \in Q} \{y\colon x \times y \in F\}$ есть проекция на Y замкнутого множества $(Q \times Y) \bigcap F$ (см. I); второе утверждение получается из первого переходом к дополнительным множествам.

V. *Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция на топологическом произведении $X \times Y$ топологических пространств X, Y со значениями в топологическом пространстве Z и пусть Q — бикомпактное* *множество в X, а G — открытое множество в Z. Тогда множество $W = \{y\colon f(x, y) \in G$ для всех $x \in Q\}$ открыто в Y.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{G}$ — прообраз G при отображении $z = f(x, y)$; тогда $\mathfrak{G}$ открыто в $X \times Y$ и

$$W = \bigcap_{x \in Q} \{y\colon x \times y \in \mathfrak{G}\},$$

так что остается применить IV.

13. Метрические пространства. Множество X называют *метрическим пространством*, если в нем каждой паре x, y поставлено в соответствие неотрицательное[1] число $\rho(x, y)$ (называемое расстоянием от x до y), удовлетворяющее следующим условиям:

1) (аксиома тождества) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;
2) (аксиома симметрии) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;
3) (аксиома треугольника) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$. $\rho(x, y)$ называется *метрикой* в X.

Примеры. 1. Совокупность R^1 всех вещественных чисел становится метрическим пространством, если расстояние определить по формуле $\rho(x, y) = |x - y|$.

2. Совокупность всех точек трехмерного пространства есть, очевидно, метрическое пространство, если под $\rho(x, y)$ понимать обычное расстояние между точками x и y. Аксиома треугольника означает, что длина стороны треугольника не превосходит суммы длин двух других его сторон, причем в данном случае знак равенства возможен лишь тогда, когда этот треугольник вырождается в отрезок прямой, т. е. когда точки x, y, z лежат на одной прямой.

3. Совокупность $C(a, b)$ всех непрерывных функций x в интервале $[a, b]$ есть метрическое пространство, если расстояние между x и y определено по формуле

$$\rho(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x(t) - y(t)|.$$

4. Пусть $\mathfrak{B}$ — совокупность всех последовательностей $x = (n_1, n_2, n_3, \ldots)$ натуральных чисел. Определим в $\mathfrak{B}$ расстояние, положив $\rho(x, x) = 0$ и $\rho(x, y) = \frac{1}{k}$, где k — первый из номеров, для которых x_k отличается от y_k. Легко проверить, что аксиомы 1), 2), 3) выполняются, причем аксиома 3) имеет место в следующей усиленной форме:

$$\rho(x, z) \leqslant \max\{\rho(x, y), \rho(y, z)\}.$$

Метрическое пространство $\mathfrak{B}$ называют *бэровскам нульмерным пространством*.

---

[1] В действительности неотрицательность $\rho(x, y)$ следует из аксиом 1)–3).

Совокупность всех точек x, удовлетворяющих одному из условий

$$\rho(x, x_0) = r, \quad \rho(x, x_0) < r, \quad \rho(x, x_0) \leqslant r \quad (r > 0),$$

называют соответственно *сферой*, *открытым шаром* и *замкнутым шаром* с центром x_0 и радиусом r. Открытый (замкнутый) шар с центром x_0 и радиусом r будем обозначать $B(x_0, r)$ (соответственно $\overline{B(x_0, r)}$).

Верхнюю (возможно бесконечную) грань расстояний между всевозможными парами точек данного множества называют *диаметром* этого множества.

В метрическом пространстве X можно ввести топологию, приняв за базу окрестностей точки $x_0 \in X$ совокупность всех открытых шаров с центром в x_0. Легко проверить, что аксиомы 1)–3) базы окрестностей и аксиома отделимости (см. пп. 2 и 7) будут выполнены, так что X станет хаусдорфовым топологическим пространством. В этом случае мы будем говорить, что топология в X *определена метрикой* $\rho(x, y)$.

Топологическое пространство X называют *метризуемым* [1)], если в нем можно ввести метрику, которая определяет в X топологию, совпадающую с исходной.

Отображение f метрического пространства X в метрическое пространство X' называют *изометрическим*, если оно сохраняет расстояния, т. е. если расстояние $\rho(x, y)$ между любыми двумя точками $x, y \in X$ равно расстоянию $\rho(x', y')$ между их образами в X'. Очевидно, *изометрическое отображение X в X' есть гомеоморфизм*. Два метрических пространства X, X' называют *изометричными*, если существует изометрическое отображение X на X'. Очевидно, *изометричные пространства гомеоморфны*.

Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства называют *фундаментальной*, если для каждого положительного числа ε существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что

$$\rho(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \text{при} \quad m, n > N(\varepsilon). \tag{1}$$

Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна. Действительно, если $\lim\limits_{n\to\infty x_n} = x_0$, то все члены последовательности $\{x_n\}$, начиная с некоторого, скажем с x_N, попадают в окрестность $\rho(x, x_0) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, при $m, n > N$ имеем $\rho(x_m, x_0) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\rho(x_n, x_0) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, и, следовательно,

$$\rho(x_m, x_n) \leqslant \rho(x_0, x_m) + \rho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Обратное предложение, вообще говоря, неверно. Если, например X — множество всех рациональных чисел, рассматриваемое как

[1)] По поводу условий метризуемости пространства см. Хаусдорф [1], § 26 и Ю. Смирнов [1].

подпространство в R^1, то всякая последовательность чисел из X, сходящаяся к иррациональному числу, фундаментальна, но не сходится в X.

Метрическое пространство называют *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится. Известный критерий сходимости Коши означает, что R^1 — полное пространство.

Неполное метрическое пространство X можно включить в полное метрическое пространство следующим приемом, обобщающим канторовскую конструкцию совокупности всех вещественных чисел.

Обозначим через $\widetilde{X}$ совокупность всех фундаментальных последовательностей $\widetilde{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, $x_n \in X$; при этом условимся не различать [1] фундаментальные последовательности

$$\widetilde{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \quad \text{и} \quad \widetilde{y} = (y_1, y_2, y_3, \ldots),$$

когда

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0.$$

Определим в $\widetilde{X}$ метрику, положив

$$\rho(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n),$$

где $\widetilde{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$, $\widetilde{y} = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$. Этот предел существует. Действительно,

$$\rho(x_m, y_m) \leqslant \rho(x_m, x_n) + \rho(x_n, y_n) + \rho(y_n, y_m);$$

следовательно,

$$\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n) \leqslant \rho(x_m, x_n) + \rho(y_n, y_m).$$

Меняя ролями n и m, заключаем, что

$$|\rho(x_m, y_m) - \rho(x_n, y_n)| \leqslant \rho(x_m, x_n) + \rho(y_n, y_m),$$

так что числа $\rho(x_n, y_n)$ образуют фундаментальную последовательность в R^1, сходящуюся в силу полноты R^1.

Легко проверить, что для $\rho(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ выполнены аксиомы 1), 2), 3) расстояния, так что $\widetilde{X}$ становится метрическим пространством. Оно содержит, в частности, все последовательности $\widetilde{x} = (x, x, x, \ldots)$, причем соответствие $x \to (x, x, x, \ldots)$ есть изометрическое отображение X в $\widetilde{X}$. Условимся поэтому не различать x и последовательность $(x, x, x, \ldots)$. Тогда X можно рассматривать как подпространство в $\widetilde{X}$.

---

[1] Точнее, две фундаментальные последовательности $\widetilde{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ и $\widetilde{y} = (y_1, y_2, \ldots)$ мы будем называть эквивалентными, если $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n) = 0$; элементами пространства $\widetilde{X}$ являются классы эквивалентных между собой фундаментальных последовательностей (см. по этому поводу сноску на с. 21).

В частности, можно говорить о расстоянии $\rho(\widetilde{x}, y)$ между точками $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ и $y \in X$: по определению расстояния в $\widetilde{X}$

$$\rho(\widetilde{x}, y) = \lim_{n\to\infty} (x_n, y) \quad \text{при} \quad \widetilde{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Поэтому если $\widetilde{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ — произвольная фундаментальная последовательность, то, переходя в (1) к пределу при $m \to \infty$, мы получим

$$\rho(\widetilde{x}, x_n) \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad n > N(\varepsilon), \tag{2}$$

так что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(\widetilde{x}, x_n) = 0$. Таким образом, *каковы бы ни были* $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ *и* $\varepsilon > 0$, *существует точка* $x \in X$ *такая, что* $\rho(\widetilde{x}, x) < \varepsilon$.

Пространство $\widetilde{X}$ *полно*. Действительно, пусть $\{\widetilde{x}_n\}$ — фундаментальная последовательность в X. По доказанному выше для каждого $\widetilde{x}_n$ существует точка $x_n \in X$ такая, что

$$\rho(\widetilde{x}_n, x_n) < \frac{1}{n}, \tag{3}$$

и потому $\widetilde{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ — фундаментальная последовательность. Но тогда в силу (2) $\lim\limits_{n\in\infty} \rho(\widetilde{x}, x_n) = 0$. Комбинируя этот результат с (3), заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(\widetilde{x}_n, \widetilde{x}) = 0$, т. е. что $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{x}_n = \widetilde{x}$.

Пространство $\widetilde{X}$ называют *пополнением пространства* X.

I. $\widetilde{X}$ *есть минимальное из всех полных метрических пространств, содержащих* X, *т. е. если* Y *— полное пространство, содержащее* X, *то существует изометрическое отображение* $\widetilde{X}$ *в* Y, *оставляющее на месте все точки* $x \in X$.

Действительно, это отображение мы получим, поставив в соответствие каждой фундаментальной последовательности $\widetilde{x} = (x_1, x_2, x_3, \ldots)$ ее предел в Y.

II. *В полном метрическом пространстве невозрастающая последовательность* $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots$ *ограниченных непустых замкнутых множеств* $F_1, F_2, F_3, \ldots$, *диаметры* $d(F_n)$ *которых стремятся к нулю, имеет непустое пересечение, состоящее из одной точки*.

Доказательство. В каждом F_n выберем по элементу x_n; тогда при $m > n$ имеем: $x_m, x_n \in F_n$, следовательно, $\rho(x_m, x_n) \leqslant d(F_n)$. Поэтому $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность; ее предел (существующий в силу полноты пространства) есть также предел каждой последовательности $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$ и потому принадлежит каждому F_n. Более одной точки, принадлежащей всем F_n, быть не может, ибо $d(F_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Множество M в метрическом пространстве X называют *нигде не плотным*, если каждый открытый шар в X содержит открытый шар, не пересекающийся с M. Множество M называют множеством *первой категории*, если оно есть объединение счетного числа нигде не плотных множеств. Всякое множество M, не являющееся множеством первой категории, называют множеством *второй категории*.

III. *Полное метрическое пространство есть множество второй категории.*

Доказательство. Предположим противное; пусть полное метрическое пространство $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$, где M_n нигде не плотно в X. Рассмотрим произвольный открытый шар S_0 радиуса 1. Так как M_1 нигде не плотно, то в S_0 есть шар S_1 радиуса $r_1 < \frac{1}{2}$, замыкание $\overline{S}_1$ которого не пересекается с M_1. Так как M_2 нигде не плотно, то в S_1 есть шар S_2 радиуса $r_2 < \frac{1}{2^2}$, замыкание $\overline{S}_2$ которого не пересекается с M_2. Повторяя это рассуждение, получим убывающую последовательность замкнутых шаров $\overline{S}_1 \supset \overline{S}_2 \supset \overline{S}_3 \supset \ldots$, к которой применимо предложение II. Пусть x_0 — точка, принадлежащая всем шарам $\overline{S}_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. По построению, x_0 не принадлежит ни одному из M_n, что, однако, противоречит равенству $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$.

IV. *Сепарабельное метрическое пространство X обладает счетной базой окрестностей.*

Доказательство. Если $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ — счетное плотное в X множество, то открытые шары

$$\rho(x, x_k) < \frac{1}{n}, \quad k, n = 1, 2, 3, \ldots,$$

образуют счетную базу в X. Действительно, пусть $U(x_0, \varepsilon)$ — произвольная окрестность, определенная условием $\rho(x_0, x) < \varepsilon$, и $x' \in U(x_0, \varepsilon)$; тогда $\rho(x_0, x') < \varepsilon - \delta$ при некотором $\delta > 0$. Выберем n_0 так, чтобы $\frac{1}{n_0} < \frac{\delta}{2}$, а затем x_{k_0}, для которого $\rho(x', x_{k_0}) < \frac{1}{n_0}$. Тогда открытый шар, определенный неравенством $\rho(x, x_{k_0}) < \frac{1}{n_0}$, целиком содержится в $U(x_0, \varepsilon)$ и содержит x'.Следовательно, каждая окрестность $U(x_0, \varepsilon)$, а значит, и каждое открытое множество в X, есть объединение шаров $\rho(x, x_k) < \frac{1}{n}$.

Очевидно, верно и обратное утверждение:

V. *Метрическое пространство X со счетной базой окрестностей сепарабельно.*

Действительно, если U_k — счетная база окрестностей в X, то, выбрав x_k в каждом U_k, мы получим счетное множество $\{x_k\}$. Оно плотно в X, ибо для каждого $x_0 \in X$ и $\varepsilon > 0$ существует $U_k \subset U(x_0, \varepsilon)$. Тогда $x_k \in U(x_0, \varepsilon)$, т. е. $\rho(x_0, x_k) < \varepsilon$.

Отсюда и из предложения IV следует:

VI. *Всякое подмножество X_1 сепарабельного метрического пространства X сепарабельно.*

Действительно, если U_k — счетная база окрестностей в X, то $U_k \cap X_1$ — счетная база окрестностей в X_1, и остается применить предложение V.

14. Компактные множества в метрических пространствах. Множество Q в метрическом пространстве X называют *предкомпактным* [1]), если каждая последовательность элементов из Q содержит фундаментальную подпоследовательность. Множество Q в метрическом пространстве называют *компактным* [2]), если каждая последовательность элементов из Q содержит подпоследовательность, сходящуюся к некоторому элементу из Q. Очевидно, каждое компактное множество предкомпактно, а замкнутое предкомпактное множество в полном метрическом пространстве компактно.

Множество E точек метрического пространства X называют *ε-сетью* для множества $M \subset X$, если для любого элемента $x \in M$ найдется элемент y множества E, отстоящий от x на расстоянии меньшем, чем ε.

I. (Хаусдорф [1].) *Подмножество M метрического пространства X предкомпактно тогда и только тогда, когда X содержит конечную ε-сеть для множества M при каждом $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. а). Необходимость. Пусть M предкомпактно и пусть $x_1 \in M$. Если $\rho(x, x_1) < \varepsilon$ для всех $x \in M$, то конечной ε-сетью будет уже множество, состоящее из одной точки x_1. Если же это не имеет места, то существует точка $x_2 \in M$ такая, что $\rho(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$. Если тогда для любой точки $x \in M$ либо $\rho(x, x_1) < \varepsilon$, либо $\rho(x, x_2) < \varepsilon$, то множество $\{x_1, x_2\}$ будет конечной ε-сетью. В противном случае существует точка x_3 такая, что $\rho(x_1, x_3) \geqslant \varepsilon$, $\rho(x_2, x_3) \geqslant \varepsilon$. Повторяя эти рассуждения, мы будем строить точки x_i такие, что $\rho(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$ при $i \neq j$. Априори возможны два случая: либо этот процесс оборвется на некотором конечном, скажем n-м, шаге, и тогда $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ будет конечной ε-сетью, либо этот процесс будет бесконечным, но тогда мы получим бесконечную последовательность

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \tag{1}$$

элементов множества M такую, что

$$\rho(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, 3, \ldots . \tag{2}$$

[1]) Другое определение предкомпактного множества, и притом в произвольном топологическом пространстве, совпадающее с данным в тексте в случае метрического пространства, см. в книге Н. Бурбаки [3], гл. II, § 4, п. 4 (см. также следующую сноску и сноску на с. 39).

[2]) Можно показать, что множество Q в метрическом пространстве компактно тогда и только тогда, когда оно бикомпактно; мы предоставляем читателю доказательство этого факта как полезное упражнение.

А это невозможно, ибо в силу (2) никакая подпоследовательность последовательности (1) не будет фундаментальной в противоречие с предкомпактностью множества M.

б). Достаточность. Пусть для любого $\varepsilon > 0$ в X существует конечная ε-сеть для множества M. Выберем последовательность ε_n, $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, и для каждого ε_n построим конечную ε-сеть

$$\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)}\}$$

для множества M. Пусть теперь $T = \{x_n\}$ — последовательность элементов из M; докажем, что из нее можно выделить фундаментальную подпоследовательность. Тем самым предкомпактность множества M будет доказана. Около каждой из точек ε_1-сети $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$, …, $x_{k_1}^{(1)}$ опишем шар радиуса ε_1.

Каждая из точек последовательности T попадет в один из этих шаров; следовательно, хотя бы один из этих шаров содержит (бесконечную) подпоследовательность последовательности T. Обозначим через T_1 эту подпоследовательность. Около каждой из точек ε_2-сети $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_{k_1}^{(2)}$ опишем шар радиуса ε_2; тогда хотя бы один из этих шаров содержит подпоследовательность T_2 последовательности T_1. Повторяя это рассуждение, мы получим последовательность вложенных друг в друга последовательностей $T \supset T_1 \supset T_2 \supset \ldots$, где каждая T_n содержится в шаре радиуса ε_n. Возьмем теперь элемент $x_{n_1} \in T_1$, элемент $x_{n_2} \in T_2$ с номером $n_2 > n_1$, элемент $x_{n_3} \in T_3$ с номером $n_3 > n_2$ и т. д. Мы получим подпоследовательность x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, … последовательности T. Она фундаментальна. Действительно, $x_{n_p} \in T_p$, $x_{n_{p+q}} \in T_{p+q} \subset T_p$, и потому обе точки x_{n_p}, $x_{n_{p+q}}$ находятся в шаре радиуса ε_p, откуда

$$\rho(x_{n_{p+q}}, x_{n_p}) \leqslant 2\varepsilon_p.$$

II. *Подмножество M метрического пространства X предкомпактно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ в X существует предкомпактная ε-сеть для множества M.*

Доказательство. Необходимость очевидна, ибо, согласно I, существует даже конечная ε-сеть для множества M. Докажем достаточность. Пусть E — предкомпактная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть для M; согласно I существует конечная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть F для множества E. Тогда F — конечная ε-сеть для M. Действительно, если $x \in M$, то существует элемент $y \in E$ такой, что $\rho(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$, и элемент $z \in F$ такой, что $\rho(y, z) < \frac{\varepsilon}{2}$; следовательно, $\rho(x, z) < \varepsilon$. На основании I заключаем отсюда, что M предкомпактно.

15. Топологическое произведение метрических пространств. Пусть X_α — метрические пространства, $X = \prod\limits_\alpha X_\alpha$ — их топологическое произведение (см. п. 12), ρ_α — метрика в X_α.

I. *Топологическое произведение конечного или счетного числа метрических пространств X_j метризуемо.*

Доказательство. В случае конечного числа пространств $X_1, \ldots$ $\ldots, X_n$ очевидно, что топология в $X = \prod_{j=1}^{n} X_j$ определяется метрикой $\rho(x, y) = \rho_1(x_1 y_1) + \ldots + \rho_n(x_n, y_n)$ при $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $y = \{y_1, \ldots$ $\ldots, y_n\}$. В случае счетного числа пространств $X_1, X_2, \ldots$ положим

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(x_n, y_n)}{1 + \rho_n(x_n, y_n)} \tag{1}$$

при $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$, $x_n, y_n \in X_n$. Нетрудно проверить непосредственно, что $\rho(x, y)$ удовлетворяет всем аксиомам расстояния. Докажем, что топология в $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ определяется метрикой $\rho(x, y)$. По определению топологии в X базу окрестностей в X образуют всевозможные множества $U(x_1^0, \ldots, x_n^0; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$, определенные неравенствами

$$\rho_j(x_j, x_j^0) < \varepsilon_j, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

при произвольных фиксированных n, $\varepsilon_j > 0$ и $x_j^0 \in X_j$, $j = 1, \ldots, n$. Каждая такая окрестность содержит шар $S(x_0, \varepsilon)$, определенный неравенством

$$\rho(x, x_0) < \varepsilon, \tag{3}$$

где $\varepsilon = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} \dfrac{1}{2^k} \dfrac{\varepsilon_k}{1 + \varepsilon_k}$ и $x_0 = \{x_j^0\}$, причем x_j^0 произвольны для $j > n$. Действительно, если $\rho(x, x_0) < \varepsilon$, то в силу (1)

$$\frac{1}{2^k} \frac{\rho_k(x_k, x_k^0)}{1 + \rho_k(x_k, x_k^0)} < \varepsilon \leqslant \frac{1}{2^k} \frac{\varepsilon_k}{1 + \varepsilon_k} \quad \text{при} \quad k = 1, \ldots, n,$$

откуда

$$\rho_k(x_k, x_k^0) \leqslant \varepsilon_k \quad \text{при} \quad k = 1, \ldots, n.$$

Обратно, каждый шар $S(x, \varepsilon)$ содержит некоторую окрестность $U(x_1^0, \ldots, x_n^0; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Действительно, выберем n так, чтобы $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k} < \dfrac{\varepsilon}{2}$, и положим $\varepsilon_1 = \ldots = \varepsilon_n = \dfrac{\varepsilon}{2}$; тогда из неравенств

$$\rho_k(x_k, x_k^0) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

будет следовать, что

$$\rho(x, y) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \frac{\rho_k(x_k, x_k^0)}{1 + \rho_k(x_k, x_k^0)} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\rho_k(x_k, x_k^0)}{1 + \rho_k(x_k, x_k^0)} <$$
$$< \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

А это означает, что $U\left(x_1^0, \ldots, x_n^0; \frac{\varepsilon}{2}, \ldots, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset S(x_0, \varepsilon)$.

II. *Если метрические пространства $X_1, X_2, \ldots$ полны, то $\prod\limits_{j=1}^{\infty} X_j$ полно* [1]).

Доказательство. Пусть $x^{(n)} = \{x_k^{(n)}\}$ — фундаментальная последовательность в $X = \prod\limits_{j=1}^{\infty} X_j$. Из (1) легко следует, что при каждом фиксированном k $x_k^{(n)}$ — фундаментальная последовательность в X_k. В силу полноты пространства X_k существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_k^{(n)} = x_k^0 \in X_k$. Положим $x^0 = \{x_k^0\}$. Тогда $\rho(x^{(n)}, x^0) \to 0$ при $n \to \infty$. Действительно, при заданном $\varepsilon > 0$ выберем сначала N_1 так, чтобы $\sum\limits_{k=N_1+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$, а затем N так, чтобы $\rho(x_k^{(n)}, x_k^0) < \frac{\varepsilon}{2}$ при $k = 1, \ldots, N_1$ и $n > N$. Тогда

$$\rho(x^{(n)}, x^0) \leqslant \sum_{k=1}^{N_1} \frac{1}{2^k} \frac{\rho_k(x_k^{(n)}, x_k^0)}{1 + \rho_k(x_k, x_k^0)} + \sum_{k=N_1+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=1}^{N_1} \frac{1}{2^k} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

при $n > N$.

III. *Топологическое произведение конечного или счетного числа сепарабельных метрических пространств сепарабельно.*

Доказательство. Пусть S_k — счетное плотное множество в X_k. В случае конечного числа пространств $X_1, \ldots, X_n$ совокупность всех $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $x_1 \in S_1, \ldots, x_n \in S_n$, образует в $X_1 \times \ldots \times X_n$ счетное плотное множество. В случае счетного числа пространств $X_1, X_2, \ldots$ совокупность всех $x = \{x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots, \}$, $x_k \in S_k$, $k = 1, \ldots, n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, образует счетное множество, плотное в $\prod\limits_{k=1}^{\infty} X_k$.

Условимся через X^N, где X — метрическое пространство с метрикой $\rho'(x, y)$, обозначать произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, в котором все $X_n = X$ и метрика задана формулой

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\rho_n(x_n, y_n)}{1 + \rho_n(x_n, y_n)}$$

при $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$, $x_n, y_n \in X_n$, где ρ_n — метрика в X_n, совпадающая с ρ'.

IV. *Топологическое произведение конечного или счетного числа компактных метрических пространств компактно.*

---

[1]) Утверждение предложения II верно и для топологического произведения конечного числа метрических пространств; в этом случае оно тривиально.

Доказательство[1]. Пусть X_j компактно и пусть $x^{(n)} = \{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots\}$ — последовательность из $X = \prod_j X_j$. Тогда $\{x_1^{(n)}\}$ — последовательность в компактном пространстве X_1, и потому существует такая подпоследовательность $x^{(n_1)}$, что $x_1^{(n_1)}$ сходится в X_1. Далее, $x_2^{(n_1)}$ — последовательность в компактном пространстве X_2; поэтому существует такая подпоследовательность $x^{(n_2)}$ последовательности $X^{(n_1)}$, что $x_2^{(n_2)}$ сходится в X_2; при этом $x_1^{(n_2)}$ также сходится в X_1.

Если число пространств X_j конечно (и равно p), то после p шагов мы получим последовательность $x^{(n_p)}$, сходящуюся в $X = \prod_{j=1}^{p} X_j$. Если же число пространств X_j счетно, то при каждом натуральном p мы получим последовательность $x^{(n_p)}$, обладающую следующими свойствами: 1) $\{x^{(n_p)}\} \supset \{x^{(n_{p+1})}\}$ и 2) $x^{(n_p)}$ сходится в X_j при $j = 1, 2, \ldots, p$. Тогда «диагональная» последовательность $\{x_1^{(n_1)}, x_2^{(n_2)}, x_3^{(n_3)}, \ldots\}$ будет сходиться в $X = \prod_{j=1}^{\infty} X_j$.

§ 3. Топологические линейные пространства

1. Определение топологического линейного пространства. Множество X называют *топологическим линейным пространством*, если:

1) X — линейное пространство;
2) X — хаусдорфово топологическое пространство;
3) сумма $x + y$ векторов x, y непрерывна по совокупности переменных x, y;
4) произведение αx вектора x на число α непрерывно по совокупности переменных α, x.

При этом X может быть как вещественным, так и комплексным линейным пространством[2]. Чтобы не рассматривать эти случаи отдельно, условимся обозначать через $\mathfrak{C}$ совокупность всех вещественных чисел или совокупность всех комплексных чисел (в зависимости от того, рассматривается ли вещественное или комплексное пространство) с естественной в них топологией (см. примеры 1 и 2 п. 1 § 2). Условие 4) означает, что отображение $\{\alpha, x\} \to \alpha x$ топологического произведения $\mathfrak{C} \times X$ в X непрерывно; аналогично условие 3) означает,

[1] Утверждение следует из теоремы Тихонова (II п. 12); здесь дается независимое доказательство.

[2] Мы будем главным образом рассматривать комплексные пространства; отсутствие оговорки всегда будет означать, что рассматриваемое топологическое линейное пространство комплексно.

что отображение $\{x, y\} \to x + y$ топологического произведения $X \times X$ в X непрерывно.

Если X — топологическое линейное пространство, то в силу условия 3) при любом $x_0 \in X$ отображение $x \to x + x_0$ непрерывно.

Это отображение называют *сдвигом* в X. Так как обратное отображение $x \to x - x_0$ существует и также непрерывно, то всякий сдвиг $x \to x + x_0$ есть гомеоморфизм. Поэтому, если $\{U(0)\}$ — база окрестностей точки 0, то $\{U(0) + x_0\}$ — база окрестностей точки x_0. В частности, если $\{U(0)\}$ — совокупность всех окрестностей точки 0, то $\{U(0) + x_0\}$ — совокупность всех окрестностей точки x_0.

I. *Замыкание $\overline{K}$ выпуклого подмножества K топологического линейного пространства X выпукло.*

Действительно, для каждого λ из отрезка $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ функция $f(x, y) = (1 - \lambda)\, x + \lambda y$ непрерывна на $X \times X$ и отображает $K \times K$ в K, а следовательно, и $\overline{K} \times \overline{K}$ в $\overline{K}$ (см. III п. 5 § 2 и п. 12 § 2). Но это означает, что $(1 - \lambda)\, x + \lambda y \in \overline{K}$ для всех $x, y \in \overline{K}$.

Отображение f топологического линейного пространства X в топологическое линейное пространство Y называется *изоморфизмом* X в Y, если:

1) f есть изоморфное отображение линейного пространства X в линейное пространство Y;
2) f есть гомеоморфное отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y.

Если, кроме того, $f(X) = Y$, то f называется *изоморфизмом X на Y*.

Два топологических линейных пространства X и Y называют *изоморфными*, если существует изоморфизм X на Y.

Топологическое линейное пространство X называют *локально выпуклым*, если в нем существует база окрестностей нуля, являющихся симметричными выпуклыми множествами в X (см. пп. 8 и 9 § 1). В дальнейшем мы будем рассматривать только локально выпуклые топологические линейные пространства, которые мы кратко будем называть *локально выпуклыми пространствами*. Отметим, однако, что некоторые результаты, в частности все результаты п. 2, остаются справедливыми для общих топологических линейных пространств.

Примеры. 1. Топологическое пространство C^n примера 2 п. 2 § 2 можно также рассматривать как линейное пространство (см. пример 1 п. 1 § 1); легко видеть, что тогда C^n — комплексное топологическое линейное пространство. Оно локально выпукло, ибо в нем базисная окрестность $U(a, \varepsilon)$ есть совокупность всех точек x, удовлетворяющих условию $p(x - a) < \varepsilon$, где $p(x) = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$ есть норма в C^n; поэтому $U(a, \varepsilon)$ — выпуклое множество в C^n (см. п. 8 § 1). Аналогично пространство R^1 примера 1 п. 1 § 2 можно рассматривать как вещественное линейное пространство (определив сложение как сложение чисел, а умножение на вещественное число как обычное умножение); тогда R^1 — локально выпуклое вещественное топологическое линейное пространство.

2. Пусть X — произвольное локально бикомпактное (в частности, бикомпактное) пространство. Обозначим через $C(X)$ совокупность всех непрерывных комплексных функций на X. Определим в $C(X)$ сложение как сложение функций и умножение на комплексное число как умножение функции на число. Тогда $C(X)$ станет линейным пространством. Далее определим в $C(X)$ топологию следующим образом. Пусть K — произвольное бикомпактное подмножество в X и ε — произвольное положительное число; окрестностью $U(f_0, K, \varepsilon)$ функции $f_0 \in C(X)$ назовем совокупность всех функций f из $C(X)$, удовлетворяющих неравенству

$$|f(x) - f_0(x)| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in K.$$

Заставляя K пробегать все бикомпактные подмножества в X, а ε — все положительные числа, мы получим систему окрестностей, которую и будем считать базой окрестностей функции f_0. Легко проверить, что условия 3)–4) определения топологического линейного пространства будут выполнены и что $U(f_0, K, \varepsilon)$ — выпуклое множество в $C(X)$; следовательно, $C(X)$ есть локально выпуклое комплексное топологическое линейное пространство.

2. Замкнутые подпространства в топологических линейных пространствах. Множество $\mathfrak{M}$ элементов топологического линейного пространства X называют *замкнутым подпространством* пространства X, если:

1) $\mathfrak{M}$ — линейное подпространство линейного пространства X;

2) $\mathfrak{M}$ — замкнутое подмножество топологического пространства X.

Очевидно:

I. *Пересечение любого множества замкнутых подпространств в X есть также замкнутое подпространство в X* (см. п. 3 § 1 и п. 3 § 2).

В частности, пересечение всех замкнутых подпространств в X, содержащих данное множество $M \subset X$, есть минимальное замкнутое подпространство в X, содержащее M; его называют *замкнутой линейной оболочкой* множества M; мы будем обозначать его $[M]$. Если вообще дана совокупность множеств $M_1, M_2, \ldots$ в произвольном, конечном, счетном или несчетном числе, то $[M_1, M_2, M_3, \ldots]$ будет обозначать замкнутую линейную оболочку их объединения. Отметим, что

II. *Если $\mathfrak{M}$ (вообще говоря, незамкнутое) — линейное подпространство в X, то его замыкание $\overline{\mathfrak{M}}$ есть также линейное подпространство и, следовательно, замкнутое линейное подпространство в X.*

Доказательство. При фиксированном $y \in \mathfrak{M}$ непрерывное отображение $f(x) = x + y$ переводит $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{M}$, и потому $\overline{\mathfrak{M}}$ в $\overline{\mathfrak{M}}$

(см. III, п. 5, § 2); это означает, что $x + y \in \overline{\mathfrak{M}}$ при $x \in \overline{\mathfrak{M}}$, $y \in \mathfrak{M}$. Но тогда при фиксированном $x \in \overline{\mathfrak{M}}$ непрерывное отображение $f(y) = x + y$ переводит $\mathfrak{M}$ в $\overline{\mathfrak{M}}$, а потому и $\overline{\mathfrak{M}}$ в $\overline{\mathfrak{M}}$; другими словами, если $x, y \in \overline{\mathfrak{M}}$, то $x + y \in \overline{\mathfrak{M}}$. Аналогично доказывается, что если $x_0 \in \overline{\mathfrak{M}}$, то и $\alpha x_0 \in \overline{\mathfrak{M}}$.

Из II следует, что *замкнутая линейная оболочка множества M есть замыкание совокупности всех конечных линейных комбинаций элементов из M*.

Топологическое линейное пространство X_1 мы будем называть *подпространством топологического линейного пространства X*, если:

1) X_1 — линейное подпространство пространства X;
2) X_1 — топологическое подпространство топологического пространства X.

3. Выпуклые множества в локально выпуклых пространствах. Пусть теперь X — локально выпуклое пространство. Рассмотрим в X выпуклое множество K, содержащее в качестве внутренней точки 0. Тогда K содержит выпуклую симметричную окрестность нуля $U(0)$. При любом фиксированном $x \in X$ произведение αx есть непрерывная функция от α, равная нулю при $\alpha = 0$; следовательно, существует положительное число δ такое, что $\alpha x \in U(0)$ при $|\alpha| < \delta$, и потому также

$$\alpha x \in K \quad \text{при} \quad |\alpha| < \delta.$$

Это означает, что

$$x \in \frac{1}{\alpha} K \quad \text{при} \quad |\alpha| < \delta. \tag{1}$$

Таким образом (см. п. 8 § 1):

I. *Каждое выпуклое множество K в пространстве X, содержащее 0 в качестве внутренней точки, является поглощающим.*

Согласно предложению III п. 8 § 1 такому множеству K отвечает функционал Минковского p такой, что если $x \in K$, то $p(x) \leqslant 1$, и если $p(x) < 1$, то $x \in K$. Отсюда и из V п. 8 § 1 заключаем, что граница множества K состоит из тех и только тех векторов x, для которых $p(x) = 1$.

II. *Пусть K — выпуклое множество в X, содержащее 0 в качестве внутренней точки. Тогда функционал Минковского p множества K непрерывен.*

Доказательство. Пусть $U(0)$ — окрестность точки 0, содержащаяся в K. Тогда $p(x) \leqslant 1$ при $x \in U(0)$, и потому $p(x) \leqslant \varepsilon$ при $x \in \varepsilon U(0)$. Следовательно, при $x - x_0 \in \varepsilon U(0)$ имеем

$$|p(x) - p(x_0)| \leqslant p(x - x_0) \leqslant \varepsilon.$$

Пусть теперь K — выпуклое множество, содержащее внутреннюю точку x_0. Тогда $K - x_0$ есть выпуклое множество, содержащее внутреннюю точку 0, а потому и выпуклую симметричную окрестность нуля.

Применяя предыдущие результаты к выпуклому множеству $K - x_0$, заключаем:

III. *Для всякого выпуклого множества* K, *содержащего внутреннюю точку* x_0, *существует непрерывный функционал Минковского* p *такой, что*

1) $p(x - x_0) \leqslant 1$ *для всех* $x \in K$;
2) $p(x - x_0) = 1$ *для всех граничных точек* x *множества* K *и только для них*;
3) $p(x - x_0) > 1$ *для любого вектора* x, *не принадлежащего ни* K, *ни его границе.*

Отсюда и из результатов п. 9 § 1 следует

IV. *Пусть* K — *выпуклое множество в вещественном локально выпуклом пространстве, содержащее внутреннюю точку. Тогда*:

1) *через всякую граничную точку множества* K *можно провести опорную гиперплоскость к* K;
2) *если* x_0 *не принадлежит ни* K, *ни его границе, то существует опорная гиперплоскость к* K, *отделяющая* x_0 *от* K.

Отметим еще следующее предложение.

V. *Если* K — *выпуклое замкнутое множество, то все граничные точки множества* K *принадлежат* K.

Доказательство. Пусть x_0 — граничная точка множества K, а $[x_1, x_0]$ — отрезок, все внутренние точки которого принадлежат K. Тогда при $0 < t_n < 1$ и $t_n \to 1$ точки $x_n = (1 - t_n)\,x_1 + t_n x_0$ принадлежат K и образуют последовательность, сходящуюся к x_0. В силу замкнутости K отсюда следует, что $x_0 \in K$.

4. Задание локально выпуклой топологии при помощи полунорм. Применим теперь предыдущее построение к выпуклому множеству $K = U(0)$, где $U(0)$ — симметричная выпуклая окрестность нуля. Пусть p — соответствующий функционал Минковского. В силу I п. 9 § 1 p — полунорма. Если $x \in U(0)$, то $p(x) < 1$. Действительно, так как $U(0)$ — открытое множество и произведение αx непрерывно при $\alpha = 1$, то существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\alpha x \in U(0)$ при $|\alpha - 1| < \varepsilon$. Поэтому множество $\{\beta\colon \beta > 0,\, x \in \beta U(0)\}$ содержит числа, меньшие единицы, и $p(x) < 1$.

Обратно, если $p(x) < 1$, то $x \in U(0)$ в силу III п. 8 § 1.

I. *Каждой симметричной выпуклой окрестности нуля* $U(0)$ *отвечает такая полунорма* p, *что* $U(0)$ *есть совокупность всех тех векторов* x, *для которых* $p(x) < 1$.

Таким образом, базе окрестностей нуля $\{U(0)\}$ отвечает система полунорм $\{p\}$. Эта система полунорм обладает следующим свойством: *для каждого* $x_0 \neq 0$ *в системе* $\{p\}$ *существует полунорма* p *такая, что* $p(x_0) \neq 0$.

Действительно, если $x_0 \neq 0$, то в $\{U(0)\}$ существует окрестность $U(0)$, не содержащая x_0; следовательно, полунорма p, отвечающая этой окрестности $U(0)$, удовлетворяет условию $p(x_0) \geqslant 1$, так что подавно $p(x_0) > 0$.

Систему $\{p\}$ полунорм в линейном пространстве X мы будем называть *достаточной*, если для каждого вектора $x_0 \neq 0$ из X в этой системе существует полунорма p такая, что $p(x_0) > 0$.

Мы доказали, что

II. *Базе $\{U(0)\}$ симметричных выпуклых окрестностей нуля в X отвечает достаточная система $\{p\}$ полунорм.*

Обратно, пусть в линейном пространстве X задана произвольная достаточная система $\{p\}$ полунорм. Введем в X топологию, считая окрестностью вектора x_0 каждую совокупность всех векторов x, удовлетворяющих условиям $p(x - x_0) < \varepsilon$, $k = 1, 2 \ldots, n$, при фиксированных $p_k \in \{p\}$, $k = 1, 2 \ldots, n$, и фиксированных n и $\varepsilon > 0$, и принимая совокупность окрестностей, получающихся при всевозможных $n = 1, 2, 3 \ldots$, всевозможных p_k из $\{p\}$ и всевозможных $\varepsilon > 0$, за базу окрестностей вектора x_0. Очевидно, эти окрестности получаются из соответствующих окрестностей нуля сдвигами $x \to x + x_0$, причем окрестности нуля являются симметричными выпуклыми множествами в X (см. п. 9, § 1).

Докажем, что *при таком определении базы окрестностей X станет топологическим линейным пространством*, локально выпуклым в силу сказанного выше.

Прежде всего надо проверить, что выполняются условия 1)–3) определения базы окрестностей (см. п. 2 § 2). Условие 1), очевидно, выполнено. Проверим выполнение условия 2). Пусть $W_1(x_0)$ задается неравенствами

$$p_1(x - x_0) < \varepsilon_1,\ \ldots, p_m(x - x_0) < \varepsilon_1,$$

а $W_2(x_0)$ — неравенствами

$$p_{m+1}(x - x_0) < \varepsilon_2,\ \ldots, p_n(x - x_0) < \varepsilon_2,$$

где $p_j \in \{p\}$ $(j = 1, \ldots, n)$ и $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 > 0$. Положим $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$; тогда окрестность $W(x_0)$, заданная неравенствами

$$p_1(x - x_0) < \varepsilon,\ \ldots, p_n(x - x_0) < \varepsilon,$$

будет содержаться в $W_1(x_0) \cap W_2(x_0)$. Проверим, наконец, выполнение условия 3). Пусть x_1 содержится в окрестности $U(x_0)$, определяемой условиями

$$p_k(x - x_0) < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

так что $p_k(x_1 - x_2) < \varepsilon$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим через $U_1(x_1)$ окрестность точки x_1, определенную условиями

$$p_k(x - x_1) < \varepsilon_1, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где ε_1 — наименьшее из чисел $\varepsilon - p_k(x_1 - x_0)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Если $x \in U_1(x_1)$, то

$$p_k(x - x_0) = p_k(x - x_1 + x_1 - x_0) \leqslant p_k(x - x_1) + p_k(x_1 - x_0) < \\ < \varepsilon_1 + p_k(x_1 - x_0) \leqslant \varepsilon - p_k(x_1 - x_0) + p_k(x_1 - x_0) = \varepsilon;$$

следовательно, $U_1(x_1) \subset U(x_0)$.

Проверим теперь выполнение аксиомы отделимости. Пусть $x_1 \neq x_2$; тогда $x_1 - x_2 \neq 0$, и потому существует полунорма $p_0 \in \{p\}$ такая, что $p_0(x_1 - x_2) > 0$. Положим $\varepsilon = \frac{1}{2}\,p_0(x_1 - x_2)$; тогда окрестности $U_1(x_1)$ и $U_2(x_2)$, определенные соответственно неравенствами

$$p_0(x - x_1) < \varepsilon \quad \text{и} \quad p_0(x - x_2) < \varepsilon,$$

не пересекаются. Действительно, их общая точка x должна была бы удовлетворять обоим указанным неравенствам, откуда следовало бы, что

$$p_0(x_1 - x_2) = p_0(x_1 - x + x - x_2) \leqslant p_0(x_1 - x) + p_0(x_2 - x) < 2\varepsilon;$$

последнее же противоречит определению числа ε.

Итак, доказано, что X — хаусдорфово топологическое пространство. Остается доказать, что выполняются условия 3) и 4) определения топологического линейного пространства, т. е. непрерывность суммы $x + y$ и произведения αx.

Пусть $U(x_0 + y_0)$ — окрестность точки $x_0 + y_0$, определенная условиями

$$p_k(x - x_0 - y_0) < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Если x и y находятся в окрестностях $U(x_0)$, $U(y_0)$, определенных соответственно неравенствами

$$p_k(x - x_0) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

и

$$p_k(y - y_0) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

то, как легко проверить, $x + y \in U(x_0 + y_0)$; тем самым доказана непрерывность суммы.

Далее, пусть $U(\alpha_0, x_0)$ — окрестность точки $\alpha_0 x_0$, определенная условиями

$$p_k(x - \alpha_0 x_0) < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Если α и x находятся в окрестностях $U(\alpha_0)$ и $U(x_0)$, определенных соответственно неравенствами

$$|\alpha - \alpha_0| < \varepsilon_1,$$
$$p_k(x - x_0) < \varepsilon_1, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

то

$$p_k(\alpha x - \alpha_0 x_0) = p_k(\alpha x - \alpha x_0 + \alpha x_0 - \alpha_0 x_0) \leqslant$$
$$\leqslant |\alpha| p_k(x - x_0) + |\alpha - \alpha_0| p_k(x_0) < (|\alpha_0| + \varepsilon_1)\, \varepsilon_1 + \varepsilon_1 p_k(x_0).$$

Но последнее выражение $< \varepsilon$ при достаточно малом ε_1; тем самым доказана непрерывность произведения αx.

Таким образом:

III. *Всякая достаточная система $\{p\}$ полунорм в линейном пространстве X определяет в X топологию, в которой X становится локально выпуклым топологическим линейным пространством. При этом базисные окрестности в X определяются неравенствами вида*

$$p_k(x - x_0) < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $p_k \in \{p\}$ и $\varepsilon > 0$.

Расширим теперь достаточную систему $\{p\}$, присоединив к ней всевозможные полунормы $q = \sup(p_1, \ldots, p_n)$, $(p_k \in \{p\})$, αq $(\alpha > 0)$ и все полунормы q', ими мажорируемые (т. е. $q' \leqslant \alpha q$); мы получим новую достаточную систему полунорм q, определяющую ту же топологию, что и $\{p\}$, причем каждая симметричная выпуклая окрестность $U(0)$ точки 0 задается одним только неравенством $q(x) < 1$. В дальнейшем мы всегда будем считать, что такое расширение системы $\{p\}$ уже произведено, т. е. что каждую симметричную выпуклую окрестность $U(0)$ точки 0 можно задать одним неравенством $p(x) < 1$, $p \in \{p\}$.

5. Случай конечномерного пространства. Применим результаты п. 4 к конечномерному пространству. Пусть C^n — n-мерное пространство, а $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — какой-нибудь базис в C^n. Положим для любого элемента $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \ldots + \xi_n e_n$

$$p_0(x) = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \ldots + |\xi_n|^2};$$

нетрудно видеть, что p_0 — норма в C^n. Уже одна она образует достаточное множество и потому определяет в C^n локально выпуклую топологию. При этом окрестностью $U_0(x_0)$ вектора $x_0 = \xi_1^0 e_1 + \xi_2^0 e_2 + \ldots + \xi_n^0 e_n$ является совокупность всех векторов x, удовлетворяющих неравенству

$$p_0(x - x_0) = \sqrt{|\xi_1 - \xi_1^0|^2 + |\xi_2 - \xi_2^0|^2 + \ldots + |\xi_n - \xi_n^0|^2} < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

I. *Всякая другая локально выпуклая топология в C^n совпадает с топологией, определенной нормой p_0.*

Доказательство. Пусть $\{p\}$ — достаточная система полунорм, определяющая локально выпуклую топологию в C^n, а $U(x_0)$ — окрестность в этой топологии, определенная неравенствами

$$p_k(x - x_0) < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $p_k \in \{p\}$. Положим

$$c = \max_{k,\, j=1,\, \ldots,\, n} \{p_k(e_j)\}. \tag{1}$$

Тогда окрестность $U_0(x_0)$, определенная неравенством

$$p_0(x - x_0) < \frac{\varepsilon}{cn}, \tag{2}$$

содержится в $U(x_0)$, ибо из (1) и (2) следует, что

$$p_k(x - x_0) = p_k((\xi_1 - \xi_1^0)\, e_1 + \ldots + (\xi_n - \xi_n^0)\, e_n) \leqslant$$
$$\leqslant |\xi_1 - \xi_1^0| p_k(e_1) + \ldots + |\xi_n - \xi_n^0| p_k(e_n) \leqslant cn \frac{\varepsilon}{cn} = \varepsilon.$$

Для завершения доказательства предложения I остается показать, что, обратно, всякая окрестность $U_0(x)$ содержит некоторую окрестность $U(x_0)$. Пусть x_1 — произвольный ненулевой вектор в C^n; тогда существует полунорма $p_1 \in \{p\}$ такая, что $p_1(x_1) > 0$. Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ подпространство всех векторов x, для которых $p_1(x) = 0$; тогда $x_1 \notin \mathfrak{M}_1$ и потому размерность $\mathfrak{M}_1$ меньше n. Если $\mathfrak{M}_1 \neq (0)$, то пусть x_2 — произвольный ненулевой вектор в $\mathfrak{M}_1$; тогда существует полунорма $p_2 \in \{p\}$ такая, что $p_2(x_2) > 0$. Обозначим через $\mathfrak{M}_2$ подпространство в $\mathfrak{M}_1$, состоящее из всех векторов $x \in \mathfrak{M}_2$, для которых $p_2(x) = 0$; тогда $x_2 \notin \mathfrak{M}_2$, и потому размерность $\mathfrak{M}_2$ меньше размерности $\mathfrak{M}_1$, следовательно, меньше $n - 1$. Повторяя это рассуждение, мы придем к подпространствам

$$\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{M}_k = (0), \quad 1 \leqslant k \leqslant n,$$

и соответствующим полунормам $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_k \in \{p\}$, при $\mathfrak{M}_k$ будет совокупностью всех векторов $x \in C^n$, удовлетворяющих условиям

$$p_1(x) = p_2(x) = \ldots = p_k(x) = 0. \tag{3}$$

Следовательно, всякий вектор x, удовлетворяющий условиям (3), равен нулю. Положим

$$p(x) = \max\{p_1(x), p_2(x),\ \ldots, p_k(x)\}; \tag{4}$$

очевидно, p — полунорма в C^n, причем из $p(x) = 0$ следует $x = 0$, так что p — норма. Докажем, что

$$p_0(x) \leqslant cp(x), \tag{5}$$

где c — некоторая постоянная. Предположим противное. Тогда в C^n существует последовательность векторов x_k, для которой

$$p_0(x_k) > kp(x_k), \quad k = 1, 2, 3, \ \ldots. \tag{6}$$

Положим

$$y_k = \frac{1}{p_0(x_k)}\, x_k;$$

тогда
$$p_0(y_k) = 1 \tag{7}$$
и из (6) следует, что
$$p(y_k) < \frac{1}{k}.$$
Пусть
$$y_k = \eta_{1k}e_1 + \ldots + \eta_{nk}e_n;$$
тогда (7) означает, что
$$|\eta_{1k}|^2 + \ldots + |\eta_{nk}|^2 = 1, \tag{8}$$
и потому каждая из последовательностей $\{\eta_{1k}\}$, …, $\{\eta_{nk}\}$ ограничена. Но тогда путем выделения подпоследовательности, которую мы снова обозначим через y_k, мы можем добиться сходимости последовательностей $\{\eta_{1k}\}$, …, $\{\eta_{nk}\}$ к некоторым пределам η_1, …, η_n. При этом из (8) вытекает, что также $|\eta_1|^2 + \ldots + |\eta_n|^2 = 1$ и потому вектор $y = \eta_1 e_1 + \ldots + \eta_n e_n$ отличен от нуля. Переходя в неравенстве $p(y) \leqslant p(y - y_k) + p(y_k) \leqslant p(e_1)|\eta_1 - \eta_{1k}| + \ldots + p(e_n)|\eta_n - \eta_{nk}| + \dfrac{1}{k}$ к пределу при $k \to \infty$, заключаем, что $p(y) = 0$ при $y \neq 0$, а это противоречит тому, что p — норма.

Итак, неравенство (5) имеет место. Но тогда в силу (4) совокупность всех векторов x, удовлетворяющих неравенству $p(x - x_0) < \dfrac{\varepsilon}{c}$, есть окрестность $U(x_0)$, определяемая неравенствами
$$p_1(x - x_0) < \frac{\varepsilon}{c}, \ \ldots, p_k(x - x_0) < \frac{\varepsilon}{c}$$
и содержащаяся в заданной окрестности $p_0(x - x_0) < \varepsilon$.

Из доказанного предложения I заключаем:

II. *Все конечномерные локально выпуклые пространства одной и той же размерности изоморфны.*

6. Непрерывные линейные функционалы. Пусть X — локально выпуклое пространство, а $\{p\}$ — достаточная система полунорм, отвечающая базе $\{U(0)\}$ симметричных выпуклых окрестностей нуля в X. Будем рассматривать линейные функционалы с областью определения X.

I. *Линейный функционал f в X непрерывен при $x = 0$ тогда и только тогда, когда для некоторого p_0 из системы $\{p\}$ удовлетворяется неравенство*
$$|f(x) \leqslant p_0(x) \quad \textit{при всех} \quad x \in X. \tag{1}$$
В этом случае f непрерывен во всем X.

Доказательство. Пусть f непрерывен при $x = 0$. Тогда существует окрестность $U(0)$ такая, что
$$|f(x_1)| < 1 \quad \text{при} \quad x_1 \in U(0). \tag{2}$$

Пусть p_0 — полунорма из $\{p\}$, отвечающая окрестности $U(0)$. Тогда $U(0)$ есть совокупность всех x_1 таких, что $p(x_1) < 1$; поэтому (2) перепишется в виде

$$|f(x_1)| < q \quad \text{при} \quad p_0(x_1) < 1. \tag{3}$$

Пусть теперь x — произвольный вектор из X. Положим

$$x_1 = \frac{1}{p_0(x)+\varepsilon}\, x.$$

где $\varepsilon > 0$. Тогда

$$p_0(x_1) = \frac{1}{p_0(x)+\varepsilon}\, p_0(x) < 1,$$

и потому в силу (3) также $|f(x_1)| < 1$, т. е.

$$\left| f\left(\frac{1}{p_0(x)+\varepsilon}\, x\right)\right| < 1.$$

Отсюда

$$|f(x)| < p_0(x) + \varepsilon$$

и в силу произвольности ε

$$|f(x)| \leqslant p_0(x).$$

Обратно, пусть (1) выполнено при некотором $p_0 \in \{p\}$. Докажем непрерывность f в любой точке $x_0 \in X$.

Нам надо доказать, что при любом $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(x_0)$, в которой $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Но такой окрестностью является окрестность, определенная неравенством $p_0(x - x_0) < \varepsilon$, ибо из (1) следует, что

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x - x_0)| \leqslant p_0(x - x_0).$$

II. *Для всякого элемента $x_0 \neq 0$ локально выпуклого пространства X существует непрерывный линейный функционал f такой, что $f(x_0) \neq 0$.*

Доказательство. Если $x_0 \neq 0$, то существует $p_0 \in \{p\}$ такой, что $p_0(x_0) > 0$. С другой стороны, существует линейный функционал f такой, что

$$|f(x)| \leqslant p_0(x), \quad f(x_0) = p_0(x_0)$$

(см. следствие 2 теоремы 2 п. 9 § 1); f в силу I непрерывен и

$$f(x_0) = p_0(x_0) > 0.$$

III. *Если $\mathfrak{M}$ — замкнутое подпространство локально выпуклого пространства X, а x_0 — вектор из X, не принадлежащий $\mathfrak{M}$, то в X существует непрерывный линейный функционал f, удовлетворяющий условиям:*

$$f(x) = 0 \quad \textit{на} \quad \mathfrak{M}, \quad f(x_0) = 1. \tag{4}$$

Доказательство. Так как x_0 не принадлежит замкнутому множеству $\mathfrak{M}$, то существует окрестность $U(x_0)$, не пересекающаяся с $\mathfrak{M}$. По определению базы окрестностей в X, существует полунорма $p_0 \in \{p\}$ такая, что $U(x_0)$ есть совокупность всех векторов $x \in X$, удовлетворяющих условию $p_0(x - x_0) < 1$. Поэтому

$$p_0(y - x_0) \geqslant 1 \quad \text{для всех} \quad y \in \mathfrak{M}. \tag{5}$$

Заменив здесь y на $-y$, мы можем переписать (5) в виде

$$p_0(x_0 + y) \geqslant 1 \quad \text{для всех} \quad y \in \mathfrak{M}. \tag{6}$$

Обозначим через L_1 совокупность всех векторов

$$x = y + \alpha x_0, \quad y \in \mathfrak{M}; \tag{7}$$

очевидно, L — линейное подпространство в X. Определим в L линейный функционал f_1 формулой

$$f_1(x) = f_1(y + \alpha x_0) = \alpha; \tag{8}$$

этим $f_1(x)$ определится однозначно, ибо $x_0 \notin \mathfrak{M}$ и потому представление векторов x из L в виде (7) однозначно. При этом из (8) вытекает, что

$$f_1(x_0) = 1, \quad f_1(y) = 0 \quad \text{при} \quad y \in \mathfrak{M}. \tag{9}$$

Кроме того,

$$|f_1(x)| \leqslant p_0(x) \quad \text{для всех} \quad x \in L,$$

ибо ввиду (6) и (8)

$$p_0(x) = p_0(y + \alpha x_0) = |\alpha|\, p_0\Big(x_0 + \frac{1}{\alpha}\, y\Big) \geqslant |\alpha| = |f_1(x)|.$$

На основании теоремы 2 п. 9 § 1 f_1 можно продолжить до линейного функционала f, определенного во всем X и также удовлетворяющего неравенству $|f(x)| \leqslant p_0(x)$.

Тогда f в силу I непрерывен и в силу (9) удовлетворяет условиям (4).

IV. *Линейное подпространство L локально выпуклого пространства X плотно в X тогда и только тогда, когда всякий непрерывный линейный функционал в X, равный нулю на L, равен нулю во всем X.*

Доказательство. Непрерывный линейный функционал f, равный нулю на L, равен также нулю на его замыкании $\overline{L}$. Поэтому если L плотно в X, так что $\overline{L} = X$, то f равен нулю во всем X. Если же L неплотно в X, то $\overline{L}$ есть замкнутое подпространство в X, не совпадающее с X. Следовательно, в X существует вектор x_0, не принадлежащий $\overline{L}$; в силу III в X существует тогда непрерывный линейный функционал f, равный нулю на $\overline{L}$ (а значит, и на L) и единице в x_0 и потому не равный нулю во всем X.

7. Сопряженное пространство. Обозначим через X' совокупность всех непрерывных линейных функционалов f в локально выпуклом пространстве X. Очевидно, сумма $f_1 + f_2$ двух непрерывных линейных функционалов f_1, f_2 и произведение αf непрерывного линейного функционала f на число α являются также непрерывными линейными функционалами; следовательно, X' есть линейное пространство. Его называют *сопряженным* к X.

Пусть x — фиксированный вектор в X. Полагая

$$F_x(f) = f(x), \tag{1}$$

мы каждому элементу $f \in X'$ поставим в соответствие число $f(x)$, так что F_x — функционал в X'. Из самого определения действий в X' вытекает, что F_x — линейный функционал, следовательно, всякий вектор $x \in X$ определяет по формуле (1) линейный функционал в X'.

Положив, далее,

$$p_x(f) = |F_x(f)| = |f(x)|, \tag{2}$$

мы получим полунорму p_x в X', ибо

$$p_x(f_1 + f_2) = |F_x(f_1 + f_2)| = |F_x(f_1) + F_x(f_2)| \leqslant \\ \leqslant |F_x(f_1)| + |F_x(f_2)| = p_x(f_1) + p_x(f_2)$$

и

$$p_x(\alpha f) = |F_x(\alpha f)| = |\alpha||F_x(f)| = |\alpha| p_x(f).$$

Таким образом, каждый вектор $x \in X$ определяет по формуле (2) полунорму p_x в X'.

Определим теперь в X' топологию так, чтобы X' стало локально выпуклым пространством. В силу III п. 4 такая топология задается достаточной системой полунорм в X'. Оказывается, что имеются различные достаточные системы, определяющие существенно различные топологии в X'. Мы рассмотрим только одну из этих топологий, так называемую *слабую топологию* в X', которая нам только и понадобится и которая определяется системой $\{p_x\}$, где $p_x(f) = |f(x)|$, а x пробегает все векторы пространства X. Эта система достаточна, ибо в силу (2) равенство $p_x(f) = 0$ для всех $x \in X$ означает, что $f(x) = 0$ для всех $x \in X$, т. е. что f есть нулевой функционал.

Таким образом (см. п. 4), множество всех функционалов $f \in X'$, удовлетворяющих неравенствам

$$|f(x_k) - f_0(x_k)| < \varepsilon \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

при произвольных фиксированных n, x_1, ..., $x_n \in X$ и $\varepsilon > 0$, есть слабая окрестность функционала f_0 и совокупность всех таких окрестностей при всевозможных n, x_1, ..., $x_n \in X$, $\varepsilon > 0$ и $f_0 \in X'$ есть база окрестностей, определяющая слабую топологию в X'. Если надо указать векторы $x_1, \ldots, x_n$ и число $\varepsilon > 0$, определяющие данную окрестность функционала f_0, мы вместо $U(f_0)$ будем писать

$$U(f_0; x_1, \ldots, x_j; \varepsilon).$$

В дальнейшем, если нет особой оговорки, мы будем рассматривать X' как локально выпуклое пространство с таким образом определенной в нем (слабой) топологией.

I. *Функционалы $F_x(f) = f(x)$ непрерывны в X'.*

Это непосредственно следует из I п. 6, ибо $|F_x(f)| = p_x(f)$.

Отметим, что определенная нами в X' топология есть наиболее слабая топология, в которой функционалы $F_x(f) = f(x)$ непрерывны. Мы предоставляем читателю доказательство этого утверждения.

В качестве примера найдем пространство, сопряженное к конечномерному пространству C^n.

Пусть $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ — базис в C^n, а $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — координаты вектора $x \in C^n$ относительно этого базиса. Тогда всякий линейный функционал f в C^n имеет вид $f(x) = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_n\xi_n$ (см. п. 5 § 1) и потому непрерывен в C^n (см. пп. 5 и 6). Таким образом, соответствие $f \to (x_1, c_2, \ldots, c_n)$ устанавливает изоморфизм $C^{n'}$ с C^n и, следовательно, $C^{n'}$ есть n-мерное пространство. В качестве базиса в $C^{n'}$ можно взять функционалы f_k, определенные формулами

$$f_k(x) = \xi_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда всякий другой линейный функционал в C^n запишется в виде

$$f = c_1 f_2 + \ldots + c_n f_n, \quad \text{где} \quad c_k = f(e_k).$$

Найдем все линейные функционалы в $C^{n'}$. Пусть F — такой функционал. Положим $\alpha_k = F(f_k)$ и $x_0 = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n$; тогда

$$\begin{aligned} F(f) = F(c_1 f_1 + \ldots + c_n f_n) = c_1 F(f_1) + \ldots + c_n F(f_n) = \\ = c_1\alpha_1 + \ldots + c_n\alpha_n = \alpha_1 f(e_1) + \ldots + \alpha_n f(e_n) = \\ = f(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_n e_n) = f(x_0). \end{aligned}$$

Следовательно:

II. *Всякий линейный функционал F в $C^{n'}$ задается формулой*

$$F(f) = f(x_0),$$

где x_0 — фиксированный вектор из C^n.

III. *Совокупность Q_p^C всех функционалов f из X', удовлетворяющих неравенству*

$$|f(x)| \leqslant Cp(x),$$

где p — фиксированная полунорма из достаточной системы $\{p\}$ есть бикомпактное[1] *множество в X'.*

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать $C = 1$, ибо соответствие $f \to Cf$ есть гомеоморфизм в X', отображающий Q_p^1 на Q_p^C. Поэтому достаточно доказать утверждение для Q_p^1. Пусть, для определенности, X — вещественное пространство[2]. Каждому элементу $x \in X$ поставим в соответствие замкнутый интервал $I_x = [-p(x), p(x)]$ и обозначим через I топологическое произведение всех интервалов I_x, $x \in R$. Согласно теореме А. Н. Тихонова (см. II п. 12 § 2) I как топологическое произведение бикомпактных пространств I_x есть также бикомпактное пространство.

Если $f \in Q_p^1$, то $|f(x)| \leqslant p(x)$, следовательно, число $f(x)$ принадлежит интервалу I_x. Поэтому соответствие $f \to \{f(x)\}$ есть, очевидно, взаимно однозначное отображение множества Q_p^1 на некоторое подмножество[3] I' пространства I. Из сравнения слабых окрестностей в X' и окрестностей в I непосредственно видно, что это отображение — гомеоморфизм. Поэтому достаточно доказать, что I' замкнуто в I (см. II п. 6 § 2).

Пусть f_0 — предельная точка множества I'. Докажем, что f_0 есть непрерывный линейный функционал в X, принадлежащий множеству Q_p^1. Тем самым будет доказана замкнутость множества I'. Выберем x_1, x_2 и $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ в качестве элементов, определяющих окрестность $U(f_0; x_1, x_2, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2; \varepsilon)$ точки f_0 в I. Так как f_0 — предельная точка множества I', то в этой окрестности существует элемент $f \in I'$, т. е.

$$|f(x_1) - f_0(x_1)| < \varepsilon, \quad |f(x_2) - f_0(x_2)| < \varepsilon,$$
$$|f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - f_0(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство можно переписать в виде

$$|\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_0) - f_0(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)| < \varepsilon.$$

Отсюда и из первых двух неравенств следует, что

$$|\lambda_1 f_0(x_1) + \lambda_2 f_0(x_2) - f_0(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)| \leqslant |\lambda_1||f_0(x_1) - f(x_1)| + \\ + |\lambda_1||f_0(x_2) - f(x_2)| + |\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) - f_0(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)| < \\ < \varepsilon(|\lambda_1| + |\lambda_2| + 1).$$

---

[1] Напомним, что X' рассматривается как топологическое пространство с определенной выше слабой топологией.

[2] В том случае, когда X — комплексное пространство, отрезок I_x следует заменить замкнутым кругом комплексной плоскости с центром в нуле и радиусом $p(x)$. Во всем остальном доказательство останется тем же.

[3] Напомним, что каждый элемент топологического произведения I есть некоторая функция $f(x)$ со значениями из интервалов $[-p(x), p(x)]$ (см. п. 12 § 2).

Так как ε произвольно мало, то

$$f_0(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f_0(x_1) + \lambda_2 f_0(x_2),$$

так что f_0 — линейный функционал.

Докажем, что $f_0 \in I'$. Во всякой окрестности $U(f_0; x; \varepsilon)$ есть элемент $f \in I'$, т. е.

$$|f_0(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Отсюда

$$|f_0(x)| < |f(x)| + \varepsilon \leqslant p(x) + \varepsilon,$$

ибо по условию $f \in Q_p^1$; следовательно, $|f_0(x)| \leqslant p(x)$. Так как ε произвольно мало, то $|f_0(x)| \leqslant p(x)$ т. е. $f_0 \in Q_p^1$, $f_0 \in I'$.

8. Выпуклые множества в конечномерном пространстве. *Если K — выпуклое множество в вещественном конечномерном пространстве R^n, а x_0 — вектор этого пространства, не принадлежащий ни K, ни его границе, то в R^n существует опорная гиперплоскость к K, отделяющая x_0 от K.*

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что $0 \in K$, ибо этого всегда можно добиться некоторым сдвигом. Пусть $\mathfrak{M}$ — подпространство, натянутое на K (может быть, совпадающее с R^n); тогда в K существуют векторы $x_1, x_2, \ldots, x_m$, образующие базис в $\mathfrak{M}$. Так как, кроме того, $0 \in K$, то всякий вектор x вида

$$x = t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_m x_m + (1 - t_2 - \ldots - t_m)\, 0 = \\ = t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_m x_m,$$

где $t_k \geqslant 0$, $t_1 + t_2 + \ldots + t_m \leqslant 1$, также принадлежит K; очевидно, всякий такой вектор при $t_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, и $t_1 + t_2 + \ldots + t_m < 1$ есть внутренняя точка множества K, рассматриваемого как выпуклое множество в $\mathfrak{M}$.

Разберем следующие случаи:

1) $x_0 \in \mathfrak{M}$. На основании III п. 3 в $\mathfrak{M}$ существует опорная гиперплоскость $f(x) = c$ к множеству K, отделяющая x_0 от K. Если $\mathfrak{M} \neq R^n$, то, продолжив как-нибудь f до линейного функционала F в R^n, мы получим опорную гиперплоскость $F(x) = c$, также отделяющую x_0 от K.

2) $x_0 \neq \mathfrak{M}$. Обозначим через $\mathfrak{M}_1$ подпространство, натянутое на $\mathfrak{M}$ и x_0, т. е. совокупность всех векторов вида $y = x + tx_0$, $x_0 \in \mathfrak{M}$; пусть $f(x) = c$ — какая-нибудь гиперплоскость в $\mathfrak{M}$, опорная к K. Предположим для определенности, что $f(x) \leqslant c$ для всех $x \in K$. Продолжим функционал f до линейного функционала f_1 в $\mathfrak{M}_1$, положив

$$f_1(x + tx_0) = f(x) + tc_1,$$

где c_1 — фиксированное число, большее c. Тогда $f_1(x_0) = c_1 > c$ и потому гиперплоскость $f_1(x) = c$ в пространстве $\mathfrak{M}_1$ будет опорной к K и отделять K от x_0. Продолжив как-нибудь f_1 до линейного функционала F в R^n, мы получим гиперплоскость в R^n, обладающую тем же свойством.

9. Выпуклые множества в сопряженном пространстве. Пусть X' — пространство, сопряженное к вещественному локально выпуклому пространству X, K — выпуклое бикомпактное множество в X' и x_0 — фиксированный элемент в X. Функция $F_{x_0}(f) = f(x_0)$ непрерывна и, следовательно, достигает на бикомпактном множестве K своего наибольшего значения (см. VII п. 7 § 2); обозначим его M_{x_0}. Рассмотрим уравнение

$$F_{x_0}(f) = M_{x_0}.$$

Совокупность P_{x_0} всех элементов f, удовлетворяющих этому уравнению, образует гиперплоскость в X'. Гиперплоскость P_{x_0} разбивает все пространство X' на две части (полупространства), определенные соответственно неравенствами

$$F_{x_0}(f) \leqslant M_{x_0}, \quad F_{x_0}(f) > M_{x_0}.$$

По определению числа M_{x_0}, $F_{x_0}(f) \leqslant M_{x_0}$ для всех $f \in K$, причем равенство достигается для некоторых элементов $f \in K$. Это означает, что множество K целиком лежит в первом полупространстве, т. е. по одну сторону от гиперплоскости P_{x_0}, и имеет с этой гиперплоскостью общие точки. Поэтому P_{x_0} *есть опорная гиперплоскость к множеству* K.

I. *Пересечение* $K \cap P_{x_0}$ *есть также выпуклое множество.*

Действительно, гиперплоскость P_{x_0} есть выпуклое множество, а пересечение $K \cap P_{x_0}$ выпуклых множеств K и P_{x_0} выпукло.

II. *Если внутренняя точка отрезка* $[f_1, f_2]$, *содержащегося в* K, *принадлежит пересечению* $K \cap P_{x_0}$, *то и весь отрезок* $[f_1, f_2]$ *принадлежит этому пересечению.*

Именно, так как $K \cap P_{x_0}$ — выпуклое множество, то достаточно доказать, что концы f_1, f_2 этого отрезка принадлежат гиперплоскости P_{x_0}. Предположим противное, пусть, например, $f_1 \notin P_{x_0}$, т. е.

$$F_{x_0}(f_1) < M_{x_0}.$$

Так как, кроме того, $F_{x_0}(f_1) \leqslant M_{x_0}$, то при $0 < t < 1$

$$F_{x_0}((1-t)\, f_1 + t f_2) = (1-t)\, F_{x_0}(f_1) + t F_{x_0}(f_2) < M_{x_0}.$$

Это означает, что никакая внутренняя точка отрезка $[f_1, f_2]$ не принадлежит гиперплоскости P_{x_0}. Последнее же противоречит условию.

III. *Всякое выпуклое бикомпактное множество* K *в* X' *есть пересечение всех содержащих это множество полупространств, ограниченных опорными гиперплоскостями к* K *вида* P_{x_0}, *так что для каждого* $f_0 \in X'$, *не принадлежащего* K, *существует опорная гиперплоскость* P_{x_0}, *отделяющая* f_0 *от* K, *т. е. такая, что*

$$\max_{f \in K} f(x_0) < f_0(x_0).$$

Доказательство. Обозначим через K' пересечение всех полупространств, ограниченных опорными гиперплоскостями к K и содержащих K. Очевидно, $K' \supset K$. Нам надо доказать, что $K' = K$.

Пусть $f_0 \in K'$. Докажем, что любая окрестность $U(f_0; x_1, \ldots$ $\ldots, x_n; \varepsilon)$ точки f_0 содержит элементы множества K. Так как K замкнуто, то отсюда будет следовать, что $f_0 \in K$, и предложение III будет доказано. Пусть $\mathfrak{K}$ — образ множества K при отображении

$$F\colon f \to \{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$$

пространства X' в R^n. Очевидно, F непрерывно и $\mathfrak{K}$ — выпуклое множество в пространстве R^n. Как непрерывный образ бикомпактного пространства K оно бикомпактно и потому является ограниченным замкнутым множеством в R^n (см. III п. 7 § 2). Докажем, что точка $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\} = F(f_0)$ принадлежит множеству $\mathfrak{K}$. Именно, в противном случае, на основании результата п. 8 в R^n существует опорная гиперплоскость к $\mathfrak{K}$, отделяющая точку $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ от $\mathfrak{K}$. Другими словами (см. п. 7), существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k < \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \eta_k$$

для всех точек $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ множества $\mathfrak{K}$. Это неравенство означает тогда, что

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) < f_0\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right)$$

для всех $f \in K$. Последнее же неравенство противоречит тому, что $f_0 \in K'$, ибо оно означает, что f_0 и K находятся по разные стороны от опорной гиперплоскости P_x, где

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k.$$

Итак, точка $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ принадлежит множеству $\mathfrak{K}$. Другими словами, существует функционал $f^\frown \in K$ такой, что

$$f^\frown(x_1) = f_0(x_1), \ \ldots, \ f^\frown(x_n) = f_0(x_n).$$

Но тогда, конечно, выполняются неравенства

$$|f^\frown(x_k) - f_0(x_k)| < \varepsilon \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. точка $f^\frown$ из K принадлежит окрестности $U(f_0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$. Предложение III тем самым доказано.

Понятие опорной гиперплоскости можно обобщить следующим образом [1]).

Опорным многообразием к K называется всякое множество V, обладающее свойствами:

1°. Пересечение $V \cap K$ не пусто;

2°. Если внутренняя точка отрезка $[f_1, f_2]$ в K принадлежит пересечению $V \cap K$, то и весь отрезок $[f_1, f_2]$ принадлежит этому пересечению;

3° V есть множество всех точек f, удовлетворяющих уравнениям

$$f(x) = \alpha_x,$$

где элементы x пробегают некоторое не обязательно конечное множество s, а α_x — заданные числа.

Опорная гиперплоскость есть, очевидно, частный случай опорного многообразия, именно тот, когда множество S в условии 3° состоит из одного элемента x и $\alpha x = M_x$.

IV. *Всякое опорное многообразие V замкнуто.*

Действительно, условие 3° означает, что V есть пересечение гиперплоскостей $f(x) = \alpha x$, $x \in S$. Каждая же из последних есть замкнутое множество, ибо функция $F(f) = f(x)$ непрерывна.

Если опорное многообразие состоит из одной точки f_0, то оно называется опорным многообразием размерности нуль. Точка f_0 не может при этом быть внутренней точкой никакого отрезка в K. Действительно, в силу условия 2° весь такой отрезок должен был бы принадлежать пересечению $V \cap K$, следовательно, V состояло бы более чем из одной точки.

Точку $f_0 \in K$ называют *экстремальной точкой* множества K, если она не является внутренней точкой никакого отрезка в K.

Из только что сказанного следует, что *опорное многообразие размерности нуль есть экстремальная точка*. Обратно, *экстремальная точка есть опорное многообразие размерности нуль*. Действительно, условия 1° и 2° выполнены тривиальным образом. Для того чтобы удовлетворить условию 3°, достаточно взять в качестве множества S все пространство X и положить $\alpha_x = f_0(x)$.

V. *Всякое линейно упорядоченное по включению множество $\{V_\alpha\}$ опорных многообразий имеет непустое пересечение, являющееся также опорным многообразием.*

Доказательство. Положим $K_\alpha = K \cap V_\alpha$; K_α есть пересечение бикомпактного множества K и замкнутого множества V_α, в силу условия 1° непустое. Следовательно, K_α бикомпактно. Кроме того, семейство $\{K_\alpha\}$ линейно упорядочено по включению. Поэтому пересечение всех K_α не пусто (см. III п. 6 § 2). Тогда и пересечение V

[1]) Всюду в дальнейшем мы обозначаем через K выпуклое множество в X', бикомпактное в слабой топологии.

всех V_α не пусто. Пересечение $V \cap K$ совпадает с пересечением всех K_α, следовательно, также не пусто. Таким образом, V удовлетворяет условию 1°. Далее, пусть $[f, f_2]$ — отрезок в K, и пусть внутренняя точка f этого отрезка принадлежит множеству V, так что $f \subset V_\alpha$ при всех α. Но тогда в силу условия 2° также $[f_1, f_2] \in V_\alpha$ при всех α и, следовательно, $[f_1, f_2] \in V$. Это означает, что V удовлетворяет также условию 2°. Наконец, условие 3° выполняется тривиальным образом. Именно, достаточно взять в качестве множества S для V объединение всех множеств S_α, соответствующих многообразиям V_α.

Итак, V удовлетворяет условиям 1°, 2°, 3°, следовательно, есть опорное многообразие. Опорное многообразие называется *минимальным*, если оно не содержит в качестве своей правильной части никакого другого опорного многообразия.

VI. *Всякое минимальное опорное многообразие есть многообразие размерности нуль, т.е. экстремальная точка.*

Доказательство. Пусть V — минимальное опорное многообразие к K. Предположим, что V содержит более чем одну точку. Пусть, например, $f_1, f_2 \in V$ и $f_1 \neq f_2$. Тогда существует элемент x_0 такой, что $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$. Положим $K' = V \cap K$; K' — выпуклое бикомпактное множество. Элемент x_0 определяет опорную гиперплоскость P_{x_0} к K', отличную от V. Действительно, все элементы $f \in P_{x_0}$ удовлетворяют условию вида $f(x_0) = M$, и так как $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$, то хотя бы один из элементов $f_1, f_2 \in V$ не удовлетворяет этому условию. Итак, $P_{x_0} \neq V$; следовательно, пересечение $V' = P_{x_0} \cap V$ есть правильная часть многообразия V.

Докажем, что V' — опорное многообразие к K. Это будет противоречить минимальности V, и утверждение тем самым будет доказано.

Так как
$$V' \cap K = P_{x_0} \cap V \cap K = P_{x_0} \cap K' \neq \varnothing,$$
то условие 1° выполнено. Условие 3°, очевидно, также выполнено. Проверим выполнение условия 2°; пусть $[f_1, f_2]$ — отрезок в K и f — внутренняя точка этого отрезка, принадлежащая множеству V'. Тогда $f \in V$, следовательно, $[f_1, f_2] \in V$. Но тогда также $[f_1, f_2'] \in V \cap K = K'$. Кроме того, $f \in P_{x_0}$, следовательно, $[f_1, f_2] \in P_x$. Поэтому $f \in V \cap P_{x_0} = V'$. Тем самым доказано, что условие 2° также выполнено для V'. Следовательно, V' — опорное многообразие.

VII. *Всякое опорное многообразие содержит минимальное опорное многообразие, т.е. экстремальную точку выпуклого множества K.*

Доказательство. Пусть V — опорное многообразие к K. Совокупность всех опорных многообразий, содержащихся в V, образует частично упорядоченное множество по включению. В силу V это частично упорядоченное множество удовлетворяет условию леммы Цорна и потому имеет наименьший элемент, который и есть минимальное опорное многообразие, содержащееся в V.

Из предложения VII следует, в частности, что всякое выпуклое бикомпактное множество в X' имеет хотя бы одну экстремальную точку.

Теорема 1 (М. Г. Крейн и Д. П. Мильман [1]). *Всякое выпуклое бикомпактное множество $K \subset X'$ содержит экстремальные точки и есть наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все экстремальные точки множества K.*

Доказательство. Пусть K' — наименьшее выпуклое замкнутое множество, содержащее все экстремальные точки множества K. Очевидно, $K' \subset K$. Предположим, что $K' \neq K$. Пусть $f_0 \in K - K'$. Тогда в силу III существует элемент x_0 такой, что

$$f(x_0) < f_0(x_0) \quad \text{для всех} \quad f \in K'.$$

Положим $M = \max\limits_{f \in K} f(x_0)$; тогда $M \geqslant f_0(x_0)$ и, следовательно,

$$f(x_0) < M \quad \text{для всех} \quad f \in K'. \tag{1}$$

Равенство $f(x_0) = M$ определяет опорную гиперплоскость P_{x_0} к K. Согласно предложению VII эта гиперплоскость содержит хотя бы одну экстремальную точку f_1 множества K. Следовательно, пересечение $P_{x_0} \cap K'$ не пусто, именно, содержит точку f_1. Последнее же противоречит неравенству (1). Тем самым теорема 1 доказана.

Отметим, что множество экстремальных точек, вообще говоря, не замкнуто. Простым примером является следующее выпуклое множество.

Пусть A, B — две точки на перпендикуляре к некоторой плоскости $\mathfrak{P}$, пересекающем эту плоскость в некоторой внутренней точке C отрезка AB, и $\mathfrak{E}$ — окружность в плоскости $\mathfrak{P}$, проходящая через точку C (рис. 2). Рассмотрим наименьшее выпуклое множество, натя-

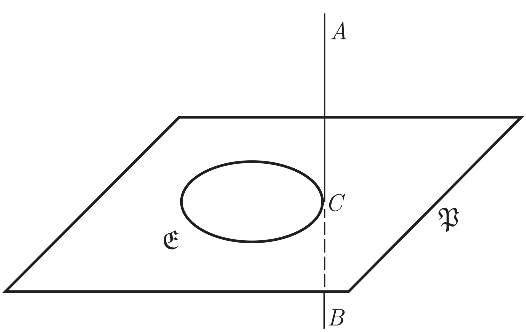

Рис. 2.

нутое на окружность $\mathfrak{E}$ и точки A, B. Его экстремальными точками являются все точки окружности $\mathfrak{E}$, кроме точки C, и точки A и B. Таким образом, множество этих экстремальных точек не замкнуто.

Замечание. В действительности основные результаты п. 9, в том числе теорема Крейна–Мильмана, верны для выпуклых бикомпактных множеств в произвольном локально выпуклом пространстве (см., например, Н. Бурбаки [4] гл. II § 4 п. 2). Нам, однако, эти результаты в таком общем виде не понадобятся.

10. Конусы. Множество K в вещественном линейном пространстве X называют *конусом*, если:

1) из $x \in K$ и $\alpha \geqslant 0$ следует: $\alpha x \in K$;
2) из $x,\, y \in K$ следует: $x + y \in K$;
3) из $x \in K$, $x \neq 0$ следует: $-x \notin K$.

В силу условий 1)–2) *конус есть выпуклое множество.*

Линейный функционал f называют *положительным* (относительно конуса K), если $f(x) \geqslant 0$ для всех $x \in K$. Если $\mathfrak{M}$ — подпространство в X, то, очевидно, $K \cap \mathfrak{M}$ есть конус в $\mathfrak{M}$. Линейный функционал f, определенный только в $\mathfrak{M}$, называется положительным, если он положителен относительно конуса $K \cap \mathfrak{M}$.

В дальнейшем важную роль играет следующая теорема о продолжении положительного функционала.

Теорема 2 (М. Г. Крейн [1]). *Пусть K — конус в вещественном локально выпуклом пространстве X, содержащий внутренние точки, а $\mathfrak{M}$ — подпространство в X, содержащее по крайней мере одну внутреннюю точку конуса K. Тогда всякий положительный линейный функционал f в $\mathfrak{M}$ можно продолжить до положительного линейного функционала F в X.*

Доказательство. Конус K является выпуклым множеством; по условию K содержит внутреннюю точку $x_0 \in \mathfrak{M}$, и потому (см. III п. 3) существует полунорма p, удовлетворяющая условию $p(x - x_0) \leqslant 1$ для всех $x \in K$. Но если $x \in K$, то также $\alpha x \in K$ для всех $\alpha > 0$, и потому также $p(\alpha x - x_0) \leqslant 1$, откуда $p\left(x - \frac{1}{\alpha}\, x_0\right) \leqslant \frac{1}{\alpha}$. Переходя здесь к пределу при $\alpha \to \infty$ и пользуясь непрерывностью полунормы p (см. II п. 3), заключаем, что $p(x) \leqslant 0$ для всех $x \in K$. С другой стороны, $p(x) \geqslant 0$. Поэтому

$$p(x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in K. \tag{1}$$

Пусть теперь f — линейный функционал в $\mathfrak{M}$, неотрицательный на $\mathfrak{M} \cap K$. По определению полунормы p для любого $x \in X$ и любого $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{p(x) + \varepsilon}\, x \in K - x_0, \text{ следовательно, } \frac{1}{p(x) + \varepsilon}\, x + x_0 \in K.$$

Отсюда для любого $x \in \mathfrak{M}$

$$f\left(\frac{1}{p(x) + \varepsilon}\, x + x_0\right) = \frac{1}{p(x) + \varepsilon}\, f(x) + f(x_0) \geqslant 0,$$

так что
$$-f(x) \leqslant f(x_0)[p(x)+\varepsilon]$$
и, ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$,
$$-f(x) \leqslant f(x_0)\,p(x) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathfrak{M}.$$
Так как $f(x_0)p(x)$ — полунорма в X, то на основании теоремы Хана–Банаха (см. п. 9 § 1) $-f$ можно продолжить до линейного функционала $-F$ в X так, чтобы выполнялось неравенство
$$-F(x) \leqslant f(x_0)\,p(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X.$$
Тогда F есть продолжение функционала f и
$$F(x) \geqslant -f(x_0)\,p(x) \quad \text{для всех} \quad x \in X.$$
Но отсюда в силу (1) $F(x) \geqslant 0$ для всех $x \in K$, и теорема доказана.

Следствие. *Если K — конус в X с внутренней точкой x_0, то в X существует положительный относительно K линейный функционал, равный единице в x_0.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — одномерное подпространство в X, состоящее из всех векторов tx_0, $-\infty < t < \infty$. Полагая $f(tx_0) = t$, получим положительный линейный функционал f в $\mathfrak{M}$, удовлетворяющий условию $f(x_0) = 1$. Согласно теореме 2 его можно расширить до положительного линейного функционала F в X; при этом
$$F(x_0) = f(x_0) = 1.$$

Замечание. Множество K в вещественном линейном пространстве называется *клином*, если оно удовлетворяет условиям 1) и 2) определения конуса. Утверждение теоремы 2 и следствия из нее верны также для клина с внутренней точкой; действительно, в доказательстве теоремы 2 условие 3) не было использовано.

11. Аннуляторы в сопряженном пространстве. *Аннулятором* множества $S \subset X$ в пространстве X' называется совокупность всех функционалов $f \in X'$, удовлетворяющих условию
$$f(x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in S.$$

I. *Аннулятор всякого множества $S \subset X$ есть замкнутое подпространство в X'.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}$ — аннулятор множества $S \subset X$; $\mathfrak{N}$ линейно, ибо из
$$f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in S$$
следует, что
$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in S.$$

$\mathfrak{N}$ замкнуто. Действительно, при фиксированном $x \in R$ множество $\mathfrak{N}_x$ всех $f \in X'$, удовлетворяющих условию $f(x) = 0$, замкнуто, ибо $f(x)$ — непрерывная функция от f. Поэтому $\mathfrak{N}$, будучи пересечением множеств $\mathfrak{N}_x$, $x \in S$, также замкнуто.

II. *Всякое замкнутое подпространство $\mathfrak{N}$ в X' есть аннулятор некоторого замкнутого подпространства $S \subset X$.*

Доказательство. Пусть S — множество всех $x \in X$ таких, что

$$f(x) = 0 \quad \text{для всех} \quad f \in \mathfrak{N}.$$

Из непрерывности линейных функционалов f вытекает, что S — замкнутое подпространство в X. Обозначим через $\mathfrak{N}'$ аннулятор множества S. Очевидно, $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}'$. Докажем, что $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}$, т. е. что если $f_0 \in \mathfrak{N}'$, то $f_0 \in \mathfrak{N}$. Так как $\mathfrak{N}$ замкнуто, то достаточно доказать, что f_0 — точка прикосновения множества $\mathfrak{N}$, т. е. что в любой окрестности функционала f_0 имеются элементы $f \in \mathfrak{N}$.

Пусть $U(f_0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$ такая окрестность. Будем рассматривать $\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ как вектор n-мерного пространства R^n. Когда f пробегает $\mathfrak{N}$, совокупность всех таких векторов образует подпространство в R^n. Обозначим это подпространство через $\mathfrak{M}$.

Докажем, что вектор $\xi_0 = \{f_0(x_1), \ldots, f_0(x_n)\}$ принадлежит подпространству $\mathfrak{M}$. Предположим противное. Тогда в $R^{n'}$ существует вектор, ортогональный к $\mathfrak{M}$ (т. е. $= 0$ на $\mathfrak{M}$), но не ортогональный к ξ_0. Другими словами, существуют числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ такие, что

$$\lambda_1 f(x_1) + \ldots + \lambda_n f(x_n) = 0 \quad \text{для всех} \quad f \in \mathfrak{N}, \tag{1}$$

$$\lambda_1 f_0(x_1) + \ldots + \lambda_n f_0(x_n) \neq 0. \tag{2}$$

Условие (1) означает, что $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n \in S$. Но тогда в силу (2) функционал f_0 из $\mathfrak{N}'$ отличен от нуля на элементе $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ множества S, что противоречит определению $\mathfrak{N}'$.

Итак, $\xi_0 \in \mathfrak{M}$. Это означает, что существует функционал $\widetilde{f} \in \mathfrak{N}$, удовлетворяющий условиям

$$\widetilde{f}(x_k) = f_0(x_k), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, $\widetilde{f} \in U(f_0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$, что и требовалось доказать.

III. *Если $\mathfrak{N}$ — аннулятор замкнутого подпространства $S \subset X$, то S есть совокупность всех $x \in X$ таких, что*

$$f(x) = 0 \quad \textit{для всех} \quad f \in \mathfrak{N}.$$

Доказательство. Если $x_0 \in S$, то $f(x_0) = 0$ для всех $f \in \mathfrak{N}$. Если же $x_0 \notin S$, то существует функционал $f_0 \in X'$ такой, что $f_0(x_0) \neq$ $\neq 0$ и $f_0(x) = 0$ для всех $x \in S$. Таким образом, $f_0 \in \mathfrak{N}$ и $f_0(x_0) \neq 0$.

Пусть теперь S_1 и S_2 — замкнутые линейные подпространства в X, а $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ — их аннуляторы в X'.

IV. *Если $S_1 \subset S_2$, то $\mathfrak{N}_1 \supset \mathfrak{N}_2$, и обратно. Если при этом $S_1 \neq S_2$, то $\mathfrak{N}_1 \neq \mathfrak{N}_2$, и обратно.*

Эти утверждения непосредственно следуют из определения аннуляторов $\mathfrak{N}_1$ и $\mathfrak{N}_2$ и предложения III.

12. Аналитические вектор-функции. Пусть G — область комплексной плоскости, а $x(\lambda)$ — функция, определенная для всех $\lambda \in G$, значениями которой служат векторы из фиксированного локально выпуклого пространства X. Функцию $x(\lambda)$ называют *аналитической* в G, если для любого $\lambda_0 \in G$ существует

$$x'(\lambda_0) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0}. \tag{1}$$

I. *Если $x(\lambda)$ аналитична в области G, то $f(x(\lambda))$ для любого функционала $f \in X'$ есть аналитическая числовая функция в области G.*

Действительно, в силу непрерывности функционала f из (1) следует, что при $\lambda_0 \in G$ существует также

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f(x(\lambda)) - f(x(\lambda_0))}{\lambda - \lambda_0} = f(x'(\lambda_0)).$$

Функцию $x(\lambda)$ называют *аналитичной в бесконечности*, если

1) $x(\lambda)$ определена в некоторой окрестности $|\lambda| > N$ бесконечно удаленной точки;
2) существует $\lim\limits_{\lambda \to 0} x\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$;
3) функция $y(\lambda)$, определенная при $|\lambda| < \dfrac{1}{N}$ условиями

$$y(\lambda) = x\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{при} \quad \lambda \neq 0,$$
$$y(0) = \lim_{\lambda \to 0} x\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

аналитична в некоторой окрестности точки $\lambda = 0$.

II (Т е о р е м а Л и у в и л л я). *Если $x(\lambda)$ аналитична во всей комплексной плоскости, включая бесконечно удаленную точку, то $x(\lambda)$ есть постоянная.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x(\lambda)$ аналитична во всей комплексной плоскости, включая бесконечно удаленную точку. Тогда для любого $f \in X'$ числовая функция $f(x(\lambda))$ аналитична во всей комплексной плоскости, включая бесконечно удаленную точку. На основании обычной теоремы Лиувилля отсюда заключаем, что $f(x(\lambda))$ есть постоянная.

Таким образом, $f(x(\lambda_1)) = f(x(\lambda_2))$ и

$$f(x(\lambda_1) - x(\lambda_2)) = 0 \quad \text{для любых} \quad \lambda_1, \lambda_2.$$

Ввиду произвольности функционала $f \in X'$ это возможно лишь тогда, когда

$$x(\lambda_1) - x(\lambda_2) = 0 \quad \text{для любых} \quad \lambda_1, \lambda_2$$

(см. II п. 6), т. е. когда $x(\lambda)$ есть постоянная.

13. Полные локально выпуклые пространства. Выше было определено понятие полного метрического пространства (см. п. 13 § 2). Это понятие допускает следующее обобщение.

Сеть [1] $\{x_n\}$ в топологическом линейном пространстве X называют *сходящейся к элементу* x этого пространства, если для каждой окрестности $U(x)$ существует индекс α_0 такой, что $x_\alpha \in U(x)$ для всех индексов $\alpha > \alpha_)$.

Сеть $\{x_\alpha\} \subset X$ называют *фундаментальной*, если каждой окрестности $U(0)$ нулевого элемента $0 \in X$ отвечает индекс α_0 такой, что $x_\alpha - x_\beta \in U(0)$ для всех индексов α, $\beta \geqslant \alpha_0$. Топологическое линейное пространство X называют *полным*, если всякая фундаментальная сеть в X сходится к некоторому элементу $x \in X$.

Оказывается, что *всякое локально выпуклое пространство X можно включить как подпространство в полное локально выпуклое пространство $\widetilde{X}$, в котором X образует плотное множество* [2]. Это пространство $\widetilde{X}$ называют *пополнением* пространства X.

Можно ослабить условие, наложенное на X, потребовав лишь, чтобы всякая обычная фундаментальная последовательность в X сходилась к элементу $x \in X$; пространство X, удовлетворяющее этому условию, называют *секвенциально полным*. Для метрических пространств оба эти определения полноты эквивалентны; в общем же случае не всякое секвенциально полное пространство X полно.

§ 4. Нормированные пространства

1. Определение нормированного пространства. Напомним (см. п. 9 § 1), что *нормой* $|x|$ на линейном пространстве X называется полунорма, удовлетворяющая условию: $|x| > 0$ при $x \neq 0$. Таким образом, норма $|x|$ на X есть функционал, удовлетворяющий условиям:

1°. $|x| \geqslant 0$;

2°. $|x| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

3°. $|\alpha x| = |\alpha||x|$;

4°. $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ (неравенство треугольника).

---

[1] См. добавление I.

[2] По поводу доказательств этого и сформулированных ниже предложений см. список литературы в статье Дьедонне [2]; другое определение полноты, доказательство существования пополнения и более подробное изложение теории топологических линейных пространств см. в книге Н. Бурбаки [2].

Линейное пространство с заданной на нем нормой называют *нормированным пространством*.

Условие 2° означает, что множество $\{|x|\}$, состоящее из одной только нормы $|x|$, есть достаточное множество полунорм в X и потому определяет в X топологию, в которой X становится локально выпуклым пространством (см. п. 4 § 3). При этом совокупность всех векторов x, удовлетворяющих неравенству

$$|x - x_0| < \varepsilon \tag{1}$$

при фиксированном $\varepsilon > 0$, есть окрестность элемента x_0, и совокупность всех таких окрестностей при всевозможных фиксированных $\varepsilon > 0$ и $x_0 > 0$ есть база окрестностей в X.

Таким образом определенную топологию в нормированном пространстве X называют *сильной топологией*.

I. *Если p — произвольная полунорма в линейном пространстве X, а $\mathfrak{M}$ — подпространство всех векторов $x \in X$, на которых $p(x) = 0$* (см. п. 9 § 1), *то формула*

$$|\xi| = p(x), \quad \textit{где} \quad x \in \xi,$$

определяет норму в факторпространстве $X/\mathfrak{M}$.

Действительно, если x, $y \in \xi$, то $y - x \in \mathfrak{M}$, и потому $p(y) = p(x + y - x) \leqslant p(x) + p(y - x) = p(x)$ и, аналогично, $p(x) \leqslant p(y)$. Таким образом, $p(x) = p(y)$ и $|\xi|$ не зависит от выбора представителя $x \in \xi$. Очевидно, $|\xi|$ — полунорма, и если $|\xi| = 0$, то $p(x) = 0$ для всех $x \in \xi$; но тогда $\xi = \mathfrak{M}$, т. е. ξ — нулевой элемент в $X_1/\mathfrak{M}$. Следовательно, $|\xi|$ есть норма в $X/\mathfrak{M}$.

В нормированном пространстве X можно также ввести метрику, положив

$$\rho(x, y) = |x - y|. \tag{2}$$

Легко проверить, что аксиомы метрики (см. п. 13 § 2) будут тогда выполнены. Кроме того, окрестности (1) совпадают с окрестностями, определенными метрикой (2).

Другими словами, *сильная топология в нормированном пространстве совпадает с топологией, определенной метрикой*

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

Всякое линейное подпространство нормированного пространства X также является нормированным пространством при том же определении нормы; оно называется *нормированным подпространством* пространства X. Отображение $x \to x'$ нормированного пространства X в нормированное пространство X' называется *изометрией*, если:

1) $x \to x'$ — изоморфизм линейного пространства X в линейное пространство X' и
2) $|x| = |x'|$ при $x \to x'$.

Нормированные пространства X, X' называются *изометричными*, если существует изометрия X на X'.

Нормированное пространство называют *полным*, если оно является полным метрическим пространством в метрике $\rho(x, y) = |x - y|$ (см. п. 13 § 2). Полное нормированное пространство называют также *банаховым* пространством [1]).

II. *Всякое неполное нормированное пространство можно пополнить, т. е. включить в качестве нормированного подпространства в полное нормированное пространство.*

Действительно, пусть $\widetilde{X}$ обозначает пополнение метрического пространства X в метрике $\rho(x, y) = |x - y|$ (см. п. 13 § 2). Докажем, что норму в X и операции сложения и умножения на число можно доопределить в $\widetilde{X}$ таким образом, чтобы $\widetilde{X}$ стало нормированным пространством.

Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — фундаментальные последовательности в X, определяющие элементы x, $y \in \widetilde{X}$ соответственно. Из соотношений

$$|\alpha x_n - \alpha x_m| = |\alpha||x_n - x_m|,$$
$$(x_n + y_n) - (x_m + y_m) = |(x_n - x_m) + (y_n - y_m)| \leqslant \\ \leqslant |x_n - x_m| + |y_n - y_m|$$

заключаем, что $\{\alpha x_n\}$ и $\{x_n + y_n\}$ также являются фундаментальными последовательностями; обозначим через αx и $x + y$ определяемые ими элементы пространства $\widetilde{X}$.

Тем самым в $\widetilde{X}$ будут определены операции умножения на число и сложения; легко проверить, что аксиомы линейного пространства (см. п. 1 § 1) при этом будут выполнены. Кроме того, из (2) следует, что

$$\rho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\rho(x, y), \quad \rho(x + z, y + z) = \rho(x, y) \tag{3}$$

для всех x, y, $z \in X$. Переходя к пределу, убеждаемся в справедливости соотношений (3) также для всех x, y, $z \in \widetilde{X}$. Но тогда функция

$$|x| = \rho(x, 0), \quad x \in \widetilde{X},$$

удовлетворяет всем аксиомам 1°–4° нормы. Так, например, в силу второго из соотношений (3)

$$|x + y| = \rho(x + y, 0) \leqslant \rho(x + y, y) + \rho(y, 0) = \\ = \rho(x, 0) + \rho(y, 0) = |x| + |y|.$$

Таким образом, $\widetilde{X}$ — нормированное пространство. При этом

$$\rho(x, y) = \rho(x - y, 0) = |x - y| \quad \text{для всех} \quad x, y \in \widetilde{X}$$

---

[1]) С. Банах (1892–1946) — известный польский математик, один из основателей современного функционального анализа.

и по построению $\widetilde{X}$ полно в метрике $\rho(x, y)$; следовательно, $\widetilde{X}$ — полное нормированное пространство.

Из I п. 13 § 2 следует, что $\widetilde{X}$ — *минимальное полное нормированное пространство, содержащее X в качестве нормированного подпространства, и X плотно в $\widetilde{X}$*; $\widetilde{X}$ называется *пополнением* нормированного пространства X. Из I п. 13 § 2 следует также, что пополнение определяется однозначно с точностью до изометрии, оставляющей на месте точки из X.

III. *Конечномерное подпространство в нормированном пространстве полно и потому замкнуто.*

Доказательство. Согласно I п. 5 § 3 всякая норма в n-мерном подпространстве $\mathfrak{M}_n$ топологически эквивалентна норме

$$|\xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n| = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2},$$

где $e_1, \ldots, e_n$ — какой-нибудь базис в $\mathfrak{M}_n$, а в этой норме $\mathfrak{M}_n$, очевидно, полно.

IV. *Если $\mathfrak{M}$ — замкнутое подпространство нормированного пространства X, не совпадающее с X, то для любого $\varepsilon > 0$ существует вектор $y \in X$ такой, что*

$$|y| = 1, \quad |x - y| > 1 - \varepsilon \quad \text{\textit{для всех}} \quad x \in \mathfrak{M}.$$

Доказательство. Пусть y_0 — элемент из X, не принадлежащий $\mathfrak{M}$; положим

$$d = \inf_{x \in \mathfrak{M}} |x - y_0|;$$

тогда $d > 0$, ибо при $d = 0$ мы имели бы: $y_0 \in \overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}$. Для любого $\delta > 0$ существует элемент $x_0 \in \mathfrak{M}$ такой, что $d \leqslant |x_0 - y_0| < d + \delta$. Полагая

$$y = \frac{1}{|y_0 - x_0|}\,(y_0 - x_0),$$

имеем $|y| = 1$, и при $x \in \mathfrak{M}$

$$|y - x| = \frac{1}{|y_0 - x_0|}\,|y_0 - (x_0 + |y_0 - x_0| x)| \geqslant \\ \geqslant \frac{d}{|y_0 - x_0|} > \frac{d}{d + \delta} = 1 - \frac{\delta}{d + \delta} > 1 - \varepsilon,$$

если выбрать $\delta > 0$ так, чтобы $\dfrac{\delta}{d + \delta} < \varepsilon$.

V. *Единичный шар бесконечномерного нормированного пространства X не предкомпактен.*

Доказательство. Построим по индукции бесконечную последовательность $x_n \in X$, удовлетворяющую условиям:

$$|x_n| = 1, \quad |x_n - x_m| > \frac{1}{2} \quad \text{при} \quad n \neq m.$$

В качестве x_1 возьмем произвольный элемент в X такой, что $|x_1| = 1$. Если $x_1, \ldots, x_n$ уже построены, то пусть $\mathfrak{M}_n$ — подпространство, натянутое на $x_1, \ldots, x_n$; оно замкнуто в силу III. Так как X бесконечномерно, то $\mathfrak{M}_n \neq X$, так что в силу IV существует вектор x_{n+1}, удовлетворяющий условиям: $|x_{n+1}| = 1$, $|x - x_{n+1}| > \frac{1}{2}$ для всех $x \in \mathfrak{M}_n$; в частности, $|x_k - x_{n+1}| > \frac{1}{2}$ при $k = 1, 2, \ldots, n$. Построенная так по индукции последовательность x_n принадлежит единичной сфере и не содержит фундаментальной подпоследовательности; следовательно, единичная сфера, а значит, и единичный шар не являются предкомпактными.

Топологическое линейное пространство X называют *нормируемым*, если в X можно ввести такую норму, что топология в X, определенная этой нормой, будет совпадать с исходной топологией в X. А. Н. Колмогоров [1] доказал, что *топологическое линейное пространство нормируемо тогда и только тогда, когда в X существует ограниченная выпуклая окрестность нуля*. При этом множество M в топологическом линейном пространстве X он называет *ограниченным*, если $\varepsilon_n x_n \to 0$, каковы бы ни были элементы $x_n \in M$ и числа $\varepsilon_n \to 0$. Можно показать, что в случае локально выпуклого пространства X это равносильно требованию, чтобы всякий выпуклый функционал p из достаточного множества $\{p\}$, определяющего топологию в X, был ограничен на M.

Примеры. 1. Пространство $M(T)$. Пусть T — произвольное множество. Обозначим через $M(T)$ совокупность всех ограниченных комплексных функций на T. Определим в $M(T)$ операции умножения на число и сложения обычным образом, а норму — формулой

$$|x| = \sup_{t \in T} |x(t)|.$$

Легко проверить, что $M(T)$ станет полным нормированный пространством.

2. Пространство $C(T)$. Пусть T — топологическое пространство. Обозначим через $C(T)$ совокупность всех ограниченных непрерывных комплексных функций на T. Определим в $C(T)$ операции умножения на число, сложения и норму так же, как и в $M(T)$. Легко проверить, что тогда $C(T)$ станет полным нормированным пространством. Очевидно, $C(T)$ есть замкнутое подпространство в $M(T)$. Если T бикомпактно, то в силу VII п. 7 § 2 $C(T)$ есть совокупность всех непрерывных комплексных функций на X.

3. Пространство l^2. Обозначим через l^2 совокупность всех последовательностей $x = \{x_n\}$, где x_n — комплексные числа, удовлетворяющие условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty.$$

Определим в l^2 норму и операции умножения на число и сложения:

$$|x| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2}, \quad \alpha x = \{\alpha x_n\}, \quad x + y = \{x_n + y_n\},$$

где $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$. Это определение операций законно, ибо из x, $y \in l^2$ следует, что также $\alpha x \in l^2$ и $x + y \in l^2$. Действительно, первое утверждение очевидно, а второе вытекает из неравенства $|x_n + y_n|^2 \leqslant 2(|x_n|^2 + |y_n|^2)$.

Мы предоставляем читателю проверку того, что все аксиомы нормы будут выполнены [1] (см. также п. 1 § 5), так что l^2 — нормированное пространство.

Пространство l^2 полно. Действительно, пусть

$$x^{(k)} = \{x_n^{(k)}\}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

— фундаментальная последовательность в l^2, так что

$$|x^{(k)} - x^{(p)}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(k)} - x_n^{(p)}|^2 < \varepsilon^2 \quad \text{при} \quad k, p > N(\varepsilon). \tag{4}$$

Тогда также

$$|x_n^{(k)} - x_n^{(p)}| < \varepsilon \quad \text{при} \quad k, p > N(\varepsilon);$$

следовательно, существует

$$x_n = \lim_{k\to\infty} x_n^{(k)}.$$

Кроме того, из (4) вытекает, что, каково бы ни было M,

$$\sum_{n=1}^{M} |x_n^{(k)} - x_n^{(p)}|^2 < \varepsilon^2 \quad \text{при} \quad k, p > N(\varepsilon). \tag{5}$$

Переходя в (5) к пределу при $k \to \infty$, получаем, что

$$\sum_{n=1}^{M} |x_n - x_n^{(p)}|^2 \leqslant \varepsilon^2 \quad \text{при} \quad p > N(\varepsilon). \tag{6}$$

Так как $N(\varepsilon)$ от M не зависит, то в (6) можно перейти к пределу при $M \to \infty$, и мы получим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x^{(p)}|^2 < \varepsilon^2 \quad \text{при} \quad p > N(\varepsilon).$$

[1] И что $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n y_n\right|^2 \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x|^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} |y_n|^2$ для всех $\{x_n\}$, $\{y_n\} \in l^2$.

Это означает, что $\{x_n - x_n^{(p)}\}$, а значит и $\{x_n\} \in l^2$, и что $\{x_n\}$ есть предел последовательности $\{x_n^{(l)}\}$, $l = 1, 2, 3, \ldots$ в пространстве l^2.

Отметим еще, что l^2 сепарабельно; именно, совокупность всех последовательностей $\{x_n\}$ с рациональными x_n, в которых только конечное число членов x_n отлично от нуля, образует в l^2 счетное плотное множество.

Другие примеры нормированных пространств см. ниже в § 6.

2. Ряды в нормированном пространстве. Ряд

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots \tag{1}$$

из элементов x_n нормированного пространства X называют *сходящимся*, если его частичные суммы

$$s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

образуют сходящуюся в X последовательность; предел этой последовательности называют *суммой* ряда (1). Ряд (1) называют *абсолютно сходящимся*, если сходится числовой ряд

$$|x_1| + |x_2| + |x_3| + \ldots \tag{2}$$

I. *Нормированное пространство X полно тогда и только тогда, когда в нем каждый абсолютно сходящийся ряд сходится.*

Доказательство. Пусть X полно, и пусть ряд (2) сходится. Тогда при $m > n$

$$|x_m - x_n| = |x_{n+1} + \ldots + x_m| \leqslant |x_{n+1}| + \ldots + |x_m|,$$

следовательно, в силу сходимости ряда (2) $\{s_n\}$ — фундаментальная последовательность в полном пространстве X и потому имеет предел.

Обратно, пусть в нормированном пространстве X каждый абсолютно сходящийся ряд сходится, и пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность в X. Тогда из $\{x_n\}$ можно выбрать такую подпоследовательность x_{n_k}, что

$$|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}| < \frac{1}{2^{k+1}}. \tag{3}$$

Из (3) следует, что ряд $x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + (x_{n_3} - x_{n_2}) + \ldots$ абсолютно сходится и, значит, по условию, сходится к некоторому элементу $x \in X$. Это означает, что

$$x = \lim_{k \in \infty} [x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \ldots + (x_{n_k} - x_{n_{k-1}})] = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}.$$

Но тогда из неравенства $|x - x_n| \leqslant |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_n|$ и фундаментальности последовательности $\{x_n\}$ заключаем, что также $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Следовательно, X полно.

Необходимость в предложении I легко переносится на локально выпуклые пространства: пусть $\{p\}$ — достаточное множество полунорм в локально выпуклом пространстве X; ряд $x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$ в X называют *абсолютно сходящимся*, если ряд $p(x_1) + p(x_2) + \ldots$ сходится для каждого $p \in \{p\}$. Если *локально выпуклое пространство секвенциально полно* [1], *то в нем каждый абсолютно сходящийся ряд сходится*.

3. Факторпространства полного нормированного пространства. Пусть X — нормированное пространство, а $\mathfrak{M}$ — замкнутое подпространство в X; рассмотрим факторпространство $X/\mathfrak{M}$, т.е. пространство, элементами которого являются классы ξ, по модулю $\mathfrak{M}$ (см. п. 4 § 1). В силу замкнутости подпространства $\mathfrak{M}$ все эти классы замкнуты. Определим в $X/\mathfrak{M}$ норму формулой

$$|\xi| = \inf_{x \in \xi} |x|. \tag{1}$$

Докажем, что все аксиомы нормы (см. п. 1) будут выполнены. Очевидно, аксиомы 1° и 3° выполнены, так что в доказательстве нуждаются только аксиомы 2° и 4°.

Если $\xi = 0$, то ξ совпадает с $\mathfrak{M}$ и потому содержит нулевой элемент пространства X; следовательно, из (1) вытекает, что $|\xi| = 0$. Обратно, пусть $|\xi| = 0$; в силу (1) отсюда следует, что в классе ξ существует последовательность x_n, для которой $|x_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Но это означает, что 0 есть точка прикосновения класса ξ и потому принадлежит ξ; следовательно, $\xi = \mathfrak{M}$ и потому есть нулевой элемент в $X/\mathfrak{M}$. Аксиома 2° выполнена.

Перейдем к аксиоме 4°. Пусть ξ, $\eta \in X/\mathfrak{M}$; по определению (1) нормы, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существуют векторы $x \in \xi$, $y \in \eta$ такие, что

$$|x| < |\xi| + \varepsilon, \quad |y| < |\eta| + \varepsilon;$$

следовательно,

$$|x + y| \leqslant |x| + |y| < |\xi| + |\eta| + 2\varepsilon. \tag{2}$$

С другой стороны, $x + y \in \{\xi + \eta\}$, и потому $|\xi + \eta| \leqslant |x + y|$. Комбинируя это неравенство с (2), получаем

$$|\xi + \eta| \leqslant |\xi| + |\eta| + 2\varepsilon.$$

Ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$ отсюда и следует, что

$$|\xi + \eta| \leqslant |\xi| + |\eta|.$$

Пространство $X/\mathfrak{M}$, нормированное по формуле (1), мы будем называть *нормированным факторпространством*.

Если X — полное нормированное пространство, а $\mathfrak{M}$ — замкнутое подпространство в X, то нормированное факторпространство $X/\mathfrak{M}$ также полно.

[1] См. п. 13 § 3.

Доказательство. Пусть $\xi_1 + \xi_2 + \ldots$ — абсолютно сходящийся ряд, так что ряд

$$|\xi_1| + |\xi_2| + \ldots \tag{3}$$

сходится. Из определения (1) нормы в $X/\mathfrak{M}$ заключаем, что существует такой элемент $x_n \in \xi_n$, что

$$|x_n| < |\xi_n| + \frac{1}{2^n}. \tag{4}$$

Из (4) и сходимости ряда (3) следует, что ряд $x_1 + x_2 + \ldots$ абсолютно сходится и потому сходится к некоторому элементу $x \in X$, так как X полно. Пусть ξ — класс, содержащий x. Тогда в силу (1) $|\xi - (\xi_1 + \ldots + \xi_n)| \leqslant |x - (x_1 + \ldots + x_n)| \to 0$ при $n \to \infty$; следовательно, ряд $\xi_1 + \xi_2 + \ldots$ сходится к элементу $\xi \in X/\mathfrak{M}$ и $X/\mathfrak{M}$ полно на основании I п. 2.

4. Ограниченные линейные операторы. Оператор A из нормированного пространства X в нормированное пространство Y называют *ограниченным*, если существует постоянная C такая, что

$$|Ax| \leqslant C|x| \quad \text{для всех} \quad x \in \mathfrak{D}_A. \tag{1}$$

I. *Всякий линейный оператор, непрерывный в точке $x = 0$, ограничен; обратно, всякий ограниченный линейный оператор непрерывен.*

Доказательство. Пусть оператор A непрерывен в точке $x = 0$. Это означает, что окрестности $|y| < \varepsilon$ в Y отвечает окрестность $|x| < \delta$ в X такая, что $|Ax| < \varepsilon$ при $|x| < \delta$, $x \in \mathfrak{D}_A$. Полагая при произвольном $x \in \mathfrak{D}_A$ $(x \neq 0)$ $z = \dfrac{\delta}{2|x|}\,x$, имеем $|z| < \delta$; поэтому $|Az| < \varepsilon$, т. е. $\dfrac{\delta}{2|x|}\,|Ax| < \varepsilon$, $|Ax| \leqslant \dfrac{2\varepsilon}{\delta}\,|x|$ для всех $x \in \mathfrak{D}_A$. Это и означает, что A ограничен. Обратно, если A ограничен, то его непрерывность следует из неравенства

$$|Ax - Ax_0| = |A(x - x_0)| \leqslant C|x - x_0|,$$

справедливого для всех x, $x_0 \in \mathfrak{D}_A$.

II. *Если пространство Y полно, то ограниченный линейный оператор A продолжается по непрерывности с сохранением неравенства (1) до ограниченного линейного оператора с областью определения $\overline{\mathfrak{D}}_A$.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in \overline{\mathfrak{D}}_A$, так что существует последовательность векторов $x_n \in \mathfrak{D}_A$ такая, что

$$|x_n - x_0| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to 0.$$

Тогда из неравенства

$$|Ax_n - Ax_m| = |A(x_n - x_m)| \leqslant C|x_n - x_m|$$

вытекает, что $\{Ax_n\}$ есть фундаментальная последовательность в полном пространстве Y и потому имеет предел. Положим

$$\widetilde{A}x_0 = \lim_{n\to\infty} Ax_n; \tag{2}$$

это определение не зависит от выбора последовательности $x_n \to x_0$. Действительно, если также $x'_n \to x_0$, $x'_n \in \mathfrak{D}_A$, то $x'_n - x_n \to 0$ при $n \to \infty$; а отсюда и из (1) следует, что

$$Ax'_n - Ax_n \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Таким образом, формула (2) задает оператор $\widetilde{A}$ из X в Y с областью определения $\overline{\mathfrak{D}}_A$, являющийся расширением оператора A. Легко проверить (путем перехода к пределу), что $\widetilde{A}$ линеен и что $|\widetilde{A}x| \leqslant C|x|$ для всех $x \in \overline{\mathfrak{D}}_A$.

Если, в частности, $\mathfrak{D}_A$ плотно в X, то $\widetilde{A}$ есть ограниченный оператор, определенный на всем X.

Будем теперь рассматривать ограниченные линейные операторы из X в Y, определенные на всем X; совокупность всех таких операторов обозначим через $L(X, Y)$.

Если $A \in L(X, Y)$, то при некотором C

$$|Ax| \leqslant C|x| \quad \text{для всех} \quad x \in X. \tag{3}$$

В частности,

$$|Ax| \leqslant C$$

для всех векторов $x \in X$ с нормой $\leqslant 1$. Поэтому существует

$$\sup_{|x|\leqslant 1} |Ax|.$$

Эту верхнюю грань называют *нормой* ограниченного оператора A и обозначают $|A|$. Таким образом, по определению

$$|A| = \sup_{|x|\leqslant 1} |Ax|.$$

Легко видеть, что также

$$|A| = \sup_{x\neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}.$$

Действительно, полагая $\dfrac{x}{|x|} = y$, имеем $|y| = 1$, следовательно,

$$\sup_{x\neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|y|=1} |Ay| = \sup_{|y|\leqslant 1} |Ay| = |A|.$$

Отсюда следует также, что $|A|$ *есть наименьшее из чисел* C, *для которых выполняется неравенство* (3). Очевидно, $|A| = 0$, лишь если $A = 0$.

III. *Если* A, $B \in L(X, Y)$, *то* $\alpha A \in L(X, Y)$ *и* $A + B \in L(X, Y)$, *причем*

$$|\alpha A| = |\alpha||A|, \quad |A + B| \leqslant |A| + |B|.$$

Утверждения непосредственно следуют из соотношений

$$\frac{|\alpha Ax|}{|x|} = |\alpha|\frac{|Ax|}{|x|}, \quad \frac{|(A+B)\,x|}{|x|} \leqslant \frac{|Ax|}{|x|} + \frac{|Bx|}{|x|} \leqslant |A| + |B|.$$

Предложение III означает, что $L(X, Y)$ *есть нормированное пространство.*

IV. *Если* Y *полно, то пространство* $L(X, Y)$ *также полно.*

Доказательство. Пусть $\{A_n\}$ — фундаментальная последовательность в $L(X, Y)$; каково бы ни было $\varepsilon > 0$, $|A_n - A_m| < \varepsilon$ для всех n, $m > N(\varepsilon)$. Отсюда при любом $x \in X$

$$|A_n x - A_m x| = |(A_n - A_m)\,x| < \varepsilon|x| \quad \text{при} \quad n, m > N(\varepsilon), \tag{4}$$

так что $\{A_n x\}$ есть фундаментальная последовательность в полном пространстве Y и потому имеет предел. Положим

$$Ax = \lim_{n\to\infty} A_n x.$$

Эта формула определяет оператор из X в Y. Легко проверить, что A линеен. Докажем, что $A \in L(X, Y)$ и что A есть предел последовательности $\{A_n\}$; тем самым полнота пространства $L(X, Y)$ будет доказана.

Переходя в (4) к пределу при $n \to \infty$, получим

$$|Ax - A_m x| \leqslant \varepsilon|x| \quad \text{при} \quad m > N(\varepsilon),$$

следовательно, $A - A_m \in L(X, Y)$ и

$$|A - A_m| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad m \to N(\varepsilon). \tag{5}$$

Но тогда $A = A_m + (A - A_m) \in L(X, Y)$; кроме того, (5) означает, что $|A - A_m| \to 0$ при $m \to \infty$. Предложение IV доказано.

Рассмотрим теперь случай $Y = X$, т. е. случай ограниченных операторов в X, определенных на всем X. Совокупность всех таких операторов обозначим через $\mathfrak{B}(X)$, так что $\mathfrak{B}(\mathrm{X}) = L(X, X)$. В дополнение к предложениям III и IV имеем тогда

V. *Если* A, $B \in \mathfrak{B}(X)$, *то также* $AB \in \mathfrak{B}(X)$ *и*

$$|AB| \leqslant |A||B|.$$

Утверждение непосредственно следует из неравенств

$$\frac{|ABx|}{|x|} \leqslant \frac{|A||Bx|}{|x|} \leqslant \frac{|A||B||x|}{|x|} = |A||B|.$$

VI (С. Банах [1]). *Если ограниченный линейный оператор* A *взаимно однозначно отображает банахово пространство* X *на* *банахово пространство Y, то обратный оператор A^{-1} ограничен на Y.*

Доказательство. Пусть K — замкнутый шар в X с центром в нуле и радиусом 1. Отметим прежде всего, что AK не может быть нигде не плотным в Y. Действительно, предположив противное, заключаем, что также каждое из множеств $A(nK) = nAK$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) нигде не плотно в Y. Но так как $Y = \bigcup_n nAK$, то окажется, что Y — первой категории, а это противоречит полноте Y (см. III п. 13 § 2). Итак, AK не является нигде не плотным; следовательно, в Y существует шар $\overline{B} = \overline{B(y_0, r)}$, в котором $AK \cap \overline{B}$ плотно, откуда $\overline{B(y_0, r)} \subset \overline{AK}$. Так как $\overline{AK}$ симметрично, то также $\overline{B(-y_0, r)} \subset \overline{AK}$. Пусть $\overline{B}_r = \overline{B(0, r)}$ — шар в Y с радиусом r и центром 0. Если $y \in \overline{B}_r$, то $y_0 + y \in \overline{B(y_0, r)} \subset \overline{AK}$ и $-y_0 + y \in \overline{B(-y_0, r)} \subset \overline{AK}$, но тогда также $y = \frac{1}{2}(-y_0 + y) + \frac{1}{2}(y_0 + y) \in \overline{AK}$, ибо $\overline{AK}$ выпукло (см. I п. 1 § 3). Таким образом,

$$\overline{B}_r \subset \overline{AK} \tag{6}$$

и, следовательно,

$$\overline{B}_{\varepsilon r} \subset \overline{A(\varepsilon K)} \quad \text{для каждого} \quad \varepsilon > 0. \tag{7}$$

Докажем теперь, что

$$\overline{B}_r \subset 2AK. \tag{8}$$

Пусть ε_n — такая последовательность положительных чисел, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \leqslant 1$, и пусть $y \in \overline{B}_r$. В силу (6) существует такой элемент $y_1 \in AK$, что $|y - y_1| \leqslant \varepsilon_1 r$. Пусть x_1 — элемент из K, для которого $y_1 = Ax_1$. Применяя то же рассуждение к элементу $y - y_1 \in \overline{B}_{\varepsilon_1 r}$ и используя (7), заключаем, что существует такой элемент $y_2 = Ax_2$, где $x_2 \in \varepsilon_1 K$, что $|y - (y_1 + y_2)| \leqslant \varepsilon_2 r$. Продолжая это рассуждение, получим последовательности $x_n \in \varepsilon_n K$, $y_n = Ax_n$ такие, что

$$x_n \in \varepsilon_{n-1} K, \quad \text{т. е.} \quad |x_n| \leqslant \varepsilon_{n-1}, \tag{9}$$

и

$$|y - (y_1 + \ldots + y_n)| \leqslant \varepsilon_n r. \tag{10}$$

В силу (9) и полноты пространства X ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится; пусть x — его сумма. Тогда

$$|x| \leqslant |x_1| + \sum_{k=2}^{\infty} |x_k| \leqslant 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_{k-1} \leqslant 2, \quad \text{т. е.} \quad x \in 2K$$

и

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} Ax_k = \sum_{k=1}^{\infty} y_k,$$

так что, в силу (10),

$$Ax = y.$$

Итак, для каждого $y \in \overline{B}_r$ существует такой элемент $x \in 2K$, что $Ax = y$, чем (8) и доказано. Пусть теперь y — произвольный ненулевой элемент из Y. Положим $y' = \frac{r}{|y|}\, y$. Тогда $y' \in \overline{B}_r$; в силу (8) $y' = Ax'$, где $|x'| \leqslant 2$. Положив $x = \frac{|y|}{r}\, x'$, имеем $Ax = y$, $x = A^{-1}y$ и

$$|A^{-1}y| = |x| = \frac{|y|}{r}\, |x'| \leqslant \frac{2}{r}\, |y|,$$

что и доказывает ограниченность оператора A^{-1}.

VII. *Если линейное пространство X полно как относительно нормы $|x|$, так и относительно нормы $|x|_1$, и если*

$$|x|_1 \geqslant |x| \quad \textit{для всех} \quad x \in X, \tag{11}$$

то существует постоянная C такая, что

$$|x|_1 \leqslant C|x|.$$

Доказательство. Обозначим через X и X_1 линейные пространства X, рассматриваемые как пространства Банаха с нормами $|x|$ и $|x|_1$ соответственно. Оператор A из X_1 в X, определенный равенством $Ax = x$, отображает X_1 на X взаимно однозначно и линейно и в силу (11) ограничен. Поэтому остается применить предложение VI.

Две нормы $|x|$ и $|x|_1$ в линейном пространстве X называют *эквивалентными*, если существуют постоянные C_1 и C_2 такие, что

$$C_1|x| \leqslant |x|_1 \leqslant C_2|x|.$$

Очевидно, эквивалентные нормы определяют в X одну и ту же топологию. Легко показать, что и обратно, две нормы, определяющие одну и ту же топологию в X, эквивалентны. Предложение VII означает, что нормы $|x|$ и $|x|_1$, удовлетворяющие условиям этого предложения, эквивалентны.

5. Ограниченные линейные функционалы; сопряженное пространство. Линейный функционал f в нормированном пространстве X называют *ограниченным*, если существует постоянная C такая, что

$$|f(x)| \leqslant C|x| \quad \text{для всех} \quad x \in \mathfrak{D}_f.$$

Очевидно, ограниченный линейный функционал есть частный случай ограниченного линейного оператора, а именно — оператор из X в Y, где $Y = \mathfrak{C}$ — пространство скаляров (см. п. 1 § 3). Поэтому результаты п. 4 об ограниченных операторах применимы к ограниченным функционалам. В частности, совокупность $L(X, \mathfrak{C})$ всех ограниченных линейных функционалов в X, определенных на всем X, есть нормированное линейное пространство, причем норма $|f|$ ограниченного функционала f определяется соотношениями

$$|f| = \sup_{|x| \leqslant 1} |f(x)| = \sup_{x \neq 0} \frac{|f(x)|}{|x|}.$$

Это пространство называют *сопряженным к* X к обозначают X'. Пространство, сопряженное к X', называют *вторым сопряженным к* X и обозначают X''. Аналогично можно определить третье, четвертое и т. д. сопряженные пространства.

Так как пространство $\mathfrak{C}$ всех скаляров полно, то в силу IV п. 4

I. *Сопряженное пространство полно.*

Далее, применяя теорему 2 п. 9 § 1 и ее следствие к $p(x) = |x|$, заключаем:

II. *Всякий ограниченный линейный функционал, заданный на подпространстве нормированного пространства* X, *можно продолжить с сохранением нормы на все пространство* X.

III. *Для всякого вектора* $x \in X$ *существует функционал* $f \in X'$ *такой, что*

$$f(x) = |x|, \quad |f| = 1.$$

Поэтому

IV. *Если* $f(x) = 0$ *для любого функционала* $f \in X'$, *то* $x = 0$.

Положим, при фиксированном $x \in X$,

$$F_x(f) = f(x), \quad f \in X';$$

очевидно, F_x есть линейный функционал в X'. Этот функционал ограничен, ибо

$$|F_x(f)| = |f(x)| \leqslant |x||f|, \tag{1}$$

т. е. $F_x \in X''$.

Из (1) следует, что $|F_x| \leqslant |x|$. С другой стороны, согласно III в соотношении (1) при некоторых f имеет место знак равенства. Следовательно, $|F_x| = |x|$. Таким образом,

V. *Соответствие* $x \to F_x$ *есть изометрическое отображение* X *в* X''.

Поэтому можно отождествить вектор x с порожденным им функционалом F_x и считать X частью X''. Если при этом $X = X''$, то пространство X называют *рефлексивным*. Таким образом, рефлексивность пространства X означает, что всякий ограниченный линейный функционал F в X' записывается в виде

$$F(f) = f(x),$$

где x — некоторый вектор из X.

6. Вполне непрерывные операторы. Линейный оператор A в банаховом пространстве X называют *вполне непрерывным*, если он переводит всякое ограниченное множество в предкомпактное, или, что равносильно этому, если каждая ограниченная последовательность $\{x_n\}$ из X обладает такой подпоследовательностью $\{x_{k_n}\}$, что $\{Ax_{n_k}\}$ сходится.

Оператор A называется *конечномерным*, если его область значений конечномерна. *Ограниченный конечномерный оператор A вполне непрерывен.* Действительно, такой оператор переводит каждое ограниченное множество из X в ограниченное подмножество конечномерного пространства; последнее же множество предкомпактно в силу теоремы Больцано–Вейерштрасса.

I. *Всякий вполне непрерывный оператор ограничен.*

Действительно, в противном случае существовала бы последовательность x_n такая, что

$$|x_n| = 1, \quad |Ax_n| > n,$$

и оператор A переводил бы ограниченное множество $\{x_n\}$ в множество $\{Ax_n\}$, очевидно, не являющееся предкомпактным.

Отметим, что обратное утверждение неверно. Так, единичный оператор в бесконечномерном пространстве ограничен, но не вполне непрерывен, ибо он отображает единичную сферу на себя, т. е. на множество, не являющееся предкомпактным (см. V п. 1).

II. *Если оператор A вполне непрерывен, а оператор B всюду определен в X и ограничен, то операторы AB и BA вполне непрерывны.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность. Так как A вполне непрерывен, то из нее можно выделить подпоследовательность $\{x'_n\}$ такую, что $\{Ax'_n\}$ сходится; тогда ввиду ограниченности оператора B последовательность $\{BAx'_n\}$ также сходится. Следовательно, оператор BA вполне непрерывен. Далее, последовательность $\{Bx_n\}$ ограничена; поэтому последовательность $\{ABx_n\}$ предкомпактна; а это означает, что оператор AB вполне непрерывен.

Аналогично II можно доказать, что

III. *Если A_1, A_2 — вполне непрерывные операторы, то и $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ — вполне непрерывный оператор.*

IV. *Если A_n — последовательность вполне непрерывных операторов такая, что*

$$|A - A_n| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то оператор A также вполне непрерывен.

Доказательство. Пусть $K = K_c$ — шар в X, определяемый неравенством $|x| \leqslant c$; положим $\varepsilon_n = |A - A_n|c$. Тогда при $x \in K$

$$|(A - A_n)\,x| \leqslant |A - A_n|c = \varepsilon_n;$$

следовательно, предкомпактное множество A_nK образует ε_n-сеть для множества AK. Так как $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, то на основании II п. 14 § 2 множество AK предкомпактно; это означает, что оператор A вполне непрерывен.

В следующем предложении дается пример вполне непрерывного оператора.

V. *Если*

$$\sum_{i,\,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < +\infty,$$

то оператор A в пространстве[1] l^2, *определенный формулами*

$$A\{x_i\} = \{y_i\}, \quad \text{где} \quad y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k \quad (i = 1, 2, 3, \ldots), \tag{1}$$

вполне непрерывен.

Доказательство. Прежде всего отметим, что A ограничен. Действительно, в силу (1)

$$|Ax|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |y_i|^2 = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}x_k|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \left(\sum_{i,\,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2\right) |x|^2. \tag{2}$$

Обозначим через A_n оператор, переводящий всякий вектор $x = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ в вектор $y^{(n)} = \{y_1, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots\}$, где числа y_i определяются формулой (1). Оператор A_n конечномерен и, как видно из (2), ограничен; следовательно, оператор A_n вполне непрерывен. С другой стороны,

$$|(A - A_n)\,x|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |y_i|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}x_k\right|^2 \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2;$$

отсюда

$$|A - A_n| \leqslant \left(\sum_{i=n+1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2\right)^{1/2} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

и остается применить предложение IV.

7. Аналитические вектор-функции в полном нормированном пространстве. Понятие аналитической вектор-функции было нами определено в локально выпуклом пространстве (см. п. 12 § 3); в частности, оно тем самым определено в нормированном пространстве. Таким образом, вектор-функция $x(\lambda)$ со значениями в нормированном

[1] См. пример 3 п. 1.

пространстве X называется *аналитической* в области G комплексной λ-плоскости, если в каждой точке $\lambda \in G$ существует

$$x'(\lambda) = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{x(\lambda + \Delta\lambda) - x(\lambda)}{\Delta\lambda}$$

в смысле топологии, определенной нормой в X.

I (Теорема Коши). *Если вектор-функция $x(\lambda)$ аналитична внутри области, ограниченной спрямляемым жордановым контуром* Γ, *и непрерывна на замыкании этой области, то*

$$\int_\Gamma x(\lambda)\, d\lambda = 0.$$

Доказательство. Применяя обычные рассуждения и пользуясь полнотой пространства X, легко показать, что интеграл непрерывной вектор-функции $x(\lambda)$ по спрямляемой кривой Γ существует в смысле топологии в X. Положим

$$y = \int_\Gamma x(\lambda)\, d\lambda.$$

Тогда для любого ограниченного линейного функционала f

$$f(y) = \int_\Gamma f(x(\lambda))\, d\lambda = 0, \tag{1}$$

ибо $f(x(\lambda))$ есть числовая функция, аналитичная внутри указанной области и непрерывная на ее замыкании, и потому к $f(x(\lambda))$ применима обычная теорема Коши. В силу произвольности функционала f заключаем из (1), что $y = 0$ (см. IV п. 5).

Аналогично доказывается

II (Интегральная формула Коши). *Если вектор-функция $x(\lambda)$ в полном нормированном пространстве X аналитична внутри области, ограниченной спрямляемым жордановым контуром* Γ, *и непрерывна на ее замыкании, то для любой точки λ внутри* Γ

$$x(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{x(\xi)}{\xi - \lambda}\, d\xi. \tag{2}$$

Применяя к формуле (2) обычные рассуждения, заключаем:

III. *Всякая вектор-функция $x(\lambda)$ в полном нормированном пространстве X, аналитичная внутри круга $|\lambda - \lambda_0| < r$, бесконечно дифференцируема внутри этого круга и представляется там в виде суммы абсолютно сходящегося ряда Тэйлора*

$$x(\lambda) = x_0 + (\lambda - \lambda_0)\, x_1 + (\lambda - \lambda_0)^2 x_2 + \ldots, \tag{3}$$

где

$$x_n = \frac{1}{n!}\, x^{(n)}(\lambda_0). \tag{4}$$

Радиус R абсолютной сходимости этого ряда, с одной стороны, равен расстоянию от λ_0 до ближайшей точки неаналитичности функции $x(\lambda)$, с другой стороны, на основании теоремы Коши–Адамара

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x_n|}}. \tag{5}$$

Действительно, если $x(\lambda)$ аналитична в круге $|\lambda - \lambda_0| < r$, то она непрерывна на любой окружности $|\lambda - \lambda_0| = r_1 < r$; поэтому числовая функция $|x(\lambda)|$ непрерывна, а значит, ограничена на окружности $|\lambda - \lambda_0| = r_1 < r$. Отсюда заключаем, что при $|\lambda - \lambda_0| < r_1 < r$ ряд

$$\frac{x(\xi)}{\xi - \lambda} = \frac{x(\xi)}{\xi - \lambda_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\lambda - \lambda_0}{\xi - \lambda_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(\xi)}{(\xi - \lambda_0)^{n+1}} (\lambda - \lambda_0)^n$$

сходится равномерно на окружности $|\xi - \lambda_0| = r_1$. Интегрируя почленно этот ряд и пользуясь формулой (2), а также формулами, получающимися из нее дифференцированием, получим (3)–(4), причем ряд в формуле (3) будет сходиться абсолютно при $|\lambda - \lambda_0| < r$.

Обратно, если (3)–(4) имеет место в круге $|\lambda - \lambda_0| < r$, то тогда непосредственным почленным интегрированием получаем, что формула (2) справедлива для любого жорданова контура Γ, целиком лежащего внутри этого круга. Отсюда легко следует аналитичность функции $x(\lambda)$ внутри круга $|\lambda - \lambda_0| < r$.

Легко видеть, что предложения I–III остаются справедливыми в любом секвенциально полном локально выпуклом пространстве X. При этом формулу (5) следует заменить формулой

$$R = \inf_p \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{p(x_n)}}, \tag{6}$$

где нижняя грань берется по всем полунормам p достаточного множества, определяющего топологию в X.

§ 5. Гильбертово пространство

1. Определение гильбертова пространства. Векторное пространство R будем называть *предгильбертовым*, если в нем определена функция двух переменных x и y, обозначаемая обычно через (x, y), удовлетворяющая следующим условиям:

1) $(x, x) \geqslant 0$; $(x, x) = 0$ лишь при $x = 0$;
2) $(y, x) = \overline{(x, y)}$;
3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
4) $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$.

Эту функцию (x, y) называют *скалярным произведением* элементов x и y.

Из свойств 2)–4) следует, что

$$(x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x, y), \quad (x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2).$$

Во всяком предгильбертовом пространстве имеет место неравенство

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y); \tag{1}$$

его называют *неравенством Коши–Буняковского.*

При $y = 0$ это неравенство очевидно; при $y \neq 0$ оно непосредственно вытекает из неравенства

$$(x, x) - \overline{\lambda}(x, y) - \lambda\overline{(x, y)} + \lambda\overline{\lambda}(y, y) = (x - \lambda y, x - \lambda y) \geqslant 0, \tag{1$'$}$$

если положить $\lambda = \dfrac{(x, y)}{(y, y)}$. Отсюда видно также, что знак равенства в (1) имеет место тогда и только тогда, когда $x = \lambda y$ или $y = 0$.

В предгильбертовом пространстве можно ввести норму, положив

$$|x| = \sqrt{(x, x)}. \tag{2}$$

При этом все аксиомы нормы будут выполнены, т. е. $|x| \geqslant 0$; $|x| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$; $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$; $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ (см. п. 1 § 4). Первые три свойства очевидны, а последнее следует из неравенства Коши–Буняковского; именно:

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + (x, y) + (y, x) + (y, y) \leqslant$$
$$\leqslant (x, x) + 2\sqrt{(x, x)(y, y)} + (y, y) = (|x| + |y|)^2.$$

Следовательно, при определении нормы по формуле (2) R — нормированное пространство.

В некоторых случаях приходится рассматривать функцию (x, y) в линейном пространстве R, удовлетворяющую условиям 2)–4), но, может быть, не удовлетворяющую условию 1). Такую функцию называют *эрмитовой формой* в R. Эрмитову форму (x, y) называют *положительно определенной*, если $(x, x) \geqslant 0$. Неравенство (1) остается справедливым для любой положительно определенной эрмитовой формы (x, y), и потому $p(x) = (x, x)$ есть полунорма. Действительно, если $(y, y) > 0$, то повторяем рассуждение при выводе неравенства (1). Если $(y, y) = 0$, но $(x, x) > 0$, то меняем в этом рассуждении x и y ролями. Наконец, если $(x, x) = (y, y) = 0$, то, полагая $\lambda = (x, y)$ в полученном из (1$'$) неравенстве

$$-\overline{\lambda}(x, y) - \lambda\overline{(x, y)} \geqslant 0,$$

заключаем, что $-2|(x, y)|^2 \geqslant 0$, следовательно, $(x, y) = 0$ и неравенство (1), очевидно, выполняется [1]). Применяя поэтому к R предложение I п. 1 § 4, мы приходим к следующему результату.

I. *Если (x, y) — положительно определенная эрмитова форма в линейном пространстве R, а $\mathfrak{M}$ — подпространство всех векторов $x \in R$, на которых $(x, x) = 0$, то формула*

$$(\xi, \eta) = (x, y), \quad \text{где} \quad x \in \xi, \quad y \in \eta,$$

определяет скалярное произведение в $R/\mathfrak{M}$.

Пусть снова (x, y) — скалярное произведение. Очевидно, неравенство (1) можно переписать в виде

$$|(x, y)| \leqslant |x||y|.$$

Из него следует, что *скалярное произведение (x, y) есть непрерывная функция по совокупности переменных x, y* (в топологии, определенной нормой в R). Действительно,

$$|(x + \Delta x, y + \Delta y) - (x, y)| = |(x, \Delta y) + (\Delta x, y) + (\Delta x, \Delta y)| \leqslant \\ \leqslant |x||\Delta y| + |y||\Delta x| + |\Delta x||\Delta y|. \quad (3)$$

Гильбертовым пространством называют предгильбертово пространство, полное в смысле нормы $|x| = \sqrt{(x, x)}$.

Гильбертово пространство мы будем обычно обозначать буквой $\mathfrak{H}$.

II. *Всякое предгильбертово пространство R можно пополнить до гильбертова пространства.*

Действительно, R есть нормированное пространство с нормой $|x| = \sqrt{(x, x)}$ и потому его можно пополнить до полного нормированного пространства $\widetilde{R}$ (см. II п. 1 § 4). Докажем, что скалярное произведение (x, y) можно доопределить в R с сохранением формулы $|x| = \sqrt{(x, x)}$; тем самым наше предложение будет доказано.

Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ — фундаментальные последовательности в R, сходящиеся к $x_0, y_0 \in \widetilde{R}$ соответственно. Полагая в (3) $x = x_n$, $y = y_n$ и $x + \Delta x = x_m$, $y + \Delta y = y_m$, мы заключаем, что $\{(x_n, y_n)\}$ есть

---

[1]) Фактически мы доказали, что неравенство

$$|b|^2 \leqslant ac \quad (2')$$

есть необходимое условие неотрицательности формы

$$F(\xi, \eta) = a|\xi|^2 + b\xi\overline{\eta} + \overline{b}\,\overline{\xi}\eta + c|\eta|^2$$

при любых комплексных ξ и η. Это условие вместе с неравенствами $a \geqslant 0$, $c \geqslant 0$ также достаточно для неотрицательности формы $F(\xi, \eta)$. Действительно, если, например, $a = 0$, то в силу $(2')$ также $b = 0$ и $F(\xi, \eta) = c|\eta|^2 \geqslant 0$. Если же $a > 0$, то в силу $(2')$

$$F(\xi, \eta) = \left|\sqrt{a}\xi + \frac{\overline{b}}{\sqrt{a}}\,\eta\right|^2 + \frac{1}{a}\,(ac - |b|^2)|\eta|^2 \geqslant 0.$$

фундаментальная числовая последовательность и потому имеет предел. Положим

$$(x_0, y_0) = \lim_{n\to\infty} (x_n, y_n);$$

из (3) легко следует, что (x_0, y_0) не зависит от выбора фундаментальных последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, сходящихся к x_0, y_0. Переходя к пределу в соотношениях

$$(y_n, x_n) = \overline{(x_n, y_n)}, \quad (\lambda x_n, y_n) = \lambda(x_n, y_n),$$
$$(x_n + y_n, z_n) = (x_n, z_n) + (y_n, z_n), \quad \text{где} \quad z_n \in R \quad \text{и} \quad z_n \to z_0 \in \widetilde{R},$$

и

$$|x_n| = \sqrt{(x_n, x_n)},$$

убеждаемся в том, что (x_0, y_0) удовлетворяет условиям 2)–4) и что $|x_0| = \sqrt{(x_0, x_0)}$ для всех $x_0, y_0 \in \widetilde{R}$. Так как $(x_0, x_0) = |x_0|^2$, то условие 1) также выполняется.

Если $\mathfrak{M}$ — замкнутое подпространство в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, то скалярное произведение, заданное во всем $\mathfrak{H}$, задано, в частности, в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}$ полно относительно нормы, определенной этим скалярным произведением. Следовательно,

III. *Всякое замкнутое подпространство гильбертова пространства есть также гильбертово пространство.*

Пример. Пространство l^2 (см. пример 3 п. 1 § 4) есть гильбертово пространство, если скалярное произведение его элементов $x = \{x_n\}$, $y = \{y_n\}$ определить по формуле

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y}_n; \tag{4}$$

сходимость ряда в правой части формулы (4) следует из неравенства

$$|x_n \overline{y}_n| \leqslant \frac{1}{2}\,(|x_n|^2 + |y_n|^2).$$

Другие примеры гильбертова пространства см. ниже в п. 4 и в § 6.

2. Проекция вектора на подпространство. Два вектора в предгильбертовом пространстве R называют *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

Тот факт, что векторы x и y ортогональны, обозначают так: $x \perp y$. Два множества в предгильбертовом пространстве R называют *ортогональными друг к другу*, если каждый вектор первого множества ортогонален к каждому вектору второго множества. Ортогональность двух множеств S_1, $S_2 \subset R$ обозначается так: $S_1 \perp S_2$. Легко проверить, что *совокупность всех векторов, ортогональных к некоторому множеству $S \subset R$, есть замкнутое подпространство в R.* Это подпространство называют *ортогональным дополнением* в R и обозначают $R \ominus S$.

I. Неравенство Беппо Леви (Beppo Levi). *Пусть* $\mathfrak{M}$ — *подпространство в предгильбертовом пространстве* R, *а* x — *вектор в* R, *отстоящий от* $\mathfrak{M}$ *на расстоянии* d; *тогда для любых двух векторов* y_1, $y_2 \in \mathfrak{M}$

$$|y_1 - y_2| \leqslant \sqrt{|x - y_1|^2 - d^2} + \sqrt{|x - y_2|^2 - d^2}. \tag{1}$$

Доказательство. Положим $z_1 = x - y_1$, $z_2 = x - y_2$; при любом комплексном $\lambda \neq 1$ вектор

$$\frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}$$

принадлежит $\mathfrak{M}$, и потому

$$\left| x - \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} \right|^2 \geqslant d^2,$$

т. е.

$$|z_1 - \lambda z_2|^2 \geqslant d^2 |1 - \lambda|^2, \tag{2}$$

$$[(z_1, z_1) - d^2] - \overline{\lambda}[(z_1, z_2) - d^2] - \lambda[(z_2, z_1) - d^2] + \\ + \lambda\overline{\lambda}[(z_2, z_2) - d^2] \geqslant 0. \tag{3}$$

Очевидно (2), а значит и (3), имеет также место при $\lambda = 1$. Отсюда, повторяя рассуждение, проведенное на с. 108, получим, что

$$|(z_1, z_2) - d^2|^2 \leqslant [(z_1, z_1) - d^2][(z_2, z_2) - d^2]. \tag{4}$$

Но

$$\begin{aligned} |y_1 - y_2|^2 &= |z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2, z_1 - z_2) = \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 - (z_1, z_2) - (z_2, z_1) = \\ &= [|z_1|^2 - d^2] + [|z_2|^2 - d^2] - [(z_1, z_2) - d^2] - [(z_2, z_1) - d^2] \leqslant \\ &\leqslant [|z_1|^2 - d^2] + [|z_2|^2 - d^2] + 2|(z_1, z_2) - d^2|; \end{aligned}$$

следовательно, в силу (4)

$$|y_1 - y_2|^2 \leqslant [|z_1|^2 - d^2] + [|z_2|^2 - d^2] + \\ + 2\sqrt{[|z_1|^2 - d^2][|z_2|^2 - d^2]} = \left(\sqrt{|z_1|^2 - d^2} + \sqrt{|z_2|^2 - d^2}\right)^2,$$

а отсюда следует неравенство (1).

II. *Если* $\mathfrak{M}$ — *замкнутое подпространство в гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$, *а* x — *произвольный вектор в* $\mathfrak{H}$, *то в* $\mathfrak{M}$ *существует и притом только один вектор* x' *такой, что* $x - x' \perp \mathfrak{M}$.

Доказательство. Положим

$$d = \inf_{y \in \mathfrak{M}} |x - y|;$$

существует последовательность $y_n \in \mathfrak{M}$ такая, что

$$d = \lim_{n\to\infty} |x - y_n|. \tag{5}$$

Неравенство Беппо Леви

$$|y_n - y_m| \leqslant \sqrt{|x - y_n|^2 - d^2} + \sqrt{|x - y_m|^2 - d^2}$$

показывает, что $\{y_n\}$ — фундаментальная последовательность и потому имеет предел; обозначим его x'. Очевидно, $x' \in \mathfrak{M}$, ибо $\mathfrak{M}$ замкнуто. Переходя в (5) к пределу, получим

$$d = |x - x'|.$$

Докажем, что $x - x' \perp \mathfrak{M}$, т. е. что

$$(x - x', y) = 0 \quad \text{для всех} \quad y \in \mathfrak{M}.$$

Положим $x - x' = x''$ и

$$t = -\frac{(x'', y)}{(y, y)}. \tag{6}$$

Так как $x' - ty \in \mathfrak{M}$, то

$$d^2 \leqslant |x - (x' - ty)|^2 = |x'' + ty|^2 = (x'' + ty, x'' + ty) = \\ = (x'', x'') + \bar{t}(x'', y) + t(y, x'') + t\bar{t}(y, y).$$

Подставляя сюда значение t из (6) и вспоминая, что $(x'', x'') = d^2$, получаем:

$$-\frac{|(x'', y)|^2}{(y, y)} \geqslant 0;$$

следовательно, $(x'', y) = 0$.

Остается доказать единственность вектора x'.

Предположим, что также $x = y' + y''$, где $y' \in \mathfrak{M}$, $y'' \perp \mathfrak{M}$. Тогда $x' + x'' = y' + y''$, следовательно,

$$x' - y' = y'' - x'',$$

где $x' - y' \in \mathfrak{M}$, $y'' - x'' \perp \mathfrak{M}$. Но в таком случае $x' - y'$ ортогонален к самому себе, т. е.

$$(x' - y', x' - y') = 0,$$

и потому $x' - y' = 0$, $x' = y'$.

Вектор $x' \perp \mathfrak{M}$, для которого $x - x' \perp \mathfrak{M}$, называют *проекцией вектора x на подпространство $\mathfrak{M}$*.

Понятие проекции вдпускает особенно простую интерпретацию в трехмерном пространстве.

Пусть, например, $\mathfrak{M}$ — совокупность всех векторов, исходящих из начала координат и лежащих в одной плоскости π (рис. 3). Тогда формула $x = x' + x''$ представляет собой разложение произвольного вектора x на две составляющие: x' и x'', из которых первая лежит в плоскости π, а вторая $\perp \pi$.

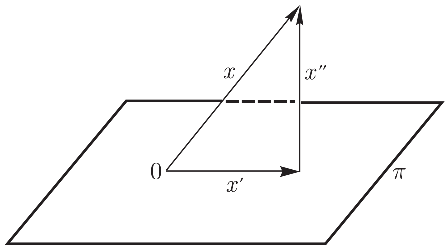

Рис. 3.

Следовательно, в этом случае данное нами определение проекции совпадает с обычным определением проекции вектора на плоскость.

Очевидно, предложение II можно сформулировать следующим образом.

II′. *Если $\mathfrak{M}$ — замкнутое подпространство в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, то всякий вектор $x \in \mathfrak{H}$ можно и притом единственным образом представить в виде $x = x' + x''$, где $x' \in \mathfrak{M}$, $x'' \in \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}$.*

Если, в частности, $x \perp \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}$, то также $x'' = x - x' \perp \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}$; так как, с другой стороны, $x'' \in \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}$, то $x'' = 0$ и $x = x' \in \mathfrak{M}$. Другими словами:

III. *Замкнутое подпространство $\mathfrak{M}$ есть ортогональное дополнение своего ортогонального дополнения $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}$:*

$$\mathfrak{H} \ominus (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}) = \mathfrak{M}. \tag{7}$$

Отметим еще следующее важное следствие предложения II.

IV. *Подпространство $\mathfrak{M}$ тогда и только тогда плотно в $\mathfrak{H}$, когда в $\mathfrak{H}$ не существует ненулевого вектора, ортогонального к $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Замыкание $\mathfrak{M}$ есть замкнутое подпространство в $\mathfrak{H}$, совпадающее с $\mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}$ плотно в $\mathfrak{H}$. Следовательно, если $\mathfrak{M}$ плотно в $\mathfrak{H}$, то всякий вектор x, ортогональный к $\mathfrak{M}$, ортогонален также к $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{H}$ и потому равен нулю. Обратно, если всякий вектор x, ортогональный к $\mathfrak{M}$ (а значит, и к $\overline{\mathfrak{M}}$), равен нулю, то $\mathfrak{H} \ominus \overline{\mathfrak{M}} = (0)$ и формула (7) дает $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{H} \ominus (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}) = \mathfrak{H} \ominus \{0\} = \mathfrak{H}$.

3. Ограниченные линейные функционалы в гильбертовом пространстве.

Теорема Ф. Рисса. *Всякий ограниченный линейный функционал f в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ представляется и притом единственным образом в виде*

$$f(x) = (x, y), \tag{1}$$

где y — фиксированный вектор в $\mathfrak{H}$. При этом

$$|f| = |y|. \tag{2}$$

Обратно, при любом $y \in \mathfrak{H}$ формула (1) *определяет ограниченный линейный функционал в $\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{M}$ совокупность всех векторов x, для которых $f(x) = 0$; очевидно, $\mathfrak{M}$ — замкнутое подпространство в $\mathfrak{H}$. Если $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$, то $f = 0$ и (1) выполняется при $y = 0$. Рассмотрим поэтому тот случай, когда $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{H}$. В силу III п. 2 в этом случае $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M} \neq (0)$ и потому в $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}$ существует вектор $z \neq 0$. Очевидно, $f(z) \neq 0$, ибо в противном случае вектор z принадлежал бы $\mathfrak{M}$. Вектор $u = x - \frac{f(x)}{f(z)}\, z$ принадлежит $\mathfrak{M}$, ибо

$$f(u) = f(x) - \frac{f(x)}{f(z)}\, f(z) = 0;$$

следовательно, $u \perp z$. Это означает, что $(u, z) = 0$, т. е.

$$(x, z) - \frac{f(x)}{f(z)}\, (z, z) = 0.$$

Отсюда

$$f(x) = \left(x, \frac{\overline{f(z)}z}{(z, z)}\right),$$

так что вектор $y = \frac{\overline{f(z)}}{(z, z)}\, z$ удовлетворяет соотношению (1).

Единственность вектора y очевидна, ибо если также $f(x) = (x, y')$, то $(x, y - y') = 0$ для всех $x \in \mathfrak{H}$; взяв $x = y - y'$, получим, что $y - y' = 0$, т. е. $y' = y$.

Остается доказать формулу (2). Но из (1) следует, что

$$|f(x)| = |(x, y)| \leqslant |x||y|,$$

причем знак равенства достигается при $x = y$, следовательно, $|f| = |y|$. Последнее утверждение теоремы очевидно (см. предыдущее неравенство).

Доказанная теорема означает, что существует сохраняющее норму соответствие $f \leftrightarrow y$ между ограниченными линейными функционалами f в $\mathfrak{H}$ и векторами $y \in \mathfrak{H}$. Нетрудно проверить, что если $f_1 \leftrightarrow y_1$ и $f_2 \leftrightarrow y_2$, то $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \leftrightarrow \overline{\alpha}_1 y_1 + \overline{\alpha}_2 y_2$; такое соответствие называют *антилинейным*.

Пусть $\mathfrak{H}_1$ — подпространство в $\mathfrak{H}$. Функцию $(x, y)_1$, заданную для всех $x, y \in \mathfrak{H}_1$, называют *билинейной формой* [1]), если:

---

[1]) Термин «билинейная форма» не совсем точен в силу условия 4); тем не менее мы будем им пользоваться, поскольку он общепринят. В книге Н. Бурбаки [4] вместо него применяется термин «полуторалинейная форма».

1) $(x_1+x_2,\, y)_1 = (x_1,\, y)_1 + (x_2,\, y)_1$,
2) $(x,\, y_1+y_2)_1 = (x,\, y_1)_1 + (x,\, y_2)_1$,
3) $(\alpha x,\, y)_1 = \alpha(x,\, y)_1$,
4) $(x,\, \alpha y)_1 = \overline{\alpha}(x,\, y)_1$

для всех $x,\, y,\, x_1,\, y_1,\, x_2,\, y_2 \in \mathfrak{H}_1$ и всех чисел α. Очевидно, билинейная форма эрмитова тогда и только тогда, когда $(y,\, x)_1 = \overline{(x,\, y)_1}$.

Билинейную форму $(x,\, y)_1$, заданную на подпространстве $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$, называют *ограниченной*, если

$$|(x,\, y)_1| \leqslant C|x||y|, \tag{3}$$

где C — некоторая постоянная. Из теоремы Ф. Рисса вытекает

Следствие. *Всякая ограниченная билинейная форма $(x, y)_1$, заданная на подпространстве $\mathfrak{H}_1$, плотном в $\mathfrak{H}$, представляется и притом единственным образом в виде*

$$(x,\, y)_1 = (x,\, Ay), \quad x, y \in \mathfrak{H}_1, \tag{4}$$

где A — ограниченный оператор в $\mathfrak{H}$ с областью определения $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{H}$. Следовательно, $(x, y)_1$ продолжается с сохранением неравенства (3) *до ограниченной билинейной формы во всем пространстве $\mathfrak{H}$.*

Доказательство. Из неравенства (3) вытекает, что при фиксированном y форма $(x,\, y)_1$ есть ограниченный линейный функционал в $\mathfrak{H}_1$ и потому продолжается единственным образом до ограниченного линейного функционала в $\mathfrak{H}$ (см. II п. 4 § 4). На основании теоремы Ф. Рисса $(x,\, y)_1 = (x,\, y')$, где $y' \in \mathfrak{H}$ и

$$|y'| \leqslant C|y|. \tag{5}$$

Положим $y' = Ay$; очевидно, оператор A линеен и в силу (5) ограничен, причем $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{H}_1$. Следовательно, он продолжается с сохранением неравенства (5) до ограниченного линейного оператора с областью определения $\overline{\mathfrak{D}}_A = \mathfrak{H}$. При этом

$$(x,\, Ay) = (x,\, y') = (x,\, y)_1 \quad \text{для всех} \quad x, y \in \mathfrak{H}_1.$$

Последнее утверждение следствия вытекает из того, что $(x,\, Ay)$ определено для всех $x,\, y \in \mathfrak{H}$ и $|A| \leqslant C$.

4. Ортогональные системы векторов в гильбертовом пространстве. Множество векторов гильбертова пространства называют *ортогональной системой*, если каждые два различных вектора этого множества ортогональны.

I. *Если $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_n$ — ортогональная система, то*

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2.$$

Действительно, $(x_j, x_k) = 0$, при $j \neq k$, и потому

$$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n|^2 = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n, x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \\ = (x_1, x_1) + (x_2, x_2) + \ldots + (x_n, x_n) = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2.$$

II. *Если* $\{x_n\}$ *— счетная ортогональная система, то ряд*

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots \tag{1}$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \ldots. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть s_n — сумма первых n членов ряда (1), а σ_n — сумма первых n членов ряда (2). Тогда в силу I

$$|s_{n+p} - s_n|^2 = |x_{n+1} + \ldots + x_{n+p}|^2 = \\ = |x_{n+1}|^2 + \ldots + |x_{n+p}|^2 = \sigma_{n+p} - \sigma_n,$$

так что $\{s_n\}$ — фундаментальная последовательность в $\mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда $\{\sigma_n\}$ — фундаментальная числовая последовательность.

Вектор x называют *нормированным*, если $|x| = 1$. Если $x \neq 0$, то вектор $y = \frac{1}{|x|}x$ — нормированный. Переход от x к y называют *нормированием вектора* x. Ортогональную систему, все векторы которой нормированы, называют *ортонормальной системой*.

Если e — элемент ортонормальной системы, то скалярное произведение

$$\alpha = (x, e)$$

называется *коэффициентом Фурье вектора* x *относительно элемента* e.

III. *Если* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ *— векторы ортонормальной системы и*

$$\alpha_k = (x, e_k), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

— соответствующие коэффициенты Фурье, то

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \leqslant |x|^2. \tag{4}$$

Доказательство. Положим

$$y = x - \sum_{k=1}^{n} a_k e_k.$$

Из (3) легко следует, что $y \perp e_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и потому векторы $\alpha_1 e_1, \ldots, \alpha_n e_n, y$ образуют ортогональную систему; следовательно, в силу I

$$|x|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k e_k|^2 + |y|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 + |y|^2,$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \leqslant |x|^2.$$

Неравенство (4) называют *неравенством Бесселя*. Из этого неравенства непосредственно следует, что

IV. *Всякий вектор x имеет не более счетного числа отличных от нуля коэффициентов Фурье относительно фиксированной ортонормальной системы.*

Далее,

V. *Если $e_1, e_2, e_3, \ldots$ — счетная ортонормальная система в $\mathfrak{H}$ и $\alpha_k = (x, e_k)$, $k = 1, 2, 3, \ldots,$ — соответствующие коэффициенты Фурье вектора $x \in \mathfrak{H}$, то ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \tag{5}$$

сходится в $\mathfrak{H}$ и разность $x - \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ есть вектор, ортогональный ко всем векторам $e_1, e_2, \ldots$.

Доказательство. Из II и (4) следует, что ряд (5) сходится. Далее,

$$\left(x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, e_p\right) = 0 \quad \text{при} \quad n > p;$$

переходя в этом равенстве к пределу и пользуясь непрерывностью скалярного произведения (см. п. 1), заключаем, что

$$\left(x - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, e_p\right) = 0 \quad \text{для всех} \quad p = 1, 2, 3, \ldots.$$

Пусть теперь $\{e_\nu\}$ — произвольная ортонормальная система в $\mathfrak{H}$ (ν — индекс, пробегающий произвольное множество). В силу IV для каждого $x \in \mathfrak{H}$ в $\{e_\nu\}$ существует не более счетного числа элементов таких, что $(x, e_\nu) \neq 0$; пусть это будут элементы e_{ν_k}, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Условимся писать $\sum\limits_{\nu} \alpha_\nu e_\nu$ вместо $\sum\limits_{k} a_{\nu_k} e_{\nu_k}$; в силу V этот ряд сходится и вектор $x - \sum\limits_{\nu} \alpha_\nu e_\nu$ ортогонален ко всем e_ν.

Ортонормальную систему называют *полной*, если не существует ненулевого вектора, ортогонального ко всем векторам этой системы. Другими словами, полнота системы означает, что эту систему нельзя дополнить до более широкой ортонормальной системы путем присоединения новых элементов.

В силу IV п. 2 справедливо следующее утверждение.

VI. *Ортонормальная система полна тогда и только тогда, когда подпространство, на нее натянутое, плотно в* $\mathfrak{H}$.

VII. *Во всяком (ненулевом) гильбертовом пространстве существует полная ортонормальная система.*

Доказательство. Рассмотрим в $\mathfrak{H}$ всевозможные ортонормальные системы; при $\mathfrak{H} \neq (0)$ такие системы существуют, например, системы, состоящие из одного нормированного элемента. Для двух таких систем $\{e_\nu\}$, $\{e'_\mu\}$ условимся писать $\{e_\nu\} \prec \{e'_\mu\}$, если каждое e_ν есть некоторое e'_μ. Тогда совокупность всех ортонормальных систем в $\mathfrak{H}$ станет частично упорядоченным множеством, удовлетворяющим условию леммы Цорна (см. добавление I); именно, верхней гранью линейно упорядоченного множества ортонормальных систем является ортонормальная система, полученная объединением всех ортонормальных систем этого множества. На основании леммы Цорна в $\mathfrak{H}$ существует максимальная ортонормальная система. Она и будет полной ортонормальной системой в $\mathfrak{H}$.

Отметим, что в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ можно обойтись без применения леммы Цорна. Действительно, пусть $\{x_n\}$ — последовательность, плотная в $\mathfrak{H}$. Выбросим из этой последовательности каждый вектор x_n, который является линейной комбинацией предыдущих векторов $x_1, \ldots, x_{n-1}$; мы получим новую конечную или бесконечную последовательность, — обозначим ее $\{y_n\}$, — в которой никакой вектор y_n не является линейной комбинацией предыдущих и линейная оболочка которой содержит $\{x_n\}$ и потому плотна в $\mathfrak{H}$.

Пусть $\mathfrak{M}_n$ — подпространство, натянутое на $y_1, y_2, \ldots, y_n$; обозначим через y'_{n+1} проекцию вектора y_{n+1} на $\mathfrak{M}_n$ и положим [1]

$$e_1 = \frac{1}{|y_1|}\, y_1,\; e_{n+1} = \frac{1}{|y_{n+1} - y'_{n+1}|}\,(y_{n+1} - y'_{n+1}), \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{6}$$

[1] Построение векторов e_n по формулам (6) называют *процессом ортогонализации*. Мы предоставляем читателю доказательство следующих формул:

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{D_{n-1}D_n}} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ (y_1, y_1) & (y_2, y_1) & \ldots & (y_n, y_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (y_1, y_{n-1}) & (y_2, y_{n-1}) & \ldots & (y_n, y_{n-1}) \end{vmatrix},$$

где

$$D_n = \begin{vmatrix} (y_1, y_1) & (y_2, y_1) & \ldots & (y_n, y_1) \\ (y_1, y_2) & (y_2, y_2) & \ldots & (y_n, y_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (y_1, y_n) & (y_2, y_n) & \ldots & (y_n, y_n) \end{vmatrix}.$$

Тогда векторы $\{e_n\}$ образуют конечную или счетную ортонормальную систему, линейная оболочка которой совпадает с линейной оболочкой векторов y_n и потому плотна в $\mathfrak{H}$; следовательно, в силу VI система $\{e_n\}$ полна в $\mathfrak{H}$. Одновременно мы доказали, что

VIII. *В сепарабельном гильбертовом пространстве существует конечная или счетная полная ортонормальная система.*

Очевидно, верно и обратное утверждение. Именно, *если в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ существует конечная или счетная полная ортонормальная система $\{e_n\}$, то $\mathfrak{H}$ сепарабельно*. Действительно, конечные линейные комбинации векторов e_n с рациональными коэффициентами образуют счетное множество, плотное в $\mathfrak{H}$.

IX. *Для ортонормальной системы $\{e_\nu\}$ в $\mathfrak{H}$ следующие утверждения эквивалентны*:

1) $\{e_\nu\}$ *полна в* $\mathfrak{H}$;

2) *всякий вектор $x \in \mathfrak{H}$ представляется в виде*

$$x = \sum_\nu \alpha_\nu e_\nu, \quad \textit{где} \quad \alpha_\nu = (x, e_\nu); \tag{7}$$

3) *для всякого вектора $x \in \mathfrak{H}$*

$$|x|^2 = \sum_\nu |\alpha_\nu|^2; \tag{8}$$

4) *для всяких двух векторов $x, y \in \mathfrak{H}$*

$$(x, y) = \sum_\nu \alpha_\nu \overline{\beta}_\nu, \quad \textit{где} \quad \alpha_\nu = (x, e_\nu), \quad \beta_\nu = (y, e_\nu). \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $\{e_\nu\}$ полна; по доказанному в V, вектор $x - \sum\limits_\nu \alpha_\nu e_\nu$ ортогонален ко всем e_ν и потому равен нулю; следовательно, из 1) следует 2). Пусть имеет место 2); умножая обе части равенства (7) скалярно на y и пользуясь непрерывностью скалярного произведения, получаем (9); следовательно, из 2) следует 4).

Пусть имеет место 4); полагая в (9) $y = x$, получаем (8); следовательно, из 4) следует 3). Пусть имеет место 3) и пусть вектор x ортогонален ко всем e_ν; тогда все $\alpha_\nu = 0$, так что $|x|^2 = 0$, и потому $x = 0$. Таким образом, всякий вектор x, ортогональный ко всем e_ν, равен нулю, т. е. $\{e_\nu\}$ полна; значит, из 3) следует 1), и предложение IX доказано.

X. *Все полные ортонормальные системы в данном гильбертовом пространстве имеют одинаковую мощность.*

Доказательство. В конечномерном пространстве полная ортонормальная система есть базис этого пространства и, следовательно, число ее элементов равно размерности пространства. Поэтому мы можем считать данное гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ бесконечномерным.

Пусть $\{e_\nu\}$ и $\{e'_\mu\}$ — две полные ортонормальные системы в $\mathfrak{H}$ и пусть $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ — их мощности. При фиксированном ν скалярное произведение (e_ν, e'_μ) отлично от нуля хотя бы при одном μ (ибо $\{e'_\mu\}$ полна) и в силу IV не более чем для счетного множества значений μ. Каждому e_ν поставим в соответствие e'_μ такие, что $(e_\nu, e'_\mu) \neq 0$; это соответствие есть не менее чем однозначное и не более чем счетнозначное отображение $\{e_\nu\}$ на $\{e'_\mu\}$. Следовательно, $\mathfrak{a} \geqslant \mathfrak{b}$. Меняя ролями $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$, получим, что $\mathfrak{b} \geqslant \mathfrak{a}$, и потому $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$.

Мощность полной ортонормальной системы в $\mathfrak{H}$ называют *размерностью* $\mathfrak{H}$ и обозначают $\dim \mathfrak{H}$.

Линейный оператор A из гильбертова пространства $\mathfrak{H}_1$ в гильбертово пространство $\mathfrak{H}_2$ называют *изометрическим*, если он не изменяет скалярное произведение, т. е. если $(Ax, Ay) = (x, y)$ для всех x, $y \in \mathfrak{D}_A$. Изометрический оператор A в $\mathfrak{H}$ называют *унитарным*, если $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{R}_A = \mathfrak{H}$. Два гильбертовых пространства $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ называют *изометричными*, если существует изометрический оператор A с $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{R}_A = \mathfrak{H}_2$. В этом случае говорят, что A *осуществляет изометрическое отображение* $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}_2$ [1]).

XI. *Два гильбертовых пространства изометричны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую размерность.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Обратно, пусть $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{H}''$ — два гильбертовых пространства одинаковой размерности, а $\{e'_\nu\}$, $\{e''_\nu\}$ — полные ортонормальные системы в $\mathfrak{H}'$ и $\mathfrak{H}''$ соответственно; по условию их мощности равны, так что множество индексов можно считать для обеих систем одним и тем же. Каждому вектору $f' = \sum\limits_\nu \alpha_\nu e'_\nu$ в $\mathfrak{H}'$ поставим в соответствие вектор $f'' = \sum\limits_\nu \alpha_\nu e''_\nu$ с теми же коэффициентами Фурье. В силу предложения II и формул (8)–(9) это соответствие есть изометрическое отображение пространства $\mathfrak{H}'$ на все пространство $\mathfrak{H}''$, так что $\mathfrak{H}'$ и $\mathfrak{H}''$ изометричны.

Пример. Пусть $\{\nu\}$ — произвольное множество мощности $\mathfrak{a}$. Рассмотрим всевозможные числовые функции $x = \{x_\nu\}$, $\nu \in \{\nu\}$, обладающие свойствами:

1) $\{x_\nu\}$ отлична от нуля лишь для счетного числа элементов ν;
2) ряд $\sum\limits_\nu |x_\nu|^2$ сходится.

Обозначим через $l^2_\mathfrak{a}$ совокупность всех таких функций $x = \{x_\nu\}$ и определим в $l^2_\mathfrak{a}$ операции умножения на число, сложения и скалярное

---

[1]) Это понятие изометрии совпадает в данном случае с понятием изометрии нормированных пространств (см. п. 1 § 4), так как скалярное произведение выражается через норму по формуле

$$(x, y) = \frac{1}{4}\,\{|x+y|^2 - |x-y|^2 + i|x+iy|^2 - i|x-iy|^2\}.$$

произведение формулами

$$\alpha x = \{\alpha x_\nu\}, \quad x + y = \{x_\nu + y_\nu\}, \quad (x, y) = \sum_\nu x_\nu \overline{y}_\nu$$

при $x = \{x_\nu\} \in l^2_{\mathfrak{a}}$, $y = \{y_\nu\} \in l^2_{\mathfrak{a}}$. Повторяя обычные рассуждения (см. пример п. 1), можно показать, что $l^2_{\mathfrak{a}}$ — гильбертово пространство. Простейшая полная ортонормальная система в $l^2_{\mathfrak{a}}$ получается, если положить $e_{\nu_0} = \{\delta_{\nu\nu_0}\}$, где $\delta_{\nu\nu_0} = 0$ при $\nu \neq \nu_0$ и $\delta_{\nu_0\nu_0} = 1$. Ее мощность равна $\mathfrak{a}$ и, следовательно, $l^2_{\mathfrak{a}}$ есть гильбертово пространство размерности $\mathfrak{a}$.

Этот пример показывает, что *существуют гильбертовы пространства какой угодно размерности.*

5. Ортогональная сумма подпространств. Пусть $\mathfrak{M}_\nu$ — замкнутые взаимно ортогональные подпространства в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Минимальное замкнутое пространство, содержащее все $\mathfrak{M}_\nu$, называют *ортогональной суммой* подпространств $\mathfrak{M}_\nu$ и обозначают через $\bigoplus\limits_\nu \mathfrak{M}_\nu$. Если подпространств $\mathfrak{M}_\nu$ — конечное число, например, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, ..., $\mathfrak{M}_n$, или счетное число, например, $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, ..., то применяются также обозначения

$$\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_n$$

и

$$\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{M}_3 \oplus \ldots$$

соответственно.

Выясним, из каких векторов состоит ортогональная сумма подпространств.

I. *Ортогональная сумма* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_n$ *конечного числа подпространств есть совокупность всех векторов*

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \quad x_k \in \mathfrak{M}_k.$$

Доказательство. Каждый такой вектор принадлежит $\mathfrak{M}$. Обратно, если $x \in \mathfrak{M}$, то, обозначая через x_k проекцию x на $\mathfrak{M}_k$, мы получим, что вектор $x - (x_1 + \ldots + x_n)$, с одной стороны, принадлежит $\mathfrak{M}$, с другой же стороны, ортогонален к каждому $\mathfrak{M}_k$ (так как может быть записан в виде суммы $(x - x_k) + (-x_1) + \ldots + (-x_{k-1}) + (-x_{k+1}) + \ldots + (-x_n)$, каждое слагаемое которой $\perp \mathfrak{M}_k$), а поэтому и к $\mathfrak{M}$. Следовательно, этот вектор равен нулю, и потому $x = x_1 + \ldots + x_n$.

II. *Ортогональная сумма* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{M}_3 \oplus \ldots$ *счетного числа подпространств есть совокупность всех векторов*

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots,$$

где $x_k \in \mathfrak{M}_k$ *и ряд в правой части сходится.*

Доказательство. Каждый такой вектор принадлежит $\mathfrak{M}$. Обратно, пусть $x \in \mathfrak{M}$ и пусть x' — проекция x на $\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_n$; в силу I $x' = x_1 + \ldots + x_n$, где $x_k \in \mathfrak{M}_k$. Отсюда

$$|x_1 + \ldots + x_n|^2 = |x'|^2 \leqslant |x|^2,$$

т. е.

$$|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 \leqslant |x|^2.$$

Поэтому ряд $|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots$, а следовательно, и ряд $x_1 + x_2 + \ldots$ сходятся; разность $x - (x_1 + x_2 + \ldots)$ принадлежит $\mathfrak{M}$ и ортогональна к каждому $\mathfrak{M}_k$, а значит к $\mathfrak{M}$, и потому равна нулю.

III. *Ортогональная сумма* $\mathfrak{M} = \bigoplus\limits_\nu \mathfrak{M}_\nu$ *произвольного числа подпространств есть совокупность всех векторов* $x = \sum\limits_\nu x_\nu$, *где*:

1) $x_\nu \in \mathfrak{M}_\nu$;

2) x_ν *отлично от нуля лишь для конечного или счетного числа индексов* ν;

3) *ряд* $\sum\limits_\nu x_\nu$ *сходится*.

Доказательство. Очевидно, каждый такой вектор принадлежит $\mathfrak{M}$. Обратно, если $x \in \mathfrak{M}$, то x есть предел конечных линейных комбинаций векторов из $\mathfrak{M}_\nu$ и потому принадлежит ортогональной сумме счетного числа некоторых из $\mathfrak{M}_\nu$. Поэтому остается применить II.

Если $x = \sum\limits_\nu x_\nu$, $y = \sum\limits_\nu y_\nu$ — векторы из $\mathfrak{M} = \bigoplus\limits_\nu \mathfrak{M}_\nu$, то, очевидно,

$$\alpha x = \sum_\nu \alpha x_\nu, \quad x + y = \sum_\nu (x_\nu + y_\nu), \quad (x, y) = \sum_\nu (x_\nu, y_\nu).$$

6. Прямая сумма гильбертовых пространств. Определим сначала прямую сумму конечного числа гильбертовых пространств. Пусть $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_n$ — n гильбертовых пространств; обозначим через $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{H}_n$ совокупность всех систем $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, где $x_n \in \mathfrak{H}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Определим в $\mathfrak{H}$ сумму, произведение на число и скалярное произведение формулами

$$x + y = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n\},$$
$$\alpha x = \{\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n\}, \quad (x, y) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) + \ldots + (x_n, y_n),$$

где $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$. Легко проверить, что тогда $\mathfrak{H}$ станет гильбертовым пространством. Это пространство называют *прямой суммой* пространств $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_n$.

Пусть теперь дано счетное множество гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3, \ldots$; обозначим через $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_3 \oplus \ldots$ совокупность всех счетных систем $x = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, $x_k \in \mathfrak{H}_k$, таких, что

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$. Определим в $\mathfrak{H}$ сумму, произведение на число и скалярное произведение формулами

$$x + y = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots\},$$

$$\alpha x = \{\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots\}, \quad (x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k, y_k),$$

где $x = \{x_1, x_2, \ldots\} \in \mathfrak{H}$, $y = \{y_1, y_2, \ldots\} \in \mathfrak{H}$. Легко показать, что $\mathfrak{H}$ станет тогда гильбертовым пространством. Его называют *прямой суммой* пространств $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3, \ldots$.

Перейдем теперь к случаю произвольного, хотя бы и несчетного, множества гильбертовых пространств. Пусть $\mathfrak{N}$ — произвольное множество индексов ν и пусть каждому индексу ν поставлено в соответствие гильбертово пространство $\mathfrak{H}_\nu$. Если мы каждому индексу ν поставим в соответствие элемент x_ν пространства $\mathfrak{H}_\nu$, то получим комплекс $x = \{x_\nu\}$.

Рассмотрим совокупность $\mathfrak{H}$ всех таких комплексов $\{x_\nu\}$, удовлетворяющих следующим условиям:

1°. В $\{x_\nu\}$ имеется не более счетного числа элементов, отличных от нуля;

2°. Ряд $\sum |x_\nu|^2$ сходится.

Положим для элементов $x = \{x_\nu\}$, $y = \{y_\nu\}$ совокупности $\mathfrak{H}$:

$$x + y = \{x_\nu + y_\nu\}, \quad \alpha x = \{\alpha x_\nu\}, \quad (x, y) = \sum_{\nu} (x_\nu, y_\nu);$$

при этом определении основных операций $\mathfrak{H}$ образует гильбертово пространство, которое мы будем называть прямой суммой пространств $\mathfrak{H}_\nu$ и обозначать $\bigoplus\limits_{\nu} \mathfrak{H}_\nu$.

Элементы x_{ν_0} пространства $\mathfrak{H}_{\nu_0}$ можно отождествить с теми комплексами $x = \{x_\nu\}$, в которых $x_\nu = 0$ при $\nu \neq \nu_0$. Тогда $\mathfrak{H}_{\nu_0}$ станет подпространством пространства $\mathfrak{H} = \bigoplus\limits_{\nu} \mathfrak{H}_\nu$. Если проделать это для каждого $\nu \in \mathfrak{N}$, то пространство $\mathfrak{H}$ окажется прямой ортогональной суммой своих подпространств $\mathfrak{H}_\nu$.

Отметим, что некоторые из пространств $\mathfrak{H}_\nu$, или даже все, могут совпадать друг с другом; так, например, $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ есть совокупность всех пар $\{x_1, x_2\}$, где $x_1 \in \mathfrak{H}$ и $x_2 \in \mathfrak{H}$.

7. График оператора. Пусть A — оператор из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$, не обязательно линейный. Совокупность $\mathfrak{B}_A$ всех пар $\{x, Ax\}$, $x \in \mathfrak{D}_A$, в прямой сумме $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ называют *графиком оператора* A.

Понятие графика оператора является естественным обобщением обычного понятия графика функции одного вещественного переменного $y = f(x)$. Именно, обычный график есть не что иное, как совокупность всех точек $(x, f(x))$ плоскости, которую можно рассматривать как прямую сумму двух одномерных пространств.

Очевидно, что два оператора совпадают тогда и только тогда, когда их графики совпадают.

Множество $S \subset \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ *тогда и только тогда будет графиком некоторого оператора, когда из соотношений* $\{x, y\} = S$, $\{x, y'\} = S$ *следует* $y = y'$.

Действительно, всякий график удовлетворяет этому условию, ибо $y = Ax$; обратно, если это условие выполнено, то равенство $y = Ax$ определяет оператор A, графиком которого служит S. Легко также видеть, что *оператор* A *линеен тогда и только тогда, когда его график* $\mathfrak{B}_A$ *есть подпространство в* $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$.

8. Замкнутые операторы; замыкание оператора. Оператор A из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$ называют *замкнутым*, если его график $\mathfrak{B}_A$ замкнут в $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$.

Таким образом, замкнутость оператора A означает, что из соотношений

$$x_n \in \mathfrak{D}_A, \quad \{x_n, Ax_n\} \to \{x, y\}$$

следует соотношение $\{x, y\} \in \mathfrak{B}_A$, т. е. $x \in \mathfrak{D}_A$ и $y = Ax$. Другими словами, замкнутость оператора A означает, что из соотношений

$$x_n \in \mathfrak{D}_A, \quad x_n \to x, \quad Ax_n \to y$$

следуют соотношения $x \in \mathfrak{D}_A$ и $y = Ax$.

I. *Всякий ограниченный линейный оператор, определенный во всем пространстве* $\mathfrak{H}$, *замкнут.*

Действительно, такой оператор непрерывен и потому уже из соотношений $x_n \to x$ следует соотношение [1] $Ax_n \to Ax$. Поэтому если $Ax_n \to y$, то $Ax = y$.

Читатель легко убедится также в справедливости следующих предложений.

II. *Если оператор* A *замкнут, то оператор* $A - \lambda 1$ *также замкнут.*

III. *Если оператор* A *замкнут и оператор* A^{-1} *существует, то оператор* A^{-1} *также замкнут.*

Если оператор A не замкнут, то по определению его график $\mathfrak{B}_A$ не замкнут в $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$. Может случиться, что замыкание $\overline{\mathfrak{B}}_A$ множества $\mathfrak{B}_A$ в $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ есть также график некоторого оператора. Этот оператор называют *замыканием* оператора A; мы будем обозначать его $\widetilde{A}$. В этом случае говорят также, что оператор A *допускает замыкание* $\widetilde{A}$. Таким образом, по определению

$$\mathfrak{B}_{\widetilde{A}} = \overline{\mathfrak{B}}_A.$$

[1] В этом состоит отличие непрерывности от замкнутости. Если оператор A замкнут, то из $x_n \to x$, $x_n \in \mathfrak{D}_A$, вообще говоря, не следует, что Ax_n сходится.

Очевидно, $\widetilde{A}$ есть минимальное замкнутое расширение оператора A. Легко сформулировать условие существования замыкания, не пользуясь понятием графика. Множество $\overline{\mathfrak{B}}_A$, которое должно быть графиком некоторого оператора, состоит из элементов вида $\{x, Ax\}$, $x \in \mathfrak{D}_A$, и их пределов; поэтому

IV. *Оператор A допускает замыкание $\widetilde{A}$ тогда и только тогда, когда из соотношений*

$$x_n \in \mathfrak{D}_A, \quad x'_n \in \mathfrak{D}_A, \quad x_n \to x', \quad x'_n \to x, \quad Ax_n \to y, \quad Ax'_n \to y'$$

следует, что $y = y'$. В этом случае область определения $\mathfrak{D}_{\widetilde{A}}$ замыкания состоит из тех и только тех векторов x, для которых существует последовательность $x_n \in \mathfrak{D}$, удовлетворяющая условиям: $x_n \to x$, Ax_n сходится. При этом

$$\widetilde{A}x = \lim_{n\to\infty} Ax_n.$$

Если оператор A линеен, то, очевидно, предыдущее условие можно упростить, потребовав, чтобы из соотношений

$$x_n \in \mathfrak{D}_A, \quad x_n \to 0, \quad Ax_n \to y$$

следовало $y = 0$.

9. Сопряженный оператор. Рассмотрим произвольный оператор A из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$, область определения которого плотна в $\mathfrak{H}_1$. Может случиться, что при некоторых $y \in \mathfrak{H}_2$ имеет место представление вида

$$(Ax, y) = (x, z)$$

для всех $x \in \mathfrak{D}_A$. Обозначим через $\mathfrak{D}^*$ совокупность всех таких векторов y и определим оператор A^* из $\mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_1$ с областью определения $\mathfrak{D}_{A^*} = \mathfrak{D}^*$ формулой

$$A^*y = z.$$

Этот оператор A^* называют *сопряженным* к оператору A. Отметим, что вектор z однозначно определяется вектором y. Действительно, если также

$$(Ax, y) = (x, z'),$$

то $(x, z - z') = 0$, т. е. вектор $z - z'$ ортогонален к области определения $\mathfrak{D}_A$ оператора A. Так как последняя плотна в $\mathfrak{H}_1$, то это возможно лишь тогда, когда $z - z' = 0$, т. е. $z = z'$.

Мы видим здесь, что исходное предположение о плотности $\mathfrak{D}_A$ является весьма существенным; в противном случае нельзя было бы однозначно определить сопряженный оператор.

Отметим, что сопряженный оператор всегда линеен.

I. *Если оператор A имеет обратный A^{-1} и если $\mathfrak{D}_A$ и $\mathfrak{D}_{A^{-1}}$ плотны в $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ соответственно, то*

$$(A^{-1})^* = A^{*^{-1}}. \tag{1}$$

Доказательство. При $x \in \mathfrak{D}_A$, $y \in \mathfrak{D}_{(A^{-1})^*}$

$$(x,\, y) = (A^{-1}Ax,\, y) = (Ax,\, (A^{-1})^* y);$$

это показывает, что

$$(A^{-1})^* y \in \mathfrak{D}_{A^*}$$

и

$$A^*(A^{-1})^* y = y. \tag{2}$$

С другой стороны, при $x \in \mathfrak{D}_{A^{-1}}$, $y \in \mathfrak{D}_{A^*}$

$$(x,\, y) = (AA^{-1}x,\, y) = (A^{-1}x,\, A^* y);$$

это показывает, что

$$A^* y \in \mathfrak{D}_{(A^{-1})^*}$$

и

$$(A^{-1})^* A^* y = y. \tag{3}$$

Равенства (2) и (3) в совокупности означают, что оператор $(A^{-1})^*$ является обратным к A^*, т. е. верна формула (1).

Читатель легко проверит также следующие свойства сопряженного оператора (при этом предполагается, что области определения всех рассматриваемых операторов плотны в $\mathfrak{H}$ и что A, B — операторы из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$):

а) $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$;

б) если $A \subset B$, то $A^* \supset B^*$;

в) $(A + B)^* \supset A^* + B^*$;

если A, B — операторы из $\mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_3$ и из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$ соответственно, то

г) $(AB)^* \supset B^* A^*$;

и если A — оператор в $\mathfrak{H}$, то

д) $(A + \lambda 1)^* = A^* + \overline{\lambda} 1$.

Сопряженный оператор можно описать при помощи графика. Определим для этого оператор U_1 из $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_1$ формулой

$$U_1\{x,\, y\} = \{iy,\, -ix\}.$$

Легко убедиться в том, что U_1 изометрически отображает $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ на $\mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_1$. Аналогично определим оператор U_2, изометрически отображающий $\mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$, формулой

$$U_2\{y,\, x\} = \{ix,\, -iy\}.$$

При этом, как легко видеть,

$$U_2 U_1 = 1. \tag{4}$$

Применим ко всем векторам графика $\mathfrak{B}_A$ оператор U_1; мы получим множество всех пар $\{iAx,\, -ix\}$, $x \in \mathfrak{D}_A$; обозначим его $\mathfrak{B}'_A$. Тогда

$$\mathfrak{B}_{A^*} = (\mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_1) \ominus \mathfrak{B}'_A, \tag{5}$$

т. е. *график оператора* A^* *есть ортогональное дополнение множества* $\mathfrak{B}'_A$ *в* $\mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_1$. Действительно, это ортогональное дополнение состоит из тех и только тех пар $\{y, z\}$, которые удовлетворяют условию

$$(\{iAx, -ix\}, \{y, z\}) = 0$$

для всех $x \in \mathfrak{D}_A$. Но это условие равносильно условию

$$(Ax, y) - (x, z) = 0,$$

откуда

$$y \in \mathfrak{D}_{A^*}, \quad z = A^*y, \quad \{y, z\} \in \mathfrak{B}_{A^*}.$$

Так как ортогональное дополнение есть замкнутое подпространство, то из (5) следует, что A^* — *всегда замкнутый линейный оператор*. Докажем теперь следующее важное предложение.

II (фон Нейман [2]). *Если линейный оператор A с плотной областью определения допускает замыкание $\widetilde{A}$, то*

$$\widetilde{A}^* = A^*, \tag{6}$$

$\mathfrak{D}_{A^*}$ *плотно в* $\mathfrak{H}_2$ *и*

$$A^{**} = \widetilde{A}.$$

Если, в частности, оператор A замкнут, то $A^{**} = A$.

Доказательство. Так как $\mathfrak{B}_{\widetilde{A}} = \overline{\mathfrak{B}}_A$, то $\mathfrak{B}'_{\widetilde{A}} = U_1\overline{\mathfrak{B}}_A = \overline{U_1\mathfrak{B}_A} = \overline{\mathfrak{B}}'_A$, и потому

$$\mathfrak{B}_{\widetilde{A}^*} = (\mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_1) \ominus \mathfrak{B}'_{\widetilde{A}} = (\mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_1) \ominus \mathfrak{B}'_A = \mathfrak{B}_{A^*}.$$

Отсюда следует (6). Далее из (5) заключаем, что

$$\overline{\mathfrak{B}}'_A = (\mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_1) \ominus \mathfrak{B}_{A^*}.$$

Применим ко всем векторам в левой и правой частях последнего соотношения оператор U_2. В силу (4) он отображает $\overline{\mathfrak{B}}'_A$ на $\overline{\mathfrak{B}}_A$; кроме того, по определению, U_2 отображает $\mathfrak{B}_{A^*}$ на $\mathfrak{B}'_{A^*}$, и потому $(\mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_1) \ominus \mathfrak{B}_{A^*}$ на $(\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2) \ominus \mathfrak{B}'_{A^*}$. Следовательно, получаем соотношение

$$\overline{\mathfrak{B}}_A = (\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2) \ominus \mathfrak{B}'_{A^*}. \tag{7}$$

Из (7) следует, что $\mathfrak{D}_{A^*}$ плотно в $\mathfrak{H}_2$. Действительно, в противном случае существовал бы отличный от нуля вектор $z \in \mathfrak{H}_2$, ортогональный к $\mathfrak{D}_{A^*}$, а значит, $\{z, 0\} \perp \mathfrak{B}_{A^*}$, и потому $\{0, -iz\} \in (\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2) \ominus \mathfrak{B}'_{A^*} = \overline{\mathfrak{B}}_A$, что невозможно при $z \neq 0$. Кроме того, (7) означает, что $\overline{\mathfrak{B}}_A$ есть график оператора A^{**}; с другой стороны, $\overline{\mathfrak{B}}_A$ как замыкание множества $\mathfrak{B}_A$ есть график оператора $\widetilde{A}$. Следовательно, $A^{**} = \widetilde{A}$. Если оператор A замкнут, то $\widetilde{A} = A$ и $A^{**} = A$.

Оператор A в гильбертовом пространстве (не обязательно линейный) называют *эрмитовым*, если $(Ax, y) = (x, Ay)$ для всех $x, y \in \mathfrak{D}_A$.

Эрмитов оператор с областью определения, плотной в $\mathfrak{H}$, называют *симметрическим оператором*. Очевидно, оператор A в $\mathfrak{H}$ с плотной в $\mathfrak{H}$ областью определения будет симметрическим тогда и только тогда, когда

$$A \subset A^*. \tag{8}$$

Так как сопряженный оператор линеен и замкнут, то из (8) заключаем, что *симметрический оператор A допускает замыкание и линеен, если $\mathfrak{D}_A$ — подпространство.*

Оператор A в $\mathfrak{H}$ с плотной в $\mathfrak{H}$ областью определения называют *самосопряженным*, если $A = A^*$.

Из этого определения непосредственно вытекает, что *самосопряженный оператор замкнут*. Кроме того, из соотношений а), д) (с. 126) заключаем:

III. *Если A — самосопряженный оператор, то при любых вещественных α и β оператор $\alpha A + \beta 1$ также самосопряженный.*

IV. *Симметрический оператор A в $\mathfrak{H}$, область значений $\mathfrak{R}_A$ которого совпадает с $\mathfrak{H}$, есть самосопряженный оператор.*

Доказательство. Очевидно, надо только доказать, что $\mathfrak{D}_{A^*} = \mathfrak{D}_A$. Но если $y \in \mathfrak{D}_{A^*}$ и $z = A^*y$, то в силу условия $\mathfrak{R}_A = \mathfrak{H}$ существует вектор $y' \in \mathfrak{D}_A$, для которого $z = Ay'$. Отсюда при любом $x \in \mathfrak{D}_A$

$$(Ax, y) = (x, A^*y) = (x, Ay') = (Ax, y')$$

и $(Ax, y - y') = 0$. Так как множество всех векторов Ax совпадает с $\mathfrak{H}$, то заключаем отсюда, что $y - y' = 0$, т. е. $y = y' \in \mathfrak{D}_A$.

V. *Если A — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, то*

$$U = (A + i1)(A - i1)^{-1}$$

— унитарный оператор в $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Пусть A — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$. Тогда при $x \in \mathfrak{D}_A$

$$|Ax \pm ix|^2 = (Ax, Ax) \mp i(Ax, x) \pm i(x, Ax) + (x, x) = \\ = |Ax|^2 + |x|^2. \tag{9}$$

Поэтому равенство $Ax \pm ix = 0$ возможно только при $x = 0$, и оператор $U = (A + i1)(A - i1)^{-1}$ существует. Далее, $\mathfrak{R}_{A\pm i1}$ плотно в $\mathfrak{H}$. Действительно, если, например, $z \perp \mathfrak{R}_{A+i1}$, то $0 = (z, Ax + ix) = (z, Ax) - (iz, x)$, откуда $z \in \mathfrak{D}_{A^*} = \mathfrak{D}_A$ и $Az = iz$, что, как мы только что видели, возможно лишь при $z = 0$. Докажем, что $\mathfrak{R}_{A+i1} = \mathfrak{H}$. Пусть $y \in \mathfrak{H}$; так как $\mathfrak{R}_{A+i1}$ плотно в $\mathfrak{H}$, то существует

$$y_n = Ax_n + ix_n \to y. \tag{10}$$

В силу (9)

$$|y_n - y_m|^2 = |A(x_n - x_m) + i(x_n - x_m)|^2 = |A(x_n - x_m)|^2 + |x_n - x_m|^2,$$

и потому x_n и Ax_n сходятся к некоторым векторам x и z; так как A замкнут, то $x \in \mathfrak{D}_A$ и $z = Ax$. Но тогда в силу (10) $y = Ax + ix \in \mathfrak{R}_{A+i1}$; следовательно, $\mathfrak{R}_{A+i1} = \mathfrak{H}$ и, аналогично, $\mathfrak{R}_{A-i1} = \mathfrak{H}$. Это означает, что $\mathfrak{D}_U = \mathfrak{R}_U = \mathfrak{H}$. Кроме того, из (9) вытекает, что U изометричен, и потому U унитарен. Действительно, если $y \in \mathfrak{H}$, то $y = (A - i1)\,x$ и $Uy = (A + i1)(A - i1)^{-1}(A - i1)\,x = (A + i1)\,x$. Поэтому (9) означает, что $|Uy|^2 = |y|^2$.

Оператор A называют *положительно определенным*, если

$$(Ax, x) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad x \in \mathfrak{D}_A.$$

VI (фон Нейман [2]). *Если A — замкнутый линейный оператор из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$ с областью определения $\mathfrak{D}_A$, плотной в $\mathfrak{H}_1$, то A^*A — положительно определенный самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}_1$.*

Доказательство. Положительная определенность оператора A^*A непосредственно следует из соотношений $(A^*Ax, x) = (Ax, Ax) \geqslant 0$ при $x \in \mathfrak{D}_{A^*A}$. Остается доказать, что A^*A — самосопряженный оператор. Перепишем для этого (5) в виде

$$\mathfrak{B}'_A \oplus \mathfrak{B}_{A^*} = \mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_1. \tag{11}$$

В силу (11) вектор $\{0, -ix\}$ из $\mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_1$ можно представить в виде

$$\{0, -ix\} = \{iAy, -iy\} + \{z, A^*z\}, \quad y \in \mathfrak{D}_A, z \in \mathfrak{D}_{A^*},$$

т. е.

$$0 = iAy + z, \quad -ix = -iy + A^*z = -iy - iA^*Ay.$$

Отсюда $x = (1 + A^*A)\,y$, так что область значений оператора $1 + A^*A$ совпадает со всем пространством $\mathfrak{H}_1$. Докажем, что $A^*A + 1$ — симметрический оператор; в силу IV тем самым будет доказано, что $A^*A + 1$, а значит, в силу III, и A^*A — самосопряженный оператор.

Очевидно, $A^*A + 1$ — эрмитов, следовательно, надо только доказать, что $\mathfrak{D}_{A^*A+1}$ плотно в $\mathfrak{H}_1$. Пусть x_0 — вектор в $\mathfrak{H}_1$, ортогональный к $\mathfrak{D}_{A^*A+1}$. По доказанному выше, x_0 можно представить в виде $x_0 = (A^*A + 1)\,y_0$, так что $((A^*A + 1)\,y_0, y) = 0$ для всех $y \in \mathfrak{D}_{A^*A+1}$. Полагая, в частности, $y = y_0$, получим

$$((A^*A + 1)\,y_0, y_0) = |Ay_0|^2 + |y_0|^2 = 0,$$

откуда $y_0 = 0$ и $x_0 = (A^*A + 1)\,y_0 = 0$. Итак, в $\mathfrak{H}_1$ не существует вектора $x_0 \neq 0$, ортогонального к $\mathfrak{D}_{A^*A+1}$; следовательно, $\mathfrak{D}_{A^*A+1}$ плотно в $\mathfrak{H}_1$.

10. Случай ограниченного оператора.

I. *Если A — ограниченный оператор из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$, то A допускает замыкание $\widetilde{A}$; при этом $\mathfrak{D}_{\widetilde{A}} = \overline{\mathfrak{D}}_A$ и $|\widetilde{A}| = |A|$.*

Доказательство. В силу II п. 4 § 4 оператор A продолжается единственным образом до ограниченного оператора $\widetilde{A}$ с областью определения $\mathfrak{D}_{\widetilde{A}} = \overline{\mathfrak{D}}_A$ и нормой $|\widetilde{A}| = |A|$. Легко видеть, что этот оператор $\widetilde{A}$ есть замыкание оператора A.

II. *Замыкание изометрического оператора U есть также изометрический оператор с областью определения $\overline{\mathfrak{D}}_U$ и областью значений $\overline{\mathfrak{R}}_U$.*

Доказательство. Так как изометрический оператор U ограничен, то в силу I он допускает замыкание $\widetilde{U}$, причем $\mathfrak{D}_{\widetilde{U}} = \overline{\mathfrak{D}}_U$. Если $x,\, y \in \mathfrak{D}_{\widetilde{U}}$, то существуют $x_n,\, y_n \in \mathfrak{D}_U$ такие, что $x_n \to x$, $y_n \to y$. Переходя к пределу в равенстве $(Ux_n, Uy_n) = (x_n, y_n)$, получим: $(\widetilde{U}x, \widetilde{U}y) = (x, y)$, следовательно, $\widetilde{U}$ изометричен. Соотношение $\mathfrak{R}_{\widetilde{U}} = \overline{\mathfrak{R}}_U$ получается, если применить формулу $\mathfrak{D}_{\widetilde{U}} = \overline{\mathfrak{D}}_U$ к обратному оператору U^{-1}.

Так как $A^* = \widetilde{A}^*$, то при изучении оператора, сопряженного к ограниченному оператору A, достаточно рассмотреть случай оператора A с областью определения $= \mathfrak{H}_1$. Итак, пусть A — ограниченный оператор из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$ с областью определения $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{H}_1$. Тогда для любого $y \in \mathfrak{H}_2$ линейный функционал

$$f(x) = (Ax, y)$$

ограничен, ибо

$$|f(x)| = |(Ax, y)| \leqslant |Ax||y| \leqslant |A||x||y|.$$

На основании теоремы Ф. Рисса (см. п. 3) существует вектор $z \in \mathfrak{H}_1$ такой, что $f(x) = (x, z)$, т. е.

$$(Ax, y) = (x, z);$$

при этом

$$|z| \leqslant |A||y|.$$

Это означает, что $\mathfrak{D}_{A^*} = \mathfrak{H}_2$ и

$$|A^*y| = |z| \leqslant |A||y|;$$

следовательно, A^* ограничен и

$$|A^*| \leqslant |A|. \tag{1}$$

Применим этот результат к A^*; мы получим, что A^{**} ограничен и

$$|A^{**}| \leqslant |A^*|.$$

Но, очевидно.

$$A^{**} = A,$$

так что $|A| \leqslant |A^*|$. Комбинируя этот результат с (1), получаем

$$|A^*| = |A|.$$

Таким образом,

III. *Если A — ограниченный оператор из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$ с областью определения $= \mathfrak{H}_1$, то A^* есть ограниченный оператор из $\mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_1$ с областью определения $= \mathfrak{H}_2$ и $|A^*| = |A|$. При этом*

α) $A^{**} = A$;

β) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$;

γ) *если A, B — ограниченные операторы из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$, то*

$$(A + B)^* = A^* + B^*;$$

δ) *если A, B — ограниченные операторы в $\mathfrak{H}$, то $(AB)^* = B^*A^*$;*

ε) *если T — оператор из $\mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{D}_T$ плотно в $\mathfrak{H}_2$ и A — ограниченный оператор в $\mathfrak{H}_1$ с областью определения $\mathfrak{H}_1$, то*

$$(AT)^* = T^*A^*.$$

Соотношения β)–δ) являются частным случаем соотношений а), в), г) п. 9.

Докажем утверждение ε). В силу г) п. 9 $(AT)^* \supset T^*A^*$; поэтому достаточно доказать обратное включение.

Пусть $\eta \in \mathfrak{D}_{(AT)^*}$. Тогда для всех $\xi \in \mathfrak{D}_{AT} = \mathfrak{D}_T$

$$(T\xi,\, A^*\eta) = (AT\xi,\, \eta) = (\xi,\, (AT)^*\eta);$$

следовательно, $A^*\eta \in \mathfrak{D}_{T^*}$, $\eta \in \mathfrak{D}_{T^*A^*}$ и $T^*A^*\eta = (AT)^*\eta$.

Отметим еще, что

$$|A^*A| = |A|^2. \tag{2}$$

Действительно,

$$|A|^2 = \sup_{|x|=1} |Ax|^2 = \sup_{|x|=1} (Ax,\, Ax) = \sup_{|x|=1} (A^*Ax,\, x) \leqslant \leqslant \sup_{|x|=1} |A^*Ax||x| = |A^*A|;$$

с другой стороны,

$$|A^*A| \leqslant |A^*||A| = |A|^2.$$

IV. *Ограниченный оператор A в $\mathfrak{H}$ с областью определения $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{H}$ эрмитов тогда и только тогда, когда $A^* = A$.*

Действительно, так как $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{H}$, то соотношение $A^* \supset A$ переходит в $A^* = A$.

V. *Оператор U из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$ с областью определения $\mathfrak{D}_U = \mathfrak{H}_1$ изометричен тогда и только тогда, когда*

$$U^*U = 1.$$

Доказательство. Если U изометричен, то для всех x, $y \in \mathfrak{H}_1$

$$(x,\, y) = (Ux,\, Uy).$$

Поэтому $Ux \in \mathfrak{D}_{U^*}$ и $U^*Ux = x$, т. е. $U^*U = 1$. Обратно, если $U^*U = 1$, то

$$(x,\, y) = (U^*Ux,\, y) = (Ux,\, Uy),$$

т. е. U изометричен.

VI. *Оператор U из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$ изометрически отображает $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}_2$ тогда и только тогда, когда*

$$U^*U = 1, \quad UU^* = 1.$$

Доказательство. Из $U^*U = 1$ следует, что $\mathfrak{D}_U = \mathfrak{H}_1$ и что U изометрически отображает $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$. С другой стороны, из $UU^*y = y$ следует, что $\mathfrak{R}_U = \mathfrak{H}_2$.

Частным случаем этого предложения является

VII. *Оператор U в $\mathfrak{H}$ унитарен тогда и только тогда, когда*

$$U^*U = 1, \quad UU^* = 1.$$

VIII. *Ограниченный линейный оператор A из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$, определенный всюду в $\mathfrak{H}_1$, вполне непрерывен тогда и только тогда, когда оператор A^*A вполне непрерывен.*

Доказательство. Необходимость есть частный случай предложения II п. 6 § 4; докажем достаточность. Пусть оператор A^*A вполне непрерывен и пусть x_n — ограниченная последовательность элементов из $\mathfrak{H}_1$, $|x_n| < c$. Из нее можно выделить подпоследовательность x'_n такую, что $\{A^*Ax'_n\}$ сходится. Но тогда

$$\begin{aligned} |Ax'_n - Ax'_m|^2 &= (A(x'_n - x'_m), A(x'_n - x'_m)) = \\ &= (A^*Ax'_n - A^*Ax'_m, x'_n - x'_m) \leqslant |A^*Ax'_n - A^*Ax'_m||x'_n - x'_m| \leqslant \\ &\leqslant 2c\,|A^*Ax'_n - A^*Ax'_m| \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to 0, \end{aligned}$$

так что последовательность $\{Ax'_n\}$ сходится. А это и означает, что оператор A вполне непрерывен.

IX. *Если линейный оператор A из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$, определенный всюду в $\mathfrak{H}_1$, вполне непрерывен, то оператор A^* также вполне непрерывен.*

Это утверждение следует из предложения VIII, ибо оператор $(A^*)^*A^* = AA^*$ вполне непрерывен.

11. Обобщение на операторы в пространстве Банаха. Понятие сопряженного оператора естественным образом переносится на операторы в пространстве Банаха. Мы рассмотрим только случай ограниченного линейного оператора A в пространстве Банаха X с областью определения $= X$.

В этом случае при любом $f \in X'$ формула $f_1(x) = f(Ax)$ определяет линейный функционал $f_1 \in X'$ и соответствие $f \to f_1$ определяет линейный оператор в X', рассматриваемом как пространство Банаха. Этот оператор называют *сопряженным* к A и обозначают A'; таким образом, по определению,

$$(A'f)(x) = f(Ax). \tag{1}$$

Равенство (1) можно записать в более удобной форме, если условиться писать (x, f) вместо $f(x)$; тогда (1) примет вид

$$(x, A'f) = (Ax, f).$$

Легко видеть, что A' также ограничен и что $|A'| = |A|$; легко также проверить справедливость соотношений [1])

$$(\alpha A)' = \alpha A', \quad (A+B)' = A' + B', \quad (AB)' = B'A'.$$

12. Операторы проектирования. Пусть $\mathfrak{M}$ — замкнутое подпространство в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Каждому вектору $x \in \mathfrak{H}$ отнесем его проекцию x_1 на $\mathfrak{M}$. Полученное соответствие есть оператор в $\mathfrak{H}$; обозначим его через P, так что по определению $Px = x_1$. Оператор P называют *оператором проектирования* на $\mathfrak{M}$. Если нужно подчеркнуть, что P есть оператор проектирования именно на $\mathfrak{M}$, то пишут $P_{\mathfrak{M}}$ вместо P. Из определения проекции вытекает, что $|Px| \leqslant |x|$; следовательно, оператор проектирования ограничен.

I. *Оператор P эрмитов, линеен и удовлетворяет соотношению*

$$P^2 = P.$$

Действительно, полагая

$$Px = x_1, \quad Py = y_1, \quad x_2 = x - x_1, \quad y_2 = y - y_1,$$

имеем

$$x_2 \perp x_1, y_1; \quad y_2 \perp x_1, y_1.$$

Следовательно,

$$(Px, y) = (x_1, y_1 + y_2) = (x_1, y_1)$$

и

$$(x, Py) = (x_1 + x_2, y_1) = (x_1, y_1),$$

так что $(Px, y) = (x, Py)$ и P эрмитов, а значит (будучи всюду определенным) и линеен. Так как $x_1 \in \mathfrak{M}$, то $Px_1 = x_1$, т. е. $P^2x = Px$ для любого $x \in \mathfrak{H}$; это означает, что $P^2 = P$.

Обратно,

II. *Всякий эрмитов оператор P в $\mathfrak{H}$ с областью определения $= \mathfrak{H}$, удовлетворяющий соотношению $P^2 = P$, есть оператор проектирования.*

Доказательство. Так как $P^2 = P$, то

$$|Px|^2 = (Px, Px) = (P^2x, x) = (Px, x) \leqslant |Px||x|,$$

[1]) Сравнивая эти соотношения с $\beta)$–$\delta)$ на с. 131, мы видим, что при переходе к гильбертовому пространству это определение сопряженного оператора не совсем совпадает с определением сопряженного оператора в гильбертовом пространстве. Объясняется это антилинейностью соответствия $f \leftrightarrow y$ между функционалами и элементами гильбертова пространства (см. п. 3).

откуда $|Px| \leqslant |x|$. Это означает, что P ограничен и, следовательно, непрерывен. Обозначим через $\mathfrak{M}$ совокупность всех векторов x, удовлетворяющих условию

$$Px = x.$$

В силу непрерывности линейного оператора P множество $\mathfrak{M}$ есть замкнутое подпространство в $\mathfrak{H}$. Если x — произвольный вектор, то, полагая $x_1 = Px$, $x_2 = (1 - P)\,x$, имеем

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{и} \quad Px_1 = P^2 x = Px = x_1;$$

следовательно, $x_1 \in \mathfrak{M}$. Кроме того, для любого $y \in \mathfrak{M}$ имеем $Py = y$, и потому

$$(y,\, x_2) = (y,\, (1 - P)\,x) = ((1 - P)\,y,\, x) = (y - Py,\, x) = 0,$$

так что $x_2 \perp \mathfrak{M}$. Это означает, что $x_1 = Px$ есть проекция вектора x на $\mathfrak{M}$, так что P — оператор проектирования на $\mathfrak{M}$.

III. *Произведение двух операторов проектирования* $P_{\mathfrak{M}_1}$, $P_{\mathfrak{M}_2}$ *есть также оператор проектирования тогда и только тогда, когда операторы* $P_{\mathfrak{M}_1}$, $P_{\mathfrak{M}_2}$ *перестановочны. В этом случае*

$$P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2} = P_{\mathfrak{M}},$$

где $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$.

Доказательство. Если $P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2}$ — оператор проектирования, то $P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2}$ эрмитов, т. е.

$$P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2} = (P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2})^* = P^*_{\mathfrak{M}_2} P^*_{\mathfrak{M}_1} = P_{\mathfrak{M}_2} P_{\mathfrak{M}_1}.$$

Это означает, что $P_{\mathfrak{M}_1}$, $P_{\mathfrak{M}_2}$ перестановочны.

Обратно, если это условие выполнено, то $P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2}$ эрмитов и

$$(P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2})^2 = P^2_{\mathfrak{M}_1} P^2_{\mathfrak{M}_2} = P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2};$$

в силу II это означает, что $P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2}$ есть оператор проектирования. Пусть $\mathfrak{M}$ — подпространство, на которое он проектирует. Так как $P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2} x \subset \mathfrak{M}_1$ для любого $x \in \mathfrak{H}$, то $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1$; аналогично, $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_2$, и потому $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$. Обратно, если $x \in \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$, то $P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2} x = P_{\mathfrak{M}_1} x = x$; следовательно, $x \in \mathfrak{M}$; это означает, что $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}$, и потому $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}$.

IV. *Подпространства* $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ *ортогональны тогда и только тогда, когда*

$$P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2} = 0.$$

Доказательство. Утверждение непосредственно следует из равенства

$$(P_{\mathfrak{M}_2} x,\, P_{\mathfrak{M}_1} y) = (P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2} x,\, y), \quad x,\, y \in \mathfrak{H}.$$

V. *Сумма*

$$Q = P_{\mathfrak{M}_1} + P_{\mathfrak{M}_2} + \ldots + P_{\mathfrak{M}_n}$$

конечного числа операторов проектирования есть оператор проектирования тогда и только тогда, когда

$$P_{\mathfrak{M}_j} P_{\mathfrak{M}_k} = 0 \quad \text{\textit{при}} \quad j \neq k, \tag{1}$$

т. е. когда подпространства $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, …, $\mathfrak{M}_n$ *попарно ортогональны; в этом случае*

$$P_{\mathfrak{M}_1} + P_{\mathfrak{M}_2} + \ldots + P_{\mathfrak{M}_n} = P_{\mathfrak{M}},$$

где

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_n.$$

Доказательство. Если условия (1) выполнены, то, как легко проверить, $Q^2 = Q$, так что Q — оператор проектирования. Обратно, пусть Q — оператор проектирования; докажем, что выполняются условия (1). Если Q — оператор проектирования, то для любого $x \in \mathfrak{H}$

$$|x|^2 \geqslant (Qx, x) = \sum_{i=1}^{n} (P_{\mathfrak{M}_i} x, x) \geqslant (P_{\mathfrak{M}_j} x, x) + (P_{\mathfrak{M}_k} x, x),$$

так что

$$|P_{\mathfrak{M}_j} x|^2 + |P_{\mathfrak{M}_k} x|^2 \leqslant |x|^2.$$

Полагая здесь $x = P_{\mathfrak{M}_k} y$, получим

$$|P_{\mathfrak{M}_j} P_{\mathfrak{M}_k} y|^2 + |P_{\mathfrak{M}_k} y|^2 \leqslant |P_{\mathfrak{M}_k}|^2;$$

следовательно, $|P_{\mathfrak{M}_j} P_{\mathfrak{M}_k} y| = 0$ и $P_{\mathfrak{M}_j} P_{\mathfrak{M}_k} = 0$.

Докажем последнее утверждение. Пусть условия (1) выполнены и пусть $\mathfrak{M}$ — подпространство, на которое проектирует Q. Тогда для любого $x \in \mathfrak{H}$

$$Qx = P_{\mathfrak{M}_1} x + P_{\mathfrak{M}_2} x + \ldots + P_{\mathfrak{M}_n} x \subset \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_n,$$

так что

$$\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_n. \tag{2}$$

Обратно, если $x \in \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_n$, то $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, где $x_k \in \mathfrak{M}_k$. В силу (1)

$$P_{\mathfrak{M}_j} x_k = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad j \neq k, \\ x_k & \text{при} \quad j = k. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$Qx = P_{\mathfrak{M}_1} x + P_{\mathfrak{M}_2} x + \ldots + P_{\mathfrak{M}_n} x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x,$$

и потому $x \in \mathfrak{M}$. Таким образом, также $\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_n \subset \mathfrak{M}$ и сравнение с (2) дает

$$\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}.$$

VI. *Соотношение* $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2$ *равносильно каждому из соотношений:* α) $P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2} = P_{\mathfrak{M}_2} P_{\mathfrak{M}_1} = P_{\mathfrak{M}_2}$; β) $|P_{\mathfrak{M}_2} x| \leqslant |P_{\mathfrak{M}_1} x|$ *для всех* $x \in \mathfrak{H}$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2$; тогда $P_{\mathfrak{M}_2} x \subset \mathfrak{M}_1$ и потому

$$P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2} x = P_{\mathfrak{M}_2} x \quad \text{для всех} \quad x \in \mathfrak{H}.$$

Это означает, что $P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2} = P_{\mathfrak{M}_2}$; применяя операцию * к обеим частям этого равенства, получим, что также $P_{\mathfrak{M}_2} P_{\mathfrak{M}_1} = P_{\mathfrak{M}_2}$.

Таким образом, из $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2$ следует α). Пусть теперь имеет место α). Тогда $|P_{\mathfrak{M}_2} x| = |P_{\mathfrak{M}_2} P_{\mathfrak{M}_1} x| \leqslant |P_{\mathfrak{M}_1} x|$; следовательно, из α) следует β). Пусть, наконец, имеет место β). Отметим, что в силу соотношения $|x|^2 = |P_{\mathfrak{M}_1} x|^2 + |(1 - P_{\mathfrak{M}_1})\, x|^2$ подпространство $\mathfrak{M}_1$ есть совокупность всех векторов x, для которых $|x| = |P_{\mathfrak{M}_1} x|$, и $\mathfrak{M}_2$ есть совокупность всех векторов x, для которых $|x| = |P_{\mathfrak{M}_2} x|$. Но из β) следует, что если $|x| = |P_{\mathfrak{M}_2} x|$, то $|x| = |P_{\mathfrak{M}_1} x|$; это означает, что если $x \in \mathfrak{M}_2$, то $x \in \mathfrak{M}_1$, т. е. что $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_1$.

VII. *Разность $P_{\mathfrak{M}_1} - P_{\mathfrak{M}_2}$ операторов проектирования есть оператор проектирования тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_1$. В этом случае*

$$P_{\mathfrak{M}_1} - P_{\mathfrak{M}_2} = P_{\mathfrak{M}_1 \ominus \mathfrak{M}_2}.$$

Доказательство. Если $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_1$, то согласно VI $P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2} = P_{\mathfrak{M}_2} P_{\mathfrak{M}_1} = P_{\mathfrak{M}_2}$; отсюда легко следует, что $(P_{\mathfrak{M}_1} - P_{\mathfrak{M}_2})^2 = P_{\mathfrak{M}_1} - P_{\mathfrak{M}_2}$, так что $P_{\mathfrak{M}_1} - P_{\mathfrak{M}_2}$ есть оператор проектирования. Обратно, пусть $P_{\mathfrak{M}_1} - P_{\mathfrak{M}_2} = P_{\mathfrak{M}}$ есть оператор проектирования на некоторое подпространство $\mathfrak{M}$. Тогда

$$P_{\mathfrak{M}_1} = P_{\mathfrak{M}_2} + P_{\mathfrak{M}} \tag{3}$$

и, следовательно, в силу V

$$0 = P_{\mathfrak{M}_2} P_{\mathfrak{M}} = P_{\mathfrak{M}_2}(P_{\mathfrak{M}_1} - P_{\mathfrak{M}_2}) = P_{\mathfrak{M}_2} P_{\mathfrak{M}_1} - P_{\mathfrak{M}_2};$$

в силу VI отсюда следует, что $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_1$. Кроме того, из (3) заключаем, что $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{M}$, и потому $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \ominus \mathfrak{M}_2$.

VIII. *Если $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \ldots$ — счетное множество взаимно ортогональных подпространств, то для любого вектора $x \in \mathfrak{H}$ ряд*

$$P_{\mathfrak{M}_1} x + P_{\mathfrak{M}_2} x + P_{\mathfrak{M}_3} x + \ldots \tag{4}$$

сходится и его сумма равна $P_{\mathfrak{M}} x$, где

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots .$$

Доказательство. Положим $P_{\mathfrak{M}_k} x = x_k$; векторы x_k взаимно ортогональны и

$$|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2 = (P_{\mathfrak{M}_1} x, x) + \ldots + (P_{\mathfrak{M}_n} x, x) = \\ = (P_{\mathfrak{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_n} x, x) \leqslant |x|^2;$$

следовательно, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^2$, а потому и ряд (4), сходятся. Обозначим через P_x сумму ряда (4). Переходя к пределу в соотношениях

$$(P_{\mathfrak{M}_1}x + \ldots + P_{\mathfrak{M}_n}x,\, y) = (x,\, P_{\mathfrak{M}_1}y + \ldots + P_{\mathfrak{M}_n}y) = \\ = (P_{\mathfrak{M}_1}x + \ldots + P_{\mathfrak{M}_n}x,\, P_{\mathfrak{M}_1}y + \ldots + P_{\mathfrak{M}_n}y),$$

выражающих, что $P_{\mathfrak{M}_1} + \ldots + P_{\mathfrak{M}_n}$ — оператор проектирования (см. I и II), заключаем, что

$$(Px,\, y) = (x,\, Py) = (Px,\, Py).$$

Следовательно, $P = P^* = P^2$ и P — оператор проектирования. Пусть $P = P_{\mathfrak{M}}$; очевидно, $Px \in \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots$, и потому

$$\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots. \tag{5}$$

Обратно, если $x \in \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots$, то, полагая $x = x_1 + x_2 + \ldots$, $x_k \in \in \mathfrak{M}_k$, легко заключаем, что $Px = x$; следовательно, $x \in \mathfrak{M}$. Таким образом, $\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots \subset \mathfrak{M}$ и сравнение с (5) дает: $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots$.

Применяя аналогичные рассуждения, можно доказать следующее предложение.

IX. *Если $\mathfrak{M}_\nu$— система взаимно ортогональных подпространств, то для любого вектора $x \in \mathfrak{H}$ ряд $\sum\limits_{\nu} P_{\mathfrak{M}_\nu}x$ содержит не более счетного числа членов, отличных от нуля, и сходится. Его сумма равна $P_{\mathfrak{M}}x$, где $\mathfrak{M} = \bigoplus\limits_{\nu}\mathfrak{M}_\nu$.*

13. Приводимость. Пусть $\mathfrak{M}$ — замкнутое подпространство в $\mathfrak{H}$, а P — оператор проектирования на $\mathfrak{M}$. Будем говорить, что *подпространство $\mathfrak{M}$ приводит оператор A* (или, *оператор A приводится подпространством $\mathfrak{M}$*), если из $x \in \mathfrak{D}_A$ следует, что также $Px \in \mathfrak{D}_A$ и

$$APx = PAx.$$

I. *Ограниченный оператор A, определенный во всем пространстве $\mathfrak{H}$, тогда и только тогда приводится замкнутым подпространством $\mathfrak{M}$, когда он перестановочен с оператором проектирования P на это подпространство.*

Это утверждение непосредственно следует из самого определения приводимости.

II. *Ограниченный эрмитов оператор A, определенный во всем пространстве $\mathfrak{H}$, тогда и только тогда приводится замкнутым подпространством $\mathfrak{M}$, когда $\mathfrak{M}$ инвариантно относительно A, т. е. когда из $x \in \mathfrak{M}$ следует $Ax \in \mathfrak{M}$.*

Доказательство. Необходимость этого условия очевидна. Докажем его достаточность. Итак, пусть $\mathfrak{M}$ инвариантно относительно A. Так как $P_{\mathfrak{M}}x \in \mathfrak{M}$, то $AP_{\mathfrak{M}}x \in \mathfrak{M}$; следовательно, $P_{\mathfrak{M}}AP_{\mathfrak{M}}x = AP_{\mathfrak{M}}x$ для всех $x \in \mathfrak{H}$, т. е.

$$P_{\mathfrak{M}}AP_{\mathfrak{M}} = AP_{\mathfrak{M}}. \tag{1}$$

Переходя к сопряженному оператору в обеих частях этого равенства, получим

$$P_{\mathfrak{M}} A P_{\mathfrak{M}} = P_{\mathfrak{M}} A. \tag{2}$$

Сравнение (1) с (2) дает: $AP_{\mathfrak{M}} = P_{\mathfrak{M}} A$, так что A и $P_{\mathfrak{M}}$ перестановочны. В силу I отсюда следует, что $\mathfrak{M}$ приводит A.

14. Частично изометрические операторы. Оператор U из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$ будем называть *частично изометрическим*, если он изометричен на некотором замкнутом подпространстве $\mathfrak{M}$ пространства $\mathfrak{H}_1$ и равен нулю на его ортогональном дополнении $\mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{M}$. Подпространство $\mathfrak{M}$ называется *начальной областью*, а его U-образ в $\mathfrak{H}_2$ — *конечной областью* оператора U. Легко проверить, что $U^*U = P_{\mathfrak{M}}$, $UU^* = P_{\mathfrak{N}}$, где $\mathfrak{N}$ — конечная область оператора U, а $P_{\mathfrak{M}}$, $P_{\mathfrak{N}}$ — операторы проектирования в $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ на $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ соответственно.

Действительно, U^*U — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}_1$, равный нулю в $\mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{M}$. Поэтому $(U^*Ux, y) = (x, U^*Uy) = 0$ для любых $x \in \mathfrak{H}_1$, $y \in \mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{M}$, откуда $U^*Ux \in \mathfrak{M}$ для всех $x \in \mathfrak{H}_1$, а значит, при $x \in \mathfrak{M}$ также $x - U^*Ux \in \mathfrak{M}$. С другой стороны,

$$(x, y) = (Ux, Uy) = (U^*Ux, y), \quad (x - U^*Ux, y) = 0$$

для всех $x \in \mathfrak{M}$, $y \in \mathfrak{M}$. Следовательно, вектор $x - U^*Ux$ ортогонален к $\mathfrak{M}$. Но тогда $x = U^*Ux$, т. е. $U^*U = 1$ на $\mathfrak{M}$, $U^*U = P_{\mathfrak{M}}$. Аналогично доказываем, что $UU^* = P_{\mathfrak{N}}$. Одновременно видим, что U^* — частично изометрический оператор из $\mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_1$ с начальной областью $\mathfrak{N}$ и конечной $\mathfrak{M}$.

Оператор U частично изометричен, тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

1) U^*U *— оператор проектирования*;
2) $UU^*U = U$;
3) UU^* *— оператор проектирования*;
4) $U^*UU^* = U^*$.

В самом деле, если U — частично изометрический оператор с начальной областью $\mathfrak{M}$, то $U^*U = P_{\mathfrak{M}}$ — оператор проектирования, так что условие 1) выполняется. Обратно, пусть U^*U — оператор проектирования, а $\mathfrak{M}$ — подпространство в $\mathfrak{H}$, на которое U^*U проектирует. Тогда $U^*Ux = 0$ при $x \in \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}$ и, следовательно, также

$$|Ux|^2 = (U^*Ux, x) = 0, \quad Ux = 0.$$

С другой стороны, при $x \in \mathfrak{M}$

$$U^*Ux = x, \quad |Ux|^2 = (U^*Ux, x) = (x, x) = |x|^2,$$

так что U — частично изометрический оператор. Соотношение 2) проверяется непосредственно; обратно, если оно имеет место, то умножая слева на U^*, получим, что $(U^*U)^2 = U^*U$, т. е. 1) имеет место. Условия 3) и 4) получаем, заменяя оператор U оператором U^*.

15. Матричное представление оператора. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — два множества; пусть элементам α множества $\mathfrak{A}$ поставлены в соответствие пространства $\mathfrak{H}_\alpha$, а элементам β множества $\mathfrak{B}$ — пространства $\mathfrak{H}'_\beta$. Посмотрим, как представить ограниченные операторы из $\mathfrak{H} = \bigoplus\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathfrak{H}_\alpha$ в $\mathfrak{H}' = \bigoplus\limits_{\beta\in\mathfrak{B}} \mathfrak{H}'_\beta$ при помощи ограниченных операторов из $\mathfrak{H}_\alpha$ в $\mathfrak{H}'_\beta$.

Пусть A — такой оператор; рассмотрим элемент $x^{(\alpha_0)} = \{x_\alpha\}$, в котором $x_\alpha = 0$ при $\alpha \neq \alpha_0$. Пусть $Ax^{(\alpha_0)} = \{y_\beta\}$; неравенство

$$|Ax|^2 \leqslant C^2|x|^2 \tag{1}$$

при $x = x^{(\alpha_0)}$ принимает вид: $\sum\limits_{\beta\in\mathfrak{B}} |y_\beta|^2 \leqslant C^2|x_{\alpha_0}|^2$. Отсюда

$$|y_{\beta_0}| \leqslant C|x_{\alpha_0}|. \tag{2}$$

Положим

$$A_{\beta_0\alpha_0}x_{\alpha_0} = y_{\beta_0};$$

в силу неравенства (2) $A_{\beta_0\alpha_0}$ — ограниченный оператор из $\mathfrak{H}_{\alpha_0}$ в $\mathfrak{H}'_{\beta_0}$ и

$$Ax^{(\alpha_0)} = \{A_{\beta\alpha_0}x_{\alpha_0}\}.$$

Мы видим, таким образом, что оператору A соответствует матрица $\|A_{\beta\alpha}\|$ ограниченных операторов из $\mathfrak{H}_\alpha$ в $\mathfrak{H}'_\beta$.

Рассмотрим подробнее свойства этой матрицы. Произвольный элемент x из $\mathfrak{H}$ можно представить в виде

$$\chi = \sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} x^{(\alpha)},$$

причем в этой сумме будет не более счетного числа элементов, отличных от нуля. Отсюда в силу непрерывности оператора A

$$Ax = \sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} Ax^{(\alpha)} = \sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} \{A_{\beta\alpha}x_\alpha\} = \left\{\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} A_{\beta\alpha}x_\alpha\right\}, \tag{3}$$

и условие (1) ограниченности оператора A перепишется в виде

$$\sum_{\beta\in\mathfrak{B}} \left|\sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} A_{\beta\alpha}x_\alpha\right|^2 \leqslant C^2 \sum_{\alpha\in\mathfrak{A}} |x_\alpha|^2. \tag{4}$$

Матрицу $A_{\beta\alpha}$, удовлетворяющую неравенству (4), мы будем называть *ограниченной*.

Равенство (3) устанавливает, таким образом, взаимно однозначное соответствие $A \sim \|A_{\beta\alpha}\|$ между совокупностью всех ограниченных операторов A из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}'$ и совокупностью всех ограниченных матриц $\|A_{\beta\alpha}\|$ операторов из $\mathfrak{H}_\alpha$ в $\mathfrak{H}'_\beta$. При этом нормой оператора A, как следует из самого ее определения, является наименьшее из чисел C, для которых выполнено неравенство (4).

Пусть, в частности, $\|A_{\beta\alpha}\|$ — диагональная матрица, т. е. $A_{\beta\alpha} = 0$ при $\beta \neq \alpha$. Тогда неравенство (4) принимает вид

$$\sum_{\alpha} |A_{\alpha\alpha} x_\alpha|^2 \leqslant C^2 \sum_{\alpha} |x_\alpha|^2.$$

Положим

$$C' = \sup_{\alpha} |A_{\alpha\alpha}|.$$

Тогда

$$|A_{\alpha\alpha} x_\alpha|^2 \leqslant |A_{\alpha\alpha}|^2 |x_\alpha|^2 \leqslant C'^2 |x_\alpha|^2$$

и, следовательно,

$$\sum_{\alpha} |A_{\alpha\alpha} x_\alpha|^2 \leqslant C'^2 \sum_{\alpha} |x_\alpha|^2.$$

Отсюда

$$|A|^2 \leqslant C'^2.$$

С другой стороны, при заданном $\varepsilon > 0$ существует α_0 такое, что

$$|A_{\alpha_0\alpha_0}|^2 > C'^2 - \varepsilon;$$

поэтому существует вектор $x^0_{\alpha_0} \in \mathfrak{H}_{\alpha_0}$ такой, что

$$|A_{\alpha_0\alpha_0} x^0_{\alpha_0}|^2 > (C'^2 - \varepsilon)|x^0_{\alpha_0}|^2.$$

Но тогда неравенство (4) не выполняется при $C^2 = C'^2 - \varepsilon$, $x_\alpha = x^0_{\alpha_0}$, $x_\alpha = 0$ при $\alpha \neq \alpha_0$, следовательно, C'^2 — наименьшее из чисел C^2, для которых выполняется неравенство (4). Другими словами, C совпадает с нормой оператора A, т. е.

$$|A| = \sup_{\alpha} |A_{\alpha\alpha}|.$$

Если $A \sim \|A_{\beta\alpha}\|$, $B \sim \|B_{\beta\alpha}\|$, $C \sim \|C_{\beta\alpha}\|$, *то*

$$A + B \sim \|A_{\beta\alpha} + B_{\beta\alpha}\|, \quad aA \sim \|aA_{\beta\alpha}\|,$$
$$A^* \sim \|A^*_{\alpha\beta}\|, \quad CA \sim \left\| \sum_{\beta \in \mathfrak{B}} C_{\gamma\beta} A_{\beta\alpha} \right\|,$$

причем ряд $\sum\limits_{\beta \in \mathfrak{B}} C_{\gamma\beta} A_{\beta\alpha} x_\alpha$ *сильно сходится для любого вектора* $x_\alpha \in \mathfrak{H}_\alpha$. Все эти соотношения проверяются непосредственно, и мы предоставляем их доказательство читателю.

Рассмотрим еще тот частный случай, когда все пространства $\mathfrak{H}_\alpha$, $\mathfrak{H}'_\beta$ одномерны. Выберем в пространствах $\mathfrak{H}_\alpha$, $\mathfrak{H}'_\beta$ векторы e_α, e'_β единичной длины. Так как $A_{\beta\alpha} e_\alpha \in \mathfrak{H}'_\beta$, то вектор $A_{\beta\alpha} e_\alpha$ кратен вектору e'_β; положим

$$A_{\beta\alpha} e_\alpha = a_{\beta\alpha} e'_\beta.$$

Оператор $A_{\beta\alpha}$ полностью определяется числом $a_{\beta\alpha}$, следовательно, матрица $\|A_{\beta\alpha}\|$, а потому и оператор A, полностью определяется числовой матрицей $\|a_{\beta\alpha}\|$. Всякий вектор $x \in \mathfrak{H}$ имеет вид $x = \{\xi_\alpha e_\alpha\}$, где не более счетного множества чисел ξ_α отлично от нуля и $\sum\limits_{\alpha} |\xi_\alpha|^2 < < \infty$; поэтому формула (3) перепишется в виде

$$Ax = \left\{ \left(\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} a_{\beta\alpha} \xi_\alpha \right) e'_\beta \right\}.$$

Сформулированные выше свойства соответствия $A \sim \|A_{\beta\alpha}\|$ теперь означают, что умножению на число, сложению и умножению операторов A отвечают аналогичные действия с соответствующими матрицами $\|a_{\beta\alpha}\|$.

§ 6. Интегрирование на локально бикомпактном пространстве

1. Основные понятия; постановка задачи. Пусть T — локально бикомпактное хаусдорфово топологическое пространство. Условимся обозначать через L совокупность всех комплексных непрерывных на T функций, равных нулю вне некоторого бикомпактного множества, своего для каждой функции, далее, через L^r — совокупность всех вещественных, а через L^+ — совокупность всех неотрицательных вещественных функций из L. Если надо будет подчеркнуть, что L, L^r и L^+ отнесены именно к T, то мы будем писать $L(T)$, $L^r(T)$, $L^+(T)$ вместо L, L^r, L^+.

Очевидно, L и L^r (комплексно, соответственно вещественно) линейны и L^r вместе с функцией x содержит также $|x|$ и $x \cap 1 = \min\{x, 1\}$; поэтому оно вместе с каждыми двумя функциями x, y содержит также

$$x \cap y = \min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|),$$
$$x \cup y = \max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|).$$

Далее, очевидно, если $x, y \in L^+$ и $c \geqslant 0$, то также cx, $x + y$, $x \cap y$, $x \cup y \in L^+$. Легко видеть, что $L^r = L^+ - L^+$. Действительно, если $x \in L^r$, то, положив

$$x^+ = x \cup 0, \quad x^- = (-x) \cup 0,$$

будем иметь: $x^+ \in L^+$, $x^- \in L^+$ и $x = x^+ - x^-$.

Интегралом на L называется всякий линейный функционал I, удовлетворяющий условию

$$I(x) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad x \in L^+.$$

Очевидно, что если $x \in L^r$, то $I(x)$ вещественно, и если $x, y \in L^r$, то $I(x) \leqslant I(y)$ при $x \leqslant y$.

Основная задача состоит в продолжении функционала I на более широкое, чем L, пространство функций. Если, например, взять в качестве T отрезок $[0, 1]$ с обычной топологией, а в качестве $I(x)$ — интеграл Римана $\int_0^1 x(t)\,dt$, то описанный ниже процесс продолжения приведет к интегралу Лебега на отрезке $[0, 1]$.

2. Основные свойства интеграла. Будем называть *носителем* функции $x \in L$ наименьшее бикомпактное множество $Q_x \subset T$, вне которого $x(t) = 0$; положим

$$\|x\| = \sup_{t \in Q_x} |x(t)| = \sup_{t \in T} |x(t)|.$$

В излагаемых ниже предложениях I обозначает интеграл на L. Отметим, что равенство $(x_1, x_2) = I(x_1 \overline{x}_2)$ определяет положительно определенную эрмитову форму на L (см. п. 1 § 5).

I. *Для любой функции* $x \in L$

$$|I(x)| \leqslant I(|x|). \tag{1}$$

Доказательство. Если $I(x) = 0$, то (1) очевидно. Предположим поэтому, что $I(x) \neq 0$, и положим $I(x) = \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$,

$$e^{-i\varphi} x = y_1 + i y_2, \quad \text{где} \quad y_1, y_2 \in L^r.$$

Отсюда $|I(x)| = \rho = I(e^{-i\varphi} x) = I(y_1) + iI(y_2) = I(y_1) \leqslant I(|y_1|) \leqslant I(|x|)$.

II. *Для любого бикомпактного множества $Q \subset T$ существует зависящая только от Q константа C_Q такая, что*

$$|I(x)| \leqslant C_Q \|x\| \tag{2}$$

для всех $x \in L$, удовлетворяющих условию $Q_x \subset Q$.

Доказательство. На основании леммы Урысона (см. II п. 8 § 2) существует функция $y_0 \in L^+$, нигде не превосходящая единицы и равная единице на Q. Из соотношения $|x| \leqslant y_Q \|x\|$ и (1) вытекает, что $|I(x)| \leqslant I(|x|) = \|x\| I(y_Q)$, следовательно, (2) имеет место при $C_Q = I(y_Q)$.

III. *Если X — некоторое направленное вниз множество функций $x \in L^+$, частично упорядоченное при помощи соотношения $\leqslant$, и если*

$$\inf_{x \in X} x = 0, \tag{3}$$

то для каждого $\varepsilon > 0$ существует функция $x_\varepsilon \in X$ такая, что $x(t) < \varepsilon$ для всех функций x из X, удовлетворяющих условию $x(t) \leqslant x_\varepsilon(t)$, и потому

$$\inf_{x \in X} I(x) = 0. \tag{4}$$

Доказательство. Положим при $x \in X$ и фиксированном ε $T_x = \{t \colon x(t) \geqslant \varepsilon\}$; тогда T_x бикомпактны, $T_{x_2} \subset T_{x_1}$ при $x_2 \leqslant x_1$ и в силу (3) пересечение всех T_x пусто. На основании I п. 6 § 2 существует функция $x_\varepsilon \in X$ такая, что $T_{x_\varepsilon} = \varnothing$, следовательно, также $T_x = \varnothing$ для всех $x \leqslant x_\varepsilon$, $x \in X$. Это означает, что $x(t) < \varepsilon$ для всех $x \leqslant x_\varepsilon$. Так как $Q_x \subset Q_{x_\varepsilon} \subset Q_{x_1}$ при $\varepsilon < 1$, $x < x_\varepsilon$, то (2) даст теперь $I(x) \leqslant C_{Q_{x_1}} \cdot \varepsilon$; отсюда следует (4).

3. Расширение интеграла на полунепрерывные снизу функции. Будем рассматривать вещественные функции, которые могут также принимать значения $+\infty$, $-\infty$. Такая функция x называется *полунепрерывной снизу*, если для любой точки t_0 и любого $h < x(t_0)$ существует окрестность $U(t_0)$ такая, что

$$h < x(t) \quad \text{для всех} \quad t \in U(t_0). \tag{1}$$

Аналогично, функция x называется *полунепрерывной сверху*, если для любой точки t_0 и любого $h > x(t_0)$ существует окрестность $V(t_0)$ такая, что

$$h > x(t) \quad \text{для всех} \quad t \in V(t_0).$$

Очевидно, всякая непрерывная вещественная функция полунепрерывна снизу и сверху.

Обозначим через M^+ совокупность всех неотрицательных полунепрерывных снизу функций, а через N^+ — совокупность всех неотрицательных полунепрерывных сверху функций. Условимся, что $a + \infty = +\infty + a = +\infty$ для любого $a > -\infty$; что $a \cdot (+\infty) = +\infty$ для любого $a > 0$ и что $0 \cdot (+\infty) = 0$. Для произвольного множества $X \subset M^+$ положим

$$\sum_{x \in X} x = \sup\{y\}, \tag{1'}$$

где $\{y\}$ — совокупность всевозможных конечных сумм функций $x \in X$.

I. 1) *Если $x \in M^+$ и $\alpha \geqslant 0$, то также $\alpha x \in M^+$;*

2) *если $x_1, \ldots, x_n \in M^+$, то также $x_1 \cap \ldots \cap x_n \in M^+$;*

3) *если $X \subset M^+$, то $\sup\limits_{x \in X} x \in M^+$ и $\sum\limits_{x \in X} x \in M^+$.*

Доказательство. Утверждение 1) очевидно. Далее, если $h < (x_1 \cap \ldots \cap x_n)(t_0)$, то $h < x_k(t_0)$ для $k = 1, \ldots, n$; следовательно, существуют такие окрестности $U_k(t_0)$, что $h < x_k(t)$ при $t \in U_k(t_0)$, и потому $h < (x_1 \cap \ldots \cap x_n)(t)$ при $t \in \bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k(t_0)$. Этим доказана справедливость утверждения 2). Пусть теперь $h < \sup\limits_{x \in X} x(t_0)$. Тогда $h < x_0(t_0)$ при некотором $x_0 \in X$; поэтому существует такая окрестность $U(t_0)$, что $h < x_0(t)$ при $t \in U(t_0)$, так что подавно $h < \sup\limits_{x \in X} x(t)$. Этим доказано, что $\sup\limits_{x \in X} x(t) = M^+$. Наконец, пусть x_1, $x_2 \in M^+$. Если $h < x_1(t_0) + x_2(t_0)$, то h можно записать в виде $h = h_1 + h_2$, где $h_1 < x_1(t_0)$, $h_2 < x_2(t_0)$. Существуют такие окрестности $U_1(t_0)$, $U_2(t_0)$, что $h_1 < x_1(t)$ при $t \in U_1(t_0)$, $h_2 < x_2(t)$ при $t \in U_2(t_0)$, и потому $h = h_1 + h_2 < x_1(t) + x_2(t)$ при $t \in U_1(t_0) \cap U_2(t_0)$. Следовательно,

$x_1 + x_2 \in M^+$. Отсюда, применяя индукцию, заключаем, что сумма любого конечного числа функций из M^+ также принадлежит M^+. Под суммой же любого числа функций из M^+, как указано выше, понимается верхняя грань сумм конечного числа таких функций; она поэтому также принадлежит M^+.

II. *Всякая функция x из M^+ есть верхняя грань множества Y_x всех функций $y \in L^+$, удовлетворяющих условию $y \leqslant x$.*

Доказательство. Утверждение очевидно для точек, в которых $x(t)$ обращается в нуль. Если же $x(t_0) > 0$, то для любого h, $0 < h < x(t_0)$, существует окрестность $U(t_0)$, в которой $x(t) > h$. С другой стороны, на основании леммы Урысона существует функция $y_0 \in L^+$ с носителем $Q_{y_0} \subset U(t_0)$, удовлетворяющая условиям: $y_0(t_0) = h$, $y_0(t) \leqslant h$. Так как $0 \leqslant y \leqslant x$ и h произвольно в $(0, x(t_0))$, то отсюда следует, что $\sup\limits_{y \in Y_x} y(t_0) = x(t_0)$.

Верхним интегралом $\overline{I}(x)$ функции $x \in M^+$ мы будем называть

$$\overline{I}(x) = \sup_{y \in Y_x} I(y),$$

где Y_x — множество всех функций $y \in L^+$, удовлетворяющих условию $y \leqslant x$. Если $x \in L^+$, то Y_x содержит x, и потому $\overline{I}(x) = I(x)$. Далее, из определения непосредственно следует, что

$$\overline{I}(x_1) \leqslant \overline{I}(x_2) \quad \text{при} \quad x_1 \leqslant x_2, \quad x_1, x_2 \in M^+ \tag{2}$$

и что

$$\overline{I}(cx) = c\overline{I}(x) \quad \text{при} \quad x \in M^+, \quad c > 0.$$

III. *Пусть X — произвольное направленное вверх множество в M^+, частично упорядоченное при помощи соотношения $\leqslant$. Тогда*

$$\overline{I}(\sup_{x \in X} x) = \sup_{x \in X} \overline{I}(x).$$

Доказательство. Положим $x_0 = \sup\limits_{x \in X} x$. Если $X \subset L^+$ и $x_0 \in L^+$, то утверждение следует из III п. 2, ибо тогда $\inf\limits_{x \in X} (x_0 - x) = 0$, следовательно, $I(x_0) - \sup\limits_{x \in X} I(x) = \inf\limits_{x \in X} I(x_0 - x) = 0$. Пусть теперь X — произвольное множество в M^+. В силу (2) $\overline{I}(x_0) \geqslant \overline{I}(x)$ для всех $x \in X$, и потому $\overline{I}(x_0) \geqslant \sup\limits_{x \in X} \overline{I}(x)$. Следовательно, надо доказать противоположное неравенство. По определению $\overline{I}(x_0)$ для этого достаточно показать, что $I(y_0) \leqslant \sup\limits_{x \in X} \overline{I}(x)$ для всех $y_0 \in Y_{x_0}$, т. е. для всех $y_0 \in L^+$, удовлетворяющих неравенству $y_0 \leqslant x_0$. Обозначим для этого через Y объединение всех Y_x, $x \in X$. Очевидно, $Y \subset Y_{x_0}$ и

$$x_0 = \sup_{x \in X} x = \sup_{x \in X} \big(\sup_{y \in Y_x} y\big) = \sup_{Y} y. \tag{3}$$

Пусть $y_0 \in Y_{x_0}$, т. е. $y_0 \leqslant x_0$. Из (3) заключаем, что

$$y_0 = y_0 \cap x_0 = \sup_{y \in Y} (y_0 \cap y);$$

следовательно, в силу сказанного в начале доказательства

$$I(y_0) = \sup_{y \in Y} I(y_0 \cap y).$$

Таким образом, учитывая (3), имеем

$$I(y_0) = \sup_{y \in Y} I(y_0 \cap y) \leqslant \sup_{y \in Y} I(y) = \sup_{x \in X} \sup_{y \in Y_x} I(y) = \sup_{x \in X} \overline{I}(x),$$

и предложение полностью доказано.

IV. *Если* $x_1, x_2 \in M^+$, *то* $\overline{I}(x_1 + x_2) = \overline{I}(x_1) + \overline{I}(x_2)$.

Доказательство. Функции $y_1 + y_2$, где $y_1 \leqslant x_1$, $y_2 \leqslant x_2$, $y_1, y_2 \in L^+$, образуют направленное вверх множество в M^+, частично упорядоченное при помощи соотношения $\leqslant$ и удовлетворяющее условию $\sup(y_1 + y_2) = x_1 + x_2$. Отсюда в силу III

$$\overline{I}(x_1 + x_2) = \sup[I(y_1) + I(y_2)] = \overline{I}(x_1) + \overline{I}(x_2).$$

V. *Если* $X \subset M^+$, *то*

$$\overline{I}\left(\sum_{x \in X} x\right) = \sum_{x \in X} \overline{I}(x). \tag{4}$$

Доказательство. Для конечных сумм равенство (4) получается по индукции из IV, а в силу III отсюда следует (4) для произвольной суммы, ибо она является верхней гранью конечных сумм.

4. Верхний интеграл произвольной неотрицательной вещественной функции. Будем рассматривать произвольные неотрицательные вещественные функции, которые могут принимать также значения $+\infty$. Для любой такой функции x обозначим через Z_x совокупность всех функций z из M^+ , удовлетворяющих условию $z \geqslant x$; такие функции всегда существуют, например функция $z(t) = +\infty$ для всех $t \in T$. *Верхним интегралом* $\overline{I}(x)$ мы будем называть

$$\overline{I}(x) = \inf_{x \in Z_x} \overline{I}(z).$$

Если $x \in M^+$, то $x \in Z_x$, и потому для $x \in M^+$ это определение верхнего интеграла совпадает с прежним. Из определения очевидно, что

$$\overline{I}(x_1) \leqslant \overline{I}(x_2) \quad \text{при} \quad x_1 \leqslant x_2 \tag{1}$$

и

$$\overline{I}(cx) = c\,\overline{I}(x) \quad \text{при} \quad c \geqslant 0. \tag{2}$$

Кроме того,

$$\overline{I}(x_1 + x_2) \leqslant \overline{I}(x_1) + \overline{I}(x_2). \tag{3}$$

Действительно, если $z_1 \geqslant x_1$, $z_2 \geqslant x_2$, то $z_1 + z_2 \geqslant x_1 + x_2$, и потому $\overline{I}(x_1 + x_2) \leqslant \overline{I}(z_1 + z_2) = \overline{I}(z_1) + \overline{I}(z_2)$. Переходя к нижним граням по z_1, z_2, получим (3). Отметим еще следующие свойства верхнего интеграла.

I. *Для любой неубывающей последовательности функций $x_n \geqslant 0$*

$$\overline{I}(\sup_n x_n) = \sup_n \overline{I}(x_n). \tag{4}$$

Доказательство. Так как $x_n \leqslant \sup_n x_n$, то $\overline{I}(x_n) \leqslant \overline{I}(\sup_n x_n)$, и потому $\sup_n \overline{I}(x_n) \leqslant \overline{I}(\sup_n x_n)$; следовательно, достаточно доказать противоположное неравенство. Оно очевидно, если $\sup_n \overline{I}(x_n) = +\infty$; поэтому рассмотрим тот случай, когда $\sup_n \overline{I}(x_n) < +\infty$. Пусть ε — произвольное положительное число. По определению верхнего интеграла существуют функции $z_n \in M^+$ такие, что $z_n \geqslant x_n$ и $\overline{I}(z_n) < \overline{I}(x_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. Положим $u_1 = z_1$, $u_n = z_1 \cup z_2 \cup \ldots \cup z_n$ $(n > 1)$. Тогда $u_{n+1} \geqslant u_n$, $u_n \geqslant x_n$ и

$$u_{n+1} + u_n \cap z_{n+1} = u_n \cup z_{n+1} + u_n \cap z_{n+1} = u_n + z_{n+1},$$

откуда

$$\overline{I}(u_{n+1}) + \overline{I}(u_n \cap z_{n+1}) = \overline{I}(u_n) + \overline{I}(z_{n+1}).$$

Следовательно,

$$\overline{I}(u_{n+1}) = \overline{I}(u_n) + \overline{I}(z_{n+1}) - \overline{I}(u_n \cap z_{n+1}) \leqslant \overline{I}(u_n) + \overline{I}(z_{n+1}) - \overline{I}(x_n) \leqslant$$
$$\leqslant \overline{I}(u_n) + \overline{I}(x_{n+1}) - \overline{I}(x_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

Складывая почленно эти неравенства при $n = 1, 2, \ldots, m-1$, получим $\overline{I}(u_m) \leqslant \overline{I}(x_m) + \varepsilon$, следовательно, в силу III п. 3

$$\sup_m \overline{I}(x_m) + \varepsilon \geqslant \overline{I}(\sup_m U_m) \geqslant \overline{I}(\sup_m x_m).$$

Ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$ отсюда следует формула (4).

Очевидно, (4) можно также записать в виде

$$\overline{I}(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{I}(x_n). \tag{5}$$

II. *Для любого конечного или счетного числа функций $x_n \geqslant 0$*

$$\overline{I}\left(\sum_n x_n\right) \leqslant \sum_n \overline{I}(x_n). \tag{6}$$

Доказательство. Для конечного числа слагаемых утверждение получается по индукции из (3); а тогда для счетного числа слагаемых оно получается, если применить (5) к конечным суммам $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ вместо x_n.

Функция $x(t) \geqslant 0$ называется *нулевой*, если $\overline{I}(x) = 0$. Из (1), (2), (4) и (6) заключаем:

III. *Если $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2$ и x_2 — нулевая функция, то и x_1 и αx_2 при $\alpha \geqslant 0$ — также нулевые функции; верхняя грань неубывающей последовательности нулевых функций есть нулевая функция; сумма конечного или счетного числа нулевых функций есть нулевая функция.*

5. Внешняя мера множества. *Характеристической функцией* множества $A \subset T$ называют функцию

$$\xi_A(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \in A, \\ 0 & \text{при} \quad t \notin A. \end{cases}$$

Число $\overline{\mu}(A) = \overline{I}(\xi_A)$ называется *внешней мерой* множества A.

Так как $\xi_{A_1} \leqslant \xi_{A_2}$ при $A_1 \subset A_2$, то в силу (1) п. 4

$$\overline{\mu}(A_1) \leqslant \overline{\mu}(A_2) \quad \text{при} \quad A_1 \subset A_2. \tag{1}$$

Далее, из соотношения $\xi_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots} \leqslant \xi_{A_1} + \xi_{A_2} + \ldots$ и II п. 4 вытекает, что для любого конечного или счетного числа множеств A_1, A_2, ...

$$\overline{\mu}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) \leqslant \overline{\mu}(A_1) + \overline{\mu}(A_2) + \ldots. \tag{2}$$

Аналогично, если $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$, то $\xi_{A_1} \leqslant \xi_{A_2} \leqslant \ldots$ и $\xi_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots} = \sup\limits_n \xi_{A_n}$; применяя I п. 4, заключаем, что

$$\overline{\mu}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \lim_n \overline{\mu}(A_n) \quad \text{при} \quad A_1 \subset A_2 \subset \ldots. \tag{3}$$

I. *Если $\mathfrak{B}$ — произвольное семейство попарно непересекающихся открытых множеств $V \subset T$, то*

$$\overline{\mu}\Bigl(\bigcup_{V \in \mathfrak{B}} V\Bigr) = \sum_{V \in \mathfrak{B}} \overline{\mu}(V). \tag{4}$$

Утверждение непосредственно следует из V п. 3, ибо характеристическая функция открытого множества V полунепрерывна снизу [1]).

Аналогично из III п. 3 заключаем:

II. *Если $\mathfrak{B}$ — произвольное направленное семейство открытых множеств V, упорядоченное при помощи операции включения $\subset$, то*

$$\overline{\mu}\Bigl(\bigcup_{V \in \mathfrak{B}} V\Bigr) = \sup_{V \in \mathfrak{B}} \overline{\mu}(V).$$

III. *Внешняя мера всякого бикомпактного множества Q конечна.*

---

[1]) Действительно, если $t_0 \in V$, то некоторая окрестность $U(t_0) \subset V$, и потому из $1 = \xi_V(t_0) > h$ следует $\xi_V(t) > h$ при $t \in U(t_0)$. Если же $t_0 \notin V$, то для произвольного $t \in T$

$$\xi_V(t) \geqslant 0 > h.$$

Аналогично, если A замкнуто, то ξ_A полунепрерывна сверху.

Действительно, на основании леммы Урысона существует функция $y \in L^+$, не превосходящая единицы и равная единице на Q. Тогда $\xi_Q \leqslant y$, и потому

$$\overline{\mu}(Q) = \overline{I}(\xi_Q) \leqslant \overline{I}(y) = I(y) < +\infty.$$

IV. *Для любого множества A внешняя мера $\overline{\mu}(A)$ есть нижняя грань внешних мер $\overline{\mu}(U)$ открытых множеств $U \supset A$.*

Доказательство. Утверждение очевидно, если $\overline{\mu}(A) = +\infty$.

Пусть $\overline{\mu}(A) < +\infty$; тогда для всякого $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 1$, существует функция $x \in M^+$ такая, что $\xi_A(t) \leqslant x(t)$ и $\overline{I}(x) < \overline{\mu}(A) + \varepsilon$. Положим $U = \{t\colon x(t) > 1 - \varepsilon\}$; так как $x \in M^+$, то, как легко видеть, U открыто и $U \supset A$. С другой стороны, $x \geqslant (1-\varepsilon)\,\xi_U$, и потому $\overline{\mu}(U) \leqslant \dfrac{1}{1-\varepsilon}\,\overline{I}(x) < \dfrac{1}{1-\varepsilon}\,[\overline{\mu}(A) + \varepsilon]$; ввиду произвольности ε отсюда следует утверждение.

Множество A называется *нулевым*, если $\overline{\mu}(A) = 0$. Из (1) и (2) заключаем:

V. *Всякая часть нулевого множества есть нулевое множество*; *объединение конечного или счетного числа нулевых множеств есть нулевое множество.*

Кроме того,

VI. *Функция $x(t) \geqslant 0$ является нулевой тогда и только тогда*, *когда $A = \{t\colon x(t) > 0\}$ есть нулевое множество.*

Доказательство. Если $x(t)$ — нулевая функция, то, так как $\xi_A \leqslant \sup\limits_n (nx)$, в силу (4) п. 4 имеем $\overline{\mu}(A) \leqslant \sup\limits_n n\overline{I}(x) = \sup 0 = 0$. Обратно, если A — нулевое множество, то, так как $x \leqslant \sup\limits_n n\xi_A$, имеем $\overline{I}(x) \leqslant \sup\limits_n nI(\xi_A) = 0$.

VII. *Если $\overline{I}(x) < +\infty$, то $A = \{t\colon x(t) = +\infty\}$ есть нулевое множество.*

Доказательство. Так как $\xi_A \leqslant \dfrac{1}{n}\,x$, то

$$\overline{\mu}(A) = \overline{I}(\xi_A) \leqslant \frac{1}{n}\overline{I}(x);$$

перейдя здесь к пределу при $n \to \infty$, получим, что $\overline{\mu}(A) = 0$.

6. Эквивалентные функции. Будем говорить, что некоторое свойство имеет место *почти всюду на T*, если совокупность всех точек $t \in T$, для которых это свойство не имеет места, есть нулевое множество.

Две комплексные всюду определенные и конечные функции x_1, x_2 будем называть *эквивалентными* и писать $x_1 \sim x_2$, если $x_1(t) = x_2(t)$ почти всюду на T. Из V п. 5 легко следует, что все свойства эквивалентности (см. с. 20) будут выполнены, так что совокупность всех комплексных функций разбивается на классы эквивалентных между собой функций.

Легко видеть, что если $x_1 \sim x_2$, $y_1 \sim y_2$, то $cx_1 \sim cx_2$ (при любом комплексном c) и $x_1 + y_1 \sim x_2 + y_2$.

До сих пор мы рассматривали функции, определенные для всех $t \in T$; для дальнейшего нам удобно будет рассматривать функции, определенные и конечные лишь почти всюду на T. Две такие функции x_1, x_2 мы по-прежнему будем называть *эквивалентными* и писать $x_1 \sim x_2$, если $x_1(t) = x_2(t)$ почти всюду на T. Совокупность всех комплексных функций, определенных и конечных почти всюду на T, также распадается на классы эквивалентных между собой функций.

Каждый такой класс ξ содержит функции, всюду определенные и конечные. Мы определим сумму $\xi + \eta$ двух классов ξ, η и произведение $c\xi$ класса ξ на комплексное число c как классы, содержащие сумму $x + y$ и произведение cx, где x, y — всюду определенные и конечные функции из ξ, η соответственно. В силу сказанного выше это определение не зависит от выбора x и y.

Легко проверить, что все аксиомы линейного пространства будут при этом выполнены, следовательно, классы эквивалентных почти всюду определенных функций образуют линейное пространство.

Распространим теперь верхний интеграл $\overline{I}(x)$ на все функции $x(t) \geqslant 0$, определенные почти всюду на T, считая $I(x) = \overline{I}(y)$, где y — любая неотрицательная всюду определенная, конечная и эквивалентная x функция.

Это определение не зависит от выбора функции $y \sim x$. Действительно, если y_1, y_2 всюду определены и конечны и $y_1 \sim x$ и $y_2 \sim x$, то $y_1 \sim y_2$ и, следовательно, $I(|y_1 - y_2|) = 0$. Так как $y_1 \leqslant y_2 + |y_1 - y_2|$, то $\overline{I}(y_1) \leqslant \overline{I}(y_2) + \overline{I}(|y_1 - y_2|) = \overline{I}(y_2)$ и, аналогично, $\overline{I}(y_2) \leqslant \overline{I}(y_1)$; следовательно, $\overline{I}(y_1) = \overline{I}(y_2)$.

Легко видеть, что перечисленные в п. 4 свойства верхнего интеграла остаются в силе: например, если $x_1 \leqslant x_2$ почти всюду, то $\overline{I}(x_1) \leqslant \overline{I}(x_2)$, и т. д.

Определим $\overline{I}(|\xi|)$ формулой

$$\overline{I}(|\xi|) = \overline{I}(|x|) \quad \text{при} \quad x \in \xi.$$

Это определение не зависит от выбора функции $x \in \xi$, ибо если $x_1 \sim x_2$, то также $|x_1| \sim |x_2|$; следовательно, по доказанному выше, $\overline{I}(|x_1|) = \overline{I}(|x_2|)$. При этом в силу (1), (2) и (3) п. 4

$$\overline{I}(|c\xi|) = |c|\,\overline{I}(|\xi|), \quad I(|\xi + \eta|) \leqslant \overline{I}(|\xi| + |\eta|) \leqslant \overline{I}(|\xi|) + \overline{I}(|\eta|) \tag{1}$$

и в силу VI п. 5

$$I(|\xi|) = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } \xi = 0. \tag{2}$$

7. Пространства $\mathscr{L}^1$ и L^1. Обозначим через $\mathscr{L}^1$ совокупность всех классов ξ эквивалентных комплексных функций x, определенных для почти всех $t \in T$ и удовлетворяющих условию $\overline{I}(|\xi|) < +\infty$. Эти классы образуют линейное пространство, ибо в силу (1) и (2) п. 6, если ξ_1, $\xi_2 \in \mathscr{L}^1$, то

$$\overline{I}(|c\,\xi_1|) = |c|\,\overline{I}(|\xi_1|) < +\infty,$$
$$\overline{I}(|\xi_1 + \xi_2|) \leqslant \overline{I}(|\xi_1| + |\xi_2|) \leqslant \overline{I}(|\xi_1|) + \overline{I}(|\xi_2|) < +\infty.$$

Определим в $\mathscr{L}^1$ норму, положив $\|\xi\|_1 = \overline{I}(|\xi|)$; предыдущие неравенства показывают, что все аксиомы нормы выполняются, так что $\mathscr{L}^1$ становится при этом нормированным пространством.

В дальнейшем нам удобно будет не различать эквивалентные между собой функции; в таком случае класс ξ можно заменить любой функцией $x \in \xi$ и писать $\|x\|_1 = \overline{I}(|x|)$ вместо $\|\xi\|_1$.

Отметим, что если (x_n) — произвольная последовательность почти всюду определенных функций, так что $x_n(t)$ не определена на нулевом множестве A_n, то все функции $x_n(t)$ определены на множестве $T - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, где $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ — нулевое множество.

I. *Если* $x_n \in \mathscr{L}^1$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_1$ *сходится, то*

а) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n(t)$ *абсолютно сходится почти всюду*;

б) *функция* $s(t) = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n(t), & \text{если все } x_n(t) \text{ определены и ряд сходится}, \\ 0 \text{ в противном случае}, \end{cases}$

есть элемент пространства $\mathscr{L}^1$;

в) *ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *сходится по норме к* s.

Доказательство. В силу (6) п. 4

$$\overline{I}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \overline{I}(|x_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_1 < +\infty;$$

на основании VII п. 5 отсюда заключаем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n(t)|$ сходится почти всюду на t.

Далее, $|s| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|$ почти всюду на T, и потому

$$\overline{I}(|s|) \leqslant \overline{I}\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_1 < +\infty.$$

Следовательно, $s \in \mathscr{L}^1$.

Наконец, из неравенства $\left|s - \sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} |x_k|$, справедливого почти всюду на T, заключаем, что

$$\left\| s - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\|_1 \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x_k\|_1 \to 0$$

при $n \to \infty$, так что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ сходится по норме к s.

II. *Пространство $\mathscr{L}^1$ полно.*

Доказательство. Пусть (x_n) — фундаментальная последовательность в $\mathscr{L}^1$; тогда можно выбрать подпоследовательность x_{n_k} так, что $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|_1 \leqslant \frac{1}{2^{k+1}}$, и потому ряд $\|x_{n_1}\|_1 + \|x_{n_2} - x_{n_1}\| + \ldots$ сходится. В силу I тогда ряд $x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + (x_{n_1} - x_{n_2}) + \ldots$ сходится по норме к некоторому элементу $x \in \mathscr{L}^1$, т. е. $\|x - x_{n_k}\| \to 0$ при $k \to \infty$. Так как исходная последовательность x_n фундаментальна, то также $\|x - x_n\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$, и полнота $\mathscr{L}^1$ доказана.

Замечание. Из этого доказательства и предложения I вытекает, что *если $x_n \in \mathscr{L}^1$ и $\|x - x_n\|_1 \to 0$, то существует подпоследовательность x_{n_k} такая, что $x_{n_k}(t) \to x(t)$ почти для каждого $t \in T$.*

Если $x \in L$, то $\overline{I}(|x|) = I(|x|) < \infty$; следовательно, x входит в один из классов $\xi \in \mathscr{L}^1$. Отождествляя x с этим классом ξ, мы можем считать, что L — подпространство в $\mathscr{L}^1$. Замыкание L в $\mathscr{L}^1$ есть полное по норме $\|x\|_1$ подпространство в $\mathscr{L}^1$; это замыкание мы обозначим через L^1. В силу этого определения L *плотно в* L^1. Функции, принадлежащие L^1, мы будем называть *суммируемыми*.

В силу неравенства (1) п. 2

$$|I(x)| \leqslant \|x\|_1 \tag{1}$$

для всех $x \in L$; это означает, что $I(x)$ есть ограниченный линейный функционал в L и, следовательно, продолжается единственным образом, с сохранением неравенства (1), до ограниченного линейного функционала в L^1 (см. II п. 4 § 4), который мы также обозначим через $I(x)$. Этот функционал $I(x)$ называется *интегралом* функции $x \in L^1$.

Очевидно, *всякая нулевая функция x суммируема и $I(|x|) = 0$*, ибо нулевую функцию можно рассматривать как предел по норме $\| \; \|_1$ последовательности функций $x_n = 0$, принадлежащих L.

Совокупность всех вещественных функций $x \in L^1$ образует вещественное линейное подпространство в L^1; оно называется *вещественным пространством L^1*.

Из предыдущих рассуждений вытекает, что *вещественное пространство L^1 полно.*

III. *Если* $x \in L^1$, *то* $|x| \in L^1$ *и*

$$|I(x)| \leqslant I(|x|). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $x_n \in L$ и $\|x - x_n\|_1 \to 0$; из неравенства $\big||x| - |x_n|\big| \leqslant |x - x_n|$ вытекает, что $\||x| - |x_n|\|_1 \leqslant \|x - x_n\|_1 \to 0$. Так как $|x_n| \in L^+$, то отсюда следует, что $|x| \in L^1$. Кроме того, переходя к пределу в неравенстве $|I(x_n)| \leqslant I(|x_n|)$ и пользуясь непрерывностью функционала $I(x)$ по норме $\|x\|_1$, получим (2).

IV. *Если* $x \in L^1$ *и* $x \geqslant 0$, *то*

$$I(x) = \overline{I}(x) = \|x\|_1. \tag{3}$$

Действительно, (3) справедливо для $x \in L^+$; так как $I(x)$ и $\|x\|_1$ непрерывны по норме $\|x\|_1$ и всякий неотрицательный элемент x из L^1 есть предел по этой норме последовательности $x_n \in L^+$ (см. доказательство предложения III), то (3) справедливо для всех неотрицательных x из L^1.

Из III следует

V. *Если вещественные функции* x, y *принадлежат* L^1, *то также* $x \cap y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$ *и* $x \cup y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$ *принадлежат* L^1.

VI. *Если* $x_n \geqslant 0$ *почти всюду*, $x_n \in L^1$ *и ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} I(x_n)$ *сходится*, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ *сходится в* L^1 *по норме к элементу* $x \in L^1$ *и* $I(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} I(x_n)$.

Утверждение непосредственно следует из I и непрерывности функционала $I(x)$ по норме в L^1.

VII. *Если* x_n — *неубывающая* (*невозрастающая*) *последовательность вещественных функций из* L^1, *а последовательность* $I(x_n)$ *ограничена сверху* (*снизу*), *то функция* $x = \lim x_n \in L^1$ *и* $I(x) = \lim\limits_{n\to\infty} I(x_n)$.

Доказательство. Рассмотрим случай неубывающей последовательности (случай невозрастающей последовательности сводится к нему переходом от x_n, x к $-x_n$, $-x$). Имеем $x_{n+1} - x_n \geqslant 0$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$. Тогда почти всюду $x = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots$, причем ряд $I(x_2 - x_1) + I(x_3 - x_2) + \ldots = \lim\limits_{n\to\infty} I(x_n) - I(x_1)$ сходится. На основании VI $x - x_1 = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \ldots \in L^1$ и $I(x - x_1) = \lim\limits_{n\to\infty} I(x_n) - I(x_1)$. Отсюда $x \in L^1$ и $I(x) = \lim\limits_{n\to\infty} I(x_n)$.

VIII. *Полунепрерывная снизу неотрицательная функция* $x(t)$ *суммируема тогда и только тогда*, *когда* $\overline{I}(x) < +\infty$.

Доказательство. Необходимость очевидна; докажем достаточность. Пусть $x \in M^+$ и $\overline{I}(x) < +\infty$. По определению $\overline{I}(x)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует $y \in L^+$ такая, что $y \leqslant x$ и $\overline{I}(x) < I(y) + \varepsilon$. Но $x - y \geqslant 0$ и полунепрерывна снизу, следовательно, в силу IV п. 3 $\overline{I}(x) = \overline{I}(y + x - y) = I(y) + \overline{I}(x - y)$ и $\overline{I}(x - y) = \overline{I}(x) - \overline{I}(y) < \varepsilon$. Отсюда $x \in L^1$ по определению L^1.

IX. *Полунепрерывная сверху конечная неотрицательная функция x суммируема тогда и только тогда, когда $\overline{I}(x) < +\infty$.*

Доказательство. Очевидно, в доказательстве нуждается только достаточность условия. Итак, пусть $x(t) \geqslant 0$, конечна, непрерывна сверху и $\overline{I}(x) < +\infty$. По определению $\overline{I}(x)$, для любого $\varepsilon > 0$ существует функция $y \in M^+$ такая, что $y \geqslant x$, $\overline{I}(y) \leqslant \overline{I}(x) + \varepsilon$. Тогда $y - x \in M^+$ и $y - x \leqslant y$. Отсюда $\overline{I}(y - x) \leqslant \overline{I}(y) < \overline{I}(x) + \varepsilon < \infty$, и потому (см. VIII) $y - x \in L^1$, $y \in L^1$; следовательно, также $x = y - (y - x) = L^1$.

X. *Если неотрицательная функция x суммируема, то для каждого $\varepsilon > 0$ существуют конечная функция $z \in N^+$ с бикомпактным носителем и функция $y \in M^+$ такие, что $z \leqslant x \leqslant y$ почти всюду и $\overline{I}(y - z) < \varepsilon$.*

Доказательство. Если $x \geqslant 0$ и $x \in L^1$, то существует функция $u \in L^+$ такая, что $\overline{I}(|x - u|) < \frac{\varepsilon}{4}$; по определению $\overline{I}$ это означает, что существует функция $v \in M^+$, для которой $\overline{I}(v) < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|x - u| \leqslant v$ почти всюду. Таким образом, почти всюду $-v \leqslant x - u \leqslant v$ и $(u - v) \cup 0 \leqslant x \leqslant u + v$; следовательно, функции $z = (u - v) \cup 0$, $y = u + v$ будут удовлетворять поставленным требованиям [1]).

XI. *Для всякой неотрицательной суммируемой функции x существуют неубывающая последовательность конечных $z_n \in N^+$ с бикомпактными носителями и невозрастающая последовательность $y_n \in M^+$ такие, что $\lim\limits_{n \to \infty} z_n \leqslant x \leqslant \lim\limits_{n \to \infty} y_n$ почти всюду и*

$$I(\lim_{n \to \infty} z_n) = I(x) = I(\lim_{n \to \infty} y_n), \quad \textit{а} \quad \lim_{n \to \infty} z_n \sim x \sim \lim_{n \to \infty} y_n.$$

Доказательство. Полагая в X $\varepsilon = \frac{1}{n}$, получим конечные функции $z'_n \in N^+$ с бикомпактными носителями и функции $y'_n \in M^+$ такие, что $z'_n \leqslant x \leqslant y'_n$ и $\overline{I}(y'_n - z'_n) < \frac{1}{n}$. Тогда функции

$$z_n = z'_1 \cup z'_2 \cup \ldots \cup z'_n, \quad y_n = y'_1 \cap y'_2 \cap \ldots \cap y'_n$$

---

[1]) Для всюду определенной и конечной функции x соотношение $z \leqslant x \leqslant y$ будет выполняться всюду, ибо в этом случае существует функция $v \in M^+$, для которой $\overline{I}(v) < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|x - u| \leqslant v$ всюду (см. п. 4).

будут удовлетворять поставленным требованиям, ибо в силу VII

$$I(x - \lim_{n\to\infty} z_n) = \lim_{n\to\infty} I(x - z_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} I(y_n - z_n) \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{n\to\infty} \overline{I}(y_n' - z_n') \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

и аналогично $I(\lim_{n\to\infty} y_n - x) = 0$.

XII. *Если неотрицательная функция x суммируема, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое бикомпактное множество Q, что $\overline{I}(x\xi_{T-Q}) < \varepsilon$.*

Доказательство. Пусть y, z — те же, что и в предложении X, и пусть Q — носитель z. Тогда $\overline{I}(x\xi_{T-Q}) = \overline{I}((x-z)\,\xi_{T_Q}) \leqslant \overline{I}(y-z) < < \varepsilon$.

8. Суммируемые множества. Множество A называется *суммируемым*, если его характеристическая функция $\xi_A(t)$ суммируема; в этом случае число $\mu(A) = I(\xi_A)$ называется *мерой* [1] (точнее, I-мерой) множества A. В силу IV п. 7 *мера суммируемого множества совпадает с его внешней мерой $\mu(A) = \overline{\mu}(A)$.*

I. *Всякое нулевое множество суммируемо, и его мера равна нулю.*

Действительно, если A — нулевое множество, то ξ_A — нулевая функция, следовательно, $\xi_A \in L^1$ и $\mu(A) = I(\xi_A) = 0$.

II. *Если A_1, A_2 суммируемы и $A_1 \subset A_2$, то $\mu(A_1) \leqslant \mu(A_2)$.*

Утверждение непосредственно следует из (1) п. 5.

III. *Объединение конечного числа и пересечение конечного или счетного числа суммируемых множеств суммируемо и для конечного числа попарно не пересекающихся суммируемых множеств A_1, A_2, ..., A_n*

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \ldots + \mu(A_n).$$

Утверждения непосредственно следуют из соотношений [2]

$$\xi_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \xi_{A_1} \cup \xi_{A_2} \cup \ldots \cup \xi_{A_n},$$
$$\xi_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} = \xi_{A_1} \cap \xi_{A_2} \cap \ldots \cap \xi_{A_n},$$
$$\xi_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} \searrow \xi_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots},$$

$\xi_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \xi_{A_1} + \xi_{A_2} + \ldots + \xi_{A_n}$, если $A_j \cap A_k = \varnothing$ при $j \neq k$, предложений V, VII п. 7 и линейности пространства L^1 и функционала $I(x)$.

[1] В дальнейшем термин «мера» всегда будет означать меру, таким образом определенную при помощи некоторого интеграла I.

[2] Символы $x_n \searrow x$ ($x_n \nearrow x$) обозначают, что x_n — невозрастающая (неубывающая) последовательность, сходящаяся к x.

IV. *Если* A_1, A_2, … *суммируемы и ряд* $\mu(A_1)+\mu(A_2)+\ldots$ *сходится, то множество* $A_1\cup A_2\cup\ldots$ *суммируемо и*

$$\mu(A_1\cup A_2\cup\ldots)\leqslant\mu(A_1)+\mu(A_2)+\ldots.$$

Если, кроме того, множества A_k *попарно не пересекаются, то*

$$\mu(A_1\cup A_2\cup\ldots)=\mu(A_1)+\mu(A_2)+\ldots.$$

Утверждения следуют из соотношений

$$\xi_{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n}\nearrow\xi_{A_1\cup A_2\cup\ldots}\leqslant\xi_{A_1}+\xi_{A_2}+\ldots,$$
$$\xi_{A_1\cup A_2\cup\ldots}=\xi_{A_1}+\xi_{A_2}+\ldots,\quad\text{если}\quad A_j\cap A_k=\varnothing\quad\text{при}\quad j\neq k,$$

и предложений V, VI, VII п. 7.

V. *Если* A_1, A_2 *суммируемы и* $A_1\supset A_2$, *то* A_1-A_2 *суммируема и*

$$\mu(A_1-A_2)=\mu(A_1)-\mu(A_2).$$

Действительно, если $A_1\supset A_2$, то

$$\xi_{A_1-A_2}=\xi_{A_1}-\xi_{A_2}$$

и утверждение следует из линейности L^1 и $I(x)$.

VI. *Если* A_1, A_2, A_3, … *суммируемы и* $A_1\supset A_2\supset A_3\supset\ldots$, *то*

$$\mu(A_1\cap A_2\cap\ldots)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n);$$

если же $A_1\subset A_2\subset\ldots$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n)$ *конечен, то* $A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots$ *суммируемо и*

$$\mu(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\ldots)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n).$$

Доказательство. В первом случае $\xi_{A_n}\searrow\xi_{A_1\cap A_2\cap\ldots}$, а во втором $\xi_{A_n}\nearrow\xi_{A_1\cup A_2\cup\ldots}$, и утверждение следует из VII п. 7.

VII. *Открытое* (*замкнутое*) *множество суммируемо, если* $\overline{\mu}(A)<+\infty$; *в частности, открытое* (*замкнутое*) *множество, содержащееся в бикомпактном множестве, суммируемо.*

Действительно, характеристическая функция открытого (замкнутого) множества A полунепрерывна снизу (сверху) и остается применить VIII и IX п. 7 и III п. 5.

VIII. *Всякое бикомпактное множество суммируемо*; *всякое открытое множество с бикомпактным замыканием суммируемо.*

Утверждение непосредственно следует из VII.

IX. *Для суммируемости множества* A *необходимо и достаточно, чтобы для каждого* $\varepsilon>0$ *существовали суммируемое открытое множество* $U\supset A$ *и бикомпактное множество* $Q\subset A$ *такие, что*

$$\mu(U-Q)<\varepsilon.$$

Доказательство. Условие достаточно, ибо оно означает, что $\xi_Q \leqslant \xi_A \leqslant \xi_U$, $I(\xi_U - \xi_Q) < \varepsilon$, и потому

$$\|\xi_A - \xi_Q\|_1 \leqslant \|\xi_U - \xi_Q\|_1 = I(\xi_U - \xi_Q) < \varepsilon.$$

Так как $\xi_Q \in L^1$, то также $\xi_A \in L^1$.

Обратно, пусть A суммируемо. В силу IV п. 5 существует множество U такое, что $\mu(U) < \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2}$. Далее, на основании X п. 7 существует конечная функция $z \in N^+$ с бикомпактным носителем Q_z такая, что $z \leqslant \xi_A$ (см. с. 153) и $I(\xi_A - z) < \frac{\varepsilon}{4}$. Положим $Q = \{t\colon z(t) \geqslant \delta\}$, где $\delta > 0$; тогда Q — замкнутое подмножество в Q_z и потому бикомпактно. Пусть $t \in Q$; тогда $\xi_A(t) \geqslant z(t) \geqslant \delta > 0$, следовательно, $\xi_A(t) = 1$ и $t \in A$. Поэтому $Q \subset A$ и множество $B = A - Q$ суммируемо. Из неравенства $z \leqslant \xi_Q + \delta\xi_B$ вытекает, что $I(z) \leqslant \mu(Q) + \delta\mu(B) \leqslant \mu(Q) + {}$ ${} + \delta\mu(A)$, и потому $\mu(A) < I(z) + \frac{\varepsilon}{4} < \mu(Q) + \delta\mu(A) + \frac{\varepsilon}{4}$. Взяв δ так, чтобы $\delta\mu(A) < \frac{\varepsilon}{4}$, заключаем, что множества U и Q будут обладать требуемыми свойствами.

Из IX следует, что *мера всякого суммируемого множества A есть верхняя грань мер бикомпактных множеств $Q \subset A$.*

X. *Если A суммируемо, то существуют последовательность открытых множеств $U_n \supset A$ и конечная или счетная последовательность непересекающихся бикомпактных множеств $Q_n \subset A$ таких, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n - A$ и $A - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n$ — нулевые множества.*

Доказательство. Положим в IX $\varepsilon = \frac{1}{n}$; мы получим открытые множества U_n такие, что $\mu(U_n - A) < \frac{1}{n}$, и потому $\mu\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n - A\Big) < \frac{1}{n}$ для всех n, т. е. $\mu\Big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} U_n - A\Big) = 0$.

Множества Q_n построим по индукции. В силу IX (при $\varepsilon = 1$) существует $Q_1 \subset A$ такое, что $\mu(A - Q_1) < 1$; далее, в силу IX (при $\varepsilon = \frac{1}{2}$) существует $Q_2 \subset A - Q_1$ такое, что $\mu(A - Q_1 - Q_2) < \frac{1}{2}$, и т. д. На n-м шаге, если еще $A - Q_1 - \ldots - Q_{n-1}$ не пусто, получим $Q_n \subset A - Q_1 - \ldots - Q_{n-1}$ такое, что $\mu(A - Q_1 - \ldots - Q_n) < \frac{1}{n}$. Отсюда $\mu\Big(A - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_N\Big) < \frac{1}{n}$ для всех n, т. е. $\mu\Big(A - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n\Big) = 0$.

XI. *Если $\overline{\mu}(A) < \infty$, то A содержится в объединении непересекающихся нулевого множества и конечного или счетного числа бикомпактных множеств.*

Для доказательства достаточно применить X к суммируемому открытому множеству $U \supset A$ (см. IV п. 5).

9. Измеримые множества. Множество A называется *измеримым*, если его пересечение с любым бикомпактным множеством суммируемо. Из этого определения и предложений III и VIII п. 8 следует, что *всякое суммируемое множество измеримо* и что *пространство T измеримо*.

I. *Объединение и пересечение конечного или счетного числа измеримых множеств измеримы.*

Доказательство. Пусть A_n измеримы, а Q — произвольное бикомпактное множество, так что $A_n \cap Q$ суммируемы. Из соотношения

$$\left(\bigcap_n A_n\right) \bigcap Q = \bigcap_N \left(A_n \bigcap Q\right)$$

и III п. 8 следует, что $\left(\bigcap\limits_n A_n\right) \bigcap Q$ суммируемо, следовательно, $\bigcap\limits_n A_n$ измеримо. Далее, из соотношений

$$\left(\bigcap_n A_n\right) \bigcap Q = \bigcup_n \left(A_n \bigcap Q\right),$$

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} \left(A_n \bigcap Q\right)\right) \leqslant \mu(Q)$$

и предложения VI п. 8 заключаем, что также $\left(\bigcup\limits_n A_n\right) \bigcap Q$ суммируемо, следовательно, $\bigcup\limits_n A_n$ измеримо.

II. *Если A, B измеримы и $A \supset B$, то $A - B$ измеримо.*

Действительно, для произвольного бикомпактного $Q(A - B) \cap Q = (A \cap Q) - (B \cap Q)$, и утверждение следует из V п. 8.

В частности, *дополнение $T - A$ всякого измеримого множества A измеримо*.

III. *Всякое замкнутое и всякое открытое множества измеримы.*

Доказательство. Если A замкнуто, а Q бикомпактно, то $A \cap Q$ бикомпактно, и значит суммируемо, поэтому все замкнутые множества измеримы. Но тогда и открытые множества, являющиеся дополнениями замкнутых, измеримы.

IV. *Если A измеримо и $\overline{\mu}(A) < +\infty$, то A суммируемо.*

Доказательство. В силу XI п. 8 $A \subset \cup Q_n$, где Q_0, Q_1, Q_2, ... попарно не пересекаются, Q_0 — нулевое множество, а Q_n $(n \geqslant 1)$ — бикомпактные множества; следовательно, $A = \cup(A \cap Q_n)$, где $A \cap Q_0$, $A \cap Q_1$, $A \cap Q_2$, ... — непересекающиеся суммируемые множества; отсюда при любом n

$$\mu(A \cap Q_0) + \mu(A \cap Q_1) + \ldots + \mu(A \cap Q_n) = \\ = \mu[(A \cap Q_0) \cup (A \cap Q_1) \cup \ldots \cup (A \cap Q_n)] \leqslant \overline{\mu}(A),$$

следовательно, ряд $\mu(A \cap Q_0) + \mu(A \cap Q_1) + \mu(A \cap Q_2) + \ldots$ сходится и $A \cap Q$ суммируемо на основании IV п. 8.

V. *Если A измеримо, $A \subset B$ и B суммируемо, то A суммируемо.*

Утверждение непосредственно следует из IV, ибо $\overline{\mu}(A) \leqslant \mu(B) < +\infty$.

Множество A называется *локально нулевым*, если его пересечение с каждым бикомпактным множеством есть нулевое множество. Из этого определения непосредственно следует

VI. *Всякое локально нулевое множество измеримо; объединение и пересечение конечного или счетного числа локально нулевых множеств есть локально нулевое множество.*

VII. *Если A — локально нулевое множество и $\overline{\mu}(A) < +\infty$, то A — нулевое множество.*

Доказательство аналогично доказательству предложения IV.

VIII. *Если A — локально нулевое множество, то $\|x\xi_A\|_1 = 0$, следовательно, $I(x\xi_A) = 0$ для любой функции $x \in L^1$.*

Доказательство. Утверждение справедливо для функций $x \in L$, ибо тогда $x\xi_A$ отлична от нуля лишь на нулевом множестве $Q_x \cap A$, где Q — носитель x. Но для любой функции $x \in L^1$ существует последовательность $x_n \in L$ такая, что $\|x - x_n\|_1 \to 0$. Тогда также $\|x\xi_A - x_n\xi_A\|_1 \to 0$, и потому

$$\|x\xi_A\|_1 \leqslant \|x\xi_A - x_n\xi_n\|_1 + \|x_n\xi_A\|_1 = \|x\xi_A - x_n\xi_A\|_1 \to 0,$$

что возможно лишь при $\|x\xi_A\|_1 = 0$.

О некотором свойстве мы будем говорить, что оно имеет место *локально почти всюду на T*, если совокупность всех точек t, для которых это свойство не имеет места, есть локально нулевое множество.

10. Измеримые функции. Будем рассматривать вещественные функции, локально почти всюду определенные и конечные. Такая функция x называется *измеримой*, если при любом вещественном a множество [1] $A = \{t\colon x(t) > a\}$ измеримо. Очевидно, константа есть измеримая функция. Кроме того, из соотношений

$$\begin{aligned}
&\{t\colon x(t) \leqslant a\} = T - \{t\colon x(t) > a\},\\
&\{t\colon a < x(t) \leqslant b\} = \{t\colon x(t) > a\} - \{t\colon x(t) > b\},\\
&\{t\colon x(t) = a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{t\colon a - \frac{1}{n} < x(t) \leqslant a\right\},\\
&\{t\colon x(t) < a\} = \{t\colon x(t) \leqslant a\} - \{t\colon x(t) = a\},\\
&\{t\colon x(t) \geqslant a\} = \{t\colon x(t) > a\} + \{t\colon x(t) = a\}
\end{aligned}$$

и I–II п. 9 вытекает, что в случае измеримой функции x каждое из множеств $\{t\colon x(t) \leqslant\}$, $\{t\colon a < x(t) \leqslant b\}$, $\{t\colon x(t) = a\}$, $\{t\colon x(t) < a\}$, $\{t\colon x(t) \geqslant a\}$ также измеримо.

[1] При этом учитываются лишь те $t \in T$, для которых $x(t)$ определена.

Две функции x_1, x_2 называются *локально эквивалентными*, если множество $\{t\colon x_1(t) \neq x_2(t)\}$ является локально нулевым.

I. *Если x_1, x_2 локально эквивалентны и x_1 измерима, то x_2 также измерима.*

Доказательство. Положим

$$A_1 = \{t\colon x_1(t) > a\}, \quad A_2 = \{t\colon x_2(t) > a\}, \quad B = \{t\colon x_1(t) \neq x_2(t)\}.$$

В силу соотношений $A_2 - (A_1 \cap A_2) \subset B$, $A_1 - (A_1 \cap A_2) \subset B$ множества $A_2 - (A_1 \cap A_2)$, $A_1 - (A_1 \cap A_2)$ локально нулевые; отсюда и из измеримости множества A_1 заключаем, что множества $A_1 \cap A_2 = A_1 - (A_1 - (A_1 \cap A_2))$ и $A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_2 - (A_1 \cap A_2))$ измеримы.

II. *Функция x измерима, если множество $\{t\colon x(t) > r\}$ измеримо при любом рациональном r.*

Доказательство. Пусть a — произвольное вещественное число, а r_n — убывающая последовательность рациональных чисел, сходящаяся к a. Тогда $\{t\colon x(t) > a\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{t\colon x(t) > r_n\}$; следовательно, множество $\{t\colon x(t) > a\}$ измеримо.

III. *Если x_1, x_2 измеримы, то $A = \{t\colon x_1(t) < x_2(t)\}$ измеримо.*

Доказательство. Пусть r_n — последовательность всех рациональных чисел; тогда множество A измеримо в силу соотношения

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\{t\colon x_1(t) < r_n\} \cap \{t\colon x_2(t) > r_n\}].$$

IV. *Если x_1, x_2 измеримы и c — произвольное вещественное число, то*: 1) cx_1 *измерима*; 2) $x_1 + c$ *измерима*; 3) $x_1 + x_2$ *измерима* [1]; 4) $|x_1|$ *измерима*; 5) x_1^2 *измерима*; 6) $x_1 x_2$ *измерима*; 7) *если, кроме того, x_2 обращается в нуль лишь на локально нулевом множестве, то $\frac{x_1}{x_2}$ измерима.*

Доказательство. Утверждение 1) следует из соотношений

$$\{t\colon cx_1 > a\} = \left\{t\colon x_1 > \frac{a}{c}\right\} \quad \text{при} \quad c > 0,$$
$$\{t\colon cx_1 > a\} = \left\{t\colon x_1 < \frac{a}{c}\right\} \quad \text{при} \quad c < 0;$$

при $c = 0$ функция cx_1 измерима как константа, равная нулю. Утверждение 2) следует из соотношения

$$\{t\colon x_1 + c > a\} = \{t\colon x_1 > a - c\},$$

[1] В точках t, где $x_1(t)$, $x_2(t)$ являются бесконечностями разных знаков, мы можем приписать сумме $x_1(t) + x_2(t)$ любое значение или считать ее неопределенной. Так как эти точки образуют локально нулевое множество, то сумма $x_1 + x_2$ будет измеримой при любом из этих способов ее определения.

а тогда утверждение 3) — из соотношения

$$\{t\colon x_1 + x_2 > a\} = \{t\colon x_1 > a + (-1)\, x_2\}$$

и предложения III. Далее, утверждения 4) и 5) следуют соответственно из соотношений

$$\{t\colon |x_1| > a\} = \{t\colon x_1 > a\} \cup \{t\colon x_1 < -a\},$$

$$\{t\colon x_1^2 > a\} = \begin{cases} \{t\colon x_1 > \sqrt{a}\} \cup \{t\colon x_1 < -\sqrt{a}\} & \text{при} \quad a \geqslant 0, \\ T & \text{при} \quad a < 0, \end{cases}$$

а тогда утверждение 6) вытекает из формулы

$$x_1 x_2 = \frac{1}{4}\,[(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2].$$

Наконец, если x_2 обращается в нуль лишь на локально нулевом множестве, то $1/x_2$ измерима в силу соотношений [1])

$$\left\{t\colon \frac{1}{x_2} > a\right\} = \left\{t\colon x_2 < \frac{1}{a}\right\} \quad \text{при} \quad a > 0,$$

$$\left\{t\colon \frac{1}{x_2} > a\right\} = \{t\colon x_2 \geqslant 0\} \cup \left\{t\colon x_2 < \frac{1}{a}\right\} \quad \text{при} \quad a < 0,$$

$$\left\{t\colon \frac{1}{x_2} > 0\right\} = \{t\colon x_2 \geqslant 0\};$$

следовательно, функция $\dfrac{x_1}{x_2} = x_1 \cdot \dfrac{1}{x_2}$ также измерима.

V. *Если неотрицательная функция x измерима, то функция x^c измерима при любом положительном c.*

Действительно,

$$\{t\colon [x(t)]^c > a\} = \{t\colon x(t) > a^{\frac{1}{c}}\} \quad \text{при} \quad a \geqslant 0,$$

$$\{t\colon [x(t)]^c > a\} = T \quad \text{при} \quad a < 0.$$

VI. *Если x_n — последовательность измеримых функций, ограниченная локально почти всюду, то $\sup\limits_n x_n$ и $\inf\limits_n x_n$ измеримы.*

Доказательство. Измеримость функции $\sup\limits_n x_n$ следует из соотношения

$$\{t\colon \sup_n x_n(t) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{t\colon x_n(t) > a\},$$

а функции $\inf\limits_n x_n$ — переходом к $-x_n$.

---

[1]) В тех точках t, где $x_2(t) = 0$, мы для определенности положим $\dfrac{1}{x_2(t)} = +\infty$; любое другое определение не нарушит измеримости функции $\dfrac{1}{x_2(t)}$, ибо совокупность таких точек t есть, по предположению, локально нулевое множество.

VII. *Если x_n — последовательность измеримых функций, сходящаяся к конечному пределу локально почти всюду, то предельная функция*[1] *x измерима.*

Утверждение непосредственно следует из формулы

$$\lim_n x_n = \inf_n \sup_n x_{n+k} = \sup_n \inf_n x_{n+k}$$

и предложения VI.

Комплексная функция $x = x_1 + ix_2$ называется *измеримой*, если ее вещественная и мнимая части x_1, x_2 измеримы.

Из этого определения и предложений IV и V следует, что если x, y измеримы, то $|x|$, cx (при любом комплексном c), $x+y$, xy, $\dfrac{x}{y}$ (если $\{t\colon\ y=0\}$ — локально нулевое множество) также измеримы. Кроме того, предложение VII остается справедливым и для комплексных функций.

VIII. *Функция x суммируема тогда и только тогда, когда она измерима и $\overline{I}(|x|) < +\infty$.*

Доказательство. Пусть $x \in L^1$. Тогда существует последовательность $x_n \in L$ такая, что $\|x - x_n\|_1 \to 0$. Из доказательства предложений II и I п. 7 вытекает, что некоторая подпоследовательность x_{n_k} сходится почти всюду к x. Так как x_{n_k} измеримы, то x измерима в силу VII. Кроме того, $\overline{I}(|x|) = I(|x|) < \infty$, ибо $|x| \in L^1$.

Обратно, пусть x измерима и $\overline{I}(|x|) < +\infty$. Тогда $x = y + iz$, где y, z — вещественные измеримые функции, и также $\overline{I}(|y|) < +\infty$, $\overline{I}(|z|) < +\infty$. Поэтому достаточно рассмотреть случай вещественной функции. Далее, в этом случае $x = x \cup 0 - (-x) \cup 0$ и $\overline{I}(x \cup 0) < +\infty$, $\overline{I}((-x) \cup 0) < +\infty$. Поэтому достаточно рассмотреть случай $x \geqslant 0$.

Положим $A = \{t\colon\ x(t) > a\}$, где $a > 0$. Множество A измеримо и (в силу неравенства $\xi_a \leqslant \dfrac{1}{a}x$) $\overline{\mu}(A) \leqslant \dfrac{1}{a}\overline{I}(x) < +\infty$; следовательно, A суммируемо (IV п. 9). Далее, из условия $\overline{I}(x) < +\infty$ следует, что $\{t\colon\ x(t) = +\infty\}$ — нулевое множество (VII п. 5); поэтому, заменив x эквивалентной ей функцией, мы можем считать x всюду определенной и конечной. Положим

$$A_{nm} = \{t\colon\ 2^{-n}m < x(t) \leqslant 2^{-n}(m+1)\}, \quad \xi_{nm} = \xi_{A_{nm}}$$

и

$$x_n = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-n} m \xi_{nm}.$$

По доказанному выше, множества

$$A_{nm} = \{t\colon\ x(t) > 2^{-n}m\} - \{t\colon\ x(t) > 2^{-n}(m+1)\}$$

[1] При этом учитываются лишь те t, для которых $x(t)$ определено.

суммируемы, следовательно, $\xi_{nm} \in L^1$. Кроме того, $x_n \leqslant x$ и потому $\sum\limits_{m=1}^{\infty} 2^{-n} m I(\xi_{nm}) \leqslant \overline{I}(x) < +\infty$; следовательно, $x_n \in L^1$ (см. VII п. 7). Но $x_n \nearrow x$, $I(x_n) \leqslant \overline{I}(x) < +\infty$, следовательно, также $x \in L^1$ (VI п. 7).

IX. *Если x измерима и почти всюду $|x| \leqslant y$, где $y \in L^1$, то также $x \in L^1$.*

Действительно, $\overline{I}(|x|) \leqslant I(y) < +\infty$ и утверждение следует из VIII.

Неотрицательная функция x называется *суммируемой по Лебегу*, если множество $A = \{t\colon x(t) > a\}$ суммируемо при любом $a > 0$ и $\sup \underline{s} = \inf \overline{s} < \infty$, где $\underline{s} = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k \mu(A_k)$, $\overline{s} = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_{k+1} \mu(A_k)$, $A_k = \{t\colon c_k < x(t) \leqslant c_{k+1}\}$, $0 < c_k < c_{k+1}$, $c_k \to +\infty$ при $k \to +\infty$, $c_k \to 0$ при $k \to -\infty$, а $\sup \underline{s}$ и $\inf \overline{s}$ берутся по всевозможным таким системам чисел c_k; при этом суммам $\underline{s}$ и $\overline{s}$ приписывается значение $+\infty$, если соответствующие ряды расходятся. В случае неотрицательной суммируемой по Лебегу функции x число $\sup \underline{s} = \inf \overline{s}$ называется *интегралом по Лебегу* функции x и обозначается $\int s(t)\, d\mu$.

Произвольная вещественная функция x называется *суммируемой по Лебегу*, если функции $x_1 = x \cup 0$, $x_2 = (-x) \cup 0$ суммируемы по Лебегу, и в этом случае по определению $\int x(t)\, d\mu = \int x_1(t)\, d\mu - \int x_2(t)\, d\mu$. Наконец, комплексная функция $x = x_1 + i x_2$ называется суммируемой по Лебегу, если вещественные функции x_1, x_2 суммируемы по Лебегу, и в этом случае по определению

$$\int x(t)\, d\mu = \int x_1(t)\, d\mu + i \int x_2(t)\, d\mu.$$

Отметим, что $\underline{s}$ ($\overline{s}$) образует направленное неубывающее (соответственно невозрастающее) множество, частично упорядоченное условием $\underline{s}' \succ \underline{s}$ ($\overline{s}' \succ \overline{s}$), если множество точек деления c_k для $\underline{s}$ ($\overline{s}$) является частью множества точек деления c_k' для $\underline{s}'$ ($\overline{s}'$). Поэтому $\sup \underline{s} = \lim \underline{s}$, $\inf \overline{s} = \lim \overline{s}$, и для суммируемой по Лебегу неотрицательной функции $\int x(t)\, d\mu = \lim \underline{s} = \lim \overline{s}$.

X. *Если $\overline{x} \in L^1$, то x суммируема по Лебегу и $I(x) = \int\limits_T x(t)\, d\mu$. Обратно, если x суммируема по Лебегу, то $x \in L^1$ и $I(x) = \int\limits_T x(t)\, d\mu$.*

Доказательство. Как и в доказательстве предложения VIII, достаточно ограничиться случаем функции $x \geqslant 0$, всюду определенной и конечной. Пусть $x \in L^1$, и пусть A_{nm}, ξ_{nm} — те же, что и в доказательстве предложения VIII. Положим еще

$$B_{nm} = \left\{t\colon x(t) > 2^{-n} \frac{1}{m+1}\right\} - \left\{t\colon x(t) > 2^{-n} \frac{1}{m}\right\}, \quad \eta_{nm} = \xi_{B_{nm}},$$

$$x_n = \sum_{m=1}^{\infty} w^{-n} m \xi_{nm} + \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{m+1}\, \eta_{nm},$$

$$y_n = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-n}(m+1)\,\xi_{nm} + \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-n}\frac{1}{m}\,\eta_{nm}.$$

Тогда $x_n \leqslant x \leqslant y_n$, $x_n \nearrow x$, $y_n \searrow y$; кроме того, так как

$$y_n - x_n = \sum_{m=1}^{\infty}\left(2^{-n}\xi_{nm} + \frac{1}{m(m+1)}\,\eta_{nm}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m=1}^{\infty}\left(2^{-n}m\xi_{nm} + 2^{-n}\frac{1}{m+1}\,\eta_{nm}\right) = x_n \leqslant x,$$

то $\overline{I}(y_n) \leqslant 2I(x) < +\infty$. Поэтому $y_n \in L^1$ и

$$I(x_n) \to I(x), \quad I(y_n) \to I(x) \tag{1}$$

(см. VII п. 7). Но

$$\begin{aligned} I(x_n) &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(2^{-n}m\mu(A_{nm}) + 2^{-n}\frac{1}{m+1}\,\mu(B_{nm})\right), \\ I(y_n) &= \sum_{m=1}^{\infty}\left(2^{-n}(m+1)\,\mu(A_{nm}) + 2^{-n}\frac{1}{m}\,\mu(B_{nm})\right) \end{aligned} \tag{2}$$

— суммы вида $\underline{s}$, $\overline{s}$ для x; поэтому (1) означает, что x суммируема по Лебегу и $\int x(t)\,d\mu = I(x)$.

Обратно, если x суммируема по Лебегу, то суммы (2) сходятся к $\int\limits_T x(t)\,d\mu$ (см. абзац перед предложением X) и потому $\|x - x_n\|_1 = \overline{I}(x - x_n) \leqslant I(y_n - x_n) \to 0$; отсюда $x \in L^1$, следовательно, $I(x) = \int\limits_T x(t)\,d\mu$.

XI. *Если $x \in L^1$ и A_n — последовательность суммируемых множеств такая, что $\mu(A_n) \to 0$, то*[1] $I(x\xi_{A_n}) = \int\limits_{A_n} x(t)\,d\mu \to 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $x\xi_{A_n}$ измерима и в силу неравенства $|x\xi_{A_n}| \leqslant |x|$ суммируема. Выберем функцию $y \in L$ так, чтобы $\|x - y\|_1 < \varepsilon$. Тогда также

$$\|x\xi_{A_n} - y\xi_{A_n}\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} \text{ и потому } |I(x\xi_{A_n}) - I(y\xi_{A_n})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

С другой стороны, если $|y| \leqslant c$, то $|y\xi_{A_n}| \leqslant c\,\xi_{A_n}$ и, следовательно, $\|y\xi_{A_n}\|_1 \leqslant c\mu(A_n)$.

Таким образом, при достаточно больших n

$$|I(x\xi_{A_n}| \leqslant |I(x\xi_{A_n}) - I(y\xi_{A_n})| + \|y\xi_{A_n}\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + c\mu(A_n) < \varepsilon.$$

[1] Если A — произвольное суммируемое множество, x — суммируемая функция, то под $\int\limits_A x(t)\,d\mu$ понимается $\int \xi_A(t)\,x(t)\,d\mu$.

XII. *Всякая непрерывная функция измерима.*

Действительно, если x — вещественная непрерывная функция, то множество $\{t\colon x(t) > a\}$ открыто и потому измеримо; отсюда следует утверждение и для любой комплексной непрерывной функции.

Аналогично можно показать, что *все почти всюду конечные функции из M^+ и N^+ измеримы.*

XIII. *Если $x \in L^1$ и $x \geqslant 0$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $y \in L^+$, что $\|x - u\|_1 < \varepsilon$; если, кроме того, $x \leqslant C$, то функцию u можно также выбрать $\leqslant C$.*

Доказательство. В силу X п. 7 существуют такие $z \in N^+$ и $y \in \in M^+$, что $z \leqslant x \leqslant y$ почти всюду и $I(y - z) < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда также

$$\|y - x\|_1 = I(y - x) \leqslant I(y - z) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3}$$

Далее, по определению интеграла функции $y \in M^+$ (см. п. 3) существует такая функция $u \in L^+$, что $u \leqslant y$ и $I(y) < I(u) + \dfrac{\varepsilon}{2}$; следовательно,

$$\|y - u\| = I(y - u) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4}$$

Из (3) и (4) заключаем, что $\|x - u\|_1 < \varepsilon$. Если, кроме того, $x \leqslant C$, то, заменив y функцией $y_1 = y \cap C$, мы не нарушим неравенств $x \leqslant y$ и (3); тогда $u \leqslant y_1 \leqslant C$.

11. Вещественное пространство L^2. Обозначим через L^2 совокупность всех измеримых вещественных функций x, для которых $x_2 \in L^1$; при этом мы снова не считаем различными эквивалентные между собой функции. Если $x \in L^2$, то, очевидно, $cx \in L^2$ при любом вещественном c. Кроме того, если $x,\ y \in L^2$, то также $x + y \in L^2$, ибо $(x + y)^2 \leqslant 2x^2 + 2y^2$ (см. IV и IX п. 10). Следовательно, L^2 — линейное пространство.

Из формулы

$$xy = \frac{1}{4}\left(|x + y|^2 - |x - y|^2\right)$$

теперь вытекает, что если $x,\ y \in L^2$, то $xy \in L^1$. Определим в L^2 скалярное произведение формулой

$$(x,\, y) = I(xy).$$

Легко проверить, что все аксиомы скалярного произведения будут выполнены, так что L^2 станет тогда вещественным предгильбертовым пространством. Будем называть его *вещественным пространством L^2*. Норму в этом пространстве обозначим через $\|x\|_2$, так что

$$\|x\|_2 = \sqrt{(x,\, x)} = \sqrt{I(x^2)}.$$

Неравенство Коши–Буняковского (см. п. 1 § 5) примет тогда вид

$$|I(xy)|^2 \leqslant I(x^2)\, I(y^2).$$

I. *Вещественное пространство L^2 полно.*

Доказательство. Пусть x_n — фундаментальная последовательность в L^2; тогда можно выбрать подпоследовательность x_{n_k} так, что

$$\|xz_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|_2 < \frac{1}{2^{k+1}},$$

и потому ряд

$$\|x_{n_1}\|_2 + \|x_{n_2} - x_{n_1}\|_2 + \|x_{n_3} - x_{n_2}\|_2 + \ldots$$

сходится. Отсюда следует, что функция

$$z = |x_{n_1}| + |x_{n_2} - x_{n_1}| + |x_{n_3} - x_{n_2}| + \ldots$$

принадлежит L^2, ибо, обозначая через z_k k-ю частичную сумму этого ряда, имеем: $z_k^2 \nearrow z^2$, $z_k^2 \in L^1$ и

$$\|z_k^2\|_1 = \|z_k\|_2^2 \leqslant (\|x_{n_1}\|_2 + \|x_{n_2} - x_{n_1}\|_2 + \|x_{n_3} - x_{n_2}\|_2 + \ldots)^2$$

(см. VII п. 7). Аналогично находим, что функция

$$u = |(x_{n_1}| - x_{n_1}) + [|x_{n_2} - x_{n_1}| - (x_{n_2} - x_{n_1})] + \ldots$$

принадлежит L^2, и потому также

$$x = z - u = x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \ldots = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = L^2.$$

При этом

$$\begin{aligned}\|x - x_{n_k}\|_2 = \|(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) + (x_{n_{k+2}} - x_{n_{k+1}}) + \ldots\|_2 \leqslant \\ \leqslant \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|_2 + \|x_{n_{k+2}} - x_{n_{k+1}}\|_2 + \ldots \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.\end{aligned}$$

Так как x_n фундаментальна в L^2, то также $\|x - x_n\|_2 \to 0$ при $n \to \infty$, и полнота L^2 доказана.

Доказанное предложение I означает, что *вещественное L^2 есть вещественное гильбертово пространство.*

II. *Множество L^r плотно в L^2.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что для всякой неотрицательной функции $x \in L^2$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует функция $y \in L^+$ такая, что $\|x - y\|_2 < \varepsilon$.

Положим для этого $x_n = x \cap n$; тогда x_n измерима, $0 \leqslant x_n^2 < x^2$, $x_n \nearrow x$. На основании IX п. 10 отсюда заключаем, что $x_n^2 \in L^1$ и, следовательно,

$$x_n \in L^2, \quad x - x_n \in L^2, \quad (x - x_n)^2 \in L^1 \quad \text{и} \quad (x - x_n)^2 \searrow 0.$$

Но тогда (см. VII п. 7)

$$\|x - x_n\|_2^2 = I((x - x_n)^2) \to 0,$$

так что, выбрав n достаточно большим, имеем

$$\|x - x_n\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1}$$

Положим

$$A_m = \left\{t\colon x_n > \frac{1}{m}\right\} = \left\{t\colon x_n^2 > \frac{1}{m^2}\right\}, \quad y_m = x_n \xi_{A_m}.$$

Так как $x_n^2 \in L^1$, то A_m — суммируемое множество. Отсюда и из неравенств

$$0 \leqslant y_m \leqslant n\xi_{A_m} \tag{2}$$

вытекает, что и $y_m \in L^1$. Кроме того, $0 \leqslant (x_n - y_m)^2 \searrow 0$ при $m \to \infty$ и $(x_n - y_m)^2 \in L^1$, следовательно (см. VII п. 7),

$$\|x_n - y_m\|_2^2 = I((x_n - y_m)^2) \to 0 \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Поэтому, выбрав m достаточно большим, имеем

$$\|x_n - y_m\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

Так как $y_m \in L^1$ и удовлетворяет условию (2), то в силу XIII п. 10 существует функция $y \in L^+$ такая, что

$$\|y_m - y\|_1 < \frac{\varepsilon^2}{18n}, \quad 0 \leqslant y \leqslant n.$$

Но тогда

$$\|y_m - y\|_2^2 = I((y_m - y)^2) \leqslant I(2n|y_m - y|) = \\ = 2n\|y_m - y\|_1 < 2n\frac{\varepsilon^2}{18n} = \frac{\varepsilon^2}{9},$$

что в соединении с (1) и (3) дает $\|x - y\|_2 < \varepsilon$.

12. Комплексное пространство L^2. *Комплексным пространством* L^2 называется совокупность всех комплексных измеримых функций $z = x + iy$, для которых функция $|z|^2$ суммируема. При этом две эквивалентные функции мы не будем считать различными.

Определив в L^2 обычным образом операции сложения и умножения на комплексное число, мы превратим его в комплексное линейное пространство. Далее, полагая

$$(z_1, z_2) = I(z_1\overline{z}_2) \quad \text{при} \quad z_1, z_2 \in L^2,$$

мы превратим L^2 в евклидово пространство. Это пространство полно. Действительно, из соотношений

$$\|x + iy\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 \quad \text{при} \quad x, y \in L^2$$

вытекает, что $x_n + iy_n$ есть фундаментальная последовательность в комплексном L^2 тогда и только тогда, когда x_n, y_n — фундаментальные последовательности в вещественном L^2. Таким образом, *комплексное L^2 есть комплексное гильбертово пространство.*

13. Пространство L^∞. Измеримую функцию $x = x(t)$ будем называть *существенно ограниченной*, если она локально эквивалентна ограниченной функции. Совокупность всех существенно ограниченных вещественных (соответственно комплексных) функций будем называть *вещественным* (соответственно *комплексным*) *пространством* L^∞; при этом две локально эквивалентные существенно ограниченные функции не будут считаться различными, так что фактически элементами пространства L^∞ будут являться классы эквивалентных между собой существенно ограниченных функций.

Определив обычным образом операции сложения и умножения на число, мы превратим L^∞ в линейное пространство. Обозначим теперь через $\|x\|_\infty$ нижнюю грань совокупности всех чисел, являющихся верхними гранями модулей ограниченных функций, локально эквивалентных функции $x \in L^\infty$; легко проверить, что $\|x\|_\infty$ будет удовлетворять всем аксиомам нормы [1]).

Пространство L^∞ полно. Действительно, это пространство можно рассматривать как факторпространство пространства всех ограниченных измеримых функций x с нормой $\|x\| = \sup|x(t)|$, полного в силу VII п. 10, по замкнутому подпространству всех тех из этих функций, которые локально почти всюду равны нулю (см. п. 3 § 4).

14. Положительная и отрицательная части линейного функционала. Пусть p обозначает одно из чисел 1, 2, ∞.

Теорема 1. *Всякий ограниченный линейный функционал f в вещественном пространстве L^p можно представить в виде $f = f^+ - f^-$, где f^+, f^- — ограниченные линейные функционалы в L^p с нормами, не превосходящими $|f|$, неотрицательные на всех неотрицательных функциях $x \in L^p$.*

Доказательство. Обозначим для краткости через $\|x\|$ норму x в L^p (так что $\|x\| = \|x\|_p$, $p = 1, 2, \infty$) и для $x \in L^p$, $x \geqslant 0$ положим

$$f^+(x) = \sup\{f(y)\colon \quad 0 \leqslant y \leqslant x, \quad y \in L^p\};$$

так как среди чисел $f(y)$ есть $f(y) = 0$ (при $y = 0$) и так как $|f(y)| \leqslant |f|\|y\| \leqslant |f|\|x\|$, то

$$F^+(x) \geqslant 0, \quad f^+(x) \leqslant |f|\|x\|. \tag{1}$$

Кроме того, очевидно, $f^+(cx) = cf^+(x)$ при $c > 0$. Докажем, что также

$$f^+(x_1 + x_2) = f^+(x_1) + f^+(x_2) \quad \text{при} \quad x_1, x_2 \in L^p, \quad x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

---

1) Для этой нормы применяется также обозначение $\operatorname{ess\,sup}|x|$.

Если $0 \leqslant y_1 \leqslant x_1$, $0 \leqslant y_2 \leqslant x_2$, то $0 \leqslant y_1 + y_2 \leqslant x_1 + x_2$, и потому

$$f^+(x_1 + x_2) \geqslant \sup f(y_1 + y_2) = \sup f(y_1) + \sup f(y_2) = f^+(x_1) + f^+(x_2). \tag{2}$$

С другой стороны, если $0 \leqslant y \leqslant x_1 + x_2$, то $0 \leqslant x_1 \cap y \leqslant x_1$, и так как $y \leqslant x_1 \cap y + x_2$, то, кроме того, $0 \leqslant y - x_1 \cap y \leqslant x_2$; отсюда

$$f^+(x_1 + x_2) = \sup f(y) \leqslant$$
$$\leqslant \sup f(x_1 \cap y) + \sup f(y - x_1 \cap y) \leqslant f^+(x_1) + f^+(x_2).$$

Итак, f^+ аддитивен на неотрицательных функциях; следовательно, f^+ можно расширить до линейного функционала на всем L^p, положив $f^+(x_1 - x_2) = f^+(x_1) - f^+(x_2)$, где x_1, x_2 неотрицательны. Действительно, если $x = x_1 - x_2 = y_1 - y_2$, где $x_1, x_2, y_1, y_2 \geqslant 0$ и $\in L^p$, то $x_1 + y_2 = y_1 + x_2$, откуда $f^+(x_1) + f^+(y_2) = f^+(y_1) + f^+(x_2)$ и, следовательно, $f^+(x_1) - f^+(x_2) = f^+(y_1) - f^+(y_2)$, так что f^+ определен однозначно. При этом f^+ ограничен, ибо в силу (1)

$$|f^+(x)| \leqslant f^+(|x|) \leqslant |f| \|x\|,$$

так что f^+ — неотрицательный ограниченный линейный функционал.

Положим $f^- = f^+ - f$. Так как $f^+(x) \geqslant f(x)$ при $x \geqslant 0$, то $f^-(x) \geqslant 0$ при $x \geqslant 0$. Докажем, что

$$|f^-(x)| \leqslant f^-(|x|) \leqslant |f| \|x\|. \tag{3}$$

Пусть $x \geqslant 0$; по определению $f^+(x)$ для всякого $\varepsilon > 0$ существует функция y такая, что $0 \leqslant y \leqslant x$ и $f^+(x) < f(y) + \varepsilon$. Отсюда $f^-(x) = f^+(x) - f(x) < f(y) - f(x) + \varepsilon = -f(x - y) + \varepsilon \leqslant |f| \|x - y\| + \varepsilon \leqslant |f| \|x\| + \varepsilon$; следовательно, $f^-(x) \leqslant |f| \|x\|$ ввиду произвольности числа ε. Поэтому для произвольной вещественной функции x из L^p

$$|f^-(x)| \leqslant f^-(|x|) \leqslant |f| \|x\|.$$

Таким образом, f^- также есть неотрицательный ограниченный линейный функционал и равенство $f = f^+ - f^-$ есть требуемое представление функционала f.

Функционалы f^+ и f^- называют *положительной* и *отрицательной частями* функционала f.

15. Теорема Радона–Никодима. Интеграл I называется *ограниченным*, если все множество T суммируемо; очевидно, это означает, что функция $x(t) \equiv 1$ суммируема. Далее, если на L заданы два интеграла I и J, то J называется *абсолютно непрерывным относительно* I, если всякая функция, нулевая относительно I, есть также нулевая функция относительно J.

В этом случае J-меру μ_J называют *подчиненной* I-мере μ_I и пишут $\mu_J < \mu_I$; если также $\mu_I < \mu_J$, то μ_I и μ_J называют *эквивалентными* и пишут $\mu_I \sim \mu_J$.

Теорема 2 (Радона–Никодима). *Если ограниченный интеграл J абсолютно непрерывен относительно ограниченного интеграла I, то существует единственная с точностью до эквивалентности I-суммируемая функция x_0 такая, что для любой функции $x \in L^1(J)$ функция xx_0 также I-суммируема и $J(x) = I(xx_0)$.*

Доказательство. Рассмотрим интеграл $K = I + J$ и вещественное гильбертово пространство $L^2(K)$. Пусть $x \in L^2(K)$; так как K ограничен, то $1 \in L^2(K)$, следовательно, $x = x \cdot 1 \in L^1(K)$ и [1]

$$|J(x)| \leqslant J(|x|) \leqslant K(|x|) \leqslant \|x\|_2 \cdot \|1\|_2,$$

где $\|x\|_2$, $\|1\|_2$ — нормы в $L^2(K)$. Таким образом, J — линейный функционал в $L^2(K)$. На основании теоремы Ф. Рисса (см. п. 3 § 5) существует функция $y \in L^2(K)$ такая, что

$$J(x) = (x, y) = K(xy), \tag{1}$$

т. е.

$$J(x) = I(xy) + J(xy), \quad J(x(1-y)) = I(xy). \tag{2}$$

Так как J — интеграл, то из (1) заключаем, что y неотрицательна, за исключением некоторого множества A K-меры нуль; заменив y функцией $(1 - \xi_A)\,y$, мы можем считать, что $y \geqslant 0$ для всех $t \in T$.

Далее, можно также считать $y < 1$ для всех $t \in T$. Действительно, положив $B = \{t\colon y(t) \geqslant 1\}$ и заменив в (2) x на $x\xi_B$, получим

$$J(x\xi_B(1-y)) = I(x\xi_B y). \tag{3}$$

Но при $x \geqslant 0$ левая часть в (3) будет $\leqslant 0$ (ибо $x\xi_B(1-y) \leqslant 0$), а правая $\geqslant 0$ (ибо $x\xi_B y \geqslant 0$); следовательно, $J(x\xi_B(1-y)) = I(x\xi_B y) = 0$, а значит, и $J(x\xi_B y) = 0$ для всех $x \geqslant 0$ из $L^2(K)$ (ибо J абсолютно непрерывен относительно I), следовательно, и для всех $x \in L^2(K)$. Отсюда также

$$J(x(1 - (1-\xi_B)\,y)) = I(xy(1-\xi_B)). \tag{4}$$

Действительно,

$$J(x(1 - (1-\xi_B)\,y)) = J(x(1-y)) + J(x\xi_B y) = J(x(1-y)),$$
$$I(xy(1-\xi_B)) = I(xy) - I(xy\xi_B) = I(xy),$$

так что (4) следует из (2).

Поэтому, заменив y на $(1-\xi_B)\,y$, мы не нарушим соотношения (2) и получим функцию $y < 1$, $y \in L^2(K)$. Следовательно, заменив в (2) функцию $x \in L^2(K)$, $x \geqslant 0$, функцией $x(1 + y + \ldots + y^{n-1})$, мы получим, что

$$I(x(y(1 + y + \ldots + y^{n-1}))) = J(x(1-y^n)),$$

[1] $\overline{J}(x) \leqslant \overline{K}(x)$ и $\overline{I}(x) \leqslant \overline{K}(x)$ для $x \geqslant 0$; следовательно, если $x \in L^1(K)$, то $x \in L^1(J)$ и $x \in L^1(I)$.

и потому

$$I(xy) + I(xy^2) + \ldots + I(xy^n) = J(x(1 - y^n)) \leqslant J(x) < +\infty$$

при $x \in L^2(K)$, $x \geqslant 0$. На основании VI п. 7 отсюда заключаем, что $xy(1-y)^{-1} = xy + xy^2 + \ldots \in L^1(I)$ и

$$I(xy(1-y)^{-1}) = \lim_{n\to\infty} J(x(1-y^n)) = J(x),$$

ибо $x(1-y^n) \nearrow x$, $x(1-y^n) \in L^1(J)$ (см. VII п. 7). Таким образом, полагая $x_0 = y(1-y)^{-1}$, имеем

$$J(x) = I(xx_0) \quad \text{для всех} \quad x \in L^2(K), \quad x \geqslant 0. \tag{5}$$

Пусть теперь $x \in M^+$ и $J(x) < +\infty$; положим $x_n = x \cap n$. Тогда $x_n \in L^2(K)$, $x_n \geqslant 0$ и $x_n \nearrow x$, следовательно, $x_n x_0 \nearrow xx_0$. Подставляя в (5) x_n вместо x и переходя к пределу, получаем, что (5) имеет также место для всех $x \in M^+ \cap L^1(J)$ (см. VII п. 7). Пусть, наконец, x — произвольная неотрицательная функция из $L^1(J)$. Существует последовательность $x_n \in M^+$ такая, что $x_n \searrow x$ почти всюду по J. Тогда $x_n x_0 \searrow xx_0$ почти всюду по I. Действительно, если z — неотрицательная нулевая функция по J и $y \in M^+ \cap L^1(J)$, $y \geqslant z$ (такая функция y существует по определению $\overline{J}(z)$, см. п. 4), то $J(y) = I(yx_0) \geqslant I(zx_0)$, и поэтому $0 = J(z) = \inf J(y) \geqslant I(zx_0)$; следовательно, zx_0 — нулевая функция по I. Подставляя в (5) x_n вместо x и переходя к пределу, получим (см. VII п. 7), что (5) имеет место для всех неотрицательных, а значит всех вообще $x \in L^1(J)$.

Полагая в (5) $x = 1$, получаем, что $x_0 \in L^1(I)$.

Если также $J(x) = I(xx_0')$ где $x_0' \in L^1(I)$, то $I(x(x_0 - x_0')) = 0$; полагая здесь $x = \operatorname{sign}(x_0 - x_0')$ (легко видеть, что эта функция измерима по I), мы получим, что $I(|x_0 - x_0'|) = 0$, следовательно, x_0 и x_0' эквивалентны и теорема полностью доказана.

16. Пространство, сопряженное к L^1.

Теорема 3. *Если I — ограниченный интеграл, а f — ограниченный линейный функционал в $L^1(I)$, то существует единственная функция $y_0 \in L^\infty(I)$, такая, что*

$$f(x) = I(xy_0) \quad \textit{для всех} \quad x \in L^1(I), \tag{1}$$

причем

$$|f| = \|y_0\|_\infty. \tag{2}$$

Обратно, при любой функции $y_0 \in L^\infty(I)$ формула (2) определяет ограниченный линейный функционал в $L^1(I)$.

Доказательство. Положительная и отрицательная части f^+, f^- функционала f являются интегралами на L; кроме того, если $I(|x|) = \|x\|_1 = 0$, то также $f^+(x) = 0$ и $f^-(x) = 0$; следовательно, f^+ и f^- абсолютно непрерывны относительно I.

На основании теоремы Радона–Никодима существуют функции y^+, $y^- \in L^1(I)$ такие, что

$$f^+(x) = I(xy^+), \quad f^-(x) = I(xy^-)$$

для всех функций, одновременно f^+- и f^--суммируемых, в частности, для всех $x \in L^1(I)$. Действительно, при $x \in L^1(I)$

$$f^+(|x|) \leqslant |f|\|x\|_1 < \infty, \quad f^-(|x|) \leqslant |f|\|x\|_1 < \infty$$

(см. (1) и (2) п. 14). Полагая $y_0 = y^+ - y^-$, мы видим, что

$$f(x) = I(xy_0) \quad \text{для всех} \quad x \in L^1(I). \tag{1}$$

Докажем, что $y_0 \in L^\infty(I)$ и что $\|y_0\|_\infty \leqslant |f|$. Для этого положим в (1) $x = \xi_A \operatorname{sign} y_0$, где $A = \{t\colon |y_0(t)| \geqslant |f| + \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$; мы получим тогда

$$I(\xi_A \operatorname{sign} y_0 \cdot y_0) = f(\xi_A \operatorname{sign} y_0) \leqslant |f|\|\xi_A\|_1 = |f|\mu(A). \tag{3}$$

С другой стороны,

$$(|f| + \varepsilon)\,\mu(A) = I((|f| + \varepsilon)\,\xi_A) \leqslant I(|y_0|\xi_A) = I(\xi_A \operatorname{sign} y_0 \cdot y_0),$$

что при $\mu(A) > 0$ противоречит неравенству (3).

Следовательно, $\mu(A) = 0$, и вне этого множества A меры нуль $|y_0(t)| \leqslant |f| + \varepsilon$. Но это означает, что $y_0 \in L^\infty(I)$ и $\|y_0\|_\infty \leqslant |f| + \varepsilon$; отсюда ввиду произвольности $\varepsilon > 0$

$$\|y_0\|_\infty \leqslant |f|. \tag{4}$$

С другой стороны, очевидно, что для любой функции $y_0 \in L^\infty(I)$ формула (1) определяет линейный функционал в $L^1(I)$, ограниченный в силу неравенства

$$|f(x)| = |I(xy_0)| \leqslant \|y_0\|_\infty \|x\|_1.$$

Отсюда следует, что $|f| \leqslant \|y\|_\infty$, что в соединении с (4) дает: $\|y_0\|_\infty = |f|$, и теорема полностью доказана.

Эта теорема означает, что соответствие $f \to y_0$ есть изометрическое отображение пространства $\{L^1(I)\}'$ на пространство $L^\infty(I)$; поэтому можно считать, что

$$[L^1(I)]' = L^\infty(I).$$

Замечание 1. *Утверждение теоремы* 3 *справедливо для любого* (*необязательно ограниченного*) *интеграла* I *на* L, *если* T *есть объединение* (*может быть несчетного числа*) *попарно непересекающихся локально нулевого множества* T_0 *и бикомпактных множеств* T_α *положительной меры таких, что всякое суммируемое множество пересекается не более чем со счетным числом множеств* T_α [1]).

[1]) В действительности утверждение теоремы 3 справедливо для любого (не обязательно ограниченного) интеграла I без каких-либо дополнительных

Доказательство. Положим $\xi_0 = \xi_{T_0}$, $\xi_{T_\alpha} = \xi_\alpha$,

$$I_\alpha(x) = I(x\xi_\alpha), \quad f_\alpha(x) = f(x\xi_\alpha) \quad \text{для} \quad x \in L^1(I).$$

Тогда I_α — ограниченный интеграл, $f_\alpha(x)$ — ограниченный относительно I_α функционал, причем $|f_\alpha| \leqslant |f|$; следовательно, $f_\alpha(x) = I_\alpha(xy_\alpha)$, где $y_\alpha \in L^\infty(I_\alpha)$ и

$$\|y_\alpha\|_\infty = |f_\alpha| \leqslant |f|, \tag{5}$$

где $\|y_\alpha\|_\infty$ есть норма в $L^\infty(I_\alpha)$.

Таким образом,

$$f(x\xi_\alpha) = I(x\xi_\alpha y_\alpha) \quad \text{для всех} \quad x \in L^1(I). \tag{6}$$

Положим $y = y_\alpha$ на T_α; в силу (5) $y \in L^\infty$. Множество $T - T_\alpha$ локально нулевое для I_α, ибо для любого бикомпактного множества Q $I_\alpha(\xi_{Q\cap(T-T_\alpha)}) = I(\xi_Q\xi_\alpha(1-\xi_\alpha)) = 0$. Следовательно,

$$\|y\|_\infty = \sup_\alpha \|y_\alpha\|_\infty \leqslant |f|. \tag{7}$$

Очевидно, $\xi_\alpha y = y_\alpha$; поэтому (6) можно переписать в виде

$$f(x\xi_\alpha) = I(xy\xi_\alpha) \quad \text{для всех} \quad x \in L^1(I). \tag{8}$$

Пусть $x \in L^1$; тогда каждое из множеств $A_n = \left\{t\colon |x(t)| > \dfrac{1}{n}\right\}$ суммируемо (см. доказательство предложения VIII п. 10) и, значит, по условию пересекается не более чем со счетным числом множеств T_α; следовательно, множество $A = \{t\colon |x(t)| > 0\} = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ обладает тем же свойством.

Пусть $T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2}, \ldots$ — множества, с которыми пересекается A. Тогда $|x| = |x\xi_0| + |x\xi_{\alpha_1}| + |x\xi_{\alpha_2}| + \ldots$, следовательно, в силу VIII п. 9 и VI п. 7 $x = x\xi_{\alpha_1} + x\xi_{\alpha_2} + \ldots$, где ряд сходится по норме в L^1. Поэтому ряд $xy = xy\xi_{\alpha_1} + xy\xi_{\alpha_2} + \ldots$ также сходится по норме в L^1 и в силу (6) и (8)

$$f(x) = f(x\xi_{\alpha_1}) + f(x\xi_{\alpha_2}) + \ldots = I(xy_{\alpha_1}\xi_{\alpha_1}) + I(xy_{\alpha_2}\xi_{\alpha_2}) + \ldots = \\ = I(xy\xi_{\alpha_1}) + I(xu\xi_{\alpha_2}) + \ldots = I(xy).$$

Отсюда

$$|f(x)| \leqslant \|y_{\alpha_1}\|_\infty \|x\xi_{\alpha_1}\|_1 + \|y_{\alpha_2}\|_\infty \|x\xi_{\alpha_2}\|_1 + \ldots \leqslant \\ \leqslant \|y\|_\infty (\|x\xi_{\alpha_1}\|_1 + \|x\xi_{\alpha_2}\|_1 + \ldots) = \|y\|_\infty \cdot \|x\|_1,$$

следовательно, $|f| \leqslant \|y\|_\infty$. В соединении с (7) это дает $\|y\|_\infty = |f|$.

условий (см., например. Н. Бурбаки [1] п. 8 § 5 гл. 5); нам, однако, такого рода общий результат не понадобится.

Замечание 2. Теорему 3 можно распространить и на комплексные пространства L^1; в этом случае сопряженное пространство $(L^1)'$ изометрично комплексному пространству L^∞.

Действительно, пусть f — ограниченный линейный функционал в комплексном L^1; его вещественная и мнимая части, рассматриваемые только на вещественном L^1, являются ограниченными линейными функционалами в вещественном L^1. Применив к каждому из них теорему 3, получим, что

$$f(x) = I(xy_0) \tag{1}$$

для всех вещественных $x \in L^1$, где y_0 — комплексная функция из L^∞. Ввиду комплексной однородности функционала $f(x)$ равенство (1) остается справедливым для всех комплексных $x \in L^1$. Отсюда, как и выше, следует, что $\|y_0\|_\infty = |f|$.

17. Комплексные меры. Выше мы видели (X п. 10), что всякий интеграл I на L представляется в виде

$$I(x) = \int x(t)\,d\mu \quad \text{для всех} \quad x \in L, \tag{1}$$

где μ — мера, определенная функционалом I.

Равенство (1) легко распространяется на любые вещественно-линейные функционалы f в L, ограниченные относительно нормы $\|x\|_\infty$. Действительно, пусть $f = f^+ - f^-$ — разложение f на положительную и отрицательную части согласно теореме п. 14 и пусть μ^+, μ^- — меры, определенные неотрицательными функционалами f^+, f^-; положив $\mu = \mu^+ - \mu^-$, получим [1]:

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) = \int x(t)\,d\mu^+ - \int x(t)\,d\mu^- = \int x(t)\,d\mu, \tag{2}$$

так что (1) будет справедливо для $f(x)$ вместо $I(x)$. При этом мы будем по-прежнему называть μ мерой (уже произвольного знака), отвечающей функционалу f.

Рассмотрим теперь комплексно линейный функционал f в L, ограниченный относительно нормы $\|x\|_\infty$. Для его вещественной и мнимой частей f_1, f_2, рассматриваемых только на L^r, имеет место формула (2); пусть μ_1, μ_2 — соответствующие меры. Полагая $\mu = \mu_1 + i\mu_2$,

[1] Последнее равенство в (2) есть просто определение интеграла $\int x(t)\,d\mu$.

мы получим [1]):

$$f(x) = f_1(x) = if_2(x) = \int x(t)\,d\mu_1 + i\int x(t)\,d\mu_2 = \int x(t)\,d(\mu + 1 + i\mu_2),$$

т. е.

$$f(x) = \int x(t)\,d\mu \tag{3}$$

для всех $x \in L^r$. В силу комплексной однородности функционала f формула (3) будет также иметь место для всех $x \in L$. Функция μ называется *комплексной мерой*, определенной функционалом f.

Мы приходим к следующему результату.

Теорема 4. *Всякий комплексно линейный функционал f на L, ограниченный по норме $\|x\|_\infty$, представляется в виде*

$$f(x) = \int x(t)\,d\mu,$$

где μ — некоторая (вообще комплексная) мера на T.

18. Интеграл на прямом произведении пространств.

Теорема 5. *Пусть T_1 и T_2 — локально бикомпактные пространства, а I и J — интегралы на $L(T_1)$ и $L(T_2)$ соответственно. Тогда*

$$I_t(J_s x(t,\, s)) = J_s(I_t x(t,\, s)) \tag{1}$$

для любой функции $x(t,\, s) \in L(T_1 \times T_2)$ и функционал $K(x) = I_t J_s x = J_s I_t x$ есть интеграл на $L(T_1 \times T_2)$.

Доказательство. Пусть $x(t,\, s) \in L(T_1 \times T_2)$ и пусть A_1, A_2 — бикомпактные множества в T_1, T_2 такие, что x обращается в нуль вне $A_1 \times A_2$. Обозначим через C_1 и C_2 границы I и J на $L_{A_1}(T_1)$ и $L_{A_2}(T_2)$ соответственно (см. II п. 2), где вообще $L_A(T)$ обозначает совокупность всех функций $x \in L(T)$, равных нулю вне A. Согласно теореме Стоуна (см. теорему 1 п. 10 § 2) функциями вида

$$u(t,\, s) = \sum_{k=1}^{n} y_k(t)\, z_k(s), \quad y_k \in L_{A_1}(T_1), \quad z_k \in L_{A_1}(T_2),$$

[1]) Для $x(t) \geqslant 0$ интегралы в формулах (2) и (3) можно также определить как общие пределы сумм $\underline{s}$, $\overline{s}$, аналогичных суммам на с. 162, но построенных для $\mu = \mu^+ - \mu^-$, соответственно $\mu = \mu_1 + i\mu_2$. Эти пределы существуют. Действительно, для $\mu = \mu^+ - \mu^-$

$$\underline{s} = \underline{s}^+ - \underline{s}^-, \quad \overline{s} = \overline{s}^+ - \overline{s}^-,$$

где $\underline{s}^+$, $\underline{s}^-$, $\overline{s}^+$, $\overline{s}^-$ — суммы $\underline{s}$, $\overline{s}$, построенные соответственно для μ^+, μ^-; пределы сумм $\underline{s}^+$, $\overline{s}^+$ и $\underline{s}^-$, $\overline{s}^-$ существуют согласно X п. 10. Аналогично рассматривается случай $\mu = \mu_1 + i\mu_2$. Для произвольных x с конечной нормой $\|x\|_\infty$ интеграл $\int x(t)\,d\mu$ определяется теперь обычным образом как линейная комбинация интегралов с $x(t) \geqslant 0$.

можно аппроксимировать любую функцию из $L_{A_1\times A_2}(T_1\times T_2)$ равномерно на $A_1\times A_2$. Следовательно, при данном $\varepsilon>0$ существует такая функция $u(t,\,s)$ этого вида, что

$$|x(t,\,s)-u(t,\,s)|<\varepsilon \quad \text{на} \quad A_1\times A_2.$$

Отсюда

$$\Big|J_s x(t,\,s)-\sum_k J(z_k)\,y_k(t)\Big| = |J_s(x-u)|<\varepsilon C_2, \tag{2}$$

так что $J_s x(t,\,s)$ есть равномерный предел непрерывных на A_1 функций и потому есть также непрерывная функция, равная нулю вне A_1. Кроме того, из (2) следует, что

$$\Big|I_t J_s x-\sum_k I(y_k)\,J(z_k)\Big|<\varepsilon\, C_1 C_2.$$

Отсюда и из аналогичного неравенства для $J_s I_t x$ заключаем, что $|I_t J_s x - J_s I_t x| < 2\varepsilon C_1 C_2$, так что, в силу произвольности числа $\varepsilon>0$, $I_t J_s x = J_s I_t x$. Очевидно, $I_t J_s x$ есть неотрицательный линейный функционал, т. е. интеграл.

Мера μ, определенная интегралом K, называется *произведением мер* μ_1, μ_2, определенных интегралами I, J, и обозначается $\mu_1\times\mu_2$.

I. *Для любой функции* $x\in M^+(T_1\times T_2)$

$$\overline{K}(x)=\overline{I}_t\overline{J}_s(x)=\overline{J}_s\overline{I}_t(x). \tag{3}$$

Доказательство. В силу II п. 3 имеем $x=\sup y$ по множеству $Y_x=\{y\in L^+(T_1\times T_2)\colon\, y\leqslant x\}$. Но в силу (1) $K(y)=I_t J_s(y)$; следовательно, применяя III п. 3, получаем [1]:

$$\overline{K}(x)=\sup_{y\in Y_x} I_t[J_s(y)]=\overline{I}_t[\sup_{y\in Y_x} J_s(y)]=\overline{I}_t\overline{J}_s(\sup_{y\in Y_x} y)=\overline{I}_t\overline{J}_s(x).$$

Аналогично, $\overline{K}(x)=\overline{J}_s\overline{I}_t(x)$.

II. *Для любой всюду определенной неотрицательной функции* $x(t,\,s)$

$$\overline{K}(x)\geqslant \overline{I}_t\overline{J}_s(x). \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $y\in M^+(T_1\times T_2)$, $y\geqslant x$. В силу (3) тогда $\overline{K}(y)=\overline{I}_t\overline{J}_s(y)\geqslant \overline{I}_t\overline{J}_s(x)$; переходя к нижней грани по y, получим (4).

III. *Если всюду определенная неотрицательная функция* $x(t,\,s)$ *является нулевой по* K, *то для почти каждого* (*по* I) $t\in T_1$ *она нулевая функция по* J.

[1] Отметим, что $J_s(y)\in L^+(T_1)$ (см. доказательство теоремы 5), и потому $\overline{J}_s(x)=\sup\limits_{y\in Y_x} J_s(y)\in M^+(T_1)$ (см. I п. 3).

Доказательство. Если $\overline{K}(x)=0$, то из (4) вытекает, что также $\overline{I}_t\overline{J}_s(x)=0$. В силу VI п. 5 $\overline{J}_s(x)=0$ для почти каждого (по I) $t\in T$, т. е. x — нулевая по J для почти каждого (по I) $t\in T$.

IV. *Если множество $A\subset T_1\times T_2$ — нулевое по K, то для почти каждого (по I) $t\in T_1$ множество $A_t=\{s\colon\ t\times s\in A\}$ является нулевым по J.*

Для доказательства достаточно применить III к функции $x(t,s)= =\xi_A(t,s)$.

Будем говорить, что *существует повторный интеграл* I_tJ_s функции $x(t,s)$, если $x(t,s)\in L^1(J)$ для почти каждого (по I) $t\in T_1$ и $J_s(x)\in L^1(I)$; аналогично определяется повторный интеграл J_sI_tx.

Теорема 6 (Фубини). *Если $x(t,s)\in L^1(K)$, то существуют оба повторных интеграла $I_tJ_s(x)$, $J_sI_t(x)$ и*

$$K(x)=I_tJ_s(x)=J_sI_t(x). \tag{5}$$

Доказательство. Пусть сначала $x(t,s)$ всюду определена и $x(t,s)\in L^1(K)$. Тогда существует последовательность $x_n(t,s)\in \in L(K)$ такая, что $\|x-x_n\|_1=K(|x-x_n|)\to 0$ при $n\to\infty$. Но в силу (4) $K(|x-x_n|)\geqslant \overline{I}_t\overline{J}_s(|x-x_n|)$; поэтому также $\overline{I}_t\overline{J}_s(|x-x_n|)\to 0$. На основании замечания к доказательству II п. 7 из x_n можно выделить подпоследовательность, которую снова обозначим через x_n, такую, что $\overline{J}_s(|x-x_n|)\to 0$ для всех $t\in T_1-A_1$, где A_1 — нулевое множество по I_1. Так как x_n — непрерывная функция от s, то, по самому определению $L^1(J)$ (см. п. 7), отсюда следует, что $x\in L^1(J)$ для всех $t\in T_1-A_1$ и $|J_sx-J_sx_n|=|J_s(x-x_n)|\leqslant J_s(|x-x_n|)$ для всех $t\in T_1-A_1$. Отсюда

$$\overline{I}_t(|J_s(x)-J_s(x_n)|)\leqslant \overline{I}_tJ_s(|x-x_n|)\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Так как $J_s(x_n)$ — непрерывные функции от t (см. доказательство теоремы 5), то это означает, что $J_s(x)\in L^1(I)$ и $I_t(|J_s(x)-J_s(x_n)|)\to \to 0$. Но тогда также

$$|I_tJ_s(x)-I_tJ_s(x_n)|=|I_t(J_s(x)-J_s(x_n))|\leqslant I_t(|J_s(x)-J_s(x_n)|)\to 0;$$

потому, переходя к пределу в равенстве

$$K(x_n)=I_tJ_s(x_n),$$

справедливом в силу теоремы 5, получим $K(x)=I_tJ_s(x)$. Поменяв в этом рассуждении I и J ролями, получим, что существует также $J_sI_t(x)$ и $J_sI_t(x)=K(x)$. Тем самым теорема доказана для всюду определенной функции $x(t,s)\in L^1(K)$.

Пусть теперь $x(t,s)\in L^1(K)$ и $x(t,s)$ определена на множестве $T_1\times T_2-A$, где A — нулевое по K множество. Тогда в $L^1(K)$ существует всюду определенная функция $y(t,s)$, равная $x(t,s)$

на $t_1 \times T_2 - A$. По доказанному выше, $y \in L^1(J)$ для $t \in T_1 - B_1$, где B_1 — нулевое по I множество, $J_s(y) \in L^1(I)$ и

$$K(x) = K(y) = I_t J_s(y). \tag{6}$$

Но в силу IV множество $A_t = \{s\colon\ t \times s \in A\}$ — нулевое по J для $t \in T_1 - C_1$, где C_1 — нулевое по I множество; с другой стороны, по определению множества A, $x(t, s) = y(t, s)$ при $s \in T_2 - A_t$ для каждого $t \in T_1 - C_1$. Поэтому $x(t, s)$ как функция от s эквивалентна суммируемой функции $y(t, s)$ для каждого $t \in T_1 - (B_1 \cup C_1)$. Следовательно, $J_s(x) \in L^1(J)$ и $J_s(x) = J_s(y)$ для каждого $t \in T_1 - (B_1 \cup C_1)$; так как $B_1 \cup C_1$ — нулевое по I множество и $J_s(y) \in L^1(I)$, то также $J_s(x) \in L^1(I)$ и $I_t J_s(x) = I_t J_s(y)$. Отсюда из (6) заключаем, что $I_t J_s(x) = K(x)$. Аналогично доказывается существование повторного интеграла $J_s I_t(x)$ и равенство $J_s I_t(x) = K(x)$.

При некоторых дополнительных ограничениях можно доказать обратное утверждение, т. е. что из существования одного из повторных интегралов $I_t J_s(x)$, $J_s I_t(x)$ следует соотношение $x \in L^1(K)$.

Мы отметим лишь те частные случаи, которые нам понадобятся в дальнейшем.

V. *Если* $x(t, s) = x_1(t)\, x_2(s)$, *где* $x_1(t)$, $x_2(s)$ — *всюду определенные на* T_1, T_2 *неотрицательные функции, то*

$$\overline{K}(x) = \overline{I}(x_1)\overline{J}(x_2), \tag{7}$$

за исключением того случая, когда $\overline{I}(x_1) = 0$, $\overline{J}(x_2) = +\infty$, *или* $\overline{I}(x_1) = +\infty$, $\overline{J}(x_2) = 0$.

Доказательство. Пусть $y_1 \in M^+(T_1)$, $y_2 \in M^+(T_2)$ и $y_1 \geqslant x_1$, $y_2 \geqslant x_2$; полагая $y(t, s) = y_1(t)\, y_2(s)$, имеем: $y \in M^+(T_1 \times T_2)$, $y \geqslant x$; но в силу I

$$\overline{K}(y) = \overline{I}_t[\overline{J}_s(y_1 y_2)] = \overline{I}[y_1 \overline{J}(y_2)] = \overline{I}(y_1)\overline{J}(y_2),$$

и потому

$$\overline{K}(x) = \inf_{y \in Z_x} \overline{K}(y) \leqslant \inf_{y_1 \in Z_{x_1},\, y_2 \in Z_{x_2}} [\overline{I}(y_1)\overline{J}(y_2)] = \overline{I}(x_1)\overline{J}(x_2).$$

С другой стороны, в силу (4)

$$\overline{K}(x) \geqslant \overline{I}_t[\overline{J}_s(x_1 x_2)] = \overline{I}[x_1 \overline{J}(x_2)] = \overline{I}(x_1)\overline{J}(x_2).$$

Следовательно, $\overline{K}(x) = \overline{I}(x_1)\overline{J}(x_2)$.

VI. *Если одно из множеств* $A_1 \subset T_1$, $A_2 \subset T_2$ — *нулевое по* I (*соответственно* J), *а второе множество — конечной внешней меры по* J (*соответственно* I), *то множество* $A_1 \times A_2$ — *нулевое по* K.

Утверждение непосредственно следует из (7) и соотношения $\xi_{A_1 \times A_2}(t, s) = \xi_{A_1}(t)\, \xi_{A_2}(s)$.

VII. *Если одно из множеств $A_1 \subset T_1$, $A_2 \subset T_2$ — нулевое по I (соответственно J), а второе — объединение счетного числа множеств Q_ν, $\nu = 1, 2, \ldots$, конечной по J (соответственно I) внешней меры, то $A_1 \times A_2$ — нулевое по K множество.*

Доказательство. Пусть, например, A_1 — нулевое по I, $A_2 = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$, где $\overline{\mu}_2(Q_j) < +\infty$. Тогда $A_1 \times A_2 = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_1 \times Q_j$, где $A_1 \times Q_j$ — нулевое по K множество в силу VI; следовательно, $A_1 \times A_2$ — нулевое по K множество.

VIII. *Если* $x_1(t) \in L^1(I)$, $x_2(s) \in L^1(J)$, *то* [1] $x = x_1(t)\, x_2(s) \in L^1(K)$ *и*

$$K(x) = I(x_1)\, J(x_2). \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $x_1(t)$, $x_2(s)$ всюду определены и конечны на T_1, T_2 соответственно и $x_1(t) \in L^1(I)$, $x_2(s) \in L^1(J)$. Тогда существуют последовательности $x_{1n}(t) \in L(T_1)$, $x_{2n}(s) \in L(T_2)$ такие, что $I(|x_1 - x_{1n}|) \to 0$, $J(|x_2 - x_{2n}|) \to 0$. Так как

$$\begin{aligned}
&\overline{K}(|x_1(t)\, x_2(s) - x_{1n}(t)\, x_{2n}(s)|) \leqslant \\
&\qquad \leqslant \overline{K}(|x_1(t)||x_2(s) - x_{2n}(s)| + |x_{2n}(s)||x_1(t) - x_{1n}(t)|) \leqslant \\
&\qquad \leqslant \overline{K}(|x_1(t)||x_2(s) - x_{2n}(s)|) + \overline{K}(|x_{2n}(s)||x_1(t) - x_{1n}(t)|) = \\
&\qquad = I(|x_1|)\, J(|x_2 - x_{2n}|) + I(|x_{2n}|)\, J(|x_1 - x_{1n}|) \to 0
\end{aligned}$$

и

$$x_{1n}(t)\, x_{2n}(s) \in L(T_1 \times T_2), \quad \text{то} \quad x = x_1(t)\, x_2(s) \in L^1(K)$$

и

$$K(x) = \lim_{n\to\infty} K(x_{1n}(t)\, x_{2n}(s)) = \lim_{n\to\infty} I(x_{1n})\, J(x_{2n}) = I(x)\, J(x).$$

Таким образом, предложение доказано для всюду определенных и конечных функций $x_1(t) \in L^1(I)$, $x_2(s) \in L^1(J)$.

Пусть теперь $x_1(s)$, $x_2(s)$ — произвольные функции из $L^1(I)$, $L^1(J)$ и A_1, A_2 — нулевые по I, соответственно J, множества в T_1, T_2, на которых $x_1(t)$, $x_2(s)$ не определены или бесконечны. Тогда $x_1(t) = y_1(t)$ на $T_1 - A_1$, $x_2(s) = y_2(s)$ на $T_2 - A_2$, где $y_1(t)$, $y_2(s)$ — всюду определенные и конечные функции из $L^1(I)$, $L^1(J)$. Положим $B_1 = \{t\colon |y_1(t)| > 0\}$, $B_2 = \{s\colon |y_2(s)| > 0\}$; тогда функция $x_1(t)\, x_2(s)$ может быть не определена или отлична от $y_1(t)\, y_2(s)$ лишь на множестве $(A_1 \times B_2) \cup (B_1 \times A_2) \cup (A_1 \times A_2)$, нулевом по K в силу VII, ибо B_1, B_1 — объединения счетного числа суммируемых множеств $\left\{t\colon |y_1(t)| > \dfrac{1}{n}\right\}$, $\left\{s\colon |y_2(s)| > \dfrac{1}{n}\right\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ (см. доказательство

[1] Мы считаем здесь и в дальнейшем $x_1(t)\, x_2(s) = 0$ во всех точках $t \times s$, для которых один из сомножителей обращается в нуль, независимо от того, определен или не определен второй сомножитель.

предложения VIII п. 10). Следовательно,

$$K(x_1(t)\,x_2(s)) = K(y_1(t)\,y_2(s)) = I(y_1)\,J(y_2) = I(x_1)\,J(x_2),$$

и предложение полностью доказано.

IX. *Если* $x(t,\,s) \in M^+(T_1 \times T_2)$, *то из существования одного из повторных интегралов* $I_t J_s(x)$, $J_s I_t(x)$ *следует, что* $x \in L^1(K)$.

Доказательство. Пусть $x \in M^+(T_1 \times T_2)$ и существует $I_t J_s(x)$; тогда в силу (3) $\overline{K}(x) = I_t J_s(x) < +\infty$ и утверждение следует из VIII п. 7.

X. *Если в* $T_1 \times T_2$ *имеется счетная база окрестностей с бикомпактными замыканиями и если функция* $x(t,\,s)$ *измерима по* K, *то из существования одного из повторных интегралов* $I_t J_s(|x|)$, $J_s I_t(|x|)$ *следует, что* $x \in L^1(K)$.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать утверждение для неотрицательных измеримых функций $x(t,\,s)$ и для одного из повторных интегралов $I_t J_s(x)$, $J_s I_t(x)$. Обозначим через $\mathfrak{X}$ совокупность всех неотрицательных измеримых по K функций $x(t,\,s)$, удовлетворяющим условиям:

1) $x(t,\,s)$ есть J-измеримая функция от s для I-почти всех $t \in T_1$;
2) если $y(t) = J_s(x)$ существует для почти всех $t \in T_1$, то $y(t)$ I-измерима;
3) если $I_t J_s(x)$ существует, то $x \in L^1(K)$.

Нам надо доказать, что $\mathfrak{X}$ содержит все неотрицательные измеримые по K функции. Доказательство проведем в несколько шагов:

а). *Если* $x_n \in \mathfrak{X}$ *и* $x_n \nearrow x$, *то* $x \in \mathfrak{X}$.

Функция x удовлетворяет условиям 1) и 2) в силу VII п. 10. Докажем, что x удовлетворяет также условию 3).

Пусть $I_t J_s(x)$ существует, так что $x(t,\,s) \in L^1(J)$ при $t \in T_1 - A_1$, где A_1 — нулевое (по I) множество, и $J(x) \in L^1(I)$. Так как $x_n \leqslant x$, то также $x_n(t,\,s) \in L^1(I)$ при $t \in T_1 - A_1$ и $J(x_n) \in L^1(I)$. Так как, кроме того, $x_n \nearrow x$, то $J_s(x_n) \nearrow J_s(x)$, и потому $I_t J_s(x_n) \nearrow I_t J_s(x)$ (см. VII п. 7). Но $x_n \in \mathfrak{X}$ и $I_t J_s(x_n)$ существует, следовательно, $x_n \in L^1(K)$ и $K(x_n) = I_t J_s(x_n) \leqslant I_t J_s(x) < +\infty$. На основании предложения VII п. 7 отсюда заключаем, что $x \in L^1(K)$, $x \in \mathfrak{X}$.

б). $\xi_A \in \mathfrak{X}$ *для всякого измеримого по* K *множества* A.

Пусть U_n, $n = 1,\,2,\,3,\,\ldots$, — счетная база окрестностей в $T_1 \times T_2$ с бикомпактными замыканиями, так что $T_1 \times T_2$ есть объединение суммируемых по K множеств $\overline{U}_n$, и потому A есть объединение суммируемых множеств $A \cap \overline{U}_n$. Положим $B_n = (A \cap \overline{U}_1) \cup \ldots \cup (A \cap \overline{U}_n)$; B_n суммируемо по K, и потому, согласно теореме 6, $\xi_{B_n} \in \mathfrak{X}$. Так как $\xi_{B_n} \nearrow \xi_A$, то утверждение следует из п. а).

в). $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i \xi_{A_i} \in \mathfrak{X}$ *для всякого конечного числа n измеримых множеств A_i и неотрицательных чисел c_i.*

Утверждение вытекает из п. б).

г). $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i \xi_{A_i} \in \mathfrak{X}$ для любого счетного числа измеримых множеств A_i и неотрицательных чисел c_i.

Утверждение следует из пп. а) и в), ибо $\sum\limits_{i=1}^{n} c_i \xi_{A_i} \nearrow \sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i \xi_{A_i}$.

Пусть теперь x — произвольная неотрицательная измеримая по K функция. Положим

$$A_{nm} = \{t\colon 2^{-n} m < x(t) \leqslant 2^{-n}(m+1)\}, \quad \xi_{nm} = \xi_{A_{nm}}$$

и

$$x_n = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-n} m \xi_{nm}.$$

Тогда $x_n \nearrow x$, $x_n \in \mathfrak{X}$ в силу п. г); следовательно, $x \in \mathfrak{X}$ на основании п. а), и предложение полностью доказано.

19. Интегрирование векторных и операторных функций. Пусть x — вектор-функция на локально бикомпактном пространстве T со значениями из некоторого гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ и пусть I — интеграл на $L(T)$, а μ — мера, определенная этим интегралом. Функция x называется *измеримой* (по I), если скалярное произведение $(y, x(t))$ — измеримая числовая функция при любом $y \in \mathfrak{H}$. Пусть x — измеримая вектор-функция и пусть $|x(t)| \leqslant \alpha(t)$, где $\alpha \in L^1(I)$.

В силу неравенства $|(y, x(t))| \leqslant |y||x(t)| \leqslant \alpha(t)|y|$ также $(y, x(t)) \in \in L^1(I)$ и $|\int (y, x(t))\, d\mu| \leqslant |y| \int \alpha(t)\, d\mu$. Последнее неравенство показывает, что $\int (y, x(t))\, d\mu$ есть ограниченный линейный относительно y функционал в $\mathfrak{H}$. На основании теоремы Ф. Рисса (п. 3 § 5) существует и притом только один элемент $z \in \mathfrak{H}$ такой, что $\int (y, x(t))\, d\mu = (y, z)$, причем $|z| \leqslant \int \alpha(t)\, d\mu$. Этот элемент z называется *интегралом функции x по мере μ* и обозначается $\int x(t)\, d\mu$. Таким образом, по самому определению

$$\left(y, \int x(t)\, d\mu\right) = \int (y, x(t))\, d\mu \tag{1}$$

и

$$\left|\int x(t)\, d\mu\right| \leqslant \int \alpha(t)\, d\mu \quad \text{при} \quad |x(t)| \leqslant \alpha(t). \tag{2}$$

Очевидно, сохраняются обычные свойства интеграла:

$$\int c\, x(t)\, d\mu = c \int x(t)\, d\mu,$$

$$\int [x_1(t) + x_2(t)]\, d\mu = \int x_1(t)\, d\mu + \int x_2(t)\, d\mu.$$

Кроме того, для любого ограниченного линейного оператора A в $\mathfrak{H}$ имеем:

$$\int Ax(t)\,d\mu = A\int x(t)\,d\mu. \tag{3}$$

Действительно, в силу соотношений $(y, Ax(t)) = (A^*y, x(t))$, $|Ax(t)| \leqslant |A||x(t)| \leqslant |A|\alpha(t)$ функция $Ax(t)$ также измерима и ее интеграл также существует. Кроме того, в силу (1)

$$\left(y, A\int x(t)\,d\mu\right) = \left(A^*y, \int x(t)\,d\mu\right) = \int (A^*y, x(t))\,d\mu = \\ = \int (y, (Ax(t))\,d\mu = \left(y, \int Ax(t)\,d\mu\right);$$

отсюда следует (3).

Пусть теперь $A(t)$ — произвольная операторная функция на T, каждое значение которой есть ограниченный линейный оператор в $\mathfrak{H}$. Эта функция называется *измеримой по* I, если $A(t)x$ есть измеримая вектор-функция при любом $x \in \mathfrak{H}$. Пусть $|A(t)| \leqslant \alpha(t)$, где $\alpha(t) \in L^1(I)$. В силу неравенства $|A(t)\,x| \leqslant \alpha(t)|x|$ отсюда заключаем, что существует $\int A(t)\,x\,d\mu$, причем в силу (2)

$$\left|\int A(t)\,x\,d\mu\right| \leqslant \int \alpha(t)\,d\mu|x|. \tag{4}$$

Отсюда следует, что формула $y = \int A(t)\,x\,d\mu$ определяет ограниченный линейный оператор в $\mathfrak{H}$; этот оператор называется *интегралом операторной функции* $A(t)$ *по мере* μ и обозначается $\int A(t)\,d\mu$. Таким образом, по самому определению

$$\left(\int A(t)\,d\mu\right)x = \int A(t)\,x\,d\mu$$

и в силу (4)

$$\left|\int A(t)\,d\mu\right| \leqslant \int \alpha(t)\,d\mu \quad \text{при} \quad |A(t)| \leqslant \alpha(t).$$

Легко также проверить, что

$$\int cA(t)\,d\mu = c\int A(t)\,d\mu,$$

$$\int [A_1(t) + A_2(t)]\,d\mu = \int A_1(t)\,d\mu + \int A_2(t)\,d\mu$$

и для любого ограниченного линейного оператора B в $\mathfrak{H}$

$$B\int A(t)\,d\mu = \int BA(t)\,d\mu, \qquad \int A(t)\,B\,d\mu = \int A(t)\,d\mu \cdot B.$$

По поводу других изложений теории интегрирования см., например, Н. Бурбаки [1], Р. Халмош [1] и С. Сакс [1]. Изложение здесь во многом близко к изложению Н. Бурбаки [1].

Глава II

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ НОРМИРОВАННЫХ КОЛЕЦ

§ 7. Основные алгебраические понятия

1. Определение кольца. R называется *линейным кольцом*, если:

1) R есть линейное пространство;

2) в R введена операция умножения (вообще говоря, некоммутативного), удовлетворяющая следующим условиям:

а) $\alpha(xy) = (\alpha x)\, y = x(\alpha y)$,

б) $(xy)\, z = x(yz)$,

в) $(x + y)\, z = xz + yz$,

г) $x(y + z) = xy + xz$

для любых x, y, $z \in R$ и любых чисел α.

В дальнейшем мы будем рассматривать только линейные кольца и термин «кольцо» будет означать линейное кольцо [1]).

Два элемента x, y кольца R называются *перестановочными*, если $xy = yx$. Кольцо называется *коммутативным*, если любые два его элемента перестановочны. В дальнейшем мы, вообще говоря, не будем предполагать, что кольцо коммутативно.

Подмножество $R_1 \subset R$ называется *подкольцом* кольца R, если применение операций умножения на число, сложения и умножения к элементам из R_1 приводит снова к элементам из R_1.

Очевидно, пересечение любого множества подколец кольца R есть снова подкольцо кольца R. В частности, пересечение множества всех подколец, содержащих данное множество $S \subset R$, есть минимальное подкольцо, содержащее S. Мы его обозначим $R_a(S)$.

Очевидно, $R_a(S)$ есть совокупность всех конечных сумм вида $s = \sum\limits_k \lambda_k a_k$, где a_k — произведения конечного числа элементов из S.

[1]) В алгебре кольцом называют множество R, в котором определены операции сложения и умножения, удовлетворяющие условиям б)–г), а линейное кольцо называют *алгеброй*. Мы отступаем, таким образом, от терминологии, обычно принятой в алгебре, и вместо термина алгебра применяем термин кольцо, в значительной степени вошедший в обычай в советской литературе по нормированным кольцам.

Действительно, $R_a(S)$ должно содержать все такие элементы s, и эти элементы образуют кольцо.

Отсюда следует, что если все элементы множества S попарно перестановочны, то $R_a(S)$ — коммутативное кольцо. Если, в частности, S состоит из одного элемента x, то $R_a(x)$ — минимальное подкольцо, содержащее элемент x, — коммутативно.

Коммутативное подкольцо называется *максимальным*, если оно не содержится ни в каком другом коммутативном подкольце. Из предыдущих рассуждений следует:

I. *Всякое коммутативное подкольцо содержится в некотором максимальном коммутативном подкольце.*

Доказательство. Совокупность Σ всех коммутативных подколец кольца R, содержащих данное коммутативное подкольцо $\mathfrak{A}$, упорядоченная по включению, есть частично упорядоченное множество, удовлетворяющее условиям леммы Цорна; именно, верхней гранью линейного множества этих подколец будет просто их объединение. На основании леммы Цорна Σ содержит максимальный элемент, который и будет максимальным коммутативным подкольцом, содержащим $\mathfrak{A}$.

Так как всякий элемент x содержится в коммутативном подкольце $R_a(x)$, то из I следует

II. *Всякий элемент x содержится в некотором максимальном коммутативном подкольце.*

Примеры. 1. Обозначим через $C(X)$ совокупность всех непрерывных комплексных функций на топологическом пространстве X; определим в $C(X)$ операции сложения, умножения на число и умножения соответственно как сложение функций, умножение функции на число и умножение функций. Очевидно, $C(X)$ станет тогда кольцом; это кольцо коммутативно.

2. Пусть X — произвольное линейное пространство; обозначим через $A(X)$ совокупность всех линейных операторов в X с областью определения X. Определим в $A(X)$ операции сложения, умножения на число и умножения как соответствующие действия с операторами (см. п. 6 § 1). Тогда $A(X)$ станет кольцом; $A(X)$ коммутативно, лишь когда X одномерно.

Если X конечномерно, именно n-мерно, то, относя каждому оператору в X его матрицу в фиксированном базисе, мы можем представить $A(X)$ как совокупность всех матриц n-го порядка; при этом кольцевые операции представятся как соответствующие операции над матрицами.

3. Пусть X — пространство Банаха; обозначим через $B(X)$ совокупность всех ограниченных линейных операторов в X с областью определения X (см. п. 4 § 4). Определим снова операции сложения, умножения на число и умножения как соответствующие действия с операторами. Тогда $B(X)$ станет кольцом. Очевидно, $B(X)$ есть подкольцо кольца $A(X)$; $B(X)$ коммутативно также, лишь когда X одномерно.

4. Обозначим через W совокупность всех функций e^{int}, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Очевидно, W есть подмножество кольца $C(-\infty, \infty)$ (см. пример 1); $R_a(W)$ есть совокупность всех конечных тригонометрических сумм $\sum c_k e^{ikt}$.

5. Обозначим через $\mathfrak{C}(X)$ совокупность всех вполне непрерывных линейных операторов в пространстве Банаха X (см. п. 6 § 4); операции сложения, умножения на число и умножения определим как соответствующие действия с операторами. Тогда $\mathfrak{C}(X)$ будет кольцом, являющимся, очевидно, подкольцом кольца $B(X)$ (см. пример 3).

2. Кольца с единицей. Кольцо R называется *кольцом с единицей*, если R содержит элемент e, удовлетворяющий условию

$$ex = xe = x \quad \text{для всех} \quad x \in R. \tag{1}$$

Сам элемент e, удовлетворяющий условию (1), называется *единицей* кольца R.

Отметим, что *кольцо не может иметь больше одной единицы*. Действительно, если e' — также единица в R, то

$$e'x = xe' = x \quad \text{для всех} \quad x \in R. \tag{1$'$}$$

Полагая в (1) $x = e'$, а в (1′) $x = e$, получим

$$ee' = e'e = e' \quad \text{и} \quad e'e = ee' = e,$$

следовательно, $e' = e$.

I. *Всякое кольцо R без единицы можно рассматривать как подкольцо некоторого кольца R' с единицей.*

Доказательство. Искомое кольцо должно содержать все суммы $x' = \alpha e + x$, $x \in R$; с другой стороны, совокупность всех таких сумм образует кольцо R', в котором основные операции определяются формулами [1])

$$\left.\begin{aligned}
&\beta(\alpha e + x) = \beta a e + \beta x,\\
&(\alpha_1 e + x_1) + (\alpha_2 e + x_2) = (\alpha_1 + \alpha_2)\, e + (x_1 + x_2),\\
&(\alpha_1 e + x_1)(\alpha_2 e + x_2) = \alpha_1 a_2 e + (\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1 + x_1 x_2).
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Поэтому кольцо R' можно реализовать как совокупность всех формальных сумм $x' = \alpha e + x$; $x \in R$, в которой основные операции определяются формулами (2); само R получится при $\alpha = 0$.

---

[1]) Отметим, что каждый элемент x' из R' представляется единственным образом в виде $x' = \alpha e + x$, $x \in R$, ибо по условию R не содержит единицы.

Кольцо R' можно также реализовать как совокупность всех пар $\{\alpha, x\}$, $x \in R$, в которой основные операции определяются по формулам

$$\left.\begin{aligned} &\beta\{\alpha, x\} = \{\beta\alpha, \beta x\},\\ &\{\alpha_1, x_1\} + \{\alpha_2, x_2\} = \{\alpha_1 + \alpha_2, x_1 + x_2\},\\ &\{\alpha_1, x_1\}\{\alpha_2, x_2\} = \{\alpha_1 a_2, \chi_1 x_1 + \alpha_2 x_1 + x_1 x_2\} \end{aligned}\right\} \qquad (2')$$

аналогично тому, как определяются комплексные числа. Само кольцо R можно тогда рассматривать как совокупность всех пар $\{0, x\}$, $x \in R$, и не делать различия между x и $\{0, x\}$. Полагая $e = \{1, 0\}$, мы получим

$$\{\alpha, x\} = \alpha\{1, 0\} + \{0, x\} = \alpha e + x,$$

так что вторая реализация кольца R' равносильна первой.

Очевидно, R' — минимальное кольцо с единицей, содержащее R. Переход от R к R' называется *присоединением единицы*.

Предложение I показывает, что изучение колец без единицы можно свести к изучению колец с единицей. Однако для некоторых приложений полезно иметь предложения непосредственно о кольцах без единицы. Поэтому наряду с предложениями о кольцах с единицей мы часто будем излагать соответствующие предложения о кольцах без единицы.

Если R — кольцо с единицей, а S — произвольное множество в R, то пересечение всех подколец с единицей кольца R есть *минимальное подкольцо с единицей*, содержащее S; мы будем обозначать его $R'_a(S)$. Очевидно, $R'_a(S)$ получается из $R_a(S)$ присоединением единицы и потому есть совокупность всех сумм $\alpha e + \sum\limits_k \alpha_k a_k$, где a_k — произведения конечного числа элементов из S.

II. *Максимальное коммутативное подкольцо R_1 кольца R с единицей есть также кольцо с единицей.*

Действительно, в противном случае, присоединив к R_1 единицу, мы получили бы коммутативное подкольцо R'_1, содержащее R_1 в качестве своей правильной части, что противоречит максимальности R_1.

Элемент y называется *левым обратным* элемента x_1, если $yx = e$. Левый обратный элемент x будем обозначать x_l^{-1}. Аналогично можно определить правый обратный x_r^{-1}. Если элемент x имеет и левый и правый обратные, то все левые и правые обратные элемента x совпадают. Действительно, умножая обе части равенства $x_l^{-1}x = e$ справа на x_r^{-1}, получим:

$$x_r^{-1} = (x_l^{-1}x)\,x_r^{-1} = x_l^{-1}(xx_r^{-1}) = x_l^{-1}e = x_l^{-1}.$$

В этом случае мы будем говорить, что существует обратный x^{-1} элемента x.

III. *Если существует x^{-1} и если x и y перестановочны, то x^{-1} и y также перестановочны.*

Действительно, умножая обе части равенства $xy = yx$ слева и справа на x^{-1}, получим $yx^{-1} = x^{-1}y$.

IV. *Если $\mathfrak{A}$ — максимальное коммутативное подкольцо, содержащее x, и если x^{-1} существует, то $x^{-1} \in \mathfrak{A}$.*

В самом деле, в силу III x^{-1} перестановочен со всеми элементами из $\mathfrak{A}$; так как $\mathfrak{A}$ максимально, то $x^{-1} \in \mathfrak{A}$.

Кольцо R с единицей называется *телом*, если в нем каждый элемент $x \neq 0$ имеет обратный.

V. *Если в кольце R с единицей каждый элемент $x \neq 0$ имеет левый обратный, то R — тело.*

Доказательство. Пусть $x \in R$, $x \neq 0$. По условию x имеет в R левый обратный a, так что

$$ax = e. \tag{3}$$

Положим $xa = b$; тогда $b \neq 0$, так как в противном случае мы получили бы $a = axa = ab = 0$, т. е. $a = 0$, а это противоречит (3). Поэтому b имеет в R левый обратный y, так что $yb = e$, т. е.

$$yxa = e. \tag{4}$$

Но тогда a имеет в R правый обратный x и левый обратный yx, следовательно, $x = yx$ (см. с. 184) и из (4) следует $xa = e$. Это означает, что a есть одновременно левый и правый обратный, т. е. обратный для x.

Очевидно, аналогичное предложение имеет место для колец, в которых каждый элемент $x \neq 0$ имеет правый обратный.

Понятие обратного элемента можно видоизменить таким образом, чтобы оно стало применимым к кольцам без единицы.

Элемент $y \in R$ называется *левым квазиобратным* элемента $x \in R$, если $e + y$ есть левый обратный элемента $e + x$ в R', т. е. если

$$(e + y)(e + x) = e. \tag{5}$$

Раскрывая в (5) скобки и отбрасывая е в обеих частях равенства, получим

$$x + y + yx = 0,$$

так что в определение левого квазиобратного элемента единица фактически не входит. Аналогично определяются правый квазиобратный элемент и квазиобратный элемент.

Легко видеть, что для квазиобратного элемента справедливы предложения, аналогичные III и IV.

Примеры. 1. Кольцо $C(X)$ (см. пример 1 п. 1) есть кольцо с единицей; именно, единицей этого кольца является функция, тождественно равная единице на X.

2. Кольца $A(X)$ и $B(X)$ (см. примеры 2 и 3 п. 1) являются кольцами с единицей, которой служит единичный оператор.

3. Кольцо $\mathfrak{C}(X)$ (см. пример 5 п. 1) в случае бесконечномерного X есть кольцо без единицы. Действительно, если E — оператор из $\mathfrak{C}(X)$, удовлетворяющий условию $EA = AE = A$ для всех $A \in \mathfrak{C}(X)$, то, как легко видеть, E — единичный оператор. Но в случае бесконечномерного X единичный оператор не может быть вполне непрерывным (см. п. 6 § 4).

3. Центр. *Центром* кольца R называется совокупность всех тех элементов $a \in R$, которые перестановочны со всеми элементами этого кольца.

Центр есть коммутативное надкольцо кольца R.

Действительно, пусть Z — центр кольца R. Его элементы образуют подкольцо, ибо если элементы a, $b \in R$ перестановочны со всеми элементами кольца R, то этим свойством обладают и элементы $\lambda a + \mu b$, ab. Элементы подкольца Z, будучи перестановочны со всеми вообще элементами кольца, перестановочны между собой. Следовательно, Z есть коммутативное подкольцо.

Если R — кольцо с единицей, то центр заведомо содержит все элементы вида λe. Если само кольцо R коммутативно, то центр совпадает с R.

4. Идеалы. Совокупность I_l элементов кольца R называется его *левым идеалом* [1]), если:

α) $I_l \neq R$;

β) I_l — подпространство линейного пространства R;

γ) из $x \in I_l$, $a \in R$ следует $ax \in I_l$.

Аналогично определяется *правый идеал* I_r.

Отметим, что если R — кольцо с единицей, то правый и левый идеалы не могут содержать единицу кольца R. Действительно, если бы $e \in I_l$, то из условия γ) следовало бы, что $a = ae \in I_l$ при любом $a \in R$, т. е. что $I_l = R$.

I. *Элемент x кольца с единицей имеет левый* (*правый*) *обратный тогда и только тогда, когда он не содержится ни в каком левом* (*правом*) *идеале.*

Действительно, пусть элемент x не имеет левого обратного. Совокупность I_l всех элементов вида yx не может совпадать со всем кольцом, ибо тогда при некотором y было бы $yx = e$, т. е. элемент x имел бы левый обратный y. Поэтому I_l есть левый идеал, содержащий элемент x ($y = e$).

Пусть, обратно, x принадлежит левому идеалу I_l. Если x имеет левый обратный, то $e = x_l^{-1} x \in I_l$, что невозможно. Следовательно, x_l^{-1} не существует.

---

[1]) В абстрактной алгебре все кольцо R также считается идеалом (двусторонним, следовательно, также левым и правым); в отличие от идеалов, введенных в тексте, R называется *несобственным идеалом*.

Левый (правый) идеал кольца R называется *максимальным*, если он не содержится ни в каком другом левом (правом) идеале кольца R.

II. *Всякий левый* (*правый*) *идеал кольца R с единицей содержится в некотором максимальном левом* (*правом*) *идеале*.

Доказательство. Совокупность всех левых идеалов $I'_l \supset I_l$ кольца R есть частично упорядоченное по включению множество, удовлетворяющее условию леммы Цорна. Действительно, верхней гранью линейно упорядоченного множества J идеалов $I'_k \supset I_l$ является объединение всех идеалов I'_l множества J; это объединение удовлетворяет условиям β), γ) и не совпадает с R, ибо оно не содержит единицы кольца; следовательно, это объединение есть также левый идеал. На основании леммы Цорна среди идеалов $I'_l \supset I_l$ имеется по крайней мере один максимальный идеал.

Из предложений I и II следует

III. *Элемент x кольца с единицей имеет левый* (*правый*) *обратный тогда и только тогда, когда он не содержится ни в каком максимальном левом* (*правом*) *идеале*.

Множество I элементов кольца R называется *двусторонним идеалом* в R, если I — одновременно и правый и левый идеал в R. Кольцо R называется *простым*, если в нем нет двусторонних идеалов, отличных от (0).

Пусть I — двусторонний идеал в R. Два элемента x_1, x_2 из R назовем *эквивалентными относительно I*, если $x_1 - x_2 \in I$. Тогда все кольцо R разбивается на классы ξ, η, … эквивалентных между собой элементов, которые называются *классами вычетов* кольца R по идеалу I. Обозначим через R_1 совокупность всех этих классов. Введем в R_1 операции сложения, умножения на число и умножения, производя эти действия над представителями классов. Так как I — двусторонний идеал, то результат операций не зависит от выбора этих представителей.

Следовательно, R_1 становится кольцом. Это кольцо называется *факторкольцом* (или *кольцом вычетов*) *кольца R по идеалу I* и обозначается R/I.

Двусторонний идеал называется *максимальным*, если он не содержится ни в каком другом двустороннем идеале.

IV. *Всякий двусторонний идеал кольца с единицей содержится в некотором максимальном двустороннем идеале*.

Доказательство этого предложения аналогично доказательству предложения II.

Предложения II–IV можно следующим образом перенести на кольца без единицы.

Левый идеал I_l кольца R называется *регулярным*, если в R существует элемент u такой, что $xu - x \in I_l$ для всех $x \in R$; сам элемент u называется *единичным по идеалу I_l*. Аналогично определяются регулярный правый идеал I_r и единичный элемент по регулярному правому идеалу. Наконец, двусторонний идеал I называется *регулярным*, если существует элемент u такой, что

$$ux - x \in I \quad \text{и} \quad xu - x \in I$$

для всех $x \in R$.

Если R — кольцо с единицей e, то в качестве элемента u можно взять e; отсюда видно, что *в кольце с единицей всякий идеал регулярен*.

V. *Всякий регулярный* (*правый*, *левый или двусторонний*) *идеал продолжается до максимального* (*соответственно правого*, *левого*, *двустороннего*) *идеала* (*который*, *очевидно*, *также регулярен*).

Доказательство. Пусть, например, I_l — регулярный левый идеал, u — единичный элемент по идеалу I_l; тогда u не содержится ни в каком левом идеале $I'_l \supset I_l$. Действительно, если $u \in I'_l$, то также $xy \in I'_l$; но, кроме того, $x - xu \in I_l \subset I'_l$, и потому всякий элемент

$$x = (x - xu) + xu \in I'_l,$$

т. е. $I'_l = R$.

Поэтому к идеалам $I'_l \supset I_l$ применимо рассуждение, проведенное в доказательстве предложения II.

Аналогично рассматриваются случаи правого и двустороннего регулярных идеалов.

VI. *Пусть R — кольцо без единицы, а R' — кольцо, полученное из R присоединением единицы. Тогда соответствие $I'_r \to I_r = I'_r \cap R$ есть отображение совокупности всех правых идеалов I'_r кольца R', не содержащихся целиком в R, на совокупность всех регулярных правых идеалов кольца R. Это соответствие есть взаимно однозначное отображение*:

а) *множества всех двусторонних идеалов кольца R', не содержащихся целиком в R, на множество всех регулярных двусторонних идеалов кольца R*;

б) *множества всех максимальных правых идеалов кольца R', не содержащихся целиком в R, на множество всех максимальных правых регулярных идеалов кольца R.*

Аналогичные утверждения справедливы для левых идеалов.

Доказательство. 1). Пусть I_r — правый идеал кольца R', не содержащийся целиком в R; положим $I_r = I'_r \cap R$. Очевидно, I_r — правый идеал в R. Докажем, что I_r регулярен. Так как I'_r не содержится целиком в R, то в I'_r существует элемент $y = -e + u$, $u \in R$; тогда u есть единичный элемент по идеалу I_r, ибо

$$-x + ux = (-e + u)\,x \in I'_r \cap R = I_r \quad \text{для всех} \quad x \in R.$$

Следовательно, I_r регулярен.

Обратно, пусть I_r — регулярный правый идеал в R и пусть u — единичный элемент по идеалу I_r. Тогда, как легко проверить, совокупность I'_r всех элементов $y \in R'$, для которых $uy \in I_r$, есть правый идеал в R', содержащий I_r. При этом I'_r не содержится целиком в R, ибо из соотношений

$$u(u-e) = u^2 - u \in I_r$$

следует, что $u - e \in I'_r$, причем $u - e \notin R$. Пусть теперь $y \in R$; так как $uy - y \in I_r$ для всех $y \in R$, то $y \in I_r$ тогда и только тогда, когда $y \in I'_r$. Следовательно, $I_r = I'_r \cap R$, и первое утверждение доказано.

2). Докажем теперь взаимную однозначность соответствия $I' \to \to I = I' \cap R$ в случае двусторонних идеалов. Нам надо показать, что если I', J' — двусторонние идеалы в R', не содержащиеся целиком в R, и $I = I' \cap R = J' \cap R = J$, то $I' = J'$. Поскольку I' и J' не содержатся целиком в R, существуют такие $u, v \in R$, что $-e + u \in I'$, $-e + v \in J'$. Так как I' и J' — двусторонние идеалы, то отсюда заключаем, что $-v + vu = v(-e + u) \in I$, $-u + vu = (-e + v)\,u \in I$, поэтому $u - v \in I$. Пусть $\lambda e + y \in I'$; тогда $\lambda u + uy = u(\lambda e + y) \in I$, $-y + uy = y(-e + u) \in I$ и, следовательно, также $\lambda u + y = \lambda u + uy - (-y + uy) \in I$. Поскольку $I = J \subset J'$, отсюда следует, что $\lambda e + y = \lambda(e - v) + \lambda(v - u) + \lambda u + y \in J'$; следовательно, $I' \subset J'$. Аналогично, $J' \subset I'$, и потому $I' = J'$.

Доказательство последнего утверждения мы проведем в несколько шагов:

3). *Если M_r — максимальный регулярный правый идеал кольца R и u, v — элементы кольца R, единичные по идеалу M_r, то $v - u \in \in M_r$.*

Положим $w_0 = v - u$. Из соотношений $-x + ux \in M_r$, $-x + vx \in M_r$ следует, что $w_0 x \in M_r$ для всех $x \in R$. Положим, далее, $W = \{w\colon w \in \in R, wx \in M_r$ для всех $x \in R\}$ и докажем, что W — регулярный правый идеал в R, содержащий M_r. В силу максимальности идеала M_r отсюда будет следовать, что $W = M_r$, и потому $v - u = w_0 \in W = M_r$. Очевидно, W линейно, и если $w \in M$, то $wx \in W$ для всех $x \in R$. Кроме того, $u \notin W$. Действительно, если $u \in W$, то $ux \in M_r$ и, следовательно, $x = x - ux + ux \in M_r$ для всех $x \in R$, что невозможно. Поэтому $W \neq R$ и W — правый идеал в R. Если $x_0 \in M_r$, то $x_0 x \in M_r$ для всех $x \in R$; следовательно, $x_0 \in W$. Это означает, что $M_r \subset W$. Наконец, $x - ux \in M_r \subset W$ для всех $x \in R$, и потому W регулярен. Тем самым 3) доказано.

4). *Пусть M_r — максимальный регулярный правый идеал кольца R, u — элемент кольца R, единичный по идеалу M_r, I'_r — правый идеал в R такой, что $I'_r \cap R \subset M_r$ и $J'_r = \{y\colon y \in R', uy \in M_r\}$. Тогда $I'_r \subset J'_r$ и J'_r не зависит от выбора u.*

Если также v единичен по M_r, то в силу 3) $w_0 = v - u \in M_r$. Поэтому при $y = \lambda e + x$, $x \in R$, имеем $vy - uy = w_0 y = \lambda w_0 + w_0 x \in M_r$, так что uy и vy принадлежат или не принадлежат M_r одновременно.

Это означает, что J'_r не зависит от выбора u. Пусть теперь $y \in I'_r$. Докажем, что $y \in J'_r$. Так как $y \in R$, то $y = \lambda e + x$, $x \in R$. Если $\lambda = 0$, то $y = x \in I'_r \cap R \subset M_r$. Отсюда $uy = ux = ux - x + x \in M_r$ и, значит, $y \in J'_r$. Если же $\lambda \neq 0$, то, умножив, если нужно, на $-\lambda^{-1}$, можем считать, что $y = -e + v$, $v \in R$. Тогда v единичен по $I'_r \cap R$ (см. 1), а значит, и по M_r. Отсюда в силу 3) $v = u + w_0$, где $w_0 \in M_r$, и потому

$$uy = u(-e + u + w_0) = (-u + u^2) + (uw_0 - w_0) + w_0 \in M_r.$$

Следовательно, $y \in J'_r$.

5). *Пусть M_r, J'_r — те же, что в 4). Тогда J'_r — максимальный правый идеал в R', не содержащийся целиком в R, и $J'_r \cap R = M_r$. Каждый максимальный правый идеал M'_r в R', не содержащийся целиком в R, для которого $M'_r \cap R = M_r$, совпадает с J'_r, следовательно, однозначно определяется условием $M'_r \cap R = M_r$ при данном M_r.*

Пусть M'_r — максимальный правый идеал, содержащий J'_r. Тогда $M'_r \cap R \supset J'_r \cap R = M_r$ (см. 1); в силу максимальности идеала M_r отсюда заключаем: $M'_r \cap R = M_r$ или $M'_r \cap R = R$. Но второй случай невозможен. Действительно, тогда $M'_r = R$ или $M'_r = R'$, что невозможно. Итак, $M'_r \cap R = M_r$, так что в силу 4) $M'_r \subset J'_r$. Следовательно, $M'_r = J'_r$ в силу максимальности идеала M'_r. Одновременно мы видим, что J'_r максимален и что каждый максимальный правый идеал M'_r, не содержащийся целиком в R и удовлетворяющий условию $M'_r \cap R = M_r$, совпадает с J'_r.

6). *Пусть M'_r — максимальный правый идеал в R', не содержащийся целиком в R. Тогда $I_r = M'_r \cap R$ — максимальный регулярный правый идеал в R.*

Регулярность идеала I_r была доказана в 1). Пусть M_r — максимальный регулярный правый идеал в R, содержащий I_r. В силу 5) существует и притом только один максимальный правый идеал J'_r, не содержащийся целиком в R и такой, что $J'_r \cap R = M_r$. По условию $M'_r \cap R = I_r \subset M_r$; следовательно, в силу 5) $M'_r \subset J'_r$. Отсюда в силу максимальности $M'_r = J'_r$, и потому $I_r = M'_r \cap R = J'_r \cap R = M_r$.

Из предложений 5) и 6) следует утверждение б).

Для немаксимальных правых регулярных идеалов взаимная однозначность отображения $I'_r \to I'_r \cap R$ нарушается. Простым примером является кольцо R всех матриц вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, где α, β — произвольные комплексные числа. Тогда R' — кольцо всех матриц $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}$, где α, β, γ — произвольные комплексные числа. Каждое множество $I'_r = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \lambda\beta_0 \\ 0 & \lambda\gamma_0 \end{pmatrix} \right\}$, где $\gamma_0 \neq 0$ и β_0 фиксированы, а λ пробегает все комплексные числа, есть правый идеал в R', не содержащийся целиком в R, и $I'_r \cap R = (0)$. Следовательно, все эти идеалы I'_r переходят в один и тот же идеал (0) при отображении $I'_r \to I'_r \cap R$.

Доказанное предложение сводит изучение регулярных идеалов в R к изучению идеалов в R'. В частности, из него следует, что *максимальные регулярные* (*правые*, *левые*, *двусторонние*) *идеалы в* R *являются пересечениями с* R *максимальных* (*соответственно*, *правых*, *левых*, *двусторонних*) *идеалов в* R', *не совпадающих с* R.

VII. *Элемент* x *кольца* R *не имеет левого квазиобратного тогда и только тогда*, *когда*

$$I_l = \{z + zx\}, \quad z \in R,$$

есть левый идеал. В этом случае I_l *есть регулярный левый идеал*, *не содержащий* x.

Доказательство. Очевидно, I_l удовлетворяет условиям β), γ) определения левого идеала. Поэтому если I_l — не левый идеал, то $I_l = R$; следовательно, существует элемент $z \in R$ такой, что

$$z + zx = -x, \quad \text{т. е.} \quad x + z + zx = 0.$$

Это означает, что z есть левый квазиобратный к x. Обратно, если x имеет левый квазиобратный, то в силу только что сказанного $x \in I_l$. Но тогда также $-zx \in I_l$, а значит, и

$$z = z(z + zx) - zx \in I_l$$

при любом $z \in R$. Это означает, что $I_l = R$. Из этого рассуждения следует также, что если I_l — идеал, то $x \notin I_l$. Наконец, элемент $u = -x$ является единичным по идеалу I_l, так что I_l регулярен.

Аналогичное предложение можно доказать об элементах, не имеющих правого квазиобратного.

VIII. *Элемент* x *кольца* R *обладает левым квазиобратным тогда и только тогда*, *когда для любого максимального регулярного левого идеала* M_l *существует элемент* y *такой*, *что*

$$x + y + yx \in M_l.$$

Доказательство. Условие необходимо, ибо достаточно взять в качестве y левый квазиобратный элемента x. Пусть это условие выполнено, и пусть x не имеет левого квазиобратного. Тогда $I_l = \{z + zx\}$ есть регулярный левый идеал в R, и потому существует максимальный регулярный левый идеал $M_l \supset I_l$. По условию, существует элемент y такой, что

$$x + y + yx \in M_l.$$

Но $y + yx \in I_l \subset M_l$, следовательно, $x \in M_l$. Отсюда $-zx \in M_l$, и потому

$$z = -zx + (z + zx) \in M_l$$

для любого $z \in R$, $M_l = R$, что невозможно.

5. Радикал. Элемент x_0 кольца R с единицей называется *обобщенным нульстепенным*, если $(e+yx_0)_l^{-1}$ существует для любого элемента $y \in R$. Совокупность всех обобщенных нульстепенных элементов кольца R называется *радикалом*.

I. *Радикал кольца с единицей совпадает с пересечением всех его максимальных левых идеалов.*

Доказательство. Пусть элемент x_0 принадлежит всем максимальным левым идеалам. Если при некотором $y \in R$ не существует $(e+yx_0)_l^{-1}$, то элемент $z = e + yx_0$ принадлежит хотя бы одному левому, следовательно, и максимальному левому идеалу I_l. В силу предположения этому идеалу принадлежит элемент yx_0, следовательно, также

$$e = z - yx_0 \in I_l,$$

что невозможно. Итак, $(e+yx_0)_l^{-1}$ существует при любом $y \in R$, т.е. x_0 принадлежит радикалу. Пусть, обратно, x_0 принадлежит радикалу. Докажем, что x_0 содержится во всех максимальных левых идеалах кольца R. Предположим противное. Пусть $x_0 \notin I_l$. Рассмотрим совокупность всех элементов z вида $z = a - yx_0$, где $a \in I_l$, $y \in R$. Эта совокупность совпадает со всем кольцом, ибо в противном случае она была бы левым идеалом, содержащим максимальный левый идеал I_l в качестве своей правильной части. В частности, единицу e можно представить в виде $e = a - yx_0$. Отсюда элемент $a = e + yx_0$, как элемент идеала I_l, не имеет левого обратного, что противоречит допущению. Предложение I тем самым доказано.

Из предложения I следует, что радикал есть левый идеал.

II. *Элемент x_0 принадлежит радикалу кольца с единицей тогда и только тогда, когда для любого элемента a кольца существует двусторонний обратный* $(e+ax_0)^{-1}$.

Доказательство. Если $(e+ax_0)^{-1}$ существует для всех $a \in R$, то подавно существует $(e+ax_0)_l^{-1}$; следовательно, x_0 принадлежит радикалу. Обратно, пусть x_0 принадлежит радикалу и $a \in R$. По определению радикала существует левый обратный $(e+ax_0)_l^{-1}$. Обозначим через $e+y$ один из этих левых обратных, так что

$$(e+y)(e+ax_0) = e. \tag{1}$$

Это означает, что $e+y$ имеет своим правым обратным $e+ax_0$. Кроме того, раскрывая скобки в (1), получим, что

$$y = -yax_0 - ax_0. \tag{2}$$

Обозначим через I радикал кольца R. Так как $x_0 \in I$ и I — левый идеал, то из (2) следует, что $y \in I$; следовательно, при любом $b \in R$ существует левый обратный $(e+by)_l^{-1}$. Положив $b = e$, получим, что существует $(e+y)_l^{-1}$. С другой стороны, как мы видели, существует $(e+y)_r^{-1} = e + ax_0$; следовательно, существует двусторонний обратный

$(e+y)^{-1} = e + ax_0$. Но тогда элемент $e+y$ есть двусторонний обратный элемента $e+ax_0$.

Выше мы определили радикал при помощи левых обратных. Аналогично можно его определить при помощи правых обратных. Именно, обозначим через I' совокупность всех элементов x таких, что $(e+xa)_r^{-1}$ существует для всех элементов a кольца. Рассуждая, как в доказательстве предложения I, получим, что I' есть пересечение всех максимальных правых идеалов кольца, следовательно, есть правый идеал. Далее, как и в доказательстве предложения II, получим, что I' состоит из тех и только тех элементов x_0, для которых существует двусторонний обратный $(e+x_0a)^{-1}$ при любом a из кольца.

Докажем, что двусторонние обратные $(e+x_0a)^{-1}$ и $(e+ax_0)^{-1}$ существуют или не существуют одновременно. Тем самым будет доказано, что I' совпадает с радикалом. Пусть, например, существует

$$(e+ax_0)^{-1} = e+y.$$

Тогда

$$e - x_0a - x_0ya = (e+x_0a)^{-1}.$$

Действительно,

$$(e+x_0a)(e-x_0a-x_0ya) - e = -x_0[(e+ax_0)(e+y)-e]\,a = 0$$

и

$$(e-x_0a-x_0ya)(e+x_0a) - e = -x_0[(e+y)(e+ax_0)-e]\,a = 0.$$

Тем самым доказано

III. *Пересечение всех максимальных левых идеалов совпадает с пересечением всех максимальных правых идеалов и есть радикал кольца.*

В частности, отсюда следует, что *радикал есть двусторонний идеал.*

Кольцо называется *полупростым*, если его радикал состоит только из нуля.

Пусть теперь R — кольцо без единицы, а R' — кольцо, полученное из R присоединением единицы. Существование левого обратного элемента $e+yx_0$ в R' равносильно существованию левого квазиобратного элемента yx_0 для любого $x \in R'$. Поэтому, полагая $y = \alpha a + z$, $z \in R$, мы можем дать следующее определение обобщенного нульстепенного элемента, равносильное первоначальному в случае кольца с единицей. Элемент x_0 называется *обобщенным нульстепенным*, если $\alpha x_0 + zx_0$ имеет левый квазиобратный при любых $z \in R$ и любых числах α; в этом определении R уже не обязательно кольцо с единицей. Совокупность всех обобщенных нульстепенных элементов кольца R (не обязательно с единицей) называется его *радикалом.* Из этого определения непосредственно следует, что

$$I = R \cap I', \tag{3}$$

где I и I' — радикалы колец R и R' соответственно.

Кольцо R называется *радикальным*, если оно совпадает со своим радикалом, и *нерадикальным* — в противном случае. Из VII п. 4 вытекает, что *в нерадикальном кольце существуют регулярные, а потому и максимальные регулярные левые и правые идеалы.* Комбинируя этот результат с VI п. 4 и формулой (3), заключаем:

III$'$. *В нерадикальном кольце радикал есть пересечение всех максимальных регулярных левых идеалов, а также пересечение всех максимальных регулярных правых идеалов и потому есть двусторонний идеал.*

IV. *Факторкольцо по радикалу есть полупростое кольцо.*

Доказательство. Пусть I — радикал кольца R, а J — радикал кольца R/I. Пусть элемент ξ кольца R/I принадлежит J. Это означает, что элемент $\zeta = \alpha\xi + \eta\xi$ имеет левый квазиобратный в R/I при любом $\eta \in R/I$ и любом α. Пусть ζ' — этот квазиобратный, так что

$$\zeta' + \zeta + \zeta'\zeta = 0, \tag{4}$$

и пусть x, y, z, z' — какие-нибудь представители классов ξ, η, ζ, ζ' соответственно. Тогда (4) означает, что

$$z' + z + z'z = p, \qquad \text{где} \quad p \in I,$$

причем можно считать

$$z = \alpha x + yx.$$

Так как $p \in I$, то p имеет левый квазиобратный; обозначим его через p'. Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что $p' + z' + p'z'$ есть левый квазиобратный к z. Следовательно, элемент $z = \alpha x + yx$ имеет квазиобратный при любом $y \in R$ и любом α. Это означает, что $x \in I$, т. е. что $\xi = 0$. Итак, всякий элемент $\xi \in J$ равен нулю, $J = (0)$; следовательно, R/I — полупростое кольцо.

Отметим следующий важный пример полупростого кольца. Кольцо R линейных операторов в векторном пространстве X называется *неприводимым*, если в X нет подпространств, отличных от (0) и всего X и инвариантных относительно всех операторов из R.

V. *Всякое отличное от* (0) *неприводимое кольцо R линейных операторов в векторном пространстве X есть полупростое кольцо.*

Доказательство. При фиксированном $x \in X$, $x \neq 0$, совокупность Rx всех векторов Ax, $A \in R$, есть подпространство в X, инвариантное относительно всех операторов из R; следовательно, либо $Rx = (0)$, либо $Rx = X$. Совокупность $\mathfrak{N}$ всех векторов x, для которых $Rx = (0)$, есть подпространство в X, инвариантное относительно всех операторов $A \in R$; поэтому либо $\mathfrak{N} = (0)$, либо $\mathfrak{N} = X$. Но второй случай означал бы, что, вопреки условию, $R = (0)$; следовательно, $\mathfrak{N} = (0)$ и $Rx = X$ для всякого $x \in X$, $x \neq 0$. Это рассуждение применимо также к любому двустороннему идеалу $I \neq (0)$ в R, ибо для произвольного двустороннего идеала I в R множества Ix и $\{x \in X \colon Ix = 0\}$ являются подпространствами в X, инвариантными относительно всех операторов $A \in R$, следовательно, $Ix = X$ для любого такого идеала I и любого $x \in X$, $x \neq 0$.

Пусть теперь I — радикал в R и $A \in I$; если $A \neq 0$, то существует элемент $x \in X$ такой, что $Ax \neq 0$, а значит, $RAx = X$. Поэтому существует оператор $B \in R$, для которого $BAx = -x$. Но BA имеет левый квазиобратный, ибо $A \in I$; пусть C — этот квазиобратный. Тогда $C + BA + CBA = 0$, и потому $Cx + BAx + CBAx = 0$. Но отсюда $x = -BAx = Cx + CBAx = Cx - Cx = 0$, что противоречит условию. Итак, $I = (0)$, т. е. R — полупростое кольцо.

6. Гомоморфизм и изоморфизм колец. Отображение $x \to x'$ кольца R в произвольное кольцо R' называется *гомоморфизмом кольца R в R'*, если из $x \to x'$, $y \to y'$ следует, что $\lambda x \to \lambda x'$, $x + y \to x' + y'$, $xy \to x'y'$. Если R' есть образ кольца R, то гомоморфизм называется *гомоморфизмом R на R'*.

При гомоморфизме R на R' все понятия, определенные в предыдущих пунктах, в том числе понятие единицы, остаются инвариантными. Другими словами, единица, идеал (правый, левый или двусторонний), подкольцо кольца R переходят соответственно в единицу, идеал и подкольцо кольца R'.

Если гомоморфизм есть взаимно однозначное отображение, то он называется *изоморфизмом*. Два кольца R и R' называются *изоморфными*, если существует изоморфизм R на R'.

Гомоморфизм можно описать при помощи двусторонних идеалов кольца R.

I. *При гомоморфизме кольца R в R' прообраз I нуля $0'$ кольца R' есть двусторонний идеал в кольце R.*

Действительно, пусть $x \in I$, $y \in I$; это означает, что $x \to 0'$, $y \to 0'$; следовательно, при любом $a \in R$ и любых числах α, β

$$ax \to a'0' = 0', \quad xa \to 0'a' = 0', \quad \alpha x + \beta y \to 0' + 0' = 0'.$$

Из этих соотношений следует, что $ax \in I$, $xa \in I$, $\alpha x + \beta y \in I$, т. е. I — двусторонний идеал.

Этот идеал называется *ядром гомоморфизма* кольца R в кольцо R'.

Два элемента x, y кольца R переходят в один и тот же элемент кольца R' тогда и только тогда, когда $x - y \in I$. Это показывает, что прообразами элементов кольца R' являются классы вычетов по идеалу I, т. е. элементы кольца R/I. Таким образом,

II. *При гомоморфном отображении кольца R прообраз I нулевого элемента есть двусторонний идеал этого кольца, а сам гомоморфный образ изоморфен кольцу вычетов R по I. Обратно, всякий двусторонний идеал I кольца R порождает гомоморфизм кольца R на кольцо вычетов R/I.*

Этот гомоморфизм кольца R на R/I, состоящий в том, что каждому элементу $x \in R$ ставится в соответствие класс ξ, содержащий x, называется *каноническим гомоморфизмом* кольца R на кольцо R/I.

Предложение II означает, что если отождествить образы элементов кольца R при данном гомоморфизме с отвечающими им элементами кольца R/I, то этот гомоморфизм станет каноническим гомоморфизмом кольца R на кольцо R/I.

III. *Кольцо вычетов R/I — простое тогда и только тогда, когда I — максимальный двусторонний идеал в R.*

Доказательство. Пусть I_1 — двусторонний идеал в кольце R/I.

Прообраз I' идеала I_1 при гомоморфизме $R \to R/I$ есть двусторонний идеал в кольце R, содержащий I. Если поэтому I — максимальный идеал в R, то I' совпадает с I; следовательно, всякий идеал I_1 в R/I состоит только из нуля; R/I — простое кольцо. Обратно, пусть I — не максимальный двусторонний идеал в R. Тогда существует двусторонний идеал $I' \supset I$, $I_1' \neq I$.

Образ идеала I_1' при гомоморфизме $R \to R/I$ есть двусторонний идеал в R/I, отличный от (0). Следовательно, R/I не простое кольцо.

В некоторых случаях удобно вместо гомоморфизма колец рассматривать их *антигомоморфизм*; так называется отображение $x \to x'$, удовлетворяющее условиям

$$\lambda x \to \lambda x', \quad x + y \to x' + y', \quad xy \to y'x'$$

при $x \to x'$, $y \to y'$. Очевидно, предложение I остается также справедливым для антигомоморфизма колец.

7. Регулярные представления кольца. Примером гомоморфизма кольца является так называемое его левое регулярное представление. Каждому элементу $a \in R$ поставим в соответствие оператор A_a левого умножения на a:

$$A_a x = ax;$$

очевидно, A_a — линейный оператор в R, рассматриваемом как векторное пространство.

Легко также видеть, что соответствие $a \to A_a$ есть гомоморфизм кольца R в кольцо всех линейных операторов в R. Этот гомоморфизм и называется *левым регулярным представлением* кольца R. Ядро этого гомоморфизма состоит из всех тех элементов a кольца R, которые удовлетворяют условию

$$ax = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in R.$$

Отсюда, в частности, следует, что *если R — кольцо с единицей, то левое регулярное представление есть изоморфизм.*

Очевидно, левый идеал I_l кольца R можно определить как подпространство в R, отличное от R и инвариантное относительно всех операторов A_a левого регулярного представления. Поэтому оператор A_a порождает линейный оператор $A_a^\frown$ в факторпространстве R/I_l (см. п. 7 § 1) и, очевидно, соответствие $a \to A_a^\frown$ есть гомоморфизм кольца R в кольцо линейных операторов в пространстве R/I_l.

Кольцо R называется *примитивным*, если в нем имеется максимальный левый идеал I_l, для которого этот гомоморфизм $a \to A_a^\frown$ есть изоморфизм. В этом случае совокупность всех операторов $A_a^\frown$ есть неприводимое кольцо операторов в R/I_l. Действительно, пусть $\mathfrak{M}$ — подпространство в R/I_l, инвариантное относительно всех операторов $A_a^\frown$, $a \in R$; тогда совокупность J всех представителей x классов $\xi \in \mathfrak{M}$ есть (собственный или несобственный) левый идеал в R, содержащий I_l, и потому либо $J = I_l$, либо $J = R$. В первом случае $\mathfrak{M} = (0)$, а во втором $\mathfrak{M} = R/I_l$.

Таким образом,

I. *Всякое примитивное кольцо изоморфно неприводимому кольцу линейных операторов в векторном пространстве* [1].

Комбинируя этот результат с предложением V п. 5, заключаем:

II. *Всякое примитивное кольцо — полупростое.*

III. *Если $i \neq (0)$ — двусторонний идеал в примитивном кольце R и если a — произвольный отличный от нуля элемент кольца R, то $Ia \neq (0)$.*

Доказательство. В силу I мы можем считать, что R — неприводимое кольцо линейных операторов в некотором векторном пространстве X; тогда $Ix = X$ для $x \in X$, $x \neq 0$. Но если оператор $a \neq 0$, то существует вектор $x \in X$ такой, что $ax \neq 0$, а значит $Iax = X$. Отсюда следует, что $Ia \neq (0)$.

Двусторонний идеал I в кольце R называется *примитивным*, если факторкольцо R/I примитивно.

Мы определили левое регулярное представление; аналогично определяется правое регулярное представление. Именно, каждому элементу $a \in R$ поставим в соответствие оператор B_a правого умножения на A:

$$B_a x = xa.$$

Соответствие $a \to B_a$ называется *правым регулярным представлением* кольца R; легко видеть, что это соответствие есть антигомоморфизм кольца R в кольцо линейных операторов в пространстве R. Предыдущие рассуждения полностью переносятся на правые регулярные представления, нужно только левые идеалы заменить правыми.

[1] Отметим, что верно также обратное утверждение; его доказательство мы предоставляем читателю.

§ 8. Топологические кольца

1. Определение топологического кольца. R называется *топологическим кольцом*, если:

1) R — кольцо;
2) R — локально выпуклое [1] топологическое линейное пространство;
3) произведение xy есть непрерывная функция каждого из сомножителей x, y при фиксированном втором сомножителе.

Отображение $x \to x'$ топологического кольца R в топологическое кольцо R' называется *непрерывным гомоморфизмом*, если:

1) $x \to x'$ есть гомоморфизм кольца R в кольцо R';
2) $x \to x'$ есть непрерывное отображение топологического пространства R в топологическое пространство R'.

Если, в частности, отображение $x \to x'$ есть изоморфизм, то оно называется *непрерывным изоморфизмом.*

Аналогично определяются непрерывный антигомоморфизм и антиизоморфизм.

Два топологических кольца называются *топологически изоморфными*, если существует взаимно непрерывный изоморфизм кольца R на кольцо R'.

Подмножество $R_1 \subset R$ называется *замкнутым подкольцом* кольца R, если:

α') R_1 — подкольцо кольца R;
β') R_1 — замкнутое подпространство топологического пространства R.

I. *Если R_1 — подкольцо кольца R, то его замыкание $\overline{R}_1$ есть замкнутое подкольцо кольца R.*

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что $\overline{R}_1$ — подкольцо кольца R. В силу II п. 2 § 3 $\overline{R}_1$ — линейное подпространство в R, и потому достаточно установить, что если $x,\ y \in \overline{R}_1$, то также $xy \in \overline{R}_1$. Но при фиксированном $y \in R_1$ непрерывная функция $f(x) = xy$ отображает R_1 в R_1 и потому $\overline{R}_1$ в $\overline{R}_1$; это означает, что $xy \in \overline{R}_1$ при $x \in \overline{R}_1$, $y \in R_1$. Но тогда при фиксированном $x \in \overline{R}_1$ непрерывная функция $\varphi(y) = xy$ отображает R_1 в $\overline{R}_1$ и потому также $\overline{R}_1$ в $\overline{R}_1$; это означает, что из $x,\ y \in \overline{R}_1$ следует $xy \in \overline{R}_1$.

Очевидно, пересечение замкнутых подколец кольца R есть также замкнутое подкольцо кольца R. В частности, пересечение всех замкнутых подколец кольца R, содержащих данное множество $S \subset R$, есть

[1] Отметим, что многие результаты этого параграфа остаются справедливыми и для того случая, когда кольцо R есть произвольное топологическое линейное пространство (не обязательно локально выпуклое), удовлетворяющее условию 3). В частности, это относится ко всем результатам пп. 1–2.

минимальное замкнутое подкольцо, содержащее S. Мы обозначим его $R_t(S)$.

II. *Кольцо $R_t(S)$ есть замыкание кольца $R_a(S)$:*

$$R_t(S) = \overline{R_a(S)}.$$

Действительно, всякое замкнутое подкольцо, содержащее S, должно также содержать $\overline{R_a(S)}$; с другой стороны, в силу I, $\overline{R_a(S)}$ само есть замкнутое подкольцо; поэтому $\overline{R_a(S)}$ — минимальное замкнутое подкольцо, содержащее S.

III. *Замыкание коммутативного подкольца топологического кольца коммутативно.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{A}$ — коммутативное подкольцо топологического кольца R; докажем, что $\overline{\mathfrak{A}}$ также коммутативно. При фиксированном $y \in \mathfrak{A}$ непрерывные отображения $f(x) = xy$ и $\varphi(x) = yx$ совпадают на $\mathfrak{A}$, а значит и на $\overline{\mathfrak{A}}$ (см. IX п. 7 § 2). Следовательно, $xy = yx$ для всех $x \in \overline{\mathfrak{A}}$. Но тогда при фиксированном $x \in \overline{\mathfrak{A}}$ непрерывные отображения $f_1(y) = xy$ и $\varphi_1(y) = yx$ совпадают на $\mathfrak{A}$, а значит и на $\overline{\mathfrak{A}}$; следовательно, $xy = yx$ для всех x.

IV. *Максимальное коммутативное подкольцо топологического кольца замкнуто.*

Доказательство. Замыкание $\overline{\mathfrak{A}}$ максимального коммутативного подкольца $\mathfrak{A}$ есть коммутативное подкольцо, содержащее $\mathfrak{A}$. В силу максимальности $\mathfrak{A}$ это возможно, лишь когда $\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}$.

V. *Совокупность R_S всех элементов x топологического кольца R, перестановочных со всеми элементами некоторого множества $S \subset \subset R$, есть замкнутое подкольцо кольца R.*

Доказательство. Если x, y перестановочны со всеми элементами из S, то, очевидно, этим же свойством обладают αx, $x + y$ и xy; следовательно, R_S — подкольцо. Докажем его замкнутость. Для этой цели обозначим через R_y совокупность всех элементов $x \in R$, для которых $xy = yx$. Так как R_y есть множество всех элементов x, на которых совпадают непрерывные отображения $f_1(x) = xy$ и $f_2(x) = yx$, то R_y замкнуто. Поэтому R_S, являющееся пересечением всех R_y, $y \in S$, также замкнуто.

Кольцо R_S называется *коммутантом* множества S; будем обозначать его S'. Легко проверить следующие соотношения:

1) если R содержит единицу e, то $e \in S'$;

2) если $S_1 \subset S_2$, то $S_1' \supset S_2'$;

3) $S'' \supset S$.

VI. *Центр Z топологического кольца R есть замкнутое коммутативное подкольцо в R.*

Действительно, так как $Z \subset R'$, то утверждение непосредственно следует из V.

VII. *Замыкание* (*левого*, *правого*, *двустороннего*) *идеала в топологическом кольце*, *не совпадающее со всем кольцом*, *есть также* (*соответственно левый*, *правый*, *двусторонний*) *идеал в этом кольце*.

Доказательство. Пусть, например, I_l — левый идеал в топологическом кольце R, и пусть $\overline{I}_l \neq R$. Так как I_l — подпространство в R, то его замыкание $\overline{I}_l$ есть также подпространство в R. Поэтому достаточно показать, что если $x \in \overline{I}_l$, $y \in R$, то $yx \in \overline{I}_l$. Но это следует из того, что при фиксированном $y \in R$ непрерывная функция $f(x) = yx$ отображает I_l в I_l, а значит, $\overline{I}_l$ в $\overline{I}_l$.

2. Топологическое присоединение единицы. Пусть R — топологическое кольцо без единицы, а R' — кольцо, полученное из R присоединением единицы. Кольцо R можно рассматривать как множество всех пар $\{\alpha, x\}$, где $x \in R$, а α — числа; поэтому в R' можно ввести топологию, считая R' топологическим произведением топологических пространств $\mathfrak{C}$ (множества всех комплексных чисел) и R. Легко видеть, что тогда R' станет топологическим кольцом. Переход от топологического кольца R к топологическому кольцу R' мы будем называть *топологическим присоединением единицы*.

3. Кольца с непрерывным обратным. Топологическое кольцо R с единицей называется *кольцом с непрерывным обратным*, если существует окрестность $U_0(e)$, обладающая следующими свойствами:

1) каждый элемент $x \in U_0(e)$ имеет обратный x^{-1};

2) x^{-1} есть непрерывная функция от x в точке $x = e$.

В дальнейшем в этом пункте R будет обозначать кольцо с непрерывным обратным.

I. *Если x_0 — элемент кольца R*, *имеющий обратный x_0^{-1}*, *то существует окрестность $U(x_0)$ такая*, *что*:

а) *каждый элемент $x \in U(x_0)$ имеет обратный x^{-1}*;

б) *x^{-1} есть непрерывная функция от x в точке $x = x_0$.*

Доказательство. Элемент $e + x_0^{-1}y$ есть непрерывная функция от y во всем кольце, в частности, в точке $y = 0$. Следовательно. найдется окрестность $U(0)$ такая, что $e + x_0^{-1}y \in U_0(e)$ при $y \in U(0)$, и потому существует $(e + x_0^{-1}y)^{-1}$. Пусть $U(x_0)$ — окрестность точки x_0, состоящая из всех элементов $x_0 + y$, $y \in U(0)$. Если $x_0 + y \in U(x_0)$, то элемент

$$x = x_0 + y = x_0(e + x_0^{-1}y)$$

имеет обратный, ибо существует x_0^{-1} и $(e + x_0^{-1}y)^{-1}$; при этом

$$x^{-1} = (x_0 + y)^{-1} = (e + x_0^{-1}y)^{-1}x_0^{-1}. \tag{1}$$

$(e + x_0^{-1}y)^{-1}$ есть непрерывная функция от $u = e + x_0^{-1}y$ в точке $u = e$; но u есть непрерывная функция от y в точке $y = 0$, а значит, и от $x = x_0 + y$ в точке $x = x_0$. Следовательно, $(e + x_0^{-1}y)^{-1}$, потому и x^{-1} есть непрерывная функция от x в точке $x = x_0$.

Аналогично доказывается следующее предложение:

II. *Если* x_0 — *элемент кольца* R, *имеющий левый* (*правый*) *обратный, то существует окрестность* $U(x_0)$ *такая, что*:

1) *каждый элемент* $x \in U(x_0)$ *имеет левый* (*правый*) *обратный*;
2) *левый* (*правый*) *обратный элемента* x *есть непрерывная функция от* x *в точке* x_0.

При этом формулу (1) *следует заменить формулами*

$$x_l^{-1} = (x_0 + y)_l^{-1} = x_{0,\,l}^{-1}(e + yx_{0,\,l}^{-1})^{-1}, \tag{2а}$$

$$x_r^{-1} = (x_0 + y)_r^{-1} = (e + x_{0,\,r}^{-1})^{-1}x_{0,\,r}^{-1}. \tag{2б}$$

Из предложений I и II заключаем

III. *Совокупность всех элементов кольца* R, *имеющих обратный, а также совокупность всех элементов кольца* R, *имеющих левый* (*правый*) *обратный, являются открытыми множествами в* R. *Совокупность всех элементов кольца* R, *не имеющих обратного, а также совокупность всех элементов кольца* R, *не имеющих левого* (*правого*) *обратного, являются замкнутыми множествами в* R.

Пользуясь предложением III, легко доказать, что

IV. *Замыкание* (*левого, правого, двустороннего*) *идеала в* R *есть также* (*соответственно левый, правый, двусторонний*) *идеал в* R.

Доказательство. Пусть I_l — левый идеал а R, а S_l — совокупность всех элементов кольца R, не имеющих левого обратного. Тогда $I_l \subset S_l$ (см. I п. 4 § 7); следовательно, его замыкание $\overline{I}_l$ также содержится в S_l и потому не совпадает с R. На основании VII п. 1 $\overline{I}_l$ есть левый идеал в R. Аналогично доказывается утверждение о правом идеале. Двусторонний идеал I есть также левый идеал; следовательно, его замыкание $\overline{I}$ не совпадает с R; в силу VII п. 1 отсюда следует, что $\overline{I}$ — двусторонний идеал.

V. *Максимальный* (*левый, правый, двусторонний*) *идеал в кольце* R *замкнут*.

Доказательство. Замыкание $\overline{I}_l$ максимального левого идеала I_l есть идеал, содержащий I_l; в силу максимальности I_l это возможно, лишь когда $\overline{I}_l = I_l$. Следовательно, I_l замкнут. Аналогично доказывается замкнутость максимального правого и максимального двустороннего идеалов.

Примеры. 1. Пусть G — открытое множество на комплексной плоскости, а R_G — совокупность всех функций $f(z)$, голоморфных в G. При обычном определении операций R_G образует кольцо, причем функция $f_0(z) \equiv 1$ будет единицей в R_G. Определим в R_G топологию, взяв в качестве базы окрестностей всевозможные конечные пересечения множеств $U(f_0; K; \varepsilon)$ функции $f(z) = R_G$, удовлетворяющих условию $|f(z) - f_0(z)| < \varepsilon$ для всех $z \in K$, где $f_0 = R_G$, а K — замкнутое ограниченное множество в G. Легко проверить, что при таком определении топологии R_G станет топологическим кольцом.

Пусть теперь S — произвольное замкнутое множество комплексной плоскости. Условимся называть окрестностью $U(S)$ множества S всякое открытое множество $U \supset S$, состоящее из конечного числа связных частей, каждая из которых пересекает S. Функция $f(z)$ называется *аналитической на* S, если она принадлежит некоторому $R_{U(S)}$. Обозначим через $R(S)$ совокупность всех функций $f(z)$, аналитических на S; при этом функции $f_1(z) \in R_{U_1(S)}$, $f_2(z) \in R_{U_2(S)}$, совпадающие на некотором $U(S) \subset U_1(S) \cap U_2(S)$, не будем считать различными. Определив снова операции обычным образом, мы превратим $R(S)$ в кольцо. При этом по-прежнему функция $f(z) \equiv 1$ будет единицей в $R(S)$. Определим теперь в $R(S)$ топологию, считая окрестностью в $R(S)$ всякое выпуклое множество, пересечение которого с каждым $R_{U(S)}$ есть окрестность [1)] в $R_{U(S)}$. Легко проверить, что при таком определении топологии $R(S)$ станет топологическим кольцом.

Можно также показать (см. Валбрук [1]), что $R(S)$ *есть кольцо с непрерывным обратным.*

Кольцо $R(S)$, а также его обобщение на функции нескольких комплексных переменных были исследованы в работах Валбрука [1].

Другие примеры кольца с непрерывным обратным см. ниже в пп. 1 и 3 § 9.

2. Рассмотрим кольцо $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ (см. пример 3 п. 1 § 7). Определим в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ локально выпуклую топологию, взяв в качестве достаточного множества полунорм совокупность всех функционалов

$$p_{x,y}(A) = |(Ax, y)|, \quad x, y \in \mathfrak{H}.$$

Тогда базу окрестностей в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ образуют всевозможные множества $U(A_0; x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n; \varepsilon)$ операторов $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, удовлетворяющих неравенствам

$$|((A - A_0)\, x_k, y_k)| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

при всевозможных фиксированных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathfrak{H}$ и $\varepsilon > 0$. Топология, таким образом определенная, называется *слабой операторной топологией в* $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$.

В силу III п. 4 § 3 в этой топологии $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ является локально выпуклым пространством. Легко также проверить непрерывность в слабой топологии произведения AB по отношению к каждому из множителей при фиксированном втором множителе; следовательно, в слабой топологии $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ — есть топологическое кольцо. В этой топологии $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ не есть кольцо с непрерывным обратным. Действительно, пусть задана окрестность $U(A_); x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n; \varepsilon)$, $\mathfrak{M}$ — линейная оболочка элементов $x_1, \ldots, x_n$, определяющих окрестность оператора $A_0 = 1$,

---

[1)] Это означает, что $R(S)$ есть *индуктивный предел* колец $R_{U(S)}$ (см. по этому поводу сноску на с. 244).

и $P = P_m$ — оператор проектирования на $\mathfrak{M}$. Тогда P принадлежит этой окрестности и не имеет обратного в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$.

4. Резольвента в кольце с непрерывным обратным. Пусть R по-прежнему обозначает топологическое кольцо с непрерывным обратным. Комплексное число λ называется *регулярной точкой* элемента $x \in R$, если существует обратный $(x - \lambda e)^{-1}$; все нерегулярные точки элемента x называются *точками его спектра*, а совокупность всех нерегулярных точек — *спектром* элемента x.

$(x - \lambda e)^{-1}$ называется *резольвентой* элемента x; таким образом, резольвента есть вектор-функция

$$x_\lambda = (x - \lambda e)^{-1},$$

определенная для всех регулярных точек λ элемента x.

I. *Резольвента x_λ удовлетворяет соотношению*

$$x_{\lambda_2} - x_{\lambda_1} = (\lambda_2 - \lambda_1)\, x_{\lambda_1} x_{\lambda_2} \tag{1}$$

для любых двух регулярных точек λ_1, λ_2 элемента x.

Действительно, умножая обе части очевидного тождества

$$(x - \lambda_1 e) - (x - \lambda_2 e) = (\lambda_2 - \lambda_1)\, e \tag{2}$$

слева на x_{λ_1} и затем справа на x_{λ_2}, получим (1).

II. *Множество $\mathfrak{R}_x$ всех регулярных точек элемента x открыто и резольвента x_λ есть аналитическая вектор-функция на $\mathfrak{R}_x$.*

Доказательство. Пусть $x_{\lambda_0} = (x - \lambda_0 e)^{-1}$ существует; тогда имеется окрестность $U(x - \lambda_0 e)$ такая, что всякий элемент $y \in U(x - \lambda_0 e)$ имеет обратный. Так как $y(\lambda) = x - \lambda e$ есть непрерывная функция от λ, то этой окрестности отвечает окрестность $U(\lambda_0)$ такая, что при $\lambda \in U(\lambda_0)$ будет $y(\lambda) \in U(x - \lambda_0 e)$ и, следовательно, $x_\lambda = y(\lambda)^{-1}$ будет существовать. Тем самым доказано, что $\mathfrak{R}_x$ открыто. Одновременно мы видим, что x_λ есть непрерывная функция в каждой точке $\lambda_0 \subset \mathfrak{R}_x$.

Пусть теперь $\lambda \in U(\lambda_0)$. Согласно (1)

$$x_\lambda - x_{\lambda_0} = (\lambda - \lambda_0)\, x_{\lambda_0} x_\lambda;$$

следовательно,

$$\frac{x_\lambda - x_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0} = x_{\lambda_0} x_\lambda.$$

Переходя здесь к пределу при $\lambda \to \lambda_0$ и пользуясь непрерывностью x_λ в точке λ_0, заключаем, что существует

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{x_\lambda - x_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0} = x_{\lambda_0}^2,$$

так что x_λ аналитична в $\mathfrak{R}_x$.

III. *Множество $\mathfrak{R}_x$ содержит некоторую окрестность бесконечно удаленной точки и резольвента x_λ регулярна на бесконечности.*

Доказательство. Пусть $U_0(e)$ — окрестность единицы, каждый элемент которой имеет обратный. Положим $\mu = \dfrac{1}{\lambda}$. Так как элемент $e - \mu x$ есть непрерывная функция от μ, то существует окрестность $|\mu| < \varepsilon$ такая, что $e - \mu x \in U_0(e)$, и потому $(e - \mu x)^{-1}$ существует при $|\mu| < \varepsilon$. Кроме того,

$$\lim_{\mu \to 0} (e - \mu x)^{-1} = e. \tag{3}$$

Это означает, что в окрестности $|\lambda| > \dfrac{1}{\varepsilon}$ бесконечно удаленной точки существует $\left(e - \dfrac{1}{\lambda}\, x\right)^{-1}$. Но тогда при этих значениях λ существует также

$$x_\lambda = (x - \lambda e)^{-1} = \left[-\lambda \left(e - \frac{1}{\lambda}\, x\right)\right]^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \left(e - \frac{1}{\lambda}\, x\right)^{-1} = \\ = -\mu (e - \mu x)^{-1}. \tag{4}$$

Остается показать, что x_λ есть аналитическая функция от μ во всей окрестности $|\mu| < \varepsilon$. Но существование производной $(x_\lambda)'_\mu$ при $\mu \neq 0$, $|\mu| < \varepsilon$, следует из II, а в точке $\mu = 0$ эта производная в силу (3) и (4) равна

$$\lim_{\mu \to 0} \frac{x_\lambda}{\mu} = -\lim_{\mu \to 0} (e - \mu x)^{-1} = -e.$$

Тем самым доказана аналитичность x_λ на бесконечности.

Теорема 1. *Спектр всякого элемента x кольца с непрерывным обратным есть непустое множество.*

Действительно, если бы все точки плоскости являлись регулярными точками элемента $x \in R$, то резольвента x_λ элемента x была бы аналитической функцией на всей плоскости и на основании теоремы Лиувилля (см. II п. 12 § 3) x_λ была бы постоянным элементом, $x_\lambda = c$; тогда

$$e = (x - \lambda e)\, c. \tag{5}$$

Положив $\lambda = 0$, мы получили бы

$$e = xc, \tag{6}$$

и (5) дало бы $\lambda c = 0$, откуда $c = 0$ ввиду произвольности λ; последнее равенство противоречит равенству (6).

5. Топологические тела с непрерывным обратным. Напомним (см. п. 3 § 7), что кольцо R называется *телом*, если в нем каждый элемент, отличный от нуля, имеет обратный. Если, в частности, топологическое кольцо с непрерывным обратным есть тело, то оно называется *топологическим телом с непрерывным обратным*.

Теорема 2. *Всякое топологическое тело R с непрерывным обратным изоморфно полю комплексных чисел.*

Доказательство. Очевидно, достаточно показать, что всякий элемент $x \in R$ имеет вид $x = \lambda e$. Соответствие $\lambda e \to \lambda$ будет тогда изоморфизмом поля R на поле комплексных чисел. Но если $x - \lambda e$ не обращается в нуль ни при каком λ, то $(x - \lambda e)^{-1}$ существует при всех λ (ибо R — тело), т. е. спектр x есть пустое множество, что невозможно в силу теоремы 1 п. 4.

Для частного случая нормированных колец (см. ниже § 9) теорема 2 была впервые опубликована С. Мазуром [1], получившим ее совершенно другим путем. Изложенное здесь доказательство по существу принадлежит И. М. Гельфанду [1, 4], который также рассматривал частный случай нормированных колец. В дальнейшем были даны различные обобщения этой теоремы (см., например, Аренс [3] и Стоун [8]).

6. Кольца с непрерывным квазиобратным. Топологическое кольцо R называется *кольцом с непрерывным квазиобратным*, если в R существует окрестность $U(0)$, обладающая следующими свойствами:

1) каждый элемент $x \in U(0)$ имеет квазиобратный x';

2) квазиобратный x' есть непрерывная функция от x в точке $x = 0$.

Если кольцо R с непрерывным квазиобратным имеет единицу, то, очевидно, R есть кольцо с непрерывным обратным. Отсюда заключаем:

I. *Если R — кольцо с непрерывным квазиобратным, не содержащее единицы, то кольцо R', полученное из R топологическим присоединением единицы, есть кольцо с непрерывным обратным.*

Поэтому изучение колец с непрерывным квазиобратным сводится к изучению колец с непрерывным обратным.

II. *Всякий двусторонний идеал I в кольце R с непрерывным квазиобратным есть также кольцо с непрерывным квазиобратным.*

Доказательство. Пусть $U(0)$ — окрестность нуля в R, удовлетворяющая условиям 1), 2). Тогда $U(0) \cap I$ есть окрестность нуля в I, обладающая аналогичным свойством; для доказательства цостаточно заметить, что если $x \in I$, то в силу соотношения $x' = -x - xx'$ также $x' \in I$.

В ряде работ (см., например, Капланский [1, 14]) были изучены различные обобщения колец с непрерывным квазиобратным при дополнительных ограничениях.

В работах ряда авторов рассмотрены обобщения гельфандовской теории на топологические кольца, не являющиеся локально выпуклыми пространствами. Среди таких колец наиболее интересны следующие два класса:

1). Кольца, в которых существует ограниченная окрестность нуля; они называются локально ограниченными.

2). Кольца, в которых топология задается метрикой, они называются F-кольцами.

Подробное изложение теории таких колец читатель найдет в монографии Желязко [6] (см. также Желязко [1, 2], Митягин, Ролевич и Желязко [1], Ролевич и Желязко [1, 2], Ролевич [2] и Турпин [1, 2]).

§ 9. Нормированные кольца

1. Определение нормированного кольца. R называется *нормированным кольцом*, если:

1) R — кольцо;
2) R — нормированное пространство;
3) для любых двух элементов x, $y \in R$

$$|xy| \leqslant |x||y|; \tag{1}$$

4) если в R есть единица e, то $|e| = 1$.

Норма в нормированном кольце R естественным образом определяет топологию в R (см. п. 1 § 4); напомним, что в этой топологии базу окрестностей элемента $x_0 \in R$ образуют шары $|x - x_0| < r$ с центром в x_0.

I. *В топологии, определенной нормой, произведение xy есть непрерывная функция по совокупности переменных x, y.*

Действительно, в силу (1)

$$|xy - x_0y_0| = |(x - x_0)(y - y_0) + (x - x_0)\, y_0 + x_0(y - y_0)| \leqslant \\ \leqslant |x - x_0||y - y_0| + |x - x_0||y_0| + |x_0||y - y_0|; \tag{2}$$

отсюда непосредственно следует утверждение.

Так как нормированное пространство R есть топологическое линейное пространство, то из I заключаем

II. *В топологии, определенной нормой, нормированное кольцо есть топологическое кольцо.*

Нормированное кольцо R называется *полным*, если R есть полное нормированное пространство. Полное нормированное кольцо мы будем называть также *банаховым кольцом*.

III. *Всякое неполное нормированное кольцо можно включить в полное нормированное кольцо.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{R}$ — пополнение нормированного пространства R (см. II п. 1 § 4). Определим в $\widetilde{R}$ умножение. Пусть $\widetilde{x}$, $\widetilde{y} \in \widetilde{R}$ и x_n, y_n — фундаментальные последовательности в R, определяющие $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ соответственно. Из неравенства (2) при x_n, x_m вместо x, x_0 и y_n, y_m вместо y, y_0 вытекает, что x_ny_n также есть фундаментальная последовательность. Элемент в $\widetilde{R}$, ею определяемый, и будем считать произведением $\widetilde{x}\widetilde{y}$ элементов $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$. Применяя снова неравенство (2), легко также проверить, что $\widetilde{x}\widetilde{y}$ не зависит от выбора фундаментальных последовательностей x_n, y_n, определяющих $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$. Если, в частности, $\widetilde{x} = x \in R$, $\widetilde{y} = y \in R$, то, полагая $x_n = x$, $y_n = y$, заключаем, что произведение в этом случае совпадает с произведением в R. Переходя к пределу в соотношениях для элементов кольца R, легко показать, что $\widetilde{R}$ — кольцо и что для элементов кольца $\widetilde{R}$ также выполнено неравенство $|\widetilde{x}\widetilde{y}| \leqslant |\widetilde{x}||\widetilde{y}|$. Следовательно, $\widetilde{R}$ — полное нормированное кольцо, содержащее R в качестве подкольца.

Кольцо $\widetilde{R}$ называется *пополнением* кольца R.

Примеры. 1. Кольцо $C(T)$. Пусть T — топологическое пространство. Совокупность $C(T)$ всех ограниченных непрерывных функций $x(t)$ на T образует полное нормированное пространство (см. пример 2 п. 1 § 4). Напомним, что норма $|x|$ в $C(T)$ определяется по формуле

$$|x| = \sup_{t \in T} |x(t)|.$$

В $C(T)$ можно определить умножение как умножение функций, так что $(xy)(t) = x(t)\, y(t)$. Легко видеть, что условие $|xy| \leqslant |x||y|$ будет выполнено, так что $C(T)$ станет банаховым кольцом. Если T бикомпактно, то в силу VII п. 7 § 2 условие ограниченности функций $x(t)$ становится излишним.

2. Кольцо $\mathfrak{B}(X)$. Напомним, что $\mathfrak{B}(X)$ обозначает совокупность всех ограниченных линейных операторов в пространстве Банаха X (см. п. 4 § 4). Выше мы видели, что $\mathfrak{B}(X)$ есть полное нормированное пространство, причем нормой в $\mathfrak{B}(X)$ является норма оператора. Но в $\mathfrak{B}(X)$ определено также умножение как умножение операторов, причем по доказанному в п. 4. § 4

$$|AB| \leqslant |A||B|.$$

Следовательно, $\mathfrak{B}(X)$ есть банахово кольцо.

3. Кольцо W. Обозначим через W совокупность всех абсолютно сходящихся рядов $x(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ с нормой

$$|x| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|.$$

Определив сложение, умножение на число и умножение как соответствующие операции над функциями $x(t)$, мы получим банахово кольцо.

2. Присоединение единицы. Пусть R — нормированное кольцо без единицы, и пусть R' — кольцо, полученное из R присоединением единицы. В R' можно ввести норму, положив

$$|\alpha e + x| = |\alpha| + |x|;$$

легко проверить, что R' станет нормированным кольцом.

Если R — полное кольцо без единицы, то R' — также полное кольцо.

Доказательство ввиду его простоты мы опускаем.

3. Радикал в нормированном кольце.

I. *Для всякого элемента x нормированного кольца R существует* $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|x^n|} < \infty$.

Доказательство. При $n \geqslant m$, $n = km + l$, в силу неравенства (1) п. 1

$$|x^n| = |x^{km+l}| \leqslant |x^k|^m |x^l| \quad (0 \leqslant l < m),$$

откуда $|x^n|^{\frac{1}{n}} \leqslant |x^k|^{\frac{1}{k} - \frac{1}{nk}} |x^l|^{\frac{1}{n}}$. Фиксируя k, устремим n к бесконечности; тогда

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[m]{|x^n|} \leqslant \sqrt[k]{|x^k|} \leqslant |x| < \infty. \tag{1}$$

Затем устремим k к бесконечности. Мы получим, что $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|x^n|} \leqslant \leqslant \underline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|x^n|}$; таким образом, существует $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|x^n|}$. Одновременно мы видим в силу (1), что этот предел конечен.

II. *Если элемент x нормированного кольца R принадлежит радикалу кольца, то*

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|x^n|} = 0. \tag{2}$$

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть случай кольца с единицей (см. (3) п. 5 § 7). Если x принадлежит радикалу, то для любого $y \in R$ существует $(e + yx)^{-1}$. В частности, при $y = -\lambda e$ для всех λ (в кольце R, а значит, и в его пополнении $\widetilde{R}$) существует элемент $(e - \lambda e)^{-1}$, который является поэтому целой аналитической функцией от λ (см. II п. 4 § 8). Но тогда ряд

$$(e - \lambda x)^{-1} = e + \lambda x + \lambda^2 x^2 + \ldots$$

сходится абсолютно в смысле нормы в $\widetilde{R}$ для всех значений λ (см. III п. 7 § 4). В силу формулы (5) п. 7 § 4 для радиуса сходимости заключаем отсюда, что

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|x^n|} = 0.$$

4. Банаховы кольца с единицей.

I. *Всякое банахово кольцо с единицей есть кольцо с непрерывным обратным, причем каждый элемент x, удовлетворяющий неравенству $|x - e| < 1$, обратим.*

Доказательство. Рассмотрим окрестность $U_0(e)$ единицы e, определенную неравенством

$$|x - e| < 1.$$

Всякий элемент $x \in U(e)$ представляется в виде $x = e + y$, где $|y| < 1$. В силу полноты R ряд

$$e - y + y^2 - y^3 + \ldots \tag{1}$$

абсолютно сходится в R, ибо его члены по норме не превосходят соответствующих членов сходящегося ряда

$$1 + |y| + |y|^2 + |y|^3 + \ldots .$$

Обозначая через z сумму ряда (1), имеем

$$z = e - y(e - y + y^2 - y^3 + \ldots) = e - yz, \tag{2}$$

откуда

$$z + yz = e, \quad (e + y)\, z = e.$$

Аналогично, $z(e + y) = e$, так что z есть обратный элемента $x = e + y$.

Таким образом, каждый элемент $x \in U(e)$ имеет обратный $x^{-1} = z$. Докажем его непрерывность в точке $x = e$. Из (2) следует, что

$$|x^{-1} - e| = |z - e| \leqslant |y||z|;$$

с другой стороны,

$$|z| \leqslant 1 + |y| + |y|^2 + \ldots = \frac{1}{1 - |y|}.$$

Поэтому при $|y| < \varepsilon$ будет

$$|x^{-1} - e| \leqslant |y||z| \leqslant \frac{|y|}{1 - |y|} < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon},$$

и функция x^{-1} непрерывна в точке $x = e$.

Таким образом, на банаховы кольца с единицей переносятся все результаты, доказанные для колец с непрерывным обратным (см. пп. 3–5 § 8). В частности,

II. *В банаховом кольце R с единицей*:

1) *совокупность всех элементов x, имеющих (левый, правый, двусторонний) обратный, есть открытое множество*;
2) *обратный x^{-1} есть непрерывная функция от x во всех точках, в которых x^{-1} существует*;
3) *замыкание (левого, правого, двустороннего) идеала есть (соответственно левый, правый, двусторонний) идеал*;
4) *максимальный (левый, правый, двусторонний) идеал замкнут*;
5) *множество $\mathfrak{R}_x$ всех регулярных точек элемента $x \in R$ открыто, и резольвента $x_\lambda = (x - \lambda e)^{-1}$ есть аналитическая функция от λ*;
6) *спектр всякого элемента $x \in R$ есть непустое множество.*

III (И. М. Гельфанд [1] и С. Мазур [1]). *Всякое полное нормированное тело изоморфно полю комплексных чисел.*

Кроме того,

IV. *В банаховом кольце R факторкольцо R/I по замкнутому двустороннему идеалу I есть банахово кольцо.*

Доказательство. Так как I замкнут, то факторпространство R/I есть полное нормированное пространство (см. п. 3 § 4); с другой стороны, так как I — двусторонний идеал, то R/I — кольцо (см. п. 4 § 7).

Остается показать, что в R/I выполняются условия

1) $|\widetilde{x}\widetilde{y}| \leqslant |\widetilde{x}||\widetilde{y}|$;

2) если в R/I есть единица $\widetilde{e}$, то $|\widetilde{e}| = 1$.

Так как

$$|\widetilde{x}| = \inf_{x \in \widetilde{x}} |x|, \quad |\widetilde{y}| = \inf_{y \in \widetilde{y}} |y|,$$

то при любом $\varepsilon > 0$ существуют $x_0 \in \widetilde{x}$, $y_0 \in \widetilde{y}$ такие, что

$$|x_0| < |\widetilde{x}| + \varepsilon, \quad |y_0| < |\widetilde{y}| + \varepsilon.$$

Тогда

$$|\widetilde{x}\widetilde{y}| = \inf_{a \in I} |x_0 y_0 + a| \leqslant |x_0 y_0| \leqslant |x_0||y_0| < (|\widetilde{x}| + \varepsilon)(|\widetilde{y}| + \varepsilon);$$

отсюда в силу произвольности числа $\varepsilon > 0$

$$|\widetilde{x}\widetilde{y}| \leqslant |\widetilde{x}||\widetilde{y}|.$$

Докажем теперь, что $|\widetilde{e}| = 1$. Так как $e \in \widetilde{e}$, то $|\widetilde{e}| \leqslant |e| = 1$. С другой стороны, если $y \in \widetilde{e}$, то $y = e - x$, где $x \in I$. При этом $|y| \geqslant 1$, так как в противном случае в силу I элемент $x = e - y$ обратим, что невозможно. Поэтому $|\widetilde{e}| = \inf\limits_{y \in \widetilde{e}} |y| \geqslant 1$.

Предложение III допускает следующее усиление.

V. *Если в банаховом кольце R с единицей всякий элемент $x \neq 0$ имеет левый обратный, то это кольцо изоморфно полю комплексных чисел.*

Действительно, в силу V п. 2 § 7 R — тело, и утверждение следует из предложения III.

Очевидно, аналогичное предложение имеет место и для кольца, все элементы которого, за исключением $x = 0$, имеют правый обратный.

5. Резольвента в банаховом кольце с единицей. В банаховых кольцах с единицей можно усилить предложение III п. 4 § 8.

I. *При $|\lambda| > \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|x^n|}$ резольвента x_λ разлагается в абсолютно сходящийся ряд Лорана*

$$x_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} x^n, \tag{1}$$

причем при $|\lambda| < \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|x^n|}$ ряд (1) *расходится.*

Доказательство. Из III п. 7 § 4 вытекает, что ряд (1) абсолютно сходится при $|\lambda| > \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|x^n|}$ и расходится при $|\lambda| < \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|x^n|}$. Умножив этот ряд справа или слева на $x - \lambda e$, получим e. Следовательно, при $|\lambda| > \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|x^n|}$ ряд (1) представляет резольвенту, что и требуется.

Таким образом, множеству $\mathfrak{R}_x$ всех регулярных точек элемента x принадлежит область, внешняя по отношению к окружности $|\lambda| = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x^n|}$. Это наталкивает на следующее определение: *число*

$$r(x) = \sup_{\lambda\in S_x} |\lambda|,$$

где S_x — спектр элемента x, называется спектральным радиусом элемента x.

II. *Для любого $x \in R$*

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x^n|}. \tag{2}$$

Доказательство. В силу I любое число λ, удовлетворяющее неравенству $|\lambda| > \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x^n|}$, принадлежит $\mathfrak{R}_x$, т. е. $r(x) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x^n|}$. С другой стороны, при $|\lambda| > r(x)$ резольвента x_λ регулярна; таким образом, при $|\lambda| > r(x)$ сходится ряд Лорана (1), и снова в силу I отсюда следует, что $r(x) \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x^n|}$.

III. *Спектральный радиус обладает следующими свойствами*:

$$1)\ r(x^k) = [r(x)]\,k; \quad 2)\ r(\alpha x) = |\alpha|\, r(x); \quad 3)\ r(x) \leqslant |x|.$$

6. Непрерывный гомоморфизм нормированных колец.

I. *Всякий непрерывный гомоморфизм $x \to x'$ нормированного кольца R в нормированное кольцо R' удовлетворяет неравенству*

$$|x'| \leqslant C|x|, \tag{1}$$

где C — некоторая постоянная.

Действительно, такой гомоморфизм является, в частности, непрерывным линейным оператором из R в R'; в силу I п. 4 § 4 такой оператор ограничен.

II. *Всякий непрерывный гомоморфизм $x \to x'$ нормированного кольца R в нормированное кольцо R' продолжается и притом единственным образом до непрерывного гомоморфизма пополнения кольца R в пополнение кольца R'.*

Доказательство. Так как гомоморфизм $x \to x'$ есть, в частности, ограниченный линейный оператор из R в R', то он продолжается, и притом единственным образом, до ограниченного линейного оператора из $\widetilde{R}$ в $\widetilde{R}'$. Этот оператор есть также гомоморфизм. Действительно, если $x,\ y \in \widetilde{R}$, $x_n,\ y_n \in R$ и $x_n \to x$, $y_n \to y$ при $n \to \infty$, то $x'_n \to x'$, $y'_n \to y'$ при $n \to \infty$; поэтому, переходя к пределу в соотношении $(x_n y_n)' = x'_n y'_n$, получим, что $(xy)' = x'y'$.

III. *Всякий непрерывный изоморфизм банахова кольца R на банахово кольцо R' есть топологический изоморфизм.*

Утверждение непосредственно следует из теоремы Банаха (см. VI п. 4 § 4), ибо такой изоморфизм есть, в частности, взаимно однозначный ограниченный линейный оператор, отображающий полное нормированное пространство R на полное нормированное пространство R'.

IV. *При непрерывном гомоморфизме банахова кольца R на банахово кольцо R' ядро I гомоморфизма есть замкнутый двусторонний идеал в R, а само кольцо R' топологически изоморфно фактор-кольцу R/I. Обратно, всякий замкнутый двусторонний идеал I банахова кольца R порождает непрерывный гомоморфизм* (*так называемый естественный гомоморфизм*) *кольца R на кольцо R/I.*

Доказательство. В силу II п. 6 § 7 ядро I гомоморфизма R на R' есть идеал и R' изоморфно R/I; как прообраз замкнутого множества, состоящего только из нуля кольца R', идеал I замкнут. Следовательно, R/I есть полное нормированное кольцо. Беря в (1) нижнюю грань по всем x из класса $\xi \subset R/I$, отвечающего данному x', мы получим, что $|x'| \leqslant C|\xi|$; следовательно, наш изоморфизм R/I на R' непрерывен и потому топологичен. Обратное утверждение очевидно, ибо $|\xi| \leqslant |x|$ при $x \in \xi \in R/I$.

Отображение $x \to x'$ нормированного кольца R' на нормированное кольцо R называется *изометрическим изоморфизмом*, если:

1) $x \to x'$ есть изоморфизм кольца R на кольцо R';
2) $x \to x'$ есть изометрическое отображение нормированного пространства R на нормированное пространство R'.

Аналогично определяется изометрический антиизоморфизм.

Очевидно, изометрический изоморфизм есть также топологический изоморфизм.

Два нормированных кольца R и R' называются *изометрически изоморфными*, если существует изометрический изоморфизм R на R'.

7. Регулярные представления нормированного кольца. Напомним, что левое и правое регулярные представления $a \to A_a$ и $a \to B_a$ кольца R определяются формулами

$$A_a x = ax, \quad B_a x = xa$$

(см. п. 7 § 7).

I. *Левое* (*правое*) *регулярное представление нормированного кольца R есть непрерывный гомоморфизм* (*антигомоморфизм*) *кольца R в кольцо $\mathfrak{B}(R)$ всех ограниченных линейных операторов в пространстве R.*

Действительно, из неравенств

$$|A_a x| \leqslant |a||x|, \quad |B_a x| \leqslant |a||x| \tag{1}$$

следует, что

$$|A_a| \leqslant |a|, \quad |B_a| \leqslant |a|. \tag{2}$$

II. *Если R — нормированное кольцо с единицей, то левое (правое) регулярное представление кольца R есть изометрический изоморфизм (антиизоморфизм) кольца R в кольцо $\mathfrak{B}(R)$.*

Действительно, при $x = e$ неравенства (1) переходят в равенства, и потому $|A_a| = |a|$, $|B_a| = |a|$.

Рассмотрим еще представления, сопряженные к регулярным. Обозначим через R' пространство Банаха, сопряженное к пространству Банаха R, а через A'_a, B'_a — операторы в R', сопряженные к A_a, B_a соответственно. Из предложений I, II и свойств сопряженного оператора (см. п. 11 § 5) мы заключаем, что

III. *Соответствие $a \to B'_a$ есть непрерывный гомоморфизм, а соответствие $a \to A'_a$ — непрерывный антигомоморфизм нормированного кольца R в кольцо $\mathfrak{B}(R')$. Если же R содержит единицу, то $a \to B'_a$ есть изометрический изоморфизм, а $a \to A'_a$ — изометрический антиизоморфизм.*

IV. *Аннулятор замкнутого правого идеала банахова кольца R есть отличное от* (0) *замкнутое*[1] *подпространство в R', инвариантное по отношению ко всем операторам B'_a. Обратно, всякое такое замкнутое инвариантное подпространство есть аннулятор некоторого замкнутого правого идеала в R.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}$ — аннулятор замкнутого правого идеала I_r; в силу I п. 11 § 3 $\mathfrak{N}$ — замкнутое подпространство в R'; докажем, что $B'_a f \in \mathfrak{N}$ для всех $a \in R$ и $f \in \mathfrak{N}$. Пусть $f \in \mathfrak{N}$; по определению аннулятора

$$f(x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in I_r.$$

Так как из $x \in I_r$ следует $xa \in I_r$, то также (см. п. 11 § 5)

$$(x, B'_a f) = (B_a x, f) = f(xa) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in I_r.$$

Но это означает, что $B'_a f \in \mathfrak{N}$.

Обратно, пусть $\mathfrak{N}$ — отличное от (0) замкнутое подпространство в R', инвариантное по отношению ко всем операторам B'_a. Согласно II п. 11 § 3 $\mathfrak{N}$ — аннулятор некоторого замкнутого подпространства $S \subset R$. Докажем, что S — правый идеал в R. Так как $\mathfrak{N} \neq (0)$, то $S \neq R$. Пусть, кроме того, $x \in S$, $a \in R$; докажем, что $xa \in S$. Тем самым будет доказано, что S — правый идеал в R. Согласно III п. 11 § 3 S состоит из тех и только тех элементов x, которые удовлетворяют условию

$$f(x) = 0 \quad \text{для всех} \quad f \in \mathfrak{N}.$$

[1] Всюду в этом пункте замкнутость в R' понимается в смысле слабой топологии в R'.

Так как $\mathfrak{N}$ — инвариантное подпространство, то из $f \in \mathfrak{N}$ вытекает $B'_a f \in \mathfrak{N}$. Следовательно, также

$$f(xa) = (x,\, B'_a f) = 0 \quad \text{для всех} \quad f \in \mathfrak{N}.$$

Согласно сказанному выше это означает, что $xa \in S$.

Замкнутое инвариантное подпространство [1] называется *минимальным*, если оно $\neq (0)$ и не содержит никакого другого замкнутого инвариантного подпространства. Всякий функционал из минимального инвариантного подпространства называется *элементарным*.

Комбинируя предложения IV п. 11 § 3 и IV этого пункта, получаем:

V. $\mathfrak{N}$ *есть минимальное инвариантное подпространство в* R' *тогда и только тогда, когда оно есть аннулятор максимального правого идеала в* R.

Согласно II п. 4 § 7 всякий правый идеал кольца с единицей содержится в максимальном правом идеале. Отсюда и из IV и V заключаем:

VI. *Если* R *— кольцо с единицей, то всякое отличное от* (0) *замкнутое инвариантное подпространство в* R' *содержит минимальное инвариантное подпространство, следовательно, содержит элементарные функционалы.*

Пусть снова R — банахово кольцо с единицей и пусть $f \neq 0$ — произвольный функционал из R'. Рассмотрим множество всех функционалов вида $f_a(x) = f(xa)$, $a \in R$. Очевидно, оно линейно; его замыкание в R' образует замкнутое инвариантное подпространство $\mathfrak{N}$. Так как $f \neq 0$, то $\mathfrak{N} \neq (0)$. Следовательно, $\mathfrak{N}$ содержит элементарные функционалы. Из построения $\mathfrak{N}$ следует, что каждый функционал $f_0 \in \mathfrak{N}$ есть точка прикосновения (в смысле слабой топологии в R') функционалов $f_a(x) = f(xa)$. Таким образом, доказано следующее предложение.

VII. *Пусть* R *— кольцо с единицей и пусть* $f \neq 0$ *— функционал из* R'*; существует элементарный функционал, который является слабой точкой прикосновения функционалов вида* $f_a(x) = f(xa)$.

Регулярные представления кольца можно также использовать для доказательства следующего предложения.

VIII. *Пусть* R *— полное топологическое кольцо с единицей, в котором топология определена нормой* $|x|$*; тогда* R *топологически изоморфно банахову кольцу.*

Доказательство. Рассмотрим левое регулярное представление $x \to Ax$ кольца R. Так как R содержит единицу, то это представление есдь изоморфизм, причем

$$|A_x| = \sup_{|y|=1} |xy| \geqslant \left| x\frac{e}{|e|} \right| = \frac{|x|}{|e|},$$

[1] Всюду в дальнейшем в этом пункте «инвариантное подпространство» означает подпространство в R', инвариантное по отношению ко всем операторам B'_a.

или
$$|x| \leqslant |e||A_x|;$$
следовательно, изоморфизм $A_x \to x$ непрерывен.

Докажем, что образ кольца R при этом изоморфизме замкнут в $\mathfrak{B}(R)$ и потому есть полное кольцо. Отсюда и из III п. 4 будет следовать, что $x \to A_x$ есть топологический изоморфизм, т. е. что R топологически изоморфно полному нормированному кольцу всех операторов A_a.

Для доказательства заметим, что операторы A_x удовлетворяют соотношению
$$A_x(yz) = A_x y \cdot z;$$
действительно, $A_x(yz) = x(yz) = (xy)\,z = A_x y \cdot z$. Обратно, всякий оператор A в R, удовлетворяющий соотношению
$$A(yz) = Ay \cdot z \quad \text{для всех} \quad y, z \in R, \tag{3}$$
есть оператор вида A_x, где $x = Ae$. Чтобы в этом убедиться, достаточно положить в (3) $y = e$; мы получим тогда, что
$$Az = A(ez) = Ae \cdot z = xz.$$
Пусть теперь последовательность A_{x_n} сходится к некоторому оператору $A \in \mathfrak{B}(R)$ в смысле нормы в $\mathfrak{B}(R)$. Тогда, переходя в равенстве $A_{x_n}(yz) = A_{x_n} y \cdot z$ к пределу при $n \to \infty$, получим, что A удовлетворяет условию (3) и потому есть оператор вида A_x. Следовательно, множество всех операторов A_x замкнуто и предложение VIII доказано.

Из этого предложения вытекает, что если R — полное топологическое кольцо с единицей, в котором топология определена нормой, то произведение xy элементов кольца есть непрерывная функция по совокупности переменных x, y.

§ 10. Симметричные кольца

1. Определение и простейшие свойства симметричного кольца. R называется *симметричным кольцом* [1]), если:

1) R есть кольцо;

2) в R определена операция, которая каждому элементу x из R ставит в соответствие элемент x^* из R так, что выполнены следующие условия:

а) $(\lambda x + \mu y)^* = \overline{\lambda} x^* + \overline{\mu} y^*$;

б) $x^{**} = x$;

в) $(xy)^* = y^* x^*$.

[1]) В литературе вместо термина «симметричное кольцо» часто применяется термин «кольцо с инволюцией», а термин «симметричное кольцо» применяется в другом смысле (см. по этому поводу ниже сноску на с. 254).

Эту операцию $x \to x^*$ мы будем называть *инволюцией*, а элементы x^* и x — *сопряженными* друг к другу.

Элемент x называется *эрмитовым*, если $x^* = x$.

I. *Всякий элемент x симметричного кольца можно представить, и притом единственным образом, в виде $x = x_1 + ix_2$, где x_1, x_2 — эрмитовы элементы.*

Действительно, если такое представление имеет место, то $x^* = x_1 - ix_2$; следовательно,

$$x_1 = \frac{x + x^*}{2}, \quad x_2 = \frac{x - x^*}{2i}. \tag{1}$$

Таким образом, это представление единственно. Обратно, элементы x_1, x_2, определенные равенствами (1), эрмитовы и $x = x_1 + ix_2$.

Эти элементы x_1, x_2 мы будем называть *эрмитовыми компонентами элемента x*.

Элемент x называется *нормальным*, если $x^*x = xx^*$.

Если x — нормальный элемент, то из формул (1) вытекает, что x_1 и x_2 перестановочны; обратно, если x_1 и x_2 перестановочны, то элементы $x = x_1 + ix_2$ и $x^* = x_1 - ix_2$ также перестановочны, следовательно, x нормален. В частности, всякий эрмитов элемент нормален.

II. *Всякий элемент вида x^*x — эрмитов.*

Действительно, в силу в) и б) $(x^*x)^* = x^*x^{**} = x^*x$.

III. *Единица e есть эрмитов элемент.*

Действительно, $e^* = e^*e$ есть эрмитов элемент; следовательно, $e^* = e$.

Если R — симметричное кольцо без единицы, а R' — кольцо, полученное из R присоединением единицы, то, положив $(\lambda e + x)^* = \overline{\lambda} e + x^*$ при $x \in R$, мы определим инволюцию в R', удовлетворяющую условиям а), б) и в), так что R' станет симметричным кольцом. Мы будем говорить, что R' есть симметричное кольцо, полученное из R присоединением единицы.

IV. *Если x^{-1} существует, то $(x^*)^{-1}$ также существует и*

$$(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*.$$

Доказательство. Применяя операцию * к обеим частям соотношения

$$x^{-1}x = xx^{-1} = e,$$

получим

$$x^*(x^{-1})^* = (x^{-1})^*x^* = e.$$

Но это означает, что $(x^{-1})^*$ есть обратный к x^*. Подкольцо R_1 симметричного кольца R называется *симметричным*, если из $x \in R_1$, следует, что $x^* \in R_1$.

Пересечение симметричных подколец есть также симметричное подкольцо. В частности, пересечение всех симметричных подколец, содержащих данное множество $S \subset R$, есть минимальное симметричное подкольцо, содержащее S. Мы его будем обозначать через $R_{a^*}(S)$. Очевидно,

$$R_{a^*}(S) = R_a(S, S^*),$$

где S^* обозначает совокупность всех элементов x^*, $x \in S$. Поэтому, если все элементы множества $S \cup S^*$ попарно перестановочны, то кольцо $R_{a^*}(S)$ коммутативно. В частности, кольцо $R_{a^*}(x)$ коммутативно тогда и только тогда, когда $x^*x = xx^*$, т. е. когда x нормален.

Коммутативное симметричное подкольцо называется *максимальным*, если оно не содержится ни в каком другом коммутативном симметричном подкольце. Как и в п. 1 § 7, можно показать, что *всякое коммутативное симметричное подкольцо содержится в некотором максимальном коммутативном симметричном подкольце.*

V. *Если $\mathfrak{A}$ — максимальное коммутативное симметричное подкольцо, содержащее нормальный элемент x, и если x^{-1} существует, то $x^{-1} \in \mathfrak{A}$.*

Действительно, так как x и x^* перестановочны со всеми элементами из $\mathfrak{A}$, то этим же свойством обладают x^{-1} и $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$ (см. III п. 2 § 7). В силу максимальности $\mathfrak{A}$ отсюда следует, что $x^{-1} \in \mathfrak{A}$.

Отображение $x \to x'$ симметричного кольца R в симметричное кольцо R' называется *симметричным гомоморфизмом*, если:

α) $x \to x'$ есть гомоморфизм;

β) из $x \to x'$ следует $x^* \to {x'}^*$.

Если, кроме того, отображение $x \to x'$ есть изоморфизм, то оно называется *симметричным изоморфизмом*.

Симметричный гомоморфизм колец описывается при помощи так называемых *симметричных двусторонних идеалов*.

Идеал I (левый, правый или двусторонний) называется *симметричным*, если из $x \in I$ следует $x^* \in I$.

Симметричный идеал автоматически является двусторонним. Действительно, отображение $x \to x^*$ переводит левый идеал в правый и правый идеал в левый; если поэтому отображение $x \to x^*$ переводит I в I, то I есть одновременно и левый и правый идеал.

В кольце вычетов R/I по симметричному двустороннему идеалу I можно определить инволюцию следующим образом. Если $x_1 - x_2 \in I$, то $x_1^* - x_2^* \in I$. Поэтому при переходе от x к x^* каждый класс вычетов $\widetilde{x}$ по идеалу I переходит в некоторый другой класс вычетов по I, который мы и обозначим через $\widetilde{x}^*$. Очевидно, условия а), б), в) будут выполнены; следовательно, R/I есть симметричное кольцо.

Если $x \to x'$ есть симметричный гомоморфизм R на R', то прообраз I нуля есть симметричный двусторонний идеал в R. Кольцо вычетов R/I симметрически изоморфно кольцу R'.

Обратно, отображение $x \to \widetilde{x}$ каждого элемента $x \in R$ в содержащий его класс вычетов по I есть симметричный гомоморфизм кольца R на R/I.

VI. *Радикал симметричного кольца есть симметричный двусторонний идеал.*

Действительно, при отображении $x \to x^*$ все максимальные регулярные левые идеалы переходят в максимальные регулярные правые идеалы. Следовательно, радикал, будучи пересечением как всех максимальных регулярных левых идеалов, так и всех максимальных регулярных правых идеалов, при отображении $x \to x^*$ отображается на себя.

Примеры. 1. Кольцо $C(T)$ (см. пример 1 п. 1 § 9) есть симметричное кольцо, если при $x = x(t)$ положить $x^* = \overline{x(t)}$ (где черта обозначает переход к комплексно сопряженному числу).

2. Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство. Кольцо $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, т. е. $\mathfrak{B}(X)$ при $X = \mathfrak{H}$ (см. пример 2 п. 1 § 9), есть симметричное кольцо, если под инволюцией понимать переход к сопряженному оператору (см. п. 10 § 5).

3. Кольцо W (см. пример 3 п. 1 § 9) есть симметричное кольцо, если при $x = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ положить $x^* = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \overline{c}_{-n} e^{int}$.

2. Положительные функционалы. Линейный функционал f в симметричном кольце R называется *вещественным*, если f принимает вещественные значения на всех эрмитовых элементах кольца R.

I. *Всякий линейный функционал в симметричном кольце можно представить в виде $f = f_1 + if_2$, где f_1, f_2 — вещественные функционалы.*

Именно, достаточно положить

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\,[f(x) + \overline{f(x^*)}], \quad f_2 = \frac{1}{2i}\,[f(x) - \overline{f(x^*)}];$$

тогда f_1, f_2 — вещественные функционалы и

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x).$$

Эти функционалы f_1, f_2 называются *вещественными компонентами* функционала f.

I$'$. *Если f — вещественный функционал, то $f(x^*) = \overline{f(x)}$ для всех $x \in R$.*

Действительно, полагая $x = x_1 + ix_2$, где x_1, x_2 — эрмитовы, имеем

$$f(x^*) = f(x_1 - ix_2) = f(x_1) - if(x_2) = \overline{f(x_1) + if(x_2)} = \overline{f(x)},$$

так как $f(x_1)$, $f(x_2)$ по условию вещественны.

Линейный функционал f называется *положительным*, если $f(x^*x) \geqslant 0$ для любого элемента x кольца R.

II. *Для всякого положительного функционала f в симметричном кольце R*

$$f(y^*x) = \overline{f(x^*y)}, \tag{1}$$
$$|f(y^*x)|^2 \leqslant f(y^*y)\, f(x^*x). \tag{2}$$

Действительно, для любых комплексных λ и μ

$$f((\lambda x + \mu y)^*(\lambda x + \mu y)) \geqslant 0,$$

т. е.
$$|\lambda|^2 f(x^*x) + \lambda\overline{\mu} f(y^*x) + \overline{\lambda}\mu f(x^*y) + |\mu|^2 f(y^*, y) \geqslant 0. \tag{3}$$

Положив сначала в (3) $\lambda = \mu = 1$, а затем $\lambda = 1$, $\mu = i$, получим (1). Далее, в силу (1) левая часть в (3) есть неотрицательная эрмитова форма по отношению к λ, μ. Неравенство (2) и есть необходимое условие неотрицательности этой формы (см. замечание в п. 1 § 5). Это неравенство мы будем называть *неравенством Коши–Буняковского*.

III. *Всякий положительный функционал f в симметричном кольце R с единицей является вещественным и*

$$|f(x)|^2 \leqslant f(e)\, f(x^*x). \tag{4}$$

Утверждение следует из II при $y = e$.

Очевидно, в симметричном кольце с единицей всякая линейная комбинация с вещественными коэффициентами положительных функционалов есть вещественный функционал. Ниже мы увидим, что обратное, вообще говоря, неверно (см. пример а) п. 3 § 20).

IV. *Пусть R — симметричное кольцо без единицы, а R' — симметричное кольцо, полученное из R присоединением единицы. Положительный функционал f в R тогда и только тогда можно продолжить до положительного функционала в R', когда f — вещественный и удовлетворяет неравенству*

$$|f(x)|^2 \leqslant C f(x^*x) \quad \textit{для всех} \quad x \in R \tag{5}$$

где C — некоторая постоянная.

Доказательство. Если такое продолжение возможно, то в силу III f — вещественный и (5) имеет место для всех x, $y \in R'$ при $C = f(e)$. Обратно, если (5) выполнено и f — вещественный, то, положив

$$f(\lambda e + x) = \lambda C + f(x),$$

мы получим линейный функционал в R'. Этот функционал положителен, ибо в силу (5)

$$f((\lambda e + x)^*(\lambda e + x)) = f(\lambda\overline{\lambda} e + \lambda x^* + \overline{\lambda} x + x^*x) =$$
$$= \lambda\overline{\lambda} C + \lambda f(x^*) + \overline{\lambda} f(x) + f(x^*x) \geqslant 0.$$

Отметим еще следующий важный частный случай. Множество $\{e_\alpha\}$ в нормированном кольце R называется *аппроксимирующим единицу*, если

1) $|e_\alpha| \leqslant 1$;
2) для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого $x \in R$ существует элемент e_α такой, что $|x - xe_\alpha| < \varepsilon$.

V. *Если в симметричном нормированном кольце R:* а) $|x^*| = |x|$, б) *существует множество $\{e_\alpha\}$, аппроксимирующее единицу, то всякий непрерывный положительный функционал f в R можно продолжить до положительного функционала в R'.*

Доказательство. Согласно неравенству Коши–Буняковского

$$|f(e_\alpha x)|^2 \leqslant f(e_\alpha e_\alpha^*)\, f(x^* x),$$

следовательно, в силу условия 1) $|f(e_\alpha x)|^2 \leqslant |f| f(x^* x)$. Отсюда, учитывая условие 2) и непрерывность функционала f, заключаем, что также $|f(x)|^2 \leqslant |f| f(x^* x)$, так что выполняется условие (5). Далее (см. (1)), $f(e_\alpha^* x^*) = \overline{f(xe_\alpha)}$; отсюда, в силу условий 2) и а) и непрерывности функционала f, $f(x^*) = \overline{f(x)}$, и утверждение следует из IV.

Будем говорить, что банахово кольцо R *сильно аппроксимирует единицу*, если для каждого конечного множества элементов $x_j \in R$, $j = 1, \ldots, n$, и каждого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $e \in R$, что $|e| < A$ и $|ex_j - x_j| < \varepsilon$, $j = 1, \ldots, n$, где A — фиксированная константа для R. Варопулос [1] доказал, что *в банаховом симметричном кольце, сильно аппроксимирующем единицу, всякий положительный функционал непрерывен*. Поэтому для такого кольца можно в предложении V опустить условие непрерывности функционала.

3. Нормированные симметричные кольца. R называется *нормированным симметричным кольцом*, если:

а) R — нормированное кольцо,
б) R — симметричное кольцо,
в) $|x^*| = |x|$.

Из условия в) следует, что операция инволюции непрерывна.

Если R — неполное нормированное кольцо, то, как мы видели в п. 1 § 9, его можно пополнить и притом единственным образом до полного нормированного кольца $\widetilde{R}$. Если $x_0 \in \widetilde{R}$ и $|x_n - x_0| \to 0$, $x_n \in R$, то $|x_n - x_m| \to 0$ при n, $m \to \infty$; следовательно, также $|x_n^* - x_m^*| \to 0$. Поэтому $\{x_n^*\}$ — фундаментальная последовательность в R. Определяемый ею элемент в $\widetilde{R}$ обозначим через x_0^*.

Легко видеть, что определенная таким образом операция $x_0 \to x_0^*$ удовлетворяет условиям а), б), в) п. 1 и условию в) настоящего пункта. Следовательно, при таком определении инволюции $\widetilde{R}$ есть полное нормированное симметричное кольцо.

Итак, *всякое нормированное симметричное кольцо R можно расширить до банахова симметричного кольца $\widetilde{R}$, в котором R плотно.*

Это кольцо $\widetilde{R}$ называется *пополнением* нормированного симметричного кольца R.

В нормированном симметричном кольце можно рассматривать замкнутые симметричные подкольца. Минимальное замкнутое симметричное подкольцо, содержащее данное множество S, мы будем обозначать $R(S)$.

Для нормированных симметричных колец естественно рассматривать непрерывный симметричный гомоморфизм и непрерывный симметричный изоморфизм. В случае непрерывного симметричного гомоморфизма полных колец предложение IV п. 6 § 9 останется в силе, если рассматривать только замкнутые симметричные идеалы отображаемого кольца. Отображение $x \to x'$ нормированного симметричного кольца R на нормированное симметричное кольцо R' называется *полным изоморфизмом*, если:

1) $x \to x'$ есть изометрическое отображение пространства R на пространство R';
2) $x \to x'$ есть симметричный изоморфизм симметричного кольца R на симметричное кольцо R'.

Два нормированных симметричных кольца R, R' называются *вполне изоморфными*, если существует полный изоморфизм кольца R на кольцо R'.

Если элемент x нормированного симметричного кольца принадлежит радикалу, то

$$r(x^*x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(x^*x)^n|} = 0. \tag{1}$$

Действительно, если x принадлежит радикалу симметричного нормированного кольца, то x^*x также принадлежит радикалу, ибо радикал есть идеал. Применяя поэтому II п. 3 § 9 к элементу x^*x, получаем требуемое.

4. Положительные функционалы в банаховом симметричном кольце.

I. *Всякий положительный функционал f в банаховом симметричном кольце с единицей e является ограниченным функционалом, именно, удовлетворяет неравенству*

$$|f(x)| \leqslant f(e)|x|. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть сначала x — эрмитов элемент и $|x| \leqslant 1$. Рассмотрим биномиальный ряд

$$(1-\lambda)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\,\lambda - \frac{1}{2!}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\lambda^2 - \ldots;$$

он сходится при $|\lambda| \leqslant 1$. Подставим в этот ряд x вместо λ и e вместо 1; так как R — полное пространство и $|x| \leqslant 1$, то полученный ряд

$$e - \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{2!}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,x^2 - \ldots$$

сходится в R абсолютно. В силу непрерывности инволюции его сумма — обозначим ее y — есть эрмитов элемент; кроме того,

$$y^*y - y^2 = e - x.$$

Отсюда

$$f(e-x) = f(y^*y) \geqslant 0;$$

следовательно,

$$f(x) \leqslant f(e).$$

Подставляя сюда $-x$ вместо x, получим, что также $-f(x) \leqslant f(e)$; следовательно,

$$|f(x)| \leqslant f(e).$$

Пусть теперь x — произвольный эрмитов элемент и $x \neq 0$ (при $x = 0$ неравенство (1) выполняется очевидным образом). Положим $x_1 = \frac{1}{|x|}\,x$; тогда x_1 — также эрмитов и $|x_1| = 1$. Следовательно, по уже доказанному $|f(x_1)| \leqslant f(e)$, т. е. $\frac{|f(x)|}{|xc|} \leqslant f(e)$ и, таким образом, неравенство (1) доказано для любого эрмитова элемента.

Пусть теперь x — произвольный элемент кольца R. Тогда x^*x — эрмитов элемент; следовательно,

$$f(x^*x) \leqslant f(e)|x^*x| \leqslant f(e)|x^*||x| = f(e)|x|^2. \tag{2}$$

С другой стороны (см. (4) п. 2),

$$|f(x)|^2 \leqslant f(e)\, f(x^*x).$$

Отсюда и из неравенства (2) следует:

$$|f(x)|^2 \leqslant |f(e)|^2|x|^2,$$

и неравенство (1) тем самым доказано для любого элемента $x \in R$.

II. *Норма $|f|$ положительного функционала f в банаховом симметричном кольце с единицей e равна $f(e)$.*

Действительно, по определению нормы функционала,

$$|f| = \sup_{|x|=1} |f(x)|.$$

Из неравенства (1) следует, что $\sup\limits_{|x|=1} |f(x)| \leqslant f(e)$. С другой стороны, это неравенство достигается при $x = e$.

III. *Для любого положительного функционала f в банаховом симметричном кольце с единицей e*

$$f(x^*x) \leqslant f(e) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(x^*x)^n|} - f(e)\, r(x^*x). \tag{3}$$

Доказательство. Применяя повторно неравенство (4) п. 2, а затем неравенство (1) и предложение II, получаем

$$|f(x)| \leqslant [f(e)]^{\frac{1}{2}}[f(x^*x)]^{\frac{1}{2}} \leqslant [f(e)]^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}[f((x^*x)^2)]^{\frac{1}{4}} \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant [f(e)]^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^m}}[f((x^*x)^{2m-1})]^{\frac{1}{2^m}} \leqslant$$
$$\leqslant [f(e)]^{1-\frac{1}{2^m}}|f|^{\frac{1}{2^m}}|(x^*)^{2m-1}|^{\frac{1}{2^m}} = f(e)|(x^*x)^{2m-1}|^{\frac{1}{2^m}}.$$

Отсюда при $m \to \infty$ следует, что

$$|f(x)| \leqslant f(e) \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|(x^*x)^n|}. \tag{4}$$

Подставив в (4) x^*x вместо x, получим неравенство (3).

Замечание. *Если x — нормальный элемент, то*

$$|f(x)| \leqslant f(e) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x^n|} = f(e)\, r(x).$$

Утверждение следует из (4) и неравенства $|(x^*x)^n| = |(x^*)^n x^n| \leqslant |x^n|^2$, верного для нормального x.

IV. *Если элемент x принадлежит радикалу банахова симметричного кольца R с единицей, то $f(x) = 0$ и, следовательно, $f(x^*x) = 0$ для любого положительного функционала в R.*

Действительно, если x принадлежит радикалу, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(x^*x)^n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|(x^*x)^n|} = 0$, и наше утверждение непосредственно следует из неравенств (3) и (4).

Глава III

КОММУТАТИВНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ КОЛЬЦА

§ 11. Реализация коммутативного нормированного кольца в виде кольца функций

Один из основных результатов теории коммутативных нормированных колец состоит в том, что всякое такое кольцо при некоторых условиях изоморфно кольцу функций [1]). Этот результат получается путем изучения факторкольца данного кольца по его максимальному идеалу.

1. Факторкольцо по максимальному идеалу. Пусть R — коммутативное банахово кольцо с единицей; так как R коммутативно, то всякий его левый или правый идеал является двусторонним. Рассмотрим произвольный максимальный идеал M в R. Так как M замкнут, то факторкольцо R/M есть банахово кольцо, также содержащее единицу (см. II и IV п. 3 § 9). В силу максимальности идеала M кольцо R/M — простое, т. е. в R/M нет идеалов, отличных от (0); поэтому элемент $\widetilde{x} \neq 0$ кольца R/M не содержится ни в каком идеале этого кольца, а значит, имеет обратный (см. III п. 4 и III п. 6 § 7). Другими словами, R/M есть поле, и притом полное нормированное поле. На основании теоремы И. М. Гельфанда–С. Мазура (III, п. 3 § 9), R/M изоморфно полю комплексных чисел, т. е. каждый элемент $\widetilde{x}$ кольца R/M имеет вид $\widetilde{x} = \lambda\widetilde{e}$, где $\widetilde{e}$ — единица в R/M. Таким образом, доказана

Теорема 1. *Кольцо вычетов банахова коммутативного кольца с единицей по его максимальному идеалу изоморфно полю комплексных чисел.*

Из этой теоремы мы заключаем, что естественный гомоморфизм кольца R на R/M есть по существу гомоморфизм кольца R на поле комплексных чисел. Следовательно,

I. *Всякий максимальный идеал в банаховом коммутативном кольце R с единицей порождает гомоморфизм кольца R на поле комплексных чисел.*

Обратно,

II. *Всякий гомоморфизм банахова коммутативного кольца R с единицей на поле комплексных чисел есть канонический гомоморфизм, порожденный некоторым максимальным идеалом M в R.*

---

[1]) Точную формулировку этого результата см. ниже, п. 3.

Действительно, прообраз нуля при гомоморфизме R на поле комплексных чисел есть идеал M в R и данный гомоморфизм есть естественный гомоморфизм кольца R на R/M (см. II п. 6 § 7). При этом M есть максимальный идеал: в противном случае M содержался бы в некотором максимальном идеале M_1, образ которого при данном гомоморфизме был бы отличным от (0) идеалом в поле комплексных чисел, что невозможно.

2. Функции на максимальных идеалах, порожденные элементами кольца. Обозначим через $\mathfrak{M}$ совокупность всех максимальных идеалов M данного банахова коммутативного кольца R с единицей e. В силу I п. 1 всякий идеал $M \in \mathfrak{M}$ порождает гомоморфизм кольца R на поле комплексных чисел; обозначим через $x(M)$ число, отвечающее элементу $x \in R$ при этом гомоморфизме. При фиксированном $x \in R$ мы получаем, таким образом, функцию $x(M)$ на множестве $\mathfrak{M}$. Следовательно, мы получаем соответствие $x \to x(M)$ между элементами x кольца R и функциями $x(M)$ на множестве $\mathfrak{M}$.

I. *Соответствие $x \to x(M)$ обладает следующими свойствами*:

1) *если $x = x_1 + x_2$, то $x(M) = x_1(M) + x_2(M)$*;
2) *если $x = \alpha x_1$, то $x(M) = \alpha x_1(M)$*;
3) *если $x = x_1 x_2$, то $x(M) = x_1(M) x_2(M)$*;
4) $e(M) = 1$;
5) $x(M_0) = 0$ *тогда и только тогда, когда $x \in M_0$*;
6) *если $M_1 \neq M_2$, то существует элемент $x \in R$ такой, что $x(M_1) \neq x(M_2)$*;
7) $|x(M)| < |x|$.

Доказательство. Утверждения 1)–4) следуют из того, что при каждом фиксированном M_0 отображение $x \to x(M_0)$ есть гомоморфизм. Равенство $x(M_0) = 0$ означает, что x переходит в нуль при этом гомоморфизме, следовательно, что $x \in M_0$; тем самым доказано утверждение 5). Далее, если $M_1 \neq M_2$, то в R существует элемент x такой, что $x \in M_1$, $x \notin M_2$. В силу 5) это означает, что $x(M_1) = 0$, $x(M_2) \neq 0$; поэтому $x(M_1) \neq x(M_2)$ и 6) также доказано.

Для доказательства утверждения 7) заметим, что $|x(M)|$ есть норма образа $x(M)\widetilde{e}$ элемента x при гомоморфизме R на R/M. По определению нормы в R/M (см. п. 3 § 9), отсюда заключаем, что

$$|x(M)| = \inf |x'|,$$

где x' пробегает класс вычетов по M, содержащий x; поэтому $|x(M)| \leqslant |x|$.

II. *Элемент x кольца R имеет обратный тогда и только тогда, когда функция $x(M)$ нигде в $\mathfrak{M}$ не обращается в нуль.*

Действительно, x имеет обратный тогда и только тогда, когда x не принадлежит никакому максимальному идеалу; в силу I, 5) это условие равносильно условию $x(M) \neq 0$ для всех $M \in \mathfrak{M}$.

III. *При фиксированном* $x \in R$ *совокупность всех значений, принимаемых функцией* $x(M)$, *совпадает со спектром элемента* x.

Доказательство. Если $x(M_0) = \lambda_0$, то $(x - \lambda_0 e)(M_0) = 0$ и потому $(x - \lambda_0 e)^{-1}$ не существует, т. е. λ_0 принадлежит спектру элемента x. Обратно, если λ_0 принадлежит спектру элемента x, то $(x - \lambda_0 e)^{-1}$ не существует, и потому $x - \lambda_0 e$ обращается в нуль на некотором максимальном идеале M_0. А это означает, что $x(M_0) = \lambda_0$.

IV. *Для любого* $x \in R$

$$\sup_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)| = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|x^n|}. \tag{1}$$

Это непосредственно следует из III и равенства (2) п. 5 § 9.

Обозначим через $\mathscr{F}(\mathfrak{M})$ совокупность всех функций на $\mathfrak{M}$; $\mathscr{F}(\mathfrak{M})$ образует кольцо, если определить в $\mathscr{F}(\mathfrak{M})$ операции умножения на число, сложения и умножения как умножение функции на число, сложение и умножение функций соответственно. Утверждения 1)–4) предложения I означают, что

V. *Соответствие* $x \to x(M)$ *есть гомоморфизм кольца* R *в кольцо* $\mathscr{F}(\mathfrak{M})$.

VI. *Прообраз нуля при гомоморфизме* $x \to x(M)$ *кольца* R *в* $\mathscr{F}(\mathfrak{M})$ *есть радикал кольца* R.

Действительно, этот полный прообраз состоит из тех и только тех элементов x кольца R, для которых $x(M) = 0$ на всем $\mathfrak{M}$, т. е. которые принадлежат пересечению всех максимальных идеалов в R. С другой стороны, это пересечение есть радикал кольца R (см. III. п. 5 § 7).

Следствие. *В коммутативном банаховом кольце с единицей элемент* x *принадлежит радикалу* (*т.е. является обобщенным нульстепенным*[1]), см. п. 5 § 7) *тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|x^n|} = 0$.

Утверждение непосредственно следует из VI и IV.

VII. *Если* R — *полупростое кольцо, то соответствие* $x \to \{x(M)\}$ *есть изоморфизм кольца* R *в кольцо* $\mathscr{F}(\mathfrak{M})$.

Доказательство. В силу VI в данном случае прообраз нуля при гомоморфизме $x \to x(M)$ есть (0), и потому этот гомоморфизм есть изоморфизм.

Предложение VII означает, что *всякое полупростое банахово коммутативное кольцо* R *с единицей изоморфно некоторому кольцу функций на множестве всех максимальных идеалов кольца* R.

Примеры. 1. Рассмотрим кольцо W всех функций $x(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, где $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$ (пример 3 п. 1 § 9). Найдем

[1]) Отметим, что в алгебре элемент x называется *нульстепенным*, если $x^n = 0$ для некоторого натурального n.

все максимальные идеалы кольца W. Пусть при гомоморфизме кольца W по его максимальному идеалу M элемент $x_0 = e^{it}$ переходит в число a и, следовательно, элемент $x_0^{-1} = e^{-it}$ переходит в число a^{-1}. Норма элемента $x_0 = e^{it}$ равна единице; следовательно, в силу I, 7), $|a| \leqslant |x_0| = 1$; аналогично $|a^{-1}| \leqslant |x_0^{-1}| = 1$, ибо норма элемента $x_0^{-1} = e^{-it}$ также равна единице. Поэтому $|a| = 1$ и $a = e^{it_0}$ при некотором t_0, $0 \leqslant t_0 \leqslant 2\pi$. Но тогда e^{int} переходит в e^{int_0}, и потому $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ переходит в $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int_0}$. Таким образом, всякий максимальный идеал M кольца W определяется некоторым числом t_0 интервала $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$; именно, M состоит из тех и только тех функций $x(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ кольца W, которые обращаются в нуль при $t = t_0$.

Пусть функция $x(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ кольца W не обращается в нуль ни при каком значении t. Это означает, что $x(t)$ не принадлежит ни одному максимальному идеалу и потому имеет обратный в W. Этот обратный должен совпадать с функцией $\dfrac{1}{x(t)}$, которая, следовательно, также должна принадлежать кольцу W. Мы приходим к следующей теореме Винера [1, 2]:

Если сумма абсолютно сходящегося тригонометрического ряда $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ *нигде не обращается в нуль, то функция*

$$\frac{1}{\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}}$$

также разлагается в абсолютно сходящийся тригонометрический ряд.

2. Рассмотрим кольцо $C(T)$ всех функций $x = x(t)$, непрерывных на бикомпактном пространстве T (пример 1 п. 1 § 9); найдем все максимальные идеалы этого кольца.

Если t_0 — фиксированная точка из T, то соответствие $x(t) \to x(t_0)$ есть гомоморфизм кольца $C(T)$ в поле комплексных чисел и потому порождается некоторым максимальным идеалом; обозначим его M_{t_0}. Этот идеал есть совокупность всех функций x кольца $C(T)$, равных нулю в точке t_0.

Обратно, *всякий максимальный идеал M_0 в $C(T)$ есть совокупность M_{t_0} всех функций x кольца $C(T)$, равных нулю в некоторой фиксированной точке $t_0 \in T_0$.*

Действительно, пусть M_0 — максимальный идеал в $C(T)$; докажем, что существует точка t_0, в которой обращаются в нуль все функции из M_0. Предположим противное. Тогда каждой точке $\tau \in T$ отвечает функция $x_\tau \in M$, отличная от нуля в точке τ; в силу непрерывности x_τ отлична от нуля также в некоторой окрестности $U(\tau)$ точки τ. Так как T бикомпактно, то из этих окрестностей можно выбрать конечное число окрестностей $U(\tau_1)$, ..., $U(\tau_n)$, покрывающее все T; пусть

$x_{\tau_1}, \ldots, x_{\tau_n}$ — соответствующие функции $x_\tau \in M_0$. Тогда функция

$$x(t) = x_{\tau_1}(t)\overline{x_{\tau_1}(t)} + \ldots + x - \tau_n(t)\overline{x_{\tau_n}(t)} = |x_{\tau_1}(t)|^2 + \ldots + |x_{\tau_n}(t)|^2$$

также принадлежит идеалу M_0 и нигде в T не обращается в нуль. Поэтому $\dfrac{1}{x(t)}$ есть непрерывная функция на T и, следовательно, также принадлежит кольцу $C(T)$. Но это означает, что элемент $x = x(t)$ имеет обратный, а значит, $x = x(t)$ не может принадлежать ни одному максимальному идеалу, в частности, не может принадлежать идеалу M_0. Полученное противоречие показывает, что существует точка $t_0 \in T$, в которой все функции идеала M_0 обращаются в нуль. Но тогда $M_0 \subset M_{t_0}$; следовательно, $M_0 = M_{t_0}$ в силу максимальности идеала M_0. Очевидно, соответствие $t_0 \to M_{t_0}$ между совокупностью всех точек $t_0 \in T$ и всех максимальных идеалов кольца $C(T)$ взаимно однозначно.

Так как $x(t) - x(t_0) \in M_{t_0}$, $x(M_{t_0}) = x(t_0)$; следовательно, при соответствии $t_0 \to M_{t_0}$ функции $x(M)$ переходят в исходные функции $x(t)$.

В предыдущих рассуждениях мы фактически использовали только следующие свойства кольца $R = C(T)$: 1) все функции $x(t) \in R$ непрерывны; 2) если $x(t) \in R$, то также $\overline{x(t)} \in R$; 3) если функция $x(t)$ кольца R нигде на T не обращается в нуль, то также $\dfrac{1}{x(t)} \in R$. Поэтому мы доказали следующее общее предложение.

VIII. *Если R — кольцо функций на бикомпактном пространстве T, удовлетворяющее указанным условиям* 1), 2), 3), *то всякий максимальный идеал M в R совпадает с некоторым идеалом M_{t_0}*, $t_0 \in T$.

3. Обозначим через $D_n(a, b)$ совокупность всех комплексных функций $x = x(t)$, определенных и обладающих непрерывной n-й производной в замкнутом интервале $[a, b]$. Определим в $D_n(a, b)$ операции умножения на число, сложения и умножения, как умножение функции на число, сложение и умножение функций. Кроме того, определим в $D_n(a, b)$ норму формулой

$$|x| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \max_{a \leqslant t \leqslant b} |x^{(k)}(t)|.$$

Тогда $D_n(a, b)$ станет банаховым коммутативным кольцом с единицей. Очевидно, это кольцо удовлетворяет всем условиям предложения VIII в предыдущем примере; следовательно, всякий максимальный идеал в $D_n(a, b)$ есть совокупность M_{t_0} всех функций $x(t) \in D_n(a, b)$, равных нулю в некоторой фиксированной точке $t_0 \in [a, b]$.

3. Топологизация множества всех максимальных идеалов. Зададим теперь топологию в множестве $\mathfrak{M}$ всех максимальных идеалов кольца R как слабую топологию, определенную семейством всех функций $x(M)$, $x \in R$ (см. п. 11 § 2). Таким образом, базу окрестностей в этой топологии образуют всевозможные множества $U(M_0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$ идеалов M, определенные неравенствами вида

$$|x_k(M) - x_k(M_0)| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

при всевозможных фиксированных $\varepsilon > 0$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$. При этом, по самому определению топологии в $\mathfrak{M}$, все функции $x(M)$, $x \in R$, непрерывны на $\mathfrak{M}$. Кроме того, $\mathfrak{M}$ — хаусдорфово пространство, ибо в силу 1 п. 2 функции $x(M)$, $x \in R$, отделяют точки на $\mathfrak{M}$.

Теорема 2. *Пространство $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов банахова коммутативного кольца R с единицей бикомпактно.*

Доказательство. Каждому элементу x кольца R поставим в соответствие круг Q_x в комплексной плоскости с центром в точке 0 и радиусом $|x|$. Пусть Q — топологическое произведение всех этих кругов. Таким образом, Q есть пространство, точками которого являются всевозможные совокупности $\Lambda = \{\lambda_x\}$ чисел $\lambda_x \in Q_x$, где x пробегает все кольцо R; при этом база окрестностей точки $\Lambda^0 = \{\lambda_x^0\}$ в Q задается всевозможными конечными системами элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ и всевозможными положительными числами ε как система множеств в Q, определенных неравенствами вида

$$|\lambda_{x_1} - \lambda_{x_1}^0| < \varepsilon, \ \ldots, |\lambda_{x_n} - \lambda_{x_n}^0| < \varepsilon \tag{1}$$

(см. п. 12 § 2); обозначим через $U(\Lambda^0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$ окрестность, определенную неравенствами (1). Согласно теореме А. Н. Тихонова (II п. 12 § 2) пространство Q бикомпактно.

Так как $|x(M)| \leqslant |x|$, то каждому максимальному идеалу M отвечает точка $\{\lambda_x\} \in Q$, где $\lambda_x = x(M)$. При этом разным максимальным идеалам отвечают разные точки $\{\lambda_x\}$. Действительно, если $M \neq M_1$, то существует элемент $x_0 \in R$, для которого $x_0(M_1) \neq x_0(M)$. Это означает, что соответствующие точки $\{\lambda_x\}$, $\{\lambda'_x\}$ различаются по крайней мере одной координатой, а именно индексом x_0, и потому различны. Таким образом, соответствие $M \sim \{\lambda_x\}$, устанавливаемое равенством $\lambda_x = x(M)$, взаимно однозначно. Из сравнения топологий в $\mathfrak{M}$ и Q вытекает, что это соответствие есть гомеоморфизм. Докажем, что образ Q_1 пространства $\mathfrak{M}$ в Q при этом гомеоморфизме замкнут. Отсюда будет следовать, что Q как замкнутое подмножество бикомпактного пространства бикомпактно (см. II п. 6 § 2) и потому его гомеоморфный прообраз $\mathfrak{M}$ также бикомпактен.

Пусть $\Lambda^0 = \{\lambda_x^0\}$ — произвольная точка прикосновения множества Q_1; докажем, что существует максимальный идеал M_0 такой, что $x(M_0) = \lambda_x^0$; это будет означать, что $\{\lambda_x^0\} \in Q_1$ и замкнутость Q_1 в Q будет доказана. Очевидно, достаточно показать, что соответствие $x \to \lambda_x^0$ есть гомоморфизм кольца R на поле комплексных чисел, т. е. что

$$\lambda_x^0 \not\equiv 0, \quad \lambda_{\alpha x}^0 = \alpha\lambda_x^0, \quad \lambda_{x+y}^0 = \lambda_x^0 + \lambda_y^0, \quad \lambda_{xy}^0 = \lambda_x^0\lambda_y^0; \tag{2}$$

в силу II п. 1 этот гомоморфизм порождается тогда некоторым максимальным идеалом M_0, т. е. $\lambda_x^0 = x(M_0)$ при некотором $M_0 \in \mathfrak{M}$. Мы ограничимся доказательством последнего из соотношений (2); остальные доказываются аналогично. Рассмотрим для этой цели окрестность $U(\Lambda^0; x, y, xy; \varepsilon)$ точки Λ^0. Так как Λ^0 — точка прикосновения множества Q_1, то существует максимальный идеал M такой, что соответствующая точка $\Lambda = \{\lambda_x\}$, $\lambda_x = x(M)$, принадлежит этой окрестности. Это означает, что

$$|\lambda_x^0 - x(M)| < \varepsilon, \quad |\lambda_y^0 - y(M)| < \varepsilon,$$
$$|\lambda_{xy}^0 - (xy)(M)| = |\lambda_{xy}^0 - x(M)\,y(M)| < \varepsilon.$$

Но тогда

$$\begin{aligned}|\lambda_{xy}^0 - \lambda_x^0\lambda_y^0| &\leqslant \\ \leqslant |\lambda_{xy}^0 - x(M)\,y(M)| &+ |x(M)[y(M) - \lambda_y^0]| + |\lambda_y^0[x(M) - \lambda_x^0]| \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon + |x||y(M) - \lambda_y^0| + |\lambda_y^0||x(M) - \lambda_x^0| < \varepsilon(1 + |x| + |\lambda_y^0|);\end{aligned}$$

следовательно, ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$,

$$\lambda_{xy}^0 = \lambda_x^0\lambda_y^0.$$

Таким образом, соответствие $x \to \lambda_x^0$ есть гомоморфизм и теорема доказана.

Топология в множестве всех максимальных идеалов единственна в следующем смысле.

Теорема 3. *Пусть $\mathfrak{M}'$ — совокупность всех максимальных идеалов кольца R, топологизированная так, что*:

1) *$\mathfrak{M}'$ бикомпактно*;
2) *все функции $x(M)$, отвечающие элементам кольца R, непрерывны на $\mathfrak{M}'$.*

Тогда $\mathfrak{M}'$ гомеоморфно ранее определенному пространству $\mathfrak{M}$.

Утверждение непосредственно следует из VI п. 7 § 2 (см. также II п. 11 § 2).

Пример. Рассмотрим пространство $\mathfrak{M}$ всех максимальных идеалов кольца $C(T)$ (пример 2 п. 2). Между точками $t \in T$ и идеалами $M \in \mathfrak{M}$ существует взаимно однозначное соответствие $t_0 \to M_t$; определим в совокупности всех максимальных идеалов кольца $C(T)$ топологию, считая окрестностями идеалов образы окрестностей пространства T при этом соответствии. Мы получим топологическое пространство $\mathfrak{M}'$, гомеоморфное пространству T. При этом функции $x(t)$ переходят в функции $x(M)$, непрерывные на $\mathfrak{M}'$; на основании теоремы 3 пространства $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}$, а значит и T и $\mathfrak{M}$ гомеоморфны.

Таким образом, *пространство $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов кольца $C(T)$ всех непрерывных функций на бикомпактном пространстве T гомеоморфно пространству T.*

Комбинируя теорему 2 с результатами п. 2, мы приходим к следующей теореме:

Теорема 4. *Для всякого банахова коммутативного кольца R с единицей соответствие $x \to x(M)$ есть гомоморфизм кольца R на некоторое кольцо непрерывных функций на бикомпактном пространстве, причем ядром этого гомоморфизма является радикал кольца. Если, в частности, кольцо R полупростое, то R изоморфно некоторому кольцу непрерывных функций на бикомпактном пространстве.*

Если само кольцо R уже является кольцом (вообще не всех) непрерывных функций $x(t)$ на некотором топологическом пространстве T, то каждая точка $t_0 \in T$ определяет максимальный идеал M_{t_0} в R, именно, совокупность всех функций x из R, равных нулю в точке t_0. При этом может оказаться, что разные точки t_0 определяют один и тот же максимальный идеал; следовательно, переход к максимальным идеалам может в общем случае привести к «склеиванию» точек пространства T.

Кроме того, может оказаться, что не всякий максимальный идеал кольца R определяется точкой пространства T. Поэтому переход к максимальным идеалам может также означать расширение исходного пространства.

Поясним это следующими примерами.

а). В кольце W всех абсолютно сходящихся тригонометрических рядов $x(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, определенных в интервале $(-\infty, \infty)$, всякое вещественное число t_0 порождает максимальный идеал, именно, совокупность всех $x(t)$, равных нулю в точке t_0. Два разных числа t_1, t_2 определяют один и тот же максимальный идеал тогда и только тогда, когда $t_1 - t_2$ кратно 2π. Поэтому переход к максимальным идеалам означает «склеивание» точек, отличающихся на кратное 2π, и пространство максимальных идеалов кольца W гомеоморфно окружности, которая и является естественной областью задания функций кольца W.

б). Пусть A — совокупность всех функций $x = x(\zeta)$, регулярных в круге $|\zeta| < 1$ и непрерывных в круге $|\zeta| \leqslant 1$, с нормой

$$|x| = \sup_{|\zeta| \leqslant 1} |x(\zeta)|$$

и с обычными операциями умножения на число, сложения и умножения. Найдем все максимальные идеалы кольца A. Всякая точка ζ_0 круга $|\zeta| \leqslant 1$ порождает максимальный идеал в A, именно совокупность всех функций $x(\zeta)$ кольца A, равных нулю в точке ζ_0. Обратно, всякий максимальный идеал кольца A порождается таким образом некоторой точкой круга $|\zeta| \leqslant 1$. Действительно, пусть M_0 — максимальный идеал в A и ζ_0 — число, в которое переходит функция $x_0(\zeta) = \zeta$ при гомоморфизме $x \to x(M_0)$; так как $|x_0| = 1$, то $|\zeta_0| \leqslant 1$. Для любого многочлена $x(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + \ldots + c_n\zeta^n$ будет $x(M_0) = c_0 + c_1\zeta_0 + \ldots + c_n\zeta_0^n = x(\zeta_0)$. Но все функции из A являются пределами равномерно сходящихся в круге $|\zeta| \leqslant 1$ (т. е. сходящихся в смысле нормы в A) последовательностей таких многочленов [1]); поэтому $x(M_0) = x(\zeta_0)$ для любой функции $x(\zeta) \in A$ и M_0 порождается точкой ζ_0. Равенство $x(M_0) = x(\zeta_0)$ показывает, что максимальные идеалы можно отождествить с соответствующими точками круга $|\zeta| \leqslant 1$.

Обозначим теперь через $x^\frown(\zeta)$ функцию $x(\zeta)$ кольца A, рассматриваемую только на окружности $|\zeta| = 1$. Мы получим кольцо $A^\frown$ функций на окружности, изоморфное кольцу A. Действительно, соответствие $x \to x^\frown$ есть, очевидно, гомоморфизм; его ядро состоит из аналитических функций $x(\zeta)$, равных нулю на окружности $|\zeta| = 1$ и потому тождественно равных нулю. Следовательно, соответствие $x \to x^\frown$ есть изоморфизм.

Определим в $A^\frown$ норму формулой

$$|x^\frown| = \sup_{|\zeta|=1} |x^\frown(\zeta)|;$$

в силу принципа максимума модуля эта норма совпадает с

$$|x| = \sup_{|\zeta|\leqslant 1} |x(\zeta)|,$$

так что изоморфизм $x \to x^\frown$ сохраняет также норму. Поэтому максимальные идеалы кольца $A^\frown$ также описываются точками круга $|\zeta| \leqslant 1$, хотя $A^\frown$ состоит из функций, заданных только на окружности $|\zeta| = 1$. Таким образом, весь круг $|\zeta| \leqslant 1$, а не окружность $|\zeta| = 1$, является естественной областью задания кольца $A^\frown$.

Резюмируя, мы можем сказать, что переход от пространства T к пространству $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов может привести к следующим операциям:

1) «склеиванию» точек пространства T;
2) присоединению к T новых элементов.

4. Случай кольца без единицы. Пусть R — банахово коммутативное кольцо без единицы, а R' — кольцо, полученное из R присоединением единицы. Обозначим через $\mathfrak{M}$ совокупность всех максимальных регулярных идеалов M кольца R, через $\mathfrak{M}'$ — совокупность всех максимальных идеалов M' кольца R'; пусть $\mathfrak{M}'_0$ — множество, полученное из $\mathfrak{M}'$ отбрасыванием одного идеала $M'_0 = R$ кольца R'. Так как $\mathfrak{M}'$ бикомпактно, то $\mathfrak{M}'_0$ локально бикомпактно. С другой стороны, существует взаимно однозначное соответствие между идеалами $M \in \mathfrak{M}$ и $M' \in \mathfrak{M}'_0$ (см. VI п. 4 § 7). В силу этого соответствия топологию в $\mathfrak{M}'_0$ можно перенести на $\mathfrak{M}$; тогда $\mathfrak{M}$ станет локально бикомпактным

---

[1]) Действительно, функция $x(\zeta) \in A$ есть равномерный предел в круге $|\zeta| \leqslant 1$ функций $x\left(\dfrac{\zeta}{1+\varepsilon}\right)$ при $\varepsilon \to +0$, каждая из которых, как аналитическая в круге $|\zeta| \leqslant 1 + \varepsilon$, равномерно аппроксимируется многочленами (например, частичными суммами ее ряда Тэйлора) в круге $|\zeta| \leqslant 1$.

пространством максимальных регулярных идеалов кольца R. Если при этом $x \in R$, то $x(M'_0) = 0$. Это означает, что функции $x(M')$, $x \in R$, можно рассматривать как функции $x(M)$, удовлетворяющие условию

$$\lim_{M \to \infty} x(M) = 0. \tag{1}$$

Отсюда видно, что предыдущие результаты переносятся на банаховы коммутативные кольца без единицы со следующими изменениями. Роль пространства максимальных идеалов играет локально бикомпактное пространство $\mathfrak{M}$ максимальных регулярных идеалов, а вместо произвольных непрерывных функций следует рассматривать только непрерывные функции на $\mathfrak{M}$, удовлетворяющие условию (1). В частности, мы получаем следующий результат.

Всякое полупростое коммутативное банахово кольцо без единицы изоморфно некоторому кольцу функций $x(M)$ на локально бикомпактном пространстве $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих условию (1).

Мы предоставляем читателю более подробное перенесение на кольца без единицы предыдущих, а также дальнейших результатов этой главы (см. по этому поводу Люмис [2]).

5. Система образующих кольца. Множество K элементов банахова кольца с единицей называется *системой образующих* этого кольца, если наименьшее замкнутое подкольцо с единицей, содержащее K, совпадает с R. При этом единица кольца в число образующих не включается.

Теорема 5. *Совокупность всех окрестностей $U(M; y_1, \ldots, y_n; \varepsilon)$, где y_k пробегают все элементы системы K образующих в R, есть база окрестностей в пространстве $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов кольца R.*

Доказательство. Нам надо доказать, что всякая окрестность $U(M_0; x_1, \ldots, x_m; \varepsilon)$ содержит некоторую окрестность

$$U(M_0; y_1, \ldots, y_n; \delta).$$

Для этого заметим, что, по определению системы образующих, существуют многочлены

$$p_k = p_k(y_1, \ldots, y_n), \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

от конечного числа элементов $y_j \in K$, отличающиеся от x_k по норме меньше чем на $\frac{\varepsilon}{3}$:

$$|x_k - p_k| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Так как $p_k(M) = p_k(y_1(M), \ldots, y_n(M))$ есть непрерывная функция от $y_1(M), \ldots, y_n(M)$, то существует число $\delta > 0$ такое, что

$$U(M_0; y_1, \ldots, y_n; \delta) \subset U\left(M_0; p_1, \ldots, p_m; \frac{\varepsilon}{3}\right),$$

так что для всех $M \in U(M_0; y_1, \ldots, y_n; \delta)$

$$|p_k(M) - p_k(M_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Окрестность $U(M_0; y_1, \ldots, y_n; \delta)$ содержится в $U(M_0; x_1, \ldots, x_m; \varepsilon)$, ибо для всех $M \in U(M_0; y_1, \ldots, y_n; \delta)$ и всех $k = 1, 2, \ldots, m$

$$|x_k(M) - x_k(M_0)| \leqslant |x_k(M) - p_k(M)| + |p_k(M) - p_k(M_0)| + \\ + |p_k(M_0) - x_k(M_0)| \leqslant |x_k - p_k| + \frac{\varepsilon}{3} + |x_k - p_k| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Если R — кольцо с конечным или счетным числом образующих, то пространство $\mathfrak{M}$ его максимальных идеалов имеет счетную базу окрестностей.*

Действительно, если $y_1, y_2, \ldots$ — образующие кольца R, то $U\left(y_1, \ldots, y_n; \dfrac{1}{m}\right)$, $n, m = 1, 2, 3, \ldots$, есть счетная база окрестностей в $\mathfrak{M}$.

Рассмотрим теперь тот частный случай, когда кольцо R имеет конечное число образующих.

Теорема 6. *Если кольцо R имеет конечное число образующих $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то пространство $\mathfrak{M}$ его максимальных идеалов гомеоморфно замкнутому ограниченному множеству в n-мерном комплексном пространстве.*

Доказательство. Функции $y_1(M), y_2(M), \ldots, y_n(M)$ отображают $\mathfrak{M}$ однозначно и непрерывно на некоторое подмножество $\mathfrak{M}'$ n-мерного комплексного пространства C^n. Докажем, что это отображение взаимно однозначно. Ввиду бикомпактности пространства $\mathfrak{M}$ отсюда будет следовать утверждение теоремы (см. III и V п. 7 § 2).

Пусть две точки $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}$ отображаются в одну и ту же точку пространства $\mathfrak{M}$; это означает, что

$$y_k(M_1) = y_k(M_2), \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Но тогда для любого многочлена $p = p(y_1, \ldots, y_n)$

$$p(M_1) = p(M_2),$$

и так как многочлены $p(y_1, \ldots, y_n)$ образуют в R плотное множество то $x(M_1) = x(M_2)$ для любого элемента $x \in R$. Отсюда в силу свойства отделимости (см. I, 6) п. 2) $M_1 = M_2$.

Из доказанной теоремы, в частности, следует, что *если R — кольцо с одной образующей, то $\mathfrak{M}$ гомеоморфно замкнутому ограниченному множеству в комплексной плоскости.*

Замкнутое ограниченное множество $F \subset C^n$ гомеоморфно пространству $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов банахова коммутативного кольца с n образующими тогда и только тогда, когда для каждой точки $\zeta_0 \in C^n - F$ существует многочлен, равный 1 в точке ζ_0

и по модулю < 1 на F. В случае $n = 1$ множества F, гомеоморфные $\mathfrak{M}$, допускают следующую характеристику: это те и только те множества, которые не разбивают плоскость; при $n > 1$ не существует чисто топологической характеристики таких множеств F (подробнее об этом см. Гельфанд, Райков и Шилов [1], с. 44–46).

6. Аналитические функции элементов кольца. Банахово кольцо R с единицей вместе с каждым элементом x содержит всякий многочлен $p(x) = c_0 e + c_1 x + \ldots + c_n x^n$ и вообще всякую функцию $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, где $f(\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$ — целая функция от ζ. Действительно, в случае целой функции $f(\zeta)$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$ мажорируется сходящимся рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n||x|^n$; следовательно, ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ сходится абсолютно к некоторому элементу кольца R; этот элемент обозначается $f(x)$ и называется *целой аналитической функцией f элемента $x \in R$.*

С другой стороны, функции $f(\zeta) = \dfrac{1}{\zeta}$, имеющей единственную особую точку $\zeta = 0$, отвечает элемент $f(x) = x^{-1}$ кольца R тогда и только тогда, когда $x(M)$ не обращается в нуль ни при каком M, т. е. когда особая точка $\zeta = 0$ не принадлежит спектру элемента x.

Покажем, что аналогичное построение можно провести и для других аналитических функций. Пусть x — произвольный элемент кольца R, а $f(\zeta)$ — функция, регулярная в ограниченной области D, целиком содержащей внутри себя спектр S_x элемента x. Положим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} (\zeta e - x)^{-1} f(\zeta)\, d\zeta, \tag{1}$$

где Γ — спрямляемый жорданов контур в D, содержащий внутри себя S_x (следовательно, отстоящий от S_x на положительное расстояние). Элемент $f(x)$ кольца R, таким образом определенный, не зависит от выбора контура Γ, удовлетворяющего этим условиям, ибо вектор-функция $\dfrac{1}{2\pi i}(\zeta e - x)^{-1} f(\zeta)$ регулярна в $D - S_x$, а для регулярных вектор-функций справедлива теорема Коши. Условимся говорить, что *аналитическая функция $f(\zeta)$ применима к элементу $x \in R$*, если $f(\zeta)$ регулярна на S_x, а значит, и в некоторой ограниченной области, содержащей S_x. В силу сказанного выше формула (1) определяет элемент $f(x)$ кольца для любой аналитической функции $f(\zeta)$, применимой к элементу x.

Теорема 7. *Пусть F_x — совокупность всех аналитических функций $f(\zeta)$, применимых к элементу $x \in R$. Соответствие $f(\zeta) \to$ $\to f(x)$ между функциями $f \in F_x$ и элементами $f(x)$ обладает* *следующими свойствами*:

1) *если* $f(\zeta) \equiv 1$, *то* $f(x) = e$;
2) *если* $f(\zeta) = \zeta$, *то* $f(x) = x$;
3) *если* $f(\zeta) = \alpha_1 f_1(\zeta) + \alpha_2 f_2(\zeta)$, *то* $f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$;
4) *если* $f(\zeta) = f_1(\zeta)\, f_2(\zeta)$, *то* $f(x) = f_1(x)\, f_2(x)$;
5) *если последовательность* $f_n(\zeta)$ *сходится равномерно к* $f(\zeta)$ *в некоторой области* D, *содержащей внутри себя* S_x, *то последовательность* $f_n(x)$ *сходится по норме к* $f(x)$.

Доказательство. Функции $f(\zeta) = 1$ и $f(\zeta) = \zeta$ регулярны во всей комплексной плоскости; следовательно, при $f(\zeta) = 1$ и $f(\zeta) = \zeta$ в качестве Γ можно взять любой круг с центром в начале координат и достаточно большим радиусом. Но на таком круге

$$(\lambda e - x)^{-1} = \lambda^{-1} e + \lambda^{-2} x + \lambda^{-3} x^2 + \ldots .$$

Поэтому при $f(\zeta) \equiv 1$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} (\lambda^{-1} e + \lambda^{-2} x + \lambda^{-3} x^2 + \ldots)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \lambda^{-1} e\, d\lambda = e,$$

а при $f(\zeta) = \zeta$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \lambda(\lambda^{-1} e + \lambda^{-2} x + \lambda^{-3} x^2 + \ldots)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \lambda^{-1} x\, d\lambda = x.$$

Далее, выполнение условия 3) очевидно. Докажем теперь, что условие 4) также выполнено. Это условие означает, что для любых двух функций $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, регулярных в $D \supset S_x$,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} (\lambda e - x)^{-1} f_1(\lambda)\, f_2(\lambda)\, d\lambda = \\ = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} (\lambda e - x)^{-1} f_1(\lambda)\, d\lambda \cdot \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} (\lambda e - x)^{-1} f_2(\lambda)\, d\lambda. \quad (2)$$

Заменим во втором интеграле в правой части контур Γ другим контуром Γ_1, содержащимся в D и содержащим внутри себя Γ. Тогда правая часть в (2) перепишется в виде

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} (\lambda e - x)^{-1} f_1(\lambda)\, d\lambda \cdot \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1} (\mu e - x)^{-1} f_2(\mu)\, d\mu = \\ = -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma_1} (\lambda e - x)^{-1} (\mu e - x)^{-1} f_1(\lambda)\, f_2(\mu)\, d\lambda\, d\mu =$$

$$= -\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{f_1(\lambda)\,f_2(\mu)}{\mu-\lambda}\,[(\lambda e-x)^{-1}-(\mu e-x)^{-1}]\,d\lambda\,d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}(\lambda e-x)^{-1}f_1(\lambda)\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_1}\frac{f_2(\mu)\,d\mu}{\mu-\lambda}\right)d\lambda +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\Gamma_1}(\mu e-x)^{-1}f_2(\mu)\left(\int\limits_{\Gamma}\frac{f_1(\lambda)\,d\lambda}{\lambda-\mu}\right)d\mu.$$

Так как функция $\dfrac{f_1(\lambda)}{\lambda-\mu}$ регулярна на и внутри Γ, то второе слагаемое равно нулю; с другой стороны, по формуле Коши внутренний интеграл в первом слагаемом равен $f_2(\lambda)$. Тем самым формула (2) доказана.

Докажем теперь выполнение условия 5). Пусть D — ограниченная область, содержащая внутри себя S_x, и пусть $f_n(\zeta)$ — последовательность функций, регулярных в D и сходящихся к $f(\zeta)$ равномерно в D, так что

$$\max_{\lambda\in D}|f(\lambda)-f_n(\lambda)|\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Тогда, взяв в D контур Γ, содержащий внутри S_x, имеем

$$|f(x)-f_n(x)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}[f(\lambda)-f_n(\lambda)](\lambda e-x)^{-1}\,d\lambda\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\lambda\in D}|f(\lambda)-f_n(\lambda)|\cdot\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}|(\lambda e-x)^{-1}||d\zeta|\to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

З а м е ч а н и е. Можно показать (см. Гельфанд, Райков и Шилов [1]), что всякое соответствие $f\in F_x$, удовлетворяющее условиям 1)–5) теоремы 7, с необходимостью задается формулой (1).

С л е д с т в и е. *Если функция $f(\zeta)$ регулярна в открытой области D, заключающей все значения функции $x(M)$, то в кольце существует элемент y такой, что $y(M)=f(x(M))$ для всех максимальных идеалов M.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию, $f(\zeta)\in F_x$, ибо S_x есть как раз совокупность всех значений функции $x(M)$ (см. III п. 2); поэтому в кольце R существует элемент $y=f(x)$; при этом

$$y = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}f(\lambda)(\lambda e-x)^{-1}\,d\lambda, \tag{3}$$

где Γ — спрямляемый жорданов контур, целиком содержащийся в области регулярности функции $f(\zeta)$ и содержащий внутри себя S_x.

Так как соответствие $x \to x(M)$ есть непрерывный гомоморфизм, а интеграл в правой части (3) сходится в смысле нормы, то из (3) следует, что

$$y(M) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\lambda)}{\lambda - x(M)}\, d\lambda = f(x(M)).$$

Отсюда получается как частный случай следующая теорема П. Леви [1], обобщающая теорему Винера (см. с. 228).

Если ряд Фурье функции $x(t)$ сходится абсолютно и все значения этой функции заключены в круге $|\zeta - \zeta_0| \leqslant \rho$, то для любой функции $f(\zeta)$, регулярной во всех точках этого круга, ряд Фурье функции $f(x(t))$ также сходится абсолютно.

Действительно, $x(t)$ есть элемент кольца W, причем $x(M) = x(t)$, где M — идеал, порожденный точкой t. Следовательно, в кольце W есть элемент $y = f(x)$; это означает, что функция $y(t) = y(M) = f(x(M)) = f(x(t))$ также разлагается в абсолютно сходящийся тригонометрический ряд.

Отметим в этой связи следующий результат Кацнельсона [1]: если функция $F(\tau)$, $\tau \in (a, b)$, $a \geqslant -\infty$, $b \leqslant +\infty$, обладает свойством: $F(x(t)) \in W$ для каждой вещественной функции $x(t) \in W$ со значениями из (a, b), то $F(\tau)$ аналитична в (a, b). По поводу других результатов в этом направлении см. Кацнельсон [1–3] и Кахан [1].

Другое применение следствия из теоремы 7 получим, если в качестве R возьмем кольцо всех функций $x(\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$ в круге $|\zeta| \leqslant 1$, таких, что $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$; при этом действия умножения на число, сложения и умножения в R определим обычным образом как соответствующие действия с функциями, а норму $|x|$ — по формуле $|x| = \sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n|$. Повторяя рассуждения, проведенные на с. 232, мы убедимся в том, что формула $x(M) = x(\zeta_0)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между максимальными идеалами M кольца R и точками ζ_0 круга $|\zeta| \leqslant 1$. Поэтому, применяя следствие из теоремы 7, мы придем к следующему результату.

Если ряд Маклорена функции $x(\zeta)$ сходится абсолютно в круге $|\zeta| \leqslant 1$ и все значения этой функции заключены внутри ограниченной области D, то для любой функции $f(z)$, регулярной в D, ряд Маклорена функции $f(x(\zeta))$ также сходится абсолютно в круге $|\zeta| \leqslant 1$.

Действительно, в R существует элемент y такой, что

$$y(\zeta) = y(M) = f(x(M)) = f(x(\zeta)).$$

7. Винеровские пары колец. Пусть R, R_1 ($R \supset R_1$) — банаховы (не обязательно коммутативные) кольца с общей единицей e и нормами $|x|$ и $|x|_1$. Будем говорить, что кольца R, R_1 образуют *винеровскую пару*, если всякий элемент $x \in R_1$, обратимый в R, обратим и в R_1.

Если взять в качестве R_1 кольцо абсолютно сходящихся рядов Фурье, а в качестве R — кольцо всех непрерывных функций на вещественной оси, с обычными нормами, то предыдущее условие есть известная теорема Винера (см. пример 1 из п. 2).

I. *Следующие утверждения равносильны*:

а) *кольца R и R_1 образуют винеровскую пару*;

б) *замыкание $\overline{N}_1$ по норме $|x|$ произвольного множества $N_1 \subset R_1$, не содержащего обратимых в R_1 элементов, не содержит обратимых в R элементов*;

в) *замыкание $\overline{M}_1$ по норме $|x|$ всякого одностороннего максимального идеала M_1 кольца R_1 не содержит обратимых в R элементов*;

г) $S_x = S_x^1$ *для всякого* $x \in R_1$ (S_x, S_x^1 — спектры элемента x в кольцах R, R_1 соответственно).

Доказательство. а) $\to$ б). Предположим, что для некоторого множества $N_1 \subset R_1$, не содержащего обратимых в R_1 элементов, его замыкание $\overline{N}_1$ в R содержит обратимый в R элемент x. В силу открытости множества всех обратимых в R элементов (см. II п. 4 § 9) существует окрестность $U(x)$ точки x, состоящая только из обратимых в R элементов. Поэтому если последовательность $\{x_n\} \subset N_1$ сходится в R к x, то, начиная с некоторого номера n_0, все элементы x_n ($n > n_0$) попадут в $U(x)$, а потому будут обратимы в R и в силу условия а) также обратимы в R_1, что невозможно.

б) $\to$ в). Очевидно, так как максимальный идеал не содержит обратимых элементов.

в) $\to$ г). Включение $S_x \subset S_x^1$ для $x \in R_1$ выполнено в любых кольцах R, R_1 ($R \supset R_1$) с общей единицей, так как если $x - \lambda_0 e$ не имеет обратного в R, то он не имеет обратного и в R_1.

Докажем, что $S_x^1 \subset S_x$. Пусть $\lambda_1 \in S_x^1$, т. е. элемент $x - \lambda_1 e$ принадлежит некоторому одностороннему максимальному идеалу $M_1 \in R_1$; так как M_1 вместе со своим замыканием $\overline{M}_1$ по норме $|x|$ не содержит обратимых в R элементов, то $x - \lambda_1 e$ необратим в R, т. е. $\lambda_1 \in S_x$.

г) $\to$ а). Пусть $x \in R^1$ и в R существует x^{-1}; тогда $0 \notin S_x = S_x^1$, т. е. элемент x обратим в R_1.

Следствие. *Если R, R^1 ($R \supset R_1$) — винеровская пара, то для всякого $x \in R_1$*

$$r(x) = r_1(x),$$

где $r(x)$, $r_1(x)$ — спектральные радиусы элемента x относительно колец R, R_1.

II. *Пусть R, R_1 ($R \supset R_1$) — винеровская пара коммутативных банаховых колец с общей единицей e и нормами $|x|$, $|x|_1$ и R_1 плотно* *в R по норме $|x|$. Тогда замыкание всякого собственного идеала кольца R_1 по норме $|x|$ есть собственный идеал в R; замыкание максимального идеала из R_1 есть максимальный идеал в R.*

Доказательство. Очевидно, что в силу плотности R_1 в R замыкание $\overline{I}_1$ собственного идеала $I_1 \subset R_1$ есть идеал в R. В силу I б) идеал $\overline{I}_1$ будет собственным.

Пусть теперь M_1 — максимальный идеал кольца R_1. Достаточно доказать, что каждый элемент x из R представим в виде $x = \lambda e + y$, где $y \in \overline{M}_1$. Поскольку R_1 плотно в R, существует последовательность элементов $\{x_n\} \subset R_1$, сходящаяся в R к x, и так как M_1 максимален в R_1, то $x_n = \lambda_n e + y_n$, где $y_n \in M_1$. Последовательность $\{\lambda_n\}$ ограничена, так как в противном случае из нее можно было бы выбрать подпоследовательность $\lambda_{n_m} \to \infty$ и в силу ограниченности $\{x_n\}$

$$e + \frac{y_{n_m}}{\lambda_{n_m}} = \frac{\lambda_{n_m} e + y_{n_m}}{\lambda_{n_m}} = \frac{x_{n_m}}{\lambda_{n_m}} \to 0,$$

т. е. $e \in \overline{M}_1$, что невозможно. Из последовательности $\{\lambda_n\}$ выберем сходящуюся подпоследовательность $\lambda_{n_k} \to \lambda$; x_{n_k} сходится в R к x, к поэтому $y_{n_k} = x_{n_k} - \lambda_{n_k} e$ сходится в R к $y = x - \lambda e \in \overline{M}_1$, что и требовалось.

Сделаем следующее простое замечание.

III. *Пусть R, R_1 ($R \supset R_1$) — коммутативные банаховы кольца с общей единицей e. Если M максимален в R, то $M \cap R_1$ максимален в R_1.*

Это следует из того, что если $x \in R_1$ и $x = \lambda e + y$, где $y \in M$, то $y = x - \lambda e \in R_1$, и поэтому $y \in M \cap R_1$. В силу произвольности $x \in R_1$ отсюда следует, что $M \cap R_1$ максимален в R_1.

IV. *Пусть R, R_1 ($R \supset R_1$) — винеровская пара коммутативных колец с общей единицей e и R_1 плотно в R. Тогда для любых максимальных идеалов M_1, M колец R_1, R*

$$M_1 = \overline{M}_1 \cap R_1, \quad M = \overline{M \cap R_1},$$

где черта означает замыкание по норме $|x|$.

Доказательство. Идеал $\overline{M}_1 \cap R_1$ является в силу II собственным (так как в противном случае $e \in R_1 = \overline{M}_1 \cap R_1$) и содержит максимальный идеал M_1, т. е. совпадает с ним.

В силу III идеал $M \cap R_1$ максимален в R_1 и в силу II его замыкание $\overline{M \cap R_1}$ есть максимальный идеал в R, содержащийся в M, т. е. совпадающий с M.

V. *Если R, R_1 ($R \supset R_1$) — винеровская пара коммутативных колец с общей единицей e и R_1 плотно в R, то пространства максимальных идеалов $\mathfrak{M}(R)$ и $\mathfrak{M}(R_1)$ гомеоморфны.*

Доказательство. Рассмотрим отображение F: $\mathfrak{M}(R_1 \to \mathfrak{M}(R)$ такое, что $F(M_1) = \overline{M}_1 = M$. Это отображение взаимно однозначно, так как если $F(M_1) = F(M_1')$, то

$$M_1' = \overline{M}_1' \cap R_1 = F(M_1') \cap R_1 = F(M_1) \cap R_1 = \overline{M}_1 \cap R_1 = M_1.$$

Покажем, что отображение F непрерывно; тогда в силу V п. 7 § 2 F — гомеоморфизм, так что $\mathfrak{M}(R_1)$ и $\mathfrak{M}(R)$ гомеоморфны.

Так как R_1 плотно в R, то $R_1 - \{e\}$ можно считать системой образующих кольца R. В силу теоремы 5 п. 4 § 11 окрестности вида $U(M;\, y_1,\, \ldots,\, y_n;\, \varepsilon)$, где $y_k \in R_1$ образуют базу в $\mathfrak{M}(R)$. Рассмотрим одну из них, и пусть V — окрестность точки M_1 в R_1, определяемая тем же набором элементов $y_1, \ldots, y_n$ и тем же ε: $V = V(M_1;\, y_1,\, \ldots,\, y_n;\, \varepsilon)$. Каждому $M_1' \in V$ однозначно отвечает $M' = \overline{M}_1'$, и так как $M' \supset M_1'$, то $y_k(M_1') = y_k(M')$, потому что $y_k - y_k(M_1')\, e \in M_1' \subset M'$. Следовательно, $M' \subset V$, т. е.

$$F(V) \subset U.$$

8. Функции нескольких элементов кольца; локально аналитические функции. Теорема 7 п. 6 допускает обобщения на функции нескольких элементов кольца и на некоторые многозначные аналитические функции.

Пусть R — коммутативное банахово кольцо с единицей, $\mathfrak{M}$ — пространство его максимальных идеалов. *Совместным спектром* элементов $x_1, \ldots, x_p \in R$ называется множество всех точек $\{x_1(M), \ldots$ $\ldots, x_p(M)\}$ пространства C^n.

Имеет место

Теорема 8. *Для всякой* (*однозначной*) *функции* $f(\zeta) = f(\zeta_1, \ldots$ $\ldots, \zeta_p)$, *аналитической на совместном спектре элементов* $x_1, \ldots,$ $x_p \in R$, *существует такой элемент* $x \in R$, *что* $x(M) = f(x_1(M), \ldots$ $\ldots, x_p(M))$ *для всех* $M \in \mathfrak{M}$.

Эта теорема дает возможность построить операционное исчисление над элементами кольца R (подробнее см., например, Гельфанд, Райков и Шилов [1], § 13).

Пусть теперь $f(M)$ — однозначная непрерывная функция на $\mathfrak{M}$ и $z \in R$. Функция $f(M)$ называется *локально аналитической функцией* от z, если для каждой точки $M_0 \in \mathfrak{M}$ существует ее окрестность $V(M_0)$, в которой

$$f(M) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(M_0)[z(M) - z(M_0)]^k. \tag{1}$$

При этом функция $f(M)$ может быть и неоднозначной функцией от z, так как могут существовать разные точки M_1 и M_2, в которых $z(M_1) = z(M_2)$, но $f(M_1) \neq f(M_2)$, поскольку коэффициенты $a_k(M_1)$

и $a_k(M_2)$ в разложении (1) могут быть различными. Локально аналитическая функция $f(M)$ называется *нормально многозначной функцией* от z, если каждое множество $\{M\colon z(M) = C\}$ есть объединение конечного числа непересекающихся замкнутых множеств, на каждом из которых коэффициенты $a_k(M_0)$ в (1) не зависят от M_0. Например, функция $f(M) = \ln z = \ln z(M)$, если она однозначна и непрерывна на $\mathfrak{M}$, является нормально многозначной функцией от z. Действительно,

$$\{M\colon z(M) = C\} = \bigcup_k \{M\colon\ \ln z(M) = \ln|C| + i\arg C + 2\pi ik\},$$

$$0 \leqslant \arg C < 2\pi,$$

где в силу непрерывности функции $f(M)$ объединение происходит только по конечному числу [1] значений k и для данного k коэффициенты $a_k(M_0)$ разложения вида (1) функции $\ln|z(M)| + i\arg z(M) + 2\pi ik$ зависят только от $z(M_0)$; следовательно, при фиксированных $z(M_0)$ и k эти коэффициенты не зависят от M_0.

Очевидно, этим же свойством обладает любая *нормально многозначная* функция $f(z)$ комплексного переменного z. Так называется (многозначная) функция, все значения $f(z_0)$ которой над каждой точкой z_0, не являющейся точкой ветвления, различны и изолированы. Например $f(z) = \sqrt[m]{z}$ нормально многозначна, а $f(z) = (1+z)\sqrt{z}$ не является нормально многозначной, так как при $z = -1$ ее значения на обоих листах римановой поверхности совпадают.

Теорема 9. *Если $f(M)$ — локально аналитическая и нормально многозначная функция от $z \in R$, то существует такой элемент $x \in R$, что $x(M) = f(M)$ для всех $M \in \mathfrak{M}$.*

В работах Крейна [11] и Гохберга [3] теорема 9 применена к исследованию аналитических функций элементов построенных в этих работах новых классов банаховых колец. Отметим также применения теоремы 9 в теории сингулярных интегральных уравнений (см., например, Гохберг [2]).

Понятие аналитической функции было перенесено Лорчем [2] на функции $f(x)$ с областью определения и значений в кольце R. Такие функции были изучены в работах Лорча [2] и Блюма [1].

Случай кольца, порожденного всеми ограниченными рациональными функциями от ограниченного линейного оператора в банаховом пространстве, рассматривался в работе Томита [4].

Понятие аналитической функции нескольких элементов кольца Валбрук [1] в дальнейшем перенес на полные топологические кольца с непрерывным обратным.

[1] В противном случае $f(M) = \ln|C| + i\arg C + 2\pi ik \to \infty$ при $k \to \infty$, что невозможно в силу непрерывности функции $f(M)$ и бикомпактности пространства $\mathfrak{M}$.

Это понятие Валбрук следующим образом использует для изучения структуры топологических колец с непрерывным обратным. *Спектром* $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *системы элементов* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ он называет совокупность всех таких систем комплексных чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, что $P(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ находится в спектре элемента $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для всех многочленов P от n переменных. Далее, множество $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, в R он называет *системой аналитических образующих* кольца R, если каждый элемент $x \in R$ есть аналитическая функция конечного числа элементов x_n.

Пусть теперь $\mathscr{H}(S(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}))$ — кольцо всех аналитических функций на $S(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n})$, с топологией, определенной аналогично тому, как это сделано в примере 1 п. 3 § 8, и пусть H — индуктивный предел колец $\mathscr{H}(S(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}))$ [1]. Если при этом в H не выполнена аксиома отделимости, то H заменяется факторкольцом, пополнение которого, если оно не полно, Валбрук называет *кольцом аналитических функций* на пространстве $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов кольца R, топологизированном так же, как и в случае нормированного кольца. Это пространство Валбрук называет *спектром* кольца R.

Один из основных результатов Валбрука состоит в следующем.

Всякое полное коммутативное кольцо R с непрерывным обратным изоморфно факторкольцу кольца аналитических функций на спектре $\mathfrak{M}$ кольца R по замкнутому идеалу этих функций, *равных нулю на* $\mathfrak{M}$.

9. Разложение кольца в прямую сумму идеалов. Пусть R — банахово коммутативное кольцо с единицей, $\mathfrak{M}$ — пространство его максимальных идеалов. Кольцо R называется *прямой суммой своих идеалов* I_1, I_2 и обозначается $I_1 + I_2$, если 1) $I_1 \cap I_2 = (0)$; 2) каждый элемент $x \in R$ можно представить в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in I_1$, $x_2 \in I_2$; из условия 1) следует, что такое представление единственно.

Пусть $R = I_1 + I_2$ — прямая сумма своих идеалов I_1, I_2. Применяя условие 2) к единице e кольца R, получаем: $e = e_1 + e_2$, $e_1 \in I_1$, $e_2 \in I_2$; при этом $e_1 e_2 \in I_1 \cap I_2 = (0)$, так что $e_1 e_2 = (0)$, и потому $e_1 + e_2 = e = e^2 = e_1^2 + e_2^2$, $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$. Кроме того, $eI_2 \subset I_1 \cap I_2 = (0)$, т. е. $e_1 I_2 = (0)$, и аналогично $e_2 I_1 = (0)$.

Отсюда легко заключаем, что

$$I_1 = \{x \in R\colon e_1 x = x\}, \quad I_2 = \{x \in R\colon e_2 x = x\}, \tag{1}$$

следовательно, I_1, I_2 — замкнутые идеалы и e_1, e_2 являются единицами в кольцах I_1, I_2 соответственно.

---

[1] Пусть $\{F_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, — направленное множество локально выпуклых пространств, а E — векторное пространство, первоначально без топологии, и пусть для каждого α дано линейное отображение g_α пространства F_α в E, причем $g_\alpha(F_\alpha) \subset g_\beta(F_\beta)$ при $\alpha < \beta$ и $\cup g_\alpha(F_\alpha) = E$. Пространство E с наиболее сильной локально выпуклой топологией, при которой все функции g_α непрерывны, называется *индуктивным пределом* пространств F_α.

Обратно, если в R существуют отличные от нуля элементы e_1, e_2, удовлетворяющие условиям $e = e_1 + e_2$, $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$, $e_1 e_2 = 0$, то, как легко видеть, равенства (1) определяют замкнутые идеалы I_1, I_2 в R и $R = I_1 + I_2$; последнее непосредственно вытекает из равенства $x = xe = xe_1 + xe_2$.

Так как $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$, то функции $e_1(M)$, $e_2(M)$ принимают лишь значения 0 и 1, причем

$$e_1(M) + e_2(M) = 1, \quad e_1(M)\, e_2(M) = 0.$$

Следовательно, положив

$$F_1 = \{M\colon e_1(M) = 1\}, \quad F_2 = \{M\colon e_2(M) = 1\},$$

мы получим, что $\mathfrak{M}$ есть объединение двух непустых замкнутых непересекающихся множеств F_1, F_2 и потому несвязно [1]).

Поставив в соответствие каждому $x \in I_1$ число $x(M)$, $M \in F_1$, мы получим гомоморфизм кольца I_1 на поле комплексных чисел, следовательно, идеал M_1 кольца I_1. Легко видеть, что соответствие $M \leftrightarrow M_1$ есть гомеоморфизм F_1 на пространство $\mathfrak{M}(I_1)$ максимальных идеалов кольца I_1; аналогично, F_2 гомеоморфно пространству $\mathfrak{M}(I_2)$. Таким образом, *если $R = I_1 + I_2$, то $\mathfrak{M}$ есть объединение двух замкнутых множеств, являющихся пространствами максимальных идеалов колец I_1, I_2.*

Г. Е. Шилов [18], пользуясь теорией аналитических функций от нескольких элементов кольца (см. п. 8), доказал, что верно также обратное утверждение:

Если пространство $\mathfrak{M}$ несвязно, то R разлагается в прямую сумму своих идеалов, однозначно определяемых замкнутыми множествами F_1, F_2, для которых $\mathfrak{M} = F_1 \cup F_2$, $F_1 \cap F_2 = \varnothing$.

Желязко [1] перенес этот результат на кольца R, в которых $|\alpha x| = |\alpha|^p |x|$ (вместо $|\alpha x| = |\alpha||x|$) для произвольного комплексного α и произвольного $x \in R$, где $0 < p \leqslant 1$, p фиксировано.

10. Кольца с радикалом. Структура неполупростых банаховых коммутативных колец R изучается сравнительно недавно, причем основным направлением исследований является изучение условий, при которых известная теорема Веддерберна [2]) (о разложении конечномерной комплексной алгебры как линейного пространства в прямую сумму радикала и подалгебры) переносится на банаховы кольца. Обычно

[1]) Топологическое пространство называется *несвязным*, если оно есть объединение двух непустых замкнутых непересекающихся множеств, и *связным* в противном случае. Множества F_1, F_2, определенные в тексте, не пусты, так как, например, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|e_1^n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|e_1|} = 1$, следовательно, e_1, e_2 не принадлежат радикалу кольца.

[2]) См., например, Джекобсон [1].

задача ставится так, что подкольцо $\widehat{R}$ и радикал I заданы заранее и $\widehat{R}$ так расширяется до кольца R[1]), что I — радикал кольца R и R/I изоморфно $\widehat{R}$. По-видимому, впервые эти вопросы появились в статье Ч. Фелдмана [1], который показал на примерах, что существуют разложимые, но не сильно разложимые[2]) кольца. Среди других работ в этом направлении (см., например, Д. Зелински [1], Ж. Глезер [1]) отметим работы Баде и Кёртиса [1] и Хелемского [1–4]. В статье Баде и Кёртиса [1] среди прочих результатов доказано, что *если радикал I кольца R конечномерен и функции $x(M)$, отвечающие элементам факторкольца R/I, образуют все кольцо $C(\mathfrak{M})$* ($\mathfrak{M}$ — пространство максимальных идеалов R и $R(I)$), *то R как линейное пространство разлагается в прямую сумму радикала I и подкольца $\widehat{R}$*. Тот же результат получил независимо и другим путем Хелемский [1], которому удалось обобщить этот результат на симметричные некоммутативные кольца R, для которых R/I вполне симметрично (см. § 14, 23). В работах Хелемского [1–4] исследованы условия разложимости и сильной разложимости кольца на подкольцо и радикал и структура некоторых колец, для которых такая разложимость имеет место.

Приведем некоторые из этих результатов.

I. *Пусть R разлагается в прямую сумму его радикала I и подкольца $\widehat{R}$. Тогда существует конечное число примарных идеалов*[3]) $\widehat{J_l}$, $l = 1, \ldots, k$, *кольца $\widehat{R}$, имеющих конечную коразмерность и содержащихся в различных максимальных идеалах. При этом I распадается в прямую сумму подколец I_s $(s = 1, \ldots, k)$ таких, что $I_s I_{s'} = (0)$ при $s \neq s'$.*

Описано, как действуют операторы левого умножения на $x \in R$ в факторпространствах $\widehat{R}/\widehat{J_l}$.

II. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n^2]{\sup\limits_{y\in I,\,|y|=1} |y^n|} = 0$ *и $R/I = C(Q)$, где Q — вполне несвязное бикомпактное пространство, или $R/I = I_1$; тогда R сильно разложимо.*

Указаны также необходимые и достаточные условия в терминах $\widehat{R}$ сильной разложимости любого кольца R, для которого I конечномерен, а $\widehat{R} = R/I$ задано. В статье Камовица [1] установлены связи этого вопроса с группами когомологий кольца.

---

[1]) Предполагается, что R содержит единицу.

[2]) Кольцо R называется *сильно разложимым*, если существует разложение $R = I + \widehat{R}$, где подкольцо $\widehat{R}$ замкнуто.

[3]) Идеал называется *примарным*, если он содержится только в одном максимальном идеале. Подробно о примарных идеалах см. в п. 7 § 15.

§ 12. Гомоморфизм и изоморфизм коммутативных колец

1. Единственность нормы в полупростом кольце. Один из важных результатов теории коммутативных колец состоит в том, что норма в полупростом кольце определяется запасом его элементов единственным образом с точностью до эквивалентности.

Прежде всего докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть R_1 — коммутативное кольцо, R — его подкольцо и пусть в R_1 и R заданы нормы $|x|_1$ и $|x|$, в которых R_1 и R являются банаховыми кольцами. Если $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}$ — пространства максимальных регулярных идеалов колец R_1 и R, то для любого элемента $x \in R$*

$$\max_{M_1 \in \mathfrak{M}_1} |x(M_1)| \leqslant \max_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)|. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть S_x и S_x^1 — спектры [1] элемента $x \in R$ в кольцах R и R_1 соответственно. Очевидно,

$$S_x \supset X_x^1. \tag{2}$$

С другой стороны, S_x есть множество всех значений функции $x(M)$, $M \in \mathfrak{M}$, а S_x^1 — множество всех значений функции $x(M_1)$, $M_1 \in \mathfrak{M}_1$. Отсюда и из (2) непосредственно следует неравенство (1).

Теорема 1. *Пусть в банаховом коммутативном кольце R с нормой $|x|$ задана вторая норма $|x|_1$ и пусть пополнение R_1 кольца R по норме $|x|_1$ есть полупростое кольцо, тогда $|x|_1 \leqslant C|x|$ для всех $x \in R$, где C — некоторая постоянная.*

Доказательство. Определим в R новую норму $|x|_2$, положив

$$|x|_2 = \max\{|x|, |x|_1\}. \tag{3}$$

Легко проверить, что $|x|_2$ удовлетворяет всем аксиомам нормы в кольце, так что R есть также нормированное кольцо по отношению к норме $|x|_2$.

Докажем, что R полно по норме $|x_2$.

Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность из R по норме $|x|_2$. В силу (3) она также фундаментальна по каждой из норм $|x|$, $|x|_1$. Пусть x_0 и x_0' — пределы этой последовательности по отношению к нормам $|x|$ и $|x|_1$ соответственно.

[1] Если R — кольцо без единицы, то спектром элемента $x \in R$ называется его спектр в кольце, полученном из R присоединением единицы.

Докажем, что $x'_0 = x_0$; тем самым полнота кольца R по норме $|x|_2$ будет доказана. Применяя предыдущую лемму, имеем при $n \to \infty$

$$\max_{M_1 \in \mathfrak{M}_1} |x_0(M_1) - x_n(M_1)| \leqslant \max_{M \in \mathfrak{M}} |x_0(M) - x_n(M)| \leqslant |x_0 - x_n| \to 0,$$
$$\max_{M_1 \in \mathfrak{M}_1} |x'_0(M_1) - x_n(M_1)| \leqslant |x'_0 - x_n|_1 \to 0$$

(см. I, 7 п. 2 § 11) и потому

$$x'_0(M_1) - x(M_1) = 0 \quad \text{для всех} \quad M_1 \in \mathfrak{M}_1.$$

Это означает, что $x'_0 - x_0$ принадлежит радикалу кольца R_1; в силу полупростоты кольца R_1 отсюда заключаем, что $x'_0 - x_0 = 0$.

Итак, R_1 полно как относительно нормы $|x|$, так и относительно нормы $|x|_2 \geqslant |x|$. На основании следствия из теоремы Банаха (см. VII п. 4 § 4) существует постоянная C такая, что $|x|_2 \leqslant C|x|$ для всех $x \in R$. Но тогда в силу (3) также $|x|_1 \leqslant C|x|$ для всех $x \in R$, и теорема доказана [1]).

Следствие 1. *Всякий изоморфизм банахова коммутативного кольца R на плотное подмножество R'_1 полупростого банахова коммутативного кольца R непрерывен.*

Доказательство. Перенося на R'_1 норму из R, получим в R'_1 две нормы, к которым применима теорема 1. Следовательно, если x' и x — элементы колец R'_1 и R, отвечающие друг другу при данном изоморфизме, то $|x'| \leqslant C|x|$, где C — некоторая постоянная.

Следствие 2. *Если полупростые банаховы коммутативные кольца изоморфны, то они также топологически изоморфны.*

Следствие 2 означает, что норма в полупростом банаховом коммутативном кольце однозначно, с точностью до эквивалентности, определяется запасом элементов в этом кольце и его алгебраическими свойствами.

Следствие 3. *Всякий автоморфизм (т. е. изоморфизм на самого себя) полупростого банахова коммутативного кольца непрерывен.*

Следствие 2 было обобщено Риккартом [3] на некоторые некоммутативные кольца. В частности, он показал, что *во всяком простом банаховом кольце с единицей норма определяется с точностью до эквивалентности единственным образом.*

По поводу других обобщений результатов этого параграфа см. Юд [5] и IX п. 2 § 18.

[1]) Изложенная теорема является обобщением теоремы И. М. Гельфанда [4]; это обобщение принадлежит Г. Е. Шилову [5] и Риккарту [3].

2. Случай симметричных колец.

Теорема 2. *Всякая инволюция в полупростом банаховом коммутативном кольце непрерывна.*

Доказательство. Обозначим через $R^{\frown}$ кольцо, состоящее из тех же элементов, что и данное кольцо R, с тем же определением сложения, умножения элементов и нормы, но в котором операция умножения на число (мы ее обозначаем точкой) определена формулой $\lambda \cdot x = \overline{\lambda} x$. Очевидно, $R^{\frown}$ — полупростое банахово коммутативное кольцо и соответствие $x \to x^*$ есть изоморфизм колец R и $R^{\frown}$; поэтому достаточно применить следствие 2 п. 1.

§ 13. Кольцевая граница

1. Определение и основные свойства кольцевой границы. Пусть R — банахово коммутативное кольцо с единицей, а $\mathfrak{M}$ — пространство максимальных идеалов кольца R. Замкнутое множество $F \subset \mathfrak{M}$ называется *определяющим*, если модуль каждой функции $x(M)$, $x \in R$, достигает своего максимума в некоторой точке множества F. Очевидно, по крайней мере одно определяющее множество существует: всё $\mathfrak{M}$. Определяющее множество называется *минимальным*, если никакое его собственное замкнутое подмножество не является определяющим. Минимальное определяющее множество называется *кольцевой границей* пространства $\mathfrak{M}$.

Теорема 1. *В пространстве максимальных идеалов банахова коммутативного кольца с единицей существует кольцевая граница и притом только одна.*

Доказательство. Докажем сначала существование кольцевой границы.

Совокупность $\{F\}$ всех определяющих множеств, естественным образом упорядоченная при помощи отношения включения $\supset$, есть частично упорядоченное множество, удовлетворяющее условию леммы Цорна. Именно, нижней гранью линейно упорядоченной по включению совокупности $\{F_\alpha\}$ определяющих множеств будет просто пересечение всех множеств этой совокупности (непустое ввиду бикомпактности $\mathfrak{M}$), также являющееся определяющим множеством. Действительно, если $x(M)$ — фиксированная функция ($x \in R$), а F_x — множество всех точек $M \in \mathfrak{M}$, в которых ее модуль достигает максимума, то бикомпактные множества $F_x \cap F_\alpha$ имеют непустое пересечение, следовательно, и пересечение F_x с $\bigcap\limits_\alpha F_\alpha$ непусто.

Поэтому в $\{F\}$ существует минимальный элемент, который и будет кольцевой границей.

Докажем теперь единственность кольцевой границы. Пусть Γ_1 и Γ_2 — две кольцевые границы. Докажем, что каждая окрестность любой точки $M_1 \in \Gamma_1$ содержит точки из Γ_2. В силу замкнутости множества Γ_2 отсюда будет следовать, что $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, а значит $\Gamma_1 = \Gamma_2$, ибо так же $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$.

Итак, пусть $U = U(M_1; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$ — произвольная окрестность из базы окрестностей точки $M_1 \subset \Gamma_1$, заданная неравенствами

$$|x_k(M) - x_k(M_1)| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Заменив элементы x_k элементами $x_k - x_k(M_1)\,e$, мы можем считать, что $x_k \in M_1$ и что окрестность U задается неравенствами

$$|x_k(M)| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

В кольце R существует функция $y = y(M)$, принимающая максимум своего модуля

$$m = \max_{M \in \mathfrak{M}} |y(M)|$$

в $\Gamma \cap U$ и остающаяся по модулю меньше m на $\Gamma_1 - \Gamma_1 \cap U$; действительно, в противном случае множество $\Gamma_1 - \Gamma_1 \cap U$ было бы определяющим вопреки минимальности Γ_1. Заменив y на $\dfrac{1}{m}\,y$, мы можем, не нарушая общности, считать $m = 1$. Далее, заменив, если надо, y некоторой его степенью y^n, мы можем считать, что

$$|y(M)| < \frac{\varepsilon}{\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n} |x_k|} \quad \text{при} \quad m \in \Gamma_1 - U \cap \Gamma_1.$$

В силу (1) тогда всюду на Γ_1, а потому и на всем $\mathfrak{M}$ функции $(x_k y)(M) = x_k(M)\,y(M)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, по модулю меньше ε:

$$|x_k(M)\,y(M)| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad M \in \mathfrak{M} \quad \text{и} \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Так как Γ_2 — кольцевая граница, то существует точка $M_2 \in \Gamma_2$, на которой $|y(M)|$ достигает своего максимума $m = 1$:

$$|y(M_2)| = 1.$$

Полагая в (2) $M = M_2$, мы получим

$$|x_k(M_2)| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, n;$$

следовательно, $M_2 \subset U$. В силу сказанного выше отсюда заключаем, что $\Gamma_1 = \Gamma_2$, и теорема полностью доказана.

Теорема 2. *Максимальный идеал M_0 банахова коммутативного кольца с единицей R тогда и только тогда принадлежит кольцевой границе Γ, когда для любой окрестности $U(M_0)$ точки M_0 существует функция $y(M)$, $y \in R$, модуль которой достигает своего максимального значения в $U(M_0)$ и меньше этого максимального значения всюду вне $U(M_0)$.*

Доказательство. Если такой функции $y(M)$ не существует, то модуль каждой функции $y(M)$, $y \in R$, достигает своего наибольшего значения в $\mathfrak{M} - U(M_0)$ и потому $\Gamma \subset \mathfrak{M} - U(M_0)$, $M_0 \notin \Gamma$; следовательно, условие теоремы необходимо. Обратно, если это условие выполнено, то в любой окрестности точки M_0 имеются точки границы, и потому M_0 принадлежит границе.

Пример. Пусть A — кольцо всех функций $x = x(\zeta)$, регулярных в круге $|\zeta| < 1$ и непрерывных в круге $|\zeta| \leqslant 1$ (пример б) п. 3 § 11). Пространство $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов кольца A есть круг $|\zeta| \leqslant 1$. В силу принципа максимума модуля кольцевая граница есть окружность $|\zeta| = 1$.

Замечание. В общем случае кольцевая граница кольца с конечным числом n образующих может не совпадать с топологической границей множества в C^n, гомеоморфного пространству максимальных идеалов (см. теорему 6 п. 5 § 11). Примером является кольцо, получаемое из многочленов $P(z_1, z_2)$ от двух комплексных переменных путем замыкания по норме $|P| = \max\limits_{|z_1| \leqslant 1,\, |z_2| \leqslant 1} |P(z_1, z_2)|$. Подробнее см. Гельфанд, Райков и Шилов [1], с. 78–79.

2. Расширение максимальных идеалов. Пусть R_1 — коммутативное банахово кольцо с единицей, а R — произвольное коммутативное банахово кольцо, содержащее R_1 в качестве подкольца с той же нормой. Обозначим через $\mathfrak{M}$ пространство максимальных идеалов кольца R, а через $\mathfrak{M}_1$ — пространство максимальных идеалов кольца R_1. Для элемента x кольца R_1 можно одновременно рассматривать как функцию $x(M)$ на $\mathfrak{M}$, так и функцию $x(M_1)$ на $\mathfrak{M}_1$. При этом имеет место следующая

Лемма. *Для любого элемента $x \in R_1$*

$$\max_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)| = \max_{M_1 \in \mathfrak{M}_1} |x(M_1)|. \tag{1}$$

Утверждение леммы непосредственно следует из формулы

$$\max_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)| = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|x^n|}$$

(см. IV п. 2 § 11), ибо степени x^n содержатся одновременно в R_1 и R и их нормы в R_1 и R совпадают.

Мы можем теперь доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Всякий максимальный идеал кольцевой границы Γ_1 кольца R_1 расширяется до максимального идеала любого кольца R с единицей, содержащего R_1 в качестве замкнутого подкольца.*

Доказательство. Пусть $M_0 \in \Gamma_1$ и пусть M_0 не содержится ни в каком максимальном (и потому вообще ни в каком) идеале кольца $R \supset R_1$. Тогда совокупность всех сумм вида $\sum\limits_{k=1}^{n} x_k z_k$, $x_k \in M_0$, $z_k \in R$, должна совпадать со всем кольцом R; в противном случае эта совокупность была бы идеалом I в R, содержащим M_0. В частности, одна из сумм такого вида должна быть равной единице e кольца R:

$$e = \sum_{k=1}^{n} x_k z_k. \tag{2}$$

Заменив, если надо, x_k, z_k на $\alpha_k x_k$, $\dfrac{1}{\alpha_k} z_k$, можно считать, что

$$\max_{M \in \mathfrak{M}} |x_k(M)| \leqslant 1. \tag{3}$$

Обозначим через μ наибольшее из чисел

$$\mu_k = \max_{M \in \mathfrak{M}} |z_k(M)|, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

и рассмотрим окрестность $U(M_0)$ точки M_0 в $\mathfrak{M}_1$, определяемую неравенствами

$$|x_k(M_1)| < \frac{1}{2n\mu}, \quad k = 1, 2, \ldots, n \quad (M_1 \in \mathfrak{M}_1). \tag{5}$$

Согласно теореме 2 п. 1 существует функция $y(M_1)$ $(y \in R_1)$, модуль которой достигает в $U(M_0)$ своего наибольшего значения 1 и остается меньше единицы вне $U(M_0)$. Заменив, если надо, элемент y его степенью, мы можем считать, что

$$|y(M_1)| < \frac{1}{2n\mu} \quad \text{в} \quad \mathfrak{M}_1 - U(M_0). \tag{6}$$

Применяя тогда предыдущую лемму и учитывая (2)–(6), имеем

$$\begin{aligned}\max_{M \in \mathfrak{M}} |y(M)| = \max_{M \in \mathfrak{M}} \left| \sum_{k=1}^{n} x_k(M)\, y(M)\, z_k(M) \right| \leqslant \\ \leqslant \mu \sum_{k=1}^{n} \max_{M \in \mathfrak{M}} |x_k(M)\, y(M)| = \\ = \mu \sum_{k=1}^{n} \max_{M_1 \in \mathfrak{M}_1} |x_k(M_1)\, y(M_1)| < \mu \cdot n \frac{1}{2n\mu} = \frac{1}{2};\end{aligned}$$

с другой стороны, в силу той же леммы,

$$\max_{M \in \mathfrak{M}} |y(M)| = \max_{M_1 \in \mathfrak{M}_1} |y(M_1)| = 1.$$

Из полученного противоречия вытекает справедливость теоремы.

Т е о р е м а 3$'$. *Пусть R, R_1 $(R \supset R_1)$ — коммутативные банаховы кольца с общей единицей e и нормами $|x|$, $|x|_1$. Для того чтобы всякий максимальный идеал кольцевой границы Γ_1 кольца R_1 расширялся до максимального идеала кольца R, необходимо и достаточно, чтобы*

$$r(x) = r_1(x)$$

для каждого $x \in R_1$.

Доказательство теоремы 3 означает в точности установление достаточности условия теоремы 3$'$. Докажем необходимость. Допустим противное: пусть существует элемент $x \in R_1$ такой, что $r_1(x) \neq r(x)$. В силу леммы п. 1 § 12 $r_1(x) > r(x)$. Рассмотрим максимальный идеал

$M_1 \in \Gamma_1$ такой, что абсолютная величина функции $x(M_1)$, рассматриваемой на $\mathfrak{M}(R_1)$, принимает в точке M_1 наибольшее значение $|x(M_1)| = r_1(x)$. Пусть $M \in \mathfrak{M}(R)$ — максимальный идеал кольца R, являющийся расширением M_1. Элемент $x - x(M_1)\, e \in M_1 \subset M$, и поэтому $x(M) - x(M_1)e(M) = 0$, т. е. $x(M) = x(M_1)$, что невозможно, так как $|x(M)| < r(x) < r_1(x) = |x(M_1)|$.

Следствие 1. *Для того чтобы всякий максимальный идеал кольца R_1 расширялся до максимального идеала кольца R, необходимо, а если пространство максимальных идеалов $\mathfrak{M}(R_1)$ совпадает с кольцевой границей Γ_1 кольца R_1, то и достаточно, чтобы кольца R, R_1 образовывали винеровскую пару.*

Доказательство. *Необходимость.* Рассмотрим произвольный максимальный идеал $M_1 \in R_1$ и его расширение M. Пусть $\overline{M}_1$ — замыкание M_1 в R. Так как $\overline{M}_1 \subset M$, то в силу I п. 7 § 11 кольца R и R_1 образуют винеровскую пару.

Достаточность. Если кольца R и R_1 образуют винеровскую пару, то в силу следствия из I п. 7 § 11 $r(x) = r_1(x)$ для всякого $x \in R_1$. По теореме $3'$ этого достаточно для расширяемости максимальных идеалов из Γ_1. Но по условию $\Gamma_1 = \mathfrak{M}(R_1)$.

Следствие 2. *Если замкнутое подкольцо R_1 содержит единицу e кольца R и $\Gamma_1 = \mathfrak{M}(R_1)$, то кольца R и R_1 образуют винеровскую пару.*

Следствие 3. *Если $R \supset R_1$, R_1 полно по своей норме, содержит единицу e кольца R и $\Gamma_1 = \mathfrak{M}(R_1)$, то равенство $S_x = S_x^1$ для всех $x \in R_1$ равносильно равенству $r(x) = r_1(x)$ для всех $x \in R_1$.*

Теорема 4. *Пусть R, R_1 ($R \supset R_1$) — коммутативные банаховы кольца с общей единицей и только максимальные идеалы кольцевой границы Γ_1 кольца R_1 расширяются до максимальных идеалов кольца R. Для того чтобы кольца R и R_1 образовывали винеровскую пару, необходимо и достаточно, чтобы каждый необратимый в R_1 элемент принадлежал некоторому максимальному идеалу кольцевой границы Γ_1.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $x \in R_1$ и x необратим в R_1. Тогда x необратим в R и потому принадлежит некоторому максимальному идеалу $M \subset R$, т. е. $x \in M \cap R_1$. В силу III п. 7 § 11 идеал $M \cap R_1$ максимален в R_1, и так как его можно расширить до M, то $M \cap R_1$ принадлежит кольцевой границе Γ_1.

Достаточность. Допустим противное: пусть в R_1 существует элемент x, необратимый в R_1, но обратимый в R. Так как $x \in M_1$, где $M_1 \in \Gamma_1$ и потому расширяется до максимального идеала $M \subset R$, то $x \in M$ в противоречие с предположенной обратимостью элемента x в R.

§ 14. Вполне симметричные коммутативные кольца

1. Определение вполне симметричного кольца. Если R — коммутативное симметричное банахово кольцо с единицей, а M — максимальный идеал в R, то для любого элемента $x \in R$

$$x = x(M)\,e + m, \quad m \in M.$$

Отсюда

$$x^* = \overline{x(M)}\,e + m^*. \tag{1}$$

Очевидно, M^* (т. е. совокупность всех m^*, где $m \in M$) есть также максимальный идеал в R; поэтому (1) означает, что

$$x^*(M^*) = \overline{x(M)}. \tag{2}$$

Коммутативное симметричное банахово кольцо R с единицей называется *вполне симметричным* [1]), если $x^*(M) = \overline{x(M)}$ для всех $x \in M$ и всех $M \in \mathfrak{M}$.

Коммутативное симметричное банахово кольцо R, содержащее единицу, вполне симметрично тогда и только тогда, когда все его максимальные идеалы симметричны.

Действительно, если все максимальные идеалы M симметричны ($M^* = M$), то из (2) заключаем, что $x^*(M) = \overline{x(M)}$; следовательно, R вполне симметрично. Обратно, если R вполне симметрично, то из $x(M) = 0$ следует $x^*(M) = 0$, т. е. из $x \in M$ следует $x^* \in M$. Это означает, что всякий максимальный идеал M симметричен.

Примеры. 1. Кольцо $C(T)$ всех непрерывных функций на бикомпактном пространстве T, очевидно, вполне симметрично.

2. Кольцо W всех абсолютно сходящихся тригонометрических рядов $x = x(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ также вполне симметрично.

3. Кольцо A всех функций $x(\zeta)$, регулярных в круге $|\zeta| < 1$ и непрерывных в круге $|\zeta| \leqslant 1$, не является вполне симметричным. Действительно, функции $x(\zeta)$ и $\overline{x(\zeta)}$ могут быть одновременно регулярными в круге $|\zeta| \leqslant 1$ лишь при $x(\zeta) = \text{const}$.

Отметим, что в кольце A можно ввести инволюцию, положив $x^*(\zeta) = \overline{x(\zeta)}$; очевидно, все аксиомы инволюции (см. п. 1 § 10) будут выполнены. Таким образом, A является примером симметричного, но не вполне симметричного кольца.

[1]) В литературе вполне симметричные кольца называются часто симметричными, а симметричные кольца — кольцами с инволюцией.

2. Критерий вполне симметричности.

Теорема 1. *Пусть R — коммутативное банахово кольцо с единицей и пусть в R определена инволюция $x \to x^*$. Эта инволюция удовлетворяет условию*

$$x^*(M) = \overline{x(M)} \quad \textit{для всех} \quad M \in \mathfrak{M}$$

тогда и только тогда, когда всякий элемент $e + x^*x$ имеет обратный в R.

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Действительно, если R вполне симметрично, то

$$(e + x^*x)(M) = 1 + \overline{x(M)}\, x(M) \geqslant 1,$$

так что элемент $e + x^*x$ не обращается в нуль ни на каком максимальном идеале и потому имеет обратный.

Докажем теперь достаточность условия. Пусть всякий элемент $e + x^*x$ имеет обратный. Докажем сначала, что для всякого эрмитова элемента $x \in R$ будет $\overline{x(M)} = x(M)$. Для этого достаточно доказать, что спектр эрмитова элемента x вещественный, т. е. что $(x - (\lambda + i\mu)\, e)^{-1}$, где λ, μ — вещественные числа, существует при $\mu \neq 0$. Положим $y = \dfrac{1}{\mu}\,(x - \lambda e)$; тогда $y^* = \dfrac{1}{\mu}\,(x - \lambda e)$ и

$$(x - (\lambda + i\mu)\, e)(x - (\lambda - i\mu)\, e) = (x - \lambda e)^2 + \mu^2 e = \mu^2(e + y^*y).$$

По условию, правая, а потому и левая части имеют обратные; следовательно, существует

$$(x - (\lambda + i\mu)\, e)^{-1} = (x - (\lambda - i\mu)\, e)[(x - \lambda e)^2 + \mu^2 e]^{-1}.$$

Итак, для эрмитова элемента x доказано, что $x(M)$ вещественно. Но произвольный элемент x можно представить в виде $x = x_1 + ix_2$, где x_1, x_2 эрмитовы. Поэтому

$$x^*(M) = (x_1 - ix_2)(M) = x_1(M) - ix_2(M) = \overline{x_1(M) + ix_2(M)} = \overline{x(M)},$$

чем и завершается доказательство теоремы.

Мы можем теперь дать следующее общее определение вполне симметричного кольца: симметричное банахово кольцо R с единицей называется *вполне симметричным*, если в нем всякий элемент вида $e + x^*x$ имеет обратный.

Теорема 1 означает, что в случае коммутативного кольца это второе определение эквивалентно первоначальному.

3. Применение теоремы Стоуна.

Теорема 2. *Если R — вполне симметричное коммутативное кольцо, а $\mathfrak{M}$ — пространство его максимальных идеалов, то всякая непрерывная на $\mathfrak{M}$ функция $f(M)$ есть предел равномерно сходящейся последовательности функций $x(M)$, $x \in R$.*

Доказательство. Обозначим через K совокупность всех вещественных функций $x(M)$, $x \in R$; тогда K — кольцо вещественных непрерывных функций на бикомпактном пространстве $\mathfrak{M}$. Если $M_1 \neq \neq M_2$, то существует функция $x(M) = x_1(M) + ix_2(M)$, $x, x_1, x_2 \in R$ (см. I п. 1 § 10 и I п. 2 § 11), такая, что $x(M_1) \neq x(M_2)$; следовательно, по крайней мере одна из вещественных функций $x_1(M)$, $x_2(M) \in K$ принимает различные значения в точках M_1 и M_2. Но тогда K удовлетворяет всем условиям теоремы Стоуна (см. п. 10 § 2), и потому всякая вещественная непрерывная на $\mathfrak{M}$ функция есть предел равномерно сходящейся последовательности вещественных функций $x(M) \in K$. Применяя этот результат к вещественным непрерывным функциям $\operatorname{Re} f(M)$ и $\operatorname{Im} f(M)$, убеждаемся в справедливости теоремы.

Следствие 1. *Если во вполне симметричном кольце R*

$$|x| = \max_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)|,$$

то R изометрически изоморфно кольцу $C(\mathfrak{M})$ [1]).

Действительно, в этом случае функции $x(M)$ образуют полное кольцо в смысле нормы $\max\limits_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)|$, ибо R полно в смысле нормы $|x|$. Поэтому всякая функция из $C(\mathfrak{M})$, будучи пределом последовательности функций $x(M)$, $x \in R$, сама должна быть функцией такого вида.

Следствие 2. *Если во вполне симметричном кольце R*

$$|x^2| = |x|^2$$

для всех $x \in R$, то R изометрически изоморфно кольцу $C(\mathfrak{M})$.

Действительно, в этом случае

$$\max_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)| = \lim_{n \to \infty} \sqrt[2^n]{|x^{2^n}|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[2^n]{|x|^{2^n}} = |x|$$

и остается применить следствие 1.

Банахово симметричное коммутативное кольцо R без единицы называется *вполне симметричным*, если кольцо R_1, полученное из R присоединением единицы e, вполне симметрично.

Следствие 3. *Если R — вполне симметричное кольцо без единицы и $\mathfrak{M}$ — пространство регулярных максимальных идеалов кольца R, то всякая непрерывная на $\mathfrak{M}$ функция $f(M)$, равная нулю на бесконечности, есть предел равномерно сходящейся на $\mathfrak{M}$ последовательности функций $x_n(M)$, $x_n \in R$.*

Доказательство. Пространство $\mathfrak{M}$ можно рассматривать как локально бикомпактное пространство, которое получается из простран-

[1]) Напомним, что $C(\mathfrak{M})$ есть кольцо всех непрерывных на $\mathfrak{M}$ функций с обычным определением действий и с нормой $\max\limits_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)|$ (см. пример 1 п. 1 § 9).

ства $\mathfrak{M}_1$ максимальных идеалов кольца R_1 отбрасыванием идеала $M_0 = R$, играющего роль бесконечно удаленной точки в $\mathfrak{M}_1$ (см. п. 4 § 11), а элементы $x \in R$ — как функции $x(M)$ на $\mathfrak{M}_1$, равные нулю в точке M_0.

Пусть $f(M)$ — произвольная непрерывная функция на $\mathfrak{M}_1$, равная нулю в точке M_0. Согласно теореме 2 существует последовательность $x_n \in R_1$ такая, что $\sup\limits_{\mathfrak{M}_1} |f(M) - x_n(M)| \to 0$ при $n \to \infty$.

Отсюда, так как $f(M_0) = 0$,

$$|x_n(M_0)| = |x_n(M_0) - f(M_0)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

поэтому, полагая $y_n = x_n - x_n(M_0)e$, мы получим последовательность $y_n \in R$ такую, что $\sup\limits_{\mathfrak{M}} |y_n(M) - f(M)| \to 0$ при $n \to \infty$.

4. Кольцевая граница вполне симметричного кольца.

Теорема 3. *Кольцевая граница вполне симметричного коммутативного кольца совпадает со всем его пространством максимальных идеалов.*

Доказательство. Пусть R — вполне симметричное коммутативное кольцо, $\mathfrak{M}$ — пространство его максимальных идеалов, M_0 — произвольный максимальный идеал кольца R, а $f(M)$ — непрерывная функция, равная нулю вне заданной окрестности $U(M_0)$ точки M_0 и единице в точке M_0. Согласно теореме 2 п. 3 существует функция $x(M)$, $x \in R$, удовлетворяющая на всем $\mathfrak{M}$ неравенству $|f(M) - x(M)| < \frac{1}{3}$. Но тогда $|x(M)|$ принимает свое наибольшее значение только в окрестности $U(M_0)$; следовательно, для точки M_0 выполнено условие теоремы 2 п. 1 § 13 и M_0 принадлежит кольцевой границе. Ввиду произвольности точки $M_0 \in \mathfrak{M}$ заключаем отсюда, что кольцевая граница совпадает с $\mathfrak{M}$.

Следствие. *Всякий максимальный идеал вполне симметричного коммутативного кольца R_1 расширяется до максимального идеала любого банахова коммутативного кольца с единицей, содержащего R_1 в качестве замкнутого подкольца.*

Для доказательства достаточно применить к данному случаю теорему 3 п. 2 § 13.

§ 15. Регулярные кольца

1. Определение регулярного кольца. Семейство $\mathscr{F}$ функций на топологическом пространстве T называется *регулярным*, если для любого замкнутого множества $F \subset T$ и любой точки $t_0 \notin F$ существует функция $x \in \mathscr{F}$, удовлетворяющая условиям

$$x(t_0) \neq 0, \quad x(t) = 0 \quad \text{на} \quad F.$$

Семейство $\mathscr{F}$ называется *нормальным*, если для любых двух непересекающихся замкнутых множеств F_1, $F_2 \subset T$ существует функция $x \in \mathscr{F}$, удовлетворяющая условиям

$$x(t) = 0 \text{ на } F_1, \quad x(t) = 1 \text{ на } F_2.$$

Банахово кольцо R с единицей называется *регулярным*, если семейство всех функций $x(M)$, отвечающих всевозможным элементам x кольца R, регулярно, и *нормальным*, если это семейство функций нормально.

Очевидно, всякое нормальное семейство регулярно и потому всякое нормальное кольцо регулярно. Ниже мы увидим (см. п. 4), что верно также обратное предложение.

Примеры. 1. Кольцо $C(T)$ всех непрерывных функций на хаусдорфовом бикомпактном пространстве T нормально в силу леммы Урысона (см. II п. 8 § 2), а следовательно, также регулярно.

2. Кольцо $D_n(a, b)$ (пример 3 п. 2 § 11) также регулярно.

3. Кольцо A (пример б) п. 3 § 11) не регулярно. Действительно, всякая функция $x(\zeta)$, регулярная в круге $|\zeta| < 1$ и равная нулю на некотором открытом множестве этого круга, тождественно равна нулю.

4. Кольцо W (см. пример 3 п. 1 § 9) регулярно, так как оно содержит все периодические с периодом 2π дифференцируемые функции с непрерывной производной. По той же причине регулярно кольцо W_m всех функций $x(t_1, \ldots, t_m) = \sum\limits_{k_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum\limits_{k_m=-\infty}^{\infty} c_{k_1\ldots k_m} e^{i(k_1t_1+\ldots+k_mt_m)} < \infty$, для которых $\sum\limits_{k_1=-i}^{\infty} \ldots \sum\limits_{k_m=-\infty}^{\infty} |c_{k_1\ldots k_m}| < \infty$, с обычным определением операций и с нормой $|x| = \sum\limits_{k_1=-\infty}^{\infty} \ldots \sum\limits_{k_m=-\infty}^{\infty} |c_{k_1\ldots k_m}|$ (m-мерный аналог кольца W).

5. Мак-Киссик [1] построил пример нормального равномерно замкнутого подкольца кольца $C(T)$, где T — бикомпактно, не совпадающего с $C(T)$.

2. Нормальные кольца функций.

I. *Пусть $\mathscr{F}$ — нормальное семейство функций, заданных на топологическом пространстве T, образующее кольцо с единицей по отношению к обычным операциям, и пусть $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ — конечное покрытие пространства T открытыми множествами $U_1, \ldots, U_n$. Тогда в $\mathscr{F}$ существуют функции $x_1, \ldots, x_n$, обладающие следующими свойствами*:

1) $x_k = 0$ *вне* U_k, $0 \leqslant x_k(t) \leqslant 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$;

2) $x_1(t) + x_2(t) + \ldots + x_n(t) = 1$.

Доказательство. Докажем предложение индукцией по n. Пусть сначала $n = 2$. Тогда замкнутые множества $F_1 = T - U_1$, $F_2 = T - U_2$ не пересекаются; следовательно, в нормальном семействе $\mathscr{F}$ существует функция x_1, $0 \leqslant x_1(t) \leqslant 1$, равная нулю на F_1 и единице на F_2.

Положив $x_2 = 1 - x_1$, мы получим функции x_1, x_2, удовлетворяющие условиям 1)–2) при $n = 2$.

Предположим теперь, что предложение уже доказано для покрытия $n-1$ открытыми множествами. Рассмотрим покрытие n открытыми множествами $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}, U_n$. Положим $F = T - U_n$. Тогда F замкнуто и $F \subset U_1 \cup \ldots \cup U_{n-1}$; следовательно, в силу нормальности T существует такое открытое множество U, что $F \subset U \subset \overline{U} \subset U_1 \cup \cup \ldots \cup U_{n-1}$. Положим далее $V_k = \overline{U} \cap U_k$; тогда V_k открыты в $\overline{U}$ и $\{V_1, \ldots, V_{n-1}\}$ — покрытие $\overline{U}$. Функции семейства F, рассматриваемые только на $\overline{U}$, также образуют нормальное кольцо; следовательно, по предположению индукции существуют функции $y_1, \ldots, y_{n-1} \in F$, удовлетворяющие условиям:

а) $y_k(t) = 0$ на $\overline{U} - V_k$, $0 \leqslant y_k(t) \leqslant 1$, $k = 1, \ldots, n-1$;

б) $y_1(t) + \ldots + y_{n-1}(t) = 1$ на $\overline{U}$.

С другой стороны, открытые множества U и U_n образуют покрытие T; поэтому существуют функции x, x_n, удовлетворяющие условиям:

а$'$) $x(t) = 0$ на $T - U$, $x_n(t) = 0$ на $T - U_n$;

б$'$) $x(t) + x_n(t) = 1$ на T;

в$'$) $0 \leqslant x(t) \leqslant 1$, $0 \leqslant x_n(t) \leqslant 1$.

Положив
$$x_k = y_k x, \quad k = 1, \ldots, n-1,$$
и учитывая условия а), б) и а$'$), б$'$), в$'$), мы получим функции $x_1, \ldots \ldots, x_n$, удовлетворяющие условиям 1), 2).

Функции $x_1, \ldots, x_n$ семейства $\mathscr{F}$, удовлетворяющие условиям 1), 2), мы будем называть *разбиением единицы*, отвечающим покрытию $\{U_1, \ldots, U_n\}$.

Если, в частности, $\mathscr{F}$ есть кольцо $C(T)$ всех непрерывных функций на хаусдорфовом бикомпактном пространстве T, то условия предложения 1 выполнены (см. пример 1, п. 1). Поэтому имеет место

II. *Если $\{U_1, \ldots, U_n\}$ — конечное покрытие хаусдорфова бикомпактного пространства T открытыми множествами $U_1, \ldots, U_n$, то существуют непрерывные функции $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие условиям*:

1) $x_k(t) = 0$ *вне* U_k, $k = 1, 2, \ldots, n$;

2) $x_1(t) + \ldots + x_n(t) = 1$.

Пусть $\mathscr{F}$ — некоторое семейство функций, определенных на топологическом пространстве T. Функция y, определенная на T, называется *локально принадлежащей семейству $\mathscr{F}$ в точке* $\tau \in T$, если существуют функция $x_\tau \in \mathscr{F}$ и окрестность $U(\tau)$ точки τ такие, что $y(t) = x_\tau(t)$ для всех $t \in U(\tau)$. Функция y называется *локально принадлежащей семейству $\mathscr{F}$*, если она локально принадлежит $\mathscr{F}$ в каждой точке $\tau \in T$.

Пусть теперь R — коммутативное банахово кольцо с единицей, $\mathfrak{M}$ — его пространство максимальных идеалов, I — идеал кольца R. Будем говорить, что функция $f(M)$, заданная на $\mathfrak{M}$, принадлежит (или локально принадлежит) кольцу R или его идеалу I, если $f(M)$ принадлежит (соответственно локально принадлежит) семейству функций $\{x(M)\colon x \in R\}$ или $\{x(M)\colon x \in I\}$.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{F}$ — нормальное семейство функций на хаусдорфовом бикомпактном пространстве T, образующее кольцо с единицей по отношению к обычным операциям. Если функция y, определенная на T, локально принадлежит $\mathscr{F}$, то y содержится в $\mathscr{F}$; при этом y принадлежит идеалу, порожденному функциями x_τ.*

Доказательство. По условию, каждой точке $\tau \in T$ отвечают $x_\tau \in \mathscr{F}$ и $U(\tau)$ такие, что

$$y(t) = x_\tau(t) \quad \text{в} \quad U(\tau).$$

Окрестности $U(\tau)$ образуют покрытие пространства T, содержащее в силу бикомпактности T конечное покрытие $U(\tau_1), \ldots, U(\tau_n)$. Пусть $\{y_1, \ldots, y_n\}$ — разбиение единицы, отвечающее этому покрытию и составленное из функций $y_1, \ldots, y_n \in \mathscr{F}$. Тогда

$$yy_k = x_{\tau_k} y_k, \tag{1}$$

ибо $y(t) = x_{\tau_k}(t)$ в $U(\tau_k)$ и $y_k(t) = 0$ вне $U(\tau_k)$; поэтому также $y = yy_1 + \ldots + yy_n \in \mathscr{F}$. При этом в силу (1) y принадлежит идеалу, порожденному функциями x_τ.

3. Структурное пространство кольца. Пусть Δ — произвольное множество примитивных [1] замкнутых двусторонних идеалов, вообще говоря, некоммутативного банахова кольца R с единицей. Условимся называть *ядром* множества Δ и обозначать через $k(\Delta)$ пересечение всех идеалов множества Δ; очевидно, $k(\Delta)$ — двусторонний идеал в R. Далее, пусть I — двусторонний идеал в R; условимся называть *оболочкой* идеала I и обозначать через $h(I)$ совокупность всех примитивных замкнутых двусторонних идеалов, содержащих I. Очевидно,

$$\Delta \subset hk(\Delta), \quad I \subset kh(I). \tag{1}$$

Обозначим через $\mathfrak{M}$ совокупность всех примитивных замкнутых двусторонних идеалов кольца R; определим в $\mathfrak{M}$ операцию замыкания [2], положив $\overline{\Delta} = hk(\Delta)$, если $\Delta \neq \varnothing$, и $\overline{\varnothing} = \varnothing$. Аксиомы замыкания (см. п. 3 § 2) будут тогда выполнены. Действительно, из самого определения операции замыкания очевидно, что $\Delta \in \overline{\Delta}$, $\overline{\overline{\Delta}} = \overline{\Delta}$, $\overline{\varnothing} = \varnothing$; поэтому в доказательстве нуждается только соотношение $\overline{\Delta_1 \cup \Delta_2} = \overline{\Delta}_1 \cup \overline{\Delta}_2$.

Пусть $I \in \overline{\Delta}_1 \cup \overline{\Delta}_2$, например $I \in \overline{\Delta}_1$. Тогда $I \supset k(\Delta_1)$, следовательно, подавно $I \supset k(\Delta_1 \cup \Delta_2)$; но это означает, что $I \in hk(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \overline{\Delta_1 \cup \Delta_2}$. Таким образом, $\overline{\Delta}_1 \cup \overline{\Delta}_2 \subset \overline{\Delta_1 \cup \Delta_2}$ и остается доказать обратное включение.

[1] См. п. 7 § 7.

[2] См. п. 3 § 2, с. 40.

Пусть I — примитивный замкнутый двусторонний идеал, и пусть $I \notin \overline{\Delta}_1 \cup \overline{\Delta}_2$; тогда $I \not\supset k(\Delta_1)$, $I \not\supset k(\Delta_2)$. Факторкольцо R/I примитивно, следовательно, $J_1 J_2 \neq (0)$ для любых двух двусторонних идеалов $J_1 \neq (0)$, $J_2 \neq (0)$ в R/I (см. III п. 7 § 7). Это, в частности, справедливо для образов J_1, J_2 идеалов $k(\Delta_1) + I$, $k(\Delta_2) + I$ при естественном гомоморфизме $R \to R/I$, ибо в силу соотношений $k(\Delta_1) + I \supsetneqq I$, $k(\Delta_2) + I \supsetneqq I$ мы имеем: $J_1 \neq (0)$, $J_2 \neq (0)$. Но соотношение $J_1 J_2 \neq (0)$ означает, что $k(\Delta_1)\, k(\Delta_2) \not\subset I$, так что подавно $k(\Delta_1 \cup \Delta_2) \not\subset I$ [ибо $k(\Delta_1)\, k(\Delta_2) \subset k(\Delta_1) \cap k(\Delta_2)$]. А это означает, что $I \notin \overline{\Delta_1 \cup \Delta_2}$.

Итак, операция замыкания $\overline{\Delta} = hk(\Delta)$ удовлетворяет требуемым аксиомам; в определенной ею топологии $\mathfrak{M}$ становится (вообще говоря, не хаусдорфовым) топологическим пространством; оно называется *структурным пространством* кольца R и обозначается $\mathfrak{M}_s$.

Легко видеть, что в случае *коммутативного банахова кольца R с единицей замкнутый идеал в R примитивен тогда и только тогда, когда он максимален*. Действительно, в этом случае максимальный левый идеал M_1 совпадает с двусторонним максимальным идеалом M и факторкольцо R/M изоморфно полю комплексных чисел (теорема 1 п. 1 § 11). С другой стороны, если R примитивно, то отображение $x \to A_x^\frown$ кольца R на R/M должно быть изоморфизмом при некотором M (см. п. 7 § 7); следовательно, R должно быть изоморфно полю комплексных чисел. Поэтому если I — замкнутый примитивный идеал в уже непримитивном R, то, будучи примитивным, R/I по только что доказанному изоморфно полю комплексных чисел; в силу II п. 1 § 11 это возможно лишь тогда, когда I — максимальный идеал. Обратное утверждение очевидно. Таким образом, в случае коммутативного кольца пространство $\mathfrak{M}_s$ состоит из тех же элементов, что и пространство $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов; но топология в $\mathfrak{M}_s$, вообще говоря, не совпадает с топологией в $\mathfrak{M}$.

I. *Пусть R — банахово коммутативное кольцо с единицей. Тогда топология в $\mathfrak{M}_s$ мажорируется топологией в $\mathfrak{M}$. Эти топологии совпадают тогда и только тогда, когда R регулярно.*

Доказательство. Пусть I — идеал кольца R, и пусть $\mathfrak{M}_2$ — совокупность всех максимальных идеалов кольца R, содержащих данный элемент x; $\mathfrak{M}_x$ как совокупность всех точек M, на которых обращается в нуль непрерывная функция $x(M)$, замкнуто в $\mathfrak{M}$. Поэтому $h(I) = \bigcap\limits_{x \in I} \mathfrak{M}_x$ также замкнуто в $\mathfrak{M}$. В частности, $hk(\Delta)$ замкнуто в $\mathfrak{M}$, а значит, содержит замыкание $\overline{\Delta}$ множества Δ в $\mathfrak{M}$. Следовательно, топология в $\mathfrak{M}_s$ мажорируется топологией в $\mathfrak{M}$. Топологии в $\mathfrak{M}_s$ и $\mathfrak{M}$ совпадают тогда и только тогда, когда для любого замкнутого в $\mathfrak{M}$ множества Δ

$$\overline{\Delta} = hk(\Delta) = \bigcap_{x \in k(\Delta)} \mathfrak{M}_x.$$

В силу (1) это имеет место тогда и только тогда, когда при $m_0 \notin \Delta$ также $M_0 \notin \bigcap\limits_{x \in k(\Delta)} \mathfrak{M}_x$, т. е. $M_0 \notin \mathfrak{M}_{x_0}$ по крайней мере при одном $x_0 \in \in k(\Delta)$. Но это означает, что $x_0(M_0) \neq 0$ и $x_0(M) = 0$ на Δ, т. е. что R регулярно.

Предыдущие рассуждения применимы также к произвольному кольцу R (вообще не всех) непрерывных функций на топологическом пространстве T. В этом случае T есть вообще часть множества $\mathfrak{M}$ всех максимальных идеалов кольца R. Обозначая через T_s множество T, рассматриваемое как топологическое подпространство в $\mathfrak{M}_s$, и повторяя рассуждение, проведенное в доказательстве предложения I, мы приходим к следующему результату.

II. *Пусть R — кольцо непрерывных функций на топологическом пространстве T, содержащее единицу. Тогда топология в T_s мажорируется топологией в T. Эти топологии совпадают тогда и только тогда, когда R есть регулярное семейство функций.*

4. Свойства регулярных колец.

I. *Кольцевая граница регулярного кольца R совпадает с пространством $\mathfrak{M}$ всех его максимальных идеалов.*

Доказательство. Пусть $M_0 \in \mathfrak{M}$ и $U(M_0)$ — произвольная окрестность идеала M_0. По определению регулярного кольца, в R существует функция $x(M)$, равная нулю вне $U(M_0)$ и единице в M_0 и, следовательно, принимающая максимум своего модуля только в $U(M_0)$. Согласно теореме 2 п. 1 § 13 отсюда вытекает, что M_0 принадлежит кольцевой границе. Следовательно, кольцевая граница совпадает с $\mathfrak{M}$.

II. *Пусть R — регулярное кольцо, а F — замкнутое множество в пространстве $\mathfrak{M}$ его максимальных идеалов. Тогда F есть пространство максимальных идеалов факторкольца $R_F = R/k(F)$.*

Доказательство. Пусть $x^\frown \in R_F$ и x — представитель класса $x^\frown$; положим для $M \in F$

$$x^\frown(M) = x(M).$$

Это определение не зависит от выбора представителя $x \in x^\frown$. Действительно, если также $x' \in x^\frown$, то $x' - x \in k(F)$, и потому $x'(M) - - x(M) = 0$ при $M \in F$. Таким образом, при $M \in F$ соответствие $x^\frown \to x^\frown(M)$ определяет гомоморфизм кольца R_F на поле комплексных чисел, следовательно, определяет некоторый максимальный идеал $M^\frown$ кольца R_F. Этот максимальный идеал $M^\frown$ поставим в соответствие идеалу M. Очевидно, тогда

$$x^\frown(M^\frown) = x^\frown(M) = x(M).$$

Соответствие $M \to M^\frown$, таким образом установленное, взаимно однозначно. Действительно, если $M_1 \neq M_2$, M_1, $M_2 \in F$, то в R существует функция $x(M)$ такая, что $x(M_1) \neq x(M_2)$; если $x^\frown$ — класс вычетов по

$k(F)$, содержащий x, то $x^{\frown}(M_1^{\frown}) = x(M_1)$, $x^{\frown}(M_2^{\frown}) = x(M_2)$, и потому также $x^{\frown}(M_1^{\frown}) \neq x^{\frown}(M_2^{\frown})$; следовательно, $M_1^{\frown} \neq M_2^{\frown}$.

Докажем теперь, что соответствие $M \to M^{\frown}$ отображает F на пространство $\mathfrak{M}^{\frown}$ всех максимальных идеалов кольца $R/k(F)$. Всякий идеал $M_0^{\frown}$ определяет гомоморфизм кольца $R/k(F)$, а значит и кольца R на поле комплексных чисел; следовательно, $M_0^{\frown}$ определяет идеал $M_0 \in \mathfrak{M}$ такой, что

$$x^{\frown}(M_0^{\frown}) = x(M_0) \quad \text{при} \quad x \in x^{\frown}.$$

При этом $M_0 \in F$; действительно, в противном случае в кольце R (в силу его регулярности) существовала бы функция $x(M)$, удовлетворяющая условиям

$$x(M_0) = 1, \quad x(M) = 0 \quad \text{на} \quad F;$$

но тогда мы имели бы $x \in k(F)$ и $x^{\frown} = 0$, а это противоречило бы равенству

$$x^{\frown}(M_0^{\frown}) = x(M_0) = 1.$$

Таким образом, соответствие $M \to M^{\frown}$ взаимно однозначно отображает F на $\mathfrak{M}^{\frown}$ и переводит непрерывные функции $x(M)$, $M \in F$, в непрерывные функции $x^{\frown}(M^{\frown})$, $x^{\frown} \in R/k(F)$. Так как F бикомпактно, то на основании теоремы 3 п. 3 § 11 соответствие $M \to M^{\frown}$ есть гомеоморфизм, и потому можно отождествить $\mathfrak{M}^{\frown}$ с F.

Теорема 2. *Пусть I — идеал регулярного кольца R. Тогда для любого замкнутого множества F в $\mathfrak{M}$, не пересекающегося с $h(I)$, существует функция $x(M)$, принадлежащая идеалу I и равная единице на F.*

Доказательство. Рассмотрим факторкольцо $R/k(F)$. В силу II F есть пространство максимальных идеалов кольца $R/k(F)$. Пусть I' — образ идеала I при естественном гомоморфизме $R \to R/k(F)$. Докажем, что $I' = R/k(F)$. Действительно, в противном случае I' есть идеал в $R/k(F)$ и потому содержится в некотором максимальном идеале $M^{\frown}$ кольца $R/k(F)$. Но тогда I содержится в некотором идеале $M \in F$, что невозможно, ибо по условию $h(I)$ и F не пересекаются. Следовательно, $I' = R/k(F)$; в частности, I' содержит единицу $e^{\frown}$ кольца $R/k(F)$. Это означает, что идеал I содержит элемент x_0, переходящий в $e^{\frown}$ при гомоморфизме $R \to R/k(F)$. Но e также отображается в $e^{\frown}$ при гомоморфизме $R \to R/k(F)$. Поэтому $x_0 - e \in k(F)$. Это означает, что $x_0(M) - 1 = 0$ на F и, следовательно, $x_0(M) = 1$ на F.

Следствие. *Всякое регулярное кольцо нормально.*

Доказательство. Пусть F_1, F_2 — непересекающиеся замкнутые множества в $\mathfrak{M}$. Применяя предыдущую теорему к идеалу $I = k(F_1)$ и множеству $F = F_2$, получим функцию $x_0(M)$, равную нулю на F_1 и единице на F_2.

Комбинируя теперь это следствие с теоремой 1 п. 2, мы приходим к следующему результату.

Теорема 3. *Пусть R — регулярное кольцо, а $y(M)$ — функция, определенная на пространстве $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов кольца R. Если тогда $y(M)$ локально принадлежит кольцу всех функций $x(M)$, $x \in R$, то существует элемент $x \in R$ такой, что $x(M) = y(M)$ для всех $M \in \mathfrak{M}$.*

При этом $y(M)$ принадлежит идеалу, порожденному функциями $x_\tau(M)$, $\tau \in \mathfrak{M}$, с которыми локально совпадает $y(M)$.

До сих пор не выяснено, справедливо ли утверждение этой теоремы без условия регулярности кольца R.

Из теоремы 3 вытекает следующий результат Винера [1].

Пусть x — периодическая с периодом 2π функция. Если в некоторой окрестности каждой точки t_0, $-\infty < t_0 < \infty$, функция x совпадает с функцией y_{t_0}, разлагающейся в абсолютно сходящийся ряд Фурье, то и x разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье.

Действительно, условие теоремы означает, что x локально принадлежит регулярному кольцу W в каждой точке его пространства максимальных идеалов; поэтому $x \in W$ на основании теоремы 3.

Другим следствием теоремы 3 является

Теорема 3$'$. *Пусть на пространстве $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов регулярного кольца R задана функция $f(M)$, которая в некоторой окрестности U каждой точки $M_0 \in \mathfrak{M}$ совпадает с аналитической функцией какого-либо элемента $x_0 \in R$ (вообще говоря, зависящего от M_0 и U). Тогда существует такой элемент $x \in R$, что $x(M) = f(M)$ для всех $M \in \mathfrak{M}$.*

Доказательство. Пусть V — такая окрестность точки M_0, что $\overline{V} \subset U$, и пусть $I = k(\overline{V})$. Тогда $\overline{V}$ — пространство максимальных идеалов кольца R/I и по теореме 7 п. 6 § 11 сужение функции $f(M)$ на $\overline{V}$ есть элемент кольца R/I. Поскольку это верно для некоторой окрестности любой точки $M_0 \in \mathfrak{M}$, $f(M)$ локально принадлежит кольцу R, и утверждение теоремы следует из теоремы 3.

Очевидно, утверждение теоремы 3 остается справедливым, если заменить данное регулярное кольцо некоторым идеалом в нем; следовательно, справедлива

Теорема 3$''$. *Пусть R — регулярное кольцо, I — идеал в R, а $y(M)$ — функция, определенная на пространстве $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов кольца R. Если тогда $y(M)$ локально принадлежит идеалу I, то существует элемент $x \in I$ такой, что $x(M) = y(M)$ для всех $M \in \mathfrak{M}$.*

Условие теоремы 3$''$ можно ослабить, если воспользоваться следующим предложением:

III. *Если I — идеал в регулярном кольце R и y — элемент этого кольца, то функция $y(M)$ локально принадлежит I в каждой точке из $\mathfrak{M} - h(I)$ и в каждой внутренней точке множества $h(y)$.*

Доказательство. Если $M_0 \notin hI$, то существует окрестность $U(M_0)$, замыкание которой не пересекается с $h(I)$; следовательно, по теореме 2 существует принадлежащая идеалу I функция $x_0(M)$, равная единице в окрестности $U(M_0)$ точки M_0. Тогда $y(M)\,x_0(M) = y(M)$ в $U(M_0)$ и $yx_0 \in I$; следовательно, полагая $x_{M_0}(M) = y(M)\,x_0(M)$, мы видим, что $y(M)$ локально принадлежит I в точке M_0. Если же $U(M_0) \subset h(y)$, то $y(M) = 0$ в $U(M_0)$; полагая $x_{M_0}(M) \equiv 0$, мы снова видим, что $y(M)$ локально принадлежит I в точке M_0.

Таким образом, *утверждение теоремы* 3$''$ *остается справедливым, если* $y(M)$ *— элемент кольца* R, *локально принадлежащий идеалу* I *в каждой точке множества* $h(I)$, *не являющейся внутренней точкой множества* $h(y)$.

Пусть Δ — какое-нибудь множество идеалов кольца R. Идеал $I \in \Delta$ называется *минимальным в* Δ, если в множестве Δ нет идеала $\neq I$, содержащегося в I.

Теорема 4. *Пусть* F *— замкнутое множество в пространстве* $\mathfrak{M}$ *максимальных идеалов полупростого регулярного кольца* R *и пусть* $I_0(F)$ *— совокупность всех* $x \in R$, *для которых функция* $x(M)$ *равна нулю на открытом множестве, содержащем* F (*каждая на своем*). *Тогда* $I_0(F)$ *— минимальный среди всех идеалов* I *кольца* R, *удовлетворяющих условию* $h(I) = F$.

Доказательство. Очевидно, $nI_0(F) \supset F$. С другой стороны, если $M_0 \notin F$, то существуют открытое множество $U \supset F$, не содержащее M_0, и функция $x_0(M)$, $x_0 \in R$, равная единице в M_0 и нулю на U; следовательно, также $M_0 \notin hI_)(F)$. Поэтому

$$hI_0(F) = F. \tag{1}$$

Пусть теперь I — произвольный идеал, удовлетворяющий условию $h(I) = F$; докажем, что $I \supset I_0(F)$. Пусть $y \in I_0(F)$ и $y(M) = 0$ на открытом множестве $U \supset F$. Замкнутые множества F и $\mathfrak{M} - U$ не пересекаются, и потому (теорема 2) существует принадлежащая I функция $z(M)$, $z \in R$, равная единице на $\mathfrak{M} - U$. Тогда $y(M) - y(M)\,z(M) \equiv 0$ и так как R — полупростое кольцо, то $y = yz \in I$. Следовательно, $I \supset I_0(F)$, и теорема доказана.

IV. *Идеал* $\overline{I_0(F)}$ *есть минимальный среди замкнутых идеалов* I *полупростого регулярного кольца* R, *удовлетворяющих условию* $h(I) = F$. *Он состоит из всех* $x \in R$, *для которых существует последовательность* $x_n \in R$, *удовлетворяющая условиям*:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$;
2) $x_n(M) = x(M)$ *на некотором открытом множестве* $U_n \supset F$.

Доказательство. В силу (1), $\overline{hI_0(F)} = F$. С другой стороны, пусть I — замкнутый идеал, удовлетворяющий условию $h(I) = F$. Тогда $I_0(F) \subset I$ и потому $\overline{I_0(F)} \subset I$. Следовательно, $\overline{I_0(F)}$ — минимальный среди замкнутых идеалов I, для которых $h(I) = F$.

Пусть теперь $x \in \overline{I_0(F)}$, т.е. $x = \lim_{n\to\infty} y_n$, где $y_n \in I_0(F)$. Тогда $y_n(M) = 0$ на некотором открытом множестве $U_n \supset F$; следовательно, функция $x_n(M) = x(M) - y_n(M)$ совпадает с $x(M)$ в U_n и $\lim_{n\to\infty} |x_n| = 0$, так что условия 1), 2) выполняются. Обратно, если для некоторой последовательности $x_n \in R$ выполняются эти условия, то $y_n(M) = x(M) - x_n(M) = 0$ на U_n и потому $y_n \in I_0(F)$. Но тогда $x = \lim_{n\to\infty} y_n \in \overline{I_0(F)}$, и предложение IV доказано.

Напомним (см. п. 10 § 11), что идеал I банахова кольца .R с единицей называется *примарным*, если он содержится только в одном максимальном идеале этого кольца. Полагая в предложении IV $F = \{M_0\}$, мы получим минимальный замкнутый идеал $\overline{I_0(M_0)}$, удовлетворяющий условию $\overline{h}I_0(M_0) = M_0$. Другими словами:

V. *Для каждого максимального идеала полупростого регулярного кольца существует минимальный среди содержащихся в нем замкнутых примарных идеалов.*

Будем говорить, что банахово коммутативное кольцо R с единицей *удовлетворяет условию* (D), если для каждого $M_0 \in \mathfrak{M}$ и каждого $x \in M_0$ существует последовательность $x_n \in R$ такая, что:

1) $x_n(M) = 0$ в некоторой окрестности $U_n(M_0)$;

2) $xx_n \to x$ при $n \to \infty$.

Теорема 5[1]) (Г. Е. Шилов [5]). *Пусть R — полупростое регулярное кольцо, удовлетворяющее условию* (D), *и пусть I — замкнутый идеал кольца R. Тогда I содержит всякий элемент x из $kh(I)$, для которого пересечение границы $h(x)$ с $h(I)$ не содержит непустого совершенного множества.*

Доказательство. Обозначим через Δ совокупность всех максимальных идеалов M, в которых $x(M)$ локально не принадлежит I. Докажем, что Δ — совершенное множество. Очевидно, Δ замкнуто и в силу III $\Delta \subset h(I)$. Предположим, что оно имеет изолированную точку M_0; пусть U — окрестность точки M_0, в каждой точке $M \neq M_0$ замыкания $\overline{U}$ которой $x(M)$ локально принадлежит I. Так как $M_0 \in \Delta \subset h(I)$ и $x \in kh(I)$, то $x \in M_0$. Но тогда согласно условию (D) существует последовательность $y_n \in R$ такая, что $y_n x \to x$ при $n \to \infty$ и $y_n(M) = 0$ в некоторой окрестности $U_n(M_0)$. Пусть z — элемент кольца R такой, что $z(M) = 0$ в $\mathfrak{M} - U$ и $z(M) = 1$ в некоторой окрестности $V(M_0) \subset U$. Тогда $y_n xz$ локально принадлежит идеалу I в каждой точке $M \in \mathfrak{M}$, и поэтому $y_n xz \in I$ (см. теорему $3''$). Так как I замкнут и $y_n x \to x$, то также $xz \in I$ и, следовательно, $x(M)$ локально принадлежит I в точке M_0. Полученное противоречие показывает, что Δ совершенно. В силу III Δ содержится в пересечении $h(I)$ с границей множеств $h(x)$; в силу условия теоремы отсюда заключаем, что Δ —

[1]) Эта теорема является обобщением одной леммы В. А. Диткина [1].

пустое множество, т. е. x локально принадлежит идеалу I, и потому $x \in I$.

5. Случай кольца без единицы. Предыдущие результаты легко переносятся на кольца без единицы. При этом роль $\mathfrak{M}$ играет локально бикомпактное пространство максимальных регулярных идеалов кольца R с присоединенной к нему бесконечно удаленной точкой M_∞ и все функции $x(M)$, $x \in R$, обращаются в нуль в точке M_∞. Поэтому во всех предыдущих определениях и теоремах точка M_∞ должна исключаться каждый раз, когда речь идет о значениях $x(M) \neq 0$, в частности, о значениях $x(M) = 1$. Мы предоставляем читателю подробные формулировки и выводы (см. по этому поводу Люмис [2]). Отметим только такое следствие из теоремы 4 п. 4:

С л е д с т в и е. *Пусть R — регулярное полупростое кольцо такое, что множество R' всех элементов x, для которых $x(M)$ обращается в нуль вне некоторого бикомпактного множества в $\mathfrak{M} - M_\infty$* (своего для каждой функции $x(M)$), *плотно в R. Тогда всякий замкнутый идеал I в R содержится в некотором максимальном регулярном идеале.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное: пусть некоторый замкнутый идеал I не содержится ни в каком максимальном регулярном идеале. Тогда $h(I)$ есть пустое множество. Но, кроме того, $h(R')$ — также пустое множество, ибо R' плотно в R; в силу теоремы 4 п. 4 R' — минимальный среди идеалов I', для которых $h(I')$ пусто. Следовательно, $I \supset R'$; так как R' плотно в R и I замкнут, то отсюда $I = R$ вопреки условию, что I — идеал.

6. Достаточное условие регулярности кольца. Отметим еще следующее условие регулярности (доказательство см. Шилов [5]): *если R — банахово кольцо с единицей и с вещественными* [1] *образующими и если выполнено условие*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ln |e^{itz}| \frac{dt}{1+t^2} < \infty$$

для каждой из этих образующих z, то R регулярно.

Мы не касались в этом параграфе приложений изложенной теории регулярных колец. Эти приложения нам удобно будет рассмотреть ниже в п. 8 § 31.

7. Примарные идеалы. Напомним (см. п. 10 § 11), что идеал I банахова кольца R с единицей называется *примарным*, если он содержится только в одном максимальном идеале кольца R. Само кольцо R называется *примарным*, если оно обладает лишь одним максимальным

---

[1] Элемент x кольца R называется *вещественным*, если соответствующая функция $x(M)$ вещественна для всех $M \in \mathfrak{M}$.

идеалом. В кольце всех функций $\{x(M)\colon x \in R\}$ примерные идеалы I характеризуются тем, что множество $\{M\colon x(M) = 0$ для всех $x \in I\}$ состоит из одной точки. Поэтому *если I — замкнутый примарный идеал, то R/I примарно.*

Пусть теперь R регулярно. Согласно IV п. 4 для каждого максимального идеала M_0 (в данном случае $F = \{M_0\}$) существует наименьший замкнутый примарный идеал $\overline{I(M_0)}$. При этом $x \in \overline{I(M_0)}$ тогда и только тогда, когда существует такая последовательность $x_n \in R$, что $x_n \to 0$ и $x(M) = x_n(M)$ в некоторой окрестности точки M_0.

Более общие условия существования минимальных примерных идеалов в необязательно регулярном кольце получены Гельфандом [5] (см. также Коренблюм [3]).

Пример. Найдем *минимальные замкнутые* примарные идеалы кольца $D_m(a, b)$ (см. пример 3 п. 2 § 11). Пусть J — совокупность всех $x \in D_m(a, b)$, равных нулю при $t = t_0$, $t_0 \in [a, b]$, вместе со всеми их производными до порядка m включительно. Очевидно, J — замкнутый примарный идеал в $D_m(a, b)$. Докажем, что J минимален. Пусть $x \in J$ и пусть функция $h \in D_m(a, b)$ равна единице в некоторой окрестности точки t_0 и равна нулю вне некоторой другой окрестности $|t - t_0| \leqslant c$ точки t_0. Положим

$$h_\nu(t) = \begin{cases} h(\nu(t - t_0)) & \text{при} \quad t \in [a, b] \quad \text{и} \quad \nu(t - t_0) = [a, b], \\ 0 & \text{при} \quad t \in [a, b] \quad \text{и} \quad \nu(t - t_0) \notin [a, b], \end{cases}$$

и $A = \sup\limits_{\substack{0 \leqslant t \leqslant 1 \\ 0 \leqslant k \leqslant m}} |h^{(k)}(t)|$. Тогда $|h_\nu^{(k)}(t)| \leqslant \nu^k A$; кроме того, последовательным интегрированием находим, что на отрезке $|t - t_0| \leqslant \rho$ $|x^{(r)}(t)| = o(\rho^{m-r})$. Отсюда и из формулы Лейбница следует [1]), что $|(h_\nu x)^{(q)}| = o\left(\dfrac{1}{\nu^{m-q}}\right)$, и потому $\lim\limits_{\nu \to \infty} \|h_\nu x\| = 0$. В силу IV п. 4 x принадлежит минимальному замкнутому примарному идеалу, отвечающему точке t_0, следовательно, I совпадает с этим минимальным примарным идеалом. Легко также показать, что D_m/I конечномерно и изоморфно кольцу многочленов степени $\leqslant m$ (с отбрасыванием слагаемых степени $> m$, если они получаются при умножении). Аналогичный результат имеет место для колец $D_m(G)$ функций $x(t_1, \ldots, t_m)$, $(t_1, \ldots, t_m) \in G$, обладающих частными производными до m-го порядка включительно в замкнутой области $G \subset R^m$.

---

[1]) Так как $h_\nu(t) = 0$ при $|t - t_0| \geqslant c$, то в оценках для $x^{(r)}(t)$ можно положить $\rho = \dfrac{c}{\nu}$.

§ 16. Вполне регулярные коммутативные кольца

1. Определение и простейшие свойства вполне регулярного кольца. Пусть R — симметричное кольцо (не обязательно коммутативное). Норма $|x|$ в кольце R называется *вполне регулярной*, если

$$|x^*x| = |x|^2 \quad \text{для всех} \quad x \in R. \tag{1}$$

Если $|x|$ — вполне регулярная норма, то из соотношений

$$|x|^2 = |x^*x| \leqslant |x||x^*|$$

мы заключаем, что $|x| \leqslant |x^*|$, и, заменив x на x^*, что также $|x^*| \leqslant |x|$. Поэтому $|x^*| = |x|$, т. е. *всякое кольцо с вполне регулярной нормой есть нормированное симметричное кольцо* (см. п. 3 § 10). Нормированное симметричное кольцо называется *вполне регулярным* [1]), если его норма вполне регулярна. Очевидно, всякое симметричное подкольцо вполне регулярного кольца также вполне регулярно.

I. *Пополнение вполне регулярного кольца вполне регулярно.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{R}$ — пополнение вполне регулярного кольца R. Если $x \in \widetilde{R}$, то существует последовательность $x_n \in R$ такая, что $|x - x_n| \to 0$ и, следовательно, $|x^* - x_n^*| \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому, переходя в равенстве $|x_n^* x_n| = |x_n|^2$ к пределу, получим $|x^*x| = |x|^2$.

II. *Если R — вполне регулярное кольцо, то*

$$|x| = \sup_{y \neq 0} \frac{|xy|}{|y|}.$$

Действительно, из неравенства $|xy| \leqslant |x||y|$ следует, что

$$\frac{|xy|}{|y|} \leqslant |x|,$$

причем в силу (1) знак равенства достигается при $y = x^*$.

III. *Пусть R — вполне регулярное кольцо без единицы (не обязательно коммутативное), а R_1 — кольцо, полученное из R присоединением единицы. Тогда вполне регулярную норму в R можно продолжить до вполне регулярной нормы в R_1 и притом так, что если R — полное кольцо, то и R_1 будет полным кольцом.*

Доказательство. Определим норму в R_1 формулой

$$|\lambda e + x| = \sup_{y \neq 0} \frac{|\lambda y + xy|}{|y|}. \tag{2}$$

---

[1]) Полные вполне регулярные кольца называются в зарубежной литературе C^**-алгебрами.*

Тогда $|\lambda e + x|$ будет нормой оператора в R, именно, нормой оператора умножения слева на $\lambda e + x$. Поэтому $|\lambda e + x|$ удовлетворяет всем аксиомам нормы в кольце.

Докажем, что эта норма вполне регулярна.

Пусть c — произвольное положительное число, меньшее единицы. В силу (2) существует элемент $y \in R$ такой, что

$$|y| = 1 \quad \text{и} \quad c|\lambda e + x| < |\lambda y + xy|.$$

Тогда

$$\begin{aligned}c^2|\lambda e + x|^2 <& \\ &< |\lambda y + xy|^2 = |(\lambda y + xy)^*(\lambda y + xy)| = |y^*(\lambda e + x)^*(\lambda e + x)\, y| \leqslant \\ &\leqslant |y^*||(\lambda e + x)^*(\lambda e + x)\, y| = |((\lambda e + x)^*(\lambda e + x))\, y| \leqslant \\ &\leqslant |(\lambda e + x)^*(\lambda e + x)|,\end{aligned}$$

так что

$$c^2|\lambda e + x|^2 \leqslant |(\lambda e + x)^*(\lambda e + x)|.$$

Ввиду произвольности числа c, $0 < c < 1$, отсюда

$$|\lambda e + x|^2 \leqslant |(\lambda e + x)^*(\lambda e + x)|. \tag{3}$$

С другой стороны, согласно свойству нормы в кольце

$$|(\lambda e + x)^*(\lambda e + x)| \leqslant |(\lambda e + x)^*||\lambda e + x|.$$

Следовательно, $|\lambda e + x| \leqslant |(\lambda e + x)^*|$. Заменив здесь $\lambda e + x$ на $(\lambda e + x)^*$, получим, что $|(\lambda e + x)^*| = |\lambda e + x|$. Следовательно.

$$|(\lambda e + x)^*(\lambda e + x)| \leqslant |(\lambda e + x)^*||\lambda e + x| = |\lambda e + x|^2,$$

и сравнение с (3) дает

$$|\lambda e + x|^2 = |(\lambda e + x)^*(\lambda e + x)|.$$

Предположим теперь, что R полно. Докажем, что по введенной нами норме R_1 также полно. Пусть $\{\lambda_n e + x_n\}$ — фундаментальная последовательность в R_1. Тогда последовательность $\{\lambda_n\}$ ограничена. Действительно, в противном случае существует подпоследовательность $\lambda_{k_n} \to \infty$ и потому $e + \dfrac{1}{\lambda_{k_n}}\, x_{k_n} = \dfrac{1}{\lambda_{k_n}}\, (\lambda_{k_n} e + x_{k_n}) \to 0$ при $n \to \infty$. Но тогда e есть предел последовательности $-\dfrac{1}{\lambda_{k_n}}\, x_{k_n}$ элементов полного пространства R и потому, вопреки условию, принадлежит R. Итак, последовательность λ_n ограничена, и потому существует подпоследовательность λ_{k_n}, имеющая конечный предел λ_0. Но тогда $\lambda_{k_n} e$ — фундаментальная последовательность и потому

$$x_{k_n} = (\lambda_{k_n} e + x_{k_n}) - \lambda_{k_n} e$$

— также фундаментальная последовательность. Ввиду полноты пространства R последовательность x_{k_n} имеет в R некоторый предел x. Отсюда $\lambda_{k_n}e + x_{k_n} \to \lambda e + x \in R_1$; так как $\{\lambda_n e + x_n\}$ — фундаментальная последовательность, то также $\lambda_n e + x_n \to \lambda e + x$, и полнота R_1 доказана.

Примеры. 1. Кольцо $C(T)$ всех ограниченных непрерывных функций на топологическом пространстве T (см. пример 1 п. 1 § 10) вполне регулярно. Действительно,

$$|x^* x| = \sup_{t \in T} |\overline{x(t)}\, x(t)| = \sup_{t \in T} |x(t)|^2 = (\sup_{t \in T} |x(t)|)^2 = |x|^2.$$

2. Кольцо $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ вполне регулярно. Действительно, для операторов в гильбертовом пространстве

$$|A^* A| = |A|^2$$

(см. (2) п. 10 § 5).

2. Реализация вполне регулярных коммутативных колец.

Теорема 1. (И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк [1]). *Пусть R — банахово коммутативное кольцо с единицей и пусть в R определена инволюция, удовлетворяющая обычным алгебраическим условиям*:

$$(\lambda x + \mu y)^* = \overline{\lambda} x^* + \overline{\mu} y^*,$$
$$x^{**} = x,$$
$$(xy)^* = y^* x^*$$

и, кроме того, условию [1])

$$|x^* x| = |x^*||x|. \tag{1}$$

Тогда кольцо R вполне изоморфно кольцу $C(\mathfrak{M})$ всех непрерывных функций [2]) *$x(M)$ на пространстве $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов кольца R.*

Доказательство. Докажем сначала, что в кольце R

$$|x^2| = |x|^2.$$

[1]) Отметим, что мы не предполагаем выполненным условие $|x^*| = |x|$. Оно является следствием остальных условий теоремы.

[2]) Напомним, что в кольце $C(\mathfrak{M})$, как и вообще в кольце $C(T)$, норма и инволюция определяются формулами

$$|x| = \sup_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)|, \quad x^*(M) = \overline{x(M)}.$$

Для этого заметим, что в силу (1)

$$|x^{*^2}||x^2| = |x^{*^2}x^2| = |(x^*x)^*(x^*x)| = |(x^*x)^*||x^*x| = \\ = |x^*x||x^*x| = |x^*x|^2 = |x^*|^2|x|^2; \quad (2)$$

с другой стороны,

$$|x^{*^2}| \leqslant |x^*|^2, \quad |x^2| \leqslant |x|^2.$$

Следовательно, (2) может иметь место, лишь когда

$$|x^{*^2}| = |x^*|^2, \quad |x^2| = |x|^2.$$

Отсюда

$$\sup_{m\in\mathfrak{M}} |x(M)| = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{|x^{2^n}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{|x|^{2^n}} = |x| \quad (3)$$

(см. IV п. 2 § 11). Поэтому (см. (2) п. 1 § 14)

$$|x^*| = \sup_{M\in\mathfrak{M}} |x^*(M)| = \sup_{M^*\in\mathfrak{M}} |x(M^*)| = \sup_{M\in\mathfrak{M}} |x(M)| = |x|.$$

Докажем, что

$$x^*(M) = \overline{x(M)},$$

т. е. что R вполне симметрично. Отсюда и из (3) будет следовать утверждение теоремы (см. следствие 1 теоремы 2 п. 3 § 14).

Достаточно показать, что если x эрмитов, то $x(M)$ вещественна на всех $M \in \mathfrak{M}$ [1]). Действительно, тогда для любого $x = x_1 + ix_2 \in R$, где x_1, x_2 эрмитовы, $x^*(M) = (x_1 - ix_2)(M) = x_1(M) - ix_2(M) = \overline{x_1(M) + ix_2(M)} = \overline{x(M)}$. Итак, пусть x эрмитов. Положим

$$u = \exp(ix) = e + \frac{1}{1!}(ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \ldots;$$

в силу соотношения $|x^*| = |x|$ отображение $x \to x^*$ непрерывно и потому

$$u^* = \left(e + \frac{1}{1!}(ix) + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \ldots\right)^* = \\ = e + \frac{1}{1!}(-ix) + \frac{1}{2!}(-ix)^2 + \ldots = \exp(-ix) = u^{-1}.$$

[1]) Излагаемое здесь доказательство соотношения $x^*(M) = \overline{x(M)}$ принадлежит Фукамия [2]. Первоначальное доказательство Гельфанда и Наймарка [1] (оно изложено в первом издании этой книги) основано на использовании понятия кольцевой границы. Другое доказательство, не использующее понятия кольцевой границы, дано Аренсом [1]; оно изложено в книге Гельфанда, Райкова и Шилова [1].

Следовательно, $u^*u = uu^* = e$. Отсюда в силу (1) $1 = |e| = |u^*u| = |u^*||u| = |u|^2$ и потому $|u| = 1$, $|u^{-1}| = |u^*| = |u| = 1$. Но тогда $\sup\limits_{m\in\mathfrak{M}} |u(M)| = |u| = 1$, $|u(M)| \leqslant 1$, и аналогично, $|u^{-1}(M)| = |u(M)|^{-1} \leqslant 1$; следовательно,

$$|u(M)| = 1 \quad \text{для всех} \quad M \in \mathfrak{M}. \tag{4}$$

С другой стороны, $u(M) = \exp(ix(M))$ (см. п. 6 § 11); поэтому (4) возможно, лишь когда $x(M)$ вещественна, и теорема доказана.

Теорема 2[1]. *Всякое полное вполне регулярное коммутативное кольцо с единицей вполне изоморфно кольцу $C(\mathfrak{M})$ всех непрерывных функций на пространстве всех максимальных идеалов этого кольца.*

Действительно, вполне регулярное кольцо удовлетворяет условию $|x^*x| = |x^*||x|$, и потому остается применить теорему 1.

Следствие 1. *Пусть R — банахово коммутативное кольцо без единицы и пусть в R определена инволюция, удовлетворяющая обычным алгебраическим условиям и условию*

$$|x^*x| = |x^*||x|. \tag{5}$$

Тогда R вполне изоморфно кольцу $C_0(T)$ всех непрерывных функций $x(t)$ на некотором локально бикомпактном пространстве T, удовлетворяющих условию

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Доказательство. Пусть R_1 — симметричное кольцо, полученное из R присоединением единицы. Определим в R_1 норму формулой (2) п. 1. Из рассуждения, проведенного в доказательстве предложения III п. 1, видно, что эта норма также удовлетворяет условию (5) и что в этой норме кольцо R_1 полно. Поэтому R_1 вполне изоморфно кольцу $C(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M}$ — пространство максимальных идеалов кольца R_1. Одним из таких максимальных идеалов является кольцо R. Положим $M_0 = R$ и обозначим через T пространство, полученное из $\mathfrak{M}$ удалением точки M_0. Тогда T локально бикомпактно. Функция $x(M)$ тогда и только тогда принадлежит $R = M_0$, когда $x(M_0) = 0$, т. е. когда $\lim\limits_{M\to M_0} x(M) = 0$. Так как M_0 является бесконечно удаленной точкой в T, то тем самым наше следствие доказано.

[1]) Отличие этой теоремы от теоремы 1 состоит в том, что в теореме 1 вместо условия $|x^*x| = |x|^2$ накладывается более слабое условие $|x^*x| = |x^*||x|$.

С л е д с т в и е 2. *Всякое полное вполне регулярное коммутативное кольцо без единицы вполне изоморфно кольцу $C_0(T)$ всех непрерывных функций на некотором локально бикомпактном пространстве T, удовлетворяющих условию*

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Утверждение непосредственно вытекает из следствия 1, ибо вполне регулярное кольцо удовлетворяет условию $|x^*x| = |x^*||x|$.

С л е д с т в и е 3. *Всякое вполне регулярное коммутативное кольцо вполне изоморфно некоторому симметричному подкольцу кольца $C(T)$, где T — некоторое бикомпактное пространство.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Присоединив, если надо, к R единицу и пополнив полученное кольцо, мы придем к кольцу R_1 также вполне регулярному и содержащему R в качестве своего симметричного подкольца. Пусть T — пространство максимальных идеалов кольца R_1; тогда R_1 вполне изоморфно кольцу $C(T)$, а потому R вполне изоморфно некоторому симметричному подкольцу кольца $C(T)$.

С л е д с т в и е 4. *Всякое кольцо R, удовлетворяющее условиям теоремы* 1 (*следовательно, всякое полное вполне регулярное кольцо с единицей*), *вполне симметрично.*

Действительно, всякое такое кольцо R вполне изоморфно кольцу $C(\mathfrak{M})$, которое вполне симметрично.

С л е д с т в и е 5. *Всякое полное вполне регулярное кольцо с единицей регулярно.*

Действительно, такое кольцо вполне изоморфно кольцу $C(\mathfrak{M})$, которое регулярно.

Отметим, что обратное утверждение неверно; так, кольцо $C_n(a, b)$ (см. пример 3 п. 2 § 11) регулярно, но не вполне регулярно.

Всюду в дальнейших следствиях R обозначает полное вполне регулярное коммутативное кольцо.

С л е д с т в и е 6. *Если x — элемент кольца R с единицей, а $f(\lambda)$ — функция, непрерывная на спектре элемента x, то в R существует один и только один элемент y такой, что $y(M) = f(x(M))$ на всех максимальных идеалах M кольца R. Спектр элемента y состоит из всех чисел $f(\lambda)$, где λ пробегает спектр S_x элемента x, и $|y| = \sup\limits_{\lambda\in S_x} |f(\lambda)|$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $f(x(M))$ непрерывна и потому принадлежит кольцу $C(\mathfrak{M})$, вполне изоморфному кольцу R. Следовательно, в R есть элемент y и притом только один, для которого $y(M) = f(x(M))$, $M \in \mathfrak{M}$. Спектр элемента y есть совокупность всех значений $y(M) = f(\lambda)$, где $\lambda = x(M)$; поэтому

$$|y| = \sup_{M\in\mathfrak{M}} |y(M)| = \sup_{M\in\mathfrak{M}} |f(x(M))| = \sup_{l\in S_x} |f(\lambda)|. \tag{6}$$

Элемент y обозначается через $f(x)$ и называется *непрерывной функцией элемента* x. В силу (6)

$$|f(x)| = \sup_{\lambda \in S_x} |f(\lambda)|.$$

Следствие 6 легко обобщается на непрерывные функции нескольких переменных. Напомним (см. п. 7 § 11), что *совместным спектром* элементов $x_1, \ldots, x_n$ кольца R называется совокупность всех систем $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $\lambda_k = x_k(M)$. Повторяя предыдущие рассуждения, мы приходим к следующему результату, обобщающему следствие 6.

Следствие 7. *Если $x_1, \ldots, x_n$ — элементы кольца R с единицей, то для любой функции $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, непрерывной на совместном спектре элементов $x_1, \ldots, x_n$, в кольце R существует один и только один элемент $y = f(x, \ldots, x_n)$ такой, что $y(M) = f(x_1(M), \ldots, x_n(M))$ на всех максимальных идеалах M кольца R. Спектр элемента $f(x_1, \ldots, x_n)$ состоит из всех чисел $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, где $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ пробегает совместный спектр элементов $x_1, \ldots, x_n$; кроме того,*

$$|f(x_1, \ldots, x_n)| = \sup |f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)|, \tag{7}$$

где верхняя грань берется по совместному спектру элементов $x_1, \ldots, x_n$.

Утверждения следствий 6 и 7 переносятся на полные вполне регулярные кольца R без единицы. В этом случае $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ существует для любой функции $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, непрерывной на совместном спектре элементов $x_1, \ldots, x_n$ и равной нулю при $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$. Чтобы в этом убедиться, достаточно присоединить к R единицу; элемент $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ существует в полученном после присоединения кольце R' и он принадлежит кольцу R, ибо на максимальном идеале R кольца R' $x_1(R) = \ldots = x_n(R) = 0$, и потому $y(R) = f(x_1(R), \ldots, x_n(R)) = f(0, \ldots, 0) = 0$.

Следствие 8. *Всякий эрмитов элемент $x \in R$ можно представить в виде $x = u - v$, где u, v — эрмитовы элементы в R с неотрицательным спектром и $uv = 0$.*

Доказательство. Так как эрмитов элемент имеет вещественный спектр, то достаточно положить $u = f_1(x)$, $v = f_2(x)$, где $f_1(\lambda) = \max\{\lambda, 0\}$, $f_2(\lambda) = \max\{-\lambda, 0\}$. Так как $\lambda = f_1(\lambda) = f_2(\lambda)$ и $f_2(\lambda)\, f_2(\lambda) = 0$, то $x = u - v$ и $uv = 0$.

Следствие 9. *Элемент $y = f(x)$ содержится во всяком содержащем x замкнутом симметричном подкольце R_1 с единицей кольца R, а если $f(0) = 0$, то и во всяком содержащем x замкнутом симметричном подкольце без единицы кольца R. В частности, при $f(0) = 0$, элемент $f(x)$ содержится во всяком содержащем x замкнутом симметричном идеале кольца R.*

Доказательство. Положим $x = x_1 + ix_2$, $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, $f(\lambda) = f_1(\lambda_1, \lambda_2) + if_2(\lambda_1, \lambda_2)$, где x_1, x_2 — эрмитовы элементы, а λ_1, λ_2, f_1, f_2 вещественны. Тогда, как легко видеть, $f(x) = f_1(x_1, x_2) + if_2(x_1, x_2)$. Пусть S — совместный спектр элементов x_1, x_2. Согласно теореме Вейерштрасса (см. п. 10 § 2) существует последовательность многочленов $p_n(\lambda_1, \lambda_2)$, равномерно сходящаяся на S к $f_1(\lambda_1, \lambda_2)$. В силу (7)

$$|f_1(x_1, x_2) - p_n(x_1, x_2)| = \sup_S |f_1(\lambda_1, \lambda_2) - p_n(\lambda_1, \lambda_2)| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Но если R_1 — замкнутое симметричное подкольцо с единицей кольца R, содержащее x, то $p_n(x_1, x_2) \in R_1$ и потому также $f_1(x_1, x_2) \in R_1$. Аналогично, $f_2(x_1, x_2) \in R_1$ и потому $f(x) = f_1(x_1, x_2) + if_2(x_1, x_2) \in R_1$. Если же R_1 — кольцо без единицы и $f(0) = 0$, то $p_n(0, 0) \to 0$, поэтому, полагая $\widetilde{p}_n(\lambda_1, \lambda_2) = p_n(\lambda_1, \lambda_2) - p_n(0, 0)$, получаем, что $\sup\limits_S |f_1(\lambda_1, \lambda_2) - \widetilde{p}_n(\lambda_1, \lambda_2)| \to 0$ и $\widetilde{p}_n(x_1, x_2) \in R$. Отсюда, как и выше, заключаем, что $f(x) \in R$.

Утверждение относительно идеала является частным случаем уже доказанного предложения, ибо идеал можно рассматривать как подкольцо без единицы.

Отметим, что требование симметричности идеала $I \subset R$ фактически является излишним в силу следующей теоремы [1]).

Теорема 3. *Всякий замкнутый идеал I в кольце $C(\mathfrak{M})$ есть совокупность всех функций $x(M)$ кольца $C(\mathfrak{M})$, равных нулю на замкнутом множестве $F = h(I)$, т. е.*

$$I = kh(I).$$

Доказательство. Рассмотрим замкнутые идеалы I' кольца $C(\mathfrak{M})$, для которых $h(I') = F$. $C(\mathfrak{M})$ регулярно, поэтому $\overline{I_0(F)}$ — минимальный среди таких идеалов I' (IV п. 4 § 15). Следовательно, достаточно показать, что $\overline{I_0(F)}$ совпадает с $k(F) = kh(I)$ — максимальным среди идеалов I'. Пусть $x(M) \in k(F)$. При любом натуральном n замкнутые множества

$$F_{1n} = \left\{M \in \mathfrak{M};\, |x(M)| \leqslant \frac{1}{n}\right\}, \quad F_{2n} = \left\{M \in \mathfrak{M};\, |x(M)| \geqslant \frac{2}{n}\right\}$$

не пересекаются; следовательно, по лемме Урысона существует функция $y_n(M) \in C(\mathfrak{M})$, удовлетворяющая условиям $0 \leqslant y_n(M) \leqslant 1$, $y_n(M) = 1$ на F_{1n}, $y_n(M) = 0$ на F_{2n}. Тогда $(xy_n)(M) = x(M)$ на $\operatorname{int} F_{1n} \supset F$, $|xy_n| = \sup\limits_{M \in \mathfrak{M}} |(xy_n)(M)| \leqslant \dfrac{2}{n}$ и $x \in \overline{I_0(F)}$ в силу IV п. 4 § 15.

---

[1]) Для колец вещественных функций эта теорема была впервые доказана Стоуном [3], а в комплексном случае — И. М. Гельфандом и Г. Е. Шиловым (см. Гельфанд и Шилов [1] и Шилов [6]).

Теорему 3 можно также сформулировать следующим образом.

Всякий замкнутый идеал в полном вполне регулярном коммутативном кольце с единицей есть пересечение всех содержащих его максимальных идеалов и потому симметричен.

Имеется еще несколько типов колец, кроме вполне регулярных, для которых известны все замкнутые идеалы. Так, в кольце $D_n(a, b)$ каждый замкнутый идеал есть пересечение примарных идеалов (Шилов [1]); это же утверждение справедливо и для многомерного аналога кольца $D_n(a, b)$ (Уитни [1]).

Однако до сих пор не дано описание всех замкнутых идеалов, например, в кольце W_m, в частности в W.

Маявэн [2] показал, что в каждом W_m имеются замкнутые идеалы, не являющиеся пересечением максимальных идеалов, несмотря на то, что в $\mathfrak{M}_m$ нет примарных идеалов, отличных от максимальных; для случая кольца W_3 наиболее простой пример такого идеала был указан ранее Л. Шварцем [1]. (Этот пример приведен в книге Гельфанда, Райкова и Шилова [1], см. с. 244–247.) До сих пор остается также открытым вопрос, в каких еще коммутативных кольцах, кроме вполне регулярных, каждый замкнутый идеал является пересечением максимальных идеалов (см. по этому поводу Шилов [6]).

Отметим еще такое следствие теоремы 3:

Следствие 10. *Если I — замкнутый идеал в полном вполне регулярном коммутативном кольце R с единицей, то факторкольцо R/I есть полное вполне регулярное кольцо с единицей, вполне изоморфное кольцу $C(F)$, где $F = h(I)$.*

Доказательство. Каждой функции $x = x(M)$ кольца $R = C(\mathfrak{M})$ поставим в соответствие функцию $x\hat{}(M) = x(M)$, но рассматриваемую только на $F = h(I)$. Полученное соответствие $x(M) \to x\hat{}(M)$ есть симметричный гомоморфизм кольца $C(\mathfrak{M})$ на кольцо $C(F)$; ядро этого гомоморфизма есть $kh(I) = I$, и потому $C(F)$ симметрически изоморфно кольцу R/I. Докажем, что это соответствие также изометрично.

Пусть $\xi \in R/I$; тогда ξ состоит из функций $x(M) = x\hat{}(M)$ на F. При этом

$$|x| = \sup_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)| \geqslant \sup_{M \in F} |x(M)| = |x\hat{}|$$

и потому также

$$|\xi| = \inf_{x \in \xi} |x| \geqslant |x\hat{}|.$$

Докажем обратное неравенство. Пусть $x(M) = x\hat{}(M)$ на F и $\varepsilon > 0$; обозначим через U совокупность всех точек $M \in \mathfrak{M}$ таких, что $|x(M) - x(M')| < \varepsilon$ при некотором $M' \in F$. Тогда U — открытое множество, содержащее F, и на этом множестве $|x(M)| < |x\hat{}| + \varepsilon$. Но на основании леммы Урысона существует непрерывная функция $y(M)$, равная единице на F, нулю вне U и заключенная между нулем и единицей. Так как $x(M)\,y(M) = x(M) = x\hat{}(M)$ на F, то также $xy \in \xi$ и

$$|\xi| \leqslant |xy| = \sup_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)\,y(M)| \leqslant \sup_{M \in U} |x(M)| \leqslant |x\hat{}| + \varepsilon.$$

Ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$, заключаем отсюда, что $|\xi| \leqslant |x\hat{}|$, чем и завершается доказательство.

З а м е ч а н и е. Следствие 10 можно распространить и на кольца без единицы, именно:

Если I — замкнутый идеал в полном вполне регулярном кольце R, то факторкольцо R/I есть также полное вполне регулярное кольцо и, следовательно, вполне изоморфно некоторому кольцу[1] $C_0(T)$.

Действительно, если R — кольцо без единицы, то кольцо R', полученное из R присоединением единицы, вполне регулярно, и потому R'/I вполне изоморфно некоторому $C(T)$; следовательно, R/I вполне изоморфно некоторому $C_0(T)$.

3. Обобщение на мультинормированные кольца. Полунорма p в кольце R называется *мультипликативной полунормой*, если $p(x) \not\equiv \not\equiv 0$ в R и

$$p(xy) \leqslant p(x)\,p(y) \quad \text{для всех} \quad x, y \in R.$$

Топологическое кольцо R называется *мультинормированным*, если существует достаточное множество P мультипликативных полунорм, определяющих топологию в R.

Примером такого кольца является кольцо $C\hat{}(R)$ всех непрерывных комплексных функций на локально бикомпактном топологическом пространстве T с обычным определением операций сложения, умножения на число и умножения. Положив для любого бикомпактного множества $K \subset T$

$$p_K(x) = \max_{t \in K} |x(t)|,$$

мы получим достаточное множество полунорм $p_K(x)$, являющихся мультипликативными полунормами в $C\hat{}(T)$. Кольцо $C\hat{}(T)$ можно рассматривать как симметричное кольцо, полагая

$$x^*(t) = \overline{x(t)}.$$

Возникает вопрос, нельзя ли охарактеризовать все коммутативные мультинормированные кольца, топологически и симметрично изоморфные этому кольцу $C\hat{}(T)$.

Аренс [5] дал ответ на этот вопрос при следующем дополнительном ограничении.

[1] Напомним, что $C_0(T)$ обозначает совокупность всех непрерывных функций на локально бикомпактном пространстве T, равных нулю на бесконечности.

Условимся называть *локально конечным разбиением единицы* всякую функцию x_p, $p \in P$, со значениями из R, удовлетворяющую условиям:

1) при любом $p \in P$ функция $p'(x_p)$ отлична от нуля лишь для конечного множества S_p функционалов $p' \in P$;
2) $p'(x_p) \leqslant 1$ для всех $p' \in S_p$;
3) при любом $p \in P$ функция $p(x_{p'})$ может быть отличной от нуля лишь при $p' \in S_p$;
4) для любых $p' \in P$ и $y \in R$

$$p'\left(y - \sum_{p \in S_{p'}} y x_p\right) = 0.$$

Так, в рассмотренном выше кольце $C^{\frown}(T)$ существует локально конечное разбиение единицы, если пространство T таково, что для каждого его покрытия $\{G\}$ открытыми множествами существует покрытие $\{G'\}$ открытыми множествами, обладающее следующими свойствами:

а) для каждого G' существует $G \supset G'$;
б) для каждой точки $t \in T$ существует окрестность $U(t)$, пересекающаяся только с конечным числом множеств G'.

Такое пространство T называется *паракомпактным* (Дьедонне [1], Бурбаки [3]).

Основной результат Аренса состоит в следующем. *Всякое коммутативное полное мультинормированное симметричное кольцо R, обладающее локально конечным разбиением единицы и удовлетворяющее условию*

$$p(xx^*) \geqslant C_p\, p(x)\, p(x^*)$$

для всех мультипликативных полунорм p в R, топологически и симметрично изоморфно некоторому кольцу $C^{\frown}(T)$, где T — локально бикомпактное паракомпактное топологическое пространство.

Более общий результат получил позже Ся До-Шин [2, 3]. Он показал, что если мультинормированное симметричное кольцо R с единицей удовлетворяет условию $\sup\limits_p p(x^*x) = \sup\limits_p p(x) \cdot \sup\limits_p p(x^*)$ $(\leqslant \infty)$, то $p(x^*x) = p(x)\,p(x^*)$ для всех p и R топологически и симметрично изоморфно некоторому кольцу $C^{\frown}(T)$.

4. Симметричные подкольца кольца $C(T)$ и бикомпактные расширения пространства T. *Бикомпактным расширением* хаусдорфова топологического пространства T называется хаусдорфово бикомпактное пространство Q, содержащее часть, гомеоморфную T, в качестве всюду плотного подмножества. Так как Q нормально, то для каждого множества $A \subset Q$ и точки $t_0 \notin \overline{A}$ должна существовать непрерывная на Q функция, равная нулю на A и отличная от нуля в точке t_0 (см. I и II п. 8 § 2). Хаусдорфово топологическое пространство, обладающее этим свойством, называется *вполне регулярным*, так что Q, а потому и T, вполне регулярно.

Пусть $C(T)$ — кольцо всех ограниченных непрерывных функций на вполне регулярном пространстве с нормой $|x| = \sup_T |x(t)|$ и $\mathfrak{M}$ — пространство максимальных идеалов кольца $C(T)$. Каждая точка $t_0 \in T$ порождает максимальный идеал в $C(T)$, состоящий из всех функций $x(t) \in C(T)$, обращающихся в нуль в точке t_0, и различным точкам t_0 отвечают различные максимальные идеалы.

Поэтому можно считать, что $T \subset \mathfrak{M}$. Оказывается, что *исходная топология пространства T совпадает с топологией, индуцированной в T из $\mathfrak{M}$, и $\mathfrak{M}$ есть бикомпактное расширение пространства T, максимальное* [1]) *в том смысле, что каждое бикомпактное расширение пространства T получается из $\mathfrak{M}$ непрерывным отображением, оставляющим на месте все точки из T.*

Пусть теперь Q — произвольное бикомпактное расширение пространства T. Всякая функция из $C(Q)$ непрерывна и ограничена на T, и потому ее сужение на T есть функция из $C(T)$; следовательно, $C(Q)$ можно рассматривать как замкнутое подкольцо кольца $C(T)$. *Замкнутое подкольцо R с единицей кольца $C(T)$ тогда и только тогда совпадает с некоторым $C(Q)$, где Q — бикомпактное расширение пространства T, когда*:

1) *из $x(t) \in R$ следует $\overline{x(t)} \in R$*;
2) *для каждого множества $A \subset T$ и точки $t_0 \notin \overline{A}$ существует функция $x \in R$, равная нулю на A и отличная от нуля в точке t_0.*

По поводу доказательства этих утверждений см. Гельфанд, Райков и Шилов [1], § 43.

5. Антисимметричные подкольца кольца $C(T)$. Замкнутое подкольцо R с единицей кольца $C(T)$ называется *антисимметричным*, если из $x(t) \in R$, $\overline{x(t)} \in R$ следует, что $x(t)$ — константа. Примером такого кольца является кольцо A функций, аналитических внутри единичного круга и непрерывных в замкнутом единичном круге (см. пример б) п. 3 § 11). Очевидно, что антисимметричным будет также кольцо $A(G)$ всех функций, аналитических внутри плоской области G и непрерывных в замкнутой области $\overline{G}$ римановой сферы, а также всякое замкнутое подкольцо с единицей кольца $A(G)$ с тем же пространством максимальных идеалов. Гофман и Зингер [1] указали следующий способ построения антисимметричных колец с пространством максимальных идеалов любой размерности $\geqslant 2$. Пусть G — плоская область, Q — бикомпактное пространство и R — кольцо всех функций $f(z, q)$, непрерывных на $\overline{G} \times Q$, аналитических в G по z при каждом фиксированием $q \in Q$ и постоянных по q при некотором фиксированном $z = z_0 \in G$. Нетрудно убедиться, что R антисимметрично.

[1]) Существование бикомпактного расширения у вполне регулярного пространства было доказано Тихоновым [1], а максимального бикомпактного расширения — Чехом [1].

Этот пример показывает, что существуют антисимметричные кольца функций, неаналитических по некоторым переменным. Вопрос о структуре произвольных антисимметричных колец или хотя бы антисимметричных колец с конечным числом образующих до сих пор остается открытым. С другой стороны, решение этого вопроса представляет интерес в связи со следующей теоремой Бишопа [12].

Пусть T — бикомпактное хаусдорфово пространство и R — замкнутое подкольцо с единицей кольца $C(T)$, разделяющее точки T. Тогда существует такое разбиение $P = \{F\}$ пространства T на непересекающиеся замкнутые множества F, что:

1) *сужение R_F кольца R на каждое F антисимметрично*;
2) *если $f \in C(T)$ и ее сужение на каждое F принадлежит R_F, то $f \in R$*;
3) *для каждого $F \in P$, каждого замкнутого множества $A \subset T - F$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует функция $f \in R$, удовлетворяющая условиям*:

$$\sup_{t \in T} |f(t)| \leqslant 1, \quad |f(t) - 1| < \varepsilon \quad \textit{при} \quad t \in F \quad \text{и} \quad |f(t)| < \varepsilon \quad \textit{при} \quad t \in A.$$

Эта теорема является ответом на вопрос, поставленный Г. Е. Шиловым [20].

Множества F в теореме Бишопа являются максимальными множествами антисимметрии для кольца R. Это означает, что каждое F есть максимальное (по включению) множество, на котором R_F антисимметрично.

Недавно Аренсон [1] показал, что имеет место результат, близкий к теореме Бишопа, если заменить максимальные множества антисимметрии кольца некоторыми более мелкими множествами слабой аналитичности. Замкнутое множество F называется *множеством слабой аналитичности* для кольца R, если для каждой функции f на F, являющейся равномерным пределом на F сужений на F функций из R, из условия $|f(x)| \leqslant 1$ для всех $x \in F$ следует, что f^{-1} (1) либо совпадает с F, либо нигде не плотно в F.

Карлесону [4] принадлежит положительное решение проблемы короны: открытый единичный круг образует всюду плотное множество в пространстве максимальных идеалов кольца ограниченных аналитических функций в этом круге с естественной нормой.

6. Подкольца кольца $C(T)$ и некоторые вопросы теории приближений. Пусть T — произвольное бикомпактное множество в комплексном пространстве C^n комплексных переменных $z_1, \ldots, z_n$ (см. пример 2 п. 2 § 2). Обозначим через $P(T)$ кольцо всех функций на T, являющихся равномерными на T пределами последовательностей многочленов от $z_1, \ldots, z_n$, а через $R(T)$ — кольцо всех функций на T, являющихся равномерными пределами рациональных функций с особенностями вне T. Очевидно,

$$P(T) \subset R(T) \subset C(T).$$

Одна из основных задач теории приближений состоит в следующем

1) При каких условиях $P(T) = C(T)$ или $R(T) = C(T)$?
2) Если $P(T) \neq C(T)$ или $R(T) \neq C(T)$, то дать описание всех функций, входящих в $P(T)$, соответственно в $R(T)$.

Для $n = 1$ и кольца $P(T)$ первый результат в этом направлении был получен М. А. Лаврентьевым [1]. Он показал, что при $n = 1$ $P(T) = C(T)$ тогда и только тогда, когда

а) T не имеет внутренних точек;

б) дополнение к T связно.

Далее М. Келдыш [2] доказал, что если замкнутая ограниченная область T в C^1 имеет связное дополнение [1]), то $P(T)$ совпадает с кольцом $A(T)$ функций, непрерывных на T и аналитических во всех внутренних точках T. Полное решение задачи 2) для кольца $P(T)$ над произвольным бикомпактом $T \subset C^1$ было дано Мергеляном [1]. Он показал, что в этом случае $P(T) = A(T)$ тогда и только тогда, когда дополнение к T связно.

В последнее время Бишоп, Вермер, Рудин и др. разработали новый подход к этим вопросам, основанный на теории нормированных колец. В частности, Бишоп [8] (см. также Вермер [13]) получил новое доказательство сформулированной выше теоремы Мергеляна. В работе Бишопа [8] дано необходимое и достаточное условие равенства $R(T) = C(T)$ в терминах *минимальной границы*. Пусть T — бикомпактное пространство и B — замкнутое подкольцо в $C(T)$, разделяющее точки T и содержащее единицу. Для функции $x \in C(T)$ положим $S(x) = \{t : t \in T, |x(t)| = \sup\limits_T |x(t)|\}$. Если среди множеств $N \subset T$, удовлетворяющих условию $N \cap S(x) \neq \varnothing$ для всех $x \subset B$, существует наименьшее N_0, то оно называется *минимальной границей* кольца B. Очевидно, в этом случае замыкание N_0 совпадает с кольцевой границей Γ кольца B (см. § 13). Вообще говоря, N_0 не всегда существует, но *если T метризуемо, то N_0 существует и состоит из всех точек $t \in T$, в которых* [2]) *$S(x) = \{t\}$ для некоторой функции $x \in B$. Если, в частности, T — бикомпактное подмножество в C^1, не имеющее внутренних точек, то $R(T) = C(T)$ тогда и только тогда, когда минимальная граница N_0 кольца $R(T)$ совпадает с T. Кроме того, если $T - N_0$ меры нуль, то $N_0 = T$.*

---

[1]) Нетрудно видеть, что это условие также необходимо для равенства $P(T) = A(T)$.

[2]) Точка t, в которой $S(x) = \{t\}$, называется *точкой пика* функции $x(t)$.

В других терминах необходимые и достаточные условия равенства $R(T) = C(T)$ при $T \subset C^1$ даны Мергеляном [3] и Витушкиным [1].

В наиболее общей ситуации условие $N_0 = \mathfrak{M}_B = T$, где $\mathfrak{M}_B$ — пространство максимальных идеалов кольца B, необходимо для равенства $B = C(T)$ (Вермер [13]); вопрос в том, когда оно достаточно, остается открытым (за исключением рассмотренного выше случая $T \subset C^1$). Также остается открытым вопрос об описании функций из $P(T)$ при $T \subset C^n$, $n > 1$, и $P(T) \neq C(T)$. Для случая полиномиально выпуклого [1)] T Шилов [18] доказал, что *если $x(t)$ — аналитическая функция в некоторой окрестности множества T, то сужение $x(t)$ на T принадлежит $P(T)$*.

Близкой к изложенному кругу вопросов является задача описания максимальных подколец в $C(T)$. Пусть B — замкнутое подкольцо кольца $C(T)$, не совпадающее с $C(T)$ и содержащее единицу; B называется *максимальным*, если из соотношения $B \subset B_1 \subset C(T)$, где B_1 — также замкнутое подкольцо кольца $C(T)$, следует $B_1 = B$ или $B_1 = C(T)$. Вермер [13] доказал, что если T — единичный круг в C^1, то кольцо A (см. п. 5) максимально в $C(T)$; в C^n при $n > 1$ аналогичный результат уже не имеет места, но если максимальное кольцо B в $C(T)$ (где T — произвольное бикомпактное пространство) антисимметрично, то функции $x(t) \in B$ обладают многими свойствами аналитических функций.

Вермер [13] указал общий метод построения колец Дирихле [2)], некоторые из которых являются, а другие не являются максимальными подкольцами [3)] в $C(T)$. С другой стороны, Горин [1] показал, что если T — n-мерный тор $|z_j| = 1$ $(j = 1, \ldots, n)$ в C^n и A — кольцо всех функций, непрерывных на T и допускающих голоморфное продолжение внутрь полицилиндра $|z_j| < 1$ $(j = 1, \ldots, n)$, то A — максимальное подкольцо в $C(T)$ среди замкнутых подколец с единицей, инвариантных относительно некоторой полугруппы автоморфизмов тора T. В статье Горина [1] получена общая теорема, содержащая как частные случаи этот его результат, а также различные обобщения теоремы Вермера (см., например, Гофман и Зингер [1]); в другой статье Горина [3] рассмотрены максимальные подкольца банахова симметричного кольца.

К этому же кругу примыкает следующая задача. Пусть A — замкнутое подкольцо кольца $C(T)$, разделяющее точки T и содержащее константы. При каких условиях $A = C(T)$?

[1)] T называется *полиномиально выпуклым*, если для каждой точки $t_0 \notin T$ существует такой многочлен $P(T)$, что $|P(t_0)| > \max\limits_{t \in T} |P(t)|$.

[2)] Подкольцо B кольца $C(T)$ называется *кольцом Дирихле*, если вещественные части функций из B образуют плотное множество в $C^r(T)$. Подробнее о кольцах Дирихле и смежных вопросах см. в книге Гофмана [4].

[3)] О максимальных подкольцах см. статью Гофмана и Вермера [1].

Отметим здесь только следующий результат [1)] Гофмана и Вермера [1]: $A = C(T)$ тогда и только тогда, когда совокупность всех вещественных частей функций A замкнута по норме в $C^r(T)$.

В заключение отметим, что в некоторых случаях (например, если T конечно или счетно) $C(T)$ не имеет собственных замкнутых подколец B, разделяющих точки на T и содержащих единицу; если же T нульмерно и $\mathfrak{M}_B = T$, то $B = C(T)$.

Подробное изложение рассмотренных здесь вопросов и дальнейшие литературные указания читатель найдет в сборнике «Некоторые вопросы теории приближений», Москва, 1963, см. также обзорные статьи Бишопа [18], Семадени [1], Брело [1], Гофмана [3], монографии Вермера [18] и Фелпса [1] и сборник Function Algebras.

Результаты § 11, за исключением оговоренных в тексте и п. 7, принадлежат Гельфанду [1–4]; п. 7 § 11 — Сонису [1, 2]. Для кольца с конечным числом образующих теорема 8 п. 8 § 11 была получена Шиловым [18], а для произвольного банахова коммутативного кольца с единицей — Аренсом и Кальдероном [1]; теорема 9 п. 8 § 11 принадлежит Шилову [22] (в первоначальной формулировке Шилова [21] отсутствовало условие нормальной многозначности; однако, как показал контрпример Е. Каллин [1], в этой первоначальной формулировке утверждение теоремы неверно); § 12 — Гельфанду и Шилову (см. Гельфанд и Шилов [1] и Шилов [5]); § 13, п. 4 § 14 и § 15 — Шилову [3, 5] (см. также Гельфанд, Райков и Шилов [1]); теоремы $3'$ и 4 п. 2 § 13 — Сонису [1, 2]; пп. 1–2 § 14 — в основном Райкову (см. Гельфанд, Райков и Шилов [1]). Шилову принадлежит также большое число работ, посвященных регулярным кольцам и ряду других специальных вопросов теории коммутативных нормированных колец (см. Шилов [1–22]).

Понятие кольцевой границы (см. § 13) получило дальнейшее обобщение в работах Д. Мильмана [3] и Аренса и Зингера [1].

В работе Д. Мильмана [3] впервые введено понятие минимальной границы.

Теорема 1 § 15 в несколько другой формулировке была впервые получена Крейном [4, 5]. Понятие структурного пространства принадлежит Джекобсону [3]; оно является обобщением результатов Гельфанда и Шилова [1].

Результаты § 16 принадлежат в основном Гельфанду и Наймарку [1], предложение III п. 1 § 16 для случая коммутативного кольца и результат п. 3 § 16 — Аренсу [2, 4], теорема 3 п. 2 § 16 — Гельфанду и Шилову [1].

[1)] Простое доказательство этого результата указал недавно Браудер [2].

Глава IV

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИММЕТРИЧНЫХ КОЛЕЦ

§ 17. Основные понятия и предложения теории представлений

1. Определение и простейшие свойства представления. *Представлением кольца* R называется всякий гомоморфизм этого кольца в кольцо линейных операторов в векторном пространстве; это пространство называется *пространством представления*.

В дальнейшем мы ограничимся только изучением симметричных представлений симметричных колец. Одним из примеров симметричного кольца является совокупность $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ всех ограниченных линейных операторов в данном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ (см. пример 2 п. 1 § 10). Это кольцо $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ будет в дальнейшем играть существенную роль. *Симметричным представлением* симметричного кольца R будет называться симметричный гомоморфизм $x \to A_x$ этого кольца в кольцо $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. В дальнейшем термин «представление» всюду означает симметричное представление. Представление называется *непрерывным*, если этот гомоморфизм непрерывен. Представление называется *циклическим*, если в пространстве $\mathfrak{H}$ существует вектор ξ_0 такой, что множество всех векторов $A_x\xi_0$ плотно в $\mathfrak{H}$. Сам вектор ξ_0, а также пространство $\mathfrak{H}$ называются тогда *циклическими* для представления $x \to A_x$.

Два представления $x \to A_x$, $x \to B_x$ в пространствах $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$ называются эквивалентными, если существует изометрическое отображение $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}'$, при котором оператор A_x переходит в B_x для всех $x \in R$. Другими словами, если U — это изометрическое отображение и если $\xi' = U\xi$, то $B_x\xi' = UA_x\xi$. Следовательно, $B_xU\xi = UA_x\xi$ для всех элементов ξ из $\mathfrak{H}$, т. е. $B_xU = UA_x$.

Таким образом, эквивалентность представлений $x \to A_x$ и $x \to B_x$ в пространствах $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$ означает существование оператора U, изометрически отображающего $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}'$ и такого, что $B_xU = UA_x$.

Подпространство $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$ называется *инвариантным*, если каждый вектор из $\mathfrak{H}_1$ переводится всеми операторами A_x снова в векторы из $\mathfrak{H}_1$.

Если $\mathfrak{H}_1$ — замкнутое инвариантное подпространство, то все операторы A_x можно рассматривать как операторы в $\mathfrak{H}_1$. Мы получим тогда представление в пространстве $\mathfrak{H}_1$. Это представление называется *частью* исходного представления.

I. *Если* $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$ *инвариантно, то его ортогональное дополнение также инвариантно.*

Доказательство. Пусть ξ ортогонален к $\mathfrak{H}_1$, т.е. $(\xi, \eta) = 0$ для всех $\eta \in \mathfrak{H}_1$. Тогда $(A_x\xi, \eta) = (\xi, A_x^*\eta) = (\xi, A_{x^*}\eta) = 0$, ибо также $A_{x^*}\eta \in \mathfrak{H}_1$. Следовательно, вектор $A_x\xi$ также ортогонален к $\mathfrak{H}_1$.

Обозначим через P_1 оператор проектирования в $\mathfrak{H}$ на замкнутое подпространство $\mathfrak{H}_1$.

II. $\mathfrak{H}_1$ *есть замкнутое инвариантное подпространство тогда и только тогда, когда все операторы представления перестановочны с оператором* P_1 *проектирования на* $\mathfrak{H}_1$.

Действительно, если $\mathfrak{H}_1$ — замкнутое инвариантное подпространство и $\xi \in \mathfrak{H}_1$, то также $A_x\xi \in \mathfrak{H}_1$. Отсюда для любого вектора $\xi \in \mathfrak{H}$

$$A_x P_1 \xi \in \mathfrak{H}_1;$$

следовательно,

$$P_1 A_x P_1 \xi = A_x P_1 \xi,$$

т.е.

$$P_1 A_x P_1 = A_x P_1.$$

Применяя операцию инволюции к обеим частям этого равенства и подставляя затем x^* вместо x, получаем, что также

$$P_1 A_x P_1 = P_1 A_x.$$

Следовательно, $P_1 A_x = A_x P_1$; операторы P_1 и A_x перестановочны.

Обратно, если эти операторы перестановочны, то для $\xi \in \mathfrak{H}_1$

$$P_1 A_x \xi = A_x P_1 \xi = A_x \xi;$$

следовательно, также $A_x\xi \in \mathfrak{H}_1$. Это означает, что $\mathfrak{H}_1$ — инвариантное подпространство.

III. *Замкнутая линейная оболочка* $\mathfrak{M}$ *инвариантных подпространств есть также инвариантное подпространство.*

Действительно, всякий элемент ξ из $\mathfrak{M}$ есть предел конечных сумм вида $\xi' = \xi_1 + \ldots + \xi_n$, где $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — векторы исходных подпространств. С другой стороны, $A_x\xi' = A_2\xi_1 + \ldots + A_x\xi_n$ есть сумма того же вида и имеет своим пределом $A_x\xi_1$.

2. Прямая сумма представлений. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное множество и пусть задана совокупность представлений $x \to A_x^{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, симметричного кольца R в пространствах $\mathfrak{H}_\alpha$. Пусть

$$|A_x^{(\alpha)}| \leqslant C_x, \tag{1}$$

где C_x не зависит от α. Обозначим через $\mathfrak{H}$ прямую сумму пространств $\mathfrak{H}_\alpha$, т. е. совокупность всех элементов $\xi = \{\xi_\alpha\}$ таких, что

$$\sum_\alpha |\xi_\alpha|^2 < +\infty$$

(см. п. 6 § 5). Положим

$$A_x\xi = \{A_x^{(\alpha)}\xi_\alpha\}.$$

В силу (1) A_x — ограниченный оператор в $\mathfrak{H}$ и отображение $x \to A_x$ есть представление в пространстве $\mathfrak{H}$. Это представление мы будем называть *прямой суммой* исходных представлений $x \to A_x^{(\alpha)}$. Каждый элемент $\xi = \{\xi_\alpha\}$ такой, что $\xi_\alpha = 0$ при $\alpha \neq \alpha_0$, отождествим с ξ_{α_0}. Тогда каждое пространство $\mathfrak{H}_{\alpha_0}$ станет замкнутым инвариантным подпространством пространства $\mathfrak{H}$, и часть представления $x \to A_x$ в этом подпространстве будет совпадать с представлением $x \to A_x^{(\alpha)}$. Пространство $\mathfrak{H}$ становится при этом прямой суммой своих инвариантных подпространств.

Всякое представление есть прямая сумма циклических представлений.

Доказательство. Пусть $\xi_0 \neq 0$ — какой-либо вектор из $\mathfrak{H}$. Рассмотрим совокупность всех векторов $A_x\xi_0$, где x пробегает все кольцо R. Замыкание этой совокупности обозначим через $\mathfrak{H}_1$; очевидно, $\mathfrak{H}_1$ — замкнутое инвариантное подпространство, в котором ξ_0 есть циклический вектор. Другими словами, $\mathfrak{H}_1$ есть циклическое подпространство представления $x \to A_x$.

Если $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}$, то предложение доказано; в противном случае есть отличное от (0) инвариантное подпространство. Применяя к нему тот же прием, мы выделим циклическое подпространство $\mathfrak{H}_2 \perp \mathfrak{H}_1$.

Обозначим теперь через M совокупность всех систем $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$, состоящих из взаимно ортогональных циклических подпространств представления $x \to A_x$; одной из таких систем является построенная выше система $\{\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2\}$. Упорядоченная при помощи отношения включения $\subset$ совокупность M образует частично упорядоченное множество, удовлетворяющее условиям леммы Цорна; именно, верхней гранью линейно упорядоченного множества систем $\{\mathfrak{H}_\alpha\} \in M$ будет объединение этих систем. Поэтому в M существует максимальная система $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$. Но тогда $\mathfrak{H} = \bigoplus\limits_\alpha \mathfrak{H}_\alpha$; в противном случае в инвариантном подпространстве $\mathfrak{H} \ominus \bigoplus\limits_\alpha \mathfrak{H}_\alpha$ существовало бы отличное от (0) циклическое подпространство $\mathfrak{H}_0$ и мы получили бы систему $\{\mathfrak{H}_\alpha\} \cup \mathfrak{H}_0 \in M$, содержащую максимальную систему $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$, что невозможно.

3. Описание представлений при помощи положительных функционалов. Пусть $x \to A_x$ — представление симметричного кольца в пространстве $\mathfrak{H}$ и пусть ξ_0 — ненулевой вектор из этого пространства. Положим

$$f(x) = (A_x\xi_0, \xi_0);$$

тогда f — положительный функционал. Действительно,

$$f(x^*x) = (A_{x^*x}\xi_0, \xi_0) = (A_{x^*}A_x\xi_0, \xi_0) = \\ = (A_x^*A_x\xi_0, \xi_0) = (A_x\xi_0, A_x\xi_0) \geqslant 0.$$

Теорема 1. *Всякое симметричное представление банахова симметричного кольца R непрерывно, а именно*:

$$|A_x| \leqslant |x|. \tag{1}$$

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что R содержит единицу. Действительно, в противном случае, положив $A_{\lambda e+x} = \lambda 1 + A_x$, мы продолжим представление $x \to A_x$ кольца R до представления банахова симметричного кольца, полученного из R присоединением единицы. Но если R содержит единицу, то, применяя неравенство (1) п. 4 § 10 к положительному функционалу $f(x) = A_x\xi_0, \xi_0)$, получим

$$|(A_x\xi_0, \xi_0)| \leqslant |x|(\xi_0, \xi_0).$$

Подставляя сюда x^*x вместо x, заключаем, что

$$(A_{x^*x}\xi_0, \xi_0) \leqslant |x^*x|(\xi_0, \xi_0) \leqslant |x|^2(\xi_0, \xi_0),$$

т. е.

$$|A_x\xi_0|^2 \leqslant |x|^2|\xi_0|^2.$$

Так как ξ_0 — произвольный ненулевой вектор из $\mathfrak{H}$, то из последнего неравенства следует, что

$$|A_x| \leqslant |x|.$$

Наша ближайшая цель — дать описание представлений при помощи положительных функционалов. Это лучше всего сделать для циклических представлений.

Пусть $x \to A_x$ и $x \to B_x$ — два циклических представления в пространствах $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$ соответственно, и пусть ξ_0 и ξ_0' — циклические векторы этих представлений. Положим

$$f(x) = (A_x\xi_0, \xi_0), \quad f'(x) = (B_x\xi_0', \xi_0').$$

I. *Если $f(x) = f'(x)$ для всех x из R, то представления $x \to A_x$ и $x \to B_x$ эквивалентны.*

Доказательство. Каждому вектору $\xi = A_x\xi_0$ пространства $\mathfrak{H}$ поставим в соответствие вектор $\xi' = B_x\xi'_0$ пространства $\mathfrak{H}'$. Это отображение изометрично. Действительно, пусть $\xi_1 = A_{x_1}\xi_0$, $\xi_2 = A_{x_2}\xi_0$, следовательно, $\xi'_1 = B_{x_1}\xi'_0$, $\xi'_2 = B_{x_2}\xi'_0$. Тогда

$$(\xi_1, \xi_2) = (A_{x_1}\xi_0, A_{x_2}\xi_0) = (A_{x_2^*x_1}\xi_0, \xi_0) = f(x_2^*x_1),$$
$$(\xi'_1, \xi'_2) = (B_{x_1}\xi'_0, B_{x_2}\xi'_0) = (B_{x_2^*x_1}\xi'_0, \xi'_0) = f'(x_2^*x_1).$$

По предположению $f(x_2^*x_1) = f'(x_2^*x_1)$, следовательно, $(\xi_1\xi_2) = (\xi'_1, \xi'_2)$ и изометричность отображения доказана. Так как ξ_0, ξ'_0 — циклические элементы, то элементы вида $A_x\xi_0$, $B_x\xi'_0$ образуют множества, плотные в $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}'$ соответственно. Таким образом, наше изометрическое отображение $\xi \to \xi'$ переводит множество, плотное в $\mathfrak{H}$, в множество, плотное в $\mathfrak{H}'$. Следовательно, это отображение продолжается, и притом единственным образом, до изометрического отображения пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}'$ (см. II п. 10 § 5).

Если $\xi = A_x\xi_0$, $\xi' = B_x\xi'_0$ — соответствующие друг другу векторы из $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$, то $A_{x_0}\xi = A_{x_0x}\xi_0$, $B_{x_0}\xi' = B_{x_0x}\xi'_0$ также соответствуют друг другу. Это означает, что наше отображение переводит оператор A_{x_0} в оператор B_{x_0}; следовательно, представления эквивалентны.

Доказанное предложение показывает, что *циклическое представление $x \to A_x$ с циклическим вектором ξ_0 однозначно с точностью до эквивалентности определяется положительным функционалом $f(x) = (A_x\xi_0, \xi_0)$.*

Возникает вопрос, для всякого ли положительного функционала f существует представление $x \to A_x$ такое, что $f(x) = (A_x\xi_0, \xi_0)$. Ответ на этот вопрос в случае банахова симметричного кольца R с единицей утвердительный.

Именно, пусть f — положительный функционал в R. Введем в R эрмитову форму (см. п. 1 § 5) $(x, y) = f(y^*x)$. При этом может оказаться, что для некоторых элементов x будет $(x, x) = f(x^*x) = 0$. Каждый такой элемент x мы будем называть *эквивалентным нулю* и писать $x \sim 0$.

Обозначим через I_l^f совокупность всех элементов x, эквивалентных нулю.

I_l^f есть левый идеал кольца R.

Доказательство. Если $x \sim 0$ и y — произвольный элемент кольца R, то $f(yx) = 0$. Действительно, по неравенству Коши–Буняковского

$$|f(yx)|^2 \leqslant f(yy^*)\, f(x^*x) = 0.$$

Пусть теперь x_1, $x_2 \in I_l^f$. Тогда в силу только что сделанного замечания

$$f((x_1+x_2)^*(x_1+x_2)) = f(x_1^*x_1) + f(x_1^*x_2) + f(x_2^*x_1) + f(x_2^*x_2) + 0,$$

так что $x_1 + x_2 \in I_l^f$. Далее, очевидно, из $x \in I_l^f$ следует $\alpha x \in I_l^f$. Наконец, пусть $x \sim 0$, а y — произвольный элемент кольца R; положим $z = x^*y^*y$. Тогда по неравенству Коши–Буняковского

$$f(yx^*)\,yx) = f(x^*y^*yx) = f(zx) = 0,$$

т. е. $yx \in I_l^f$.

Итак, I_l^f — левый идеал.

Обозначим через $\mathfrak{H}'$ факторпространство $R'I_f^l$, а через ξ, η, ... — элементы этого пространства, т. е. классы вычетов по I_l^f. Если ξ, η — два таких класса, а x, y — их представители, то полагаем

$$(\xi, \eta) = (x, y) = f(y^*x).$$

Выражение (ξ, η) не зависит от выбора представителей x, y. Действительно, если, например, x', x'' — два элемента из класса ξ, то $x' - x'' \sim 0$, следовательно, $(x', y) - (x'', y) = (x' - x'', y) = f(y^*(x' - x'')) = 0$.

Легко проверить, что (ξ, η) обладает всеми свойствами скалярного произведения, т. е.

1°. $(\xi, \eta) = \overline{(\eta, \xi)}$;

2°. $(\lambda\xi + \mu\eta, \zeta) = \lambda(\xi, \zeta) + \mu(\eta, \zeta)$;

3°. $(\xi, \xi) > 0$ при $\xi \neq 0$.

Именно, 2° очевидно; 1° следует из того, что f — вещественный функционал. Остановимся подробнее на свойстве 3°.

Пусть x — элемент из класса ξ. Так как f — положительный функционал, то

$$(\xi, \xi) = f(x^*x) \geqslant 0.$$

Если при этом $(\xi, \xi) = f(x^*x) = 0$, то $x \sim 0$, т. е. $\xi = 0$.

Итак, в $\mathfrak{H}'$ построено скалярное произведение. Пополнение $\mathfrak{H}'$ по этому скалярному произведению обозначим $\mathfrak{H}$; $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство.

Построим теперь представление в пространстве $\mathfrak{H}$. Пусть $\xi = \{x\}$ — какой-либо класс с представителем x; обозначим через η класс $\{x_0x\}$ с представителем x_0x; так как I_l^f — левый идеал, то η не зависит от выбора представителя x класса ξ. Положив

$$A_{x_0}\xi = \{x_0x\},$$

мы получим линейный оператор в пространстве $\mathfrak{H}'$. Докажем, что он ограничен. По определению скалярного произведения в $\mathfrak{H}'$

$$|A_{x_0}\xi|^2 = (A_{x_0}\xi,\, A_{x_0}\xi) = (x_0x,\, x_0x) = f(x^*x_0^*x_0x). \tag{2}$$

Положим

$$f_1(y) = f(x^*yx);$$

$f_1(y)$ — положительный функционал. Действительно,

$$f_1(y^*y) = f(x^*y^*yx) = f((yx)^*yx) \geqslant 0.$$

Применяя к $f_1(y)$ неравенство (1) п. 4 § 10, получаем

$$|f_1(y)| \leqslant f_1(e)|y|;$$

в частности, при $y = x_0^*x_0$:

$$|f_1(x_0^*x_0)| \leqslant f_1(e)|x_0^*x_0| \leqslant f_1(e)|x_0|^2,$$

т. е.

$$|f(x^*x_0^*x_0x)| \leqslant f(x^*x)|x_0|^2 = (\xi,\, \xi)|x_0|^2.$$

В силу (2) это означает, что

$$|A_{x_0}\xi|^2 \leqslant |x_0|^2|\xi|^2.$$

Таким образом, A_{x_0} — ограниченный оператор в $\mathfrak{H}'$ и его норма не превосходит $|x_0|$:

$$|A_{x_0}| \leqslant |x_0|. \tag{3}$$

Следовательно, этот оператор можно продолжить и притом единственным образом до ограниченного оператора в $\mathfrak{H}$. При этом норма $|A_{x_0}|$ не изменяется, следовательно, неравенство (3) остается в силе и для нормы оператора A_{x_0} в пространстве $\mathfrak{H}$. Отображение $x_0 \to A_{x_0}$ есть представление кольца R. В самом деле,

$$A_{\lambda_1x_1+\lambda_2x_2}\xi = \{(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)x\} = \lambda_1\{x_1x\} + \lambda_2\{x_2x\} = \lambda_1A_{x_1}\xi + \lambda_2A_{x_2}\xi$$

и

$$A_{x_1x_2}\xi = \{x_1x_2x\} = A_{x_1}\{x_2x\} = A_{x_1}A_{x_2}\xi.$$

Остается доказать, что $(A_{x_0})^* = A_{x_0^*}$, т. е. что $(A_{x_0}\xi,\, \eta) = (\xi,\, A_{x_0^*}\eta)$. Пусть x, y — элементы из классов ξ и η. Тогда

$$\begin{aligned} (A_{x_0}\xi,\, \eta) &= (x_0x,\, y) = f(y^*x_0x),\\ (\xi,\, A_{x_0^*}\eta) &= (x,\, x_0^*y) = f((x_0^*y)^*x) = f(y^*x_0x); \end{aligned}$$

следовательно, $(A_{x_0}\xi,\, \eta) = (\xi,\, A_{x_0^*}\eta)$.

Покажем, что полученное представление циклическое. Пусть ξ_0 — класс, содержащий единицу e кольца R, и x_0 — произвольный элемент этого кольца. Тогда $A_{x_0}\xi_0$ есть класс, содержащий элемент x_0. Следовательно, совокупность всех векторов вида $A_x\xi_0$, $x \in R$, совпадает с совокупностью $\mathfrak{H}'$ всех классов; так как $\mathfrak{H}'$ плотно в $\mathfrak{H}$, то отсюда следует, что ξ_0 — циклический вектор.

Найдем, наконец, $(A_x\xi_0, \xi_0)$. Класс ξ_0 содержит e, поэтому

$$(A_x\xi_0, \xi_0) = (xe, e) = f(e^*xe) = f(x).$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Каждому циклическому представлению $x \to A_x$ симметричного кольца R с циклическим вектором ξ_0 отвечает положительный функционал*

$$f(x) = (A_x\xi_0, \xi_0).$$

Функционалом $f(x)$ представление $x \to A_x$ определяется однозначно с точностью до эквивалентности. Обратно, каждому положительному функционалу в симметричном банаховом кольце R с единицей отвечает циклическое представление $x \to A_x$, такое, что

$$f(x) = (A_x\xi_0, \xi_0).$$

4. Представления вполне регулярных коммутативных колец; спектральная теорема.

I. *Всякое циклическое представление полного вполне регулярного коммутативного кольца R с единицей эквивалентно его представлению в некотором пространстве $L^2(f)$, определенному формулой* [1]

$$A_x\xi(M) = x(M)\xi(M),$$

где f — некоторый интеграл в кольце $C(\mathfrak{M})$ всех непрерывных функций на пространстве $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов кольца R.

Доказательство. Кольцо R вполне изоморфно кольцу $C(\mathfrak{M})$ (см. теорему 2 п. 2 § 16), и потому положительный функционал $f(x)$, определяющий данное циклическое представление, можно рассматривать как положительный функционал в кольце $C(\mathfrak{M})$. Если теперь $x(M) \in C(\mathfrak{M})$ и $x(M) \geqslant 0$, то, полагая $y(M) = \sqrt{x(M)}$, имеем $y(M) \in C(\mathfrak{M})$ и $f(x) = f(y^2) = f(y^*y) \geqslant 0$. Следовательно, $f(x)$ есть интеграл на $C(\mathfrak{M})$ и потому (см. X п. 10 § 6) представляется в виде

$$f(x) = \int\limits_{\mathfrak{M}} x(M)\, d\mu(M),$$

[1] Это представление в $L^2(f)$ будем называть *спектральным*.

где μ — мера на $\mathfrak{M}$, определенная интегралом $f(x)$. Поставим теперь в соответствие каждому классу $\xi \in \mathfrak{H}'$ (см. п. 3) функцию [1] $x = x(M) \in \in \xi$, рассматриваемую как элемент пространства $L^2(f)$. Полученное соответствие будет изометрическим, ибо при $\xi, \eta \in \mathfrak{H}'$ и $x \in \xi$, $y \in \eta$

$$(\xi, \eta) = f(y^* x) = \int\limits_{\mathfrak{M}} x(M)\, \overline{y(M)}\, d\mu(M).$$

Так как $\mathfrak{H}'$ плотно в $\mathfrak{H}$ и $C(\mathfrak{M})$ плотно в $L^2(f)$, то это соответствие продолжается единственным образом до изометрического отображения $\xi \to x$ пространства $\mathfrak{H}$ на пространство $L^2(f)$.

При $\xi = \{x\}$, $\xi \in \mathfrak{H}'$ имеем

$$A_{x_0}\xi = \{x_0 x\} \to x_0(M)\, x(M);$$

следовательно, при отображении $\xi \to x$ операторы A_x переходят в операторы умножения на $x(M)$.

Спектральной мерой на локально бикомпактном пространстве T называется всякая операторная функция $P(\Delta)$, определенная на всех борелевских [2] множествах $\Delta \subset T$ и обладающая следующими свойствами:

1) $P(\Delta)$ — оператор проектирования в фиксированном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$;
2) при любом $\xi \in \mathfrak{H}$ функция $(P(\Delta)\, \xi, \xi)$ есть сужение на борелевские множества меры, определенной некоторым интегралом на $L(T)$.

Из свойства 2) вытекает, что $P(\Delta_1 \cup \Delta_2) = P(\Delta_1) + P(\Delta_2)$ при $\Delta_1 \cap \cap \Delta_2 = \varnothing$. Следовательно,

$$P(\Delta_1)\, P(\Delta_2) = 0 \quad \text{при} \quad \Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing. \tag{1}$$

II. *Всякое представление полного вполне регулярного коммутативного кольца R с единицей задается формулой*

$$A_x = \int\limits_{\mathfrak{M}} x(M)\, dP(M), \tag{2}$$

[1] При этом циклическому вектору ξ_0 отвечает класс, содержащий единицу кольца, и потому функция $x_0(M) \equiv 1$.

[2] *Борелевским семейством множеств* в T называется минимальная система Σ множеств в T такая, что 1) Σ содержит все открытые множества $\Delta \subset T$; 2) если $\Delta \in \Sigma$, то $T - \Delta \in \Sigma$; 3) объединение конечного или счетного числа множеств из Σ также принадлежит Σ. Каждое множество $\Delta \in \Sigma$ называется *борелевским*. В силу I–III п. 9 § 6 все борелевские множества измеримы относительно любого интеграла на $L(T)$; в силу IX п. 8 § 6 мера, отвечающая интегралу на $L(T)$, полностью определяется ее заданием на борелевских множествах.

где $\mathfrak{M}$ — пространство максимальных идеалов кольца R, $P(\Delta)$ — некоторая спектральная мера на $\mathfrak{M}$, перестановочная со всеми операторами A_x и со всеми ограниченными операторами в $\mathfrak{H}$, которые перестановочны со всеми операторами A_x, а интеграл сходится в смысле нормы оператора.

Равенство (2) *определяет спектральную меру единственным образом.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай циклического представления $x \to A_x$. В силу I представление $x \to A_x$ эквивалентно тогда спектральному представлению в некотором пространстве $L^2(f)$ и можно, очевидно, считать, что оно просто совпадает с этим спектральным представлением. Определим в $\mathfrak{H} = L^2(f)$ оператор $P(\Delta)$ формулой

$$P(\Delta)\,\xi(M) = P_\Delta(M)\,\xi(M),$$

где $P_\Delta(M)$ — характеристическая функция борелевского множества Δ. Очевидно, тогда $P(\Delta)$ — оператор проектирования в $L^2(f)$ и

$$(P(\Delta)\,\xi, \xi) = \int\limits_{\mathfrak{M}} P_\Delta(M)\,|\xi(M)|^2\,d\mu(M) = \int\limits_{\Delta} |\xi(M)|^2\,d\mu(M) \tag{3}$$

есть мера в $\mathfrak{M}$, подчиненная мере μ.

Докажем формулу (2). Разбивая $\mathfrak{M}$ на конечное число борелевских множеств $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, на каждом из которых $|x(M') - x(M'')| < \varepsilon$, и выбирая $M_k \in \Delta_k$, имеем

$$\begin{aligned}
&\left|A_x\xi - \sum_{k=1}^{n} x(M_k)\,P(\Delta_k)\,\xi\right|^2 = \\
&\qquad = \int \left|x(M)\,\xi(M) - \sum_{k=1}^{n} x(M_k)\,P_{\Delta_k}(M)\,\xi(M)\right|^2 d\mu(M) = \\
&\qquad = \int \left|\sum_{k=1}^{n} [x(M) - x(M_k)]\,P_{\Delta_k}(M)\,\xi(M)\right|^2 d\mu(M) = \\
&\qquad = \int \sum_{k=1}^{n} |x(M) - x(M_k)|^2 P_{\Delta_k}(M)\,|\xi(M)|^2\,d\mu(M) < \\
&\qquad\qquad < \varepsilon^2 \int \sum_{k=1}^{n} P_{\Delta_k}(M)\,|\xi(M)|^2\,d\mu(M) = \varepsilon^2|\xi|^2.
\end{aligned}$$

Поэтому

$$\left|A_x - \sum_{k=1}^{n} x(M_k)\,P(\Delta_k)\right| < \varepsilon, \tag{3$'$}$$

и формула (2) доказана.

Очевидно, оператор $P(\Delta)$ перестановочен со всеми операторами умножения на функции $x(M)$, т. е. со всеми операторами A_x.

Если теперь $x \to A_x$ — произвольное представление кольца R в пространстве $\mathfrak{H}$, то его можно разложить в прямую сумму циклических представлений $x \to A_x^{(\alpha)}$ в некоторых пространствах $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$. Пусть $P^{(\alpha)}(\Delta)$ — соответствующие спектральные меры. Положив $P(\Delta)\xi = \{P^{(\alpha)}(\Delta)\,\xi_\alpha\}$ при $\xi = \xi\{\xi_\alpha\} \in \mathfrak{H}$, мы получим спектральную меру в $\mathfrak{H}$, перестановочную со всеми операторами A_x и удовлетворяющую условию (2).

Докажем единственность такой спектральной меры.

Если $P(\Delta)$ и $P'(\Delta)$ — две спектральные меры, удовлетворяющие условию (2), то для любых $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$ и любой непрерывной функции $x(M)$

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} x(M)\, d(P'(M)\,\xi, \eta) = \int\limits_{\mathfrak{M}} x(M)\, d(P(M)\,\xi, \eta),$$

что возможно лишь, когда $(P'(\Delta)\,\xi, \eta = (P(\Delta)\,\xi, \eta)$, следовательно, когда $P'(\Delta) = P(\Delta)$.

Пусть теперь B — ограниченный линейный оператор в $\mathfrak{H}$, перестановочный со всеми операторами A_x; нам надо доказать, что B перестановочен со всеми операторами $P(\Delta)$. Для этого заметим, что для любых $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$ и любых $x \in R$

$$(A_x B\xi, \eta) = (BA_x\xi, \eta) = (A_x\xi, B^*\eta),$$

т. е. в силу (2)

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} x(M)\, d(P(M)B\xi, \eta) = \int\limits_{\mathfrak{M}} x(M)\, d(P(M)\,\xi, B^*\eta)$$

для любой непрерывной функции $x(M)$. Это возможно лишь тогда. когда

$$(P(\Delta)B\xi, \eta) = (P(\Delta)\,\xi, B^*\eta) = (BP(\Delta)\,\xi, \eta),$$

следовательно, когда $P(\Delta)B = BP(\Delta)$.

III. *Для всякого коммутативного симметричного кольца* $R \subset \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *существует и притом только одна спектральная мера* $P(\Delta)$, *перестановочная со всеми операторами кольца* R *и со всеми операторами из* $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, *перестановочными со всеми операторами из* R, *такая, что*

$$A = \int\limits_{\mathfrak{M}} A(M)\, dP(M) \tag{4}$$

для всех $A \in R$.

Доказательство. Очевидно, можно считать R полным и содержащим единицу, ибо достаточно доказать формулу (4) для кольца, полученного из R присоединением единицы и пополнением. Но симметричное подкольцо кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ вполне регулярно (см. п. 1 § 16) и потому достаточно применить предложение II к представлению $A \to A$, которое каждому оператору $A \in R$ ставит в соответствие этот же оператор.

IV (Спектральная теорема). *Для всякого эрмитова оператора $H \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ существует и притом только одна операторная функция $P(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, обладающая следующими свойствами*:

1) $P(\lambda)$ — *оператор проектирования*;
2) $P(\lambda)P(\mu) = P(\lambda)$ *при* $\lambda \leqslant \mu$;
3) $P(\lambda)$ *перестановочен со всяким оператором A из $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, перестановочным с H*;
4) $P(\lambda\xi)$ *есть непрерывная слева функция при любом $\xi \in \mathfrak{H}$*;
5) *если $[a, b]$ — интервал, содержащий внутри весь спектр оператора H, а $f(\lambda)$ — произвольная непрерывная в $[a, b]$ функция, то $P(\lambda) = 0$ при $\lambda < a$, $P(\lambda) = 1$ при $\lambda > b$ и*

$$f(H) = \int_a^b f(\lambda)\, dP(\lambda); \tag{5}$$

в частности,

$$H = \int_a^b \lambda\, dP(\lambda). \tag{6}$$

Доказательство. Пусть R — минимальное замкнутое симметричное коммутативное подкольцо с единицей в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, содержащее H, а $P(\Delta)$ — спектральная мера, отвечающая R в силу III. Положим $\Delta_\lambda = \{M\colon H(M) < \lambda\}$; так как Δ_λ — открытое множество, то имеет смысл $P(\Delta_\lambda)$. Положим $P(\lambda) = P(\Delta_\lambda)$. Условия 1), 2), 4) будут, очевидно, выполнены, причем условие 2) выполняется в силу (1). Далее, если оператор A из $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ перестановочен с H, то он перестановочен со всеми операторами из R (так как R состоит из полиномов от H и их пределов по норме оператора), а потому и с $P(\Delta_\lambda) = P(\lambda)$. Кроме того, $\Delta_\lambda = \varnothing$ при $\lambda < a$ и $\Delta_\lambda = \mathfrak{M}$ при $\lambda > b$; отсюда заключаем, что $P(\lambda) = 0$ при $\lambda < a$ и $P(\lambda) = 1$ при $\lambda > b$.

Докажем формулу (5). Разобьем для этого интервал $[a, b]$ на конечное число интервалов I_k и положим

$$\Delta_k = \{M\colon H(M) \in I_k\}, \quad \lambda_k = H(M_k), \quad \text{где} \quad M_k \in \Delta_k.$$

Тогда, обозначая через P_k приращение функции $P(\lambda)$ в интервале I_k, имеем: $P_k = P(\Delta_k)$. Следовательно, применяя неравенство (3′) к оператору $A_x = f(H)$, получаем, что при достаточно мелком разбиении интервала I

$$\left|f(H) - \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)P_k\right| = \left|f(H) - \sum_{k=1}^{n} f[H(M_k)]P(\Delta_k)\right| < \varepsilon$$

и формула (5) доказана.

Формула (6) есть ее частный случай при $f(\lambda) = \lambda$.

Предположим теперь, что существуют две функции $P(\lambda)$ и $P'(\lambda)$, удовлетворяющие условиям 1)–5). Тогда для любой непрерывной на $[a, b]$ функции $f(\lambda)$ и любых векторов $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$

$$\int_a^b f(\lambda)\, d(P(\lambda)\,\xi, \eta) = \int_a^b f(\lambda)\, d(P'(\lambda)\,\xi, \eta) = (f(H)\,\xi, \eta);$$

но это возможно, лишь когда $(P'(\lambda)\,\xi, \eta) = (P(\lambda)\,\xi, \eta)$ для всех $\xi, \eta \in \in \mathfrak{H}$, следовательно, когда $P'(\lambda) = P(\lambda)$. Отметим, что единственность функции $P(\lambda)$ легко также следует из единственности спектральной меры для кольца R.

Функция $P(\lambda)$, удовлетворяющая условиям предложения IV, называется *спектральной функцией оператора* H, а формула (6) — *спектральным разложением этого оператора*.

З а м е ч а н и е 1. Условие 4) в IV (а также ниже в V) несущественно. Оно является некоторого рода нормировкой спектральной функции $P(\lambda)$ и может быть заменено, например, непрерывностью справа, если положить $\Delta_\lambda = \{M\colon H(M) \leqslant \lambda\}$. Эта вторая нормировка будет использована ниже в гл. VII.

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что фактически формула (5) следует из формулы (6) и всех остальных условий предложения IV. Действительно, из формулы (6) вытекает, что при любом натуральном m

$$H^m = \lim \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k\right)^m = \lim \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^m P_k = \int_a^b \lambda^m\, dP(\lambda)$$

и, следовательно, для любого многочлена $p(\lambda)$

$$p(H) = \int_a^b p(\lambda)\, dP(\lambda).$$

Если теперь $f(\lambda)$ — произвольная непрерывная на $[a, b]$ функция, а $p_n(\lambda)$ — последовательность многочленов, равномерно сходящаяся на $[a, b]$ к $f(\lambda)$, то, переходя к пределу в равенстве

$$(p_n(H)\,\xi, \eta) = \int_a^b p_n(\lambda)\,d(P(\lambda)\,\xi, \eta),$$

получим

$$(f(H)\,\xi, \eta) = \int_a^b f(\lambda)\,d(P(\lambda)\,\xi, \eta).$$

А отсюда следует (5).

V. *Всякий ограниченный эрмитов оператор H можно представить в виде $H = H_+ - H_-$, где H_+, H_- — ограниченные положительно определенные операторы.*

Действительно, достаточно положить $H_+ = \int_0^b \lambda\,dP(\lambda)$ и $H_- = -\int_a^0 \lambda\,dP(\lambda)$; при этом (если, например, $0 \notin [a, b]$) один из этих операторов может оказаться равным нулю [1]).

Отметим еще случай вполне непрерывного оператора.

VI. *Ограниченный эрмитов оператор H вполне непрерывен тогда и только тогда, когда он имеет вид*

$$H = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k, \tag{7}$$

где P_k — взаимно ортогональные операторы проектирования на конечномерные подпространства, а λ_k — последовательность вещественных чисел, стремящаяся к нулю при $k \to \infty$.

Доказательство. Пусть оператор H вполне непрерывен, $P(\lambda)$ — его спектральная функция, $\mathfrak{M}_\varepsilon$ — инвариантное относительно H подпространство, на которое проектирует оператор $P_\varepsilon = [P(b) - P(\varepsilon)] + [P(-\varepsilon) - P(a)]$, а H_ε — сужение оператора H на $\mathfrak{M}_\varepsilon$. Тогда H_ε вполне непрерывен и имеет обратный

$$H_\varepsilon^{-1} = \int_a^{-\varepsilon} \frac{1}{\lambda}\,dP(\lambda) + \int_\varepsilon^b \frac{1}{\lambda}\,dP(\lambda).$$

Следовательно, единичный оператор $1 = H_\varepsilon^{-1} H_\varepsilon$ в $\mathfrak{M}_\varepsilon$ вполне непрерывен, что возможно, лишь когда $\mathfrak{M}_\varepsilon$ конечномерно. Но тогда $P(\lambda)$ может изменяться в интервалах $[a, -\varepsilon]$ и $[\varepsilon, b]$ только скачками

[1]) Предложение V вытекает также из следствия 8 п. 2 § 16.

в конечном числе точек, следовательно, имеет место формула вида $\int\limits_a^{-\varepsilon} \lambda\, dP(\lambda) + \int\limits_\varepsilon^b \lambda\, dP(\lambda) = \sum\limits_{k=1}^n \lambda_k P_k$, где P_k — взаимно ортогональные операторы проектирования на конечномерные подпространства, а $\lambda_k = 1, 2, \ldots, n$ — точки роста функции $P(\lambda)$ в интервалах $[a, -\varepsilon]$, $[\varepsilon, b]$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ и учитывая формулу (6), получим формулу (7). Так как вне интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$ имеется только конечное число чисел λ_k, то $\lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Обратно, если выполнены условия предложения VI, то

$$\left|\left(H - \sum_{k=1}^n \lambda_k P_k\right)\xi\right|^2 = \left|\sum_{k=n+1}^\infty \lambda - k P_k \xi\right|^2 = \\ = \sum_{k=n+1}^\infty \lambda_k^2 |P_k \xi|^2 \leqslant \max_{k>a} \lambda_k^2 \sum_{k=n+1}^\infty |p_k \xi|^2 \leqslant \max_{k>n} \lambda_k^2 |\xi|^2$$

для каждого $\xi \in \mathfrak{H}$; отсюда $\left|H - \sum\limits_{k=1}^n \lambda_k P_k\right| \leqslant \max\limits_{k>n} |\lambda_k| \to 0$ при $n \to \infty$; так как операторы $\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k P_k$ вполне непрерывны, то и H вполне непрерывен (см. IV п. 6 § 4).

Из формулы (7) вытекает, что:

1) спектр оператора H в кольце $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ состоит только из собственных значений λ_k (см. п. 6 § 4) и, может быть, числа 0, которое может быть или не быть собственным значением; при этом, если $\mathfrak{H}$ бесконечномерно, то точка 0 принадлежит спектру оператора H;
2) подпространство $\mathfrak{M}_k = P_k \mathfrak{H}$ — собственное подпространство оператора H, отвечающее собственному значению λ_k.

Спектральную теорему можно следующим образом распространить на неограниченные самосопряженные операторы. Оператор $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ называется *перестановочным с оператором* T, если $AT \subset TA$. Легко убедиться в том, что оператор $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ перестановочен с самосопряженным оператором H тогда и только тогда, когда он перестановочен с унитарным оператором $U = (H + i1)(H - i1)^{-1}$ (см. V п. 9 § 5).

VII (Спектральная теорема для произвольного самосопряженного оператора). *Для всякого самосопряженного оператора H в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ существует и притом только одна операторная функция $P(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, обладающая следующими свойствами*:

1) $P(\lambda)$ — *оператор проектирования*;
2) $P(\lambda)\, P(\mu) = P(\lambda)$ *при* $\lambda \leqslant \mu$;

3) $P(\lambda)$ *перестановочен со всяким оператором* A *из* $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, *перестановочным с* H;

4) $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} P(\lambda)\,\xi = 0$, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} P(\lambda)\,\xi = \xi$ *для любого* $\xi \in \mathfrak{H}$;

5) $P(\lambda)\,\xi$ *есть непрерывная слева функция при любом* $\xi \in \mathfrak{H}$;

6) $\xi \in \mathfrak{D}_H$ *тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2\, d|P(\lambda)\,\xi|^2 < \infty, \tag{8}$$

и в этом случае

$$H\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dP(\lambda)\,\xi. \tag{9}$$

Доказательство. Так как $U = (H + i1)(H - i1)^{-1}$ унитарен и потому нормален, то существует минимальное симметричное коммутативное кольцо R, содержащее U. Пусть $P(\Delta)$ — спектральная мера, отвечающая этому кольцу, так что

$$U = \int\limits_{\mathfrak{M}} U(M)\, dP(M). \tag{10}$$

При этом $|U(M)| = 1$ в силу унитарности оператора U, и потому $i[U(M) + 1][U(M) - 1]^{-1}$ есть вещественное число, определенное при $U(M) \neq 1$. Полагая $\Delta_\lambda = \{M\colon\ i\,[U(M) + 1][U(M) - 1]^{-1} < \lambda\}$ и $P(\lambda) = P(\Delta_\lambda)$, мы получим операторную функцию, удовлетворяющую условиям 1), 2), 4) и 5). Если оператор $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ перестановочен с H, то он перестановочен также с U, а значит, со всеми операторами кольца R; следовательно, он перестановочен и с $P(\lambda)$ и условие 3) также выполнено.

Единственность $P(\lambda)$ следует из единственности спектральной меры $P(\Delta)$.

Остается проверить выполнение условия 6).

Полагая $\eta = \dfrac{1}{i}\,(H - i1)\,\xi$, следовательно, $U\eta = \dfrac{1}{i}\,(H + i1)\,\xi$, мы видим, что $\mathfrak{D}_H$ состоит из всех векторов ξ вида $\xi = U\eta - \eta$, причем $H\xi = i(U\eta + \eta)$. Но если $\xi = U\eta - \eta$, то в силу (10)

$$P(\Delta)\,\xi = \int\limits_{\Delta} [U(M) - 1]\, dP(M)\,\eta,$$

и потому

$$|P(\Delta)\,\xi|^2 = \int\limits_{\Delta} |U(M) - 1|^2\, d|P(M)\,\eta|^2.$$

Отсюда заключаем, что

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} \frac{1}{|U(M)-1|^2}\, d|P(M)\,\xi|^2 = \\ = \int\limits_{\mathfrak{M}} \frac{1}{|U(M)-1|^2}\, d\int\limits_{\Delta_M} |U(M')-1|^2\, d|P(M')\,\eta|^2 = \\ = \int\limits_{\mathfrak{M}} d|P(M)\,\eta|^2 = |\eta|^2,$$

так что

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} \frac{1}{|U(M)-1|^2}\, d|P(M)\,\xi|^2 < \infty. \tag{11}$$

Обратно, если условие (11) выполнено, то интеграл в формуле

$$\eta = \int\limits_{\mathfrak{M}} \frac{1}{U(M)-1}\, dP(M)\,\xi$$

сходится и

$$U\eta - \eta = \int\limits_{\mathfrak{M}} (U(M)-1)\, dP(\Delta_M) \int\limits_{\mathfrak{M}} \frac{1}{U(M')-1}\, dP(M')\,\xi = \\ = \int\limits_{\mathfrak{M}} (U(M)-1)\, d\int\limits_{\Delta_M} \frac{1}{U(M')-1}\, dP(M')\,\xi = \int\limits_{\mathfrak{M}} dP(M)\,\xi = \xi.$$

Но сходимость интеграла в (11) эквивалентна сходимости интеграла

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} \left| i\,\frac{U(M)+1}{U(M)-1} \right|^2 d|P(M)\,\xi|^2; \tag{12}$$

поэтому $\xi \in \mathfrak{D}_H$ тогда и только тогда, когда сходится интеграл (12), и в этом случае

$$H\xi = i\,(U\eta + \eta) = \int\limits_{\mathfrak{M}} i[U(M)+1]\, dP(M)\,\eta,$$

т. е.

$$H\xi = \int\limits_{\mathfrak{M}} i\,\frac{U(M)+1}{U(M)-1}\, dP(M)\,\xi. \tag{13}$$

Учитывая теперь определение функции $P(\lambda)$ и повторяя рассуждение, проведенное в доказательстве предложения IV, мы видим, что интегралы в (12) и (13) совпадают с интегралами в (8) и (9) соответственно, чем и завершается доказательство.

Функция $P(\lambda)$, удовлетворяющая условиям 1)–6) предложения VII, называется *спектральной функцией* оператора H, а формула (9) — спектральным разложением этого оператора.

Спектральное разложение позволяет определить оператор $f(H)$ для любой непрерывной ограниченной функции $f(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, по формуле

$$f(H) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dP(\lambda).$$

Легко видеть, что тогда

1) если $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$, то $f(H) = \lambda_1 f_1(H) + \lambda_2 f_2(H)$;
2) если $f = f_1 f_2$, то $f(H) = f_1(H)\, f_2(H)$;
3) $|f(H)| \leqslant |f|_\infty$.

Кроме того, если H — ограниченный эрмитов оператор и $f(\lambda)$ непрерывна на спектре H, то это определение оператора $f(H)$ совпадает с определением в п. 2 § 16. Мы предоставляем читателю доказательство этих простых предложений [1)].

5. Спектральные операторы. Спектральное разложение оператора можно следующим образом перенести на некоторые классы линейных операторов в банаховом пространстве. Ограниченный линейный оператор P в банаховом пространстве X называется *проектором*, если $P^2 = P$.

Обозначим через Π комплексную плоскость, а через B — совокупность всех борелевских множеств $\Delta \subset \Pi$; операторная функция $P(\Delta)$, $\Delta \in B$, называется *спектральной мерой*, если для всех Δ_1, $\Delta_2 \in B$:

1) $P(\Delta_1 \cap \Delta_2) = P(\Delta_1)\, P(\Delta_2)$;
2) $P(\Delta_1 \cup \Delta_2) = P(\Delta_1) \cup P(\Delta_2)$, где по определению $P_1 \cup P_2 = P_1 + P_2 - P_1 P_2$;
3) $P(\Pi - \Delta) = 1 - P(\Delta)$;
4) $|P(\Delta)| \leqslant K$, где K — некоторая постоянная.

Из условия 1) при $\Delta_1 = \Delta_2$ вытекает, что $P(\Delta)$ — проектор, при любом $\Delta \in B$; кроме того, из условия 1) вытекает также, что $P(\Delta_1)$, $P(\Delta_2)$ перестановочны при любых $\Delta_1, \Delta_2 \in B$. Далее, из условий 1) и 3) заключаем, что $P(\varnothing) = 0$. Действительно, $P(\varnothing) = P((\Pi - \Delta) \cap \cap \Delta) = P(\Pi - \Delta) P(\Delta) = (1 - P(\Delta))\, P(\Delta) = 0$.

Ограниченный линейный оператор A в X называется *спектральным*, если существует спектральная мера $P(\Delta)$ такая, что:

а) A перестановочен с $P(\Delta)$ при любом $\Delta \in B$;
б) для любого $\Delta \in B$ спектр $S(T, P(\Delta)X)$ оператора T на подпространстве $P(\Delta)X$ содержится в замыкании $\overline{\Delta}$ множества Δ: $S(T, P(\Delta)X) \subset \overline{\Delta}$;

[1)] Подробное изложение спектральной теории операторов см., например, в книгах Ахиезера и Глазмана [1], Люстерника и Соболева [1], Плеснера [2], Данфорда и Шварца [1]; см. также статьи Плеснера [1] и Плеснера и Рохлина [1] и т. V книги В. Смирнова [1].

в) в сопряженном пространстве X' существует плотное множество Γ такое, что

$$f(P(\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \ldots)) = f(P(\Delta_1)) + f(P(\Delta_2)) + \ldots$$

для любого $f \in \Gamma$ и любого счетного числа попарно непересекающихся множеств $\Delta_k \in B$.

При выполнении этих условий $P(\Delta)$ называется *спектральной мерой* оператора A; можно показать [1]), что условиями а), б), в) спектральная мера спектрального оператора определяется единственным образом. Кроме того, можно также показать, что спектральная мера $P(\Delta)$ оператора A перестановочна со всяким ограниченным линейным оператором в X, перестановочным с A.

Спектральный оператор Λ называется *оператором скалярного типа*, если он представляется в виде

$$\Lambda = \int_S \lambda \, dP(\lambda), \tag{1}$$

где S — спектр оператора Λ, а $P(\lambda)$ — его спектральная мера.

Один из основных результатов излагаемой теории состоит в следующем.

Теорема 3. *Оператор A является спектральным тогда и только тогда, когда он представляется в виде*

$$A = \Lambda + N, \tag{2}$$

где Λ — оператор скалярного типа, а N — обобщенный нульстепенный элемент [2]), *перестановочный с Λ. В этом случае представление* (2) *единственно, причем A и Λ имеют один и тот же спектр и одну и ту же спектральную меру.*

Идея доказательства состоит в следующем. Пусть A спектрален, $P(\Delta)$ — его спектральная функция, а S — его спектр. Обозначим через R минимальное замкнутое по операторной норме кольцо ограниченных линейных операторов в X, содержащее A и все $P(\Delta)$ и обладающее следующим свойством:

$$\text{если } B \in R \text{ и } B^{-1} \text{ существует и ограничен, то } B^{-1} \in R. \tag{3}$$

[1]) По поводу подробных доказательств излагаемых здесь результатов см. Фаге [1], Данфорд [2], Данфорд и Шварц [1].

[2]) Это означает, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|N^n|} = 0$$

(см. п. 2 § 11). Очевидно, в конечномерном случае просто некоторая степень оператора N будет равна нулю. Таким образом, всякий линейный оператор в конечномерном пространстве спектрален; в бесконечномерном же случае существуют и неспектральные операторы.

Положим $\Lambda = \int\limits_S \lambda\, dP(\lambda)$, $N = A - \Lambda$. Из определения спектральной меры легко следует, что $A(M) = \Lambda(M)$, следовательно, $N(M) = A(M) - \Lambda(M) = 0$ на всех максимальных идеалах M кольца R. Отсюда заключаем (см. IV и VI п. 2 § 11), что N — обобщенный нульстепенный элемент. При этом из самой формулы $\Lambda = \int\limits_S \lambda\, dP(\lambda)$ вытекает, что Λ — оператор скалярного типа и $P(\Delta)$ — его спектральная мера. Тем самым разложение (2) доказано; его единственность легко следует из единственности спектральной меры данного спектрального оператора.

Обратное утверждение получается путем рассмотрения минимального полного по операторной норме коммутативного кольца R ограниченных линейных операторов в X, содержащего Λ, N и все $P(\Delta)$ (где $P(\Delta)$ — спектральная мера оператора Λ) и также обладающего свойством (3). Именно, пусть $A = \Lambda + N$, где Λ и N удовлетворяют условиям теоремы, и пусть $\mathfrak{M}_\Delta$ — пространство максимальных идеалов M сужения этого кольца на подпространство $P(\Delta)X$; тогда

$$S(A, P(\Delta)X) = \{\lambda\colon \lambda = \Lambda(M) + N(M),\, M \in \mathfrak{M}_\Delta\} = \\ = \{\lambda\colon \lambda = \Lambda(M),\, M \in \mathfrak{M}_\Delta\} = S(\Lambda, P(\Delta)X) \subset \overline{\Delta}.$$

Отсюда заключаем, что A спектрален и имеет тот же спектр и ту же спектральную меру, что и Λ.

В заключение отметим, что исследована также структура колец операторов, порожденных спектральным оператором и значениями его спектральной меры; мы, однако, не имеем возможности останавливаться здесь на этом вопросе (см. по этому поводу Данфорд [2]).

Изложение дальнейших результатов по теории спектральных операторов см. в обзоре Данфорда [3], а также в книге Данфорда и Шварца [1]. Лянце [1] существенно обобщил эту теорию, освободившись от стеснительного для приложений условия $|P(\Delta)| \leqslant K$.

6. Неприводимые представления. Представление называется *неприводимым*, если в пространстве $\mathfrak{H}$ не существует замкнутого инвариантного подпространства, отличного от (0) и всего $\mathfrak{H}$.

Согласно предложению II п. 1 это означает, что всякий оператор проектирования, перестановочный со всеми операторами представления, равен 0 или 1.

Очевидно, всякое представление в одномерном пространстве неприводимо; рассмотрим поэтому неодномерные представления.

I. *Представление $x \to A_x$ в неодномерном пространстве $\mathfrak{H}$ неприводимо тогда и только тогда, когда всякий отличный от нуля вектор пространства $\mathfrak{H}$ есть циклический вектор этого представления.*

Доказательство. Пусть представление $x \to A_x$ неприводимо. При $\xi \in \mathfrak{H}$, $\xi \notin 0$, замкнутое подпространство, натянутое на векторы $A_x\xi$, $x \in R$, есть инвариантное подпространство; в силу неприводимости представления оно совпадает с (0) или $\mathfrak{H}$. Но первый случай невозможен, ибо тогда одномерное пространство $\{\alpha\xi\}$ инвариантно и потому совпадает с $\mathfrak{H}$, т.е. $A_x = 0$ в $\mathfrak{H}$. Во втором же случае ξ есть циклический вектор.

Обратно, если представление $x \to A_x$ приводимо и $\mathfrak{M}$ — отличное от (0) и $\mathfrak{H}$ замкнутое инвариантное подпространство в $\mathfrak{H}$, то никакой вектор ξ из $\mathfrak{M}$ не будет циклическим для представления $x \to A_x$ в $\mathfrak{H}$.

II. *Представление $x \to A_x$ неприводимо тогда и только тогда, когда всякий ограниченный линейный оператор, перестановочный со всеми операторами A_x представления, кратен единице (т.е. кратен единичному оператору).*

Действительно, пусть представление неприводимо и пусть ограниченный оператор B перестановочен со всеми операторами A_x. Предположим сначала, что B — эрмитов оператор; обозначим через $P(\lambda)$ спектральную функцию оператора B. Тогда при любом λ оператор $P(\lambda)$ перестановочен со всеми операторами A_x; ввиду неприводимости представления $P(\lambda) = 0$ или $P(\lambda) = 1$. Так как $(P(\lambda)\,\xi, \xi)$ не убывает при возрастании λ, то отсюда следует, что существует λ_0 такое, что $P(\lambda) = 0$ при $\lambda < \lambda_0$ и $P(\lambda) = 1$ при $\lambda > \lambda_0$. Отсюда

$$B = \int \lambda\, dP(\lambda) = \lambda_0 1.$$

Пусть теперь B — произвольный ограниченный оператор, перестановочный со всеми операторами A_x. Тогда B^* также перестановочен со всеми операторами A_x. Действительно,

$$B^* A_x = (A_{x^*} B)^* = (B A_{x^*})^* = A_x B^*.$$

Поэтому эрмитовы операторы $B_1 = \dfrac{B + B^*}{2}$, $B_2 = \dfrac{B - B^*}{2i}$ также перестановочны со всеми операторами A_x и, следовательно, кратны единице. Но тогда и оператор $B = B_1 + iB_2$ кратен единице.

Обратно, пусть всякий ограниченный оператор, перестановочный со всеми операторами A_x, кратен единице. Тогда, в частности, всякий проектор, перестановочный со всеми операторами A_x, кратен единице. Но оператор проектирования может быть кратным единице только тогда, когда он равен 0 или 1. Следовательно, представление неприводимо.

Замечание. Из этих рассуждений следует также, что *всякий* (à priori *неограниченный*) *самосопряженный оператор H, перестановочный со всеми операторами A_x неприводимого представления $x \to A_x$, кратен единице.*

7. Связь между векторами и положительными функционалами. Выше мы видели, что каждый вектор ξ из $\mathfrak{H}$ порождает положительный функционал $f(x) = (A_x\xi, \xi)$. Если $\xi_1 = \lambda\xi_2$, где $|\lambda| = 1$, то соответствующие функционалы совпадают. Вообще и непропорциональные векторы могут давать один и тот же положительный функционал. Однако если представление неприводимо, то имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $x \to A_x$ — неприводимое представление симметричного кольца R. Если $(A_x\xi_1, \xi_1) = (A_x\xi_2, \xi_2)$ для всех $x \in R$, то $\xi_1 = \lambda\xi_2$, где $|\lambda| = 1$.*

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть случай неодномерного представления кольца R с единицей. Пусть $\xi_1 \neq 0$; в силу I п. 5 множество всех векторов $A_x\xi_1$ плотно в $\mathfrak{H}$. Зададим в $\mathfrak{H}$ оператор U следующим образом: если $\xi = A_x\xi_1$, то $U\xi = A_x\xi_2$; в частности, при $x = e$. $U\xi_1 = \xi_2$, U — изометрический оператор. Действительно,

$$(U\xi, U\xi) = (A_x\xi_2, A_x\xi_2) = (A_{x^*x}\xi_2, \xi_2),$$
$$(\xi, \xi) = (A_x\xi_1, A_x\xi_1) = (A_{x^*x}\xi_1, \xi_2),$$

по предположению же $(A_{x^*x}\xi_2, \xi_2) = (A_{x^*x}\xi_1, \xi_1)$. Отсюда следует, что оператор U определен однозначно; именно, если $A_{x_1}\xi_1 = A_{x_2}\xi_1$, то $A_{x_1-x_2}\xi_1 = 0$; следовательно, также $A_{x_1-x_2}\xi_2 = 0$, т. е. $A_{x_1}\xi_2 = A_{x_2}\xi_2$.

Оператор U определен на множестве всех элементов вида $A_x\xi_1$; это множество плотно в $\mathfrak{H}$; следовательно, U можно продолжить, и притом единственным образом, до ограниченного оператора в $\mathfrak{H}$. Этот оператор перестановочен со всеми операторами A_x. Действительно, если $\xi = A_x\xi_1$, то

$$A_{x_0}U\xi = A_{x_0}A_x\xi_2 = A_{x_0x}\xi_2 = UA_{x_0x}\xi_1 = UA_{x_0}\xi.$$

Другими словами, $A_{x_0}U\xi = UA_{x_0}\xi$ на векторах вида $\xi = A_x\xi_1$. Так как эти векторы образуют в $\mathfrak{H}$ плотное множество и операторы A_{x_0}, U непрерывны, то равенство $A_{x_0}U\xi = UA_{x_0}\xi$ имеет место для всех векторов ξ из $\mathfrak{H}$.

Итак, оператор U перестановочен со всеми операторами A_x неприводимого представления. Следовательно (см. II п. 6), он кратен единице: $U = \lambda 1$. Отсюда $\xi_2 = U\xi_1 = \lambda\xi_1$. Так как U — изометрический оператор, то $|\lambda| = 1$.

Пусть теперь $\xi_1 = 0$; тогда также $\xi_2 = 0$. Действительно, если $\xi_2 \neq 0$, то равенство

$$0 = (A_x\xi_1, \xi_1) = (A_x\xi_2, \xi_2)$$

означает, что вектор $\xi_2 \neq 0$ ортогонален ко всем векторам $A_x\xi_2$; следовательно, это множество не плотно в $\mathfrak{H}$. Последнее же противоречит неприводимости представления. Итак, при $\xi_1 = 0$ также $\xi_2 = 0$, так что утверждение теоремы в этом случае тривиально.

§ 18. Включение симметричного кольца в кольцо операторов

1. Регулярная норма. Пусть R — симметричное кольцо. Обозначим через F_R множество всех положительных функционалов в R. Очевидно, F_R не изменится, если в кольце R каким-нибудь образом ввести норму $|x|$ так, чтобы R стало нормированным симметричным кольцом. Действительно, определение положительного функционала не зависит от нормы в кольце R. Однако при переходе от кольца R к его пополнению $\widetilde{R}$ по этой норме множество F_R, вообще говоря, может измениться. Другими словами, не всякий положительный функционал в кольце R может быть продолжен до положительного функционала в кольце $\widetilde{R}$.

Пусть, например, R — кольцо всех многочленов $p(t)$ с комплексными коэффициентами и пусть в R введена инволюция равенством $(p(t))^* = \overline{p(\overline{t})}$. При любом вещественном t_0 функционал $f_{t_0}(p) = p(t_0)$ есть положительный функционал в R. Введем в кольце R норму формулой

$$|p| = \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |p(t)|.$$

При таком определении нормы R есть (неполное) нормированное кольцо. Из теоремы Вейерштрасса (см. п. 10 § 2) следует, что пополнение $\widetilde{R}$ кольца R по этой норме есть кольцо всех непрерывных функций $x(t)$ в интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$ с нормой $|x| = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)|$.

При $|t_0| > 1$ ни один из функционалов $f_{t_0}(p) = p(t_0)$ не может быть продолжен до положительного функционала в кольце $\widetilde{R}$. Действительно, предположим, что такое продолжение возможно. Тогда согласно предложению I п. 4 § 10

$$|f_{t_0}(p)| \leqslant f_{t_0}(e)|p|,$$

т. е.

$$|p(t_0)| \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} |p(t)|$$

для всякого многочлена $p(t)$, что невозможно.

Норму $|x|$ в симметричном кольце R с единицей будем называть *регулярной*, если всякий положительный функционал f в кольце R можно продолжить до положительного функционала $\widetilde{f}$ в пополнении $\widetilde{R}$ кольца R по норме $|x|$. В этом случае $\widetilde{f}$ — положительный функционал в полном кольце $\widetilde{R}$ с единицей; отсюда в силу (1) п. 4 § 10

$$|\widetilde{f}(\widetilde{x})| \leqslant \widetilde{f}(e)|\widetilde{x}| = f(e)|\widetilde{x}|;$$

в частности, при $\widetilde{x} = x \in R$

$$|f(x)| \leqslant f(e)|x|. \tag{1}$$

Следовательно, функционал $f(x)$ непрерывен в R и потому продолжается до $\widetilde{f}(x)$ в $\widetilde{R}$ единственным образом.

Таким образом, *условие* (1) *является необходимым и достаточным для того, чтобы положительный функционал в симметричном кольце R с единицей можно было продолжить до положительного функционала в его пополнении $\widetilde{R}$ по норме $|x|$.*

Элемент x симметричного кольца R с единицей называется *ограниченным*, если для всех положительных функционалов f в R

$$f(x^*x) \leqslant Cf(e),$$

где C — некоторая постоянная, зависящая только от x.

I. *В симметричном банаховом кольце R с единицей все элементы ограничены.*

Действительно, согласно неравенству (1) $f(x^*x) \leqslant |x^*x| f(e)$ для всех положительных функционалов в кольце R.

II. *Если в симметричном кольце R с единицей существует регулярная норма, то все элементы кольца R ограничены.*

Это предложение также является непосредственным следствием неравенства (1).

2. Приведенное кольцо. Пусть R — симметричное кольцо с единицей. Всюду в дальнейшем в этом параграфе мы предполагаем, что существует хотя бы один положительный функционал в R, не равный тождественно нулю.

Элемент x кольца R будем называть *обобщенным нулем* и писать $x \approx 0$, если $f(x^*x) = 0$ для всех положительных функционалов f.

I. *Элемент x есть обобщенный нуль тогда и только тогда, когда $f(yx) = 0$ для всех положительных функционалов f и всех элементов y кольца R.*

Достаточность очевидна, ибо при $y = x^*$ мы получаем $f(x^*x) = 0$. Необходимость же следует из неравенства Коши–Буняковского:

$$|f(yx)| \leqslant f(yy^*)\, f(x^*x).$$

Следствие 1. *e не есть обобщенный нуль.*

Действительно, если бы $e \approx 0$, то, положив в предложении I $x = e$, мы получили бы, что $f(y) = 0$ для всех $y \in R$ и всех положительных функционалов в R. Это означало бы, что, вопреки нашему предположению, все положительные функционалы в R тождественно равны нулю.

II. *Элемент x_0 есть обобщенный нуль тогда и только тогда, когда $f(x_0) = 0$ для всех положительных функционалов f.*

Необходимость следует из I при $y = e$. Докажем достаточность. Пусть $f(x_0) = 0$ для всех положительных функционалов f. При любых $y \in R$ и λ также $\varphi(x) = f((\lambda e + y)\, x(\overline{\lambda} e + y^*))$ есть положительный функционал; поэтому $f((\lambda e + y)\, x_0(\overline{\lambda} e + y^*)) = 0$, т. е. $\overline{\lambda} f(yx_0) + \lambda f(x_0 y^*) + f(\widetilde{y} x_0 y^*) = 0$ для всех чисел λ и всех $y \in R$. Полагая здесь $\lambda = 1, -1, i, -i$, умножая полученные равенства соответственно на $1, -1, i, -i$ и складывая их, придем к равенству $4f(yx_0) = 0$. Следовательно, $f(yx_0) = 0$ для всех $y \in R$ и x_0 — обобщенный нуль в силу I.

Если $x \approx 0$, то для любого элемента x_1 из R также $x_1 x \approx 0$. Действительно, если $f(yx) = 0$ для всех $y \in R$, то также $f(yx_1x) = 0$ для всех $y \in R$. Аналогично, если $x_1 \approx 0$ и $x_2 \approx 0$, то также $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x \approx 0$.

III. *Если $x \approx 0$, то также $x^* \approx 0$.*

Действительно, пусть $f(x^*x) = 0$ для всех положительных функционалов f. Положим $f_1(y) = f(xyx^*)$; f_1 — также положительный функционал в R. Поэтому $f_1(x^*x) = 0$, т. е. $f(xx^*xx^*) = 0$. Но в силу неравенства Коши–Буняковского $|f(xx^*)|^2 \leqslant f(xx^*xx^*)\, f(e)$; следовательно, $f(xx^*) = 0$ для любого положительного функционала f. Таким образом,

IV. *Совокупность I всех обобщенных нулей есть симметричный и потому двусторонний идеал* (см. с. 218 и I).

Этот идеал мы будем называть *приводящим идеалом* кольца R, а факторкольцо $R' = R/I$ — *приведенным кольцом*.

Если, в частности, $I = (0)$, то само кольцо R является приведенным.

V. *Кольца R' и R имеют одно и то же множество положительных функционалов, точнее — каждый положительный функционал f в кольце R определяет положительный функционал f' в кольце R' по формуле*

$$f'(x') = f(x) \quad \text{для всех} \quad x \in x'. \tag{1}$$

Обратно, каждый положительный функционал f' в кольце R' однозначно определяет положительный функционал f в кольце R по формуле (1).

Действительно, если x_1 и x_2 принадлежат одному и тому же классу x' по I, то $x_1 - x_2 \in I$ и, следовательно, $f(x_1 - x_0) = 0$, $f(x_1) = f(x_2)$. Таким образом, функционал f остается постоянным на каждом классе; поэтому формула (1) определяет линейный функционал f' в R'. Он будет, очевидно, положительным функционалом в R'. Обратно, пусть дан положительный функционал f' в R'; положим $f(x) = f'(x')$ для всех $x \in x'$. Тогда f — положительный функционал в R.

В дальнейшем мы не будем различать f и f'.

VI. *В приведенном кольце R' для всякого элемента $x' \neq 0$ существует положительный функционал f такой, что $f(x'^*x') \neq 0$.*

В самом деле, пусть $f(x'^*x') = 0$ для всех положительных функционалов в R' и пусть $x \in x'$. Тогда $\mathfrak{f}(x^*x) = 0$ для всех положительных функционалов в R, т. е. $x \approx 0$. Но это означает, что $x' = 0$.

С л е д с т в и е 2. *Кольцо R является приведенным тогда и только тогда, когда его приводящий идеал $I = (0)$.*

Рассмотрим теперь случай банахова симметричного кольца с единицей.

VII. *Приводящий идеал банахова симметричного кольца с единицей содержит радикал этого кольца.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если элемент x принадлежит радикалу, то в силу IV п. 4 § 10 $f(x^*x) = 0$ для всех положительных функционалов в R, а это означает, что x принадлежит приводящему идеалу.

VIII. *Приведенное банахово кольцо — полупростое.*

Это непосредственно следует из предложения VII.

Как и в коммутативном случае (см. п. 1 § 12), норма в приведенном симметричном кольце с единицей определяется запасом элементов кольца единственным образом с точностью до эквивалентности.

IX. *Пусть в банаховом симметричном кольце R с единицей e и нормой $|x|$ задана вторая норма $|x|_1$ такая, что $|x^*|_1 = |x^*|$. Рассмотрим пополнение R_1 кольца R по этой норме* (см. п. 3 § 10). *Если R_1 есть приведенное банахово кольцо, то $|x|_1 \leqslant C|x|$ для всех $x \in R$, где C — некоторая постоянная.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем в R новую норму

$$|x|_2 = \max\{|x|, |x|_1\} \tag{2}$$

и докажем, что R полно по этой норме; тогда в силу VII п. 4 § 4 существует такая постоянная C, что $|x|_2 \leqslant C|x|$ для всех $x \in R$ и. значит, в силу (2) $|x|_1 \leqslant |x|_2 \leqslant C|x|$ для всех $x \in R$.

Пусть последовательность $\{x_n\} \subset R$ фундаментальна по норме $|x|_2$. В силу (2) она фундаментальна по нормам $|x|$ и $|x|_1$ и потому, в силу полноты R и R_1, имеет пределы x_0 и x_0^1 соответственно в R и R_1. Докажем, что $x_0 = x_0^1$; тем самым полнота кольца R по норме $|x|_2$ будет доказана.

Пусть f_1 — произвольный положительный функционал в R_1. Обозначим через f его сужение на R. Очевидно, f — положительный функционал в R.

В силу неравенства (1) п. 4 § 10

$$\begin{aligned} |f_1(x_0 - x_0^1)| \leqslant |f_1(x_0 - x_n)| + |f_1(x_n - x_0^1)| = \\ = |f(x_0 - x_n)| + |f_1(x_n - x_0^1)| \leqslant \\ \leqslant f(e)|x_0 - x_n| + f_1(e_1)|x_n - x_0^1| \to 0 \end{aligned}$$

при $n \to \infty$. Поэтому $f_1(x_0 - x_0^1) = 0$ для всякого положительного функционала f_1, и так как R_1 — приведенное кольцо, то $x_0 - x_0^1 = 0$, что и требовалось.

С л е д с т в и е 3. *Всякий симметричный изоморфизм банахова симметричного кольца R с единицей на плотное подмножество R'*

приведенного банахова симметричного кольца R_1 с единицей непрерывен.

Следствие 4. *Если приведенные банаховы симметричные кольца с единицей симметрично изоморфны, то они также топологически изоморфны.*

Следствие 5. *Всякий автоморфизм приведенного банахова симметричного кольца с единицей непрерывен.*

3. Минимальная регулярная норма.

Теорема 1. *Если в приведенном кольце R существует регулярная норма, то в нем существует также минимальная регулярная норма. Пополнение кольца R по этой минимальной норме вполне изоморфно некоторому кольцу операторов в гильбертовом пространстве.*

Доказательство. Пусть $|x|_1$ — какая-нибудь регулярная норма в кольце R, а R_1 — пополнение кольца R по этой норме. Каждый положительный функционал f в кольце R продолжается до положительного функционала в кольце R_1. Этот функционал также обозначим f; ему соответствует циклическое представление кольца R_1. Обозначим это представление через $x \to A_x^{(f)}$. Далее, пусть $x \to A_x$ — прямая сумма всех этих представлений. Согласно теореме 1 п. 3 § 17

$$|A_x| \leqslant |x|_1, \tag{1}$$

где $|A_x|$ — норма оператора A_x.

Отметим, что $|A_x|$ для $x \in R$ полностью определяется запасом положительных функционалов в R и потому не зависит от выбора регулярной нормы $|x|_1$.

Отображение $x \to A_x$ есть изоморфизм кольца A. Действительно, пусть $A_x = 0$. Тогда также $A_{x^*x} = A_{x^*}A_x = 0$. Отсюда следует, что также $A_{x^*x}^{(f)} = 0$, т. е. $(A_{x^*x}^{(f)}\xi, \eta) = 0$ для любых векторов ξ, η из соответствующего пространства $\mathfrak{H}^f$. Положим, в частности, $\xi = \eta = \xi_0$, где ξ_0 — класс, содержащий единицу кольца R. Мы получим, что $f(x^*x) = 0$ для всех положительных функционалов в R. Так как R — приведенное кольцо, то $x = 0$.

Итак, $x \to A_x$ есть изоморфизм кольца R. Введем в кольце R норму формулой $|x| = |A_x|$. Очевидно, кольцо R с нормой $|x| = |A_x|$, а следовательно, и его пополнение $\widetilde{R}$ по этой норме, вполне изоморфно некоторому кольцу операторов в гильбертовом пространстве (именно, кольцу всех операторов A_x).

Докажем, что $|x|$ — регулярная норма. Пусть $f(x)$ — положительный функционал в кольце R. Тогда для любого элемента $x \in R$

$$|f(x)| = |(A_x^{(f)}\xi_0, \xi_0| \leqslant |A_x^{(f)}||\xi_0|^2 \leqslant |A_x||\xi_0|^2 = |x|f(e).$$

Это неравенство показывает, что функционал $f(x)$ непрерывен в смысле нормы $|x|$. Следовательно, он продолжается, и притом единственным образом, до положительного функционала в пополнении $\widetilde{R}$ кольца R по норме $|x|$. Это и означает, что $|x|$ — регулярная норма.

Неравенство (1) показывает, что $|x|$— минимальная регулярная норма.

Следствие 1. *Минимальная регулярная норма вполне регулярна.*

Действительно, в этой норме кольцо R вполне изоморфно некоторому подкольцу в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, а для операторов $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H}) |A^*A| = |A|^2$ (см. (2) п. 10 § 5 и п. 1 § 16).

Следствие 2. *Пусть R — симметричное кольцо с единицей, R_1 — его приведенное кольцо, и пусть в R_1 существует регулярная норма, а значит, и минимальная регулярная норма $|x'|$. Каждому представлению $x \to A_x$ кольца R отвечает представление $x' \to A_{x'}$ кольца R_1 по формуле $A_{x'} = A_x$ при $x \in x'$, $x' \in R'$. Это представление единственным образом продолжается до представления $\widetilde{x} \to A_{\widetilde{x}}$ пополнения $\widetilde{R}_1$ кольца R_1 по норме $|x|_1$. Обратно, каждому представлению $\widetilde{x} \to A_{\widetilde{x}}$ кольца $\widetilde{R}_1$ отвечает представление $x \to A_x$ кольца R по формуле $A_x = A_{x'} = A_{\widetilde{x}}$ при $x \in x' = \widetilde{x} \in \widetilde{R}_1$.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать утверждение для циклических представлений. Пусть ξ_0 — циклический вектор представления $x \to A_x$, I — приводящий идеал кольца R. Если $x \in I$, то $f(x) = (A_x\xi_0, \xi_0) = 0$. Отсюда вытекает [1]), что $A_x = 0$. Следовательно, $x \to A_x$ можно рассматривать как представление $x' \to A_{x'} = A_x^{(f)}$ кольца $R_1 = R/I$, полагая $A_{x'} = A_x$ при $x \in x' \in R_1$. Из определения $|x'|$ (см. доказательство теоремы 1) непосредственно следует, что $|A_{x'}| = |A_{x'}^{(f)}| \leqslant |x'|$, и потому представление $x' \to A_{x'}$ единственным образом продолжается до представления $\widetilde{x} \to A_{\widetilde{x}}$ кольца $\widetilde{R}_1$. Обратное утверждение очевидно.

Теорема 2. *Для минимальной регулярной нормы имеет место равенство*

$$|x| = \sqrt{\sup f(x^*x)},$$

где верхняя грань взята по всем положительным функционалам f кольца R, для которых $f(e) = 1$.

Доказательство. Пусть x — элемент кольца R, ξ — соответствующий элемент пространства $\mathfrak{H}'$. Тогда

$$|A_{x_0}^{(f)}|^2 = \sup_{|\xi|=1} |A_{x_0}^{(f)}\xi|^2 = \sup_{f(x^*x)=1} f(x^* x_0^* x_0 x),$$

[1]) Действительно, для произвольных $x \in I$, $y, z \in R$, также $z^*xy \in I$, ибо I — двусторонний идеал. Отсюда $0 = (A_{z^*xy}\xi_0, \xi_0) = (A_xA_y\xi_0, A_z\xi_0)$ так как ξ_0 цикличен, то $A_y\xi_0$ и $A_z\xi_0$ образуют плотные множества в пространстве представления, и потому $A_x = 0$.

где верхняя грань взята по всем элементам x кольца R таким, что $f(x^*x) = 1$. Положим $f_x(y) = f(x^*yx)$; f_x — положительный функционал в R и $f_x(e) = f(x^*x) = 1$. Поэтому

$$f(x^*x_0^*x_0x) = f_x(x_0^*x_0) \leqslant \sup_{f(e)=1} f(x_0^*x_0).$$

Отсюда

$$|A_{x_0}^{(f)}|^2 \leqslant \sup_{f(e)=1} f(x_0^*x_0),$$

следовательно, и

$$|x_0|^2 = |A_{x_0}|^2 = \sup_f |A_{x_0}^{(f)}| \leqslant \sup_{f(e)=1} f(x_0^*x_0).$$

С другой стороны, при $f(e) = 1$

$$f(x_0^*x_0) = |A_{x_0}^{(f)}\xi_0|^2 \leqslant |A_{x_0}^{(f)}|^2 \leqslant |A_{x_0}|^2 = |x_0|^2.$$

Поэтому $\sup\limits_{f(e)=1} f(x_0^*x_0) = |x_0|^2$, и теорема доказана.

Теорема 3. *Для того чтобы в приведенном кольце существовала регулярная норма, необходимо и достаточно, чтобы все элементы кольца R были ограниченными.*

Доказательство. Необходимость была доказана в п. 1; докажем достаточность.

Пусть все элементы кольца R ограничены. Тогда

$$f(x_0^*x_0) \leqslant C_{x_0}f(e)$$

для всех положительных функционалов f в кольце R. В частности, полагая снова $f_x(y) = f(x^*yx)$, имеем

$$f_x(x_0^*x_0) \leqslant C_{x_0}f_x(e),$$

т. е.

$$f(x^*x_0^*x) \leqslant C_{x_0}f(x^*x).$$

Это неравенство можно переписать в виде

$$|A_{x_0}^{(f)}\xi|^2 \leqslant C_{x_0}|\xi|^2;$$

следовательно, оно означает, что $A_{x_0}^{(f)}$ — ограниченный оператор и

$$|A_{x_0}^{(f)}|^2 \leqslant C_{x_0}.$$

Таким образом, при фиксированном x_0 нормы операторов $A_{x_0}^{(f)}$ ограничены одним и тем же числом. Поэтому можно построить прямую сумму $x \to A_x$ всех представлений $x \to A_x^{(f)}$. Как было обнаружено при доказательстве теоремы 1, норма $|x| = |A_x|$ будет регулярной.

Следствие. *В приведенном банаховом симметричном кольце с единицей существует регулярная* (*а значит*, *и минимальная регулярная*) *норма*.

Утверждение непосредственно вытекает из теорем 1 и 3 и предложения I п. 1.

§ 19. Неразложимые функционалы и неприводимые представления

1. Положительные функционалы, подчиненные данному. Пусть R — симметричное кольцо, а f, f_1 — положительные функционалы в R, причем $f \neq 0$. Будем говорить, что f_1 подчинен f, и писать $f_1 \prec f$, если существует число λ такое, что $\lambda f - f_1$ — положительный функционал в R. Очевидно, в этом случае λ вещественно и $\geqslant 0$, ибо при $\lambda < 0$ и $f(x^*x) > 0$ будет $\lambda f(x^*x) - f_1(x^*x) < 0$.

Теорема 1. *Пусть $x \to A_x$ — циклическое представление симметричного кольца R в пространстве $\mathfrak{H}$, определенное данным положительным функционалом f, а ξ_0 — соответствующий циклический вектор. Тогда всякий положительный функционал f_1, подчиненный f, имеет вид*

$$f_1(x) = (A_x B\xi_0, \xi_0), \tag{1}$$

где B — ограниченный положительно определенный оператор в пространстве $\mathfrak{H}$, перестановочный со всеми операторами A_x, $x \in R$. Обратно, всякий такой оператор B определяет по формуле (1) *положительный функционал f_1, подчиненный f.*

Соответствие $f_1 \sim B$, таким образом установленное, взаимно однозначно.

Доказательство. Пусть B — ограниченный положительно определенный оператор в $\mathfrak{H}$, перестановочный со всеми операторами A_x. Тогда $f_1(x) = (A_x B\xi_0, \xi_0)$ — положительный функционал. Действительно,

$$f_1(x^*x) = (A_{x^*x} B\xi_0, \xi_0) = (A_x B\xi_0, A_x\xi_0) = (BA_x\xi_0, A_x\xi_0) \geqslant 0,$$

ибо B — положительно определенный оператор. Функционал f_1 подчинен функционалу f. Действительно, оператор B ограничен, следовательно, существует число λ такое, что $(B\xi, \xi) \leqslant \lambda(\xi, \xi)$, т. е. $\lambda(\xi, \xi) - (B\xi, \xi) \geqslant 0$ для всех векторов ξ из $\mathfrak{H}$. Полагая в этом неравенстве $\xi = A_x\xi_0$, получаем

$$\lambda(A_{x^*x}\xi_0, \xi_0) - (A_{x^*x}B\xi_0, \xi_0) \geqslant 0,$$

т. е.

$$\lambda f(x^*x) - f_1(x^*x) \geqslant 0.$$

Но это означает, что $\lambda f - f_1$ — положительный функционал. Следовательно, функционал f_1 подчинен функционалу f.

Обратно, пусть f_1 — положительный функционал, подчиненный функционалу f; именно, пусть $\lambda f - f_1$ — положительный функционал, следовательно, $\lambda f(x^*x) - f_1(x^*x) \geqslant 0$, т. е.

$$0 \leqslant f_1(x^*x) \leqslant \lambda f(x^*x). \tag{2}$$

Для

$$\xi = A_x\xi_0, \quad \eta = A_y\xi_0$$

положим

$$(\xi, \eta)_1 = f_1(y^*x).$$

Это выражение зависит только от элементов ξ и η. Действительно, пусть, например, $\xi = A_x\xi_0$ и $\xi = A_{x'}\xi_0$, следовательно, $A_{x-x'}\xi_0 = 0$. Тогда

$$f((x - x')^*(x - x')) = (A_{x-x'}\xi_0, A_{x-x'}\xi_0) = 0.$$

В силу неравенства (2) отсюда вытекает, что также $f_1((x - x')^* \times \times (x - x')) = 0$; следовательно, по неравенству Коши–Буняковского

$$f_1(y^*(x - x')) = 0, \quad f_1(y^*x) = f_1(y^*x').$$

Тем самым мы доказали независимость выражения $(\xi, \eta)_1$ от способа представления элемента ξ в виде $\xi = A_x\xi_0$. Аналогичное, очевидно, верно и в отношении элемента η.

Обозначим через $\mathfrak{H}'$ множество всех векторов ξ вида $A_x\xi_0$; так как ξ_0 — циклический элемент, то $\mathfrak{H}'$ плотно в $\mathfrak{H}$. В силу только что доказанного выражение $(\xi, \eta)_1$ однозначно определено в $\mathfrak{H}'$; очевидно, оно есть билинейная форма по отношению к ξ, η. Неравенство (2) можно переписать в виде

$$0 \leqslant (\xi, \xi)_1 \leqslant \lambda(\xi, \xi); \tag{2$'$}$$

следовательно, $(\xi, \eta)_1$ — ограниченная билинейная форма в $\mathfrak{H}'$. Ее можно поэтому продолжить, и притом единственным образом, до ограниченной билинейной формы во всем пространстве $\mathfrak{H}$. При этом неравенства (2$'$) будут иметь место во всем пространстве $\mathfrak{H}$. Но ограниченной билинейной форме $(\xi, \eta)_1$ в $\mathfrak{H}$ отвечает ограниченный оператор B, такой, что $(\xi, \eta)_1 = (B\xi, \eta)$ (см. п. 3 § 5). Так как $(B\xi, \xi) = = (\xi, \xi)_1 = f_1(x^*x) \geqslant 0$, то B — положительно определенный оператор. Докажем, что B перестановочен со всеми операторами A_x. Для этого заметим, что при $\xi = A_x\xi_0$, $\eta = A_y\xi_0$

$$(BA_{x_0}\xi, \eta) = (BA_{x_0x}\xi_0, A_y\xi_0) = (A_{x_0x}\xi_0, A_y\xi_0)_1 = f_1(y^*x_0x),$$

$$(A_{x_0}B\xi, \eta) = (B\xi, A_{x_0^*}\eta) = (BA_x\xi_0, A_{x_0^*y}\xi_0) = \\ = (A_x\xi_0, A_{x_0^*y}\xi_0)_1 = f_1((x_0^*y)\,x) = f_1(y^*x_0x),$$

и, значит,

$$(A_{x_0}B\xi, \eta) = (BA_{x_0}\xi, \eta) \tag{3}$$

для всех векторов ξ и η из $\mathfrak{H}'$. Так как обе части равенства (3) суть непрерывные функции от ξ и η по норме в $\mathfrak{H}$ и так как $\mathfrak{H}'$ плотно в $\mathfrak{H}$, то это равенство имеет место для всех векторов ξ, η из $\mathfrak{H}$. Но последнее означает, что $A_{x_0}B = BA_{x_0}$, т. е. B перестановочен с A_{x_0}.

Очевидно, что при данном фиксированном операторе B, перестановочном со всеми операторами A_x, равенство (1) однозначно определяет функционал f_1. Обратно, при данном положительном функционале f_1, подчиненном функционалу f, это равенство единственным образом определяет ограниченный положительно определенный оператор B, перестановочный со всеми операторами A_x. Действительно, подставляя в равенство (1) y^*x вместо x и переписывая полученное равенство в форме

$$f_1(y^*x) = (BA_x\xi_0, A_y\xi_0),$$

мы видим, что скалярное произведение $(B\xi, \eta)$ однозначно определено для всех векторов ξ, η из $\mathfrak{H}'$. Так как $\mathfrak{H}'$ плотно в $\mathfrak{H}$, то тем самым ограниченный оператор B также определен однозначно.

2. Кольцо C_f. Функционал f_1 в симметричном кольце R будем называть *подчиненным данному положительному функционалу* f в R, если f_1 есть линейная комбинация с комплексными коэффициентами положительных функционалов, подчиненных функционалу f.

Из теоремы 1 следует, что всякий функционал f', подчиненный функционалу $f(x) = (A_x\xi_0, \xi_0)$, имеет вид

$$f'(x) = (BA_x\xi_0, \xi_0),$$

где B — ограниченный оператор, перестановочный со всеми операторами A_x. Действительно, пусть $f'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x)$, где f_k — положительные функционалы, подчиненные функционалу f. Тогда $f_k(x) = (B_kA_x\xi_0, \xi_0)$, где B_k — положительно определенный оператор, перестановочный со всеми операторами A_x. Положим $B = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k B_k$. Очевидно, B — ограниченный оператор, перестановочный со всеми операторами A_x, и, кроме того,

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (B_kA_x\xi_0, \xi_0) = (BA_x\xi_0, \xi_0).$$

Обратно, всякий ограниченный оператор B, перестановочный со всеми операторами A_x, можно представить в виде линейной комбинации положительно определенных операторов, перестановочных со всеми операторами A_x (см. V п. 4 § 17). Поэтому функционал $f'(x) = (BA_x\xi_0, \xi_0)$ есть линейная комбинация положительных функционалов, подчиненных функционалу f. Итак, *существует взаимное* *однозначное соответствие между функционалами f', подчиненными данному положительному функционалу f и ограниченными операторами B, перестановочными со всеми операторами A_x. Это соответствие устанавливается формулой*

$$f'(x) = (BA_x\xi_0, \xi_0).$$

Обозначим через C_f совокупность всех функционалов, подчиненных положительному функционалу f. В силу только что сказанного эту совокупность можно рассматривать как симметричное кольцо. Именно, если

$$f_1(x) = (B_1A_x\xi_0, \xi_0), \quad f_2(x) = (B_2A_x\xi_0, \xi_0),$$

то мы определяем произведение $f_1 \cdot f_2$ функционалов f_1 и f_2 равенством

$$(f_1f_2)(x) = (B_1B_2A_x\xi_0, \xi_0),$$

а инволюцию — равенством

$$f_1^*(x) = (B_1^*A_x\xi_0, \xi_0),$$

откуда

$$f_1^*(x) = \overline{f_1(x^*)}.$$

При таком определении умножения и инволюции и при обычном определении сложения и умножения на число совокупность C_f становится кольцом, симметрично изоморфным кольцу R_f всех ограниченных операторов B, перестановочных с каждым оператором A_x. При этом единичному оператору соответствует сам функционал f.

3. Неразложимые положительные функционалы. Положительный функционал называется *неразложимым*, если всякий функционал f_1, подчиненный функционалу f, кратен ему, т. е. $f_1 = \lambda f$. Другими словами, f неразложим, если кольцо C_f состоит только из функционалов λf.

Теорема 2. *Циклическое представление $x \to A_x$ неприводимо тогда и только тогда, когда определяющий его положительный функционал $f(x) = (A_x\xi_0, \xi_0)$ неразложим.*

Доказательство. Согласно II п. 6 § 17 неприводимость представления $x \to A_x$ равносильна тому, что кольцо R_f (см. п. 2) состоит только из операторов, кратных единице. В силу изоморфизма колец R_f и C_f отсюда следует, что кольцо C_f состоит из кратных f. Последнее же означает, что f — неразложимый функционал.

Пусть R — замкнутое симметричное подкольцо кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, т. е. кольцо (вообще не всех) ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, содержащее вместе с A также A^* и замкнутое по норме оператора. Кейдисон [8] доказал, что:

1). *Если R неприводимо, то оно также алгебраически неприводимо, т. е. каждое* (а не только замкнутое) *инвариантное относительно всех $A \in R$ подпространство есть либо* (0), *либо все $\mathfrak{H}$.*

2). *Если f — ненулевой неразложимый положительный функционал в R и $I_l = \{A\colon A \subset R, f(A^*A) = 0\}$, то R/I_l полно относительно скалярного произведения $(\xi, \eta) = f(B^*A)$, где $A \in \xi$, $B \in \eta$, $\xi, \eta \in R/I_l$.*

3). *Каждый замкнутый левый идеал в R есть пересечение содержащих его максимальных левых идеалов.*

4. Теоремы полноты и аппроксимации. Применим теперь результаты пп. 7 и 9 § 3.

Пусть R — банахово симметричное кольцо с единицей. Обозначим через H множество всех эрмитовых элементов кольца R. Очевидно, H — вещественное банахово пространство. Согласно I п. 4 § 10 всякий положительный функционал f можно рассматривать как ограниченный линейный функционал в H, причем $|f| = f(e)$. Поэтому f можно рассматривать как элемент сопряженного пространства H'. Обозначим через K совокупность всех положительных функционалов, удовлетворяющих условию [1] $f(e) = 1$. Тогда также $|f| = 1$, следовательно, K есть подмножество единичного шара Q в H'. В силу III п. 7 § 3 Q бикомпактно в слабой топологии в H', ибо Q есть совокупность всех линейных функционалов $f \in H'$, удовлетворяющих неравенству

$$|f(x)| \leqslant p(x), \quad \text{где} \quad p(x) = |x|.$$

Так как функция $F(f) = f(e)$ непрерывна, а совокупность всех положительных функционалов замкнута в H', то K — замкнутое подмножество бикомпактного множества Q, следовательно, K бикомпактно.

Наконец, K выпукло. Действительно, если $f_1, f_2 \in K$, т. е. $f_1(e) = f_2(e) = 1$, то $f = tf_1 + (1-t)\,f_2$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$ — положительный функционал и $f(e) = 1$, следовательно, $f \in K$.

I. *Положительный функционал f, удовлетворяющий условию $f(e) = 1$, неразложим тогда и только тогда, когда он есть экстремальная точка множества K.*

Доказательство. Пусть неразложимый положительный функционал f принадлежит отрезку $[f_1, f_2]$ в K, т. е. имеет вид

$$f = tf_1 + (1-t)\,f_2, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Тогда $f - tf_1 = (1-t)\,f_2$ — положительный функционал, т. е. если $t > 0$, функционал f_1 подчинен функционалу f. Так как f неразложим, то $f_1 = t_1 f$. В частности, $f_1(e) = t_1 f(e)$, откуда $t_1 = 1$ и $f_1 = f$. Поэтому f не является внутренней точкой никакого отрезка $[f_1, f_2] \subset K$, т. е. f — экстремальная точка. Обратно, пусть f — экстремальная точка множества K и f_1 — функционал из K, подчиненный функционалу f. Это означает, что при некотором $\lambda > 0$ $f' = f - \lambda f_1$ есть

[1] Положительные функционалы f, удовлетворяющие условию $f(e) = 1$, называются *нормированными*.

положительный функционал. Если $f'(e)=0$, то $f-\lambda f_1=0$, $f=\lambda f_1$ и $1=f(e)=\lambda f_1(e)=\lambda$; следовательно, в этом случае $f_1=f$. Докажем теперь, что случай $f'(e)>0$ невозможен. Пусть $f'(e)>0$. Положим $f_2=\dfrac{f'}{\mu}$, где $\mu=f'(e)$. Тогда $f_2(e)=1$, следовательно, $f_2\in K$ и

$$f=\lambda f_1+\mu f_2, \tag{1}$$

причем $\lambda>0$, $\mu>0$, $\lambda+\mu=1$ (последнее получим, полагая в (1) $x=e$), т. е. f — внутренняя точка отрезка $[f_1, f_2]$ в K, что противоречит экстремальности f. Таким образом, $f_1=f$, другими словами, всякий функционал из K, подчиненный функционалу f, с ним совпадает. Следовательно, функционал f неразложим, и предложение I полностью доказано.

Рассмотрим некоторое множество неприводимых представлений симметричного кольца R. При этом два эквивалентных неприводимых представления не будем считать различными. Это множество представлений называется *полным*, если для всякого элемента $x_0\neq 0$ кольца R в этом множестве существует неприводимое представление $x\to A_x$ такое, что $A_{x_0}\neq 0$.

Теорема 3. *Совокупность всех неприводимых представлений банахова приведенного кольца образует полную систему.*

Доказательство. Пусть R — банахово приведенное кольцо (см. п. 2 § 18) и $x_0\neq 0$ — элемент этого кольца. По определению приведенного кольца существует положительный функционал $f_1(x)$ такой, что

$$f_1(e)=1 \quad \text{и} \quad f_1(x_0^*x_0)>0.$$

Пусть, далее, $P_{x_0^*x_0}$ — опорная гиперплоскость к K, определенная элементом $x_0^*x_0$ (см. п. 9 § 3). Согласно предложению VII п. 9 § 3 $P_{x_0^*x_0}$ содержит экстремальную точку f_0. Имеем

$$f_0(x_0^*x_0)=\max_{f\in K} f(x_0^*x_0)\geqslant f_1(x_0^*x_0)>0. \tag{2}$$

С другой стороны, согласно I всякая экстремальная точка f_0 множества K есть неразложимый положительный функционал. Этот функционал определяет неприводимое представление $x\to A_x$ кольца R (см. теорему 2 п. 3), причем

$$(A_x\xi_0, \xi_0)=f_0(x),$$

где ξ_0 — некоторый вектор в пространстве представления. В частности, в силу (2)

$$|A_{x_0}\xi_0|^2=(A_{x_0^*x_0}\xi_0, \xi_0)=f_0(x_0^*x_0)>0;$$

следовательно, $A_{x_0}\neq 0$, и теорема доказана.

Применим теперь к множеству R теорему Крейна–Мильмана (см. п. 9 § 3). Множество K содержит все конечные линейные комбинации вида

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i,$$

где f_i — неразложимые положительные функционалы, удовлетворяющие условию $f_i(e) = 1$, а λ_i — неотрицательные вещественные числа такие, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$; обозначим через K_1 множество всех таких линейных комбинаций. Далее, K содержит все слабые предельные точки множества K_1; обозначим через K_2 замыкание множества K_1 в слабой топологии в H' . Множество K_2 есть минимальное бикомпактное выпуклое множество, содержащее все экстремальные точки множества K, и потому $K_2 = K$. Тем самым доказана

Теорема 4. *Пусть f — ненулевой положительный функционал в банаховом симметричном кольце R с единицей; тогда для всяких $x_0 \in R$ и $\varepsilon > 0$ существует линейная комбинация $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i$ неразложимых положительных функционалов в R, удовлетворяющая следующим условиям* [1]:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(e) = f(e), \quad \left| f(x_0) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Замечание. Из теоремы 4 следует, что в определении приводящего идеала и минимальной регулярной нормы (см. пп. 2, 3 § 18) можно ограничиться только неразложимыми положительными функционалами.

Теорему 1 можно также сформулировать в терминах представлений кольца R. Для этого достаточно воспользоваться теоремой 2 п. 3 § 17 и теоремой 2 п. 3. Мы получим тогда следующее предложение.

II. *Пусть $x \to A_x$ — представление в пространстве $\mathfrak{H}$ банахова симметричного кольца R с единицей. Для всяких $x_0 \in R$, $\xi^0 \in \mathfrak{H}$ и $\varepsilon > 0$ существуют неприводимые представления $x \to A_{1,x}$, … …, $x \to A_{n,x}$ и векторы ξ_1^0, …, ξ_n^0 в пространствах этих представлений такие, что*

$$\|\xi_1^0\|^2 + \ldots + \|\xi_n^0\|^2 = \|\xi^0\|^2$$

и

$$\left| (A_x \xi^0, \xi^0) + \sum_{i=1}^{n} (A_{i,x} \xi_i^0, \xi_i^0) \right| < \varepsilon.$$

---

[1]) Здесь функционалы $\widetilde{f}$, f_i уже не нормированы условием $f(e') = 1$, а числа λ_i включены в функционалы f_i.

Иногда вместо слабой топологии в H' удобно пользоваться другой топологией, которую назовем *равномерной на компактах* и в которой база окрестностей определяется следующим образом.

Пусть Q — произвольное предкомпактное в топологии, определяемой нормой, множество в H, а ε — произвольное положительное число. Окрестностью $U(f_0; Q, \varepsilon)$ функционала f_0 называется совокупность всех функционалов $f \in H'$, удовлетворяющих неравенству

$$|f(x) - f_0(x)| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad x \in Q.$$

III. *Если $\mathfrak{S}$ — множество в H', равномерно ограниченное по норме в H', то всякая слабая точка прикосновения этого множества есть также его точка прикосновения в смысле равномерной на компактах топологии.*

Доказательство. Пусть $|f| \leqslant C$ для всех $f \in \mathfrak{S}$, и пусть f_0 — слабая точка прикосновения множества $\mathfrak{S}$. Требуется доказать, что каждая окрестность $U(f_0; Q, \varepsilon)$ содержит элементы $f \in \mathfrak{S}$.

Положим $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2C+1}$; существует конечное множество элементов $x_1, \ldots, x_n \in Q$ таких, что всякий другой элемент $x \in Q$ отстоит от одного из x_p, $p = 1, \ldots, n$, меньше чем на ε_1 (см. I п. 14 § 2). Слабая окрестность $U(f_0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon_1)$ содержит некоторый элемент $f \in \mathfrak{S}$; докажем, что $f \in U(f_0; Q, \varepsilon)$. Действительно, $|f(x_p) - f_0(x_p)| < \varepsilon_1$, $p = 1, \ldots, n$, и для данного $x \in Q$ существует x_p такой, что

$$|x_p - x| < \varepsilon_1.$$

Поэтому [1]

$$|f(x) - f_0(x)| \leqslant |f(x) - f(x_p)| + |f(x_p) - f_0(x_p)| + |f_0(x_p) - f_0(x)| < \\ < |f||x - x_p| + \varepsilon_1 + |f_0||x - x_p| < C\varepsilon_1 + \varepsilon_1 + C\varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Если пространство H сепарабельно, то слабые окрестности на $\mathfrak{S}$ обладают счетной базой. Всякая слабая точка прикосновения f_0 множества $\mathfrak{S}$ является тогда слабым пределом некоторой последовательности функционалов $\varphi_n \in \mathfrak{S}$. В силу предположенной ограниченности по норме множества $\mathfrak{S}$ эта последовательность равномерно ограничена по норме и, следовательно, в силу III сходится к f_0 равномерно на всяком компакте. Теорема 4 означает поэтому, что *всякий положительный функционал f в R есть точка прикосновения в смысле равномерной на компактах топологии функционалов $\sum\limits_{i=1}^{n} f_1$, где f_i — неразложимые функционалы и $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i(e) = f(e)$. Если же кольцо R*

[1] Из доказательства видно также, что на таких множествах $\mathfrak{S}$ слабая топология и равномерная на компактах топология совпадают.

сепарабельно, то f есть предел равномерно сходящейся на каждом предкомпактном множестве последовательности функционалов

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^{(n)}.$$

§ 20. Применение к коммутативным симметричным кольцам

1. Минимальная регулярная норма в коммутативном симметричном кольце.

Теорема 1. *Пусть R — банахово коммутативное симметричное кольцо с единицей. Норма в этом кольце совпадает с минимальной регулярной нормой тогда и только тогда, когда оно вполне регулярно, следовательно, когда оно вполне изоморфно некоторому кольцу $C(\mathfrak{M})$.*

Доказательство. Пусть норма в кольце R совпадает с минимальной регулярной нормой. На основании следствия 1 п. 3 § 18 эта норма вполне регулярна и потому R вполне изоморфно кольцу $C(\mathfrak{M})$ (см. теорему 2 п. 2 § 16).

Обратно, пусть кольцо R вполне изоморфно кольцу $C(\mathfrak{M})$. Всякий положительный функционал f в $C(\mathfrak{M})$ является также ограниченным функционалом и, значит, ограниченным интегралом (см. п. 15 § 6). Действительно, если $x(M) \geqslant 0$, то $y(M) = \sqrt{x(M)} \in C(\mathfrak{M})$, $x = y^2 = y^*y$, и потому $f(x) \geqslant 0$. Поэтому положительный функционал в $C(\mathfrak{M})$ имеет вид

$$f(x) = \int\limits_{\mathfrak{M}} x(M)\, d\mu(M),$$

где μ — мера, отвечающая этому интегралу. При этом

$$f(e) = \int\limits_{\mathfrak{M}} d\mu(M) = \mu(\mathfrak{M}).$$

Обозначим через $|x|_0$ минимальную регулярную норму в кольце R. Тогда

$$|x|_0^2 = \sup_{f(e)=1} f(x^*x) = \sup_{\mu(\mathfrak{M})=1} \int\limits_{\mathfrak{M}} |x(M)|^2\, d\mu(M) = \max_{\mathfrak{M}} |x(M)|^2 = |x|^2;$$

следовательно, норма в кольце R совпадает с минимальной регулярной нормой.

Следствие 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ — бикомпактные пространства; тогда всякий симметричный изоморфизм кольца $C(\mathfrak{M})$ на подкольцо R' кольца $C(\mathfrak{M}')$, плотное в $C(\mathfrak{M}')$, сохраняет норму и потому есть изоморфизм на все кольцо $C(\mathfrak{M}')$.*

Доказательство. Согласно теореме 1 норма в кольцах $C(\mathfrak{M})$ и $C(\mathfrak{M}')$ есть минимальная регулярная норма. Кольцо $C(\mathfrak{M}')$ есть замыкание кольца R' по такой норме; следовательно, по определению регулярной нормы кольца R' и $C(\mathfrak{M}')$ имеют один и тот же запас положительных функционалов. С другой стороны, кольца $C(\mathfrak{M})$ и R' также имеют один и тот же запас положительных функционалов, ибо эти кольца симметрично изоморфны. При этом соответствие между положительными функционалами f и f' в кольцах $C(\mathfrak{M})$ и R' устанавливается равенством $f(x) = f'(x')$, где $x \in C(\mathfrak{M})$ и $x' \in R'$ — элементы, соответствующие друг другу при данном изоморфизме. Отсюда

$$|x| = \sqrt{\sup_{f(e)=1} f(x^*x)} = \sqrt{\sup_{f'(e')=1} f'(x'^*x')} = |x'|.$$

Следствие 2. *Всякий симметричный изоморфизм полного вполне регулярного коммутативного кольца R в полное вполне регулярное коммутативное кольцо R' сохраняет норму.*

Доказательство. Не нарушая общности, мы можем считать, что R и R' содержат единицу. Действительно, в противном случае, присоединив к ним единицу, получим полные вполне регулярные кольца с единицей R_1, R_1'; исходный изоморфизм $x \to x'$ колец R, R' можно тогда продолжить до изоморфизма колец R_1 и R_1', положив

$$\lambda e + x \to \lambda e' + x'.$$

Итак, пусть R содержит единицу, а R_0' — образ кольца R при данном изоморфизме $x \to x'$. При этом можно считать, что R_0' плотно в R', ибо в противном случае можно заменить R' замыканием $\overline{R}_0'$ кольца R_0 в R'. Тогда R и R' вполне изоморфны некоторым кольцам $C(\mathfrak{M})$ и $C(\mathfrak{M}')$ и наш изоморфизм есть симметричный изоморфизм кольца $C(\mathfrak{M})$ в плотное подкольцо R_0' кольца $C(\mathfrak{M}')$. Поэтому утверждение непосредственно вытекает из следствия 1.

2. Положительные функционалы в коммутативном симметричном кольце. Перейдем теперь к изучению положительных функционалов в произвольном банаховом коммутативном симметричном кольце с единицей.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ бикомпактное пространство всех максимальных идеалов кольца R. Из соотношения $x^*(M^*) = \overline{x(M)}$ (см. (2) п. 1 § 14) легко следует, что отображение $M \to M^*$ есть гомеоморфизм пространства $\mathfrak{M}$ на себя; поэтому множество $\mathfrak{M}_0$ всех идеалов M, удовлетворяющих условию $M^* = M$, т. е. всех симметричных идеалов, есть замкнутое подмножество пространства $\mathfrak{M}$.

Обозначим через R_1 приведенное кольцо, построенное по кольцу R. Введем в кольце R_1 в качестве нормы минимальную регулярную норму. Пополнение кольца R_1 по этой норме будем называть *вполне регулярным пополнением кольца R* и обозначать $R^{\frown}$.

Теорема 2. *Пусть R — банахово коммутативное симметричное кольцо с единицей. Тогда кольцо $R^\frown$ вполне изоморфно кольцу $C(\mathfrak{M}_0)$, где $\mathfrak{M}_0$ — пространство всех симметричных максимальных идеалов кольца R.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}^\frown$ — пространство всех максимальных идеалов кольца $R^\frown$. Согласно теореме 1 достаточно доказать, что $\mathfrak{M}^\frown$ и $\mathfrak{M}_0$ гомеоморфны.

Пусть $M^\frown$ — максимальный идеал кольца $R^\frown$. Он определяет гомоморфизм кольца $R^\frown$, а следовательно, и кольца R_1 в поле комплексных чисел. Но R_1 есть кольцо вычетов кольца R по некоторому двустороннему симметричному идеалу I. Поэтому гомоморфизм кольца R_1 есть одновременно гомоморфизм кольца R в поле комплексных чисел. Именно, достаточно отобразить все элементы x класса $\widetilde{x} \in R_1$ в одно и то же число — образ класса $\widetilde{x}$. Этот гомоморфизм определяет максимальный идеал M_0 кольца R; идеал M_0 поставим в соответствие идеалу $M^\frown$.

Идеал M_0 симметричен. Действительно, пусть $x \in M_0$. Это означает, что элемент x переходит в нуль при рассматриваемом гомоморфизме кольца R. Но тогда соответствующий элемент $\widetilde{x}$ кольца также переходит в нуль. Другими словами,

$$\widetilde{x}(M^\frown) = 0.$$

В силу теоремы 1 операция инволюции в $\widehat{R}$ есть переход от функции $\widetilde{x}(M^\frown)$ к комплексно сопряженной функции $\overline{\widetilde{x}(M^\frown)}$, т. е. $\widetilde{x}^*(M^\frown) = \overline{\widetilde{x}(M^\frown)}$; следовательно, также $\widetilde{x}^*(M^\frown) = 0$. Другими словами, $\widetilde{x}^*$ также переходит в нуль. Но тогда и x^* переходит в нуль, следовательно, $x^* \in M_0$. Тем самым $M_0^* = M_0$.

Обратно, пусть M_0 — симметричный максимальный идеал кольца R. Рассмотрим функционал

$$f(x) = x(M_0);$$

f — положительный функционал. Действительно,

$$f(x^*x) = x^*(M_0)\,x(M_0) = |x(M_0)|^2 \geqslant 0.$$

Кроме того,

$$f(e) = e(M_0) = 1.$$

Этот функционал можно поэтому рассматривать как положительный функционал на $R^\frown$ (см. пп. 1, 2 § 18). f определяет гомоморфизм кольца R, а следовательно, и кольца R_1 в поле комплексных чисел. Так как функционал f непрерывен в кольце R_1 и так как кольцо R_1 плотно в $R^\frown$, то этот функционал определяет также гомоморфизм кольца $R^\frown$ в поле комплексных чисел. Этот последний гомоморфизм определяет максимальный идеал кольца $R^\frown$.

Если $M_1^\frown \neq M_2^\frown$, то существует такой элемент $x \in R^\frown$, что $x^\frown(M_1^\frown) \neq$ $\neq x^\frown(M_2^\frown)$ (см. I п. 2 § 11); так как R_1 плотно в $R^\frown$, то существует элемент $\widetilde{x} \in R_1$ с тем же свойством. Тогда для $x \in \widetilde{x}$ и соответствующих идеалов M_{10}, M_{20} будем иметь $x(M_{10}) = \widetilde{x}(M_1^\frown) \neq \widetilde{x}(M_2^\frown) = x(M_{20})$, и потому $M_{10} \neq M_{20}$. Это означает, что построенное выше отображение $M^\frown \to M_0$ есть взаимно однозначное отображение пространства $\mathfrak{M}^\frown$ на пространство $\mathfrak{M}_0$. Из определения топологий в $\mathfrak{M}^\frown$ и $\mathfrak{M}_0$ следует, что прообразом всякой окрестности в $\mathfrak{M}_0$ является некоторая окрестность в $\mathfrak{M}^\frown$. Следовательно, отображение непрерывно. В силу бикомпактности и хаусдорфовости обоих пространств это отображение есть гомеоморфизм. Тем самым теорема доказана.

Следствие. *Пусть R — коммутативное вполне симметричное кольцо с единицей, $\mathfrak{M}$ — его пространство максимальных идеалов. Тогда*:

1) *минимальная регулярная норма в R есть* $|x|_0 = \sup\limits_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)|$;

2) *пространство $\mathfrak{M}^\frown$ максимальных идеалов кольца $R^\frown$ гомеоморфно $\mathfrak{M}$.*

Доказательство. Так как R вполне симметрично, то $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$ (см. п. 1 § 14). С другой стороны, $\mathfrak{M}^\frown$ и $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$ гомеоморфны (см. доказательство теоремы 2). Утверждение 1) следует из теоремы 1 п. 1.

Теорема 3. *Всякий положительный функционал f в банаховом коммутативном симметричном кольце R с единицей можно представить, и притом единственным образом, в виде*

$$f(x) = \int\limits_{\mathfrak{M}_0} x(M)\, d\mu(M), \tag{1}$$

где μ — некоторая мера, в пространстве $\mathfrak{M}_0$ всех симметричных максимальных идеалов кольца R.

Доказательство. Всякий положительный функционал в кольце R можно распространить до положительного функционала в кольце $R^\frown$. Но согласно теореме 2 кольцо $R^\frown$ вполне изоморфно кольцу $C(\mathfrak{M}_0)$, и потому f можно также рассматривать как положительный функционал, а значит, как интеграл на $C(\mathfrak{M}_0)$ (см. доказательство теоремы 1). Отсюда непосредственно следует формула (1) и единственность меры μ при данном f.

Замечание. Из теоремы 3 вытекает, что *положительный функционал f в кольце R неразложим тогда и только тогда, когда $f(x) = x(M)$ при некотором $M \in \mathfrak{M}_0$*. Следовательно, эта теорема означает, что всякий положительный функционал в банаховом коммутативном симметричном кольце с единицей разлагается, и притом единственным образом, на неразложимые далее положительные функционалы.

Следующая теорема показывает, что условие коммутативности является здесь существенным.

Теорема 4. *Пусть всякий положительный функционал в симметричном кольце R с единицей разлагается, и притом единственным образом, на неразложимые далее положительные функционалы. Тогда приведенное кольцо R_1 коммутативно.*

Доказательство. Докажем, что всякое неприводимое представление кольца R одномерно. Предположим противное. Пусть $x \to A_x$ — неприводимое представление кольца R в пространстве $\mathfrak{H}$ и пусть $\mathfrak{H}$ неодномерно. Тогда в $\mathfrak{H}$ существует по крайней мере два линейно независимых вектора ξ_1 и ξ_2. Положим

$$f_1(x) = (A_x\xi_1, \xi_1), \quad f_2(x) = (A_x\xi_2, \xi_2),$$
$$f_1'(x) = \frac{1}{2}\,(A_x(\xi_1+\xi_2), \xi_1+\xi_2), \quad f_2'(x) = \frac{1}{2}\,(A_x(\xi_1-\xi_2), \xi_1-\xi_2).$$

Тогда

$$f_1(x) + f_2(x) = f_1'(x) + f_2'(x).$$

Пусть

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = f_1'(x) + f_2'(x); \tag{2}$$

f — положительный функционал. По теореме 2 п. 3 § 19 функционалы f_1, f_2, f_1', f_2' неразложимы. Так как, кроме того, никакие два из векторов ξ_1, ξ_2, $\xi_1+\xi_2$, $\xi_1-\xi_2$ не пропорциональны, то все эти функционалы различны (см. теорему 4 п. 7 § 17). Поэтому равенство (2) есть разложение функционала f двумя различными способами на неразложимые функционалы, в противоречие с условием.

Итак, всякое неприводимое представление кольца R одномерно, следовательно, коммутативно. Поэтому всякий неразложимый положительный функционал обращается в нуль на всех элементах вида $xy - yx$. Но, по условию, всякий положительный функционал разлагается на неразложимые положительные функционалы. Поэтому также всякий положительный функционал обращается в нуль на всех элементах вида $xy - yx$. Это означает, что всякий такой элемент есть обобщенный нуль (см. II п. 2 § 18). Следовательно, в приведенном кольце $R_1 \widetilde{x}\,\widetilde{y} - \widetilde{y}\,\widetilde{x} = 0$, т. е. приведенное кольцо R_1 коммутативно.

Другие достаточные условия коммутативности кольца см. в статьях Турумару [1], Фукамия, Мисоноу и Такеда [1] и Огасавара [2].

3. Примеры. а). Пусть A — кольцо всех функций

$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

аналитических внутри единичного круга и непрерывных в замкнутом единичном круге (см. пример б) п. 3 § 11). Определим в A инволюцию формулой

$$x^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{c}_n z^n.$$

Найдем симметричные максимальные идеалы кольца A.

Каждый максимальный идеал M кольца A определяется некоторой точкой z_0 круга $|z| \leqslant 1$ по формуле

$$M(x) = x(z_0),$$

причем соответствие $M \to z$ между $\mathfrak{M}$ и точками круга $|z| \leqslant 1$, таким образом установленное, взаимно однозначно (см. пример б) п. 3 § 11).

Пусть M — симметричный максимальный идеал. Так как $x_1 = z$ эрмитов элемент, то число $z_0 = M(x_1)$ должно быть вещественным. Таким образом, каждому симметричному максимальному идеалу кольца R отвечает вещественное число t из интервала $[-1, 1]$. Обратно, каждому такому числу t отвечает симметричный максимальный идеал всех функций $x(z)$ из A таких, что $x(t) = 0$.

Согласно теореме 2 вполне регулярное пополнение $A^\frown$ кольца A есть кольцо всех непрерывных функций $x(t)$ в интервале $[-1, 1]$ с нормой

$$|x| = \max_{-1 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)|.$$

Если $x(z)$ есть многочлен, а $y(t)$ — соответствующий элемент кольца $A^\frown$, то $x(t) = y(t)$ для всех $t \in [-1, 1]$; в силу теоремы Вейерштрасса об аппроксимации многочленами (см. п. 10 § 2) отсюда следует, что $x(t) = y(t)$ для любой функции $x(z) \in A$.

Итак, кольцо $A^\frown$ получается, если рассматривать функции $x(z)$ только на интервале $[-1, 1]$, а затем пополнить полученное кольцо по норме $|x| = \max\limits_{-1 \leqslant t \leqslant 1} |x(t)|$.

Применяя теорему 3 к кольцу A, получаем, что всякий положительный функционал в нем имеет вид

$$f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\, d\sigma(t), \tag{1}$$

где $\sigma(t)$ — неубывающая функция в интервале $[-1, 1]$.

Отметим, что не всякий вещественный ограниченный линейный функционал в кольце A можно представить в виде линейной комбинации положительных функционалов. В самом деле, рассмотрим в качестве примера функционал

$$f_0(x) = \frac{1}{2}\,[x(z_0) + x(\overline{z}_0)],$$

где z_0 — произвольное мнимое число из единичного круга $|z| \leqslant 1$. Очевидно, f_0 — вещественный ограниченный линейный функционал в кольце A. Докажем, что он не является линейной комбинацией положительных функционалов. Предположим противное. Тогда, пользуясь общим выражением (1) для положительного функционала, мы будем иметь

$$f_0(x) = \int\limits_{-1}^{1} x(t)\, d\sigma_1(t),$$

где $\sigma_1(t)$ — функция с ограниченным изменением в интервале $[-1,\,1]$. Таким образом,

$$\frac{x(z_0) + x(\overline{z}_0)}{2} = \int\limits_{-1}^{1} x(t)\, d\sigma_1(t)$$

для любой функции $x(z) \in A$. Применив это равенство к функции $x_n(z) = \dfrac{e^{inz}}{n}$, мы получим

$$\frac{e^{inz_0} + e^{in\overline{z}_0}}{2n} = \frac{1}{n}\int\limits_{-1}^{1} e^{int}\, d\sigma_1(t).$$

Но при $n \to \infty$ модуль левой части этого равенства стремится к ∞, а правой — к нулю. Полученное противоречие показывает, что функционал f_0 нельзя представить в виде линейной комбинации положительных функционалов.

б). Обозначим через R_0' совокупность всех измеримых функций $x(u)$ на полупрямой $0 \leqslant u < +\infty$ таких, что

$$|x| = \int\limits_{0}^{\infty} |x(u)| \operatorname{sh} 2u\, du < \infty. \tag{2}$$

Определим в R_0' обычным образом операции сложения и умножения на числа; кроме того, определим операцию умножения $x = x_1 \cdot x_2$ равенством

$$x(u) = \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{|u-t|}^{u+t} x_1(s)\, x_2(t)\, ds\, dt.$$

Это определение законно, ибо

$$\begin{aligned}\int\limits_{0}^{\infty} |x(u)| \operatorname{sh} 2u\, du &\leqslant \int\limits_{0}^{\infty} \left| \int\limits_{0}^{\infty} dt \int\limits_{|u-t|}^{u+t} x_1(s)\, x_2(t)\, ds \right| \operatorname{sh} 2u\, du \leqslant \\ &\leqslant \int\limits_{0}^{\infty} \operatorname{sh} 2u\, du \int\limits_{0}^{\infty} dt \int\limits_{|u-t|}^{u+t} |x_1(s)|\, |x_2(t)|\, ds = \\ &= \int\limits_{0}^{\infty} dt \int\limits_{0}^{\infty} |x_1(s)|\, |x_2(t)|\, ds \int\limits_{|t-s|}^{t+s} \operatorname{sh} 2u\, du = \\ &= \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} |x_1(s)| |x_2(t)| \operatorname{sh} 2s \operatorname{sh} 2t\, ds\, dt = |x_1|\, |x_2|,\end{aligned}$$

следовательно, если $x_1, x_2 \in R_0'$, то также $x_1 \cdot x_2 \in R_0'$. Одновременно мы видим, что выполняется условие $|x_1 \cdot x_2| \leqslant |x_1| \cdot |x_2|$. Легко также проверить, что выполняются все другие аксиомы кольца и что $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$; следовательно, R_0' — коммутативное нормированное кольцо, очевидно, полное.

Присоединив к R_0' единицу e, получим полное нормированное кольцо с нормой
$$|x + \lambda e| = |x| + |\lambda|,$$
где $|x|$ определена равенством (2). Обозначим это кольцо R_0. Полагая $x^*(u) = \overline{x(u)}$, $(\lambda e + x)^* = \overline{\lambda} e + x^*$, мы превратим R_0 в симметричное кольцо.

Найдем все максимальные идеалы кольца R_0. Во-первых, R_0' есть максимальный идеал в R_0. Пусть M — максимальный идеал в R_0, отличный от R_0'. Тогда
$$f(x) = x(M)$$
есть линейный функционал в R_0. Его можно также рассматривать как линейный функционал в пространстве всех суммируемых функций $x(u)\operatorname{sh} 2u$. Поэтому
$$x(M) = f(x) = \int_0^\infty x(u)\,\omega(u)\,du,$$
где $\dfrac{\omega(u)}{\operatorname{sh} 2u}$ — существенно ограниченная функция и $\omega(u) \not\equiv 0$ (см. теорему 3 п. 16 § 6). Так как отображение $x \to x(M)$ есть гомоморфизм, то должно быть $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1)\,f(x_2)$, т. е.
$$\int_0^\infty x_1(s)\,\omega(s)\,ds \int_0^\infty x_2(t)\,\omega(t)\,dt = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty dt \int_{|u-t|}^{u+t} x_1(s)\,x_2(t)\,ds\right]\omega(u)\,du = \\ = \int_0^\infty\int_0^\infty x_1(s)\,x_2(t)\,ds\,dt \int_{|t-s|}^{t+s} \omega(u)\,du.$$
Отсюда заключаем, что функция $\omega(u)$ удовлетворяет функциональному уравнению
$$\omega(s)\,\omega(t) = \int_{|t-s|}^{t+s} \omega(u)\,du \tag{3}$$
для почти всех положительных s и t.

Общим решением этого уравнения является $\omega(u) = \dfrac{2\sin\rho u}{\rho}$, где ρ — произвольное комплексное число. Действительно, из (3) следует, что $\omega(x)$ эквивалентна непрерывной функции, так что $\omega(s)$ можно считать непрерывной. Полагая в (3) $s = t = 0$, получим $\omega(0) = 0$. Дифференцируя далее обе части (3) по s при $s \leqslant t$, получим

$$\omega'(s)\,\omega(t) = \omega(t+s) + \omega(t-s). \tag{4}$$

Отсюда, при $s = 0$, $\omega'(0)\,\omega(t) = 2\omega(t)$, $\omega'(0) = 2$. Дифференцируя, далее, (4) два раза по s и два раза по t, вычитая почленно полученные равенства и полагая $s = 0$, заключаем, что $\omega''(t) - \rho^2\omega(t) = 0$, где $\rho^2 = \dfrac{\omega'''(0)}{\omega'(0)} = \dfrac{\omega'''(0)}{2}$ — некоторое, вообще говоря, комплексное число. Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям $\omega(0) = 0$, $\omega'(0) = 2$, есть $\omega(t) = \dfrac{2\sin\rho t}{\rho}$.

Функция $\dfrac{\omega(u)}{\operatorname{sh} 2u} = \dfrac{2\sin\rho u}{\rho\operatorname{sh} 2u}$ ограничена для $-\infty < u < \infty$ тогда и только тогда, когда $|\operatorname{Im}\rho| \leqslant 2$. Следовательно, отличные от R_0' максимальные идеалы кольца R_0 определяются числами ρ полосы $|\operatorname{Im}\rho| \leqslant 2$, а соответствующие гомоморфизмы задаются формулой

$$x \to \int\limits_0^\infty x(u)\frac{2\sin\rho u}{\rho}\,du.$$

Очевидно, числа ρ_1 и ρ_2 определяют один и тот же максимальный идеал тогда и только тогда, когда либо $\rho_1 = \rho_2$, либо $\rho_1 = -\rho_2$.

Найдем теперь все симметричные максимальные идеалы кольца R_0. Для этого заметим, что всегда $x(M^*) = \overline{x^*(M)}$. Поэтому из равенства

$$x(M) = \int\limits_0^\infty x(u)\,\frac{2\sin\rho u}{\rho}\,du$$

следует

$$x(M^*) = \overline{x^*(M)} = \overline{\int\limits_0^\infty x^*(u)\,\frac{2\sin\rho u}{\rho}\,du} = \int\limits_0^\infty x(u)\,\frac{2\sin\overline{\rho} u}{\overline{\rho}}\,du.$$

Таким образом, если идеал M определяется числом ρ, то идеал M^* определяется числом $\overline{\rho}$. Поэтому $M = M^*$ тогда и только тогда, когда либо $\rho = \overline{\rho}$, либо $\rho = -\overline{\rho}$, т. е. ρ либо вещественно, либо чисто мнимо.

Следовательно, симметричные максимальные идеалы кольца R_0 определяются взаимно однозначно всеми числами вещественной полуоси $0 \leqslant \rho < \infty$ и отрезка $\rho = \rho_1 i$, $0 < \rho_1 \leqslant 2$, мнимой оси. Соответствующие гомоморфизмы имеют вид

$$x \to \int\limits_0^\infty x(u)\,\frac{2\sin\rho u}{\rho}\,du \quad \text{при } \rho \text{ вещественном},$$

$$x \in \int\limits_0^\infty x(u)\,\frac{2\operatorname{sh}\rho_1 u}{\rho_1}\,du \quad \text{при } \rho = \rho_1 i.$$

Применяя к кольцу R_0 теорему 3, получаем, что всякий положительный функционал в кольце R_0 имеет вид

$$f(x) = \int\limits_0^\infty \left[\int\limits_0^\infty x(u)\,\frac{2\sin\rho u}{\rho}\,du\right] d\sigma(\rho) + \int\limits_0^2 \left[\int\limits_0^\infty x(u)\,\frac{2\,\mathrm{sh}\,\rho_1 u}{\rho_1}\,du\right] d\sigma_1(\rho_1),$$

где $\sigma(\rho)$, $\sigma_1(\rho_1)$ — неубывающие функции в интервалах $0 \leqslant \rho < \infty$, $0 < \rho_1 \leqslant 2$ соответственно.

4. Случай вполне симметричного кольца. Если кольцо R вполне симметрично, то все его максимальные идеалы симметричны, так что $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$. Поэтому имеет место

Следствие 1. *Всякий положительный функционал f в коммутативном вполне симметричном кольце R с единицей можно представить, и притом единственным образом, в виде*

$$f(x) = \int\limits_{\mathfrak{M}} x(M)\,d\mu(M),$$

где $\mathfrak{M}$ — пространство максимальных идеалов кольца R, а μ — некоторая мера на $\mathfrak{M}$.

Костюченко и Митягин [1, 2] получили интегральное представление для положительных функционалов в топологическом кольце с непрерывной инволюцией, являющемся так называемым ядерным пространством (см., например, Гельфанд, Виленкин и Граев [1]), и применили этот результат к многомерной проблеме моментов. Близкие результаты получены независимо Березанским [3].

В приложениях приходится часто рассматривать положительные функционалы в кольце без единицы. Напомним, что кольцо R без единицы называется *вполне симметричным*, если кольцо R_1 полученное из R присоединением единицы, вполне симметрично (см. п. 3 § 14).

Пусть $\mathfrak{M}_1$ — пространство максимальных идеалов кольца R_1; если положительный функционал f в R задается формулой

$$f(x) = \int\limits_{\mathfrak{M}_0} x(M)\,d\mu(M) \quad \text{для всех} \quad x \in R, \tag{1}$$

то, полагая

$$F(x) = \int\limits_{\mathfrak{M}_1} x(M)\,d\mu(M) \quad \text{для всех} \quad x \in R_1, \tag{2}$$

мы расширим f до положительного функционала F во всем R_1. Обратно, если такое расширение F возможно, то в силу следствия 1 для функционала F имеет место формула (2), следовательно, для функционала f имеет место формула (1).

Отсюда и из IV п. 2 § 10 заключаем:

Следствие 2. *Положительный функционал f в коммутативном вполне симметричном кольце R без единицы тогда и только тогда можно представить по формуле* (1), *когда f можно продолжить до положительного функционала в кольце R_1, полученном из R присоединением единицы, т. е. когда f вещественный и удовлетворяет условию*

$$|f(x)|^2 \leqslant Cf(x^*x) \quad \textit{для всех} \quad x \in R, \tag{3}$$

где C — некоторая постоянная.

Отметим, что в силу формулы (1) такой функционал f можно продолжить, и притом единственным образом; до положительного функционала во всем кольце $C(\mathfrak{M}_1)$.

До сих пор мы рассматривали положительные функционалы, заданные во всем кольце R. Однако в некоторых случаях приходится ставить задачу о разложении положительного функционала, заданного не во всем кольце и вообще не продолжимого до положительного функционала во всем кольце (см. ниже, п. 4 § 31). Для изучения таких функционалов нам предварительно придется рассмотреть некоторые свойства интегралов на локально бикомпактном пространстве.

Пусть T — локально бикомпактное хаусдорфово пространство, I — интеграл на $L(T)$ (см. п. 1 § 6), а U — произвольное открытое множество в T. Тогда U, рассматриваемое как подпространство в T, есть также локально бикомпактное пространство и всякую функцию $x \in L(U)$ можно продолжить до функции $x \in L(T)$, считая $x(t) = 0$ вне U. Следовательно, $L(U)$ можно рассматривать как подпространство в $L(T)$ и исходный интеграл I на $L(T)$, рассматриваемый только на $L(U)$, будет также интегралом на $L(U)$; мы будем называть его *сужением* исходного интеграла на множество U.

I. *Пусть $\{U_\alpha\}$ — покрытие пространства T открытыми множествами U_α и пусть на каждом $L(U_\alpha)$ задан интеграл I_α так, что для любых α_1, α_2 сужения интегралов I_{α_1}, I_{α_2} на $U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$ совпадают. Тогда существует один и только один интеграл I на $L(T)$, сужение которого на каждое U_α совпадает с I_α.*

Доказательство. Пусть $x \in L(T)$, а Q_x — носитель [1] x. Множества U_α, пересекающиеся с Q_x, образуют покрытие бикомпактного множества Q_x; следовательно, существует конечное число $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$ таких U_α, также образующее покрытие Q_x. Функции из $L(T)$, рассматриваемые только на Q_x, образуют нормальное кольцо

[1] То есть минимальное бикомпактное множество, вне которого $x(t) = 0$ (см. п. 2 § 6).

с единицей (в силу леммы Урысона, см. II п. 8 § 2 и п. 1 § 15); следовательно (см. п. 2 § 15), существуют функции $y_k \in L(U_{\alpha_k})$, $k = 1, \ldots, n$, такие, что $y_1(t) + \ldots + y_n(t) = 1$ на Q_x. Отсюда $x = xy_1 + \ldots + xy_n$, где $xy_k \in L(U_{\alpha_k})$, и потому если интеграл I существует, то должно быть

$$I(x) = I_{\alpha_1}(xy_1) + \ldots + I_{\alpha_n}(xy_n). \tag{4}$$

Покажем, что формула (4) действительно определяет интеграл I на $L(T)$; тем самым наше предложение будет доказано. Но для этого достаточно показать, что если $z_k \in L(U_{\alpha'_k})$, $k = 1, \ldots, m$, — некоторые функции, удовлетворяющие условию $z_1(t) + \ldots + z_m(t) = 1$ на Q_x, то

$$I_{\alpha_1}(xy_1) + \ldots + I_{\alpha_n}(xy_n) = I_{\alpha'_1}(xz_1) + \ldots + I_{\alpha'_m}(xz_m).$$

Но так как $xy_kz_l \in U_{\alpha_k} \cap U_{\alpha'_l}$, то по условию $I_{\alpha_k}(xy_kz_l) = I_{\alpha'_l}(xy_kz_l)$, и потому

$$\sum_{k=1}^{n} I_{\alpha_k}(xy_k) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} I_{\alpha_k}(xy_kz_l) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m} I_{\alpha'_l}(xy_kz_l) = \sum_{l=1}^{m} I_{\alpha'_l}(xz_l),$$

чем и завершается доказательство.

II. *Пусть T и $\{U_\alpha\}$ — те же, что и в предложении* I; *если I, J — два интеграла на $L(T)$, сужения которых на каждое U_α совпадают, то I и J совпадают на всем $L(T)$.*

Утверждение непосредственно следует из I.

Рассмотрим теперь всевозможные открытые множества U (если они вообще существуют), на которых сужение данного интеграла равно нулю. Пусть V — объединение всех этих множеств U. Так как множества U образуют покрытие пространства V, то в силу II сужение интеграла I на V также равно нулю. Очевидно, V есть максимальное открытое множество, на котором сужение интеграла I равно нулю; это означает, что V есть максимальное открытое нулевое по I множество (см. пп. 5 и 8 § 6). Дополнение $T - V$ этого множества называется *носителем* интеграла I, а также определенной им меры μ.

Пусть теперь R — вполне симметричное коммутативное кольцо без единицы, а f — вещественный положительный функционал, заданный на симметричном идеале I, плотном в R. Тогда $px \in I$ для всех $p \in I$, $x \in R$, и потому для любого $p \in I$ равенство

$$\varphi_p(x) = f(px)$$

определяет линейный функционал φ_p во всем кольце R. Элемент $p \in I$ называется *положительным относительно функционала f*, если φ_p — вещественный положительный функционал в R, удовлетворяющий условию (3).

Обозначим через P совокупность всех элементов $p \in I$, положительных относительно f. Такие элементы p существуют; именно, таким будет во всяком случае любой элемент вида

$$p = y_1^* y_1 + y_2^* y_2 + \ldots + y_n^* y_n, \quad y_k \in I. \tag{5}$$

Действительно, для любого $x \in R$

$$\begin{aligned}\varphi_p(x^* x) = f(px^* x) = f((y_1^* y_1 + \ldots + y_n^* y_n)\, x^* x) = \\ = f((y_1 x)^*(y_1 x)) + \ldots + f((y_n x^*)(y_n x)) \geqslant 0,\end{aligned}$$

так что φ_p положителен на R. Этот положительный функционал удовлетворяет условию (3), ибо

$$\begin{aligned}|\varphi_p(x)|^2 = \left|\sum_{k=1}^{n} f(y_k^* y_k x)\right|^2 \leqslant n^2 \sum_{k=1}^{n} |f(y_k^*(y_k x))|^2 \leqslant \\ \leqslant n^2 \sum_{k=1}^{n} f(y_k^* y_k)\, f((y_k x)^*(y_k x)) \leqslant n^2 \max_{1 \leqslant k \leqslant n} f(y_k^* y_k) \cdot f(px^* x) = \\ = n^2 \max_{1 \leqslant k \leqslant n} f(y_k^* y_k) \cdot \varphi_p(x^* x).\end{aligned}$$

Кроме того, так как p — эрмитов, а f — вещественный функционал, то для $x \in R$

$$\varphi_p(x^*) = f(px^*) = f((px)^*) = \overline{f(px)} = \overline{\varphi_p(x)},$$

так что φ_p — вещественный функционал.

Обозначим через P' совокупность всех элементов p вида (5); в силу только что доказанного $P' \subset P$.

Согласно замечанию, сделанному после следствия 2, при $p \in P$ функционал φ_p можно продолжить, и притом единственным образом, до положительного функционала $\widetilde{\varphi}_p$ во всем кольце $C(\mathfrak{M}_1)$, где $\mathfrak{M}_1$ — пространство максимальных идеалов кольца R_1.

По определению интеграла (см. п. 1 § 6), $\widetilde{\varphi}_p$ есть интеграл на $C(\mathfrak{M}_1)$ и потому может быть продолжен, и притом единственным образом, на все функции $x(M) = L^1(\widetilde{\varphi}_p)$; это продолжение мы также обозначим через $\widetilde{\varphi}_p$.

Положим $M_0 = R$ и $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_1 - M_0$; тогда $\mathfrak{M}'$ — локально бикомпактное пространство. Каждый элемент $x \in R$ можно рассматривать как непрерывную функцию $x(M)$ на $\mathfrak{M}'$, равную нулю в бесконечно удаленной точке M_0. Обозначим через $L(\mathfrak{M}')$ совокупность всех непрерывных функций $x(M)$ на $\mathfrak{M}'$ с бикомпактным носителем Q_x (своим для каждой $x(M)$). Очевидно, $\widetilde{\varphi}_p(x)$ будет, в частности, определен для всех функций $x(M) \in L(\mathfrak{M}')$ и будет интегралом на $L(\mathfrak{M}')$.

III. *Для любой функции* $x(M) \in L(\mathfrak{M}')$ *существуют элементы* $p \in P'$ *такие, что* $p(M) > 0$ *на* Q_x.

Доказательство. Так как идеал I плотен в R, то для любого $M \in \mathfrak{M}'$, в частности, для любого $M \in Q_x$, существует элемент $y \in I$ такой, что $y(M) \neq 0$. По непрерывности это условие выполняется также в некоторой окрестности $U(M)$ идеала M. В силу бикомпактности Q_x из этих окрестностей можно выбрать конечное число $U(M_1), \ldots, U(M_n)$, покрывающее Q_x. Если $y_1, \ldots, y_n$ — соответствующие элементы $y \in I$, то элемент $p = y_1^* y_1 + \ldots + y_n^* y_n$ и будет обладать требуемым свойством.

Обозначим через P_x совокупность всех элементов $p \in P$, для которых $p(M) \neq 0$ на Q_x, а через P_x^+ — совокупность всех элементов $p \in P$, для которых $p(M) > 0$ на Q_x. Очевидно, $P_x^+ \subset P_x$. Предложение III означает, что P_x^+ , а значит, и P_x, не пусто.

Если $x \in L(\mathfrak{M}')$ и $p \in P_x$, то также $\dfrac{x}{P} \in L(\mathfrak{M}')$, где $\dfrac{x}{p}$ — функция, равная $\dfrac{x(M)}{p(M)}$ при $M \in Q_x$ и нулю при $M \notin Q_x$; отсюда заключаем, что $\widetilde{\varphi}_p\left(\dfrac{x}{p}\right)$ имеет смысл.

Положим

$$J(x) = \widetilde{\varphi}_p\left(\frac{x}{p}\right) \quad \text{при} \quad x \in L(\mathfrak{M}'), \quad p \in P_x. \tag{6}$$

Это определение не зависит от выбора элемента $p \in P_x$. Действительно, если $p, q \in P_x$, то для любого $z \in R$

$$\varphi_q(pz) = \varphi_p(qz) = f(pqz).$$

Отсюда следует, что

$$\widetilde{\varphi}_q(pz) = \widetilde{\varphi}_p(qz) \quad \text{для всех} \quad z \in C(\mathfrak{M}_1). \tag{7}$$

В самом деле, $\widetilde{\varphi}_q$, $\widetilde{\varphi}_p$ — интегралы на $C(\mathfrak{M}_1)$ и потому непрерывны по норме в $C(\mathfrak{M}_1)$; с другой стороны, равенство (7) имеет место для всех функций $z(M)$ кольца R, а они образуют плотное множество в кольце $C_0(\mathfrak{M}_1)$ всех функций из $C(\mathfrak{M}_1)$, равных нулю в точке M_0 (см. следствие 3 п. 3 § 14). Следовательно, (7) имеет место для всех $z(M) \in C_0(\mathfrak{M}_1)$. Но

$$\widetilde{\varphi}_q(p) = \varphi_q(p) = f(pq) = \varphi_p(q) = \widetilde{\varphi}_p(q);$$

поэтому

$$\widetilde{\varphi}_q(p(\lambda e + z)) = \widetilde{\varphi}_p(q(\lambda e + z))$$

для всех чисел λ и всех $z \in C_0(\mathfrak{M}_1)$. Так как функции $\lambda e + z$ составляют все кольцо $C(\mathfrak{M}_1)$, то тем самым (7) доказано для всех функций из $C(\mathfrak{M}_1)$.

Полагая в (7) $z = \dfrac{x}{pq}$ $\left(\text{что законно, ибо } \dfrac{x}{pq} = L(\mathfrak{M}') \subset C(\mathfrak{M}_1)\right)$, получаем

$$\widetilde{\varphi}_q\left(\frac{x}{q}\right) = \widetilde{\varphi}_p\left(\frac{x}{p}\right).$$

IV. *J есть интеграл на $L(\mathfrak{M}')$.*

Доказательство. Если $x \in L(\mathfrak{M}')$ и $x(M) \geqslant 0$, то выбирая $p \in P_x^+$, имеем $\dfrac{x(M)}{p(M)} \geqslant 0$; следовательно, $J(x) = \widetilde{\varphi}_p\left(\dfrac{x}{p}\right) \geqslant 0$. Это означает, что J — интеграл на $L(\mathfrak{M}')$.

Из IV следует существование на $\mathfrak{M}'$ меры μ такой, что

$$J(x) = \int\limits_{\mathfrak{M}'} x(M)\,d\mu \quad \text{для всех} \quad x \in L(\mathfrak{M}') \tag{8}$$

(см. X п. 10 § 6).

Обозначим теперь через $\mathfrak{M}_f$ совокупность всех точек $M \subset \mathfrak{M}'$, на каждой окрестности которых сужение хотя бы одного из функционалов $\widetilde{\varphi}_p$, $p \in P$, не обращается в нуль; очевидно, $\mathfrak{M}_f$ — замкнутое подмножество в $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}_f$ — максимальное открытое множество, на котором сужения всех $\widetilde{\varphi}_p$, $p \in P$, равны нулю. Очевидно, $\mathfrak{M}_f \supset \mathfrak{M}_j$, где $\mathfrak{M}_j$ — носитель интеграла J.

V. *Если $p \in P$, то $p(M) \geqslant 0$ на $\mathfrak{M}_f$.*

Доказательство. Предположим, что $p(M_0) < 0$ в точке $M_0 \in \mathfrak{M}_f$; тогда $p(M) < \dfrac{1}{2}\,p(M_0) < 0$ в некоторой окрестности $U = U(M_0)$ точки M_0. Следовательно, для $x \in L^+(U)$ имеем $0 \leqslant J(x) = \widetilde{\varphi}_p\left(\dfrac{x}{p}\right) \leqslant 0$, т. е. $J(x) = 0$ на $L^+(U)$, а значит, и на $L(U)$; отсюда заключаем, что $\widetilde{\varphi}_p(x) = J(xp) = 0$ для $x \in L(U)$. Но тогда для любых $q \in P$, $x \in L^+(U)$

$$0 = \widetilde{\varphi}_p(qx) = \widetilde{\varphi}_q(px) \leqslant \frac{1}{2}\,p(M_0)\,\widetilde{\varphi}_q(x) \leqslant 0,$$

т. е. $\widetilde{\varphi}_q(x) = 0$, а это противоречит определению $\mathfrak{M}_f$.

Докажем теперь, что

$$J(py) = \widetilde{\varphi}_p(y) \tag{9}$$

для любой функции $y(M) = C(\mathfrak{M}_1)$, т. е. что для любой такой функции

$$\int\limits_{\mathfrak{M}'} p(M)\,y(M)\,d\mu = \int\limits_{\mathfrak{M}'} y(M)\,d\mu_p, \tag{10}$$

где μ_p — мера, отвечающая интегралу $\widetilde{\varphi}_p$.

Прежде всего заметим, что достаточно доказать равенство

$$\int\limits_{\mathfrak{M}_f} p(M)\, y(M)\, d\mu = \int\limits_{\mathfrak{M}_f} y(M)\, d\mu_p, \tag{11}$$

ибо, по самому определению множества $\mathfrak{M}_f$, сужения обоих интегралов на $\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}_f$ равны нулю.

Положим

$$N = \{M\colon M \in \mathfrak{M}_f,\, p(M) = 0\},$$

$$A_n = \Big\{M\colon M \in \mathfrak{M}_f,\, p(M) \geqslant \frac{1}{n}\Big\},\, B_n = \Big\{M\colon M \in \mathfrak{M}_f,\, p(M) \leqslant \frac{1}{n+1}\Big\};$$

так как $p(M) \to 0$ при $M \to M_0$, то каждое A_n — бикомпактное множество. Докажем, что N — нулевое множество по $\widetilde{\varphi}_p$. Для этого заметим, что на основании леммы Урысона существует функция $z'_n(M) \in C(\mathfrak{M}_1)$, удовлетворяющая условиям $z'_n(M) = 0$ на A_n, $z'_n(M) = 1$ на B_n, $0 \leqslant z'_n(M) \leqslant 1$ на всем $\mathfrak{M}_1$. Пусть $z_n = z'_1 \cap z'_2 \cap \ldots \cap z'_n$. Очевидно [1], $z_n \searrow \xi_N$ на $\mathfrak{M}_f$; следовательно, в силу V $pz_n \searrow 0$ и $qz_n \searrow q\xi_N$ на $\mathfrak{M}_f$ для любой функции $q \in P$. Поэтому, полагая в (7) $z = z_n$ и переходя к пределу при $n \to \infty$, получим (см. VII п. 7 § 6), что $\widetilde{\varphi}_p(q\xi_N) = 0$ для любой функции $q \in P$. В частности, $\widetilde{\varphi}_p(x^*x\xi_N) = 0$ для всех $x \in I$; подставляя сюда $x \pm y$, $x \pm iy$ вместо x и беря надлежащие линейные комбинации, получим, что $\widetilde{\varphi}_p(y^*x\xi_N) = 0$ для всех $x, y \in I$; так как I плотно в R, то также $\widetilde{\varphi}_p(y^*x\xi_N) = 0$ для всех $y, x \in R$. Но R плотно в $C_0(\mathfrak{M}_1)$, а $\widetilde{\varphi}_p$ непрерывно по норме $|x| = \sup\limits_{M \in \mathfrak{M}_1} |x(M)|$; поэтому также $\widetilde{\varphi}_p(y^*x\xi_N) = 0$ для всех $y, x \in C_0(\mathfrak{M}_1)$. Так как функции y^*x образуют плотное множество в $C_0(\mathfrak{M}_1)$ [2], то $\widetilde{\varphi}_p(z\xi_N) = 0$ для всех $z \in C_0(\mathfrak{M}_1)$, следовательно, N — нулевое множество по $\widetilde{\varphi}_p$.

Отсюда $\int\limits_N x(M)\, d\mu_p = 0$; кроме того, очевидно, $\int\limits_N p(M)x(M)\, d\mu = 0$.

Поэтому соотношение (11) будет доказано, если мы покажем, что $\int\limits_W p(M)\, y(M)\, d\mu = \int\limits_W y(M)\, d\mu_p$, где $W = \mathfrak{M}_f - N$, т. е. что

$$J(py\xi_W) = \widetilde{\varphi}_p(y\xi_W).$$

Очевидно, достаточно ограничиться случаем функции $y(M) \geqslant 0$. Положим $u_n = 1 - z_n$; тогда $pyu_n = 0$ на B_n, и так как $p(M) > \dfrac{1}{n+1} >$ > 0 на $\mathfrak{M}_f - B_n$, то формула (6) применима к функции $x = pyu_n$, т. е. $J(pyu_n) = \widetilde{\varphi}_p(yu_n)$. Но $pyu_n \nearrow py\xi_W$, $yu_n \nearrow y\xi_W$ на $\mathfrak{M}_f$; поэтому,

---

[1] Напомним, что ξ_A обозначает характеристическую функцию множества A (см. п. 5 § 6).

[2] Действительно, если $0 \leqslant y \leqslant 1$, $y(M) = 1$ на $F = \{M\colon |x(M)| \geqslant \varepsilon\}$ и $y(M) = 0$ вне какой-либо окрестности множества F, то $|x - yx| < \varepsilon$.

переходя к пределу, получим, что $J(py\xi_W) = \widetilde{\varphi}_p(y\xi_W)$. Тем самым формулы (9) и (10) доказаны.

Положив в (10) $y(M) \equiv 1$ и учитывая, что $p(M) = |p(M)|$ на $\mathfrak{M}_f$, получим, что $\int\limits_{\mathfrak{M}'} |p(M)|\, d\mu = \int\limits_{\mathfrak{M}'} p(M)\, d\mu = \widetilde{\varphi}_p(1) < \infty$, т. е. $p(M) \in \in L^1(\mu)$.

Обозначим через H_f гильбертово пространство, порожденное элементами из I со скалярным произведением $(x, y) = f(y^*x)$, а через H'_f — его замкнутое подпространство, порожденное линейными комбинациями элементов $p \in P$. Положив в (10) $y = q^* \in P$, получим

$$(p, q) = f(pq^*) = \varphi_p(q^*) = \int p(M)\, \overline{q(M)}\, d\mu;$$

следовательно, соответствие $x \to x(M)$ есть изометрическое отображение пространства H'_f в пространство $L^2(\mu)$.

Предположим теперь, что I^2 плотно в I в смысле скалярного произведения в H_f. Это означает, что элементы вида y^*x, где $y, x \in I$, образуют плотное множество в H_f. Но в силу тождества

$$y^*x = \frac{1}{4}\bigl[(x+y)^*(x+y) - (x-y)^*(x-y) + \\ + i\,(x+iy)^*(x+iy) - i\,(x-iy)^*(x-iy)\bigr],$$

$y^*x \in H'_f$. Поэтому $H'_f = H_f$.

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 5. *Пусть R — вполне симметричное коммутативное кольцо без единицы. Тогда для любого вещественного положительного функционала f, заданного на идеале I, плотном в R, существует, и притом только одна, мера μ на $\mathfrak{M}'$, обладающая следующими свойствами*:

1) *для всякого элемента $p \in P$*

$$p(M) \in L^1(\mu) \quad \textit{и} \quad f(px) = \int x(M)\, p(M)\, d\mu;$$

2) *отображение $p \to p(M)$ продолжается до изометрического отображения гильбертова пространства H'_f в пространство $L^2(\mu)$. Если I^2 плотно в I в смысле скалярного произведения в H_f, то $p \to p(M)$ продолжается до изометрического отображения всего H_f в $L^2(\mu)$.*

При этом P обозначает совокупность всех элементов $p \in I$, положительных относительно f; H_f — гильбертово пространство, порожденное элементами $x \in I$ со скалярным произведением $(x, y) = I(xy^*)$, а H'_f — подпространство в H_f, порожденное элементами $x \in P$.

§ 21. Обобщенная лемма Шура

1. Каноническое разложение оператора. I. *Если A — положительно определенный самосопряженный оператор, то существует положительно определенный самосопряженный оператор H, и притом только один, такой, что $H^2 = A$.*

Доказательство. Пусть $P(\lambda)$ — спектральная функция оператора A. Так как A — положительно определенный оператор, то $P(\lambda) = 0$ при $\lambda < 0$. Обозначим через $\mathfrak{D}_H$ совокупность всех векторов ξ, для которых $\int\limits_0^\infty \lambda\, d|P(\lambda)\,\xi|^2 < \infty$, и положим для таких векторов ξ

$$H\xi = \int\limits_0^\infty \sqrt{\lambda}\, dP(\lambda)\,\xi.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что H — положительно определенный самосопряженный оператор и что $H^2 = A$. Единственность оператора H следует из единственности спектральной функции $P(\lambda)$.

Для оператора H применяется обозначение $H = \sqrt{A}$. Из построения оператора H вытекает, что он перестановочен со всяким оператором из $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, перестановочным с A.

II. (Фон Нейман [2].) *Всякий замкнутый линейный оператор A из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$ с областью определения $\mathfrak{D}_A$, плотной в $\mathfrak{H}_1$, представляется в виде*

$$A = UH, \tag{1}$$

где H — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}_1$ с областью определения $\mathfrak{D}_H = \mathfrak{D}_A$, а U — частично изометрический оператор с начальной областью $\overline{\mathfrak{R}}_{A^*}$ и конечной областью $\overline{\mathfrak{R}}_A$. Операторы A, U и H определяются этими условиями единственным образом.

Доказательство. В силу VI п. 9 § 5 A^*A — положительно определенный самосопряженный оператор; следовательно, в силу I существует $H = \sqrt{A^*A}$. Обозначим через H_1 и A_1 сужения операторов H и A на $\mathfrak{D}_{H^2} = \mathfrak{D}_{A^*A}$. Тогда при $\xi \in \mathfrak{D}_{H^2}$

$$|H_1\xi|^2 = (H_1\xi,\, H_1\xi) = (H_1^2\xi,\, \xi) = (H^2\xi,\, \xi) = (A^*A\xi,\, \xi) = \\ = (A\xi,\, A\xi) = |A\xi|^2 = |A_1\xi|^2.$$

Следовательно,

$$|H_1\xi| = |A_1\xi| \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathfrak{D}_{H_1} = \mathfrak{D}_{A_1}.$$

Отсюда заключаем, что также [1] $\mathfrak{D}_{\widetilde{H}_1} = \mathfrak{D}_{\widetilde{A}_1}$ и

$$|\widetilde{H}_1\xi| = |\widetilde{A}_1\xi| \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathfrak{D}_{\widetilde{H}_1} = \mathfrak{D}_{\widetilde{A}_1}. \tag{2}$$

Докажем, что $\widetilde{H}_1 = H$ и $\widetilde{A}_1 = A$, т. е. что $\mathfrak{B}_{\widetilde{A}_1} = \mathfrak{B}_A$ и $\mathfrak{B}_{\widetilde{H}_1} = \mathfrak{B}_H$, где $\mathfrak{B}_A$ обозначает график оператора A (см. п. 7 § 5). Очевидно, $\mathfrak{B}_{\widetilde{A}_1} \subset \mathfrak{B}_A$; если $\mathfrak{B}_{\widetilde{A}_1} \neq \mathfrak{B}_A$, то существует отличный от нуля вектор $\{\xi, A\xi\} \in \mathfrak{B}_A$, ортогональный к $\mathfrak{B}_{A_1}$, т. е.

$$(\{\xi, A\xi\}, \{\eta, A_1\eta\}) = 0 \quad \text{для всех} \quad \eta \in \mathfrak{D}_{A_1}.$$

Это означает, что

$$0 = (\xi, \eta) + (A\xi, A_1\eta) = (\xi, \eta) + (A\xi, A\eta) = \\ = (\xi, \eta) + (\xi, A^*A\eta) = (\xi, (1 + A^*A)\,\eta).$$

Так как область изменения оператора $1 + A^*A$ есть все $\mathfrak{H}_1$ (см. VI п. 9 § 5), то $\xi \perp \mathfrak{H}_1$, и потому $\xi = 0$; следовательно, $\widetilde{A}_1 = A$, и аналогично $\widetilde{H}_1 = H$. Поэтому (2) принимает вид

$$|H\xi| = |A\xi| \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathfrak{D}_H = \mathfrak{D}_A. \tag{3}$$

Положим теперь

$$\left.\begin{aligned} U'H\xi = A\xi \quad &\text{для всех} \quad \xi \in \mathfrak{D}_H \\ \text{и} \qquad\qquad & \\ U'\eta = 0 \quad &\text{при} \quad \eta \perp \mathfrak{R}_H \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

В силу (3) U' — частично изометрический оператор с начальной областью $\mathfrak{R}_H$ и конечной $\mathfrak{R}_A$: положив $Y = \widetilde{U}'$, получим частично изометрический оператор U с начальной областью $\overline{\mathfrak{R}}_H$ и конечной $\overline{\mathfrak{R}}_A$. Из (4) непосредственно следует, что $A = UH$.

Докажем, что $\overline{\mathfrak{R}}_H = \overline{\mathfrak{R}}_{A^*}$, или, что то же, что $\mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{R}_H = \mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{R}_{A^*}$. Как легко видеть, $\mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{R}_H$ и $\mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{R}_{A^*}$ состоят из тех и только тех векторов $\xi \in \mathfrak{H}$, на которых соответственно $H\xi = 0$ и $A\xi = 0$, а в силу (3) эти множества совпадают.

Остается доказать единственность операторов U и H. Но если дано разложение вида (1), то

$$A^* = HU^* \quad \text{и} \quad A^*A = HU^*UH = HP_{\overline{\mathfrak{R}}_H}H = H^2;$$

следовательно, H, а потому и U определяются единственным образом.

Формула (1) называется *каноническим разложением оператора* A.

Оператор A из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$ называется *неособенным*, если 1) A замкнут; 2) $\mathfrak{D}_A$ и $\mathfrak{R}_{A^*}$ плотны в $\mathfrak{H}_1$; 3) $\mathfrak{R}_A$ плотно в $\mathfrak{H}_2$.

---

[1] Операторы A_1 и H_1 допускают замыкание, так как они являются сужениями замкнутых операторов A и H.

Таким образом, в случае неособенного оператора A $\overline{\mathfrak{R}}_A = \mathfrak{H}_2$, $\overline{\mathfrak{R}}_{A^*} = \mathfrak{H}_1$ и потому оператор U в (1) изометрически отображает $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}_2$.

Следовательно,

III. *Всякий неособенный оператор A из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$ можно представить, и притом единственным образом, в виде*

$$A = UH,$$

где H — положительно определенный самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}_1$, а U изометрически отображает $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}_2$.

2. Основная теорема. В теории представления колец [1)] приходится пользоваться следующей теоремой, которая является обобщением известной леммы Шура о конечномерных представлениях (см., например, Понтрягин [4]).

Теорема 1. *Пусть $x \to A_x$, $x \to B_x$ — представления в пространствах $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$ и пусть существует неособенный оператор T из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}'$ такой, что*

$$B_x T \subset T A_x \tag{1}$$

для всех x из R. Тогда эти представления эквивалентны.

Доказательство. Применив инволюцию к обеим частям соотношения (1) и учитывая соотношения г) п. 9 § 5 и III б) п. 10 § 5, получим:

$$T^* B_{x^*} = (B_x T)^* \supset (T A_x)^* \supset A_{x^*} T^*;$$

следовательно,

$$T^* B_{x^*} \supset A_{x^*} T^*. \tag{2}$$

Подставим сюда x^* вместо x; тогда (2) примет вид

$$T^* B_x \supset A_x T^*. \tag{3}$$

Умножая обе части соотношения (1) слева на T^* и пользуясь соотношением (3), получаем

$$T^* T A_x \supset T^* B_x T \supset A_x T^* T;$$

следовательно,

$$T^* T A_x \supset A_x T^* T,$$

т. е. оператор $T^* T$ перестановочен с A_x.

С другой стороны, согласно теореме фон Неймана (см. III п. 1) $T = UH$, где $H^2 = T^* T$, а оператор U изометрически отображает $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}'$. Подставим теперь в соотношение (1) вместо T его выражение UH; тогда (1) примет вид

$$B_x UH \subset UHA_x.$$

---

1) Всюду в этом параграфе речь идет о представлениях одного и того же симметричного кольца R.

Применим обе части этого последнего соотношения к элементу ξ из области определения оператора H. Мы получим тогда

$$B_x UH\xi = UHA_x\xi. \tag{4}$$

Оператор A_x перестановочен с T^*T, следовательно, и с $H = \sqrt{T^*T}$. Поэтому $HA_x\xi = A_xH\xi$ и равенство (4) можно переписать в виде

$$B_xUH\xi = UA_xH\xi.$$

Таким образом, $B_xU = UA_x$ на области изменения оператора H. Последняя плотна в $\mathfrak{H}$, ибо T, по предположению, — неособенный оператор. В силу непрерывности операторов A_x, B_x, U отсюда следует, что равенство $B_xU = UA_x$ имеет место во всем пространстве $\mathfrak{H}$, т. е. представления A_x и B_x эквивалентны.

Следствие 1. *Пусть $x \to A_x$, $x \to B_x$ — неприводимые представления в пространствах $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$ соответственно и пусть T — замкнутый линейный оператор из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}'$, удовлетворяющий условию*

$$B_xT \subset TA_x. \tag{5}$$

Тогда либо $T = 0$, либо представления эквивалентны и $T = \rho U$, где ρ — положительное число.

Доказательство. Пусть $T \neq 0$; следовательно, в области определения оператора T существует вектор $\xi_0 \neq 0$ такой, что $T\xi_0 \neq 0$. Из условия (5) следует, что всякий элемент вида $A_x\xi_0$ также входит в область определения оператора T. Так как представление $x \to A_x$ неприводимо, то совокупность всех векторов вида $A_x\xi_0$ плотна в $\mathfrak{H}$. Следовательно, область определения оператора T плотна в $\mathfrak{H}$.

Далее, $TA_x\xi_0 = B_xT\xi_0$; следовательно, область изменения оператора T содержит все векторы $B_xT\xi_0$. Так как $T\xi_0 \neq 0$ и представление $x \to B_x$ неприводимо, то эти векторы образуют множество, плотное в $\mathfrak{H}'$. Следовательно, область изменения оператора T плотна в $\mathfrak{H}'$.

Применим инволюцию к обеим частям соотношения (5) и подставим x^* вместо x. Мы получим соотношение

$$A_xT^* \subset T^*B_x,$$

аналогичное (5), в котором роль T играет оператор T^*. Так как $T \neq 0$, то и $T^* \neq 0$. Поэтому предыдущее рассуждение применимо к T^*. Таким образом, области определения и изменения оператора T^* плотны в $\mathfrak{H}'$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Поэтому T — неособенный оператор.

Согласно теореме 1 отсюда следует, что представления $x \to A_x$ и $x \to B_x$ эквивалентны. Тогда оператор $H = \sqrt{T^*T}$ перестановочен со всеми операторами A_x неприводимого представления $x \to A_x$; следовательно, он кратен единичному оператору. Пусть $H = \rho 1$; тогда $\rho > 0$ и $T = UH = \rho U$.

3. Применение к прямым суммам попарно неэквивалентных представлений. Применим теперь эти результаты к изучению прямых сумм представлений.

Теорема 2. *Пусть представление $x \to A_x$ в пространстве $\mathfrak{H}$ есть прямая сумма неприводимых и попарно неэквивалентных представлений $x \to A_x^{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, в пространствах $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$ соответственно. Тогда всякий ограниченный оператор B в пространстве $\mathfrak{H}$, перестановочный со всеми операторами A_x, имеет вид*

$$B\{\xi_\alpha\} = \{\lambda_\alpha \xi_\alpha\}, \tag{1}$$

где λ_α — скаляр.

Доказательство. Согласно п. 15 § 5 всякий ограниченный оператор B в пространстве $\mathfrak{H}$ задается матрицей $\|B_{\alpha\alpha_1}\|$, где $B_{\alpha\alpha_1}$ — оператор из $\mathfrak{H}^{(\alpha_1)}$ в $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$. В частности, оператор A_x задается диагональной матрицей $A_x = \|\delta_{\alpha\alpha_1} A_x^{(\alpha)}\|$, где

$$\delta_{\alpha\alpha_1} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \alpha = \alpha_1, \\ 0 & \text{при} \quad \alpha \neq \alpha_1. \end{cases}$$

Поэтому условие перестановочности операторов B и A_x дает:

$$A_x^{(\alpha)} B_{\alpha\alpha_1} = B_{\alpha\alpha_1} A_x^{(\alpha_1)}. \tag{2}$$

По условию, при $\alpha \neq \alpha_1$ представления $x \to A_x^{(\alpha)}$ и $x \to A_x^{(\alpha_1)}$ не эквивалентны. С другой стороны, равенство (2) означает, что оператор $T = B_{\alpha\alpha_1}$ удовлетворяет условиям следствия 1 п. 2. Поэтому $B_{\alpha\alpha_1} = 0$ при $\alpha \neq \alpha_1$. При $\alpha = \alpha_1$ равенство (2) означает, что оператор $B_{\alpha\alpha}$ перестановочен со всеми операторами $A_x^{(\alpha)}$ неприводимого представления $A_x^{(\alpha)}$. Следовательно, оператор $B_{\alpha\alpha}$ кратен единице, т. е. $B_{\alpha\alpha} = \lambda_\alpha 1_\alpha$, где 1_α — единичный оператор в пространстве $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$. Отсюда

$$B\{\xi_\alpha\} = \{\lambda_\alpha \xi_\alpha\}.$$

Ниже, в следствиях 2 и 3, представление $x \to A_x$ в пространстве $\mathfrak{H}$ есть прямая сумма представлений $x \to A_x^{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, в пространствах $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$.

Следствие 2. *Всякое замкнутое инвариантное подпространство $\mathfrak{M}$ в $\mathfrak{H}$ есть совокупность всех векторов $\xi = \{\xi_\alpha\}$ из $\mathfrak{H}$, удовлетворяющих условию*

$$\xi_\alpha = 0 \quad \text{для всех} \quad \alpha \in \mathfrak{A}_1,$$

где $\mathfrak{A}_1$ — некоторое подмножество множества $\mathfrak{A}$.

Действительно, пусть P — оператор проектирования на $\mathfrak{M}$. Так как $\mathfrak{M}$ — инвариантное подпространство, то P перестановочен со всеми операторами A_x. Согласно теореме 2 $P\{\xi_\alpha\} = \{\lambda_\alpha \xi_\alpha\}$. Так как $P^2 = P$, то $\lambda_a^2 = \lambda_\alpha$; отсюда либо $\lambda_\alpha = 0$, либо $\lambda_\alpha = 1$. Пусть $\mathfrak{A}_1$ — совокупность тех индексов α, для которых $\lambda_\alpha = 0$; $\mathfrak{M}$ есть совокупность тех и только тех векторов $\{\xi_\alpha\}$ из $\mathfrak{H}$, для которых $P\{\xi_\alpha\} = \{\xi_\alpha\}$, т. е. для которых

$$\lambda_\alpha \xi_\alpha = \xi_\alpha. \tag{3}$$

Если $\alpha \in \mathfrak{A}_1$, то $\lambda_\alpha = 0$, так что условие (3) дает $\xi_\alpha = 0$. Если же $\alpha \notin \mathfrak{A}_1$, то $\lambda_\alpha = 1$, и на соответствующую компоненту ξ_α никакое условие не наложено.

Следствие 3. *Если $\mathfrak{A}$ счетно, то всякий вектор $\xi = \{\xi_\alpha\}$ из $\mathfrak{H}$ такой, что $\xi_\alpha \neq 0$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$, есть циклический вектор в $\mathfrak{H}$.*

Действительно, пусть $\mathfrak{M}$ — замкнутая оболочка множества всех векторов $A_x\xi$, $x \in R$; $\mathfrak{M}$ — инвариантное подпространство в $\mathfrak{H}$. Согласно следствию 2 оно совпадает с $\mathfrak{H}$, ибо $\mathfrak{A}_1$ — пустое множество.

4. Применения к представлениям, кратным данному неприводимому представлению. До сих пор мы рассматривали прямые суммы попарно неэквивалентных представлений. Рассмотрим теперь другой крайний случай.

Представление $x \to A_x$ будем называть *кратным данному неприводимому представлению* $x \to A_x^{(0)}$, если $x \to A_x$ есть прямая сумма представлений, эквивалентных одному и тому же представлению $x \in A_x^{(0)}$.

Теорема 3. *Всякая неприводимая часть представления $x \to A_x$, кратного данному неприводимому представлению $x \to A_x^{(0)}$, эквивалентна этому неприводимому представлению.*

Доказательство. Пусть $x \to A'_x$ — неприводимая часть представления $x \to A_x$ и пусть $\mathfrak{M}$ — то замкнутое инвариантное подпространство пространства $\mathfrak{H}$, в котором рассматривается эта неприводимая часть. Если $\mathfrak{M} \neq (0)$, то в $\mathfrak{M}$ существует вектор $\xi^0 = \{\xi^0_\alpha\} \neq 0$; следовательно, среди компонент ξ^0_α этого вектора хотя бы одна отлична от нуля. Пусть это будет $\xi^0_{\alpha_0}$. Положим для краткости $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_{\alpha_0}$, $H = \bigoplus\limits_{\alpha \neq \alpha_0} \mathfrak{H}_\alpha$. Тогда пространство $\mathfrak{H} = \bigoplus\limits_{\alpha} \mathfrak{H}_\alpha$ можно рассматривать как прямую сумму пространств $\mathfrak{H}_0$ и H; следовательно, каждый элемент $\xi \in \mathfrak{H}$ можно рассматривать как пару $\xi = \{\eta, \zeta\}$, где $\eta \in \mathfrak{H}_0$ и $\zeta \in H$. В силу нашего выбора индекса α_0, среди пар $\xi = \{\eta, \zeta\}$, принадлежащих подпространству $\mathfrak{M}$, существует хотя бы одна, для которой $\eta \neq 0$. Положим для краткости $B_x = A_x^{(\alpha_0)}$ и обозначим через $x \to C_x$ прямую сумму всех представлений $x \to A_x^{(\alpha_0)}$, $\alpha \neq \alpha_0$. Тогда представление $x \to A_x$ можно рассматривать как прямую сумму представлений $x \to B_x$ и $x \to C_x$. Другими словами,

$$A_x\{\eta, \zeta\} = \{B_x\eta, C_x\zeta\}.$$

Обозначим через H' совокупность всех элементов ζ таких, что $\{\eta, \zeta\} = \mathfrak{M}$ при некотором η, и через $\widetilde{H}'$ — ее замыкание. $\widetilde{H}'$ инвариантно по отношению ко всем операторам C_x. Действительно, так как $\mathfrak{M}$ — инвариантное подпространство в $\mathfrak{H}$, то из $\{\eta, \zeta\} = \mathfrak{M}$ следует, что также $\{B_x\eta, C_x\zeta\} \in \mathfrak{M}$. Другими словами, из $\zeta \in H'$ следует, что также $C_x\zeta \in H'$. Поэтому $\widetilde{H}'$ есть инвариантное подпространство в H.

Рассмотрим теперь элементы подпространства $\mathfrak{M}$ вида $\{\eta, 0\}$. Они образуют в $\mathfrak{M}$ инвариантное подпространство по отношению к представлению $x \to A'_x$. Так как представление $x \to A'_x$ неприводимо, то это инвариантное подпространство есть либо $\mathfrak{M}$, либо (0). В первом случае $\mathfrak{M}$ состоит из элементов вида $\xi = \{\eta, 0\} = \{\xi_{\alpha_0}, 0\}$ и, следовательно, совпадает с $\mathfrak{H}_{\alpha_0}$. Поэтому представление $x \to A'_x$ совпадает с представлением $x \to A_x^{(\alpha_0)}$, и теорема в этом случае доказана.

Во втором случае элемент $\{\eta, 0\}$ может принадлежать подпространству $\mathfrak{M}$, лишь когда $\eta = 0$. Таким образом,

$$\text{из } \{\eta, \zeta\} \in \mathfrak{M},\ \zeta = 0 \text{ следует } \eta = 0. \tag{1}$$

Аналогично, совокупность элементов подпространства $\mathfrak{M}$ вида $\{0, \zeta\}$ образует в $\mathfrak{M}$ инвариантное подпространство; следовательно, она также либо совпадает с $\mathfrak{M}$, либо $= (0)$. Первая возможность исключена в силу нашего выбора α_0. Поэтому остается вторая возможность, и

$$\text{из } \{\eta, \zeta\} \in \mathfrak{M},\ \eta = 0 \text{ следует } \zeta = 0. \tag{2}$$

Условие (2) означает, что подпространство $\mathfrak{M}$ можно рассматривать как график линейного оператора T из $\mathfrak{H}_0$ в $\widetilde{H}'$ (см. п. 7 § 5). Другими словами, для $\{\eta, \zeta\} \in \mathfrak{M}$ мы полагаем $\zeta = T\eta$. Так как $\mathfrak{M}$ замкнуто, то оператор T замкнут.

Пусть $\{\eta_0, \zeta_0\}$ — элемент из $\mathfrak{M}$ такой, что $\eta_0 \neq 0$. Тогда также $\{B_x\eta_0, C_x\zeta_0\} \in \mathfrak{M}$; следовательно, все векторы $B_x\eta_0$ принадлежат области определения оператора T. Так как представление $x \to B_x$ неприводимо, то множество всех векторов $B_x\eta_0$ плотно в $\mathfrak{H}_0$. Следовательно, область определения оператора T плотна в $\mathfrak{H}_0$. Далее, по определению пространства H', область изменения оператора T совпадает с H', следовательно, плотна в $\widetilde{H}'$.

Наконец, условие (1) означает, что $T\eta = 0$ лишь при $\eta = 0$, и потому $\widetilde{\mathfrak{R}}_{T^*} = \mathfrak{H}_0$.

Таким образом, T — неособенный оператор из $\mathfrak{H}_0$ в $\widetilde{H}'$.

Этот оператор удовлетворяет условию $C_xT \subset TB_x$. Действительно, элементы подпространства $\mathfrak{M}$ имеют вид $\{\eta, T\eta\}$. Так как $\mathfrak{M}$ инвариантно, то также $\{B_x\eta, C_xT\eta\} \in \mathfrak{M}$, следовательно, $TB_x\eta = C_xT\eta$ для любого элемента η из области определения оператора T. Это и означает, что

$$C_xT \subset TB_x.$$

Согласно теореме 1 отсюда следует, что представления $x \to B_x$ и $x \to C_x$ эквивалентны. Кроме того, оператор $H = \sqrt{T^*T}$ перестановочен со всеми операторами неприводимого представления $x \to B_x$;

следовательно, $H = \rho 1$, $\rho > 0$. Отсюда $T = \rho W$, где W — изометрическое отображение $\mathfrak{H}_0$ на $\widetilde{H}'$. Итак, каждый элемент подпространства $\mathfrak{M}$ имеет вид $\xi = \{\eta, \rho W\eta\}$, где η пробегает $\mathfrak{H}_0$. При этом $A_x\xi = A'_x\{\eta, \rho W\eta\} = \{B_x\eta, \rho W B_x\eta\}$. Каждому такому элементу $\xi = \{\eta, \rho W\eta\}$ поставим в соответствие элемент $\eta' = \sqrt{1+\rho^2}\,\eta$. Соответствие $\xi \to y'$ есть изометрическое отображение подпространства $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_{\alpha_0}$. При этом отображении элемент $A'_x\xi = \{B_x\eta, \rho W B_x\eta\}$ переходит в $\sqrt{1+\rho^2}\,B_x\eta = B_x\eta'$; следовательно, оператор A'_x переходит в B_x. Это означает, что представления $x \to A'_x$ и $x \to B_x = A_x^{(0)}$ эквивалентны, и теорема доказана.

Следствие 4. *Пусть представления $x \to A_x$ и $x \to B_x$ кратны неприводимым представлениям $x \to A_x$ и $x \to B_x$ соответственно. Если эти кратные представления $x \to A_x$ и $x \to B_x$ эквивалентны, то неприводимые представления $x \to A_x^{(0)}$ и $x \to B^{(0)}$ также эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}^{(0)}$, $\mathfrak{H}_1^{(0)}$ — пространства представлений $x \in A_x$, $x \to B_x$, $x \to A_x^{(0)}$, $x \to B_x^{(0)}$ соответственно. Пространство $\mathfrak{H}^{(0)}$ можно рассматривать как замкнутое инвариантное подпространство пространства $\mathfrak{H}$, а представление $x \to A_x^{(0)}$ — как часть представления $x \to A_x$ в этом подпространстве. По предположению, существует изометрическое отображение пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_1$, при котором оператор A_x переходит в B_x. Это отображение переводит $\mathfrak{H}^{(0)}$ в некоторое инвариантное подпространство $\mathfrak{R}$ пространства $\mathfrak{H}_1$. Пусть $x \to C_x$ — часть представления $x \to B_x$ в этом инвариантном подпространстве. Представление $x \to C_x$, будучи эквивалентным неприводимому представлению $x \to A_x^{(0)}$, неприводимо.

Итак, $x \to C_x$ есть неприводимая часть представления $x \to B_x$, кратного неприводимому представлению $x \to B_x^{(0)}$. Согласно теореме 3 представления $x \to B_x^{(0)}$ и $x \to C_x$ эквивалентны. Следовательно, представления $x \to B_x^{(0)}$ и $x \to A_x^{(0)}$ также эквивалентны.

§ 22. Некоторые представления кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$

Одной из важных задач теории симметричных колец является описание всех с точностью до эквивалентности представлений данного кольца. Эта задача полностью разрешена только для некоторых частных случаев (см., например, Гельфанд и Наймарк [2–5, 7, 8]). Для кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ эта задача не решена; имеются только результаты частного характера, которые и будут изложены в этом параграфе.

1. Идеалы в кольце $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. Всякое представление кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ есть его симметричный гомоморфизм, следовательно, есть симметричный изоморфизм кольца вычетов $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})/I$, где I — ядро этого гомоморфизма (см. п. 1 § 10). Так как всякое представление кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ непрерывно (теорема 1 п. 3 § 17), то I — замкнутый двусторонний симметричный идеал в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$.

Одним из таких идеалов является совокупность всех вполне непрерывных операторов в $\mathfrak{H}$. Действительно: а) сумма двух вполне непрерывных операторов есть вполне непрерывный оператор; б) произведение вполне непрерывного оператора на ограниченный оператор есть вполне непрерывный оператор; в) предел в смысле нормы в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ последовательности вполне непрерывных операторов есть вполне непрерывный оператор.

Обозначим этот идеал через I_0; он симметричен, ибо если A — вполне непрерывный оператор, то A^* — также вполне непрерывный оператор.

Теорема 1. *Если $\mathfrak{H}$ сепарабельно, то I_0 есть единственный отличный от* (0) *замкнутый двусторонний идеал в* $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$.

Доказательство основано на следующих предложениях. Пусть S — произвольное подмножество в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$; обозначим через S^P совокупность всех операторов проектирования, содержащихся в S. Тогда

I. *Если I_l — левый идеал в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ и если $I_l^P(0) = (0)$, то $I_l = (0)$.*

Доказательство. Пусть $A \in I_l$, $A \neq 0$; положим $H = A^*A$; тогда также $H \in I_l$ и $H \neq 0$. Пусть $P(\lambda)$ — спектральная функция оператора H. Так как этот оператор положительно определенный, то существует интервал $\Delta = (\alpha, \beta)$ $(0 < \alpha < \beta)$ такой, что $P(\Delta) \neq 0$. Пусть $\mathfrak{M}_\Delta$ — подпространство, на которое проектирует $P(\Delta)$. Оператор H, рассматриваемый как оператор в пространстве $\mathfrak{M}_\Delta$, обозначим через H_Δ; H_Δ имеет ограниченный обратный в $\mathfrak{M}_\Delta$. Положим $B = H_\Delta^{-1}P(\Delta)$; тогда B — ограниченный оператор. Следовательно, $BH \in I_l$. С другой стороны, $BH = P(\Delta)$, ибо $BH = H_\Delta^{-1}P(\Delta)H = H_\Delta^{-1}P(\Delta)HP(\Delta) = H_\Delta^{-1}H_\Delta P(\Delta) = P(\Delta)$; следовательно, идеал I_l содержит оператор проектирования $P(\Delta) \neq 0$. Если поэтому $I_l^P = (0)$, то в I_l нет операторов $A \neq 0$.

Размерностью оператора проектирования P будем называть размерность подпространства, на которое он проектирует.

II. *Если I — двусторонний идеал в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, P — оператор проектирования, содержащийся в I, то всякий оператор проектирования Q одинаковой с P размерности также принадлежит I.*

Действительно, если размерности пространств $P\mathfrak{H}$ и $Q\mathfrak{H}$ совпадают, то существует частично изометрический оператор U с начальной областью $P\mathfrak{H}$ и конечной $Q\mathfrak{H}$. Это означает, что $U^*U = P$, $UU^* = Q$ (см. п. 14 § 5). Так как I — двусторонний идеал, то

$$Q = Q^2 = UU^*UU^* = UPU^* \in I.$$

III. *Если $\mathfrak{H}$ сепарабельно, то двусторонний идеал в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ не содержит операторов проектирования бесконечной размерности.*

В самом деле, оператор проектирования P бесконечной размерности и единичный оператор 1 имеют в этом случае одинаковые размерности. Так как последний не может принадлежать идеалу, то в силу II оператор P также не может ему принадлежать.

IV. *Если $P \in I$ и $Q < P$, где P и Q — операторы проектирования, то $Q \in I$.*

Именно, условие $Q < P$ означает, что $Q = QP = PQ$. Следовательно, $Q \in I$, ибо I — идеал.

Из предложений I и IV следует, что двусторонний идеал $I \neq (0)$ содержит хотя бы один одномерный оператор проектирования. В силу II он содержит тогда все одномерные, а следовательно, и все конечномерные операторы проектирования.

Принимая во внимание предложение III, мы видим, что при $I \neq (0)$ и сепарабельном $\mathfrak{H}$, I^P состоит из всех конечномерных операторов проектирования.

Докажем теперь теорему 1. Пусть $\mathfrak{H}$ сепарабельно и I — замкнутый двусторонний идеал в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, отличный от (0); пусть A — вполне непрерывный оператор. Докажем, что $A \in I$. Оператор A можно представить в виде $A = H_1 + iH_2$, где H_1 и H_2 — вполне непрерывные эрмитовы операторы. Поэтому достаточно доказать утверждение для того случая, когда A — эрмитов оператор. Но в этом случае спектральное разложение оператора A имеет вид

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k, \tag{1}$$

где P_k — конечномерные операторы, а $\lambda_k \to 0$ при $k \to \infty$ (см. VI п. 4 § 17). При этом ряд в правой части (1) сходится в смысле нормы в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. Так как всякая конечная сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k P_k \in I$, то и $A \in I$. Таким образом,

$$I_0 \subset I.$$

Докажем теперь обратное включение. Пусть $A \in I$. Докажем, что $A \in I_0$. Пусть $A + UH$ — каноническое разложение оператора A. Тогда $A^* = HU^* = U^*AU^*$; следовательно, также $A^* \in I$. Поэтому $H_1 = \dfrac{A + A^*}{2}$ и $H_2 = \dfrac{A - A^*}{2i}$ также $\in I$, и мы можем, таким образом, считать, что A — эрмитов оператор.

Обозначим через $P(\lambda)$ спектральную функцию оператора A. Повторяя рассуждение, проведенное в доказательстве предложения I, убеждаемся в том, что $P(\Delta) \in I$ для любого замкнутого интервала, не содержащего нуля. В силу III оператор $P(\Delta)$ конечномерен, следовательно, $P(\Delta) \in I_0$. Так как

$$A = \int \lambda \, dP(\lambda) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P(\Delta_k), \quad 0 \notin \Delta_k$$

в смысле сходимости по норме в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, то также $A \in I_0$.

Таким образом, $I_0 = I$, и теорема доказана.

Применяя эти же рассуждения, можно доказать следующее предложение [1]).

V. *Кольцо I_0 не содержит замкнутых, отличных от* (0) *двусторонних идеалов.*

Действительно, если I — такой идеал, то предложение I применимо к I, ибо $B \in I_0$ при $H \in I_0$. Предложение II также применимо, ибо $U \in I_0$ при $P \in I$. Наконец, предложение IV также применимо, ибо если $P \in I_0$ и $Q < P$, то $Q \in I_0$. Поэтому, рассуждая, как и выше, заключаем, что если $I \neq (0)$, то I содержит все конечномерные операторы проектирования и потому совпадает с I_0.

Следствие. *Если $\mathfrak{H}$ сепарабельно, то всякое представление кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ есть симметричный изоморфизм самого кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ или кольца вычетов $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})/I_0$.*

Действительно, это следует из того, что единственными замкнутыми двусторонними идеалами в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ являются (0) и I_0.

Среди двусторонних идеалов кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ особо важную роль играют симметрично нормируемые идеалы. Двусторонний идеал I кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ называется *симметрично нормируемым*, если на нем существует норма $|X|_s$, по отношению к которой он является банаховым пространством, удовлетворяющая следующим условиям:

а) $|AXB|_s \leqslant |A||X|_s|B|$ для $X \in I$, $A, B \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$,

б) $|X|_s = |X|$ для одномерного $X \in I$.

Норма $|X|_s$, удовлетворяющая этим условиям, называется *симметричной нормой*.

Примером симметричной нормы является $|A|_p = \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty} s_j^p(A) \right)^{1/p}$, где $s_j(A)$ — собственные значения оператора $\sqrt{A^*A}$, $A \in I_0$; соответствующий симметрично нормируемый идеал обозначается через $\mathfrak{S}_p$; он состоит из всех $A \in I_0$, для которых $|A|_p < \infty$. Теория симметрично нормируемых идеалов впервые была подробно изложена в монографии Шэттена [1]; она возникла в связи с теорией тензорных произведений нормированных пространств, разработанной фон Нейманом и Шэттеном [1]. В работах Гохберга, Крейна и Митягина теория симметрично нормируемых идеалов получила дальнейшее развитие; подробное изложение этой теории см. в гл. III монографии Гохберга и Крейна [1].

---

[1]) Мы здесь уже не предполагаем, что $\mathfrak{H}$ сепарабельно.

2. Кольцо I_0 и его представления. Совокупность I_0 всех вполне непрерывных операторов в пространстве $\mathfrak{H}$ есть, очевидно, банахово симметричное подкольцо (без единицы) кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. Найдем все представления кольца I_0.

Пусть $\{\varphi_\alpha\}$ — полная ортонормальная система в $\mathfrak{H}$, а P_α — оператор проектирования на одномерное подпространство $\mathfrak{M}_\alpha$, определенное вектором φ_α, т. е.

$$P_\alpha \xi = (\xi, \varphi_\alpha)\, \varphi_\alpha. \tag{1}$$

Очевидно,

$$P_{\alpha_1} P_{\alpha_2} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_1 \neq \alpha_2. \tag{2}$$

Обозначим через $U_{\alpha\beta}$ оператор, определенный равенствами

$$U_{\alpha\beta}(\lambda\varphi_\beta) = \lambda\varphi_\alpha, \quad U_{\alpha\beta}\xi = 0 \quad \text{при} \quad \xi \perp \varphi_\beta.$$

Очевидно, $U_{\alpha\beta}$ — частично изометричный оператор с начальной областью $\mathfrak{M}_\beta$ и конечной $\mathfrak{M}_\alpha$. Из его определения следует, что

$$U^*_{\beta\alpha} = U_{\alpha\beta}, \quad U_{\alpha\alpha} = P_\alpha, \quad U_{\alpha\beta} U_{\beta\gamma} = U_{\alpha\gamma}. \tag{3}$$

Кроме того, в силу (1) для любого ограниченного оператора A

$$P_\alpha A P_\beta \xi = P_\alpha A(\xi, \varphi_\beta)\, \varphi_\beta = (\xi, \varphi_\beta)(A\varphi_\beta, \varphi_\alpha)\, \varphi_\alpha;$$

следовательно,

$$P_\alpha A P_\beta(\lambda\varphi_\beta) = \lambda(A\varphi_\beta, \varphi_\alpha)\, \varphi_\alpha, \quad P_\alpha A P_\beta \xi = 0 \quad \text{при} \quad \xi \perp \varphi_\beta.$$

Сличение этих равенств с определением оператора $U_{\alpha\beta}$ показывает, что

$$P_\alpha A P_\beta = a_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta}, \tag{4}$$

где

$$a_{\alpha\beta} = (A\varphi_\beta, \varphi_\alpha)$$

есть элемент матрицы оператора A в ортонормальной системе $\{\varphi_\alpha\}$.

Пусть теперь $A \to \overline{A}$ — представление кольца I_0 и пусть $\overline{\mathfrak{H}}$ — пространство этого представления. Так как операторы P_α, $U_{\alpha\beta}$ принадлежат кольцу I_0, то им соответствуют некоторые операторы $\overline{P}_\alpha$, $\overline{U}_{\alpha\beta}$ представления, которые в силу (2) и (3) удовлетворяют соотношениям

$$\overline{P}_{\alpha_1} \overline{P}_{\alpha_2} = 0 \quad \text{при} \quad \alpha_1 \neq \alpha_2, \tag{5}$$

$$\overline{U}^*_{\alpha\beta} = \overline{U}_{\beta\alpha}, \quad \overline{U}_{\alpha\alpha} = \overline{P}_\alpha, \quad \overline{U}_{\alpha\beta} \overline{U}_{\beta\gamma} = \overline{U}_{\alpha\gamma}. \tag{6}$$

Кроме того, если $A \in I_0$ и $\overline{A}$ — соответствующий оператор представления, то из (4) следует, что

$$\overline{P}_\alpha \overline{A} \overline{P}_\beta = a_{\alpha\beta} \overline{U}_{\alpha\beta}. \tag{7}$$

Очевидно, $\overline{P}_\alpha$ — оператор проектирования в $\overline{\mathfrak{H}}$; пусть $\overline{\mathfrak{M}}_\alpha$ — подпространство в $\overline{\mathfrak{H}}$, на которое он проектирует. В силу соотношения (5)

$$\overline{\mathfrak{M}}_{\alpha_1} \perp \overline{\mathfrak{M}}_{\alpha_2} \quad \text{при} \quad \alpha_1 \neq \alpha_2.$$

Кроме того, из соотношений (6) следует, что $\overline{U}_{\alpha\beta}$ — частично изометричный оператор с начальной областью $\overline{\mathfrak{M}}_\beta$ и конечной $\overline{\mathfrak{M}}_\alpha$. Поэтому все подпространства $\overline{\mathfrak{M}}_\alpha$ имеют одинаковую размерность. Если эта размерность равна нулю, то все операторы $\overline{P}_\alpha$, а значит, и $\overline{P}_\alpha\overline{A}\,\overline{P}_\beta$ равны нулю. С другой стороны, всякий вполне непрерывный оператор A есть предел в смысле нормы в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ конечных сумм $\sum a_{\alpha\beta}U_{\alpha\beta}$. Так как всякое представление $A \to \overline{A}$ кольца I_0 непрерывно (см. теорему 1 п. 3 § 17), то образ $\overline{A}$ вполне непрерывного оператора A есть предел в смысле нормы в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ конечных сумм $\sum a_{\alpha\beta}\overline{U}_{\alpha\beta}$. Поэтому и образ $\overline{A}$ всякого элемента $A \in I_0$ равен нулю. Другими словами, в этом случае представление переводит всякий оператор $A \in I_0$ в оператор, равный нулю.

Отбрасывая этот неинтересный случай, мы можем поэтому предположить, что размерность пространств $\overline{\mathfrak{M}}_\alpha$ отлична от нуля.

Пусть $\overline{\varphi}_{\alpha_0}$ — нормированный элемент в фиксированном пространстве $\overline{\mathfrak{M}}_{\alpha_0}$. Положим

$$\overline{\varphi}_\alpha = \overline{U}_{\alpha\alpha_0}\overline{\varphi}_{\alpha_0}.$$

Тогда элементы $\overline{\varphi}_\alpha$ образуют ортонормальную систему в $\overline{\mathfrak{H}}$. Обозначим через $\overline{\mathfrak{N}}$ подпространство, построенное на элементах $\{\varphi_\alpha\}$. Из соотношений (5), (6) и (7) следует, что $\overline{\mathfrak{N}}$ инвариантно по отношению ко всем операторам A. Действительно,

$$\overline{U}_{\alpha\beta}\overline{\varphi}_\gamma = \overline{U}_{\alpha\beta}\overline{U}_{\gamma\alpha_0}\overline{\varphi}_{\alpha_0} = 0 \quad \text{при} \quad \beta \neq \gamma,$$
$$\overline{U}_{\alpha\beta}\overline{\varphi}_\beta = \overline{U}_{\alpha\beta}\overline{U}_{\beta\alpha_0}\overline{\varphi}_{\alpha_0} = \overline{U}_{\alpha\alpha_0}\overline{\varphi}_{\alpha_0} = \overline{\varphi}_a;$$

следовательно,

$$\overline{P}_\alpha\overline{A}\,\overline{P}_\beta\overline{\varphi}_\gamma = 0 \quad \text{при} \quad \gamma \neq \beta, \quad \overline{P}_\alpha\overline{A}\,\overline{P}_\beta\overline{\varphi}_\beta = a_{\alpha\beta}\overline{\varphi}_\beta. \tag{8}$$

Таким образом, операторы $\overline{P}_\alpha\overline{A}\,\overline{P}_\beta$, а значит, и предел $\overline{A}$ их конечных сумм приводятся пространством $\overline{\mathfrak{N}}$. В этом пространстве $\overline{P}_\alpha$ есть оператор проектирования на одномерное пространство, порожденное элементом $\overline{\varphi}_a$. Поэтому равенство (8) означает, что $\|a_{\alpha\beta}\|$ есть матрица оператора $\overline{A}$ в пространстве $\overline{\mathfrak{N}}$ по отношению к ортонормальной системе $\{\overline{\varphi}_\sigma\}$. Соответствие $\varphi_\alpha \to \overline{\varphi}_\alpha$ изометрически отображает $\mathfrak{H}$ на $\overline{\mathfrak{N}}$ и переводит при этом оператор A в оператор $\overline{A}$. Другими словами, часть представления $A \to \overline{A}$ в подпространстве $\overline{\mathfrak{N}}$ порождается изометрическим отображением $\mathfrak{H}$ на $\overline{\mathfrak{N}}$, т. е. унитарно эквивалентна тождественному представлению $A \to A$.

Рассмотрим теперь представление в ортогональном дополнении $\overline{\mathfrak{H}} \ominus \overline{\mathfrak{N}}$. Если оно в этом дополнении отлично от тождественного нуля, то можно снова выделить инвариантное подпространство $\overline{\mathfrak{N}}'$, в котором наше представление $A \to \overline{A}$ эквивалентно тождественному представлению $A \to A$. Повторяя это рассуждение, придем к следующей теореме.

Теорема 2. *Всякое представление $A \to \overline{A}$ кольца I_0 эквивалентно прямой сумме тождественных представлений $A \to A$ и нулевого представления $A \to 0$.*

В частности, из теоремы 2 следует, что всякое неприводимое представление $A \to \overline{A}$ кольца I_0 эквивалентно тождественному или нулевому представлению. Другими словами, кольцо I_0 имеет (с точностью до эквивалентности) только одно неприводимое представление, отличие от нулевого.

Это свойство является характеристическим для кольца I_0; именно, если замкнутое симметричное неприводимое подкольцо R кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ имеет (с точностью до эквивалентности) только одно неприводимое представление, отличное от нулевого, то R совпадает с I_0 (см. Наймарк [4] и Розенберг [1]).

3. Представления кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. Рассмотрим теперь какое-нибудь представление $A \to \overline{A}$ кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. Это представление есть одновременно представление кольца $I_0 \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. Согласно теореме 2 последнее представление эквивалентно прямой сумме тождественных представлений $A \to A$ и нулевого представления $A \to 0$ кольца I_0. Другими словами, пространство $\overline{\mathfrak{H}}$ представления $A \to \overline{A}$ мсжно с точностью до унитарной эквивалентности представить в виде прямой суммы экземпляров $\mathfrak{H}_\alpha$ пространства $\mathfrak{H}$ и некоторого пространства $\mathfrak{H}_0$, причем в каждом из пространств $\mathfrak{H}_\alpha = \mathfrak{H}$ наше представление $A \to \overline{A}$ кольца I_0 сводится к тождественному представлению $A \to A$, а в пространстве $\mathfrak{H}_0$ — к нулевому представлению $A \to 0$. При этом может, конечно, случиться, что пространства $\mathfrak{H}_\alpha$ или пространство $\mathfrak{H}_0$ отсутствуют.

Докажем, что *каждое из пространств $\mathfrak{H}_\alpha = \mathfrak{H}$, а значит, и пространство $\mathfrak{H}_0$ инвариантны по отношению не только к образам $\overline{A}$ элементов кольца I_0, но и всего кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$.*

Пусть, например, $\overline{P}'$ — оператор проектирования в $\overline{\mathfrak{H}}$ на пространство $\mathfrak{H}_\alpha$. Положим для $\xi \in \mathfrak{H}_{\alpha_0}$

$$\overline{A}'\xi = \overline{P}'\overline{A}\xi.$$

Тогда $\overline{A}'$ — ограниченный оператор в пространстве $\mathfrak{H}_{\alpha_0}$. Пространство $\mathfrak{H}_{\alpha_0}$ можно считать совпадающим с пространством $\mathfrak{H}$, т. е. считать, что $\mathfrak{H}$ вложено в $\overline{\mathfrak{H}}$. Тогда $\overline{A}'$ можно рассматривать как оператор в пространстве $\mathfrak{H}$. Докажем, что $A = \overline{A}'$. Для этого достаточно доказать, что совпадают матрицы этих операторов в ортонормальной системе $\{\varphi_\alpha\}$. Рассмотрим для этой цели оператор $P_\alpha A P_\beta = a_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta}$; тогда $\|a_{\alpha\beta}\|$ есть матрица оператора A в системе $\{\varphi_\alpha\}$. Наше представление $A \to \overline{A}$ в пространстве $\mathfrak{H}_{\alpha_0} = \mathfrak{H}$ переводит этот оператор в себя, ибо этот оператор есть элемент кольца I_0; то же относится и к операторам P_α, $U_{\alpha\beta} \in I_0$. С другой стороны, оператор $P_\alpha A P_\beta$ переходит в $\overline{P}_\alpha \overline{A}\, \overline{P}_\beta$.

Поэтому $\overline{P}_\alpha \overline{A P}_\beta = a_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta}$ в пространстве $\mathfrak{H}_{\alpha_0} = \mathfrak{H}$. Отсюда

$$\begin{aligned}(\overline{A}'\varphi_\beta, \varphi_\alpha) = (\overline{P}'\overline{A}\varphi_\beta, \varphi_\alpha) = (\overline{A}\varphi_\beta, \overline{P}'\varphi_\alpha) = (\overline{A}\varphi_\beta, \varphi_\alpha) = \\ = (\overline{A}P_\beta\varphi_\beta, P_\alpha\varphi_\alpha) = (\overline{A}\,\overline{P}_\beta\varphi_\beta, \overline{P}_\alpha\varphi_\alpha) = (\overline{P}_\alpha\overline{A}\,\overline{P}_\beta\varphi_\beta\varphi_\alpha) = \\ = a_{\alpha\beta}(U_{\alpha\beta}\varphi_\beta, \varphi_\alpha) = a_{\alpha\beta}(\varphi_\alpha, \varphi_\alpha) = a_{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Так как $(\overline{A}'\varphi_\beta, \varphi_\alpha)$ есть элемент $a'_{\alpha\beta}$ матрицы оператора $\overline{A}'$ в системе $\{\varphi_\alpha\}$, то тем самым доказано, что $A = \overline{A}'$. Отсюда следует, что

$$\overline{P}'(\overline{AB})\,\xi = (AB)\,\xi, \quad \overline{P}'\overline{A}\,\overline{P}'\overline{B}\xi = A(B\xi),$$

так что $\overline{P}'\overline{A}(\overline{B}\xi) = \overline{P}'\overline{A}\,\overline{P}'(\overline{B}\xi)$.

Другими словами, $\overline{P}'\overline{A} = \overline{P}'\overline{A}\,\overline{P}'$ на всех элементах вида $\overline{B}\xi$, где вектор ξ пробегает все пространство $\mathfrak{H}_{\alpha_0} = \mathfrak{H}$, а оператор B — все кольцо $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. Обозначим через $\overline{\mathfrak{H}}'$ замкнутую линейную оболочку множества всех этих элементов $\overline{B}\xi$. Тогда равенство

$$\overline{P}'\overline{A} = \overline{P}'\overline{A}\,\overline{P}' \tag{1}$$

имеет место в $\overline{\mathfrak{H}}'$. Так как $\mathfrak{H}_{\alpha_0} \subset \overline{\mathfrak{H}}'$, то в дополнении $\overline{\mathfrak{H}} \ominus \overline{\mathfrak{H}}'$ будет $\overline{P}' = 0$. Кроме того, $\overline{\mathfrak{H}}'$, а значит, и $\overline{\mathfrak{H}} \ominus \overline{\mathfrak{H}}'$, инвариантно относительно всех операторов $\overline{A}$; отсюда также $\overline{P}'\overline{A} = 0$ в $\overline{\mathfrak{H}} \ominus \overline{\mathfrak{H}}'$, и потому равенство (1) будет иметь место и в $\overline{\mathfrak{H}} \ominus \overline{\mathfrak{H}}'$. Следовательно, равенство (1) имеет место во всем пространстве $\overline{\mathfrak{H}}$. Применив к обеим его частям инволюцию и подставив затем A^* вместо A, получим, что также

$$\overline{A}\,\overline{P}' = \overline{P}'\overline{A}\,\overline{P}'.$$

Отсюда $P'\overline{A} = \overline{A}\,\overline{P}'$, т.е. пространство $\mathfrak{H}_{\alpha_0} = \mathfrak{H}$ приводит все операторы $\overline{A}$.

Равенство $A = \overline{A}'$ принимает теперь вид

$$A\xi = \overline{P}'\overline{A}\xi = \overline{A}\,\overline{P}'\xi = \overline{A}\xi \quad \text{для} \quad \xi \in \mathfrak{H},$$

т.е. в пространстве $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{\alpha_0}$ представление $A \to \overline{A}$ всего кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ также сводится к тождественному представлению $A \to A$.

В пространстве $\mathfrak{H}_0$ все операторы кольца I_0 переходят в нуль. Следовательно, в этом пространстве наше представление есть одновременно представление факторкольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})/I_0$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Всякое представление кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ есть прямая сумма тождественных представлений $A \to A$ и представления факторкольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})/I_0$.*

Если $\mathfrak{H}$ сепарабельно, то I_0 — максимальный двусторонний идеал в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ и $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})/I_0$ — простое кольцо. Поэтому всякое представление кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})/I_0$, отличное от нулевого, есть изоморфное отображение этого кольца в кольцо операторов в гильбертовом пространстве.

Задача нахождения всех представлений кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})/I_0$ до сих пор не решена. Известно только одно конкретное представление этого кольца, построенное Калкиным [1].

Результаты § 17–21 и п. 2 § 22, кроме оговоренных в тексте, принадлежат в основном Гельфанду и Наймарку [6] (см. также Наймарк [2]), п. 3 § 22 — Наймарку [2], п. 4 § 17, кроме, конечно, спектральной теоремы, — Данфорду [1], п. 5 § 17 — Фаге [1] и Данфорду [2]; некоторые из этих результатов были также независимо получены И. Сигалом [1–4]; единственность нормы в приведенном симметричном кольце с единицей (IX п. 2 § 18); замечена Сонисом.

В недавней работе Порта и Шварца [1] теоремы 2 и 3 § 22 распространены на произвольные (не обязательно симметричные) непрерывные представления колец I_0 и $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$.

Теорема 5 п. 4 § 20 для случая группового кольца локально бикомпактной коммутативной группы (см. ниже п. 4 § 31) была впервые установлена А. Вейлем [1] и независимо М. Крейном [7], для колец — Годманом [1]; в приведенной здесь формулировке она имеется в книге Люмиса [2] (однако ее доказательство в этой книге содержало существенный пробел, восполненный Д. А. Райковым в примечании к русскому переводу). Следует отметить, что во всех доказательствах этой теоремы основная идея — та же, что и у М. Крейна [7]; доказательство А. Вейля [1] использует структурные свойства локально бикомпактной коммутативной группы. Теорема 1 п. 1 § 22 принадлежит Калкину [1].

Глава V

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ КОЛЬЦА

§ 23. Вполне симметричные кольца

1. Определение и примеры вполне симметричного кольца. Напомним [1]), что банахово симметричное кольцо R с единицей называется *вполне симметричным*, если для любого элемента $x \in R$ в кольце R существует обратный $(e + x^*x)^{-1}$.

Примером вполне симметричного кольца может служить всякое кольцо $C(\mathfrak{M})$, где $\mathfrak{M}$ — бикомпактное пространство. Действительно, в этом случае

$$(e + x^*x)^{-1} = \frac{1}{1 + |x(M)|^2}$$

есть элемент кольца $C(\mathfrak{M})$.

Согласно теореме 2 п. 2 § 16 всякое полное вполне регулярное коммутативное кольцо R с единицей вполне изоморфно некоторому кольцу $C(\mathfrak{M})$, следовательно, есть вполне симметричное кольцо.

Далее,

I. *Всякое замкнутое симметричное подкольцо R кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, содержащее единицу, есть вполне симметричное кольцо.*

Действительно, положим $|A| = c$ и

$$B = \frac{1}{c^2 + 1}\,(c^2 1 - A^*A);$$

так как $0 \leqslant (A^*A\xi, \xi) \leqslant c^2(\xi, \xi)$, то $0 \leqslant (B\xi, \xi) \leqslant \dfrac{c^2}{c^2 + 1}\,(\xi, \xi)$. Отсюда заключаем, что $|B| \leqslant \dfrac{c^2}{c^2 + 1} < 1$, и потому $1 - B$ имеет обратный в R (см. I п. 3 § 9). Но тогда из соотношения

$$A^*A + 1 = (c^2 + 1)\left(1 - \frac{1}{c^2 + 1}\,(c^2 1 - A^*A)\right) = (c^2 + 1)(1 - B)$$

вытекает, что $A^*A + 1$ также имеет обратный в R.

[1]) См. п. 2 § 14.

Всякое банахово приведенное кольцо с минимальной регулярной нормой вполне изоморфно некоторому замкнутому подкольцу кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ (см. теорему 1 п. 3 § 18). Поэтому

II. *Всякое банахово приведенное кольцо с минимальной регулярной нормой есть вполне симметричное кольцо.*

Далее,

III. *Всякое максимальное симметричное коммутативное подкольцо вполне симметричного кольца есть вполне симметричное кольцо.*

Доказательство. Пусть K — максимальное симметричное коммутативное подкольцо вполне симметричного кольца R и $x \in K$. Тогда $y = (e + x^*x)^{-1}$ существует в R. Но элемент y перестановочен со всеми элементами из K, следовательно, в силу максимальности кольца K, $y \in K$. Это означает, что K — вполне симметричное кольцо.

Фелл и Тома [1] показали, что всякое замкнутое симметричное подкольцо R_1 вполне симметричного кольца R, содержащее единицу, вполне симметрично и спектр каждого элемента $x \in R_1$ на R_1 совпадает с его спектром на R.

2. Спектр. Напомним [1]), что *спектром* элемента x кольца R называется совокупность всех комплексных чисел λ таких, что $(x - \lambda e)^{-1}$ не существует в R.

Пусть R — банахово кольцо с единицей, а x — элемент кольца R.

I. *Если $|\lambda| > |x|$, то число λ не принадлежит спектру элемента x.*

Действительно, в этом случае $x - \lambda e = -\lambda \left(e - \dfrac{1}{\lambda}\, x\right)$, где $\left|\dfrac{1}{\lambda}\, x\right| < 1$; поэтому $(x - \lambda e)^{-1} = -\lambda^{-1} \left(e - \dfrac{1}{\lambda}\, x\right)^{-1}$ существует в R.

II. *Если x^{-1} существует в R и $|\lambda|^{-1} > |x^{-1}|$, то число λ не принадлежит спектру элемента x.*

Это предложение получается из предыдущего, ибо

$$(x - \lambda e)^{-1} = -x^{-1}(x^{-1} - \lambda^{-1}e)^{-1}\lambda^{-1}.$$

III. *Если спектр эрмитова элемента x банахова симметричного кольца R с единицей состоит только из нуля, то x принадлежит приводящему идеалу этого кольца.*

Доказательство. Пусть R_1 — максимальное коммутативное симметричное подкольцо кольца R, содержащее x; спектр элемента x относительно R_1 совпадает со спектром x относительно R (см. V п. 1 § 10) и потому состоит только из нуля. Это означает, что x принадлежит всем максимальным идеалам кольца R_1, а потому — радикалу этого кольца. Но тогда

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|x^*x|^*} = 0$$

[1]) См. п. 4 § 8.

(см. п. 3 § 10) и неравенство (3) п. 4 § 10 показывает, что x принадлежит приводящему идеалу кольца R.

IV. *Если спектр эрмитова элемента x банахова приведенного кольца R состоит только из нуля, то $x = 0$.*

Действительно, в этом случае приводящий идеал $= (0)$ и потому $x = 0$.

Предположим теперь, что R — вполне симметричное кольцо.

V. *Всякий эрмитов элемент вполне симметричного кольца имеет вещественный спектр.*

Доказательство. Пусть x — эрмитов элемент. Положим $y = \frac{1}{\tau} x$. По предположению, существует

$$(e + y^* y)^{-1} = \left(e + \frac{1}{|\tau|^2} x^2\right)^{-1} = |\tau|^2 (x^2 + |\tau|^2 e)^{-1};$$

следовательно, существует $z = (x_2 + |\tau|^2 e)^{-1}$. Тогда

$$e = z\,(x^2 + |\tau|^2 e) = z\,(x + i\,|\tau|\,e)(x - i\,|\tau|\,e);$$

следовательно, существуют также

$$(x + i\,|\tau|\,e)^{-1} \quad \text{и} \quad (x - i\,|\tau|\,e)^{-1},$$

каково бы ни было τ.

Пустъ теперь $\lambda = \sigma + i\tau$ — произвольное мнимое число ($\tau \neq 0$). Если x — эрмитов элемент, то $x - \sigma e$ также эрмитов элемент; следовательно, существует

$$(x - \sigma e - i\tau e)^{-1} = (x - \lambda e)^{-1}.$$

Итак, никакое мнимое λ не принадлежит спектру эрмитова элемента x. Следовательно, его спектр вещественный.

VI. *В вполне симметричном кольце всякий элемент вида $x^* x$ имеет вещественный неотрицательный спектр.*

Доказательство. Так как $x^* x$ — эрмитов элемент, то его спектр вещественный. Пусть $\lambda > 0$. Положим $y = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} x$; тогда существует

$$(y^* y + e)^{-1} = \left(\frac{1}{\lambda} x^* x + e\right)^{-1} = \lambda (x^* x + \lambda e)^{-1}.$$

Следовательно, отрицательное число $-\lambda$ не может принадлежать спектру элемента $x^* x$.

Обозначим через P множество всех эрмитовых элементов вполне симметричного кольца R, имеющих неотрицательный спектр, а через P^+ — совокупность всех его эрмитовых элементов с положительным спектром.

VII. *Всякий элемент $x \in P^+$ можно представить в виде $x = y^2$, где $y \in R^+$.*

Доказательство. Обозначим через K максимальное коммутативное подкольцо кольца R, содержащее x. Спектр элемента x относительно K также положителен, так что достаточно применить теорему 7 п. 6 § 11 и следствие из нее к ветви аналитической функции $f(\zeta) = \sqrt{\zeta}$, положительной на положительной полуоси, и элементу $x \in K$.

VIII. *Если* $x \in P$ *и* $\lambda \geqslant 0$, *то* $\lambda x \in P$. *Если же* $x \in P$, $x \neq 0$, $\lambda < 0$ *и* R — *приведенное кольцо, то* $\lambda x \notin P$.

Действительно, при умножении элемента x на число λ все числа спектра также умножаются на λ. Если же $x \in P$ и $\lambda x \in P$ при некотором $\lambda < 0$, то спектр элемента x состоит только из нуля и, следовательно, если R — приведенное кольцо, $x = 0$ в силу IV.

IX. *Если* $x_1, x_2 \in P$, *то* $x_1 + x_2 \in P$.

Нам нужно доказать, что при $\lambda > 0$ существует $(x_1 + x_2 + \lambda e)^{-1}$.

Пусть $0 < \lambda_1 < \lambda$. Положим $\lambda_2 = \lambda - \lambda_1$; тогда также $0 < \lambda_2 < \lambda$. Так как $x_1 + \lambda_1 e$, $x_2 + \lambda_2 e \in P^+$, то, согласно предложению VII, элементы $x_1 + \lambda_1 e$, $x_2 + \lambda_2 e$ можно представить в виде

$$x_1 + \lambda_1 e = y_1^2, \quad y_1 \in P^+, \quad x_2 + \lambda_2 e = y_2^2, \quad y_2 \in P^+.$$

Так как $x_1 \in P$, то существует

$$z = (x_1 + \lambda_1 e)^{-1},$$

так что

$$y_1(y_1 z) = (x_1 + \lambda_1 e)\, z = e;$$

следовательно, поскольку y_1 и z перестановочны, существует y_1^{-1}.

Перепишем $x_1 + x_2 + \lambda e$ в виде

$$x_1 + x_2 + \lambda e = x_1 + \lambda_1 e + x_2 + \lambda_2 e = y_1^2 + y_2^2 = y_1^2(e + y_1^{-2} y_2^2).$$

Так как y_1^{-2} существует, то достаточно доказать, что $(e + y_1^{-2} y_2^2)^{-1}$ существует. Для этого достаточно показать, что спектр элемента $y_1^{-2} y_2^2$ неотрицателен. Но это следует из соотношения

$$y_1^{-2} y_2^2 = y_1^{-1}((y_2 y_1^{-1})^*(y_2 y_1^{-1}))\, y_1,$$

ибо в силу VI спектр элемента $(y_2 y_1^{-1})^*(y_2 y_1^{-1})$ неотрицателен, а отображение $x \to y_1^{-1} x y_1$ не изменяет спектра элемента x.

Тем самым предложение IX доказано.

3. Теоремы о продолжении. Обозначим через H совокупность всех эрмитовых элементов вполне симметричного кольца R. H есть вещественное пространство Банаха.

Предложения VIII и IX п. 2 означают, что P *есть клин в пространстве* H *и, кроме того, конус, если* R — *приведенное кольцо* (см. п. 10 § 3).

Очевидно, P содержит единицу e кольца R. Докажем, что e есть внутренний элемент клина P.

Действительно, пусть $x = e + y$, где $y \in H$ и $|y| < 1$. Из доказательства предложения I п. 4 § 10 следует, что x можно представить в виде $x = x_1^2$, где $x_1 \in H$. Поэтому $x \in P$. Таким образом, все элементы x из H, удовлетворяющие условию $|e - x| < 1$, принадлежат P; следовательно, e есть внутренний элемент P.

I. *Для каждого замкнутого левого идеала I_l вполне симметричного кольца R существует нормированный*[1] *положительный функционал I такой, что*

$$f(x^*x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in I_l.$$

Доказательство. Пусть $I_l^{(H)}$ — совокупность всех эрмитовых элементов идеала I_l. Очевидно, $I_l^{(H)}$ есть замкнутое подпространство пространства H. Обозначим через H' совокупность всех элементов вида $\lambda e + y$, где λ — вещественное число, а $y \in I_l^{(H)}$; H' есть подпространство пространства H. Положим на H'

$$f(\lambda e + y) = \lambda,$$

в частности, $f(e) = 1$ и $f(y) = 0$ для $y \in I_l^{(H)}$. Полученный таким образом функционал неотрицателен на элементах $x \in H' \cap P$.

Действительно, если $x \in H' \cap P$, то

$$x - \lambda e = y \in I_l^{(H)} \subset I_l,$$

следовательно, $(x - \lambda e)^{-1}$ не существует. Так как $x \in P$, то этого не может быть при $\lambda < 0$. Таким образом, $\lambda \geqslant 0$, т. е. $f(x) = f(y + \lambda e) = \lambda \geqslant 0$.

Так как P — клин в R с внутренней точкой e, то, согласно теореме М. Г. Крейна (см. теорему 2 п. 10 § 3 и замечание к ней), функционал f можно продолжить до вещественного функционала во всем пространстве H и притом так, чтобы он на клине P принимал неотрицательные значения.

Всякий элемент x кольца R можно представить в виде

$$x = x_1 + ix_2, \quad x_1, x_2 \in H.$$

Положим

$$f(x) = f(x_1) + if(x_2);$$

f — положительный функционал. Действительно, $x^*x \in P$, следовательно, $f(x^*x) \geqslant 0$. Далее, если $x \in I_l$, то $x^*x \in I_l^{(H)}$ и, следовательно, $f(x^*x) = 0$. Из неравенства Коши–Буняковского $|F(x)|^2 \leqslant f(e)\,f(x^*x)$ следует тогда, что также $f(x) = 0$.

[1] Напомним, что положительный функционал f называется нормированным, если $f(e) = 1$ (см. п. 4 § 19).

С л е д с т в и е 1. *Для каждого максимального левого идеала M_l вполне симметричного кольца R существует неразложимый нормированный положительный функционал f_0 такой, что*

$$M_l = \{x \in R\colon f_0(x^*x) = 0\} = I_l^{(f_0)}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу 1 существует нормированный положительный функционал f такой, что

$$M_l \subset \{x \in R\colon f(x^*x) = 0\} = I_l^{(f)}.$$

Так как множество $I_l^{(f)}$ есть собственный левый идеал (см. п. 3 § 17), то в силу своей максимальности

$$M_l = I_l^{(f)}. \tag{1}$$

Обозначим через K совокупность всех нормированных положительных функционалов, удовлетворяющих условию (1). Очевидно, K есть слабо замкнутое выпуклое множество в пространстве H', сопряженном к H. Согласно теореме Крейна–Мильмана (п. 9 § 3) оно содержит хотя бы одну экстремальную точку; обозначим ее f_0.

Докажем, что f_0 — неразложимый функционал в R. Пусть он представлен в виде

$$f_0 = \lambda f_1 + (1 - \lambda)\, f_2,$$

где $0 < \lambda < 1$ и f_1, f_2 — нормированные положительные функционалы в R. Очевидно, $M_l = I_l^{(f_0)} \subset I_l^{(f_1)}, I_l^{(f_2)}$ и в силу максимальности M_l, $f_1, f_2 \in K$. Так как f_0 — экстремальная точка K, то $f_1 = f_2 = f_0$; тем самым неразложимость функционала f_0 доказана.

С л е д с т в и е 2. *Для того чтобы элемент x вполне симметричного кольца R был обратим слева, необходимо и достаточно, чтобы для всякого неразложимого нормированного положительного функционала f выполнялось условие*

$$f(x^*x) > 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $f(x^*x) = 0$ для какого-либо нормированного f, то x принадлежит собственному идеалу $I_l^{(f)}$ и, значит, необратим слева. Обратно, если x необратим слева, то x принадлежит некоторому левому максимальному идеалу M_l. Но последний совпадает в силу следствия 1 с $I_l^{(f_0)}$ для некоторого неразложимого нормированного положительного функционала f_0 и потому $f_0(x^*x) = 0$.

Левым спектром элемента x в кольце с единицей назовем совокупность всех комплексных чисел λ, для которых $x - \lambda e$ не имеет левого обратного.

С л е д с т в и е 3. *Левый спектр элемента x во вполне симметричном кольце совпадает с совокупностью чисел λ, для которых* *существует неразложимый нормированный положительный функционал f такой, что $\lambda = f(x)$ и $f(x^*x) = f(x)f(x^*) = |\lambda|^2$.*

Доказательство. Пусть $\lambda = f(x)$, $f(x^*x) = f(x^*)f(x)$ и $f(e) = 1$. Положим $z = x - f(x)e$; тогда $f(z^*z) = f((x^* - \overline{f(x)}e)(x - f(x)\,e) = 0$, так что в силу следствия 2 z не имеет левого обратного.

Обратно, если λ принадлежит левому спектру x, то существует такой максимальный левый идеал M_l, что $z = x - \lambda e \in M_l$.

В силу следствия 1 M_l имеет вид

$$M_l = \{x \in R\colon f(x^*x) = 0\} = I_l^{(f)} \quad (f(e) = 1).$$

Поэтому $f(z^*z) = 0$, т. е.

$$0 = f(z^*z) = f(x^*x) - \overline{\lambda}f(x) - \lambda f(x^*) + \lambda\overline{\lambda}f(e) = \\ = |\lambda - f(x)|^2 + f(x^*x) - |f(x)|^2.$$

Но в силу неравенства (4) п. 2 § 10, $|f(x)|^2 \leqslant f(x^*x)$. Поэтому сумма неотрицательных чисел $|\lambda - f(x)|^2$ и $f(x^*x) - |f(x)|^2$ равна нулю, т. е.

$$\lambda = f(x) \quad \text{и} \quad f(x^*x) = f(x^*)\,f(x).$$

Замечание. Следствия, аналогичные следствиям 1, 2, 3, можно сформулировать для правых максимальных идеалов, для элементов, обратимых справа, и для правого спектра.

Следствие 4. *Во вполне симметричном кольце R для всякого нормального элемента $x \in R$*

$$\sup |f(x)| = r(x),$$

где верхняя грань в левой части берется по всем неразложимым нормированным положительным функционалам f.

Доказательство. В силу II п. 5 § 9 и следствия 3

$$\lim \sqrt[n]{|x^n|} = r(x) = \sup_{\lambda \in S_x} |\lambda| \leqslant \sup |f(x)|.$$

Обратное неравенство следует из замечания к III п. 4 § 10.

II. *Радикал вполне симметричного кольца совпадает с приводящим идеалом.*

Доказательство. Согласно VII п. 2 § 18 радикал всегда содержится в приводящем идеале. Поэтому надо доказать, что всякий элемент приводящего идеала принадлежит радикалу. Пусть x_0 — такой элемент, что

$$f(x_0^*x_0) = 0$$

для всех положительных функционалов f. Докажем, что x_0 принадлежит радикалу. В силу следствия 1 из I x_0 принадлежит всем максимальным левым идеалам и, таким образом, радикалу, поскольку радикал есть пересечение всех максимальных левых идеалов (см. I п. 5 § 7).

Из предложения II следует, что *вполне симметричные полупростые кольца совпадают с вполне симметричными приведенными кольцами.*

III. *Пусть R_1 — замкнутое симметричное подкольцо вполне симметричного кольца R, содержащее единицу. Тогда всякий положительный функционал f_0 в R_1 можно продолжить до положительного функционала в R. Если, кроме того, функционал f_0 в кольце R_1 неразложим, то его можно продолжить до неразложимого функционала в кольце R.*

Доказательство. Обозначим через H_1 и H совокупности всех эрмитовых элементов колец R_1 и R соответственно. Тогда H_1 — замкнутое подпространство в H. Положительный функционал f в R_1 можно рассматривать как линейный функционал в H_1, принимающий неотрицательные значения на всех элементах из $P \cap H_1$. Согласно уже цитированной теореме Крейна f можно тогда продолжить до линейного функционала в H, принимающего неотрицательные значения на всех элементах из P; затем остается только повторить рассуждение, проведенное в конце доказательства предложения I.

Пусть теперь функционал f_0 в кольце R_1 неразложим. Не нарушая общности, можно считать, что $f_0(e) = 1$. Обозначим через K совокупность всех нормированных положительных функционалов f в R, совпадающих с f_0 на R_1. Очевидно, K есть слабо замкнутое выпуклое множество в пространстве H', сопряженном к H. Согласно теореме Крейна–Мильмана (п. 9 § 3), оно содержит хотя бы одну экстремальную точку; обозначим ее F_0.

Докажем, что F_0 — неразложимый функционал в R. Пусть функционал F_0 представлен в виде

$$F_0 = \lambda F_1 + (1 - \lambda) F_2, \tag{1}$$

где $0 < \lambda < 1$ и F_1, F_2 — нормированные положительные функционалы в R. Рассматривая равенство (1) только на R_1, получим, в частности, что

$$f_0 = \lambda f_1 + (1 - \lambda) f_2,$$

где f_1, f_2 — функционалы F_1, F_2, рассматриваемые только на R_1. Но так как функционал f_0 неразложим, то отсюда следует, что функционалы F_1 и f_2 кратны f_0. Кроме того, они нормированы; следовательно, $f_1 = f_2 = f_0$ на R_1. Другими словами, $F_1 = F_2 = f_0$ на R_1, т. е. $F_1, F_2 \in K$.

Но тогда из равенства (1) следует, что F_1 и F_2 кратны функционалу F_0, ибо F_0 — экстремальная точка множества K. Тем самым неразложимость функционала F_0 доказана.

Справедливо более общее утверждение.

IV. *Пусть* R *и* R_1 $(R \supset R_1)$ — *вполне симметричные кольца с одной и той же инволюцией и единицей, полные по нормам* $|x|$ *и* $|x|_1$. *Для того чтобы всякий положительный функционал* f_1 *кольца* R_1 *можно было продолжить* (*с сохранением неразложимости, если* f_1 *неразложим*) *до положительного функционала* f *кольца* R, *необходимо и достаточно, чтобы для каждого элемента* $x \in R_1$

$$r_1(x) = r(x).$$

Доказательство. *Необходимость*. Пусть $x \in R_1$ и существует x^{-1} в R; тогда для всякого неразложимого нормированного положительного функционала f на R выполняются неравенства $f(x^*x) > 0$, $f(xx^*) > 0$. Если при этом x необратим в R_1, то в силу следствия 1 из I на R_1 существует неразложимый нормированный положительный функционал f_1 такой, что $f_1(x^*x) = 0$ или $f_1(xx^*) = 0$. Тогда неразложимый положительный функционал в R, являющийся продолжением f_1, на элементе x^*x или xx^* обращается в нуль, что невозможно. Итак, пара колец R, R_1 является винеровской парой и в силу следствия из п. 7 § 11 $r(x) = r_1(x)$ для $x \in R_1$.

Доказательство достаточности легко сводится к III следующим образом. В силу V п. 2 § 18 можно считать, что кольца R и R_1 являются приведенными. В силу следствия 4 из I и теоремы 2 п. 3 § 18 минимальной регулярной нормой в кольце R служит $\sqrt{r(x^*x)}$.

Пусть R' — замыкание кольца R по норме $\sqrt{r(x^*x)}$. В силу условия замыкание R_1' кольца R_1 по норме $\sqrt{r(x^*x)}$ есть замыкание кольца R_1 по его минимальной регулярной норме $\sqrt{r_1(x^*x)}$. Так как эти нормы регулярны, то всякий положительный функционал кольца R (R_1) может быть продолжен до положительного функционала кольца R' (R_1'). Далее остается применить III к паре колец R', R_1'.

Доказательство того, что неразложимый функционал можно продолжить до неразложимого, можно заимствовать из III.

Следствие 5. *Во вполне симметричных кольцах* R *и* R_1 $(R \supset R_1)$ *с общей инволюцией и единицей равенство* $S_x = S_x'$ *для* $x \in R_1$ *равносильно равенству* $r(x) = r_1(x)$.

Действительно, пусть $r(x) = r_1(x)$ для $x \in R_1$. Из IV следует возможность продолжения положительных функционалов с сохранением неразложимости. Рассмотрим произвольный максимальный левый идеал $M_1 \subset R_1$. Согласно следствию 1 из I

$$M_l = I_l^{(f_1)},$$

где f_1 — неразложимый нормированный положительный функционал в R_1.

Продолжим f_1 до неразложимого положительного функционала f на R. Тогда $M_l \subset I_l^{(f)}$, следовательно, $\overline{M}_l \subset I_l^{(f)}$, где $\overline{M}_l$ — замыкание M_l по норме $|x|$. Поэтому $\overline{M}_l$ не содержит обратимых в R элементов. Аналогично $\overline{M}_r$, где M_r — максимальный правый идеал в R_1, не содержит обратимых в R элементов.

В силу I п. 7 § 11 кольца R и R_1 образуют винеровскую пару. В силу I г) п. 7 § 11 отсюда следует, что $S_x = S'_x$ для $x \in R_1$.

Пусть R_1 — подкольцо кольца R и $x \to A_x$, $x \to B_x$ — представления колец R_1 и R в пространствах $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Представление $x \to B_x$ называется *расширением* представления $x \to A_x$, если $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$ и для всех $x \in R_1$ и $\xi \in \mathfrak{H}_1$

$$A_x\xi = B_x\xi.$$

Теорема 1. *Пусть R_1 — замкнутое симметричное подкольцо вполне симметричного кольца R, содержащее единицу. Тогда всякое представление кольца R_1 можно расширить до представления всего кольца R, причем всякое неприводимое представление кольца R_1 можно расширить до неприводимого представления кольца R.*

Доказательство. Пусть сначала $x \to A_x$ — циклическое представление кольца R_1 в $\mathfrak{H}_1$ и ξ_0 — циклический вектор в $\mathfrak{H}_1$. Тогда $f_0(x) = (A_x\xi_0, \xi_0)$ — положительный функционал в R_1. Согласно III его можно продолжить до положительного функционала F_0 в кольце R. Функционал F_0 определяет циклическое представление $x \to B_x$ кольца R в некотором пространстве $\mathfrak{H}$; при этом $F_0(x) = (B_x\eta_0, \eta_0)$, где η_0 — циклический элемент в $\mathfrak{H}$ (см. теорему 2 п. 3 § 17).

Пространство $\mathfrak{H}_1$ есть замыкание множества всех элементов $A_x\xi_0$, $x \in R_1$, ибо ξ_0 — циклический элемент. Каждому такому элементу $A_x\xi_0$ поставим в соответствие элемент $B_x\eta_0$. Это соответствие изометрически отображает $\mathfrak{H}_1$ на некоторое подпространство в $\mathfrak{H}$. Действительно, так как $F_0(x) = f_0(x)$ при $x \in R_1$, то $(A_x\xi_0, A_x\xi_0) = f_0(x^*x) = F_0(x^*x) = (B_x\eta_0, B_x\eta_0)$ при $x \in R_1$.

Если поэтому отождествить $\mathfrak{H}_1$ с его образом в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{H}_1$ станет подпространством в $\mathfrak{H}$, ξ_0 совпадет с η_0 и $A_x\xi$ совпадет с $B_x\xi$ для всех $\xi \in \mathfrak{H}$, $x \in R_1$. Таким образом, для циклического представления $x \to A_x$ первая часть теоремы доказана. Если же представление $x \to A_x$ не циклическое, то оно есть прямая сумма циклических представлений. Расширяя каждое из них и беря прямую сумму полученных расширений, мы тем самым получим расширение исходного представления $x \to A_x$.

Если представление $x \to A_x$ кольца R_1 неприводимо, то f_0 — неразложимый функционал. Согласно III функционал F_0 также можно выбрать неразложимым. Тогда соответствующее представление $x \to B_x$ кольца R будет неприводимым.

Легко может быть доказана

Теорема $1'$. *Пусть R и R_1 $(R \supset R_1)$ — вполне симметричные кольца с одной и той же инволюцией и единицей. Для того чтобы всякое представление кольца R_1 можно было расширить до представления кольца R (с сохранением неприводимости), необходимо и достаточно, чтобы для каждого $x \in R_1$*

$$r_1(x) = r(x).$$

V. *Если λ_0 — точка левого спектра элемента x_0 вполне симметричного кольца R, то существуют неприводимое представление $x \to A_x$ кольца R и вектор ξ_0 в пространстве этого представления такие, что*

$$A_{x_0}\xi_0 = \lambda_0\xi_0.$$

Доказательство. В силу следствия 3 из 1 существует такой неразложимый нормированный положительный функционал f на R, что

$$\lambda_0 = f(x_0) \quad \text{и} \quad f(x_0^* x_0) = f(x_0^*)\, f(x_0).$$

Рассмотрим неприводимое циклическое представление $x \to A_x$, построенное с помощью функционала f (см. теорему 2 п. 3, § 17), т. е. такое, что

$$f(x) = (A_x\xi_0, \xi_0),$$

где ξ_0 — циклический вектор. При этом

$$1 = f(e) = |\xi_0|^2.$$

Равенство $f(x_0^* x_0) = f(x_0^*)\, f(x_0)$ означает, что

$$(A_{x_0^* x_0}\xi_0, \xi_0) = (A_{x_0^*}\xi_0, \xi_0)(A_{x_0}\xi_0, \xi_0),$$

так что

$$|(A_{x_0}\xi_0, \xi_0)|^2 = |A_{x_0}\xi_0|^2 |\xi_0|^2;$$

таким образом, мы получаем в неравенстве Коши–Буняковского равенство, что возможно тогда и только тогда, когда

$$A_{x_0}\xi_0 = \lambda_0\xi_0.$$

Заметим, что при этом $\lambda_0 = (\lambda_0\xi_0, \xi_0) = (A_{x_0}\xi_0, \xi_0) = f(x_0)$.

Таким образом, каждой точке левого спектра соответствует собственный вектор в пространстве некоторого неприводимого представления.

Следствие. *Существует такое представление $x \to A_x$ вполне симметричного кольца R, что все точки левого спектра всех элементов x переходят в собственные значения операторов A_x.*

В качестве такого представления можно взять прямую сумму всех неприводимых циклических представлений кольца R, отвечающих неразложимым функционалам, рассмотренную в доказательстве теоремы 1 п. 3 § 18.

Предложению V можно дать простое квантовомеханическое толкование.

Всякая квантовомеханическая система S естественным образом определяет банахово симметричное кольцо, именно, кольцо всех ограниченных операторов, определяющих величины в этой системе. Как замкнутое подкольцо кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, оно — вполне симметричное кольцо (см. I п. 1). Положительный функционал f в этом кольце определяется некоторым вектором ξ_0: $f(x) = (A_x\xi_0, \xi_0)$, т. е. некоторым состоянием системы S, причем $f(x)$ есть математическое ожидание величины x в этом состоянии.

Если f есть неразложимый функционал в подкольце R_1, то предложение V утверждает, что в состоянии ξ_0 из пространства $\mathfrak{H}$ некоторого неприводимого представления кольца R все величины x из подкольца R_1 имеют точное значение, равное $f(x)$.

4. Критерий вполне симметричности.

Теорема 2 (Д. А. Райков [7]). *Банахово симметричное кольцо R с единицей вполне симметрично тогда и только тогда, когда для каждого элемента $x \in R$ имеет место равенство*

$$\sup f(x^*x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(x^*x)^n|} = r(x^*x), \tag{1}$$

где верхняя грань в левой части берется по всем неразложимым нормированным положительным функционалам.

Доказательство. Пусть R — вполне симметричное кольцо и $x \in \in R$. Так как элемент x^*x нормален, то (1) вытекает из следствия 4 п. 3.

Обратно, пусть в кольце R выполнено равенство (1); докажем, что R вполне симметрично. Согласно теореме 2 п. 3 § 18 и замечанию на с. 320 левая часть равенства (1) есть квадрат минимальной регулярной нормы элемента x; обозначим эту норму [1] $|x|_0$. Тогда для любого положительного функционала φ

$$\varphi(x^*x) \leqslant \varphi(e)|x^*x|_0. \tag{2}$$

Докажем, что для любого положительного функционала f

$$f(x^*xx^*x) \leqslant f(x^*x)|x^*x|_0. \tag{3}$$

Если $f(x^*xx^*x) = 0$, то утверждение тривиально. Пусть $f(x^*xx^*x) > 0$. Тогда

$$f(x^*xx^*x) = f((xx^*x)^*x) \leqslant \sqrt{f(x^*xx^*xx^*x)\, f(x^*x)}. \tag{4}$$

С другой стороны, применив неравенство (2) к положительному функционалу

$$\varphi(y) = f(x^*xyx^*x),$$

[1] Напомним, что при этом может быть $|x|_0 = 0$ и при $x \neq 0$, так что фактически $|x|_0$ есть норма в приведенном кольце.

получим, что

$$f(x^*xx^*xx^*x) \leqslant f(x^*xx^*x)|x^*x|_0.$$

Подставив это в неравенство (4), получим

$$f(x^*xx^*x) \leqslant \sqrt{f(x^*xx^*x)|x^*x|_0 f(x^*x)},$$

откуда и следует (3).

Нам нужно доказать, что $(e + x^*x)^{-1}$ существует для любого $x \in R$. Напишем формальное равенство

$$\begin{aligned}(e + x^*x)^{-1} = [(|x^*x|_0 + 1)\, e - (|x^*x|_0 e - x^*x)]^{-1} = \\ = \frac{1}{|x^*x|_0 + 1}\left(e - \frac{|x^*x|_0 e - x^*x}{|x^*x|_0 + 1}\right)^{-1} = \\ = \frac{1}{|x^*x|_0 + 1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|x^*x|_0 e - x^*x}{|x^*x|_0 + 1}\right)^{n}.\end{aligned} \tag{5}$$

Существование $(e + x^*x)^{-1}$ будет доказано, если мы установим, что ряд (5) сходится абсолютно по норме в R.

Положим $y = |x^*x|_0 e - x^*x$. Тогда

$$|y|_0 = \sqrt{\sup_{f(e)=1} f(y^*y)} \leqslant |x^*x|_0. \tag{6}$$

Действительно, в силу неравенства (3)

$$\begin{aligned}f(y^*y) = f(|x^*x|_0^2 e - 2|x^*x|_0 x^*x + x^*xx^*x) = \\ = |x^*x|_0^2 - 2|x^*x|_0 f(x^*x) + f(x^(xx^*x) \leqslant \\ \leqslant |x^*x|_0^2 - 2|x^*x|_0 f(x^*x) + |x^*x|_0 f(x^*x) = \\ = |x^*x|_0^2 - |x^*x|_0 f(x^*x) \leqslant |x^*x|_0^2.\end{aligned}$$

Отсюда и следует неравенство (6). Так как, по условию,

$$|y|_0 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|y^n|},$$

то (6) можно переписать в виде

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|y^n|} \leqslant |x^*x|_0,$$

т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(|x^*x|_0 e - x^*x)^n|} \leqslant |x^*x|_0.$$

Отсюда при $n \geqslant n_0$

$$|(|x^*x|_0 e - x^*x)^n| < \left(|x^*x|_0 + \frac{1}{2}\right)^n;$$

следовательно,

$$\sum_{n=n_0}^{\infty}\left|\left(\frac{|x^*x|_0 e - x^*x}{|x^*x|_0+1}\right)^n\right| \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty}\left(\frac{|x^*x|_0+\frac{1}{2}}{|x^*x|_0+1}\right)^n.$$

Поэтому ряд в (5) действительно сходится абсолютно, и вполне симметричность кольца R доказана.

З а м е ч а н и е. Можно показать, что свойства кольца, сформулированные в каждом из следствий 1–3 п. 3, также являются критериями вполне симметричности.

§ 24. Вполне регулярные кольца

1. Основные свойства вполне регулярных колец. Напомним, что симметричное нормированное кольцо называется *вполне регулярным*, если

$$|x^*x| = |x|^2 \tag{1}$$

для всех $x \in R$ (см. п. 1 § 16). Примерами вполне регулярного кольца являются кольцо $C(\mathfrak{M})$ всех непрерывных функций на бикомпактном пространстве $\mathfrak{M}$, а также кольцо $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$.

I. *Всякое вполне регулярное кольцо полупростое.*

Действительно, если x — элемент радикала такого кольца, то (см. п. 3 § 10)

$$0 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{|(x^*x)^{2n}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{|x^*x|^{2n}} = |x^*x| = |x|^2;$$

следовательно, $x = 0$.

В частности,

II. *Всякое симметричное подкольцо в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ полупростое.*

Пусть h — эрмитов элемент в полном вполне регулярном кольце и $\mathfrak{A}$ — замкнутое коммутативное симметричное подкольцо в R, содержащее h; тогда $\mathfrak{A}$ — полное вполне регулярное коммутативное кольцо и потому вполне изоморфно некоторому кольцу $C_0(T)$, где T — локально бикомпактное пространство (см. п. 2 § 16). Функцию $h(t)$, отвечающую элементу h при этом изоморфизме, мы будем называть *функциональным представлением* элемента h и писать $h \underset{\mathfrak{A}}{\sim} h(t)$; конечно, это функциональное представление зависит от выбора кольца $\mathfrak{A}$, содержащего h, но во всяком случае

$$|h| = \sup_{t\in T} |h(t)$$

и $h(t)$ — вещественная функция.

Лемма 1. *Если h — эрмитов элемент в полном вполне регулярном кольце R, то h^2 имеет в R квазиобратный $(h^2)'$, причем*

$$|(h^2)'| = \frac{|h|^2}{1 + |h|^2}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $h(t)$ — функциональное представление элемента h, отвечающее некоторому замкнутому коммутативному симметричному подкольцу $\mathfrak{A} \subset R$. Тогда функция $g(t) = -\dfrac{h^2(t)}{1 + h^2(t)}$ непрерывна и обращается в нуль на бесконечности, следовательно, $g(t) \in C_0(T)$. Это означает, что в $\mathfrak{A}$ существует элемент $g \underset{\mathfrak{A}}{\sim} g(t)$. Из соотношения $h^2(t) + g(t) + h^2(t)\,g(t) = 0$ следует, что g есть квазиобратный к h^2. Так как функция $\dfrac{x}{1+x}$, $0 \leqslant x \leqslant |h|^2$, принимает наибольшее значение на отрезке $[0, |h|^2]$ при $x = |h|^2$, то

$$|(h^2)'| = |g| = \sup_{t \in T} |g(t)| = \frac{|h|^2}{1 + |h|^2}.$$

Лемма 2. *Пусть x — элемент коммутативного, вообще неполного, нормированного кольца R. Если для любого замкнутого максимального регулярного идеала M в R образ элемента x при естественном гомоморфизме $R \to R/M$ имеет квазиобратный в R/M, то x имеет квазиобратный в пополнении $\widetilde{R}$ кольца R.*

Доказательство. Если x не имеет квазиобратного в $\widetilde{R}$, то в $\widetilde{R}$ существует максимальный регулярный идеал M', относительно которого $-x$ является единичным элементом (см. VII и V п. 4 § 7). Тогда $M = M' \cap R$ есть замкнутый максимальный регулярный идеал в R и вопреки условию образ $\widetilde{x}$ элемента x при гомоморфизме $R \to R/M$ не имеет квазиобратного в R/M.

Теорема 1. *Пусть $C_0(T)$ — кольцо всех непрерывных функций $x = x(t)$ на локально бикомпактном пространстве T, равных нулю на бесконечности. Тогда всякая норма $|x|_1$ в $C_0(T)$, по отношению к которой $C_0(T)$ есть (полное или неполное) нормированное кольцо, не меньше нормы $|x| = \sup\limits_{t \in T} |x(t)|$.*

Доказательство. Максимальные регулярные идеалы в $C_0(T)$, замкнутые по норме $|x|_1$, образуют подпространство S в T (см. VIII п. 2 § 11 и п. 4 § 11). Достаточно доказать, что S плотно в T; действительно, тогда

$$|x|_1 \geqslant \sup_{t \in S} |x(t)| = \sup_{t \in T} |x(t)| = |x|.$$

Предположим, что S не плотно в T. Тогда в T существует открытое множество U, не пересекающееся с S, и потому в $C_0(T)$ существует функция $x(t)$, равная -1 на открытом множестве $V \subset U$ и не равная -1 нигде на S. Согласно предыдущей лемме x имеет квазиобратный z

в пополнении $\widetilde{C_0(T)}$ кольца $C_0(T)$ по норме $|x|_1$. С другой стороны, можно построить непрерывную функцию $y(t) \not\equiv 0$ такую, что $y + xy = 0$, для чего достаточно взять $y \neq 0$ на некотором множестве, содержащемся в V, и $y = 0$ на дополнении множества V. Умножая на y обе части равенства $x + z + xz = 0$, получим, что $xy + z(y + xy) = 0$, и потому $xy = 0$. Комбинируя это с равенством $y + xy = 0$, мы придем к выводу, что $y = 0$ вопреки предположению. Следовательно, S плотно в T, и теорема доказана.

Теорема 1 показывает, что сам запас функций кольца $C_0(T)$ однозначно определяет в нем минимальную норму.

Следствие. *Пусть R — полное вполне регулярное кольцо, I — замкнутый двусторонний идеал в R, а $\mathfrak{A}$ — замкнутое подкольцо в R, порожденное эрмитовым элементом, и пусть $J = I \cap \mathfrak{A}$. Тогда естественное отображение $\mathfrak{A}/J$ в R/I изометрично.*

Доказательство. Согласно замечанию в конце п. 2 § 16 $\mathfrak{A}/J$ вполне изоморфно некоторому $C_0(T)$. Естественное отображение $\mathfrak{A}/J$ в R/I получается, если каждому классу $\xi = a + J$, $a \in \mathfrak{A}$, поставить в соответствие класс $\xi' = a + I$; легко видеть, что это отображение есть изоморфизм. Так как $J \subset I$, то

$$|\xi| = \inf_{x \in J} |a + x| \geqslant \inf_{x \in I} |a + x| = |\xi'|.$$

Полагая $|\xi|_1 = |\xi'|$, мы получим в $\mathfrak{A}/J$ вторую норму, так что согласно теореме 1 $|\xi'| \geqslant |\xi|$. Поэтому $|\xi'| = |\xi|$.

Теорема 2. *Если в $C_0(T)$ дана другая норма $|x|_1$, по отношению к которой пополнение кольца $C_0(T)$ есть полупростое кольцо, то эта норма $|x|_1$ топологически эквивалентна норме $|x| = \sup\limits_T |x(t)|$.*

Доказательство. На основании теоремы 1 п. 1 § 12 $|x|_1 \leqslant C|x|$; с другой стороны, в силу предыдущей теоремы, $|x| \leqslant |x|_1$.

Теорема 3. *Всякий симметричный изоморфизм $x \to x'$ полного вполне регулярного кольца R в полное вполне регулярное кольцо R' сохраняет норму.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in R$ и пусть $\mathfrak{A}$ — замкнутое подкольцо в R, порожденное элементом $x_0^* x_0$, а $\mathfrak{A}'$ — его образ в R' при нашем изоморфизме $x \to x'$. На основании следствия 2 п. 1 § 20 изоморфизм $x \to x'$ сохраняет норму в $\mathfrak{A}$; в частности, $|x_0^* x_0| = |x_0'^* x_0'|$, т. е. $|x_0|^2 = |x_0'|^2$, и потому $|x_0| = |x_0'|$.

2. Реализация вполне регулярного кольца в виде кольца операторов. В этом пункте мы покажем, что всякое вполне регулярное кольцо с единицей вполне изоморфно кольцу ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Предварительно докажем следующие леммы, в которых R обозначает полное вполне регулярное кольцо с единицей.

I. *Совокупность Q всех квадратов эрмитовых элементов кольца R совпадает с совокупностью всех эрмитовых элементов $x \in R$, удовлетворяющих условию*

$$\left|e - \frac{1}{c}\,x\right| \leqslant 1 \tag{1}$$

при некоторых $c > 0$, в частности, с совокупностью всех эрмитовых элементов $x \in R$, удовлетворяющих условию

$$\bigl||x|e - x\bigr| \leqslant |x|. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть $x \in Q$; применяя к элементу $z = \dfrac{1}{c}\,x$, где $c \geqslant |x|$, $c > 0$, какое-нибудь функциональное представление (см. п. 1), имеем $0 \leqslant z(t) \leqslant 1$, и потому $\left|e - \dfrac{1}{c}\,x\right| = |e - z| \leqslant 1$. Обратно, если $\left|e - \dfrac{1}{c}\,x\right| \leqslant 1$, где $c > 0$, то в функциональном представлении $\left|1 - \dfrac{1}{c}\,x(t)\right| \leqslant 1$, и потому $\dfrac{1}{c}\,x(t) \geqslant 0$, $x(t) \geqslant 0$. Отсюда вытекает, что существует эрмитов элемент $y = y(t) \in R$ такой, что $y^2 = x$, и $x \in Q$.

Очевидно, при $x \neq 0$ можно положить $c = |x|$; поэтому Q есть совокупность всех эрмитовых элементов $x \in R$, удовлетворяющих условию (2).

II. *Q есть замкнутый конус в R.*

Доказательство. Замкнутость множества Q непосредственно вытекает из условия (2).

Далее, если $x = y^2$, где y эрмитов и $\lambda \geqslant 0$, то $\lambda x = (\sqrt{\lambda}\,y)^2$, где $\sqrt{\lambda}\,y$ эрмитов; следовательно, из $x \in Q$, $\lambda \geqslant 0$ следует $\lambda y \in Q$.

Если же $x \in Q$ и также $\lambda x \in Q$ при некотором $\lambda < 0$, то функциональное представление показывает, что $x(t) \geqslant 0$ и $\lambda x(t) \geqslant 0$, откуда $x(t) \leqslant 0$ и, следовательно, $x(t) \equiv 0$, $x = 0$.

Наконец, пусть $x, y \in Q$; выбирая $c > \max\{|x|, |y|\}$, в силу I имеем

$$\left|e - \frac{1}{c}\,x\right| \leqslant 1, \quad \left|e - \frac{1}{c}\,y\right| \leqslant 1,$$

и потому

$$\left|e - \frac{1}{2c}\,(x + y)\right| = \frac{1}{2}\left|\left(e - \frac{1}{c}\,x\right) + \left(e - \frac{1}{c}\,y\right)\right| \leqslant 1.$$

Следовательно, в силу условия (1) также $x + y \in Q$.

III. *Q есть совокупность всех эрмитовых элементов кольца R с неотрицательным спектром.*

Доказательство. Спектр эрмитова элемента x есть совокупность всех значений функции $x(t)$ в функциональном представлении. Если $x = y^2$, где y эрмитов, то $x(t) = [y(t)]^2 \geqslant 0$. Обратно, если $x(t) \geqslant 0$, то, полагая $y(t) = \sqrt{x(t)}$, получим $x = y^2$, где y — эрмитов элемент.

IV. *Элементы xy и yx имеют одинаковую ненулевую часть спектра.*

Доказательство. Если $(xy - \lambda e)^{-1}$ существует и $\lambda \neq 0$, то существует также

$$(yx - \lambda e)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\,[y(xy - \lambda e)^{-1}x - e].$$

Действительно,

$$(yx - \lambda e)\,\frac{1}{\lambda}\,[y(xy - \lambda e)^{-1}x - e] = \\ = \frac{1}{\lambda}\,[y(xy - \lambda e)(xy - \lambda e)^{-1}x - (yx - \lambda e)] = e$$

и, аналогично, $\frac{1}{\lambda}\,[y(xy - \lambda e)^{-1}x - e](yx - \lambda e)] = e$.

V. *Для любого $x \in Q$ соотношение $-x^*x \in Q$ возможно лишь при $x^*x = 0$.*

Доказательство. Положим $x = u + iv$; тогда $x^*x + xx^* = 2u^2 + 2v^2 \in Q$ и

$$x^*x = 2u^2 + 2v^2 + (-xx^*). \tag{3}$$

По условию $-x^*x \in Q$ и, следовательно, в силу III $-x^*x$ имеет неотрицательный вещественный спектр; тогда в силу IV и эрмитов элемент $-xx^*$ имеет неотрицательный спектр и, значит, снова в силу III также $-xx^* \in Q$; тогда из (3) вытекает, что $x^*x \in Q$. Но так как Q — конус, то оба соотношения $-x^*x \in Q$, $x^*x \in Q$ возможны лишь при $x^*x = 0$.

Теорема 4. *Всякое полное вполне регулярное кольцо с единицей вполне симметрично.*

Доказательство. Нам надо доказать, что $x^*x \in Q$ для всех $x \in R$. Элемент x^*x эрмитов, и потому его можно представить в виде $x^*x = u - v$, где $u, v \in Q$, $uv = 0$ (см. следствие 8 п. 2 § 16). Но тогда

$$(xv)^*(xv) = vx^*xv = v(u - v)\,v = -v^3,$$

следовательно, $-(xv)^*(xv) \in Q$. В силу V это возможно, лишь когда $(xv)^*(xv) = 0$, т. е. когда $v^3 = 0$. Отсюда $v = 0$ и $x^*x = u \in Q$, т. е. $(e + x^*x)^{-1}$ существует для всех $x \in R$, и теорема доказана.

Теорема 5. *Всякое вполне регулярное кольцо вполне изоморфно некоторому кольцу ограниченных операторов в гильбертовом пространстве.*

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что вполне регулярное кольцо R полно и содержит единицу; в противном случае R можно включить в полное вполне регулярное кольцо R_1, содержащее единицу (см. I и III п. 1 § 16). Но в силу теоремы 4 кольцо R_1 также вполне симметрично, и потому (см. (1) п. 4 § 23)

$$\sup_{f(e)=1} f(x^*x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(x^*x)^n|}. \tag{4}$$

С другой стороны, применяя (1) п. 1 к x^*x вместо x, получаем $|(x^*x)^2| = |x^*x|^2$; повторяя это рассуждение, находим, что вообще $|(x^*x)^{2^n}| = |x^*x|^{2^n}$. Комбинируя этот результат с (4), получаем, что

$$\sup_{f(t)=1} f(x^*x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{|(x^*x)^{2n}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{|x^*x|^{2^n}} = |x^*x| = |x|^2.$$

Следовательно, норма в кольце R_1 совпадает с минимальной регулярной нормой.

На основании теоремы 1 п. 3 § 18 кольцо R_1, а значит, и исходное кольцо R вполне изоморфны кольцу ограниченных операторов в гильбертовом пространстве.

3. Факторкольцо вполне регулярного кольца.

Теорема 6. *Всякий замкнутый двусторонний идеал I в полном вполне регулярном кольце симметричен и факторкольцо R/I также вполне регулярно.*

Доказательство. Положим для любого $x \in R$ и любого $c > 0$

$$y = x[c(x^*x)^2]' + x, \tag{1}$$

где $[c(x^*x)^2]'$ — элемент, квазиобратный к с $(x^*x)^2$; в силу вполне регулярности полного кольца R он существует (лемма 1 п. 1). При этом, полагая $z = x^*x$, имеем

$$y^*y = [(cz^2)' + e]x^*x[(cz^2)' + e] = [(cz^2)' + e]^2 z. \tag{2}$$

Но при положительном c функция $\dfrac{\lambda}{(1+c\lambda^2)^2}$ достигает своего наибольшего значения $\dfrac{9}{16\sqrt{3c}}$ в точке $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{3c}}$; следовательно, применяя к (2) функциональное представление [1]), заключаем, что

$$|y^*y| \leqslant \frac{9}{16\sqrt{3c}},$$

и потому

$$|y| \leqslant \frac{3}{4\sqrt[4]{3c}}. \tag{3}$$

Кроме того, в силу (2) п. 1

$$|(cz^2)'| = \frac{c\,|z|^2}{1+c\,|z|^2}. \tag{4}$$

[1]) В силу которого

$$(y^*y)(t) = \left[-\frac{cz^2(t)}{1+cz^2(t)} + 1\right]^2 z(t) = \frac{z(t)}{[1+cz^2(t)]^2}.$$

Пусть теперь I — замкнутый двусторонний идеал в R и $x \in I$; тогда также $z = x^*x \in I$ и $(cz^2)' \in I$. Но в силу (1)

$$x^* = y^* - (cz^2)'x^*. \tag{5}$$

Так как $-(cz^2)'x^* \in I$ и согласно (3) $|y^*| \to 0$ при $c \to \infty$, то из (5) заключаем, что $x^* \in I$. Следовательно, идеал I симметричен.

Рассмотрим факторкольцо R/I. Так как естественный гомоморфизм $R \to R/I$ может только уменьшить норму, то неравенство (3) остается также справедливым в R/I. Пусть $\mathfrak{A}$ — замкнутое коммутативное подкольцо в R, порожденное элементом z; положим $J = J \cap \mathfrak{A}$. Соотношение (4) имеет место в $\mathfrak{A}/J$, ибо $\mathfrak{A}/J$ допускает представление в виде кольца функций. Согласно следствию теоремы 1 п. 1 соотношение (4) остается справедливым и в R/I. Комбинируя (1), (3) и (4), заключаем, что в R/I

$$|x| \leqslant |y| + |x(cz^2)'| \leqslant \frac{3}{4\sqrt[4]{3c}} + \frac{c\,|x||z|^2}{1 + c\,|z|^2}.$$

Положив здесь $c = \dfrac{1}{3|z|^2}$, получим

$$|x| \leqslant \frac{3}{4}\sqrt{|z|} + \frac{1}{4}\,|x|.$$

Отсюда

$$\frac{3}{4}\,|z| \leqslant \frac{3}{4}\sqrt{|z|}, \quad |x|^2 \leqslant |z| = |x^*x|.$$

Но, с другой стороны, $|x^*x| \leqslant |x^*||x| = |x|^2$ (ибо в R/I также $|x^*| = |x|^2$). Следовательно, в R/I $|x^*x| = |x|^2$, и теорема доказана.

Следствие. *При симметричном гомоморфизме $x \to x'$ полного вполне регулярного кольца R в полное вполне регулярное кольцо R' образ кольца R есть полное кольцо.*

Доказательство. Пусть I — ядро гомоморфизма $x \to x'$; тогда I — замкнутый симметричный идеал в R[1)] и в силу теоремы 6 R/I есть полное вполне регулярное кольцо. Наш гомоморфизм $x \to x'$ кольца R в кольцо R' порождает изоморфизм $\widetilde{x} \to x'$ кольца R/I в кольцо R', причем образ кольца R при гомоморфизме $x \to x'$ совпадает с образом кольца R/I при изоморфизме $\widetilde{x} \to x'$. Но согласно теореме 3 п. 1 изоморфизм $\widetilde{x} \to x'$ изометричен, и потому этот образ есть полное кольцо.

Пример. Пусть R есть кольцо всех ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ ($R = \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$), а I — совокупность всех вполне непрерывных операторов в $\mathfrak{H}$. Тогда I — замкнутый двусторонний идеал в R; так как R вполне регулярно, то на основании теоремы 6

[1)] В силу теоремы 5 п. 2 R' можно считать симметричным подкольцом кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, и потому гомоморфизм $x \to x'$ — представлением кольца R; на основании теоремы 1 п. 3 § 17 этот гомоморфизм непрерывен.

факторкольцо R/I также вполне регулярно. Следовательно, применяя к R/I теорему 5 п. 2, мы приходим к следующему результату.

Теорема 7. *Факторкольцо кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ по идеалу I всех вполне непрерывных операторов в $\mathfrak{H}$ вполне изоморфно некоторому кольцу ограниченных операторов в некотором гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$.*

Эта теорема была впервые установлена Калкиным [1], который непосредственно построил реализацию кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})/I$ в виде кольца операторов в некотором гильбертовом пространстве.

§ 25. Дуальные кольца

1. Аннуляторные и дуальные кольца. Пусть R — топологическое кольцо, а S — произвольное множество в R. *Левым аннулятором* $\mathfrak{L}(S)$ множества S называется совокупность всех элементов $x \in R$, для которых $xS = (0)$; аналогично, *правым аннулятором* $\mathfrak{R}(S)$ множества S называется совокупность всех элементов $x \in R$, для которых $Sx = (0)$. Очевидно, $\mathfrak{L}(S)$, $\mathfrak{R}(S)$, если они не совпадают со всем кольцом, являются замкнутыми левым и правым идеалами; кроме того, очевидно, что

$$S \subset \mathfrak{L}(\mathfrak{R}(S)) \quad \text{и} \quad S \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{L}(S)), \tag{1а}$$

$$\mathfrak{L}(S_1) \subset \mathfrak{L}(S_2), \quad \mathfrak{R}(S_1) \subset \mathfrak{R}(S_2) \quad \text{при} \quad S_1 \supset S_2 \tag{1б}$$

и если S_1, S_2 — линейные подпространства в R, то

$$\mathfrak{L}(S_1 + S_2) = \mathfrak{L}(S_1) \cap \mathfrak{L}(S_2), \quad \mathfrak{R}(S_1 + S_2) = \mathfrak{R}(S_1) \cap \mathfrak{R}(S_2). \tag{1в}$$

В некоторых случаях нам в этом параграфе будет удобно считать идеалом также и все кольцо R. Мы будем называть кольцо R *несобственным* (*правым*, *левым и двусторонним*) *идеалом*. Тогда можно сказать, что $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}(S))$ и $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}(S))$ — замкнутые левый и правый (собственные или несобственный) идеалы, содержащие S.

Кольцо R называется *аннуляторным*, если

$$\mathfrak{L}(R) = \mathfrak{R}(R) = (0) \tag{2}$$

и

$$\mathfrak{L}(I_r) \neq (0), \tag{3а}$$

$$\mathfrak{R}(I_l) \neq (0) \tag{3б}$$

для любого замкнутого левого идеала I_l и любого замкнутого правого идеала I_r.

Кольцо R называется *дуальным*, если для каждого замкнутого (собственного или несобственного) левого идеала I_l и каждого замкнутого (собственного или несобственного) правого идеала I_r

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{R}(I_l)) = I_l, \tag{4а}$$

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{L}(I_r)) = I_r. \tag{4б}$$

Из этих определений непосредственно следует, что *всякое дуальное кольцо является также аннуляторным кольцом*. Действительно, полагая в (4а), (4б) $I_l = (0)$, $I_r = (0)$ и учитывая, что $\mathfrak{R}((0)) = R$, $\mathfrak{L}((0)) = R$, получим (2). Далее, для идеала I_l не может быть $\mathfrak{R}(I_l) = (0)$, ибо тогда мы имели бы $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}(I_l)) = \mathfrak{L}((0)) = R \neq I_l$, что противоречит (4а); следовательно, $\mathfrak{R}(I_l) \neq 0$ и (3а) доказано. Аналогично доказывается (3б).

I. *Для произвольного подмножества S дуального кольца $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}(S))$ и $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}(S))$ — минимальные замкнутые (собственные или несобственный) правый и левый идеалы, содержащие S.*

Действительно, если, например, I_r — минимальный замкнутый правый (собственный или несобственный) идеал, содержащий S, то $I_r = \mathfrak{R}(\mathfrak{L}(I_r)) \supset \mathfrak{R}(\mathfrak{L}(S))$; так как $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}(S))$ также есть замкнутый (собственный или несобственный) правый идеал, содержащий S, то $I_r = \mathfrak{R}(\mathfrak{L}(S))$.

II. *Если I_r, J_r — замкнутые правые идеалы в дуальном кольце R, то*

$$\mathfrak{L}(I_r \cap J_r) = \overline{\mathfrak{L}(I_r) + \mathfrak{L}(J_r)}; \tag{5а}$$

аналогично, для замкнутых левых идеалов

$$\mathfrak{R}(I_l \cap J_l) = \overline{\mathfrak{R}(I_l) + \mathfrak{R}(J_r)}. \tag{5б}$$

Доказательство. Так как $\mathfrak{L}(I_r) + \mathfrak{L}(J_r)$ — левый (собственный или несобственный) идеал, то в силу I, (4а) и (4б),

$$\overline{\mathfrak{L}(I_r) + \mathfrak{L}(J_r)} = \mathfrak{L}\{\mathfrak{R}[\mathfrak{L}(I_r) + \mathfrak{L}(J_r)]\} = \\ = \mathfrak{L}\{\mathfrak{R}[\mathfrak{L}(I_r)] \cap \mathfrak{R}[\mathfrak{L}(J_r)]\} = \mathfrak{L}(I_r \cap J_r).$$

Аналогично доказывается (5б).

III. *Если R — дуальное кольцо, то*

$$x \in \overline{xR} \quad \text{и} \quad x \in \overline{Rx}$$

для каждого $x \in R$.

Доказательство. Докажем, что $x \in \overline{xR}$; соотношение $x \in \overline{Rx}$ доказывается аналогично. Так как $\overline{xR} = \mathfrak{R}(\mathfrak{L}(\overline{xR}))$, то достаточно доказать, что $\mathfrak{L}(\overline{xR})\,x = (0)$. Но если $y \in \mathfrak{L}(\overline{xR})$, то $yxR = 0$. Следовательно, $yx \in \mathfrak{L}(R) = (0)$, $yx = 0$; это означает, что $\mathfrak{L}(\overline{xR}) = (0)$.

2. Идеалы в аннуляторном кольце. Всюду в этом пункте R будет обозначать аннуляторное кольцо с непрерывным квазиобратным (см. п. 6 § 8).

I. *Если* $I_l = \{yp - y\colon y \in R\}$, *то* $\mathfrak{R}(I_l) = \{x \in R\colon px = x\}$.

Доказательство. Если $x \in \mathfrak{R}(I_l)$, то $y(px - x) = (yp - y)\,x = 0$ для всех $y \in R$, так что в силу (2) п. 1 $px - x = 0$. Обратно, если $px - x = 0$, то

$$(yp - y)\,x = y(px - x) = 0 \quad \text{и} \quad x \in \mathfrak{R}(I_l).$$

Очевидно, аналогичное предложение имеет место для идеала $I_r = \{py - y\colon y \in R\}$.

II. *Если элемент* $-p$ *не имеет левого квазиобратного, то существует элемент* $x \neq 0$ *такой, что* $px = x$.

Доказательство. Пусть $-p$ не имеет левого квазиобратного; тогда множество $I_l = \{yp - y\colon y \in R\}$ есть регулярный левый идеал в R (см. VII п. 4 § 7). Следовательно, его замыкание $\overline{I}_l$ также есть регулярный левый идеал в R (см. IV п. 3, I п. 6 § 8 и VI п. 4 § 7) и потому $\mathfrak{R}(\overline{I}_l) \neq (0)$. Пусть x — отличный от нуля элемент из $\mathfrak{R}(\overline{I}_l)$; тогда также $x \in \mathfrak{R}(I_l)$ и в силу I $px = x$.

Левый идеал I_l называется *минимальным*, если он не содержит левых идеалов, отличных от (0) и I_l; аналогично определяются минимальные правый и двусторонний идеалы. Далее, замкнутый левый идеал I_l называется *минимальным замкнутым идеалом*, если I_l не содержит замкнутых левых идеалов, отличных от (0) и I_l; аналогично определяются минимальные замкнутые правый и двусторонний идеалы. Замкнутый левый идеал называется *максимальным замкнутым идеалом*, если он не содержится ни в каком другом замкнутом левом идеале. Аналогично определяются максимальные замкнутые правый и двусторонний идеалы. Элемент $p \neq 0$ кольца R называется *идемпотентом*, если $p^2 = p$.

Теорема 1. *Если* M_r — *максимальный замкнутый правый идеал в* R *и* $\mathfrak{L}(M_r)$ *пересекается с радикалом кольца* R *только по нулевому элементу, то* $\mathfrak{L}(M_r)$ *содержит идемпотент* p. *При этом* $\mathfrak{L}(M_r) = Rp$ *и*

$$M_r = \{x - px\colon x \in R\}. \tag{1}$$

Доказательство. Так как $\mathfrak{L}(M_r) \neq (0)$, то существует элемент $a \neq 0$, $a \in \mathfrak{L}(M_r)$. Но тогда $M_r \subset \mathfrak{R}((a)) \neq R$ (см. (2) п. 1) и так как M_r максимален, то

$$\mathfrak{R}((a)) = M_r. \tag{2}$$

В силу условия теоремы элемент a не принадлежит радикалу; следовательно, при некотором λ и некотором $y \in R$ элемент $-p = \lambda a + ya$ не имеет левого квазиобратного (см. определение радикала кольца без единицы в п. 5 § 7) и потому $p \neq 0$; очевидно, $p \in \mathfrak{L}(M_r)$. В силу II существует элемент $x \neq 0$ такой, что $px = x$ и потому $(p^2 - p)\,x = 0$. Докажем, что $p^2 - p = 0$; тем самым первое утверждение теоремы будет доказано. Предположим противное: пусть $p^2 - p \neq 0$. Так как $p^2 - p \in \mathfrak{L}(M_r)$, то в силу (2) (с заменой a на $p^2 - p$) $x \in M_r$ и потому $x = px = 0$, в противоречие со сказанным выше. Следовательно, $p^2 = p$.

Так как $p \in \mathfrak{L}(M_r)$ и $p \neq 0$, то в силу (2) (с заменой a на p) $M_r = \mathfrak{R}((p)) = \{x - px\colon x \in R\}$; действительно, $p(x - px) = px - p^2x = 0$ и если $py = 0$, то $y = y - py$. Отсюда, в силу I и идемпотентности p, $\mathfrak{L}(M_r) = Rp$.

Следствие 1. *При тех же условиях M_r — максимальный правый идеал и $\mathfrak{L}(M_r)$ — минимальный левый идеал. Кроме того, pR — минимальный правый идеал, а $\mathfrak{L}(pR)$ — максимальный левый идеал.*

Доказательство. В силу теоремы 1 M_r регулярен; кроме того, по условию, M_r — максимальный замкнутый правый идеал. Следовательно, M_r — максимальный правый идеал (см. IV п. 3, I п. 6 § 8, V и VI п. 4 § 7). Далее, в силу (1) [1]

$$R = pR + M_r, \tag{3}$$

и это равенство есть разложение кольца R в прямую сумму правых идеалов pR и M_r. Так как M_r максимален, то из (3) заключаем, что pR минимален.

Положим $I_l = \mathfrak{L}(pR)$. Если $y \in I_l$, то $ypR = 0$, следовательно, $yp = 0$ и $y = y - yp$. Отсюда заключаем, что $I_1 = \{y - yp\colon y \in R\}$, следовательно, в силу I $\mathfrak{R}(I_l) = pR$.

Докажем, что I_l — максимальный замкнутый левый идеал. Действительно, пусть J_l — замкнутый левый идеал, содержащий I_l; тогда $(0) \neq \mathfrak{R}(J_l) \subset pR$. Так как pR минимален, то отсюда следует, что $\mathfrak{R}(J_l) = pR$, т. е. $J_l pR = (0)$. Но тогда в силу (2) п. 1 $J_l p = (0)$, т. е. $J_l = \{y - yp\colon y \in R\} = I_l$. Следовательно, I_1 — максимальный замкнутый левый идеал, и так как I_l регулярен, то он также максимальный левый идеал. Но тогда из соотношения $R = I_l + Rp$ вытекает, что $\mathfrak{L}(M_r) = Rp$ — минимальный левый идеал.

Теорема 2. *Если I_l — не содержащийся целиком в радикале минимальный замкнутый левый идеал или минимальный левый идеал в R, то I_l содержит идемпотент p и*

$$I_l = Rp, \quad \mathfrak{R}(Rp) = \{x - px\colon x \in R\}.$$

Доказательство. По условию, I_l содержит элемент x_0, не принадлежащий радикалу; следовательно, при некотором λ и некотором $y \in R$ элемент $-p = \lambda x_0 + yx_0$ (также принадлежащий I_l) не имеет левого квазиобратного и потому $p \neq 0$. В силу II отсюда следует существование элемента $a \neq 0$ такого, что $pa = a$. С другой стороны,

[1] Всюду в этом параграфе $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$ обозначает *прямую сумму* линейно независимых подпространств $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ (см. п. 3 § 1), т. е. совокупность всех векторов $x + y$, $x \in \mathfrak{M}$, $y \in \mathfrak{N}$; таким образом, запись $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$ уже обозначает, что $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ линейно независимы.

множество $J_l = \{x \in I_l\colon xa = 0\}$ есть (замкнутый, если I_l замкнут) левый идеал, содержащийся в I_l и не совпадающий с I_l, ибо $p \notin J_l$, $p \in I_1$. В силу минимальности идеала I_l это возможно, лишь когда $J_l = (0)$, так что $xa \neq 0$ при $x \in I_l$, $x \neq 0$. Но так как $p^2 - p \in I_l$ и $(p^2 - p)\,a = 0$, то $p^2 - p = 0$ и p — идемпотент.

Отметим, что Rp есть совокупность всех элементов $x \in R$, удовлетворяющих условию $x = xp$, и потому Rp — замкнутое множество. Следовательно, Rp — замкнутый левый идеал, содержащийся в I_l, и потому $Rp = I_l$ в силу минимальности I_l. Но тогда очевидно, что $\mathfrak{R}(I_l) = \{x - px\colon x \in R\}$.

С л е д с т в и е 2. *При тех же условиях I_l — минимальный левый идеал, а $\mathfrak{R}(I_l)$ — максимальный правый идеал. Кроме того, pR — минимальный правый идеал, а $\mathfrak{L}(pR)$ — максимальный левый идеал.*

Доказательство этого следствия аналогично доказательству следствия 1.

С л е д с т в и е 3. *Всякий минимальный левый идеал I_l в R, не содержащийся в радикале, замкнут.*

Действительно, $I_l = Rp$, а Rp — замкнутое множество.

З а м е ч а н и е 1. Очевидно, во всех предыдущих результатах можно поменять ролями левые и правые идеалы.

Т е о р е м а 3. *Всякое аннуляторное полное вполне регулярное нормированное кольцо R дуально.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть I_l — замкнутый левый идеал в R; докажем сначала, что
$$R = I_l \dotplus (\mathfrak{R}(I_l))^*. \tag{4}$$

Если $x \in I_l \cap (\mathfrak{R}(I_l))^*$, то $xx^* = 0$, следовательно, $x = 0$. Таким образом, $I_1 \cap (\mathfrak{R}(I_l))^* = (0)$. Положим $J_l = I_l \dotplus (\mathfrak{R}(I_l))^*$; если $J_l \neq R$, то J_l — левый идеал в R. Этот идеал замкнут. Действительно, пусть $x = y + z$, $y \in I_l$, $z \in (\mathfrak{R}(I_l))^*$. Тогда $xz^* = zz^*$, и потому $|x||z^*| \geqslant |z^2|$, $|x| \geqslant |z|$.

Аналогично, $|x| \geqslant |y|$. Из этих неравенств легко следует замкнутость идеала J_l. Но тогда в силу условия (3б) п. 1 существует отличный от нуля элемент $a \in R$ такой, что $J_l a = (0)$ и, следовательно, также $I_l a = (0)$, $(\mathfrak{R}(I_l))^* a = (0)$.

Из первого равенства вытекает, что $a \in \mathfrak{R}(I_l)$, $a^* \in (\mathfrak{R}(I_l))^*$, и тогда второе равенство дает: $a^* a = 0$, что невозможно. Поэтому $J_l = R$ и (4) доказано.

Аналогично доказывается, что для любого замкнутого правого идеала I_r
$$R = I_r \dotplus (\mathfrak{L}(I_r))^*. \tag{5}$$

Положив в (5) $I_l = \mathfrak{R}(I_l)$, получим
$$R = \mathfrak{R}(I_l) \dotplus (\mathfrak{L}(\mathfrak{R}(I_l)))^*,$$

или, применив к обеим частям этого соотношения операцию инволюции,

$$R = (\mathfrak{R}(I_l))^* \dotplus \mathfrak{L}(\mathfrak{R}(I_l)). \tag{6}$$

Так как $I_l \subset \mathfrak{L}(\mathfrak{R}(I_l))$, то сравнение соотношений (6) и (4) дает, что $I_l = \mathfrak{L}(\mathfrak{R}(I_l))$. Применяя операцию инволюции, заключаем, что также $I_r = \mathfrak{R}(\mathfrak{L}(I_r))$ для любого замкнутого правого идеала I_r, и теорема доказана.

Замечание 2. Отметим, что для справедливости теоремы 3 фактически достаточно одного из условий (3) п. 1.

Действительно, легко видеть, что каждое из этих условий получается из другого применением операции инволюции, а условие (2) п. 1 выполняется во всяком вполне регулярном кольце.

3. Полупростые аннуляторные кольца. В этом пункте R будет обозначать полупростое аннуляторное кольцо с непрерывным квазиобратным. Из результатов п. 2 вытекает, что в кольце R всякий минимальный левый идеал замкнут и содержит идемпотент и что аннулятор максимального замкнутого правого идеала есть минимальный левый идеал, а аннулятор минимального левого идеала есть максимальный регулярный правый идеал.

Теорема 4. *Сумма*[1] *всех минимальных левых* (*или правых*) *идеалов кольца R плотна в R.*

Доказательство. Пусть S — сумма всех минимальных левых идеалов, а $\overline{S}$ — ее замыкание. Если $\overline{S} \neq R$, то $\overline{S}$ — замкнутый левый идеал в R, и потому существует элемент $x \neq 0$ такой, что $\overline{S}x = (0)$. Тогда x принадлежит всем правым аннуляторам всех минимальных левых идеалов, т. е. пересечению всех максимальных регулярных правых идеалов. Но согласно III$'$ п. 5 § 7 это пересечение есть радикал кольца R и потому $= (0)$ в силу полупростоты R. Следовательно, $x = 0$, и мы пришли к противоречию. Поэтому $\overline{S} = R$.

I. *Если* (*левый, правый или двусторонний*) *идеал I в R удовлетворяет условию $I^2 = (0)$, то $I = (0)$.*

Доказательство. Пусть, например, I — левый идеал в R и $I^2 = (0)$. Отсюда следует, что $(\alpha x + yx)^2 = 0$ для всех чисел α и всех $x \in I$, $y \in R$, ибо также $\alpha x + yx \in I$. Но в таком случае элемент $z = \alpha x + xy$ имеет левый квазиобратный, равный $-z$, и потому x принадлежит радикалу кольца R (см. п. 5 § 7). В силу полупростоты кольца R отсюда заключаем, что $x = 0$ и, следовательно, $I = (0)$. Аналогично доказывается утверждение для правых идеалов.

[1] Под суммой левых идеалов $I_l^{(\alpha)}$ мы понимаем совокупность всевозможных конечных сумм элементов $x_\alpha \in I_l^{(\alpha)}$. Аналогично определяются суммы правых и двусторонних идеалов.

II. *Если* I_r — *минимальный правый идеал в* R, *то замкнутый двусторонний идеал* $[I_r]$, *порожденный идеалом* I_r, *есть минимальный замкнутый двусторонний идеал в* R.

Доказательство. Пусть J — замкнутый двусторонний идеал, содержащийся в $[I_r]$; тогда $I_r \cap J$ — правый идеал, содержащийся в минимальном правом идеале I_r, следовательно, либо $I_r \cap J = I_r$, т. е. $I_r \subset J$, либо $I_r \cap J = (0)$.

В первом случае $[I_r] \subset J$, и потому $[I_r] = J$. Во втором случае $I_r J \subset \subset I_r \cap J = (0)$, следовательно, $I \subset (J)$. Но, как легко видеть, $\mathfrak{L}(J)$ есть замкнутый двусторонний идеал и потому также $[I_r] \subset \mathfrak{L}(J)$. А тогда $J \subset \mathfrak{L}(J)$, следовательно, $J^2 = (0)$ и в силу I $J = (0)$.

Таким образом, во втором случае $J = (0)$, и минимальность идеала $[I_r]$ доказана.

Два идемпотента p_1, p_2 называются *ортогональными*, если $p_1 p_2 = = p_2 p_1 = 0$. Система $\{p\}$ идемпотентов называется *ортогональной*, если каждые два разных идемпотента этой системы ортогональны. Идемпотент p называется *неприводимым*, если он не есть сумма двух взаимно ортогональных идемпотентов.

III. *Если* pR — *минимальный правый идеал* (Rp — *минимальный левый идеал*), *то* p — *неприводимый идемпотент*.

Доказательство. Пусть p приводим, $p = p_1 + p_2$, где $p_1 p_2 = = p_2 p_1 = 0$. Тогда $p_1 R = p p_1 R \subset pR$, $p_2 R = p p_2 R \subset pR$ и

$$pR = p_1 R + p_2 R. \tag{1}$$

Действительно, $px = p_1 x + p_2 x$, и если $p_1 x + p_2 y = 0$, то, умножая обе части этого последнего равенства слева на p_1 и p_2, получим, что $p_1 x = = p_2 y = 0$. Но из (1) вытекает, что pR — не минимальный правый идеал.

IV. *Если* pR — *минимальный правый идеал и* $a \in R$, *то либо* $apR = (0)$, *либо* $apR = p'R$ *есть минимальный правый идеал*.

Доказательство. Левое регулярное представление $x \to ax$ отображает pR на apR; ядро этого отображения есть правый идеал, содержащийся в pR. Следовательно, либо это ядро есть (0) и отображение взаимно однозначно, либо оно совпадает с pR и тогда $apR = (0)$.

В первом случае apR — минимальный правый идеал в R и потому $apR = p'R$ при некотором неприводимом p'.

V. *Всякий правый идеал* I_r *в* R *содержит минимальный правый идеал, следовательно, содержит неприводимый идемпотент* p.

Доказательство. Пусть I_r не содержит минимальных правых идеалов и пусть pR — минимальный правый идеал. Тогда $pR \cap I_r$ есть правый идеал, содержащийся в минимальном идеале pR и не совпадающий с pR, ибо pR не содержится в I_r. Следовательно, $pR \cap I_r = (0)$.

В силу IV, apR при любом $a \in R$ есть либо (0), либо минимальный правый идеал; поэтому также $apR \cap I_r = (0)$ для всех $a \in R$. Отсюда $ap \cap I_r = app \cap I_r \subset apR \cap I_r = (0)$ для всех $a \in R$, т. е. $Rp \cap I_r = (0)$. Так как $I_rRp \subset Rp \cap I_r$, то также $I_rRp = (0)$. Но в силу следствия 2 и замечания 1 в п. 2, если pR пробегает все минимальные правые идеалы, то Rp пробегает все минимальные левые идеалы, так что $I_rRp = (0)$ для всех минимальных левых идеалов Rp. Согласно теореме 4 отсюда следует, что $I_rR = (0)$ и потому $I_r = (0)$.

VI. *Если p — неприводимый идемпотент, то pR и Rp — минимальные правый и левый идеалы.*

Доказательство. Пусть p — неприводимый идемпотент. Предположим, что правый идеал pR не является минимальным. В силу V pR содержит минимальный правый идеал $p'R$, не совпадающий с pR, ибо pR не минимален; в частности, $p' = p'^2 = pa$ при некотором $a \in R$. Тогда элемент $p'' = p'p = pap$ принадлежит $p'R$ и перестановочен с p, ибо $pp'' = p^2ap = pap = p''$ и $p''p = pap^2 = pap = p''$; кроме того, $p''^2 = p'pp'' = p'p'' = p'p = p''$. При этом $p'' \neq 0$, ибо $p''p' = p'pp' = (pa)\,p(pa) = (pa)^2 = p'^2 = p' \neq 0$; следовательно, p'' — идемпотент, содержащийся в $p'R$.

Далее, также $p - p'' \neq 0$ (ибо $p''R \subset p'R \neq pR$) и $p''(p - p'') = p'' - - p'' = 0$. Но тогда, положив $p = p'' + (p - p'')$, мы, вопреки неприводимости идемпотента p, получим его представление в виде суммы двух взаимно ортогональных идемпотентов. Следовательно, pR минимален.

VII. *Левый и правый аннуляторы замкнутого двустороннего идеала I совпадают.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что в силу I $I \cap \cap \mathfrak{R}(I) = (0)$, ибо $I \cap \mathfrak{R}(I)$ есть правый идеал, удовлетворяющий условию $J^2 = (0)$. Следовательно, также $\mathfrak{R}(I)I = (0)$, т. е. $\mathfrak{R}(I) \subset \mathfrak{L}(I)$; аналогично, $\mathfrak{L}(I) \subset \mathfrak{R}(I)$ и потому $\mathfrak{L}(I) = \mathfrak{R}(I)$.

VIII. *Для любого замкнутого двустороннего идеала I идеал $I + \mathfrak{L}(I) = I + \mathfrak{R}(I)$ плотен в R.*

Доказательство. Если $I + \mathfrak{L}(I)$ не плотен в R, то его замыкание есть идеал в R, следовательно, существует элемент $x \neq 0$ такой, что $x(I + \mathfrak{L}(I)) = (0)$, откуда $(\lambda x + yx)I = (0)$, $(\lambda x + yx)\mathfrak{L}(I) = 0$. Но из первого равенства вытекает, что $\lambda x + yx \in \mathfrak{L}(I)$, следовательно, из второго, что $(\lambda x + yx)^2 = 0$ для всех $y \in R$ и всех λ, а в полупростом кольце это невозможно при $x \neq 0$ (см. доказательство предложения I).

IX. *Всякий минимальный замкнутый двусторонний идеал I в R есть аннуляторное кольцо; если, кроме того, R — дуальное кольцо, то I — также дуальное кольцо.*

Доказательство. Пусть $x \in I$ и $Ix = (0)$; тогда $x = 0$, ибо $I \cap \cap \mathfrak{R}(I) = (0)$ (см. доказательство предложения VII).

Аналогично, если $\widetilde{x}I = (0)$ и $x \in I$, то $x = 0$. Следовательно, условие (2) п. 1 выполнено.

Пусть теперь J_l, J_r — замкнутые левый и правый идеалы в I. Нам надо доказать, что $\mathfrak{R}(J_l) \cap I \neq (0)$ и $\mathfrak{L}(J_r) \cap I \neq (0)$. Отметим, что J_l — также замкнутый левый идеал в R. Действительно, $(I + \mathfrak{L}(I))J_l = IJ_l \subset J_l$, и так как $I + \mathfrak{L}(I)$ плотно в R, то также $RJ_l \subset J_l$. Положим $I_l = J_l + \mathfrak{L}(I) = J_l + \mathfrak{R}(I)$; тогда либо I_l плотно в R, либо $\mathfrak{R}(I_l) \neq (0)$.

Рассмотрим первый случай. Пусть $a \in I$; тогда $aI_l = aJ_l + a\mathfrak{R}(I) = aJ_l \subset J_l$, и потому также $aR = a\overline{I}_l \subset J_l$. Это означает, что $IR \subset J_l$ и тем более $I^2 \subset J_l$. Но I^2 есть отличный от (0) (в силу полупростоты кольца R, см. I) двусторонний идеал, содержащийся в минимальном замкнутом двустороннем идеале I. Следовательно, $\overline{I}^2 = I$; поэтому также $I \subset J_l$ и вопреки предположению $J_l = I$. Таким образом, первый случай невозможен и $\mathfrak{R}(I_l) \neq (0)$. В силу V $\mathfrak{R}(I_l)$ содержит неприводимый идемпотент p. Докажем, что $p \in I$. Пусть $p \notin I$ и $[pR]$ — двусторонний идеал, порожденный минимальным правым идеалом pR. Тогда $[pR] \cap I$ — замкнутый двусторонний идеал, содержащийся в минимальных замкнутых двусторонних идеалах $[pR]$ (см. II) и I, и потому либо совпадает с обоими, либо $= (0)$. Но первый случай невозможен, ибо $[pR]$ содержит элемент $p^2 = p \notin I$; следовательно, $[pR] \cap I = (0)$. Но тогда также $pI = (0)$ (ибо $pI \subset [pR] \cap I$), т. е. $p \in \mathfrak{L}(I) \subset I_l$. Так как, с другой стороны, $p \in \mathfrak{R}(I_l)$, то мы приходим к невозможному равенству $p^2 = 0$. Итак, $\mathfrak{R}(I_l) \cap I \neq (0)$ и тем более $\mathfrak{R}(J_l) \cap I \neq (0)$. Аналогично доказывается, что $\mathfrak{L}(J_r) \cap I \neq (0)$.

Предположим теперь, что R — дуальное полупростое кольцо; докажем, что также I дуально.

Покажем, что если $x \in I$ и $[\mathfrak{L}(J_r) \cap I]x = (0)$, то $x \in J_r$. В силу (1а) п. 1 тем самым будет доказано, что в I выполняется условие (4б) п. 1; аналогично доказывается, что в I выполняется также условие (4а) п. 1.

В силу дуальности кольца R достаточно показать, что $\mathfrak{L}(J_r)\,x = (0)$. По условию

$$x \in \mathfrak{R}[\mathfrak{L}(J_r) \cap I] = \overline{\mathfrak{R}[\mathfrak{L}(J_r)] + \mathfrak{R}(I)} = \overline{J_r + \mathfrak{R}(I)} = \overline{J_r + \mathfrak{L}(I)} \tag{2}$$

(см. (5б) п. I и VII). Но $(J_r + \mathfrak{L}(I))I = J_l I \subset J_r$, ибо J_r — правый идеал в I; следовательно, также $\overline{J_r + \mathfrak{L}(I))}I \subset J_r$. Отсюда в силу (2) $xI \subset J_r$, и потому

$$\mathfrak{L}(J_r)\,xI \subset \mathfrak{L}(J_r)J_r = (0).$$

Кроме того, $\mathfrak{L}(J_r)\,x\mathfrak{R}(I) = (0)$, ибо $x \in I$; следовательно, также $\mathfrak{L}(J_r)\,x(I + \mathfrak{R}(I)) = (0)$. Так как $I + \mathfrak{R}(I)$ плотно в R (см. VIII), то также $\mathfrak{L}(J_r)\,xR = (0)$ и, следовательно, $\mathfrak{L}(J_r)\,x \subset \mathfrak{L}(R) = (0)$.

Теорема 5. *Всякое полупростое аннуляторное кольцо R с непрерывным квазиобратным есть пополнение прямой суммы*[1])

[1]) Сумма двусторонних идеалов I^α (см. сноску на с. 380) называется *прямой*, если I^α — линейно независимые подпространства в R и $I^{\alpha_1}I^{\alpha_2} = (0)$ при $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

всех своих минимальных замкнутых двусторонних идеалов, которые являются простыми[1] *аннуляторными кольцами, а в случае дуального кольца R — простыми дуальными кольцами.*

Доказательство. В силу V всякий минимальный замкнутый двусторонний идеал I в R содержит минимальный правый идеал I_r, следовательно, совпадает с $[I_r]$ (см. II). Обратно, в силу II для любого минимального правого идеала I_r идеал $[I_r]$ есть минимальный замкнутый двусторонний идеал. Согласно IX $[I_r]$ — аннуляторные кольца и дуальны, если R дуально. Кроме того, $[I_r]$ — простые кольца, ибо всякий замкнутый двусторонний идеал в $[I_r]$ был бы замкнутым двусторонним идеалом в R (см. доказательство предложения IX), содержащимся в минимальном $[I_r]$, что невозможно.

Согласно теореме 4 сумма всех минимальных правых идеалов I_r, а тем более всех минимальных замкнутых двусторонних идеалов $[I_r]$, плотна в R. Остается доказать, что эта сумма — прямая. Но если $[I_r] \neq [I'_r]$, то

$$I_r I'_r \subset [I_r] \cap [I'_r] = (0), \tag{3}$$

ибо $[I_r] \cap [I'_r]$ есть замкнутый двусторонний идеал, содержащийся в минимальных идеалах $[I_r]$, $[I'_r]$ и не совпадающий с ними. Пусть

$$0 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \tag{4}$$

где $x_k \in [I_r^{(k)}]$, $k = 1,\ 2,\ \ldots, n$, и $[I_r^{(1)}], \ \ldots, [I_r^{(n)}]$ попарно различны. Умножая обе части (4) слева на $I_r^{(k)}$ и учитывая (3), получим, что $[I_r^{(k)}]x_k = (0)$, следовательно, $(x_k R)^2 \subset [I_r^{(k)}] \cdot (x_k R) = (0)$. Отсюда $x_k R = (0)$ в силу полупростоты кольца R и потому $x_k = 0$.

Следствие. *Пусть в дополнение к условиям теоремы 5 R — симметричное кольцо, в котором инволюция $x \to x^*$ непрерывна и удовлетворяет условию*

$$x^* x = 0 \quad \text{лишь при} \quad x = 0. \tag{5}$$

Тогда все минимальные замкнутые двусторонние идеалы I в R симметричны.

Доказательство. Отображение $x \to x^*$ переводит минимальный замкнутый двусторонний идеал I в минимальный замкнутый двусторонний идеал I^*; если бы $I^* \neq I$, то мы имели бы $I^* I = (0)$ и, следовательно, $x^* x = 0$ для всех $x \in I$, что противоречит условию (4).

Следующие две теоремы являются частичным обращением теоремы 5.

[1] В этом параграфе мы называем кольцо R *простым*, если оно не содержит замкнутых двусторонних идеалов.

Теорема 6. *Пусть $\{R_\alpha\}$ — множество дуальных колец и пусть R — кольцо всех комплексов $x = \{x_\alpha\}$, $x_\alpha \in R_\alpha$, в которых только конечное число элементов x_α отлично от нуля, причем операции в R определяются естественным образом по формулам*:

$$\lambda(x) = \{\lambda x_\alpha\}, \quad x + y = \{x_\alpha + y_\alpha\},$$
$$xy = \{x_\alpha y_\alpha\}$$

при $x = \{x_\alpha\}$, $y = \{y_\alpha\}$.

Пусть в R задана какая-нибудь топология, в которой R становится топологическим кольцом и сужение которой на каждое R_α слабее исходной топологии в R_α или совпадает с ней. Тогда R — дуальное кольцо.

Доказательство. Условимся не различать элемент x_{α_0} и комплекс $x = \{x_\alpha\}$, в котором $x_\alpha = 0$ при $\alpha \neq \alpha_0$. Тогда можно сказать, что R состоит из всевозможных конечных сумм элементов $x_\alpha \in R_\alpha$, причем $x_\alpha x_\beta = x_\beta x_\alpha = 0$ при $\alpha \neq \beta$.

Пусть теперь I_r — замкнутый (собственный или несобственный) правый идеал в R, а $I_r^{(\alpha)}$ — совокупность всех α-х компонент элементов $\{x_\alpha\} \in I_r$. Если $x_\alpha \in I_r^{(\alpha)}$ и $y_\alpha \in R_\alpha$, то $y_\alpha x_\alpha \in I_r$, так что $R_\alpha I_r^{(\alpha)} \subset I_r$. Но в силу III п. 1, $R_\alpha I_r^{(\alpha)}$ плотно в $I_r^{(\alpha)}$ в топологии R_α, следовательно, также $I_r^{(\alpha)} \subset I_r$. Поэтому $I_r^{(\alpha)} = I_r \cap R_\alpha$ и $I_r^{(\alpha)}$ — замкнутый (собственный или несобственный) идеал в R_α.

Очевидно, $\mathfrak{L}(I_r)$ состоит из тех и только тех $y = \{y_\alpha\}$, для которых $y_\alpha I_r^{(\alpha)} = (0)$, т. е. для которых y_α находится в левом аннуляторе $\mathfrak{L}_\alpha(I_r^{(\alpha)})$ идеала $I_r^{(\alpha)}$ в кольце R_α. Аналогично находим, что $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}(I_r))$ состоит из тех и только тех $z = \{z_\alpha\}$, для которых $z_\alpha \in \mathfrak{R}_\alpha(\mathfrak{L}_\alpha(I_r^{(\alpha)}))$. Но, в силу дуальности колец R_α и замкнутости идеалов $I_r^{(\alpha)}$, $\mathfrak{R}_\alpha(\mathfrak{L}_\alpha(I_r^{(\alpha)})) = I_r^{(\alpha)}$, следовательно, $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}(I_r))$ состоит из всех $z = \{z_\alpha\}$, где $z_\alpha \in I_r^{(\alpha)}$, т. е. $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}(I_r)) = I_r$.

Аналогично, $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}(I_l)) = I_l$ для любого замкнутого (собственного или несобственного) левого идеала I_l в R.

Теорема 7. *Пусть R — топологическое кольцо, удовлетворяющее следующим условиям*:

1) $x \in \overline{xR}$ *и* $x \in \overline{Rx}$ *для любого* $x \in R$;

2) *в R имеется плотный в R двусторонний идеал I, являющийся дуальным кольцом в некоторой топологии, которая сильнее или совпадает с сужением на I топологии в R.*

Тогда R дуальное кольцо.

Доказательство. Пусть I_r, I_l — замкнутые правый и левый (собственные или несобственные) идеалы в R; в силу условия 2) тогда $I_r \cap I$ — замкнутый правый (собственный или несобственный) идеал в I. Кроме того, $I_r \cap I$ плотен в I_r в смысле топологии в R; действительно, $I_r I \subset I_r \cap I$ и, в смысле топологии в R, $I_r I$ плотно в $I_r R$ (ибо по условию I плотен в R), а $I_r R$ в I_rв силу условия 1). Таким образом.

$$\overline{I_r \cap I} = I_r. \tag{6}$$

Отсюда следует, что левый аннулятор в I идеала $I_r \cap I$ есть в точности $\mathfrak{L}(I_r) \cap I$, где $\mathfrak{L}$ и ниже $\mathfrak{R}$ обозначают левый и правый аннуляторы во всем кольце R.

Аналогично, правый аннулятор в I идеала $\mathfrak{L}(I_r) \cap I$ есть в точности $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}(I_r)) \cap I$. В силу дуальности кольца I и замкнутости в I (собственного или несобственного) идеала $I_r \cap I$, отсюда заключаем, что $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}(I_r)) \cap I = I_r \cap I$. Но в силу (6) замыкания в R левой и правой частей этого соотношения суть $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}(I_r))$ и I_r. Поэтому $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}(I_r)) = I_r$ и аналогично $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}(I_l)) = I_l$.

4. Простые аннуляторные кольца. В этом пункте R будет обозначать простое аннуляторное кольцо с непрерывным квазиобратным.

I. *Если p — неприводимый идемпотент, то кольцо pRp изоморфно полю комплексных чисел.*

Доказательство. Докажем, что pRp есть поле; как подкольцо кольца R с непрерывным квазиобратным, оно будет полем с непрерывным обратным и, следовательно, будет изоморфно полю комплексных чисел (см. пп. 5–6 § 8).

Очевидно, p есть единица кольца pRp.

Пусть $x \in pRp$ и $x \neq 0$; нам надо доказать, что x имеет обратный в pRp. Для этого заметим, что Rx есть левый идеал в R, отличный от (0) (в силу условия (2) п. 1) и содержащийся в минимальном идеале Rp; следовательно, $Rx = Rp$. Отсюда заключаем, что существует элемент $y \in R$, для которого $yx = p^2 = p$. Но в таком случае

$$(pyp)\,x = (pyp)(pxp) = pypxp = pyx = pp = p,$$

т. е. pyp есть левый обратный элемента x в кольце pRp. Аналогично доказывается, что x имеет в pRp правый обратный.

II. *В R имеется максимальная ортогональная система*[1] *$\{p_\alpha\}$ неприводимых идемпотентов. Сумма соответствующих минимальных левых идеалов Rp_α, а также минимальных правых идеалов $p_\alpha R$, плотна в R.*

Доказательство. В силу V п. 3 в R имеются неприводимые идемпотенты; применяя лемму Цорна, заключаем, что в R существует максимальная ортогональная система $\{p_\alpha\}$ неприводимых идемпотентов. Пусть I_l — сумма всех левых идеалов Rp_α; если $\overline{I}_l \neq R$, то $\overline{I}_l$ — замкнутый левый идеал, а значит, $\mathfrak{R}(I_l)$ есть отличный от нуля правый идеал. Но тогда согласно V п. 3 $\mathfrak{R}(\overline{I}_l)$ содержит неприводимый идемпотент, который ортогонален ко всем p_α; последнее же невозможно

[1] См. п. 3, с. 381.

в силу максимальности системы $\{p_\alpha\}$. Следовательно, сумма всех Rp_α плотна в R и аналогично сумма всех $p_\alpha R$ плотна в R.

Теорема 8. *Всякое простое аннуляторное кольцо R с непрерывным квазиобратным можно так изоморфно отобразить в кольцо непрерывных линейных операторов в линейном пространстве, что:*

1) *образ кольца R при этом изоморфизме содержит все конечномерные*[1] *операторы;*

2) *в R существует плотное надкольцо R_1, образ которого при этом изоморфизме состоит из конечномерных операторов.*

Если, кроме того, R — банахово кольцо, то этот изоморфизм можно реализовать в виде непрерывного изоморфизма в кольцо всех операторов, являющихся пределами, в смысле нормы оператора, конечномерных операторов в некотором банаховом пространстве.

Доказательство. Пусть $\{p_\alpha\}$ — максимальная ортогональная система неприводимых идемпотентов в R и пусть p_1 — фиксированный идемпотент из $\{p_\alpha\}$. Множество Rp_1R есть отличный от (0) двусторонний идеал в R; в силу простоты кольца R отсюда заключаем, что

$$\overline{Rp_1R} = R, \tag{1}$$

следовательно, $p_\alpha Rp_1Rp_\alpha \neq 0$. Но $p_\alpha Rp_1Rp_\alpha \subset p_\alpha Rp_\alpha = \{\lambda p_\alpha\}$; поэтому существуют $x, y \in R$ (вообще говоря, зависящие от α) такие, что

$$p_\alpha xp_1yp_\alpha = p_\alpha. \tag{2}$$

Положим

$$p_{\alpha 1} = p_\alpha xp_1, \quad p_{1\alpha} = p_1yp_\alpha, \quad p_{\alpha\beta} = p_{\alpha 1}p_{1\beta}. \tag{3}$$

Тогда

$$p_{\alpha\alpha} = p_\alpha, \quad p_{\alpha_1\beta_1}p_{\alpha_2\beta_2} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \beta_1 \neq \alpha_2, \\ p_{\alpha_1\beta_2} & \text{при} \quad \beta_1 = \alpha_2. \end{cases} \tag{4}$$

Действительно, в силу формул (3) и идемпотентности элемента p_1 равенство $p_{\alpha\alpha} = p_\alpha$ есть просто равенство (2). Далее, $p_{1\alpha}p_{\alpha 1} \subset p_1Rp_1 = \{\lambda p_1\}$, следовательно, $p_{1\alpha}p_{\alpha 1} = \lambda p_1$ при некотором λ. Умножив обе части этого равенства слева на $p_{\alpha 1}$ и справа на $p_{1\alpha}$, получим, что $p_\alpha^2 = \lambda p_\alpha$, т. е. $p_\alpha = \lambda p_\alpha$, так что $\lambda = 1$ и $p_{1\alpha}p_{\alpha 1} = p_1$. Отсюда легко следует нижнее соотношение (4). Верхнее же непосредственно вытекает из ортогональности системы $\{p_\alpha\}$.

Множество $p_\alpha Rp_\beta$ состоит из кратных элемента $p_{\alpha\beta}$. Действительно, $p_\alpha xp_{\beta\alpha} \in p_\alpha Rp_\alpha = \{\lambda p_\alpha\}$, следовательно, $p_\alpha xp_{\beta\alpha} = \lambda p_\alpha$ при некотором λ. Умножив обе части этого равенства справа на $p_{\alpha\beta}$ и воспользовавшись вторым соотношением (4), получим, что $p_\alpha xp_\beta = \lambda p_{\alpha\beta}$. Отсюда и из соотношений (4) вытекает, что сумма всех $p_\alpha Rp_\beta$ есть подкольцо кольца R. Обозначим это подкольцо R_1. Оно плотно в R.

[1] Напомним (см. п. 6 § 4), что линейный оператор называется *конечномерным*, если его область изменения конечномерна.

Действительно, сумма всех $p_\alpha R p_\beta$ содержит линейную оболочку множества $\left(\sum\limits_\alpha p_\alpha R\right)\left(\sum\limits_\beta R p_\beta\right)$, плотную в линейной оболочке множества $\left(\sum\limits_\alpha p_\alpha R\right)R$, которая в свою очередь плотна в линейной оболочке множества R^2, ибо $\sum\limits_\alpha p_\alpha R$, $\sum\limits_\beta R p_\beta$ плотны в R и произведение xy непрерывно по каждому из сомножителей. С другой стороны, линейная оболочка множества R^2 есть двусторонний идеал в R и потому плотна в R. Следовательно, R_1 плотно в R.

Из (1) также следует, что $x\overline{Rp_1R} \neq (0)$ при любом $x \neq 0$; отсюда $xRp_1R \neq (0)$ и

$$xRp_1 \neq (0) \quad \text{при любом} \quad x \neq 0. \tag{5}$$

Каждому элементу $x \in R$ поставим в соответствие оператор $A_x y = xy$ левого регулярного представления в подпространстве Rp_1. В силу (5) представление $x \to A_x$ есть изоморфизм.

Если $x = p_{\alpha\beta}$, то в силу формул (4) оператор A_x отображает в $p_\alpha R p_1$ одномерное подпространство $p_\beta R p_1$ и в нуль все подпространства $p_{\beta'} R p_1$ при $\beta' \neq \beta$. Так как сумма всех $p_\beta R p_1$ плотна в Rp_1, то отсюда заключаем, что область изменения оператора A_x при $x = p_{\alpha\beta}$ одномерна. Но тогда оператор A_x конечномерен при любом $x \in R_1$, т. е. образ кольца R_1 при изоморфизме $x \to A_x$ состоит из конечномерных операторов.

Докажем теперь, что среди операторов A_x, $x \in R$, содержатся все конечномерные операторы. Очевидно, достаточно доказать, что среди операторов A_x, $x \in R$, содержатся все одномерные операторы.

Пусть A — одномерный оператор в Rp_1 и пусть b — элемент в Rp_1 такой, что $Ab \neq 0$. Обозначим через $\mathfrak{N}$ совокупность всех векторов из Rp_1, на которых A обращается в нуль. Тогда $Rp_1 = \{\lambda b\} \dotplus \mathfrak{N}$. Кроме того, $\mathfrak{L}(\mathfrak{N}) \neq (0)$. Действительно, если $\mathfrak{L}(\mathfrak{N}) = (0)$, то также $\mathfrak{L}(\mathfrak{N}R) = \mathfrak{L}(\mathfrak{N}) = (0)$; так как замкнутая линейная оболочка $[\mathfrak{N}R]$ множества $\mathfrak{N}R$ есть (несобственный или собственный) правый идеал в R, то отсюда заключаем, что $[\mathfrak{N}R] = R$. Так как $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}p_1$, то тогда $[\mathfrak{N}p_1Rp_1] = Rp_1$; в силу соотношения $p_1Rp_1 = \{\lambda p_1\}$ это приводит к невозможному равенству $\mathfrak{N} = Rp_1$.

Итак, $\mathfrak{L}(\mathfrak{N}) \neq (0)$; пусть a — отличный от нуля элемент из $\mathfrak{L}(\mathfrak{N})$. Тогда $ab \neq 0$. Действительно: если $ab = 0$, то $aRp_1 = a[\{\lambda b\} \dotplus \mathfrak{R}] = (0)$, что противоречит (5). Но в таком случае Rab есть отличный от (0) левый идеал, содержащийся в минимальном левом идеале Rp_1, и потому $Rab = Rp_1$. В частности, существует $x \in R$ такой, что $xab = Ab$. Это означает, что операторы A_{xa} и A совпадают на элементе b; так как, кроме того, $A_{xa}\mathfrak{N} = xa\mathfrak{N} = (0) = A\mathfrak{N}$ (ибо $a \in \mathfrak{L}(\mathfrak{N})$), то $A_{xa} = A$, и первая часть теоремы полностью доказана.

Предположим теперь, что R — банахово кольцо. Тогда Rp_1 как замкнутое подпространство в R есть банахово пространство и все операторы A_x являются ограниченными операторами в банаховом пространстве. В силу соотношения $|A_x| \leqslant |x|$ (см. (2) п. 7 § 9), изоморфизм $x \to A_x$ непрерывен и всякий оператор A_x является пределом в смысле нормы оператора конечномерных операторов A_{x_n}, $x_n \in R_1$.

Замечание. *Пусть в дополнение к условиям теоремы 8 R — симметричное кольцо, в котором $x^*x + y^*y = 0$ лишь при $x = y = 0$. Тогда элементы $p_{\alpha\beta}$ можно выбрать так, чтобы $p^*_{\alpha\beta} = p_{\beta\alpha}$.*

Доказательство. Прежде всего докажем, что все p_α можно считать эрмитовыми.

Пусть p — неприводимый идемпотент; тогда $pRp\{\lambda p\}$, следовательно, $pp^*p = \lambda p$ при некотором λ. Отсюда

$$pp^*pp^* = \lambda pp^*. \tag{6}$$

Так как $p \neq 0$, то $pp^* \neq 0$ и $pp^*pp^* = (pp^*)^*pp^* \neq 0$; следовательно, также $\lambda \neq 0$. Кроме того, λ — вещественное число, ибо левая и правая части в (6) эрмитовы. Положим $p' = \lambda^{-1}pp^*$; тогда $p' \neq 0$, $p'^* = p'$ и в силу (6) $p'^2 = p'$; следовательно, p' — эрмитов идемпотент. Этот идемпотент неприводим. Действительно, $p'R = \lambda^{-1}pp^*R$ есть правый идеал, содержащийся в минимальном правом идеале pR и отличный от (0) (ибо $p = \lambda^{-1}pp^*p \in p'R$); следовательно, $p'R = pR$. Но тогда в силу V п. 3 отсюда вытекает, что всякий правый и всякий левый идеал содержит неприводимый эрмитов идемпотент. Отсюда, как и в II, заключаем, что в R существует максимальная ортогональная система $\{p_\alpha\}$ эрмитовых неприводимых идемпотентов.

Пусть $p_{1\alpha}$ построены для этой системы $\{p_\alpha\}$ как в доказательстве теоремы 8. Тогда $p_{1\alpha}p^*_{1\alpha} = p_1Rp_1$, следовательно,

$$p_{1\alpha}p^*_{1\alpha} = \lambda p_1 \tag{7}$$

при некотором λ. Так, $p_{1\alpha}p^*_{1\alpha}$ и p_1 эрмитовы, то λ вещественно и $\neq 0$, ибо $p_{1\alpha} \neq 0$; следовательно, $p_{1\alpha}p^*_{1\alpha} \neq 0$. Кроме того, λ не может быть отрицательным. Действительно, если $\lambda < 0$, то (7) перепишется в виде $p_{1\alpha}p^*_{1\alpha} + (\sqrt{|\lambda|}\,p_1)(\sqrt{|\lambda|}\,p_1)^* = 0$, что невозможно по условию. Итак, $\lambda > 0$ и, заменив $p_{1\alpha}$ на $\sqrt{\lambda}\,p_{1\alpha}$, мы можем считать, что $p_{1\alpha}p^*_{1\alpha} = p_1$. Тогда $p^*_{1\alpha}p_{1\alpha}$ — идемпотент из $p_\alpha Rp_\alpha$ и потому совпадает с p_α. Положим $p_{\alpha 1} = p^*_{1\alpha}$ и $p_{\alpha\beta} = p_{\alpha 1}p_{1\beta}$; нетрудно проверить, что $(p_{\alpha\beta})^* = p_{\beta\alpha}$ и выполняются соотношения (4).

5. Гильбертовы кольца. R называется *гильбертовым кольцом* [1]), если

1) R — банахово симметричное кольцо;
2) R — гильбертово пространство;
3) норма в кольце R совпадает с нормой в гильбертовом пространстве R;

[1]) Гильбертовы кольца называют часто H^*-алгебрами (см., например, Капланский [3]).

4) $(xy, z) = (y, x^*z)$ для всех $x, y, z \in R$;

5) $x^*x \neq 0$ при $x \neq 0$.

Так как $|x^*| = |x|$, то $(x^*, x^*) = (x, x)$; отсюда, пользуясь выражением для скалярного произведения через норму, заключаем, что

$$(x^*, y^*) = (y, x).$$

Комбинируя это соотношение со свойством 4, получаем

$$(xy, z) = (x, zy^*).$$

Примером гильбертова кольца является совокупность $X(\mathfrak{A})$ всех матриц $x = \|x_{\alpha\beta}\|$, $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$ (где $\mathfrak{A}$ — фиксированное множество индексов), удовлетворяющих условию

$$\sum |x_{\alpha\beta}|^2 < \infty,$$

в которой действия определяются как соответствующие действия с матрицами, а скалярное произведение — по формуле

$$(x, y) = \omega \sum_{\alpha, \beta} x_{\alpha\beta}\overline{y}_{\alpha\beta},$$

где ω — фиксированное число $\geqslant 1$.

Ниже мы покажем, что всякое гильбертово кольцо изоморфно прямой и ортогональной сумме колец $X(\mathfrak{A})$. Всюду в этом пункте R будет обозначать гильбертово кольцо.

Каждому элементу $x \in R$ отвечает оператор A_x в гильбертовом пространстве R, именно оператор левого регулярного представления

$$A_x y = xy;$$

при этом условие 4) означает, что $(A_x)^* = A_{x^*}$.

Если $A_x = 0$, то $xy = 0$ для всех $y \in R$. Положив $y = x^*$, мы получим, что $xx^* = 0$. В силу условия 5 отсюда заключаем, что $x^* = 0$, следовательно, $x = 0$. Поэтому *левое регулярное представление* $x \to A_x$ *есть симметричный изоморфизм* кольца R в кольцо ограниченных операторов в R. Так как всякое симметричное кольцо ограниченных операторов в гильбертовом пространстве полупростое (см. II п. 1 § 24), то отсюда заключаем, что R — полупростое кольцо. Кроме того, если $x^*x + y^*y = 0$ для $x, y \in R$, то $x = 0$, $y = 0$, ибо тот же факт имеет место для операторов в гильбертовом пространстве.

I. *Если I_r, I_l — замкнутые правый и левый (собственные или несобственные) идеалы в R, то $\mathfrak{L}(I_r)$ и $\mathfrak{R}(I_l)$ — ортогональные дополнения множеств I_r^*, I_l^* в гильбертовом пространстве R.*

Доказательство. Прежде всего заметим, что I_rR и RI_l плотны в I_r и I_l соответственно. Действительно, если бы, например, I_rR было неплотно в I_r, то существовал бы $y_0 \in I_r$, $y_0 \neq 0$ такой, что $(I_r R, y_0) = 0$. Отсюда $0 = (RI_r^*, y_0^*) = (R, y_0^* I_r)$, $y_0 I_r = (0)$ и, в частности, $y_0^* y_0 = 0$, что противоречит условию 5. Теперь равенство $\mathfrak{L}(I_r) = R \ominus I_r^*$ вытекает из следующей цепочки равносильных соотношений:

$$x \in \mathfrak{L}(I_r), \quad xT_r = (0), \quad (xI_r, R) = 0, \quad (x, RI_r^*) = 0,$$
$$(x, I_r^*) = 0, \quad x \in R \ominus I_r^*.$$

Аналогично доказывается, что $\mathfrak{R}(I_l) = R \ominus I_l^*$.

II. *Всякое гильбертово кольцо дуально.*

Доказательство. Если I_l, I_r — замкнутые левый и правый (собственные или несобственные) идеалы в R, то в силу I,

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{L}(I_r)) = \mathfrak{R}(R \ominus I_r^*) = R \ominus (R \ominus I_r) = I_r$$

и аналогично $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}(I_l)) = I_l$.

Теорема 9. *Всякое гильбертово кольцо есть прямая и, в то же время, ортогональная сумма своих минимальных замкнутых двусторонних идеалов, которые являются простыми гильбертовыми кольцами.*

Доказательство. В силу теоремы 5 п. 3 и следствия из нее минимальные замкнутые двусторонние идеалы I в R являются простыми гильбертовыми кольцами и пополнение их прямой суммы есть R. Поэтому достаточно показать, что различные минимальные замкнутые двусторонние идеалы I, I' являются взаимно ортогональными подпространствами в гильбертовом пространстве R. Для этого заметим, что $II' = (0)$, следовательно, в силу I

$$I' \subset \mathfrak{R}(I) = R \ominus I^* = R \ominus I.$$

Теорема 10. *Всякое простое гильбертово кольцо вполне изоморфно некоторому кольцу* $X(\mathfrak{A})$.

Доказательство. Пусть $p_{\alpha\beta}$ — элементы, построенные в доказательстве теоремы 8; согласно замечанию в конце п. 4 можно считать, что $P_{\alpha\beta}^* = p_{\beta\alpha}$. Из доказательства теоремы 8 вытекает также, что сумма одномерных подпространств $p_\beta R p_\beta = \{\lambda p_{\alpha\beta}\}$ плотна в R. Эти одномерные подпространства взаимно ортогональны, ибо

$$(p_{\alpha\beta}, p_{\alpha'\beta'}) = (p_{\alpha\beta}, p_{\alpha'} p_{\alpha' b'} p_{\beta'}) = (p_{\alpha'} p_{\alpha\beta} p_{\beta'}, p_{\alpha'\beta'}) =$$
$$= (p_{\alpha'} p_\alpha p_{\alpha\beta} p_\beta p_{\beta'}, p_{\alpha'\beta'}) = 0 \quad (1)$$

при $\alpha' \neq \alpha$ или $\beta' \neq \beta$. Следовательно, прямая сумма этих одномерных гильбертовых подпространств есть все R, т. е. элементы $p_{\alpha\beta}$ образуют полную ортогональную систему в R.

Отметим еще, что

$$(p_{\alpha\beta}, p_{\alpha\beta}) = (p_{\alpha 1} p_{1\beta}, p_{\alpha 1} p_{1\beta}) = (p_{1\beta} p_{\beta 1}, p_{1\alpha} p_{\alpha 1}) = (p_1, p_1). \quad (2)$$

Каждому элементу $x \in R$ поставим в соответствие матрицу $\|x_{\alpha\beta}\|$ такую, что $x = \sum\limits_{\alpha, \beta} x_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta}$. Из свойств элементов $p_{\alpha\beta}$ и соотношений (1) и (2) вытекает, что при $x = \sum\limits_{\alpha, \beta} x_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta}$ и $y = \sum\limits_{\alpha, \beta} y_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta}$

$$(x, y) = \omega \sum_{\alpha, \beta} x_{\alpha\beta} \overline{y_{\alpha\beta}},$$

где $\omega = (p_1, p_1)$, и что соответствие $x \to \|x_{pq}\|$ есть симметричный изоморфизм кольца R на кольцо $X(\mathfrak{A})$.

Из теорем 9 и 10 заключаем:

Теорема 11. *Всякое гильбертово кольцо R вполне изоморфно прямой и ортогональной сумме колец $X(\mathfrak{A})$.*

Теорема 12. *Для простого гильбертова кольца R следующие утверждения эквивалентны*:

а) *R конечномерно*;

б) *R есть кольцо с единицей*;

в) *центр кольца R отличен от* (0).

Доказательство. Если R конечномерно, то максимальная система $\{p_\alpha\}$ неприводимых идемпотентов конечна и элемент $p = \sum\limits_{\alpha} p_\alpha$ есть идемпотент, удовлетворяющий условиям

$$x = \sum_{\alpha} x p_\alpha = xp; \quad x = \sum_{\alpha} p_\alpha x = px,$$

т. е. p есть единица в R. Следовательно, из а) следует б). Далее, если I содержит единицу p, то центр кольца I содержит p и потому $\neq (0)$; следовательно, из б) следует в).

Пусть теперь центр кольца R отличен от (0) и $x \neq 0$ — элемент центра кольца I. Так как $xp_\alpha = (xp_\alpha) p_\alpha = p_\alpha x p_\alpha$, то в силу I п. 4 $xp_\alpha = c_\alpha p_\alpha$, где c_α — число. Отсюда $x = \sum\limits_{\alpha} xp_\alpha = \sum\limits_{\alpha} c_\alpha p_\alpha$. Но

$$c_\beta p_{\beta\delta} = c_\beta p_\beta p_{\beta\delta} = x p_\beta p_{\beta\delta} = x p_{\beta\delta} = p_{\beta\delta} x = p_{\beta\delta} p_\delta x = p_{\beta\delta} c_\delta p_\delta = c_\delta p_{\beta\delta},$$

и потому $c_\beta = c_\delta$. Таким образом, в сумме $\sum c_\alpha p_\alpha$ все коэффициенты c_α равны, что возможно, лишь когда $\{p_\alpha\}$ — конечная система и R конечномерно. Следовательно, из в) следует а), и теорема полностью доказана.

Одновременно мы видим, что всякий элемент центра кольца R имеет вид $x = \sum c p_\alpha = c \sum p_\alpha = cp$, где p — единица кольца.

6. Вполне регулярные дуальные кольца.

Теорема 13. *Совокупность R всех вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ есть простое дуальное кольцо.*

Доказательство. Пусть $\{\varphi_\alpha\}$ — фиксированная полная ортонормальная система в $\mathfrak{H}$. Обозначим через I совокупность всех операторов A в $\mathfrak{H}$, матрица $\|a_{\alpha\beta}\|$ которых в системе $\{\varphi_\alpha\}$ удовлетворяет условию

$$\sum_{\alpha,\,\beta} |a_{\alpha\beta}|^2 < \infty.$$

Такие операторы A вполне непрерывны (см. V п. 6 § 4; легко видеть, что это предложение справедливо и в несепарабельном пространстве l^2), следовательно, I со скалярным произведением

$$(A,\,B) = \sum_{\alpha,\,\beta} a_{\alpha\beta}\overline{b}_{\alpha\beta}, \quad A,\,B \in I,$$

где $\|a_{\alpha\beta}\|$, $\|b_{\alpha\beta}\|$ — матрицы операторов A, B, образует гильбертово, а значит, дуальное кольцо. Покажем теперь, что к R и I применима теорема 7 п. 3.

Прежде всего отметим, что I есть двусторонний идеал в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, а значит, и в R. Действительно, если $A \in I$, $C \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ и $C = \|c_{\alpha\beta}\|$ — матрица оператора C в системе $\{\varphi_\alpha\}$, то матрица оператора CA в той же системе задается формулой $\left\| \sum\limits_\gamma c_{\alpha\gamma}a_{\gamma\beta} \right\|$ и в силу ограниченности оператора C

$$\sum_\beta \sum_\alpha \left| \sum_\gamma c_{\alpha\gamma}a_{\gamma\beta} \right|^2 \leqslant |c|^2 \sum_\beta \sum_\alpha |a_{\alpha\beta}|^2 < \infty.$$

Следовательно, $CA \in I$, а значит, и $AC = (C^*A^*)^* \in I$. Но в силу V п. 1 § 22 R — простое кольцо, следовательно, I плотно в R в смысле нормы оператора. Далее, норма оператора $A \in I$ не превосходит его норму в смысле гильбертова пространства I; действительно, если $x = \sum\limits_\alpha x_\alpha\varphi_\alpha$ — произвольный элемент в $\mathfrak{H}$, то в силу неравенства Коши–Буняковского

$$|Ax|^2 = \sum_\alpha \left| \sum_\beta a_{\alpha\beta}x_\beta \right|^2 \leqslant \sum_\alpha \sum_\beta |a_{\alpha\beta}|^2 |x_\beta|^2 \leqslant$$

$$\leqslant (A,\,A) \sum_\beta |x_\beta|^2 = (A,\,A)|x|^2,$$

так что $|A| \leqslant \sqrt{(A,\,A)}$. Отсюда заключаем, что сужение на I топологии кольца R слабее топологии гильбертова кольца I или совпадает с ней.

Наконец, пусть $A \in R$, $A = UH$ — каноническое разложение оператора A, а $P(\lambda)$ — спектральная функция оператора H. Положим $P_\varepsilon = 1 - P(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Тогда P_ε конечномерен, следовательно, $P_\varepsilon \in R$ и в смысле нормы оператора $HP_\varepsilon \to H$, а значит, $AP_\varepsilon = UHP_\varepsilon \to UH = A$ при $e \to 0$ (см. VI п. 4 § 17). Это означает, что $A \in \overline{AR}$. Заменив здесь A на A^*, получим, что $A^* \in \overline{A^*R}$, т. е. $A \in \overline{RA}$.

Таким образом, кольца R и I удовлетворяют всем условиям теоремы 7 п. 3; следовательно, R — дуальное кольцо.

Следующая теорема показывает, что кольцо всех вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве есть универсальная модель всех полных вполне регулярных простых дуальных колец.

Теорема 14. *Всякое полное вполне регулярное простое дуальное кольцо вполне изоморфно кольцу всех вполне непрерывных операторов в некотором гильбертовом пространстве.*

Доказательство. Пусть p_α, $p_{\alpha\beta}$ — те же, что в доказательстве теоремы 8 п. 4. Согласно замечанию в конце п. 4 мы можем считать, что $p_\alpha^* = p_\alpha$ и $p_{\alpha\beta}^* = p_{\beta\alpha}$. Далее, согласно теореме 8 п. 4 кольцо R изоморфно кольцу операторов левого регулярного представления $A_a x = ax$ в пространстве Rp_1. Но если $x, y \in Rp_1$, то $y^*x \in p_1 R p_1 = \{\lambda p_1\}$, так что $y^*x = \lambda p_1$ при некотором λ. Определим скалярное произведение в Rp_1 формулой $(x, y) = \lambda$, так что

$$y^*x = (x, y)\, p_1.$$

Легко проверить, что все свойства скалярного произведения будут выполнены; в частности, из соотношения $x^*x = (x, x)p_1 = (x, x)p_1^2$ вытекает, что $(x, x) \geqslant 0$, ибо элементы вида x^*x в вполне регулярном кольце образуют конус (см. п. 2 § 24). При этом из $(x, x) = 0$ следует, что $x^*x = 0$, а значит, и $x = 0$.

Отметим, что $|p_1| = |p_1|^2$ в силу соотношений $p_1^2 = p_1$ и $p_1^* = p_1$ и потому $|p_1| = 1$. Отсюда вытекает, что при $x \in Rp_1$

$$|x|^2 = |x^*x| = (x, x)|p_1| = (x, x),$$

так что норма в Rp_1 в смысле гильбертова пространства совпадает с исходной нормой. Далее, при $a \in R$, $x, y \in Rp_1$

$$(ax, y)\, p_1 = y^*ax = (a^*y)^*x = (x, a^*y)\, p_1;$$

отсюда $(ax, y) = (x, a^*y)$, т. е. $(A_a x, y) = (x, A_{a^*} y)$. Это означает, что $A_{a^*} = (A_a)^*$, т. е. что соответствие $a \to A_a$ есть симметричный изоморфизм полного вполне регулярного кольца R в кольцо ограниченных операторов в Rp_1. На основании теоремы 3 п. 1 § 24 отсюда заключаем, что этот изоморфизм сохраняет норму, т. е. $|A_a| = |a|$.

Но тогда в силу теоремы 8 п. 4 каждый оператор A_a есть предел, в смысле нормы оператора, конечномерных операторов и потому вполне непрерывен. С другой стороны, в силу той же теоремы среди операторов A_a имеются все конечномерные операторы, а значит, и все их пределы (ибо совокупность всех операторов A_a, $a \in R$, есть полное кольцо), т. е. все вполне непрерывные операторы.

Перейдем теперь к произвольным вполне регулярным дуальным кольцам. Для этого рассмотрим следующий общий метод построения дуальных вполне регулярных колец.

Пусть T — дискретное пространство; присоединив к нему бесконечно удаленную точку, мы можем считать его бикомпактным пространством. Предположим, что каждому $t \in T$ поставлено в соответствие вполне регулярное кольцо R_t; обозначим через $C_\infty(T, R_t)$ совокупность всех вектор-функций $x = x(t)$, где $x(t) \in R_t$, удовлетворяющих условию

$$|x(t)| \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Эта совокупность образует полное вполне регулярное кольцо, если для $x = \{x(t)\}$, $y = \{y(t)\}$ положить

$$\lambda x = \{\lambda x(t)\}, \quad x + y = \{x(t) + y(t)\}, \quad xy = \{x(t)\, y(t)\},$$
$$x^* = \{x(t)^*\}, \quad |x| = \sup_{t \in T} |x(t)|.$$

Применяя теоремы 5, 6 и 7 п. 3, можно доказать, что

I. *Если все кольца R_t дуальны, то $C_\infty(T, R_t)$ — дуальное кольцо.*

II. *Всякое полное вполне регулярное дуальное кольцо есть кольцо вида $C_\infty(T, R_t)$, где R_t — все минимальные замкнутые двусторонние идеалы в R и, следовательно, простые полные вполне регулярные дуальные кольца.*

§ 26. Кольца вектор-функций

1. Определение кольца вектор-функций. Пусть T — топологическое пространство и каждой точке $t \in T$ поставлено в соответствие банахово кольцо R_t. Обозначим через $\mathfrak{E}(T, R_t)$ совокупность всех вектор-функций $x = \{x(t)\}$, обладающих следующими свойствами:

1) $x(t) \in R_t$ при $t \in T$;

2) $|x(t)|$ есть ограниченная непрерывная на T функция.

Кольцом вектор-функций, порожденным пространством T и кольцами R_t, мы будем называть всякое подмножество $\mathfrak{R}$ в $\mathfrak{E}(T, R_t)$, образующее банахово кольцо по отношению к операциям

$$\alpha x = \{\alpha x(t)\}, \quad x + y = \{x(t) + y(t)\}, \quad xy = \{x(t)\, y(t)\} \tag{1}$$

и норме

$$|x| = \sup_{t \in T} |x(t)|, \tag{2}$$

где $x = \{x(t)\}$, $y = \{y(t)\}$.

Всякое кольцо вектор-функций, порожденное пространством T и кольцами R_t, мы будем обозначать $\mathfrak{R}(T, R_t)$.

Если, например, T есть дискретное пространство, состоящее из конечного числа, именно, n точек $t_1, \ldots, t_n$, то, полагая $x_k = x(t_k)$ $(\in R_{t_k})$, мы можем отождествить функцию $x = \{x(t)\}$ с системой $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Очевидно, условие 2) становится излишним и $\mathfrak{E}(T, R_t)$ само становится банаховым кольцом, причем формулы (1) и (2) для операций в кольце и для нормы принимают вид

$$\alpha x = \{\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n\}, \quad x + y = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n\},$$
$$xy = \{x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n\}, \quad |x| = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}.$$

В этом случае кольцо $\mathfrak{E}(T, R_t)$ называется *прямой суммой колец* R_{t_1}, R_{t_2}, ..., R_{t_n} и обозначается $R_{t_1} + R_{t_2} + \ldots + R_{t_n}$.

Если, в частности, все кольца R_t совпадают с фиксированным банаховым кольцом R, то эта прямая сумма принимает вид $R + R + \ldots + R$.

Обобщение этого случая мы получим, если T — произвольное топологическое пространство, а все кольца R_t по-прежнему совпадают с фиксированным банаховым кольцом R; в этом случае простейшим примером кольца $\mathfrak{R}(T, R)$ будет совокупность всех непрерывных вектор-функций $x = x(t)$ со значениями из R, ограниченных по норме. Эту совокупность мы обозначим через $C(T, R)$. Если, в частности, R есть поле комплексных чисел, то $C(T, R)$ совпадает с кольцом $C(T)$ всех ограниченных и непрерывных на T числовых функций; если же R есть поле вещественных чисел, то $C(T, R)$ совпадает с кольцом $C^r(T)$ всех вещественных ограниченных и непрерывных на T функций.

Пусть $\mathscr{F}$ — некоторое семейство числовых функций, определенных на T. Кольцо $\mathfrak{R}(T, R_t)$ называется *замкнутым относительно умножения на функции из* $\mathscr{F}$, если из $\{x(t)\} \in \mathfrak{R}(T, R_t)$ и $\{\alpha(t)\} \in \mathscr{F}$ следует, что также $\{\alpha(t)\, x(t)\} \in \mathfrak{R}(T, R_t)$. В частности, можно говорить о замкнутости кольца $\mathfrak{R}(T, R_t)$ относительно умножения на функции из $C(T)$ или на функции из $C^r(T)$.

Пусть S — произвольное множество в $\mathfrak{R}(T, R_t)$. Совокупность значений $x(t_0)$, принимаемых всеми функциями $x = \{x(t)\} \in S$ в фиксированной точке $t_0 \in T$, называется *проекцией множества* S на R_{t_0} и обозначается S_{t_0}; очевидно,

$$S_{t_0} \subset R_{t_0},$$

причем в общем случае S_{t_0} может не совпадать с R_{t_0}. В частности, проекция $\mathfrak{R}_{t_0}(T, R_t)$ кольца $\mathfrak{R}(T, R_t)$ на R_{t_0} может не совпадать с R_{t_0}.

2. Идеалы в кольце вектор-функций.

Теорема 1. *Пусть T — хаусдорфово бикомпактное пространство, в каждой точке которого задано банахово кольцо R_t, и пусть кольцо $\mathfrak{R}(T, R_t)$ удовлетворяет условиям:*

1) $\mathfrak{R}_t(T, R_t) = R_t$ *для всех* $t \in T$;

2) *для любой непрерывной вещественной числовой функции $\alpha(t)$ и любого элемента $x = \{x(t)\}$ кольца $\mathfrak{R}(T, R_t)$ функция $\{\alpha(t)x(t)\}$ принадлежит замкнутому идеалу в $\mathfrak{R}(T, R_t)$, порожденному элементом x.*

Тогда всякий замкнутый (правый, левый, двусторонний) идеал I в $\mathfrak{R}(T, R_t)$ есть совокупность всех вектор-функций $x = \{x(t)\} \in \in \mathfrak{R}(T, R_t)$, удовлетворяющих условию

$$x(t) \in I_t \quad \text{для всех} \quad t \in T,$$

где I_t — некоторые замкнутые (соответственно правые, левые, двусторонние) собственные или несобственные идеалы в R_t.

Доказательство. Пусть I'_t — проекция идеала I на R_t; положим $I_t = \overline{I}'_t$. Очевидно, I_t — замкнутый (собственный или несобственный) идеал в R_t. Пусть $y = \{y(t)\}$ — произвольный элемент из $\mathfrak{R}(T, R_t)$, удовлетворяющий условию

$$y(t) \in I_t \quad \text{для всех} \quad t \in T. \tag{1}$$

Докажем, что $y \in I$. Так как $I_t = \overline{I}'_t$, то для всякого $\varepsilon > 0$ в I существует функция $x_\tau = \{x_\tau(t)\}$ такая, что $|x_\tau(\tau) - y(\tau)| < \varepsilon$. По непрерывности мы имеем также $|x_\tau(t) - y(t)| < \varepsilon$ в некоторой окрестности $U(\tau)$ точки τ. Среди окрестностей $U(\tau)$ есть конечное число $U(\tau_1), \ldots, U(\tau_n)$, образующих покрытие пространства T. Пусть $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)$ — соответствующее разбиение единицы непрерывными неотрицательными числовыми функциями (см. II п. 2 § 15); в силу условия 2)

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t)\, x_{\tau_k}(t)\right\} \in I. \tag{2}$$

С другой стороны,

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_J(t)\, x_{\tau_j}(t) - y(t)\right| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad t \in T. \tag{3}$$

Действительно, пусть t — произвольная точка пространства T и пусть она находится в окрестностях $U(\tau_1), \ldots, U(\tau_k)$ и не находится в окрестностях $U(\tau_{k+1}), \ldots, U(\tau_n)$. Тогда $\alpha_{k+1}(t) = \ldots = \alpha_n(t) = 0$ и $|x_{\tau_j}(t) - y(t)| < \varepsilon$, $j = 1, \ldots, k$. Отсюда

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t)\, x_{\tau_j}(t) - y(t)\right| = \left|\sum_{j=1}^{k} \alpha_j(t)[x_{\tau_j}(t) - y(t)]\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} \alpha_j(t)|x_{\tau_j}(t) - y(t)| < \varepsilon \sum_{j=1}^{k} \alpha_j(t) = \varepsilon.$$

В силу замкнутости идеала I из (2) и (3) следует, что $y \in I$. С другой стороны, каждый элемент $y \in I$ удовлетворяет условию (1), ибо $y(t) \in I'_t \subset I_t$. Тем самым теорема полностью доказана.

Следствие. *Пусть T и R_t — те же, что и в теореме* 1. *Тогда*:

1). *Всякий максимальный замкнутый* (*правый*, *левый*, *двусторонний*) *идеал в $\mathfrak{R}(T, R_t)$ состоит из всех элементов $x = \{x(t)\}$ кольца $\mathfrak{R}(T, R_t)$, значения которых в фиксированной точке t_0 принадлежат некоторому фиксированному максимальному замкнутому* (*соответственно правому*, *левому*, *двустороннему*) *идеалу кольца R_{t_0}*.

2). *Если каждое из колец R_t — простое*, *то всякий замкнутый двусторонний идеал в $\mathfrak{R}(T, R_t)$ состоит из всех элементов*

$x = \{x(t)\}$ кольца $\mathfrak{R}(T, R_t)$, равных нулю на некотором замкнутом подмножестве в T.

При дополнительных предположениях относительно колец R_t условие 2) теоремы 1 можно ослабить; именно, имеет место следующее предложение.

I. *Пусть T — хаусдорфово бикомпактное пространство и пусть выполнены условия:*

1) *$\mathfrak{R}_t(T, R_t) = R_t$ для всех $t \in T$;*
2) *$y \in \overline{yR_t}$ для каждого $t \in T$ и каждого $y \in R_t$;*
3) *$\mathfrak{R}(T, R_t)$ замкнуто относительно умножения на функции из $C^r(T)$.*

Тогда для любого $x = \{x(t)\} \in \mathfrak{R}(T, R_t)$ и любой непрерывной вещественной числовой функции $\alpha(t)$ элемент $\{\alpha(t)\, x(t)\}$ принадлежит замкнутому идеалу I_x в $\mathfrak{R}(T, R_t)$, порожденному элементом $x = \{x(t)\}$.

Доказательство. Пусть $x = \{x(t)\} \in \mathfrak{R}(T, R_t)$ и $\varepsilon > 0$. В силу условий 1), 2) для каждого $\tau \in T$ существует элемент $y_\tau = \{y_\tau(t)\} \in \in \mathfrak{R}(T, R_t)$ такой, что $|x(\tau)\, y_\tau(\tau) - x(\tau)| < \varepsilon$. По непрерывности также $|x(t)\, y_\tau(t) - x(t)| < \varepsilon$ в некоторой окрестности $U(\tau)$. Выберем конечное покрытие $U(\tau_1), \ldots, U(\tau_n)$ пространства T и соответствующее разбиение единицы непрерывными неотрицательными функциями $\beta_1(t), \ldots, \beta_n(t)$ и положим $z(t) = \alpha(t) \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j(t)\, y_{\tau_j}(t)$. По условию 3) $z = \{z(t)\} \in \mathfrak{R}(T, R_t)$. Повторяя рассуждение, проведенное в доказательстве теоремы 1, заключаем, что

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \beta_j(t)\, \eta_{\tau_j}(t)\, x(t) - x(t) \right| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad t \in T,$$

и потому

$$\sup_{t \in T} |z(t)\, x(t) - \alpha(t)\, x(t)| < \varepsilon \sup_{t \in T} |\alpha(t)|. \tag{4}$$

Так как $\{z(t)\, x(t)\} \in I_x$, то из (4) следует, что $\{\alpha(t)\, x(t)\} \in I_x$, чем и завершается доказательство.

Отметим, что условие 2 предложения I, очевидно, выполняется, если каждое из колец R_t содержит единицу.

Комбинируя предложение I с теоремой 1, приходим к следующему результату.

II. *Пусть T — бикомпактное хаусдорфово пространство, а R — банахово кольцо, такое, что $z \in \overline{zR}$ для каждого $z \in R$. Тогда всякий замкнутый идеал I в $C(T, R)$ есть совокупность всех непрерывных вектор-функций $x = \{x(t)\}$, удовлетворяющих условию*

$$x(t) \in I_t \quad \textit{для всех} \quad t \in T,$$

где I_t — замкнутые (собственные или несобственные) идеалы в R.

Замечание. В предложении II бикомпактное пространство T можно заменить локально бикомпактным пространством, а кольцо $C(T, R)$ — кольцом $C_\infty(T, T)$ всех непрерывных вектор-функций $x = x(t)$ со значениями из R, равных нулю на бесконечности. Действительно, пусть T' — бикомпактное расширение пространства T, полученное путем присоединения бесконечно удаленной точки. Тогда $C_\infty(T, R)$ можно рассматривать как некоторое кольцо $\mathfrak{R}(T', R_t)$, в котором $R_t = R$ при $t \in T$ и $R_\infty = (0)$.

3. Теоремы о принадлежности вектор-функции кольцу. Вектор-функция $y = \{y(t)\}$ называется *локально принадлежащей кольцу* $\mathfrak{R}(T, R_t)$ *в точке* $\tau \in T$, если существуют вектор-функция $\{x_\tau(t)\} \in \in \mathfrak{R}(T, R_t)$ и окрестность $U(\tau)$ такие, что

$$y(t) = x_\tau(t) \quad \text{для всех} \quad t \in U(\tau).$$

Вектор-функция $y = \{y(t)\}$ называется *локально принадлежащей кольцу* $\mathfrak{R}(T, R_t)$, если она локально принадлежит этому кольцу во всех точках $\tau \in T$.

Повторяя рассуждение, проведенное в доказательстве теоремы 1 п. 2 § 15, заключаем:

Теорема 2. *Пусть T — бикомпактное хаусдорфово пространство и $\mathfrak{R}(T, R_t)$ замкнуто относительно умножения на все непрерывные вещественные функции $\alpha(t)$ со значениями из отрезка* $[0, 1]$. *Тогда всякая вектор-функция $y = \{y(t)\}$, локально принадлежащая кольцу $C(T, R_t)$, содержится в этом кольце.*

Вектор-функция $y = \{y(t)\}$, $y(t) = R_t$, называется *непрерывной относительно кольца* $\mathfrak{R}(T, R_t)$, если для любой функции $x = \{x(t)\}$ из $\mathfrak{R}(T, R_t)$ числовая функция $|y(t) - x(t)|$ непрерывна. Если, например, все кольца R_t совпадают с фиксированным кольцом R и $\mathfrak{R}(T, R)$ есть подкольцо в $C(T, R)$, то всякая непрерывная на T вектор-функция $y = \{y(t)\}$, $y(t) \in R$, непрерывна также относительно $\mathfrak{R}(T, R)$.

Теорема 3. *Пусть T — бикомпактное хаусдорфово пространство и кольцо $\mathfrak{R}(T, R_t)$ удовлетворяет условиям*:

1) $\mathfrak{R}_t(T, R_t) = R_t$ *для всех* $t \in T$;

2) $\mathfrak{R}(T, R_t)$ *замкнуто относительно умножения на все непрерывные на T числовые функции со значениями из* $[0, 1]$.

Тогда всякая непрерывная относительно $\mathfrak{R}(T, R_t)$ вектор-функция $y = \{y(t)\}$ содержится в $\mathfrak{R}(T, R_t)$.

Доказательство. Пусть $y = \{y(t)\}$ непрерывна относительно $\mathfrak{R}(T, R_t)$. В силу условия 1) для каждого $\tau \in T$ существует вектор-функция $x_\tau = \{x_\tau(t)\} \in \mathfrak{R}(T, R_t)$ такая, что $x_\tau(\tau) = y(\tau)$. По непрерывности тогда $|y(t) - x_\tau(t)| < \varepsilon$ в некоторой окрестности $U(\tau)$. Выберем конечное покрытие $U(\tau_1), \ldots, U(\tau_n)$ пространства T

и соответствующее разбиение единицы непрерывными неотрицательными функциями $\alpha_1(t)$, …, $\alpha_n(t)$. Повторяя рассуждение, проведенное в доказательстве теоремы 1 п. 2, заключаем, что

$$\left|y(t) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t)\, x_{\tau_k}(t)\right| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad t \in T. \tag{1}$$

Так как по условию 2) вектор-функция $\left\{\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k(t)\, x_{\tau_k}(t)\right\}$ принадлежит кольцу $\mathfrak{R}(T, R_t)$, а это кольцо полно, то из (1) вытекает, что $\{y(t)\}$ также принадлежит кольцу $\mathfrak{R}(T, R_t)$.

Если, в частности, $R_t = R$ и $\mathfrak{R}(T, R_t) \subset C(T, R)$, то мы приходим к следующему результату.

Следствие. *Пусть T — бикомпактное хаусдорфово пространство и $\mathfrak{R}$ — замкнутое подкольцо кольца $C(T, R)$, удовлетворяющее условиям*:

1) $\mathfrak{R}_t = R$ *для всех* $t \in T$;
2) $\mathfrak{R}$ *замкнуто относительно умножения на все непрерывные на T числовые функции со значениями из* $[0, 1]$.

Тогда $\mathfrak{R} = C(T, R)$.

4. Случай вполне регулярных колец. Рассмотрим теперь тот случай, когда каждое из колец R_t симметрично. Кольцо $\mathfrak{R}(T, R_t)$ называется тогда симметричным, если из $\{x(t)\} \in \mathfrak{R}(T, R_t)$ следует, что также $\{[x(t)]^*\} \in \mathfrak{R}(T, R_t)$. Если $\mathfrak{R}(T, R_t)$ — симметричное кольцо, то, полагая $x^* = \{[x(t)]^*\}$ при $x = \{x(t)\}$, мы определим в этом кольце инволюцию; очевидно, все аксиомы инволюции будут выполнены и имеет место

I. *Если каждое из колец R_t вполне регулярно, то симметричное кольцо $\mathfrak{R}(T, R_t)$ также вполне регулярно.*

Напомним теперь следующий результат. Пусть R — полное вполне регулярное кольцо с единицей и x — эрмитов элемент кольца R. Тогда для любой функции $f(\lambda)$, непрерывной на спектре элемента x, существует элемент $f(x) \in R$; этот элемент $f(x)$ есть предел по норме последовательности $p_n(x)$, где $\{p_n(\lambda)\}$ — произвольная последовательность многочленов, равномерно сходящаяся к $f(\lambda)$ на спектре элемента x. Если, в частности, $f(0) = 0$, то $f(x)$ принадлежит замкнутому (правому, левому, двустороннему) идеалу, содержащему x. Действительно, достаточно применить следствие 6 п. 2 § 16 к банахову кольцу с единицей, порожденной элементом x, и заметить, что при $f(0) = 0$ можно считать также $p_n(0) = 0$.

В нижеследующих предложениях II, III R — полное вполне регулярное кольцо с единицей.

II. *Если I — замкнутый симметричный двусторонний идеал в R и $x^{\frown}$ — образ эрмитова элемента x кольца R при естественном* *гомоморфизме $R \to R/I$, то для любой функции $f(\lambda)$, непрерывной на спектре элемента x,*

$$f(x^\frown) = [f(x)]^\frown. \tag{1}$$

Действительно, для любого многочлена $p(\lambda)$, $p(x^\frown) = [p(x)]^\frown$; переходя к пределу, учитывая, что спектр $x^\frown$ содержится в спектре x, и пользуясь непрерывностью гомоморфизма $R \to R/I$, получим (1).

III. *Пусть $\{I_\alpha\}$ — множество замкнутых симметричных двусторонних идеалов кольца R, пересечение которых $= (0)$, и пусть x_α — образ эрмитова элемента x кольца R при естественном гомоморфизме $R \to R/I_\alpha$. Если спектр каждого из элементов x_α неотрицателен, то спектр элемента x также неотрицателен.*

Доказательство. Положим

$$f(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \lambda \geqslant 0, \\ -\lambda & \text{при} \quad \lambda < 0, \end{cases}$$

$$\varphi(\lambda) = \begin{cases} \lambda & \text{при} \quad \lambda > 0, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda \leqslant 0. \end{cases}$$

Тогда спектр каждого из элементов $f(x)$, $\varphi(x)$ неотрицателен и $x = \varphi(x) - f(x)$. По условию

$$f(x)_\alpha = f(x_\alpha) = 0;$$

следовательно, $f(x)$ принадлежит всем I_α и потому $f(x) = 0$. Но тогда $x = \varphi(x) - f(x) = \varphi(x)$, так что спектр элемента x неотрицателен.

IV. *Пусть R_t — полные вполне регулярные кольца с единицей и пусть кольцо $\mathfrak{R}(T, R_t)$ симметрично и содержит единицу. Тогда для любой функции $f(\lambda)$, непрерывной на спектре эрмитова элемента $x = \{x(t)\} \in \mathfrak{R}(T, R_t)$,*

$$f(x) = \{f(x(t))\},$$

и если спектр $x(t)$ неотрицателен для каждого $t \in T$, то спектр элемента x также неотрицателен.

Доказательство. Пусть I_t — совокупность всех элементов кольца $\mathfrak{R}(T, R_t)$, обращающихся в нуль в точке t. Тогда I_t — замкнутый симметричный двусторонний идеал в $\mathfrak{R}(T, R_t)$,) и пересечение всех I_t равно (0); следовательно, достаточно применить к рассматриваемому случаю предложения II и III.

V. *Пусть кольцо $\mathfrak{R}(T, R_t)$ — то же, что и в предложении* IV, *и $x = \{x(t)\}$ — эрмитов элемент этого кольца. Тогда для каждого $\tau \in T$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(\tau)$ такая, что при $t \in U(\tau)$ спектр элемента $x(t)$ находится в ε-окрестности спектра элемента $x(\tau)$.*

Доказательство. Обозначим через S_t спектр элемента $x(t)$ и через U — ε-окрестность множества S_τ. Пусть $f(\lambda)$ — непрерывная функция, равная нулю на S_τ и единице вне U. Тогда $f(x(\tau))=0$ и по непрерывности $|f(x(t))|<1$ в некоторой окрестности $U(\tau)$. Но тогда при $t\in U(\tau)$ весь спектр элемента $f(x(t))$ находится в интервале $(-1, 1)$, и потому S_t находится в U. Действительно, если бы некоторая точка λ_0 из S_t находилась вне U, то спектр $f(x(t))$ содержал бы точку $f(\lambda_0)=1$, что невозможно.

Замечание 1. В доказательстве была использована непрерывность функций из кольца $\mathfrak{R}(T, R_t)$ [именно, функции $f(x(t))$] лишь в тех точках t_0, где $x(t_0)=0$. Следовательно, утверждение предложения V остается справедливым при более слабом предположении о непрерывности функций $x(t)$ лишь в тех точках t_0, где $x(t_0)=0$.

Теорема 4. *Пусть симметричное кольцо $\mathfrak{R}(T, R_t)$ с единицей удовлетворяет условиям*:

1) T — *бикомпактное хаусдорфово пространство*;
2) *каждое R_t полно и вполне регулярно*;
3) *для любых различных t_1, $t_2\in T$ в кольце $\mathfrak{R}(T, R_t)$ существует вектор-функция $x=\{x(t)\}$ такая, что*[1] $x(t_1)=0$, $x(t_2)=e$.

Тогда $\mathfrak{R}(T, R_t)$ содержит все вектор-функции $\{\alpha(t)\,e\}$, где $\alpha(t)$ — непрерывная на T числовая функция.

Доказательство. Пусть $t_1, t_2\in T$ и $t_1\neq t_2$; по условию, в $\mathfrak{R}(T, R_t)$ существует функция $x=\{x(t)\}$ такая, что $x(t_1)=0$, $x(t_2)=e$. Положив $y=x^*x$, получим эрмитову вектор-функцию $y=\{y(t)\}$, для которой также $y(t_1)=0$, $y(t_2)=e$. Отсюда $|y(t)|<\varepsilon$ в некоторой окрестности $U(t_1)$. Пусть $f(\lambda)$ — непрерывная вещественная функция, равная нулю в окрестности $|\lambda|<\varepsilon$ точки $\lambda=0$ и единице при $\lambda=1$. Тогда $z=f(y)$ есть эрмитова вектор-функция из кольца $\mathfrak{R}(T, R_t)$, равная нулю в окрестности $U(t_1)$ и e в точке t_2.

Рассмотрим теперь замкнутое множество $F\subset T$ и точку $t_2\notin F$. Всилу только что сказанного для любой точки $\tau\in F$ в кольце $\mathfrak{R}(T, R_t)$ существует вектор-функция $z_\tau=\{z_\tau(t)\}$, равная единице в t_2 и нулю в некоторой окрестности $U(\tau)$. Среди этих окрестностей есть конечное число $U(\tau_1), \ldots, U(\tau_n)$, образующее покрытие множества F. Положив $z=(z_{\tau_1}z_{\tau_2}\ldots z_{\tau_n})^*(z_{\tau_1}z_{\tau_2}\ldots z_{\tau_n})$, получим эрмитову вектор-функцию $z=\{z(t)\}$ из кольца $\mathfrak{R}(T, R_t)$, равную нулю на F и единице в t_2.

Пусть теперь F_1 и F_2 — непересекающиеся замкнутые множества. В силу доказанного выше для каждой точки $\tau\in F_2$ в кольце $\mathfrak{R}(T, R_t)$ существует эрмитова вектор-функция $z_\tau=\{\zeta_\tau(t)\}$, равная нулю на F_1 и единице в точке τ. Положив $h_\tau=e-z_\tau$, получим эрмитову вектор-функцию $h_\tau=\{h_\tau(t)\}$ из кольца $\mathfrak{R}(T, R_t)$, равную единице на F_1 и нулю в точке τ. Тогда $|h_\tau(t)|<\varepsilon$ в некоторой

[1]) Мы условимся обозначать одним и тем же символом e единицу в каждом кольце R_t; это никогда не приведет к недоразумению.

окрестности $U(\tau)$, и потому элемент $g_\tau = f(h_\tau)$ (где $f(\lambda)$ — та же функция, что и выше) есть эрмитова вектор-функция $g_\tau = \{g_\tau(t)\}$ из кольца $\mathfrak{R}(T, R_\tau)$, равная единице на F и нулю в $U(\tau)$. Выбирая конечное покрытие $U(\tau_1), \ldots, U(\tau_n)$ множества F_2 и положив $g = (g_{\tau_1} g_{\tau_2} \ldots g_{\tau_n})^* (g_{\tau_1} g_{\tau_2} \ldots g_{\tau_n})$, получим эрмитову вектор-функцию $g = \{g(t)\}$ из кольца $\mathfrak{R}(T, R_t)$, равную единице на F_1 и нулю на F_2.

Итак, *для любых двух непересекающихся замкнутых множеств* F_1, F_2 *из* T *в кольце* $\mathfrak{R}(T, R_t)$ *существует эрмитова вектор-функция* $g = \{g(t)\}$, *равная единице на* F_1 *и нулю на* F_2.

Пусть теперь $\alpha(t)$ — произвольная непрерывная на T числовая функция и $\varepsilon > 0$. Каждой точке $\tau \in T$ отвечает окрестность $U(\tau)$, в которой колебание функции $\alpha(t)$ меньше ε. В силу нормальности пространства T окрестность $U(\tau)$ содержит окрестность $V(\tau)$ такую, что $\overline{V(\tau)} \subset U(\tau)$.

Пусть $V(\tau_1), \ldots, V(\tau_n)$ — покрытие пространства T; так как $\overline{V(\tau_j)}$ и $T - U(\tau_j)$ — непересекающиеся замкнутые множества, то в кольце $\mathfrak{R}(T, R_t)$ существует эрмитова вектор-функция $g_j = \{g_j(t)\}$, равная единице на $\overline{V(\tau_j)}$ и нулю на $T - U(\tau_j)$. Положим $k = \sum\limits_{j=1}^{n} g_j^* g_j$; тогда $k = \{k(t)\}$ есть эрмитова вектор-функция из кольца $\mathfrak{R}(T, R_t)$, причем при каждом $t \in T$ спектр элемента $k(t) - e$ неотрицателен. В силу IV отсюда заключаем, что спектр $k - e$ неотрицателен и потому в $\mathfrak{R}(T, R_t)$ существует элемент $q = k^{-\frac{1}{2}}$. Положив $q = k^{-\frac{1}{2}} g_j^* g_j k^{-\frac{1}{2}}$, мы получим эрмитовы элементы q_j кольца $\mathfrak{R}(T, R_t)$ с неотрицательным спектром, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = e, \quad q_j(t) = 0 \quad \text{вне} \quad U(\tau_j). \tag{2}$$

Пусть теперь α_j — одно из значений, принимаемых функцией $\alpha(t)$ в $U(\tau_j)$. Докажем, что

$$\left| \alpha(t)\, e - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j q_j(t) \right| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad t \in T;$$

в силу полноты кольца $\mathfrak{R}(T, R_t)$ и произвольности числа $\varepsilon > 0$ отсюда будет следовать, что $\alpha(t)\, e \in \mathfrak{R}(T, R_t)$, и теорема будет доказана.

Предположим, что фиксированная точка t принадлежит $U(\tau_1), \ldots$ $\ldots, U(\tau_m)$ и не принадлежит $U(\tau_{m+1}), \ldots, U(\tau_n)$. Тогда

$$|\alpha(t) - \alpha|j| < \varepsilon \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, m; \quad q_j(t) = 0 \quad \text{при} \quad j > m. \tag{3}$$

Далее, $q_j(t)$ можно рассматривать как неотрицательный ограниченный эрмитов оператор в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_t$ (см. теорему 5 п. 2 § 24). В силу (2) и (3) для любого $\xi \in \mathfrak{H}_t$

$$\left|\left(\left(\alpha(t)\,e - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j q_j(t)\right)\xi,\, \xi\right)\right| = \left|\left(\left(\alpha(t)\,e - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j q_j(t)\right)\xi,\, \xi\right)\right| =$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{m} [\alpha(t) - \alpha_j](q_j(t)\,\xi,\, \xi)\right| \leqslant \sum_{j=1}^{m} |\alpha(t) - \alpha_j|(q_j(t)\,\xi,\, \xi) <$$

$$< \varepsilon\left(\left(\sum_{j=1}^{m} q_j(t)\right)\xi,\, \xi\right) = \varepsilon(\xi,\, \xi) = \varepsilon|\xi|^2$$

и, следовательно,

$$\left|\alpha(t)\,e - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j q_j(t)\right| \leqslant \varepsilon.$$

З а м е ч а н и е 2. В доказательстве теоремы 4 было использовано лишь ослабленное условие непрерывности нормы функции $|x(t)|$, где $\{x(t)\} \in \mathfrak{R}(T,\, R_t)$, состоящее в следующем: если $x(t_0) = 0$ в некоторой точке $t_0 \in T$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $U(t_0)$, в которой $|x(t)| < \varepsilon$. Поэтому утверждение теоремы остается справедливым и в том случае, когда все функции кольца $\mathfrak{R}(T,\, R_t)$ удовлетворяют лишь этому ослабленному условию непрерывности (разумеется, при соблюдении всех остальных условий этой теоремы).

З а м е ч а н и е 3. Условия теоремы 4 можно изменить следующим образом.

Пусть:

1) T — *бикомпактное хаусдорфово пространство*;
2) *для всех точек* $t \in T$, *кроме фиксированной точки* t_0, *кольцо* R_t *полно и вполне регулярно*, *а* $R_{t_0} = (0)$;
3) *для любых двух точек* t_1, t_2 $(t_1 \neq t_2,\ t_2 \neq t_0)$ *в* $\mathfrak{R}(T,\, R_t)$ *существует вектор-функция* $y = \{x(t)\}$ *такая*, *что* $x(t_1) = 0$, $x(t_2) = e$;
4) *все вектор-функции кольца* $\mathfrak{R}(T,\, R_t)$ *удовлетворяют ослабленному условию непрерывности и*, *кроме того*, *таковы*, *что если* $x(\tau) = e$ *в некоторой точке* $\tau \in T$, *то для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует окрестность* $U(\tau)$, *в которой* $|x(t) - e| < \varepsilon$.

Тогда кольцо $\mathfrak{R}(T,\, R_t)$ *содержит все вектор-функции* $\{\alpha(t)\,e\}$, *где* $\alpha(t)$ — *непрерывная на* T *числовая функция*, *равная нулю в точке* t_0.

Действительно, присоединив к $\mathfrak{R}(T,\, R_t)$ единицу $e = \{e\}$, мы получим кольцо $\mathfrak{R}'(T,\, R_t)$, где $R'_t = R_t$ при $t \neq t_0$, а R'_{t_0} есть кольцо скаляров. $\mathfrak{R}'(T,\, R'_t)$ будет удовлетворять всем условиям теоремы 4, причем ослабленная непрерывность нормы любой вектор-функции $x = \{x(t)\}$ из $\mathfrak{R}'(T,\, R'_t)$ следует из условия 4. Поэтому $\mathfrak{R}'(T,\, R'_t)$ содержит все функции $\{\alpha(t)\,e\}$, где $\alpha(t)$ — произвольная непрерывная на T числовая функция. Так как $\mathfrak{R}'(T,\,R'_t)$ получается из $\mathfrak{R}(T,\,R_t)$ присоединением единицы, то отсюда заключаем, что $\mathfrak{R}(T,\,R_t)$ содержит все функции $\{\alpha(t)e\}$, где $\alpha(t)$ — непрерывная на T числовая функция, равная нулю в точке t_0. Пусть теперь T' — локально бикомпактное пространство, полученное из T удалением точки t_0; наше кольцо $\mathfrak{R}(T,\,R_t)$ можно тогда рассматривать как кольцо $\mathfrak{R}(T',\,R_t)$, все вектор-функции которого обращаются в нуль на бесконечности. Таким образом, мы можем также считать T локально бикомпактным пространством, а t_0 — его бесконечно удаленной точкой.

Теорема 5. *Пусть симметричное кольцо $\mathfrak{R}(T,\,R_t)$ удовлетворяет условиям*:

1) *T — бикомпактное хаусдорфово пространство*;
2) *каждое R_t есть банахово симметричное кольцо, состоящее из вполне непрерывных операторов в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_t$*;
3) *для любых двух различных точек $t_1,\,t_2 \in T$ и любых элементов $x_1 \in R_{t_1}$, $x_2 \in R_{t_2}$ в кольце $\mathfrak{R}(T,\,R_t)$ существует функция $x = \{x(t)\}$, принимающая значения x_1, x_2 в точках t_1, t_2.*

Тогда кольцо $\mathfrak{R}(T,\,R_t)$ замкнуто относительно умножения на функции из $C^r(T)$.

Доказательство. Пусть $x_0 = \{x_0(t)\} \in \mathfrak{R}(T,\,R_t)$ и $\alpha(t) \in C^r(T)$; требуется доказать, что $\{\alpha(t)\,x_0(t)\} \in \mathfrak{R}(T,\,R_t)$. Положим $y = x_0^* x_0$ и рассмотрим $y(t_0)$ при фиксированной точке $t_0 \in T$. По условию, $y(t_0)$ — вполне непрерывный и притом положительно определенный оператор в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_{t_0}$. Следовательно, спектр $y(t_0)$ состоит из точки 0 и конечного или счетного числа положительных собственных значений, не имеющих отличной от нуля предельной точки.

Рассмотрим сначала случай бесконечного множества различных собственных значений; они образуют убывающую последовательность $\lambda_1,\,\lambda_2,\,\lambda_3,\,\ldots$, сходящуюся к нулю. Тогда при заданном $\varepsilon > 0$ существует $\lambda_r < \varepsilon$. Выберем два числа β и γ таких, что $\lambda_r > \beta > \gamma > \lambda_{r+1}$, и обозначим через $f(\lambda)$ непрерывную числовую функцию, равную единице при $\lambda \geqslant \beta$, нулю при $\lambda \leqslant \gamma$ и линейную в интервале $[\gamma,\,\beta]$. Положим $p = f(y)$; тогда $p = \{p(t)\} \in \mathfrak{R}(T,\,R_t)$ и $p(t_0)$ есть оператор проектирования в $\mathfrak{H}_{t_0}$. Кроме того, спектр эрмитова оператора $y(t_0) - p(t_0)\,y(t_0)$ находится в интервале $[0,\,\varepsilon]$, и потому $|y(t_0) - p(t_0)\,y(t_0)| < \varepsilon$. По непрерывности мы имеем также $|y(t) - p(t)\,y(t)| < \varepsilon$ в некоторой окрестности $U_1(t_0)$.

Далее, в силу V существует окрестность $U_2(t_0)$, для всех точек t которой спектр оператора $y(t)$ находится вне $[\gamma,\,\beta]$, и потому $p(t)$ является оператором проектирования. Пусть $U(t_0)$ — окрестность точки t_0, замыкание которой содержится в $U_1(t_0) \cap U_2(t)$. Тогда $p(t)$ — оператор проектирования и

$$|y(t) - p(t)\,y(t)| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad t \in \overline{U(t_0)}. \tag{4}$$

Докажем, что это обстоятельство имеет также место в случае оператора $y(t_0)$ с только конечным числом положительных собственных значений. Пусть λ_0 — наименьшее из этих положительных собственных значений; выберем два числа β, γ таких, что $0 < \gamma < \beta < \lambda_0$, и определим непрерывную функцию $f(\lambda)$, как выше. Положив снова $p = f(y)$, мы получим, что $y(t_0) - p(t_0)\,y(t_0) = 0$. Повторяя далее предыдущие рассуждения, мы снова придем к (4).

Покажем теперь, что в пределах $\overline{U(t_0)}$ возможно умножение вектор-функции $\{p(t)\}$ на любую непрерывную вещественную функцию $\alpha(t)$, точнее, для любой такой функции $\alpha(t)$ в кольце $\mathfrak{R}(T, R_t)$ существует вектор-функция $z = \{z(t)\}$ такая, что $z(t) = \alpha(t)\,p(t)$ для всех $t \in \overline{U(t_0)}$. Для этой цели обозначим через $\mathfrak{R}_1$ совокупность всех вектор-функций $x = \{x(t)\}$ из $\mathfrak{R}(T, R_t)$, удовлетворяющих условию

$$p(t)\,x(t) = x(t)\,p(t) = x(t) \quad \text{для всех} \quad t \in \overline{U(t_0)}. \tag{5}$$

Очевидно, $\mathfrak{R}_1$ — банахово подкольцо кольца $\mathfrak{R}(T, R_t)$. Далее, обозначим через $\mathfrak{R}_1^{\frown}$ совокупность всех вектор-функций $x = \{x(t)\}$ из $\mathfrak{R}_1$, рассматриваемых только на $\overline{U(t_0)}$. Отображение $x \to x^{\frown}$, которое каждой функции $x = \{x(t)\}$ из $\mathfrak{R}_1$, ставит в соответствие ее сужение $x^{\frown} = \{x^{\frown}(t)\}$ на $\overline{U(t_0)}$, есть симметричный гомоморфизм полного вполне регулярного кольца $\mathfrak{R}_1$ на вполне регулярное кольцо $\mathfrak{R}_1^{\frown}$; следовательно, $\mathfrak{R}_1^{\frown}$ полно (см. следствие в п. 3 § 24). С другой стороны, $\mathfrak{R}_1^{\frown}$ есть кольцо вида $\mathfrak{R}(\overline{(U(t_0)}, R'_t)$, где R'_t есть совокупность всех элементов x кольца R_t, удовлетворяющих условию $xp(t) = p(t)x = x(t)$. Отсюда и из условия 3 заключаем, что $\mathfrak{R}_a^{\frown}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 4, причем $p(t)$ есть единица в $\mathfrak{R}'_t$, а p есть единица в $\mathfrak{R}_1^{\frown}$. На основании теоремы 4 кольцо $\mathfrak{R}_1^{\frown}$ содержит функцию $\{\alpha(t)\,p(t)\}$; это означает, что в $\mathfrak{R}(T, R_t)$ есть вектор-функция $z = \{z(t)\}$, совпадающая с $\alpha(t)p(t)$ в $\overline{U(t_0)}$.

Изменим теперь функцию $z = \{z(t)\}$ таким образом, чтобы она стала равной нулю вне $\overline{U(t_0)}$. Пусть $\tau \notin U(t_0)$ и $t_1 \in U(t_0)$; по построению, спектр оператора $p(\tau)$ состоит из конечного числа положительных собственных значений конечных кратностей. Пусть q_0 — оператор проектирования на прямую сумму собственных подпространств, отвечающих этим собственным значениям; так как q_0 конечномерен, то он вполне непрерывен и, кроме того, $p(\tau)\,q_0 = q_0 p(\tau) = p(\tau)$, $q_0 \in R_\tau$. В силу условия 3 в $\mathfrak{R}(T, R_t)$ существует эрмитов элемент $q = \{q(t)\}$ такой, что $q(t_1) = 0$, $q(\tau) = q_0$. Пусть $\varphi(\lambda)$ — вещественная непрерывная функция, равная нулю в окрестности точки $\lambda = 0$ и единице в точке $\lambda = 1$. Положив $k = \varphi(q)$, мы получим вектор-функцию $k = \{k(t)\}$ из $\mathfrak{R}(T, R_t)$, равную нулю в некоторой окрестности $U(t_1)$ и q_0 в точке τ.

Пусть $V(t_0)$ — окрестность точки t_0, такая, что $\overline{V(t_0)} \subset U(t_0)$. Проводя предыдущее построение для каждой точки $t_1 \in \overline{V(t_0)}$, выделяя затем конечное покрытие множества $\overline{V(t_0)}$ соответствующими окрестностями $U(t_1)$ и перемножая соответствующие вектор-функции $k = \{k(t)\}$, мы получим вектор-функцию $\widetilde{k} = \{\widetilde{k}(t)\}$, равную нулю на $\overline{V(t_0)}$ и q_0 в точке τ. Положим $\widetilde{p} = p - kp$; тогда $\widetilde{p} = \widetilde{p}\{\widetilde{p}(t)\}$ есть вектор-функция из $\mathfrak{R}(T,\, R_t)$, равная $p(t)$ при $t \in \overline{V(t_0)}$ и нулю в точке τ. Положив далее, $v = \widetilde{p}^*\widetilde{p}$, мы получим эрмитову вектор-функцию $v = \{v(t)\}$, обладающую тем же свойством. Рассматривая затем $\varphi(v)$, где $\varphi(\lambda)$ — та же функция, что и выше, и применяя предыдущее рассуждение к v и $T - U(t_0)$ вместо k и $\overline{V(t_0)}$, мы получим эрмитову вектор-функцию $h = \{h(t)\}$ из кольца $\mathfrak{R}(T,\, R_t)$, равную $p(t)$ в $\overline{V(t_0)}$ и нулю в $T - U(t_0)$.

Пусть теперь $\beta(t)$ — произвольная вещественная непрерывная на T функция, равная нулю вне $V(t_0)$. По доказанному выше, кольцо $\mathfrak{R}(T,\, R_t)$ содержит вектор-функцию, равную $\beta(t)\,p(t)$ в $\overline{U(t_0)}$; умножив эту вектор-функцию на $h = \{h(t)\}$, мы получим вектор-функцию из кольца $\mathfrak{R}(T,\, R_t)$, всюду в T равную $\{\beta(t)\,p(t)\}$. Другими словами, $\{\beta(t)\,p(t)\} \in \mathfrak{R}(T,\, R_t)$ для любой непрерывной на T вещественной функции $\beta(t)$, равной нулю вне $V(t_0)$.

Построим теперь вектор-функцию $p = \{p(t)\}$ и соответствующую окрестность $V(t_0)$ для каждой точки $t_0 \in T$. Выберем из этих окрестностей конечное покрытие $V(t_1),\, \ldots,\, V(t_n)$ и обозначим через $p_1,\, \ldots,\, p_n$ соответствующие вектор-функции p. Пусть $\beta_1(t),\, \ldots,\, \beta_n(t)$ — разбиение единицы непрерывными вещественными функциями, отвечающее покрытию $V(t_1),\, \ldots,\, V(t_n)$. Тогда $\mathfrak{R}(T,\, R_t)$ содержит вектор-функции

$$g_k = \{\alpha(t)\,\beta_k(t)\,x_0(t)\,p_k(t)\}, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n.$$

Положим $g = g_1 + \ldots + g_n$. Тогда $g \in \mathfrak{R}(T,\, R_t)$ и

$$g(t) - \alpha(t)\,x_0(t) = \sum_{k=1}^{n}[g_k(t) - \alpha(t)\,\beta_k(t)\,x_0(t)] = \\ = \sum_{k=1}^{n}\alpha(t)\,\beta_k(t)\,x_0(t)[p_k(t) - e];$$

отсюда [1])

$$[g(t) - \alpha(t)\,x_0(t)]^*[g(t) - \alpha(t)\,x_0(t)] = \\ = |\alpha(t)|^2 \sum_{j,\,k=1}^{n}\beta_k(t)\,\beta_j(t)[p_k(t) - e]y(t)[p_j(t) - e]. \quad (6)$$

[1]) Напомним, что $y = x_0^*x_0$.

Но в силу (4)

$$\left|[y(t)]^{\frac{1}{2}}[p_j(t)-e]\right|^2 = |y(t)-y(t)\,p_j(t)| < \varepsilon \quad \text{в} \quad V(t_j)$$

и, значит,

$$\beta_j(t)\left|[y(t)]^{\frac{1}{2}}[p_j(t)-e]\right| \leqslant \beta_j(t)\sqrt{\varepsilon} \quad \text{во всем} \quad T.$$

Поэтому из (6) заключаем, что

$$|g(t)-\alpha(t)\,x_0(t)|^2 \leqslant \sup_{t\in T}|\alpha(t)|\cdot\sum_{k,\,j=1}^{n}\varepsilon\beta_k(t)\,\beta_j(t) = \sup_{t\in T}|\alpha(t)|\cdot\varepsilon.$$

В силу полноты кольца $\mathfrak{R}(T,\,R_t)$, это означает, что $\{\alpha(t)\,x_0(t)\}\in$ $\in\mathfrak{R}(T,\,R_t)$, и теорема доказана.

Замечание 4. В теореме 5 пространство T можно считать локально бикомпактным. Действительно, этот случай сводится к рассмотренному в теореме 5 присоединением к пространству T бесконечно удаленной точки ∞ и к кольцам R_t — кольца $R_\infty = (0)$.

Комбинируя теперь теоремы 4 и 5 с теоремой 3, мы приходим к следующему результату, являющемуся некоммутативным обобщением теоремы Стоуна (см. теорему 1 п. 10 § 2).

Теорема 6. *Пусть T — локально бикомпактное хаусдорфово пространство, а R — полное вполне регулярное кольцо, которое либо содержит единицу, либо состоит из вполне непрерывных операторов в некотором гильбертовом пространстве. Пусть, далее, $\mathfrak{R}_\infty(T,\,R)$ — кольцо всех вектор-функций $x=\{x(t)\}$ со значениями из R, непрерывных на T и стремящихся к нулю на бесконечности. Если тогда $\mathfrak{R}_1$ — замкнутое симметричное подкольцо в $\mathfrak{R}_\infty(T,\,R)$, вектор-функции которого принимают любые значения из R в любых двух различных точках $t_1,\,t_2\in T$, то $\mathfrak{R}_1$ совпадает с $\mathfrak{R}_\infty(T,\,R)$.*

Глимм [1] получил следующее обобщение теоремы Стоуна на некоммутативные кольца: если R — полное вполне регулярное кольцо с единицей, R_1 — замкнутое подкольцо в R, Q — слабое замыкание множества всех неразложимых нормированных положительных функционалов на R и если для каждых $f_1,\,f_2\in Q$, $f_1\neq f_2$, в R_1 существует такой элемент x, что $f_1(x_0)\neq f_2(x_0)$, то $R_1=R$. По поводу других обобщений теоремы Стоуна см. Болус [1], Джеветт [1], Фаррел [1].

5. Континуальный аналог леммы Шура. Если каждое R_1 есть банахово симметричное кольцо операторов в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_t$ и $\mathfrak{R}(T,\,R_t)$ — симметричное кольцо, то при любом фиксированном $t_0\in T$ соответствие $x\to x(t_0)$ есть представление кольца $\mathfrak{R}(T,\,R_t)$ в пространстве $\mathfrak{H}_{t_0}$. Результаты предыдущего параграфа дают возможность перенести на такие представления лемму Шура, причем на эти представления приходится накладывать ряд условий, выполняющихся, впрочем, для представлений большого числа важных конкретных колец (см., например, по этому поводу Гельфанд и Наймарк [7], с. 202 и Наймарк [7, 9]).

Предварительно докажем следующее предложение.

I. *Пусть* $\mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ — *кольцо всех вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$. *Тогда всякое замкнутое симметричное неприводимое подкольцо* R *кольца* $\mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ *совпадает с* $\mathfrak{C}(\mathfrak{H})$.

Доказательство. Обозначим через R^P совокупность всех операторов проектирования $P \in R$. Очевидно, все операторы из R^P конечномерны. Если H — эрмитов оператор и $H \in R$, то H имеет вид $H = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k$. Взяв непрерывную функцию $f(\lambda)$, равную единице в точке λ_{k_0} и нулю во всех остальных точках λ_k, мы видим, что $P_{k_0} = f(H) \in R$. Следовательно, R есть минимальное замкнутое кольцо, содержащее R^P, и потому также R^P — неприводимое множество.

Пусть теперь $\{e_\alpha\}$ — фиксированная полная ортонормальная система в $\mathfrak{H}$; обозначим через $\mathfrak{C}'(\mathfrak{H})$ совокупность всех операторов, матрица $\|a_{\alpha\beta}\|$ которых в этой ортонормальной системе удовлетворяет условию $\sum\limits_{\alpha,\,\beta} |a_{\alpha\beta}|^2 < \infty$, и положим $R' = R \cap \mathfrak{C}'(\mathfrak{H})$. Тогда R' — гильбертово кольцо, содержащее R^P и потому неприводимое. Но всякое гильбертово кольцо есть ортогональная сумма своих минимальных замкнутых двусторонних идеалов; так как R' неприводимо, то в этой сумме может быть только один идеал, и потому R' вполне изоморфно некоторому матричному кольцу $X(\mathfrak{A})$ (см. п. 5 § 25). Этот изоморфизм $X(\mathfrak{A}) \to R'$ можно рассматривать как неприводимое представление кольца $X(\mathfrak{A})$. Но тогда из рассуждений, проведенных в доказательстве теоремы 2 п. 2 § 22, вытекает, что R', а значит и R^P, содержит все операторы проектирования на конечномерные подпространства, и потому $R = \mathfrak{C}(\mathfrak{H})$.

Теорема 7. *Пусть* T — *локально бикомпактное хаусдорфово пространство*, $\mathfrak{C}$ — *совокупность всех вполне непрерывных операторов в фиксированном гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$, *а* $\mathfrak{R}_\infty(T, \mathfrak{C})$ — *совокупность всех вектор-функций со значениями из* $\mathfrak{C}$, *непрерывных на* T *и стремящихся к нулю на бесконечности. Пусть, далее,* $\mathfrak{R}_1$ — *замкнутое симметричное подкольцо в* $\mathfrak{R}_\infty(T, \mathfrak{C})$, *обладающее следующими свойствами*:

1) *при каждом* $t_0 \in T$ *соответствие* $x \to x(t_0)$ *есть неприводимое представление кольца* $\mathfrak{R}_1$;
2) *при любых* $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$, *представления* $x \to x(t_1)$, $x \to x(t_2)$ *не эквивалентны*.

Тогда $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_\infty(T, \mathfrak{C})$.

Доказательство. В силу условия 1 $\mathfrak{R}_{1t}$ есть неприводимое подкольцо в $\mathfrak{C}$; как образ полного вполне регулярного кольца $\mathfrak{R}_1$ при симметричном гомоморфизме, $\mathfrak{R}_{1t}$ замкнуто и потому совпадает с $\mathfrak{C}$ (см. I и следствие п. 3 § 24).

Докажем, что для любых $x_1, x_2 \in \mathfrak{E}$ и $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$, существует вектор-функция $x = x(t) \in \mathfrak{R}_1$ такая, что $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$. Утверждение теоремы будет тогда следовать из теоремы 6 п. 3. Обозначим через I_1 совокупность всех вектор-функций $x = x(t) \in \mathfrak{R}_1$, удовлетворяющих условию $x(t_1) = 0$, и положим $\mathfrak{E}_1 = I_{1t_2}$. Тогда

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}.$$

Действительно, в противном случае $\mathfrak{E}_1$ есть замкнутый двусторонний идеал в $\mathfrak{E}$ и потому $\mathfrak{E} = (0)$ (см. V п. 1 § 22). Это означает, что из $x(t_1) = 0$, $x \in \mathfrak{R}_1$ следует, что также $x(t_2) = 0$. Но тогда соответствие $x(t_1) \to x(t_2)$ при $x \in \mathfrak{R}_1$ однозначно и потому есть представление кольца $\mathfrak{E}$, отличное от нулевого. На основании теоремы 2 п. 2 § 22 это представление эквивалентно тождественному представлению, т. е. представлению $x(t_1) \to x(t_1)$. Это означает, что, вопреки условию 2, представления $x \to x(t_1)$ и $x \to x(t_2)$ кольца $\mathfrak{R}_1$ эквивалентны. Тем самым равенство $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}$ доказано. Это равенство означает, что для любого $x_2 \in \mathfrak{E}$ существует функция $x_2(t) \in \mathfrak{R}_1$ такая, что $x_2(t_1) = 0$, $x_2(t_2) = x_2$. Аналогично, существует функция $x_1(t) \in \mathfrak{R}_1$ такая, что $x_1(t_1) = x_1$, $x_1(t_2) = 0$. Тогда функция $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ будет удовлетворять поставленным требованиям, и теорема доказана.

Пусть теперь $\mathfrak{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, T — локально бикомпактное хаусдорфово пространство, μ — мера на T. При этом ради простоты изложения мы всюду в дальнейшем в этом пункте будем предполагать, что бесконечно удаленная точка в T обладает счетной базой окрестностей $U_1, U_2, \ldots$; очевидно, отсюда следует, что объединение счетного числа бикомпактных множеств $Q_1 = T - U_1$, $Q_2 = T - U_2, \ldots$ есть все пространство T:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = T. \tag{1}$$

Можно заменить это условие более слабым условием, потребовав лишь, чтобы T было объединением $T = T_0 \cup \bigcup\limits_{\alpha} T_\alpha$ (может быть, несчетного числа) непересекающихся локально нулевого множества T_0 и суммируемых множеств T_α таких, что всякое суммируемое множество пересекается не более чем со счетным числом множеств T_α (см. п. 16 § 6). Последующие результаты остаются при этом верными, если в них термины «множество меры нуль» и «почти всюду» заменить терминами «локально нулевое множество» и «локально почти всюду» (см. п. 9 § 6). Мы предоставляем читателю в качестве полезного упражнения перенесение на этот случай излагаемых ниже доказательств.

Вектор-функцию $\xi = \{\xi(t)\}$, $t \in T$, со значениями из $\mathfrak{H}$ мы будем называть *μ-измеримой* (или просто измеримой), если при любом $\eta \in \mathfrak{H}$ числовая функция $(\xi(t), \eta)$ μ-измерима. Если вектор-функции

$\xi = \{\xi(t)\}$ и $\eta = \{\eta(t)\}$ μ-измеримы, то числовые функции $(\xi(t), \eta(t))$, $|\xi(t)|$ измеримы. Утверждение непосредственно следует из формул

$$(\xi(t), \eta(t)) = \sum_k |(\xi(t), e_k)|^2, \quad |\xi(t)| = \sqrt{(\xi(t), \xi(t))}, \tag{1'}$$

где $\{e_k\}$ — полная ортонормальная система в $\mathfrak{H}$ (см. IV, V и VII п. 10 § 6). Обозначим через $\mathscr{H}$ совокупность всех μ-измеримых вектор-функций $\xi = \{\xi(t)\}$, $t \in T$, со значениями из $\mathfrak{H}$, удовлетворяющих условию [1] $\int\limits_T |\xi(t)|^2 \, d\mu < \infty$. Если положить

$$\alpha\xi = \{\alpha\xi(t)\}, \quad \xi + \eta = \{\xi(t) + \eta(t)\}, \quad (\xi, \eta) = \int\limits_T (\xi(t), \eta(t)) \, d\mu$$

при $\xi = \{\xi(t)\}$, $\eta = \{\eta(t)\} \in \mathscr{H}$, то $\mathscr{H}$ станет гильбертовым пространством; его полнота следует из полноты пространства L^2 (см. п. 11 § 6). Действительно, если положить $\xi_k(t) = (\xi(t), e_k)$, где e_k — полная ортонормальная система в $\mathfrak{H}$, то соответствие $\xi(t) \to \phi_k(t)$ будет изометрическим отображением пространства $\mathscr{H}$ на прямую сумму конечного или счетного числа экземпляров пространства L^2 (см. (1) и п. 6 § 5). Это гильбертово пространство $\mathscr{H}$ называется *прямым интегралом* [2] *пространства $\mathfrak{H}$ по мере μ* и обозначается $\int\limits_T \mathfrak{H} \, d\mu$.

Если T дискретно и мера каждой точки равна единице, то, очевидно, $\int\limits_T \mathfrak{H} \, d\mu$ совпадает с обычной прямой суммой $\bigoplus\limits_T \mathfrak{H}|T|$ экземпляров (где $|T|$ — мощность множества T) пространства $\mathfrak{H}$ (см. п. 6 § 5).

Рассмотрим теперь операторную функцию $A = \{A(t)\}$, где $A(t)$ — оператор в $\mathfrak{H}$ с областью определения $\mathfrak{H}$; операторная функция $A = \{A(t)\}$ называется μ-измеримой, если:

1) она определена для всех $t \in T$, за возможным исключением множества μ-меры нуль;
2) для любой μ-измеримой вектор-функции $\xi = \{\xi(t)\}$ вектор-функция $\{A(t)\,\xi(t)\}$ μ-измерима.

II. *Если $\{A(t)\}$ — μ-измеримая операторная функция, то $|A(t)|$ — μ-измеримая числовая функция.*

Доказательство. Пусть ξ_n — счетная плотная в $\mathfrak{H}$ последовательность. Тогда $|A(t)| = \sup\limits_n \dfrac{|A(t)\,\xi_n|}{|\xi_n|}$ и $|A(t)|$ μ-измерима как верхняя грань последовательности μ-измеримых функций $\dfrac{|A(t)\,\xi_n|}{|\xi_n|}$ (см. VI п. 10 § 6).

---

[1] При этом две вектор-функции $\xi(t)$, $\eta(t) \in \mathscr{H}$ не считаются различными, если $\int\limits_T |\xi(t) - \eta(t)|^2 \, d\mu = 0$.

[2] Другое, более общее определение прямого интеграла см. ниже, в п. 1 § 41.

III. *Если $\{A(t)\}$ — μ-измеримая операторная функция, то формула $A\{\xi(t)\} = \{A(t)\,\xi(t)\}$ тогда и только тогда определяет ограниченный оператор A в $\mathscr{H}$, когда $|A(t)|$ — существенно ограниченная функция. В этом случае*[1] $|A| = \|\,|A(t)|\,\|_\infty$.

Доказательство. Положим $c = \|\,|A(t)|\,\|_\infty$; если $c < \infty$, то

$$|A\xi|^2 = \int |A(t)\,\xi(t)|^2\,d\mu \leqslant c^2 \int |\xi(t)|^2\,d\mu = c^2|\xi|^2.$$

Следовательно, A — ограниченный оператор и

$$|A| \leqslant c. \tag{2}$$

Обратно, пусть A ограничен, и пусть ξ_n — счетная плотная в $\mathfrak{H}$ последовательность. Обозначим через S_n множество тех точек t, для которых

$$|A(t)\,\xi_n| > |A||\xi_n|, \tag{3}$$

а через S — множество всех тех точек t, для которых

$$|A(t)| > |A|. \tag{4}$$

Тогда

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n. \tag{5}$$

Действительно, если $t \notin S$, т. е. неравенство (4) не имеет места, то неравенство (3) не выполняется ни для одного n и потому $t \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$. Обратно, если $t \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$, то $|A(t)\,\xi_n| \leqslant |A||\xi_n|$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$, и потому $|A(t)| \leqslant |A|$, ибо $\{\xi_n\}$ плотно в $\mathfrak{H}$; это означает, что $t \notin S$, и (5) доказано.

Докажем, что каждое S_n есть множество μ-меры нуль; тогда из (5) будет следовать, что также S есть множество μ-меры нуль, и потому

$$c \leqslant |A|. \tag{6}$$

Пусть $\alpha(t)$ — характеристическая функция множества S_n и $\beta(t)$ — произвольная μ-измеримая числовая функция, удовлетворяющая условию $0 < \int\limits_T |\beta(t)|^2\,d\mu < \infty$; тогда $\xi_n(t) = \beta(t)\,\alpha(t)\,\xi_n \in \mathscr{H}$ и при $\mu(S_n) > 0$

$$|A\{\xi_n(t)\}|^2 = \int\limits_{S_n} |A(t)\,\xi_n|^2|\beta(t)|^2\,d\mu > |A|^2 \int\limits_{S_n} |\xi_n|^2|\beta(t)|^2\,d\mu. \tag{7}$$

Но неравенство (7) противоречит определению нормы оператора A; следовательно, $\mu(S_n) = 0$, и (6) доказано. Комбинируя неравенства (2) и (6), получаем $|A| = c = \|\,|A(t)|\,\|_\infty$.

[1] По поводу обозначения $\|x(t)\|_\infty$ см. п. 13 § 6.

IV. *Всякий ограниченный оператор A в $\mathscr{H} = \int\limits_T \mathfrak{H}\, d\mu$, перестановочный со всеми операторами $L_\beta = \{\beta(t)\, 1\}$, $\beta(t) \in L^\infty(T)$, имеет вид $A = \{A(t)\}$, где $\{A(t)\}$ — μ-измеримая существенно ограниченная операторная функция.*

Доказательство. Пусть $\{e_n\}$ — полная ортонормальная система в $\mathfrak{H}$ и $\alpha_m(t)$ — характеристическая функция множества Q_m в (1). Положим

$$\xi_{nm} = \{\alpha_m(t)\, e_n\}, \quad A^*\xi_{nm} = \eta_{nm} = \{\eta_{nm}(t)\}.$$

Тогда $L_{\alpha_m}\xi_{nm} = \xi_{nm}$, и потому $A^*\xi_{nm} = A^* L_{\alpha_m}\xi_{nm} = L_{\alpha_m} A^*\xi_{nm}$, т. е.

$$\eta_{nm}(t) = \alpha_m(t)\, \eta_{nm}(t).$$

Далее, для произвольной вектор-функции $\zeta = \{\zeta(t)\} \in \mathscr{H}$ положим $A\zeta = \zeta' = \{\zeta'(t)\}$. Тогда

$$(\zeta, \eta_{nm}) = (\zeta, A^*\xi_{nm}) = (A\zeta, \xi_{nm}) = (\zeta', \xi_{nm}),$$

т. е.

$$\int\limits_T (\zeta(t), \eta_{nm}(t))\, d\mu = \int\limits_T (\zeta(t), \eta_{nm}(t))\, \alpha_m(t)\, d\mu = \int\limits_T (\zeta'(t), e_n)\, \alpha_m(t)\, d\mu. \tag{8}$$

Определим оператор $B(t)$ в $\mathfrak{H}$, положив $B(t)\, e_n = \eta_{nm}(t)$ при $t \in Q_m$ и распространив его затем линейно на конечные линейные комбинации векторов e_n; тогда (8) перепишется в виде

$$\int\limits_T (\zeta(t), B(t)\, e_n)\, \alpha_m(t)\, d\mu = \int\limits_T (\zeta'(t), e_n)\, \alpha_m(t)\, d\mu. \tag{9}$$

По условию, $AL_\beta = L_\beta A$, и потому $AL_\beta\zeta = L_\beta A\zeta = L_\beta\zeta'$; следовательно, в формуле (9) можно $\zeta(t)$ и $\zeta'(t)$ заменить на $\beta(t)\, \zeta(t)$ и $\beta(t)\, \zeta'(t)$. Но тогда мы получим, что

$$\int\limits_T (\zeta(t), B(t)\, e_n)\, \beta(t)\, \alpha_m(t)\, d\mu = \int\limits_T (\zeta'(t), e_n)\, \beta(t)\, \alpha_m(t)\, d\mu$$

для всех $\beta(t) \in L^\infty(T)$ отсюда заключаем, что

$$(\zeta(t), B(t)\, e_n) = (\zeta'(t), e_n) \tag{10}$$

на Q_m, за исключением множества S_{nm} μ-меры нуль. Но тогда вне множества $S_m = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_{nm}$ также μ-меры нуль (10) будет выполняться на Q_m для всех $n = 1, 2, 3, \ldots$; поэтому соотношение (10) имеет место при $n = 1, 2, 3, \ldots$ для каждого $t \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} (Q_m - S_m) = T - S$, где $S \subset \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} S_m$; следовательно, S также μ-меры нуль. Отсюда $\zeta(t) \in \mathfrak{D}_{B^*(t)}$ и $B^*(t)\,\zeta(t) = \zeta'(t)$ для каждого $t \in T - S$.

Полагая [1] $A(t) = B^*(t)$, получим, что $A|\zeta(t)| = \{A(t)\,\zeta(t)\}$ для всех $\{\zeta(t)\} \in H$. В силу III $\{A(t)\}$ — существенно ограниченная операторная функция, и предложение IV доказано.

V. *Каждый оператор L_β, где $\beta(t) \in L^\infty(T)$, есть точка прикосновения в слабой операторной топологии* [2] *множества операторов L_α, $\alpha(t) \in C_\infty(T)$.*

Доказательство. Пространство $L^\infty(T)$ является сопряженным к $L^1(T)$ (п. 16 § 6), причем $C_\infty(T)$ плотно в $L^\infty(T)$ в слабой топологии; действительно, если $f(t) \in L^1(T)$, то равенство $\int x(t)\,\alpha(t)\,d\mu = 0$ для всех $\alpha(t) \in C_\infty(T)$ возможно лишь при $x = 0$ (см. II п. 11 § 3). Поэтому для каждых $\beta \in L^\infty(T)$, $x_j(t) \in L^1(T)$, $j = 1, \ldots, n$, и $\varepsilon > 0$ существует такая функция $\alpha(t) \in C_\infty(T)$, что

$$\left|\int [\beta(t) - \alpha(t)] x_j(t)\,d\mu\right| < \varepsilon.$$

Положив здесь $x_j(t) = (y_j(t), z_j(t))$, где $y_j, z_j \in \mathscr{H}$, получим, что

$$|((L_\beta - L_\alpha)\,y_j, z_j)| = \left|\int (\beta(t) - \alpha(t))(y_j(t), z_j(t))\,d\mu\right| < \varepsilon, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

а это и означает, что L_β — точка прикосновения в слабой операторной топологии множества операторов L_α (см. аналогичное рассуждение в сноске на с. 448).

VI. *Если ограниченный оператор A в $\mathscr{H}$ перестановочен со всеми операторами L_α, $\alpha \in C_\infty(T)$, то он перестановочен также со всеми операторами L_β, $\beta \in L^\infty(T)$.*

Утверждение непосредственно следует из V п. 1 § 8 и V.

Предположим теперь, что для каждого $t \in T$ задано представление $x \to A_x(t)$ банахова симметричного кольца R в пространстве $\mathfrak{H}$. Если при каждом $x \in R$ операторная функция $A_x = \{A_x(t)\}$ μ-измерима

---

[1] На первый взгляд может показаться, что можно было бы сразу положить $\zeta'(t) = A(t)\,\zeta(t)$. Дело, однако, в том, что в общем случае $\zeta'(t_0)$ может зависеть от всех значений вектор-функции $\{\zeta(t)\}$, а не только от ее значения $\zeta(t_0)$ в данной точке t_0 (см. п. 15 § 5, где аналогичное обстоятельство имеет место для дискретного пространства T). Формула $B^*(t)\,\zeta(t) = \zeta'(t)$, доказанная в тексте, показывает, что в случае оператора A, перестановочного со всеми операторами L_β, значение $\zeta'(t_0)$ будет действительно зависеть только от $\zeta(t_0)$ и что при $t \notin S$ вектор $B(t)\,e_n$ не зависит от выбора множества Q_m, содержащего t.

[2] См. пример 2 п. 3 § 8.

и существенно ограничена, то A_x есть оператор в $\mathscr{H}$ и соответствие $x \to A_x$ есть представление кольца R в пространстве $\mathscr{H}$. Оно называется *прямым интегралом представлений* $x \to A_x(t)$ *по мере* μ и обозначается $x \to \int\limits_T A_x(t)\,d\mu$.

Теорема 8 (континуальный аналог леммы Шура). *Пусть представление $x \to A_x$ банахова симметричного кольца R есть прямой интеграл $x \to \int\limits_T A_x(t)\,d\mu$ представлений $x \to A_x(t)$ этого кольца в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Пусть, кроме того, выполнены условия:*

1) *$A_x(t)$ при каждом $x \in R$ есть непрерывная, в смысле нормы оператора, операторная функция на T, равная нулю на бесконечности;*
2) *при всех $x \in R$ и $t \in T$ оператор $A_x(t)$ вполне непрерывен;*
3) *каждое представление $x \to A_x(t)$ неприводимо;*
4) *при любых $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$, представления $x \to A_x(t_1)$, $x \to A_x(t_2)$ не эквивалентны.*

Тогда всякий ограниченный оператор B в $\mathscr{H} = \int\limits_T \mathfrak{H}\,d\mu$, перестановочный со всеми операторами A_x, $x \in R$, имеет вид $B = \{\beta(t)\,1\}$, где $\beta(t) \in L^\infty(T)$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{R}_1$ — образ кольца R при отображении $x \to A_x$ и $\overline{\mathfrak{R}}_1$ — замыкание $\mathfrak{R}_1$ в $\mathfrak{R}_\infty(T, \mathfrak{C})$, тогда $\overline{\mathfrak{R}}_1$ — банахово симметричное подкольцо в $\mathfrak{R}_\infty(T, \mathfrak{C})$, удовлетворяющее условиям 1)–2) теоремы 7. Поэтому $\overline{\mathfrak{R}}_1 = \mathfrak{R}_\infty(T, \mathfrak{C})$. Следовательно, оператор B перестановочен со всеми операторами из $\mathfrak{R}_\infty(T, \mathfrak{C})$.

Пусть $\{\varphi_n\}$ — полная ортонормальная система в $\mathfrak{H}$ и P_n — оператор проектирования в $\mathfrak{H}$ на подпространство, натянутое на $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$. Определим оператор $\mathfrak{P}_n$ в $\mathscr{H}$, полагая $\mathfrak{P}_n\xi = \{P_n\xi(t)\}$ для $\xi = \{\xi(t)\} \in \mathscr{H}$. Легко видеть, что $\mathfrak{P}_n$ — оператор проектирования в $\mathscr{H}$ и что $\mathfrak{P}_n\xi \to \xi$ по норме в $\mathscr{H}$ при $n \to \infty$. Так как $L_\beta\mathfrak{P}_n = \{\beta(t)P_n\} \in \mathfrak{R}_\infty(T, \mathfrak{C})$, то B перестановочен со всеми операторами $L_\beta\mathfrak{P}_n$, т. е. $BL_\beta\mathfrak{P}_n = L_\beta\mathfrak{P}_nB$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим, что B перестановочен со всеми операторами $L_\beta = \{\beta(t)\,1\}$, $\beta(t) \in C_\infty(T)$.

На основании IV и VI отсюда заключаем, что $B = \{B(t)\}$, где $B(t)$ — существенно ограниченная измеримая операторная функция со значениями из $\mathfrak{C}$. Перестановочность оператора B с операторами $A = \{A(t)\} \in \mathfrak{R}_\infty(T, \mathfrak{C})$ означает, что

$$A(t)B(t) = B(t)A(t) \tag{11}$$

для почти всех t.

Пусть $A^{(pq)}$ — оператор в $\mathfrak{H}$, матрица $\|a_{jk}^{(pq)}\|$ которого в фиксированной полной ортонормальной системе имеет вид

$$a_{jk}^{(pq)} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad j \neq p \quad \text{или} \quad k \neq q, \\ 1 & \text{при} \quad j = p \quad \text{и} \quad k = q. \end{cases} \tag{12}$$

Очевидно, $A^{(pq)} \in \mathfrak{C}$ и всякий оператор из $\mathfrak{C}$ есть предел, в смысле нормы оператора, конечных линейных комбинаций операторов $A^{(pq)}$. Применим (11) к принадлежащей $R_\infty(T, \mathfrak{C})$ операторной функции

$$A(t) = \alpha_n(t)A^{(pq)} \quad \text{для всех} \quad t \in T,$$

где $\alpha_n(t)$ — фиксированная непрерывная на T числовая функция, удовлетворяющая условиям (см. (1)): $\alpha_n(t) > 0$ для всех $t \in Q_n$, $\alpha_n(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Мы получаем, что вне некоторого множества N_{pqn} μ-меры нуль $\alpha_n(t)A^{(pq)}B(t) = \alpha_n(t)B(t)A^{(pq)}$, следовательно,

$$A^{(pq)}B(t) = B(t)A^{(pq)} \quad \text{при} \quad t \in Q_n - N_{pqn}. \tag{13}$$

Положим $N_n = \bigcup\limits_{p,\,q=1}^{\infty} N_{pqn}$. Тогда $\mu N_n = 0$ при $t \in Q_n - N_n$ соотношение (13) будет выполняться для всех $p, q = 1, 2, \ldots$, и потому также будет

$$AB(t) = B(t)A$$

для всех $A \in \mathfrak{C}$. Последнее же возможно, лишь когда $B(t) = \beta(t)\,1$ при $t \in Q_n - N_n$. Отсюда в силу (1) $B(t) = \beta(t)\,1$ при $t \in T - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n$, где $\mu\left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} N_n\right) = 0$, и потому $B = \{\beta(t)\,1\}$.

Следствие 1. *Пусть представление $x \to A_x$ то же, что и в теореме 8. Тогда всякое подпространство $\mathfrak{M}$ в $\mathscr{H} = \int\limits_T \mathfrak{H}\,d\mu$, инвариантное относительно всех операторов A_x, есть совокупность всех векторов $\xi = \{\xi(t)\} \in \mathscr{H}$, удовлетворяющих условию*

$$\xi(t) = 0 \quad \textit{для почти всех} \quad t \in \Delta,$$

где Δ — фиксированное μ-измеримое множество в T.

Доказательство. Пусть P — оператор проектирования на инвариантное подпространство $\mathfrak{M}$. Тогда P перестановочен со всеми A_x и потому имеет вид $P = \{\beta(t)\,1\}$, где $\beta(t) \in L^\infty(T)$. Так как $P^2 = P$, то $\beta^2(t) = \beta(t)$ для почти всех t и потому

$$\beta(t) = 0 \quad \text{или} \quad 1 \quad \text{для почти всех} \quad t \in T. \tag{14}$$

Положим $\Delta = \{t\colon\ \beta(t) = 0\}$; так как $\beta(t)$ μ-измерима, то Δ μ-измеримо. Пространство $\mathfrak{M}$ есть совокупность всех векторов $\xi = \{\xi(t)\}$, для которых $P\xi = \xi$, т. е. $\beta(t)\,\xi(t) = \xi(t)$. В силу (14) это сводится к условию: $\xi(t) = 0$ при $t \in \Delta$.

Следствие 2. *Пусть представление* $x \to A_x$ *то же, что и в теореме* 8, *и* $\mathfrak{M}$ — *подпространство в* $\mathscr{H} = \int_T \mathfrak{H}\, d\mu$, *инвариантное относительно всех операторов* A_x. *Если* $\mathfrak{M}$ *содержит вектор* $\xi = \{\xi(t)\}$, *удовлетворяющий условию*

$$\xi(t) \neq 0 \quad \text{для почти всех} \quad t \in T, \tag{15}$$

то $\mathfrak{M} = \mathscr{H}$.

Действительно, из (15) вытекает, что в этом случае Δ есть множество μ-меры нуль.

6. Структурное пространство вполне регулярного кольца. Пусть $\mathscr{T}$ — структурное пространство полного вполне регулярного кольца R (см. п. 3 § 15) и $P \in \mathscr{T}$. Обозначим через R_P факторкольцо R/P; тем самым мы каждой точке $P \in \mathscr{T}$ отнесем кольцо R_P. На основании теоремы 6 п. 3 § 24 каждое кольцо R_P также полно и вполне регулярно. Обозначим, далее, через $x(P)$ образ элемента x кольца R при естественном гомоморфизме $R \to R_P$. Мы получим вектор-функцию $x = x(P)$ со значениями из R_P. Очевидно, соответствие $x \to \{x(P)\}$, таким образом установленное, обладает следующими свойствами:

$$\alpha x \to \{\alpha x(P)\}, \quad x + y \to \{x(P) + y(P)\}, \quad xy \to \{x(P)\, y(P)\}, \\ x^* = \{[x(P)]^*\}. \tag{1}$$

Кроме того,

$$|x| = \sup_{P \in \mathscr{T}} |x(P)|. \tag{2}$$

Действительно, положим временно $|x|_1 = \sup\limits_{P \in \mathscr{T}} |x(P)|$ и обозначим через R_1 кольцо вектор-функций $\{x(P)\}$ с нормой $|x|_1$. Тогда соответствие $x \to x(P)$ есть симметричный изоморфизм полного вполне регулярного кольца R во вполне регулярное кольцо R_1 и потому сохраняет норму (см. теорему 3 п. 1 § 24); следовательно, $|x|_1 = |x|$.

Можно также показать (см. Капланский [13], с. 234), что $\sup |x(P)|$ достигается в некоторой точке $P_0 \in \mathscr{T}$.

I. *Пусть* x — *эрмитов элемент полного вполне регулярного кольца* R *со структурным пространством* $\mathscr{T}$. *Тогда для любого замкнутого множества* S *вещественных чисел совокупность* Q *всех тех точек* $P \in \mathscr{T}$, *для которых спектр* $x(P)$ *находится в* S, *замкнута в* $\mathscr{T}$.

Доказательство. Пусть $P_0 \notin Q$; тогда в спектре элемента $x(P_0)$ есть точка $\alpha \notin S$. Пусть $f(\lambda)$ — непрерывная вещественная функция, равная нулю на S и единице в точке α. Тогда $y = f(x)$ есть элемент кольца R, равный нулю на Q и отличный от нуля в точке P_0. Но это означает, что $P_0 \notin hk(Q) = \overline{Q}$, и потому $\overline{Q} = Q$.

Теорема 9. *Структурное пространство $\mathscr{T}$ полного вполне регулярного кольца R с единицей хаусдорфово тогда и только тогда, когда для каждого элемента $x \in R$ функция $|x(P)|$ непрерывна на $\mathscr{T}$.*

Доказательство. Пусть все функции $|x(P)|$, $x \in R$, непрерывны на $\mathscr{T}$; докажем, что $\mathscr{T}$ хаусдорфово. Если $P_1 \neq P_2$, то в R существует элемент x, принадлежащий P_1 и не принадлежащий P_2. Это означает, что $x(P_1) = 0$, $x(P_2) \neq 0$. Положим $\varepsilon = \frac{1}{3}|x(P_2)|$ и обозначим через U_1 и U_2 множества всех точек P, на которых $|x(P)| < \varepsilon$ и $|x(P)| > 2\varepsilon$ соответственно. В силу непрерывности функции $|x(P)|$, U_1 и U_2 — непересекающиеся открытые множества, содержащие P_1 и P_2; следовательно, $\mathscr{T}$ хаусдорфово.

Докажем теперь обратное утверждение. Пусть $\mathscr{T}$ — хаусдорфово. Докажем сначала непрерывность функции $|x(P)|$ в тех точках P_0, в которых $x(P_0) = 0$. Обозначим через I замыкание множества всех функций $y(P)$, $y \in R$, равных нулю в некоторой окрестности точки P_0; тогда I — замкнутый двусторонний идеал в R, совпадающий с P_0. Действительно, I есть пересечение содержащих его примитивных идеалов и потому если $I \neq P_0$, то I содержится также в некотором другом примитивном идеале P_1. Так как $\mathscr{T}$ хаусдорфово, то существует окрестность $U(P_0)$, замыкание которой не содержит P_0, т. е. $P_1 \notin hk(U(P_0))$. Это означает, что R содержит элемент $y = y(P)$, равный нулю на $U(P_0)$ и отличный от нуля в P_1. Но тогда $y \in I \subset P_1$, и потому $y(P_1) = 0$. Полученное противоречие показывает, что $I = P_0$. Другими словами, всякий элемент $x \in R$, равный нулю в точке P_0, есть предел последовательности элементов $x_n \in R$, равных нулю в некоторой окрестности $U_n(P_0)$. Но тогда неравенство $|x - x_n| < \varepsilon$ при $n > N$ дает $|x(P)| < \varepsilon$ в U_N, т. е. функция $|x(P)|$ непрерывна в точке P_0. Поэтому к кольцу R применимо предложение V п. 4 (см. замечание 1 п. 4).

Пусть теперь $|x(P_0)| = r > 0$. Мы можем считать x эрмитовым; в противном случае его можно заменить элементом $y = x^*x$, для которого $|y(P_0)| = |x(P_0)|^2 = r^2 > 0$. Но тогда на основании предложения V п. 4 $|x(P)| < r + \varepsilon$ в некоторой окрестности $U(P_0)$. С другой стороны, в силу I множество точек P, в которых $|x(P)| \leqslant r - \varepsilon$, замкнуто, и потому множество тех точек P, в которых $|x(P)| > r - \varepsilon$, открыто.

Замечание. Можно показать (см. Капланский [13], стр. 234), что при выполнении условий теоремы 9 структурное пространство бикомпактно. Утверждение теоремы 9 остается также справедливым для полного вполне регулярного кольца R без единицы; в этом случае структурное пространство кольца R локально бикомпактно. В связи с теоремой 9 возникает интересная задача нахождения простых условий, при которых структурное пространство вполне регулярного кольца хаусдорфово. До сих пор по этому поводу имеются только отдельные результаты частного характера (см. Капланский [131 и Диксмье [17, 20]).

Результаты пп. 1, 2 § 23 и 1 п. 3 § 23 принадлежат Гельфанду и Наймарку [1, 6], Райкову [7] и Наймарку [2], теорема 3 п. 1 § 24 принадлежит Гельфанду и Наймарку [1, 6]; другое доказательство теоремы 3 п. 1 § 24, основанное на применении теоремы 1 п. 1 § 24, было позже дано Капланским [9]. Предложение II п. 3 § 23 и теорема 2 п. 4 § 23 принадлежат Райкову [7]; теорема 1 п. 3 § 23 —Наймарку [2]; следствия 1–4 из I п. 3 § 23, предложения IV, V п. 3 § 23 (исключая теорему 1) — Сонису [1, 2] (для случая нормального элемента предложение V п. 3 § 23 получено ранее Наймарком [2] и независимо И. Сигалом [5]). Теоремы 1, 2, 6 § 24 и следствия из них, а также результаты пп. 1–4 и 6 § 26 принадлежат Капланскому [9, 13] (по поводу дальнейшего развития этой теории см. Фелл [2]), результаты п. 5 § 26 — Наймарку [7], результаты п. 5 § 25 — Эмброзу [2], остальные результаты § 25 — Капланскому [3] и Бонсоллу и Голди [2]. Теорема 6 § 24 была также независимо доказана И. Сигалом [6].

В недавней работе Диксмье и Дуади [1] исследована топологическая структура $\mathfrak{R}(T, R_t)$.

Теорема 4 § 24 является ответом на вопрос, поставленный Гельфандом и Наймарком [1]; краткое ее доказательство, основанное на комбинировании результатов Келли и Вота [1] и замечания к ним Капланского, имеется в реферате Шатца (Schatz) на статью Фукамия (Fukamya) в № 9 т. 14 Mathem. Rew.

Теорема 5 § 25 при дополнительном условии вполне симметричности кольца была впервые доказана Гельфандом и Наймарком [1]. Другое доказательство этой теоремы было дано затем Люмером [3].

Он также показал, что *если в банаховом симметричном кольце с единицей* $\dfrac{|x^*x|}{|x^*||x|} = 1 + o(r)$ *при* $r = |e - x| \to 0$, *то* R *вполне симметрично и вполне регулярно*. Другие возможности ослабления или изменения аксиом, определяющих вполне регулярное кольцо, исследовали Аренс [2], Видав [3] и Юд [1].

Многочисленные другие результаты теории вполне регулярных колец собраны в монографиях Диксмье [20] и Риккарта [6].

Глава VI

ГРУППОВЫЕ КОЛЬЦА

§ 27. Топологические группы

1. Определение группы. Множество $\mathfrak{G}$ называется *группой*, если определено (вообще некоммутативное) произведение g_1g_2 любых двух элементов g_1, g_2 из $\mathfrak{G}$, удовлетворяющее следующим условиям:

α) для любых двух $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}$ также $g_1g_2 \in \mathfrak{G}$;

β) $(g_1g_2)\,g_3 = g_1(g_2g_3)$ для любых $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}$;

γ) в $\mathfrak{G}$ существует один и только один элемент e такой, что $eg = ge = g$ для всех $g \in \mathfrak{G}$; e называется *единичным элементом* группы $\mathfrak{G}$;

δ) для каждого элемента $g \in \mathfrak{G}$ в $\mathfrak{G}$ существует один и только один элемент, обозначаемый через g^{-1}, такой, что $gg^{-1} = g^{-1}g = e$; элемент g^{-1} называется *обратным* к g.

Очевидно, g есть обратный к g^{-1}, так что $(g^{-1})^{-1} = g$.

Группа $\mathfrak{G}$ называется *коммутативной*, если $g_1g_2 = g_2g_1$ для всех $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}$.

Отображение $g \to g'$ группы $\mathfrak{G}$ в группу $\mathfrak{G}'$ называется *гомоморфизмом*, если

$$(g_1g_2)' = g_1'g_2' \quad \text{для всех} \quad g_1, g_2 \in \mathfrak{G}.$$

Если это отображение взаимно однозначно, то оно называется *изоморфизмом*. Две группы $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\mathfrak{G}$ на $\mathfrak{G}'$.

Множество всех элементов $g \in \mathfrak{G}$, переходящих в единичный элемент при гомоморфизме $g \to g'$, называется *ядром* этого гомоморфизма. Очевидно, гомоморфизм тогда и только тогда является изоморфизмом, когда его ядро состоит только из единичного элемента.

Примеры. 1. Совокупность R^1 всех вещественных чисел есть группа, если определить в ней умножение как сложение вещественных чисел; эта группа называется *аддитивной группой вещественных чисел*. Единичным элементом этой группы является число нуль, а обратным элементом к числу x — число $-x$.

Аналогично определяется аддитивная группа C^1 комплексный чисел. Очевидно, обе эти группы коммутативны.

2. Совокупность R_0^1 всех отличных от нуля вещественных чисел образует группу, если определить в ней умножение как обычное умножение чисел. Эта группа называется *мультипликативной группой вещественных чисел*. Единицей этой группы служит число 1, а обратным к числу x — число $\frac{1}{x}$.

Аналогично определяется мультипликативная группа C_0^1 комплексных чисел. Очевидно, обе эти группы коммутативны.

3. Совокупность A_n всех комплексных матриц n-го порядка с определителем, равным единице, есть группа, если определить в ней умножение как умножение матриц. Эта группа называется *комплексной унимодулярной группой n-го порядка*. Единицей этой группы является единичная матрица, а обратным элементом к матрице a является обратная матрица a^{-1}. Аналогично определяется вещественная унимодулярная группа. При $n \geqslant 2$ эти группы некоммутативны.

4. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное множество. *Преобразованием* S множества $\mathfrak{A}$ называется всякое взаимно однозначное отображение $\mathfrak{A}$ на самого себя. Произведением S_1S_2 двух отображений S_1, S_2 называется отображение, являющееся результатом последовательного применения сначала отображения S_2, а затем отображения S_1. Легко проверить, что при таком определении произведения совокупность всех преобразований данного множества $\mathfrak{A}$ есть группа. Ее единичным элементом является тождественное преобразование, относящее каждому элементу $\alpha \in \mathfrak{A}$ тот же элемент α.

5. Рассмотрим тот частный случай, когда $\mathfrak{A} = (-\infty, \infty)$ и S — только те преобразования, которые задаются формулой вида $x' = \alpha x + \beta$, где $\alpha > 0$, а β — произвольное вещественное число. Произведение S_1S_2 двух таких преобразований

$$S_1\colon x' = \alpha_1 x + \beta_1,$$
$$S_2\colon x' = \alpha_2 x + \beta_2$$

есть преобразование

$$x' = \alpha_1(\alpha_2 x + \beta_2) + \beta_1 = \alpha_1 a_2 x + (\alpha_1 b_2 + \beta_1)$$

того же вида, и совокупность всех преобразований $x' = \alpha x + \beta$, $\alpha > > 0$ есть группа. Она называется *группой линейных преобразований прямой* [1]).

6. Пусть $\mathfrak{A}$ есть окружность. Рассмотрим всевозможные преобразования окружности $\mathfrak{A}$, получающиеся при ее повороте вокруг центра на какой угодно угол. Совокупность всех таких преобразований образует группу, которая называется *группой вращений окружности*. Очевидно, эта группа коммутативна. Ее элементы можно задавать углами

[1]) Точнее, группой линейных преобразований прямой, сохраняющих направление.

поворота окружности, причем углы, отличающиеся на кратное 2π, определяют один и тот же элемент этой группы.

2. Подгруппы. Множество $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}$ называется *подгруппой* группы $\mathfrak{G}$, если из $g, h \in \mathfrak{G}_1$ следует, что также $gh^{-1} \in \mathfrak{G}_1$. В частности, при $h = g$ мы получаем, что $e \in \mathfrak{G}_1$, и потому из $g, h \in \mathfrak{G}_1$, следует, что также $h^{-1} \in \mathfrak{G}_1$ и $gh \in \mathfrak{G}_1$. Следовательно, при том же определении действий, что и в $\mathfrak{G}$, множество $\mathfrak{G}_1$ также является группой.

Так, R^1 и R_0^1 являются подгруппами в C^1 и C_0^1 соответственно (см. примеры 1, 2 п. 1).

Пусть H — подгруппа группы $\mathfrak{G}$; всякое множество Hg_0 (т. е. совокупность всех элементов hg_0, $h \in H$) называется *правым смежным классом группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе H*; аналогично можно определить левые смежные классы. Два элемента $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}$ тогда и только тогда принадлежат одному правому смежному классу по H, когда $g_2 = hg_1$, где $h \in \mathfrak{G}$, т. е. когда $g_2 g_1^{-1} \in H$. Кроме того, всякий элемент $g \in \mathfrak{G}$ принадлежит какому-то правому смежному классу, именно классу Hg. Отсюда видно, что вся группа $\mathfrak{G}$ распадается на правые смежные классы по H. Обозначим через $g^\frown$ правый класс, содержащий g; всякий элемент g из данного класса будем называть *представителем* этого класса. При умножении справа на некоторый элемент g_0 каждый правый смежный класс переходит в некоторый другой правый смежный класс; следовательно, такое умножение осуществляет преобразование в совокупности этих классов.

Условимся обозначать через $\overline{g}_0$ это преобразование и писать $g^{\frown\prime} = g^\frown \overline{g}_0$, если $g^{\frown\prime}$ есть класс, полученный из $g^\frown$ умножением справа на g_0.

Аналогично, умножение слева на элемент $g_0 = \mathfrak{G}$ осуществляет преобразование в совокупности левых классов.

3. Определение и простейшие свойства топологической группы. $\mathfrak{G}$ называется *топологической группой*, если:

α) $\mathfrak{G}$ — группа;

β) $\mathfrak{G}$ — хаусдорфово топологическое пространство;

γ) функции $f(g) = g^{-1}$ и $f(g, h) = gh$ непрерывны (вторая — по совокупности переменных g, h).

Так, группы R^1, C^1, R_0^1, C_0^1, A_n в примерах п. 1 являются топологическими, если определить в них топологию обычным образом (см. примеры пп. 1, 2 § 2).

Отметим, что всякую группу $\mathfrak{G}$ можно считать топологической, если окрестностями элемента $g \in \mathfrak{G}$ считать всевозможные множества, содержащие g. Такая топология в $\mathfrak{G}$ называется *дискретной* и сама группа $\mathfrak{G}$ называется в этом случае *дискретной группой*.

Если $\mathfrak{G}$ — топологическая группа, то при каждом фиксированном $g_0 \in \mathfrak{G}$ отображение $g \to gg_0$, называемое *правым сдвигом*, есть гомеоморфизм группы $\mathfrak{G}$ на самое себя. Поэтому все окрестности любого элемента $g_0 \in \mathfrak{G}$ имеют вид [1] Ug_0, где U — окрестности единицы e. Аналогичное утверждение имеет место относительно *левых сдвигов* $g \to g_0 g$. Кроме того, отображение $g \to g^{-1}$ есть также гомеоморфизм группы $\mathfrak{G}$ на самое себя; поэтому если U — окрестность единицы, то U^{-1} — также окрестность единицы.

I. *Всякая окрестность U единицы содержит симметричную окрестность V, т.е. окрестность, удовлетворяющую условию $V^{-1} = V$.*

Действительно, такой окрестностью является $V = U \cap U^{-1}$.

II. *Всякая окрестность U единицы содержит окрестность V такую, что $VV \subset U$.*

Доказательство. В силу непрерывности произведения $g_1 g_2$ при $g_1 = e$, $g_2 = e$, существуют окрестности V_1, V_2 единицы, для которых $V_1 V_2 \subset U$; тогда окрестность $V = V_1 \cap V_2$ удовлетворяет условию $VV \subset \subset U$.

Аналогично, при любом натуральном n существует окрестность V такая, что $V^n \subset U$; при этом V^n обозначает $VV \ldots V$ (n раз).

III. *Если Q — бикомпактное множество в группе $\mathfrak{G}$ и U — открытое множество, содержащее Q, то существует окрестность W единицы такая, что $WQ \subset U$.*

Доказательство. Каждому $g \in Q$ отвечает окрестность V единицы такая, что $Vg \subset U$, а затем окрестность W единицы такая, что $W^2 \subset V$; в силу бикомпактности Q существует конечное число элементов $g_1, g_2, \ldots, g_n \in Q$ и окрестностей $W_1, W_2, \ldots, W_n$ единицы таких, что $W_1 g_1, W_2 g_2, \ldots, W_n g_n$ образуют покрытие множества Q. Окрестность $W = W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_n$ обладает требуемым свойством. Действительно, если $g \in Q$, то $g \in W_k g_k$ при некотором $k = 1, 2, \ldots, n$, и потому $Wg \subset WW_k g_k \subset W_k^2 g_k \subset V_k g_k \subset U$.

IV. *Если Q_1, Q_2 — бикомпактные множества в $\mathfrak{G}$, то $Q_1 Q_2$ бикомпактно.*

Действительно, $Q_1 Q_2$ есть образ бикомпактного множества $Q_1 \times \times Q_2 \subset \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ при непрерывном отображении $\{g_1, g_2\} \to g_1 g_2$ (см. IV п. 6 § 2).

Топологическая группа называется *локально бикомпактной* (соответственно *бикомпактной*), если она является локально бикомпактным (соответственно бикомпактным) топологическим пространством. Так, группы в примерах п. 1 локально бикомпактны, причем группа в примере 6 (группа вращений окружности) бикомпактна.

---

[1] Ug_0 обозначает совокупность всех элементов gg_0, $g \in U$. Аналогично, S^{-1} обозначает совокупность всех элементов g^{-1}, $g \in S$, а ST — совокупность всех элементов $g_1 g_2$, $g_1 \in S$, $g_2 \in T$.

Обозначим через $L = L(\mathfrak{G})$ совокупность всех непрерывных числовых функций на группе $\mathfrak{G}$, равных нулю вне бикомпактного множества (своего для каждой функции).

V. *Если $\mathfrak{G}$ локально бикомпактна, то всякая функция $x(g) \in L(\mathfrak{G})$ равномерно непрерывна, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность V единицы такая, что $|x(g_1) - x(g_2)| < \varepsilon$ при $g_1 g_2^{-1} \in V$.*

Доказательство. Пусть $x(g) = 0$ вне бикомпактного множества Q и U — симметричная окрестность единицы с бикомпактным замыканием. Множество W точек g, для которых $|x(gg_1) - x(g_1)| < \varepsilon$ при всех $g_1 \in \overline{U}Q$, открыто (см. V п. 12 § 2) и содержит единицу. Если $g \in U$, то $x(gg_1)$ и $x(g_1)$ обращаются в нуль при $g_1 \notin \overline{U}Q$, и потому $|f(gg_1) - f(g_1)| < \varepsilon$ при $g \in V = W \cap U$.

Множество $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}$ называется *топологической подгруппой* топологической группы $\mathfrak{G}$, если:

а) $\mathfrak{G}_1$ — подгруппа группы $\mathfrak{G}$;

б) $\mathfrak{G}_1$ — топологическое подпространство топологического пространства $\mathfrak{G}$.

Топологическая подгруппа называется *замкнутой*, если она есть замкнутое подмножество топологического пространства $\mathfrak{G}$. Так, R^1 и R_0^1 являются замкнутыми подгруппами в C^1 и C_0^1 соответственно.

4. Инвариантный интеграл и инвариантная мера на локально бикомпактной группе. Пусть $\mathfrak{G}$ — локально бикомпактная группа. Если $x(g) \in L = L(\mathfrak{G})$, то при любом $h \in \mathfrak{G}$ функции $x^h(g) = x(gh)$ и $x_h(g) = x(h^{-1}g)$ также принадлежат L. Действительно, это непосредственно следует из того, что отображения $g \to hg$ и $g \to gh$ являются гомеоморфизмами.

Интеграл [1] I на $L(\mathfrak{G})$ называется *правоинвариантным интегралом* на группе $\mathfrak{G}$, если

$$I(x^h) = I(x) \tag{1}$$

для всех $h \in \mathfrak{G}$ и всех $x \in L(\mathfrak{G})$; аналогично определяется левоинвариантный интеграл на $\mathfrak{G}$. Мера, определенная право- или левоинвариантным интегралом, называется соответственно *право-* или *левоинвариантной мерой.*

Обозначая эти меры через μ_r и μ_l соответственно, мы можем переписать условие (1) в виде

$$\int x(gh)\, d\mu_r(g) = \int x(g)\, d\mu_r(g), \tag{1}$$

а для меры μ_l — в виде

$$\int x(hg)\, d\mu_l(g) = \int x(g)\, d\mu_l(g). \tag{2}$$

[1] См. § 6.

Очевидно, эти условия означают, что

$$\mu_r(\Delta h) = \mu_r(\Delta), \quad \mu_l(h\Delta) = \mu_l(\Delta) \tag{3}$$

для любого измеримого множества Δ и любого $h \in \mathfrak{G}$.

5. Существование инвариантного интеграла на локально бикомпактной группе. Предположим теперь, что группа $\mathfrak{G}$ локально бикомпактна. Мы докажем, что в этом случае на ней существует правоинвариантный интеграл и, с точностью до постоянного множителя, только один.

Обозначим через L^+ совокупность всех неотрицательных непрерывных функций на $\mathfrak{G}$, равных нулю вне бикомпактного множества (своего для каждой функции). Пусть $f, \varphi \in L^+$ и $\varphi \not\equiv 0$; рассмотрим всевозможные конечные системы элементов $g_i \in \mathfrak{G}$ и чисел $c_i \geqslant 0$ таких, что

$$f(g) \leqslant \sum_i c_i \varphi(gg_i) \quad \text{для всех} \quad g \in \mathfrak{G}; \tag{1}$$

обозначим через $(f : g)$ нижнюю грань сумм $\sum\limits_i c_i$ по всем таким системам.

Такие системы существуют. Действительно, так как $\varphi \not\equiv 0$, $\varphi \geqslant 0$, то существует окрестность U с бикомпактным замыканием, на которой нижняя грань m значений функции φ положительна. Пусть Q — бикомпактное множество, вне которого $f = 0$. Тогда Q можно покрыть конечным числом множеств Ug_i^{-1}, и если $f(g) \leqslant M$, то

$$f(g) \leqslant \frac{M}{m} \sum_i \varphi(gg_i).$$

I. *Число $(f : \varphi)$ удовлетворяет условиям*:

1) $(f^h : \varphi) = (f : \varphi)$;
2) $(cf : \varphi) = c\,(f : \varphi)$*для любого* $c \geqslant 0$;
3) $(f_1 + f_2 : \varphi) \leqslant (f_1 : \varphi) + (f_2 : \varphi)$; кроме того,
4) $(f : \psi) \leqslant (f : \varphi)(\varphi : \psi)$;
5) $(f_1 : \varphi) \leqslant (f_2 : \varphi)$ при $f_1 \leqslant f_2$.

Доказательство. Соотношения 1)–3) и 5) очевидны. Докажем соотношение 4): если $f(g) \leqslant \sum\limits_i c_i \varphi(gg_i)$ и $\varphi(g) \leqslant \sum\limits_j d_j \psi(gh_j)$, то

$$f(g) \leqslant \sum_{i,j} c_j d_i \psi(gg_i h_j).$$

II. *Если $f \neq 0$, то $(f : \varphi) > 0$.*

Действительно, из (1) вытекает, что $\sup f \leqslant \sup \varphi \sum\limits_i c_i$ и потому $(f : \varphi) \geqslant \dfrac{\sup f}{\sup \varphi}$.

Выберем теперь фиксированную функцию $f_0 \in L^+$, не равную тождественно нулю, и положим

$$I_\varphi(f) = \frac{(f : \varphi)}{(f_0 : \varphi)}.$$

Из свойства 4 следует, что

$$\frac{1}{(f_0 : f)} \leqslant \frac{(f : \varphi)}{(f_0 : \varphi)} \leqslant (f : f_0), \tag{2}$$

т. е.

$$\frac{1}{(f_0 : f)} \leqslant I_\varphi(f) \leqslant (f : f_0).$$

Кроме того, из свойств 1)–3) и 5) в I заключаем, что

$$\begin{aligned} &\alpha)\ I_\varphi(f^h) = I_\varphi(f);\\ &\beta)\ I_\varphi(cf) = cI_\varphi(f) \quad \text{при} \quad c \geqslant 0;\\ &\gamma)\ I_\varphi(f_1 + f_2) \leqslant I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2);\\ &\delta)\ I_\varphi(f_1) \leqslant I_\varphi(f_2) \quad \text{при} \quad f_1 \leqslant f_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Обозначим через Δ_f отрезок $\Delta_f = \left[\frac{1}{(f_0 : f)}, (f : f_0)\right]$ и через Δ — топологическое произведение всех Δ_f:

$$\Delta = \prod_{\substack{f \in L^+\\ f \neq 0}} \Delta_f.$$

Согласно теореме Тихонова (см. II п. 12 § 2) Δ — бикомпактное пространство. В силу (2) каждой функции $\varphi \in L^+$, $\varphi \neq 0$, отвечает точка $I_\varphi = \{I_\varphi(f)\}$ пространства Δ. Для каждой окрестности $V = V(e)$ элемента $e \in \mathfrak{G}$ положим

$$\Phi = \{\varphi \in L^+\colon \varphi \neq 0, \varphi(x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \notin V\}$$

и

$$M_V = \{I_\varphi\colon \varphi \in \Phi_V\}.$$

Множества M_V образуют центрированную систему в Δ. Действительно, пусть $M_{V_1}, \ldots, M_{V_n}$ — конечное число таких множеств. $V = \bigcap\limits_{j=1}^{n} V_j$ есть окрестность элемента e,

$$\Phi_V = \bigcap_{j=1}^{n} \Phi_{V_j},$$

и потому

$$M_V = \bigcap_{j=1}^{n} M_{V_j}.$$

Поэтому множества M_V имеют общую точку прикосновения $I = \{I(f)\}$ (см. III п. 6 § 2). По самому определению топологии произведения пространств это означает, что для каждых отличных от нуля $f_1, \ldots, f_n \in L^+$ и $\varepsilon > 0$ и каждой окрестности $V = V(e)$ существует такая функция $\varphi \in \Phi_V$, $\varphi \neq 0$, что

$$|I(f_j) - I_\varphi(f_j)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad j = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Положим еще по определению $I(0) = 0$ и докажем, что $I(f)$ обладает следующими свойствами:

а) $I(f) > 0$ при $f \in L^+$, $f \neq 0$;

б) $I(f^g) = I(f)$;

в) $I(cf) = cI(f)$ при $c \geqslant 0$;

г) $I(f_1 + f_2) = I(f_1) + I(f_2)$;

д) $I(f_1) \leqslant I(f_2)$ при $f_1 \leqslant f_2$ для всех f, f_1, $f_2 \in L^+$.

Свойство а) следует из того, что при $f \neq 0$ точка $I \in \Delta$ и потому $I(f) \in \Delta_f$, а $0 \notin \Delta_f$. При доказательстве свойств б)–г) мы будем считать, что $f \neq 0$, $f_1 \neq 0$, $f_2 \neq 0$, $c > 0$, так как в противном случае они тривиальны.

Полагая в (4) $n = 2$, $f_1 = f$, $f_2 = f^g$ и учитывая свойство α из (3), получаем, что

$$|I(f) - I_\varphi(f)| < \varepsilon, \quad |I(f^g) - I_\varphi(f)| = |I(f^g) - I_\varphi(f^g)| < \varepsilon,$$

откуда $|I(f) - I(f^g)| < 2\varepsilon$ при произвольном $\varepsilon > 0$; следовательно, $I(f^g) = I(f)$.

Аналогично, полагая в (4) $n = 2$, $f_1 = f$, $f_2 = cf$ и используя свойство β из (3), докажем свойство в), а полагая $n = 2$ и используя свойство δ из (3), докажем свойство д); наконец, полагая $n = 3$, $f_3 = f_1 + f_2$ и используя γ из (3), докажем, что

$$I(f_1 + f_2) \leqslant I(f_1) + I(f_2). \tag{5}$$

Поэтому для доказательства свойства г) остается показать, что справедливо и обратное неравенство. Предварительно докажем следующую лемму.

Л е м м а. *Пусть* $f, h_1, h_2 \in L^+$ *и* $h_1 + h_2 \leqslant 1$; *тогда*

$$I(fh_1) + I(fh_2) \leqslant I(f). \tag{6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение тривиально, если одна из функций f, h_1, h_2 равна 0 (см. свойство δ в (3)). Поэтому можно считать, что ни одна из функций f, h_1, h_2 не равна 0. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как h_1 и h_2 равномерно непрерывны на $\mathfrak{G}$ (см. V п. 3), то существует такая окрестность $V = V(e)$, что

$$|h_j(g) - h_j(g')| < \varepsilon \quad \text{при} \quad g \in V_{g'}, \quad j = 1, 2. \tag{7}$$

Пусть $\varphi \in \Phi_V$ и

$$f(g) \leqslant \sum_i c_k \varphi(gg_i^{-1}) \tag{8}$$

(нам удобно здесь писать g_i^{-1} вместо g_i). Если при данном g $gg_i^{-1} \notin V$, то $\varphi = 0$; поэтому (8) можно переписать в виде

$$f(g) \leqslant \sum_i{}' c_i \varphi(gg_i^{-1}), \tag{9}$$

где $'$ означает, что при каждом данном g в сумме содержатся лишь те слагаемые, для которых $gg_i^{-1} \in V$. Умножая обе части (9) на $h_j(g)$, получим в силу (7)

$$f(g)\, h_j(g) \leqslant \sum_i{}' c_i \varphi(gg_i^{-1})\, h_j(g) \leqslant \sum_i{}' c_i \varphi(gg_i^{-1})[h_j(g_i) + \varepsilon], \tag{10}$$

ибо в сумме (9) $gg_i^{-1} \in V$, т. е. $g \in Vg_i$. Из (10) следует, что

$$f(g)\, h_j(g) \leqslant \sum_i c_i [h_j(g_i) + \varepsilon]\, \varphi(gg_i^{-1}). \tag{11}$$

Но неравенство (11) есть неравенство вида (1) для fh_j, где роли c_i и g_i играют $c_i[h_j(g_i) + \varepsilon]$ и g_i^{-1}. Поэтому

$$(fh_j : \varphi) \leqslant \sum_i c_i [h_j(g_j) + \varepsilon], \quad j = 1, 2.$$

Суммируя по j и учитывая, что $h_1 + h_2 \leqslant 1$, заключаем, что

$$(fh_1 : \varphi) + (fh_2 : \varphi) \leqslant \sum c_i (1 + \varepsilon) = (1 + \varepsilon) \sum_i c_i, \tag{12}$$

а переходя затем в (12) к нижней грани по всем c_i и g_i в (8), — что

$$(fh_1 : \varphi) + (fh_2 : \varphi) \leqslant (f : \varphi)(1 + \varepsilon). \tag{13}$$

Разделив обе части (13) на $(f_0 : \varphi)$, получим

$$I_\varphi(fh_1) + I_\varphi(fh_2) \leqslant I_\varphi(f)(1 + \varepsilon). \tag{14}$$

Положив теперь в (4) $n = 3$, $f_1 = fh_1$, $f_2 = fh_2$, $f_3 = f$ и учитывая (14), придем к неравенствам

$$I(fh_1) + I(fh_2) < I_\varphi(fh_1) + I_\varphi(fh_2) + 2\varepsilon \leqslant \\ \leqslant I_\varphi(f)(1 + \varepsilon) + 2\varepsilon < (I(f) + \varepsilon)(1 + \varepsilon) = 2\varepsilon,$$

откуда ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$

$$I(fh_1) + I(fh_2) \leqslant I(f).$$

Вернемся к доказательству свойства г).

Пусть $f_1, f_2 \in L^+$, $f_1 \not\equiv 0$, $f_2 \not\equiv 0$, причем $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$ вне бикомпактного множества Q в $\mathfrak{G}$. Согласно лемме Урысона (см. II п. 9 § 2) существует функция $f' \in L^+$, равная 1 на Q. Положим для заданного $\varepsilon > 0$

$$f = f_1 + f_2 + \varepsilon f', \quad h_1 = \frac{f_1}{f}, \quad h_2 = \frac{f_2}{f} \tag{15}$$

(считая $h_1 = h_2 = 0$ в тех точках, где $f = 0$). Тогда $h_1, h_2 \in L^+$, $h_1 \neq 0$, $h_2 \neq 0$, $h_1 + h_2 \leqslant 1$, так что, согласно лемме (см. (6)),

$$I(fh_1) + I(fh_2) \leqslant I(f) = I(f_1 + f_2 + \varepsilon f') \leqslant I(f_1 + f_2) + \varepsilon I(f'),$$

т. е. в силу (15)

$$I(f_1) + I(f_2) \leqslant I(f_1 + f_2) + \varepsilon I(f').$$

Отсюда ввиду произвольности числа $\varepsilon > 0$

$$I(f_1) + I(f_2) \leqslant I(f_1 + f_2),$$

что в соединении с неравенством (5) и доказывает свойство г).

Если теперь $f \in L'$, то $f = f_1 - f_2$, где $f_1, f_2 \in L^+$ (см. п. 1 § 6), и мы полагаем по определению

$$I(f) = I(f_1) - I(f_2). \tag{16}$$

Если также $f = f_1' - f_2'$, где $f_1', f_2' \in L^+$, то $f_1 + f_2' = f_1' + f_2$, и потому $I(f_1) + I(f_2') = I(f_1') + I(f_2)$, откуда $I(f_1) - I(f_2) = I(f_1') - I(f_2')$, следовательно, формула (16) определяет $I(f)$ однозначно. Наконец, для $f = f_1 + if_2$, $f_1, f_2 \in L^+$, полагаем

$$I(f) = I(f_1) + iI(f_2). \tag{17}$$

Из свойств а), в) и г) следует, что $I(f)$ — интеграл на L, не равный тождественно нулю, а из свойства б) — что $I(f)$ правоинвариантен. Тем самым доказано *существование* правоинвариантного интеграла.

Докажем теперь его единственность с точностью до множителя.

Пусть I' — какой-нибудь правоинвариантный интеграл на $\mathfrak{G}$, не равный тождественно нулю, а μ_r и ν_r — меры, определенные интегралами I и I'. Пусть $f_0, f \in L^+$, $f_0 \neq 0$, $f \neq 0$.

Положим

$$\varphi(g') = \frac{f(g'^{-1})}{\int f_0(f'^{-1}g)\, d\mu_r(g)}, \tag{18}$$

откуда

$$f(g') = \varphi(g'^{-1}) \int f_0(g'g)\, d\mu_r(g). \tag{19}$$

Пользуясь равномерной непрерывностью функции f_0 и свойством а) интеграла I, нетрудно показать, что знаменатель в (18) непрерывен и больше нуля; поэтому $\varphi \in L^+$.

Положим

$$\psi(g) = \int f_0(g')\, \varphi(gg'^{-1})\, d\nu_r(g'); \tag{20}$$

тогда [1] $\psi \in L^+$. Интегрируя обе части (20) по $d\mu_r(g)$, применяя теорему 5 п. 18 § 6 и пользуясь правой инвариантностью меры μ, получаем

$$I(\psi) = \int \psi(g)\, d\mu_r(g) = \int f_0(g') \left[\int \varphi(gg'^{-1})\, d\mu_r(g)\right] d\nu_r(g') = \\ = \int f_0(g') \left[\int \varphi(g)\, d\mu_r(g)\right] d\nu_r(g') = I(\varphi) I'(f_0). \quad (21)$$

С другой стороны, в силу правой инвариантности меры ν_r мы можем в (20) подставить $g'g$ вместо g'; тогда (20) примет вид

$$\psi(g) = \int f_0(g'g)\, \varphi(g'^{-1})\, d\nu_r(g')$$

и в силу (19)

$$I(\psi) = \int \varphi(g'^{-1}) \left[\int f_0(g'g)\, d\mu_r(g)\right] d\nu_r(g) = \int f(g)\, d\nu_r(g) = I'(f). \quad (22)$$

Сравнивая (21) и (22), заключаем, что

$$I'(f) = I'(f_0) I(\varphi). \quad (23)$$

В частности, (23) должно иметь место при $I' = I$, так что

$$I(f) = I(f_0) I(\varphi).$$

Поэтому

$$\frac{I'(f)}{I(f)} = \frac{I'(f_0)}{I(f_0)},$$

т. е.

$$I'(f) = c\, I(f), \quad (24)$$

где $c = \dfrac{I'(f_0)}{I(f_0)} > 0$. Очевидно (см. (16) и (17)), соотношение (24) остается справедливым для всех $f \in L$. Тем самым доказана [2] следующая

Теорема. *На всякой локально бикомпактной группе $\mathfrak{G}$ существует правоинвариантный интеграл и с точностью до постоянного множителя только один.*

Аналогично доказывается существование и единственность с точностью до множителя левоинвариантного интеграла.

III. *Правоинвариантная мера всякого открытого множества U положительна, а всякого бикомпактного множества Q конечна.*

---

[1] Непрерывность ψ следует из равномерной непрерывности функции φ; кроме того, если $f_0 = 0$ вне Q_0 и $\varphi = 0$ вне Q, где Q_0 и Q бикомпактны, то $\psi = 0$ вне бикомпактного QQ_0 (см. IV п. 3).

[2] А. Картан [1] дал другое доказательство этой теоремы (см. первое издание этой книги), не использующее леммы Цорна (на которой основано доказательство теоремы Тихонова); по поводу других доказательств см. также Бредон [1] и Келли и Морс [1].

Доказательство. Пусть V — открытое множество, замыкание которого бикомпактно и содержится в U, а f — функция из L^+, равная нулю вне $\overline{V}$ и удовлетворяющая условиям $f \not\equiv 0$, $f \leqslant 1$. Тогда $\mu_r(U) \geqslant I(f) > 0$. Далее, пусть $f \in L^+$ и $f = 1$ на Q; тогда

$$\mu_r(Q) \leqslant I(f) < \infty.$$

Если

$$I_r(x) = \int x(g)\, d\mu_r(g)$$

есть правоинвариантный интеграл на локально бикомпактной группе $\mathfrak{G}$, то

$$I'_r(x) = \int x(hg)\, d\mu_r(g)$$

при каждом фиксированном $h \in \mathfrak{G}$ есть также правоинвариантный интеграл, и потому

$$\int x(hg)\, d\mu_r(g) = \lambda(h) \int x(g)\, d\mu_r(g), \tag{25}$$

где $\lambda(h)$ — некоторая числовая функция. Легко видеть, что

$$\lambda(h_1 h_2) = \lambda(h_1)\, \lambda(h_2), \quad \lambda(e) = 1.$$

Кроме того, из свойств функций $x \in L$ (см. V п. 3) и функционала I_r вытекает, что $\lambda(h)$ непрерывна.

Положив

$$I_l(x) = \int x(g)\, \lambda(g)\, d\mu_r(g),$$

получим левоинвариантный интеграл I_l. Действительно, применяя (25) к $x(g)\, \lambda(g)$ вместо $x(g)$, заключаем, что

$$\lambda(h) \int x(hg)\, \lambda(g)\, d\mu_r(g) = \int x(hg)\, \lambda(hg)\, d\mu_r(g) = \\ = \lambda(h) \int x(g)\, \lambda(g)\, d\mu_r(g),$$

откуда

$$\int x(hg)\, \lambda(g)\, d\mu_r(g) = \int x(g)\, \lambda(g)\, d\mu_r(g).$$

Это показывает, что при надлежащей нормировке мер

$$\frac{d\mu_l(g)}{d\mu_r(g)} = \lambda(g). \tag{26}$$

Кроме того,

$$\int x(g^{-1})\, d\mu_r(g) = \int x(g)\, \lambda(g)\, d\mu_r(g). \tag{27}$$

Действительно, полагая $x^*(g) = x(g^{-1})$, имеем

$$\int x(g_0 g^{-1})\, d\mu_r(g) = \int x^*(g g_0^{-1})\, d\mu_r(g) = \\ = \int x^*(g)\, d\mu_r(g) = \int x(g^{-1})\, d\mu_r(g).$$

Следовательно, левая часть в (27) есть левоинвариантный интеграл и потому

$$\int x(g^{-1})\, d\mu_r(g) = c \int x(g)\, \lambda(g)\, d\mu_r(g).$$

Применяя это равенство к функциям x, отличным от нуля лишь в окрестности, где $|\lambda(g) - 1| < \varepsilon$, и удовлетворяющим условиям: $x(g^{-1}) = x(g)$, $\int x(g)\, d\mu_r(g) = 1$, заключаем, что $c = 1$.

IV. *Группа $\mathfrak{G}$ бикомпактна тогда и только тогда, когда ее инвариантные меры конечны.*

Доказательство. Если $\mathfrak{G}$ бикомпактна, то $1 \in L(\mathfrak{G})$, и потому $\mu_l(\mathfrak{G}) = I_l(1) < \infty$ и $\mu_r(\mathfrak{G}) = I_r(1) < \infty$. Обратно, если $\mathfrak{G}$ не бикомпактна, то существует окрестность единицы с бикомпактным замыканием такая, что $\mathfrak{G}$ нельзя покрыть конечным числом сдвигов окрестности V. Следовательно, существует бесконечная последовательность элементов $g_n \in \mathfrak{G}$ таких, что $g_n \notin \bigcup\limits_{k=1}^{n-1} g_k V$. Пусть U — симметричная окрестность единицы такая, что $UU \subset V$. Тогда множества $g_n U$ не пересекаются и имеют одну и ту же положительную левоинвариантную меру; поэтому $\mu_l(\mathfrak{G}) = \infty$; аналогично доказывается, что $\mu_r(\mathfrak{G}) = \infty$.

Группа $\mathfrak{G}$ называется *унимодулярной*, если $\lambda(g) \equiv 1$. В случае унимодулярной группы правоинвариантный интеграл является также левоинвариантным и определенная им мера называется *двусторонне инвариантной* или просто *инвариантной*. Таким образом, для инвариантной меры μ равенства (1′), (2) п. 4 и (27) принимают вид

$$\int x(hg)\, d\mu(g) = \int x(gh)\, d\mu(g) = \int x(g^{-1})\, d\mu(g).$$

Очевидно, всякая коммутативная группа унимодулярна. Кроме того,

V. *Бикомпактная группа унимодулярна.*

Действительно, полагая в (25) $x(g) \equiv 1$, имеем

$$\mu_r(\mathfrak{G}) = \lambda(h)\, \mu_r(\mathfrak{G}), \quad \lambda(h) \equiv 1.$$

Пусть теперь U — симметричная окрестность единицы такая, что $\overline{U}$ бикомпактно. Положим $\mathfrak{G}_0 = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{U}^n$, так что $\mathfrak{G}_0$ есть объединение счетного числа бикомпактных множеств $\overline{U}^n$. Очевидно, $\mathfrak{G}_0$ — подгруппа группы $\mathfrak{G}$. Кроме того, $\mathfrak{G}_0$ одновременно открыта и замкнута. Действительно, если $g_0 \in \mathfrak{G}_0$, то $g_0 \in \overline{U}^n$ при некотором n, $g_0 U$ есть окрестность элемента g_0 и $g_0 U \subset \overline{U}^{n+1} \subset \mathfrak{G}_0$; следовательно, $\mathfrak{G}_0$ открыта. С другой стороны, $\overline{\mathfrak{G}}_0 \subset U\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G}_0$ и потому $\mathfrak{G}_0$ замкнута.

Но тогда вся группа $\mathfrak{G}$ есть объединение (может быть, несчетного числа) непересекающихся правых смежных классов $\{\mathfrak{G}_0 g_\alpha\}$ (см. п. 2), каждый из которых есть одновременно замкнутое и открытое множество, и притом объединение счетного числа бикомпактных множеств. Если V — произвольное открытое множество, то $V = \bigcup\limits_\alpha V_\alpha$, где $V_\alpha = V \cap \mathfrak{G}_0 g_\alpha$ — открытые множества. Но в силу III мера непустого открытого множества положительна; кроме того, $\mu(V) = \sum\limits_\alpha \mu(V_\alpha)$ (см. 1 п. 5 § 6); следовательно, если V суммируемо, то V может пересекаться не более чем со счетным числом множеств $\mathfrak{G}_0 g_\alpha$. С другой стороны, для всякого суммируемого множества $A \subset \mathfrak{G}$ существует открытое суммируемое множество $V \supset A$ (см. IX п. 8 § 6); поэтому также всякое суммируемое множество пересекается не более чем со счетным числом множеств $\mathfrak{G}_0 g_\alpha$.

Так как $\mathfrak{G}_0 g_\alpha = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (\overline{U}^{n+1} g_\alpha - \overline{U}^n g_\alpha) \bigcup \overline{U} g_\alpha$ и каждое из множеств $\overline{U} g_\alpha$, $\overline{U}^{n+1} g_\alpha - \overline{U}^n g_\alpha$ суммируемо, то каждое $\mathfrak{G}_0 g_\alpha$ есть объединение не более чем счетного числа непересекающихся множеств, из которых одно нулевое, а остальные бикомпактны (см. X п. 8 § 6). Следовательно,

VI. *Всякая локально бикомпактная группа удовлетворяет условиям замечания* 1 п. 16 § 6.

П р и м е р ы 1. В группе R^1 инвариантный интеграл имеет вид $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt$; действительно, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t + t_0)\, dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\, dt$. Аналогично, инвариантный интеграл в группе C^1 имеет вид $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$, $\zeta = \xi + i\eta$; в группах R_0^1 и C_0^1 соответственно:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\, \frac{dt}{t} \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(\xi, \eta)\, \frac{d\xi\, d\eta}{|\xi + i\eta|^2}.$$

2. Пусть K — группа вещественных треугольных матриц второго порядка

$$K = \left\{ \left\| \begin{matrix} \lambda^{-1} & \mu \\ 0 & \lambda \end{matrix} \right\| \right\}.$$

Тогда лево- и правоинвариантный интегралы на K с точностью до постоянного множителя единственны и определяются формулами

$$I_l(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(\lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu, \quad I_r(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(\lambda, \mu) |\lambda|^{-2}\, d\lambda\, d\mu.$$

§ 28. Определение и основные свойства группового кольца

1. Определение группового кольца. Рассмотрим сначала тот случай, когда группа $\mathfrak{G}$ состоит из конечного числа элементов; такая группа называется *конечной*. Обозначим через $R(\mathfrak{G})$ совокупность всех формальных линейных комбинаций элементов группы $\mathfrak{G}$. Каждая такая линейная комбинация определяется ее коэффициентами при элементах группы $\mathfrak{G}$; обозначая через $x(g)$ коэффициент при $g \in \mathfrak{G}$, мы можем сказать, что $R(\mathfrak{G})$ состоит из всевозможных сумм $x = \sum\limits_g x(g)\, g$, где $x(g)$ — всевозможные функции на $\mathfrak{G}$ и суммирование ведется по всей группе $\mathfrak{G}$. Две такие линейные комбинации $x = \sum\limits_g x(g)\, g$, $y = \sum\limits_g y(g)\, g$ мы будем считать равными тогда и только тогда, когда $x(g) \equiv y(g)$; в частности, мы будем писать $x = 0$ тогда и только тогда, когда $x(g) \equiv 0$.

Определим в $R(\mathfrak{G})$ операции умножения на число, сложения и умножения, положив

$$\lambda x = \sum_g [\lambda x(g)]\, g, \quad x + y = \sum_g [x(g) + y(g)]\, g,$$

$$xy = \sum_{g_1} \sum_{g_2} x(g_1)\, y(g_2)\, g_1 g_2 \tag{1}$$

при $x = \sum\limits_g x(g)\, g$, $y = \sum\limits_g y(g)\, g$. Тогда $R(\mathfrak{G})$ станет кольцом, причем единицей в нем будет единичный элемент группы $\mathfrak{G}$, т. е. комбинация $x = \sum x(g)\, g$, в которой $x(e) = 1$ и $x(g) = 0$ при $g \neq e$.

Кольцо $R(\mathfrak{G})$ называется *групповым кольцом* конечной группы $\mathfrak{G}$.

Вместо того чтобы рассматривать линейные комбинации $x = \sum\limits_g x(g)\, g$, мы можем рассматривать сами функции $x = x(g)$ и трактовать $R(\mathfrak{G})$ как совокупность всех этих функций; в этом случае операции умножения на число и сложения определяются обычным образом:

$$\lambda x = \lambda\, x(g), \quad x + y = x(g) + y(g).$$

Чтобы выяснить, как определяется умножение в $R(\mathfrak{G})$, положим в (1) $g_1 g_2 = g$ и изменим порядок суммирования; мы получим

$$xy = \sum_g \left(\sum_{g_1} x(g_1)\, y(g_1^{-1} g) \right) g.$$

Следовательно, закон умножения в $R(\mathfrak{G})$ определяется формулой

$$xy(g) = \sum_{g_1} x(g_1)\, y(g_1^{-1} g). \tag{1'}$$

Операция умножения, определенная формулой $(1')$, называется обычно *свертыванием* [1]).

Мы можем теперь перенести определение группового кольца на произвольные локально бикомпактные группы. Пусть $\mathfrak{G}$ — локально бикомпактная группа, а μ — левоинвариантная мера в $\mathfrak{G}$. Пусть $L^1 = L^1(\mathfrak{G})$ — пространство L^1, определенное этой мерой (см. п. 7 § 6), т. е. совокупность всех μ-измеримых функций $a = a(g)$, для которых $\int |a(g)|\, d\mu(g) < \infty$. Тогда L^1 — пространство Банаха с операциями $\lambda a = \lambda a(g)$, $a + b = a(g) + b(g)$. Но L^1 можно также сделать нормированным кольцом, определив по аналогии с $(1')$ операцию умножения в L^1 формулой

$$(a \cdot b)(g) = \int a(g_1)\, b(g_1^{-1})\, d\mu(g_1).$$

Чтобы оправдать это определение, нам надо установить, что $(a \cdot b)(g)$ также принадлежит L^1 и что $\|a \cdot b\|_1 \leqslant \|a\|_1 \cdot \|b\|_1$. Кроме того, надо установить, что

$$\begin{gathered} \alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b, \quad a \cdot (\alpha b) = \alpha(a \cdot b), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \end{gathered} \tag{2}$$

для всех $a, b, c \in L^1$ и всех комплексных чисел α (см. п. 1 § 7). Но из теоремы Фубини [2]) (см. п. 18 § 6) и левой инвариантности меры вытекает, что

$$\begin{aligned} \|a \cdot b\|_1 = \int \left| \int f(g_1)\, b(g_1^{-1} g)\, d\mu(g_1) \right| d\mu(g) \leqslant \\ \leqslant \int \left[\int |a(g_1)|\, |b(g_1^{-1} g)|\, d\mu(g_1) \right] d\mu(g) = \\ = \int \left[\int |b(g_1^{-1} g)|\, d\mu(g) \right] |a(g_1)|\, d\mu(g_1) = \\ = \int \left[\int |b(g)|\, d\mu(g) \right] |a(g_1)|\, d\mu(g_1) = \\ = \|b_1\|_1 \cdot \int |a(g_1)|\, d\mu(g_1) = \|b_1\|_1 \cdot \|a\|_1, \end{aligned}$$

а соотношения (2) легко проверяются непосредственно.

---

[1]) В тех случаях, когда надо будет подчеркнуть, что речь идет о свертывании, а не обычном умножении функций, мы будем писать $x \cdot y$ вместо xy.

[2]) В этом случае из существования повторного интеграла следует существование кратного интеграла. Действительно, пусть $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $a, b \in L^1(\mathfrak{G})$; тогда существуют функции a_1, b_1 — пределы неубывающих последовательностей полунепрерывных сверху функций и a_2, b_2 — пределы невозрастающих последовательностей полунепрерывных снизу функций такие, что $a_1 \leqslant a \leqslant a_2$, $b_1 \leqslant b \leqslant b_2$ и $I_l(a_1) = I_l(a) = I_l(a_2)$, $I_l(b_1) = I_l(b) = I_l(b_2)$. Пусть J_l — интеграл на $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$, отвечающий мере $\mu_l \times \mu_l$. Тогда

$$\begin{gathered} a_1(g_1)\, b_1(g_1^{-1} g_2), \quad a_2(g_1)\, b_2(g_1^{-1} g_2) \in L^1(\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2), \\ a_1(g_1)\, b_1(g_1^{-1} g_2) \leqslant a(g_1)\, b(g_1^{-1} g_2) \leqslant a_2(g_1)\, b_2(g_1^{-1} g_2) \end{gathered} \tag{3}$$

Положим

$$a^*(g) = \lambda^{-1}(g)\overline{a(g^{-1})},$$

где $a(g) \in L^1$. В силу (26) и (27) п. 5 § 27

$$\|a^*\|_1 = \int |a^*(g)|\, d\mu(g) = \int |a(g^{-1})|\lambda^{-1}(g)\, d\mu(g) = \\ = \int |a(g^{-1})|\, d\mu_r(g) = \int |a(g)|\lambda(g)\, d\mu_r(g) = \\ = \int |a(g)|\, d\mu(g) = \|a\|_1 < \infty,$$

так что $a^* \in L^1$ и $\|a^*\|_1 = \|a\|_1$. Легко также проверить выполнение всех остальных аксиом инволюции, в том числе соотношения $(xy)^* = y^*x^*$, следовательно, при этом определении инволюции $L^1(\mathfrak{G})$ становится банаховым симметричным кольцом.

Кольцо $L^1(\mathfrak{G})$ тогда и только тогда содержит единицу, когда группа $\mathfrak{G}$ дискретна.

Доказательство. Если $\mathfrak{G}$ дискретна, то отдельные элементы группы $\mathfrak{G}$ являются множествами, имеющими одну и ту же, и притом положительную, инвариантную меру, которую можно считать равной единице. Единицей кольца $L^1(\mathfrak{G})$ будет тогда функция

$$e(g) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad g = e, \\ 0 & \text{при} \quad g \neq e. \end{cases}$$

Обратно, пусть $L^1(\mathfrak{G})$ содержит единицу $e(g)$; докажем сначала, что тогда меры непустых открытых множеств имеют положительную нижнюю грань. Действительно, в противном случае существовала бы окрестность U единицы группы $\mathfrak{G}$ такая, что $\int\limits_U |e(g)|\, d\mu_l(g) < \varepsilon$ (см. XI п. 10 § 6). Но тогда, выбирая симметричную окрестность V единицы

и

$$J_l(a_1(g_1)\, b_1(g_1^{-1}g_2)) = J_l(a_2(g_1)\, b_2(g_1^{-1}g_2)) = I_l(a)I_l(b).$$

Действительно, функция $a_1(g_1)\, b_1(g_1^{-1}g_2)$ есть предел неубывающей последовательности полунепрерывных снизу, а функция $a_2(g_1)\, b_2(g_1^{-1}g_2)$ — невозрастающей последовательности полунепрерывных сверху функций на $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$, и потому для функции $a_2(g_1)\, b_2(g_1^{-1}g_2)$ из существования повторного интеграла следует существование кратного интеграла (см. I п. 18 § 6 и п. а) в доказательстве предложения X п. 18 § 6). Следовательно,

$$J_l(a_2(g_1)\, b_2(g_1^{-1}g_2)) = I_l(a_2)I_l(b_2) = I_l(a)I_l(b) < \infty.$$

Так как $a_1(g_1)\, b_1(g_1^{-1}g_2)$ J_l-измерима и $a_1(g_1)\, b_1(g_1^{-1}g_2) \leqslant a_2(g_1)\, b_2(g_1^{-1}g_2)$, то также $a_1(g_1)\, b_1(g_1^{-1}g_2) \in L^1(J_l)$, и потому $J_l(a_1(g_1)\, b_1(g_1^{-1}g_2)) = I_l(a)I_l(b_1)$. Но тогда из (3) следует, что $a(g_1)\, b(g_1^{-1}g_2)$ J_l-измерима и существует $J_l(a(g_1)\, b(g_1^{-1}g_2)) = I_l(a)I_l(b)$, так что утверждение доказано для $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $a, b \in L^1(\mathfrak{G})$. Отсюда легко следует справедливость утверждения для любых $a, b \in L^1(\mathfrak{G})$.

группы, удовлетворяющую условию $V^2 \subset U$, мы имели бы для характеристической функции $\xi_V(g)$ множества V:

$$\xi_V(g) = (e \cdot \xi_V)(g) = \int e(g')\, \xi_V(g'^{-1}g)\, d\mu_l(g') = \\ = \int\limits_{gV} e(g')\, d\mu_l(g') \leqslant \int\limits_U |e(g')|\, d\mu_l(g') < \varepsilon$$

при $g \in V$, что противоречит равенству $\xi_V(g) = 1$.

Итак, мера каждого непустого открытого множества остается большей некоторого $a > 0$. Но тогда открытое множество, замыкание которого бикомпактно, может состоять только из конечного числа элементов, ибо в противном случае его мера была бы больше na при любом натуральном n. Следовательно, каждая отдельная точка есть открытое множество и группа $\mathfrak{G}$ дискретна.

Таким образом, отбрасывая случай дискретной группы, мы можем считать, что $L^1(\mathfrak{G})$ не содержит единицы. Присоединив к $L^1(\mathfrak{G})$ единицу, получим банахово симметричное кольцо с единицей, которое мы обозначим через $R(\mathfrak{G})$ и будем называть *групповым кольцом группы* $\mathfrak{G}$.

Если же группа $\mathfrak{G}$ дискретна, то ее групповым кольцом мы будем считать $L^1(\mathfrak{G})$, так что в этом случае $R(\mathfrak{G}) = L^1(\mathfrak{G})$.

2. Некоторые свойства группового кольца.

I. *При $x \in L^1(\mathfrak{G})$ элементы*

$$x^{g_0}(g) = x(gg_0), \quad x_{g_0}(g) = x(g_0^{-1}g)$$

кольца $L^1(\mathfrak{G})$ являются непрерывными функциями от g_0 в смысле нормы в $L^1(\mathfrak{G})$.

Доказательство. В силу V п. 3 § 27 утверждение справедливо для всех функций $x \in L(\mathfrak{G})$; с другой стороны, $L(\mathfrak{G})$ плотно в $L^1(\mathfrak{G})$ (см. п. 7 § 6). Поэтому, выбирая сначала $x' \in L(\mathfrak{G})$ так, чтобы было $\|x - x'\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$, а затем окрестность U единицы так, чтобы при $g \in Uh$ было $\|x'_g - x'_h\| < \frac{\varepsilon}{3}$, имеем

$$\|x_g - x_h\|_1 \leqslant \|x_g - x'_g\|_1 + \|x'_g - x'_h\|_1 + \|x'_h - x_h\|_1 < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

II. *В кольце $L^1(\mathfrak{G})$ есть множество, аппроксимирующее единицу.*

Доказательство. Каждой окрестности U единицы поставим в соответствие неотрицательную функцию $z_U \in L^1(\mathfrak{G})$, равную нулю вне U и такую, что $\int z_U(g)\, d\mu(g) = 1$. Функции z_U образуют множество, аппроксимирующее единицу. Действительно, при $x \in L^1(\mathfrak{G})$

$$(z_U \cdot x)(g) = \int z_U(g_1)\, x(g_1^{-1}g)\, d\mu(g_1),$$

т. е.
$$z_U \cdot x = \int z_U(g_1)\, x_{g_1}\, d\mu(g_1).$$

Отсюда
$$\|z_U \cdot x - x\|_1 \leqslant \int z_U(g_1) \|x_{g_1} - x\|_1\, d\mu(g_1) = \int\limits_U z_U(g_1) \|x_{g_1} - x\|_1\, d\mu(g_1).$$

Выберем U так, чтобы при $g_1 \in U$ было $\|x_{g_1} - x\|_1 < \varepsilon$ (см. I); тогда
$$\|z_U \cdot x - x\|_1 \leqslant \varepsilon \int\limits_U z_U(g_1)\, d\mu(g_1) = \varepsilon.$$

Аналогично доказывается, что $\|x \cdot z_U - x\|_1 \to 0$; доказательство лишь несколько осложняется необходимостью введения функции $\lambda(g)$ (см. п. 5 § 27), и мы предоставляем читателю его подробное проведение.

Замечание 1. *Утверждения предложений* I *и* II *остаются справедливыми, если в них заменить пространство* $L^1(\mathfrak{G})$ *пространством* $L^2(\mathfrak{G})$ (*беря при этом* U *с бикомпактным замыканием* $\overline{U}$). *В частности, для любой функции* $x \in L^2(\mathfrak{G})$
$$\|x - x \cdot z_U\|_2 < \varepsilon$$
при надлежащем выборе окрестности U *единичного элемента.*

Замечание 2. *Если* $x \in L(\mathfrak{G})$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *существует окрестность* U *единицы такая, что*
$$|(z_U \cdot x)(g) - x(g)| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad g \in \mathfrak{G}.$$

Действительно, выбирая U такой, что $\overline{U}$ бикомпактно и $|x(g_1^{-1}g) - x(g)| < \varepsilon$ при $g_1 \in U$ (см. V п. 3 § 27), имеем
$$|(z_U \cdot x)(g) - x(g)| = \\ = \left| \int\limits_U z_U(g_1)[x(g_1^{-1}g) - x(g)]\, d\mu(g_1)\, \theta \right| < \varepsilon \int\limits_U z_U(g_1)\, d\mu(g_1) = \varepsilon.$$

III. *Если* $x_1, x_2 \in L^2(\mathfrak{G})$, *то* $(x_1 \cdot x_2)(g)$ *есть непрерывная функция от* g.

Доказательство. Положим $y(g) = \overline{x(g^{-1})}$. В силу предыдущего замечания 1 элемент $y_{g_0}(g) = y(g_0^{-1}g) = \overline{x_2(g^{-1}g_0)}$ есть непрерывная функция от g_0 в смысле нормы в $L^2(\mathfrak{G})$, и потому скалярное произведение
$$(x_1, y_{g_0})_2 = \int x_1(g)\, \overline{y_{g_0}}(g)\, d\mu_l(g) = \\ = \int x_1(g)\, x_2(g^{-1}g_0)\, d\mu_l(g) = (x_1 \cdot x_2)(g_0)$$
есть непрерывная функция от g_0.

IV. *Замкнутое подпространство I в $L^1(\mathfrak{G})$ есть левый (правый) идеал в $L^1(\mathfrak{G})$ тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно левых (правых) сдвигов.*

Доказательство. Пусть z_U — та же, что и в предложении II. Если I — левый идеал в $L^1(\mathfrak{G})$ и $x \in I$, то также $z_{Ug_0}x \in I$. Но

$$x_{Ug_0} \cdot x(g) = \int z_U(g_0^{-1}g')\, x(g'^{-1}g)\, d\mu(g') = \\ = \int z_U(g')\, x(g'^{-1}g_0^{-1}g)\, d\mu(g') = (z_u \cdot x)_{g_0}(g).$$

Отсюда в силу II

$$z_{Ug_0} \cdot x = (z_U \cdot x)_g \to x_g;$$

следовательно, $x_g \in I$, т. е. I инвариантно относительно левых сдвигов.

Обратно, пусть I инвариантен относительно любого левого сдвига и $x \in I$. Предположим сначала, что $z' \in L(\mathfrak{G})$ и обращается в нуль вне бикомпактного множества Q. Тогда функция $z'(g_1)\, x_{g_1}$ непрерывна по норме в L^1 (в силу I) и обращается в нуль вне Q. Следовательно. повторяя обычные рассуждения, можно показать, что

$$z' \cdot x = \int\limits_{\mathfrak{G}} z'(g_1)\, x_{g_1}\, d\mu(g_1) = \int\limits_{Q} z'(g_1)\, x_{g_1}\, d\mu(g_1)$$

есть предел по норме конечных сумм вида

$$\sum_k z'(g_k)\, x_{g_k}\, \mu(\Delta_k) \in I,$$

и потому $z' \cdot x \in I$ в силу замкнутости I. Но так как $L(\mathfrak{G})$ плотно в $L^1(\mathfrak{G})$ (см. п. 7 § 6), то для всякой функции $z \in L^1(\mathfrak{G})$ и всякого $\varepsilon > 0$ существует функция $z' \in L(\mathfrak{G})$ такая, что $\|z' - z\|_1 < \varepsilon$. Тогда $\|z' \cdot x - z \cdot x\|_1 < \varepsilon \|x\|$ и, следовательно, $z \cdot x \in I$. Аналогично доказывается утверждение относительно правого идеала.

V. *Групповое кольцо локально бикомпактной топологической группы есть приведенное кольцо.*

Доказательство. Для любой функции $a \in L^1(\mathfrak{G})$ определим оператор A_a в гильбертовом пространстве $L^2(\mathfrak{G})$, положив

$$A_a\xi = a \cdot \xi \quad \text{для} \quad \xi \in L^2(\mathfrak{G}). \tag{1}$$

Докажем, что A_a ограничен. Для этого положим $T_{g_1}\xi = \xi(g_1^{-1}g)$; оператор T_{g_1} унитарен, ибо он взаимно однозначно отображает $L^2(\mathfrak{G})$ на самое себя и изометричен в силу

$$\|T_{g_1}\xi\|_2^2 = \int |\xi(g_1^{-1}g)|^2\, d\mu(g) = \int |\xi(g)|^2\, d\mu(g) = \|\xi\|_2^2.$$

Формулу (1) можно переписать в виде

$$A_a\xi = \int a(g_1) T_{g_1}\xi\, d\mu(g_1),$$

откуда

$$\|A_a\xi\|_2 \leqslant \int |a(g_1)|\,\|T_{g_1}\xi\|_2\,d\mu(g_1) = \int |a(g_1)|\,d\mu(g_1)\cdot\|\xi\|_2 = \|a\|_1\cdot\|\xi\|_2.$$

Следовательно, A_a ограничен и $|A_a| \leqslant \|a\|_1$. Легко проверить, что соответствие $a \to A_a$ есть представление кольца $L^1(\mathfrak{G})$.

Положив

$$\lambda e + a \to \lambda 1 + A_a,$$

мы получим представление всего кольца $R(\mathfrak{G})$. Поэтому для любой функции $\xi \in L^2(\mathfrak{G})$

$$f(\lambda e + a) = \lambda(\xi, \xi) + (A_a\xi, \xi)$$

есть положительный функционал в кольце $R(\mathfrak{G})$.

Пусть $f(a^*a) = 0$ для любого положительного функционала f; тогда, в частности, $\|A_a\xi\|_2 = 0$ для всех $\xi \in L^2(\mathfrak{G})$. Это означает, что, какова бы ни была функция $\xi \in L^2(\mathfrak{G})$,

$$\int a(g_1)\,\xi(g_1^{-1}g)\,d\mu(g_1) = 0$$

для почти всех $g \in \mathfrak{G}$. Отсюда, беря в качестве ξ характеристическую функцию произвольного суммируемого множества, заключаем, что $a(g) = 0$ почти всюду на $\mathfrak{G}$. Если поэтому $a \neq 0$, то среди функционалов $f(x) = (A_x\xi, \xi)$ существует такой, для которого $f(a^*a) \neq 0$. Если же $a = 0$, $\lambda \neq 0$, то таким функционалом будет $f(\lambda e + a) = \lambda$. Тем самым кольцо $R(\mathfrak{G})$ — приведенное.

Одновременно мы доказали следующее предложение:

VI. *Если* $x_1 \in L^1(\mathfrak{G})$, $x_2 \in L^2(\mathfrak{G})$, *то* $x_1x_2 \in L^2(\mathfrak{G})$.

VII. *Групповое кольцо локально бикомпактной группы полупростое.*

Действительно, радикал всегда содержится в приводящем идеале (см. VII п. 2 § 18); последний же есть $\{0\}$ в силу V.

В статьях Венделя [1, 2], Гринлифа [1], Стричартца [1], Эдвардса [5] и др. авторов исследованы гомоморфизмы и изоморфизмы групповых колец $L^2(\mathfrak{G})$ (и $L^p(\mathfrak{G})$, если $\mathfrak{G}$ бикомпактна). Стричартц [1] доказал, что всякий изометрический изоморфизм U колец $L^p(\mathfrak{G}_1)$ на $L^p(\mathfrak{G}_2)$ ($\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_1$ бикомпактны при $p \neq 1$) при $p \neq 2$ имеет вид $(Uf)(g) = J\chi(g)\,f(Ag)$, где $A : \mathfrak{G}_2 \to \mathfrak{G}_1$ — изоморфизм топологических групп, $\chi(g)$ — гомоморфизм топологической группы $\mathfrak{G}_2$ на группу вращений окружности, J — константа $= 1$ при $p \neq 1$.

§ 29. Унитарные представления локально бикомпактной группы и их связь с представлениями группового кольца

1. Унитарные представления группы. *Унитарным представлением* группы $\mathfrak{G}$ называется всякий гомоморфизм группы $\mathfrak{G}$ в группу унитарных операторов в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Другими словами, унитарное представление есть отображение $g \to U_g$ группы $\mathfrak{G}$ в группу унитарных операторов U, при котором

$$U_{g_1} U_{g_2} = U_{g_1 g_2}, \quad U_e = 1.$$

Пусть $\mathfrak{G}$ — локально бикомпактная группа. Унитарное представление группы $\mathfrak{G}$ называется *слабо измеримым*, соответственно *слабо непрерывным*, если функция

$$\varphi(g) = (U_g \xi, \eta)$$

измерима, соответственно непрерывна, для любых векторов $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$. Унитарное представление называется *непрерывным* при $g = g_0$, если

$$|U_g \xi - U_{g_0} \xi| \to 0 \quad \text{при} \quad g \to g_0$$

для всех векторов $\xi \in \mathfrak{H}$.

Если представление непрерывно при $g = e$, то оно непрерывно для всех других g. Действительно, это следует из равенства

$$|U_g \xi - U_{g_0} \xi| = |U_{g_0}(U_{g_0^{-1} g} \xi - \xi)| = |U_{g_0^{-1} g} \xi - \xi|.$$

2. Связь между представлениями группы и группового кольца. Пусть $x \to A_x$ — представление группового кольца $R(\mathfrak{G})$ в пространстве $\mathfrak{H}$. Обозначим через $\mathfrak{N}$ совокупность всех векторов ξ таких, что

$$A_a \xi = 0 \quad \text{для всех} \quad a \in L^1(\mathfrak{G}).$$

$\mathfrak{N}$ есть инвариантное подпространство.

Действительно, пусть $x = \lambda e + a_1$, $a_1 \in L^1(\mathfrak{G})$. Тогда

$$ax = a(\lambda e + a_1) = \lambda a + a a_1 \in L^1(\mathfrak{G}).$$

Следовательно,

$$A_a A_x \xi = A_{ax} \xi = 0 \quad \text{для} \quad \xi \in \mathfrak{N}.$$

Это означает, что из $\xi \in \mathfrak{N}$ следует $A_x \xi \in \mathfrak{N}$ для всех $x \in R(\mathfrak{G})$, т. е. что $\mathfrak{N}$ — инвариантное подпространство. В этом инвариантном подпространстве $\mathfrak{N}$ представление имеет тривиальный вид

$$A_{\lambda e + a} = \lambda 1. \tag{1}$$

Представление, определенное формулой (1), называется *вырожденным*. Соответствующее представление кольца $L^1(\mathfrak{G})$ также называется *вырожденным*; оно переводит все элементы кольца $L^1(\mathfrak{G})$ в нуль. Если $\mathfrak{N} \neq (0)$, то мы можем ограничиться рассмотрением нашего представления только в $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}$. В дальнейшем мы будем предполагать, что это отщепление подпространства $\mathfrak{N}$ уже произведено, т. е. что $\mathfrak{N} = (0)$. В этом случае мы будем говорить, что данное представление $x \to A_x$ *не содержит вырожденного представления*.

Теорема 1. *Каждому представлению $x \to A_x$ группового кольца $R(\mathfrak{G})$, не содержащему вырожденного представления, отвечает непрерывное унитарное представление $g \to U_g$ группы $\mathfrak{G}$. Обратно, каждому слабо непрерывному унитарному представлению $g \to U_g$ группы $\mathfrak{G}$ отвечает представление $x \to A_x$ ее группового кольца $R(\mathfrak{G})$, не содержащее вырожденного представления. Эти представления связаны между собой формулой* [1]

$$A_{\lambda e+a} = \lambda 1 + \int a(g)\, U_g\, d\mu(g).$$

Доказательство. Достаточно доказать теорему для циклического представления, ибо всякое представление есть прямая сумма циклических. Итак, пусть $x \to A_x$ есть циклическое представление кольца $R(\mathfrak{G})$; обозначим через ξ_0 циклический вектор этого представления. Пусть $a = a(g) \to L^1(\mathfrak{G})$; положим $a_{g_0}(g) = a(g_0^{-1} g)$. Очевидно, a_{g_0} также $\in L^1(\mathfrak{G})$.

Докажем, что

$$b^*_{g_0} \cdot a_{g_0} = b^* \cdot a \tag{2}$$

для любых двух элементов a, b из $L^1(\mathfrak{G})$. Действительно, в силу соотношения (32) п. 5 § 27 и левой инвариантности меры,

$$\begin{aligned} b^* \cdot a &= \int \overline{b(g_1^{-1})}\, \lambda(g_1^{-1})\, a(g_1^{-1} g)\, d\mu(g_1) = \int \overline{b(g_1)}\, a(g_1 g)\, d\mu(g_1) = \\ &= \int \overline{b(g_0^{-1} g_1)}\, a(g_0^{-1} g_1 g)\, d\mu(g_1) = \int \overline{b_{g_0}(g_1)}\, a_{g_0}(g_1 g)\, d\mu(g_1) = b^*_{g_0} \cdot a_{g_0}. \end{aligned}$$

Обозначим через $\mathfrak{H}'$ совокупность всех элементов ξ вида $\xi = A_a \xi_0$, $a \in L^1(\mathfrak{G})$. $\mathfrak{H}'$ плотно в $\mathfrak{H}$. Действительно, в противном случае существует вектор $\xi_1 \neq 0$, ортогональный к $\mathfrak{H}'$, т. е.

$$(\xi_1,\, A_a \xi_0) = 0$$

для всех $a \in L^1(\mathfrak{G})$. Положим в этом равенстве $a = b^* \cdot x$, где $x \in R(\mathfrak{G})$, $g \in L^1(\mathfrak{G})$. Мы получим тогда

$$(A_b \xi_1,\, A_x \xi_0) = (\xi_1,\, A_{b^* \cdot x} \xi_0) = 0.$$

Таким образом, вектор $A_b \xi_1$ ортогонален ко всем векторам $A_x \xi_0$, $x \in R(\mathfrak{G})$. Так как ξ_0 — циклический вектор, то векторы $A_x \xi_0$ образуют множество, плотное в $\mathfrak{H}$. Следовательно, $A_b \xi_1 = 0$ для всех $b \in L^1(\mathfrak{G})$.

---

[1] По поводу интегрирования операторных функций см. п. 19 § 6.

Это означает, что $\xi_1 \in \mathfrak{N}$. Последнее же противоречит нашему основному предположению, что $\mathfrak{N} = (0)$.

Итак, $\mathfrak{H}'$ плотно в $\mathfrak{H}$. Введем теперь в $\mathfrak{H}'$ оператор U_{g_0}, положив для $\xi = A_a\xi_0$, $a \in L^1(\mathfrak{G})$
$$U_{g_0}\xi = A_{a_{g_0}}\xi_0.$$

Это определение не зависит от выбора a. Действительно, если $\xi = A_a\xi_0 = A_b\xi_0$, $a, b \in L^1(\mathfrak{G})$, то $A_{a-b}\xi_0 = 0$, и потому $A_c\xi_0 = 0$ для всех c из замкнутого левого идеала I в $L^1(\mathfrak{G})$, порожденного элементом $a - b$. Но тогда также $a_{g_0} - b_{g_0} \in I$ (см. IV п. 2 § 28) и потому $A_{a_{g_0}}\xi_0 = A_{b_{g_0}}\xi_0 = U_{g_0}\xi$. Оператор U_{g_0} отображает $\mathfrak{H}'$ на себя. Кроме того, оператор U_{g_0} изометричен. Действительно, из равенства (2) следует, что

$$(U_{g_0}\xi, U_{g_0}\xi) = (A_{a_{g_0}}\xi_0, A_{a_{g_0}}\xi_0) = (A_{a^*_{g_0}\cdot a_{g_0}}\xi_0, \xi_0) = \\ = (A_{a^*\cdot a}\xi_0, \xi_0) = (A_a\xi_0, A_a\xi_0) = (\xi, \xi).$$

Поэтому оператор U_{g_0} продолжается, и притом единственным образом, до унитарного оператора в пространстве $\mathfrak{H}$.

Очевидно, $a_{g_1 g_2} = (a_{g_2})_{g_1}$. Отсюда следует, что $U_{g_1 g_2} = U_{g_1}U_{g_2}$. Поэтому отображение $g \to U_g$ есть унитарное представление группы $\mathfrak{G}$ в пространстве $\mathfrak{H}$.

Это представление непрерывно. Действительно, в силу I п. 2 § 28
$$\|a_{g_0} - a\|_1 = \int |a(g_0^{-1}g) - a(g)|\, d\mu(g) \to 0 \quad \text{при} \quad g_0 \to e.$$

С другой стороны, всякое представление банахова симметричного кольца непрерывно (см. теорему 1 п. 3 § 17); следовательно, также
$$|A_{a_{g_0}} - A_a| \to 0 \quad \text{при} \quad g_0 \to e.$$

Отсюда
$$|A_{a_{g_0}}\xi_0 - A_a\xi_0| \to 0 \quad \text{при} \quad g_0 \to e,$$

т. е.
$$|U_{g_0}\xi - \xi| \to 0 \quad \text{при} \quad g_0 \to e$$

для всех элементов ξ из $\mathfrak{H}'$. Так как $\mathfrak{H}'$ плотно в $\mathfrak{H}$ и $|U_g| = 1$, то это соотношение имеет место во всем пространстве $\mathfrak{H}$.

Тем самым доказана непрерывность представления $g \to U_g$ на элементе $g = e$, следовательно, и на любом другом элементе.

Посмотрим теперь, как из этого представления группы $\mathfrak{G}$ получается исходное представление группового кольца.

Пусть $a_0(g) \in L^1(\mathfrak{G})$. Положим
$$B_{a_0} = \int a_0(g)\, U_g\, d\mu(g).$$

Докажем, что $A_{a_0} = B_{a_0}$. Положим
$$f(x) = (A_x\xi_0, \xi_0).$$

Тогда при $\xi = A_a\xi_0$, $\eta = A_b\xi_0$, $a, b \in L^1(\mathfrak{G})$

$$\begin{aligned}(B_{a_0}\xi, \eta) &= \int a_0(g_1)(U_{g_1}\xi, \eta)\,d\mu(g_1) = \\ &= \int a_0(g_1)(U_{g_1}A_a\xi_0, A_b\xi_0)\,d\mu(g_1) = \\ &= \int a_0(g_1)(A_{b^*}A_{a_{g_1}}\xi_0, \xi_0)\,d\mu(g_1) = \int a_0(g_1)\,f(b^*\cdot a_{g_1})\,d\mu(g_1).\end{aligned}$$

Так как f — непрерывный функционал в $L^1(\mathfrak{G})$, то последнее выражение равно $f\left(b^*\cdot \int a_0(g_1)\,a_{g_1}\,d\mu(g_1)\right)$. С другой стороны,

$$\int a_0(g_1)\,a_{g_1}\,d\mu(g_1) = \int a_0(g_1)\,a(g_1^{-1}g)\,d\mu(g_1) = a_0\cdot a.$$

Поэтому

$$(B_{a_0}\xi, \eta) = f(b^*a_0a) = (A_{b^*a_0a}\xi_0, \xi_0) = (A_{a_0}A_a\xi_0, A_b\xi_0) = (A_{a_0}\xi, \eta).$$

Так как рассматриваемые векторы ξ, η образуют в $\mathfrak{H}$ плотное множество, то отсюда следует, что $A_{a_0} = B_{a_0}$.

Итак, $A_{a_0} = \int a_0(g)\,U_g\,d\mu(g)$, следовательно,

$$A_{\lambda e+a} = \lambda 1 + \int a(g)\,U_g\,d\mu(g). \tag{3}$$

Мы доказали, таким образом, что каждому представлению группового кольца $R(\mathfrak{G})$, не содержащему вырожденного представления, отвечает представление группы $\mathfrak{G}$, из которого это представление кольца $R(\mathfrak{G})$ получается по формуле (3).

Обратно, пусть U_g — слабо непрерывное унитарное представление группы $\mathfrak{G}$. Положим для $a \in L^1(\mathfrak{G})$

$$(A_a\xi, \eta) = \int a(g)(U_g\xi, \eta)\,d\mu(g). \tag{4}$$

Это равенство определяет ограниченный оператор A_a в $\mathfrak{H}$, ибо

$$\left|\int a(g)(U_g\xi, \eta)\,d\mu(g)\right| \leqslant \int |a(g)|\,d\mu(g)\cdot|\xi|\cdot|\eta|.$$

Легко видеть, что соответствие $a \to A_a$ есть представление кольца $L^1(\mathfrak{G})$. Положив

$$A_{\lambda e+a} = \lambda 1 + A_a, \quad a \in L^1(\mathfrak{G}),$$

получим представление кольца $R(\mathfrak{G})$. При этом $\mathfrak{N} = (0)$, т. е. представление $x \to A_x$ не содержит вырожденного представления. Действительно, если $\xi \neq 0$, то $(\xi, \xi) \neq 0$. Выберем окрестность V единицы группы $\mathfrak{G}$ так, чтобы $\overline{V}$ было бикомпактно, $\mu(V) \leqslant 1$ и $|(U_g\xi, \xi) - (\xi, \xi)| < \dfrac{1}{2}(\xi, \xi)$

при $g \in V$. Если тогда $a(g)$ — характеристическая функция множества V, то

$$|(A_a\xi, \xi) - (\xi, \xi)| = \left|\int\limits_V (U_g\xi, \xi)\, d\mu(g) - (\xi, \xi)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_V |(U_g\xi, \xi) - (\xi, \xi)|\, d\mu(g) + [1 - \mu(V)](\xi, \xi) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\,\mu(B)(\xi, \xi) + [1 - \mu(V)](\xi, \xi) < (\xi, \xi),$$

и потому $A_a\xi \neq 0$. Теорема полностью доказана.

В силу этой теоремы построенному только что представлению кольца $R(\mathfrak{G})$ отвечает непрерывное унитарное представление группы $\mathfrak{G}$ — обозначим его U'_g — такое, что

$$A_a = \int a(g)\, U'_g\, d\mu(g), \quad a \in L^1(\mathfrak{G}).$$

Но тогда

$$(A_a\xi, \eta) = \int a(g)(U'_g\xi, \eta)\, d\mu(g).$$

Сличение с равенством (4) дает

$$\int a(g)(U_g\xi, \eta)\, d\mu(g) = \int a(g)(U'_g\xi, \eta)\, d\mu(g).$$

Это равенство имеет место для произвольной суммируемой функции $a(g)$; следовательно, для почти всех g

$$(U_g\xi, \eta) = (U'_g\xi, \eta). \tag{5}$$

Но обе части (5) — непрерывные функции на $\mathfrak{G}$, и потому (5) имеет место для всех $g \in \mathfrak{G}$. Тем самым доказано

Следствие 1. *Каждое слабое непрерывное унитарное представление группы $\mathfrak{G}$ есть ее непрерывное представление.*

Замечание 1. Если пространство представления сепарабельно, то второе утверждение теоремы 1 справедливо для слабо измеримых представлений $g \to U_g$ и $U_g = U'_g$ для почти всех $g \in G$. Действительно, нужно только показать, что $\mathfrak{N} = (0)$. Пусть $\{\xi_n\}$ — полная ортонормальная система в $\mathfrak{G}$. Если $\xi \in \mathfrak{N}$, то $\int a(g)(U_g\xi, \xi_m)\, d\mu(g) = 0$ для всех $a \in L^1(\mathfrak{G})$, и потому $(U_g\xi, \xi_m) = 0$ для всех $g \in \mathfrak{G} - S_m$, где $\mu(S_m) = 0$. Но тогда $(U_g\xi, \xi_m) = 0$ для $m = 1, 2, 3, \ldots$, если $g \in \mathfrak{G} - S$, где $S = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} S_n$ также μ-меры нуль. Так как $\{\xi_n\}$ полна, то отсюда следует, что $U_g\xi = 0$ при $\xi \in \mathfrak{G} - S$, и потому $\xi = 0$. Далее, в силу (5) $(U_g\xi_n, \xi_m) = (U'_g\xi_n, \xi_m)$ при $g \in \mathfrak{G} - \gamma_{nm}$, где $\mu(\gamma_{nm}) = 0$. Поэтому $(U_g\xi_n, \xi_m) = (U'_g\xi_n, \xi_m)$ для всех $n, m = 1, 2, \ldots$ при $\mathfrak{G} - \bigcup\limits_{nm} \gamma_{nm}$, т. е. почти всюду на $\mathfrak{G}$.

Следовательно, $U_g = U'_g$ почти всюду на группе $\mathfrak{G}$.

Таким образом, доказано

Следствие 2. *В сепарабельном гильбертовом пространстве всякое слабо измеримое унитарное представление группы $\mathfrak{G}$ почти всюду совпадает с ее непрерывным унитарным представлением.*

Замечание 2. В формулировке теоремы 1 кольцо $R(\mathfrak{G})$ можно, очевидно, заменить кольцом $L^1(\mathfrak{G})$; при этом представление $a \to A_a$ кольца $L^1(\mathfrak{G})$ естественно назвать вырожденным, если $A_a = 0$ для всех $a \in L^1(\mathfrak{G})$.

3. Теорема полноты. Для унитарного представления группы $\mathfrak{G}$ можно, так же как и для представления кольца, ввести понятие инвариантного подпространства, неприводимости и эквивалентности.

Легко убедиться в справедливости следующего предложения:

Подпространство $\mathfrak{M}$ инвариантно по отношению к унитарному[1] *представлению $g \to U_g$ группы $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда, когда оно инвариантно по отношению к соответствующему представлению $x \to A_x$ группового кольца $R(\mathfrak{G})$.*

Отсюда следует, что *унитарное представление группы $\mathfrak{G}$ неприводимо тогда и только тогда, когда неприводимо соответствующее представление группового кольца $R(\mathfrak{G})$.*

Далее, легко также проверить, что

Два унитарных представления группы $\mathfrak{G}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны соответствующие представления группового кольца.

Из этих предложений следует, что результаты пп. 1, 2, 6 § 17 и § 21 переносятся на унитарные представления групп. При этом прямая сумма унитарных представлений группы определяется аналогично тому, как это делается для прямой суммы представлений кольца.

Система представлений группы $\mathfrak{G}$ называется *полной*, если для любого элемента $g_0 \neq e$ группы $\mathfrak{G}$ существует представление $g \to U_g$ из этой системы такое, что $U_{g_0} \neq 1$.

Теорема 2. *Всякая локально бикомпактная группа обладает полной системой неприводимых унитарных представлений.*

Действительно, существует элемент $a \in L^1(\mathfrak{G})$ такой[2], что $a_{g_0} - a \neq 0$. Согласно теореме 3 п. 4 § 19 существует неприводимое представление $x \to A_x$ группового кольца $R(\mathfrak{G})$, для которого $A_{a_{g_0}-a} \neq 0$, т. е. $a_{a_{g_0}} \neq A_a$. Поэтому существует вектор ξ_0, удовлетворяющий условию

$$A_{a_{g_0}}\xi_0 \neq A_a\xi_0.$$

[1] В дальнейшем в пп. 3 и 4 термин «унитарное представление» будет обозначать непрерывное унитарное представление.

[2] Достаточно, например, взять в качестве функции a характеристическую функцию окрестности V единицы, удовлетворяющей условиям: 1) $\overline{V}$ бикомпактно; 2) $g_0V \cap V = \varnothing$.

Положим $A_a\xi_0 = \xi$, $A_{a_{g_0}}\xi_0 = U_{g_0}\xi$; тогда последнее неравенство принимает вид

$$U_{g_0}\xi \neq \xi.$$

Следовательно, неприводимое унитарное представление $g \to U_g$, построенное по представлению $x \to A_x$ кольца $R(\mathfrak{G})$, удовлетворяет поставленным требованиям.

4. Примеры. а). Унитарные представления группы линейных преобразований прямой. Пусть $\mathfrak{G}_r$ — группа линейных преобразований $y = \alpha x + \beta$ вещественной оси, где α — произвольное положительное число, β — произвольное вещественное число (см. пример 5 п. 1 § 27). Эта группа содержит следующие две коммутативные подгруппы:

1) группа $\mathfrak{T}$ сдвигов $x \to x + \beta$; ее элементы обозначим t_β;

2) группа $\mathfrak{S}$ растяжений $x \to \alpha x$; ее элементы обозначим s_α.

Всякий другой элемент группы $\mathfrak{G}_r$ выражается в виде произведения элемента из $\mathfrak{T}$ на элемент из $\mathfrak{S}$. Поэтому представление группы $\mathfrak{G}_r$ будет задано, если будут известны операторы T_β и S_α, соответствующие элементам t_β и s_α этих подгрупп.

Группа $\mathfrak{G}_r$ имеет серию одномерных представлений, которые получаются, если положить

$$T_\beta = 1, \quad S_\alpha = \chi(\alpha)\, 1,$$

где $\chi(\alpha) = \alpha^{i\rho}$ и ρ — произвольное вещественное число. Различным значениям ρ отвечают неэквивалентные представления этой серии.

Построим теперь неодномерные представления группы $\mathfrak{G}_r$. Обозначим для этого через H_+ совокупность всех функций $\varphi(\lambda)$ с суммируемым квадратом в интервале $0 \leqslant \lambda < \infty$ с обычными операциями и скалярным произведением. Каждому элементу g: $x \to \alpha x + \beta$ группы $\mathfrak{G}_r$ поставим в соответствие оператор

$$U_g^+ \varphi(\lambda) = e^{i\lambda\beta}\varphi(\lambda\alpha) \cdot \alpha^{\frac{1}{2}}$$

в пространстве H_+. В частности,

$$T_\beta^+ \varphi(\lambda) = e^{i\lambda\beta}\varphi(\lambda), \quad S_\alpha^+ \varphi(\lambda) = \varphi(\lambda\alpha) \cdot \alpha^{\frac{1}{2}}.$$

Легко видеть, что U_g^+ — унитарный оператор в H_+ и что $g \to U_g^+$ есть представление группы $\mathfrak{G}_r$. Это представление неприводимо. Действительно, пусть A — оператор в H_+, перестановочный со всеми операторами U_g^+; требуется доказать, что он кратен единице. A перестановочен со всеми операторами T_β^+, т. е. с операторами умножения на $e^{i\lambda\beta}$. Следовательно, он перестановочен со всеми линейными комбинациями таких операторов и их пределами в смысле слабой топологии в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ (см. пример 2 п. 3 § 8), т. е. с любым оператором умножения на существенно ограниченную функцию [1]). Но тогда A сам есть оператор умножения на существенно ограниченную измеримую функцию (см. IV п. 5 § 26):

$$A\varphi(\lambda) = \omega(\lambda)\,\varphi(\lambda),$$

где $\omega(\lambda)$ — существенно ограниченная измеримая функция. Отсюда

$$AS_\alpha^+\varphi(\lambda) = \omega(\lambda)\,\varphi(\lambda\alpha)\,\alpha^{\frac{1}{2}},$$
$$S_\alpha^+A\varphi(\lambda) = \omega(\lambda\alpha)\,\varphi(\lambda\alpha)\,\alpha^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому из перестановочности операторов S_α^+ и A следует, что $\omega(\lambda\alpha) = \omega(\lambda)$ для почти всех λ. Это возможно только, когда $\omega(\lambda) = \mathrm{const}$; следовательно, A есть оператор умножения на константу, т. е. кратен единице. Тем самым неприводимость представления $g \to U_g^+$ доказана.

Аналогично можно рассмотреть совокупность H^- всех измеримых функций $\varphi(\lambda)$ с суммируемым квадратом в интервале $-\infty < \lambda \leqslant 0$. Положив

$$U_g^-\varphi(\lambda) = e^{i\lambda\beta}\varphi(\lambda\alpha)\,\alpha^{\frac{1}{2}},$$

мы также получим неприводимое представление $g \to U_g^-$ группы $\mathfrak{G}_r$.

Можно показать, что всякое неприводимое унитарное представление группы $\mathfrak{G}_r$ эквивалентно одному из представлений одномерной серии или одному из представлений U_g^+, U_g^-. Кроме того, оказывается, что всякое унитарное представление группы $\mathfrak{G}_r$ разлагается в прямой интеграл представлений, эквивалентных этим неприводимым представлениям (по поводу доказательства этих предложений см. Гельфанд и Наймарк [3]).

---

[1]) Действительно, пространство $L^\infty(-\infty,\infty)$ является сопряженным к $L^1(-\infty,\infty)$ (п. 16 § 6), причем линейные комбинации функций $e^{i\lambda\beta}$ образуют в $L^\infty(-\infty,\infty)$ плотное множество в смысле слабой топологии; это следует из того, что при $x(\lambda) \in L^1(-\infty,\infty)$ равенство $\int\limits_{-\infty}^{\infty} x(\lambda)\,e^{i\lambda\beta}\,d\lambda = 0$ для всех вещественных β возможно, лишь когда $x = 0$ (см. II п. 11 § 3). Следовательно, для любой функции $f(\lambda) \in L^\infty(-\infty,\infty)$ и любых $\varepsilon > 0$, $x(\lambda) \in L^1(-\infty,\infty)$ существует линейная комбинация $f_1(\lambda) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} c_\nu e^{i\lambda\beta_\nu}$ такая, что $\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}[f(\lambda) - f_1(\lambda)]x(\lambda)\,d\lambda\right| < \varepsilon$. Положив здесь $x(\lambda) = y(\lambda)\,\overline{z(\lambda)}$, где $y, z \in L^2(-\infty,\infty)$, получим $\left|\int\limits_{-\infty}^{\infty}[f(\lambda) - f_1(\lambda)]\,y(\lambda)\,\overline{z(\lambda)}\,d\lambda\right| < \varepsilon$. Это означает, что оператор умножения на $f(\lambda)$ есть предел в слабой операторной топологии операторов умножения на $f_1(\lambda) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} c_\nu e^{i\lambda\beta_\nu}$.

Если перейти от функций $\varphi(\lambda)$ к их преобразованиям Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, e^{i\lambda x}\, d\lambda,$$

то пространства H^{+}, H^{-} отобразятся на пространства $\mathfrak{H}^{+}$, $\mathfrak{H}^{-}$ функций $f(x)$ с суммируемым квадратом на оси $-\infty < x < +\infty$, являющихся предельными значениями функций, аналитических в верхней, соответственно нижней, полуплоскости. При этом в каждом из этих пространств операторы U_g^{+} и U_g^{-} будут задаваться одной и той же формулой

$$U_g^{\pm} f(x) = \alpha^{-\frac{1}{2}} f(\alpha^{-1}(x+\beta)).$$

б). Унитарные представления собственной группы Лоренца. Обозначим через $\mathfrak{G}_2$ группу всех матриц $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ второго порядка с комплексными элементами, определитель которой равен единице. Каждой такой матрице g поставим в соответствие матрицу

$$a = \begin{pmatrix} \mathfrak{R}(\alpha\overline{\delta} + \overline{\gamma}\beta) & -\mathfrak{J}(\alpha\overline{\delta} - \overline{\gamma}\beta) & \mathfrak{R}(\alpha\overline{\gamma} - \beta\overline{\delta}) & \mathfrak{R}(\alpha\overline{\gamma} + \beta\overline{\delta}) \\ \mathfrak{J}(\alpha\overline{\delta} + \overline{\gamma}\beta) & \mathfrak{R}(\alpha\overline{\delta} - \overline{\gamma}\beta) & \mathfrak{J}(\alpha\overline{\gamma} - \beta\overline{\delta}) & \mathfrak{J}(\alpha\overline{\gamma} + \beta\overline{\delta}) \\ \mathfrak{R}(\alpha\overline{\beta} - \gamma\overline{\delta}) & -\mathfrak{J}(\alpha\overline{\beta} - \gamma\overline{\delta}) & \dfrac{\alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\beta} - \gamma\overline{\gamma} + \delta\overline{\delta}}{2} & \dfrac{\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} - \gamma\overline{\gamma} - \delta\overline{\delta}}{2} \\ \mathfrak{R}(\alpha\overline{\beta} + \gamma\overline{\delta}) & -\mathfrak{J}(\alpha\overline{\beta} + \gamma\overline{\delta}) & \dfrac{\alpha\overline{\alpha} - \beta\overline{\beta} + \gamma\overline{\gamma} - \delta\overline{\delta}}{2} & \dfrac{\alpha\overline{\alpha} + \beta\overline{\beta} + \gamma\overline{\gamma} + \delta\overline{\delta}}{2} \end{pmatrix}$$

четвертого порядка с вещественными коэффициентами. Легко проверить, что отображение $g \to a$ есть гомоморфизм группы $\mathfrak{G}_2$ на группу всех матриц a четвертого порядка с вещественными коэффициентами, оставляющих инвариантными квадратическую форму $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4^2$ и удовлетворяющих условиям: $\det a = 1$, $a_{44} \geqslant 1$ (см., например, Наймарк [12], § 9). Эта группа называется *собственной группой Лоренца*. Ядро гомоморфизма $g \to a$ состоит из матриц

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

поэтому матрицы $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{pmatrix}$, и только они, отображаются на одну и ту же матрицу a.

Отсюда следует, что каждому унитарному представлению $a \to U_a$ собственной группы Лоренца можно поставить в соответствие унитарное представление $g \to U_g$ группы $\mathfrak{G}_2$. Именно, достаточно положить $U_g = U_a$, где a есть образ элемента g. Обратно, каждому унитарному представлению $g \to U_g$ группы $\mathfrak{G}_2$ можно поставить в соответствие однозначное или двузначное [1] унитарное представление группы Лоренца. Поэтому вместо представлений группы Лоренца можно рассмотреть представления группы $\mathfrak{G}_2$. Эти представления можно описать следующим образом.

Обозначим через $\mathfrak{H}$ совокупность всех измеримых функций $f(z) = f(x+iy)$ с суммируемым квадратом на всей комплексной плоскости. Введем в $\mathfrak{H}$ обычным образом операции сложения, умножения на число и скалярного умножения. Тогда $\mathfrak{H}$ станет гильбертовым пространством.

Положим для $f(z) \in \mathfrak{H}$

$$U_g f(z) = |\beta z + \delta|^{n+i\rho-2}(\beta z+\delta)^{-n} f\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right), \tag{1}$$

где n — произвольное целое, а ρ — произвольное вещественное число. U_g — унитарный оператор в $\mathfrak{H}$. Действительно,

$$|U_g f|^2 = \int |U_g f(z)|^2\, dx\, dy = \int |\beta z+\delta|^{-4} \left| f\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right)\right|^2 dx\, dy;$$
$$|f|^2 = \int |f(z_1)|^2\, dx_1\, dy_1 = \int |\beta z+\delta|^{-4} \left| f\left(\frac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}\right)\right|^2 dx\, dy;$$

последнее равенство получается, если сделать подстановку $z_1 = \dfrac{\alpha z+\gamma}{\beta z+\delta}$. Таким образом, $|U_g f|^2 = |f|^2$; кроме того, оператор U_g взаимно однозначно отображает $\mathfrak{H}$ на себя; следовательно, U_g — унитарный оператор. Легко видеть, что $g \to U_g$ есть унитарное представление группы $\mathfrak{G}_2$. Итак, каждая пара чисел (n, ρ) определяет представление группы $\mathfrak{G}_2$. Совокупность всех этих представлений называется *основной серией представлений группы* $\mathfrak{G}_2$.

Все представления основной серии неприводимы.

Для доказательства перейдем от функций $f(z)$ к преобразованиям Фурье по x и y:

$$\varphi(w) = \frac{1}{2\pi} \int f(z)\, e^{i\Re(\overline{z}w)}\, dx\, dy.$$

Далее, обозначим через s_β и t_δ элементы группы $\mathfrak{G}_2$, равные $\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \frac{1}{\delta} & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$ соответственно. Будем рассматривать оператор U_g как оператор в пространстве функций $\varphi(w)$; тогда из общей формулы (1)

[1] Это означает, что каждому элементу $g \in \mathfrak{G}_2$ отвечают два оператора $U_g^{(k)}$, $k = 1, 2$, причем $U_{g_1}^{(k)} U_{g_0}^{(l)} = U_{g_1 g_2}^{(j)}$ при любых $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}$, $k, l = 1, 2$ и некотором $j = 1, 2$, зависящем от k и l.

следует, что

$$U_{s_\beta}\varphi(w) = e^{-i\Re(\overline{\beta}w)}\varphi(w),$$
$$U_{t_\delta}\varphi(w) = |\delta|^{n+i\rho+2}\delta^{-n}\varphi(w\overline{\delta}^2).$$

Всякий ограниченный оператор A, перестановочный со всеми операторами U_g, перестановочен, в частности, со всеми операторами U_{s_β} и U_{t_δ}. Отсюда, как и в примере а), следует, что A есть оператор умножения на число, т. е. кратен единице. Тем самым неприводимость представления U_g доказана.

Группа $\mathfrak{G}_2$ имеет еще другие неприводимые унитарные представления, не эквивалентные представлениям основной серии. Их можно описать следующим образом.

Пусть ρ — вещественное число из интервала $0 < \rho \leqslant 2$ и $\mathfrak{H}'_\rho$ — совокупность всех измеримых функций $f(z) = f(x+iy)$ таких, что

$$|f(z)| \leqslant C(1+|z|^2)^{-1-\frac{\rho}{2}}$$

для некоторой константы C, зависящей от f. Введем в $\mathfrak{H}'_\rho$ обычным образом сложение и умножение на число; кроме того, определим в $\mathfrak{H}'_\rho$ скалярное произведение формулой

$$(f_1,\,f_2)_\rho = \int |z_1 - z_2|^{-2+\rho} f_1(z_1)\,\overline{f_2(z_2)}\,dx_1\,dy_1\,dx_2\,dy_2.$$

Тогда при $0 < \rho < 2$ все аксиомы скалярного произведения будут выполнены. Действительно, в проверке нуждается только положительная определенность, т. е. неравенство

$$(f,\,f)_\rho \geqslant 0.$$

Для его доказательства достаточно перейти от функции $f(z)$ к ее преобразованию Фурье

$$\varphi(w) = \frac{1}{2\pi}\int f(z)\,e^{i\Re(\overline{z}w)}\,dx\,dy;$$

тогда [1])

$$(f,\,f)_\rho = 2^{-1+\rho}\frac{\Gamma\left(\frac{\rho}{2}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{\rho}{2}\right)}\int |w|^{-\rho}|\varphi(w)|^2\,du\,dv \quad (w = u+iv).$$

Таким образом, $\mathfrak{H}'_\rho$ становится евклидовым пространством. Его пополнение обозначим через $\mathfrak{H}_\rho$.

Введем теперь в $\mathfrak{H}'_\rho$ оператор

$$U'_g f(z) = |\beta z + \delta|^{-2-\rho} f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right). \tag{2}$$

[1]) Подробный вывод этой формулы см. Наймарк [12], § 12.

Легко проверить, что U'_g отображает $\mathfrak{H}'_\rho$ на себя изометрически. Его можно потому продолжить, и притом единственным образом, до унитарного оператора во всем $\mathfrak{H}_\rho$. Обозначим этот оператор снова через U'_g. Соответствие $g \to U'_g$ есть унитарное представление группы $\mathfrak{G}_2$ в пространстве $\mathfrak{H}_\rho$. Каждому значению ρ из интервала $0 < \rho < 2$ отвечает такое представление. Совокупность всех этих представлений называется *дополнительной серией представлений группы* $\mathfrak{G}_2$.

Все представления дополнительной серии неприводимы.

Доказательство аналогично доказательству неприводимости представлений основной серии.

Представления дополнительной серии естественным образом примыкают к представлениям основной серии при $n = 0$, $\rho = 0$. Формула (2) для U'_g получается формально из формулы (1) для U_g с $n = 0$, если подставить в последнюю ρi вместо ρ. При $\rho = 2$ мы получаем

$$(f_1, f_2)_2 = \int f_1(z)\,dx\,dy \int \overline{f_2(z)}\,dx\,dy.$$

Таким образом, элемент f следует считать равным нулю, если $\int f(z)\,dx\,dy = 0$; следовательно, $\mathfrak{H}_2$ одномерно. Его элементы взаимно однозначно определяются числами

$$\xi = \int f(z)\,dx\,dy.$$

При этом

$$U'_g\xi = \int |\beta z + \delta|^{-4} f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right) dx\,dy = \int f(z)\,dx\,dy = \xi,$$

т. е. U'_g — единичный оператор.

Итак, при $\rho = 2$ пространство $\mathfrak{H}_\rho$ одномерно и представление состоит в том, что каждому элементу группы $\mathfrak{G}_2$ ставится в соответствие единичный оператор. Это представление называется *единичным представлением*.

Можно показать, что всякое неприводимое унитарное представление группы $\mathfrak{G}_2$, отличное от единичного, эквивалентно одному из представлений основной или дополнительной серии [1)], кроме того, всякое унитарное представление группы $\mathfrak{G}_2$ есть прямой интеграл таких неприводимых представлений (см. Гельфанд и Наймарк [4]).

Отметим еще, что представления основной серии, отвечающие парам (n, ρ) и $(-n, -\rho)$, эквивалентны. Во всех остальных случаях различные представления основной и дополнительной серий попарно не эквивалентны.

[1)] По поводу обобщения этого результата на неунитарные представления см. Наймарк [12], § 15. Другая реализация унитарных и неунитарных неприводимых представлений группы $\mathfrak{G}_2$ была затем дана в книге Гельфанда, Виленкина и Граева [1] (см. также Д. П. Желобенко [1–3]).

Обозначим через $\mathfrak{B}$ совокупность всех унитарных матриц группы $\mathfrak{G}_2$; очевидно, $\mathfrak{B}$ — подгруппа группы $\mathfrak{G}_2$. Представления основной серии, соответствующие $n = 0$, обладают следующим свойством.

В пространстве $\mathfrak{H}$ представления $g \to U_g$ существует вектор $f_0 = f_0(z)$, инвариантный по отношению ко всем операторам U_v, $v \in \mathfrak{B}$.

Для доказательства заметим прежде всего, что всякая матрица имеет вид

$$v = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\overline{\beta} & \overline{\alpha} \end{pmatrix}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

В силу формулы (1) для оператора U_g условие инвариантности вектора $f_0(z)$ дает

$$|\beta z + \overline{\alpha}|^{-2+i\rho} f_0\left(\frac{\alpha z - \overline{\beta}}{\beta z + \overline{\alpha}}\right) = f_0(z). \tag{2$'$}$$

Положив здесь $z = 0$, получим

$$|\alpha|^{-2+i\rho} f_0\left(-\frac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}\right) = c,$$

где $c = f_0(0)$. Подставляя теперь z вместо $-\dfrac{\overline{\beta}}{\overline{\alpha}}$, имеем

$$|\alpha|^2 = \frac{|\alpha|^2}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} = \frac{1}{1 + \left|\dfrac{\beta}{\alpha}\right|^2} = \frac{1}{1 + |z|^2}.$$

Следовательно,

$$f_0(z) = c(1 + |z|^2)^{-1+i\frac{\rho}{2}}. \tag{2$''$}$$

Мы видим, что для данного представления в $\mathfrak{H}$ *существует один и, с точностью до постоянного множителя, только один* [1]) *инвариантный вектор* $f_0(z)$.

Взяв $c = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$, мы получим нормированный вектор

$$f_0(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}(1 + |z|^2)^{-1+i\frac{\rho}{2}}.$$

Положим теперь

$$\varphi(g) = (U_g f_0, f_0).$$

---

[1]) Предыдущее рассуждение носит эвристический характер и служит для нахождения вектора $f_0(z)$, так как a priori $f(z)$ может быть разрывной, и нельзя говорить о ее значении $f(0)$. Нетрудно, однако, проверить непосредственно, что правая часть (2$''$) удовлетворяет условию (2). С другой стороны, полагая $f_0(z) = \omega(z)(1 + |z|^2)^{-1+i\frac{\rho}{2}}$ и подставляя в (2$'$), находим, что $\omega\left(\dfrac{\alpha z - \overline{\beta}}{\beta z + \overline{\alpha}}\right) = \omega(z)$. Следовательно, $\omega(z) = \mathrm{const}$. Отсюда следует, что *каждая* функция $f_0(z)$ из $\mathfrak{H}$, удовлетворяющая условию (2$'$), задается формулой (2$''$).

Функция $\varphi(g)$ называется *сферической функцией, соответствующей данному представлению* $g \to U_g$. Вычислим эту функцию. Прежде всего заметим, что всякую матрицу $g \in \mathfrak{G}_2$ можно представить в виде $g = vh$, где $v \in \mathfrak{B}$, а h — положительно определенная эрмитова матрица. Далее, матрицу h можно привести к диагональному виду, т. е. представить в виде $h = v_2^{-1}\varepsilon v$, где ε — диагональная матрица

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda > 0$$

и $v_2 \in \mathfrak{B}$.

Матрица ε определена матрицей g с точностью до перестановки диагональных элементов. Следовательно, ее можно однозначно определить условием $\lambda \geqslant 1$. Это условие мы будем в дальнейшем считать выполненным. Таким образом, окончательно имеем

$$g = v_1\varepsilon v_2, \quad v_1, v_2 \in \mathfrak{B}.$$

Отсюда в силу инвариантности вектора f_0

$$\varphi(g) = (U_{v_1}U_\varepsilon U_{v_2}f_0, f_0) = (U_\varepsilon u_{v_2}f_0, U_{v_1}^* f_0) = (U_\varepsilon f_0, f_0) = \varphi(\varepsilon);$$

следовательно, достаточно вычислить $\varphi(\varepsilon)$.

Так как
$$U_\varepsilon f_0(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,(1 + |z|^2\lambda^{-4})^{-1+i\frac{\rho}{2}}\lambda^{-2+i\rho},$$

то

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{\pi}\int(1 + |z|^2\lambda^{-4})^{-1+i\frac{\rho}{2}}\lambda^{-2+i\rho}(1 + |z|^2)^{-1-i\frac{\rho}{2}}\,dx\,dy =$$
$$= \frac{1}{\pi}\,\lambda^{-2+i\rho}\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}(1 + r^2\lambda^{-4})^{-1+i\frac{\rho}{2}}(1 + r^2)^{-1-i\frac{\rho}{2}}\,r\,dr\,d\theta =$$
$$= \lambda^{-2+i\rho}\int_0^{\infty}(1 + \xi\lambda^{-4})^{-1+i\frac{\rho}{2}}(1 + \xi)^{-1-i\frac{\rho}{2}}\,d\xi.$$

Сделав в последнем интеграле подстановку

$$x = \frac{1 - \lambda^4}{1 + \xi},$$

мы получим

$$\varphi(\varepsilon) = \lambda^{-i\rho+2}(1 - \lambda^4)^{-1}\int_0^{1-\lambda^4}(1 - x)^{-1+\frac{i\rho}{2}}\,dx =$$
$$= -\frac{2\lambda^{-i\rho+2}(1 - \lambda^4)^{-1}}{i\rho}\,(\lambda^{2i\rho} - 1) = \frac{2}{i\rho}\,\frac{\lambda^{i\rho} - \lambda^{-i\rho}}{\lambda^2 - \lambda^{-2}}.$$

В дальнейшем нам удобно будет в качестве параметра выбрать $t = \ln\lambda$. Тогда формула для $\varphi(\varepsilon)$ примет вид

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{2\sin\rho t}{\rho\,\mathrm{sh}\,2t}. \tag{3}$$

Аналогично можно было бы показать, что в пространстве $\mathfrak{H}_\rho$ представления $g \to U'_g$ дополнительной серии существует инвариантный вектор относительно U'_v, $v \in \mathfrak{B}$. Соответствующая сферическая функция имеет вид

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{2\,\mathrm{sh}\,\rho t}{\rho\,\mathrm{sh}\,2t}.$$

Впрочем, это нам в дальнейшем не понадобится [1]).

в). П р и м е р н е в п о л н е с и м м е т р и ч н о г о г р у п п о в о г о к о л ь ц а. Обозначим через $R(\mathfrak{G}_2)$ групповое кольцо группы $\mathfrak{G}_2$, рассмотренной в примере б). Мы покажем, что $R(\mathfrak{G}_2)$ не есть вполне симметричное кольцо.

Для доказательства обозначим через $L^1(\mathfrak{G}_2)$ совокупность всех функций $a(g)$, суммируемых на $\mathfrak{G}_2$, а через $\mathfrak{A}'$ — совокупность всех функций $a(g) \in L^1(\mathfrak{G}_2)$, удовлетворяющих условию [2])

$$a(vg) = a(gv) = a(g) \quad \text{для всех} \quad v \in \mathfrak{B}.$$

$\mathfrak{A}'$ есть подкольцо кольца $R(\mathfrak{G}_2)$. Действительно, достаточно проверить, что при $a_1, a_2 \in \mathfrak{A}'$ функция

$$a(g) = \int a_1(g_1)\, a_2(g_1^{-1}g)\, d\mu(g_1)$$

также принадлежит $\mathfrak{A}'$, причем $d\mu(g)$ обозначает дифференциал двусторонне инвариантной меры в $\mathfrak{G}_2$. Но это следует из равенств

$$a(gv) = \int a_1(g_1)\, a_2(g_1^{-1}gv)\, d\mu(g_1) = \int a_1(g_1)\, a_2(g_1^{-1}g)\, d\mu(g_1) = a(g),$$
$$a(vg) = \int a_1(g_1)\, a_2(g_1^{-1}vg)\, d\mu(g_1) = \int a_1(g_1)\, a_2(g_1^{-1}g)\, d\mu(g_1) = a(g).$$

Поэтому совокупность элементов вида $\lambda e + a$, $a \in \mathfrak{A}'$, есть (очевидно, замкнутое) подкольцо с единицей кольца $R(\mathfrak{G}_2)$; обозначим это подкольцо $\mathfrak{A}$. Оно коммутативно. Действительно, достаточно доказать, что при $a_1, a_2 \in \mathfrak{A}'$

$$\int a_1(g_1)\, a_2(g_1^{-1}g)\, d\mu(g_1) = \int a_2(g_1)\, a_1(g_1^{-1}g)\, d\mu(g_1). \tag{4}$$

---

[1]) По поводу обобщений изложенных здесь результатов на представления различных классов групп, в частности, по поводу общей теории сферических функций см. обзорную статью Макки [9], а также статью Р. Годмана [9].

[2]) Мы здесь сохраняем те же обозначения, что и в примере б).

Обозначим через g^* матрицу, эрмитово сопряженную матрице g. Тогда $a(g^*) = a(g)$ для любой функции $a(g) \in \mathfrak{A}'$. Действительно, полагая $g = v_1 \varepsilon v_2$, имеем

$$a(g^*) = a(v_2^{-1} \varepsilon v_1^{-1}) = a(\varepsilon) = a(v_1 \varepsilon v_2) = a(g).$$

Кроме того, для любой функции $a(g) \in L^1(\mathfrak{G}_2)$

$$\int a(g)\, d\mu(g) = \int a(g^*)\, d\mu(g).$$

Это следует из того, что если задавать матрицу g параметрами β, γ, δ, то

$$d\mu(g) = \frac{d\mu(\beta)\, d\mu(\gamma)\, d\mu(\delta)}{|\delta|^2}.$$

Из этих замечаний следует, что при a_1, $a_2 \in \mathfrak{A}'$

$$\int a_1(g_1)\, a_2(g_1^{-1} g)\, d\mu(g_1) = \int a_1(g_1^*)\, a_2(g^* g_1^{*-1})\, d\mu(g_1) = \\ = \int a_1(g_1)\, a_2(g^* g_1^{-1})\, d\mu(g_1).$$

Так как последний интеграл есть функция из $\mathfrak{A}'$, то он равен

$$\int a_1(g_1)\, a_2(g g_1^{-1})\, d\mu(g_1) = \int a_1(g_1^{-1})\, a_2(g g_1)\, d\mu(g_1) = \\ = \int a_1(g_1)\, a_2(g^* g_1^{-1})\, d\mu(g_1).$$

Тем самым доказано равенство (4), а значит, и коммутативность кольца $\mathfrak{A}$.

Докажем, что $\mathfrak{A}$ не вполне симметричное кольцо. Согласно п. 1 § 14 достаточно доказать, что в $\mathfrak{A}$ имеются несимметричные максимальные идеалы. Найдем для этого все максимальные идеалы кольца $\mathfrak{A}$.

Прежде всего выразим интеграл по g через интегралы по v_1, ε, v_2. Обозначим через Γ совокупность всех диагональных унитарных матриц второго порядка и через $\overline{\mathfrak{B}}$ — совокупность всех правых смежных классов группы $\mathfrak{B}$ по Γ, а сами эти правые смежные классы — через $\overline{v}$. Умножение на v_0 сводится к преобразованию в пространстве $\overline{\mathfrak{B}}$; обозначим через $\overline{v} v_0$ класс, в который переходит при этом $\overline{v}$.

В представлении $g = v_1 \varepsilon v_2$ матрицы v_1, v_2 определены матрицей g неоднозначно. Именно, $g = v_1 \tau^{-1} \varepsilon \tau v_2$, где $\tau \in \Gamma$, есть представление того же вида. Нормируя v_2 определенным образом, например так, чтобы было $\alpha \geqslant 0$, мы выберем в почти каждом классе $\overline{v}_2$ определенного представителя v_2. Тогда матрицы v_1, ε будут определяться матрицей g однозначно, причем v_1 будет пробегать всю группу $\mathfrak{B}$, а v_2 можно будет отождествить с классом $\overline{v}_2$.

Пусть $d\mu_0(\overline{v}_2)$ — какая-нибудь дифференцируемая мера [1] в $\overline{\mathfrak{B}}$. Пусть, кроме того, $d\mu(v_1)$, $d\mu(\varepsilon)$ — инвариантные меры в группе $\mathfrak{B}$ и мультипликативной группе положительных чисел соответственно. Выберем $d\mu(v_1)$ так, чтобы $\mu(\mathfrak{B}) = 1$. Тогда мы можем, очевидно, положить

$$\int f(g)\,d\mu(g) = \int f(v_1\varepsilon v_2)\,\omega(v_1,\,\varepsilon,\,\overline{v}_2)\,d\mu(v_1)\,d\mu(\varepsilon)\,d\mu_0(\overline{v}_2), \tag{5}$$

где $\omega(v_1, \varepsilon, \overline{v}_2)$ — якобиан перехода от g к v_1, ε, $\overline{v}_2$. В силу левой инвариантности $d\mu(g)$

$$\int f(vg)\,d\mu(g) = \int f(g)\,d\mu(g),$$

т. е.

$$\int f(vv_1\varepsilon v_2)\,\omega(v_1,\,\varepsilon,\,\overline{v}_2)\,d\mu(v_1)\,d\mu(\varepsilon)\,d\mu_0(\overline{v}_2) =$$
$$= \int f(v_1\varepsilon v_2)\,\omega(v_1,\,\varepsilon,\,\overline{v}_2)\,d\mu(v_1)\,d\mu(\varepsilon)\,d\mu_0(\overline{v}_2). \tag{6}$$

Но в силу левой инвариантности $d\mu(v_1)$ первый интеграл равен

$$\int f(v_1\varepsilon v_2)\,\omega(v^{-1}v_1,\,\varepsilon,\,\overline{v}_2)\,d\mu(v_1)\,d\mu(\varepsilon)\,d\mu_0(\overline{v}_2);$$

поэтому из равенства (6) следует, что $\omega(v^{-1}v_1, \varepsilon_1, \overline{v}_2) = \omega(v_1, \varepsilon_1, \overline{v}_2)$ почти всюду по v_1, ибо f — произвольная функция. Таким образом, ω не зависит от v_1, и мы положим $\omega = \omega(\varepsilon, \overline{v}_2)$. Далее, в силу правой инвариантности $d\mu(g)$,

$$\int f(gv)\,d\mu = \int f(g)\,d\mu(g),$$

т. е.

$$\int f(v_1\varepsilon v_2')\,\omega(\varepsilon,\,\overline{v}_2)\,d\mu(v_1)\,d\mu(\varepsilon)\,d\mu_0(\overline{v}_2) =$$
$$= \int f(v_1\varepsilon v_2)\,\omega(\varepsilon,\,\overline{v}_2)\,d\mu(v_1)\,d\mu(\varepsilon)\,d\mu_0(\overline{v}_2), \tag{7}$$

где v_2' — нормированный представитель из класса $\overline{v}_2 v$. Сделаем во втором интеграле замену переменных $v_2 \to v_2'$, т. е. $\overline{v}_2 \to \overline{v}_2 v$, и обозначим через $\lambda(\overline{v}_2, v)$ якобиан этого преобразования переменных. Тогда этот интеграл перепишется в виде

$$\int f(v_1\varepsilon v_2')\,\omega(\varepsilon,\,\overline{v}_2 v)\,\lambda(\overline{v}_2,\,v)\,d\mu(v_1)\,d\mu(\varepsilon)\,d\mu_0(\overline{v}_2);$$

поэтому из (7) вытекает, что

$$\omega(\varepsilon,\,\overline{v}_2) = \omega(\varepsilon,\,\overline{v}_2 v)\,\lambda(\overline{v}_0,\,v).$$

[1] Мера μ_0 на $\overline{\mathfrak{B}}$ называется *дифференцируемой*, если $d\mu_0(\overline{v}g_0)$ дифференцируема относительно $d\mu_0(\overline{v})$ при всех $g_0 \in \mathfrak{G}$.

Дадим $\overline{v}_2$ фиксированное значение $\overline{v}_2^0$ и положим затем $\overline{v}_2^0 v = \overline{v}$. Последнее равенство можно будет переписать в виде

$$\omega(\varepsilon, \overline{v}) = \omega(\varepsilon)\, \lambda^{-1}(v),$$

где

$$\omega(\varepsilon) = \omega(\varepsilon, \overline{v}_2^0), \quad \lambda(\overline{v}) = \lambda(\overline{v}_2^0, v).$$

Положим теперь $d\mu(\overline{v}_2) = \lambda^{-1}(v)\, d\mu_0(\overline{v}_2)$; тогда равенство (5) перепишется в виде

$$\int f(g)\, d\mu(g) = \int f(v_1 \varepsilon v_2)\, \omega(\varepsilon)\, d\mu(v_1)\, d\mu(\varepsilon)\, d\mu(\overline{v}_2).$$

В частности, при $a \in \mathfrak{A}'$

$$\|a\|_1 = \int |a(g)|\, d\mu(g) = \int |a(\varepsilon)| \omega(\varepsilon)\, d\mu(\varepsilon), \tag{8}$$

ибо константу $\int d\mu(\overline{v}_2)$ можно включить в качестве множителя в ω. Найдем далее закон умножения в $\mathfrak{A}'$. Для этой цели рассмотрим одно из представлений $g \in U_g$ основной серии группы $\mathfrak{G}$ при $n = 0$. Пусть f_0 — нормированный вектор, инвариантный по отношению ко всем операторам U_v, $v \in \mathfrak{B}$. Положим

$$f = \int U_v U_\varepsilon f_0\, d\mu(v).$$

Вектор f также инвариантен по отношению ко всем операторам U_v, ибо

$$U_{v_0} f = U_{v_0} \int U_v U_\varepsilon f_0\, d\mu(v) = \int U_{v_0 v} U_\varepsilon f_0\, d\mu(v) = \int U_v U_\varepsilon f_0\, d\mu(v) = f.$$

Поэтому f отличается только множителем от f_0:

$$f = c f_0.$$

Для нахождения множителя c заметим, что

$$c = (f \cdot f_0) = \int (U_v U_\varepsilon f_0, f_0)\, d\mu(v) = \int (U_\varepsilon f_0, U_{v^{-1}} f_0)\, d\mu(v) = \\ = (U_\varepsilon f_0, f_0) \int d\mu(v) = (U_\varepsilon f_0, f_0) = \varphi(\varepsilon),$$

т. е. c совпадает со сферической функцией, соответствующей данному представлению.

Таким образом, имеет место формула

$$\int U_v U_\varepsilon f_0\, d\mu(v) = \varphi(\varepsilon)\, f_0.$$

Отсюда следует, что при $a \in \mathfrak{A}'$

$$A_a f_0 = \int a(g)\, U_g f_0\, d\mu(g) = \int a(\varepsilon)\, \omega(\varepsilon)\, U_v\, U_\varepsilon f_0\, d\mu(v)\, d\mu(\varepsilon) = \\ = \int a(\varepsilon)\, \omega(\varepsilon)\, \varphi(\varepsilon)\, d\mu(\varepsilon)\, f_0,$$

т. е. f_0 есть собственный вектор оператора A_a соответствующего представления кольца $\mathfrak{A}$. Отсюда

$$A_{a_1 a_2} f_0 = A_{a_1} A_{a_2} f_0 = \int a_1(\varepsilon)\, \omega(\varepsilon)\, \varphi(\varepsilon)\, d\mu(\varepsilon) \int a_2(\varepsilon)\, \omega(\varepsilon)\, \varphi(\varepsilon)\, d\mu(\varepsilon)\, f_0;$$

следовательно, соответствие

$$\lambda e + a \sim \lambda + \int a(\varepsilon)\, \omega(\varepsilon)\, \varphi(\varepsilon)\, d\mu(\varepsilon) \tag{9}$$

есть гомоморфизм кольца $\mathfrak{A}$ в поле комплексных чисел.

Матрицу ε можно задать при помощи параметра [1] $t = \ln \lambda$. Так как $\lambda \geqslant 1$, то $t \geqslant 0$. Положим

$$f(t) = \frac{a(\varepsilon)\, \omega(\varepsilon)}{\operatorname{sh} 2t}.$$

Мы тем самым отобразим $\mathfrak{A}'$ на совокупность R_0' всех функций $f(t)$, удовлетворяющих в силу (8) условию

$$\|f\| = \int |f(t)| \operatorname{sh} 2t\, dt < \infty,$$

причем $\|f\| = \|a\|$. Перенесем на R_0' все операции из $\mathfrak{A}'$ и посмотрим, как они выражаются в R_0'. Очевидно, сложение и умножение на число определяются обычным образом. Для нахождения закона умножения в R_0' заметим, что в силу формулы (3) для сферической функции соответствие (9) перепишется теперь в виде

$$f(t) \to \int_0^\infty f(t)\, \frac{2 \sin \rho t}{\rho}\, dt. \tag{10}$$

Это соответствие должно быть, следовательно, гомоморфизмом кольца R_0' в поле комплексных чисел. Отсюда следует, что закон умножения в R_0' задается формулой

$$f(u) = \int_0^\infty \int_{|t-u|}^{t+u} f_1(s)\, f_2(t)\, ds\, dt.$$

[1] Напомним, что $\varepsilon = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda \geqslant 1$.

Действительно,

$$\int\limits_0^\infty f(u)\,\frac{2\sin\rho u}{\rho}\,du = \int\limits_0^\infty\Bigl(\int\limits_0^\infty\int\limits_{|t-u|}^{t+u} f_1(s)\,f_2(t)\,ds\,dt\Bigr)\frac{2\sin\rho u}{\rho}\,du =$$
$$= \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty f_1(s)\,f_2(t)\Bigl(\int\limits_{|s-t|}^{s+t}\frac{2\sin\rho u}{j}\,du\Bigr)\,ds\,dt =$$
$$= \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty f_1(s)\,f_2(g)\,\frac{2\sin\rho s\cdot\sin\rho t}{\rho^2}\,ds\,dt =$$
$$= \int\limits_0^\infty f_1(s)\,\frac{2\sin\rho s}{\rho}\,ds\cdot\int\limits_0^\infty f_2(t)\,\frac{2\sin\rho t}{\rho}\,dt. \tag{11}$$

Так как соответствие (10) есть гомоморфизм кольца R_0', то последнее выражение совпадает с $\int\limits_0^\infty (f_1\cdot f_2)(u)\,\frac{2\sin\rho u}{\rho}\,du$. Поэтому из равенства (11) следует, что $f = f_1\cdot f_2$, ибо функции $\sin\rho u$ образуют полную систему.

Наконец, заметим, что инволюция в R_0' определяется формулой $f^*(t) = \overline{f(t)}$. Это следует из того, что $a^*(g) = \overline{a(g^{-1})} = \overline{a(u_2^{-1}\varepsilon^{-1}u_1^{-1})} = \overline{a(\varepsilon)}$. Из полученных формул для $f_1\cdot f_2$ и f^* вытекает, что кольцо $\mathfrak{A}$ вполне изоморфно кольцу R_0, рассмотренному в примере б) п. 3 § 20. Поэтому максимальные идеалы колец R_0 и $\mathfrak{A}$ совпадают. Но, как мы видели, в кольце R_0 имеются несимметричные максимальные идеалы. Следовательно, $\mathfrak{A}$ — не вполне симметричное кольцо.

Докажем теперь, что $R(\mathfrak{G}_2)$ не есть вполне симметричное кольцо. Для этого заметим, что если элемент $e+a$, $a\in\mathfrak{A}'$, имеет обратный в кольце $R(\mathfrak{G}_2)$, то этот обратный принадлежит кольцу $\mathfrak{A}$, т. е. имеет вид $e+b$, $b\in\mathfrak{A}'$. Действительно, пусть $e+b$, $b\in L^1(\mathfrak{G}_2)$, обратен элементу $e+a$, $a\in\mathfrak{A}'$. Тогда

$$(e+a)(e+b) = e,$$

откуда $b = -a - a\cdot b$, т. е.

$$b(g) = -a(g) - \int a(g_1)\,b(g_1^{-1}g)\,d\mu(g_1).$$

Но тогда при $v\in\mathfrak{B}$

$$b(vg) = -a(vg) - \int a(g_1)\,b(g_1^{-1}vg)\,d\mu(g_1) =$$
$$= -a(g) - \int a(vg_1)\,b(g_1^{-1}g)\,d\mu(g_1) =$$
$$= -a(g) - \int a(g_1)\,b(g_1^{-1}g)\,d\mu(g_1) = b(g),$$

ибо по условию $a \in \mathfrak{A}'$. Аналогично, пользуясь равенством $(e+b) \times \times (e+a) = e$, получим, что $b(gv) = b(g)$. Следовательно, $b \in \mathfrak{A}$, $e+b \in \mathfrak{A}$. Так как $\mathfrak{A}$ — не вполне симметричное кольцо, то в $\mathfrak{A}$ существует элемент a такой, что $e + a^*a$ не имеет обратного в кольце $\mathfrak{A}$. Согласно только что сделанному замечанию он не имеет также обратного в кольце $R(\mathfrak{G}_2)$. Следовательно, $R(\mathfrak{G}_2)$ — не вполне симметричное кольцо.

§ 30. Положительно определенные функции

1. Положительно определенные функции и их связь с унитарными представлениями. Функция $\varphi(g)$, заданная на группе $\mathfrak{G}$, называется *положительно определенной*, если

$$\sum_{k,\,l=1}^{n} \varphi(g_l^{-1} g_k)\, \lambda_k \overline{\lambda}_l \geqslant 0 \tag{1}$$

для всех конечных систем $g_1, \ldots, g_n$ элементов группы $\mathfrak{G}$ и комплексных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Всякая положительно определенная функция удовлетворяет условиям

$$\varphi(e) \geqslant 0, \tag{2}$$

$$\varphi(g^{-1}) = \overline{\varphi(g)}, \tag{3}$$

$$|\varphi(g)| \leqslant \varphi(e). \tag{4}$$

Действительно, полагая в (1) $n = 1$, $g_1 = e$, $\lambda_1 = 1$, получим соотношение (2). Далее, полагая в (1) $n = 2$, $g_1 = g$, $g_2 = e$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda$, получим

$$\varphi(e) + \varphi(g)\overline{\lambda} + \varphi(g^{-1})\,\lambda + \varphi(e)|\lambda|^2 \geqslant 0; \tag{5}$$

отсюда заключаем, что $\varphi(g)\overline{\lambda} + \varphi(g^{-1})\,\lambda$ — вещественное число при любом комплексном λ. Беря $\lambda = 1$ и $\lambda = i$, получим, что $\varphi(g) + \varphi(g^{-1})$ и $i[\varphi(g^{-1}) - \varphi(g)]$ — вещественные числа. Это возможно, лишь когда $\varphi(g^{-1}) = \overline{\varphi(g)}$. Докажем теперь неравенство (4). В силу (2) возможны лишь следующие случаи: а) $\varphi(e) = 0$; тогда из (5) при $\lambda = \varphi(g)$ получим $2\,|\varphi(g)|^2 = 0$, $\varphi(g) = 0$; б) $\varphi(e) > 0$; полагая в (5) $\lambda = -\dfrac{\varphi(g)}{\varphi(e)}$, получим $\varphi(e) - \dfrac{|\varphi(g)|^2}{\varphi(e)} \geqslant 0$, следовательно, $|\varphi(g)|^2 \leqslant [\varphi(e)]^2$ и неравенство (4) доказано в обоих случаях [1]).

[1]) Отметим еще следующее неравенство, указанное М. Крейном [9]:

$$|\varphi(g) - \varphi(h)|^2 \leqslant 2\,\varphi(e)[\varphi(e) - \operatorname{Re}\varphi(gh^{-1})].$$

Если задано унитарное представление $g \to U_g$ группы $\mathfrak{G}$, то можно построить положительно определенную функцию, полагая

$$\varphi(g) = (U_g \xi_0, \xi_0),$$

где ξ_0 — фиксированный отличный от нуля вектор пространства представления. Действительно,

$$\sum_{k, l=1}^{n} \varphi(g_l^{-1} g_k)\, \lambda_k \overline{\lambda}_l = \sum_{k, l=1}^{n} (U_{g_l}^{-1} U_{g_k} \xi_0, \xi_0)\, \lambda_k \overline{\lambda}_l =$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k U_{g_k} \xi_0, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k U_{g_k} \xi_0 \right) \geqslant 0.$$

При этом если представление $g \to U_g$ непрерывно, то функция $\varphi(g)$ непрерывна.

Обратно, пусть $\varphi(g)$ — произвольная положительно определенная функция $\not\equiv 0$. Ей отвечает унитарное представление $g \to U_g$ группы $\mathfrak{G}$ такое, что $\varphi(g) = (U_g \xi_0, \xi_0)$.

Действительно, пусть $\mathfrak{L}$ — совокупность всех функций x на группе $\mathfrak{G}$, принимающих только конечное число значений, отличных от нуля. Определим в $\mathfrak{L}$ действия сложения и умножения на число обычным образом; тогда $\mathfrak{L}$ станет линейным пространством. Определим, далее, в $\mathfrak{L}$ билинейную форму

$$(x, y) = \sum_{g, h \in \mathfrak{G}} \varphi(h^{-1} g)\, x(g)\, \overline{y(h)}.$$

В силу положительной определенности функции φ имеют место соотношения (1) и (2); следовательно,

$$\overline{(y, x)} = (x, y) \quad \text{и} \quad (x, x) \geqslant 0;$$

однако может оказаться, что $(x, x) = 0$ и при $x \not\equiv 0$. Пусть $\mathfrak{N}$ — совокупность всех $x \in \mathfrak{L}$, для которых $(x, x) = 0$; тогда $\mathfrak{N}$ — подпространство в $\mathfrak{L}$ и (x, y) определяет скалярное произведение (ξ, η) в факторпространстве $\mathfrak{H}' = \mathfrak{L}/\mathfrak{N}$ по формуле

$$(\xi, \eta) = (x, y), \quad \text{где} \quad x \in \xi, \quad y \in \eta$$

(см. I п. 1 § 5). Следовательно, пополнение $\mathfrak{H}$ пространства $\mathfrak{H}'$ по норме $|\xi| = \sqrt{(\xi, \xi)}$ есть гильбертово пространство.

Для доказательства достаточно положить в (1) $n = 3$,

$$g_1 = g, \quad g_2 = h, \quad g_3 = e, \quad \lambda_1 = \lambda_3 = 1, \quad \lambda_2 = -1.$$

Каждому элементу $g_0 \in \mathfrak{G}$ поставим в соответствие оператор T_{g_0} по формуле $T_{g_0}x(g) = x(g_0^{-1}g)$. Тогда

$$(T_{g_0}x, T_{g_0}y) = \sum_{g,\,h} \varphi(h^{-1}g)\, x(g_0^{-1}g)\, \overline{y(g_0^{-1}h)} = \\ = \sum_{g,\,h} \varphi(h^{-1}g_0^{-1}g_0 g)\, x(g)\, \overline{y(h)} = (x,\, y).$$

Следовательно, $\mathfrak{N}$ инвариантно относительно T_{g_0}, и потому T_{g_0} можно также рассматривать как оператор в $\mathfrak{H}'$, причем $(T_{g_0}\xi, T_{g_0}\eta) = (\xi, \eta)$. Но тогда T_{g_0} изометричен в $\mathfrak{H}'$, а значит, однозначно продолжается до изометрического оператора в $\mathfrak{H}$; обозначим через U_{g_0} этот изометрический оператор в $\mathfrak{H}$. Очевидно, соответствие $g \to U_g$ есть представление группы $\mathfrak{G}$; так как $U_{g^{-1}}$ есть оператор, обратный к U_g, то U_g унитарен; следовательно, $g \to U_g$ — унитарное представление группы $\mathfrak{G}$.

Пусть $x_0(g)$ — функция на $\mathfrak{G}$, определенная формулой

$$x_0(g) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad g = e, \\ 0 & \text{при} \quad g \neq e, \end{cases}$$

а ξ_0 — класс вычетов по $\mathfrak{N}$, содержащий x_0. Тогда

$$(U_{g_0}\xi_0, \xi_0) = (T_{g_0}x_0, x_0) = \sum_{g,\,h} \varphi(h^{-1}g)\, x_0(g_0^{-1}g)\, \overline{x_0(h)} = \varphi(g_0).$$

Следовательно, построенное нами представление $g \to U_g$ удовлетворяет всем поставленным требованиям. Отметим, что ξ_0 есть циклический вектор представления $g \to U_g$.

Если функция φ непрерывна, то построенное по ней представление $g \to U_g$ также непрерывно.

Действительно, если φ непрерывна, то при фиксированных $\xi, \eta \in \mathfrak{H}'$ и $x \in \xi$, $y \in \eta$ выражение

$$(U_{g_0}\xi, \eta) = (T_{g_0}x, y) = \sum_{g,\,h} \varphi(h^{-1}g)\, x(g_0^{-1}g)\, \overline{y(h)} = \\ = \sum_{g,\,h} \varphi(h^{-1}g_0 g)\, x(g)\, \overline{y(h)}$$

есть непрерывная функция от g_0; так как $\mathfrak{H}'$ плотно в $\mathfrak{H}$ и $|U_{g_0}| = 1$, то отсюда следует непрерывность функции $(U_g\xi, \eta)$ для всех $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$.

Мы доказали следующую теорему.

Т е о р е м а 1. *Всякому непрерывному унитарному представлению $g \to U_g$ топологической группы $\mathfrak{G}$ и вектору $\xi_0 \neq 0$ из пространства представления отвечает непрерывная положительно определенная функция $\varphi(g) = (U_g\xi_0, \xi_0) \not\equiv 0$. Обратно, всякой непрерывной положительно определенной функции $\varphi(g) \not\equiv 0$ отвечает непрерывное* *унитарное циклическое представление $g \to U_g$ группы $\mathfrak{G}$ с циклическим вектором ξ_0 такое, что $\varphi(g) = (U_g\xi_0, \xi_0)$.*

2. Связь положительно определенных функций с положительными функционалами в групповом кольце. Пусть $\mathfrak{G}$ — локально бикомпактная группа. Положительный функционал f_0 в групповом кольце $R(\mathfrak{G})$, определенный равенством

$$f_0(\lambda e + a) = \lambda c,$$

где c — положительная постоянная, называется *вырожденным*. Положительный функционал f в групповом кольце называется *регулярным*, если вырожденный функционал ему не подчинен.

Лемма. *Циклическое представление $x \to A_x$ группового кольца не содержит вырожденного представления тогда и только тогда, когда определяющий его положительный функционал $f(x) = (A_x\xi_0, \xi_0)$ регулярен.*

Доказательство. Пусть представление $x \to A_x$ содержит вырожденное представление и $\mathfrak{N}$ — инвариантное подпространство, на котором представление $x \to A_x$ вырождено. Полагая

$$\xi_0 = \xi_1 + \xi_2, \quad \xi_1 \in \mathfrak{N}, \quad \xi_2 \in \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N},$$

имеем

$$f(x) = (A_x\xi_0, \xi_0) = (A_x\xi_1, \xi_1) + (A_x\xi_2, \xi_2);$$

следовательно, $f_0(x) = (A_x\xi_1, \xi_1)$ — вырожденный функционал, подчиненный функционалу f.

Обратно, пусть вырожденный функционал f_0 подчинен функционалу f. Согласно теореме 1 п. 1 § 19

$$f_0(x) = (A_xB\xi_0, \xi_0),$$

где B — положительно определенный оператор в $\mathfrak{H}$, перестановочный со всеми операторами A_x. Так как при $a \in L^1(\mathfrak{G})$ также $x^*a \in L^1(\mathfrak{G})$ для всех $x \in R(\mathfrak{G})$ и так как f_0 обращается в нуль на $L^1(\mathfrak{G})$, то

$$0 = f_0(x^*a) = (A_x^*A_aB\xi_0, \xi_0) = (A_aB\xi_0, A_x\xi_0).$$

Но векторы $A_x\xi_0$ образуют в $\mathfrak{H}$ плотное множество, следовательно,

$$A_aB\xi_0 = 0 \quad \text{для всех} \quad a \in L^1(\mathfrak{G}).$$

Поэтому векторы вида $\lambda B\xi_0$ образуют в $\mathfrak{H}$ одномерное инвариантное подпространство, в котором представление $x \to A_x$ вырождено.

Пусть теперь $g \to U_g$ — непрерывное унитарное представление группы $\mathfrak{G}$, построенное по данной положительно определенной функции φ. Этому унитарному представлению $g \to U_g$ отвечает представление $x \to A_x$ группового кольца $R(\mathfrak{G})$, не содержащее вырожденного представления. Представлению же $x \to A_x$ в свою очередь отвечает регулярный положительный функционал

$$f(\lambda e + a) = \lambda(\xi_0, \xi_0) + (A_a\xi_0, \xi_0) = \lambda\varphi(e) + \int a(g)(U_g\xi_0, \xi_0)\, d\mu(g) = \\ = \lambda\varphi(e) + \int a(g)\,\varphi(g)\, d\mu(g).$$

Обратно, регулярному положительному функционалу f в $R(\mathfrak{G})$ отвечает циклическое представление $x \to A_x$ этого кольца, не содержащее вырожденного представления, такое, что

$$f(\lambda e + a) = \lambda(\xi_0, \xi_0) + (A_a\xi_0, \xi_0), \tag{1'}$$

где ξ_0 — циклический вектор представления $x \to A_x$. Пусть $g \to U_g$ — непрерывное унитарное представление группы $\mathfrak{G}$, отвечающее этому представлению $x \to A_x$, так что $A_a = \int a(g)\, U_g\, d\mu(g)$. Подставив это выражение для A_a в $(1')$, получим

$$f(\lambda e + a) = \lambda(\xi_0, \xi_0) + \int a(g)(U_g\xi_0, \xi_0)\, d\mu(g) = \\ = \lambda\varphi(e) + \int a(g)\,\varphi(g)\, d\mu(g),$$

где $\varphi(g) = (U_g\xi_0, \xi_0)$ — непрерывная положительно определенная функция на группе $\mathfrak{G}$.

Таким образом, имеет место

Теорема 2. *Существует взаимно однозначное соответствие между совокупностью всех регулярных положительных функционалов $f(\lambda e + a)$ в кольце $R(\mathfrak{G})$ и совокупностью всех непрерывных положительно определенных функций $\varphi(g) \not\equiv 0$ на группе $\mathfrak{G}$. Это соответствие задается формулой*

$$f(\lambda e + a) = \lambda\varphi(e) + \int a(g)\,\varphi(g)\, d\mu(g).$$

Отметим, что теорему полноты (см. п. 3 § 29) можно также получить при помощи положительно определенных функций (см. Гельфанд и Райков [2]).

Обозначим через $L^\infty(\mathfrak{G})$ пространство L^∞, отвечающее левоинвариантному интегралу на $\mathfrak{G}$ (см. п. 13 § 6). В силу (4) п. 1 всякая непрерывная положительно определенная на $\mathfrak{G}$ функция принадлежит $L^\infty(\mathfrak{G})$. Пространство $L^\infty(\mathfrak{G})$ является сопряженным к $L^1(\mathfrak{G})$ (см. п. 16 § 6); поэтому слабая топология в $L^\infty(\mathfrak{G})$ определяется окрестностями $U(\varphi_0; a_1, \ldots, a_n; \varepsilon)$, $a_1, \ldots, a_n \in L^1(\mathfrak{G})$, $\varepsilon > 0$, которые представляют собой совокупности всех функций $\varphi \in L^\infty(\mathfrak{G})$, удовлетворяющих неравенствам

$$\left|\int [\varphi(g) - \varphi_0(g)]\, a_k(g)\, d\mu_l(g)\right| < \varepsilon, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Функция $\varphi \in L^{\infty}(\mathfrak{G})$ называется *интегрально положительно определенной*, если для любой функции $a \in L^{1}(\mathfrak{G})$

$$\int\int \overline{a(g_1)}\, a(g_1 g)\, \varphi(g)\, d\mu_l(g_1)\, d\mu_l(g) \geqslant 0. \tag{1}$$

I. *Совокупность всех интегрально положительно определенных функций есть слабо замкнутое множество в* $L^{\infty}(\mathfrak{G})$.

Действительно, полагая $b = a^* \cdot a$, мы можем переписать (1) в виде $\int b(g)\, \varphi(g)\, d\mu_l(g) \geqslant 0$; с другой стороны, выражение $f(\varphi) = \int b(g)\, \varphi(g)\, d\mu_l(g)$ есть непрерывный в слабой топологии линейный функционал в $L^{\infty}(\mathfrak{G})$; следовательно, если неравенство (1) справедливо для некоторого множества функций φ в $L^{\infty}(\mathfrak{G})$, то оно справедливо также для любой слабой точки прикосновения этого множества.

Рассуждения п. 1 можно перенести на интегрально положительно определенные функции. Действительно, положив

$$(a_1, a_2) = \int\int \overline{a_2(g_1)}\, a_1(g_1 g)\, \varphi(g)\, d\mu_l(g_1)\, d\mu_l(g), \tag{2}$$

мы получим билинейную форму в $L^{1}(\mathfrak{G})$, удовлетворяющую условию $(a, a) \geqslant 0$. Следовательно, $(a_1 + \lambda a_2, a_1 + \lambda a_2) \geqslant 0$ для любых $a_1, a_2 \in L^{1}(\mathfrak{G})$ и любого комплексного λ; отсюда легко заключаем, что форма (a_1, a_2) эрмитова. Поэтому она определяет скалярное произведение (ξ, η) в факторпространстве $\mathfrak{H}' = L^{1}(\mathfrak{G})/\mathfrak{N}$, где $\mathfrak{N}$ — подпространство всех функций $a \in L^{1}(\mathfrak{G})$, удовлетворяющих условию $(a, a) = 0$. Пополнение $\mathfrak{H}'$ по норме $|\xi| = \sqrt{(\xi, \xi)}$ есть гильбертово пространство, которое обозначим через $\mathfrak{H}$.

Положим $T_{g_0} a(g) = a(g_0^{-1} g)$; из формулы (2) и левой инвариантности меры заключаем, что $(T_{g_0} a_1, T_{g_0} a_2) = (a_1, a_2)$. Отсюда, как и в п. 1, следует, что T_g определяет унитарный оператор U_g в $\mathfrak{H}$ и что соответствие $g \to U_g$ есть унитарное представление группы $\mathfrak{G}$. Это представление непрерывно. Действительно, если $a_1, a_2 \in L^{1}(\mathfrak{G})$ и $a_1 \in \xi$, $a_2 \in \eta$, то выражение

$$(U_{g_0} \xi, \eta) = (T_{g_0} a_1, a_2) = \int \overline{a_2(g_1)}\, a_1(g_0^{-1} g_1 g)\, \varphi(g)\, d\mu_l(g_1)\, d\mu_l(g)$$

есть непрерывная функция от g_0, ибо в силу I п. 2 § 28 вектор-функция [1])

$$b_{g_0} = \{b_{g_0}(g)\} = \left\{\int \overline{a_2(g_1)}\, T_{g_1^{-1} g_0} a_1(g)\, d\mu_l(g_1)\right\} = \\ = \left\{\int \overline{a_2(g_1)}\, a_1(g_0^{-1} g_1 g)\, d\mu_l(g_1)\right\}$$

[1]) Здесь $b_{g_0}(g)$ не обозначает $b(g_0^{-1} g)$.

со значениями из $L^1(\mathfrak{G})$ непрерывна в смысле нормы [1] в $L^1(\mathfrak{G})$ и

$$(U_{g_0}\xi, \eta) = \int b_{g_0}(g)\,\varphi(g)\,d\mu_l(g) = f(b_{g_0}),$$

где $f(b) = \int b(g)\,\varphi(g)\,d\mu_l(g)$ — непрерывный линейный функционал в $L^1(\mathfrak{G})$.

Так как $\mathfrak{H}'$ плотно в $\mathfrak{H}$ и $|U_g| = 1$, то отсюда следует непрерывность функции $(U_g\xi, \eta)$ для всех $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$. Таким образом,

II. *Всякая интегрально положительно определенная функция φ на группе $\mathfrak{G}$ определяет непрерывное унитарное представление $g \to U_g$ группы $\mathfrak{G}$.*

Этому представлению отвечает представление группового кольца $R(\mathfrak{G})$ группы $\mathfrak{G}$, не содержащее вырожденного представления, и, следовательно, регулярный положительный функционал f в $R(\mathfrak{G})$ такой, что

$$f(a_2^* a_1) = (a_1, a_2) = \int\int \overline{a_2(g_1)}\, a_1(g_1 g)\,\varphi(g)\,d\mu_l(g_1)\,d\mu_l(g). \tag{3}$$

Но согласно теореме 2

$$f(a_2^* a_1) = \int\int \overline{a_2(g_1)}\, a_1(g_1 g)\,\varphi_1(g)\,d\mu_l(g_1)\,d\mu_l(g),$$

где φ_1 — непрерывная положительно определенная функция. Сравнение этой формулы с (3) показывает, что $\varphi(g) = \varphi_1(g)$ локально почти всюду на $\mathfrak{G}$; следовательно,

III. *Всякая интегрально положительно определенная на $\mathfrak{G}$ функция локально почти всюду на $\mathfrak{G}$ равна непрерывной положительно определенной функции.*

Обратно:

IV. *Всякая непрерывная положительно определенная функция является также интегрально положительно определенной.*

---

[1] Действительно, выберем окрестность $U(g_0)$ так, чтобы

$$\|T_{g_0'} a_1 - T_{g_0} a_1\|_1 < \varepsilon \quad \text{при} \quad g_0' \in U(g_0)$$

(см. I п. 2 § 28). Тогда при $g_0' \in U(g_0)$

$$\begin{aligned}\|b_{g_0'} - b_{g_0}\|_1 &= \int \left| \int \overline{a_2(g_1)} [a_1(g_0'^{-1} g_1 g) - a_1(g_0^{-1} g_1 g)]\, d\mu_l(g_1) \right| d\mu_l(g) \leqslant \\ &\leqslant \int |a_2(g_1)| \left[\int |a_1(g_0'^{-1} g_1 g) - a_1(g_0^{-1} g_1 g)|\, d\mu_l(g) \right] d\mu_l(g_1) = \\ &= \int |a_2(g_1)| \left[\int |a_1(g_0'^{-1} g) - a_1(g_0^{-1} g)|\, d\mu_l(g) \right] d\mu_l(g_1) = \\ &= \int |a_2(g_1)|\, \|T_{g_0'} a_1 - T_{g_0} a_1\|_1\, d\mu_l(g_1) < \varepsilon \int |a_2(g_1)|\, d\mu_l(g_1).\end{aligned}$$

Утверждение непосредственно вытекает из теоремы 2, согласно которой $f(a) = \int a(g)\,\varphi(g)\,d\mu_l(g)$ — положительный функционал в $L^1(\mathfrak{G})$ и потому

$$\int\int \overline{a(g_1)}\,a(g_1 g)\,\varphi(g)\,d\mu_l(g_1)\,d\mu_l(g) = f(a^* a) \geqslant 0.$$

3. Регулярные множества. Пусть φ_1, φ_2 — непрерывные положительно определенные функции на локально бикомпактной группе $\mathfrak{G}$, а f_1, f_2 — соответствующие положительные функционалы. Функцию φ_1 будем называть *подчиненной* функции φ_2 и писать $\varphi_1 \prec \varphi_2$, если $\varphi_2 - \varphi_1$ есть положительно определенная функция, следовательно, если $f_2 - f_1$ — положительный функционал. В частности, положительно определенная функция φ называется *элементарной*, если всякая положительно определенная функция, подчиненная функции φ, ей кратна. Таким образом, φ элементарна тогда и только тогда, когда соответствующий положительный функционал неразложим, следовательно, когда отвечающее ей унитарное представление группы $\mathfrak{G}$ неприводимо.

I. *Пусть $\varphi_2(g) = (U_g\xi_0, \xi_0)$, где $g \to U_g$ — циклическое представление группы $\mathfrak{G}$ с циклическим вектором ξ_0. Соотношение $\varphi_1 \prec \varphi_2$ имеет место тогда и только тогда, когда $\varphi_1(g) = (BU_g\xi_0, \xi_0)$, где B — положительно определенный оператор с нормой, не превосходящей единицы, перестановочный со всеми операторами U_g.*

Доказательство. Пусть f_1, f_2 — регулярные положительные функционалы в $R(\mathfrak{G})$, отвечающие положительно определенным функциям φ_1, φ_2, так что

$$f_1(a) = \int a(g)\,\varphi_1(g)\,d\mu_l(g), \qquad f_2(a) = \int a(g)\,\varphi_2(g)\,d\mu_l(g) \tag{1}$$

для всех $a \in L^1(\mathfrak{G})$. Соотношение $\varphi_1 \prec \varphi_2$ равносильно положительности функционала $f_2 - f_1$, что в свою очередь равносильно равенству

$$f_1(a) = (A_a B\xi_0, \xi_0) \tag{2}$$

для всех $a \in L^1(\mathfrak{G})$, где B — положительно определенный оператор с нормой, не превосходящей единицы, перестановочный со всеми операторами A_a, или что то же, со всеми операторами U_g (см. теорему 1 п. 1 § 19). Но в силу (1) формула (2) означает (см. теорему 1 п. 2 § 29), что

$$\int a(g)\,\varphi_1(g)\,d\mu(g) = (A_a B\xi_0, \xi_0) = \int a(g)(BU_g\xi_0, \xi_0)\,d\mu(g),$$

следовательно, ввиду произвольности функции $a \in L^1(\mathfrak{G})$, — что $\varphi_1(g) = (BU_g\xi_0, \xi_0)$.

Положим теперь $H = \sqrt{B}$. Так как ξ_0 — циклический вектор, то, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует линейная комбинация $\xi = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k U_{g_k} \xi_0$ такая, что $|H\xi_0 - \xi| < \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned}
|(BU_g\xi_0, \xi_0) - (U_g\xi, \xi)| &= |(U_g H\xi_0, H\xi_0) - (U_g\xi, \xi)| \leqslant \\
&\leqslant |(U_g H\xi_0, H\xi_0) - (U_g\xi, H\xi_0)| + |(U_g\xi, H\xi_0) - (U_g\xi, \xi)| \leqslant \\
&\leqslant |U_g(H\xi_0 - \xi)| \cdot |H\xi_0| + |U_g\xi| \cdot |H\xi_0 - \xi| < \\
&< \varepsilon(|H\xi_0| + |\xi|) < \varepsilon(2|H\xi_0| + \varepsilon).
\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$(Ug\xi, \xi) = \sum_{p,\,q} \lambda_p \overline{\lambda}_q \varphi_2(g_q^{-1} g g_p);$$

следовательно, полученное неравенство перепишется в виде

$$\Big|\varphi_1(g) - \sum_{p,\,q} \lambda_p \overline{\lambda}_q \varphi_2(g_q^{-1} g g_p)\Big| < \varepsilon(2\|H\xi_0\| + \varepsilon).$$

Таким образом,

II. *Если $\varphi_1 \prec \varphi_2$, то φ_1 есть равномерный на группе $\mathfrak{G}$ предел функций*

$$\varphi(g) = \sum_{p,\,q} \lambda_p \overline{\lambda}_q \varphi_2(g_q^{-1} g g_p).$$

Обозначим через P совокупность всех непрерывных положительно определенных функций φ на $\mathfrak{G}$, а через P_0 — совокупность всех функций из P, удовлетворяющих условию $\varphi(e) \leqslant 1$; P_0 есть слабо замкнутое выпуклое подмножество единичного шара в $L^\infty(\mathfrak{G})$ и потому P_0 бикомпактно в слабой топологии в $L^\infty(\mathfrak{G})$ (см. III п. 7 § 3).

Действительно, пусть φ_0 — слабая точка прикосновения множества P_0; в силу IV и I п. 2 φ_0 — интегрально положительно определенная функция, и мы можем считать $\varphi_0 \in P$ (см. III п. 2). Нам надо доказать, что $\varphi_0(e) \leqslant 1$. Предположим противное; пусть $\varphi_0(e) = 1 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Так как $|\varphi_0(g) - \varphi_0(e)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ в некоторой окрестности U единицы e, причем можно считать, что $\overline{U}$ бикомпактно, то, полагая

$$a(g) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu_l(\overline{U})} & \text{при} \quad g \in \overline{U}, \\ 0 & \text{при} \quad g \notin \overline{U}, \end{cases}$$

мы получим, что при $\varphi \in P_0$

$$\left|\int a(g)[\varphi_0(g)-\varphi(g)]\,d\mu_l(g)\right| = \frac{1}{\mu_l(\overline{U})}\left|\int\limits_{\overline{U}}[\varphi_0(g)-\varphi(g)]\,d\mu_l(g)\right| =$$

$$= \frac{1}{\mu_l(\overline{U})}\left|\varphi_0(e)\,\mu_l(\overline{U}) + \int\limits_{\overline{U}}[\varphi_0(g)-\varphi_0(e)]\,d\mu_l(g) - \int\limits_{\overline{U}}\varphi(g)\,d\mu_l(g)\right| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{\mu_l(\overline{U})}\left[\varphi_0(e)\,\mu_l(\overline{U}) - \int\limits_{\overline{U}}|\varphi_0(g)-\varphi_0(e)|\,d\mu_l(g) - \int\limits_{\overline{U}}\varphi(e)\,d\mu_l(g)\right] \geqslant$$

$$\geqslant \varphi_0(e) - \frac{\varepsilon}{2} - \varphi(e) \geqslant (1+\varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} - 1 = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Это означает, что, вопреки условию, окрестность $U\left(\varphi_0;\, a;\, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ не содержит функций из множества P_0. Следовательно, $\varphi_0(e) \leqslant 1$.

Множество $\mathfrak{A} \in P_0$ называется *регулярной частью* множества P_0, если

1°. $\mathfrak{A}$ выпукло и слабо замкнуто;

2°. Из $\varphi_1 \in P$, $\varphi_2 \in \mathfrak{A}$, $\varphi_1 \prec \varphi_2$ следует $\varphi_1 \in \mathfrak{A}$;

3°. Из $\varphi \in \mathfrak{A}$ следует $\dfrac{\varphi(g)}{\varphi(e)} \in \mathfrak{A}$.

Из 2° вытекает, что функция $\varphi \equiv 0 \in \mathfrak{A}$; 0 есть экстремальная точка этого множества, ибо если $\varphi_1, \varphi_2 \in P$ и $t\,\varphi_1 + (1-t)\,\varphi_2 = 0$, $0 < t < 1$, то $t\,\varphi_1(e) + (1-t)\,\varphi_2(e) = 0$, следовательно, $\varphi_1(e) = \varphi_2(e) = 0$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

Очевидно, все множество P_0 есть также своя регулярная часть.

Положительно определенная функция φ называется *нормированной*, если $\varphi(e) = 1$.

III. *Если $\mathfrak{A}$ есть регулярная часть множества P_0, то множество всех экстремальных точек множества $\mathfrak{A}$, отличных от 0, совпадает с множеством всех принадлежащих ему элементарных нормированных положительно определенных функций.*

Доказательство. Пусть φ — экстремальная точка множества $\mathfrak{A}$ и $\varphi \neq 0$. Так как $0 \in \mathfrak{A}$, $\dfrac{1}{\varphi(e)}\,\varphi \in \mathfrak{A}$, то и весь отрезок $\left[0,\, \dfrac{1}{\varphi(e)}\,\varphi\right] \in \mathfrak{A}$; функция φ экстремальна, следовательно, должна совпадать с концом $\dfrac{1}{\varphi(e)}\,\varphi$ этого отрезка. Отсюда $\varphi(e) = 1$, т. е. φ нормирована.

Докажем, что φ элементарна. Пусть $\varphi_1 \prec \varphi$ и $\varphi_1 \neq \varphi$, $\varphi_1 \neq 0$; тогда $\varphi - \varphi_1 \prec \varphi$, $\varphi - \varphi_1 \neq 0$, следовательно, в силу 2°

$$\varphi_1 \in \mathfrak{A}, \quad \varphi - \varphi_1 \in \mathfrak{A}.$$

В силу 3° функции

$$\psi_1 = \frac{1}{\varphi_1(e)}\,\varphi_1, \quad \psi_2 = \frac{1}{\varphi(e)-\varphi_1(e)}\,[\varphi - \varphi_1] = \frac{\varphi - \varphi_1}{1 - \varphi_1(e)}$$

принадлежат множеству $\mathfrak{A}$. Равенство

$$\varphi = \varphi_1(e)\,\psi_1 + [1 - \varphi_1(e)]\,\psi_2$$

показывает, что φ принадлежит отрезку $[\psi_1, \psi_2]$. Так как, по условию, φ экстремальна, то либо $\varphi = \psi$, либо $\varphi = \psi_2$. В каждом из этих случаев $\varphi_1 = \varphi_1(e)\varphi$. Это означает, что функция φ элементарна.

Обратно, пусть $\varphi \in \mathfrak{A}$ — элементарная нормированная функция. Докажем, что φ экстремальна в $\mathfrak{A}$. Пусть φ принадлежит отрезку $[\varphi_1, \varphi_2] \subset \mathfrak{A}$, т. е.

$$\varphi = \lambda\varphi_1 + (1 - \lambda)\,\varphi_2, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{A}, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Тогда $\lambda\varphi_1 \prec \varphi$; если поэтому $\lambda \neq 0$, то, так как φ элементарна, должно быть $\varphi_1 = \mu\varphi$. Аналогично, если $\lambda < 1$, то $\varphi_2 = \nu\varphi$. Следовательно, при $0 < \lambda < 1$ будет

$$\varphi = \lambda\mu\varphi + (1 - \lambda)\,\nu\varphi,$$

откуда

$$1 = \lambda\mu + (1 - \lambda)\,\nu.$$

Так как $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, $0 \leqslant \nu \leqslant 1$ (ибо $\varphi_1, \varphi_2 \in P_0$), то это возможно только при $\mu = \nu = 1$, т. е. $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$, и предложение III полностью доказано.

Применяя теперь к регулярной части $\mathfrak{A}$ множества P_0 теорему 1 п. 9 § 3, получаем:

Теорема 3 (Гельфанд и Райков [2]). *Пусть $\mathfrak{A}$ — регулярная часть множества P_0. Тогда всякая функция $\varphi \in \mathfrak{A}$ есть слабая точка прикосновения в $L^\infty(\mathfrak{G})$ функций вида*

$$\sum \lambda_k \varphi_k(g), \quad \lambda_k \geqslant 0, \quad \sum \lambda_k \leqslant \varphi(e),$$

где φ — элементарные нормированные функции из $\mathfrak{A}$.

В частности, эта теорема имеет место для всего множества P_0, а значит, и для множества P.

4. Тригонометрические многочлены на группе. *Тригонометрическим многочленом* на группе $\mathfrak{G}$ называется всякая функция вида

$$\lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_n\varphi_n,$$

где φ_k — элементарные нормированные функции из P. Числа λ_k называются *коэффициентами* тригонометрического многочлена. Если, в частности, $\mathfrak{G}$ есть аддитивная группа всех вещественных чисел x, то, как мы увидим ниже (см. пример а) п. 1 § 31), тригонометрический многочлен на этой группе совпадает с обычным тригонометрическим многочленом $\sum\limits_k \lambda_k e^{i\alpha_k x}$.

I. *Если f — тригонометрический многочлен и $x \in L^1(\mathfrak{G})$, то функция*

$$f_1(g) = \int f(g_1)\,x(g_1^{-1}g)\,d\mu_l(g_1)$$

— также тригонометрический многочлен.

Достаточно доказать это предложение для того случая, когда f — элементарная положительно определенная функция. Тогда

$$f(g) = (U_g\xi_0, \xi_0),$$

где $g \to U_g$ — неприводимое унитарное представление группы $\mathfrak{G}$; следовательно,

$$f_1(g) = \int (U_{g_1}\xi_0, \xi_0)\, x(g_1^{-1}g)\, d\mu_l(g_1) = \\ = \int (U_{gg_1}\xi_0, \xi_0)\, x(g_1^{-1})\, d\mu_l(g_1) = -(U_g\xi, \xi_0),$$

где

$$\xi = \int x(g_1^{-1})\, U_{g_1}\xi_0\, d\mu_l(g_1).$$

Поэтому f_1 можно представить в виде линейной комбинации функций

$$\varphi_1(g) = (U_g(\xi + \xi_0), \xi + \xi_0), \quad \varphi_3(g) = (U_g(\xi + i\xi_0), \xi + i\xi_0),$$
$$\varphi_2(g) = (U_g(\xi - \xi_0), \xi - \xi_0), \quad \varphi_4(g) = (U_g(\xi - i\xi_0), \xi - i\xi_0),$$

каждая из которых есть элементарная положительно определенная функция. Это означает, что f_1 — тригонометрический многочлен. Совершенно аналогично можно доказать, что

II. *Всякий правый или левый сдвиг тригонометрического многочлена есть тригонометрический многочлен.*

5. Спектр. Пусть $\mathfrak{S}$ — множество непрерывных ограниченных функций на $\mathfrak{G}$. Будем говорить, что функция f *аппроксимируется функциями из $\mathfrak{S}$ равномерно на каждом бикомпактном множестве*, если, каковы бы ни были бикомпактное множество $Q \subset \mathfrak{G}$ и $\varepsilon > 0$, существует функция $\varphi \in \mathfrak{S}$ такая, что

$$|f(g) - \varphi(g)| < \varepsilon \quad \text{на} \quad Q.$$

Пусть $\varphi \in P_0$. Обозначим через $\mathfrak{A}_\varphi$ множество всех функций вида

$$f(g) = \sum_{p,\, q} \alpha_p \overline{\alpha}_q \varphi(g_q^{-1} g g_p)$$

и конечных сумм таких функций, принадлежащих P_0. Далее, обозначим через $\widetilde{\mathfrak{A}}_\varphi$ множество всех функций из P_0, равномерно аппроксимируемых на каждом бикомпактном множестве функциями из $\mathfrak{A}_\varphi$.

Лемма 1 [1]). *$\widetilde{\mathfrak{A}}_\varphi$ слабо замкнуто.*

Доказательство. Пусть θ принадлежит слабому замыканию множества $\widetilde{\mathfrak{A}}_\varphi$; докажем, что $\theta \in \widetilde{\mathfrak{A}}_\varphi$. Пусть $y \in L^1(\mathfrak{G})$. Положим для краткости [2])

$$y_{g'}(g) = y(g'^{-1}g)$$

[1]) Эта лемма следует из одной теоремы Д. А. Райкова [8].

[2]) См. п. 4 § 27.

и
$$\psi_y(g) = \iint \psi(g_2^{-1}gg_1)\, y(g_1)\, \overline{y(g_2)}\, d\mu_l(g_1)\, d\mu_l(g_2).$$

Если g' пробегает бикомпактное множество $Q \subset \mathfrak{G}$, то $y_{g'}$ пробегает предкомпактное множество $S \subset L^1(\mathfrak{G})$.

В самом деле, достаточно показать, что при любом $\varepsilon > 0$ в множестве S существует конечная ε-сеть (см. I п. 14 § 2). Так как $y_{g'}$ есть непрерывная функция от g' в смысле нормы в $L^1(\mathfrak{G})$, то каждой точке $g_0' \in Q$ отвечает окрестность $U(g_0')$ такая, что при $g \in U(g_0')$ будет $\|y_g - y_{g_0'}\|_1 < \varepsilon$. В силу бикомпактности множества Q из этих окрестностей можно выбрать конечное покрытие $U(g_1'), \ldots, U(g_n')$ множества Q. Очевидно, точки $y_{g_1'}, \ldots, y_{g_n'}$ образуют ε-сеть в множестве S.

Итак, S предкомпактно, следовательно, множество y^*S всех функций $z_g = y^*y_g$, $g \in Q$, также предкомпактно. Но, согласно предложению III п. 4 § 19, слабая точка прикосновения θ множества $\widetilde{\mathfrak{A}}_\varphi$ есть также его точка прикосновения в смысле топологии, равномерной на каждом компактном множестве. Поэтому существует функция $\varphi \in \widetilde{\mathfrak{A}}_\varphi$ такая, что
$$\left| \int [\psi(g') - \theta(g')]\, z_g(g')\, d\mu_l(g') \right| < \varepsilon$$
для всех $g \in Q$, что, как легко видеть, означает, что
$$|\psi_y(g) - \theta_y(g)| < \varepsilon$$
для всех $g \in Q$.

Другими словами, *функция θ_y аппроксимируется равномерно на каждом бикомпактном множестве функциями ψ_y, $\psi \in \widetilde{\mathfrak{A}}_\varphi$*. Очевидно, при $\theta_y(e) \leqslant 1$ можно также считать, что $\psi_y(e) \leqslant 1$.

Пусть $g \to U_g$ — унитарное представление с циклическим вектором ξ_0 такое, что $\psi(g) = (U_g\xi_0, \xi_0)$; тогда
$$\psi_y(g) = (U_g A_y \xi_0, A_y \xi_0).$$
Но в силу цикличности вектора ξ_0, $A_y\xi_0$ есть предел по норме векторов вида
$$\sum_k \alpha_k U_{g_k} \xi_0;$$
поэтому $\psi_y(g)$ есть предел, равномерный на всей группе $\mathfrak{G}$, функций
$$\sum_{j,k} \alpha_k \overline{\alpha}_j (U_g U_{g_k} \xi_0, U_{g_j} \xi_0) = \sum_{j,k} \psi(g_j^{-1} g g_k)\, \alpha_k \overline{\alpha}_j \in \widetilde{\mathfrak{A}}_\varphi.$$

Следовательно, $\psi_y \in \widetilde{\mathfrak{A}}_\varphi$, и потому также $\theta_y \in \widetilde{\mathfrak{A}}_\varphi$. С другой стороны, при данных $\varepsilon > 0$ и бикомпактном $Q \subset \mathfrak{G}$ существует окрестность U единицы в $\mathfrak{G}$ такая, что
$$|\theta(g_2^{-1} g g_1) - \theta(g)| < \varepsilon$$

при $g_1, g_2 \in U$, $g \in Q$ (так как совокупность всех точек $(g_1, g_2) \in \in \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$, для которых $|\theta(g_2^{-1} g g_1) - \theta(g)| < \varepsilon$ для всех $g \in Q$, есть открытое множество, содержащее единицу $(e, e) \in \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$; см. V п. 12 § 2). При этом можно считать $\overline{U}$ бикомпактным. Выбирая $y \in L^1(\mathfrak{G})$ так, что $y(g) \geqslant 0$, $y(g) = 0$ вне $\overline{U}$ и

$$\int y(g)\, d\mu_l(g) = 1,$$

имеем

$$|\theta_y(g) - \theta(g)| \leqslant \int\limits_{\overline{U}} \int\limits_{\overline{U}} |\theta(g_2^{-1} g g_1) - \theta(g)|\, y(g_1)\, y(g_2)\, d\mu_l(g_1)\, d\mu_l(g_2) <$$

$$< \varepsilon \int\limits_{\overline{U}} \int\limits_{\overline{U}} y(g_1)\, y(g_2)\, d\mu_l(g_1)\, d\mu_l(g_2) = \varepsilon$$

при $g \in Q$. Следовательно, $\theta \in \widetilde{\mathfrak{A}}_\varphi$.

Лемма 2. *$\widetilde{\mathfrak{A}}_\varphi$ есть регулярная часть множества P_0.*

Доказательство. Нам нужно доказать, что $\widetilde{\mathfrak{A}}_\varphi$ удовлетворяет условиям 1°, 2°, 3° (с. 470) определения регулярной части. Очевидно, множество $\mathfrak{A}_\varphi$ выпукло; следовательно, $\widetilde{\mathfrak{A}}_\varphi$ также выпукло. Далее, очевидно, что из $\psi \in \mathfrak{A}_\varphi$, $\psi \neq 0$, следует, что $\dfrac{\psi}{\psi(e)} \in \mathfrak{A}_\varphi$, следовательно, это же свойство имеет место и для $\psi \in \widetilde{\mathfrak{A}}_\varphi$, т. е. условие 3° выполнено.

Пусть $\psi \in \widetilde{\mathfrak{A}}_\varphi$, $\theta \in P$, $\theta \prec \psi$; докажем, что $\theta \in \widetilde{\mathfrak{A}}_\varphi$. Пусть Q — бикомпактное множество в $\mathfrak{G}$ и $\varepsilon > 0$. Согласно предложению II п. 3 существует функция вида

$$\sum_{p,\, q} \beta_p \overline{\beta}_q \psi(g_1^{-1} g g_p)$$

такая, что

$$\Bigl| \sum_{p,\, q} \beta_p \overline{\beta}_q \psi(g_q^{-1} g g_p) - \theta(g) \Bigr| < \varepsilon$$

для всех $g \in \mathfrak{G}$. С другой стороны, $\varphi \in \widetilde{\mathfrak{A}}_\varphi$; следовательно, существует функция $\varphi' \in \mathfrak{A}_\varphi$ такая, что

$$|\psi(g) - \varphi'(g)| < \frac{\varepsilon}{\sum\limits_{p,\, q} |\beta_p \overline{\beta}_q|}$$

для всех $g \in \bigcup\limits_{p,\, q} g_q^{-1} Q g_p$, ибо последнее множество бикомпактно в $\mathfrak{G}$. Отсюда при $g \in Q$

$$\Bigl| \sum_{p,\, q} \beta_p \overline{\beta}_q \psi(g_q^{-1} g g_p) - \sum_{p,\, q} \beta_p \overline{\beta}_q \varphi'(g_q^{-1} g g_p) \Bigr| < \varepsilon;$$

следовательно,

$$\left|\theta(g) - \sum_{p,\,q} \beta_p \overline{\beta}_q \varphi'(g_q^{-1} g g_p)\right| < 2\varepsilon. \tag{1}$$

Остается показать, что функцию

$$\varphi''(g) = \sum_{p,\,q} \beta_p \overline{\beta}_q \varphi'(g_q^{-1} g g_p)$$

можно выбрать из $\mathfrak{A}_\varphi$, т. е. так, чтобы $\varphi''(e) \leqslant 1$. Для этого достаточно взять множество Q, содержащее e. Неравенство (1) будет тогда иметь место и при $g = e$, т. е.

$$|\theta(e) - \varphi''(e)| < 2\varepsilon.$$

Так как $\theta \prec \psi$, то $\theta(e) \leqslant 1$; следовательно, $\varphi''(e) < 1 + 2\varepsilon$. Поэтому достаточно заменить функцию $\varphi''(g)$ функцией $\dfrac{\varphi''(g)}{1+2\varepsilon}$.

Таким образом, условие 2° также выполнено. Наконец, слабая замкнутость была доказана в лемме 1.

Спектром функции $\varphi \in P$ называется совокупность всех нормированных элементарных положительно определенных функций из $\widetilde{\mathfrak{A}}_{\varphi/\varphi(e)}$.

Теорема 4 (Годман [3]). *Всякая функция $\varphi \in P$ аппроксимируется равномерно на каждом бикомпактном множестве тригонометрическими многочленами с положительными коэффициентами, составленными из элементов спектра функции φ.*

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что $\varphi(e) = 1$. Применяя к $\widetilde{\mathfrak{A}}_\varphi$ теорему 3 п. 3, мы получаем, что φ есть точка прикосновения функций $\psi(g) = \sum\limits_p \lambda_p \varphi_p(g)$, где функции φ_p принадлежат спектру функции φ, а $\lambda_p \geqslant 0$, $\sum\limits_p \lambda_p \leqslant 1$. Остается заменить слабую топологию равномерной на всяком бикомпактном множестве. Для этого заметим, что при $y \in L^1(\mathfrak{G})$ функция $\varphi_y(g)$ равномерно аппроксимируется на бикомпактных множествах функциями $\psi_y(g) \in \widetilde{\mathfrak{A}}_\varphi$ (см. доказательство леммы 1). Но так как $\psi(g) = \sum\limits_p \lambda_p \varphi_p(g)$, то $\psi_y(g) = \sum\limits_p \lambda_p \varphi_{p,\,y}(g)$, где $\varphi_{p,\,y} \in \widetilde{\mathfrak{A}}_\varphi$. Пусть $g \to U_g$ — унитарное представление группы $\mathfrak{G}$ такое, что $\varphi_p(g) = (U_g \xi_0, \xi_0)$; так как φ_p — элементарная положительно определенная функция, то представление $g \to U_g$ неприводимо. Поэтому функция $\varphi_{p,\,y}(g) = (U_g A_y \xi_0, A_y \xi_0)$ также является элементарной положительно определенной. Отсюда заключаем, что $\varphi_{p,\,y}(g)$ принадлежит спектру φ и что $\psi_y(g)$ — тригонометрический многочлен с положительными коэффициентами λ_p. Следовательно, остается только заметить, что функция φ равномерно аппроксимируется на каждом бикомпактном множестве $\mathfrak{G}$ функциями $\varphi_y(g)$ (см. конец доказательства леммы 1).

Теорема 5 (Годман [3]). *Всякая непрерывная функция на $\mathfrak{G}$ аппроксимируема равномерно на каждом бикомпактном множестве тригонометрическими многочленами.*

Доказательство. Пусть $f \in L(\mathfrak{G})$; тогда $f \cdot f^*$ — положительно определенная функция. Следовательно, $f \cdot f^*$ аппроксимируема тригонометрическими многочленами согласно теореме 4. При $f_1, f_2 \in L(\mathfrak{G})$ функция $f_1 \cdot f_2^*$ есть линейная комбинация функций $(f_1 \pm f_2) \times \times (f_1 \pm f_2)^*$, $f_1 \pm if_2) \cdot (f_1 \pm if_2)^*$, следовательно, теорема 4 распространяется и на функции $f_1 \cdot f_2^*$, где $f_1, f_2 \in L(\mathfrak{G})$. Но функция f равномерно аппроксимируется на $\mathfrak{G}$ функциями $f_1 \cdot f$ (см. замечание 2 к II п. 2 § 28); следовательно, теорема 5 верна для всех функций $f \in L(\mathfrak{G})$. Отсюда следует, что эта теорема справедлива для всех непрерывных функций, ибо всякая непрерывная функция f равномерно аппроксимируется на бикомпактных множествах функциями $f \in L(\mathfrak{G})$.

§ 31. Гармонический анализ на коммутативной локально бикомпактной группе

1. Максимальные идеалы группового кольца коммутативной группы; характеры. Пусть теперь $\mathfrak{G}$ — коммутативная локально бикомпактная группа. Легко видеть, что ее групповое кольцо $R(\mathfrak{G})$ также коммутативно. Найдем все максимальные идеалы этого кольца. Одним из таких максимальных идеалов является $M_0 = L^1(\mathfrak{G})$, из которого $R(\mathfrak{G})$ получается путем присоединения единицы. Найдем все максимальные идеалы $M \neq M_0$.

Если $M \neq M_0$, то существует функция $b \in L^1(\mathfrak{G})$ такая, что $b(M) \neq \neq 0$; путем нормировки можно добиться, чтобы $b(M) = 1$. Положим

$$b_{g_0}(g) = b(g_0^{-1}g)$$

и

$$\chi(g_0) = b_{g_0}(M). \tag{1}$$

Тогда (см. I п. 2 § 11)

$$|\chi(g_0)| \leqslant \|b_{g_0}\|_1 = \|b\|_1; \quad \chi(e) = 1. \tag{2}$$

Кроме того,

$$b_{g_1} \cdot b_{g_2} = b \cdot b_{g_1 g_2}. \tag{3}$$

Действительно, так как группа $\mathfrak{G}$ коммутативна, то

$$(b_{g_1}\cdot b_{g_2})(g) = \int b_{g_1}(h)\, b_{g_2}(h^{-1}g)\, d\mu(h) =$$
$$= \int b(g_1^{-1}h)\, b(g_2^{-1}h^{-1}g)\, d\mu(h) = \int b(h)\, b(g_2^{-1}h^{-1}g_1^{-1}g)\, d\mu(h) =$$
$$= \int b(h)\, b(g_2^{-1}g_1^{-1}h^{-1}g)\, d\mu(h) = \int b(h)\, b_{g_1g_2}(h^{-1}g) = (b\cdot b_{g_1g_2})(g).$$

Из (3) вытекает, что $b_{g_1}(M)\, b_{g_2}(M) = b(M)\, b_{g_1g_2}(M) = b_{g_1g_2}(M)$, т. е. согласно (1)

$$\chi(g_1)\,\chi(g_2) = \chi(g_1g_2). \tag{4}$$

Но тогда, применяя (2) к $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, вместо g_0, получаем, что $|\chi(g_0|^m \leqslant \|b\|_1$ при всех $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$; а это возможно, лишь когда

$$|\chi(g)| = 1. \tag{5}$$

Наконец, из соотношения

$$|\chi(g) - \chi(g_0)| \leqslant \|b_g - b_{g_0}\|_1 \to 0 \quad \text{при} \quad g \to g_0$$

вытекает, что $\chi(g)$ — равномерно непрерывная на $\mathfrak{G}$ функция.

Всякая непрерывная функция χ на $\mathfrak{G}$, удовлетворяющая условиям (4) и (5), называется *характером* группы $\mathfrak{G}$. Очевидно, характер можно рассматривать как унитарное, именно, одномерное представление группы $\mathfrak{G}$.

Итак, мы по данному максимальному идеалу $M \neq M_0$ построили характер $\chi = \chi_M$ группы $\mathfrak{G}$.

I. 1). *Характер χ_M не зависит от выбора функции $b \in L^1(\mathfrak{G})$, для которой $b(M) = 1$;*

2). *Если $\{z_U\} = \{z_U(g)\}$ — множество, аппроксимирующее единицу* [1]*, и $z_{U,g_0} = z_U(g_0^{-1}g)$, то $z_{U,g}(M)$ сходится к $\chi_M(g)$ при каждом фиксированном $M \neq M_0$.*

Доказательство. Пусть $a, b \in L^1(\mathfrak{G})$ и $a(M) = b(M) = 1$. Применяя гомоморфизм $a \to a(M)$ к легко проверяемому соотношению $a \cdot b_g = a_g \cdot b$, получаем, что $a(M)\, b_g(M) = a_g(M)\, b(M)$, т. е. $b_g(M) = a_g(M)$; этим доказано утверждение 1). Из него, в частности, следует, что $z_{U,g}(M) = \chi(g)\, z_U(M)$. С другой стороны,

$$|z_U(M) - 1| = |z_U(M)\, a(M) - a(M)| \leqslant \|z_U \cdot a - a\|_1 \to 0.$$

Покажем теперь, как по характеру $\chi_M(g)$ восстановить идеал M, или, что то же, функцию $x(M)$, $a(M)$ при фиксированном $M \neq M_0$ есть ограниченный линейный функционал в $L^1(\mathfrak{G})$ и потому

$$a(M) = \int a(g)\, a_M(g)\, d\mu(g), \tag{6}$$

[1] См. п. 2 § 28; $\{z_U\}$ рассматривается как направленное книзу соотношением $z_U \succ z_V$ при $U \subset V$.

где $\alpha_M(g) \in L^\infty(\mathfrak{G})$ (см. IX п. 5 § 27). Отсюда

$$a(M) = \lim_U \int (a \cdot z_U)(g)\, \alpha_M(g)\, d\mu(g) =$$
$$= \lim_U \int \int a(g')\, z_U(g'^{-1}g)\, \alpha_M(g)\, d\mu(g) =$$
$$= \lim_U \int a(g')\, \chi_M(g')\, d\mu(g') \cdot \int z_U(g)\, \alpha_M(g)\, d\mu(g) =$$
$$= \lim_U z_U(M) \int a(g')\, \chi_M(g')\, d\mu(g')$$

и в силу утверждения 2) предложения I

$$a(M) = \int a(g')\, \chi(g')\, d\mu(g')$$

при $\chi = \chi_M$.

Следовательно, при $x = \lambda e + a$

$$x(M) = (\lambda e + a)(M) = \lambda + \int a(g)\, \chi(g)\, d\mu(g). \tag{7}$$

Обратно, непосредственная проверка показывает, что при любом характере $\chi(g)$ группы $\mathfrak{G}$ формула (7) определяет гомоморфизм $x \to x(M)$ кольца $R(\mathfrak{G})$ в поле комплексных чисел, значит, максимальный идеал этого кольца.

Мы доказали следующую теорему:

Теорема 1. *Существует взаимно однозначное соответствие между совокупностью всех максимальных идеалов $M \neq L^1(\mathfrak{G})$ группового кольца $R(\mathfrak{G})$ коммутативной группы $\mathfrak{G}$ и совокупностью всех характеров χ этой группы. Это соответствие задается формулой*

$$x(M) = (\lambda e + a)(M) = \lambda + \int a(g)\, \chi(g)\, d\mu(g).$$

Из формулы (1) в силу предложения I следует, что

$$\chi(g) = \frac{a_g(M)}{a(M)}$$

для любой функции $a \in L^1(\mathfrak{G})$, удовлетворяющей условию $a(M) \neq 0$.

Следствие 1. *Групповое кольцо коммутативной локально бикомпактной группы вполне симметрично.*

Доказательство. Так как $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$, то из (7) следует, что $x^*(M) = \overline{x(M)}$ для любого максимального идеала M.

Выше мы видели (см. пример в) п. 4 § 29), что для некоммутативного группового кольца это утверждение вообще неверно.

Следствие 2. *Всякая элементарная нормированная положительно определенная функция на коммутативной группе есть характер этой группы.*

Доказательство. Элементарной нормированной положительно определенной функции φ отвечает элементарный положительный функционал

$$f(\lambda e + a) = \lambda + \int a(g)\,\varphi(g)\,d\mu(g) \tag{8}$$

в $R(\mathfrak{G})$. Так как $R(\mathfrak{G})$ коммутативно, то этот функционал определяется некоторым максимальным идеалом [1] M в $R(\mathfrak{G})$ по формуле $f(\lambda e + a) = \lambda + a(M)$. Отсюда в силу (7)

$$f(\lambda e + a) = \lambda + \int a(g)\,\chi(g)\,d\mu(g),$$

а сравнение с (8) дает $\varphi(g) = \chi(g)$.

Следствие 3. *Для любых двух элементов $g_1 \neq g_2$ группы $\mathfrak{G}$ существует характер χ_0 такой, что $\chi_0(g_1) \neq \chi_0(g_2)$.*

Доказательство. Утверждение есть частный случай общей теоремы полноты (теорема 2 п. 3 § 29). Его можно также доказать непосредственно следующим образом. Положим $g_0 = g_2^{-1}g_1$; тогда $g_0 \neq e$; в силу леммы Урысона существует функция $x \in L(\mathfrak{G})$ такая, что $x(g_0) = 1$, $x(e) = 0$, и потому полагая $x_{g_0}(g) = x(g_0^{-1}g)$, имеем $x_{g_0} \neq x$. Так как $R(\mathfrak{G})$ — полупростое кольцо (см. VII п. 2 § 28), то существует максимальный идеал M_0 кольца $R(\mathfrak{G})$ такой, что $x_{g_0}(M_0) \neq x(M_0)$. Если положить $x\hat{\ }(\chi) = \int x(g)\,\chi(g)\,d\mu(g)$, то это означает, что $\widehat{x_{g_0}}(\chi_0) \neq x\hat{\ }(\chi_0)$, т. е. $\chi(g_0)\,x\hat{\ }(\chi_0) \neq x\hat{\ }(\chi_0)$, где χ_0 — характер группы $\mathfrak{G}$, отвечающий идеалу M_0. Отсюда $\chi_0(g_0) \neq 1$, т. е. $\chi_0(g_2^{-1}g_1) \neq 1$, следовательно, $\chi_0(g_1) \neq \chi_0(g_2)$.

Следствие 4. *Всякая непрерывная функция f на коммутативной локально бикомпактной группе $\mathfrak{G}$ аппроксимируется равномерно на каждом бикомпактном множестве линейными комбинациями характеров этой группы.*

Утверждение непосредственно вытекает из следствия 2 и теоремы 5 п. 5 § 30. Оно следует также из теоремы Стоуна (см. п. 10 § 2), ибо в силу следствия 3 линейные комбинации характеров образуют симметричное кольцо функций, отделяющих точки на $\mathfrak{G}$.

Примеры. а). Пусть $\mathfrak{G}$ — аддитивная группа всех вещественных чисел t, $-\infty < t < \infty$. Тогда характерами будут непрерывные функции $\chi(g) = \chi(t)$, удовлетворяющие условиям

$$\chi(t_1 + t_2) = \chi(t_1)\,\chi(t_2), \quad |\chi(t)| = 1.$$

Но, как легко видеть, непрерывная функция $\chi(t)$, удовлетворяющая этим условиям, должна иметь вид

$$\chi(t) = e^{it\alpha},$$

[1] См. замечание к теореме 3 п. 2 § 20.

где α может быть произвольным фиксированным вещественным числом. Кольцо $L^1(\mathfrak{G})$ переходит в этом случае в кольцо $L^1(-\infty, \infty)$ всех суммируемых измеримых функций $a(t)$, причем

$$\|a\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |a(t)|\, dt, \quad (a \cdot b)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t_1)\, b(t - t_1)\, dt_1$$

и

$$a^*(t) = \overline{a(-t)}.$$

Теорема 1 утверждает, что в этом случае всякий максимальный идеал M кольца $R(\mathfrak{G})$, отличный от $M_0 = L^1(-\infty, \infty)$, определяется формулой

$$x(M) = (\lambda e + a)(M) = \lambda + \int_{-\infty}^{\infty} a(t)\, e^{it\alpha}\, dt.$$

В частности,

$$a(M) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)\, e^{it\alpha}\, dt,$$

так что переход от $a(t)$ к $a(M)$ есть в данном случае преобразование Фурье. Поэтому вообще переход от $a(g)$ к $a(M)$ можно рассматривать как обобщение преобразования Фурье на случай произвольной коммутативной локально бикомпактной группы.

Применяя следствие 4 к аддитивной группе всех вещественных чисел, мы приходим к следующей теореме.

Всякая непрерывная функция $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, аппроксимируется равномерно на каждом конечном интервале линейными комбинациями функций $e^{i\alpha t}$.

б). Пусть $\mathfrak{G}$ — аддитивная (дискретная) группа всех целых чисел $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; характерами будут функции $\chi(g) = \chi(n)$, удовлетворяющие условиям

$$\chi(n_1 + n_2) = \chi(n_1)\, \chi(n_2), \quad |\chi(n)| = 1.$$

Полагая $\chi(1) = e^{i\alpha}$, легко видеть, что тогда $\chi(n) = e^{in\alpha}$, где α определено с точностью до слагаемого, кратного 2π.

Групповое кольцо $R(\mathfrak{G})$ есть в этом случае совокупность всех последовательностей a_n таких, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty,$$

причем

$$(a \cdot b) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p b_{n-p}, \quad (a^*)_n = \overline{a}_{-n}, \quad \|a\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|.$$

Теорема 1 утверждает, что все максимальные идеалы этого кольца определяются формулой

$$a(M) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\alpha}$$

(что, впрочем, можно доказать и непосредственно).

в). Пусть $\mathfrak{G}$ — группа вращений окружности; тогда всевозможные характеры на $\mathfrak{G}$ задаются формулой

$$\chi(g) = e^{int}, \quad x = 0,\ \pm 2,\ \ldots; \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

Применяя следствие 4 к группе вращений окружности, заключаем:

Всякая непрерывная функция $f(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, *удовлетворяющая условию* $f(0) = f(2\pi)$, *аппроксимируется равномерно в* $[0, 2\pi]$ *линейными комбинациями функций* e^{int}, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

2. Группа характеров. Если χ_1, χ_2 — характеры группы $\mathfrak{G}$, то формула $\chi(g) = \chi_1(g)\,\chi_2(g)$ определяет характер χ группы $\mathfrak{G}$. Этот характер называется *произведением* характеров χ_1, χ_2 и обозначается через $\chi_1\chi_2$. Тем самым совокупность $\overline{\mathfrak{G}}$ всех характеров группы $\mathfrak{G}$ становится коммутативной группой; ее называют *группой характеров* группы $\mathfrak{G}$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — пространство максимальных идеалов кольца $R(\mathfrak{G})$. В п. 1 мы показали, что существует взаимно однозначное соответствие между характерами $\chi \in \overline{\mathfrak{G}}$ и максимальными идеалами $M \neq M_0$ кольца $R(\mathfrak{G})$; это позволяет перенести на $\overline{\mathfrak{G}}$ топологию локально бикомпактного пространства $\mathfrak{M} - M_0$, для чего окрестностями в $\overline{\mathfrak{G}}$ следует считать образы окрестностей в $\mathfrak{M} - M_0$ при отображении $M \to \chi$. Тогда $\overline{\mathfrak{G}}$ становится локально бикомпактным пространством. Отметим, что по самому определению окрестностей в $\mathfrak{M}$ окрестностью характера $\chi_0 \in \overline{\mathfrak{G}}$ является совокупность всех характеров χ, удовлетворяющих неравенствам

$$|x_k(M) - x_k(M_0)| = \left|\int a_k(g)[\chi(g) - \chi_0(g)]\,d\mu(g)\right| < \varepsilon \tag{1}$$

($x_k = \lambda_k e + a_k$) при фиксированных $a_1, \ldots, a_n \in L^1(\mathfrak{G})$, и эти окрестности образуют базу окрестностей в $\overline{\mathfrak{G}}$.

I. *Характер* $\chi(g)$ *есть непрерывная функция по совокупности переменных* $g \in \mathfrak{G}$ *и* $\chi \in \overline{\mathfrak{G}}$.

Доказательство. Пусть χ_1 — произвольный характер группы $\mathfrak{G}$ и M_1 — соответствующий ему максимальный идеал. Так как $M_1 \neq M_0$, то существует $a(g) \in L^1(\mathfrak{G})$ такая, что $a(M_1) \neq 0$. Неравенство

$$|a_{g_1}(M) - a_{g_2}(M_1)| \leqslant |a_{g_1}(M) - a_{g_2}(M)| + |a_{g_2}(M) - a_{g_2}(M_1)| \leqslant$$
$$\leqslant \|a_{g_1} - a_{g_2}\|_1 + |a_{g_2}(M) - a_{g_2}(M_1)|$$

показывает, что $a_g(M)$ есть непрерывная функция по совокупности переменных $g \in \mathfrak{G}$, $M \in \mathfrak{M} - M_0$. Следовательно, и $\chi(g) = \dfrac{a_g(M)}{a(M)}$ есть непрерывная функция по совокупности переменных g, M, или, что то же, по совокупности переменных g, χ в любой точке (g_1, χ_1).

II. *Топология в $\overline{\mathfrak{G}}$ совпадает с топологией равномерной сходимости на бикомпактных множествах.*

Доказательство. Утверждение теоремы означает, что множества $U(\chi_0; Q; \varepsilon)$ характеров χ, удовлетворяющих условию $|\chi(g) - \chi_0(g)| < \varepsilon$ при $g \in Q$, где Q бикомпактно: 1) открыты и 2) образуют базу окрестностей в $\overline{\mathfrak{G}}$.

Утверждение 1 непосредственно следует из V п. 12 § 2. Для доказательства утверждения 2 рассмотрим окрестность $U(\chi_0; a_1, \ldots, a_n; \varepsilon)$, определенную неравенствами (1). Выберем бикомпактное множество Q так, чтобы

$$\int\limits_{\mathfrak{G}-Q} |a_k(g)|\, d\mu(g) < \frac{\varepsilon}{4}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

и затем возьмем

$$\delta < \frac{\varepsilon}{2\|a_k\|_1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда при $\chi \in U(\chi_0; Q; \delta)$

$$\left|\int a_k(g)[\chi(g) - \chi_0(g)]\, d\mu(g)\right| \leqslant \int\limits_Q |a_k(g)||\chi(g) - \chi_0(g)|\, d\mu(g) + \\ + \int\limits_{\mathfrak{G}-Q} |a_k(g)||\chi(g) - \chi_0(g)|\, d\mu(g) < \delta\|a_k\|_1 + 2\frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon;$$

следовательно, $U(\chi_0; Q; \delta) \subset U(\chi_0; a_1, \ldots, a_n; \varepsilon)$ и утверждение 2 также доказано.

III. *При определенной выше в $\overline{\mathfrak{G}}$ топологии $\overline{\mathfrak{G}}$ есть топологическая группа.*

Доказательство. Если $\chi \in U\left(\chi_0; Q; \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, $\chi' \in U\left(\chi_0'; Q; \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, то при $g \in Q$

$$|\chi(g)\,\chi'(g) - \chi_0(g)\,\chi_0'(g)| \leqslant |\chi(g) - \chi_0(g)||\chi'(g)| + \\ + |\chi'(g) - \chi_0'(g)||\chi_0(g)| = |\chi(g) - \chi_0(g)| + |\chi'(g) - \chi_0'(g)| < \varepsilon,$$

т. е. $\chi\chi' \in U(\chi_0\chi_0'; Q; \varepsilon)$. Это означает, что произведение $\chi\chi'$ непрерывно. Непрерывность перехода к обратному характеру $\chi^{-1}(g) = \overline{\chi(g)}$ очевидна.

В дальнейшем под группой характеров $\overline{\mathfrak{G}}$ мы будем понимать таким образом определенную топологическую группу.

3. Положительно определенные функции на коммутативной группе. Пусть φ — положительно определенная функция на коммутативной локально бикомпактной группе $\mathfrak{G}$. Согласно теореме 2 п. 2 § 30 этой функции отвечает регулярный положительный функционал

$$f(\lambda e + a) = \lambda\varphi(e) + \int a(g)\,\varphi(g)\,d\mu(g) \tag{1}$$

в кольце $R(\mathfrak{G})$. С другой стороны, этот положительный функционал представляется, и притом единственным образом, в виде

$$f(x) = \int x(M)\,d\sigma(M), \tag{2}$$

где σ — мера на $\mathfrak{M}$, определенная функционалом f (см. следствие 1 п. 4 § 20). При этом $\sigma(M_0) = 0$ (где по-прежнему M_0 обозначает идеал $L^1(\mathfrak{G})$ в $R(\mathfrak{G})$). Действительно, если $\sigma(M_0) > 0$, то, записывая формулу (2) в виде

$$f(x) = \int\limits_{\mathfrak{M}-M_0} x(M)\,d\sigma(M) + x(M_0)\,\sigma(M_0),$$

мы получим, что вырожденный функционал $f_0(x) = x(M_0) = \lambda$ при $x = \lambda e + a$, $a \in L^1(\mathfrak{G})$, подчинен функционалу f; это, однако, противоречит регулярности функционала f. Таким образом, формулу (2) можно переписать в виде

$$f(x) = \int\limits_{\mathfrak{M}'} x(M)\,d\sigma(M), \tag{2$'$}$$

где $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} - M_0$. В силу соответствия $M \leftrightarrow \chi$, установленного в п. 1, σ можно также рассматривать как меру на $\overline{\mathfrak{G}}$. Но при $x = \lambda e + a$

$$x(M) = \lambda + \int a(g)\,\chi(g)\,d\mu(g).$$

Подставляя это выражение в формулу (2$'$) и сравнивая с (1), получим

$$\lambda\varphi(e) + \int a(g)\,\varphi(g)\,d\mu(g) = \lambda\sigma(\overline{\mathfrak{G}}) + \int \left[\int a(g)\,\chi(g)\,d\mu(g)\right] d\sigma(\chi).$$

Отсюда

$$\sigma(\overline{\mathfrak{G}}) = \varphi(e)$$

и

$$\int a(g)\,\varphi(g)\,d\mu(g) = \int \left[\int a(g)\,\chi(g)\,d\mu(g)\right] d\sigma(\chi). \tag{3}$$

Меняя в правой части равенства (3) порядок интегрирования и учитывая произвольность функции $a(g) = L^1(\mathfrak{G})$ и непрерывность функций $\chi(g)$ и $\int \chi(g)\,d\sigma(\chi)$, заключаем, что

$$\varphi(g) = \int \chi(g)\,d\sigma(\chi).$$

Легко видеть, что, обратно, всякая функция φ, определенная этой формулой, будет положительно определенной. Тем самым доказана

Теорема 2 (Д. А. Райков [3]). *Всякая непрерывная положительно определенная функция φ на коммутативной локально бикомпактной группе $\mathfrak{G}$ представляется, и притом единственным образом, в виде*

$$\varphi(g) = \int \chi(g)\, d\sum i(\chi), \tag{4}$$

где σ — некоторая мера на $\overline{\mathfrak{G}}$, удовлетворяющая условию

$$\sigma(\overline{\mathfrak{G}}) = \varphi(e).$$

Обратно, при любой мере σ на $\overline{\mathfrak{G}}$, удовлетворяющей условию $\sigma(\overline{\mathfrak{G}}) < \infty$, формула (4) *определяет непрерывную положительно определенную функцию φ на группе $\mathfrak{G}$.*

Примеры. а). Пусть $\mathfrak{G}$ — аддитивная группа вещественных чисел; непрерывными положительно определенными функциями на $\mathfrak{G}$ в этом случае будут непрерывные функции $\varphi(t)$, $-\infty < t < \infty$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{p,\,q=1}^{n} \varphi(t_p - t_q)\, \lambda_p \overline{\lambda}_q \geqslant 0 \tag{5}$$

при любых вещественных $t_1, \ldots, t_n$ и любых комплексных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Но в данном случае $\overline{\mathfrak{G}}$ можно рассматривать как аддитивную группу вещественных чисел, причем соответствие между χ и α устанавливается формулой $\chi(t) = e^{it\alpha}$. Применяя теорему 2, мы приходим к следующей теореме Бохнера [1].

Всякую непрерывную функцию $\varphi(t)$, удовлетворяющую условию (5), *можно представить в виде*

$$\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\alpha}\, d\sigma(\alpha),$$

где σ — некоторая мера на прямой, удовлетворяющая условию $\sigma(-\infty, \infty) = \varphi(0)$.

б). Пусть $\mathfrak{G}$ — аддитивная группа всех целых чисел; положительно определенными функциями на $\mathfrak{G}$ будут последовательности $\varphi(n) = \varphi_n$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{p,\,q=-n}^{n} \varphi_{p-q} \lambda_p \overline{\lambda}_q \geqslant 0 \tag{6}$$

для всех комплексных $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Но в этом случае $\overline{\mathfrak{G}}$ можно отождествить с точками единичной окружности или с точками α интервала $[0, 2\pi)$, причем соответствие между χ и α задается формулой

$$\chi(n) = e^{in\alpha}.$$

Применяя теорему 2, мы получаем для φ_n представление вида

$$\varphi_n = \int_0^{2\pi} e^{in\alpha}\, d\sigma(\alpha). \tag{7}$$

Задача определения по данной последовательности φ_n меры σ, для которой выполняется (7), называется *тригонометрической проблемой моментов*. Таким образом, применение теоремы 2 приводит к следующей теореме Герглотца [1].

Тригонометрическая проблема моментов для данной последовательности φ_n разрешима тогда и только тогда, *когда эта последовательность удовлетворяет условию* (6).

4. Формула обращения и теорема Планшереля для коммутативной группы. Обозначим через $P = P(\mathfrak{G})$ совокупность всех непрерывных положительно определенных функций на данной коммутативной локально бикомпактной группе $\mathfrak{G}$, а через $[L^1 \cap P]$ — линейную оболочку функций из $L^1 \cap P$, где $L^1 = L^1(\mathfrak{G})$.

Лемма. $[L^1 \cap P]$ *плотно в* $L^1 = L^1(\mathfrak{G})$ *и в* $L^2 = L^2(\mathfrak{G})$.

Доказательство. Положим $L = L(\mathfrak{G})$; функции вида $y^* \cdot x$, $x, y \in L$, образуют множество, плотное в L в смысле нормы в L^1 (см. II п. 2 § 28). Но тогда они образуют также плотное множество в L^1, ибо L плотно в L^1. С другой стороны, $y^* \cdot x$ есть линейная комбинация следующих четырех положительно определенных функций $(x \pm y)^* \cdot (x \pm y)$, $(x \pm iy)^* \cdot (x \pm iy)$, и потому принадлежит $[L^1 \cap P]$; следовательно, $[L^1 \cap P]$ плотно в L^1. Аналогично доказывается, что $[L^1 \cap P]$ плотно в L^2.

Положим теперь для любой функции $x \in L^1$ и любого характера $\chi \in \overline{\mathfrak{G}}$

$$x\widehat{\ }(\chi) = \int x(g)\, \chi(g)\, d\mu(g); \tag{1}$$

этот интеграл существует и представляет непрерывную функцию $x\widehat{\ }$ на группе $\overline{\mathfrak{G}}$. Функция $x\widehat{\ }$ называется *преобразованием Фурье* функции $x \in L^1$. В силу результатов п. 1 $x\widehat{\ }(\chi)$ есть просто $x(M)$, где M — максимальный идеал кольца $R(\mathfrak{G})$, отвечающий характеру χ. Отсюда следует, что

$$(x_1 + x_2)\widehat{\ }(\chi) = x_1\widehat{\ }(\chi) + x_2\widehat{\ }(\chi), \quad (\lambda x)\widehat{\ }(\chi) = \lambda x\widehat{\ }(\chi),$$
$$(x^*)\widehat{\ }(\chi) = \overline{x\widehat{\ }(\chi)}, \quad (x_1 \cdot x_2)\widehat{\ }(\chi) = x_1\widehat{\ }(\chi)\, x_2\widehat{\ }(\chi),$$

в частности,

$$(x^* x)\widehat{\ }(\chi) = |x\widehat{\ }(\chi)|^2.$$

Впрочем, в справедливости этих формул можно также убедиться непосредственной проверкой.

Если $\mathfrak{G}$ есть аддитивная группа вещественных чисел t, то $\chi(g) = \chi(t) = e^{it\alpha}$, и формула (1) переходит в обычное преобразование Фурье

$$x^{\frown}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{it\alpha}\, dt.$$

Обозначим через $\mu(\chi)$ инвариантную меру на группе $\overline{\mathfrak{G}}$, а через $L^1(\overline{\mathfrak{G}})$ — пространство функций, суммируемых на $\overline{\mathfrak{G}}$ по мере $\mu(x)$. Следующая теорема (обобщающая классическую теорему об интеграле Фурье) показывает, как восстановить функцию x по ее преобразованию Фурье $x^{\frown}$.

Теорема 3. *Если $x \in [L^1 \cap P]$, то $x^{\frown} L^1(\overline{\mathfrak{G}})$ и*

$$x(g) = \int x^{\frown}(\chi)\, \overline{\chi(g)}\, d\mu(\chi),$$

где $\mu(x)$ — надлежащим образом нормированная инвариантная мера на группе $\overline{\mathfrak{G}}$.

Доказательство. Обозначим через I совокупность всех функций $x \in L^1$, равномерно непрерывных на группе $\mathfrak{G}$. Легко видеть, что I — идеал в $L^1(\mathfrak{G})$. Определим в I линейный функционал

$$f(x) = x(e) \quad \text{для} x \in I.$$

Этот функционал положителен на I, ибо при $x = y^* \cdot y$, $y \in I$,

$$x(g) = \int \overline{y(g_1)}\, y(g_1 g)\, d\mu(g_1),$$

и потому

$$x(e) = \int |y(g_1)|^2\, d\mu(g_1) \geqslant 0.$$

К этому функционалу f можно применить теорему 5 п. 4 § 20, ибо $L^1(\mathfrak{G})$ — вполне симметричное коммутативное кольцо (см. следствие 1 п. 1), а I плотен в $L^1(\mathfrak{G})$. На основании этой теоремы существует мера μ, заданная на $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} - M_0$, а значит, и на $\overline{\mathfrak{G}}$, такая, что $p^{\frown} \in L^1(\mu)$ и

$$f(px) = \int p^{\frown}(\chi)\, x^{\frown}(\chi)\, d\mu(\chi) \tag{2}$$

для любой функции $p \in I$, положительной относительно f. Но такой будет всякая функция из $L^1 \cap P$, ибо при $p \in L^1 \cap P$

$$f(px^*x) = \int\int p(g_1')\, \overline{x(g_1)}\, x(g_1 g_1')\, d\mu(g_1)\, d\mu(g_1') = \\ = \int\int p(g_1^{-1} g_2)\, \overline{x(g_1)}\, x(g_2)\, d\mu(g_1)\, d\mu(g_2) \geqslant 0$$

(см. IV п. 2 § 30); кроме того, условие (3) п. 4 § 20 также выполнено, ибо $L^1(\mathfrak{G})$ содержит множество, аппроксимирующее единицу (II п. 2 § 28), и $f(px) = \int p(g^{-1})\, x(g)\, d\mu(g)$ — непрерывный функционал от x в $L^1(\mathfrak{G})$ (см. V п. 2 § 10). Поэтому (2) имеет место для любой функции

$p \in L^1 \cap P$, а значит, и для любой функции $p \in [L^1 \cap P]$. Заменяя в (2) x на x^*, подставляя вместо $f(px^*)$ и $x^{*\frown}(\chi) = \overline{x^\frown(\chi)}$ их выражения и меняя в правой части (2) порядок интегрирования, получим

$$\int p(g)\, \overline{x(g)}\, d\mu(g) = \int \overline{x(g)} \left[\int p^\frown(\chi)\, \overline{\chi(g)}\, d\mu(\chi)\right] d\mu(g).$$

Отсюда ввиду произвольности функции $x \in L^1$

$$p(g) = \int p^\frown(\chi)\, \overline{\chi(g)}\, d\mu(\chi).$$

В частности,

$$p(e) = \int p^\frown(\chi)\, d\mu(\chi).$$

Остается доказать, что $d\mu(\chi)$ — инвариантная мера на $\overline{\mathfrak{G}}$. Для этого заметим, что если $p \in L^1 \cap P$, то для любого $\chi_0 \in \overline{\mathfrak{G}}$ также $p\chi_0 \in L^1 \cap P$ и преобразование Фурье этой функции есть

$$\int p(g)\, \chi_0(g)\, \chi(g)\, d\mu(g) = \int p(g)(\chi\chi_0)(g)\, d\mu(g) = p^\frown(\chi\chi_0).$$

Отсюда

$$\int p^\frown(\chi)\, d\mu(\chi) = p(e) = p(e)\, \chi_0(e) = \int p^\frown(\chi\chi_0)\, d\mu(\chi). \tag{3}$$

Так как функции $p \in [L^1 \cap P]$ образуют плотное множество в L^1, то их преобразования Фурье $p^\frown$образуют плотное множество в $C_0(\overline{\mathfrak{G}})$ (см. следствие 3 п. 3 § 14); следовательно, из (3) вытекает, что $d\mu(\chi)$ — инвариантная мера в $\overline{\mathfrak{G}}$, и теорема доказана.

Следствие 1. *Если $p \in L^1 \cap P$, то $p^\frown(\chi) \geqslant 0$.*

Доказательство. Если $p \in L^1 \cap P$, то согласно теореме 3 $p^\frown \in L^1(\overline{\mathfrak{G}})$ и $p(g) = \int \overline{\chi(g)}\, p^\frown(\chi)\, d\mu(\chi)$; поэтому для любой функции $x \in L^1(\mathfrak{G})$

$$\int x(g)\, p(g)\, d\mu(g) = \int \left(\int x(g)\, \overline{\chi(g)}\, d\mu(g)\right) p^\frown(\chi)\, d\mu(\chi) =$$
$$= \int x^\frown(\overline{\chi})\, p^\frown(\chi)\, d\mu(\chi) = \int x^\frown(\chi)\, p^\frown(\overline{\chi})\, d\mu(\chi).$$

Заменив здесь x на x^*x, заключаем, что

$$\int |x^\frown(\chi)|^2 p^\frown(\overline{\chi})\, d\mu(\chi) \geqslant 0, \tag{4}$$

ибо $f(x) = \int x(g)\, p(g)\, d\mu(g)$ — положительный функционал в $L^1(\mathfrak{G})$ (см. теорему 2 п. 2 § 30). Но функции $x^\frown$, $x \in L^1(\mathfrak{G})$, образуют плотное множество в $C_0(\overline{\mathfrak{G}})$; поэтому из (4) следует, что $\int \varphi(\chi)\, p^\frown(\overline{\chi})\, d\mu(\chi) \geqslant 0$ для любой неотрицательной функции $\varphi \in C_0(\overline{\mathfrak{G}})$. А это возможно, лишь когда $p^\frown(\chi) \geqslant 0$.

С л е д с т в и е 2. *Если* $\varphi \in L^1(\overline{\mathfrak{G}})$, $\varphi(\chi) \geqslant 0$ *и функция* $x(g) = \int \overline{\chi(g)}\, \varphi(\chi)\, d\mu(\chi)$ *принадлежит* $L^1(\mathfrak{G})$, *то почти всюду на* $\overline{\mathfrak{G}}$

$$\varphi(\chi) = \int x(g)\, \chi(g)\, d\mu(g) = x\hat{}(\chi).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 2 п. 3 $x \in P$, а значит, $x \in L^1 \cap P$. На основании теоремы 3 заключаем, что

$$x(g) = \int \overline{\chi(g)}\, x\hat{}(\chi)\, d\mu(\chi),$$

так что

$$\int \overline{\chi(g)}\, \varphi(\chi)\, d\mu(\chi) = \int \overline{\chi(g)}\, x\hat{}(\chi)\, d\mu(\chi).$$

Отсюда для любой функции $y \in L^1(\mathfrak{G})$

$$\begin{aligned}\int y\hat{}(\overline{\chi})\, \varphi(\chi)\, d\mu(\chi) &= \int \left(\int y(g)\, \overline{\chi(g)}\, d\mu(g)\right) \varphi(\chi)\, d\mu(\chi) = \\ &= \int y(g) \left(\int \overline{\chi(g)}\, \varphi(\chi)\, d\mu(\chi)\right) d\mu(g) = \\ &= \int y(g) \left(\int \overline{\chi(g)}\, x\hat{}(\chi)\, d\mu(\chi)\right) d\mu(g) = \int y\hat{}(\overline{\chi})\, x\hat{}(\chi)\, d\mu(\chi).\end{aligned}$$

Из этого равенства заключаем, что $\varphi(\chi) = x\hat{}(\chi)$ почти всюду на $\overline{\mathfrak{G}}$, ибо функции $y\hat{}(\overline{\chi})$ образуют плотное множество в $C_0(\overline{\mathfrak{G}})$.

Т е о р е м а 4. *Преобразование Фурье* $x \to x\hat{}$ *есть изометрическое отображение множества, плотного в* $L^2(\mathfrak{G})$, *на множество, плотное в* $L^2(\overline{\mathfrak{G}})$, *и потому продолжается единственным образом до изометрического отображения* $L^2(\mathfrak{G})$ *на* $L^2(\overline{\mathfrak{G}})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть I, f, P — те же, что и выше. Полагая в (2) $x = q^*$, где $q \in [L^1 \cap P]$, имеем

$$\int p(g)\, \overline{q(g)}\, d\mu(g) = f(pq^*) = \int p(\chi)\, \overline{q\hat{}(\chi)}\, d\mu(\chi);$$

следовательно, преобразование Фурье $p \to p\hat{}$ есть изометрическое отображение подмножества $[L^1 \cap P]$ пространства $L^2(\mathfrak{G})$ в пространство $L^2(\overline{\mathfrak{G}})$. Так как $[L^1 \cap P]$ плотно в $L^2(\mathfrak{G})$, то это отображение продолжается и притом единственным образом до изометрического оператора T, отображающего пространство $L^2(\mathfrak{G})$ в пространство $L^2(\overline{\mathfrak{G}})$.

Остается показать, что T отображает $L^2(\mathfrak{G})$ *на* $L^2(\overline{\mathfrak{G}})$, для чего достаточно установить, что образ пространства $L^2(\mathfrak{G})$ при отображении T плотен в $L^2(\overline{\mathfrak{G}})$. Найдем для этого оператор T^*. Пусть

$$\varphi \in L^1(\overline{\mathfrak{G}}) \cap L^2(\overline{\mathfrak{G}}) \quad \text{и} \quad x \in [L^1 \cap P];$$

полагая $\varphi' = T^*\varphi$, имеем $(Tx, \varphi) = (x, \varphi')$, т. е.

$$\iint x(g)\, \chi(g)\, \overline{\varphi(\chi)}\, d\mu(g)\, d\mu(\chi) = \int x(g)\, \overline{\varphi'(g)}\, d\mu(g).$$

Отсюда, так как $[L^1 \cap P]$ плотно в $L^2(\mathfrak{G})$,

$$\varphi'(g) = (T^*\varphi)(g) = \int \varphi(\chi)\,\overline{\chi(g)}\,d\mu(\chi). \tag{5}$$

Предположим теперь, что $\varphi, \psi \in L^1(\overline{\mathfrak{G}}) \cap L^2(\overline{\mathfrak{G}})$ и $\varphi \geqslant 0$. Тогда также $\varphi \cdot \psi \in L^1(\overline{\mathfrak{G}}) \cap L^2(\overline{\mathfrak{G}})$ (см. VI п. 2 § 28) и из формулы (5) легко следует, что [1]

$$T^*(\varphi \cdot \psi) = \varphi'\psi' \in L^1(\mathfrak{G}) \cap L^2(\mathfrak{G}),$$

ибо $\varphi' = T^*\varphi \in L^2(\mathfrak{G})$, $\psi' = T^*\psi \in L^2(\mathfrak{G})$. Кроме того, $\varphi \cdot \psi \in L^1(\overline{\mathfrak{G}})$ и $\varphi \cdot \psi \geqslant 0$; на основании следствия 2 отсюда заключаем, что $\varphi \cdot \psi = T(\varphi'\psi') \in TL^2(\mathfrak{G})$.

Пусть теперь φ, ψ — произвольные функции из $L^1(\overline{\mathfrak{G}}) \cap L^2(\overline{\mathfrak{G}})$. Каждую из них можно представить в виде линейной комбинации четырех неотрицательных функций $\varphi_j, \psi_j \in L^1(\overline{\mathfrak{G}}) \cap L^2(\overline{\mathfrak{G}})$, а значит, $\varphi \cdot \psi$ можно представить в виде линейной комбинации шестнадцати неотрицательных функций $\varphi_j \cdot \psi_k$, которые в силу предыдущего принадлежат $TL^2(\mathfrak{G})$. Следовательно, также $\varphi \cdot \psi \in TL^2(\mathfrak{G})$. Но функции $\varphi \cdot \psi$ образуют плотное множество в $L^2(\overline{\mathfrak{G}})$ (см. замечание 1 на с. 438), следовательно, $TL^2(\mathfrak{G})$ плотно в $L^2(\overline{\mathfrak{G}})$, и теорема полностью доказана.

Отметим, что равенство $\overline{TL^2(\mathfrak{G})} = L^2(\overline{\mathfrak{G}})$ является также следствием континуального аналога леммы Шура (см. п. 5 § 26).

Теорема 4 обобщает теорему Планшереля о классическом интеграле Фурье и потому называется теоремой Планшереля для коммутативной группы $\mathfrak{G}$.

Следствие 3. *Множества S_1 и S_2 всех функций x из $L^1(\mathfrak{G})$ и $L^2(\mathfrak{G})$ соответственно, для которых $x\hat{}$ обращается в нуль вне бикомпактного множества (своего для каждой функции), плотны соответственно в $L^1(\mathfrak{G})$ и $L^2(\mathfrak{G})$.*

Доказательство. S_2 содержит прообраз при изометрическом отображении T множества $L(\overline{\mathfrak{G}})$, плотного в $L^2(\overline{\mathfrak{G}})$; следовательно, S_2 плотно в $L^2(\mathfrak{G})$.

Пусть $x \in L^1(\mathfrak{G})$, тогда [2] $x = yz$, где $y, z \in L^2(\mathfrak{G})$. Следовательно, существуют $y_1, z_1 \in S_2$ такие, что $\|y - y_1\|_2 < \varepsilon$, $\|z - z_1\|_2 < \varepsilon$; тогда $y_1, z_1 \in L^2(\mathfrak{G})$, следовательно, $y_1z_1 \in L^1(\mathfrak{G})$ и, кроме того, $(y_1z_1)\hat{} = \widehat{y_1} \cdot \widehat{z_1} = 0$ вне бикомпактного множества $Q_1 \cdot Q_2$, если $\widehat{y_1} = 0$ вне бикомпактного множества Q_1, а $\widehat{z_1} = 0$ вне бикомпактного

[1] Здесь и ниже в этом параграфе $\varphi \cdot \psi$ обозначает *свертку*, а $\varphi'\psi'$ — *произведение* функций.

[2] Например, можно положить $y = |x|^{1/2}$, $z = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ |x|^{-\frac{1}{2}}x & \text{при } x \neq 0. \end{cases}$

множества Q_2. Поэтому $y_1 z_1 \in S_1$ и на основании неравенства Коши–Буняковского

$$\|yz - y_1 z_1\|_1 \leqslant \|y\|_2\, \|z - z_1\|_2 + \|z_1\|_2\, \|y - y_1\|_2 < \varepsilon(\|y\|_2 + \|z\|_2 + \varepsilon),$$

так что S_1 плотно в $L^1(\mathfrak{G})$.

Обозначим через $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ совокупность всех конечных линейных комбинаций функций $x \cdot y$, где $x, y \in L(\mathfrak{G})$. Очевидно, $\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ — подкольцо в $L^1(\mathfrak{G})$. В силу II и замечания 2 п. 2 § 28 $\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ плотно в $L^1(\mathfrak{G})$ и $L(\mathfrak{G})$ в смысле норм $\|x\|_1$ и $\|x\|_\infty$ соответственно.

Следствие 4. *Образ $T\mathfrak{B}$ кольца $\mathfrak{B}$ при преобразовании Фурье T плотен в $L^1(\mathfrak{G})$.*

Доказательство. Согласно теореме 4 функции $x\hat{} = Tx$, $x \in L(\mathfrak{G})$, образуют плотное множество в $L^2(\overline{\mathfrak{G}})$; следовательно, функции $x\hat{}\, y\hat{} = T(x \cdot y)$, принадлежащие $T\mathfrak{B}$, образуют плотное множество в $L^2(\overline{\mathfrak{G}})$ (см. конец доказательства следствия 3).

5. Свойство отделимости множества $[L^1 \cap P]$**.** Положим $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{G}) = [L^1 \cap P]$; тогда $\mathfrak{A}$ — симметричное подкольцо кольца L^1. Действительно, если $x, y = \mathfrak{A}$, то $x \cdot y$ есть линейная комбинация принадлежащих $L^1 \cap P$ функций $(x^* \pm y)^* \cdot (x^* \pm y)$, $(x^* \pm iy)^* \cdot (x^* \pm iy)$, и потому $x \cdot y \in \mathfrak{A}$.

Лемма. *Для любого бикомпактного множества $F \subset \mathfrak{G}$ и открытого множества $U \supset F$ в кольце $\mathfrak{A}$ существует функция x, равная единице на F и нулю вне U.*

Доказательство. Выберем симметричную окрестность V единицы такую, что $\mu(V) < \infty$ и (см. III п. 3 § 27)

$$V^2 F \subset U.$$

Пусть y, z — характеристические функции множеств V и VF соответственно; положим $x = \dfrac{1}{\mu(V)}\, y^* \cdot z$. Тогда $x \in \mathfrak{A}$ и

$$x(g) = \frac{1}{\mu(V)} \int y(g_1)\, z(g_1 g)\, d\mu(g_1) = \\ = \frac{1}{\mu(V)} \int\limits_V z(g_1 g)\, d\mu(g_1) = \frac{1}{\mu(V)} \int\limits_{Vg} z(g_1)\, d\mu(g_1); \quad (1)$$

при $g \in F$ имеем $Vg \subset VF$ и потому

$$x(g) = \frac{1}{\mu(V)} \int\limits_{Vg} d\mu(g_1) = \frac{1}{\mu(V)}\, \mu(Vg) = 1.$$

Далее, при $g \notin U$ также $g \notin V^2 F$, и потому Vg не пересекается VF; отсюда и из (1) заключаем, что $x(g) = 0$ при $g \notin U$. Следовательно, функция x удовлетворяет поставленным требованиям.

Из доказанной леммы, в частности, следует:

Для любых двух различных точек $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}$ существует функция $x \in \mathfrak{A}$, равная единице в g_1 и нулю в g_2.

Действительно, достаточно положить в предыдущей лемме $F = g_1$, $U = \mathfrak{G} - g_2$.

6. Теорема двойственности. Пусть $\mathfrak{G}$ — локально бикомпактная коммутативная группа, а $\overline{\mathfrak{G}}$ — группа ее характеров. При фиксированном $g \in \mathfrak{G}$ функция $f_g(\chi) = \chi(g)$ удовлетворяет условиям

$$|f_g(\chi)| = 1, \quad f_g(\chi_1\chi_2) = (\chi_1\chi_2)(g) = \chi_1(g)\,\chi_2(g) = f_g(\chi_1)\,f_g(\chi_2)$$

и, следовательно, есть характер группы $\overline{\mathfrak{G}}$. При этом

$$f_{g_1g_2}(\chi) = \chi(g_1g_2) = \chi(g_1)\,\chi(g_2) = f_{g_1}(\chi)\,f_{g_2}(\chi);$$

следовательно, соответствие $g \to f_g$ есть гомоморфизм группы $\mathfrak{G}$ в группу $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$, т. е. в группу характеров группы $\overline{\mathfrak{G}}$.

Теорема 5 (теорема двойственности Л. С. Понтрягина [2] и [6]). *Соответствие $g \to f_g$ есть изоморфизм и гомеоморфизм группы $\mathfrak{G}$ на группу $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ характеров группы $\overline{\mathfrak{G}}$.*

Доказательство. 1). Согласно следствию 3 п. 1 при $g_1 \neq g_2$ существует характер $\chi_0 \in \overline{\mathfrak{G}}$ такой, что $\chi_0(g_1) \neq \chi_0(g_2)$. Это означает, что $f_{g_1}(\chi_0) \neq f_{g_2}(\chi_0)$, и потому соответствие $g \to f_g$ взаимно однозначно. Следовательно, это соответствие есть изоморфизм группы $\mathfrak{G}$ в группу $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ и мы можем считать, что $\mathfrak{G} \subset \overline{\overline{\mathfrak{G}}}$, в соответствии с чем мы положим $\chi(g) = f_g(\chi) = g(\chi)$. Нам надо доказать, что тогда $\mathfrak{G} = \overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ и что топологии в $\mathfrak{G}$ и $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ совпадают.

2). Обозначим снова через $\mathfrak{B}$ кольцо всех линейных комбинаций $x \cdot y$, $x, y \in L(\mathfrak{G})$ (см. конец п. 4). Очевидно, $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{G})$ (см. п. 5); следовательно, на основании теоремы 3 каждая функция $x \in L(\mathfrak{G})$ имеет вид

$$x(g) = \int x\hat{}(\chi)\,\overline{\chi(g)}\,d\mu(\chi), \tag{1}$$

где $x\hat{} \in L^1(\overline{\mathfrak{G}})$, $x\hat{} \in \mathfrak{B}\hat{} = T\mathfrak{B}$. С другой стороны, на основании леммы Урысона функции $x \in L(\mathfrak{G})$ отделяют точки на $\mathfrak{G}$ и, кроме того, для любой точки $g_0 \in \mathfrak{G}$ существует функция $x \in L(\mathfrak{G})$ такая, что $x(g_0) \neq 0$. Так как $\mathfrak{B}$ плотно в $L(\mathfrak{G})$ в смысле нормы $\|x\|_\infty$, то этим же свойством обладают функции из $\mathfrak{B}$; кроме того, так как $\mathfrak{B} \subset L(\mathfrak{G})$, то все функции из $\mathfrak{B}$ обращаются в нуль в бесконечно удаленной точке. Отсюда заключаем, что слабая топология в $\mathfrak{G}$, определенная кольцом $\mathfrak{B}$, совпадает с исходной топологией в $\mathfrak{G}$ (см. II п. 11 § 2).

В силу (1) это означает, что множества $U(g_0; \widehat{x_1}, \ldots, \widehat{x_n}; \varepsilon)$ в $\mathfrak{G}$, определенные неравенствами вида

$$\left|\int \widehat{x_j}(\chi)[\overline{\chi(g)} - \overline{\chi(g_0)}]\,d\mu(\chi)\right| < \varepsilon$$
$$(j = 1, 2, \ldots, n, \quad \widehat{x_j} \in B\hat{}, \quad \varepsilon > 0), \tag{2}$$

образуют базу окрестностей в $\mathfrak{G}$. Но неравенства (2) можно записать в виде

$$\left|\int x_j^{\frown}(\chi)[\overline{g(\chi)} - \overline{g_0(\chi)}]\, d\mu(\chi)\right| < \varepsilon,$$

следовательно, по определению топологии в группе характеров (см. п. 2), множества $U(g_0;\, x_1^{\frown},\, \ldots,\, x_n^{\frown};\, \varepsilon)$ являются окрестностями в группе $\mathfrak{G}$, рассматриваемой как подпространство топологического пространства $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$, и они образуют там базу окрестностей, ибо $\mathfrak{B}^{\frown}$ плотно в $L^1(\overline{\mathfrak{G}})$ в силу следствия 4 п. 4.

Таким образом, $\mathfrak{G}$ — локально бикомпактное подпространство в $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$.

3). Докажем, что $\mathfrak{G}$ плотно в $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$. Если $\mathfrak{G}$ не плотно в $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$, то в $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ существует окрестность с бикомпактным замыканием, не пересекающаяся с $\mathfrak{G}$, и на основании леммы п. 5 существует функция $x(\overline{\overline{g}}) = (y \cdot z)(\overline{\overline{g}})$, $y,\, z \in L^1(\overline{\overline{\mathfrak{G}}}) \cap L^2(\overline{\overline{\mathfrak{G}}})$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$, не равная тождественно нулю и равная нулю на $\mathfrak{G}$. Повторяя рассуждение, проведенное в доказательстве теоремы Планшереля (с $\overline{\mathfrak{G}}$ и $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ вместо $\mathfrak{G}$ и $\overline{\mathfrak{G}}$, см. п. 4), мы заключаем, что

$$x(\overline{\overline{g}}) = \int x^{\frown}(\chi)\, \overline{\overline{g}}(\chi)\, d\mu(\chi), \tag{3}$$

где $x^{\frown} \in L^1(\overline{\overline{\mathfrak{G}}}) \cap L^2(\overline{\overline{\mathfrak{G}}})$; отсюда

$$x(g) = \int x^{\frown}(\chi)\, \chi(g)\, d\mu(\chi).$$

Но по условию $x(g) = 0$ на $\mathfrak{G}$; следовательно,

$$\overline{x(g)} = \int \overline{x^{\frown}(\chi)}\, \overline{\chi(g)}\, d\mu(\chi) = 0 \quad \text{для всех} \quad g \in \mathfrak{G},$$

т. е. $T^* \overline{x^{\frown}} = 0$. Отсюда $x^{\frown} = 0$ и в силу (3) $x(\overline{\overline{g}}) = 0$, что противоречит определению функции $x(\overline{\overline{g}})$. Таким образом, $\mathfrak{G}$ плотно в $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$.

4). Докажем, наконец, что $\overline{\overline{\mathfrak{G}}} = \mathfrak{G}$. По доказанному в 2) $\mathfrak{G}$ — локально бикомпактное подпространство в $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$; поэтому в $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ существует такая окрестность единицы $\overline{\overline{U}}$, что $U = \overline{\overline{U}} \cap \mathfrak{G}$ имеет в $\mathfrak{G}$ бикомпактное замыкание $\widetilde{U}$.

Так как вложение $\mathfrak{G}$ в $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ непрерывно, то $\widetilde{U}$ бикомпактно, а значит, и замкнуто в $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$. С другой стороны, U плотно в $\overline{\overline{U}}$, и потому $\overline{\overline{U}} \subset \widetilde{U}$. Пусть теперь $\overline{\overline{g}}_0$ — произвольный элемент из $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$. По доказанному в 3) его окрестность $\overline{\overline{g}}_0 \overline{\overline{U}}^{-1}$ содержит элемент $g \in \mathfrak{G}$. Но тогда $g_0 \in g\overline{\overline{U}} \subset$ $\subset g_0 \widetilde{U} \subset \mathfrak{G}$, и теорема полностью доказана.

Теорема двойственности была впервые установлена Понтрягиным [2] на основании глубокого исследования структуры рассматриваемых групп. Аналитическое доказательство, опирающееся на общую теорию преобразования Фурье на коммутативной локально бикомпактной группе, было впервые дано Райковым [4].

7. Унитарные представления коммутативной группы.

Теорема 6. *Всякое унитарное представление $g \to T_g$ коммутативной локально бикомпактной группы $\mathfrak{G}$ задается формулой*

$$T_g = \int \overline{\chi(g)}\, dP(\chi),$$

где $P(\Delta)$ — некоторая спектральная мера на $\overline{\mathfrak{G}}$.

Доказательство. Унитарному представлению $g \to T_g$ группы $\mathfrak{G}$ в пространстве $\mathfrak{H}$ отвечает представление $x \to T_x$ ее группового кольца $R(\mathfrak{G})$, а значит, и пополнения $\widetilde{R(\mathfrak{G})}$ этого кольца в минимальной регулярной норме. Но каждое такое представление записывается в виде [1]

$$T_x = \int x(M)\, dP(M), \tag{1}$$

где $P(\Delta)$ — спектральная мера в пространстве $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов кольца $\widetilde{R(\mathfrak{G})}$, а значит, и $R(\mathfrak{G})$ (ибо $R(\mathfrak{G})$ — вполне симметричное кольцо, см. следствие 1 в п. 1 § 31 и следствие в п. 2 § 20). При этом $P(\{M_0\}) = 0$ (где, как и выше, $M_0 = L^1(\mathfrak{G})$), ибо в противном случае представление $x \to T_x$ содержало бы вырожденное представление. В силу соответствия $M \sim \chi$ между максимальными идеалами $\neq M_0$ и характерами $P(\Delta)$ можно также рассматривать как спектральную меру на $\overline{\mathfrak{G}}$ и тогда формула (1) запишется в виде

$$\int x(g) T_g\, d\mu(g) = \int x\hat{}(\chi)\, \delta P(\chi) = \int \left[\int x(g)\, \overline{\chi(g)}\, d\mu(g)\right] dP(\chi) = \\ = \int x(g) \left[\int \overline{\chi(g)}\, dP(\chi)\right] d\mu(g),$$

откуда $T_g = \int \overline{\chi(g)}\, dP(\chi)$.

8. Теоремы тауберовского типа.

Теорема 7. *Групповое кольцо локально бикомпактной коммутативной группы регулярно.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{M} - M_0$ гомеоморфно группе $\overline{\mathfrak{G}}$, то достаточно установить, что для каждого бикомпактного множества $F \subset \overline{\mathfrak{G}}$ и каждой точки $\chi_0 \notin F$ существует функция $x \in L^1(\mathfrak{G})$ такая, что $x\hat{} = 1$ на F и $x\hat{} = 0$ в точке χ_0. Мы докажем более сильное утверждение, именно покажем, что если F — бикомпактное, а U — открытое множество в $\overline{\mathfrak{G}}$ и если $F \subset U$, то существует функция $x \in L^1(\mathfrak{G})$ такая, что $x\hat{} = 1$ на F и $x\hat{} = 0$ вне U.

Действительно, согласно лемме п. 5, примененной к группе $\overline{\mathfrak{G}}$, существует функция $x\hat{} \in \mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{G}})$, обладающая этими свойствами. Но тогда, согласно теоремам 3 и 5, $x\hat{}$ есть преобразование Фурье функции $x \in L^1(\mathfrak{G})$, так что эта функция x удовлетворяет поставленным требованиям.

---

[1] См. II п. 4 § 17.

Теорема 8. *Если $\mathfrak{G}$ — локально бикомпактная коммутативная группа, то всякий замкнутый идеал в $L^1(\mathfrak{G})$ содержится в максимальном регулярном идеале.*

Утверждение теоремы непосредственно вытекает из теоремы 7, следствия 3 п. 4, следствия п. 5 § 15 и полупростоты кольца $L^1(\mathfrak{G})$ (см. VII п. 2 § 28 и (3) п. 5 § 7).

Следствие 1. *Если функция $x \in L^1(\mathfrak{G})$ такова, что ее преобразование Фурье $x^\frown$ нигде на $\overline{\mathfrak{G}}$ не обращается в нуль, то сдвиги функции x порождают все $L^1(\mathfrak{G})$.*

Доказательство. По предположению, x не принадлежит никакому максимальному регулярному идеалу кольца $L^1(\mathfrak{G})$. С другой стороны, в силу IV п. 2 § 28 замкнутое подпространство $\mathfrak{L}$, порожденное сдвигами функции x, есть идеал в $L^1(\mathfrak{G})$ или все $L^1(\mathfrak{G})$. Но если $\mathfrak{L}$ — идеал в $L^1(\mathfrak{G})$, то согласно теореме 8 этот идеал, а значит, и функция x, содержится в некотором максимальном регулярном идеале кольца $L^1(\mathfrak{G})$, что противоречит условию. Следовательно, $\mathfrak{L} = L^1(\mathfrak{G})$.

Следствие 2 (обобщенная тауберовская теорема Винера). *Пусть $\mathfrak{G}$ — локально бикомпактная, но не бикомпактная коммутативная группа и пусть x — функция из $L^1(\mathfrak{G})$ такая, что $x^\frown$ нигде на $\overline{\mathfrak{G}}$ не обращается в нуль. Если тогда $y \in L^\infty$ такова, что $x \cdot y$ обращается в нуль на бесконечности, то $z \cdot y$ обращается в нуль на бесконечности для всех $z \in L^1(\mathfrak{G})$.*

Доказательство. Множество I всех функций $z \in L^1(\mathfrak{G})$, для которых $z \cdot y$ обращается в нуль на бесконечности, есть, очевидно, линейное подпространство в $L^1(\mathfrak{G})$. Положим $z^{g_0} = z(gg_0)$; тогда I инвариантно при сдвигах $z \to z^{g_0}$, ибо если $z \cdot y$ обращается в нуль на бесконечности, то этим же свойством обладает также $z^{g_0} \cdot y = (z \cdot y)^{g_0}$. Кроме того, I замкнуто. Действительно, если $z \in \overline{I}$, то для данного $\varepsilon > 0$ существует функция $z' \in I$, для которой

$$\|z - z'\|_1 < \frac{\varepsilon}{2(\|y\|_\infty)}.$$

Так как $y \cdot z'$ обращается в нуль на бесконечности, то существует бикомпактное множество $Q \subset \mathfrak{G}$ такое, что

$$|(y \cdot z')(g)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{вне} \quad Q.$$

Но

$$|(y \cdot z)(g) - (y \cdot z')(g)| \leqslant \|y\|_\infty \cdot \|z - z'\|_1 < \frac{\varepsilon}{2};$$

поэтому также $|(y \cdot z)(g)| < \varepsilon$ вне Q. Следовательно, также $y \cdot z$ обращается в нуль на бесконечности. Это означает, что $z \in I$; следовательно, I замкнуто.

Но тогда I есть идеал в $L^1(\mathfrak{G})$ или $I = L^1(\mathfrak{G})$. В силу теоремы 8 первая возможность исключается, ибо I содержит элемент x, не содержащийся ни в каком максимальном регулярном идеале. Следовательно, $I = L^1(\mathfrak{G})$, чем и завершается доказательство.

С л е д с т в и е 3 (т а у б е р о в с к а я т е о р е м а В и н е р а [1]). *Если $x(t) \in L^1(-\infty, \infty)$ и $x^\frown(\alpha)$ не обращается в нуль ни при каком α, а $y(t)$ — функция из $L^\infty(-\infty, \infty)$ такая, что $(x \cdot y)(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, то $(z \cdot y)(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ для каждой функции $z \in L^1(-\infty, \infty)$.*

Это следствие нельзя рассматривать как частный случай следствия 2, ибо в нем речь идет об одностороннем пределе. Однако доказательство остается тем же, что и для следствия 2.

Теорема 8 означает, что оболочка $h(I)$ замкнутого идеала I не может быть пустым множеством. В связи с этой теоремой возникает более тонкий и до сих пор полностью не решенный вопрос о классификации замкнутых идеалов в кольце $L^1(\mathfrak{G})$, в частности вопрос об условиях, при которых замкнутый идеал в кольце $L^1(\mathfrak{G})$ равен ядру своей оболочки [1] (см. п. 3 § 15). То, что это не всегда имеет место, показывает пример Л. Шварца (см. п. 2 § 16). Для ответа на поставленный вопрос докажем сначала следующую лемму.

Л е м м а 1 [2]. *Пусть в регулярном полупростом банаховом кольце*

1) *имеется множество, аппроксимирующее единицу;*
2) *совокупность R^1 всех функций $x(M)$ кольца R, равных нулю, каждая вне некоторого бикомпактного множества, плотна в R.*

Тогда кольцо R удовлетворяет условию (D) [3] *на бесконечности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нам надо доказать, что для каждого $x \in R$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует функция $y = y(M) \in R^1$, для которой $|xy - x| < \varepsilon$. В силу условия 1 существует $u \in R$, для которого $|xu - x| < \dfrac{\varepsilon}{2}$; далее, в силу условия 2 существует функция $y = y(M) \in R'$, такая, что $|y - u| < \dfrac{\varepsilon}{2|x|}$. Тогда $|xy - xu| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, и потому $|xy - x| < \varepsilon$.

С л е д с т в и е 4. *Пусть R — то же, что и в предыдущей лемме. Если замкнутый идеал I в R имеет бикомпактную оболочку, то I содержит всякий элемент $x \in R$ такой, что $h(I) \subset \operatorname{int} h((x))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно предыдущей лемме существует $y \in R'$, для которого $|xy - x| < \varepsilon$. Но в силу предложения III п. 4 § 15

[1] Этот последний вопрос тесно связан с вопросом о возможности *спектрального синтеза* на группе, т. е. с вопросом об условиях, при которых инвариантное относительно сдвига пространство функций на группе порождается содержащимися в нем «элементарными» (аналогами функций $x^r \exp(-ixz)$ для аддитивной группы R^1) функциями (см., например, Рудин [12] и Эллиотт [1, 2]). О структуре замкнутых идеалов в кольце $L^1(\mathfrak{G})$ и в некоторых его подкольцах см., например, Р. Вернер [1].

[2] Конечно, эта лемма содержательна лишь для кольца R без единицы, следовательно, для того случая, когда $\mathfrak{M}$ не бикомпактно.

[3] См. п. 4 § 15.

из условия $h(I) \subset \operatorname{int} h((x))$ заключаем, что $x(M)$, а значит и $x(M)\,y(M)$, локально принадлежит идеалу I в каждой конечной точке (см. п. 5 § 15); кроме того, $x(M)\,y(M)$ обращается в нуль в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки и потому также локально принадлежит идеалу I в бесконечно удаленной точке; следовательно (см. теорему 3$''$ п. 4 § 15), $xy \in I$. Так как I замкнут, а ε — произвольное положительное число, то также $x \in I$.

Для проверки выполненности условия (D) в конечных точках докажем следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{G}$ — коммутативная локально бикомпактная группа. Для каждого бикомпактного множества $Q \subset \mathfrak{G}$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует функция $z \in L^1(\mathfrak{G})$ такая, что:*

1) $z\hat{}\equiv 1$ *в некоторой окрестности единицы группы* $\overline{\mathfrak{G}}$;
2) $\|z\|_1 < 2$;
3) $\|z - z_g\|_1 < \varepsilon$ *для всех* $g \in Q$.

Доказательство. Пусть U — симметричная окрестность единицы в $\overline{\mathfrak{G}}$, замыкание которой бикомпактно, а V — другая такая окрестность, замыкание которой содержится в U и которая удовлетворяет условию $\dfrac{\mu(U)}{\mu(V)} < 4$. Пусть $u\hat{}$, $v\hat{}$ — характеристические функции множеств U, V , а u, v — их прообразы в $L^2(\mathfrak{G})$ относительно преобразования Фурье. Тогда функция $z(g) = \dfrac{u(g)\,v(g)}{\mu(V)}$ принадлежит $L^1(\mathfrak{G})$ и

$$\|z\|_1 \leqslant \frac{1}{\mu(V)}\,\|u\|_2\,\|v\|_2 = \frac{1}{\mu(V)}\,\|u\hat{}\|_2\,\|v\hat{}\|_2 = \left[\frac{\mu(U)}{\mu(V)}\right]^{\frac{1}{2}} < 2.$$

Кроме того, если W — окрестность единицы в $\mathfrak{G}$ такая, что то при $VW \subset U$, то при $\chi \in W$

$$z\hat{}(\chi) = \frac{1}{\mu(V)}\,(u\hat{}\cdot v\hat{})(\chi) = \frac{1}{\mu(V)}\int u\hat{}(\chi')\,v\hat{}(\chi'^{-1}\chi)\,d\mu(\chi') = 1.$$

Обозначим через U' совокупность всех $\chi \in \overline{\mathfrak{G}}$, удовлетворяющих условию

$$|1 - \chi(g)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{для всех} \quad g \in Q.$$

Очевидно, U' — открытое множество (см. V п. 12 § 2), содержащее единицу группы $\overline{\mathfrak{G}}$, и потому можно выбрать $U \subset U'$. Но тогда для всех $g \in Q$

$$\|u - u_g\|_2^2 = \int |u\hat{}(\chi)[1 - \chi(g)]|^2\,d\mu(\chi) < \mu(U)\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2,$$

и аналогично

$$\|v - v_g\|_2^2 < \mu(V)\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2.$$

Отсюда

$$\|z - z_g\|_1 = \frac{1}{\mu(V)} \|u(v - v_g) + v_g(u - u_g)\|_1 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\mu(V)} (\|u\|_2 \|v - v_g\|_2 + \|v_g\|_2 \|u - u_g\|_2) <$$
$$< \frac{1}{\mu(V)} \cdot \frac{\varepsilon}{4} 2[\mu(U)\, \mu(V)]^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

для всех $g \in Q$, так что построенная нами функция $z(g)$ удовлетворяет всем поставленным требованиям.

Следствие 5. *Пусть U и $z = z_U$ те же, что и в лемме 2. Если $x \in L^1(\mathfrak{G})$ и $x\hat{}(e\hat{}) = 0$, то $x \cdot z_U \to 0$ при неограниченном убывании U.*

Доказательство. При заданном $\delta > 0$ выберем симметричное множество Q и число $\varepsilon > 0$ в лемме 2 так, чтобы

$$\int\limits_{\mathfrak{G}-Q} |x(g)|\, dg < \frac{\delta}{8}, \quad \varepsilon < \frac{\delta}{2\|x\|_1}.$$

Так как

$$x\hat{}(e\hat{}) = \int x(g)\, d\mu(g) = 0,$$

то

$$(x \cdot z)(g) = \int x(g')\, z(g'^{-1}g)\, d\mu(g') = \int x(g')\, [z(g'^{-1}g) - z(g)]\, d\mu(g').$$

Следовательно,

$$\|x \cdot z\|_1 \leqslant \int |x(g')|\, \|z_{g'^{-1}} - z\|_1\, d\mu(g') =$$
$$= \int\limits_Q |x(g')|\, \|z_{g'^{-1}} - z\|_1\, d\mu(g') + \int\limits_{\mathfrak{G}-Q} |x(g')|\, \|z_{g'^{-1}} - z\|_1\, d\mu(g') <$$
$$< \|x\|_1 \varepsilon + \frac{\delta}{8} \cdot 4 < \delta.$$

Следствие 6. *Существует равномерно ограниченная сеть функций $u \in L^1(\mathfrak{G})$ таких, что $u\hat{} \equiv 0$ в некоторой окрестности точки $e\hat{}$ и $x \cdot u \to x$ для всех $x \in L^1(\mathfrak{G})$, удовлетворяющих условию $x\hat{}(e\hat{}) = 0$.*

Доказательство. Пусть v пробегает множество в $L^1(\mathfrak{G})$, аппроксимирующее единицу; положим $u = v - z \cdot v$, где z — то же, что в лемме 2. Тогда $\|u\|_1 \leqslant 3$ и $u\hat{} = v\hat{} - v\hat{} z\hat{} = 0$ в той окрестности, где $z\hat{} \equiv 1$. Кроме того (см. следствие 5),

$$\|x - x \cdot u\|_1 \leqslant \|x - x \cdot v\|_1 + \|x \cdot z\|_1 \|v\|_1 \to 0.$$

Следствие 6 означает, что условие (D) выполняется в точке $e\hat{}$; отсюда путем сдвига заключаем, что оно выполняется во всех других точках группы $\overline{\mathfrak{G}}$. Согласно лемме 1 условие (D) также выполнено на бесконечности. Таким образом, к $L^1(\mathfrak{G})$ применима теорема Г. Е. Шилова (см. теорему 5 п. 4 § 15), и мы приходим к следующему результату.

Теорема 9. *Пусть I — замкнутый идеал в $L^1(\mathfrak{G})$, а x — функция из $L^1(\mathfrak{G})$, принадлежащая $kh(I)$. Если пересечение границы множества $h(x)$ с $h(I)$ не содержит непустого совершенного множества, то $x \in I$.*

Следствие 7. *Если I — замкнутый идеал в $L^1(\mathfrak{G})$, оболочка которого дискретна (т. е. состоит только из изолированных точек), то $I = kh(I)$.*

9. Случай бикомпактной группы.

Теорема 10. *Коммутативная локально бикомпактная группа $\mathfrak{G}$ бикомпактна тогда и только тогда, когда $\overline{\mathfrak{G}}$ дискретна.*

Доказательство. Если $\mathfrak{G}$ дискретна, то $L^1(\mathfrak{G})$ содержит единицу (см. п. 1 § 28); но тогда группа $\overline{\mathfrak{G}}$ гомеоморфна пространству всех максимальных идеалов банахова кольца с единицей и потому бикомпактна. Обратно, если $\overline{\mathfrak{G}}$ бикомпактна, то функция $x_0^{\frown}(\chi) \equiv 1$ принадлежит $L^1(\overline{\mathfrak{G}}) \cap P(\overline{\mathfrak{G}})$ и отвечающая ей функция $x_0 \in L^1(\mathfrak{G})$ является единицей в $L^1(\mathfrak{G})$. Но в п. 1 § 28 мы видели, что это возможно, лишь когда $\mathfrak{G}$ дискретна. Утверждение теоремы теперь получается, если, пользуясь теоремой двойственности, поменять $\overline{\mathfrak{G}}$ и $\mathfrak{G}$ ролями.

Теорема 11. *Если коммутативная группа $\mathfrak{G}$ бикомпактна и инвариантная мера на ней нормирована так, что $\mu(\mathfrak{G}) = 1$, то в теореме обращения инвариантная мера на $\overline{\mathfrak{G}}$ должна быть нормирована так, чтобы мера каждой точки равнялась единице.*

Доказательство. Пусть мера μ на $\overline{\mathfrak{G}}$ нормирована так, что мера каждой точки равна c. Тогда функция

$$u^{\frown}(\chi) = \begin{cases} \dfrac{1}{c} & \text{при} \quad \chi = e^{\frown}, \\ 0 & \text{при} \quad \chi \neq e^{\frown} \end{cases}$$

сеть единица в $L^1(\mathfrak{G})$. Так как свертке в $L^1(\overline{\mathfrak{G}})$ отвечает умножение функций $x(g)$, то соответствующая функция $u(g) \equiv 1$; отсюда

$$u^{\frown}(\chi) = \int \chi(g)\, d\mu(g) = \begin{cases} \dfrac{1}{c} & \text{при} \quad \chi = e^{\frown}, \\ 0 & \text{при} \quad \chi \neq e^{\frown}. \end{cases} \tag{1}$$

В частности, при $\chi = e^{\frown}$

$$\frac{1}{c} = \int d\mu(g) = \mu(\mathfrak{G}).$$

Следовательно, $\mu(\mathfrak{G}) = 1$ тогда и только тогда, когда $c = 1$.

Из (1) при $c = 1$ вытекает, что

$$\int \chi_1(g)\,\overline{\chi_2(g)}\,d\mu(g) = \int (\chi_1\chi_2^{-1})(g)\,d\mu(g) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \chi_1 = \chi_2, \\ 0 & \text{при} \quad \chi_1 \neq \chi_2. \end{cases}$$

Тем самым доказано:

Следствие 1. *Характеры коммутативной бикомпактной группы образуют ортонормальную систему в $L^2(\mathfrak{G})$.*

Теорема 12. *Характеры χ_α коммутативной бикомпактной группы образуют полную ортонормальную систему в $L^2(\mathfrak{G})$ и разложение (обобщенный ряд Фурье)*

$$x(g) = \sum_\alpha (x, \chi_\alpha)\,\chi_\alpha(g) \tag{2}$$

функции $x \in L^2(\mathfrak{G})$ есть обратное преобразование Фурье.

Доказательство. Если $x \in L^2(\mathfrak{G})$, то $x\hat{}\in L^2(\overline{\mathfrak{G}})$, и потому не более чем счетное число значений $x\hat{}(\chi_\alpha)$, скажем, $x\hat{}(\chi_1)$, $x\hat{}(\chi_2)$, ..., отлично от нуля. Полагая

$$c_n = x\hat{}(\overline{\chi}_n) = \int x(g)\overline{\chi_n(g)}\,d\mu(g)$$

и применяя формулу Планшереля, имеем

$$\int |x(g)|^2\,d\mu(g) = \int |x\hat{}(\chi)|^2\,d\mu(\chi) = \sum_n |c_n|^2.$$

Это означает (см. IX п. 4 § 5), что характеры $\chi(g)$ образуют полную систему в $L^2(\mathfrak{G})$. Далее, непрерывная функция $x_n(g) = \sum\limits_1^n c_k\chi_k(g)$ есть обратное преобразование Фурье функции

$$\widehat{\chi_n}(\chi) = \begin{cases} c_k & \text{при} \quad \chi = \chi_k,\ k \leqslant n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Так как $\widehat{x_n}(\chi) \to x\hat{}(\chi)$ в смысле нормы в $L^2(\overline{\mathfrak{G}})$, то $x_n \to x$ в смысле нормы в $L^2(\mathfrak{G})$ и (2) есть обратное преобразование Фурье.

Если $\mathfrak{G}$ есть группа вращений окружности, то характерами являются $\chi_n = e^{int}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, и мы получаем, как частный случай, теорему о полноте системы функций $\chi_n = e^{int}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, в $L^2(0, 2\pi)$.

Следствие 2. *Всякая непрерывная функция на коммутативной бикомпактной группе равномерно аппроксимируется конечными линейными комбинациями характеров.*

Утверждение непосредственно вытекает из следствия 4 п. I.

10. Сферические функции. Одним из обобщений понятия характера на некоммутативные группы являются сферические функции. Пусть $\mathfrak{G}$ — локально бикомпактная группа, а K — ее бикомпактная подгруппа.

Сферической функцией на $\mathfrak{G}$, отвечающей подгруппе K, называется всякая элементарная положительно определенная функция $\varphi(g)$ на $\mathfrak{G}$, удовлетворяющая условию

$$\varphi(k_1 g k_2) = \varphi(g) \quad \text{для всех} \quad k_1, k_2 \in K. \tag{1}$$

Если $g \to U_g$ — неприводимое унитарное представление группы $\mathfrak{G}$, для которого $\varphi(g) = (U_g \xi_0, \xi_0)$, то, как легко видеть, соотношение (1) эквивалентно условию $U_k \xi_0 = \xi_0$ для всех $k \in K$. Таким образом, *элементарная положительно определенная функция является сферической тогда и только тогда, когда в пространстве соответствующего неприводимого представления $g \to U_g$ не существует вектор $\xi_0 \neq 0$, удовлетворяющий условию $U_k \xi_0 = \xi_0$ для всех $k \in K$.*

Сферическую функцию $\varphi(g)$ можно также рассматривать как функцию на многообразии X правых смежных классов Kg группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе K. Именно, положим

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi(g_1 g_2^{-1}) \quad \text{для} \quad x_1, x_2 \in X, \quad x_1 = Kg_1, \quad x_2 \in Kg_2. \tag{2}$$

Из (1) вытекает, что это определение не зависит от выбора элементов $g_1 \in x_1$, $g_2 \in x_2$.

Элементам $g_0 \in \mathfrak{G}$ отвечают преобразования $Kg \to Kgg_0$ в пространстве X, которые мы будем записывать в виде $x \to xg_0$. Из (2) вытекает, что $\varphi(x_1 g, x_2 g) = \varphi(x_1, x_2)$ для всех $g \in \mathfrak{G}$; кроме того, $\varphi(x_1, x_2)$ — положительно определенное ядро [1]). Если зафиксировать точку $x_0 \in X$, то функция $\psi(x) = \varphi(x, x_0)$ будет инвариантной относительно всех преобразований g, оставляющих на месте точку x_0, т. е. будет постоянной на «сферах» с «центром» в точке x_0.

Наложим теперь на группы $\mathfrak{G}$ и K дополнительное условие, именно, потребуем, чтобы в группе $\mathfrak{G}$ существовал автоморфизм $g \to g'$ (т. е. изоморфизм группы $\mathfrak{G}$ на группу $\mathfrak{G}$) такой, что: 1) $g'' = g$, 2) $k' = k$ для всех $k \in K$. Всюду в дальнейшем в этом пункте мы будем считать это условие выполненным [2]).

В таком случае сферические функции описываются при помощи максимальных идеалов следующего коммутативного кольца. Пусть

---

[1]) Это означает, что $\sum\limits_{j,k=1}^{n} \varphi(x_j, x_k)\, \xi_j \overline{\xi}_k \geqslant 0$ для произвольных $x_1, \ldots, x_n \in X$, произвольных комплексных чисел $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и произвольного натурального n.

[2]) Это условие выполняется, например, если X — симметрическое риманово пространство, а $\mathfrak{G}$ — группа движении в X.

R_0' — совокупность всех функций $x' \in L^1(\mathfrak{G})$, удовлетворяющих условию
$$x(k_1 g k_2) = x(g) \quad \text{для всех} \quad k_1, k_2 \in K. \tag{3}$$

Легко видеть, что при условии существования указанного выше автоморфизма R_0' — коммутативное [1] подкольцо кольца $L^1(\mathfrak{G})$. Пусть R_0 — кольцо, полученное из R_0' присоединением единицы. Существует взаимно однозначное соответствие $M \to \varphi_M$ между совокупностью всех отличных от R_0' симметричных максимальных идеалов кольца R_0 и совокупностью всех сферических функций, и это соответствие для всех $x \in R_0'$ задается формулой $x(M) = \int x(g)\, \varphi_M(g)\, d\mu(g)$. Комбинируя этот результат с теоремой 3 п. 2 § 20, заключаем, что *всякая положительно определенная функция* φ, *удовлетворяющая условию* (1), *представляется в виде*
$$\varphi(g) = \int\limits_{\mathfrak{M}} \varphi_M(g)\, d\sigma(M), \tag{4}$$
где $\mathfrak{M}$ — *пространство симметричных максимальных идеалов кольца* R_0, *а* σ — *мера на* $\mathfrak{M}$.

Обозначим через S множество двусторонних смежных классов $s = KgK$ группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе K, т. е. множеств s всех элементов $k_1 g k_2$ при фиксированных g; в силу сказанного выше эти классы s можно рассматривать как «сферы» в X. Условие (1) означает, что функция φ должна быть постоянной на каждом классе, и потому ее можно рассматривать как функцию $\varphi(s)$ класса s.

Аналогично, каждую функцию $f(g) \in R_0'$ можно рассматривать как функцию $f(s)$ на S.

Переходя от интеграла по $\mathfrak{G}$ к интегралу по $K \times K \times S$, заключаем, что произведение $f = f_1 \cdot f_2$ в кольце R_0 должно задаваться формулой
$$f(s) = \int\limits_S f_1(s_1)\, f_2(s_2)\, a(s_1, s_2, s)\, ds_1\, ds_2, \tag{5}$$
где $a(s_1, s_2, s)$ — некоторая функция от s_1, s_2, s. Отсюда заключаем, что *для сферических функций* φ_M *имеет место следующий закон умножения*:
$$\varphi_M(s_1)\, \varphi_M(s_2) = \int\limits_S a(s_1, s_2, s)\, \varphi_M(s)\, ds. \tag{6}$$

Предположим теперь, что $\mathfrak{G}$ — полупростая группа Ли; в этом случае сферические функции удовлетворяют дифференциальным уравнениям, которые получаются следующим образом. Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис алгебры Ли Γ группы $\mathfrak{G}$, E_1, $E_2, \ldots, E_n$ — отвечающие

[1] Доказательство этого факта, как и других сформулированных здесь предложений, является обобщением соответствующих рассуждений в примере в) п. 4 § 29.

$e_1, e_2, \ldots, e_n$ дифференциальные операторы в X (операторы Ли бесконечно малого сдвига). Обозначим через Q кольцо всех формальных многочленов от $e_1, \ldots, e_n$ с соотношениями, являющимися соотношениями коммутирования в Г.

Рассмотрим элементы $P(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ центра [1] кольца Q; тогда $P(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ — дифференциальные операторы в многообразии X, перестановочные со всеми его преобразованиями $x \to xg$. Так как функции $\varphi_M(x)$ определяют неприводимые представления группы $\mathfrak{G}$, то отсюда вытекает, что $P(E_1, E_2, \ldots, E_n)\varphi_M(x) = \lambda\varphi_M(x)$, где λ — число.

Среди элементов центра кольца Q имеется конечное число $P_1, \ldots$ $\ldots, P_m$ таких, что всякий другой элемент центра есть многочлен от $P_1, \ldots, P_m$. Положив $\Delta_i = P_i(E_1, \ldots, E_n)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, мы получим, что функции $\varphi_M(x)$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\Delta_i\varphi_M(x) = \lambda_i\varphi_M(x), \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{7}$$

Если, например, $\mathfrak{G}$ есть комплексная унимодулярная группа второго порядка, а K — ее унитарная подгруппа, то сферические функции совпадают со сферическими функциями, вычисленными в примере б) п. 4 § 29; X можно в этом случае интерпретировать как плоскость Лобачевского, а $\mathfrak{G}$ — как группу движений в плоскости Лобачевского. В этом случае все элементы центра выражаются через один из них, и соответствующий оператор Δ есть оператор Лапласа на плоскости Лобачевского.

11. Операция обобщенного сдвига. Пусть T — локально бикомпактное хаусдорфово пространство, μ — мера на T, а $L^1(T)$ — пространство L^1, построенное по этой мере. Рассмотрим семейство ограниченных линейных операторов A^s в $L^1(T)$, обладающее следующими свойствами [2]:

1) для каждого $t \in T$ существует оператор A^{t*} в $L^1(T)$ такой, что

$$\int A^{t*}x(t)\cdot\overline{y(t)}\,d\mu = \int x(t)\,\overline{A^t y(t)}\,d\mu \quad \text{для всех} \quad x, y \in L(T);$$

2) числовые функции $|A^i|$, $|A^{t*}|$ μ-измеримы и ограничены на каждом бикомпактном множестве;

3) $A^s x(t)$, $A^{s*}x(t)$ принадлежит $L(T\times T)$ для любой функции $x \in$ $\in L(T)$;

4) $A^s x(t)$ как функция от s принадлежит $L^1(T)$ при $x(t) \in L^1(T)$ для почти каждого $t \in T$;

---

[1] Можно показать, что центр кольца Q состоит из всех таких многочленов $P = a1 + \sum a^i e_i + \sum a^{ik} e_i e_k + \ldots$ с симметричными коэффициентами a^{ik}, a^{iki}, ..., для которых формы $\sum a^i \xi_i$, $\sum a^{ik}\xi_i\xi_k$, ... инвариантны относительно преобразований присоединенной группы.

[2] По поводу обозначений $L(T)$, $L(T\times T)$ см. пп. 1, 18 § 6.

5) имеется последовательность вещественных функций $x_n(t) \in \in L^1(T)$ такая, что для любой функции $f \in L^1(T)$ существуют

$$\lim_{n\to\infty} \int A^s f(t)\, x_n(t)\, d\mu(t) = f(s),$$
$$\lim_{n\to\infty} \int A^s f(t)\, x_n(s)\, d\mu(s) = f(t),$$
$$\lim_{n\to\infty} \int A^{s*} f(t)\, x_n(s)\, d\mu(s) = f(t),$$
$$\lim_{n\to\infty} \int A^{s*} f(t)\, x_n(t)\, d\mu(t) \in L^1(T);$$

мы положим:

$$f^*(s) = \lim_{n\to\infty} \overline{\int A^{s*}(t)\, x_n(t)\, d\mu(t)}; \tag{1}$$

6) [1] $A_s^\tau A_t^s x(t) = A_t^s A_t^\tau x(t)$;
7) $A_t^s A_t^\tau x(t) = A_t^\tau A_t^s x(t)$;
8) $A_t^{s*} A)\, t^\tau x(t) = A_t^\tau A_t^{s*} x(t)$,
причем соотношения 6–8 имеют место при каждых τ, $s \in T$ для почти всех $t \in T$.

Всякое семейство операторов A^i, удовлетворяющее условиям 1–6, называется *операцией обобщенного сдвига*; если, кроме того, выполнены условия 7–8, то операция сдвига называется соответственно *коммутативной* и *нормальной*.

Простым примером операции обобщенного сдвига является тот случай, когда T — локально бикомпактная группа, а μ — левоинвариантная мера на T; тогда оператор левого сдвига $A^s x(t) = x(st)$ будет удовлетворять условиям 1–6; при этом, как легко видеть, $A^{s*}x(t) = x(s^{-1}t)$. Если, кроме того, группа T коммутативна, то будут также выполнены условия 7–8.

Менее тривиальный пример будет приведен ниже в конце этого пункта.

В дальнейшем мы будем рассматривать только операции обобщенного сдвига, удовлетворяющие условиям 7–8; кроме того, для простоты изложения мы дополнительно предположим, что $|A_t^{s*}| \leqslant C$, где C — некоторая постоянная. Тогда $L^1(T)$ можно превратить в полное нормированное симметричное кольцо, положив

$$|x| = C \int |x(t)|\, d\mu(t), \quad (x \cdot y)(t) = \int A_t^{s*} x(t)\, y(s)\, ds \tag{2}$$

и определив инволюцию по формуле (1); при этом ассоциативность умножения следует из условия 6. Присоединив единицу, получим полное нормированное симметричное кольцо R с единицей; можно показать, что из условий 7 и 8 вытекает, что R — коммутативное вполне

[1] Если x есть функция нескольких аргументов t, t_1, t_2, …, то нижний индекс в A_t^s обозначает, что этот оператор применяется к x как функции переменного t.

симметричное кольцо. Повторяя рассуждения, проведенные в п. 1, можно показать, что отличные от $L^1(T)$ максимальные идеалы кольца R задаются формулой

$$(\lambda e + x)(M) = \lambda + \int x(t)\, \overline{\varphi(t, M)}\, d\mu(t), \tag{3}$$

где $\varphi(t, M)$ — непрерывная на $T \times \mathfrak{M}$ функция, удовлетворяющая условию

$$A_t^s \varphi(t, M) = \varphi(s, M)\, \varphi(t, M); \tag{4}$$

обратно, всякая такая функция определяет по формуле (3) максимальный идеал кольца R.

Непрерывная функция $p(t)$ называется *положительно определенной относительно операций* A^s, если

$$\sum_{j,\, k=1}^{n} A_{t_j}^{t_k *} p(t_j)\, \xi_j \overline{\xi}_k \geqslant 0$$

для любых точек $t_1, \ \ldots, t_n \in T$ и любых комплексных чисел $\xi_1, \ \ldots, \xi_n$. В этом случае формула $F(\lambda e + x) = \lambda + \int p(t)\, x(t)\, d\mu(t)$ определяет положительный функционал в R. Применяя к нему следствие 1 п. 4 § 20 (см. аналогичные рассуждения в п. 3), заключаем:

Теорема 13. *Функция $p(t)$ является непрерывной и положительно определенной относительно A^s тогда и только тогда, когда она представляется в виде*

$$p(t) = \int\limits_{\mathfrak{M}} \overline{\varphi(t, M)}\, d\sigma(M),$$

где σ — некоторая мера на $\mathfrak{M}$.

Положим теперь $M_0 = L^1(T)$ и $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} - M_0$; повторяя по существу рассуждения, проведенные в п. 4, приходим к следующему результату.

Теорема 14 (теорема Планшереля для операции обобщенного сдвига). *На $\mathfrak{M}'$ существует единственная мера ν такая, что формулы*

$$F(M) = \int\limits_{T} f(t)\, \overline{\varphi(t, M)}\, d\mu(t), \quad f(t) = \int\limits_{\mathfrak{M}'} F(M)\, \varphi(t, M)\, d\nu(M) \tag{5}$$

осуществляют взаимно обратные изометрические отображения $L^2_\mu(T)$ на $L^2_\nu(\mathfrak{M}')$ и $L^2_\nu(\mathfrak{M}')$ на $L^2_\mu(T)$, причем интегралы в (5) *сходятся по норме в $L^2_\nu(\mathfrak{M}')$ и $L^2_\mu(T)$ соответственно.*

Положим теперь

$$B_M^{N*} F(M) = \int \overline{\varphi(t, M)}\, \varphi(t, N)\, f(t)\, d\mu(t)$$

$$\text{при} \quad f(t) = \int\limits_{\mathfrak{M}'} F(M)\, \varphi(t, M)\, d\mu(M), \quad N \in \mathfrak{M}'; \tag{6}$$

если B_M^{N*} и сопряженный к нему оператор B_M^N удовлетворяют условиям 1–8 (с $\mathfrak{M}'$ и ν вместо T и μ) и если также $|B_M^{N*}| \leqslant C_1$, то в силу предыдущего по операции B_M^N можно построить нормированное кольцо, которое обозначим через R_1. При любом фиксированном $t \in T$ формула $(\lambda e + F(M))(t) = \lambda + \int F(M)\,\varphi(t, M)\,d\nu(M)$ определяет максимальный идеал в R_1, следовательно, можно считать, что пространство T_1 максимальных идеалов кольца R_1 содержит T. Пусть ν' — мера на $T' = T - L^1_\nu(\mathfrak{M}')$, аналогичная мере ν на $\mathfrak{M}'$. Можно показать (см. Левитан [4]), что если кольцо R_1 регулярно и $\nu'(T' - T) = 0$, то $T' = T$, т. е. имеет место закон двойственности, обобщающий на этот случай теорему двойственности для локально бикомпактных коммутативных групп.

Нетривиальный пример обобщенной операции сдвига мы получим, если обозначим через $A_x^y f(x)$ решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - [\rho(x) - \rho(y)]u = 0, \quad 0 \leqslant x < \infty, \tag{7}$$

удовлетворяющее начальным условиям $u(x, 0) = f(x)$, $u'_y(x, 0) = 0$.

Можно показать (см., например, Повзнер [7]), что если $\rho(x)$ вещественна, непрерывна на полуоси $0 \leqslant x < \infty$ и удовлетворяет условию $\rho(x) = O\left(\frac{1}{x^{3+\varepsilon}}\right)$, $\varepsilon > 0$, при $x \to +\infty$, то все условия 1–8 будут выполнены и $|A_x^y| \leqslant C$, где С — некоторая постоянная. Следовательно, к оператору A_x^y применимы все предыдущие результаты; соответствующая функция $\varphi(x, M)$ является решением уравнения $\frac{d^2u}{dx^2} - \rho(x)\,u + \lambda u = 0$ при некотором вещественном λ, удовлетворяющим начальным условиям $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$, а взаимно обратные формулы (5) в обобщенной теореме Планшереля переходят в формулы

$$F(\lambda) = \int_0^\infty f(\lambda)\,\varphi(x, \lambda)\,dx, \quad f(x) = \int_{-\infty}^\infty F(\lambda)\,\varphi(x, \lambda)\,d\nu(\lambda), \tag{8}$$

осуществляющие взаимно обратные изометрические отображения $L^2(0, \infty)$ на $L^2_\nu(-\infty, \infty)$ и $L^2_\nu(-\infty, \infty)$ на $L^2(0, \infty)$ соответственно.

Отметим, что формулы (8) в действительности верны для более широких классов функций $\rho(x)$, именно для любой вещественной измеримой функции $\rho(x)$, суммируемой в каждом конечном интервале $(0, c)$, $c > 0$. Но в настоящее время методами теории колец этот общий результат не получается; это объясняется тем, что здесь вместо симметричных нормированных колец надо было бы рассматривать симметричные топологические кольца, теория которых, однако, пока не столь хорошо разработана.

§ 32. Представления бикомпактных групп

В случае бикомпактной группы $\mathfrak{G}$ пространство $L^2(\mathfrak{G})$ является гильбертовым кольцом (см. ниже п. 1); применение к $L^2(\mathfrak{G})$ общей теории гильбертовых колец (см. п. 5 § 25) приводит к ряду результатов об унитарных представлениях бикомпактной группы.

1. Кольцо $L^2(\mathfrak{G})$. Пусть $\mathfrak{G}$ — бикомпактная группа; тогда инвариантная мера $\mu(\mathfrak{G})$ всей группы конечна; мы будем ее считать пронормированной так, что $\mu(\mathfrak{G}) = 1$. Тогда

$$\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \|x\|_\infty$$

и

$$\|x \cdot y\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \, \|y\|_2.$$

Из этих неравенств, в частности, вытекает, что $L^2(\mathfrak{G})$ — банахово кольцо, ибо

$$\|x \cdot y\|_2 \leqslant \|x \cdot y\|_\infty \leqslant \|x\|_2 \cdot \|y\|_2.$$

Легко непосредственно проверить, что $L^2(\mathfrak{G})$ удовлетворяет всем остальным аксиомам гильбертова кольца, так что к $L^2(\mathfrak{G})$ применима общая теория таких колец. Однако оказывается, что, кроме того, все минимальные двусторонние идеалы кольца $L^2(\mathfrak{G})$ конечномерны. Этот результат получается из следующих лемм:

Лемма 1. *Непрерывная функция z тогда и только тогда находится в центре кольца $L^2(\mathfrak{G})$, когда $z(g_1 g_2) \equiv z(g_2 g_1)$.*

Доказательство. Функция z тогда и только тогда принадлежит центру $L^2(\mathfrak{G})$, когда

$$\int z(g_1)\, x(g_1^{-1} g)\, d\mu(g_1) = \int x(g_1)\, z(g_1^{-1} g)\, d\mu(g_1) \tag{1}$$

для всех $x \in L^2(\mathfrak{G})$. Заменив в первом интеграле g_1 на gg_1, а во втором g_1 на g_1^{-1}, получим

$$\int [z(gg_1) - z(g_1 g)]\, x(g_1^{-1})\, d\mu(g_1) = 0. \tag{2}$$

В силу произвольности функции $x \in L^2(\mathfrak{G})$ и непрерывности функции z равенство (2) (а значит, и (1)) имеет место тогда и только тогда, когда $z(gg_1) - z(g_1 g) \equiv 0$.

Лемма 2. *Всякий отличный от (0) замкнутый двусторонний идеал $I \subset L^2(\mathfrak{G})$ содержит отличный от нуля элемент центра кольца $L^2(\mathfrak{G})$, являющийся непрерывной функцией на группе $\mathfrak{G}$.*

Доказательство [1]. Выберем отличный от нуля элемент $y \in I$ и положим $x = y \cdot y^*$. Тогда функция x непрерывна на $\mathfrak{G}$. Положим

$$z(g) = \int x(g_1 g g_1^{-1})\, d\mu(g_1).$$

Тогда z непрерывна, $z(e) = x(e) = \int |y(g)|^2\, d\mu(g) > 0$, так что $z(g) \not\equiv 0$. Кроме того, из инвариантности меры вытекает, что $z(g'g) = z(gg')$, так что z принадлежит центру кольца $L^2(\mathfrak{G})$.

С другой стороны, $x(g) \in I$, а значит и $x_{g_1}^{g_1}(g) = x(g_1 g g_1^{-1}) \in I$ (см. IV п. 2 § 28). Поэтому также

$$z = \int x_{g_1}^{g_1}\, d\mu(g_1) \in I.$$

Применяя теперь теоремы 5 и 12 пп. 3 и 5 § 25 к минимальному двустороннему идеалу $I \subset L^2(\mathfrak{G})$ и учитывая лемму 2, заключаем:

Лемма 3. *Всякий минимальный двусторонний идеал $I \in L^2(\mathfrak{G})$ конечномерен.*

Но в таком случае применение результатов п. 5 § 25 приводит к следующей теореме.

Теорема 1. *Если $\mathfrak{G}$ — бикомпактная группа, то $L^2(\mathfrak{G})$ есть прямая и в то же время ортогональная сумма своих минимальных двусторонних идеалов I_α, каждый из которых конечномерен и, следовательно, вполне изоморфен кольцу всех матриц фиксированного конечного порядка (своего для каждого идеала).*

2. Представления бикомпактной группы.

Теорема 2. *Если $g \to T_g$ — непрерывное представление бикомпактной группы $\mathfrak{G}$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, то в этом пространстве существует другое скалярное произведение, определяющее норму, эквивалентную исходной, в котором все операторы T_g унитарны.*

Доказательство. Положим для $x, y \in \mathfrak{H}$

$$(x, y)_1 = \int (T_g x, T_g y)\, d\mu(g).$$

Легко видеть, что $(x, y)_1$ удовлетворяет всем аксиомам скалярного произведения, в частности, если

$$(x, x)_1 = \int (T_g x, T_g x)\, d\mu(g) = 0,$$

то $(T_g x, T_g x) \equiv 0$, ибо $(T_g x, T_g x) \geqslant 0$ и непрерывно зависит от g. Положив $g = e$, получим

$$(x, x) = (T_e x, T_e x) = 0, \quad x = 0.$$

[1]) Излагаемое здесь доказательство принадлежит И. Сигалу [4].

Далее, из инвариантности меры μ вытекает, что

$$(T_{g_0}x, T_{g_0}y)_1 = \int (T_g T_{g_0}x, T_g T_{g_0}x)\, d\mu(g) = \\ = \int (T_{gg_0}x, T_{gg_0}x)\, d\mu(g) = \int (T_g x, T_g y)\, d\mu(g) = (x, y)_1;$$

следовательно, при скалярном произведении $(x, y)_1$ оператор T_{g_0} унитарен. Положим [1])

$$C = \sup_{g \in \mathfrak{G}} |T_g|,$$

где $|T_g|$ — норма оператора T_g в скалярном произведении (x, y). Тогда

$$|x|_1^2 = (x, x)_1 = \int |T_g x|^2\, d\mu(g) \leqslant C^2 |x|^2 \int d\mu(g) = C^2 |x|^2.$$

С другой стороны, интегрируя по g обе части неравенства

$$|x|^2 = |T_{g-1} T_g x|^2 \leqslant C^2 |T_g x|^2,$$

получим

$$|x|^2 \leqslant C^2 |x|_1^2.$$

Следовательно, нормы $|x|$ и $|x|_1$ эквивалентны.

В дальнейшем мы будем рассматривать только унитарные представления группы $\mathfrak{G}$. Согласно общей теории (см. п. 2 § 29), унитарные представления группы $\mathfrak{G}$ полностью описываются представлениями [2]) ее группового кольца, или, что то же, представлениями

$$x \to A_x, \quad A_x = \int x(g)\, U_g\, d\mu(g) \tag{1}$$

кольца $L^1(\mathfrak{G})$. Но в случае бикомпактной группы $\mathfrak{G}$ $L^2(\mathfrak{G}) \subset L^1(\mathfrak{G})$; следовательно, всякое унитарное представление группы $\mathfrak{G}$ порождает также представление кольца $L^2(\mathfrak{G})$. Обратно, всякое представление $x \to A_x$ кольца $L^2(\mathfrak{G})$, не содержащее вырожденного представления, получается по формуле (1) из некоторого унитарного представления группы $\mathfrak{G}$; чтобы в этом убедиться, достаточно повторить для кольца $L^2(\mathfrak{G})$ рассуждения, проведенные в п. 2 § 29. Поэтому достаточно изучить представления кольца $L^2(\mathfrak{G})$.

Теорема 3. *Всякое представление $x \to A_x$ гильбертова кольца R, не содержащее вырожденного представления, разлагается единственным образом в прямую сумму представлений, являющихся*

---

[1]) $C < \infty$. Действительно, $\sup\limits_{g \in \mathfrak{G}} |T_g x| < \infty$ при каждом $x \in \mathfrak{H}$, ибо $|T_g x|$ — непрерывная функция на бикомпактной группе $\mathfrak{G}$. Отсюда в силу известной теоремы Банаха–Штейнгауза (см., например, Люстерник и Соболев [1]), следует, что $C < \infty$.

[2]) Напомним, что мы рассматриваем только симметричные представления симметричных колец.

взаимно однозначными представлениями некоторых минимальных двусторонних идеалов I_α этого кольца.

Доказательство. Обозначим через H пространство рассматриваемого представления, а через H_α — замыкание линейной оболочки всех векторов $A_2\xi$, $\xi \in H$, $x \in I_\alpha$. Некоторые из H_α равны (0); отбрасывая их, мы можем, очевидно, рассматривать только $H_\alpha \neq (0)$. Все эти подпространства H_α взаимно ортогональны.

Действительно, пусть I_α, I_β — два различных, а значит, ортогональных, минимальных двусторонних идеала кольца R. Если $x \in I_\alpha$, $y \in I_\beta$, то $x^*y = 0$ и потому при $\xi, \eta \in H$

$$(A_x\xi,\, A_y\eta) = (\xi,\, A_{x^*y}\eta) = 0.$$

Так как $x \to A_x$ не содержит вырожденного представления, то инвариантное подпространство $\mathfrak{N} \subset H$ всех векторов, на которых все операторы A_x равны нулю, $= (0)$. Поэтому H есть прямая сумма всех H_α и, следовательно, исходное представление кольца R есть прямая сумма представлений идеалов I_α в пространствах H_α. Эти представления являются изоморфизмами, ибо I_α — простые кольца.

Отметим, что если x_α — проекции на I_α элемента $x \in R$, то $A_x\xi = A_{x_\alpha}\xi$ при $\xi \in H_\alpha$; действительно, при $\xi = A_y\eta$, $y \in I_\alpha$, $\eta \in H$

$$A_{x-x_\alpha}\xi = A_{x-x_\alpha}A_y\eta = A_{(x-x_\alpha)\,y}\eta = 0,$$

ибо $(x - x_\alpha)\,y = 0$. Так как линейная оболочка векторов $A_y\eta$ плотна в H_α, то $A_{x-x_\alpha}\xi = 0$ для всех $\xi \in H_\alpha$; следовательно, $A_x\xi = A_{x_\alpha}\xi$ при $\xi \in H_\alpha$.

В доказанной теореме представления идеалов I_α в H_α, вообще говоря, приводимы; поэтому мы займемся дальнейшим разложением взаимно однозначного представления простого кольца I_α.

Пусть I — один из идеалов I_α. В соответствии с дальнейшим применением к бикомпактным группам мы дополнительно предположим, что I конечномерен. Тогда в I существует ортогональный базис элементов p_{jk}, $j, k = 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяющий условиям

$$p^*_{jk} = p_{kj}, \quad (p_{jk}, p_{jk}) = (p_{11}, p_{11}), \quad p_{jk}p_{j_1k_1} = \begin{cases} p_{jk} & \text{при} \quad k = j_1, \\ 0 & \text{при} \quad k \neq j_1, \end{cases} \tag{2}$$

а левое регулярное представление

$$T_a x \to ax, \quad x \in Ip_{11}$$

есть симметричный изоморфизм кольца I на кольцо $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}_n)$ всех линейных операторов в конечномерном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_n = Ip_{11}$ (см. п. 5 § 25).

Следовательно, представление $x \to A_x$ кольца I можно также рассматривать как представление кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}_n)$.

Но кольцо $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}_n)$ есть частный случай кольца всех вполне непрерывных операторов. На основании теоремы 2 п. 2 § 22 всякое представление этого кольца есть прямая сумма неприводимых представлений, каждое из которых эквивалентно тождественному или нулевому представлению.

Мы приходим к следующему результату.

Теорема 4. *Всякое неприводимое унитарное представление бикомпактной группы конечномерно; всякое унитарное представление бикомпактной группы есть прямая ортогональная сумма ее неприводимых (следовательно, конечномерных) представлений.*

Рассмотрим теперь одно из неприводимых представлений $g \to U_g$ бикомпактной группы $\mathfrak{G}$. В силу сказанного выше представление $x \to \to A_x$ кольца $L^2(\mathfrak{G})$, порожденное унитарным представлением $g \to U_g$, сводится к представлению некоторого минимального двустороннего идеала I этого кольца, а значит, — к представлению кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}_n)$, где $\mathfrak{H}_n = Ip_{11}$; это последнее представление в свою очередь эквивалентно тождественному представлению кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}_n)$. Следовательно, с точностью до унитарной эквивалентности, мы можем считать, что наше представление кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}_n)$ есть просто тождественное представление этого кольца.

Это означает, что при $a, x \in I$, $\xi = xp_{11}$

$$A_a\xi = a\xi,$$

следовательно,

$$U_{g_0}A_a\xi = a_{g_0}\xi a\xi_{g_0}, \tag{3}$$

где $a_{g_0}(g) = a(g_0^{-1}g)$, $\xi_{g_0}(g) = \xi(g_0^{-1}g)$.

Положим в (3) $a = p$, где $p = p_{11} + p_{12} + \ldots + p_{nn}$ есть единица в кольце I. Мы получим, что

$$U_{g_0}\xi = \xi_{g_0}, \quad \text{т. е.} \quad U_{g_0}\xi(g) = \xi(g_0^{-1}g); \tag{4}$$

следовательно,

I. *Всякое неприводимое представление бикомпактной группы $\mathfrak{G}$ можно реализовать как представление в некотором минимальном левом идеале кольца $\widetilde{L}^2(\mathfrak{G})$, и притом так, что операторами представления будут операторы левого сдвига.*

Функции $p_{11}(g), p_{21}(g), \ldots, p_{n1}(g)$ образуют ортогональный базис в Ip_{11}, следовательно, функции

$$\frac{1}{\omega}\,p_{11}(g), \quad \frac{1}{\omega}\,p_{21}(g), \ \ldots, \ \frac{1}{\omega}\,p_{n1}(g), \quad \text{где} \quad \omega = \sqrt{(p_{11}, p_{11})}, \tag{5}$$

образуют ортонормальный базис в Ip_{11}.

Пусть $\|c_{jk}(g)\|$ — матрица оператора U_g в базисе (5), так что в силу (4)

$$\frac{1}{\omega}\,p_{j1}(g_0^{-1}g) = \sum_{k=1}^{n} c_{kj}(g_0)\,\frac{1}{\omega}\,p_{k1}(g).$$

Отсюда и из (2) заключаем, что

$$c_{kj}(g_0) = \frac{1}{\omega^2}\int p_{j1}(g_0^{-1}g)\,\overline{p_{k1}(g)}\,d\mu(g) = \\ = \frac{1}{\omega^2}\overline{\int p_{k1}(g)\,p_{1j}(g^{-1}g_0)\,d\mu(g)} = \frac{1}{\omega^2}\,\overline{p_{kj}(g_0)}. \quad (6)$$

Найдем теперь ω. Для этого заметим, что в силу унитарности матрицы $\|c_{jk}(g)\|$

$$\sum_{j=1}^{n} |c_{kj}(g)|^2 = 1,$$

т. е. в силу (6)

$$\frac{1}{\omega^4}\sum_{j=1}^{n} |p_{kj}(g)|^2 = 1.$$

Интегрируя обе части этого равенства и учитывая (2) и определение числа ω, получим: $\omega^{-2}n = 1$, откуда $\omega^2 = n$. Таким образом,

II. *Матричные элементы $c_{kj}(g)$ неприводимого унитарного представления $g \to U_g$ бикомпактной группы $\mathfrak{G}$ в ортонормальном базисе $n^{-\frac{1}{2}}p_{11}$, $n^{-\frac{1}{2}}p_{21}$, ..., $n^{-\frac{1}{2}}p_{n1}$ задаются формулой*

$$c_{kj}(g) = \frac{1}{n}\,\overline{p_{kj}(g)}, \quad j, k = 1, 2, \ldots, n. \quad (7)$$

Функция

$$\chi(g) = c_{11}(g) + c_{22}(g) + \ldots + c_{nn}(g) = \\ = \frac{1}{n}\,[\overline{p_{11}(g)} + \overline{p_{22}(g)} + \ldots + \overline{p_{nn}(g)}],$$

т. е. след матрицы $\|c_{jk}(g)\|$, называется *характером* данного неприводимого представления $g \to U_g$. Из этого определения видно, что унитарно эквивалентные представления имеют один и тот же характер и что характер χ принадлежит центру минимального двустороннего идеала I, определяющего данное неприводимое представление. При этом

$$\chi(e) = c_{11}(e) + c_{22}(e) + \ldots + c_{nn}(e) = 1 + 1 + \ldots + 1 = n,$$

так что $\chi(g) \not\equiv 0$.

С другой стороны, два разных минимальных двусторонних идеала I_α, I_β ортогональны, следовательно, характеры χ_α, χ_β соответствующих неприводимых представлений также ортогональны, и потому $\chi_\alpha(g) \not\equiv \chi_\beta(g)$. Отсюда заключаем, что соответствующие неприводимые представления не эквивалентны.

Мы доказали следующую теорему.

Т е о р е м а 5. *Если $\mathfrak{G}$ — бикомпактная группа, то каждый минимальный двусторонний идеал I_α в $L^2(\mathfrak{G})$ определяет неприводимое* *унитарное представление* $g \to U_g^{(\alpha)}$ *группы* $\mathfrak{G}$ *и каждое неприводимое унитарное представление группы* $\mathfrak{G}$ *эквивалентно одному из представлений* $g \to U_g^{(\alpha)}$. *Представления* $g \to U_g^{(\alpha)}$, *отвечающие различным идеалам* I_α, *не эквивалентны и соответствующие им характеры ортогональны. Матричные элементы* $c_{jk}^{(\alpha)}(g)$ *этих представлений образуют полную ортогональную систему в* $L^2(\mathfrak{G})$.

Последнее утверждение теоремы следует из формул (7), ибо p_{kj} образуют ортогональный базис в соответствующем идеале I_α, а $L^2(\mathfrak{G})$ есть ортогональная сумма идеалов I_α. Отсюда также следует, что для двух неэквивалентных неприводимых представлений $g \to \|c_{jk}(g)\|$, $g \to \|c'_{jk}(g)\|$

$$\int c_{jk}(g)\,\overline{c'_{j'k'}(g)}\,d\mu(g) = 0 \tag{8}$$

и что

$$\int c_{jk}(g)\,\overline{c_{j'k'}(g)}\,d\mu(g) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{при} \quad j = j', \quad k = k', \\ 0 & \text{при} \quad j \neq j' \quad \text{или} \quad k \neq k', \end{cases} \tag{9}$$

где n — размерность представления.

Соотношения (8) и (9) называются *соотношениями ортогональности*.

Из этих соотношений и последнего утверждения теоремы 5 вытекает, что

$$\int |x(g)|^2\,d\mu(g) = \sum_\alpha \sum_{j,\,k=1}^{n_\alpha} n_\alpha \left| \int x(g)\,\overline{c_{jk}^{(\alpha)}(g)}\,d\mu(g) \right|^2 \tag{10}$$

для любой функции $x \in L^2(\mathfrak{G})$. Но числа $x_{kj}^{(\alpha)} = \int x(g)\,\overline{c_{jk}^{(\alpha)}(g)}\,d\mu(g)$ являются матричными элементами оператора

$$T_x^{(\alpha)} = \int x(g)\,U_g^{(\alpha)*}\,d\mu(g) \tag{11}$$

в базисе $n_\alpha^{-\frac{1}{2}} p_{11}$, $n_\alpha^{-\frac{1}{2}} p_{21}$, $\ldots$, $n_\alpha^{-\frac{1}{2}} p_{n_\alpha 1}$; следовательно, сумма

$$\sum_{j,\,k=1}^{n_\alpha} |x_{kj}^{(\alpha)}|^2 = \sum_{j,\,k=1}^{n_\alpha} \left| \int x(g)\,\overline{c_{jk}^{(\alpha)}(g)}\,d\mu(g) \right|^2$$

есть след $S(T_x^{(\alpha)} T_x^{(\alpha)*})$ оператора $T_x^{(\alpha)} T_x^{(\alpha)*}$, и формула (10) принимает вид

$$\int |x(g)|^2\,d\mu(g) = \sum_\alpha n_\alpha S(T_x^{(\alpha)} T_x^{(\alpha)*}). \tag{12}$$

Формула (12) называется *формулой Планшереля для бикомпактной группы*. Ее можно рассматривать как аналог формулы Планшереля для коммутативной группы, причем роль преобразования Фурье играет переход от функции x к оператору $T_x^{(\alpha)}$ по формуле (11).

3. Тензорное произведение представлений. Пусть $g \to U_g$, $g \to$ $\to U'_g$ — представления группы $\mathfrak{G}$ в конечномерных пространствах R_n, R'_m размерностей n, m соответственно. Мы можем считать пространства R_n, R'_m реализованными в виде пространств всех систем $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ комплексных чисел x_1, $x_2, \ldots, x_n$, $y_1, y_2, \ldots, y_m$ с обычным определением операций в них, а операторы наших представлений — в виде линейных преобразований

$$x'_j = \sum_{k=1}^{n} u_{jk}(g)\, x_k; \quad y'_\mu = \sum_{\nu=1}^{m} u'_{\mu\nu}(g)\, y_\nu; \qquad j = 1, 2, \ldots, n; \quad \mu = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

в этих пространствах.

Обозначим через $R_{n,m}$ векторное пространство размерности nm, состоящее из всех систем $x = \{x_{j\mu}\}$ ($j = 1, 2, \ldots, n$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$) комплексных чисел $x_{j\mu}$, в котором операции определены обычным образом:

$$\lambda x = \{\lambda x_{j\mu}\}, \quad x + y = \{x_{j\mu} + y_{j\mu}\}$$

при $x = \{x_{j\mu}\}$, $y = \{y_{j\mu}\}$. *Тензорным произведением* $U_g \times U'_g$ операторов U_g, U'_g (т. е. преобразований (1)) называется линейное преобразование

$$x'_{j\mu} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{m} u_{jk}(g)\, u'_{\mu\nu}(g)\, x_{k\nu}. \tag{2}$$

Соответствие $g \to U_g \times U'_g$ есть представление группы $\mathfrak{G}$. Действительно, произведению $g_1 g_2$ отвечает последовательное применение сначала преобразований (1), отвечающих g_2, а затем преобразований (1), отвечающих g_1, а значит, и последовательное применение сначала преобразования (2), отвечающего g_2, а затем преобразования (2), отвечающего g_1.

Представление $g \to U_g \times U'_g$ называется *тензорным* (или еще *кронекеровским*) произведением представлений $g \to U_g$, $g \to U'_g$.

Пусть теперь представления $g \to U_g$, $g \to U'_g$ унитарны; не нарушая общности, можно считать скалярные произведения в R_n, R'_m заданными формулами

$$(x, x') = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{x'_k}, \quad (y, y') = \sum_{\mu=1}^{m} y_\mu \overline{y'_\mu}.$$

Определим в $R_{n,m}$ скалярное произведение формулой

$$(x, x') = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} x_{k\mu}\, \overline{x}'_{k\mu};$$

простое вычисление показывает, что тогда тензорное представление $g \to U_g \times U'_g$ есть унитарное представление в пространстве $R_{n,m}$. Даже если представления $g \to U_g$, $g \to U'_g$ неприводимы, представление $g \to U_g \times U'_g$, вообще говоря, приводимо. Одной из важных задач, имеющих применения в теоретической физике, является нахождение для различных конкретных групп формул, осуществляющих разложение на неприводимые представления тензорного произведения двух неприводимых представлений.

4. Теорема двойственности для бикомпактной группы. Пусть теперь $\mathfrak{G}$ — бикомпактная группа. Если $g \to U(g)$ и $g \to V(g)$ — два конечномерных унитарных представления группы $\mathfrak{G}$, то их тензорное произведение $g \to U(g) \times V(g)$ есть также унитарное представление этой группы. Отсюда следует, что линейная оболочка R матричных элементов всех конечномерных унитарных представлений группы $\mathfrak{G}$ при обычном определении операций образует коммутативное кольцо функций на $\mathfrak{G}$; это кольцо называется *представляющей алгеброй* [1]) группы $\mathfrak{G}$.

Если $g \to \|u_{jk}(g)\|$ — унитарное представление группы $\mathfrak{G}$, заданное в матричной форме, то соответствие $g \to \|\overline{u_{jk}(g)}\|$, где $\overline{u_{jk}(g)}$ — функция, комплексно сопряженная к $u_{jk}(g)$, есть также унитарное представление группы $\mathfrak{G}$; следовательно, представляющая алгебра R вместе с каждой функцией содержит также комплексно сопряженную функцию.

Рассмотрим теперь все неприводимые представления $g \to U_g^{(\alpha)}$, или в матричной форме $g \to \|c_{jk}^{(\alpha)}(g)\|$, построенные в п. 2. Всякое конечномерное унитарное представление $g \to U_g$ эквивалентно прямой сумме конечного числа представлений $g \to \|c_{jk}^{(\alpha)}(g)\|$; отсюда заключаем, что матричные элементы $c_{jk}^{(\alpha)}(g)$ образуют базис в R. В частности, тензорное произведение $g \to U_g^{(\alpha)} \times V_g^{(\beta)}$ каких-нибудь двух из этих неприводимых представлений эквивалентно прямой сумме некоторых из представлений $g \to U_g^{(\alpha)}$. Символически это можно записать в виде

$$U_g^{(\alpha)} \times U_g^{(\beta)} = S^{-1}(U_g^{(\alpha_1)} + U_g^{(\alpha_2)} + \ldots + U_g^{(\alpha_p)})S, \tag{1}$$

где S — унитарная числовая матрица, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ — некоторые значения индекса α; при этом S, p и $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ зависят, вообще говоря, от α и β. Из (1) вытекает, что

$$\chi_\alpha(g)\,\chi_\beta(g) = \chi_{\alpha_1}(g) + \chi_{\alpha_2}(g) + \ldots + \chi_{\alpha_p}(g), \tag{2}$$

[1]) Здесь мы придерживаемся обычно принятой в алгебре терминологии и вместо термина «кольцо» применяем термин «алгебра» (см. сноску на с. 182).

где $\chi_\alpha(g)$ — характер представления $g \to U_g^{(\alpha)}$; интегрируя (2), получаем

$$\int \chi_\alpha(g)\,\chi_\beta(g)\,d\mu(g) = \int \chi_{\alpha_1}(g)\,d\mu(g) + \int \chi_{\alpha_2}(g)\,d\mu(g) + \ldots \\ \ldots + \int \chi_{\alpha_p}(g)\,d\mu(g). \quad (3)$$

Но, по доказанному в п. 2, левая часть (3) есть единица или нуль в зависимости от того, имеют или не имеют место равенства $c_{jk}^{(\beta)}(g) = \overline{c_{jk}^{(\alpha)}(g)}$; далее, интеграл $\int \chi_\alpha(g)\,d\mu(g)$ есть единица или нуль в зависимости от того, будет представление $g \to U_g^{(\alpha)}$ единичным или неединичным. При этом представление $g \to U_g$ называется *единичным*, если U_g есть единичный оператор в одномерном пространстве при любом $g \in \mathfrak{G}$; очевидно, характер единичного представления тождественно равен единице.

Из этих рассуждений вытекает, что в правой части формулы (1) содержится единичное представление тогда и только тогда, когда $c_{jk}^{(\beta)}(g) = \overline{c_{jk}^{(\alpha)}(g)}$, и в этом случае оно содержится в формуле (1) точно один раз.

Симметричное коммутативное кольцо R называется *квадратной блок-алгеброй*, если в нем имеется базис, который можно разбить на непересекающиеся множества U_α по n_α^2 элементов, расположенных в виде квадратных матриц $U_\alpha = \|u_{jk}^{(\alpha)}\|$, $j, k = 1, 2, \ldots, n_\alpha$, и притом так, что выполняются следующие условия:

1). Среди множеств U_α имеется множество, состоящее из одного единичного элемента e.

2). Каждому множеству U_α отвечает числовая матрица S_α порядка n_α такая, что $S_\alpha^{-1}\|u_{jk}^{(\alpha)^*}\|S_\alpha$ есть также одно из множеств U_α.

3). Для любых двух множеств U_α, U_β существует числовая унитарная матрица $S_{\alpha\beta}$ такая, что [1])

$$U_\alpha \times U_\beta = S_{\alpha\beta}^{-1}(U_{\alpha_1} + U_{\alpha_2} + \ldots + U_{\alpha_p})S_{\alpha\beta} \quad (4)$$

при некоторых $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$.

4). Множество $\{e\}$ либо вовсе не содержится в правой части (4), либо содержится в точности один раз: последний случай имеет место тогда и только тогда, когда $\|u_{jk}^{(\beta)}\| = S_\alpha^{-1}\|u_{jk}^{(\alpha)^*}\|S_\alpha$, где S_α — некоторая числовая унитарная матрица.

5). Для любого множества $U_\alpha = \|u_{jk}^{(\alpha)}\|$ выполняется условие

$$\|u_{jk}^{(\alpha)}\|\,\|u_{kj}^{(\alpha)^*}\| = \|\delta_{jk}e\|, \quad (5)$$

[1]) $U_\alpha \times U_\beta$ обозначает матрицу $\|u_{jk}^{(\alpha)}u_{\mu\nu}^{(\beta)}\|$; таким образом, формула (4) дает правило умножения базисных элементов, а значит, и произвольных элементов кольца R.

где
$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad j = k, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq k. \end{cases}$$

Множества U_α называются *блоками* данной квадратной блок-алгебры

Предыдущие рассуждения показывают, что *представляющая алгебра локально бикомпактной группы есть квадратная блок-алгебра*.

Пусть теперь R — произвольная квадратная блок-алгебра. Функционал f на R называется *элементарным*, если он осуществляет симметричный гомоморфизм алгебры R в поле комплексных чисел.

В силу условия (5) всякий элементарный функционал f порождает отображение $c_{jk}^{(\alpha)} = f(u_{jk}^{(\alpha)})$ блоков U_α в унитарные матрицы, $f(U_\alpha) = \|c_{jk}^{(\alpha)}\|$, удовлетворяющие тем же соотношениям (4), что и блоки. Легко видеть, что, обратно, всякое отображение $U_\alpha \to f(U_\alpha)$ блоков в унитарные матрицы тех же порядков n_α, удовлетворяющие тому же соотношению (4), что и блоки U_α, порождается некоторым элементарным функционалом. Мы можем поэтому определить произведение $f_1 f_2$ двух элементарных функционалов, положив $f = f_1 f_2$, если $f(U_\alpha) = f_1(U_\alpha)\, f_2(U_\alpha)$ для всех блоков U_α. Легко проверить, что при таком определении умножения совокупность $\mathfrak{G}(R)$ всех элементарных функционалов на R образует группу; при этом единицей группы $\mathfrak{G}(R)$ будет функционал f, относящий каждому блоку U_α единичную матрицу порядка n_α. В группе $\mathfrak{G}(R)$ можно ввести топологию, считая базой окрестностей всевозможные множества функционалов $f \in \mathfrak{G}(R)$, удовлетворяющих неравенствам
$$|f(U_{\alpha_k}) - f_0(U_{\alpha_k})| < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$
при всевозможных фиксированных f_0, $\varepsilon > 0$ и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Легко проверить, что тогда $\mathfrak{G}(R)$ становится топологической группой. Кроме того, из рассуждения, аналогичного доказательству теоремы 2 п. 3 § 11, вытекает, что при таком определении топологии $\mathfrak{G}(R)$ есть бикомпактное пространство; следовательно, $\mathfrak{G}(R)$ есть бикомпактная топологическая группа. Эта группа называется *представляющей группой* блок-алгебры R.

Оказывается, что установленное таким образом соответствие между бикомпактными группами и квадратными блок-алгебрами двойственно в следующем смысле [1]).

Теорема 6 (теорема двойственности М. Крейна [8] и [9]). *Если $\mathfrak{G}$ — бикомпактная группа, а R — ее представляющая алгебра, то представляющая группа $\mathfrak{G}(R)$ алгебры R топологически*

[1]) По поводу доказательства этой теоремы мы отсылаем читателя к работе М. Крейна [9]; отметим, что первая часть теоремы 6 была получена ранее Таннака [1].

изоморфна исходной группе и изоморфизм между $\mathfrak{G}$ *и* $\mathfrak{G}(R)$ *задается формулой*

$$f(U_\alpha) = \{c_{jk}^{(\alpha)}(g)\},$$

где $g \to \|c_{jk}^{(\alpha)}(g)\|$ *— неприводимое представление группы* $\mathfrak{G}$, *отвечающее блоку* U_α *алгебры* R.

Если R *— некоторая квадратная блок-алгебра, а* $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(R)$ *— ее представляющая группа, то между алгеброй и представляющей алгеброй* $R(\mathfrak{G})$ *группы* $\mathfrak{G}$ *можно установить симметричный изоморфизм, при котором блоки* U_α *алгебры* R *переходят в полную систему* $g \to \|c_{jk}^{(\alpha)}(g)\|$ *неприводимых представлений группы* $\mathfrak{G}$.

Теорему 6 можно рассматривать как аналог теоремы двойственности Понтрягина (см. п. 6 § $\mathfrak{A}$) для коммутативной локально бикомпактной группы.

Дальнейшее обобщение теоремы двойственности на произвольные (не обязательно коммутативные) группы было затем получено Стайнспрингом [2]. Общая теория двойственности разработана Г. Кацом [1, 3]. В этой теории построен класс Ω объектов (так называемые *кольцевые группы*), обладающий следующими свойствами:

1) Ω содержит все локально бикомпактные группы;
2) вместе с каждым объектом ω класс Ω содержит также двойственный объект ω^*;
3) ω^{**} изоморфен ω.

По поводу теории двойственности см. также Келли [4], Такесаки [1] и Татсуума [1].

Результаты § 28, 29 и пп. 1, 2 § 30 принадлежат в основном Гельфанду, Райкову и Наймарку (см. Гельфанд и Райков [2], Гельфанд и Наймарк [2–4, 6], Наймарк [2]), некоторые из них были позже независимо получены Годманом [3], некоторые — И. Сигалом [4]. Результаты пп. 3–5 § 30 принадлежат Гельфанду и Райкову [2], Райкову [8] и Годману [3], пп. 1–3 и 6 § 31 — Гельфанду и Райкову [1], Райкову [2, 3, 6], п. 10 § 31 — Гельфанду [8, 9], п. 4 § 31 — М. Крейну [7], п. 4 § 32 — Таннака [1] и М. Крейну [8, 9]. Независимо и несколько раньше результаты п. 4 § 31 были также получены А. Вейлем [1], который, однако, в их доказательстве использовал тонкие теоремы Понтрягина–ван Кампена о структуре коммутативных локально бикомпактных групп (см. также Повзнер [1, 4]).

Теорема Планшереля была обобщена в работах Гельфанда и Наймарка [4, 5, 7] сначала на случай группы всех комплексных унимодулярных [1)] матриц второго порядка, а затем n-го порядка. В дальнейшем этот результат Гельфанда и Наймарка обобщался и на другие некоммутативные группы (см. Гельфанд и Граев [1], Хариш-Чандра [2, 5], И. Сигал [9]).

---

1) То есть определитель которых равен единице.

М. Г. Крейну [9] принадлежит теория положительно определенных ядер и порожденных ими колец, обобщающая теорию положительно определенных функций. Обобщение ряда результатов Гельфанда и Райкова на группы, являющиеся прямым произведением бикомпактной группы на локально бикомпактную коммутативную группу, дано в работе Г. Я. Любарского [1].

Теория операций обобщенного сдвига (п. 11 § 31) принадлежит Левитану [1, 10], ее применение к дифференциальным операторам Штурма–Лиувилля (п. 11 § 31) — Левитану и Повзнеру (см. Левитан [1–8], Левитан и Повзнер [1] и Повзнер [2, 3, 7]). Понятие операции обобщенного сдвига было введено Дельсартом [1, 2].

Теорема 6 п. 7 § 31 принадлежит Наймарку [1]; независимо и несколько позже она была получена во многих других работах (см., например, Эмброз [1]).

Теоремы тауберовского типа получены Годманом [2] путем применения результатов Гельфанда и Шилова (см. § 15).

Теория представлений бикомпактных групп была разработана Петером и Г. Вейлем [1].

В заключение отметим, что много дополнительных сведений к материалу глав II–VI читатель найдет в монографиях Гельфанда, Райкова и Шилова [1], Диксмье [20], Хьюита–Росса [1] и Риккарта [6].

Глава VII

КОЛЬЦА ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 33. Различные топологии в кольце $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$

Пусть $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, как обычно, обозначает кольцо всех ограниченных линейных операторов в фиксированном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. В $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ можно по-разному задавать топологию, при которой оно становится топологическим кольцом.

Рассмотрим наиболее важные из этих топологий.

1. Слабая топология. Напомним (см. пример 2 п. 3 § 8), что *слабой окрестностью* $U(A_0;\, f_1,\, \ldots,\, f_n, \varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_n;\, \varepsilon)$ называется совокупность всех операторов $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, удовлетворяющих неравенствам

$$|((A - A_0)\, f_k,\, \varphi_k)| < \varepsilon, \quad k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n,$$

при фиксированном $\varepsilon > 0$ и фиксированных $f_1,\, \ldots,\, f_n,\, \varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_n \in \mathfrak{H}$. Топология, в которой базу окрестностей образуют всевозможные окрестности $U(A_0;\, f_1,\, \ldots,\, f_n, \varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_n;\, \varepsilon)$ называется *слабой топологией* в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$.

Легко проверить, что в этой топологии $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ — топологическое кольцо.

Так как $|((A - A_0)\, f_k,\, \varphi_k)| = |((A^* - A_0^*)\, \varphi_k,\, f_k)|$, то переход от A к A^* непрерывен в слабой топологии.

Замыкание множества $S \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ в слабой топологии обозначим $\overline{S}^1$.

2. Сильная топология. Пусть $\varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_s$ — элементы пространства $\mathfrak{H}$, а ε — положительное число. *Сильной окрестностью* $V(A_0;\, \varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_s;\, \varepsilon)$ оператора A_0 называется совокупность всех операторов A, удовлетворяющих неравенствам

$$|(A - A_0)\, \varphi_k| < \varepsilon, \quad k = 1,\, \ldots,\, s.$$

Топология в кольце $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, в которой базу окрестностей образуют всевозможные окрестности $V(A_0;\, \varphi_1,\, \ldots,\, \varphi_s;\, \varepsilon)$, называется *сильной топологией*.

Замыкание множества $S \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ в сильной топологии обозначим $\overline{S}^2$.

Сходимость последовательности A_n к оператору A в этрй топологии означает, что $|A_n f - Af| \to 0$ для любого вектора $f \in \mathfrak{H}$. Такого рода сходимость называется *сильной сходимостью*, и оператор A называется в этом случае *сильным пределом* последовательности A_n. Также и в этой топологии $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ — хаусдорфово топологическое пространство, а выражения αA, $A+B$, AB непрерывны (последнее — по каждому из множителей при фиксированном другом), следовательно, и в этой топологии $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ — топологическое кольцо. Однако в этой топологии переход от A к A^* уже не всегда непрерывен.

Чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что существует последовательность операторов A_n, которая сильно сходится к нулю, в то время как A_n^* не сходится сильно к нулю. Пусть, например, $\mathfrak{H}$ сепарабельно. Для построения такой последовательности выберем в $\mathfrak{H}$ ортонормальный базис $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots\}$. Определим ограниченный линейный оператор U равенством

$$U\varphi_n = \varphi_{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots; \quad U\varphi_1 = 0,$$

и положим $A_n = U^n$. Если тогда f — произвольный вектор из $\mathfrak{H}$, то мы можем написать

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k, \quad \alpha_k = (f, \varphi_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty;$$

следовательно,

$$|A_n f|^2 = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k U^n \varphi_k \right|^2 = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \varphi_{k-n} \right|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \to 0.$$

Таким образом, последовательность A_n сильно стремится к нулю. С другой стороны, очевидно, $U^*\varphi_n = \varphi_{n+1}$, следовательно,

$$|A_n^* f|^2 = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k U^{*n} \varphi_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_{k+n} \right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = |f|^2 > 0, \quad \text{если} \quad f \neq 0. \tag{1}$$

Эти соотношения показывают, что $A_n^* f$ не стремится сильно к нулю. Следовательно, переход от A к A^* не непрерывен в сильной топологии.

С другой стороны, он непрерывен в слабой топологии, поэтому сильная топология отлична от слабой. Более того, *сильная топология сильнее слабой топологии, ибо всякая слабая окрестность содержит некоторую сильную окрестность*. В самом деле, если $U(A_0; \varphi_1, \ldots, \varphi_s, \psi_1, \ldots, \psi_s; \varepsilon)$ — заданная слабая окрестность оператора A_0, то она содержит сильную окрестность

$$V(A_0; \varphi_1, \ldots, \varphi_s; \delta), \quad \delta = \frac{\varepsilon}{\max(|\psi_1|, \ldots, |\psi_s|)},$$

этого оператора. Именно, соотношение $A \in V(A_0; \varphi_1, \ldots, \varphi_s; \delta)$ означает, что $|(A - A_0)\varphi_k| < \delta$, $k = 1, \ldots, s$. Но тогда

$$|((A - A_0)\varphi_k, \psi_k)| \leqslant |(A - A_0)\varphi_k|\,|\psi_k| < \delta \max(|\psi_1|, \ldots, |\psi_s|) = \varepsilon,$$

т. е.

$$A \in U(A_0; \varphi_1, \ldots, \varphi_s, \psi_1, \ldots, \psi_s; \varepsilon).$$

Из доказанного утверждения следует, что всякая сильная точка прикосновения является также точкой прикосновения в слабой топологии, и потому $\overline{S}^2 \subset \overline{S}^1$ (см. пп. 1–3 § 2).

Обратное утверждение неверно, ибо слабая топология не совпадает с сильной.

Последовательностью A_n, рассмотренной выше, можно также воспользоваться для того, чтобы доказать, что произведение AB не непрерывно в слабой топологии по совокупности обеих переменных A, B. Действительно, в противном случае последовательность $A_n A_n^*$ должна была бы слабо стремиться к 0, в то время как $A_n A_n^* = 1$.

Покажем, кроме того, что и в сильной топологии произведение AB не непрерывно по совокупности обеих переменных A, B.

Выберем для этого элемент f с нормой, равной единице ($|f| = 1$), и сильную окрестность нуля $V(0; f; \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1$. Положим, далее,

$$A_{n,\delta} = \frac{1}{\delta} A_n, \quad B_{n,\delta} = \delta A_n^*, \quad \delta > 0.$$

Тогда

$$|A_{n,\delta} B_{n,\delta} f| = |A_n A_n^* f| = |f| = 1 > \varepsilon, \quad \text{т. е.} \quad A_{n,\delta} B_{n,\delta} \notin V(0; f; \varepsilon)$$

при любых n и δ. С другой стороны, каковы бы ни были окрестности $V(0; \varphi_1, \ldots, \varphi_p; \varepsilon_1)$, $V(0; \psi_1, \ldots, \psi_q; \varepsilon_2)$, полагая $\delta < \dfrac{\varepsilon_2}{\max(|\psi_1|, \ldots, |\psi_q|)}$, имеем при любом n

$$|B_{n,\delta}\psi_k| = \delta |A_n^* \psi_k| = \delta |\psi_k| < \frac{\varepsilon_2}{\max(|\psi_1|, \ldots, |\psi_q|)} |\psi_k| \leqslant \varepsilon_2,$$

т. е.

$$B_{n,\delta} \in V(0; \psi_1, \ldots, \psi_q; \varepsilon_2).$$

Далее, выбирая n так, чтобы было

$$|A_n \varphi_k| < \varepsilon_1 \delta \quad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

имеем

$$|A_{n,\delta}\varphi_k| < \varepsilon_1 \quad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

т. е.

$$A_{n,\delta} \in U(0; \varphi_1, \ldots, \varphi_p; \varepsilon_1).$$

Таким образом, в любых двух сильных окрестностях нулевого оператора существуют $A_{n,\delta}$, $B_{n,\delta}$ такие, что $A_{n,\delta} B_{n,\delta}$ не находится в заданной окрестности 0, т. е. AB не непрерывно при $A = 0$, $B = 0$.

3. Сильнейшая топология. Пусть $f_1, f_2, \ldots$ — заданные элементы в $\mathfrak{H}$ такие, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 < \infty$, а ε — положительное число. *Сильнейшей окрестностью* $W(A_0; f_1, f_2, \ldots; \varepsilon)$ оператора A_0 называется совокупность всех операторов A, удовлетворяющих неравенству $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |(A - A_0) f_k|^2 < \varepsilon^2$. Топология в кольце $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, в которой базу окрестностей образуют всевозможные окрестности $W(A_0; f_1, f_2, \ldots; \varepsilon)$, называется *сильнейшей топологией*. Замыкание множества S в сильнейшей топологии обозначим $\overline{S}^3$. В этой топологии кольцо $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ также оказывается хаусдорфовым пространством. Также и в этой топологии выражения αA, $A + B$, AB непрерывны относительно α, A, B, причем AB непрерывно только по каждому из множителей при фиксированном другом. Тот факт, что AB не непрерывно по совокупности обоих множителей и в сильнейшей топологии, можно установить, рассматривая снова операторы $A_{n,\delta}$ и $B_{n,\delta}$.

Сильнейшая топология мажорирует сильную топологию, т.е. всякая сильная окрестность содержит некоторую сильнейшую окрестность.

Действительно, если $V(A_0; f_1, \ldots, f_s; \varepsilon)$ — заданная сильная окрестность оператора A_0, то

$$W(A_0; f_1, \ldots, f_s, f_{s+1}, \ldots, ; \varepsilon) \subset V(A_0; f_1, \ldots, f_s; \varepsilon),$$

ибо из неравенства $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |(A - A_0) f_k|^2 < \varepsilon^2$ вытекает, что

$$|(A - A_0) f_k| < \varepsilon \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Следовательно,

$$\overline{S}^3 \subset \overline{S}^2.$$

Легко убедиться в том, что сильнейшая топология не совпадает с сильной и потому сильнее последней.

4. Равномерная топология. *Равномерной топологией в* $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ называется топология, определенная нормой оператора. Следовательно, всевозможные открытые шары, определенные неравенствами $|A - A_0| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, образуют базу окрестностей в равномерной топологии.

С нормой, равной норме оператора, $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ есть нормированное кольцо, и потому произведение AB непрерывно в равномерной топологии по совокупности обоих множителей. Следовательно, равномерная топология отлична от предыдущих топологий и, как легко видеть, сильнее каждой из них.

Таким образом, обозначая через $\overline{S}^4$ замыкание в сильнейшей топологии, имеем:

$$\overline{S}^4 \subset \overline{S}^3 \subset \overline{S}^2 \subset \overline{S}^1.$$

§ 34. Слабо замкнутые подкольца кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$

1. Основные понятия. Пусть $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство; совокупность $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ всех ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}$ есть банахово симметричное кольцо, если в нем определить действия как действия с операторами, норму — как норму оператора и инволюцию — как переход к сопряженному оператору. Симметричное подкольцо кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ называется *слабо замкнутым кольцом* [1]), если оно замкнуто в слабой топологии в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$.

В дальнейшем мы главным образом будем рассматривать слабо замкнутые кольца.

Пересечение всех слабо замкнутых колец, содержащих данное множество $S \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, есть *минимальное слабо замкнутое кольцо*, *содержащее* S; оно обозначается $R(S)$.

Пусть S — произвольное множество из $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$; обозначим через S^* совокупность всех операторов A^*, $A \in S$, а через S' — совокупность всех операторов из $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, перестановочных со всеми операторами из $S \cup S^*$. В силу V п. 1 § 8 S' — слабо замкнутое кольцо, содержащее единицу [2]); оно называется *коммутантом данного множества* S.

Операция перехода от S к S' обладает, очевидно, следующими свойствами [3]):

1) $S' = (R_{a^*}(S))' = (T(S))'$;

2) если $S_1 \subset S_2$, то $S_1' \supset S_2'$;

3) $S \subset S''$.

Последнее соотношение показывает, что S'' — слабо замкнутое кольцо, содержащее множество S; оно содержит поэтому минимальное такое кольцо $R(S)$, т. е. $R(S) \subset S''$. Далее, применяя соотношение 3 к множеству S', имеем $S' \subset S'''$. С другой стороны, применяя операцию к обеим частям соотношения 3 и пользуясь свойством 2, получаем, что $S' \supset S'''$, так что $S' = S'''$. Подстановка S', S'', ... вместо S дает тогда

$$S'' = S^{\mathrm{IV}} = \ldots, \quad S' = S''' = S^{\mathrm{V}} = \ldots.$$

2. Главная единица. Пусть S — произвольное подмножество кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, $\mathfrak{N}$ — совокупность всех элементов пространства $\mathfrak{H}$, на которых операторы A и A^* обращаются в нуль, коль скоро $A \in S$. Оператор E_0 проектирования на $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}$ называется *главной единицей* множества S. Таким образом, по определению, равенства $Af = A^*f = 0$ для всех $A \subset S$ и $E_0 f = 0$ эквивалентны.

---

[1]) Такие кольца называются еще *кольцами* или *алгебрами фон Неймана*.

[2]) Здесь и в дальнейшем в этой главе единицей называется единичный оператор.

[3]) Напомним, что $R_{a^*}(S)$ обозначает минимальное симметричное кольцо, содержащее данное множество S (см. п. 1 § 10).

Если S — кольцо, содержащее единицу, то, очевидно, $\mathfrak{N} = (0)$, так что главная единица равна 1. Далее, главная единица E_0 множества S удовлетворяет равенствам

$$E_0 A = A E_0 = A \tag{1}$$

для любого оператора $A \in S$. Действительно, по определению главной единицы $A(1 - E_0)\, f = A^*(1 - E_0)\, f = 0$ для любого вектора $f \in \mathfrak{H}$, т. е. $A(1 - E_0) = 0$, $A^*(1 - E_0) = 0$. Применяя операцию инволюции к обеим частям последнего равенства, получаем $(1 - E_0)A = 0$, так что [1]

$$A - AE_0 = A - E_0 A = 0, \quad \text{т. е.} \quad AE_0 = E_0 A = A.$$

Лемма. *Главная единица множества S принадлежит S' и S''.*

Доказательство. Первое утверждение следует из (1). Пусть, далее, $B \in S'$; если $E_0 f = 0$, то $Af = A^* f = 0$ для всех $A \in S$. Но тогда

$$ABf = BAf = 0, \quad A^*Bf = BA^*f = 0,$$

так что $E_0 B f = 0$. Взяв $f = (1 - E_0)\, g$, $g \in \mathfrak{H}$, мы получим, что

$$E_0 B(1 - E_0) = 0, \quad E_0 B = E_0 B E_0.$$

Подставляя в последнее равенство B^* вместо B и применяя операцию инволюции к полученному равенству, мы придем к равенству $BE_0 = E_0 B E_0$, следовательно,

$$E_0 B = B E_0 = E_0 B E_0.$$

Итак, оператор E_0 перестановочен с любым оператором $B \in S'$; следовательно, $E_0 \in S''$.

Мы воспользуемся теперь этой леммой для доказательства следующей основной теоремы.

Теорема. *Пусть S — произвольное подмножество кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, E_0 — главная единица множества S. Тогда $R(S)$ есть сильнейшее замыкание кольца $R_{a^*}(S)$; $R(S)$ состоит из тех и только тех элементов $A \in S''$, которые удовлетворяют условию*

$$E_0 A = A E_0 = A. \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим через S_1 совокупность всех элементов кольца S'', удовлетворяющих условию (2); пусть $A \in S_1$; докажем, что A — сильнейшая точка прикосновения кольца $R_{a^*}(S)$, т. е. что любая сильнейшая окрестность $W(A; F_1^0, F_2^0, \ldots; \varepsilon)$ содержит элементы кольца $R_{a^*}(S)$. Для этой цели составим счетную прямую сумму

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H} \oplus \ldots;$$

[1] Отсюда следует, что если M — произвольное симметричное подкольцо в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, а E_0 — его главная единица, то на пространстве $E_0\mathfrak{H}$ M есть кольцо с единицей, а на $(1 - E_0)\mathfrak{H}$ все операторы из M обращаются в нуль.

очевидно, $f_0 = \{f_1^0, f_2^0, \ldots\} \in \mathfrak{H}'$. Для произвольного ограниченного линейного оператора B имеем $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |Bf_k^0|^2 \leqslant |B|^2 \sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k^0|^2$, так что и вектор

$$f'_B = \{Bf_1^0, Bf_2^0, \ldots\} \in \mathfrak{H}'.$$

Мы назовем f'_B *образом* оператора B в пространстве $\mathfrak{H}'$.

Пусть $\mathfrak{E}'$ — совокупность всех образов операторов кольца $R_{a^*}(S)$, а $\overline{\mathfrak{E}}'$ — замыкание множества $\mathfrak{E}'$ по норме в $\mathfrak{H}'$. Очевидно, $\mathfrak{E}'$ линейно, так что $\overline{\mathfrak{E}}'$ линейно и замкнуто. Пусть E' — оператор проектирования в $\mathfrak{H}'$ на $\mathfrak{E}'$; тогда имеет место соответствие $E' \sim \|E_{ts}\|$, $t, s = 1, 2, 3, \ldots$ (см. п. 15 § 5). Если C — произвольный элемент кольца $R_{a^*}(S)$, то $C' \sim \|\delta_{ts}C\|$, где $t, s = 1, 2, 3, \ldots$ и

$$\delta_{ts} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t = s, \\ 0 & \text{при} \quad t \neq s, \end{cases}$$

— оператор в $\mathfrak{H}'$ и $C'f'_B = \{CBf_1^0, CBf_2^0, \ldots\} = f'_{CB}$. Если поэтому $B \in R_{a^*}(S)$, то $f'_{CB} \in \mathfrak{E}'$, так что оператор C' отображает $\mathfrak{E}'$ в $\mathfrak{E}'$, а значит, $\overline{\mathfrak{E}}'$ в $\overline{\mathfrak{E}}'$. Так как $E'f' \in \overline{\mathfrak{E}}'$ при любом $f' \in \mathfrak{H}'$, то отсюда следует, что $C'E'f' \in \overline{\mathfrak{E}}'$, т. е.

$$C'E' = E'C'E'. \tag{3}$$

Подставляя в (3) C^* вместо C (C^* также $\in R_{a^*}(S)$) и пользуясь соотношением $C^{*'} = C'^*$ (см. п. 15 § 5), получаем, что

$$C'^*E' = E'C'^*E', \quad E'C' = (E'C'^*E')^* = E'C'E' = C'E'.$$

Это последнее соотношение равносильно соотношениям $CE_{ts} = E_{ts}C$, $t, s = 1, 2, 3, \ldots$; так как C — произвольный элемент кольца $R_{a^*}(S)$, то $E_{ts} \in (R_{a^*}(S))' = S'$.

Вернемся теперь к заданному элементу A и докажем, что

$$f'_A \in \overline{\mathfrak{E}}'.$$

Так как по определению $f'_B \in \mathfrak{E}'$, коль скоро $B \in R_{a^*}(S)$, то $E'f'_B = f'_B$, т. е.

$$Bf_t^0 = \sum_{s=1}^{\infty} E_{ts}Bf_s^0 = \sum_{s=1}^{\infty} BE_{ts}f_s^0, \quad B\Big(f_t^0 - \sum_{s=1}^{\infty} E_{ts}f_s^0\Big) = 0$$

для всех $B \in R_{a^*}(S)$. Но тогда, по определению главной единицы [1] E_0, также

$$E_0\Big(f_t^0 - \sum_{s=1}^{\infty} E_{ts}f_s^0\Big) = 0,$$

[1] Множество S и кольцо $R_{a^*}(S)$ имеют, очевидно, одну и ту же главную единицу.

следовательно, в силу условия (2)

$$A\Big(f_t^0 - \sum_{s=1}^{\infty} E_{ts} f_s^0\Big) = AE_0\Big(f_t^0 - \sum_{s=1}^{\infty} E_{ts} f_s^0\Big) = 0.$$

Так как $A \in S''$, то последнее равенство можно переписать в виде

$$Af_t^0 - \sum_{s=1}^{\infty} E_{ts} A f_s^0 = 0, \quad \text{т. е.} \quad E' f'_A = f'_A,$$

так что $f'_A \in \overline{\mathfrak{E}}'$. Но тогда, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, в $\mathfrak{E}'$ существует элемент, отстоящий от f'_A меньше чем на ε. Как элемент пространства $\mathfrak{E}'$, он представи́м в виде f'_B, $B \in R_{a^*}(S)$; поэтому, вспоминая определение расстояния в пространстве $\mathfrak{H}'$, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} |Af_k^0 - Bf_k^0|^2 = |f'_A - f'_B|^2 < \varepsilon^2,$$

т. е.

$$B \in W(A; f_1^0, f_2^0, \ldots; \varepsilon).$$

Итак, совокупность S_1 всех элементов $A \in S''$, удовлетворяющих условию (2), содержится в сильнейшем замыкании кольца $R_{a^*}(S)$, а значит, и в его слабом замыкании $R(S)$. С другой стороны, очевидно, $S \subset S_1$, и потому также $R_{a^*}(S) \subset S_1$. Так как кольцо S_1 слабо замкнуто [1]), то отсюда следует, что и $R(S) \subset S_1$. Таким образом, $R(S) = S_1 = \overline{R_{a^*}(S)^3}$, и теорема доказана.

Следствие 1. *Если R — симметричное надкольцо кольца $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, то его слабое, сильное и сильнейшее замыкания совпадают*:

$$\overline{R^1} = \overline{R^2} = \overline{R^3}. \tag{4}$$

Действительно, согласно предыдущей теореме $\overline{R^1} = \overline{R^3}$; с другой стороны, $\overline{R_1} \supset \overline{R^2} \supset \overline{R^3}$.

Следствие 2. *Если M — слабо замкнутое кольцо, содержащее единицу, то $M'' = M$.*

В самом деле, полагая $S = M$, имеем $E_0 = 1$, следовательно, $S_1 = M''$, $M = R(M) = S_1 = M''$.

Следствие 3. *Совокупность всех коммутантов совпадает с совокупностью всех слабо замкнутых колец, содержащих единицу.*

В самом деле, всякое кольцо S' содержит единицу; с другой стороны, всякое слабо замкнутое кольцо M, содержащее единицу, представимо в виде $M = (M')'$.

Следствие 4. *Каково бы ни было множество $S \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$,*

$$S'' = R(S, 1).$$

---

[1]) В силу слабой непрерывности произведений AE_0, E_0A при переменном A.

В самом деле, так как кольцо $R(S, 1)$ содержит единицу, то в силу 1) п. 1 и следствия 2

$$R(S, 1) = (R(S, 1))'' = ((S, 1)')' = (S')' = S''.$$

Следствие 5. *Пусть H — ограниченный эрмитов оператор, $P(\lambda)$ — его спектральная функция*[1]*. Для того чтобы оператор H принадлежал данному слабо замкнутому кольцу M, необходимо и достаточно, чтобы все операторы $P(\lambda)$ при $\lambda < 0$ и $1 - P(\lambda)$ при $\lambda \geqslant 0$ принадлежали кольцу M.*

Доказательство. Достаточность следует из соотношений

$$H = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \lambda \, dE(\lambda) = \lim_{\lambda_k - \lambda_{k-1} \to 0} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k [P(\lambda_k) - P(\lambda_{k-1})],$$

$$P(\lambda_k) - P(\lambda_{k-1}) \in M \quad \text{при} \quad \lambda_k \neq 0,$$

где (α, β) — интервал, содержащий весь спектр оператора A, $\alpha = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = \beta$, 0 — одна из точек λ_j, если $\alpha\beta \leqslant 0$, а предел существует в смысле равномерной топологии в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. Обратно, если $H \in M$, то по свойствам спектральной функции $P(\lambda) \in R(H)''$. Пусть E_0 — главная единица кольца $R(H)$; тогда $H(1 - E_0) = 0$, следовательно,

$$0 = |H(1 - E_0) f|^2 = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \lambda^2 \, d|P(\lambda)(1 - E_0) f|^2,$$

так что и $P(\Delta)(1 - E_0) = 0$, коль скоро интервал $\Delta = (\alpha', \beta')$ не содержит точки 0. Применяя операцию инволюции к обеим частям этого равенства, получаем, что также $(1 - E_0)P(\Delta) = 0$, так что, согласно предыдущей теореме, $P(\Delta) \in R(H) \subset M$. Отсюда при $\alpha' = \lambda > 0$, $\beta' > \beta$ следует, что $1 - P(\lambda) \in M$, и по непрерывности функции $P(\lambda)$ справа это соотношение верно при $\lambda \geqslant 0$; при $\alpha' < \alpha$, $\beta' = \lambda < 0$ получается, что $P(\lambda) \in M$.

Следствие 6. *Если M^P — совокупность всех операторов проектирования из слабо замкнутого кольца M, то $R(M^P) = M$.*

Доказательство. Так как $M^P \subset M$, то $R(M^P) \subset M$, так что $[R(M^P)]^P \subset M^P$. С другой стороны, очевидно, что $[R(M^P)]^P \supset M^P$, так что $[R(M^P)]^P = M^P$. Таким образом, кольца $R(M)^P$ и M содержат одни и те же операторы проектирования, а значит, согласно следствию 5 — одни и те же эрмитовы операторы. Но всякий элемент $A \in M$ представи́м в виде $A = H_1 + iH_2$, где $H_1 = \dfrac{A + A^*}{2}$,

[1] Здесь и в дальнейшем мы считаем спектральные функции непрерывными справа.

$H_2 = \dfrac{A - A^*}{2i}$ — эрмитовы операторы из кольца M. Следовательно, кольца M и $R(M^P)$ совпадают.

Следствие 7. *Совокупность M^U всех унитарных операторов из слабо замкнутого кольца M не пуста тогда и только тогда, когда M содержит единицу, и в этом случае $R(M^U) = M$.*

Доказательство. Если $U \in M^U$, то $1 = U^*U \in M$, так что M содержит единицу. Обратно, если M содержит единицу, то из $P \in M^P$ следует $2P - 1 \in M^U$. В самом деле, $2P - 1 \in M$, и, в силу соотношения $(2P-1)^*(2P-1) = (2P-1)(2p-1)^* = 4P^2 - 4P + 1 = 1$, $2P - 1$ есть унитарный оператор. Отсюда

$$P = \frac{1}{2}\left[(2P-1)+1\right] \in R(M^U),\ \ M^P \subset R(M^U),\ \ M = R(M^P) \subset R(M^U).$$

С другой стороны, из $M^U \subset M$ следует $R(M^U) \subset M$, так что $R(M^U) = M$.

Следствие 8. *Главная единица E_0 слабо замкнутого кольца M принадлежит $M \cap M'$.*

В самом деле, $E_0 \in M''$ и $A \in E_0$ удовлетворяет условию (2), так что $E_0 \in M$ согласно предыдущей теореме; кроме того, $E_0 \in M'$ согласно предыдущей лемме.

3. Центр. Напомним (см. п. 3 § 7), что *центром* Z_M кольца M называется совокупность всех элементов M, перестановочных с любым элементом из M. Очевидно, $Z_M = M \cap M'$, так что Z_M — кольцо, и притом коммутативное. Если кольцо M содержит единицу, то Z_M не пусто, именно, содержит кольцо всех произведений $\alpha 1$, где α — скаляры. Это последнее кольцо мы будем называть *кольцом скаляров* и обозначать $(\alpha 1)$.

Если M — слабо замкнутое кольцо, то $Z_M = M \cap M'$ есть также слабо замкнутое кольцо. Слабо замкнутое кольцо M называется *фактором*, если Z_M состоит только из $(\alpha 1)$, т. е. если $M \cap M' = (\alpha 1)$. Примером фактора является кольцо $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. В самом деле, так как $(\alpha 1)' = \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, то в силу следствия 2 $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})' = (\alpha 1)'' = (\alpha 1)$, $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{B}(\mathfrak{H}') = (\alpha 1)$. Другим примером фактора является кольцо скаляров $(\alpha 1)$. В дальнейшем будут рассмотрены менее тривиальные примеры факторов. Если M — фактор, то M' — также фактор, ибо равенство $M \cap M' = (\alpha 1)$ можно написать в виде $M'' \cap M' = (\alpha 1)$.

Другим крайним случаем является коммутативное кольцо. Если M — коммутативное кольцо, то $Z_M = M$. Обратно, если $Z_M = M$, то кольцо M коммутативное, ибо совпадает с коммутативным кольцом Z_M.

4. Факторизация. *Объединением* $R(M_1, M_2, \ldots)$ слабо замкнутых колец [1]) M_1. M_2, … называется минимальное слабо замкнутое кольцо,

[1]) Эта совокупность колец не предполагается счетной.

порожденное теоретико-множественной суммой $M_1 \cup M_2 \cup \ldots$. Легко видеть, что

$$(R(M_1, M_2, \ldots))' = M_1' \cap M_2' \cap \ldots, \tag{1}$$

и если кольцо $R(M_1, M_2, \ldots)$ содержит единицу, то

$$R(M_1, M_2, \ldots) = (M_1' \cap M_2' \cap \ldots)'. \tag{2}$$

Действительно, согласно соотношению 1) п. 1 $(R(M_1, M_2, \ldots))' = (M_1 \cup M_2 \cup \ldots)' = M_1' \cap M_2' \cap \ldots$. Соотношение же (2) получается в силу следствия 2 из первого применением к обеим частям операции $'$.

Совокупность M_1, M_2, ... отличных от (0) слабо замкнутых колец называется *факторизацией*, если элементы разных колец этой совокупности перестановочны и их объединение $R(M_1, M_2, \ldots)$ совпадает с кольцом $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. Отдельные кольца M_1, M_2, ... факторизации называются ее *элементами*. Легко видеть, что элементы факторизации — факторы. В самом деле, если $\{M_1, M_2, \ldots\}$ — факторизация, то $M_i \subset M_k'$, $i \neq k$, следовательно, в силу (1),

$$M_i \cap M_i' \subset M_i' \bigcap_{k \neq i} M_k' = \bigcap_i M_i' = (R(M_1, M_2, \ldots))' = (\alpha 1).$$

Если поэтому E_0 — главная единица кольца M_i, то согласно следствию 8 $E_0 = \alpha 1$, так что $\alpha = 1$ или $\alpha = 0$. Но в последнем случае $E_0 = 0$, и для любого оператора $A \in M_i$ будет $A = E_0 A = 0$, $M_i = (0)$, что противоречит условию. Поэтому $\alpha = 1$, кольцо M_i содержит единицу и $M_i \cap M_i' = (\alpha 1)$. Обратно, *если* M — *фактор, то* $\{M, M'\}$ — *факторизация*, ибо

$$\begin{aligned} R(M, M') = (R(M, M'))'' = (M \cup M')'' = \\ = (M' \cap M'')' = (M' \cap M)' = (\alpha 1)' = \mathfrak{B}(\mathfrak{H}). \end{aligned}$$

Факторизация вида $\{M, M'\}$ называется *парной*.

Мюррей и фон Нейман [1] показали, что не всякая факторизация $\{M_1, M_2\}$ является парной, и нашли некоторые достаточные условия, при соблюдении которых можно утверждать, что $\{M_1, M_2\}$ — парная факторизация.

§ 35. Относительная эквивалентность

1. Операторы и подпространства, присоединенные к кольцу. Пусть M — слабо замкнутое кольцо, содержащее единицу, $\mathfrak{S}$ — подмножество пространства $\mathfrak{H}$, а R — оператор в $\mathfrak{H}$ (не обязательно ограниченный). Будем говорить, что множество $\mathfrak{S}$ и оператор R *присоединены к кольцу* M, и писать $\mathfrak{S}\eta M$, $R\eta M$, если соответственно множество $\mathfrak{S}$ инвариантно по отношению к любому унитарному оператору из M', а оператор R перестановочен с любым таким оператором.

Если $R \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, т. е. оператор R ограничен, то соотношение $R\eta M$ эквивалентно соотношению $R \in M$, ибо соотношение $R\eta M$ означает тогда, что $R \in (M'^U)' = (M')' = M$. Если же R — замкнутый линейный оператор с областью определения, плотной в $\mathfrak{H}$, и $R = WH$ — его каноническое разложение (см. II п. 1 § 21), то в силу единственности этого разложения равенство $U^*RU = U^*WUU^*HU$ есть каноническое разложение оператора U^*RU, следовательно, равенство $U^*RU = R$ означает, что $U^*WU = W$, $U^*HU = H$, т. е. что $W \in M$, $H\eta M$.

Далее, если множество $\mathfrak{S}$ линейно и замкнуто, то соотношение $\mathfrak{S}\eta M$ эквивалентно соотношению $P_{\mathfrak{S}} \in M$, где $P_{\mathfrak{S}}$ — оператор проектирования на $\mathfrak{S}$. Действительно, соотношение $\mathfrak{S}\eta M$ означает, что $U\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}$, каков бы ни был унитарный оператор $U \in M'$. Подставляя сюда U^* вместо U, имеем $U^*\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}$, откуда $\mathfrak{S} \subset U\mathfrak{S}$, так что $\mathfrak{S} = U\mathfrak{S}$. Но тогда также $U(\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{S}) = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{S}$, и потому

$$P_{\mathfrak{S}}Ux = Ux = UP_{\mathfrak{S}}x \quad \text{при} \quad x \in \mathfrak{S},$$
$$P_{\mathfrak{S}}Ux = 0 = UP_{\mathfrak{S}}x \quad \text{при} \quad x \in \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{S}.$$

Следовательно, $P_{\mathfrak{S}}U = UP_{\mathfrak{S}}$ для всех $U \in M'$. Это означает, что $P_{\mathfrak{S}}\eta M$, $P_{\mathfrak{S}} \in M$.

Таким образом, для замкнутого подпространства $\mathfrak{M}$ соотношение $\mathfrak{M}\eta M$ означает, что оператор $P_{\mathfrak{M}}$ перестановочен со всеми операторами из M', т. е. что $\mathfrak{M}$ приводит все операторы из M'.

Простой пример замкнутого подпространства, присоединенного к кольцу M, мы получим, если, взяв фиксированный элемент $f \in \mathfrak{H}$, применим к нему все операторы $A \in M'$ и возьмем затем замыкание по норме в $\mathfrak{H}$ совокупности $\mathfrak{S}_f$ всех таких элементов Af. В самом деле, если U — унитарный оператор, принадлежащий M', то $UA \in M'$, следовательно, $UAf \in \mathfrak{S}_f$. Отсюда $U\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}_f$, $U\overline{\mathfrak{S}}_f \subset \overline{\mathfrak{S}}_f$.

Введем обозначение $\overline{\mathfrak{S}}_f = \mathfrak{M}_f^{M'}$, $P_{\overline{\mathfrak{S}}_f} = E_f^{M'}$. Аналогично определяются $\mathfrak{M}_f^M$ и E_f^M; они получаются, если M заменить фактором M', а значит, M' — фактором $M'' = M$. Очевидно, $f \in \mathfrak{M}_f^{M'}$, ибо достаточно положить $A = 1$. Таким образом, $\mathfrak{M}_f^{M'}$ — минимальное среди замкнутых подпространств, которые приводят все операторы из M' и содержат f. Отсюда следует, что *если $\mathfrak{M}$ — замкнутое подпространство, $\mathfrak{M}\eta M$ и $f \in \mathfrak{M}$, то также $\mathfrak{M}_f^{M'} \subset \mathfrak{M}$*. Аналогичное предложение имеет место для $\mathfrak{M}_f^M$ и M'.

2. Основная лемма. В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма. *Если M — фактор и $A \in M$, $A' \in M'$, то равенство $AA' = 0$ возможно, лишь когда $A = 0$ или $A' = 0$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}$ — множество всех элементов $f \in \mathfrak{H}$, для которых $AXf = 0$, каков бы ни был оператор $X \in M$. В частности, $Af = 0$ при $f \in \mathfrak{M}$. Очевидно, $\mathfrak{M}$ — замкнутое подпространство в $\mathfrak{H}$.

Пусть P — оператор проектирования на $\mathfrak{M}$; докажем, что P перестановочен со всеми элементами из M и из M', т. е. что $\mathfrak{M}$ приводит все операторы из M и из M'.

Так как кольца M и M' вместе с каждым A содержат и A^*, то достаточно показать, что подпространство $\mathfrak{M}$ инвариантно относительно всех операторов из M и из M'. Пусть $f \in \mathfrak{M}$; для любого оператора $B \in M$ также $XB \in M$, следовательно, $AXBf = 0$; это означает, что $Bf \in \mathfrak{M}$, так что подпространство $\mathfrak{M}$ инвариантно относительно всех операторов из M. Если же $f \in \mathfrak{M}$, $B \in M'$, то, так как оператор B перестановочен с операторами A и X, $AXBf = BAXf = 0$. Отсюда заключаем, что $\mathfrak{M}$ инвариантно также относительно всех операторов из M'. Но тогда $P \in M \cap M' = (\alpha 1)$, так что либо $P = 0$, либо $P = 1$, т. е. либо $\mathfrak{M} = (0)$, либо $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$.

Так как $AA' = 0$, то при произвольных $f \in \mathfrak{H}$, $X \in M$

$$AXA'f = AA'Xf = 0,$$

следовательно, $A'f \in \mathfrak{M}$. Отсюда в первом случае $A'f = 0$, каков бы ни был элемент $f \in \mathfrak{H}$, т. е. $A' = 0$. Далее, при произвольных $g \in \mathfrak{H}$, $f \in \mathfrak{M}$

$$(A^*g, f) = (f, Af) = 0,$$

так что $A^*g \perp \mathfrak{M}$. Отсюда во втором случае $A^*g = 0$, $A^* = 0$, а значит, и $A = 0$.

3. Определение относительной эквивалентности. В дальнейшем мы всюду в этом параграфе будем предполагать, что M — фактор.

Замкнутые подпространства $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ называются *эквивалентными относительно* M, если в кольце M существует частично изометрический оператор U с начальной областью $\mathfrak{M}$ и конечной $\mathfrak{N}$ (см. п. 14 § 5). Мы будем в этом случае писать $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}(\ldots M)$, а также $P_{\mathfrak{M}} \sim P_{\mathfrak{M}}(\ldots M)$. Если $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}(\ldots M)$, то, очевидно, $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ имеют одинаковую размерность. Обратное a priori неверно, ибо нужно не просто изометрически отобразить $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{N}$, а произвести это отображение при помощи оператора из кольца M. Из $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}(\ldots M)$ следует, что $\mathfrak{M}\eta M$ и $\mathfrak{N}\eta M$, ибо $P_{\mathfrak{M}} = U^*U$, $P_{\mathfrak{N}} = UU^*$, так что понятие эквивалентности имеет смысл только для подпространств, присоединенных к кольцу M. Далее, очевидно, что если $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}\eta M$, то $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}$; $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$, коль скоро $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{M}$; из $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{P}$ следует $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}$. Наконец, из соотношений $\mathfrak{M}_\alpha \sim \mathfrak{N}_\alpha$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{M}_\alpha \perp \mathfrak{M}_\beta$, $\mathfrak{N}_\alpha \perp \mathfrak{N}_\beta$ при $\alpha \neq \beta$ следует, что $\bigoplus\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathfrak{M}_\alpha \sim \bigoplus\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathfrak{N}_\alpha$, ибо если U_α — частично изометрический оператор из кольца M с начальной областью $\mathfrak{M}_\alpha$ и конечной $\mathfrak{N}_\alpha$, то $U = \sum\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} U_\alpha$ — частично изометрический оператор из кольца M с начальной областью $\bigoplus\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathfrak{M}_\alpha$ и конечной $\bigoplus\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathfrak{N}_\alpha$.

Примерами замкнутых подпространств, эквивалентных относительно M, являются замыкания областей изменения [1] $\mathfrak{R}(X)$, $\mathfrak{R}(X^*)$ операторов X и X^*, где X — любой замкнутый линейный оператор с плотной в $\mathfrak{H}$ областью определения, присоединенный к кольцу M. В самом деле, если $X = WH$ —каноническое разложение оператора X, то W — частично изометрический оператор из кольца M с начальной областью $\overline{\mathfrak{R}(X^*)}$ и конечной $\overline{\mathfrak{R}(X)}$ (см. п. 1 и II п. 1 § 21).

4. Сравнение замкнутых подпространств. Мы воспользуемся теперь понятием эквивалентности для того, чтобы упорядочить множество всех замкнутых подпространств $\mathfrak{M}\eta M$.

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ —два замкнутых подпространства, присоединенных к фактору M; будем говорить, что подпространство $\mathfrak{M}$ *не больше* подпространства $\mathfrak{N}$ относительно M, и писать $\mathfrak{M} \lesssim \mathfrak{N}(\ldots M)$ (или $P_{\mathfrak{M}} \lesssim P_{\mathfrak{N}}(\ldots M)$), если $\mathfrak{M}$ эквивалентно части подпространства $\mathfrak{N}$. Будем говорить, что подпространство $\mathfrak{M}$ *меньше* подпространства $\mathfrak{N}$, и писать $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}(\ldots M)$, $P_{\mathfrak{M}} < P_{\mathfrak{N}}(\ldots M)$, если $\mathfrak{M} \lesssim \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$ не эквивалентно $\mathfrak{N}$. В дальнейшем термин «подпространство» будет обозначать замкнутое подпространство.

I. *Каковы бы ни были подпространства $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, присоединенные к фактору M, всегда либо $\mathfrak{M} \lesssim \mathfrak{N}(\ldots M)$, либо $\mathfrak{N} \lesssim \mathfrak{M}(\ldots M)$.*

Доказательство. Мы можем, очевидно, предполагать, что $\mathfrak{M} \neq (0)$ и $\mathfrak{N} \neq (0)$. Докажем, что в этом случае в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ существуют отличные от (0) подпространства $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{N}_1$, также присоединенные к кольцу M и эквивалентные относительно M. Для этой цели выберем в $\mathfrak{M}$ элемент $f \neq 0$. Тогда $E_f^M \in M'$, $E_f^M \neq 0$; так как, кроме того, $P_{\mathfrak{N}} \in M$, $P_{\mathfrak{N}} \neq 0$, то согласно лемме п. 2 также $P_{\mathfrak{N}}E_f^M \neq 0$. Но $P_{\mathfrak{N}}E_f^M$ есть оператор проектирования на $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_f^M$, следовательно, $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_f^M \neq (0)$. Выберем в пространстве $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_f^M$ элемент g, по норме равный единице. Так как $g \in \mathfrak{M}_f^M$, то в кольце M существует оператор A такой, что $|g - Af| < 1$, следовательно, и подавно $|P_{\mathfrak{N}}g - P_{\mathfrak{N}}Af| < 1$. Но $P_{\mathfrak{N}}g = g$, $P_{\mathfrak{M}}f = f$, поэтому последнее неравенство можно переписать в виде $|g - P_{\mathfrak{N}}AP_{\mathfrak{M}}f| < 1$. Это неравенство показывает, что оператор $X = P_{\mathfrak{N}}AP_{\mathfrak{M}} \neq 0$, ибо в противном случае было бы $|g| < 1$, в то время, как по условию $|g| = 1$. Положим $\mathfrak{M}_1 = \overline{\mathfrak{R}(X^*)}$, $\mathfrak{N}_1 = \overline{\mathfrak{R}(X)}$; тогда $\mathfrak{M}_1 \neq (0)$, $\mathfrak{N}_1 \neq (0)$ и $\mathfrak{M}_1 = \overline{\mathfrak{R}(P_{\mathfrak{M}}A^*P_{\mathfrak{N}})} \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}_1 = \overline{\mathfrak{R}(P_{\mathfrak{N}}AP_{\mathfrak{M}})} \subset \mathfrak{N}$. Так как $X = P_{\mathfrak{N}}AP_{\mathfrak{M}} \in M$, то подпространства $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{N}_1$ эквивалентны относительно M (см. п. 3).

В силу соотношений

$$P_{\mathfrak{M}\ominus\mathfrak{M}_1} = P_{\mathfrak{M}} - P_{\mathfrak{M}_1} \in M, \quad P_{\mathfrak{N}\ominus\mathfrak{N}_1} = P_{\mathfrak{N}} - P_{\mathfrak{N}_1} \in M$$

[1] Нам удобно изменить в этой главе обозначения и писать $\mathfrak{D}(X)$ и $\mathfrak{R}(X)$ вместо $\mathfrak{D}_X$ и $\mathfrak{R}_X$.

подпространства $\mathfrak{M} \ominus \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N} \ominus \mathfrak{N}_1$ также присоединены к кольцу M. Если они еще оба отличны от (0), то, применяя к ним предыдущий результат, получим, что в $\mathfrak{M} \ominus \mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{N} \ominus \mathfrak{N}_1$ существуют отличные от (0) подпространства $\mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{N}_2$, эквивалентные относительно M. При этом, очевидно, $\mathfrak{M}_1 \perp \mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{N}_1 \perp \mathfrak{N}_2$. Повторяя это рассуждение и применяя лемму Цорна, мы можем построить отличные от (0) подпространства $\mathfrak{M}_\alpha$, $\mathfrak{N}_\alpha$ такие, что $\mathfrak{M}_\alpha \sim \mathfrak{N}_\alpha(\ldots M)$ и либо $\bigoplus\limits_\alpha \mathfrak{M}_\alpha = \mathfrak{M}$, либо $\bigoplus\limits_\alpha \mathfrak{N}_\alpha = \mathfrak{N}$. Так как $\bigoplus\limits_\alpha \mathfrak{M}_\alpha \sim \bigoplus\limits_\alpha \mathfrak{N}_\alpha(\ldots M)$, то в первом случае $\mathfrak{M} \lesssim \mathfrak{N}$, а во втором $\mathfrak{N} \lesssim \mathfrak{M}$.

II. *Если* $\mathfrak{M} \lesssim \mathfrak{N}$ *и* $\mathfrak{N} \lesssim \mathfrak{M}$, *то* $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$.

Доказательство этого предложения аналогично доказательству теоремы Бернштейна о сравнении мощности. Пусть

$$\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}, \tag{1}$$

$$\mathfrak{N} \sim \mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}, \tag{2}$$

и пусть $U \in M$ — частично изометрический оператор с начальной областью $\mathfrak{N}$ и конечной $\mathfrak{M}'$. Он изометрически отображает подпространство $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$ на некоторое подпространство $\mathfrak{M}'' \subset \mathfrak{M}'$. Поэтому $UP_{\mathfrak{N}'}$ — частично изометрический оператор из кольца M с начальной областью $\mathfrak{N}'$ и конечной $\mathfrak{M}''$, так что $\mathfrak{N}' \sim \mathfrak{M}''$. Отсюда и из (1) следует, что $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}''$. Пусть V — частично изометрический оператор из кольца M с начальной областью $\mathfrak{M}$ и конечной $\mathfrak{M}''$; положим $\mathfrak{M}^{(2\nu)} = V^\nu \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^{(2\nu+1)} = V^\nu \mathfrak{M}'$ (так что $\mathfrak{M}^{(0)} = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^{(1)} = \mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}^{(2)} = \mathfrak{M}''$). Легко видеть, что $\mathfrak{M}^{(0)} \supset \mathfrak{M}^{(1)} \supset \mathfrak{M}^{(2)} \supset \ldots$ и что $\mathfrak{M}^{(\nu)}\, \eta M$, $\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots$; кроме того, оператор V изометрически отображает пространство $\mathfrak{M}^{(p)}$ на пространство $\mathfrak{M}^{(p+2)}$, пространство $\mathfrak{M}^{(p+1)}$ на пространство $\mathfrak{M}^{(p+3)}$ и, следовательно, пространство $\mathfrak{M}^{(p)} \ominus \mathfrak{M}^{(p+1)}$ на пространство $\mathfrak{M}^{(p+2)} \ominus \mathfrak{M}^{(p+3)}$. Отсюда, как и выше, следует, что $\mathfrak{M}^{(p)} \ominus \mathfrak{M}^{(p+1)} \sim \mathfrak{M}^{(p+2)} \ominus \mathfrak{M}^{(p+3)}(\ldots M)$. Поэтому подпространства на нечетных местах в равенстве

$$\mathfrak{M}^{(0)} = [\mathfrak{M}^{(0)} \ominus \mathfrak{M}^{(1)}] \oplus [\mathfrak{M}^{(1)} \ominus \mathfrak{M}^{(2)}] \oplus [\mathfrak{M}^{(2)} \ominus \mathfrak{M}^{(3)}] \oplus \ldots \\ \ldots \oplus \mathfrak{M}^{(0)} \cap \mathfrak{M}^{(1)} \cap \mathfrak{M}^{(2)} \cap \ldots \tag{3}$$

эквивалентны подпространствам на четных местах в равенстве

$$\mathfrak{M}^{(1)} = [\mathfrak{M}^{(1)} \ominus \mathfrak{M}^{(2)}] \oplus [\mathfrak{M}^{(2)} \ominus \mathfrak{M}^{(3)}] \oplus [\mathfrak{M}^{(3)} \ominus \mathfrak{M}^{(4)}] \oplus \ldots \\ \ldots \oplus \mathfrak{M}^{(1)} \cap \mathfrak{M}^{(2)} \cap \mathfrak{M}^{(3)} \cap \ldots, \tag{4}$$

подпространства же на четных местах в равенстве (3) равны, а следовательно, и эквивалентны подпространствам на нечетных местах в равенстве (4). Кроме того, $\mathfrak{M}^{(0)} \cap \mathfrak{M}^{(1)} \cap \mathfrak{M}^{(2)} \cap \ldots = \mathfrak{M}^{(1)} \cap \mathfrak{M}^{(2)} \cap \cap \mathfrak{M}^{(3)} \cap \ldots$. Следовательно, $\mathfrak{M}^{(0)} \sim \mathfrak{M}^{(1)}$, т. е. $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}'$. С другой стороны, в силу (2) $\mathfrak{M}' \sim \mathfrak{N}$. Поэтому $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$.

III. *Для всякой пары подпространств* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{N}$, *присоединенных к фактору* M, *имеет место одно и только одно из трех соотношений*:

$$\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}(\ldots M), \quad \mathfrak{M} < \mathfrak{N}(\ldots M), \quad \mathfrak{M} > \mathfrak{N}(\ldots M).$$

Действительно, в силу предложения I либо $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$, либо $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$. Если имеют место оба соотношения, то в силу предложения II $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$. Если же имеет место только первое или только второе, то $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$ или соответственно $\mathfrak{N} < \mathfrak{M}$.

IV. *Если* $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$, *то соотношения* $\mathfrak{M} < \mathfrak{P}$, $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}$, $\mathfrak{M} > \mathfrak{P}$ *эквивалентны соответственно соотношениям* $\mathfrak{N} < \mathfrak{P}$, $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{P}$, $\mathfrak{N} > \mathfrak{P}$.

В самом деле, соотношение $\mathfrak{M} \lesssim \mathfrak{P}$ означает, что $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$. Но тогда также $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$, т. е. $\mathfrak{N} \lesssim \mathfrak{P}$. Если при этом $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{P}$, то и $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}$; поэтому из соотношения $\mathfrak{M} < \mathfrak{P}$ следует соотношение $\mathfrak{N} < \mathfrak{P}$. Далее, соотношение $\mathfrak{P} \lesssim \mathfrak{M}$ означает, что $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$; в силу соотношения $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{M}$ отсюда следует, что в $\mathfrak{N}$ существует подпространство $\mathfrak{N}'$, эквивалентное подпространству$\mathfrak{M}'$. Но тогда $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$, т. е. $\mathfrak{P} \lesssim \mathfrak{N}$. Снова, как и выше, отсюда заключаем, что соотношение $\mathfrak{P} < \mathfrak{N}$ эквивалентно соотношению $\mathfrak{P} < \mathfrak{M}$.

V. *Если* $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} < \mathfrak{P}$, *то* $\mathfrak{M} < \mathfrak{P}$.

Из соотношений $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$ в силу предложения IV вытекает, что $\mathfrak{M} < \mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$, т. е. $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}'' \subset \mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$. Таким образом, $\mathfrak{M} \lesssim \mathfrak{P}$; если бы было $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}$, то в силу предложения IV было бы $\mathfrak{P} < \mathfrak{N}$, что противоречит условию. Поэтому $\mathfrak{M} < \mathfrak{P}$.

Отметим еще следующие простые предложения.

VI. а) *Если* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} \eta M$ *и* $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$, *то* $\mathfrak{M} \lesssim \mathfrak{N}$;

б) $(0) \leqslant \mathfrak{M}$, *причем* $(0) \sim \mathfrak{M}$, *лишь когда* $\mathfrak{M} = (0)$;

в) $\mathfrak{M} \lesssim \mathfrak{H}$.

VII. *Если* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} \eta M$, *то* [1]) $\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N} \eta M$ *и*

$$(\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N}) \ominus \mathfrak{N} \lesssim \mathfrak{M}. \tag{5}$$

Предложение VI очевидно; для доказательства предложения VII заметим, что пространство $(\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N}) \ominus \mathfrak{N}$ есть замыкание совокупности всех элементов вида

$$P_{\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}}(f+g) = P_{\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}} f = P_{\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}} P_{\mathfrak{M}} h, \quad f \in \mathfrak{M}, \quad g \in \mathfrak{N}, \quad h \in \mathfrak{H}.$$

Таким образом,

$$(\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N}) \ominus \mathfrak{N} = \overline{\mathfrak{R}(P_{\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}} P_{\mathfrak{M}})} \sim \overline{\mathfrak{R}((P_{\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}} P_{\mathfrak{M}})^*)} = \overline{\mathfrak{R}(P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}})} \subset \mathfrak{M},$$

[1]) В отличие от обозначения в § 25 мы всюду в этой главе через $\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N}$ будем обозначать минимальное замкнутое подпространство, содержащее $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$; это будет, очевидно, совокупность всех элементов $f+g$, $f \in \mathfrak{M}$, $g \in \mathfrak{N}$, и их сильных пределов.

откуда и следует соотношение (5). Таким образом, $(\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N}) \ominus \mathfrak{N} \eta M$, следовательно, также $\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N} \eta M$.

5. Конечные и бесконечные подпространства. Подпространство $\mathfrak{M}$, присоединенное к фактору M, называется *бесконечным*, если оно эквивалентно некоторой своей правильной части, и *конечным* — в противном случае. Оператор проектирования $P \in M$ называется *конечным*, если $P\mathfrak{H}$ конечно, и *бесконечным*, если $P\mathfrak{H}$ бесконечно.

Очевидно, подпространство (0) конечно. Далее,

I. *Если $\mathfrak{M} \lesssim \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}$ конечно, то $\mathfrak{M}$ также конечно.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$ и $U \in M$ — частично изометрический оператор с начальной областью $\mathfrak{M}$ и конечной $\mathfrak{N}'$. Если подпространство $\mathfrak{M}$ бесконечно, то $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}' \subsetneqq \mathfrak{M}$; поэтому, полагая $U\mathfrak{M}' = \mathfrak{N}''$, имеем $\mathfrak{N}'' \sim \mathfrak{M}' \sim \mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}'' \subsetneqq \mathfrak{N}'$. Отсюда

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}' \oplus [\mathfrak{N} \ominus \mathfrak{N}'] \sim \mathfrak{N}'' \oplus [\mathfrak{N} \ominus \mathfrak{N}'] \subsetneqq \mathfrak{N};$$

следовательно, $\mathfrak{N}$ бесконечно, в противоречие с условием.

Таким образом, либо все подпространства $\mathfrak{M} \eta M$ (в частности, все пространство $\mathfrak{H}$) конечны, либо существуют бесконечные подпространства $\mathfrak{M} \eta M$, и тогда все пространство $\mathfrak{H}$ бесконечно. Всякое же конечное подпространство меньше любого бесконечного.

Для дальнейшего изучения подпространств ηM воспользуемся приемом, аналогичным откладыванию равных отрезков.

II. *Если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — подпространства, присоединенные к фактору M, то подпространство $\mathfrak{M}$ можно представить в виде*

$$\mathfrak{M} = \left(\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathfrak{N}_\alpha \right) \oplus \mathfrak{P}, \tag{1}$$

где $\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов, $\mathfrak{N}_\alpha \sim \mathfrak{N}$ для всех $\alpha \in \mathfrak{A}$ и $\mathfrak{P} < \mathfrak{N}$.

Доказательство. Если $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$, то мы получаем (1), положив $\mathfrak{A} = \varnothing$ и $\mathfrak{P} = \mathfrak{M}$; если же $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$, то мы получим (1), положив $\mathfrak{A} = \{1\}$, $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{P} = (0)$. Поэтому будем в дальнейшем считать, что $\mathfrak{N} < \mathfrak{M}$. Тогда $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{N}_1 \subsetneqq \mathfrak{M}$; если $\mathfrak{N} > \mathfrak{M} \ominus \mathfrak{N}_1$, то представление $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_1 \oplus [\mathfrak{M} \ominus \mathfrak{R}_1]$ уже является искомым ($\mathfrak{A} = \{1\}$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{M} \ominus \mathfrak{N}_1$). В противном случае $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{M} \ominus \mathfrak{N}_1$. Применяя лемму Цорна, мы заключаем, что существует максимальная система $\{\mathfrak{N}_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ взаимно ортогональных подпространств $\mathfrak{N}_\alpha$ в $\mathfrak{M}$, эквивалентных подпространству $\mathfrak{N}$. Полагая $\mathfrak{P} = \mathfrak{M} - \bigoplus\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathfrak{N}_\alpha$ и учитывая максимальность системы $\{\mathfrak{N}_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$, имеем $\mathfrak{P} < \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M} = \left(\bigoplus\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathfrak{N}_\alpha \right) \oplus \mathfrak{P}$.

III. *Если множество $\mathfrak{A}$ бесконечно, то в равенстве* (1) *можно положить* $\mathfrak{P} = (0)$.

Действительно, пусть $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} - \{1\}$; так как множества $\mathfrak{A}'$ и $\mathfrak{A}$ имеют одинаковую мощность, то

$$\mathfrak{M} = \Big(\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathfrak{N}_\alpha\Big) \oplus \mathfrak{P} \sim \Big(\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}'} \mathfrak{N}_\alpha\Big) \oplus \mathfrak{P} \lesssim \Big(\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}'} \mathfrak{N}_\alpha\Big) \oplus \mathfrak{N}_1 \lesssim \mathfrak{M}.$$

Отсюда $\mathfrak{M} \sim \oplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathfrak{N}_\alpha$; пусть U — частично изометрический оператор из кольца M с начальной областью $\mathfrak{M}$ и конечной $\bigoplus\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathfrak{N}_\alpha$. Полагая $\mathfrak{N}_\alpha = U^*\mathfrak{N}_\alpha$, имеем $\mathfrak{N}'_\alpha \perp \mathfrak{N}'_\beta$ при $\alpha \neq \beta$, $\mathfrak{N}'_\alpha \sim \mathfrak{N}_\alpha \sim \mathfrak{N}(\ldots M)$,

$$\mathfrak{M} = \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathfrak{N}'_\alpha.$$

IV. *Всякое бесконечное подпространство $\mathfrak{M}$ можно представить в виде*

$$\mathfrak{M} = \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathfrak{N}_\alpha,$$

где подпространства $\mathfrak{N}_\alpha \neq (0)$ и эквивалентны между собой, а множество $\mathfrak{A}$ бесконечно.

Доказательство. По условию $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}' \subsetneqq \mathfrak{M}$; пусть U — частично изометрический оператор из кольца M с начальной областью $\mathfrak{M}$ и конечной $\mathfrak{M}'$. Положим

$$\mathfrak{M}^{(n)} = U^n\mathfrak{M}; \quad \mathfrak{N}'_n = \mathfrak{M}^{(n)} \ominus \mathfrak{M}^{(n+1)}, \quad n = 0, 1, 2, \ \ldots.$$

Тогда

$$\mathfrak{M}^{(n+1)} \subsetneqq \mathfrak{M}^{(n)}, \quad \mathfrak{N}'_{n+1} = U\mathfrak{N}'_n;$$

следовательно, $\mathfrak{N}'_n \neq (0)$, все подпространства $\mathfrak{N}'_n$ эквивалентны между собой и

$$\mathfrak{M} = \left(\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathfrak{N}'_n\right) \oplus \mathfrak{M}^{(0)} \cap \mathfrak{M}^{(1)} \cap \mathfrak{M}^{(2)} \cap \ldots.$$

Применяя предложение II к подпространствам $\mathfrak{M}^{(0)} \cap \mathfrak{M}^{(1)} \cap \mathfrak{M}^{(2)} \cap \ldots$ и $\mathfrak{N}'_0$ (вместо $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$), получаем, что

$$\mathfrak{M}^{(0)} \cap \mathfrak{M}^{(1)} \mathfrak{M}^{(2)} \cap \ldots = \Big(\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}'} \mathfrak{N}'_\alpha\Big) \oplus \mathfrak{P}', \quad \mathfrak{P}' < \mathfrak{N}'_0,$$

и

$$\mathfrak{M} = \Big(\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathfrak{N}'_\alpha\Big) \oplus \mathfrak{P}', \quad \mathfrak{A} = \{0, 1, 2, 3, \ \ldots\} \cup \mathfrak{A}'.$$

Так как множество $\mathfrak{A}$ бесконечно, то согласно предложению III мы имеем

$$\mathfrak{M} = \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathfrak{N}_\alpha, \quad \text{где} \quad \mathfrak{N}_\alpha \sim \mathfrak{N}_\beta \quad \text{для всех} \quad \alpha, \beta \in \mathfrak{A}.$$

V. *Во всяком бесконечном подпространстве $\mathfrak{M}$ имеется такое подпространство $\mathfrak{N}$, что $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N} \sim \mathfrak{M} \ominus \mathfrak{N}$.*

Доказательство. Разбивая множество $\mathfrak{A}$ в предложении IV на два бесконечных подмножества $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ одинаковой мощности и полагая $\mathfrak{N} = \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}_1} \mathfrak{N}_\alpha$, имеем

$$\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathfrak{N}_\alpha \sim \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}_1} \mathfrak{N}_\alpha \sim \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}_2} \mathfrak{N}_\alpha, \quad \text{т. е.} \quad \mathfrak{M} \sim \mathfrak{N} \sim \mathfrak{M} \ominus \mathfrak{N}.$$

VI. *Если $\mathfrak{H}$ сепарабельно, то все бесконечные подпространства эквивалентны между собой.*

Доказательство. Пусть подпространства $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$ бесконечны; представляя $\mathfrak{M}$ согласно предложению IV, имеем $\mathfrak{M} = \bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}} \mathfrak{N}_\alpha$, где множество $\mathfrak{A}$ счетно. Применяя, далее, предложение II к подпространствам $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{N}_\alpha$, имеем

$$\mathfrak{M}' = \Big(\bigoplus_{\alpha\in\mathfrak{A}'} \mathfrak{N}_\alpha\Big) \oplus \mathfrak{P}',$$

где множество $\mathfrak{A}'$ конечно (возможно пусто) или счетно и $\mathfrak{P}' < \mathfrak{N}_\alpha$. Если множество $\mathfrak{A}'$ конечно, то очевидно, что $\mathfrak{M}' \lesssim \mathfrak{M}$, если же $\mathfrak{A}'$ счетно, то можно считать $\mathfrak{P}' = (0)$, так что $\mathfrak{M}' \sim \mathfrak{M}$. Итак, в любом из этих случаев $\mathfrak{M}' \lesssim \mathfrak{M}$. Меняя ролями $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}'$, заключаем, что $\mathfrak{M}' \sim \mathfrak{M}$.

VII. *Прямая сумма конечного числа конечных подпространств конечна.*

Доказательство этого предложения разобьем на следующие пункты.

1°. *Если замкнуты подпространства $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}\eta M$ и если $\mathfrak{M} \perp \mathfrak{N}$, $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$, то $\mathfrak{P}$ можно представить в виде $\mathfrak{P} = \mathfrak{M}' \oplus \mathfrak{N}' \oplus \mathfrak{P}'$, где $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{P}'$ — взаимно ортогональные и присоединенные к кольцу M подпространства, $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$, а $\mathfrak{P}'$ — область изменения оператора $1 + A$, где A — присоединенный к кольцу M замкнутый линейный оператор с областью определения, ортогональной к $\mathfrak{M}'$, и областью изменения, ортогональной к $\mathfrak{N}'$, такой, что равенство $Af = 0$ возможно только при $f = 0$, причем $\mathfrak{P}' \sim \overline{\mathfrak{D}(A)} \sim \overline{\mathfrak{R}(A)}$.*

Положим $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{P}$, $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} \ominus [\mathfrak{M}' \oplus \mathfrak{N}']$. Если $f \in \mathfrak{P}'$, то $f \in \mathfrak{P} \subset \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$, так что элемент f можно представить в виде $f = g + h$, где $g \in \mathfrak{M}$, $h \in \mathfrak{N}$. Так как $f \perp \mathfrak{M}'$, $h \in \mathfrak{H} \perp \mathfrak{M}'$, то и $g = f - h \perp \mathfrak{M}'$; аналогично $h \perp \mathfrak{N}'$. Положим $h = Ag$; это равенство определяет оператор A однозначно. Действительно, из равенства $g = 0$ следует, что $h = f \in \mathfrak{P}'$ и потому $h \in \mathfrak{P} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}'$; так как, с другой стороны, $h \perp \mathfrak{N}'$, то $h = 0$. Аналогично из равенства $h = 0$ следует, что также $g = 0$.

Из того, что множество $\mathfrak{P}'$ линейно, замкнуто и ηM, легко следует, что оператор A обладает теми же свойствами. Положим $\mathfrak{M}'' = \overline{\mathfrak{D}(A)}$, $\mathfrak{N}'' = \overline{\mathfrak{R}(A)}$, $A_1 = (1 + A)P_{\mathfrak{M}''}$. Тогда оператор $A_1\eta M$ и определен на множестве, плотном в $\mathfrak{H}$, следовательно [1]),

$$\mathfrak{P}' = \mathfrak{R}(1+A) = \mathfrak{R}(A_1) \sim \overline{\mathfrak{R}(A_1^*)} = \mathfrak{H} \ominus \{f\colon A_1 f = 0\} = \\ = \mathfrak{H} \ominus \{f\colon P_{\mathfrak{M}''} f = 0\} = \mathfrak{H} \ominus (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}'') = \mathfrak{M}''.$$

Аналогично $\mathfrak{P}' \sim \mathfrak{N}''$.

2°. *Если подпространства $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$ — те же, что и в предложении 1°, то либо $\mathfrak{P} \lesssim \mathfrak{M}$, либо $(\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}) \ominus \mathfrak{P} \lesssim \mathfrak{N}$.*

Применив предложение 1° к $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}$, получим подпространства $\mathfrak{M}_1'$, $\mathfrak{M}_1''$, $\mathfrak{N}_1'$, $\mathfrak{N}_1''$, $\mathfrak{P}_1'$ и оператор A_1; применив затем предложение 1° к $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $(\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}) \ominus \mathfrak{P}$, получим подпространства $\mathfrak{M}_2'$, $\mathfrak{M}_2''$, $\mathfrak{N}_2'$, $\mathfrak{N}_2''$, $\mathfrak{P}_2'$ и оператор A_2.

Легко видеть, что $\mathfrak{M}_1' \perp \mathfrak{M}_2'$, $\mathfrak{N}_1' \perp \mathfrak{N}_2'$. Положим

$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M} \ominus (\mathfrak{M}_1' \oplus \mathfrak{M}_2'), \quad \mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N} \ominus (\mathfrak{N}_1' \oplus \mathfrak{N}_2').$$

Если $f \in \mathfrak{D}(A_1)$, то $f + A_1 f \in \mathfrak{P}_1' \subset \mathfrak{P}$, $f + A_1 f \perp \mathfrak{M}_2' \subset (\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}) \ominus \mathfrak{P}$. С другой стороны, $A_1 f$ как элемент подпространства $\mathfrak{N}$ также ортогонален к $\mathfrak{M}_2' \subset \mathfrak{M}$. Отсюда $f \perp \mathfrak{M}_2'$, следовательно, $\mathfrak{M}_1'' \perp \mathfrak{M}_2'$ и $\mathfrak{M}_1'' \subset \mathfrak{M}_0$. Аналогично $\mathfrak{M}_2'' \subset \mathfrak{M}_0$ и $\mathfrak{N}_1'', \mathfrak{N}_2'' \subset \mathfrak{N}_0$. Рассмотрим подпространства $\mathfrak{N}_1'$ и $\mathfrak{M}_2'$; для них имеет место одно из соотношений $\mathfrak{N}_1' \lesssim \mathfrak{M}_2'$, $\mathfrak{M}_2' \lesssim \mathfrak{N}_1'$. В первом случае существует подпространство $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_2'$ такое, что $\mathfrak{N}_1' \sim \mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_2'$; следовательно,

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{M}_1' \oplus \mathfrak{N}_1' \oplus \mathfrak{P}_1' \sim \mathfrak{M}_1' \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{M}_1'' \subset \mathfrak{M}_1' \oplus \mathfrak{M}_2' \oplus \mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}, \\ \mathfrak{P} \lesssim \mathfrak{M};$$

во втором случае существует подпространство $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}_1'$ такое, что $\mathfrak{M}_2' \sim \mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}_1'$; следовательно,

$$(\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}) \ominus \mathfrak{P} = \mathfrak{M}_2' \oplus \mathfrak{N}_2' \oplus \mathfrak{P}_2' \sim \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2' \oplus \mathfrak{N}_2'' \subset \mathfrak{N}_1' \oplus \mathfrak{N}_2' \oplus \mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N}, \\ (\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}) \ominus \mathfrak{P} \lesssim \mathfrak{N}.$$

3°. *Прямая сумма двух взаимно ортогональных конечных подпространств конечна.*

Пусть $\mathfrak{M} \perp \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ конечны. Если $\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$ бесконечно, то согласно предложению V в нем существует подпространство $\mathfrak{P}$ такое, что $\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N} \sim \mathfrak{P} \sim (\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}) \ominus \mathfrak{P}$. Согласно предложению 2° либо $\mathfrak{P} \lesssim \mathfrak{M}$, либо $(\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}) \ominus \mathfrak{P} \lesssim \mathfrak{N}$; следовательно, либо $\mathfrak{M}$, либо $\mathfrak{N}$ не меньше бесконечного подпространства $\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$, что невозможно, ибо $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ по условию конечны.

4°. *Прямая сумма $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$ двух конечных подпространств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ конечна.*

---

[1]) Выражение $\{f\colon A_1 f = 0\}$ обозначает здесь нулевое подпространство оператора A_1, т. е. совокупность всех тех элементов f, для которых $A_1 f = 0$.

Положим $\mathfrak{P} = (\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N}) \ominus \mathfrak{N}$; согласно VII п. 4 $\mathfrak{P} \lesssim \mathfrak{M}$, следовательно, $\mathfrak{P}$ конечно. С другой стороны, $\mathfrak{P} \perp \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N} = \mathfrak{P} \oplus \mathfrak{N}$, следовательно, $\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N}$ конечно в силу предложения 3°.

Теперь предложение VII легко получается из 4° по индукции.

§ 36. Относительная размерность

1. Целая часть отношения двух подпространств. Покажем теперь, что каждому конечному подпространству можно поставить в соответствие неотрицательное число, обладающее свойствами размерности. При этом окажется, что в некоторых случаях размерность может принимать любые (даже иррациональные) значения.

Напомним прежде всего (предложение II п. 5 § 35), что при заданных подпространствах $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}\eta M$ $(\mathfrak{N} \neq 0)$) имеет место представление

$$\mathfrak{M} = \left(\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathfrak{N}_\alpha \right) \oplus \mathfrak{P},$$

где $\mathfrak{N}_\alpha \sim \mathfrak{N}$ и $\mathfrak{P} < \mathfrak{N}$ (если $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$, то множество $\mathfrak{A}$ пусто). Предположим теперь, что подпространство $\mathfrak{N}$ конечно, и посмотрим, каким должно быть множество $\mathfrak{A}$, чтобы подпространство $\mathfrak{M}$ также было конечным.

Лемма. *Если подпространство $\mathfrak{N}$ конечно и $\neq (0)$, то в представлении*

$$\mathfrak{M} = \left(\bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathfrak{N}_\alpha \right) \oplus \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{N}_\alpha \sim \mathfrak{N}, \quad \mathfrak{P} < \mathfrak{N}, \tag{1}$$

множество $\mathfrak{A}$ конечно тогда и только тогда, когда подпространство $\mathfrak{M}$ конечно. В этом последнем случае число элементов множества $\mathfrak{A}$ не зависит от выбора представления вида (1).

Доказательство. Необходимость есть непосредственное следствие предложения VII п. 5 § 35. Обратно, пусть подпространство $\mathfrak{M}$ конечно. Если бы множество $\mathfrak{A}$ было бесконечно, то, полагая $\mathfrak{M}' = \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2 \oplus \mathfrak{N}_3 \oplus \ldots$, мы имели бы:

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2 \oplus \mathfrak{N}_3 \oplus \ldots \subset \mathfrak{M},$$
$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2 \oplus \mathfrak{N}_3 \oplus \ldots \sim \mathfrak{N}_2 \oplus \mathfrak{N}_3 \oplus \ldots \subsetneqq \mathfrak{M}',$$

т. е. $\mathfrak{M}'$ было бы бесконечным подпространством, которое $\lesssim$ конечного подпространства $\mathfrak{M}$, что невозможно в силу предложения I п. 5 § 35.

Пусть k — число этих подпространств и

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_1' \oplus \mathfrak{N}_2' \oplus \ldots \oplus \mathfrak{N}_l' \oplus \mathfrak{P}' \tag{2}$$

— второе такое представление; если, например, $k < l$, то в силу условия $\mathfrak{P} < \mathfrak{N} \sim \mathfrak{N}'_{k+1}$ существует подпространство $\mathfrak{K}$ такое, что $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{K} \subset \mathfrak{N}'_{k+1}$; отсюда

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{N}_k \oplus \mathfrak{P} \ \sim \ \mathfrak{N}'_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{N}'_k \oplus \mathfrak{K} \subsetneqq \mathfrak{M},$$

что противоречит конечности подпространства $\mathfrak{M}$.

Представление (1) мы будем в этом случае символически записывать в виде

$$\mathfrak{M} = k\mathfrak{N} \dotplus \mathfrak{P}, \tag{3}$$

а число k назовем *целой частью отношения* $\mathfrak{M}$ *к* $\mathfrak{N}$ и обозначим $\left[\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}\right]$.

Отметим, что равенство (3) имеет смысл и при $\mathfrak{M} \lesssim \mathfrak{N}$; если $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$, то $k = 1$, $\mathfrak{P} = (0)$; если же $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$, то $k = 0$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{M}$.

Отметим также следующие, почти очевидные неравенства:

$$\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}\right] \cdot \left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{P}}\right] \leqslant \left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{P}}\right] \leqslant \left(\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}\right] + 1\right)\left(\left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{P}}\right] + 1\right) \tag{4}$$

и при $\mathfrak{N} \perp \mathfrak{M}$

$$\left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{P}}\right] + \left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{P}}\right] \leqslant \left[\frac{\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}}{\mathfrak{P}}\right] \leqslant \left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{P}}\right] + \left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{P}}\right] + 1; \tag{5}$$

их доказательство мы предоставляем читателю.

2. Случай существования минимального подпространства. Предположим, что в подпространстве $\mathfrak{H}$ существует *минимальное подпространство*, *присоединенное к фактору* M, т. е. такое подпространство $\mathfrak{M}_0 \neq (0)$ и ηM, что из $\mathfrak{N} < \mathfrak{M}_0$, $\mathfrak{N}\eta\mathfrak{M}$ следует $\mathfrak{N} = (0)$. Если мы в соотношении (3) заменим подпространство $\mathfrak{N}$ таким минимальным подпространством $\mathfrak{M}_0$, то в силу условия $\mathfrak{P} < \mathfrak{M}_0$ будет $\mathfrak{P} = (0)$, т. е. $\mathfrak{M} = k\mathfrak{M}_0$. Число k мы будем называть *отношением* $\mathfrak{M}$ *к* $\mathfrak{M}_0$ и обозначать $\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_0}$. Если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N} \neq (0)$ — произвольные конечные подпространства, то их отношение определим равенством

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} = \frac{\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_0}}{\dfrac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}_0}}.$$

Легко тогда проверить справедливость следующих утверждений:

1°. $\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} = \dfrac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{N}}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}'$;

2°. $\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} < \dfrac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{N}}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} < \mathfrak{M}'$;

3°. $\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} = (0)$;

4°. $\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} = 1$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$;

5°. $\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} \cdot \dfrac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{P}} = \dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{P}}$;

6°. $\dfrac{\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}=\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}+\dfrac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}$ при $\mathfrak{M}\perp\mathfrak{P}$.

3. Случай отсутствия минимального подпространства. Предположим теперь, что в пространстве $\mathfrak{H}$ нет минимального, но существуют конечные подпространства. Мы построим тогда последовательность конечных подпространств $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, ... такую, что $\left[\dfrac{\mathfrak{M}_k}{\mathfrak{M}_{k+1}}\right]\geqslant 2$. Будем для этого исходить из произвольного конечного подпространства $\mathfrak{M}_1$. Так как $\mathfrak{M}_1$ не минимально, то существует отличное от (0) подпространство $\mathfrak{N}<\mathfrak{M}_1$, т.е. $\mathfrak{N}\sim\mathfrak{P}\subsetneqq\mathfrak{M}_1$. В силу предложения III п. 4 § 35 либо $\mathfrak{N}\lesssim\mathfrak{M}_1\ominus\mathfrak{P}$, либо $\mathfrak{M}_1\ominus\mathfrak{P}\lesssim\mathfrak{N}$. В первом случае полагаем $\mathfrak{M}_2=\mathfrak{N}$, во втором $\mathfrak{M}_2=\mathfrak{M}_1\ominus\mathfrak{P}$; тогда $\left[\dfrac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_2}\right]\geqslant 2$. Применяя к подпространству $\mathfrak{M}_2$ тот же прием, получим $\mathfrak{M}_3$ и т. д., и таким путем построим последовательность $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, ...

Пусть $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ — произвольные конечные подпространства, отличные от (0). Докажем, что существует

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]}{\left[\dfrac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]}.$$

Из неравенств (см. (4) п. 1)

$$\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_{n+1}}\right]\geqslant\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]\left[\frac{\mathfrak{M}_n}{\mathfrak{M}_{n+1}}\right]\geqslant 2\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]$$

вытекает, что либо $\left[\dfrac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]=0$, $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, либо $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]=\infty$. В первом случае $\mathfrak{N}<\mathfrak{M}_n$, $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$; но тогда из неравенств

$$\left[\frac{\mathfrak{M}_n}{\mathfrak{M}_{n+m}}\right]\geqslant\left[\frac{\mathfrak{M}_n}{\mathfrak{M}_{n+1}}\right]\left[\frac{\mathfrak{M}_{n+1}}{\mathfrak{M}_{n+2}}\right]\ldots\left[\frac{\mathfrak{M}_{n+m-1}}{\mathfrak{M}_{n+m}}\right]\geqslant 2^m$$

мы заключаем, что $\mathfrak{M}_1\gtrsim 2^{m-1}\mathfrak{M}_m\gtrsim 2^{m-1}\mathfrak{N}$, а значит, $\left[\dfrac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{N}}\right]\geqslant 2^{m-1}$ при любом натуральном m, что невозможно. Итак, $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]=\infty$ и аналогично $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]=\infty$. Но тогда из неравенств (см. (4) п. 1)

$$\frac{\left[\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_{n+m}}\right]}{\left[\dfrac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_{n+m}}\right]}\leqslant\frac{\left[\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]+1}{\left[\dfrac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]}\cdot\frac{\left[\dfrac{\mathfrak{M}_n}{\mathfrak{M}_{n+m}}\right]+1}{\left[\dfrac{\mathfrak{M}_n}{\mathfrak{M}_{n+m}}\right]}\leqslant\frac{\left[\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]+1}{\left[\dfrac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]}\cdot\frac{2^m+1}{2^m}$$

следует, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\left[\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]}{\left[\dfrac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]}=\overline{\lim_{m\to\infty}}\frac{\left[\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_{n+m}}\right]}{\left[\dfrac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_{n+m}}\right]}\leqslant\frac{\left[\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]+1}{\left[\dfrac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]}. \tag{1}$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]=\infty$, то из неравенства (1) следует, что

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{\left[\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]}{\left[\dfrac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]}=\varliminf_{n\to\infty}\frac{\left[\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]+1}{\left[\dfrac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]}\geqslant\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\left[\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]}{\left[\dfrac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]}.$$

Поэтому

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{\left[\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]}{\left[\dfrac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]}=\varlimsup_{n\to\infty}\frac{\left[\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]}{\left[\dfrac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]} \qquad (2)$$

и $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left[\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]}{\left[\dfrac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]}$ существует. Этот предел конечен (в силу (1)) и $\geqslant 0$; так как конечность не должна нарушиться при перестановке $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, то равенство нулю исключается. Таким образом, $0<\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left[\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]}{\left[\dfrac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]}<\infty$.

Мы будем этот предел называть *отношением* $\mathfrak{M}$ *к* $\mathfrak{N}$ и обозначать $\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$. Если $\mathfrak{M}=(0)$, то полагаем $\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}=0$.

Ниже мы покажем, что отношение $\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ не зависит от выбора последовательности $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, ...; пока же мы будем рассматривать все такие отношения, фиксируя каким-нибудь образом эту последовательность. Как и в случае существования минимального подпространства, отношение $\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ обладает свойствами 1°–6° п. 2; они легко следуют из аналогичных свойств выражения $\left[\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}\right]$ и неравенств (4), (5) п. 1.

4. Существование и свойства относительной размерности. Результаты пп. 2 и 3 мы можем сформулировать в виде следующей основной теоремы.

Теорема 1. *Существует функция $D(\mathfrak{M})$, определенная для всех замкнутых подпространств, присоединенных к фактору M, и удовлетворяющая следующим условиям*:

1*) $D(\mathfrak{M})=0$, *если* $\mathfrak{M}=(0)$, $D(\mathfrak{M})>0$, *если* $\mathfrak{M}\neq(0)$;
2*) $D(\mathfrak{M})=\infty$ *тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{M}$ *бесконечно*;
3*) *если* $\mathfrak{M}\sim\mathfrak{N}$, *то* $D(\mathfrak{M})=D(\mathfrak{N})$;
4*) *если* $\mathfrak{M}\perp\mathfrak{N}$, *то* $D(\mathfrak{M}\oplus\mathfrak{N})=D(\mathfrak{M})+D(\mathfrak{N})$;
5*) *если* $\mathfrak{M}<\mathfrak{N}$ *и* $\mathfrak{M}$ *конечно* [1]), *то* $D(\mathfrak{M})<D(\mathfrak{N})$.

[1]) Отметим, что в случае сепарабельного пространства $\mathfrak{H}$ из соотношения $\mathfrak{M}<\mathfrak{N}$ уже вытекает, что $\mathfrak{M}$ конечно (см. VI п. 5 § 35).

Условия 1^*, 3^*, 4^* *определяют функцию* $D(\mathfrak{M})$ *единственным образом с точностью до постоянного множителя, если только она принимает хоть одно конечное положительное значение.*

Доказательство. Если в пространстве $\mathfrak{H}$ нет конечных подпространств, отличных от (0), то функция $D(\mathfrak{M})$ принимает только два значения, а именно, $D(\mathfrak{M}) = 0$ при $\mathfrak{M} = (0)$ и $D(\mathfrak{M}) = \infty$ при $\mathfrak{M} \neq (0)$. Очевидно, условия 1^*–5^* будут тогда выполнены. Отбрасывая этот тривиальный случай, предположим, что в $\mathfrak{H}$ существуют конечные подпространства $\neq (0)$. Пусть $\mathfrak{N}$ — одно из них. Тогда для конечного $\mathfrak{M}$ мы полагаем $D(\mathfrak{M}) = \dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$, а для бесконечного $\mathfrak{M}$ полагаем $D(\mathfrak{M}) = \infty$. Полученная функция $D(\mathfrak{M})$ удовлетворяет всем условиям 1^*–5^*.

Пусть теперь $D(\mathfrak{M})$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям 1^*, 3^*, 4^*. Тогда $D(\mathfrak{M}) = \infty$, если $\mathfrak{M}$ бесконечно. Действительно, если $\mathfrak{M}$ бесконечно, то существует подпространство $\mathfrak{M}_1 \subsetneqq \mathfrak{M}$, эквивалентное пространству $\mathfrak{M}$; отсюда и из условий 4^*, 3^* и 1^* заключаем, что $D(\mathfrak{M}) = D(\mathfrak{M}_1) + D(\mathfrak{M} \ominus \mathfrak{M}_1) = D(\mathfrak{M}) + D(\mathfrak{M} \ominus \mathfrak{M}_1)$, где $D(\mathfrak{M} \ominus \mathfrak{M}_1) > 0$. Но это возможно, только когда $D(\mathfrak{M}) = \infty$. Пусть теперь $\mathfrak{M}$ конечно, и пусть $\mathfrak{N}$ — подпространство, для которого $D(\mathfrak{N})$ конечно и > 0. В силу только что доказанного $\mathfrak{N}$ конечно; в силу условия 1^* $\mathfrak{N} \neq (0)$. Применяя к разложению (3) п. 1 свойства 1^*, 3^* и 4^*, получаем

$$D(\mathfrak{M}) \leqslant kD(\mathfrak{N}) + D(\mathfrak{P}) \leqslant (k+1)D(\mathfrak{N});$$

следовательно, $D(\mathfrak{M})$ конечно. Поэтому из условий 1^*, 3^*, 4^* следует 2^*.

Если в пространстве $\mathfrak{H}$ существует минимальное подпространство $\mathfrak{M}_0$, то для любого конечного $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_k, \quad \text{где} \quad \mathfrak{M}_j \sim \mathfrak{M}_0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k) \quad \text{и} \quad k = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_0}.$$

Отсюда в силу 4^* и 3^*

$$D(\mathfrak{M}) = D(\mathfrak{M}_1) + \ldots + D(\mathfrak{M}_k) = kD(\mathfrak{M}_0) = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_0} D(\mathfrak{M}_0),$$

следовательно (принимая во внимание 1^*), $\dfrac{D(\mathfrak{M})}{D(\mathfrak{M}_0)} = \dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_0}$ и

$$\frac{D(\mathfrak{M})}{D(\mathfrak{N})} = \frac{\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_0}}{\dfrac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_0}} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}. \tag{1}$$

Предположим теперь, что в пространстве $\mathfrak{H}$ нет минимального элемента; выберем последовательность $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, … такую, что $\left[\dfrac{\mathfrak{M}_n}{\mathfrak{M}_{n+1}}\right] \geqslant 2$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Тогда для любых конечных и отличных от (0) подпространств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ будет

$$\mathfrak{M} = \left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]\mathfrak{M}_n + \mathfrak{P}_n, \quad \mathfrak{N} = \left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]\mathfrak{M}_n + \mathfrak{K}_n, \quad \mathfrak{P}_n < \mathfrak{M}_n, \quad \mathfrak{K}_n < \mathfrak{M}_n;$$

следовательно, в силу условия 4*

$$D(\mathfrak{M}) = \left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right] D(\mathfrak{M}_n) + D(\mathfrak{P}_n), \quad D(\mathfrak{N}) = \left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right] D(\mathfrak{M}_n) + D(\mathfrak{K}_n). \quad (2)$$

С другой стороны, из соотношения $\mathfrak{P}_n < \mathfrak{M}_n$ вытекает, что $\mathfrak{P}_n \sim \sim \mathfrak{M}'_n \subsetneqq \mathfrak{M}_n$; поэтому в силу 4*, 1* и 3*

$$D(\mathfrak{M}_n) = D(\mathfrak{M}'_n) + D(\mathfrak{M}_n \ominus \mathfrak{M}'_n) > D(\mathfrak{M}'_n) = D(\mathfrak{P}_n),$$

так что в силу (2)

$$D(\mathfrak{M}) < \left(\left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right] + 1\right) D(\mathfrak{M}_n), \quad D(\mathfrak{N}) > \left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right] D(\mathfrak{M}_n),$$

и

$$\frac{D(\mathfrak{M})}{D(\mathfrak{N})} < \frac{\left[\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right] + 1}{\left[\dfrac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что

$$\frac{D(\mathfrak{M})}{D(\mathfrak{N})} \leqslant \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}.$$

Так как, аналогично, $\dfrac{D(\mathfrak{N})}{D(\mathfrak{M})} \leqslant \dfrac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}$, то, слеловательно, (на основании 5° и 4° п. 2 [1])) $\dfrac{D(\mathfrak{M})}{D(\mathfrak{N})} = \dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$.

Таким образом, равенство (1) имеет место и в случае отсутствия минимального подпространства. Отсюда заключаем, во-первых, что отношение $\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ не зависит от выбора минимального подпространства или последовательности $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, …. Во-вторых, если $D_1(\mathfrak{M})$ и $D_2(\mathfrak{M})$ — две различные функции, удовлетворяющие условиям 1*, 3*, 4*, то для конечных $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$

$$\frac{D_1(\mathfrak{M})}{D_1(\mathfrak{N})} = \frac{D_2(\mathfrak{M})}{D_2(\mathfrak{N})} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}},$$

откуда

$$\frac{D_1(\mathfrak{M})}{D_2(\mathfrak{M})} = \frac{D_1(\mathfrak{N})}{D_2(\mathfrak{N})} = \text{const}.$$

Таким образом, доказано, что условия 1*, 3*, 4* определяют функцию $D(\mathfrak{M})$ с точностью до постоянного множителя.

Функция $D(\mathfrak{M})$, определенная условиями 1*, 3*, 4*, называется *относительной размерностью*. Если нужно будет подчеркнуть, что

[1]) См. последний абзац п. 3.

размерность берется по отношению к фактору M, то мы будем писать $D_M(\mathfrak{M})$. Выбор постоянного множителя будем называть *нормировкой* функции $D(\mathfrak{M})$.

Относительную размерность можно также рассматривать как функцию, определенную на операторах проектирования $P \subset M$, полагая $D(P) = D(\mathfrak{M})$ при $P = P_{\mathfrak{M}}$. Условия 1*–5* примут тогда следующий вид:

1**) $D(P) = 0$ при $P = 0$; $D(P) > 0$ при $P \neq 0$;
2**) $D(P) = \infty$ тогда и только тогда, когда P бесконечен;
3**) если $P_1 \sim P_2$, то $D(P_1) = D(P_2)$;
4**) если $P_1 P_2 = 0$, то $D(P_1 + P_2) = D(P_1) + D(P_2)$;
5**) если $P_1 < P_2$ и P_1 конечен, то $D(P_1) < D(P_2)$.

I. *Если* $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, ... — *бесконечная последовательность взаимно ортогональных подпространств, присоединенных к кольцу* M, *то*

$$D(\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots) = D(\mathfrak{M}_1) + D(\mathfrak{M}_2) + \ldots. \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала тот случай, когда $\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots$ — конечное подпространство. Мы можем, очевидно, считать, что все $D(\mathfrak{M}_k) > 0$. Так как

$$\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_n < \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots,$$

то

$$D(\mathfrak{M}_1) + D(\mathfrak{M}_2) + \ldots + D(\mathfrak{M}_n) < D(\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots);$$

следовательно,

$$D(\mathfrak{M}_1) + D(\mathfrak{M}_2) + \ldots \leqslant D(\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots) \tag{4}$$

и ряд в левой части неравенства (4) сходится. Остается доказать, что в (4) имеет место знак равенства.

Предположим противное; пусть

$$\varepsilon = D(\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \ldots) - [D(\mathfrak{M}_1) + D(\mathfrak{M}_2) + \ldots] > 0. \tag{5}$$

Так как ряд слева в неравенстве (4) сходится, то $D(\mathfrak{M}_n) \to 0$, следовательно, существует номер ν такой, что $0 < D(\mathfrak{M}_\nu) < \varepsilon$. Положим $\mathfrak{M}_\nu = \mathfrak{N}$. Далее мы можем написать

$$\begin{aligned}\varepsilon = D(\mathfrak{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_n) + D(\mathfrak{M}_{n+1} \oplus \mathfrak{M}_{n+2} \oplus \ldots) - \\ - [D(\mathfrak{M}_1) + \ldots + D(\mathfrak{M}_n)] - [D(\mathfrak{M}_{n+1} + D(\mathfrak{M}_{n+2}) + \ldots] = \\ = D(\mathfrak{M}_{n+1} \oplus \mathfrak{M}_{n+2} \oplus \ldots) - [D(\mathfrak{M}_{n+1}) + D(\mathfrak{M}_{n+2}) + \ldots]);\end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned}D(\mathfrak{N}) < D(\mathfrak{M}_{n+1} \oplus \mathfrak{M}_{n+2} \oplus \ldots) - [D(\mathfrak{M}_{n+1}) + D(\mathfrak{M}_{n+2}) + \ldots] < \\ < D(\mathfrak{M}_{n+1} \oplus \mathfrak{M}_{n+2} \oplus \ldots).\end{aligned} \tag{6}$$

С другой стороны, мы можем выбрать номер n настолько большим. чтобы было

$$D(\mathfrak{M}_{n+1}) + D(\mathfrak{M}_{n+2}) + \ldots < D(\mathfrak{N}). \tag{7}$$

Тогда, в частности, $D(\mathfrak{M}_{n+1}) < D(\mathfrak{N})$, следовательно, $\mathfrak{M}_{n+1} \lesssim \mathfrak{N}$; поэтому существует подпространство $\mathfrak{N}_{n+1} \subset \mathfrak{N}$ такое, что $\mathfrak{M}_{n+1} \sim \sim \mathfrak{N}_{n+1} \subsetneqq \mathfrak{N}$, и неравенство (7) перепишется в виде

$$D(\mathfrak{N}_{n+1}) + D(\mathfrak{M}_{n+2}) + D(\mathfrak{M}_{n+3}) + \ldots < D(\mathfrak{N}_{n+1}) + D(\mathfrak{N} \ominus \mathfrak{N}_{n+1});$$

откуда

$$D(\mathfrak{M}_{n+2}) + D(\mathfrak{M}_{n+3}) + \ldots < D(\mathfrak{N} \ominus \mathfrak{N}_{n+1}).$$

Повторяя тот же прием, построим подпространства $\mathfrak{N}_{n+2}$, $\mathfrak{N}_{n+3}$, ... такие, что $\mathfrak{N}_k \sim \mathfrak{M}_k$, $k = n+1,\ n+2,\ \ldots$, и $\bigoplus\limits_{k=n+1}^{\infty} \mathfrak{N}_k \subset \mathfrak{N}$. Но тогда

$$\bigoplus_{k=n+1}^{\infty} \mathfrak{M}_k \sim \bigoplus_{k=n+1}^{\infty} \mathfrak{N}_k \subset \mathfrak{N},$$

и потому

$$D(\mathfrak{M}_{n+1} \oplus \mathfrak{M}_{n+2} \oplus \ldots) \leqslant D(\mathfrak{N}), \tag{8}$$

что противоречит неравенству (6). Таким образом, неравенство (5) невозможно; следовательно, имеет место равенство (3).

Из этого рассуждения следует, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} D(\mathfrak{M}_k)$ расходится, если подпространство $\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} \mathfrak{M}_k$ бесконечно. Действительно, если этот ряд сходится, то из неравенства (7), как и выше, приходим к неравенству (8), откуда следует, что подпространство $\bigoplus\limits_{k=n+1}^{\infty} \mathfrak{M}_k$, а значит, и подпространство $\bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} \mathfrak{M}_k$, конечно.

II. *Если* $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_3 \subset \ldots$ *и* $\mathfrak{M}_k \eta M$, $k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, *то* [1])

$$D\left(\sum_{k=1}^{\infty} \cdot \mathfrak{M}_k\right) = \lim_{n\to\infty} D(\mathfrak{M}_n).$$

Доказательство. Полагая $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{M}_k - \mathfrak{M}_{k-1}$, $k = 2$, 3, ..., имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cdot \mathfrak{M}_k = \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2 \oplus \ldots; \quad \mathfrak{M}_k = \mathfrak{N}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{N}_k.$$

---

[1]) Здесь и ниже $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \cdot \mathfrak{M}_k$ обозначает замкнутую линейную оболочку множества $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathfrak{M}_k$.

Отсюда

$$D\left(\sum_{k=1}^{\infty}\cdot\mathfrak{M}_k\right) = D(\mathfrak{N}_1) + D(\mathfrak{N}_2) + \ldots = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} D(\mathfrak{N}_k) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} D(\mathfrak{N}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{N}_k) = \lim_{n\to\infty} D(\mathfrak{M}_n).$$

III. *Если* $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2 \supset \mathfrak{M}_3 \supset \ldots$, $\mathfrak{M}_1$ *конечно и все* $\mathfrak{M}_n \eta M$, *то*

$$D(\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{M}_3 \cap \ldots) = \lim_{n\to\infty} D(\mathfrak{M}_n).$$

Это предложение сводится к предыдущему, ибо

$$\mathfrak{M}_1 \ominus \mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_1 \ominus \mathfrak{M}_3 \subset \ldots.$$

IV. *Если подпространства* $\mathfrak{N}_k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, *конечны и ряд* $D(\mathfrak{N}_1) + D(\mathfrak{N}_2) + \ldots$ *сходится, то подпространство* $\mathfrak{N}_1 \dotplus \mathfrak{N}_2 \dotplus \mathfrak{N}_3 \dotplus \ldots$ *конечно и*

$$D(\mathfrak{N}_1 \dotplus \mathfrak{N}_2 \dotplus \mathfrak{N}_3 \dotplus \ldots) \leqslant D(\mathfrak{N}_1) + D(\mathfrak{N}_2) + D(\mathfrak{N}_3) + \ldots.$$

Доказательство. Прежде всего, в силу предложения VI п. 4 § 35 $D(\mathfrak{N}_1 \dotplus \mathfrak{N}_2) - D(\mathfrak{N}_2) \leqslant D(\mathfrak{N}_1)$, следовательно,

$$D(\mathfrak{N}_1 \dotplus \mathfrak{N}_2) \leqslant D(\mathfrak{N}_1) + D(\mathfrak{N}_2).$$

По индукции получаем отсюда, что

$$D(\mathfrak{N}_1 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{N}_n) \leqslant D(\mathfrak{N}_1) + \ldots + D(\mathfrak{N}_n)$$

для любого натурального n. Положим теперь $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{N}_1 \dotplus \mathfrak{N}_2 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{N}_n$. Согласно предложению II

$$D(\mathfrak{N}_1 \dotplus \mathfrak{N}_2 \dotplus \mathfrak{N}_3 \dotplus \ldots) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} D(\mathfrak{M}_n) \leqslant \lim_{n\to\infty}[D(\mathfrak{N}_1) + D(\mathfrak{N}_2) + \ldots + D(\mathfrak{N}_n)] =$$
$$= D(\mathfrak{N}_1) + D(\mathfrak{N}_2) + \ldots.$$

5. Область изменения относительной размерности; классификация факторов. Обозначим через Δ область изменения относительной размерности $D(\mathfrak{M})$. Посмотрим, каким должно быть множество Δ. Во всяком случае Δ содержит число 0 и состоит из неотрицательных чисел. Если в пространстве $\mathfrak{H}$ нет конечных подпространств, отличных от (0), то $\Delta = \{0, \infty\}$. Отбрасывая пока этот тривиальный случай, отметим, что множество Δ обладает еще следующими двумя свойствами:

1°. Если $\alpha, \beta \in \Delta$, $\alpha > \beta$, то $\alpha - \beta \in \Delta$.

2°. Если $\alpha_k, \alpha \in \Delta$ и (конечная или счетная сумма)

$$\sum_k \alpha_k \leqslant \alpha, \quad \text{то} \quad \sum_k \alpha_k \in \Delta.$$

Действительно, если $D(\mathfrak{N}) = \alpha$, $D(\mathfrak{M}) = \beta$, то из неравенства $D(\mathfrak{N}) > D(\mathfrak{M})$ следует, что $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$, т. е. что $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}' \subsetneqq \mathfrak{N}$. Но тогда

$$\alpha = D(\mathfrak{N}) = D(\mathfrak{N}') + D(\mathfrak{N} \ominus \mathfrak{N}') = \beta + D(\mathfrak{N} \ominus \mathfrak{N}'),$$

так что

$$\alpha - \beta = D(\mathfrak{N} \ominus \mathfrak{N}') \in \Delta.$$

Если, далее, $\alpha_k, \alpha \in \Delta$, то берем произвольное $\mathfrak{M}_1 \eta M$ такое, что $D(\mathfrak{M}_1) = \alpha_1$, и $\mathfrak{M} \eta M$ такое, что $\alpha = D(\mathfrak{M})$. Повторяя далее рассуждение, проведенное в конце доказательства предложения I п. 4, строим подпространства $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, ... так, что $\mathfrak{M}_j \perp \mathfrak{M}_k$ при $j \neq k$, $D(\mathfrak{M}_k) = \alpha_k$ и $\bigoplus\limits_k \mathfrak{M}_k \subset \mathfrak{M}$. Согласно I п. 4 отсюда следует, что

$$\sum_k \alpha_k - \sum_k D(\mathfrak{M}_k) = D\Big(\bigoplus_k \mathfrak{M}_k\Big) \in \Delta.$$

Предположим сначала, что в множестве Δ есть наименьший положительный элемент ε. Если $\alpha \in \Delta$ и $\alpha \neq \infty$, то при некотором n будет $n\varepsilon \leqslant \alpha < (n+1)\,\varepsilon$. Полагая в свойстве 2° $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \varepsilon$, получаем, что $n\varepsilon \in \Delta$, следовательно, в силу свойства 1° $\alpha - n\varepsilon \in \Delta$. Но $\alpha - n\varepsilon < \varepsilon$, так что в силу минимальности положительного числа $\varepsilon \in \Delta$ должно быть $\alpha - n\varepsilon = 0$, $\alpha = n\varepsilon$. Если $m\varepsilon \in \Delta$, то согласно 2° также все $k\varepsilon$, $k = 1, 2, \ldots, m-1$, принадлежат Δ. Поэтому множество Δ состоит из всех чисел вида $k\varepsilon$, $k = 1, 2, \ldots, m$, где m — натуральное число или ∞.

Предположим теперь, что в множестве Δ нет наименьшего положительного элемента. Пусть $\varepsilon = \inf x$, $x \in \Delta$, $x > 0$. Докажем, что $\varepsilon = 0$. Действительно, если $\varepsilon > 0$, то в Δ существует положительный элемент α, меньший 2ε. Очевидно, $\alpha > \varepsilon$, ибо в случае $\alpha = \varepsilon$ число ε было бы наименьшим положительным элементом множества Δ. Но из неравенства $\alpha > \varepsilon$ следует, что в Δ существует положительный элемент β, меньший α. Мы имеем, таким образом, $\varepsilon < \beta < \alpha < 2\varepsilon$; следовательно, $\alpha - \beta < \varepsilon$, $\alpha - \beta > 0$, $\alpha - \beta \in \Delta$ (в силу свойства 1°), что противоречит определению числа ε.

Итак, $\varepsilon = 0$. Но тогда при любом $\delta > 0$ существует элемент $\alpha \in \Delta$ такой, что $0 < \alpha < \delta$. Пусть β — произвольный положительный элемент множества Δ и пусть $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \beta$; докажем, что между γ_1 и γ_2 имеется по крайней мере один элемент множества Δ. Для этой цели положим $\delta = \gamma_2 - \gamma_1$; тогда при некотором $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ будет $n\alpha \leqslant \gamma_1 < (n+1)\,\alpha < \gamma_2$. Как и выше, отсюда следует, что $(n+1)\,\alpha \in \Delta$, так что $(n+1)\,\alpha$ — искомый элемент. Докажем, далее, что любое число γ между 0 и β принадлежит множеству Δ. В самом деле, выбирая последовательность $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \ldots$ так, чтобы было $\beta_n \to \gamma$, $\beta_n < \beta$, и затем числа $\gamma_k \in \Delta$ так, чтобы было $\beta_{k-1} < \gamma_k < \beta_k$, имеем $\gamma_k \to \gamma$, т. е.

$$\gamma = \gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1) + (\gamma_3 - \gamma_2) + \ldots < \beta.$$

Согласно свойству 2° отсюда следует, что $\gamma \in \Delta$.

Итак, возможны только такие случаи:

а). Пространство $\mathfrak{H}$ конечно; тогда $\overline{\alpha} = D(\mathfrak{H})$ — наибольший элемент множества Δ и Δ есть интервал $[0, \overline{\alpha}]$. Нормируя функцию $D(\mathfrak{M})$ так, чтобы было $D(\mathfrak{H}) = 1$, мы получим, что $\Delta = [0, 1]$.

б). Пространство $\mathfrak{H}$ бесконечно; пусть $\mathfrak{N}$ — произвольное отличное от (0) конечное замкнутое подпространство. В силу IV п. 5 § 35 тогда $\mathfrak{H} = \bigoplus\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} \mathfrak{N}_\alpha$, где $\mathfrak{N}_\alpha \sim \mathfrak{N}_\alpha$ и $\mathfrak{A}$ бесконечно. Отсюда заключаем, что в Δ есть сколь угодно большие числа $D(\mathfrak{N}_{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus \mathfrak{N}_{\alpha_n}) = nD(\mathfrak{N})$; следовательно, $\Delta = [0, \infty]$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Область изменения относительной размерности есть одно из следующих множеств*:

(I_n) *совокупность всех чисел* $k\varepsilon$, $k = 1, 2, \ldots, n$;

(I_∞) *совокупность всех* $k\varepsilon$, $k = 1, 2, 3, \ldots, \infty$;

(II_1) *интервал* $[0, \overline{\alpha}]$;

(II_∞) *интервал* $[0, \infty]$;

(III) *числа* $0, \infty$.

Будем говорить, что M — фактор класса (I_n), (I_∞), (II_1), (II_∞), (III), если соответственно для множества Δ имеет место случай, таким образом обозначенный. Классы (I_n), (I_∞) называются *дискретными*, (II_1), (II_∞) — *непрерывными*, (I_n), (II_1) — *конечными*, (I_∞), (II_∞) — *бесконечными*. Класс (III) называется *вполне бесконечным*. Ни один из этих классов не является пустым, т. е. существуют факторы любого из этих классов: примеры факторов различных классов будут даны ниже (см. § 38).

Отметим еще, что в случаях I_n, I_∞, II_1 можно пронормировать функцию $D(\mathfrak{M})$ так, чтобы было $\varepsilon = 1$, $\overline{\alpha} = 1$. Такого рода нормировку функции $D(\mathfrak{M})$ будем называть *стандартной*.

6. Инвариантность класса фактора по отношению к симметричному изоморфизму.

Теорема 3. *Классы* (I_n), (I_∞), (II_1,), (II_∞), (III) *и функция* $D(\mathfrak{M})$ *с точностью до множителя, а также понятия эквивалентности, конечности, бесконечности и минимальности для операторов проектирования, инвариантны относительно любого симметричного изоморфизма колец.*

Доказательство. Соотношение $E \sim F(\ldots M)$ означает, что существует оператор $U \in M$ такой, что

$$UU^*U = U, \quad U^*U = E, \quad UU^* = F; \tag{1}$$

далее, бесконечность оператора проектирования E означает, что существует оператор $F \in M$ такой, что

$$F^2 = F^* = F; \quad EF = F, \quad F \neq E, \quad F \sim E, \tag{2}$$

а минимальность оператора E — что нет оператора $F \in M$, удовлетворяющего условиям

$$F^2 = F^* = F, \quad EF = F, \quad F \neq 0, \quad F \neq E. \tag{3}$$

Так как соотношения (1), (2), (3) инвариантны по отношению к симметричному изоморфизму колец, то то же верно и в отношении понятий эквивалентности, конечности, бесконечности и минимальности. Отсюда следует инвариантность классов. Так как, далее, $D_M(E)$ характеризуется в терминах соотношений $E = 0$, $E \sim F$, $G = E + F$, $EF = 0$, то функция $D_M(E)$ также инвариантна с точностью до множителя. Теорема доказана.

Возникает вопрос, являются ли перечисленные понятия полной системой инвариантов фактора по отношению к симметричному изоморфизму. Ответ на этот вопрос — положительный в случае фактора класса (I_n) или (I_∞) и отрицательный в случае фактора класса (II_1) или (II_∞) (см. пп. 3 и 6 § 38). Вопрос о полной системе инвариантов для факторов класса (II_1) или (II_∞) до сих пор не решен.

§ 37. Относительный след

1. Определение следа. *Следом* оператора в конечномерном пространстве называется сумма всех его собственных значений, причем каждое собственное значение считается столько раз, какова его кратность.

Результаты предыдущего параграфа дают возможность обобщить это понятие на произвольные факторы конечного класса. Пусть M — фактор конечного класса, A — эрмитов оператор из M, $P(\lambda)$ — спектральная функция оператора A. Тогда $P(\lambda) \in M$, следовательно, $D_M(P(\lambda))$ имеет смысл и является неубывающей функцией λ. Если $|A| < C$, то функция $P(\lambda)$, а следовательно, и $D_M(P(\lambda))$, постоянна вне интервала $[-C, C]$. Поэтому существует

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, dD_M(P(\lambda)) = \int\limits_{-C}^{C} \lambda\, dD_m(P(\lambda)).$$

Это число мы будем называть *относительным следом* оператора A и обозначать $T_M(A)$. При этом мы будем брать функцию $D_M(E)$ в ее стандартной нормировке.

Если, например, M — фактор дискретного класса, то функция $P(\lambda)$, будучи при каждом значении λ суммой минимальных взаимно ортогональных операторов проектирования, может возрастать только скачками, и точками ее роста являются собственные значения оператора A. Поэтому $T_M(A) = \sum\limits_n k_n \lambda_n$, где k_n — соответствующий скачок функции $D_M(P(\lambda))$. Если, в частности, M — кольцо всех операторов в конечномерном (именно, N-мерном) пространстве, то k_n есть умноженная на $\frac{1}{N}$ кратность собственного значения λ_n и $T_M(A)$ совпадает с обычным следом, умноженным на $\frac{1}{N}$.

Для вывода основных свойств следа отметим прежде всего следующую лемму.

Лемма. *Если* $D(\mathfrak{M}) > D(\mathfrak{N})$, *то* $\mathfrak{M} \cap (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}) \neq 0$.

Доказательство. В силу предложения VII п. 4 § 35

$$D([\mathfrak{N} \dotplus (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M})] \cap \mathfrak{M}) = \\ = D([\mathfrak{N} \dotplus (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M})] \ominus (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M})) \leqslant D(\mathfrak{N}) < D(\mathfrak{M}),$$

так что пространство $[\mathfrak{N} \dotplus (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M})] \cap \mathfrak{M}$ есть правильная часть пространства $\mathfrak{M}$. Отсюда

$$(0) \neq \mathfrak{M} \ominus \{[\mathfrak{N} \dotplus (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M})] \cap \mathfrak{M}\} = \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{H} \ominus [\mathfrak{N} \dotplus (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M})]) = \\ = \mathfrak{M} \cap [(\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}) \cap \mathfrak{M}] = (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}) \cap \mathfrak{M}.$$

2. Свойства следа. Всюду в дальнейшем в этом параграфе мы будем предполагать, что M — фактор конечного класса, а функция $D(\mathfrak{M})$ пронормирована так, что $D(\mathfrak{H}) = 1$. Введем обозначение

$$\varepsilon = \varepsilon(\alpha) = \inf \lambda, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1,$$

при условии

$$D_M(P(\lambda)) \geqslant \alpha,$$

где $P(\lambda)$ — спектральная функция некоторого эрмитова оператора A из M. Число $\varepsilon(\alpha)$ мы будем называть *собственным значением оператора A с номером α*.

Если, например, $\mathfrak{H}$ есть n-мерное пространсто, а M — совокупность всех линейных операторов в $\mathfrak{H}$, то $P(\lambda)$, а значит, и $\varepsilon(\alpha)$ изменяются скачками. Возможными значениями функции $D_M(P(\lambda))$ являются при этом числа $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1$, а $\varepsilon\left(\frac{k}{n}\right)$ есть k-е (учитывая кратность) собственное значение (в обычном смысле) оператора A. Таким образом, в этом случае наше определение собственного значения совпадает с обычным, а номер равен произведению обычного номера на $\frac{1}{n}$.

Однако в непрерывном случае (II_1) номером собственного значения может быть любое число из интервала $[0, 1]$.

В теории конечных эрмитовых матриц доказывается, что собственные значения оператора A связаны определенным образом с максимумом формы (Af, f) при условии $|f| = 1$ (так называемый принцип минимакса; см., например, Курант и Гильберт [1], т. I, гл. I). Мы покажем, что это свойство обобщается на все факторы конечного класса.

I. *Если A — эрмитов оператор из M, то*

$$\varepsilon(\alpha) = \inf_{D_M(\mathfrak{M}) \geqslant \alpha} \left\{ \sup_{|f|=1,\, f \in \mathfrak{M}} (Af,\, f) \right\}. \tag{1}$$

Доказательство. Обозначим правую часть равенства (1) через λ_0; по определению числа $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$, при $\lambda > \varepsilon$ имеет место неравенство $D_M(P(\lambda)) \geqslant \alpha$. Следовательно, в силу непрерывности функции $P(\lambda)$ справа, также $D_M(P(\varepsilon)) \geqslant \alpha$. Положим $P(\varepsilon)\mathfrak{H} = \mathfrak{M}_0$; тогда при $f \in \mathfrak{M}_0$, $|f| = 1$

$$(Af,\, f) = \int_{-\infty}^{\varepsilon} \lambda\, d(P(\lambda)\, f,\, f) \leqslant \varepsilon |f|^2 = \varepsilon;$$

отсюда, по определению числа λ_0, следует, что $\lambda_0 \leqslant \varepsilon$. Предположим теперь, что $\lambda_0 < \varepsilon$. Тогда существует подпространство $\mathfrak{M} \eta M$ такое, что

$$D_M(\mathfrak{M}) \geqslant \alpha \quad \text{и} \quad \sup_{|f|=1,\, f \in \mathfrak{M}} (Af,\, f) < \varepsilon.$$

Выбирая поэтому число ε_1 так, чтобы $\sup\limits_{|f|=1,\, f \in \mathfrak{M}} (Af,\, f) < \varepsilon_1 < \varepsilon$, полагая $\mathfrak{M}_1 = P(\varepsilon_1)\mathfrak{H}$ и учитывая определение функции $\varepsilon = \varepsilon(\alpha)$, имеем

$$D_M(\mathfrak{M}_1) = D_M(P(\varepsilon_1)) < \alpha \leqslant D_M(\mathfrak{M}).$$

Согласно лемме п. 1 в $\mathfrak{M}$ существует элемент f_0 с нормой, равной единице, ортогональный к $\mathfrak{M}_1$. Для него

$$(Af_0,\, f_0) = \int_{\varepsilon_1}^{+\infty} \lambda\, d(P(\lambda)\, f_0,\, f_0) \geqslant \varepsilon_1 |f_0|^2 = \varepsilon_1.$$

Но это противоречит выбору ε_1. Тем самым предложение I доказано.

След $T_M(A)$ выражается через функцию $\varepsilon(\alpha)$ по формуле

$$T_M(A) = \int_0^1 \varepsilon(\alpha)\, d\alpha. \tag{2}$$

Действительно, пусть $[a,\, b]$ — произвольный интервал, содержащий внутри себя интервал $[-|A|,\, |A|]$. Рассмотрим какое-нибудь разбиение интервала $(a,\, b]$ на подынтервалы $(\lambda_{k-1},\, \lambda_k]$, $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$, где $a = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = b$, и положим $\alpha_k = D_M[P(\lambda_k)]$. Мы получим разбиение интервала $(0,\, 1]$ на интервалы $(\alpha_{k-1},\, \alpha_k]$, $k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$; при этом, если $P(\lambda)$ постоянна на интервале $(\lambda_{k-1},\, \lambda_k]$, то соответствующий «интервал» $(\alpha_{k-1},\, \alpha_k]$ — пустое множество.

Пусть $(\lambda_{k-1},\, \lambda_k]$ — интервал, на котором $P(\lambda) \neq \mathrm{const}$; тогда $D_M(P(\lambda_k)) \geqslant D_M(P(\lambda))$ при $\lambda_{k-1} < \lambda \leqslant \lambda - k$, причем знак $>$ имеет место для некоторых из этих чисел λ. Отсюда, учитывая определение функции $\varepsilon(\alpha)$, заключаем, что $\lambda_{k-1} < \varepsilon(\alpha_k) \leqslant \lambda_k$, и потому левая часть равенства

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon(\alpha_k)\left[D_M(P(\lambda_k)) - D_M(P(\lambda_{k-1}))\right] = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon(\alpha_k)(\alpha_k - \alpha_{k-1}) \qquad (3)$$

есть интегральная сумма для $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dD_M(P(\lambda))$. С другой стороны, если все $\lambda_k - \lambda_{k-1} < \delta$, то

$$\left|\int\limits_0^1 \varepsilon(\alpha)\, d\alpha - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon(\alpha_k)(\alpha_k - \alpha_{k-1})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} |\varepsilon(\alpha) - \varepsilon(\alpha_k)|\, d\alpha < \delta \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} d\alpha = \delta;$$

следовательно, переходя в (3) к пределу при $\max\limits_k(\lambda_k - \lambda_{k-1}) \to 0$, получим соотношение (2).

Формула (2) является обобщением определения следа оператора в конечномерном пространстве как суммы всех его собственных значений.

II. *След $T_M(A)$ есть непрерывная функция оператора A в смысле равномерной топологии* [1]).

Доказательство. Прежде всего отметим, что если $(A_1 f, f) \leqslant (A_2 f, f)$ для всех $f \in \mathfrak{H}$, то $T_M(A_1) \leqslant T_M(A_2)$. Действительно, в силу равенства (1) в этом случае $\varepsilon_1(\alpha) \leqslant \varepsilon_2(\alpha)$, где $\varepsilon_1(\alpha)$, $\varepsilon_2(\alpha)$ — собственные значения операторов A_1, A_2 с номером α, так что наше утверждение следует из равенства (2). Аналогично доказываем, что $T_M(A + \lambda 1) = T_M(A) + \lambda$, где λ — произвольное вещественное число. Если теперь $|A - B| < \varepsilon$, то $(Af, f) \leqslant ((B + \varepsilon 1) f, f)$, следовательно, $T_M(A) \leqslant T_M(B + \varepsilon 1) = T_M(B) + \varepsilon$, $T_M(A) - T_M(B) < \varepsilon$. Переставляя A и B, получаем, что также $T_M(B) - T_M(A) < \varepsilon$, так что $|T_M(A) - T_M(B)| < \varepsilon$.

Теорема 1. *Пусть M — фактор конечного класса; тогда существует одна и только одна функция $T(A)$, определенная для всех эрмитовых операторов A из M и удовлетворяющая следующим условиям:*

1°. $T(1) = 1$;

2°. $T(\alpha A) = \alpha T(A)$ *для всех вещественных* α;

[1]) Можно также доказать (см. Мюррей и фон Нейман [1], II, теорема IV), что след $T_M(A)$ есть непрерывная функция оператора A в смысле слабой топологии.

3°. $T(A+B)=T(A)+T(B)$, *если* A *и* B *перестановочны*;
4°. $T(A)\geqslant 0$, *если* A — *положительно определенный оператор*;
5°. $T(U^{-1}AU)=T(A)$, *если* U — *унитарный оператор из* M.
Эта функция есть относительный след $T_M(A)$.

Доказательство. Прежде всего след $T_M(A)$ удовлетворяет условиям 1°–5°. В самом деле, условия 1°, 4° следуют из определения, 2° при $\alpha\geqslant 0$ — из равенств (1) и (2), а тогда при $\alpha<0$ — из соотношений

$$T_M(-A)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dD_M(1-P(-\lambda-0))=$$
$$=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dD_M(P(-\lambda-0))=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dD_M(P(\lambda))=-T_M(A),$$

где $P(\lambda)$ — спектральная функция оператора A и, следовательно, как легко видеть, $1-P(-\lambda-0)$ — спектральная функция оператора $-A$. Наконец, 5° следует из равенств

$$T_M(U^{-1}AU)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dD_M(U^{-1}P(\lambda)U)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dD_M(P(\lambda))=T(A).$$

Остается показать, что функция $T_M(A)$ удовлетворяет условию 3°. Если операторы A, B перестановочны и $E(\lambda)$, $F(\lambda)$ — их спектральные функции, то и $E(\lambda)$, $F(\mu)$ перестановочны. Кроме того, из равенств $A=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lambda\,dE(\lambda)$, $B=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\lambda\,dF(\lambda)$ следует, что операторы A и B являются пределами в равномерной топологии сумм вида

$$A_1=\sum_k a_kE(\lambda_k),\quad B_1=\sum_k F(\mu_k),$$

где a_k, b_k — вещественные числа. В силу предложения II достаточно поэтому доказать, что 3° имеет место для операторов A_1 и B_1. Другими словами, достаточно доказать, что

$$T_M\left(\sum_{k=1}^{p}c_kE_k\right)=\sum_{k=1}^{p}c_kT_M(E_k), \tag{4}$$

если все операторы проектирования E_k попарно перестановочны, а c_k — вещественные числа.

Рассмотрим все члены F_j произведения

$$[E_1+(1-E_1)]\,[E_2+(1-E_2)]\ldots[E_p+(1-E_p)];$$

они взаимно ортогональны, их сумма равна 1 и каждый оператор E_k есть сумма таких операторов F_j; поэтому достаточно доказать равенство (4) для операторов F_j или, что то же, можно предположить, что операторы E_k взаимно ортогональны и их сумма равна 1. Но тогда равенство (4) непосредственно вытекает из определения следа, ибо спектральная функция $G(\lambda)$ оператора $\sum\limits_{k=1}^{p} c_k E_k$ определяется равенством $G(\lambda) = \sum\limits_{\lambda_k \leqslant \lambda} E_k$.

Итак, след $T_M(A)$ удовлетворяет условиям 1°–5°. Обратно, пусть произвольная функция $T(A)$, определенная на всех эрмитовых операторах $A \in M$, удовлетворяет условиям 1°–5°. Положим $D(P) = T(P)$ для оператора проектирования $P \in M$. Из условия 3° вытекает, что функция $D(P)$ удовлетворяет условию 4^* теоремы 1 п. 4 § 36. Кроме того, $D(P) \geqslant 0$. Из равенства 2° следует, что $D(P) = 0$ при $P = 0$. Далее, если $E \sim F(\ldots M)$, то в M существует унитарный [1] оператор U такой, что $F = U^{-1}EU$. Но тогда согласно условию 5° $D(F) = D(E)$, так что условие 3^* теоремы 1 п. 4 § 36 также выполнено. Остается проверить, что из равенства $D(P) = 0$ следует также $P = 0$. Но если $P \neq 0$, то, производя разложение $1 = P_1 + P_2 + \ldots + P_k + P_0$, $P_k \sim P$, $P_0 \lesssim P$, $P_i P_k = 0$ при $i \neq k$, мы получили бы $T(1) = D(1) = 0$, что противоречит условию 1°. Согласно теореме 1 п. 4 § 36 $D(P) = aD_M(P)$. Полагая $P = 1$, получаем, что $a = 1$; следовательно, $D(P) = D_M(P)$. Далее, пусть A, B — перестановочные эрмитовы операторы из M такие, что $|A - B| < \varepsilon$; тогда оператор $\varepsilon 1 - (A - B)$ неотрицателен, следовательно,

$$T(\varepsilon 1 - (A - B)) \geqslant 0.$$

Отсюда

$$\varepsilon - [T(A) - T(B)] \geqslant 0,$$

и аналогично $\varepsilon - [T(B) - T(A)] \geqslant 0$, следовательно, $T(A) - T(B)| < \varepsilon$; таким образом, функция $T(A)$ непрерывна в равномерной топологии на каждом множестве перестановочных между собой эрмитовых операторов. Если теперь A — произвольный эрмитов оператор из кольца M, а $P(\lambda)$ — его спектральная функция, то

$$A = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dP(\lambda) = \lim_{\lambda_k - \lambda_{k-1} \to 0} \sum_k \lambda_k [P(\lambda_k) - (\lambda_{k-1})],$$

[1] Ибо $D_M(1 - E) = 1 - D_M(E) = D_M(1 - F)$.

так что

$$T(A) = \lim_{\lambda_k - \lambda_{k-1} \to 0} \sum \lambda_k [T(P(\lambda_k)) - T(P(\lambda_{k-1}))] =$$
$$= \lim_{\lambda_k - \lambda_{k-1} \to 0} \sum \lambda_k [D_M(P(\lambda_k)) - D_M(P(\lambda_{k-1}))] =$$
$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dD_M(P(\lambda)) = T_M(A).$$

Теорема 2. *Если существует функция $T(A)$, определенная для всех эрмитовых операторов из фактора M, удовлетворяющая условиям 1°–4° предыдущей теоремы и дополнительным условиям*:

5′. $T(AB) = T(BA)$, *если $A, B \in M$, AB и BA — эрмитовы операторы*;

6′. $P = 0$, *если $T(P) = 0$ и P — оператор проектирования*,

то M — фактор конечного класса, а $T(A)$ — относительный след в M.

Доказательство. Положим для оператора проектирования $P \in M$, $D(P) = T(P)$. Из условия 5′ при $A = U^{-1}H$, $B = U$, где U — унитарный, а H — эрмитов оператор из M, заключаем, что

$$T(U^{-1}HU) = T(H), \tag{5}$$

т. е. функция $T(A)$ удовлетворяет условию 5° теоремы 1. Но тогда функция $D(P)$ удовлетворяет условиям 1*, 3*, 4* теоремы 1 п. 4 § 36, так, что согласно этой теореме $D(P)$ — относительная размерность. Так как по условию $D(1) = T(1) = 1$, то M — фактор конечного класса. В силу теоремы 1 отсюда и из (5) вытекает, что $T(A)$ — относительный след в M.

Можно доказать (см. Мюррей и фон Нейман [1], II, теорема III), что след $T(A)$ в кольце M задается формулой

$$T(A) = \sum_{k=1}^{m} (Ag_k, g_k),$$

где g_k — фиксированные элементы [1]) из $\mathfrak{H}$. Отсюда, в частности, следует, что $T(A+B) = T(A) + T(B)$ даже и в том случае, когда операторы A и B не перестановочны.

Простое доказательство этого последнего результата было затем дано Кейдисоном [8] (см. также Кейдисон [9], где это доказательство перенесено на слабо замкнутые кольца, не обязательно являющиеся

[1]) Число m этих элементов g_k определяется условием $\frac{1}{m} < C \leqslant 1$, где C — константа в излагаемой ниже теореме 4 п. 7 § 38; в частности, при $C \leqslant 1$ существует элемент $g \in \mathfrak{H}$ такой, что $T(A) = (Ag, g)$.

факторами). Другое доказательство было также дано Диксмье (см., например, Диксмье [12]).

Если теперь A — произвольный оператор из M, то мы можем положить $A = H_1 + iH_1$, $T(A) = T(H_1) + iT(H_2)$, где H_1, H_2 — эрмитовы операторы из M. Полученная таким образом функция $T(A)$ определена для всех операторов $A \in M$ и удовлетворяет следующим условиям:

1°. $T(\lambda A + \mu B) = \lambda T(A) + \mu T(B)$ для любых комплексных чисел λ, μ;
2°. $T(A^*A) \geqslant 0$;
3°. $T(AB) = T(BA)$.

3. След в факторах классов (I_∞) и (II_∞). Можно определить след $T(A)$ также в факторах M класса (I_∞) или (II_∞), но только функция $T(A)$ будет определена не для всех операторов $A \in M$ (см. Мюррей и фон Нейман [1]). Для этого введем понятие ранга оператора.

Рангом $r(A)$ оператора $A \in M$ называется число $r(A) = D_M(\overline{\mathfrak{R}(A)})$. Так как $\overline{\mathfrak{R}(A)} \sim \overline{\mathfrak{R}(A^*)}$ (см. п. 3 § 35), то $r(A) = r(A^*)$.

Пусть A — оператор конечного ранга; тогда существует конечное подпространство $\mathfrak{M}$, например $\mathfrak{R}(A) \dotplus \mathfrak{R}(A^*)$, такое, что $\mathfrak{R}(A)$ и $\mathfrak{R}(A^*)$ содержатся в $\mathfrak{M}$. Мы полагаем тогда

$$T_M(A) = D(\mathfrak{M})\, T_{M_{(\mathfrak{M})}}(A_{(\mathfrak{M})}), \tag{1}$$

где $A_{(\mathfrak{M})}$ — сужение оператора A на $\mathfrak{M}$, а $M_{(\mathfrak{M})}$ — совокупность сужений на $\mathfrak{M}$ всех операторов из M, приводимых пространством $\mathfrak{M}$ (подробнее об этом см. ниже в п. 1 § 38). Можно доказать, что правая часть в (1) не зависит от выбора подпространства $\mathfrak{M}$.

Тем самым след $T_M(A)$ определен для всех операторов A конечного ранга. Определим для таких операторов новую норму $\|A\|$, положив

$$\|A\| = \sqrt{T_M(A^*A)}$$

(если A — конечного ранга, то и A^*A — конечного ранга). Предельным переходом по этой норме можно распространить функцию $T_M(A)$ на более широкий класс операторов $A \in M$; такие операторы называются *нормируемыми*. При этом оператор проектирования нормируем тогда и только тогда, когда он конечен.

§ 38. Структура и примеры некоторых классов факторов

1. Отображение $M \to M_{(\mathfrak{M})}$. Пусть $\mathfrak{M}$ — отличное от (0) подпространство; рассмотрим те операторы из кольца M, которые приводятся подпространством $\mathfrak{M}$; их сужение на $\mathfrak{M}$ обозначим через $A_{(\mathfrak{M})}$, а совокупность всех операторов $A_{(\mathfrak{M})}$ — через $M_{(\mathfrak{M})}$. Отметим следующие свойства перехода от M к $M_{(\mathfrak{M})}$.

I. *Если* $\mathfrak{M}\eta M$, $E = P_{\mathfrak{M}}$, *то* $(M')_{(\mathfrak{M})}$ *есть совокупность тех (ограниченных) линейных операторов в пространстве* $\mathfrak{M}$, *которые перестановочны со всеми операторами*

$$C = EB \quad \text{в} \quad \mathfrak{M}, \quad B \in M. \tag{1}$$

Доказательство. Очевидно, что всякий оператор из $(M')_{(\mathfrak{M})}$ перестановочен с любым оператором C вида (1); поэтому предположим, что некоторый оператор A в пространстве $\mathfrak{M}$ перестановочен с любым оператором C вида (1), и докажем что $A \in (M')_{(\mathfrak{M})}$. Положим $\alpha = |A|$, $H = \sqrt{\alpha^2 1 - A^* A}$; тогда оператор H также перестановочен со всеми операторами C вида (1). Если поэтому $B_1, \ldots, B_n$ — произвольные операторы из кольца M, а $f_1, \ldots, f_n$ — произвольные элементы из $\mathfrak{M}$, то [1])

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^{n} B_j H f_j\right|^2 + \left|\sum_{j=1}^{n} B_j A f_j\right|^2 = \\
&\quad = \left(\sum_{j=1}^{n} B_j H f_j, \sum_{k=1}^{n} B_k H f_k\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} B_j A f_j, \sum_{k=1}^{n} B_k A f_k\right) = \\
&\quad = \sum_{j,k=1}^{n} ((HEB_k^* B_j H + A^* EB_k^* B_j A) f_j, f_k) = \\
&\quad = \sum_{j,k=1}^{n} (EB_k^* B_j (H^2 + A^* A) f_j, f_k) = \\
&\quad = \alpha^2 \sum_{j,k=1}^{n} (B_k^* B_j f_j, f_k) = \alpha^2 \left|\sum_{j=1}^{n} B_j f_j\right|^2.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$\left|\sum_{j=1}^{n} B_j A f_j\right| \leqslant \alpha \left|\sum_{j=1}^{n} B_j f_j\right|. \tag{2}$$

Положим

$$A_0 \sum_{j=1}^{n} B_j f_j = \sum_{j=1}^{n} B_j A f_j; \tag{3}$$

если $\sum\limits_{j=1}^{n} B_j f_j = 0$, то в силу неравенства (2) также $\sum\limits_{j=1}^{n} B_j A f_j = 0$; поэтому оператор A_0 определен равенством (3) однозначно на совокупности $\mathfrak{S}$ всех элементов вида $\sum\limits_{j=1}^{n} B_j f_j$. В силу неравенства (2)

[1]) Так как $Hf_k \in \mathfrak{M}$, то $EHf_k = Hf_k$.

он ограничен; его можно поэтому продолжить по непрерывности на замыкание $\mathfrak{M}_0$ совокупности $\mathfrak{S}$. Далее, $A_0 \eta M'$, ибо если $B \in M$, то

$$A_0 B \sum_{j=1}^{n} B_j f_j = A_0 \sum_{j=1}^{n} B B_j f_j = \sum_{j=1}^{n} B B_j A f_j = \\ = B \sum_{j=1}^{n} B_j A f_j = B A_0 \sum_{j=1}^{n} B_j f_j$$

и по непрерывности аналогичное равенство имеет место во всем пространстве $\mathfrak{M}_0$. Отсюда, в частности, $\mathfrak{M}_0 \eta M'$, так что $A_1 = A_0 P_{\mathfrak{M}_0} \in M'$. С другой стороны, $\mathfrak{M}_0 \supset \mathfrak{M}$; поэтому $A_{1\ (\mathfrak{M})} = A$, $A \in (M')_{(\mathfrak{M})}$.

Очевидно, совокупность операторов C вида (1) совпадает с $M_{(\mathfrak{M})}$, поэтому совокупность всех ограниченных линейных операторов в пространстве $\mathfrak{M}$, перестановочных со всеми операторами C, есть $(M_{(\mathfrak{M})})'$. Таким образом,

II. *Если $\mathfrak{M} \eta M$, то $(M_{(\mathfrak{M})})' = (M')_{(\mathfrak{M})}$.*

В частности, отсюда следует, что $M_{(\mathfrak{M})}$ и $(M')_{(\mathfrak{M})}$ — слабо замкнутые кольца.

III. *Если $\mathfrak{M}$ и E — те же, что в предложении* I, *то соответствие $A \to A_{(\mathfrak{M})}$ есть симметричный изоморфизм между*:

1°. *Кольцом всех операторов A из M таких, что $EA = AE = A$, и кольцом $M_{(\mathfrak{M})}$*;

2°. *Кольцами M' и $(M')_{(\mathfrak{M})}$.*

Доказательство. Если $A \in M$ и $EA = AE = A$, то $A = 0$ на $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}$; поэтому операторы A и $A_{(\mathfrak{M})}$ связаны соотношением $A = A_{(\mathfrak{M})} E$. Отсюда следует 1°.

Если, далее, $A, B \in M'$, то равенство $A_{(\mathfrak{M})} = B_{(\mathfrak{M})}$ означает, что $(A - B)E = 0$; но тогда согласно основной лемме п. 2 § 35, $A - B = 0$, $A = B$, т. е. соответствие между кольцами M' и $(M')_{(\mathfrak{M})}$ взаимно однозначно. Отсюда легко следует 2°.

Из 2° заключаем, что $(M')_{(\mathfrak{M})}$, а следовательно, и $M_{(\mathfrak{M})} = (M'_{(\mathfrak{M})})'$ (см. II) — факторы.

IV. *Если $\mathfrak{M}$ и E — те же, что и в предложении* I, *а F пробегает все операторы проектирования из M такие, что $FE = EF = F$, и F' — все операторы проектирования из M', то*:

1°. *$F_{(\mathfrak{M})}$ пробегает все операторы проектирования из $M_{(\mathfrak{M})}$, причем соотношение $F_{(\mathfrak{M})} \sim G_{(\mathfrak{M})}(\ldots M_{(\mathfrak{M})})$ равносильно соотношению $F \sim G(\ldots M)$*;

2°. *$F'_{(\mathfrak{M})}$ пробегает все операторы проектирования из $(M_{(\mathfrak{M})})'$, причем соотношение $F'_{(\mathfrak{M})} \sim G'_{(\mathfrak{M})}(\ldots (M_{(\mathfrak{M})})')$ равносильно соотношению $F' \sim G'(\ldots M')$.*

Доказательство. Утверждение 2° сразу следует из того, что кольца M' и $(M')_{(\mathfrak{M})}$ симметрически изоморфны. Далее, первая часть утверждения 1° следует из утверждения 1° предложения III; для доказательства второй части заметим, что соотношения

$$F \sim G(\ldots M) \tag{4}$$

и

$$F_{(\mathfrak{M})} \sim G_{(\mathfrak{M})}(\ldots M_{(\mathfrak{M})}) \tag{5}$$

означают соответственно существование частично изометрических операторов и $U \in M$ и $U_{(\mathfrak{M})} \in M_{(\mathfrak{M})}$ таких, что

$$F = U^*U, \quad G = UU^*, \quad F_{(\mathfrak{M})} = U^*_{(\mathfrak{M})}U_{(\mathfrak{M})}, \quad G_{(\mathfrak{M})} = U_{(\mathfrak{M})}U^*_{(\mathfrak{M})}; \tag{6}$$

при этом оператор U однозначно определяется по оператору $U_{(\mathfrak{M})}$, если $UE = EU = U$, и тогда в силу утверждения 1° предложения III также $F = U^*U$, $G = UU^*$. Таким образом, из соотношения (5) следует соотношение (4). Чтобы доказать обратное утверждение, достаточно показать, что оператор U в соотношениях (6) удовлетворяет условию $UE = EU = U$. Последнее, однако, следует из того, что $F\mathfrak{H} \subset \mathfrak{M}$, $G\mathfrak{H} \subset \mathfrak{M}$.

Из предложения IV вытекает, что функции

$$D_M^{(\mathfrak{M})}(F_{(\mathfrak{M})}) = D_M(F) \quad \text{при} \quad FE = F$$

и

$$D_M^{(\mathfrak{M})}(F'_{(\mathfrak{M})}) = D_{M'}(F')$$

суть относительные размерности в $M_{(\mathfrak{M})}$ и $M'_{(\mathfrak{M})}$ соответственно. Отсюда

V. *Если $\mathfrak{M}$ — конечно, то $M_{(\mathfrak{M})}$ — фактор конечного класса.*

2. Матричное описание факторов классов (I) и (II). Два кольца M_1 и M_2 в пространствах $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ называются *пространственно изоморфными*, если существует изометрическое отображение $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}_2$, при котором M_1 переходит в M_2. Очевидно, всякий пространственный изоморфизм является также полным изоморфизмом; обратное, как мы увидим ниже в п. 3 (сноска на с. 562), вообще говоря, неверно. Покажем, как можно описать некоторые классы факторов с точностью до пространственного изоморфизма.

Пусть M — фактор класса (I) или (II) и $\mathfrak{M}$ — конечное подпространство ηM. Положим $n = \dfrac{D_M(\mathfrak{H})}{D_M(\mathfrak{M})}$. В случае фактора M бесконечного класса $n = \infty$; в случае же фактора M конечного класса мы предположим, что пространство $\mathfrak{M}$ таково, что n — целое число. Тогда пространство $\mathfrak{H}$ можно представить в виде

$$\mathfrak{H} = \bigoplus_{\alpha} \mathfrak{M}_\alpha, \tag{1}$$

где $\mathfrak{M}_\alpha$ — взаимно ортогональные подпространства, эквивалентные подпространству $\mathfrak{M}$, число которых равно n, причем в случае $n = \infty$

число этих подпространств бесконечно [1]). По определению эквивалентности, существуют частично изометрические операторы $U_\alpha \in M$ с начальной областью $\mathfrak{M}_\alpha$ и конечной $\mathfrak{M}$.

Пусть
$$H = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M} \oplus \ldots$$

— прямая сумма того же числа пространств, совпадающих с $\mathfrak{M}$; оператор U, определенный соотношениями
$$U\mathfrak{M}_\alpha = U_\alpha \mathfrak{M}_\alpha$$

изометрически отображает $\mathfrak{H}$ на H; наша цель — выяснить, как описываются кольца M и M' в пространстве H.

Начнем с кольца M'. Согласно предложению III п. 1 соответствие $A \to A_{(\mathfrak{M}_\alpha)}$ есть симметричный изоморфизм между кольцами M' и $(M')_{(\mathfrak{M}_\alpha)}$. Так как $\mathfrak{M}_\alpha \eta M$, то операторы $A \in M'$ приводятся всеми этими подпространствами. Поэтому в соответствии с разложением (1) всякий оператор $A \in M'$ записывается в диагональной матричной форме
$$A \sim \|\delta_{\alpha\beta} A_\alpha\|,$$

где A_α — сужение оператора A на пространство $\mathfrak{M}_\alpha$.

Пусть A_0 — сужение оператора $A \in M'$ на пространство $\mathfrak{M}$.

При отображении U каждый из операторов A_α переходит в один и тот же оператор A_0 в пространстве $\mathfrak{M}$. Действительно, если $f \in \mathfrak{M}_\alpha$, то $A_\alpha f = Af$. При отображении U элемент f переходит в $U_\alpha f \in \mathfrak{M}$, а оператор A_α — в оператор $U_\alpha A_\alpha U_\alpha^*$. При этом
$$U_\alpha^* U_\alpha f = P_{\mathfrak{M}_\alpha} f = f, \quad A_\alpha f = Af;$$

следовательно,
$$U_\alpha A_\alpha U_\alpha^* U_\alpha f = U_\alpha A_\alpha f = U_\alpha A f = A U_\alpha f = A_0 U_\alpha f,$$

ибо в силу соотношений $U_\alpha \in M$, $A \in M'$ операторы U_α и A перестановочны.

Таким образом, при отображении U каждый из операторов $A \in M'$ изображается диагональной матрицей
$$A \sim \|\delta_{\alpha\beta} A_0\| \tag{2}$$

с одинаковыми диагональными элементами A_0, где A_0 — сужение оператора A на $\mathfrak{M}$.

В силу соотношения $M = M''$ кольцо M в пространстве H должно состоять из всех (ограниченных, если они бесконечны) матриц $B \sim \|B_{\alpha\beta}\|$, где $B_{\alpha\beta}$ — операторы в $\mathfrak{M}$, перестановочные со всеми

[1]) Если $\mathfrak{H}$ сепарабельно, то число подпространств $\mathfrak{M}_\alpha$ не более чем счетно; вообще же оно может быть и несчетным.

матрицами вида (2). Условие перестановочности этих матриц сводится к равенствам

$$A_0 B_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} A_0,$$

следовательно, к условию $B_{\alpha\beta} \in ((M')_{(\mathfrak{M})})'$. Согласно предложению II п. 1 это последнее кольцо совпадает с $(M_{(\mathfrak{M})})'' = M_{(\mathfrak{M})}$.

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть M — фактор класса* (I) *или* (II), *а $\mathfrak{M} \eta M$ — конечное подпространство такое, что*

$$n = \frac{D_M(\mathfrak{H})}{D_M(\mathfrak{M})}$$

— целое число в случае фактора M конечного класса [1]). *Тогда кольцо M пространственно изоморфно кольцу всех матриц $A \sim \|A_{\alpha\beta}\|$ порядка n* (*ограниченных при $n = \infty$*), *где $A_{\alpha\beta} \in M_{(\mathfrak{M})}$. При этом кольцо M' будет состоять из всех диагональных матриц $A \sim \|\delta_{\alpha\beta} A_0\|$, $A_0 \in M'_{(\mathfrak{M})}$.*

3. Описание факторов класса (I). Пусть $\mathfrak{H}_0$ — произвольное конечномерное или бесконечномерное гильбертово пространство. Кольцо всех ограниченных операторов в $\mathfrak{H}_0$ обозначим через $\mathfrak{B}_0$. Составим прямую сумму

$$\mathfrak{H} = \oplus \mathfrak{H}_0$$

в произвольном числе. Каждому ограниченному оператору $A \in \mathfrak{B}_0$ в $\mathfrak{H}_0$ поставим в соответствие диагональный оператор $A^{(1)}$ в $\mathfrak{H}$, определенный матрицей $\|\delta_{pq} A\|$, $\delta_{pq} = \begin{cases} 0, & p \neq q, \\ 1, & p = q. \end{cases}$ Другими словами, оператор $A^{(1)}$ определен в $\mathfrak{H}$ равенством

$$A^{(1)}\{f_p\} = \{A f_p\}.$$

Очевидно, $A^{(1)}$ — ограниченный оператор в $\mathfrak{H}$ с той же нормой, что и A. Совокупность всех операторов $A^{(1)}$, $A \in \mathfrak{B}_0$, обозначим $\mathfrak{B}_0^{(1)}$. Так как соответствие $A \sim A^{(1)}$ есть полный изоморфизм [2]) колец $\mathfrak{B}_0$ и $\mathfrak{B}_0^{(1)}$, то $\mathfrak{B}_0^{(1)}$ — фактор. Всякий фактор, пространственно изоморфный кольцу $\mathfrak{B}_0^{(1)}$, мы будем называть *прямым фактором* [3]).

---

[1]) Следовательно, $\mathfrak{M}$ — произвольное конечное подпространство в случае фактора M бесконечного класса.

[2]) Отметим, что изоморфизм $A \sim A^{(1)}$ не будет пространственным. Действительно, пространственный изоморфизм должен был бы также изоморфно отображать $\mathfrak{B}'_0$ на $\mathfrak{B}_0^{(1)'}$, что невозможно, ибо $\mathfrak{B}'_0 = (\alpha 1)$, а $\mathfrak{B}_0^{(1)'} \neq (\alpha 1)$.

[3]) Мюррей и фон Нейман дают другое, равносильное этому определение прямого фактора, основанное на развитой ими теории прямого произведения пространств. Не имея возможности, за недостатком места, остановиться на этой теории, мы отсылаем читателя к статьям Мюррея и фон Неймана [1]

Из этого определения непосредственно следует, что

I. *Всякий прямой фактор вполне изоморфен кольцу* $\mathfrak{B}_0$.

Все подпространства пространства $\mathfrak{H}_0$ присоединены к $\mathfrak{B}_0$; они эквивалентны относительно $\mathfrak{B}_0$ тогда и только тогда, когда имеют одинаковую размерность, и относительная размерность совпадает с обычной размерностью. В частности, подпространство конечно относительно $\mathfrak{B}_0$ тогда и только тогда, когда оно конечномерно в обычном смысле. Отсюда в стандартной нормировке $D_{\mathfrak{B}_0}(\mathfrak{M})$ принимает значения 1, 2, 3, …, ∞, если $\mathfrak{H}_0$ конечномерно, и 1, 2, 3, …, ∞, если $\mathfrak{H}_0$ бесконечномерно. (Минимальным здесь будет, очевидно, любое одномерное подпространство.) Так как функция $D(\mathfrak{M})$ инвариантна по отношению к полному изоморфизму колец, то на основании I

II. *Всякий прямой фактор принадлежит дискретному классу.*

Мы покажем теперь, что верно также и обратное утверждение, т. е. что всякий фактор дискретного класса является прямым фактором. Для этого докажем сначала следующее предложение.

III. *Пространство* $\mathfrak{M}_f^M$ $(f \neq 0)$ *минимально тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{M}_f^M \cap \mathfrak{M}_f^{M'} = \{\alpha f\}$, *так что пространства* $\mathfrak{M}_f^M$ *и* $\mathfrak{M}_f^{M'}$ *минимальны одновременно.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M}_f^{M'}$ минимально; положим $E = E_f^{M'}$, $E' = E_f^M$. Тогда $E \in M$, $E' \in M'$; следовательно, операторы E и E' перестановочны. Кроме того, $Ef = f$; отсюда

$$\mathfrak{M}_f^{M'} \cap \mathfrak{M}_f^M = E\mathfrak{M}_f^M = \overline{\{Eaf\colon A \in M\}} = \overline{\{EAEf\colon A \in M\}}.$$

Пусть $\overline{M}$ — совокупность всех тех операторов из кольца M, которые удовлетворяют условию $EB = BE = B$. Очевидно, $\overline{M}$ — кольцо и состоит из всех операторов EAE, $A \in M$. Поэтому $\mathfrak{M}_f^{M'} \cap \mathfrak{M}_f^M = \overline{\{Bf\colon B \in \overline{M}\}}$. Если P — оператор проектирования из кольца $\overline{M}$, то $EP = PE = P$, т. е. $P \leqslant E$. В силу минимальности оператора E отсюда следует, что либо $P = 0$, либо $P = E$. Таким образом (см. следствие 6 п. 2 § 34), $\overline{M}^P = \{0, E\}$, $\overline{M} = R(\overline{M}^P) = R(0, E) = (\alpha E)$ и

$$\mathfrak{M}_f^{M'} \cap \mathfrak{M}_f^M = \{\alpha Ef\} = \{\alpha f\}. \tag{1}$$

Обратно, пусть соотношение (1) имеет место и пусть пространство $\mathfrak{M}_f^M$ не минимально; тогда существует отличное от (0) и присоединенное к кольцу M' подпространство $\mathfrak{N}$ такое, что $\mathfrak{N} \subsetneqq \mathfrak{M}_f^M$. Положим $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{M}_f^M \ominus \mathfrak{N}$; тогда $\mathfrak{N}_1 \neq (0)$, $\mathfrak{N}_1 \eta M'$. Согласно основной лемме п. 2 § 35, отсюда следует, что $P_{\mathfrak{N}}E \neq 0$, $P_{\mathfrak{N}_1}E \neq 0$, т. е.

$$\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_f^{M'} \neq (0), \quad \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{M}_f^{M'} \neq (0);$$

и фон Неймана [7], а также к монографии Диксмье [14], в которых она изложена.

с другой стороны, $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_f^{M'} \subset \mathfrak{M}_f^M \cap \mathfrak{M}_f^{M'} = \{\alpha f\}$, $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{M}_f^{M'} \subset \mathfrak{M}_f^M \cap \cap \mathfrak{M}_f^{M'} = \{\alpha f\}$, так что $f \in \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_f^{M'}$, $f \in \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{M}_f^{M'}$. Но последнее невозможно, ибо эти подпространства взаимно ортогональны.

Из III вытекает, что

IV. *Факторы M и M' одновременно принадлежат или не принадлежат классу* (I).

Пусть теперь M — фактор класса (I), следовательно, M' — также фактор класса (I). Пусть $\mathfrak{M}$ — минимальное подпространство, присоединенное к M'. Применим к фактору M' и подпространству $\mathfrak{M}$ теорему 1 п. 2. Тогда роль кольца M' играет $M'' = M$; следовательно, кольцо M состоит из всех диагональных матриц вида $A \sim \|\delta_{pq} A_0\|$, где $A_0 \in M_{(\mathfrak{M})} = (M'_{(\mathfrak{M})})'$.

Пусть F пробегает все операторы проектирования из M', удовлетворяющие условию $F \leqslant P_{\mathfrak{M}}$; согласно предложению IV п. 1 $F_{\mathfrak{M}}$ пробегает тогда все операторы проектирования из $(M')_{(\mathfrak{M})}$. Но в силу минимальности пространства $\mathfrak{M}$ относительно M' оператор F принимает только два значения: $F = 0$ и $F = P_{\mathfrak{M}}$; следовательно, кольцо $(M')_{(\mathfrak{M})}$ не содержит других операторов проектирования, кроме 0 и 1. Согласно следствию 6 п. 2 § 34 отсюда заключаем, что $(M')_{(\mathfrak{M})} = R(0, 1) = (\alpha 1)$. Поэтому $M_{(\mathfrak{M})} = ((M')_{(\mathfrak{M})})' = (\alpha 1)' = \mathfrak{B}_0$, где $\mathfrak{B}_0$ обозначает кольцо всех ограниченных линейных операторов в пространстве $\mathfrak{M}$.

Тем самым доказана

Теорема 2. *Фактор тогда и только тогда принадлежит дискретному классу, когда он прямой, следовательно, когда он вполне изоморфен кольцу $\mathfrak{B}_0$ всех ограниченных линейных операторов в некотором конечномерном или бесконечномерном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_0$. При этом если $\mathfrak{H}_0$ конечномерно, то M — конечного класса* I_n. *Отсюда следует, что все факторы данного конечного класса* (I_n), $n = 1, 2, \ldots,$ *и также все факторы класса* (I_∞) *в сепарабельном пространстве вполне изоморфны между собой, так что в случае* (I_n) *и в сепарабельном случае* (I_∞) *относительная размерность образует полную систему инвариантов по отношению к полному изоморфизму колец.*

4. Структура факторов класса (II_∞). Теорема 1 п. 2 дает возможность описать факторы класса (II_∞) при помощи факторов класса (II_1). Именно, пусть M — фактор класса (II_∞) и $\mathfrak{M}$ — конечное подпространство, присоединенное к кольцу M. Согласно предложению V п. 1 кольцо $M_{(\mathfrak{M})}$ есть фактор класса (II_1). Поэтому, применяя теорему 1 п. 2 к фактору M и подпространству $\mathfrak{M}$, получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Всякий фактор M класса* (II_∞) *пространственно изоморфен кольцу всех ограниченных бесконечных матриц $A \sim \sim \|A_{\alpha\beta}\|$, где $A_{\alpha\beta}$ — операторы из фиксированного фактора класса* (II_1).

Эта теорема сводит изучение факторов класса (II_∞) к изучению факторов класса (II_1).

5. Пример фактора класса (II$_1$). Задача изучения структуры факторов класса (II$_1$) до сих пор еще не разрешена. Имеются только отдельные примеры и известно, что имеются неизоморфные факторы класса (II$_1$).

Мы приведем здесь наиболее простой пример фактора класса (II$_1$). Пусть $\mathfrak{G}$ — счетная дискретная группа, удовлетворяющая условию [1]:

$$\text{при } a \in e \text{ класс } \mathfrak{E}_a \text{ всех элементов } c^{-1}ac,\ c \in \mathfrak{G}, \text{ бесконечен.} \tag{A}$$

Образуем гильбертово пространство $\mathfrak{H}$, элементами которого являются всевозможные системы $f = \{x_a,\, a \in \mathfrak{G}\}$ комплексных чисел x_a, удовлетворяющие условию

$$\sum_{a \in \mathfrak{G}} |x_a|^2 < \infty,$$

причем скалярное произведение двух векторов $f = \{x_a,\, a \in \mathfrak{G}\}$ и $g = \{y_a,\, a \in \mathfrak{G}\}$ определяется формулой

$$(f, g) = \sum_{a \in \mathfrak{G}} x_a \overline{y}_a.$$

Введем в пространстве $\mathfrak{H}$ операторы U_{a_0}, V_{a_0}, $a_0 \in \mathfrak{G}$, положив

$$U_{a_0}\{x_a,\, a \in \mathfrak{G}\} = \{x_{aa_0},\, a \in \mathfrak{G}\},$$
$$V_{a_0}\{x_a,\, a \in \mathfrak{G}\} = \{x_{a_0^{-1}a},\, a \in \mathfrak{G}\}.$$

Очевидно, U_{a_0}, V_{a_0} — унитарные операторы в $\mathfrak{H}$.

Пусть M_1 — кольцо всех ограниченных линейных операторов A, перестановочных со всеми операторами V_{a_0}, а M_2 — кольцо всех ограниченных линейных операторов B, перестановочных со всеми операторами U_{a_0}. Каждый оператор U_{a_0} перестановочен с каждым оператором V_{b_0}; поэтому

$$U_{a_0} \in M_1, \quad V_{a_0} \in M_2 \quad \text{для всех} \quad a_0 \in \mathfrak{G}. \tag{1}$$

Всякий ограниченный оператор A в $\mathfrak{H}$ можно представить в виде ограниченной числовой матрицы $A \sim \|\eta_{a,\,b}\|_{a,\,b \in \mathfrak{G}}$. Если $A \in M_1$, то, как легко видеть, условие перестановочности с операторами V_{a_0} дает $\eta_{a_0 a,\, a_0 b} = \eta_{a,\,b}$. Положив здесь $a_0 = a^{-1}$, получим

$$\eta_{a,\,b} = \eta_{e,\,a^{-1}b} = \eta_{a^{-1}b},$$

где введено обозначение $\eta_c = \phi_{e,\,c}$.

Итак, матрица оператора $A \in M_1$ должна иметь вид

$$A \sim \|\eta_{a^{-1}b}\|_{a,\,b \in \mathfrak{G}}.$$

---

[1] Примером такой группы является группа всех преобразований $x' = ax + b$, $a > 0$, с рациональными коэффициентами a, b.

Аналогично, матрица оператора $B \in M_2$ должна иметь вид

$$B \sim \|\zeta_{ab^{-1}}\|_{a,\, b \in \mathfrak{G}}.$$

Докажем, что $M_1' = M_2$ и $M_2' = M_1$. Для этого заметим, что каждая матрица $\eta = \|\eta_{ab^{-1}}\|$ перестановочна с каждой матрицей $\zeta = \{\zeta_{ab^{-1}}\|$. Действительно,

$$\eta\zeta = \left\| \sum_c \eta_{a^{-1}c} \zeta_{cb^{-1}} \right\|, \quad \zeta\eta = \left\| \sum \zeta_{zc^{-1}} \eta_{c^{-1}b} \right\|.$$

Полагая в первой сумме $c = ac'^{-1}b$, получаем

$$\sum_c \eta_{a^{-1}c} \zeta_{cb^{-1}} = \sum_{c'} \eta_{a^{-1}ac'^{-1}b} \zeta_{ac'^{-1}bb^{-1}} = \sum \eta_{c'^{-1}b} \zeta_{zc'^{-1}};$$

следовательно, $\eta\zeta = \zeta\eta$. Отсюда

$$M_2 \subset M_1', \quad M_1 \subset M_2'. \tag{2}$$

С другой стороны, из соотношений (1) вытекает, что

$$M_1 = \{R(V_{a_0}\colon a_0 \in \mathfrak{G})\}' \supset M_2', \tag{3}$$

$$M_2 = \{R(U_{a_0}\colon a_0 \in \mathfrak{G})\}' \supset M_1'. \tag{4}$$

Сравнивая соотношения (3), (4) и (2), мы видим, что

$$M_1 = M_2' = R(U_{\alpha_0}\colon a_0 \in \mathfrak{G}), \quad M_2 = M_1' = R(V_{a_0}\colon a_0 \in \mathfrak{G}).$$

Найдем пересечение $M_1 \cap M_2$. Если оператор A принадлежит этому пересечению, то его матрица $\|\eta_{a,\, b}\|$ должна удовлетворить обоим условиям:

$$\eta_{a_0 a,\, a_0 b} = \eta_{a a_0,\, b a_0} = \eta_{a,\, b}.$$

Из первого условия, как мы видели, следует, что $\eta_{a,\, b} = \eta_{a^{-1}b}$. Применение второго дает тогда, что

$$\eta_{a_0^{-1} a^{-1} b a_0} = \eta_{a^{-1}b},$$

т. е. что функция η_a, $a \in \mathfrak{G}$, постоянна на каждом классе $\mathfrak{E}_a$. С другой стороны, в силу ограниченности матрицы $\|\eta_{a,\, b}\|$ должно быть

$$\sum_{c \in \mathfrak{G}} |\eta_c|^2 = \sum_{c \in \mathfrak{G}} |\eta_{e,\, c}|^2 < \infty. \tag{5}$$

Так как согласно условию (A) класс $\mathfrak{E}_a$ бесконечен при $a \neq e$, то соблюдение условия (5) возможно только в том случае, когда постоянное значение функции η_c на $\mathfrak{E}_a$ равно нулю. Таким образом, $\eta_c = 0$ при $c \neq e$; следовательно, $\eta_{a,\, b} = \delta_{a,\, b} \eta_e$, где

$$\delta_{a,\, b} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad a = b, \\ 0 & \text{при} \quad a \neq b. \end{cases}$$

Это означает, что кольцо $M_1 \cap M_2 = M_1 \cap M_1' = M_2 \cap M_2$ состоит из скаляров $\alpha 1$, т. е. что M_1, M_2 — факторы.

Докажем, что они — факторы класса (II_1). Рассмотрим, например, фактор M_1. Каждому оператору $A \sim \|\eta_{a^{-1}b}\|$ из M_1 поставим в соответствие число

$$T(A) = \eta_e$$

и докажем, что полученная таким образом функция $T(A)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 п. 2 § 37. Во-первых, очевидно, что $T(1) = 1$, $T(\alpha A) = \alpha T(A)$, $T((A + B) = T(A) + T(B)$, так что условия 1°, 2°, 3° теоремы 1 п. 2 § 37 выполнены. Далее, если A — положительно определенный эрмитов оператор из M_1, то $A = B^*B$, где $B \in M_1$. Пусть $A \sim \|\eta_{a^{-1}b}\|$, $B \sim \|\zeta_{a^{-1}b}\|$; тогда

$$\eta_{a^{-1}b} = \sum_c \overline{\zeta}_{c^{-1}a} \zeta_{c^{-1}b};$$

следовательно, при $a = b = e$

$$T(A) = \eta_e = \sum_c \|\zeta_{c^{-1}}\|^2 \geqslant 0,$$

причем знак равенства возможен только тогда, когда $\zeta_c \equiv 0$, т. е. когда $A = 0$. Условия 4° и $6'$ тем самым проверены. Аналогично можно доказать, что $T(AB) = T(BA)$ для любых A, $B \in M_1$.

Таким образом, функция $T(A)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2 п. 2 § 37. Следовательно, согласно этой теореме M_1 — фактор конечного класса. С другой стороны, случай (I_n) здесь невозможен, ибо M_1 содержит бесконечное множество линейно независимых элементов U_{a_0}. Следовательно, M_1 — фактор класса (II_1). Аналогично можно доказать, что M_2 — фактор класса (II_1).

Путем усложнения этой конструкции можно также построить пример фактора класса (III) (см. фон Нейман [1]). Другое построение примеров факторов классов (I) и (II), основанное на понятии прямого произведения гильбертовых пространств в конечном или бесконечном (даже несчетном) числе, дано в статье фон Неймана [7].

Еще более общий прием построения факторов класса (II) был затем указан Райтом [1] и факторов классов (II) и (III) — в монографии Диксмье [14].

6. Аппроксимативно конечные факторы класса (II_1). Фактор M называется *аппроксимативно конечным*, если существует последовательность факторов $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \ldots \subset M$ конечных классов (I_{n_1}), (I_{n_2}), (I_{n_3}), … такая, что $R(M_1, M_2, M_3, \ldots) = M$. Очевидно, аппроксимативная конечность фактора есть инвариант при симметричном изоморфизме колец. Оказывается, что (Мюррей и фон Нейман [1], теорема XIII) всякий фактор класса (II_1) содержит подкольцо, которое является аппроксимативно конечным фактором класса (II_1). С другой стороны, в той же статье показано, что *существуют также* *не аппроксимативно конечные факторы класса* (II_1). Тем самым показано, что существуют неизоморфные факторы класса (II_1).

Дж. Шварц [1, 2] построил пример двух неизоморфных между собой неаппроксимативно конечных факторов класса (II), а также пример по крайней мере трех неизоморфных между собой факторов класса (III); ранее Пукански [4] построил пример двух неизоморфных факторов класса (III). Недавно Пауэрс [1*] построил континуум попарно неизоморфных факторов класса (III).

7. Соотношение между классами факторов M и M'. Выше мы видели (см. IV п. 3), что M и M' одновременно принадлежат или не принадлежат классу (I). Этот результат допускает следующее обобщение (см. Мюррей и фон Нейман [1], I).

Теорема 4. *Факторы M и M' одновременно принадлежат или не принадлежат классу* (I), (II) *или* (III) *и* $D_M(\mathfrak{M}_f^{M'}) = CD_{M'}(\mathfrak{M}_f^M)$ *для любого* $f \neq 0$, *где C — некоторая постоянная. При этом в случае фактора класса* (I) $C = 1$, *если нормировка функций D_M и $D_{M'}$ стандартна. В случае факторов класса* (I) *для M и M' возможна любая комбинация* (I_n) *и* (I_m), $n, m = 1,\ 2,\ \ldots, \infty$; *в случае же факторов класса* (II) *для M и M' возможна любая из комбинаций* (II_1) *и* (II_1), (II_1) *и* (II_∞), (II_∞) *и* (II_∞) *с любым положительным значением постоянной C.*

8. Соотношение между симметричным и пространственным изоморфизмами. Фактору M класса (I) или (II) поставим в соответствие число
$$\theta = \frac{1}{C}\,\frac{D_{M'}(\mathfrak{H})}{D_M(\mathfrak{H})},$$
где C — постоянная, определенная теоремой 4 п. 7. Если $D_{M'}(\mathfrak{H})$ и $D_M(\mathfrak{H})$ не одновременно бесконечны, то θ определено и не зависит от нормировки функций $D_{M'}$ и D_M; если же $D_{M'}(\mathfrak{H})$ и $D_M(\mathfrak{H})$ оба бесконечны, то под θ подразумеваем символ $\frac{\infty}{\infty}$. Оказывается (см. Мюррей и фон Нейман [1], II теорема X), что *два фактора M_1 и M_2 в сепарабельних пространствах $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ пространственно изоморфны тогда и только тогда, когда факторы M_1 и M_1' симметрично изоморфны факторам M_2 и M_2' соответственно, и θ для обоих факторов M_1, M_2 одно и то же.*

По поводу различных обобщений этого результата см. Диксмье [12, 14] и Гриффин [1].

9. Неограниченные операторы, присоединенные к фактору конечного класса. Пусть M — фактор конечного класса; обозначим через U_M совокупность всех замкнутых линейных операторов $A\eta M$ с областью определения $\mathfrak{D}(A)$, плотной в $\mathfrak{H}$. Тогда любой (некоммутативный) многочлен от операторов из U_M определен на плотном в $\mathfrak{H}$ множестве и допускает замыкание. Действия с этими замыканиями и переход к сопряженному оператору производятся по обычным правилам матричной алгебры. Всякий симметрический оператор $H \in U_M$ — самосопряженный, и если A_1, $A_2 \in U_M$, $A_1 \subset A_2$, то $A_1 = A_2$. По поводу доказательства всех этих результатов см. Мюррей и фон Нейман [1], I теорема XV.

§ 39. Унитарные кольца и кольца со следом

1. Определение унитарного кольца. X называется *унитарным кольцом*, если:

1) X — симметричное кольцо;
2) X — евклидово пространство;
3) $(xy, z) = (y, x^* z)$ для любых x, y, $z \in X$;
4) $(x, y) = (y^*, x^*)$ для любых x, $y \in X$;
5) для каждого $x \in X$ оператор $U_x y = xy$ непрерывен на X;
6) элементы вида xy, x, $y \in X$ образуют плотное множество в X.

Очевидно, всякое гильбертово кольцо (см. п. 5 § 25) есть унитарное кольцо; обратное, вообще говоря, неверно. Отличие состоит в том, что унитарное кольцо не обязало быть нормированным кольцом с нормой $|x| = \sqrt{(x, x)}$, т. е. обязано удовлетворять неравенству $|xy| \leqslant |x|\,|y|$; кроме того, унитарное кольцо может быть неполным.

2. Определение кольца со следом. Пусть M — слабо замкнутое кольцо ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве, содержащее единицу; обозначим через M_+ совокупность всех положительно определенных эрмитовых операторов из M. *Следом* на M называется всякая функция $T(H)$, определенная на M_+, со значениями из интервала $[0, +\infty)$, удовлетворяющая условиям:

1) $T(UHU^{-1}) = T(H)$ для всех унитарных $U \in M$;
2) если $H \in M_+$ и $T(H) = 0$, то $H = 0$;
3) если $H \in M_+$ и H есть сумма сильно сходящегося ряда операторов $H_\alpha \in M_+$, то $T(H) = \sum\limits_\alpha T(H_\alpha)$.

Кольцо M, на котором задан след $T(H)$, называется *кольцом со следом*.

Примерами колец со следом являются факторы классов (I) и (II).

3. Унитарное кольцо, определенное следом. Пусть M — кольцо со следом $T(H)$. Оператор A из M называется *конечным*, если он есть конечная линейная комбинация операторов M_+ с конечным следом; обозначим через M_1 совокупность всех конечных операторов из M.

Оператор A из M называется *нормируемым*, если $T(A^*A) < \infty$; обозначим через M_2 совокупность всех нормируемых операторов из M. Из соотношения [1]) $(A+B)^*(A+B) \leqslant 2(A^*A + B^*B)$ и свойств следа

[1]) $A \leqslant B$ для эрмитовых операторов, как всегда, означает, что $(Af, f) \leqslant (Bf, f)$ для всех $f \in \mathfrak{H}$.

мы заключаем, что M_2 — подпространство в M; отсюда легко следует, что $B^*A \in M_1$, если $A, B \in M_2$. Поэтому можно определить в M_2 скалярное произведение, положив $(A, B) = T(B^*A)$. Мы приходим к следующей теореме, подробное доказательство которой опускаем (см. Годман [11]).

Теорема 1. *Пусть M — кольцо со следом $T(H)$; тогда совокупность M_2 всех нормируемых операторов из M, снабженная естественной инволюцией $A \to A^*$ и скалярным произведением*

$$(A, B) = T(B^*A),$$

есть унитарное кольцо.

4. Канонический след в унитарном кольце. Оказывается, что способ построения унитарного кольца по следу, описанный в п. 3, дает возможность получить любое унитарное кольцо, точнее, всякое унитарное кольцо можно включить в другое унитарное кольцо, полученное описанным выше способом при помощи следа. Чтобы это доказать, рассмотрим сначала некоторые простые свойства унитарного кольца.

Пусть X — унитарное кольцо. Обозначим через $\mathfrak{H}$ пополнение евклидова пространства X; тогда $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство. Из свойства 5 унитарного кольца (см. п. 1) вытекает, что оператор $U_x y = xy$, $x, y \in X$, продолжается, и притом единственным образом, до ограниченного линейного оператора в $\mathfrak{H}$; этот оператор в $\mathfrak{H}$ снова обозначим U_x.

Очевидно, соответствие $x \to U_x$ есть гомоморфизм, причем свойство 3 из п. 1 означает, что этот гомоморфизм симметричен.

Обозначим через $M(X)$ слабо замкнутое кольцо, порожденное операторами U_x.

Применяя свойство 4 из п. 1, легко показать, что оператор $V_x y = yx$ также ограничен на X и потому продолжается единственным образом до ограниченного линейного оператора в $\mathfrak{H}$; этот оператор в $\mathfrak{H}$ мы снова обозначим V_x.

Элемент $f \in \mathfrak{H}$ называется *ограниченным*, если существует ограниченный линейный оператор U_f такой, что

$$U_f x = V_x f \quad \text{для всех} \quad x \in X.$$

Определим теперь в $M_+(X)$ след, положив

$$T(H) = \begin{cases} (f, f), \text{ если } \sqrt{H} = U_f \text{ при некотором ограниченном } f \in \mathfrak{H}, \\ +\infty \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Мы предоставляем читателю доказательство того, что все аксиомы следа (см. п. 2) будут выполнены (подробное доказательство см. Годман [11]). Пользуясь каноническим представлением $A = WH$, получаем, что оператор A из $M(X)$ нормируем тогда и только тогда, когда $A = U_f$

при некотором ограниченном $f \in \mathfrak{H}$, причем для двух нормируемых $A = U_f$, $B = U_\varphi$

$$T(B^* A) = (f, \varphi).$$

Мы приходим к следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть X — унитарное кольцо, $\mathfrak{H}$ — пополнение евклидова пространства X, $M(X)$ — слабо замкнутое кольцо, порожденное операторами U_x, $x \in X$. Тогда в $M(X)$ существует и притом только один след $T(A)$, обладающий следующими свойствами*:

1) *оператор $A \in M(X)$ нормируем тогда и только тогда, когда $A = U_f$ при некотором ограниченном $f \in \mathfrak{H}$*;
2) *для любых двух нормируемых $A = U_f$, $B = U_\varphi$*

$$T(B^* A) = (f, \varphi);$$

в частности, $(x, y) = T(U_y^* U_x)$ для любых $x, y \in X$.

След $T(H)$, определенный таким образом по данному унитарному кольцу X, называется *каноническим следом* в X. Вообще в $M(X)$ может существовать и другой след; например, всякая функция $T'(H) = T(AH)$, где A — положительно определенный оператор из центра кольца $M(X)$, есть также след в $M(X)$. Отсюда видно, что для единственности следа в $M(X)$ с точностью до постоянного множителя необходимо, чтобы кольцо $M(X)$ было фактором. Унитарное кольцо X называется *неприводимым*, если $M(X)$ — фактор. В силу результатов § 37 неприводимость есть не только необходимое, но и достаточное условие для единственности следа с точностью до постоянного множителя.

Следовательно, в случае неприводимого кольца канонический след с точностью до множителя совпадает с относительным следом в $M(X)$ и теорема 2 дает непосредственный способ построения относительного следа в $M(X)$.

Теорема 3. *Пусть R — симметричное кольцо ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве и $M = R''$; предположим, что*:

а) *M есть замыкание кольца R в сильной топологии*;
б) *M есть фактор класса* (I) *или* (II);
в) *если S — относительный след в M, то $S(A^* A) < +\infty$ для всех $A \in R$.*

Тогда кольцо R, снабженное естественной инволюцией $A \to A^*$ и скалярным произведением $(A, B) = S(B^* A)$, есть неприводимое унитарное кольцо. При этом:

α). *Пополнение $\mathfrak{H}$ евклидова пространства R по скалярному произведению $(A, B) = S(B^* A)$ изоморфно пополнению унитарного кольца M_2, образованного из нормированных элементов кольца M.*

β). Кольцо[1] *$M(R)$ изоморфно кольцу M, причем изоморфизм M на $M(R)$ определяется тем, что он должен быть слабо непрерывным на единичном шаре кольца M и относить каждому $A \in R$ оператор $U_A \in M(R)$, определенный на R равенством $U_A B = AB$.*

γ). Канонический след T на $M(R)$ задается формулой

$$T(U_H) = S(H) \quad \textit{для всех} \quad H \in M_+(R),$$

где $A \to U_A$ — определенный выше изоморфизм кольца M на $M(R)$.

Доказательство состоит в проверке того, что:

1) соответствие $A \to U_A$, определенное формулой $U_A B = AB$, действительно определяет изоморфизм кольца M на $M(R)$;

2) R с инволюцией $A \to A^*$ и скалярным произведением $(A, B) = S(B^* A)$ удовлетворяет всем аксиомам унитарного кольца;

3) функция $T(U_H) = S(H)$, $H \in M_T(R)$, удовлетворяет всем аксиомам следа и постоянный множитель, которым она может отличаться от канонического следа, в данном случае равен единице.

Результаты § 33–38 принадлежат Мюррею и фон Нейману (см. Мюррей и фон Нейман [1] и фон Нейман [1, 4, 8]), § 39 — Годману [11]; теорема, близкая к теореме 3 § 39 (но только для факторов конечного класса), имеется в статье Мюррея и фон Неймана [1], II.

В дальнейшем результаты Мюррея и фон Неймана получили развитие в многочисленных работах. Из них наибольший интерес представляют работы Диксмье [2–13] (см. также монографию Диксмье [14], где дано более подробное изложение материала этой главы и добавлены многие новые результаты), Годмана [8, 11, 12], Капланского [17] и Сигала [8–13]. В работах Диксмье понятие следа обобщается на произвольные слабо замкнутые кольца (причем значениями следа являются уже не числа, а операторы из центра кольца), и классификация (классы I, II, III, конечные и др.) переносится на произвольные слабо замкнутые кольца (не обязательно факторы). В статье Капланского [17] дано аксиоматическое построение теории (см. также Диксмье [11], Сакаи [5] и Рейд [1]). В работах Сигала развивается теория некоммутативного интегрирования; кроме того, результаты § 33–38 применяются Сигалом в теории унитарных представлений групп.

Представляют также интерес работы Фаглида и Кейдисона [1–3], в которых строится теория определителей в факторах конечного класса (см. еще Паллю де ла Барьер [1]).

Результаты § 33–39 были применены Годманом [8, 11, 12] в развитой им теории характеров некоммутативных групп, являющейся обобщением результатов Гельфанда и Наймарка [7]. Понятие коммутативного унитарного кольца, близкое к изложенному в этом параграфе,

---

[1] Напомним (см. с. 570), что $M(X)$ обозначает слабо замкнутое кольцо операторов, порожденное операторами U_x, $x \in X$.

и теория коммутативных унитарных колец были впервые даны в статье Рохлина [1].

О приложениях теории вполне регулярных колец и слабо замкнутых колец операторов к квантовой механике см., например, Борчерс [1, 2], Допличер [1], Кастлер [1], Лупиас и Миракль-Соль [1] и Рюелль [1].

Аналогом слабо замкнутых колец операторов являются жордановы алгебры. Так называется множество $\mathfrak{A}$ ограниченных самосопряженых операторов в гильбертовом пространстве, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\mathfrak{A}$ — вещественное линейное пространство;
2) $\mathfrak{A}$ замкнуто в слабой операторной топологии;
3) если $a, b \in \mathfrak{A}$, то $a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba) \in \mathfrak{A}$.

Конечномерные жордановы алгебры изучены в работе Жордана, фон Неймана и Вигнера [1]. В статье Стермера [2] дана классификация жордановых алгебр, являющихся аналогом факторов класса I_n.

Глава VIII

РАЗЛОЖЕНИЕ КОЛЬЦА ОПЕРАТОРОВ НА НЕПРИВОДИМЫЕ КОЛЬЦА

§ 40. Постановка задачи; каноническая форма коммутативного кольца операторов в гильбертовом пространстве

1. Постановка задачи. Множество S ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ называется *неприводимым*, если в $\mathfrak{H}$ не существует замкнутого подпространства, отличного от (0) и всего $\mathfrak{H}$ и инвариантного относительно всех операторов $A \in S$; в противном случае S называется *приводимым*. В частности, симметричное кольцо $R \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ называется *неприводимым* или *приводимым*, если оно — неприводимое или соответственно приводимое множество.

Если R — симметричное кольцо линейных операторов в конечномерном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и если R приводимо, то в $\mathfrak{H}$ существует подпространство $\mathfrak{M}$, отличное от (0) и $\mathfrak{H}$, инвариантное относительно всех операторов $A \in R$. Но тогда ортогональное дополнение $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}$ также инвариантно относительно всех операторов $A \in R$. Операторы $A \in R$, рассматриваемые только на $\mathfrak{M}$, образуют кольцо $R_{\mathfrak{M}}$ операторов в $\mathfrak{M}$, которое называется *частью* исходного кольца R в $\mathfrak{M}$. Если $R_{\mathfrak{M}}$ приводимо, то можно снова разложить $\mathfrak{M}$ на взаимно ортогональные подпространства и то же можно сделать и с $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}$. Так как $\mathfrak{H}$ конечномерно, то, повторяя это конечное число раз, мы придем к разложению $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_n$ пространства $\mathfrak{H}$ на ортогональную сумму конечного числа инвариантных относительно R подпространств, в каждом из которых R (точнее, часть $R_k = R_{\mathfrak{M}_k}$ кольца R) неприводимо. Мы будем говорить, что разложение $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathfrak{M}_k$ осуществляет *разложение кольца R на неприводимые кольца R_k.*

Отметим, что в соответствии с этим разложением всякий элемент $\xi \in \mathfrak{H}$ представляется в виде

$$\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}, \quad \xi_k \in \mathfrak{M}_k, \tag{1}$$

а оператор $A \in R$ задается формулой

$$A\xi = \{A_1\xi_1, A_2\xi_2, \ldots, A_n\xi_n\}, \tag{2}$$

где $A_k \in R_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

В случае бесконечномерного пространства $\mathfrak{H}$ предыдущее рассуждение уже не проходит. Чтобы увидеть, как следует видоизменить это рассуждение, рассмотрим случай замкнутого по норме симметричного коммутативного кольца R ограниченных линейных операторов в произвольном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Тогда R изоморфно кольцу всех непрерывных функций $a(t)$ на локально бикомпактном пространстве[1] T. Предположим дополнительно, что в $\mathfrak{H}$ есть циклический вектор ξ_0, так что совокупность всех векторов $A\xi_0$, $A \in R$, плотна в $\mathfrak{H}$. В этом случае $\mathfrak{H}$ изометрично гильбертову пространству $L^2_\mu(T)$ по некоторой мере μ и операторы $A \in R$ переходят при изометрическом отображении

$$\xi \to \xi(t) \tag{3}$$

в операторы умножения на непрерывные функции $a(t)$, равные нулю на бесконечности:

$$A\{\xi(M)\} = \{a(t)\,\xi(t)\} \tag{4}$$

(см. I п. 4 § 17).

Формулы (3) и (4) можно рассматривать как непрерывный аналог формул (1) и (2) соответственно; векторам ξ_k здесь отвечают отдельные значения $\xi(t)$, а операторам A_k — значения $a(t)$ функций a. Так как R коммутативно, то эти значения оказались уже не векторами, а числами; разумеется, то же самое было бы и раньше, если бы кольцо R в конечномерном пространстве было коммутативным.

Мы можем поэтому сказать, что $L^2_\mu(T)$ есть непрерывная прямая сумма (или прямой интеграл) одномерных пространств, а R есть прямой интеграл колец операторов в одномерных пространствах (и потому неприводимых). Возникает вопрос, нельзя ли это рассуждение обобщить на произвольные, уже некоммутативные кольца операторов. Естественно ожидать, что тогда получится прямой интеграл уже неодномерных пространств $\mathfrak{H}_t$, а R станет прямым интегралом колец R_t в этих подпространствах, причем все или хотя бы почти все R_t будут неприводимы.

Настоящая глава посвящена точной постановке и решению этого вопроса.

Чтобы не усложнять изложение дополнительными трудностями, мы ограничимся только случаем сепарабельного гильбертова пространства; к тому же для несепарабельного случая соответствующая теория еще не является завершенной[2].

Отметим также, что на протяжении всей этой главы термин «кольцо», если это не оговорено особо, будет обозначать симметричное

[1] Мы изменяем здесь обозначения и пишем t и T вместо M и $\mathfrak{M}$.

[2] См. по этому поводу статьи Адельсона-Вельского [1, 2], Дж. Тэйлора [1] и диссертацию Педерсена [1].

кольцо ограниченных линейных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве, содержащее единичный оператор 1.

Для решения поставленной задачи нам понадобятся некоторые дополнительные сведения о кольцах операторов, имеющие к тому же самостоятельный интерес.

2. Лемма о сепарабельности.

Лемма. *Если $\mathfrak{H}$ сепарабельно, то всякое множество $S \subset \mathfrak{B}$ сепарабельно в смысле сильной сходимости, т. е. существует последовательность $A_n \in S$ такая, что всякий оператор $A \in S$ является сильным пределом* [1] *некоторой ее подпоследовательности.*

Доказательство. Пусть S_n — подмножество тех операторов $A \in S$, которые удовлетворяют условию $|A| \leqslant n$. Очевидно, $S = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$, следовательно, достаточно доказать, что каждое множество S_n сепарабельно. Так как множество S_n ограничено в смысле нормы оператора, то достаточно доказать, что всякое ограниченное множество S сепарабельно.

Итак, пусть $|A| \leqslant k$ для всех $A \subset S$. Выберем в $\mathfrak{H}$ полную ортонормальную систему $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$. Тогда каждый оператор A можно представить в виде ограниченной матрицы $A \sim \|a_{st}\|$, $s, t = 1, 2, \ldots$, таким образом, что

$$Af = \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{t=1}^{\infty} a_{st} x_t \right) \varphi_s, \quad \text{если} \quad f = \sum_{t=1}^{\infty} x_t \varphi_t.$$

В частности, $A\varphi_t = \sum\limits_{s=1}^{\infty} a_{st} \varphi_s$, $(A\varphi_t, \varphi_s) = a_{st}$.

Рассмотрим совокупность $\mathfrak{S}$ всех операторов $B \sim \|b_{st}\|$ таких, что $b_{st} = 0$ при $s > n$ или $t > n$ и b_{st} рационально при $s \leqslant n$, $t \leqslant n$. Эта совокупность является, очевидно, счетной, так что можно написать $\mathfrak{S} = \{B_1, B_2, B_3, \ldots\}$. Если $C \sim \|c_{st}\|$ — произвольный элемент кольца $\mathfrak{B}$, то, выбирая $B^{(p)} \sim \|b_{st}^{(p)}\}$ так, что $b_{st} = 0$ при $s > p$ или $t > p$, b_{st} рационально и $|c_{st} - b_{st}^{(p)}| < \dfrac{1}{p}$, $s, t = 1, 2, \ldots, p$, имеем $B^{(p)} \in \mathfrak{S}$ и

$$|(C - B^{(p)})\,\varphi_t|^2 = \left| \sum_{s=1}^{p} (c_{st} - b_{st}^{(p)})\,\varphi_s + \sum_{s=p+1}^{\infty} c_{st} \varphi_s \right|^2 =$$
$$= \sum_{s=1}^{p} |c_{st} - b_{st}^{(p)}|^2 + \sum_{s=p+1}^{\infty} |c_{st}|^2 < \frac{1}{p} + \sum_{s=p+1}^{\infty} |c_{st}|^2 \to 0, \quad (1)$$

---

[1] Этот результат сильнее соотношения $\overline{\{A_n\}}^2 \supset S$, ибо не всякая сильная точка прикосновения последовательности $\{A_n\}$ есть предел некоторой ее подпоследовательности.

при $p \to \infty$, $t = 1, 2, 3, \ldots$. Эти операторы $B^{(p)}$ образуют подпоследовательность последовательности $\mathfrak{S}$, так что, каков бы ни был оператор $C \in \mathfrak{B}$, существует подпоследовательность $\{B_{\nu_1}, B_{\nu_2}, B_{\nu_3}, \ldots\} \subset \mathfrak{S}$ такая, что $|B_{\nu_n}\varphi_t - C\varphi_t| \to 0$ при $n \to \infty$, $t = 1, 2, 3, \ldots$. Рассмотрим теперь такие операторы $A \in S$, что

$$|(A - B_n)\,\varphi_t| < \frac{1}{m} \quad \text{для} \quad t = 1, 2, \ldots, m.$$

Если такие операторы A существуют, то один из них обозначим через $A_{n,m}$. Совокупность всех операторов $A_{n,m}$ есть счетное подмножество S_1 множества S; докажем, что оно обладает требуемым в теореме свойством. Пусть A — произвольный оператор из S; пользуясь соотношением (1), выберем $n_m = \nu_{p_m}$ так, чтобы было

$$|(A - B_{n_m})\,\varphi_t| < \frac{1}{m} \quad \text{для} \quad t = 1, 2, \ldots, m.$$

Тогда существует оператор A_{m,n_m} и по определению

$$|(A_{m,n_m} - B_{n_m})\,\varphi_t| < \frac{1}{m} \quad \text{для} \quad t = 1, 2, \ldots, m,$$

так что

$$|(A - A_{m,n_m})\,\varphi_t| < \frac{2}{m} \quad \text{для} \quad t = 1, 2, \ldots, m.$$

Таким образом, операторы $C_m = A_{m,n_m}$ из S_1 образуют последовательность, для которой

$$|(A - C_m)\,\varphi_t| \to 0$$

при $m \to \infty$, $t = 1, 2, \ldots$. Поэтому также $|(A - C_m)\,f| \to 0$ для конечных линейных комбинаций f элементов φ_t. Если поэтому g — произвольный элемент пространства $\mathfrak{H}$, то, выбирая f так, чтобы было $|g - f| < \frac{\varepsilon}{4k}$, а затем номер N так, чтобы было $|(A - C_m)\,f| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $m > N$, имеем при $m > N$

$$|(A - C_m)\,g| \leqslant |(A - C_m)\,f| + |(A - C_m)(g - f)| < \\ < \frac{\varepsilon}{2} + (|A| + |C_m|)|g - f| < \varepsilon.$$

Таким образом, последовательность C_m сильно сходится к оператору A, и лемма доказана.

3. Каноническая форма коммутативного кольца. Пусть R — симметричное кольцо ограниченных линейных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, содержащее единичный оператор 1, $\overline{R}$ — замыкание кольца R по норме оператора. Кольцо R называется *циклическим*, если в $\mathfrak{H}$ существует такой вектор ξ_0, что множество $\{A\xi_0, A \in R\}$ плотно в $\mathfrak{H}$; в этом случае вектор ξ_0 называется *циклическим вектором* кольца R. Очевидно, цикличность кольца R равносильна цикличности кольца $\overline{R}$ и циклические векторы у обоих колец — одни и те же. Очевидно также, что цикличность кольца R эквивалентна цикличности его тождественного представления $A \to A$

и ξ_0 — циклический вектор для R тогда и только тогда, когда он — циклический вектор этого представления. Поэтому если R — не циклическое кольцо, то (см. п. 2 § 17) $\mathfrak{H}$ есть ортогональная сумма

$$\mathfrak{H} = \bigoplus_k \mathfrak{H}_k \tag{1}$$

инвариантных относительно R подпространств $\mathfrak{H}_k$, на каждом из которых сужение R_k кольца R циклично. Мы будем говорить, что R есть *ортогональная сумма циклических колец* R_k и писать

$$R = \bigoplus_k R_k. \tag{2}$$

При этом в силу сепарабельности пространства $\mathfrak{H}$ индекс k пробегает конечное или счетное множество ($k = 1, 2, \ldots, n$ или $k = 1, 2, 3, \ldots$).

Будем в дальнейшем в этом пункте считать, что R коммутативно; пусть ξ_k^0 — циклический вектор кольца R_k в $\mathfrak{H}_k$ и A_k — сужение на $\mathfrak{H}_k$ оператора $A \in \overline{R}$. Обозначим через T бикомпактное пространство максимальных идеалов t кольца $\overline{R}$, через μ_k — меру на T, определенную интегралом $f_k(A) = (A\xi_k^0, \xi_k^0)$ на $C(T)$ (см. доказательство предложения I п. 4 § 17).

I. *Существует изометрическое отображение U_k пространства $\mathfrak{H}_k$ на $L^2_{\mu_k}(T) = L^2(f_k)$, при котором операторы $A \in \overline{R}$ переходят в операторы умножения на $A(t)$, где $A(t)$ — значение A на идеале $t \in T$; при этом $\{A(t)\colon A \in R\} = C(T)$.*

Для доказательства достаточно применить предложение I п. 4 § 17 к представлению $A \to A_k$ кольца R.

II. *Если $P(\Delta)$ — спектральная мера кольца R, то*

$$\mu_k(\Delta) = (P(\Delta)\, \xi_k^0, \xi_k^0) \tag{3}$$

для каждого борелевского множества $\Delta \subset T$.

Доказательство. В силу I можно считать, что $\mathfrak{H}_k = L^2_{\mu_k}(T)$, и утверждение следует из формулы (3) п. 4 § 17, примененной к сужению представления $A \to A$ на подпространство $\mathfrak{H}_k$ и вектору $|\xi_k^0| = \xi_k^0(t) = 1$ (см. сноску [2]) на с. 293).

Пусть $\widetilde{\mathfrak{H}}$ — прямая сумма пространств $L^2_{\mu_k}(T)$:

$$\widetilde{\mathfrak{H}} = \bigoplus_k L^2_{\mu_k}(T);$$

$\widetilde{\mathfrak{H}}$ состоит из всех последовательностей $\widetilde{\xi} = \{\xi_k(t)\}$, для которых $\xi(t)$ есть μ_k-измеримая функция и

$$\sum_k \int |\xi_k(t)|^2 \, d\mu_k < \infty; \tag{4}$$

при этом операции сложения и умножения на число определяются покомпонентно, а скалярное произведение — по формуле

$$(\widetilde{\xi}, \widetilde{\eta}) = \sum_k \int \xi_k(t)\, \overline{\eta_k(t)}\, d\mu_k \quad \text{при} \quad \widetilde{\xi} = \{\xi_k(t)\}, \quad \widetilde{\eta} = \{\eta_k(t)\}. \tag{5}$$

III. *Если R коммутативно, то существует изометрическое отображение U пространства $\mathfrak{H}$ на $\widetilde{\mathfrak{H}}$, при котором операторы $A \in \overline{R}$ переходят в операторы $\widetilde{A}$ умножения на $A(t)$:*

$$\widetilde{A}\{\xi(t)\} = \{A(t)\,\xi(t)\} \quad \textit{при} \quad A \in \overline{R}, \quad \{\xi(t)\} \in \widetilde{\mathfrak{H}}, \tag{6}$$

и $\{A(t)\colon A \in \overline{R}\} = C(T)$.

Утверждение непосредственно следует из предложения I и формул (1), (2), причем $U = U_k$ на $\mathfrak{H}_k$.

Пусть снова $P(\Delta)$ — спектральная мера коммутативного кольца R и $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$. Вектор ξ будем называть *подчиненным* вектору η и писать $\xi \prec \eta$, если мера $\mu_\xi(\Delta) = (P(\Delta)\,\xi, \xi)$ подчинена мере $\mu_\eta(\Delta) = (P(\Delta)\,\eta, \eta)$; вектор $\xi_0 \in \mathfrak{H}$ будем называть *максимальным*, если каждый вектор из $\mathfrak{H}$ ему подчинен.

IV. *Циклический вектор ξ_k^0 максимален в $\mathfrak{H}_k$.*

Доказательство. В силу I и II мы можем считать, что

$$\mathfrak{H}_k = L^2_{\mu_k}(T),\ \mu\xi_k^0(t) \equiv 1 \quad \text{и} \quad \mu_k(\Delta) = (P(\Delta)\,\xi_k^0, \xi_k^0).$$

Если тогда $\eta \in \mathfrak{H}_k$, то $\eta = \eta_k(t) \in L^2_{\mu_k}(T)$ и в силу (3) п. 4 § 17

$$\mu_\eta(\Delta) = (P(\Delta)\,\eta, \eta) = \int\limits_\Delta |\eta(t)|^2\, d\mu_k = \int\limits_\Delta |\eta(t)|^2\, d\mu_{\xi_k^0}.$$

Следовательно, $\mu_\eta \prec \mu_{\xi_k^0}$, т. е. $\eta \prec \xi_k^0$.

V. *В $\mathfrak{H}$ существует максимальный вектор.*

Доказательство. Будем исходить из какого-нибудь разложения (1)–(2); не нарушая общности, можно считать, что соответствующие циклические векторы ξ_k^0 нормированы ($|\xi_k^0| = 1$); кроме того, они взаимно ортогональны. Поэтому, если положить

$$\xi^{(1)} = \xi_1^0 + \frac{1}{2}\,\xi_2^0 + \frac{1}{3}\,\xi_k^0 + \ldots, \tag{7}$$

то ряд в правой части (если он бесконечен) будет сходиться $\Bigl($ибо $\sum\limits_k \left|\frac{1}{k}\,\xi_k^0\right|^2 = \sum\limits_k \frac{1}{k^2} < \infty\Bigr)$ и определять элемент $\xi^{(1)} \in \mathfrak{H}$. Если теперь $\eta \in \mathfrak{H}$, то в силу (1) $\eta = \sum\limits_k \eta_k$, $\eta_k \in \mathfrak{H}_k$, и в силу IV $\eta_k \prec \frac{1}{k}\,\xi_k^2$, поэтому $\eta \prec \xi^{(1)}$.

VI. *Циклические векторы* ξ_1^0, ξ_2^0, ... *в разложении* (1)–(2) *можно выбирать так, чтобы* $\xi_1^0 \succ \xi_j^0$, $j = 2, 3, \ldots$ [1]), *следовательно*, $\mu_1 \succ \mu_j$, $j = 2, 3, \ldots$.

Доказательство. Достаточно в качестве ξ_1^0 выбрать максимальный вектор (см. V).

Суммируя предыдущие результаты, приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Всякое коммутативное симметричное кольцо* R *ограниченных линейных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве пространственно изоморфно кольцу операторов умножения*

$$A\{\xi_3(t)\} = \{A(t)\,\xi_k(t)\}$$

в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H} = \bigoplus\limits_k L^2_{\mu_k}(T)$, *где* T — *бикомпактное пространство максимальных идеалов кольца* $\overline{R_a(R, 1)}$ [2]),

$$\mu_1 \succ \mu_j, \quad j = 2, 3, \ldots, \tag{8}$$

— *меры на* T *и* $A(t) \in C(T)$. *Если* R *замкнуто по норме оператора и содержит единицу, то* $\{A(t)\colon A \in R\} = C(T)$.

Реализация кольца R, описанная в теореме 1, называется его *канонической формой.*

Условия пространственного изоморфизма двух канонических форм рассмотрены в монографии Диксмье [14], гл. II. Отметим еще, что пространство T в канонической форме можно заменить отрезком действительной оси (но $A(t)$, вообще говоря, не будут тогда непрерывны); это следует из общих результатов теории меры (см., например, Халмош [1], гл. VIII) и может также быть получено непосредственно (см., например, Ахиезер и Глазман [1], гл. VI). Эти факты нам в дальнейшем не понадобятся.

§ 41. Прямой интеграл гильбертовых пространств; разложение кольца операторов в прямой интеграл неприводимых колец

1. Прямой интеграл гильбертовых пространств. Пусть T — произвольное бикомпактное [3]) пространство, I — интеграл на T и μ — соответствующая мера (см. п. 8 § 6).

---

[1]) Можно показать (см., например, Стоун [1] или Плеснер [2]), что ξ_1^0, ξ_2^0, ... можно также выбрать таким образом, чтобы $\xi_1^0 \succ \xi_2^0 \succ \ldots$, однако это нам не понадобится.

[2]) Напомним, что $\overline{R_a(R, 1)}$ обозначает минимальное замкнутое по норме оператора кольцо, содержащее R и 1.

[3]) Вместо бикомпактных пространств можно было бы рассматривать локально бикомпактные пространства T. Однако существенного обобщения таким

Пусть почти каждой точке $t \in T$ поставлено в соответствие некоторое сепарабельное гильбертово пространство H_t. Введем понятие *прямого интеграла пространств* H_t по мере μ.

Рассмотрим сначала тот случай, когда все H_t имеют одну и ту же размерность. Тогда каждое из них можно отождествить с одним и тем же фиксированным гильбертовым пространством [1] H.

Рассмотрим функцию $\xi = \{\xi_t\}$, $t \in T$, значениями которой при почти каждом $t \in T$ являются векторы из H. Эта вектор-функция называется *измеримой*, если для любого вектора $h \in H$ числовая функция

$$f(t) = (\xi_t,\, h)$$

измерима (по мере μ) в обычном смысле.

Если $\xi = \{\xi_t\}$ и $\eta = \{\eta_t\}$ — две измеримые вектор-функции, то скалярное произведение $(\xi_t,\, \eta_t)$ является измеримой числовой функцией. Это непосредственно следует из равенства

$$(\xi_t,\, \eta_t) = \sum_k (\xi_t,\, e_k)(e_k,\, \eta_t),$$

где $\{e_k\}$ — фиксированная полная ортонормальная система в H.

Напомним (ср. п. 5 § 26), что в этом случае прямым интегралом

$$\mathfrak{H} = \int\limits_T H_t\, d\mu$$

пространств H_t по мере μ называется гильбертово пространство $\mathfrak{H}$ всех измеримых вектор-функций $\xi = \{\xi_t\}$, удовлетворяющих условию [2]

$$\int\limits_T |\xi_t|^2\, d\mu < \infty. \tag{1}$$

Операции сложения векторов, умножения их на числа и скалярное произведение определяются в $\mathfrak{H}$ формулами

$$\begin{gathered} \xi + \eta = \{\xi_t + \eta_t\}, \quad \alpha\xi = \{\alpha\xi_t\}, \\ (\xi,\, \eta) = \int\limits_T (\xi_t,\, \eta_t)\, d\mu, \end{gathered} \tag{2}$$

где $\xi = \{\xi_t\}$, $\eta = \{\eta_t\}$.

образом не получится, так как можно заменить T пространством T_∞ (см. п. 9 § 2), считая $H_\infty = (0)$.

[1] Прямые интегралы, которые получаются при различных отождествлениях пространств H_t с фиксированным пространством H, мы не будем считать существенно различными.

[2] При этом, как обычно, две такие измеримые функции $\xi = \{\xi_t\}$ и $\eta = \{\eta_t\}$ не считаются различными, если $\xi_t \neq \eta_t$ лишь на некотором множестве μ-меры нуль.

Часто удобна следующая «координатная запись» прямого интеграла. Выберем в H некоторую полную ортонормальную систему векторов $\{e_k\}$. Пусть $\xi = \{\xi_t\}$ — произвольная вектор-функция на T со значениями из H. Положим

$$a_k(t) = (\xi_t, e_k).$$

Таким образом, каждой вектор-функции $\{\xi_t\}$ отвечает последовательность числовых функций $a_k(t)$. В силу VII п. 7 § 6 вектор-функция $\{\xi_t\}$ принадлежит прямому интегралу $\mathfrak{H}$ пространств $H_t = H$ в том и только том случае, когда соответствующие числовые функции $a_k(t) \in L^2_\mu(T)$ и удовлетворяют условию

$$\sum_k \int_T |a_k(t)|^2 \, d\mu < \infty.$$

При этом скалярное произведение вектор-функций $\xi = \{\xi_t\}$ и $\eta = \{\eta_t\}$ из $\mathfrak{H}$ записывается в виде

$$(\xi, \eta) = \sum_k \int_T a_k(t) \, \overline{b_k(t)} \, d\mu,$$

где $a_k(t) = (\xi_t, e_k)$, $b_k(t) = (\eta_t, e_k)$.

Очевидно, во всех предыдущих определениях и рассуждениях можно T заменить любым его μ-измеримым подмножеством T' и аналогично определить $\int_{T'} H_t \, d\mu$.

До сих пор мы предполагали, что все пространства H_t имеют одинаковую размерность. Дадим теперь определение прямого интеграла сепарабельных пространств H_t в общем случае. Обозначим через $n(t)$ размерность пространства H_t; таким образом, $n(t)$ есть функция, принимающая только значения 1, 2, … и ∞. Семейство пространств H_t назовем *μ-измеримым*, если $n(t)$ есть μ-измеримая функция. Так как $n(t)$ принимает не более счетного числа значений, то μ-измеримость функции $n(t)$ означает, что все пространство T разбивается на сумму не более чем счетного числа попарно пересекающихся μ-измеримых множеств T_n, на каждом из которых H_t имеет одну и ту же размерность, так что на T_n каждое H_t можно отождествить с фиксированным пространством размерности n. Вектор-функцию $\{\xi_t\}$, определенную на T, со значениями, принадлежащими соответствующим гильбертовым пространствам, мы назовем *μ-измеримой*, если для каждого n эта функция, рассматриваемая только на T_n, μ-измерима в указанном выше смысле (см. с. 581). Прямой интеграл пространств H_t определяется как совокупность всех μ-измеримых вектор-функций $\{\xi_t\}$, удовлетворяющих условию

$$\int_T |\xi_t|^2 \, d\mu < \infty.$$

Скалярное произведение двух таких вектор-функций $\xi = \{\xi_t\}$ и $\eta = \{\eta_t\}$ определяется по формуле

$$(\xi, \eta) = \int_T (\xi_t, \eta_t)\, d\mu.$$

Как и выше, легко показать, что при этом прямой интеграл пространств H_t становится гильбертовым пространством, которое мы снова обозначим через

$$\int_T H_t\, d\mu.$$

Координатная запись прямого интеграла, указанная ранее для случая пространств H_t постоянной размерности, легко переносится на общий случай. Каждое из пространств H_t, где $n(t) = \infty$, отождествим с пространством l^2 последовательностей $\{x_1, x_2, \ldots\}$, для которых $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$; если же $n(t)$ равно числу m, то мы отождествим H_t с подпространством $l^2_m \subset l^2$ всех векторов вида $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, 0, 0, \ldots\}$. Тогда каждый элемент из $\mathfrak{H} = \int\limits_T H_t\, d\mu$ представляется в виде последовательности $\{a_1(t), a_2(t), \ldots\}$ μ-измеримых функций, удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\sum\limits_k \int\limits_T |a_k(t)|^2\, d\mu < \infty$;

2) $a_k(t) = 0$ при $k > n(t)$, если $n(t) < \infty$, а $\mathfrak{H}$ есть совокупность всех таких последовательностей [1].

Из этой координатной записи легко следует, что *в $\mathfrak{H}$ существует такая последовательность векторов $\varphi_n = \{\varphi_n(t)\}$, что при каждом фиксированном t векторы $\varphi_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots, n(t)$, образуют ортонормальный базис в H_t*. Действительно, достаточно взять в качестве вектора $\{\varphi_n(t)\}$ последовательность $\{\varphi_{n1}(t), \varphi_{n2}(t), \ldots\}$, где

$$\varphi_{nk}(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad k = n, \quad k \leqslant n(t), \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Примеры. 1. Пусть T состоит из конечного или счетного числа точек, каждая из которых имеет меру 1. Будем рассматривать T как локально бикомпактное пространство с дискретной топологией. Тогда $\mathfrak{H}$ есть обычная прямая сумма гильбертовых пространств (см. сноску [2]) на с. 581).

2. Пусть T — отрезок $[0, 1]$ с обычной лебеговской мерой на нем и каждой точке t этого отрезка отвечает одномерное пространство H_t.

[1]) Фон Нейман [10] и Диксмье [14] исходят из другого определения μ-измеримости; однако затем они приходят к этой же координатной записи прямого интеграла.

Тогда $\mathfrak{H}$ есть пространство $L^2(0,1)$. Таким образом, реализацию гильбертова пространства в виде пространства функций можно рассматривать как представление его в виде прямого интервала одномерных пространств.

3. Пусть снова T — отрезок $[0,1]$ с лебеговой мерой, но теперь H_t — пространство функций $f(s) \in L^2[0,1]$. Тогда $\mathfrak{H}$ есть пространство суммируемых в квадрате функций двух переменных t и s, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant s \leqslant 1$.

2. Разложение гильбертова пространства в прямой интеграл по заданному коммутативному кольцу R**.** Пусть

$$\mathfrak{H} = \int_T H_t \, d\mu$$

— прямой интеграл пространств H_t по мере μ и $\varphi(t) = L^\infty = L^\infty_\mu(T)$. Каждая такая функция $\varphi(t)$ определяет ограниченный оператор L_φ в $\mathfrak{H}$ по формуле $L_\varphi \xi = \{\varphi(t)\, \xi_t\}$ для всех $\xi = \{\xi_t\} \in \mathfrak{H}$; при этом

$$|L_\varphi| = \|\varphi\|_\infty. \tag{1}$$

Действительно,

$$|L_\varphi \xi|^2 = \int_T |\varphi(t)|^2 |\xi_t|^2 \, d\mu \leqslant \|\varphi\|_\infty^2 \int_T |\xi_t|^2 \, d\mu; \tag{2}$$

с другой стороны, так как $T_\varepsilon = \{t\colon |\varphi(t)| > \|\varphi\|_\infty - \varepsilon\}$ при $\varepsilon > 0$ — множество положительной меры, то существует вектор-функция $\{\xi_t\} \in \mathfrak{H}$, $\xi \neq 0$, равная нулю вне T_ε. Для этой функции

$$|L_\varphi \xi|^2 = \int_T |\varphi(t)|^2 |\xi_t|^2 \, d\mu = \int_{T_\varepsilon} |\varphi(t)|^2 |\xi_t|^2 \, d\mu \geqslant$$

$$\geqslant (\|\varphi\|_\infty - \varepsilon)^2 \int_{T_\varepsilon} |\xi_t|^2 \, d\mu = (\|\varphi\|_\infty - \varepsilon)^2 |\xi|^2. \tag{3}$$

Из (2) и (3) вытекает (1).

I. *Всякий ограниченный оператор A в $\mathfrak{H}$ перестановочный со всеми операторами L_φ, $\varphi \in L^\infty$, имеет вид $A = \{A(t)\}$, т.е. $A\{\xi_t\} = \{A(t)\, \xi_t\}$, где $A(t)$ — измеримая* [1] *операторная функция и $|A(t)| \in L^\infty$, причем $|A| = \|\, |A(t)|\, \|_\infty$.*

Доказательство. Если $\dim H_t = \mathrm{const}$ на T, то утверждение совпадает с предложением IV п. 5 § 26. В общем случае $\mathfrak{H}$ есть прямая сумма $\mathfrak{H} = \bigoplus_k \mathfrak{H}_k$ конечного или счетного числа подпространств $\mathfrak{H}_k = \int_{T_k} H_t \, d\mu$, где $\dim H_t = \mathrm{const}$ на T_k. В соответствии с этим

[1] Понятие измеримой операторной функции в общем случае определяется аналогично тому, как это сделано в п. 5 § 26.

A запишется в виде матрицы $A \sim \|A_{jk}\|$, где A_{jk} — ограниченный оператор из $\mathfrak{H}_k$ в $\mathfrak{H}_j$ и $L_\varphi = \|\delta_{jk} L_{\varphi_k}\|$, где φ_k — сужение φ на T_k, $\delta_{jk} = 1$ при $j = k$ и $\delta_{jk} = 0$ при $j \neq k$. Условие $AL_\varphi = L_\varphi A$ означает, что $A_{jk} L_{\varphi_k} = L_{\varphi_j} A_{jk}$. Беря (при $j \neq k$) $\varphi_k = 1$ и $\varphi_j = 0$, получим, что $A_{jk} = 0$ при $j \neq k$. Далее, $A_{jj} L_{\varphi_j} = L_{\varphi_j} A_{jj}$; следовательно, в силу IV п. 5 § 26 [1]) $A_{jj} = \{A_j(t)\}$, $|A_j(t)| \in L^\infty_\mu(T_j)$, причем $|A_{jj}| = \| \, |A_j(t)| \, \|_\infty$. Отсюда, полагая $A(t) = A_j(t)$ на T_j, заключаем, что $A = \{A(t)\}$ и $|A| = \sup\limits_j |A_{jj}| = \sup\limits_j \| \, |A_j(t)| \, \|_\infty = \| \, |A(t)| \, \|_\infty$. Очевидно, что, обратно, всякая измеримая операторная функция $A = \{A(t)\}$, удовлетворяющая условию $|A(t)| \in L^\infty$, определяет по формуле $A\{\xi_t\} = \{A(t)\, \xi_t\}$ ограниченный оператор в $\mathfrak{H}$, перестановочный со всеми L_φ.

Нетрудно также установить справедливость следующих утверждений: *сумма и произведение измеримых операторных функций являются измеримыми операторными функциями. При этом если*

$$A = \{A(t)\}, \quad B = \{B(t)\}$$

и

$$A + B = C = \{C(t)\},$$

то для почти всех t

$$C(t) = C(t) + B(t).$$

Аналогично, если

$$AB = C = \{C(t)\} \quad \textit{или} \quad A^* = C = \{C(t)\},$$

то для почти всех t

$$C(t) = A(t)\, B(t)$$

или соответственно $C(t) = (A(t))^*$.

Операторы L_φ образуют коммутативное кольцо R, содержащее наряду с каждым оператором L_φ и сопряженный оператор L^*_φ (определяемый комплексно-сопряженной к φ функцией $\overline{\varphi}$).

II. *Кольцо R замкнуто в смысле слабой топологии в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$.*

Действительно, достаточно показать, что $R'' = R$ (см. п. 1 § 34). Но в силу I R' состоит из всех операторов $A = \{A(t)\}$, где $|A(t)| \in L^\infty$. Отсюда вытекает, что $R \subset R_1$, и потому $R' \supset R''$. Следовательно, R'' состоит из операторов $A = \{A(t)\}$, где $|A(t)| \in L^\infty$. Но оператор $A = \{A(t)\}$ из R'' должен быть перестановочным со всеми операторами из R', т. е. со всеми $B = \{B(t)\}$, $|B(t)| \in L^\infty$. Возьмем, в частности, $B_t = B^{pq}$ для всех [2]) $t \in T_j$, где B^{pq} — оператор из $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}_j)$, матрица

[1]) Утверждение предложения IV п. 5 § 26 остается справедливым, если заменить T любым его μ-измеримым подмножеством; это непосредственно видно из доказательства.

[2]) Так как $\dim H_t = \text{const}$ на T_j, то можно считать, что $H_t = H_j$ при $t \in T_j$.

$\|b_{jk}^{pq}\|$ которого в некотором фиксированном ортонормальном базисе есть

$$b_{jk}^{pq} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad j \neq p \quad \text{или} \quad k \neq q, \\ 1 & \text{при} \quad j = p \quad \text{и} \quad k = q \end{cases}$$

(см. доказательство теоремы 8 п. 5 § 26); мы получим, что $A(t)B^{pq} = B^{pq}A(t)$ при $t \in T_j - N_{pqj}$, где $\mu(N_{pqj}) = 0$. Полагая $N_j = \bigcup_{pq} N_{paj}$, мы видим, что при $t \in T_j - N_j$

$$A(t)\,B^{pq} = B^{pq}A(t) \quad \text{для всех} \quad p, q = 1, 2, 3, \ldots, \tag{4}$$

причем $\mu(N_j) = 0$. Из (4) следует, что $A(t) = \varphi_j 1$ при $t \in T_j - N_j$. Полагая $\varphi = \varphi_j$ при $t \in T_j - N_j$, получим, что $\varphi \in L^\infty$ и $A = L_\varphi$. Следовательно, $R'' \subset R$. Так как, с другой стороны, $R'' \supset R$, то $R'' = R$.

Итак, каждому прямому интегралу гильбертовых пространств отвечает некоторое коммутативное слабо замкнутое кольцо R ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}$, содержащее единичный оператор. Это кольцо мы будем называть *кольцом данного разложения пространства* $\mathfrak{H}$ *в прямой интеграл.*

Примеры. 1. $\mathfrak{H} = H_1 \oplus H_2 \oplus \ldots \oplus H_n$. Пространство T состоит из n точек. Кольцо R изоморфно кольцу диагональных матриц n-го порядка.

2. $\mathfrak{H}$ — пространство $L^2(0, 1)$ функций на отрезке $[0, 1]$ (т. е. прямой интеграл одномерных пространств), R — кольцо всех существенно ограниченных измеримых функций на отрезке $[0, 1]$.

3. $\mathfrak{H}$ — пространство $L^2([0, 1] \times [0, 1])$ функций двух переменных t, s, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, представленное как прямой интеграл пространств $L^2(0, 1)$ функций одного переменного. Здесь, как и в примере 2, R — кольцо всех существенно ограниченных измеримых функций на отрезке.

Покажем теперь, что справедливо обратное предложение, а именно:

Теорема 1. *Каждому коммутативному слабо замкнутому кольцу* R *операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$, *содержащему единичный оператор*, *отвечает разложение пространства* $\mathfrak{H}$ *в прямой интеграл и притом такое*, *что* R *есть совокупность всех операторов вида*[1] L_φ, $\varphi \in L^\infty$, *а* T — *бикомпактно со счетной базой окрестностей.*

Доказательство. Пусть A_1, A_2, ... — счетное подмножество в R, плотное в сильной операторной топологии (см. лемму п. 2 § 40), и R_1 — замкнутое по норме оператора симметричное подкольцо в $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, содержащее единичный оператор, порожденное операторами A_1, A_2, ... Тогда слабое замыкание кольца R_1 совпадает с R. Пусть

[1] Это означает, что существует изометрическое отображение пространства $\mathfrak{H}$ на прямой интеграл гильбертовых пространств, при котором R отображается на кольцо всех операторов L_φ, $\varphi \in L^\infty$.

T — пространство максимальных идеалов кольца R_1. Так как R_1 имеет счетное число образующих A_1, A_1^*, A_2, A_2^*, ..., то T — бикомпактное пространство со счетной базой окрестностей (см. следствие в п. 5 § 11). Согласно теореме 1 п. 3 § 40 существует изометрическое отображение U пространства $\mathfrak{H}$ на прямую сумму $\widetilde{\mathfrak{H}} = \bigoplus\limits_k L^2_{\mu_k}(T)$, при котором R_1 отображается на кольцо $\widetilde{R}_1$ всех операторов

$$\widetilde{A}\{\xi_k(t)\} = \{A(t)\,\xi_k(t)\}, \quad A(t) \in C(T), \quad \{\xi_k(t)\| \in \widetilde{\mathfrak{H}}, \tag{5}$$

где $A(t)$ — значение A на идеале t и μ_1, μ_2, ... — меры на T, удовлетворяющие условию

$$\mu_1 \succ \mu_j, \quad j = 2,\, 3,\, \ldots. \tag{6}$$

Так как все меры μ_k подчинены мере μ_1 (которую обозначим теперь μ), то для каждого μ-измеримого множества Δ

$$\mu_k(\Delta) = \int\limits_{\Delta} \omega_k(t)\, d\mu, \tag{7}$$

где $\omega_k \in L^1_\mu$. Пространство $\widetilde{\mathfrak{H}}$ состоит из (конечных или счетных) последовательностей $\{\xi_k(t)\}$ μ-измеримых функций, удовлетворяющих условию

$$\sum_k \int\limits_T |\xi_k(t)|^2\, d\mu_k < \infty. \tag{8}$$

В силу (7) это условие можно переписать в виде

$$\sum_k \int\limits_T |\xi_k(t)|^2 \omega_k(t)\, d\mu < \infty \tag{9}$$

или, наконец, в силу VII п. 7 § 6 в виде

$$\int\limits_T \Big\{ \sum_k |\xi_k(t)|^2 \omega_k(t) \Big\}\, d\mu < \infty. \tag{10}$$

Положим $\mathfrak{N}_k = \{t\colon \omega_k(t) = 0\}$; множества $\mathfrak{N}_k$ измеримы и определены с точностью до множеств μ-меры нуль.

Пусть $n(t)$ обозначает (конечное или бесконечное) число всех номеров k, для которых $t \notin \mathfrak{N}_k$; $n(t)$ есть сумма не более чем счетного числа μ-измеримых функций $1 - \chi_k(t)$, где $\chi_k(t)$ — характеристическая функция множества $\mathfrak{N}_k$. Поэтому $n(t)$ — μ-измеримая функция. Пусть $k_1(t) < k_2(t) < \ldots$ — все числа k, для которых $t \notin \mathfrak{N}_k$. Тогда

$$\omega_k(t) = 0, \quad \text{если } A \text{ отлично от всех } k_j(t). \tag{11}$$

Положим

$$x_p(t) = \xi_{k_p(t)}(t)\sqrt{\omega_{k_p(t)}(t)} \quad \text{при} \quad \begin{cases} p \leqslant n(t), & \text{если} \quad n(t) < \infty, \\ p = 1, 2, 3, \ldots, & \text{если} \quad n(t) = \infty, \end{cases} \tag{12}$$

и

$$x_p(t) = 0 \quad \text{при} \quad p > n(t), \quad \text{если} \quad n(t) < \infty. \tag{13}$$

Функция $x_p(t)$ μ-измерима при каждом p. Действительно, положим $\mathfrak{M}_k = T - \mathfrak{N}_k$; при фиксированных p и k множество T_{kp} всех тех точек $t \in T$, для которых $k_p(t) = k$, есть

$$\mathfrak{M}_k \cap \bigcup(\mathfrak{M}_{k_1} \cap \ldots \cap \mathfrak{M}_{k_{p-1}}),$$

где $\bigcup$ берется по всем $k_1, \ldots, k_{p-1}$, для которых $k_1 < \ldots < k_{p-1} < k$; поэтому T_{kp} μ-измеримо. С другой стороны, $x_p(t) = \xi_k(t)\sqrt{\omega_k(t)}$ на T_{kp}, и поэтому $x_p(t)$ μ-измерима на T_{kp}; следовательно, $x_p(t)$ μ-измерима на $T = \bigcup\limits_{kp} T_{kp}$. Далее, из (11) и (12) заключаем, что

$$\sum_p |x_p(t)|^2 = \sum_p |\xi_{k_p(t)}(t)|^2 \omega_{k_p}(t) = \sum_k |\xi_k(t)|^2 \omega_k(t)$$

и поэтому

$$\int\limits_T \Big(\sum_p |x_p(t)|^2\Big)\,d\mu = \int\limits_T \Big\{\sum_k |\xi_k(t)|^2 \omega_k(t)\Big\}\,d\mu < \infty. \tag{14}$$

Следовательно, условие

$$\sum_k |x_k(t)|^2 < \infty \tag{15}$$

может не выполняться лишь для точек t, образующих множество μ-меры нуль.

Пусть H_t — совокупность всех числовых последовательностей $\{x_p\}$, удовлетворяющих условиям:

1) $x_p = 0$ при $p > n(t)$, если $n(t) < \infty$,
2) $\sum\limits_p |x_p|^2 < \infty$.

Отметим, что все пространства H_t являются подпространствами гильбертова пространства l^2. Условия (13) и (14) означают, что построенная выше вектор-функция $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \ldots\}$ принимает значения из H_t при μ-почти каждом $t \in T$ и

$$\int\limits_T \Big(\sum |x_p(t)|^2\Big)\,d\mu < \infty. \tag{16}$$

Обратно, каждая вектор-функция $x(t) = \{x_1(t), x_2(t), \ldots\}$ со значениями из H_t, удовлетворяющая условию (16), может быть таким образом получена из некоторой вектор-функции $\{\xi_k(t)\| \in \widetilde{\mathfrak{H}}$.

Достаточно положить

$$\xi_{k_p(t)}(t) = x_p(t)\,[\omega_{k_p(t)}(t)]^{-1/2},$$
$$\xi_k(t) = 0, \quad \text{если } k \text{ отлично от всех } k_p(t).$$

Так как $\omega_{k_p(t)} \neq 0$, это определение законно; рассуждая, как выше, убеждаемся, что $\xi_k(t)$ измерима при каждом k и $\{\xi_k(t)\} \in \widetilde{\mathfrak{H}}$. Отсюда и из (14) следует, что $\{\xi_k(t)\} \to \{x_p(t)\}$ есть изометрическое отображение.

Мы получили реализацию пространства $\widetilde{\mathfrak{H}}$ в виде пространства всех последовательностей μ-измеримых функций $\{x_1(t), x_2(t), \ldots\}$, удовлетворяющих условию (16) и, кроме того, условию

$$x_k(t) = 0 \quad \text{при} \quad k > n(t), \quad \text{если} \quad n(t) < \infty.$$

Но это и есть как раз координатная реализация прямого интеграла пространств H_t (см. п. 1); следовательно,

$$\widetilde{\mathfrak{H}} = \int\limits_T H_t\,d\mu.$$

Докажем, наконец, что при таком разложении пространства $\widetilde{\mathfrak{H}}$ кольцо $\widetilde{R}$ совпадает с кольцом всех операторов L_φ, $\varphi \in L^\infty = L + \mu^\infty(T)$.

Согласно теореме 1 п. 3 § 40 $\widetilde{R}_1 = \{L_\psi,\ \psi \in C(T)\}$, ибо R_1, а значит, и $\widetilde{R}_1$, замкнуто по норме оператора. С другой стороны, в силу V п. 5 § 26 каждый оператор L_φ, $\varphi \in L^\infty_\mu(T)$, есть точка прикосновения в слабой операторной топологии множества операторов L_ψ, $\psi \in C(T)$; так как $\widetilde{R}$ слабо замкнуто, то $L_\varphi \in \widetilde{R}$.

Итак,

$$\widetilde{R} = \overline{\widetilde{R}}^1 = \overline{\{L_\psi\colon \psi \in C(T)\}}^1 \supset \{L_\varphi\colon \varphi \in L^\infty_\mu(T)\}.$$

С другой стороны, в силу II

$$\{L_\varphi\colon \varphi \in L^\infty_\mu(T)\} \supset \overline{\{L_\psi\colon \psi \in C(T)\}}^1;$$

следовательно, $\widetilde{R} = \{L_\varphi,\ \varphi \in L^\infty_\mu(T)\}$, и теорема доказана.

3. Разложение по максимальному коммутативному кольцу. Условие неприводимости. В предыдущем пункте мы показали, что каждое слабо замкнутое коммутативное кольцо R определяет разложение сепарабельного пространства $\mathfrak{H}$ в прямой интеграл [1]):

$$\mathfrak{H} = \int\limits_T H_t\,d\mu,$$

где T — бикомпактное пространство со счетной базой окрестностей.

---

[1]) Мы отождествили здесь $\mathfrak{H}$ с $\widetilde{\mathfrak{H}}$.

При этом каждый оператор A, принадлежащий R', т. е. перестановочный со всеми операторами из R, представляется в виде измеримой операторной функции $A = \{A(t)\}$, причем $A(t)$ для почти всех t представляет собой ограниченный оператор в H_t. Тем самым всякое семейство $\mathfrak{A}$ операторов из R' одновременно приводится к «диагональному» виду: $A = \{A(t)\}$. Пусть $\mathfrak{A}(t)$ — совокупность всех операторов $A(t)$, отвечающих $A \in \mathfrak{A}$ при фиксированном t. Возникает вопрос, при каких условиях семейство $\mathfrak{A}(t)$ неприводимо для почти каждого t.

Ответ на этот вопрос дает следующая

Теорема 2. *Если R — максимальное коммутативное подкольцо кольца $\mathfrak{A}'$, то семейство $\mathfrak{A}(t)$ неприводимо для почти каждого t; обратно, если $\mathfrak{A}$ не более чем счетно и $\mathfrak{A}(t)$ неприводимо для почти каждого t, то R — максимальное коммутативное подкольцо в $\mathfrak{A}'$.*

Доказательство. Второе утверждение легко следует из предложения I п. 2. Действительно, пусть $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, \ldots\}$ и R не максимально в $\mathfrak{A}'$. Тогда в $\mathfrak{A}'$ существует оператор B, не принадлежащий кольцу R и перестановочный со всеми операторами из R. Согласно предложению I п. 2 оператор B записывается в виде $B = \{B(t)\}$, причем оператор $B(t)$ отличен от кратного единицы на множестве положительной меры; в противном случае мы имели бы $\{B(t)\} = L_\varphi \in R$. По условию $B \in \mathfrak{A}'$, т. е. перестановочен со всеми операторами $A_k = \{A_k(t)\}$ из $\mathfrak{A}$. Это означает, что

$$A_k(t)\, B(t) = B(t)\, A_k(t) \quad \text{при} \quad t \in T - N_k,$$

где $\mu(N_k) = 0$. Пусть T_1 — то множество положительной меры в $T - \bigcup\limits_k N_k$, на котором оператор $B(t)$ не сводится к умножению на число. Тогда для каждого $t \in T_1$ семейство $\mathfrak{A}(t)$ будет приводимо, ибо все принадлежащие ему операторы $A_k(t)$ перестановочны с оператором $B(t)$, не кратным единице.

Доказательство первого утверждения мы проведем сначала для случая, когда все H_t имеют одинаковую размерность; в этом случае их можно отождествить с фиксированным пространством H. Само доказательство для этого случая мы проведем в несколько шагов.

1). *В пространстве S всех операторов A в H с нормой $\leqslant 1$ можно ввести такую метрику, что отвечающая ей сходимость эквивалентна слабой сходимости операторов.*

Действительно, пусть $\{\varphi_n\}$ — полная ортонормальная система в H. Положим для $A, B \in S$,

$$\rho(A, B) = \sum_{n, m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+m}} \left|(A\varphi_n, \varphi_m) - (B\varphi_n, \varphi_m)\right|. \tag{1}$$

Очевидно, соотношение $\rho(A^{(n)}, A) \to 0$ эквивалентно соотношениям

$$(A^{(n)}\, \varphi_p, \varphi_q) \to (A\varphi_p, \varphi_q) \quad \text{для} \quad p, q = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

А ввиду условия $|A^{(n)}| \leqslant 1$ соотношения (2) эквивалентны слабой сходимости последовательности $A^{(n)}$ к A.

2). *Пусть* Λ — *топологическое произведение пространств* T *и* S. *В* T *существует такое множество* N μ*-меры нуль, что*

а) $T - N$ — *борелевское подмножество в* T;

б) *множество* Q *всех пар* (t, B) *из* Λ *таких, что* $t \in T - N$ *и*

$$A(t)\, B = B\, A(t) \tag{3}$$

для всех $A = \{A(t)\} \in \mathfrak{A}$ — *борелевское множество в* Λ.

Выберем в H фиксированный ортонормальный базис $\{\varphi_n\}$. В этом базисе операторы $A(t)$, B определяются матрицами $A(t) \sim \|a_{pq}(t)\|$, $B \sim \|b_{pq}\|$, где $a_{pq}(t)$ — измеримые функции от t. Изменив, если нужно, каждую функцию $a_{pq}(t)$ на множестве N_{pq} μ-меры нуль, мы можем считать эти функции борелевскими и $T - N_{pq}$ борелевским (см. добавление II); тогда всюду, за исключением множества $N = \bigcup\limits_{p,\, q} N_{pq}$ μ-меры нуль, все функции $a_{pq}(t)$ будут борелевскими, причем $T - N$ — борелевское множество.

Условие (3) эквивалентно системе равенств

$$\sum_j a_{pj}(t)\, b_{jq} = \sum_j b_{pj}\, a_{jq}(t), \quad p, q = 1, 2, \ \ldots . \tag{4}$$

При фиксированных p и q левая и правая части (4) являются борелевскими функциями в Λ, ибо $a_{pj}(t)$ есть борелевская функция, не зависящая от B, а $b_{pq} = (B\varphi_q, \varphi_p)$ есть даже непрерывная функция от B в S, не зависящая от t. Но тогда множество Q_{pq} тех точек (t, B), $t \in T - N$, $B \in S$, для которых выполнено равенство (4), есть борелевское множество. Поэтому $Q = \bigcap\limits_{p,\, q} Q_{pq}$ есть также борелевское множество.

3). *Существует счетное множество* $\{B_n(t)\}$ *измеримых операторных функций таких, что для почти каждого фиксированного* t *множество всех операторов* $B_n(t)$ *порождает кольцо* $(\mathfrak{A}(t))'$.

Выберем в S счетную базу окрестностей U_n; это можно сделать в силу 1), леммы п. 2 § 40 и предложения IV п. 13 § 2. Пусть $\mathcal{U}_n$ — совокупность всех пар (t, B), $t \in T - N$, $B \in U_n$. Очевидно, $\mathcal{U}_n$ — борелевское множество в Λ. Следовательно, и пересечение $Q_n = Q \cap \mathcal{U}_n$ — борелевское множество в Λ.

Пусть T_n — совокупность тех t, для которых существует такой оператор B, что $(t, B) \in Q_n$. Как проекция борелевского множества T_n — аналитическое множество и, следовательно, измеримо. На основании теоремы Лузина–Янкова (см. добавление III) существует такая измеримая операторная функция $B_n(t)$, определенная для всех $t \in T_n$, что $\{t, B_n(t)\} \in Q_n$.

Доопределим функцию $B_n(t)$, считая ее равной нулю при $t \notin T_n$; очевидно, она при этом останется измеримой. Докажем, что построенное семейство $\{B_n(t)\}$, $n = 1, 2, \ldots$, будет искомым.

По самому построению $B_n(t)$ перестановочна с любым $A(t)$ для почти всех t; следовательно, для почти всех t

$$B_n(t) \in (\mathfrak{A}(t))'. \tag{5}$$

Докажем, что для каждого фиксированного $t \in T - N$ операторы $B_n(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, порождают кольцо $(\mathfrak{A}(t))'$. Для этого достаточно показать, что при $t \in T - N$ каждый оператор из $(\mathfrak{A}(t))'$, по норме не превосходящий единицы, есть слабая точка прикосновения множества операторов $B_n(t)$, т. е. что каждая слабая окрестность в $S \cap (\mathfrak{A}(t))'$ содержит хотя бы один оператор $B_n(t)$. Так как непустые пересечения $U_n \cap (\mathfrak{A}(t))'$ образуют базу окрестностей в $S \cap (\mathfrak{A}(t))'$, то достаточно доказать, что каждая такая окрестность содержит хотя бы один оператор $B_n(t)$.

Пусть при некотором $t = t_0 \in T - N$

$$U_n \cap (\mathfrak{A}(t_0))' \notin \varnothing.$$

Это означает, что множество пар вида

$$\{t_0, B\},$$

принадлежащих Q_n, не пусто, т. е. что $t_0 \in T_n$. Но тогда по построению функции $B_n(t)$

$$B_n(t_0) \in U_n \cap (\mathfrak{A}(t_0))',$$

что и требовалось.

Теперь мы уже можем доказать достаточность условия, сформулированного в теореме.

Неприводимость семейств $\mathfrak{A}(t)$ для почти каждого t означает, что для почти всех t кольцо $(\mathfrak{A}(t))'$ состоит только из операторов умножения на числа. Для установления этого факта в свою очередь достаточно показать, что каждая из построенных выше операторных функций $\{B_n(t)\}$ представляет собой оператор вида L_{φ_n} (т. е. оператор умножения на скалярную функцию).

Но в силу (5) оператор $B_n = \{B_n(t)\}$ перестановочен со всеми операторами $A = \{A(t)\}$ из $\mathfrak{A}$, т. е. принадлежит $\mathfrak{A}'$. С другой стороны, он (как и всякий оператор, представимый в виде операторной функции) перестановочен со всеми операторами из R. Но тогда он должен принадлежать R, так как иначе, в противоречие с условием теоремы, R не было бы максимальным коммутативным подкольцом в кольце $\mathfrak{A}'$. Теорема полностью доказана для того случая, когда все H_t имеют одинаковую размерность (конечную или бесконечную).

Рассмотрим теперь общий случай. Тогда все пространство T разбивается на сумму конечного или счетного числа измеримых множеств T_n таких, что при $t \in T_k$ пространства H_t имеют одну и ту же размерность k; тогда при $t \in T_k$ можно считать все пространства H_t совпадающими с фиксированным пространством H размерности k.

Положим

$$\mathfrak{H}_k = \int\limits_{T_k} H_t \, d\mu;$$

тогда прямой интеграл

$$\mathfrak{H} = \int\limits_{T} H_t \, d\mu$$

можно представить в виде

$$\mathfrak{H} = \bigoplus_k \mathfrak{H}_k.$$

Все операторы семейства $\mathfrak{A}$ будут приводиться каждым пространством $\mathfrak{H}_k$, т. е. будут иметь вид

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & A_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

где A_k — оператор в пространстве $\mathfrak{H}_k$.

Аналогичным образом операторы из R представятся в виде

$$\begin{pmatrix} L_{\varphi_1} & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & L_{\varphi_2} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

где L_{φ_k} — оператор умножения на функцию $\varphi_k \in L^\infty_\mu(T_k)$.

Пусть $\mathfrak{A}_k$ обозначает совокупность всех A_k, $A \in \mathfrak{A}$. Очевидно, операторы L_{φ_k}, рассматриваемые как операторы в $\mathfrak{H}_k$, образуют максимальное коммутативное подкольцо в $\mathfrak{A}'_k$. По доказанному выше для почти всех $t \in T_k$ множество $\mathfrak{A}(t)$ операторов $A_k(t) = A(t)$, $A \in \mathfrak{A}$, неприводимо. Так как $T = \bigcup\limits_k T_k$, то отсюда следует неприводимость семейства $\mathfrak{A}(t)$ для почти каждого t. Теорема доказана.

Замечание. Беря в качестве $\mathfrak{A}$ произвольное слабо замкнутое кольцо операторов, а в качестве R — его центр и проводя аналогичные рассуждения, мы получим разложение кольца $\mathfrak{A}$ в прямой интеграл слабо замкнутых колец $\widetilde{\mathfrak{A}}(t)$, порожденных множествами $\mathfrak{A}(t)$; при этом кольца $\widetilde{\mathfrak{A}}(t)$ являются факторами, т. е. удовлетворяют условию $\widetilde{\mathfrak{A}}(t) \cap \cap (\widetilde{\mathfrak{A}}(t))' = (\alpha 1)$. Этот результат был получен фон Нейманом (см. фон Нейман [10]). Подробнее см. в монографии Диксмье [14].

4. Разложение унитарного представления локально бикомпактной группы на неприводимые представления. В этом пункте мы, используя полученный в п. 3 критерий неприводимости, установим следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть $g \to U_g$ — действующее в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ непрерывное унитарное представление локально бикомпактной группы $\mathfrak{G}$ со счетной базой окрестностей. Тогда существует такое разложение*

$$\mathfrak{H} = \int_T H_t \, d\mu \tag{1}$$

пространства $\mathfrak{H}$ в прямой интеграл и для почти каждого $t \in T$ такое неприводимое непрерывное унитарное представление $g \to U_r(t)$ группы $\mathfrak{G}$, что

$$U_g = \{U_g(t)\} \tag{2}$$

для всех $g \in \mathfrak{G}$.

Доказательство. Докажем сначала утверждение для циклического представления. Пусть $g \to U_g$ — циклическое непрерывное унитарное представление группы $\mathfrak{G}$ и $\xi_0 \in \mathfrak{H}$ — соответствующий циклический вектор. Представление $g \to U_g$ определяет симметричное представление $x \to A_x$ кольца $L^1(\mathfrak{G})$ по формуле

$$A_x = \int x(g) \, U_g \, d\nu(g),$$

где ν — левоинвариантная мера на $\mathfrak{G}$.

Так как в $\mathfrak{G}$ есть счетная база окрестностей $\{U_n\}$ с бикомпактным замыканием, то $L^1(\mathfrak{G})$ сепарабельно; действительно, множество всех конечных линейных комбинаций характеристических функций χ_{U_n} с рациональными коэффициентами образует счетное плотное в $L^1(\mathfrak{G})$ множество.

Пусть $\{x_n\}$ — произвольное счетное плотное в $L^1(\mathfrak{G})$ множество. Мы можем считать, что это множество вместе с каждыми двумя векторами x_n и x_m содержит их разность $x_n - x_m$; в противном случае можно было бы к этому множеству просто присоединить все такие разности.

Согласно теореме 2 семейству операторов A_{x_n} отвечает разложение пространства $\mathfrak{H}$ в прямой интеграл

$$\mathfrak{H} = \int_T H_t \, d\mu,$$

обладающее следующими свойствами:

1) каждый из операторов A_{x_n} представляется в виде

$$A_{x_n} = \{A_{x_n}(t)\};$$

2) для почти каждого $t \in T$ семейство операторов $A_{x_n}(t)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, неприводимо в $\mathfrak{H}$.

При этом

$$|A_{x_n}| = \| \, |A_{x_n}(t)| \, \|_\infty;$$

следовательно, для почти каждого $t \in T$

$$|A_{x_n}(t)| \leqslant |A_{x_n}|.$$

Пусть T_n — множество тех точек t, для которых $|A_{x_n}(t)| > |A_{x_n}|$; выбрасывая все множества T_n, $n = 1, 2, \ldots$, μ-меры нуль, а также те t (также образующие множество μ-меры нуль), для которых хотя бы одна из функций $A_{x_n}(t)$ не определена или для которых семейство $A_{x_n}(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, приводимо, мы получим множество T', отличающееся от T множеством μ-меры нуль и обладающее следующими свойствами:

а) $A_{x_n}(t)$ определены для каждого $t \in T'$ и всех $n = 1, 2, \ldots$;

б) $|A_{x_n}(t)| \leqslant |A_{x_n}|$ для каждого $t \in T'$ и всех $n = 1, 2, \ldots$;

в) для каждого $t \in T'$ семейство $A_{x_n}(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, неприводимо в H_t.

Из свойства б) заключаем, что

$$|A_{x_n}(t)| \leqslant |A_{x_n}| \leqslant \|x_n\|_1, \tag{3}$$

и потому при $t \in T'$ можно определить $A_x(t)$ для всех $x \in L^1(\mathfrak{G})$. Действительно, для каждого $x \in L^1(\mathfrak{G})$ существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся к x по норме. Из (3) следует, что

$$|A_{x_n}(t) - A_{x_m}(t)| \leqslant \|x_n - x_m\|_1$$

(так как $x_n - x_m$ также входят в $\{x_n\}$), и потому последовательность $A_{x_{n_k}}(t)$ сходится по норме оператора к некоторому оператору в H_t, который и обозначим $A_x(t)$. Легко видеть, что $A_x(t)$ не зависит от выбора подпоследовательности $x_{n_k} \to x$. Как предел последовательности измеримых функций $A_{x_{n_k}}$ функция $A_x(t)$ также измерима.

Из равенств

$$A_{\alpha x} = \alpha A_x, \quad A_{x+y} = A_x + A_y, \quad A_{xy} = A_x A_y, \quad A_{x^*} = (A_x)^*$$

следует, что каждое из равенств

$$\begin{aligned} &A_{\alpha x}(t) = \alpha A_x(t), \quad A_{x+y}(t) = A_x(t) + A_y(t),\\ &A_{xy}(t) = A_x(t) A_y(t), \quad A_{x^*}(t) = (A_x(t))^* \end{aligned} \tag{4}$$

может не иметь места лишь на множестве точек μ-меры нуль. Пусть $\{\alpha_n\}$ — множество всех рациональных комплексных чисел. Обозначим через $T_{m,n}$ множество всех точек $t \in T'$, в которых не выполняется по крайней мере одно из равенств

$$\begin{aligned} &A_{\alpha_n x_m}(t) = \alpha_n A_{x_m}(t), \quad A_{x_n + x_m}(t) = A_{x_n}(t) + A_{x_m}(t),\\ &A_{x_n x_m}(t) = A_{x_n}(t) A_{x_m}(t), \quad A_{x_n^*}(t) = (A_{x_n}(t))^*. \end{aligned} \tag{5}$$

В силу сказанного выше $T_{n,m}$ есть множество μ-меры нуль, и на $T'' = T' - \bigcup\limits_{n,m} T_{n,m}$, отличающемся от T множеством меры нуль, выполняются все соотношения (5). Но тогда, беря в соотношениях (5) надлежащие подпоследовательности последовательностей $\{\alpha_n\}$, $\{x_n\}$, $\{x_m\}$ и переходя к пределу, получаем, что равенства (4) имеют место для каждого $t \in T''$ при любых $x, y \in L^1(\mathfrak{G})$ и любых комплексных α. Но это означает, что при $t \in T''$ соответствие $x \to A_x(t)$ есть симметричное представление кольца $L^1(\mathfrak{G})$. Это представление неприводимо, ибо уже семейство операторов $A_{x_n}(t)$, $n = 1, 2, \ldots$, неприводимо. Построим теперь соответствующие неприводимые представления $g \to U_g(t)$ группы $\mathfrak{G}$. Пусть $\xi_0 = \{\xi_0(t)\}$ — циклический вектор и T_0 — множество тех точек $t \in T''$, в которых $A_x(t)\,\xi_0(t) = 0$ для всех $x \in L^1(\mathfrak{G})$. Как пересечение множеств $T_n = \{t\colon t \in T'', A_{x_n}(t)\,\xi_0(t) = 0\}$ оно μ-измеримо. Докажем, что $\mu(T_0) = 0$. Если $\mu(T_0) > 0$, то векторы $A_x\xi_0$, $x \in L^1(\mathfrak{G})$, ортогональны ко всем таким векторам $\eta = \{\eta(t)\|$ из $\mathfrak{H}$, для которых $\eta(t) = 0$ при $t \notin T_0$, а это противоречит цикличности вектора ξ_0. Полагая $T''' = T'' - T_0$, мы видим, что при $t \in T'''$ вектор $\xi_0(t)$ — циклический для операторов $A_x(t)$, ибо представление $x \to A_x(t)$ неприводимо. Следовательно, векторы $\xi_n(t) = A_{x_n}(t)\,\xi_0(t)$ образуют плотное множество в H_t при $t \in T'''$.

Введем оператор $U_g(t)$ в H_t, полагая $U_{g_0}(t)\,A_x(t) = A_{x_{g_0}}(t)\,\xi_0(t)$ при $t \in T'''$ и продолжая его по непрерывности с векторов $A_x(t)\,\xi_0(t)$ на все H_t. В силу теоремы 1 п. 2 § 29 $g \to U_g(t)$ — непрерывное унитарное представление группы $\mathfrak{G}$ в H_t, причем $A_x(t) = \int x(g)\,U_g(t)\,d\nu(g)$, и потому представление $g \to U_g(t)$ неприводимо. Далее, $\{U_g(t)\,\xi_n(t)\} = \{A_{(x_n)_g}(t)\,\xi_0(t)\}$ есть измеримая вектор-функция от t; так как при любом $\xi = \{\xi(t)\}$ вектор-функция есть предел некоторой последовательности вектор-функций $\{U_g\,\xi_{n_k}(t)\}$, т. е.

$$\int\limits_T |U_g(t)\,\xi(t) - U_g(t)\,\xi_{n_k}(t)|^2\,d\mu = \int\limits_T |\xi(t) - \xi_{n_k}(t)|^2\,d\mu \to 0,$$

то вектор-функция $\{U_g(t)\,\xi(t)\}$ также измерима и $\in \mathfrak{H}$, т. е. операторная функция $\{U_g(t)\}$ измерима при каждом фиксированном $g \in \mathfrak{H}$. Остается показать, что $U_g = \{U_g(t)\}$. Для этого достаточно установить, что для любых $\xi = \{\xi(t)\}$, $\eta = \{\eta(t)\}$ из $\mathfrak{H}$

$$(U_g\xi, \eta) = \int\limits_T (U_g(t)\,\xi(t), \eta(t))\,d\mu.$$

Но при $\xi = \xi_n = \{A_{x_n}(t)\,\xi_0(t)\}$, $\eta = \xi_m = \{A_{x_m}(t)\,\xi_0(t)\}$ это равенство непосредственно проверяется, ибо

$$(U_g\xi_n, \xi_m) = (A_{(x_n)\,g}(t)\,\xi_0, A_{x_m}\xi_0) = \\ = \int\limits_T (A_{(x_n)\,g}(t)\,\xi_0(t), A_{x_m}(t)\,\xi_0(t))\,d\mu = \int\limits_T (U_g(t)\,\xi_n(t), \xi_m(t))\,d\mu,$$

а для любых ξ, η оно отсюда получается предельным переходом по некоторым подпоследовательностям $\xi_{n_k} \to \xi$, $\xi_{n'_k} \to \eta$. Тем самым теорема доказана для циклических представлений.

Пусть теперь $g \to U_g$ — произвольное непрерывное унитарное представление в пространстве $\mathfrak{H}$ и $x \to A_x$ — соответствующее представление кольца $L^1(\mathfrak{G})$. Тогда это представление есть прямая сумма не более чем счетного числа циклических непрерывных унитарных представлений $g \to U_g^{(k)}$. Это означает, что $\mathfrak{H} = \bigoplus\limits_k \mathfrak{H}_k$ и $U_g = U_g\{\xi_k\} = \{U_g^{(k)}\,\xi_k\}$, где $g \in U_g^{(k)}$ — циклические непрерывные унитарные представления. По доказанному выше существуют разложения в прямой интеграл

$$\mathfrak{H}_k = \int\limits_{T_k} H_t^k\, d\mu_k$$

и неприводимые непрерывные унитарные представления $g \to U_g^{(k)}(t)$, определенные для почти каждого $t \in T_k$, такие, что $U_g^{(k)} = \{U_g^{(k)}(t)\}$.

Положим $T' = \bigcup\limits_k T_k$ и определим топологию в T', считая базой окрестностей всевозможные открытые множества всевозможных T_k. Очевидно, T' локально бикомпактно; положим далее $T \in T'$, если T' бикомпактно, и $T \in T' \cup \infty$ (см. п. 9 § 2), если T' не бикомпактно. Тогда T бикомпактно. Определим далее меру μ на T, считая $\mu(\Delta) = \sum\limits_k \dfrac{1}{2^k}\,\mu(\Delta \cap T_k)$ и $\mu(\infty) = 0$, если $T = T' \cup \infty$. Положим теперь $H_t = \widetilde{H}_t^k$, $U_g(t) = U_g^{(k)}(t)$ для $t \in T_k$, где $\widetilde{H}_t^k$ совпадает с H_t, но скалярное произведение в нем задается формулой $\widetilde{(\xi, \eta)} = 2^k(\xi, \eta)$. Мы получим тогда разложение $\mathfrak{H} = \int\limits_T H_t\, d\mu$ и соответствующее разложение $U_g = \{U_g(t)\}$, удовлетворяющие всем поставленным требованиям.

Замечания. 1. Разложение на неприводимые представления зависит от выбора максимального подкольца в $(U_g)'$ и потому, вообще говоря, неоднозначно. Неоднозначен, вообще говоря, даже список неприводимых представлений, на которые разлагается данное унитарное представление группы $\mathfrak{G}$ (см., например, Макки [6] и [9]), если $\mathfrak{G}$ не типа I (см. ниже п. 5). С другой стороны, центральные разложения (см. ниже п. 5) по самому своему определению однозначны.

2. Фактическое разложение заданного представления (если это разложение однозначно) может представить значительные трудности. Гельфанд и Граев [3] разработали метод разложения на неприводимые представления, применимый к многим конкретным случаям. Случай тензорного произведения двух произвольных неприводимых представлений группы всех комплексных унимодулярных матриц второго порядка полностью разобран М. Наймарком [13, 15]; некоторые случаи тензорного произведения неприводимых унитарных представлений группы всех вещественных унимодулярных матриц второго порядка рассмотрели Пукански [5] и Ромм [1].

5. Центральные разложения и факторпредставления. Представление [1] $g \to U_g$ группы $\mathfrak{G}$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ называется факторпредставлением, если кольцо $R(U_g, g \in \mathfrak{G})$ (см. п. 1 § 34) есть фактор. Оно называется представлением класса (I), (II) или (III), если этот фактор соответственно класса (I), (II) или (III). Группа $\mathfrak{G}$ называется группой класса (I), если все ее факторпредставления — класса (I). Например: все комплексные полупростые группы Ли типа I (Хариш-Чандра [1, 4]). Заменив в доказательстве теоремы 3 разложение семейств $\{A_{x_n}\}$ на неприводимые представления разложением по центру кольца $\{A_{x_n}\}'$ (см. замечание в конце п. 3), мы получим разложение $\mathfrak{H} = \int\limits_T \mathfrak{H}(t)\,d\mu$, $U_g = \{U_g(t)\}$ (называемое *центральным*), в котором почти каждое $g \to U_g(t)$ есть факторпредставление. Гишарде [2] показал, что если в центральном разложении почти все представления $g \to U_g(t)$ неприводимы, то они почти все попарно неэквивалентны. Независимо более общий результат получил М. Наймарк [16, 17], доказавший, что в центральном разложении произвольного унитарного представления почти все факторпредставления $g \to U_g(t)$ попарно дизъюнктны [2]; если, в частности, эти представления типа I, то они кратны попарно неэквивалентным неприводимым представлениям. Этот же результат, независимо и несколько позже получил Эрнест [1].

6. Представления в пространстве с индефинитной метрикой. Пусть в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ наряду с обычным скалярным произведением (ξ, η) введено еще индефинитное скалярное произведение

$$[\xi, \eta] = (Jx, y), \quad \text{где} \quad J = P - Q,$$

P, Q — операторы проектирования, причем $P + Q = 1$; положим $\varkappa = \min(\dim P,\ \dim Q)$. Пространство $\mathfrak{H}$ с обоими скалярными произведениями (ξ, η), $[\xi, \eta]$ называется пространством $\Pi_\varkappa$, в частности пространством Понтрягина [3], если $\varkappa < \infty$. Представление $x \to A_x$ кольца R с инволюцией называется *J-симметричным*, если $A_{x^*} = (A_x)^+$, где при $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ оператор A^+ определяется равенством

[1] В дальнейшем, если это не оговорено, термин «представление группы $\mathfrak{G}$» означает непрерывное унитарное представление локально бикомпактной группы $\mathfrak{G}$.

[2] Два унитарных представления называются *дизъюнктными*, если никакая часть (т. е. сужение на инвариантное подпространство) любого из них не эквивалентна никакой части другого представления. Два унитарных представления называются *квазиэквивалентными*, если никакая часть любого из них не дизъюнктна с другим (оба определения принадлежат Макки [6]).

[3] Понтрягин [5] впервые начал изучение пространств $\Pi_\varkappa$ при $\varkappa < \infty$ в связи с некоторыми задачами теории дифференциальных уравнений, возникшими в работах Соболева. Дальнейшее развитие теория операторов в пространствах $\Pi_\varkappa$, $\varkappa \leqslant \infty$, получила в работах Иохвидова и М. Крейна [1], Гинзбурга и Иохвидова [1], Иохвидова [1], М. Л. Бродского [1], Г. Лангера [1] и др.

$[A\xi, \eta] = [\xi, A^+\eta]$; представление $g \to U_g$ группы $\mathfrak{G}$ называется *J-унитарным*, если $[U_g\xi, U_g\eta] = [\xi, \eta]$ для всех $\xi, \eta \in \Pi_\varkappa$. В работах М. Наймарка [23, 24] исследована структура непрерывных J-симметричных представлений колец с инволюцией и J-унитарных представлений групп в пространстве Понтрягина. Эти представления, вообще говоря, уже не разлагаются в прямой интеграл неприводимых представлений (например, неунитарное представление может быть приводимым, но не вполне приводимым). Тем не менее удается получить формулы для таких представлений; в этих формулах также участвуют разложение в прямой интеграл и неприводимые представления группы $\mathfrak{G}$, но более сложным образом, чем в теоремах 2 и 3 пп. 3 и 4. Аналогично выводу этих теорем предварительно исследуется структура J-симметричных (если $A \in R$, то $A^+ \in R$) коммутативных подколец операторов в $\Pi_\varkappa$, $\varkappa < \infty$ (М. Наймарк [22, 25]). При этом исследовании существенную роль играет следующий результат (М. Наймарк [20]): *для каждого коммутативного J-симметричного семейства ограниченных операторов в пространстве $\Pi_\varkappa$, $\varkappa < \infty$, $\varkappa = \dim P$, в $\Pi_\varkappa$ существует $\varkappa$-мерное неотрицательное подпространство, инвариантное относительно всех операторов семейства.*

Этот результат является перенесением на семейства операторов теоремы Понтрягина–М. Крейна–Иохвидова (см. Иохвидов и Крейн [1]); J-унитарные представления в $\Pi_\varkappa$, $\varkappa < \infty$, группы унимодулярных матриц второго порядка над различными полями исследованы в работе Исмагилова [1].

Результаты § 40 и пп. 1–3 § 41 принадлежат, в основном, фон Нейману [10]; отметим, что эта статья фон Неймана, опубликованная в 1949 г., фактически была им закончена в 1938 г. Близкое к фоннеймановскому изложение было затем дано в статье Наймарка и Фомина [4]. Другое, независимое от фон Неймана изложение имеется в статьях Адельсона-Вельского [1, 2]; близкие результаты получил независимо Годман [7]. Более полное изложение этих вопросов дано в книге Диксмье [14]; автор следовал Диксмье в изложении добавления III.

Теорема 3 п. 4 для счетных дискретных групп была впервые получена А. Н. Колмогоровым (доложена на заседании Московского Математического общества 4 февраля 1944 года) без использования теории фон Неймана, затем для общих групп, в несколько ослабленной формулировке, — Маутнером [2] на основе результатов фон Неймана; далее Маутнер [3] доказал утверждение теоремы 3 п. 4 для групп Ли, и Годман [10] в реферате на эту статью Маутнера привел изложенное здесь доказательство и тем самым показал, что в действительности утверждение теоремы 3 п. 4 справедливо для любой локально бикомпактной группы со счетной базой.

В дальнейшем Маутнер [8] показал, что функция $U_g(t)$ является также измеримой на $\mathfrak{G} \times T$ относительно меры $\mu \times \nu$ (см. также Сигал [11] и Сакаи [1]).

Дальнейшее развитие теория прямых интегралов представлений получила в работах Макки ([7], см. также обзор Макки [9]). В этих работах Макки бикомпактное пространство T заменяется пространством (мы снова обозначим его T) классов эквивалентных между собой неприводимых унитарных представлений локально бикомпактной группы $\mathfrak{G}$ (так называемым *дуальным пространством группы* $\mathfrak{G}$), которое, как показал Макки, можно сделать борелевским пространством и притом так, что отображения $t \to U_g(t)$ становятся борелевскими (см. добавление II). Теория наиболее проста, когда T стандартно (это означает, что T борелевски изоморфно борелевскому подмножеству M сепарабельного метрического пространства). Последнее, как показал Глимм [3], имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{G}$ — группа типа I. Аналогичную теорию Макки построил для симметричных представлений колец с инволюцией. Эти исследования продолжены и обобщены в работах Глимма [2, 3], Диксмье (см. Диксмье [20]), Фелла [1–3], Эрнеста [1], Эфроса [1] и других авторов, причем рассмотрены также различные топологии в дуальном пространстве T. В частности, Диксмье [18] показал, что для вполне регулярного кольца R следующие условия эквивалентны:

1) дуальное пространство T стандартно;
2) борелевская структура на T счетно отделима (т. е. в T существует счетный набор борелевских подмножеств, отделяющих точки на T);
3) борелевская структура на T порождается открытыми множествами;
4) R есть GCR-кольцо в терминологии Капланского [13] (R называется CCR-кольцом, если при любом неприводимом представлении $x \to A_x$ кольца R все операторы A_x вполне непрерывны, и GCR-кольцом, если в R есть композиционный ряд $\{I_\alpha\}$ двусторонних идеалов, в котором все факторкольца $I_{\alpha+1}/I_\alpha$ являются CCR-кольцами). Отметим, что теорию разложений в прямой интеграл с использованием обобщенных функций на группе разработали Г. И. Кац [2] и Морен [1].

Отметим также работу Васильева [1], в которой изучены симметричные кольца, все неприводимые симметричные представления которых конечномерны.

Добавление I

ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫЕ МНОЖЕСТВА И ЛЕММА ЦОРНА

Множество X называется *частично упорядоченным*, если для некоторых пар его элементов определено соотношение $x \prec y$, обладающее следующими свойствами:

1) $x \prec x$;

2) если $x \prec y$ и $y \prec z$, то $x \prec z$;

3) если $x \prec y$ и $y \prec x$, то $x = y$.

Вместо $x \prec y$ пишем также $y \succ x$.

Частично упорядоченное множество X называется *направленным книзу*, если для каждых $x, y \in X$ существует элемент $z \in X$ такой, что $z \prec x$, $z \prec y$; аналогично определяются множества, *направленные кверху*. Отображение $\alpha \to x_\alpha$ направленного множества A в произвольное множество X называется *сетью* в X с множеством индексов A и обозначается $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ или просто $\{x_\alpha\}$. Частично упорядоченное множество X называется *линейно упорядоченным*, если для любых двух различных $x, y \in X$ либо $x \prec y$, либо $y \prec x$. Элемент $x_0 \in X$ называется максимальным [1]) в X, если не существует элемента $x \in X$, $x \neq x_0$, удовлетворяющего условию $x \succ x_0$. Элемент x называется *верхней границей* множества $A \subset X$, если $x \prec x_0$ для всех $x \in A$.

Следующая лемма, равносильная аксиоме выбора Цермело (см., например, Биркгоф [1], гл. III, § 6), имеет многие применения в функциональном анализе и других областях математики.

Лемма Цорна. *Если в частично упорядоченном множестве X каждое линейное упорядоченное подмножество имеет в X верхнюю границу, то X содержит максимальный элемент.*

Очевидно, в формулировке этой леммы можно верхнюю границу заменить нижней, и тогда максимальный элемент — минимальным.

---

[1]) Это понятие отличается от понятия наибольшего элемента. Элемент $x_0 \in X$ называется *наибольшим* в X, если $x \prec x_0$ для всех $x \in X$. Наибольший элемент максимален, но обратное, вообще говоря, неверно.

Добавление II

БОРЕЛЕВСКИЕ ПРОСТРАНСТВА И БОРЕЛЕВСКИЕ ФУНКЦИИ

Пусть T — произвольное множество. *Борелевской структурой* на T называется семейство $\mathscr{B}$ подмножеств множества T, удовлетворяющее следующим условиям:

1). Если конечное или счетное число множеств $B_j \in \mathscr{B}$, то также $\bigcap\limits_j B_j \in \mathscr{B}$ и $\bigcup\limits_j B_j = \mathscr{B}$;

2). Если $B \in \mathscr{B}$, то $T - B \in \mathscr{B}$;

3). $\varnothing \in \mathscr{B}$.

Каждое из множеств $B \in \mathscr{B}$ называется *борелевским*. Множество T вместе с борелевской структурой $\mathscr{B}$ на нем называется *борелевским пространством*. Каждое борелевское множество B_0 борелевского пространства T является борелевским пространством, если считать его борелевской структурой совокупность всех $B \subset \mathscr{B}$, содержащихся в B_0.

Если F — произвольное семейство подмножеств множества T, то существуют семейства подмножеств, содержащие F и удовлетворяющие условиям 1)–3), например совокупность всех подмножеств множества T. Пересечение всех таких семейств, содержащих F, есть *минимальное* семейство, удовлетворяющее условиям 1)–3) и содержащее F; оно называется *борелевской структурой*, *порожденной семейством* F.

Пусть T_1 и T_2 — два борелевских пространства. Отображение f множества T_1 в T_2 называется *борелевским*, если $f^{-1}(B_2)$ — борелевское множество в T_1 для каждого борелевского множества B_2 из T_2. Взаимно однозначное отображение f пространства T_1 на T_2 называется *борелевским изоморфизмом*, если f и f^{-1} — борелевские отображения. Два борелевских пространства T_1 и T_2 называются *борелевски изоморфными*, если существует борелевский изоморфизм T_1 на T_2.

Борелевская структура $\mathscr{B}$ топологического пространства T называется *порожденной топологией* этого пространства, если $\mathscr{B}$ порождена семейством всех его замкнутых множеств; из условий 2) и 3) следует, что замкнутые множества можно заменить открытыми. В дальнейшем под борелевской структурой в топологическом пространстве T мы всегда будем понимать борелевскую структуру, порожденную его топологией.

Важным примером является пространство $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ со слабой операторной топологий (см. п. 1 § 33).

В дальнейшем в этом добавлении мы рассматриваем тот случай, когда T — локально бикомпактное хаусдорфово пространство.

Если I — интеграл на T и μ — соответствующая мера, то μ-измеримые множества образуют семейство M, удовлетворяющее условиям 1)–3) и содержащее все открытые множества (см. п. 9 § 6); но $\mathscr{B}$ есть минимальное семейство, удовлетворяющее условиям 1–3 и содержащее все открытые множества; поэтому $\mathscr{B} \subset M$, т. е. борелевские множества измеримы относительно любого интеграла I.

Вещественная функция f называется *борелевской*, если при любом вещественном a множество $\{t\colon f(t) > a\}$ борелевское [1]. Комплексная функция f называется *борелевской*, если $\mathrm{Re}\, f$ и $\mathrm{Im}\, f$ — борелевские функции. Из этих определений следует, что предложения II–VII п. 10 § 6 сохраняют силу, если в них измеримые множества и измеримые функции заменить соответственно борелевскими множествами и борелевскими функциями. Кроме того, вещественные функции, полунепрерывные сверху или снизу, являются борелевскими, ибо в случае (например) полунепрерывной снизу функции f множество $\{t;\ f(t) > a\}$ открыто.

Пусть теперь I — интеграл на T, μ — соответствующая мера и $L^1 = L^1(I)$. Применяя к функции $f \in L^1(I)$ предложение IX, п. 7 § 6, заключаем:

Для каждой функции $f \in L^1(I)$ существует такое множество $N \subset T$ μ-меры нуль и такая борелевская функция z, что $f(t) = z(t)$ для всех $t \in T - N$.

[1] Нетрудно доказать, что это определение является частным случаем данного выше определения борелевского отображения, когда $T_2 = R^1$ с обычной топологией. Доказательство мы предоставляем читателю.

Добавление III

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МНОЖЕСТВА

Пусть N — множество всех натуральных чисел; с расстоянием $\rho(m, n) = |m - n|$ при $m, n \in N$ оно является полным сепарабельным метрическим пространством. Тогда N^N (см. п. 15 § 2) — метрическое пространство всех последовательностей $m = \{m_k\}$, $m_k \in N$, с расстоянием

$$\rho(m, n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|m_k - n_k|}{1 + |m_k - n_k|}, \quad m = \{m_k\}, \quad n = \{n_k\} \in N.$$

В силу II и III п. 15 § 2 N^N — полное сепарабельное метрическое пространство.

I. *Всякое полное сепарабельное метрическое пространство X есть непрерывный образ пространства N^N.*

Доказательство. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует покрытие пространства X счетным множеством замкнутых шаров диаметром $< \varepsilon$ (см. VI п. 13 § 2). Построим такое покрытие для $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{2}$ и занумеруем как-нибудь шары этого покрытия; шар с номером m_1 обозначим через $f(m_1)$. Далее, каждый шар $f(m_1)$ покроем счетным числом замкнутых шаров диаметра $< \varepsilon_2 = \dfrac{1}{2^2}$ и занумеруем как-нибудь все эти шары. Пересечение с $f(m_1)$ шара с номером m_2 обозначим через $f(m_1, m_2)$. Продолжая это построение, мы каждому набору $\{m_1, \ldots, m_p\}$ отнесем замкнутое множество $f(m_1, \ldots, m_p)$ с диаметром $< \dfrac{1}{2^p}$. Каждой точке $m = (m_1, m_2, \ldots) \in N^N$ будет тогда отвечать последовательность $f(m_1) \supset f(m_1, m_2) \supset \ldots$ замкнутых множеств с диаметрами $\to 0$. Поэтому существует в точности одна точка x, общая для всех этих множеств (см. II п. 13 § 2), которую обозначим через $\varphi(m)$. Таким образом мы построили отображение φ: $N^N \to X$. Ясно, что каждая точка $x \in X$ таким образом получается. Итак, $X = \varphi(N^N)$.

Если для $m, n \in N^N$ расстояние $\rho(m, n) < \dfrac{1}{2^{p+1}}$, то $m_1 = n_1, \ldots, m_p = n_p$. Это означает, что точки $x = \varphi(m)$ и $y = \varphi(n)$ принадлежат одному и тому же множеству $f(m_1, \ldots, m_p)$ диаметра $< \dfrac{1}{2^p}$, и потому $\rho(x, y) < \dfrac{1}{2^p}$. Тем самым доказано, что отображение φ непрерывно.

II. *Всякое бикомпактное хаусдорфово пространство T со счетной базой метризуемо и притом так, что при введенной метрике оно становится полным сепарабельным метрическим пространством.*

Доказательство. Пусть $\{U_k\}$ — счетная база в T. Рассмотрим всевозможные пары $P = \{U_k, U_j\}$, удовлетворяющие условию $\overline{U}_k \subset U_j$, и занумеруем их как-нибудь в виде последовательности $P_1, P_2, \ldots$, так что $P_n = \{U_{k_n}, U_{j_n}\}$, $\overline{U}_{k_n} \subset U_{j_n}$. Так как T нормально, то, согласно лемме Урысона, для каждой пары P_n существует непрерывная на T вещественная функция $f_n(t)$, удовлетворяющая условиям

$$\begin{gathered} 0 \leqslant f_n(t) \leqslant 1, \quad f_n(t) = 0 \quad \text{на} \quad \overline{U}_{k_n}, \\ f_n(t) = 1 \quad \text{на} \quad T - U_{j_n} \end{gathered} \tag{1}$$

(см. I и II п. 8 § 2). Каждой точке $t \in T$ поставим в соответствие последовательность $x = \{x_1, x_2, \ldots\}$, где $x_n = \frac{1}{n} f_n(t)$, и положим $x = \varphi(t)$. В силу (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$, так что $x \in l^2$. Следовательно, φ есть отображение пространства T в сепарабельное метрическое (и даже гильбертово) пространство l^2 (см. пример 3 п. 1 § 4). Это отображение взаимно однозначно. Действительно, пусть $t_1 \neq t_2$. Тогда существует такая окрестность U_j точки t_1, что $t_2 \notin U_j$. В силу нормальности пространства T существует окрестность U_k точки t_1 такая, что $\overline{U}_k \subset U_j$. Но в таком случае (U_k, U_j) есть одна из пар P_n. Пусть $(U_k, U_j) = P_s$. В силу (1) $f_s(t_1) = 0$, ибо $t_1 \in U_k \subset \overline{U}_j$ и $f_s(t_2) = 1$, ибо $t_2 \notin U_j$. Поэтому, полагая $\varphi(t_1) = x^{(1)} = \{x_k^{(1)}\}$, $\varphi(t_2) = x^{(2)} = \{x_k^{(2)}\}$, имеем $x_s^{(1)} = 0$, $x_s^{(2)} = \frac{1}{s}$, откуда

$$[\rho(x^{(1)}, x^{(2)})]^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(1)} - x_k^{(2)}|^2 \geqslant |x_s^{(1)} - x_s^{(2)}| = \frac{1}{s^2} \neq 0 \quad \text{и} \quad x^{(1)} \neq x^{(2)}.$$

Докажем непрерывность отображения φ. Пусть $t_0 \in T$ и $\varepsilon > 0$. Выберем номер n_1 так, чтобы $\sum\limits_{k=n_1+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{\varepsilon^2}{8}$, а затем окрестность $U(t_0)$ так, чтобы

$$|f_k(t) - f_k(t_0)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}\, c} \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots, n_1,$$

где $c^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Тогда при $t \in U(t_0)$

$$\begin{gathered} [\rho(\varphi(t), \varphi(t_0))]^2 = \sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{k^2} |f_k(t) - f_k(t_0)|^2 + \sum_{k=n_1+1}^{\infty} |f_k(t) - f_k(t_0)|^2 < \\ < \frac{\varepsilon^2}{2c^2} \sum_{k=1}^{n_1} \frac{1}{k^2} + 4 \sum_{k=n_1+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2 \end{gathered}$$

и, следовательно, $\rho(\varphi(t), \varphi(t_0)) < \varepsilon$. Этим доказана непрерывность отображения φ. Но тогда φ — гомеоморфизм, ибо T бикомпактно (см. V п. 7 § 2). Поэтому $\varphi(T)$ замкнуто в l^2 (II п. 7 § 2) и, следовательно, есть полное сепарабельное (см. IV п. 13 § 2) метрическое пространство, гомеоморфное пространству T.

Пусть теперь X — полное сепарабельное метрическое пространство. Множество $A \subset X$ называется *аналитическим* (или *суслинским*), если оно является непрерывным образом некоторого полного сепарабельного метрического пространства P. Пустое множество будем по определению считать аналитическим.

Из этого определения непосредственно следует, что:

1) *всякое замкнутое подмножество в X есть аналитическое множество*;
2) *непрерывный образ* (*в полном сепарабельном метрическом пространстве*) *аналитического множества есть аналитическое множество.*

Кроме того:

3) *всякое открытое множество U в X есть аналитическое множество.*

Доказательство. Положим $F = X - U$ и для $x, y \in U$

$$\rho'(x, y) = \rho(x, y) + \left|[\rho(x, F)]^{-1} - [\rho(y, F)]^{-1}\right|,$$

где

$$\rho(x, F) = \inf_{z \in F} \rho(x, z).$$

Так как F замкнуто, то $\rho(x, F) > 0$ при $x \in U$. Действительно, в противном случае существует последовательность $z_n \in F$, для которой $\rho(x, z_n) \to 0$. Но тогда, вопреки условию, $x \in F$. Очевидно, ρ' удовлетворяет всем аксиомам расстояния, так что U с расстоянием ρ' есть метрическое пространство; обозначим его U'. Так как $\rho \leqslant \rho'$, то тождественное отображение U' на U непрерывно.

Покажем, что U' полно. Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность в U'. Так как $\rho \leqslant \rho'$, то $\{x_n\}$ фундаментальна в X, следовательно, сходится в X к некоторому $x \in X$ (напомним, что X полно). С другой стороны, в силу (1) числа $\rho(x_n, F)$ ограничены снизу положительной константой, ибо множество $\rho'(x_n, x_m)$, $n, m = 1, 2, \ldots$, ограничено; поэтому $x \in U$. Пусть $\varepsilon > 0$; существует такой номер n_0, что

$$\rho'(x_m, x_n) = \rho(x_m, x_n) + |\rho(x_m, F)^{-1} - \rho(x_n, F)^{-1}| < \varepsilon$$

при $n, m > n_0$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $m \to \infty$ и фиксированном $n \geqslant n_0$, получим, что

$$\rho'(x, x_n) = \rho(x, x_n) + \left|[\rho(x, F)]^{-1} - [\rho)x_n, F)]^{-1}\right| \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, $x_n \to x$ в U.

Остается показать, что U' сепарабельно. Так как X сепарабельно, то в U содержится плотная последовательность $\{z_n\}$. Она будет плотна и в U'. Действительно, пусть $x \in U'$. Существует подпоследовательность $\{z_{nk}\}$, для которой $\rho(z_{n_k}, x) \to 0$. Но тогда [1] $\rho(z_{n_k}, F) \to \rho(x, F)$, и следовательно, $\rho'(z_{n_k}, x) \to 0$.

Наконец:

4) *объединение и пересечение конечного или счетного семейства аналитических подмножеств A_j полного сепарабельного метрического пространства X есть аналитическое множество.*

Действительно, пусть $A_j = f_j(P_j)$, где P_j — полные сепарабельные метрические пространства с метрикой $\rho_j(x, y)$, которые можно считать попарно непересекающимися, а f_j — непрерывные отображения P_j в X. Тогда $P = \bigcup\limits_j P_j$ — также полное сепарабельное метрическое пространство, если наделить его расстоянием $\rho(x, y) = 1$ при $x \in P_j$, $y \in P_k$, $j \neq k$, и $\rho(x, y) = \max\{\rho_j(x, y), 1\}$ при $x, y \in P_j$, полагая $f(x) = f_j(x)$ при $x \in P_j$, получим, что $f\Big(\bigcup\limits_j P_j\Big) = \bigcup\limits_j A_j$, f — непрерывное отображение P в X и, следовательно, $\bigcup\limits_j A_j$ — аналитическое множество.

Далее, если пересечение множеств A_j пусто, то оно по определению аналитично. Пусть $\bigcap\limits_j A_j \neq \varnothing$ и $P' = \prod\limits_j P_j$ — топологическое произведение пространств P_j. Тогда P' — полное сепарабельное метрическое пространство (см. II и III п. 15 § 2). Пусть Q — множество всех $\{x_n\} \in P'$, для которых $f_m(x_m) = f_n(x_n)$ при всех m, n. Тогда Q замкнуто в P' и потому — также полное сепарабельное метрическое пространство. Полагая $p_m(\{x_n\}) = x_m$ и обозначая через f сужение $f_m \cdot p_m$ на Q, заключаем, что f не зависит от m, f непрерывно и $f(Q) = \bigcap\limits_j A_j$. Следовательно, $\bigcap\limits_j A_j$ аналитично.

Пусть теперь $\mathscr{B}$ — борелевская структура в X, рассматриваемом как топологическое пространство, и $\mathfrak{A}$ — семейство всех аналитических множеств в X, дополнения которых также аналитичны [2]. В силу 4) семейство $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям 1)–3), сформулированным в добавлении II (напомним, что $\varnothing \in \mathfrak{A}$), а в силу 1) и 3) $\mathfrak{A}$ содержит все

---

[1] Из неравенства треугольника

$$\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$$

при фиксированных $x, y \in U$ и произвольном $z \in F$ следует, что

$$\rho(x, F) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, F),$$

откуда $\rho(x, F) - \rho(y, F) \leqslant \rho(x, y)$. Меняя ролями x и y, заключаем, что $|\rho(x, F) - \rho(y, F)| \leqslant \rho(x, y)$. В частности, $|\rho(x_n, F) - \rho(x, F)| \leqslant \rho(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$.

[2] Отметим, что дополнение к аналитическому множеству может не быть аналитическим.

замкнутые (и все открытые) множества в X. Так как $\mathscr{B}$ — минимальное семейство, удовлетворяющее всем этим условиям, то $\mathscr{B} \subset \mathfrak{A}$[1]), следовательно, *всякое борелевское множество в X есть аналитическое множество, поэтому непрерывный образ борелевского множества есть аналитическое множество.*

Пусть F — бикомпактное топологическое пространство. Обозначим через $K_{\sigma\delta}$ всякое множество в F вида $B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \ldots$, где каждое B_k есть объединение не более чем счетного числа компактных множеств.

Отметим, что в полном сепарабельном метрическом пространстве компактность совпадает с бикомпактностью (см. сноску на с. 61).

III. *Если аналитическое множество A в полном сепарабельном метрическом пространстве X предкомпактно, то существуют компактное метрическое пространство F, множество $B \subset F$ типа $K_{\sigma\delta}$ и непрерывное отображение пространства F в X такие, что $A = f(B)$.*

Доказательство. Заменяя пространство X множеством $\overline{A}$, можно считать, что X компактно. Пусть g — непрерывное отображение пространства N^N на A. Обозначим через $\overline{R}$ вещественную прямую с присоединенной бесконечно удаленной точкой и через $\overline{R}^N$ топологическое произведение счетного числа экземпляров пространства $\overline{R}$. Так как $\overline{R}$ бикомпактно, то $\overline{R}^N$ бикомпактно[2]) (см. IV п. 1 § 2). Пространство N^N можно рассматривать как подпространство компактного метрического пространства $\overline{R}^N$.

Пусть $Q_n \subset R$ — объединение отрезков I_{kn} длины $1/n$ с центрами в целых точках k; положим $G_n = Q_n \times Q_n \times \ldots \times Q_n \times \overline{R} \times \overline{R} \times \ldots$ $\ldots$ (n раз Q_n). Тогда каждое G_n есть объединение счетного числа замкнутых множеств $I_{nk_1} \times \ldots \times I_{nk_n} \times \overline{R} \times \overline{R} \times \ldots$ в $\overline{R}^N$ и $\bigcap\limits_n G_n = N^N$.

Пусть B — график g в $N^N \times X$, $\overline{B}$ — его замыкание в компактном пространстве $F = \overline{R}^N \times X$ и f — проектирование пространства F на X. Тогда $A = f(B)$. Так как B замкнуто в $N^N \times X$ (ибо g непрерывно), то $B = \overline{B} \cap (N^N \times X)$. Следовательно,

$$B = [\overline{B} \cap (G_1 \times X)] \cap [\overline{B} \cap (G_2 \times X)] \cap \ldots,$$

причем каждое $\overline{B} \cap (G_n \times X)$ есть объединение счетного числа замкнутых и потому компактных множеств в F.

IV. *Всякое аналитическое множество A в бикомпактном хаусдорфовом пространстве X со счетной базой измеримо (относительно любого интеграла I на X).*

[1]) Можно показать, что $\mathfrak{A} = \mathscr{B}$, но нам это не понадобится.

[2]) $\overline{R}^N$ также полное метрическое компактное пространство в силу II.

Доказательство. В силу II X можно считать полным сепарабельным метрическим пространством. Так как A содержится в компактном X, то A предкомпактно. В силу III существуют компактное метрическое пространство F, его непрерывное отображение f в X и семейство компактных множеств $B_{n,p}$, $n, p = 1, 2, \ldots$, в F таких, что $A = f(B)$, где $B = B_1 \cap B_2 \cap \ldots$ и $B_n = B_{n,1} \cup B_{n,2} \cup \ldots$.

Очевидно, можно считать, что $B_{n,1} \subset B_{n,2} \subset \ldots$ для каждого n.

Пусть μ — мера, определенная данным интегралом, $\overline{\mu}$ — соответствующая внешняя мера, т.е. $\overline{\mu}(C) = \overline{I}(\xi_C)$ для произвольного множества $C \subset X$ (см. п. 5 § 6). Докажем, что для каждого $a < \overline{\mu}(A)$ существует такое компактное множество $C \subset B$, что $\mu(f(C)) \geqslant a$. Поскольку $f(C)$ компактно, предложение IV будет доказано.

Для построения множества C покажем, что существует такая последовательность индексов $p_1, p_2, \ldots$, что множество $C = B \cap B_{1,p_1} \cap \cap \ldots \cap B_{n,P_n}$ удовлетворяет условию $\overline{\mu}(f(C_n)) > a$ для каждого n. Пусть B_{i,p_i} уже определено при $i < n$. Так как $C_{n-1} \subset B \subset B_n$, то $C_{n-1} = (C_{n-1} \cap B_{n,1}) \cup (C_{n-1} \cap B_{n,2}) \cup \ldots$; следовательно (см. (3) п. 5 § 6), $\overline{\mu}(f(C_{n-1} \cap B_{n,k})) \to \overline{\mu}(f(C_{n-1}))$ при $k \to \infty$, и потому $\overline{\mu}(f(C_{n-1} \cap B_{n,p_n})) > a$ при некотором p_n.

Положим теперь $C = B_{1,p_1} \cap B_{2,p_2} \cap \ldots$; C не пусто и компактно как пересечение убывающей последовательности непустых компактных множеств $B_{1,p_1} \cap \ldots B_{n,p_n}$; следовательно, $f(C)$ компактно и есть пересечение множеств $f(B_{1,p_1} \cap \ldots \cap B_{n,p_n})$ [1]. Отсюда

$$\mu(f(C)) = \lim_{n\to\infty} \mu(f(B_{1,p_1} \cap \ldots \cap B_{n,p_n})) \geqslant$$
$$\geqslant \lim_{n\to\infty} \overline{\mu}(f(B \cap B_{1,p_1} \cap \ldots \cap B_{n,p_n})) = \lim_{n\to\infty} \overline{\mu}(f(C_n)) \geqslant a.$$

Кроме того, так как $B_{n,p_n} \subset B_n$, то $C = \bigcap\limits_n B_{n,p_n} \subset \bigcap\limits_n B_n = B$.

Вернемся теперь к пространству N^N и упорядочим его лексикографически [2]. Тогда

[1] Действительно, полагая $Q_n = B_{1,p_1} \cap \ldots \cap B_{n,p_n}$, имеем: $Q = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Q_n$ и $f(Q) \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f(Q_n)$. Обратно, если $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f(Q_n)$, то для каждого n существует $t_n \in Q_n \subset F$ такое, что $x = f(t_n)$. Так как F компактно, то существует подпоследовательность t_{n_k}, сходящаяся к некоторому $t_0 \in F$. Очевидно, $t_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} Q_n = Q$ и $f(t_0) = \lim\limits_{k\to\infty} f(t_{n_k}) = x$, так что $x \in f(Q)$. Тем самым доказано, что $f(Q) = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} f(Q_n)$.

[2] Это означает, что мы будем считать $m < n$ ($m, n \subset N$), если $m_1 < n_1$ или $m_1 = n_1$, $m_2 < n_2$, …, вообще, если при некотором целом $k \geqslant 1$ $m_j = n_j$ при $j \leqslant k$ и $m_{k+1} < n_{k+1}$.

V. *Всякое непустое замкнутое множество F в N^N имеет наименьший элемент.*

Доказательство. Пусть p_1 — наименьшее из чисел n_1, для которых $(n_1, n_2, n_3, \ldots) \in F$ при некоторых n_2, n_3, ...; далее, пусть p_2 — наименьшее из чисел n_2, для которых $(p_1, n_2, n_3, \ldots) \in F$ при некоторых n_3, ... Повторяя это построение, получим точку $p = (p_1, p_2, \ldots) \in N^N$, которая не больше любого $n \in F$. Кроме того, из построения видно, что p — точка прикосновения множества F, и потому $p \in F$.

Пусть T, S — топологические пространства, T локально бикомпактно, I — интеграл на T, μ — соответствующая мера. Отображение $s = f(t)$ из пространства T в S будем называть μ-измеримым, если оно определено на μ-измеримом множестве $T' \subset T$ и прообраз каждого открытого множества из S есть μ-измеримое множество в T.

Отсюда непосредственно следует

VI. *Если f_1 — непрерывное отображение пространства S в пространство S_1, а f — измеримое отображение пространства T в S, то отображение $f_1 \cdot f$ пространства T в S_1 измеримо.*

В частности, проектирование $p(t, s) = s$ есть непрерывное отображение пространства $T \times S$ на S; поэтому

VII. *Отображение f пространства T в S измеримо, если измеримо отображение $t \to \{t, f(t)\}$ пространства T в $T \times S$.*

VIII. *Пусть Q — счетное множество всех точек в N^N, все координаты которых, начиная с некоторой, равны нулю. Тогда каждое открытое множество U в N^N есть объединение интервалов $[m, n)$, где $m, n \in Q$.*

Доказательство. Пусть $p = (p_1, p_2, \ldots) \in U$. Тогда существует такой индекс k, что все точки $q = (p_1, \ldots, p_k, q_{k+1}, \ldots) \in U$. Полагая $m = (p_1, \ldots, p_k, p_{k+1}, 0, 0, \ldots)$, $n = (p_1, \ldots, p_k, p_{k+1} + 1, 0, \ldots)$, мы видим, что $p \in [m, n) \subset U$.

IX. *Пусть T, X — полные сепарабельные метрические пространства, T бикомпактно, $T' \subset T$ и каждой точке $t \in T$ поставлено в соответствие подмножество $X_t \subset X$, непустое при $t \in T'$, так, что совокупность A всех пар $\{t, x\}$, $t \in T$, $x \in X_t$, для которых X_t не пусто, есть аналитическое множество в $T \times X$. Тогда существуют μ-измеримое множество $T'' \subset T$, содержащее T', и μ-измеримое отображение множества T'' в X такие, что $f(t) \in X_t$ для всех $t \in T''$.*

Доказательство. В силу VII достаточно построить μ-измеримое множество $T'' \supset T'$ и такое μ-измеримое отображение φ множества T'' в $A \subset T \times X$, что $p_1\varphi(t) = t$, где p_1 — проектирование на первую компоненту: $p_1(t, x) = t$. Но A есть непрерывный образ пространства N^N: $A = \rho(N^N)$, поэтому $g = p_1 \cdot \psi$ есть непрерывное отображение пространства N^N на некоторое множество $T'' \supset T$; T'' аналитично и потому, согласно IV, измеримо. В силу VI нам достаточно построить такое μ-измеримое отображение h множества T'' на N^N, чтобы $g \cdot h$ было тождественным отображением на T''. Тогда $\varphi = \psi \cdot h$ будет удовлетворять поставленным требованиям. Так как g непрерывно, то для любого $t \in T''$ множество $g^{-1}(\{t\})$ не пусто и замкнуто в N^N; пусть $h(t)$ — его наименьший элемент (см. V). Тогда $g \cdot h$ — тождественное отображение на T'', и остается доказать, что h μ-измеримо. Для этого достаточно показать, что $h^{-1}(U)$ измеримо для любого открытого множества $U \subset N^N$. Согласно VIII вместо этого достаточно установить, что измеримо каждое множество $h^{-1}\{m\colon m < n\}$ для каждого $n \in N^N$ [1]). Но это множество совпадает с $g\{m\colon m < n\}$; как непрерывный образ открытого множества $\{m\colon m < n\}$ из N^N оно аналитично и поэтому μ-измеримо.

Предложение IX является частным случаем теоремы Лузина–Янкова (см., например, Янков [1] или Арсенин и Ляпунов [1]).

---

[1]) Действительно, для любых $m, n \in N^N$ выполняется одно из соотношений $m = n$, $m < n$, $m > n$, и потому при $m < n$

$$\{p\colon m \leqslant p < n\} = \{p\colon p < n\} - \{p\colon p < m\}.$$

Список литературы

Адельсон-Вельский Г. М.

1. Спектральный анализ кольца ограниченных линейных операторов. — Диссертация, МГУ, 1948.
2. Спектральный анализ кольца ограниченных линейных операторов гильбертова пространства. — ДАН СССР **67** (1949), 957–959.

Айдельгайт (Eidelheit M.)

1. On isomorphisms of rings of linear operators. — Studia Math. **9** (1940), 97–105.

Акутович (Akutowic E. J.)

1. Sur l'approximation spectral. — Ann. Sci. EC. Norm. Sup., 3 serie, **82** (1965), 297–326.

Аллан (Allan G. R.)

1. On a class of locally convex algebras. — Proc. London Math. Soc. **17**, 1 (1967), 91–114.

Аллен (Allen H. S.)

1. Commutative rings of linear transformations and infinite matrices. — Quart. J. Math. **8** (1957), 39–53.

Анастасио (Anastasio S.)

1. Maximal abelian subalgebras in hyperfinite factors. — Amer. J. Math. **87**, 4 (1965), 955–971.

Анзаи (Anzai H.)

1. On compact topological rings. — Proc. Imp. Acad. Tokyo **19** (1943), 613–615.

Араки и Вудс (Araky H., Woods E. S.)

1. Representation of the canonical commutation relations describing a non-relativistic infinite free Bose gas. — J. Math. Phys. **4**, № 5 (1963), 637.

Аренс (Arens R.)

1. On a theorem of Gelfand and Neumark. — Proc. Nat. Acad. Sci. **32** (1946), 237–239.
2. Representation of algebras. — Duke Math. J. **14** (1947), 269–282.
3. Linear topological division algebras. — Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 623–630.
4. Approximation in, and representation of, certain Banach algebras. — Amer. J. Math. **71** (1949), 763–790.
5. A generalization of normed rings. — Pacif. J. Math. **2** (1952), 455–471.
6. A Banach algebra generalization of conformal mappings of the disc. — Trans. Amer. Math. Soc. **81** (1956), 501–513.
7. The maximal ideals of certain function algebras. — Pacif. J. Math. **8** (1958), 641–648.
8. The closed maximal ideals of algebras of functions holomorphic on a Riemann surface. — Ren. Cir. Mat. di Palermo **7** (1958), 245–260.

9. The analytic-functional calculus in commutative topological algebras. — Pacif. J. Math. **11** (1961), 405–429.
10. The group of invertible elements of a commutative Banach algebras. — Studia Math., Seria Spec. Z. **I** (1963), 21–23.
11. Connectivity of maximal ideal space. — Тезисы докл. на Матем. конгр. — Функциональный анализ, М., 1966.

Аренс и Зингер (Arens R., Singer I. M.)
1. Function values as boundary integrals. — Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), 735–745.
2. Generalized analytic functions. — Trans. Amer. Math. Soc. **81** (1956), 379–393.

Аренс и Кальдерон (Arens R., Calderon A.)
1. Analytic functions of several Banach algebra elements. — Ann. Math. **62** (1955), 204–216.
2. Analytic functions of Fourier tranforms, Segundo symposium sobre algunos problemas matemáticos que se están estudiando en Latino America, Julio 1954, 39–52. — Centro de Coop. Cient. Unesco América Latina, Montevideo 1954.

Аренс и Капланский (Arens R., Kaplansky I.)
1. Topological representation of algebras. — Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), 457–481.

Аренсон Е. Л.
1. О некоторых свойствах алгебр непрерывных функций. — ДАН СССР **171**, 4 (1966), 767–769.

Арсенин В. Я. и Ляпунов А. А.
1. Теория A-множеств. — УМН **5** (1950), 45–108.

Аурора (Aurora S.)
1. Multiplicative norms for metric rings. — Pacif. J. Math. **7** (1957), 1279–1304.

Ахиезер Н. И. и Глазман И. М.
1. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. 2-е изд. — М.: Наука, 1966.

Баде (Bade W. G.)
1. Weak and strong limits of spectral operators. — Pacif. J. Math. **4** (1954), 393–413.
2. On Boolean algebras of projection and algebras of operators. — Trans. Amer. Math. Soc. **80** (1955), 345–360.

Баде и Кёртис (Bade W. G., Curtis P. C.)
1. Homomorphisms of commutative Banach algebras. — Amer. J. Math. **3** (1960), 589–608.
2. The Wedderburn decomposition of commutative Banach algebras. — Amer. J. Math. **4** (1960), 851–866.

Банах (Banach S.)
1. Sur les fonctionnelles linéaires. I, II. — Studia Math. **1** (1929), 211–216, 223–239.
2. Théorie des opérations linéaires. — Warszawa, 1932 (на украинском языке: Курс функціонального аналізу. — «Радянська школа», Київ, 1948).

Баргман (Bargman V.)
1. On unitary ray representations of continuous groups. — Ann. Math. **59** (1954), 1–46.

Баум (Baum L. E.)
1. Note on a paper of Civin and Yood. — Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 207–208.

Бауэр (Bauer H.)
1. Choquetscher Rand und Infegraldarstellungen. — Jahresler. DMV **69** (1967), 89–104.

Бейд (Beid G. A.)
1. A generalization on W^*-algebras. — Pacif. J. Math. **15**, 3 (1965), 1019–1026.

Беккер (Becker H.)
1. Über einen Satz der Darstellungstheorie topologischer Gruppen. — Wiss. Z. Humboldt Univ., Berlin, math.-nat. Reihe **2** (1952/53), 61–66.

Берберян (Berberian S. K.)
1. The regular ring of a finite AW^*-algebra. — Ann. Math. **65** (1957), 224–240.
2. $N \times N$ matrices over AW^*-algebra. — Amer. J. Math. **80** (1958), 37–44.

Березанский Ю. М.
1. Некоторые классы континуальных алгебр. — ДАН СССР **72** (1950), 237–240.
2. О центре группового кольца компактной группы. — ДАН СССР **72** (1950), 825–828.
3. Гиперкомплексные системы с дискретным базисом. — ДАН СССР **81** (1951), 329–332.
4. К теории почти периодических последовательностей Б. М. Левитана. — ДАН СССР **81** (1951), 493–496.
5. Гиперкомплексные системы с компактным базисом. — Укр. матем. ж. **3** (1951), 184–203.
6. О некоторых нормированных кольцах, построенных по ортогональным полиномам. — Укр. матем. ж. **3** (1951), 412–432.

Березанский Ю. М и Крейн С. Г.
1. Континуальные алгебры. — ДАН СССР **72** (1950), 5–8.
2. Гиперкомплексные системы с непрерывным базисом. — УМН **12** (1957), 147–152.

Березин Ф. А.
1. Операторы Лапласа на полупростых группах Ли. — ДАН СССР **107** (1956), 9–12.
2. Представления комплексных полупростых групп Ли в банаховом пространстве. — ДАН СССР **110** (1956), 897–900.
3. Оператор Лапласа на полупростых группах Ли. — Уч. зап. Моск. матем. о-ва **6** (1957), 371–463.
4. Операторы Лапласа на полупростых группах Ли и некоторых симметрических пространствах. — УМН **12** (1957), 152–156.

Березин Ф. А., Гельфанд И. М., Граев М. И. и Наймарк М. А.
1. Представления групп. — УМН **11** (1956), 13–40.

Берксон (Berkson E.)
1. Some characterizations of C^*-algebras. — Illinois J. Math. **101** (1966), 1–8.

Бёрлинг (Beurling A.)
1. Sur les intégrales de Fourier absolument convergentes et leur application à une transformation fonctionnelle. — Congrés de Math à Helsingfors, 1938.

2. Un théoréme sur les fonclions borneés et uniformement continues sur l'axe réel. — Acta Math. **77** (1945), 127–136.

Бинген, Титс, Валбрук (Bingen F., Tits J., Waelbroeck L.)

1. Séminaire sur les algèbres de Banach. — Centre Beige d'Algèbre et de Topologie et Université Libre de Bruxelles, 1962–63.

Биркгоф Г.

1. Теория структур. — М.: ИЛ, 1952.

Бишоп (Bishop E.)

1. Measures orthogonal to polynomials. — Proc. Nat. Acad. Sci. **44** (1958), 278–280.
2. Структура некоторых мер. Сб. «Некоторые вопросы теории приближений». — М.: ИЛ, 1963.
3. Subalgebras of functions on a Riemann surface. — Pacif. J. Math. **8** (1958), 29–50.
4. Approximation by a polynomial and its derivative on certain closed sets. — Proc. Amer. Math Soc. **9** (1958), 946–953.
5. Simultaneous approximation by a polynomial and its derivatives. — Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 741–743.
6. Some theorems concerning function algebras. — Bull. Amer. Math. Soc. **65** (1959), 77–78.
7. Минимальная граница функциональных алгебр. Сб. «Некоторые вопросы теории приближений». — М.: ИЛ, 1963.
8. Граничные меры аналитических дифференциалов. Сб. «Некоторые вопросы теории приближений». — М.: ИЛ, 1963.
9. Mapping of partially analytic spaces. — Amer. J. Math. **83** (1961), 209–242.
10. Some global problems in the theory of functions of several complex variables. — Amer. J. Math. **83** (1961), 479–498.
11. Partially analytic spaces. — Amer. J. Math. **83** (1961), 669–692.
12. A generalization of the Stone–Weierstrass theorem. — Pacif. J. Math. **11**, 3 (1961), 777–783.
13. A general Rudin–Carleson theorem. — Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 140–143.
14. Analyticity in certain Banach algebras. — Trans. Amer. Math. Soc. **102** (1962), 507–544.
15. Holomorphic completions, analytic continuations, and the interpolation of seminorms. — Ann. Math. **78** (1963), 468–500.
16. Representing measures for points in a uniform algebra. — Bull. Amer. Math. Soc. **70**, 1 (1964), 121–122.
17. Conditions for the analyticity of certain sets. — Michigan Math. J. **11** (1964), 289–304.
18. Uniform Algebras. — Proc. Conf. Compsex Analysis, Minneapolis, 1964, Berlin–Heidelberg–New York, 272–281.

Бишоп и де Леу (Bishop E., de Leeuw K.)

1. The representation of linear functionals by measures on sets of extreme points. — Ann. Inst. Fourier **9** (1959), 305–331.

Блер (Blair A.)

1. Continuity of multiplication in operator algebras. — Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 209–210.

Блюм (Blum E. K.)

1. A theory of analytic functions in Banach algebras. — Trans. Amer. Math. Soc. **78**, 2 (1955), 343–370.

Болус (Bolus M.)

1. Sur quelques généralizations du théorem de Stone–Weierstrass. — Thése doct. Math. Fac. sci. Univ. Nancy. — 1957. — 26 p.

Боненблуст и Карлин (Bohnenblust H. F., Karlin S.)

1. Geometrical properties of the unit sphere of Banach algebras. — Ann. Math. **62** (1955), 217–229.

Боненблуст и Собжик (Bohnenblust H. F., Sobczyk A.)

1. Extensions of functionals on complex linear spaces. — Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1938), 91–93.

Бонсолл (Bonsall F. F.)

1. A minimal property of the norm in some Banach algebras. — Proc. London Math. Soc. **29** (1954), 156–164.
2. On a representation of cones and semi-algebras with given generators. — Proc. London Math. Soc. **15**, 3 (1965), 39–60.

Бонсолл и Голди (Bonsall F. F., Goldie A. W.)

1. Algebras with represent their linear functionals. — Proc. Cambridge Phil. Soc. **49** (1953), 1–14.
2. Annihilator algebras. — Proc. London Math. Soc. **4** (1954), 154–167.

Борчерс (Borchers H. J.)

1. On the structure of the algebra of field operators. I, II. — Nuovo Cimento **24** (1962), 214; Commun. Math. Phys. **1** (1965), 49–56.
2. On the vacuum state in quantum field theory. II. — Commun. Math. Phys. **1** (1965), 57–79.

Бохнер (Bochner S.)

1. Vorlesungen über Fouriersche Integrale. — Leipzig: Akad. Verlagsgesellschaft, 1932.
2. Completely monotone functions in partially ordered spaces. — Duke Math. J. **9** (1942), 519–526.
3. On a theorem of Tannaka and Krein. — Ann. Math. **43** (1942), 56–58.

Бохнер и Филлипс (Bochner S., Phillips R. S.)

1. Absolutely convergent Fourier expansions for non-commutative normed rings. — Ann. Math. **43**, 2 (1942), 409–418.

Браудер (Browder A.)

1. Cohomology of maximal ideal spaces. — Bull. Amer. Math. Soc. **76** (1961), 515–516.
2. On a theorem of Hoffman and Wermer, Function Algebras. — Proc. Int. Symposium on Function Algebras, Tulane Univ., 1965, 88–89.

Браудер и Вермер (Browder A., Wermer J.)

1. Some algebras of functions on an arc. — J. Math. Mech. **12** (1963), 119–130.
2. A method for constructing Dirichlet algebras. — Proc. Amer. Math. Soc. **15** (1964), 546–552.

Бредон (Bredon G. E.)

1. A new treatment of the Haar integral. — Michigan Math. J. **10**, 4 (1963), 365–373.

Брело (Brelot M.)

1. О границе Мартина. — Сб. перев. «Математика» **9**, 5 (1965), 136–155.

Бродский М. Л.
1. О свойствах оператора, отображающего в себя неотрицательную часть пространства с индефинитной метрикой. — УМН **14** (1959), 147–152.
Броконьер (Broconnier J.)
1. L'analyse harmonique dans les groupes abéliens. I, II. — Enseign. Math. **2** (1956), 12–41 и 257–273.
Бруаз (Broise M.)
1. Sur les opérateurs unitaires et les fonctions de type positif. — C. R. Acad. Sci. Paris **258** (1964), 2471–2473.
Брюа (Bruhat F.)
1. Sur certaines représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples. — C. R. Paris **240** (1955), 2196–2198.
2. Sur les représentations induites des groupes de Lie. — Bull. Soc. Math. France **84** (1956), 97–205.
3. Distributions sur un groupe localement compact. — Bull. Soc. Math. France **89** (1961), 43–75.
Бук (Buck R.)
1. Generalized group algebras. — Proc. Nat. Acad. Sci. **36** (1950), 747–749.
Бурбаки (Bourbaki N.)
1. Eléments de mathematiques. XIII. Livre VI. — Integration, Paris, 1952.
2. Элементы математики. Т. 5. Топологические векторные пространства. — М.: ИЛ, 1959 (1953, 1955).
3. Elements de mathematique. Livre III. Topologie generale. — Paris, 1940–1949 (1958). (В русском переводе вышли главы I–III и IV–VIII:
4. Общая топология. Основные структуры. — М.: Физматгиз, 1958.
5. Общая топология. Числа и связанные с ними группы и пространства. — М.: Физматгиз, 1959.
Буржен (Bourgin D. G.)
1. Approximately isometric and multiplicative transformations on continuous function rings. — Duke Math. J. **16** (1949), 385–397.
Бэр (Bear H. S.)
1. Complex function algebras. — Trans. Amer. Math. Soc. **90** (1959), 383–393.
2. A strong maximum modulus theorem for maximal algebras. — Trans. Amer. Math. Soc. **92** (1959), 465–469.
3. Some boundary properties of function algebras. — Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 1–4.
Валбрук (Waelbroeck L.)
1. Le calcule symbolique dans les algébres commutatives. — J. Math. Pures et Appl. **33** (1954), 147–186.
2. Les algébres à inverse continu. — C. R. Paris **238** (1954), 640–641.
3. Structure des algébres à inverse continu. — C. R. Paris **238** (1954). 762–764.
4. Etude spectrale des algébres complétes. — Brussels, 1960.
5. Théorie des algebres de Banach et des algébres localement convexes. — Univ. de Montréal, 1962.
6. On the analytic spectrum of Arens. — Pacif. J. Math. **13**, 1 (1963), 317–319.
7. Lectures in spectral theory. — Yale Univ. Dep. Math., 1963.
8. About a spectral theorem. — Proc. Symp. of Functional Algebra Theory at Tulane, 1965. — Scott Foresman, 1966.

9. Continuous inverse locally pseudo-convex algebras. — Summer school on topological algebra theory, Bruges, 1966, 128–185.

В е р н е р Р. (W e r n e r R. G.)

1. Closed ideals in group algebra $L^1(G) \cap L^2(G)$. — Trans. Amer. Math. Soc. **121**, 2 (1966), 409–423.

В е р н е р С. (W e r n e r S.)

1. Weak locally multiplicatively-convex algebras. — Pacif. J. Math. **5**, Suppl. 2 (1955), 1025–1032.
2. Inductive limits of normed algebras. — Trans. Amer. Math Soc. **82** (1956), 190–216.
3. Polynomial completeness in locally multiplicatively-convex algebras. — Duke Math. J. **23** (1956), 1–11.
4. Weakly topologized algebras. — Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 314–316.

В а р о п у л о с (V a r o p o u l o s N. Th.)

1. Continuit des formes lineaires positives sur une algébre de Banach avec involution. — C. R. Acad. Sci. Paris **258** (1964), 1121.
2. Sur les formes positives d'une algébre de Banach. — C. R. Acad. Sci. Paris **258** (1964), 2465–2467.
3. Sur les ensembles parfaits et les séries trigonometriques. — C. R. Acad. Sci. Paris **260** (1965), 3831–3834, 4668–4670, 5165–5168, 5997–6000; **262** (1966), 384–387.
4. Caractérisations des ensembles de Sidon d'une algébre tenserielle. — C. R. Acad. Sci. Paris **262** (1966), 447–449.
5. Algébres tensorielles et applications a l'analyse harmonique. — Summer school on topological algebra theory, Bruges, 1966, 252–283.

В а с и л ь е в Н. Б.

1. C^*-алгебры с конечномерными неприводимыми представлениями. — УМН **21** (1966), 135–154.

В е й е р ш т р а с с (W e i e r s t r a s s K.)

1. Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reelen Veränderlichen. — Sitzber. Akad. Berlin (1885), 633–640; 789–806.

В е й л ь А. (W e i l A.)

1. Интегрирование на топологических группах и его приложения. — М.: ИЛ., 1950.

В е н д е л ь (W e n d e l J.)

1. On isometric isomorphism of group algebras. — Pacif. J. Math. **1** (1951), 305–311.
2. Left centralizers and isomorphisms of group algebras. — Pacif. J. Math. **2** (1952), 251–261.

В е р м е р (W e r m e r J.)

1. On algebras of continuous functions. — Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 866–869.
2. On a class of normed rings. — Arkiv Math. **2** (1954), 537–551.
3. Algebras with two generators. — Amer. J. Math. **76** (1954), 853–859.
4. Subalgebras of the algebra of all complexvalued continuous functions on the circle. — Amer. J. Math. **78** (1954), 225–242.
5. Maximal subalgebras of group-algebras. — Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 692–694.

6. Приближение полиномами на некоторой дуге из C^3. Сб. «Некоторые вопросы теории приближений». — М.: ИЛ, 1963.
7. Function rings and Riemann surfaces. — Ann. Math. **67** (1958), 45–71.
8. Rings of analytic functions. — Ann. Math. **67** (1958), 497–516.
9. The hull of a curve in C^n. — Ann. Math. **68** (1958), 550–561.
10. An example concerning polynomial convexity. — Ann. Math. **139** (1959), 147–150.
11. The maximum principle for bounded functions. — Ann. Math. **69** (1959), 598–604.
12. Dirichlet algebras. — Duke Math. J. **27** (1960), 373–382.
13. Банаховы алгебры и аналитические функции. Сб. «Некоторые вопросы теории приближений». — М.: ИЛ, 1963.
14. Uniform approximation and maximal ideals spaces. — Bull. Amer. Math. Soc. **68** (1962), 298–305.
15. Maximal ideals spaces. — Proc. Int. Congr. Math., 1962.
16. The space of real parts of a function algebra. — Pacif. J. Math. **13** (1963), 1423–1426.
17. Approximation on a disc. — Math. Ann. **155** (1964), 331–333.
18. Seminar über Functionen Algebren. Lecture Notes in Math. — Springer Verlag, Berlin, 1964.
19. Polynomially convex discs. — Math. Ann. **158** (1965), 6–10.

Верников И. Х., Крейн С. Г., Товбин А. В.

1. О полуупорядоченных кольцах. — ДАН СССР **30** (1941), 778–780.

Видав (Vidav I.)

1. Über eine Vermutung von Kaplansky. — Math. Z. **62** (1955), 330.
2. Quelques proprietés de la norme dans les algèbres de Banach. — Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci. **10** (1956), 53–58.
3. Über die Darstellung der positiven Functionale. — Math. Z. **68** (1958), 362–366.
4. Sur un systeme d'axiomes caractérisant les C^*-algebres. — Glasnik math. fiz. i astron. **16**, 3–4 (1961), 189–193.

Видом (Widom H.)

1. Approximately finite algebras. — Trans. Amer. Math Soc. **83** (1956), 170–178.
2. Nonisomorphic approximately finite factors. — Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 537–540.

Виленкин Н. Я.

1. К теории присоединенных сферических функций. — ДАН СССР **111** (1956), 742–744.
2. Матричные элементы неприводимых унитарных представлений группы вещественных ортогональных матриц и группы движений $(n-1)$-мерного евклидова пространства. — ДАН СССР **113**, № 1 (1957), 16–19.
3. Специальные функции и теория представлений групп. — М.: Наука, 1965.

Виленкин Н. Я., Аким Э. Л., Левин А. А.

1. Матричные элементы неприводимых унитарных представлений группы евклидовых движений трехмерного пространства и их свойства. — ДАН СССР **112**, № 6 (1957), 987–989.

Вилсон (Willson A. B.)
1. Note on certain group algebras. — Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 874–879.

Вильфсон (Wilfsohn A.)
1. The reduced dual of a direct product of groups. — Proc. Cambridge Philos. Soc. **62**, 1 (1962) 5–6.

Винер (Wiener N.)
1. Tauberian theorems. — Ann. Math. **33**, 2 (1932), 1–100.
2. Интеграл Фурье и некоторые его приложения. — М.: Физматгиз, 1963.

Винер и Питт (Wiener N., Pitt H. R.)
1. On absolutely convergent Fourier–Stieltjes transforms. — Duke Math. J. **4** (1938), 420–436.

Витушкин А. Г.
1. Некоторые теоремы о возможности равномерного приближения непрерывных функций аналитическими функциями. — ДАН СССР **123**, 6 (1958) 959–962.
2. Условия на множество, необходимые и достаточные для возможности равномерного приближения аналитическими (или рациональными) функциями всякой непрерывной на этом множестве функции. — ДАН СССР **128**, 1 (1959), 17–20.

Вулих Б. З.
1. Полуупорядоченные кольца. — Зап. 3-го Всесоюзного мат. съезда (1956), 20–21.

Вулфсон (Wolfson K.)
1. The algebra of bounded operators on Hilbert space. — Duke Math J. **20** (1953), 533–588.
2. The algebra of bounded functions. — Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), 10–14.
3. A class of primitive rings. — Duke Math. J. **22** (1955), 157–163.
4. A note on the algebra of hounded functions. — Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 852–855.

Гамелин (Gamelin T.)
1. Restrictions of subspaces of $C(X)$. — Trans. Amer. Math. Soc. **112** (1964), 278–286.

Гамелин и Росси (Gamelin T., Rossi H.)
1. Jensen measures and algebras of analytic functions. — Function Algebras, Scott–Foresman, 1966, 15–35.

Гальперин (Halperin I.)
1. Von Neumann's arithmetics of continuous rings. — Acta Sci., Szeged **23** (1962), 1–17.
2. Transcendental elements in continuous rings. — Canad. J. Math. **14** (1962), 39–44.

Ганнинг и Росси (Gunning R., Rossi H.)
1. Analytic function of several complex variables. — Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1965.

Гарднер (Gardner L. T.)
1. On duality for locally compact groups. Preliminary report, abstract 622-18. — Notices Amer. Math. Soc. **12** (1965), 330.

Гарнет (Garnet J.)

1. A topological characterization of Gleason parts. — Pacif. J. Math. **30**, 1 (1967), 59–63.

Гельфанд И. М.

1. О нормированных кольцах. — ДАН СССР **23** (1939), 430–432.
2. Об абсолютно сходящихся тригонометрических рядах и интегралах. — ДАН СССР **25** (1939), 571–574.
3. О кольце почти периодических функций. — ДАН СССР **25** (1939), 575–577.
4. Нормированные кольца. — Матем. сб. **9** (1941), 3–24.
5. Идеалы и примерные идеалы в нормированных кольцах. — Матем. сб. **9** (1941), 41–48.
6. К теории характеров абелевых топологических групп. — Матем. сб. **9** (1941), 49–50.
7. Об абсолютно сходящихся тригонометрических рядах и интегралах. — Матем. сб. **9** (1941), 51–66.
8. Сферические функции на симметричных римановых пространствах. — ДАН СССР **70** (1950), 5–8.
9. Центр инфинитезимального группового кольца. — Матем. сб. **26** (1950), 103–112.
10. Некоторые проблемы функционального анализа. — УМН **11** (1956), 3–12.
11. О подкольцах кольца непрерывных функций. — УМН **12** (1957), 249–251.

Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. и Граев М. И.

1. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений (Обобщенные функции, вып. 5). — М.: Физматгиз, 1962.

Гельфанд И. М. и Граев М. И.

1. Аналог формулы Планшереля для классических групп. — Труды Моск. матем. о-ва **4** (1955), 375–404.
2. Следы унитарных представлений вещественной унимодулярной группы. — ДАН СССР **100** (1955), 1037–1040.
3. Геометрия однородных пространств, представления групп в однородных пространствах и связанные с ними вопросы интегральной геометрии. — Труды Моск. матем. о-ва **8** (1959), 321–390; **9** (1960), 562.

Гельфанд И.М., Граев М.И., Наймарк М.А. и Березин Ф.А.

1. Представления групп Ли. — Зап. 3-го матем. всесоюзного съезда **37** (1956).

Гельфанд И. М. и Колмогоров А. Н.

1. О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах. — ДАН СССР **22** (1939), 11–15.

Гельфанд И. М. и Наймарк М. А.

1. О включении нормированного кольца в кольцо операторов в гильбертовом пространстве. — Матем. сб. **12** (1943), 197–213.
2. Unitary representations of the Lorenz group. — J. Phys. **10** (1946), 93– 94.
3. Унитарные представления группы линейных преобразований прямой. — ДАН СССР **55** (1947), 571–574.
4. Унитарные представления группы Лоренца. — Известия АН СССР, сер. матем. **11** (1947), 411–504.

5. Аналог формулы Planшереля для комплексной унимодулярной группы. — ДАН СССР **63** (1948), 609–612.
6. Кольца с инволюцией и их представления. — Известия АН СССР, сер. матем. **12** (1948), 445–480.
7. Унитарные представления классических групп. — Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова **36** (1950), 1–228.
8. Унитарные представления унимодулярной группы, содержащие единичное представление унитарной подгруппы. — Труды Моск. матем. о-ва **1** (1952), 423–475.

Гельфанд И. М. и Райков Д. А.

1. К теории характеров коммутативных топологических групп. — ДАН СССР **28** (1940), 195–198.
2. Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп. — Матем. сб. **13** (1943), 301–316.

Гельфанд И. М., Райков Д. А. и Шилов Г. Е.

1. Коммутативные нормированные кольца. — М.: Физматгиз, 1960.

Гельфанд И. М. и Шилов Г. Е.

1. О различных методах введения топологии в множестве максимальных идеалов нормированного кольца. — Матем. сб. **9** (1941), 25–38.

Генин и Мизра (Guenin M., Mizra B.)

1. On the von Neumann algebras generated by field operators. — Nuovo cimento **30**, 5 (1963), 1272–1290.

Герглотц (Herglotz G.)

1. Über Potenzreihen mit positivem, reellem Teil im Einheitskreis. — Leipz. Berichte **63** (1911), 501–511.

Герштейн (Herstein I. N.)

1. Group-rings as ∗-algebras. — Publ. Math. Debrecen **1** (1950), 201–204.
2. Une note sur un article de M. Turumaru. — Portugaliae Math. **12** (1953), 113–114.
3. A theorem on rings. — Canad. J. Math. **5** (1953), 238–241.

Герц (Herz C. S.)

1. Spectral Synthesis of bounded functions. — Trans. Amer. Math. Soc. **94** (1960), 181–232.
2. Remarques sur la Note précédenfe de N. Varopoulos. — C. R. Acad. Sci. Paris **260** (1965), 6001–6004; **262** (1966), 384–387.

Гика (Ghika A.)

1. Algebre de transformări liniare şi continue ale unui spatiu hilbertian in altul. — Comun. Acad. Rep. Pop. Rom. **7** (1957), 831–834.

Гинзбург Ю. П., Иохвидов И. С.

1. Исследования по геометрии бесконечномерных пространств с билинейной метрикой. — УМН **17**, 4 (1962), 3–56.

Гиршфельд (Hirschfeld R.)

1. Sur l'analyse harmonique dans les groupes localement compacts. — C. R. Acad. Sci., Paris **246** (1958), 1138–1140.
2. Sur les algébres de fonctions dans un groupe compact. — C. R. Acad. Sci., Paris **261**, 16 (1965), 3029–3031.

Гишарде (Guichardet A.)

1. Une caractérisation des algébres de von Neumann de type I. — C. R. Acad. Sci., Paris **248** (1959), 3398–3400.

2. Sur un problème pose par G. W. Mackey. — C. R. Acad. Sci. Paris **250**, 6 (1960), 962–963.
3. Caractères des algébres de Banach involutives. — Ann. Inst. Fourier **13**, 1 (1963), 1–81.
4. Algèbres de Banach commutatives (seminaire). — Poitiers, 1963–64.
5. Sur la decomposition des reprèsentation des C^*-algebres. — C. R. Akad. Sci. Paris **258**, 3 (1964), 768–770.
6. Utilisation des sous-groupes distinguées dans l'etude des reprèsentations unitaires des groupes localement compact. — Compositio math. **17**, 1 (1965), 1–35.
7. О тензорных произведениях C^*-алгебр. — ДАН СССР **160** (1965), 986–989
8. Sur la catégorie des algèbres de von Neumann. — Bull. sci. math. **90**, 1–2 (1966), 41–64.
9. Produits tensoriels infinis et representation des relation d'anticommutation. — Ann. École Norm. Sup. **83** (1966), 1–52.

Глезер (Glaeser G.)
1. Sur le théorème du prolongement de Whitney. — C. R. Acad. Sci. Paris **245** (1957), 617–619.
2. Étude de quelques algèbres tayloriennes. — J. d'Analyse Math., Jerusalem, **VI** (1958), 1–125.
3. Multiplicateurs rugueux des fonctions différentialles et synthèse spectrale. — Ann. Ecole Norm. Sup. **79** (1962), 243–261.

Гликсберг (Glicksberg I.)
1. Measures orthogonal to algebras and sets of antisymmetry. — Trans. Amer. Math. Soc. **105** (1962), 415–435.
2. Function algebras with closed restrictions. — Proc. Amer Math. Soc. **14** (1963), 158–161.
3. On convex hulls of translats. — Pacif. J. Math. **13**, 1 (1963), 97–113.
4. A remark on analyticity of function algebras. — Pacif. J. Math. **13** (1963), 1181–1185.
5. Some uncomplemanted function algebras. — Trans. Amer. Math. Soc. **111** (1964), 121–137.
6. Maximal algebras and a theorem of Rado. — Pacif. J. Math. **14** (1964), 919–941.

Гликсберг и де Леу (Glicksberg I, de Leew K.)
1. Quasi-invariance and analyticity of measures on compact groups. — Acta Math. **109** (1963), 179–205.

Гликсберг и Вермер (Glicksberg I., Wermer J.)
1. Measures orthogonal to a Dirichlet algebra. — Duke Math. J. **30** (1963), 661–666.

Гликфельд (Glickfeld B. W.)
1. Contributions to the theory of holomorphic functions in commutative banach algebras with identity. — Columbia Univ., 1964.

Глимм (Glimm J.)
1. A Stone–Weierstrass theorem for C^*-algebras. — Ann. Math. **72** (1960), 216–244.
2. On a certain class of operators algebras. — Trans. Amer. Math. Soc. **95**, 2 (1960), 318–340.
3. Type I C^*-algebras. — Ann. Math. **73**, 3 (1961), 572–612.

Глисон (Gleason A. M.)
1. A note on locally compact groups. — Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 744–745.
2. Алгебра функций. — «Математика» **5**, 1 (1961), 161–166.
3. Finitely generated ideals in Banach algebras. — J. Math. and Mech. **13**, 1 (1964), 125–332.

Глисон и Уитни (Gleason A. M., Whitney H.)
1. The extension of linear functionals defined on H^∞. — Pacif. J. Math. **12** (1962).

Годман (Godement R.)
1. Extension à un groupe abélien quelconque des théorèmes taubériens de N. Wiener et d'un théorème de A. Beurling. — C. R. Acad. Sci. Paris **223** (1946), 16–18.
2. Théorèmes taubériens et théorie spectrale. — Ann. École Norm. **64** (1948), 119–138.
3. Les fonctions de type positif et la théorie des groupes. — Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), 1–84.
4. Théorie générale des sommes continues d'espaces de Banach. — C. R. Acad. Sci., Paris **228** (1949), 1321–1323.
5. L'analyse harmonique dans les groupes non abéliens. — Analyse Harmonique, Colloques Int. **15**, Paris, 1949.
6. Some unsolved problems in the theory of group representations. — Proc. Int. Congr. Math. Cambridge **2** (1950), 106–111.
7. Sur la théorie des représentations unitaires. — Ann. Math. **53**, 2 (1951), 68–124.
8. Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compact unimodulaires. — J. Math. Pures et Appl. **30** (1951), 1–110.
9. A theory of spherical functions I. — Trans. Amer. Math. Soc. **73** (1952). 496–556.
10. Math. Reviews **13** (1952), 11.
11. Théorie des caractères I. Algébres unitaires. — Ann. Math. **59** (1954), 47–62.
12. Théorie des caractères II. Définition et propriétes genérales des caractères. — Ann. Math. **59** (1954), 63–85.

Голема (Golema K.)
1. Free products of compact general algebras. — Colloq. math. **13**, 2 (1965), 165–166.

Голодец В. Я.
1. К вопросу о неприводимых представлениях коммутационных и антикоммутационных соотношений. — УМН **20** (1965), 175–182.
2. О фактор-представлениях типа II для коммутационных и антикоммутационных соотношений. — УМН **20** (1965), 68–72.
3. О фактор-представлениях антикоммутационных соотношений. — ДАН **167** (1966), 19–22.

Голдман (Goldman M.)
1. Structure of AW^*-algebras. — Duke Math. J. **23** (1956), 23–34.

Гольдхабер и Уолк (Goldhaber J. K., Wolk E. S.)
1. Maximal ideals in rings of bounded continuous functions. — Duke Math. J. **21** (1954), 565–569.

Гончар А. А.
1. О минимальной границе алгебры $A(E)$. — Изв. АН СССР, сер. матем. **27**, 4 (1963), 949–955.

Горин Е. А.
1. Коммутативные банаховы алгебры, порожденные группой унитарных элементов. — Функциональный анализ и его приложения **3** (1967), 86–87.
2. Пространства максимальных идеалов некоторых нормированных колец с равномерной сходимостью. — Вестн. Моск. у-та, сер. мех. **3** (1966), 14–19.
3. Максимальные подалгебры банаховых алгебр с инволюцией. — Матем. заметки **1**, 2 (1967), 161–167.

Гофман (Hoffman K.)
1. Boundary behavior of generalized analytic functions. — Trans. Amer. Math. Soc. **87** (1958), 447–466.
2. A note on the paper of I. J. Schark. — J. Math. and Mech. **10**, 5 (1961).
3. Analytic functions and logmodular Banach algebras. — Acta Math. **108** (1962), 271–317.
4. Банаховы пространства аналитических функций. — М.: ИЛ, 1963.
5. Lectures on sup norm algebras. — Summer school on topological algebra theory, Bruges, 1966, 1–74.

Гофман и Вермер (Hoffman K., Wermer J.)
1. A characterization of $C(X)$. — Pacif. J. Math. **12** (1962), 941–944.

Гофман и Зингер (Hoffman K., Singer I. M.)
1. Maximal subalgebras of $C(\Gamma)$. — Amer. J. Math. **79**, 2 (1597), 295–305.
2. О некоторых задачах Гельфанда. — УМН **14**, 3 (1959), 99–114.
3. Maximal algebras of continuous functions. — Acta Math. **103** (1960), 217–241.

Гофман и Росси (Hoffman K., Rossi H.)
1. Functions theory and multiplicative linear functionals. — Trans. Amer. Math. Soc. **116**, 4 (1965), 536–543.

Гохберг И. Ц.
1. Признаки односторонней обратимости элементов нормированных колец и их приложения. — ДАН СССР **145**, 5 (1962), 971–974.
2. Задача факторизации в нормированных кольцах, функции от цилиндрических и симметрических операторов и сингулярные интегральные уравнения. — УМН **19**, 1 (1964), 71–124.
3. Об одном обобщении теорем М. Г. Крейна типа теорем Винера–Леви. — Математические исследования **1**, 1, АН Молд. ССР, Кишинев, 1966, 110–130.

Гохберг И. Ц. и Крейн М. Г.
1. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.

Граев М. И.
1. Об общем методе вычисления следов бесконечномерных унитарных представлений вещественных простых групп Ли. — ДАН СССР **103** (1955), 357–360.
2. Унитарные представления вещественных простых групп Ли. — УМН **12** (1957), 179–182.

3. Неприводимые унитарные представления матриц третьего порядка, которые оставляют инвариантной неопределенную эрмитову форму. — ДАН СССР **113** (1957), 966–969.

Грамш (Gramsch B.)

1. Integration und Holomorphe Functionen in lokalbeschränkte Raumen. — Math. Ann. **162** (1965), 190–210.
2. Funktionalkalkül mehrerer komplexer Veränderlichen in lokalbeschränkten Algebren, Habilitationschrift. — Mainz, 1966 (см. также Тезисы докл. на Матем. конгр., Москва, 1966, сер. Функциональный анализ, **14**).

Гринлиф (Greenleaf F. P.)

1. Non decreasing homomorphisms of group algebras. — Pacif. J. Math. **15**, 4 (1965), 1187–1219.

Гриффин (Griffin E.)

1. Some contributions to the theory of rings of operators. I, II. — Trans. Amer. Math. Soc. **75** (1953), 471–507; **79** (1955), 389–400.

Гров (Grove L. C.)

1. A generalized group algebra for compact groups. — Studia Math. **26**, 1 (1965), 73–90.

Гротендик (Grothendieck A.)

1. Sur certains espaces de fonctions holomorphes. — J. reine angew. Math. **192** (1953), 35–64.
2. Un résultat sur le duál d'une C^*-algebre. — J. Math. pures et appl. **36** (1957), 97–108.

Грушин В. В.

1. О строении замкнутых идеалов в кольце двоякопериодических векторно-гладких функций. — Вестн. Моск. у-та, сер. матем., мех., астр. **3** (1960).

Гулик (Gulick S. L.)

1. The bidual of a locally multiplicatively-convex algebra. — Pacif. J. Math. **17**, 1 (1966), 71–96.

Гулик, Лин и ван Руи (Gulick S. L., Lin T. S., Rooij A. C. M. Van)

1. Group algebra modules. I, II. — Canad. J. Math. **19**, 1 (1967), 133–150; 151–173.

Гуляницкий (Hulanicki)

1. Groups whose regular representation weakly contains all unitary representations. — Studia math. **24**, 1 (1964), 37–59.
2. On the spectral radius of Hermitian elements in group algebras. — Pacific J. Math. **18**, 2 (1966), 277–287.

Гурарий В. П.

1. О примерных идеалах кольца $L_\varphi(0,\infty)$. — Тезисы докл. на Матем. конгр., Москва, 1966, сер. Функциональный анализ, 45.

Гуревич А.

1. Unitary representation in Hilbert space of compact topological group. — Матем. сб. **13** (1943), 79–86.

Дэй (Dye H. A.)

1. The Radon–Nikodym theorem for finite rings of operators. — Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 243–280.
2. The unitary structure in finite rings of operators. — Duke Math. J. **20** (1953), 55–69.

3. On the geometry of projections in certain operator algebras. — Ann. Math. **61** (1955), 73–89.

Дэй и Филлипс (Dye H. A., Phullips R. S.)

1. Croups of positive operators. — Canad. J. Math. **8** (1956), 462–486.

Даниэль (Daniell P. J.)

1. A general form of integral. — Ann. Math. **19**, 2 (1917–1918), 279–294.
2. Further properties of the general integral. — Ann. Math. **21**, 2 (1919–1920), 203–220.
3. The integral and its generalizations. — Rice Inst. Pamphlet **8** (1921), 34–62.

ван Данциг (van Dantzig D.)

1. Zur topologischen Algebra I. — Math. Ann. **107** (1932), 587–626.

Дарсоу (Darsow W. F.)

1. Positive definite functions and states. — Ann. Math. **60** (1954), 447–453.

Данфорд (Dunford N.)

1. Resolutions of the identity for commutative B^*-algebras of operators. — Acta Szeged **12** (1950), 51–56.
2. Spectral operators. — Pacif. J. Math. **4**, 3 (1954), 321–354.
3. A survey of the theory of spectral operators. — Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), 217–274.

Данфорд и Шварц (Dunford N., Schwartz J.)

1. Линейные операторы. I, II. — М.: ИЛ, 1962; М.: Мир, 1966.

Дельсарт (Delsarte J.)

1. Sur une extension de la fortnule de Taylor. — J. Math, pures et appl. **17** (1938), 213–230.
2. Une extension nouvelle de la théorie des fonctions presque-périodiques de Bohr. — Acta Math. **69** (1939), 259.

Дени (Deny Y.)

1. Sur l'approximation des fonctions harmoniques. — Bull. Soc. Math. France **73** (1945), 71–73.

Джеветт (Jewett R. I.)

1. A variation of the Stone–Weierstrass theorem. — Proc. Amer. Math. Soc. **14**, 5 (1963), 690–693.

Джекобсон (Jacobson N.)

1. The theory of rings. — Math. surveys **II**, AMS, № 4, 1943.
2. The radical and semi-simplicity for arbitrary rings. — Amer. J. Math. **67** (1945), 300–320.
3. A topology for the set of primitive ideals in an arbitrary ring. — Proc. Nat. Acad. Sci. **31** (1945), 333–338.
4. On the theory of primitive rings. — Ann. Math. **48** (1947), 8–21.

Джекобсон и Риккарт (Jacobson N., Rickart C.)

1. Jordan homomorphisms of rings. — Trans. Amer. Math. Soc. **69** (1950), 479–502.

Джилмен и Хенриксен (Gillman L., Henriksen M.)

1. Concerning rings of continuous functions. — Trans. Amer. Math. Soc. **77** (1954), 340–362.

Джилмен, Хенриксен и Джерисон (Gillman L., Henriksen M., Jerison M.)

1. On a theorem of Gelfand and Kolmogoroff concerning maximal ideals in rings of continuous functions. — Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), 447–455.

Диксмье (Dixmier J.)
1. Sur un théorème de Banach. — Duke Math. J. **15** (1948), 1057–1071.
2. Mesure de Haar et trace d'un operateur. — C. R. Acad. Sci., Paris **228** (1949), 152–154.
3. Les anneaux d'operateurs de classe finie. — Ann. École Norm. **66**, 3 (1949), 209–261.
4. Les fonctionelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert. — Ann. Math. **51**, 2 (1950), 387–408.
5. Applications dans les anneaux d'opérateurs. — C. R. Acad. Sci., Paris **230** (1950), 607–609.
6. Sur la réduction des anneaux d'opérateurs. — Ann. École Norm. **68**, 3 (1951), 185–202.
7. Sur certains espaces considéres par M. H. Stone. — Sum. Bras. Math. **11** (1951), 151–182.
8. Applications dans les anneaux d'opérateurs. — Compositio Math. **10** (1952), 1–55.
9. Remarques sur les applications. — Archiv Math. **3** (1952), 290–297.
10. Algébres quasi-unitaires. — Com. Math. Helv. **26** (1952), 275–322.
11. Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs. — Bull. Soc. Math. France **81** (1953), 9–39.
12. Sur les anneaux d'opérateurs dans les espaces hilbertiens. — C. R. Acad. Sci., Paris **238** (1954), 439–441.
13. Sous-anneyus abeliens maximaux dans les facteurs de type fini. — Ann. Math. **59** (1954), 279–286.
14. Les algèbres d'opérateurs dans l'espace Hilbertien (Algèbres de von Neumann). — Paris, 1957.
15. On unitary representations of nilpotent Lie groups. — Proc. Nat. Acad. Sci. **43** (1957), 985–986.
16. Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents. II. — Bull. Soc. Math. France **85** (1957), 325–328.
17. Sur les C^*-algèbres. — Bull. Soc. Math. France **88** (1960), 95–112.
18. Sur les structures boréliennes du spectre d'une C^*-algèbre. — Publ. math. Inst. hautes etudes sient. **6** (1960), 5–11.
19. Traces sur les C^*-algèbres. — Ann. Inst. Fourier **13**, 1 (1963), 219–262.
20. Les C^*-algèbres et leur répresentations. — Paris, 1964.

Диксмье и Дуади (Dixmier J., Douady A.)
1. Champs continus d'espaces Hilbertiens et de C^*-algèbres. — Bull. Soc. Math. France **91** (1963), 227–284.

Диткин В. А.
1. Исследование строения идеалов в некоторых нормированных кольцах. — Уч. зап. Моск. у-та **30** (1939), 83–130.

Домар (Domar Y.)
1. Harmonic analysis based on certain commutative Banach algebras. — Acta Math. **96** (1956), 1–66.

Домрачева Г. И.
1. Идеалы в нормальных подкольцах кольца непрерывных функций. — Уч. зап. Пед. инст. им. А. И. Герцена, Ленинград **166** (1958), 29–38.

Донохью (Donoghue W. F.)
1. The Banach algebra l^1 with an application to linear transformations. — Duke Math. J. **23** (1956), 533–537.

Допличер (Doplicher S.)
1. An algebraic spectrum condition. — Comm. math. phys. **1** (1965), 1–5.

Дьедонне (Dieudonné J. A.)
1. Une généralization des espaces compactes. — J. Math. Pures et Appl. **23** (1944), 65–76.
2. Recent developments in the theory of locally convex vector spaces. — Bull. Amer. Math. Soc. **59** (1953), 495–512.
3. Champs de vecteurs non localement triviaux. — Arch. Math. **7** (1956), 6–10.
4. Sur la théorie spectrale. — J. Math. Pures et Appl. **35** (1956), 175–187.

Дэвис (Davis C.)
1. Generators of the ring of bounded operators. — Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 970–972.

Желобенко Д. П.
1. Описание некоторого класса представлений группы Лоренца. — ДАН СССР **121**, 4 (1958), 586–590.
2. Строение группового кольца группы Лоренца. — ДАН СССР **126**, 3 (1959), 482-485.
3. Линейные представления группы Лоренца. — ДАН СССР **126**, 5 (1959), 935.

Желязко (Ẑelazko W.)
1. On the locally bounded and m-convex topological algebras. — Studia Math. **19** (1960), 333–356.
2. A theorem on the B_0-division algebras. — Bull. Acad. Pol. Sci. **8** (1960), 373–375.
3. On the radicals of p-normed algebras. — Studia Math. **21** (1962), 203–206.
4. On the analytic functions in p-normed algebras. — Studia Math. **21** (1962), 345–350.
5. On decomposition of commutative p-normed algebra into a direct sum of ideals. — Colloq. Math. **10**, 1 (1963), 57–60.
6. Metric generalizations of Banach algebras. — Rozprawy mat. **47** (1965), 70.
7. On generalized topological divisors of zero. — Тезисы докл. на Матем. конгр., Москва, 1966, сер. Функциональный анализ, 31.

Жордан, фон Нейман и Вигнер (Jordan P., Neumann J. von, Wigner E.)
1. On an algebraic generalization of the quantum mechanical formalism. — Ann. Math. **35** (1934), 29–64.

Заворотнов (Saworotnow P. P.)
1. On a generalization of the notion of H^*-algebras. — Proc. Amer. Math Soc. **8** (1957), 49–55.
2. On the imbedding of a right complemented algebra into Ambrose's H^*-algebra. — Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 56–62.
3. Discrete complemented algebras. — Proc. Amer. Math. Soc. **17**, 2 (1966), 499–501.
4. On two-sided H^*-algebras. — Pacif. J. Math. **16**, 1 (1966), 365–370.

Замфореску (Zamforescu I.)
1. Une généralisation du théorème de Weierstrass–Stone. — C. R. Acad. Sci., Paris **246** (1958), 524–525.

Зелински (Zelinsky D.)

1. Raifing idempotents. — Duke Math. J. **21** (1954), 315–322.

Зингер (Singer I. M.)

1. Uniformly continuous representations of Lie groups. — Ann. Math. **56**, 2 (1952), 242–247.
2. Automorphisms of finite factors. — Amer. J. Math. **77** (1955), 117–133.
3. Report of group representations. — Publ. Nat. Acad. Sci. Nat. Res. Council **387** (1955), 11–26.

Зингер и Вермер (Singer I. M., Wermer J.)

1. Derivations on commutative normed algebras. — Math. Ann. **129** (1955), 260–264.

Ивасава (Iwasawa K.)

1. On group rings of topological groups. — Proc. Imp. Acad. Tokyo **20** (1944), 67–70.

Игари (Igari S.)

1. Sur les fonctions qui operent sur l'anneau de Dirichlet $D(G)$. — Tôhoku Math. J. **17**, 2 (1965), 200–205.

Ингельстам (Ingelstam L.)

1. Real Banach algebras. — Arkiv Math. **5**, 3 (1965), 239–270.

Ионеску (Ionescu T. C.)

1. Fonctions de type positif. — C. R. Acad. Sci., Paris **243** (1956), 1389–1392.

Иосида (Yosida K.)

1. On the group imbedded in the metrical complete ring. — Japan J. Math. **13** (1936), 7–26; 459–472.
2. On the exponential formula in the metrical complete ring. — Proc. Imp. Acad. Tokyo **13** (1937), 301–304.
3. On the duality theorem on non-commutative compact groups. — Proc. Imp. Acad. Tokyo **19** (1943), 181–183.
4. Normed rings and spectral theorems. I–VI. — Proc. Imp. Acad. Tokyo **19** (1943), 356–359; 466–470; **20** (1943), 71–73; 183–185; 269–273; 580–583.

Иосида и Накаяма (Yosida K., Nakayama T.)

1. On the semi-ordered ring and its application to the spectral theorem. I–II. — Proc. Imp. Acad. Tokyo **18** (1942), 555–560; **19** (1943), 144–147.

Иохвидов И. С.

1. О спектрах эрмитовых и унитарных операторов в пространстве с индефинитной метрикой. — ДАН СССР **71** (1950), 225–228.

Иохвидов И. С. и Крейн М. Г.

1. Спектральная теория операторов в пространстве с индефинитной метрикой. I, II. — Труды Моск. матем. о-ва **5** (1956), 367–372; **8** (1959), 413–496; **15** (1966), 451–454.

Иошизава (Yoshizawa H.)

1. Unitary representations of locally compact groups. — Osaka Math. J. **1** (1949), 81–89.
2. A proof of the Plancherel theorem. — Proc. Japan. Acad. **30** (1954), 276–281.

Исеки (Iseki K.)

1. On B^*-algebras. — Nederl. Wetensch. Proc. ser. A, **15** (1953), 12–14.

Исмагилов Р. С.

1. О кольцах операторов в пространстве с индефинитной метрикой. — ДАН СССР **171**, 2 (1966), 269–271.

2. Элементарные сферические функции на группе $SL(2, P)$ над полем P, не являющимся локально компактным, относительно подгруппы матриц с целыми элементами. — Известия АН СССР. сер. матем. **31**, 2 (1967), 361–390.

Ито (Itô S.)

1. Positive definite functions on homogeneous spaces. — Proc. Japan Acad. **26** (1950), 17–28.
2. Unitary representations of some linear groups. I–II. — Nagoya Math. J. **4** (1952), 1–13; **5** (1953), 79–96.

Ишии (Ishii T.)

1. On homomorphisms on the ring of continuous functions onto the real numbers. — Proc. Japan Acad. **33** (1957), 419–423.

Кавада (Kawada Y.)

1. Über den Dualitätssatz der Charaktere nichkommutativer Gruppen. — Proc. Phys. Math. Soc. Japan **24** (1942), 97–109.
2. Über die Erweiterung der maximalen Ideale in normierten Ringen. — Proc. Imp. Acad. Tokyo **19** (1943), 267–268.
3. Über den Operatorenring Banachsher Räume. — Proc. Imp. Acad. Tokyo **19** (1943), 616–621.
4. On the group ring of a topological group. — Math. Japonicae **1** (1948), 1–5.

Какутани (Kakutani S.)

1. Rings of analytic functions: Lectures of functions of a complex variable. — Univ. Michigan Press, Ann. Arbor, Michigan, 1955.

Калкин (Calkin J. W.)

1. Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space. — Ann. Math. **42**, 2 (1941), 839–873.

Каллин (Kallin E.)

1. A nonlocal function algebra. — Proc. Nat. Acad. USA **49**, 6 (1963), 821–824.

Камб (Cambes F.)

1. Étude des representations tracées d'une C^*-algèbre. — C. R. Acad. Sci., Paris **262** (1966), 114–117.

Камерон (Cameron R. H.)

1. Analytic functions of absolutely convergent generalised trigonometric sums. — Duke Math. J. **3** (1937), 682–688.

Камовиц (Kamowitz G.)

1. Cohomology groups of commutative Banach algebras. — Trans. Amer. Math. Soc. **102**, 2 (1962), 352–372.

Канторович С. (Kantorovitz S.)

1. The annihilator of a closed ideal in a function algebra. — Bull. Res. Corencil Israel Sect. **9F** (1960), 132–134.

Капланский (Kaplansky I.)

1. Topological rings. — Amer. J. Math. **69** (1947), 153–183.
2. Topological rings. — Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 809–826.
3. Dual rings. — Ann. Math. **49**, 2 (1948), 689–701.
4. Rings with polynomial identity. — Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 575–580.
5. Regular Banach algebras. — J. Indian Math. Soc. (N. S.) **12** (1948), 57–62.
6. Locally compact rings. — Amer. J. Math. **70** (1948), 447–459.

7. Groups with representations of bounded degree. — Canad. J. Math. **1** (1949), 105–112.
8. Primary ideals in group algebras. — Proc. Nat. Acad. Sci. **35** (1949), 133–136.
9. Normed algebras. — Duke Math. J. **16** (1949), 399–418.
10. Topological representation of algebras. II. — Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 62–75.
11. Quelques résultats sur les anneaux d'opérateurs. — C. R. Acad. Sci., Paris **231** (1950), 485–486.
12. Topological algebras. — Proc. Int. Congr. Math., Cambridge, **2** (1950), 112–113.
13. The structure of certain operator algebras. — Trans. Amer. Math. Soc. **70** (1951), 219–255.
14. Locally compact rings. II. — Amer. J. Math. **73** (1951), 20–24.
15. Group algebras in the large. — Tôhoku Math. J. **3** (1951), 249–256.
16. Projections in Banach algebras. — Ann. Math. **53** (1951), 235–249.
17. A theorem on rings of operators. — Pacif. J. Math. **1** (1951), 227–232.
18. Symmetry of Banach algebras. — Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 396–399.
19. Algebras of type I. — Ann. Math. **56** (1952), 460–472.
20. Modules over operator algebras. — Amer. J. Math. **75** (1953), 839–858.
21. Ring isomorphisms of Banach algebras. — Canad. J. Math. **6** (1954), 374–381.
22. Functional analysis. In «Some aspects of analysis and probability». — Surveyes in appl. math. vol. **4**, J. Wiley & Sont, N. Y. (1958), 3–36.

Карлесон (Carleson L.)

1. On bounded analytic functions and closure problems. — Arkiv Mat. (1952).
2. On generators of normed rings. — Skand. Math. Kongr. Lund 1953 **12** (1954), 16–17.
3. Representations of continuous functions. — Math. Zeit. **66** (1957).
4. Interpolation by bounded analytic functions and the corona problem. — Ann. Math. **76**, 3 (1962).
5. Mergelyan's theorem on uniform polynomial approximation. — Math. Scand. **15** (1965).

Картан А. (Cartan H.)

1. Sur la mesure de Haar. — C. R. Acad. Sci., Paris **211** (1940), 759–762.
2. Idéaux et modules de fonctions analytiques de plusieurs variables complexes. — Bull. Soc. Math. France **58** (1950).
3. Seminaires. — Paris, 1951–1952.

Картан А. и Годман (Cartan H., Godement R.)

1. Théorie de la dualite et analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts. — Ann. Sci. École Norm. Sup. **64**, 3 (1947), 79–99.

Картье и Диксмье (Cartier D., Dixmier J.)

1. Verteurs analytiques dans les représentations de groupes de Lie. — Amer. J. Math. **80** (1958), 131–145.

Кастлер (Kastler D.)

1. The C^*-algebras of a free boson field. — Commun. Math. Phys. **1** (1965), 14–48.

Кахан (Kahane J. P.)

1. Algebras de convolution de sucesiones, funciones y medidas sumables. — Cursos y semin. mat. Univ. Buenos Aires **6** (1961), 89.
2. Algèbres tensorielles et analyze harmonique. — Semin. Bourbaki, Secrèt. math. 1964–1965, **17**, 30 (1966), 291-01—291-10.

Кахан и Салем (Kahane J. P., Salem R.)

1. Ensembles parfaits et séries trigonometriques. — Herman A. S. **I** (1301), 1963.

Кац Г. И.

1. Обобщение группового принципа двойственности. — ДАН СССР **138** (1961), 275–278.
2. Обобщенные функции на локально компактной группе и разложения унитарных представлений. — УМН **16**, 1 (1961), 190–191.
3. Представления коммутативных кольцевых групп. — ДАН СССР **145**, 5 (1962), 982–992.
4. Кольцевые группы и принцип двойственности. I, II. — Труды Моск. мат. о-ва, т. 12, 13 (1965).

Кацнельсон (Katznelson Y.)

1. Sur les fonctions opérant sur l’algèbre des séries de Fourier absolument convergentes. — C. R. Acad. Sci., Paris **247** (1958), 404–406.
2. Algèbres characterisées par les fonctions qui opèrent sur elles. — C. R. Acad. Sci., Paris **247** (1958), 903–905.
3. Sur le calcul symbolique dans quelques algèbres de Banach. — Ann. École Norm. Sup. **76** (1959), 83–123.
4. Calcul symbolique dans les algèbres homogènes. — C. R. Acad. Sci., Paris **254**, 15 (1962), 2700–2702.

Квигли (Quigley F.)

1. Approximation by algebras of function. — Math. Ann. **135** (1958), 81–92.

Кейдисон (Kadison R.)

1. A representation theory for commutative topological algebra. — Memoirs Amer. Math. Soc. **7** (1951), 39.
2. Isometries of operator algebras. — Ann. Math. **54** (1951), 325–338.
3. A generalized Schwarz inequality and algebraic invariants for operator algebras. — Ann. Math. **56** (1952), 494–503.
4. Infinite unitary groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 386–399.
5. Infinite general linear groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **76** (1954), 66–91.
6. On the general linear group of infinite factors. — Duke Math. J. **22** (1955), 119–122.
7. Multiplicity theory for operator algebras. — Proc. Nat. Acad. Sci. **41** (1955), 169–173.
8. On the additicity of the trace in finite factors. — Proc. Nat. Acad. Sci. **41** (1955), 385–387.
9. On the ortogonalization of operator representations. — Amer. J. Math. **77** (1955), 600–620.
10. Report on operator algebras. — Publ. Nat. Acad. Sci Nat. Res. Council **387** (1955), 4–10.
11. Irreducible operator algebras. — Proc. Nat. Acad. Sci. **43** (1957), 273–276.
12. Theory of operators. II. Operator algebras. — Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), 61–85.

13. The trace in finite operator algebras. — Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 973–977.

Кейовн (Keown E. R.)

1. Reflexive Banach algebras. — Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 252–259.

Келдыш М. В.

1. Sur les suites de polynomes bornés dans leur ensemble. — Матем. сб. **42** (1935), 719–724.
2. О представлении функций комплексного переменного рядами полиномов в замкнутых областях. — Матем. сб. **16** (1945), 249–257.

Келер (Koehler F.)

1. Note on a theorem of Gelfand and Šilov. — Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 541–543.

Келли (Kelley J. L.)

1. Convergence in topology. — Duke Math. J. **17** (1950), 277–283.
2. Commutative operator algebras. — Proc. Nat. Acad. Sci. **38** (1952), 598–605.
3. General topology. — Van Nostrand, Princeton, 1955.
4. Duality for compact groups. — Proc. Nat. Acad. Sci. **49** (1963), 457–458.

Келли и Вот (Kelley J. L., Vaught R. L.)

1. The positive cone in Banach algebras. — Trans. Amer. Math. Soc. **74** (1953), 44–45.

Келли и Морс (Kelley J. L., Morse A. P.)

1. Invariant measures. — Math. Ann. **148**, 2 (1962), 98–124.

Келлог (Kellogg C. N.)

1. Centralizers and H^*-algebras. — Pacif. J. Math. **17**, 1 (1966), 121–129.

Кёниг (König H.)

1. Zur abstrakten Theorie der analytischen Functionen. I, II. — Math. Zeit. **88** (1965), 136–165; Math. Ann. **163** (1966), 9–17.
2. Lectures abstract H^p theory. — Summer school on topological algebra theory, Bruges, 1966, 75–127.

Кете (Köthe G.)

1. Abstrakte Theorie nichtkommutatiyer Ringe mit einer Anwendung auf die Darstellungstheorie kontinuierlicher Gruppen. — Math. Ann. **103** (1930), 545–572.
2. Dualität in der Funktionentheorie. — J. reine angew. Math. **191** (1953), 29–49.
3. Topologische lineare Räume. — Springer Verlag, 1960.

Клейнеке (Kleinecke D. G.)

1. On operator commutators. — Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 535–536.

Ковальский (Kowalsky H.)

1. Beiträge zur topologischen Algebra. — Math. Nachr. **3** (1954), 143–185.

Кодаира и Какутани (Kodaira K., Kakutani S.)

1. Normed ring of a locally compact Abelian group. — Proc. Imp. Acad. Tokyo **19** (1943), 360–365.

Коддингтон (Coddington E. A.)

1. Some Banach algebras. — Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957) 258–261.

Коен (Cohen P. I.)

1. On a conjecture of Littlewood and idempotent measures. — Amer. J. Math. **82** (1960), 191–212.

2. On homomorphisms of group algebras. — Amer. J. Math. **82** (1960), 213–226.
3. A note on constructive methods in Banach algebras. — Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 159–163.

Колмогоров А. Н.
1. Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes. — Studia Math. **5** (1934), 29–33.

Колмогоров А. Н. и Фомин С. В.
1. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Изд-во МГУ, 1954; М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

Кондо (Kondô M.)
1. Les anneaux des opérateurs sur un espace de S. Banach et quelques problèmes qui s'y rattachent. I. — J. Math. Tokyo **1** (1951), 35–54.

Кордесс (Cordesse A.)
1. Représentations factorielles de certains produits semidirect. — C. R. Acad. Sci. Paris **262**, 20 (1966), 1109–1112.

Коренблюм Б. И.
1. О некоторых специальных коммутативных нормированных кольцах. — ДАН СССР **64** (1949), 281–284.
2. О нормированном кольце функций со сверткой. — ДАН СССР **115** (1957), 226–229.
3. Обобщение тауберовой теоремы Винера и гармонический анализ быстро растущих функций. — Труды Моск. матем. о-ва **7** (1958), 121– 148.

Коррел и Хенриксен (Correll E., Henriksen M.)
1. On rings of bounded continuous functions with values in a ring. — Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 194–198.

Костюченко А. Г. и Митягин Б. С.
1. Положительно определенные функционалы на ядерных пространствах. — Труды Моск. матем. о-ва **9** (1960), 283–316.
2. Положительно определенные функционалы на ядерных пространствах. — УМН **15**, 1 (1960), 244–246.

Котляр и Рикабарра (Cotlar M., Ricabarra R.)
1. On the existence of characters in topological groups. — Amer. J. Math. **76** (1954), 375–388.

Коши С. (Koshi Sn.)
1. On Weierstrass–Stone's theorem. — J. Math. Soc. Japan **5** (1953), 351–352.

Краббе (Krabbe G. L.)
1. Abelian rings and spectra of operators on l_p. — Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 783–790.
2. Spectral isomorphisms for some rings of infinite matrices on a Banach space. — Amer. J. Math. **78** (1956), 42–50.
3. Spectra of convolution operators on L^p and rings of factor-sequences. — Quart. J. Math. **8** (1957), 1–12.

Крейн М. Г.
1. Про позитивні адитивні функціонали в лінійних нормованих просторах. — Зап. Наук. досл. інст. матем. і мех. ХДУ і Харьківськ. матем. тов. **14** (1937), 227–237.
2. Основные свойства нормальных конических множеств в пространстве Банаха. — ДАН СССР **28** (1940), 13–17.

3. Об одном кольце функций, определенных на топологической группе. — ДАН СССР **29** (1940), 275–280.
4. Об одном специальном кольце функций. — ДАН СССР **29** (1940), 355–359.
5. К теории почти периодических функций на топологической группе. — ДАН СССР **30** (1941), 5–8.
6. О положительных функционалах на почти периодических функциях. — ДАН СССР **30** (1941), 9–12.
7. Об одном обобщении теоремы Планшереля на случай интегралов Фурье на коммутативной топологической группе. — ДАН СССР **30** (1941), 482–486.
8. Принцип двойственности для бикомпактной группы и квадратной блок-матрицы. — ДАН СССР **69** (1949), 725–728.
9. Эрмитово-положительные ядра на однородных пространствах. I, II. — Укр. матем. ж. **1** (1949), 64–98; **2** (1950), 10–59.
10. Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. — УМН **13**, 5 (1958), 3–120.
11. О некоторых новых банаховых алгебрах и теоремах типа теорем Винера–Леви для рядов и интегралов Фурье. — Математические исследования **1**: 1, АН Молд. ССР, Кишинев, 1966, 82–109.

Крейн М. Г. и Мильман Д. П.

1. On extreme points of regularely convex sets. — Studia Math. **9** (1940), 133–138.

Крейн М. Г. и Рутман М. А.

1. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха. — УМН **3** (1948), 3–95.

Крейн М. Г. и Шмульян В. Л.

1. On regularely convex sets in the space conjugate to a Banach space. — Ann. Math. **41** (1940), 556–583.

Курант и Гильберт (Courant R., Hilbert D.)

1. Методы математической физики. Т. I. — М.: Гостехиздат, 1951.

Куратовский (Kuratowski K.)

1. Топология. Т. I. — М.: Мир, 1965.

Кусис (Koosis P.)

1. An irreducible unitary representation of a compact group is finite dimensional. — Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 712–715.

Лаврентьев М. А.

1. Sur les fonctions d'une variable complex représentables par des series de polynomes. — Hermann, Paris, 1936.

Лакс (Lax P.)

1. Translation invariant subspaces. — Acta Math. **101** (1959).

Ламперти (Lamperti J.)

1. On the isometries of certain function spaces. — Pacif. J. Math. **8** (1958), 459–466.

Лангер (Langer H.)

1. О J-эрмитовых операторах. — ДАН СССР **134** (1960), 263–266.
2. Zur Spektraltheorie J-selbstadjungierter Operatoren. — Math. Ann. **146** (1962), 60–85.

Лауденслегер (Lowdenslager D.)

1. Potential theory in bounded symmetric homogeneous complex domains. — Ann. Math. **67**, 3 (1958), 467–484.

Леви (Levy P.)

1. Sur la convergence absolue des séries de Fourier. — Compositio Math. **1** (1934), 1–14.

Левитан Б. М.

1. Нормированные кольца, порожденные обобщенной операцией сдвига. — ДАН СССР **47** (1945), 3–6.
2. Теорема о представлении положительно определенных функций для обобщенной операции сдвига. — ДАН СССР **47** (1945), 163–165.
3. Теорема Plancherel'я для обобщенной операции сдвига. — ДАН СССР **47** (1945), 323–326.
4. Закон двойственности для обобщенной операции сдвига. — ДАН СССР **47** (1945), 401–403.
5. A generalization of the operation of translation and infinite hyper-complex system. I, II. — Матем. сб. **16** (1945), 259–280; **17** (1945), 9–44 и 163–192.
6. Кольца операторов и операции обобщенного сдвига. — ДАН СССР **52** (1946), 99–102.
7. К теории унитарных представлений локально компактных групп. — Матем. сб. **19** (1946), 407–428.
8. Исправление к статье «Обобщенные операции сдвига и бесконечные гиперкомплексные системы». — Матем. сб. **24** (1949), 501–502.
9. Применение операторов обобщенного сдвига к линейным дифференциальным уравнениям второго порядка. — УМН **4**, 1 (1949), 3–112.
10. Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения. — М., 1962.

Левитан Б. М. и Повзнер А. Я.

1. Дифференциальные уравнения Штурма–Лиувилля на полуоси и теорема順Планшереля. — ДАН СССР **52** (1946), 483–486.

Лейбензон З. Л.

1. О кольце непрерывных функций на окружности. — УМН **7**, 4 (1952), 163–164.
2. О кольце функций с абсолютно сходящимся рядом Фурье. — УМН **9**, 3 (1954), 157–162.
3. О гомоморфизмах колец $A(\alpha_n)$. — УМН **20**, 4 (1965), 201–203.

Лептин (Leptin H.)

1. Reduktion linearer Funktionale auf Operatorenringen. — Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **22** (1958), 98–113.
2. Zur Reductionstheorie Hilbertschen Räume. — Math. Zeit. **69** (1958), 40–58.

Лере (Leray J.)

1. Fonction de variable complexe. Sa représentation comme somme de puissances négatives de fonctionnelles linéaires. — R. C. Acad. Lincei, 1956, 589–590.

Лереше (Leresche G.)

1. Algèbres d'opérateurs non bornés sur un espace de Hilbert. — Comment math. helv. **40**, 4 (1966), 281–324.

де Леу (de Leew K.)
1. A type of convexity on the space of n complex variables. — Trans. Amer. Math. Soc. **83** (1956), 193–204.
2. Functions of circular subsets of the space of n complex variables. — Duke Math. J. **24**, 3 (1957), 415–432.
3. The isometries of H^1 (mimeographed note, Stanford, 1960).

де Леу и Герц (de Leew K., Herz C.)
1. An invariance property of spectral synthesis. — Illinois J. Math. **9**, 2 (1965), 220–229.

де Леу и Кацнельсон (de Leew K., Katznelson Y.)
1. Functions that operate on non self-adjoint algebras. — Iton leanalisa matem-atut. J. analyse math., 1963, 11.

де Леу и Миркилл (de Leew K., Mirkill H.)
1. Intrinsic algebras on the torus. — Trans. Amer. Math. Soc. **81** (1956), 320–330.

де Леу и Рудин (de Leew K.., Rudin W.)
1. Extreme points and extremum problems in H^1. — Pacif. J. Math. **8** (1958).

де Леу, Рудин и Вермер (de Leew K., Rudin W., Wermer J.)
1. The isometries of some function spaces. — Proc. Amer.Math.Soc. **11** (1960).

Литлвуд (Littlewood D. E.)
1. The theory of group characters and matrix representations of groups. — NY: Oxford Univ. Press, 1940.

Лорч (Lorch E. R.)
1. The spectrum of linear transformations. — Trans. Amer. Math. Soc. **52** (1942), 238–248.
2. The theory of analytic functions in normed abelian vector rings. — Trans. Amer. Math. Soc. **57** (1943), 414–425.
3. The structure of normed abelian rings. — Bull. Amer. Math. Soc. **50** (1944), 447–463.
4. L'integrazione e gli ideali massimi. — Rend. Sem. Mat. Univ., Torino, **13** (1953/54), 33–38.
5. Normed rings — the first decade. — Proc. Symp. Spectral Theory and Differential Problems, Oklahoma, 1955, 249–258.

Лузин Н. Н. и Привалов И. И.
1. Sur l'unicite et la multiplicite des fonctions analytiques. — Ann. Sci. École Norm. Sup. **42** (1925).

Лупиас и Миракль-Соль (Loupias G., Miracle-Sole)
1. C^*-algébres des systèmes canoniques. I. — Commun. math. phys. **2** (1966), 31–48.

Льястад (Ljastad O.)
1. Uniform approximation in various function spaces. — Math. Scand. **14**, 1 (1964), 5–18.

Любарский Г. Я.
1. Гармонический анализ на топологическом многообразии с транзитивной группой. Диссертация. — Казань, 1945.

Люмер (Lumer G.)
1. The range of the exponential function. — Publ. Inst. Math. y Estadist. Fac. Ingr. y Agrimens **3** (1957), 53–55.

2. Commutadores en álgebras de Banach. — Publ. Inst. Math. y Estadist. Fac. Ing. y Agrimens **3** (1957), 57–63.
3. Semi-inner product spaces. — Trans. Amer. Math. Soc. **100** (1961), 29–43.
4. Analytic functions and the Dirichlet problem. — Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1964), 98–104.
5. Herglotz transformation and H^p theory. — Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965), 725–730.
6. Intégralité uniforme dans les algèbres de fonctions classes H^p et class de Hardy universelle. — C. R Acad. Sci., Paris **262** (1966), 1046–1049.

Люмис (Loomis L. H.)
1. Haar measure in uniform structures. — Duke Math. J. **16** (1949), 193–208.
2. Введение в абстрактный гармонический анализ. — М.: ИЛ, 1956.
3. The lattice theoretic background of the dimension theory of operator algebras. — Memoirs Amer. Math. Soc. **18** (1955), 36 p.

Люмис и Уиддер (Loomis L. H., Widder D.)
1. The Poisson integral representation of functions which are positive and harmonic in a half-plane. — Duke Math. J. **9** (1942).

Люстерник Л. А. и Соболев В. И.
1. Элементы функционального анализа. — М.: Наука, 1965.

Лянце В. Э.
1. Об одном обобщении понятия спектральной меры. — Матем. сб. **61**, 1 (1961), 80–120
2. Об одном обобщении понятия спектрального оператора. — ДАН СССР **142**, 2 (1962), 278–281.

Маак (Maak W.)
1. Darstellungstheorie unendlicher Gruppen und lastperiodische Funktionen. — Enzyklopädie Math. Wiss., Bd. I, 1 Teil, Heft 7, Artikel 16, B. G. Teubner, Leipzig, 1953.
2. Fastperiodische Functionen auf der Model gruppe. — Math. Scand. **3** (1955), 44–48.

Маеда Ш. (Maeda Sh.)
1. Lengths of projections in rings of operators. — J. Sci. Hiroshoma Univ., **A 20** (1956), 5–11.

Маеда Ф. (Maeda F.)
1. Relative dimensionality in operator rings. — J. Sci. Hirosima Univ. **11** (1941), 1–6.

Мазани и Винер (Masani P., Wiener N.)
1. The prediction theory of multivariate stochastic processes. I, II. — Acta Math. **97** (1957), **98** (1958).

Мазур (Mazur S.)
1. Sur les anneaux linéaires. — C. R. Acad. Sci., Paris **207** (1938), 1025–1027.

Майерс (Myers S. B.)
1. Algebras of differentiable functions. — Proc. Amer Math. Soc. **5** (1954), 917–922.

Майкл (Michael E. A.)
1. Locally multiplicatively-convex topological algebras. — Memoirs Amer. Math. Soc. **11** (1952), 79.

Макдуэл (Macdowell R.)
1. Banach spaces and algebras of continuous functions. — Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 67–78.

Макки (Mackey Q. W.)

1. The Laplace transform for locally compact Abelian groups. — Proc. Nat. Acad. Sci. **34** (1948), 156–162.
2. Imprimitivity for representations of locally compact group. I. — Proc. Nat. Acad. Sci. **35** (1949), 537–545.
3. Imprimitivity pour les représentations des groupes localement compacts. II: Nombres d'entrelacement pour les représentations imprimitives; III: Produits de Kronecker et nombres d'entrelacement fortes. — C. R. Acad. Sci., Paris **230** (1950), 808–809, 908–909.
4. Функции на локально компактных группах. — УМН **8**, 4 (1953), 95–129.
5. On induced representations of groups. — Amer. J. Math. **73** (1951), 576–592.
6. Induced representations of locally compact groups. I, II: The Frobenius reciprocity theorem. — Ann. Math. **55** (1952), 101–139; **58** (1953), 193–231.
7. Borel structure in groups and their duals. — Trans. Amer. Math. Soc. **85** (1957), 134–165.
8. Unitary representations of group extensions. I. — Acta Math. **99** (1958), 265–311.
9. Бесконечномерные представления групп. — Математика **6**, 6 (1962), 57–103.

Мак-Киссик (Mc Kissick R.)

1. A non trivial normal sup norm algebra. — Bull. Amer. Math. Soc. **69**, 3 (1963), 391–395.

Мальгранж (Malgrange B.)

1. Ideals of differentiable functions. — Tata Inst., Bombay, 1966.

Марков А. А.

1. On mean values and exterior deasities. — Матем. сб. **4**, 1 (1938), 165–191.

Маркушевич А. И.

1. Теория аналитических функций. — Гостехиздат, М.–Л., 1950.

Маркушевич Л. А.

1. Структура колец непрерывных функций на окружности с двумя образующими. — ДАН СССР **132**, 6 (1960), 1265–1269.
2. Приближение многочленами непрерывных функций на жордановых дугах в пространстве n комплексных переменных. — Сиб. матем. ж. **2**, 2 (1961), 260–273.

Матань (Matagne R.)

1. Les espaces de Silva. — Bull. Soc. Roy. Sci. Liege, 1964, 754–768.

Мате (Maté L.)

1. Embedding Multiplier Operators of a Banach algebra B into its second conjugate space B^{**}. — Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. math. astr. phys. **13**, 11–12 (1965), 809–812.

Матчес (Matthes K.)

1. Über eine Vorallgemainerung eines Satzes von Gelfand und Kolmogoroff. — Math. Nachr. **15** (1956), 117–121.

Маутнер (Mautner F. I.)

1. The completeness of the irreducible unitary representations of a locally compact group. — Proc. Nat. Acad. Sci. **34** (1948), 52–54.

2. Unitary representations of locally compact groups. I, II. — Ann. Math. **51** (1950), 1–25; **52** (1950), 518–556.
3. On the decomposition of unitary representations of Lie groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 490–496.
4. A generalization of the Frobenius reciprocity theorem. — Proc. Nat. Acad. Sci. **37** (1951), 431–435.
5. Fourier analysis and symmetric spaces. — Proc. Nat. Acad. Sci. **37** (1951), 529–533.
6. Induced representations. — Amer. J. Math. **74** (1952), 737–757.
7. Geodesic flows and unitary representations. — Proc. Nat. Acad. Sci. **40** (1954), 33–36.
8. Note of Fourier inversion formula for groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **78** (1955), 371–384.

Мацусита (Matsushita S.)

1. Positive linear functionals in self-adjoint B-algebras. — Proc. Japan Acad. **29** (1953), 427–430.
2. Analyse harmonique dans les groupes localement compacts. I–II. — C. R. Acad. Sci., Paris **237** (1953), 955–957; 1056–1057.
3. Über einen Satz von K. Iwasawa. — J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., **A4** (1953), 59–61.
4. Plancherel's theorem on general locally compact groups. — J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., **A4** (1953), 63–70.
5. Sur le théoremè de Plancherel. — Proc. Japan Acad. **30** (1954), 557–561.
6. Positive functionals and representation theory on Banach algebras. I. — J. Inst. Polytech. Osaka City Univ., **A6** (1955), 1–18.

Маявэн (Malliavin P.)

1. Théorèms d'adhérence pour certaines séries de Dirichlet, Procédés d'extrapolation en analyse fonctionnelle. — C. R. Acad. Sci., Paris **239** (1954), 20–22.
2. Sur l'impossibilite de la synthèse spectrale, sur la droit. — C. R. Acad. Sci., Paris **248** (1959), 2155–2157.

Мейер (Meyer M. Y.)

1. Prolongement des multiplicateurs d'ideaux fermes de L^1 (R^n). — C. R. Acad. Sci., Paris **262** (1966), 744–745.

Мергелян С. Н.

1. О представлении функций рядами полиномов на замкнутых множествах. — ДАН СССР **78** (1951), 405–408.
2. Равномерное приближение функций комплексного переменного. — УМН **7**, 2 (1952), 31–128.
3. Дополнение к книге Уолша «Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области». — М., 1961.

Микусинский (Mikusinski Jan G.)

1. L'anneau algébrique et ses applications dans l'analyse fonctionnelle. I, II. — Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sec. **A2** (1947), 1–48; **3** (1949), 1–84.
2. Sur les fondements du calcul opératiore. — Studia Math. **11** (1950), 41–70.
3. Une nouvelle justification du calcul de Heaviside. — Atti Lincei, Fis. Mat. Nat. (8), Ser. 1, **2** (1950), 113–121.
4. Операторное исчисление. — М.: ИЛ, 1956.

Миллер (Miller J. B.)

1. Generalized-function calculus for the Laplace transformation. — Arch. Rat. Mech. and Analys. **12** (1963), 409–419.
2. Averaging and Reynolds Operators in Banach Algebras, I. Representation by Derivations and Antiderivations. — J. Math. Analyses and Appl. **17** (1966), 527–548.

Мильман Д. П.

1. Нормируемость топологических колец. — ДАН СССР **47** (1945), 166–168.
2. Характеристика экстремальных точек регулярно выпуклого множества. — ДАН СССР **57** (1947), 119–121.
3. Достижимые точки функционального компакта. — ДАН СССР **59** (1948), 1045–1048.
4. К теории колец с инволюцией. — ДАН СССР **76** (1951), 349–352.
5. Об интегральных представлениях функций многих переменных. — ДАН СССР **87** (1952), 9–10.

Мисоноу (Misonou Y.)

1. On weakly central operator algebra. — Tôhoku Math. J. **4**, 2 (1952), 194–202.
2. Operator algebras of type I. — Kodai Math. Sem Rep. **3** (1953), 87–90.
3. Unitary equivalence of factors of type III. — Proc. Japan Acad. **29** (1953), 482–485.
4. On the direct product of W^*-algebras. — Tôhoku Math. J. **6** (1954), 189–204.
5. Generalized approximately finite W^*-algebras. — Tôhoku Math. J. **7** (1955), 192–205.
6. On divisors of factors. — Tôhoku Math. J. **8** (1956), 63–69.

Мисоноу и Накамура (Misonou Y., Nakamura M.)

1. Centering of an operator algebra. — Tôhoku Math. J. **3**, 2 (1951), 243–248.

Митягин Б. С.

1. Максимальные идеалы некоторых нормированных колец. — Сиб. матем. ж. **1** (1960).

Митягин, Ролевич и Желязко (Mitiagin B., Rolewicz S., Ẑelazko W.)

1. Entire functions in B_0-algebras. — Studia Math. **21** (1962), 291–306.

Миянага (Miyanaga Y.)

1. A note on Banach algebras. — Proc. Japan Acad. **32** (1956), 176.

Млак (Mlak W.)

1. Representations of some algebras of generalized analytic functions. — Bull. Acad. Polon. Sci. math. astr. phys. **13** (1965), 211–214.

Моллиос (Mollios A.)

1. Heredity of tensor products of topological algebra. — Math. Ann. **162** (1966), 246–257.

Морен К. (Maurin K.)

1. Allgemeine Eigenfunktionsentwicklungen Spectraldarstellung abstractor Kerne, Eine Varallgemeinerung, der Distributionen auf Lie'schen Gruppen. — Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. math. astr. phys. **7**, 8 (1959). 471–479.

2. Allgemeine Eigenfunktionsentwicklungen, unitäre Darstellungen lokalkompakter Gruppen und automorphe Funktionen. — Math. Ann. **165** (1966), 204–222.
3. Методы гильбертова пространства. — М.: Мир, 1965.

Морен К. и Морен Л. (Maurin K., Maurin L.)
1. Universelle umhüllende Algebra einer 1. k. Gruppe und ihre s. a. Darstellungen. — Anw. Studia Math. **24** (1964), 227–243.
2. Automorphic forms, spectral theory and group representations. — Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. math. astr. phys. **13** (1965), 199–203.

Мостов (Mostow G. D.)
1. On the L^2-space of Lie group. — Amer J. Math. **77** (1952), 920–928.

Мошизуки (Mochizuki N.)
1. A note on the Choguet boundary of a restricted function algebra. — Tôhoku Math. J. **18**, 3 (1966), 316–317.

Мур и Смит (Moore E. H., Smith H. L.)
1. A general theory of limits. — Amer. J. Math. **44** (1922), 102–121.

Мюнц (Müntz Ch.)
1. Über den Approximationsatz von Weierstrass. — H. A Festschrift, Berlin, 1914.

Мюррей (Murray F. J.)
1. Linear transformations between Hilbert spaces and the application of this theory to linear partial differential equations. — Frans. Amer. Math. Soc. **37** (1935), 301–338.

Мюррей и фон Нейман (Murray F. J., von Neumann J.)
1. On rings of operators. I, II, IV. — Ann. Math. **37** (1936), 116–229; Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 208–248; Ann. Math. **44** (1943), 716–808.

Нагасава (Nagasawa M.)
1. Isomorphisms between commutative Banach algebras with an application to rings of analytic functions. — Kokai Math. Sem. Rep. **11** (1959).

Нагумо (Nagumo M.)
1. Einige analytische Untersuchungen in linearen metrischen Ringen. — Japan J. Math. **13** (1936), 61–80.

Надь-Сёкефальви (Sz.-Nagy B.)
1. Transformations de l'espace de Hilbert, fonctions de type positif sur un groupe. — Acta Sci. Math. **15** (1954), 104–114.
2. Note on sums of almost orthogonal operators. — Acta Sci. Math. **18** (1957), 189–191.

Наймарк М. А.
1. Положительно определенные операторные функции на коммутативной группе. — Изв. АН СССР, сер. матем., **7** (1943), 237–244.
2. Кольца с инволюцией. — УМН **3** (1948), 52–145.
3. Кольца операторов в гильбертовом пространстве. — УМН **4** (1949), 83–147.
4. Об одной задаче теории колец с инволюцией. — УМН **6** (1951), 162–164.
5. Описание всех неприводимых представлений классических групп. — ДАН СССР **84** (1952), 883–886.
6. О неприводимых линейных представлениях собственной группы Лоренца. — ДАН СССР **97** (1954), 969–972.
7. О континуальном аналоге леммы Шура. — ДАН СССР **98** (1954), 185–188.

8. Линейные представления группы Лоренца. — УМН **9**, 4 (1954), 19–63.
9. Об описании всех унитарных представлений комплексных классических групп. I. — Матем. сб. **35** (1954), 317–356.
10. Нормированные кольца. — М.: Гостехиздат, 1956.
11. О неприводимых представлениях полной группы Лоренца. — ДАН СССР **112** (1957), 583–586.
12. Линейные представления группы Лоренца. — М.: Физматгиз, 1958.
13. О разложении тензорного произведения представлений основной серии собственной группы Лоренца на неприводимые представления. — ДАН СССР **119** (1958), 872–876.
14. О разложении неприводимых представлений основной серии комплексной унимодулярной группы n-го порядка на представления комплексной унимодулярной группы второго порядка. — ДАН СССР **121** (1958), 590–593.
15. Разложение тензорного произведения неприводимых представлений собственной группы Лоренца на неприводимые представления. — Труды Моск. матем. о-ва **8** (1959), 121–153; **9** (1960), 237–282; **10** (1961), 181–216.
16. О фактор-представлениях локально компактной группы. — ДАН СССР **134**, 2 (1960), 275–277.
17. О разложении на фактор-представления унитарного представления локально компактной группы. — Сиб. матем. ж. **2**, 1 (1961), 89–99.
18. Linear representations of the Lorentz group. — VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962. (Немецкое издание книги [12].)
19. О структуре фактор-представлений локально компактной группы. — ДАН СССР **148** (1963), 775–778.
20. On commuting unitary operators in spaces with indefinite metric. — Acta Sci. Szeged **24**, 3–4 (1963), 177–189.
21. Бесконечномерные представления групп и смежные вопросы. — Итоги науки, АН СССР, Инст. научн. информации. — М., 1964.
22. Kommutative symmetrische operatoren Algebra in Pontryaginschen Räumen Π_k. — Math. Ann. **162** (1965), 147–171.
23. On unitary group representations in spaces with indefinite metric. — Acta Sci. Szeged. **26**, 3–4 (1965), 201–209.
24. О структуре унитарных представлений локально бикомпактных групп и симметричных представлений алгебр в пространствах Понтрягина Π_k. — Изв. АН СССР, сер. матем., **30**, 5 (1966), 1111–1132.
25. Вырожденные алгебры операторов в пространстве Понтрягина Π_k. — Изв. АН СССР, сер. матем., **30** (1966), 1229–1256.

Наймарк М. А. и Фомин С. В.

1. Непрерывные суммы гильбертовых пространств и некоторые их применения. — УМН **10** (1955), 111–142.

Накамура (Nakamura M.)

1. The two-sided representations of an operator algebra. — Proc. Japan Acad. **27** (1951), 172–176.
2. On the direct product of finite factors. — Tôhoku Math. J. **6** (1954), 205–207.

Накамура и Такеда (Nakamura M., Takeda Z.)

1. The Radon-Nikodum theorem of traces for a certain operator algebra. — Tôhoku Math. J. **4** (1952), 275–283.

2. Normal states of commutative operator algebras. — Tôhoku Math. J. **5** (1953), 109–121.
3. On some elementary properties of the crossed products of von Neumann algebras. — Proc. Japan Acad. **34** (1958), 489–494.
4. On certain examples of the crossed product of finite factors I–II. — Proc. Japan Acad. **34** (1958), 495–499; 500–502.
5. A Galois theory for finite factors. — Proc. Japan. Acad. **36** (1960), 258–260.
6. On the fundamental theorem of the Galois theory for finite factors. — Proc. Japan Acad. **36**, 6 (1960), 313–318.

Накамура, Такесаки и Умэгаки (Nakamura M., Takesaki M., Umegaki H.)

1. A remark on the expections of operator algebras. — Kodai Math. Sem. Rep. **12** (1960), 82–90.

Накамура и Турумару (Nakamura M., Turumaru T.)

1. On extensions of pure states of an Abelian operator algebra. — Tôhoku Math. J. **6** (1954), 253–257.

Накамура и Умэгаки (Nakamura M., Umegaki H.)

1. A remark on theorems of Stone and Bochner. — Proc. Japan Acad. **27** (1951), 506–507.
2. On a proposition of von Neumann. — Kodai Math. Sem. Rep. **8** (1956), 142–144.

Накано (Nakano H.)

1. Hilbert algebras. — Tôhoku Math. J. **2**, 2 (1950), 4–23.

Накаяма (Nakayama T.)

1. Remark on the duality for noncommutative compact groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 849–854.

Натансон И. П.

1. Теория функций вещественной переменной. — М.–Л.: Гостехиздат, 1950, 1957.

Нахбин (Nachbin L.)

1. A generalization of Whitney's theorem on ideals of differentiate functions. — Proc. Nat. Acad. Sci. **43** (1957), 935–937.

фон Нейман (von Neumann J.)

1. Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren. — Math. Ann. **102** (1929), 370–427.
2. Über adjungierte Funktionaloperatoren. — Ann. Math. **33** (1932), 294–310.
3. Almost periodic functions in a group. I. — Trans. Amer. Math. Soc. **36** (1934), 445–492.
4. On a certain topology for rings of operators. — Ann. Math. **37** (1936), 111–115.
5. On regular rings. — Proc. Nat. Acad. Sci. **22** (1936), 707–713.
6. Continuous rings and their arithmetics. — Proc. Nat. Acad. Sci. USA **23** (1937), 341–349.
7. On infinite direct products. — Compositio Math. **6** (1938), 1–77.
8. On rings of operators. III. — Ann. Math. **41** (1940), 94–161.
9. On some algebraic properties of operator rings. — Ann. Math. **47** (1943), 709–715.
10. On rings of operators, Reduction theory. — Ann. Math. **50** (1949), 401–485.
11. Functional operators. I, II. — Princeton, Princeton Univ. Press, 1950.

12. The non-isomorphisms of certain continuous rings. — Ann. Math. **67** (1958), 485–496.
13. Continuous geometry. — Princeton, 1960.

фон Нейман и Шэттен (von Neumann J., Shatten R.)

1. The cross-space of linear transformations. I–III. — Ann. Math. **47**, 2 (1946), 73–84; 608–630; **49**, 2 (1949), 557–582.
2. Некоторые вопросы теории приближений. — М.: ИЛ, 1963.

Нельсон (Nelson E.)

1. Analytic vectors. — Ann. Math. **70** (1959), 572–615.

Новодворский М. Е.

1. О некоторых гомологических инвариантах пространства максимальных идеалов. — Матем. заметки **1**, 4 (1967), 487–494.

Норгю (Norguet F.)

1. Intégration de formes différentielles non fermées. — Rendiconti di Math. **20** (1961) 335–372.

Норскот (Northcott D.)

1. Ideal theory. — Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1953.

Ньюман (Newman D. J.)

1. Some remarks on the maximal ideal structure of H^∞. — Ann. Math. **70**, 3 (1959), 438–445.
2. Interpolation in H^∞. — Trans. Amer. Math. Soc. **92** (1959).
3. The non-existence of projections from L^1 to H^1. — Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961).

Огасавара (Ogasawara T.)

1. Finite-dimensionality of certain Banach algebras. — J. Sci. Hiroshima Univ., **A17** (1954), 359–364.
2. A theorem on operator algebras. — J. Sci. Hiroshima Univ., **A18**, 3 (1955), 307–309.
3. A structure theorem for complete quasiunitary algebras. — J. Sci. Hiroshima Univ. **A19** (1955), 79–85.
4. Topologies on rings of operators. — J. Sci. Hiroshima Univ. **A19** (1955), 255–272.

Огасавара и Иошинага (Ogasawara T., Yoshinaga K.)

1. Weakly completely continuous Banach*-algebras. — J. Sci. Hiroshima Univ. **A18** (1954), 15–36.
2. A non-commutative theory of integration for operators. — J. Sci. Hiroshima Univ. **A18** (1955), 311–347.

Олубуммо (Olubummo A.)

1. Left completely continuous B^*-algebras. — J. London Math. Soc. **32** (1957), 270–276.

Ока (Oka K.)

1. Sur les fonctions de plusieurs variables. II. Domaines d'holomorphie. — J. Sci. Hiroshima Univ. **A7** (1937), 115.
2. Fonctions de plusieurs variables complexes. VII. Sur quelques notions arithmetiques. — Bull. Soc. Math France **58** (1950).

О'Нилл (O'Neill B.)

1. Parts and one-dimensional analytic spaces. Thesis. — Brown Univ., 1965.

Оно (Ono T.)

1. A generalization of the Hahn-Banach theorem. — Nagoya Math. J. **6** (1953), 171–176.

2. Local theory of rings of operators. I, II. — J. Math. Soc. Japan **10** (1958), 184–216; 438–458.
3. Note on a B^*-algebra. — J. Math. Soc. Japan **11** (1959), 146–158.

Орихара (Orihara M.)
1. Correction to my paper «Rings of operator and their traces». — Memoirs Fac. Sci. Kyusyu Univ. **A8** (1953), 89–91.

Орихара и Тсуда (Orihara M., Tsuda T.)
1. The two-sided regular representations of a locally compact group. — Memoirs Fac. Sci. Kyusyu Univ. **A6** (1951), 21–29.

Отобе (Otobe Y.)
1. Note on locally compact simple rings. — Proc. Imp. Acad. Tokyo **20** (1944), 283.
2. On locally compact fields. — Japan J. Math. **19** (1945), 189–202.

Падманабхан (Padmanabhan A. R.)
1. Some dominated convergence theorems in a von Neumann algebra. — Proc. Japan Acad. **42**, 4 (1966), 347–350.

Паллю де Ла Барьер (Pallu de la Barrière R.)
1. Algèbres auto-adjointes faiblement fermées et algèbres hilbertiennes de classe finie. — C. R. Acad. Sci., Paris **232** (1951), 1994–1995.
2. Algèbres unitaires et espaces d'Ambrose. — C. R. Acad. Sci., Paris **233** (1951), 997–999.
3. Isomorphisme des$*$-algèbres faiblement fermées d'opérateurs. — C. R. Acad. Sci., Paris **234** (1952), 795–797.
4. Algèbres unitaires et espaces d'Ambrose, Ann. École Norm. **70**, 3 (1953), 381–401.
5. Sur les algèbres d'opérateurs dans les espaces hilbertiens. — Bull. Soc. Math. France **82** (1954), 1–52.

Палюткин В. Г.
1. Инвариантная мера на компактной кольцевой группе. — Укр. матем. ж. **18**, 4 (1966), 49–59.

Педерсен (Pedersen E. A.)
1. A decomposition theory for rings of operators. — Diss. Illinois Inst. Technol., 1966.

Пелчинский (Pelczynski A.)
1. A generalization of Stone's theorem on approximation. — Bull. Acad. Polon.-Sci., Cl. **3**, 5 (1957), 105–107.

Петер и Вейль Г. (Peter F., Weyl H.)
1. Полнота системы неприводимых представлений замкнутой непрерывной группы. — УМН **2** (1936), 144–160.

Питт (Pitt H.)
1. General tauberian theorems. — Proc. London. Math. Soc. **47**, 2 (1938), 243–288.
2. A theorem on absolutely convergent trigonometric series. — J. Math. Phys. **16**, 3 (1938), 191–195.

Пич (Pietsch A.)
1. Ядерные локально выпуклые пространства. — М.: Мир, 1967.

Питчер (Pitcher T.)
1. Sets of «positive» functions in H-systems. — Trans. Amer. Math. Soc. **77** (1954), 481–489.

Плеснер А. И.
1. Спектральная теория линейных операторов. — УМН **9** (1941), 3–125.
2. Спектральная теория линейных операторов. — М.: Наука, 1965.

Плеснер А. И. и Рохлин В. А.
1. Спектральная теория линейных операторов. II. — УМН **1**, 1 (1946), 71–191.

Повзнер А. Я.
1. О позитивных функциях на абелевой группе. — ДАН СССР **28** (1940), 294–295.
2. Об уравнениях типа Штурма–Лиувилля и позитивных функциях. — ДАН СССР **43** (1944), 387–391.
3. Об уравнениях типа Штурма–Лиувилля на полуоси. — ДАН СССР **53** (1946), 299–302
4. Об одной общей формуле обращения типа Планшереля. — ДАН СССР **57** (1947), 123–125.
5. О спектре ограниченных функций. — ДАН СССР **57** (1947), 755–758.
6. О спектре ограниченных функций и преобразовании Лапласа. — ДАН СССР **57** (1947), 871–874.
7. О дифференциальных уравнениях типа Штурма–Лиувилля на полуоси. — Матем. сб. **23** (1948), 3–52.

Полищук Е. М.
1. Композиция Вольтерра и нормированные кольца. — Научн. зап. Маг. пед. инст. (1954), 263–269.

Понтрягин Л. С.
1. Über stetige algebraische Körper. — Ann. Math. **33** (1932), 163–174.
2. The theory of topological commutative groups. — Ann. Math. **35** (1934), 361–388.
3. Linear representations of compact topological groups. — Матем. сб. **1** (1936), 267–271.
4. Линейные представления компактных топологических групп. — УМН (1936), 177–195. (Русский перевод статьи [3]).
5. Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой. — Изв. АН СССР, сер. матем., **8** (1944), 243–280.
6. Топологические группы. Изд. 2-е. — М.: Гостехиздат, 1954.

Порта и Шварц (Porta H., Schwartz J.)
1. Representations of the algebra of all operators in Hilbert space and related analytic function algebras. — June 1966, Preprint.

Потапов В. П.
1. О голоморфных ограниченных в единичном круге матрицах-функциях. — ДАН СССР **72** (1950), 849–852.

Прайс (Price J. J.)
1. Some duality theorems. — Illinois J. Math. **1** (1957), 433–445.

Прекопа (Prékopa A.)
1. Extension of multiplicative set functions with values in a Banach algebra. — Acta Math. Acad. Sci. Hung. **7** (1956), 201–213.

Пукански (Pukánszky L.)
1. On a theorem of Mautner. — Acta Sci. Math. **15** (1954), 145–148.
2. The theorem of Radon–Nikodym in operator rings. — Acta Sci Math. **15** (1954), 149–156.

3. On the theory of quasi-unitary algebras. — Acta Sci. Math. **16** (1955), 103–121.
4. Some examples of factors. — Publicationes Mathematical, Debrecen, **4** (1955–1956), 135–156.
5. On the Kronecker products of irreducible representations of the 2×2 real unimodular group. I. — Trans. Amer. Math. Soc. **100**, 1 (1961), 116–152.

Пул (Pool J. C. T.)

1. Mathematical aspects of the Weyl correspondence. — Mathem. Physics of the Weyl correspondence **7**, 1 (1966), 66–76.

Пёрселл (Pursell L. E.)

1. A note on isomorphism of $C(X, R)$ and $C^*(X, R)$. — Bull. Calcutta Math Soc. **49** (1957), 47–48.
2. The ring $C(X, R)$ considered as the subring of the ring of all real-valued functions. — Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 820–821.

Пэли и Винер (Paley R. E. A. C., Wiener N.)

1. Notes on the theory and application of Fourier transforms. I–II. — Trans. Amer. Math. Soc. **35** (1933).
2. Преобразование Фурье в комплексной области. — М.: Наука, 1964.

Рабинович В. С.

1. О группе унитарных операторов в гильбертовом пространстве. — Уч. зап., Ташкент, **37** (1954), 125–130.

Раджагопалан (Rajagopalan M.)

1. L^p-conjecture for locally compact groups. I, II. — Trans. Amer. Math. Soc. **125**, 2 (1966), 216–222; Math. Ann. **169** (1967), 331–339.

Рамасвами (Ramasvami V.)

1. Normed algebras, isomorphism and the associative postulate. — J. Indian Math. Soc. **14** (1950), 47–64.
2. On a theorem of Gelfand and Hille. — J. Indian Math. Soc. **14** (1950), 129–138.

Райков Д. А.

1. О положительно определенных функциях. — ДАН СССР **26** (1940), 857–862.
2. Положительно определенные функции на дискретных коммутативных группах. — ДАН СССР **27** (1940), 325–329.
3. Положительно определенные функции на коммутативных группах с инвариантной мерой. — ДАН СССР **28** (1940), 296–300.
4. Обобщенный закон двойственности для коммутативных групп с инвариантной мерой. — ДАН СССР **30** (1941), 583–585.
5. Новое доказательство единственности меры Хаара. — ДАН СССР **34** (1942), 231–233.
6. Гармонический анализ на коммутативных группах с мерой Хаара и теория характеров. — Труды Матем. ин-та АН СССР им. В. А. Стеклова **14** (1945), 1–86.
7. К теории нормированных колец с инволюцией. — ДАН СССР **54** (1946), 391–394.
8. О различных типах сходимости положительно определенных функций. — ДАН СССР **58** (1947), 1279–1282.

Райт (Wright F. B.)

1. A reduction for algebras of finite type. — Ann. Math. **60** (1954), 560–570.

Рейд (Reid G. A.)
1. A generalization of W^*-algebras. — Pacif. J. Math. **15**, 3 (1965), 1019–1026.

Рейтер (Reiter H.)
1. Investigations in harmonic analysis. — Trans. Amer. Math. Soc. **73** (1952), 401–427.
2. On a certain class of ideals in the L^1-algebra of a locally compact abelian group. — Trans. Amer. Math. Soc. **75** (1953), 505–509.
3. Über L^1-Räume auf Gruppen. I, II. — Monatschefte f. Math. **58** (1954), 73–76; 172–180.
4. Contributions to harmonic analysis. — Acta Math. **96** (1956), 253–263.
5. Beiträge zur harmonichen Analyse. II. — Math. Ann. **133** (1957), 298–302.
6. Contributions to harmonic analysis. III. — J. London. Math. Soc. **32** (1957), 477–483.

Реннисон (Rennison J. F.)
1. A note on the extension of associative product. — Proc. Amer. Math. Soc. **17**, 6 (1966), 1375–1377.

Риккарт (Richart C. E.)
1. Banach algebras with an adjoint operation. — Ann. Math. **47** (1946), 528–550.
2. The singular elements of a Banach algebra. — Duke Math. J. **14** (1947), 1066–1077.
3. The uniqueness of norm problem in Banach algebras. — Ann. Math. **51** (1950), 615–628.
4. Representations of certain Banach algebras of Hilbert space. — Duke Math. J. **18** (1951), 27–39.
5. On spectral permanence for certain Banach algebras. — Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 191–196.
6. General theory of Banach algebras. — Van Nostrand, N. Z., 1960.

Рингроуз (Ringrose J. R.)
1. On subalgebras of a C^*-algebra. — Pacif. J. Math. **15**, 4 (1965), 1377–1382.

Рисс Ф. (Riesz F.)
1. Über Sätze von Stone und Bochner. — Acta Univ. Szeged **6** (1933), 184–198.

Рисс Ф. и Сёкефальви-Надь (Riesz F., Sz.-Nagy B.)
1. Лекции по функциональному анализу. — М.: ИЛ, 1954.

Риффель (Rieffel)
1. Burnside's theorem for representations of Hopf algebras.

Розенберг (Rozenberg A.)
1. The number of irreducible representations of simple rings with no minimal ideals. — Amer. J Math. **75** (1953), 523–530.

Розенблюм (Rosenblum M.)
1. On the operator equation $BX - XA = Q$. — Duke Math. J. **23** (1956) 263–269.

Розенталь (Rozenthal H. P.)
1. Sur les ensembles de Ditkin forts. — C. R. Acad Sci., Paris **262** (1966), 873–876.

Ройден (Royden H.)
1. Some remarks on function algebras. — Stanford Univ. Techn. Report **5** (1957).

2. On a theorem of Wermer's. — Stanford Univ. Tech. Report **9** (1959).
3. Algebras of bounded analytic functions on Riemann surfaces. — Acta Math. **114**, 1–2 (1965), 113–142.

Ролевич (Rolewicz S.)

1. Entire functions in B_0-algebras containing a dense division algebra. — Studia Math. **23** (1963), 181–187.
2. Example of semi-simple m-convex B_0-algebra which is not a projective limit of semi-simple B-algebras. — Bull. Acad Polon. Sci., ser Math: astr. phys., **11**, 7 (1963), 459–462.

Ролевич и Желязко (Rolewicz S., Zelazko W.)

1. Some problems concerning B_0-algebras. — «Tensor» **13** (1963), 269–276.

Ромм Б. Д.

1. Разложение на неприводимые представления тензорного произведения двух неприводимых унитарных представлений вещественной унимодулярной группы второго порядка. — ДАН СССР **153**, 2 (1963), 276–277.

Росси (Rossi H.)

1. The local maximum modulus principle. — Ann. Math. **72**, 2 (1960), 1–11.
2. Algebras of holomorphic functions on one-dimensional varieties. — Trans. Amer. Math. Soc. (1961).

Росси и Штольценберг (Rossi H., Stolzenberg G.)

1. Analytic function algebras. Function Algebras. — Scott–Foresman, Chicago, 1965.

Рохлин В. А.

1. Унитарные кольца. — ДАН СССР **59** (1948), 643–649.

Рудин (Rudin W.)

1. Analyticity and the maximum modulus principle. — Duke Math. J. **20** (1953), 449–458.
2. Some theorems on bounded analytic functions. — Trans. Amer. Math. Soc. **78** (1955), 333–342.
3. The automorphisms and the endomorphisms of the group algebra of the unit circle. — Acta Math. **95** (1956), 39–55.
4. Подалгебры пространств непрерывных функций. Сборник «Некоторые вопросы теории приближений». — М.: ИЛ, 1963.
5. Factorisation in the group algebra of the read line. — Proc. Nat. Acad. Sci. **43** (1957), 339–340.
6. Continuous functions on compact spaces without perfect subsets. — Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 39–42.
7. The closed ideals in an algebra of analytic functions. — Canad. J. Math. **9** (1957), 426–434.
8. Les idéaux fermés dans un anneau de fonctions analytiques. — C. R. Acad. Sci., Paris **244** (1957), 997–998.
9. On the structure of maximum modulus algebras. — Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 708–712.
10. Independent perfect sets in groups. — Michigan Math. J. **5** (1958), 159–161.
11. On isomorphisms of group algebras. — Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), 167–169.
12. Fourier analysis on groups. — Interscience, N. Y., 1962.
13. Ideals with small automorphisms. — Bull. Amer. Math. Soc. **72**, 2 (1965), 339–341.

Румшиский Л. З.
1. О некоторых классах позитивных функций. — ДАН СССР **23** (1941), 105–108.
Руссо и Дэй (Russo B., Dye H. A.)
1. A note on unitary operators in C^*-algebras. — Duke Math. J. **33**, 2 (1966), 413–416.
Рюелль (Ruelle D.)
1. States of physical systems. — Comm. Math. Phys. **3** (1966), 133–150.
Сакаи (Sakai S.)
1. A remark on Mautner's decomposition. — Kôdai Math. Sem. rep. (1952), 107–108.
2. On the representations of semi-simple Lie groups. — Proc. Japan Acad. **30** (1954), 14–18.
3. On infinite-dimensional representations of semi-simple Lie algebras and some functional on the universal enveloping algebras. I. — Proc. Japan Acad. **30** (1954), 305–312.
4. On the group isomorphism of unitary groups in AW^*-algebras. — Tôhoku Math. J. **7** (1955), 87–95.
5. A characterization of W^*-algebras. — Pacif. J. Math. **6** (1956), 763–773.
6. The absolute value of W^*-algebras of finite type. — Tôhoku Math. J. **8** (1956), 70–85.
7. On the σ-weak topology of W^*-algebras. — Proc. Japan Acad. **32** (1956), 329–332.
8. On topological properties of W^*-algebras. — Proc. Japan Acad. **33** (1957), 439–444.
9. On a characterization of type I C^*-algebras. — Bull. Amer. Math. Soc. **72**, 3 (1966), 508–512.
10. On a problem of Calkin. — Amer. J. Math. **88**, 4 (1966), 935–941.
Сакс (Saks S.)
1. Теория интеграла. — М.: ИЛ, 1949.
Самбоан (Samboan G.)
1. Asupra integralei produs. — Bul. stiint. Acad Rep. Pop. Rom., Sect. Mat. Fiz. **9** (1957), 241–246.
Summer school on topological algebra theory. — Bruges, September 6–16, 1966.
Сарозон (Saroson D.)
1. Invariant subspaces and unstared operator algebras. — Pacif. J. Math. **17**, 3 (1966), 511–517.
Сасаки (Sasaki U.)
1. Lattice of projections on AW^*-algebras. — J. Sci. Hiroshima Univ. **A19** (1955), 1–30.
Семадени (Semadeni Z.)
1. Spaces of continuous functions on compact sets. — Adv. in Math. **1**, 3 (1965), 320–382.
Серре (Serre J. P.)
1. Un théorème de dualité. — Comm. Math. Helv. **29** (1955), 9–26.
Сивин (Civin P.)
1. A maximum modulus property of maximal subalgebras. — Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 51–54.

Сивин и Юд (Civin P., Yood B.)
1. Regular Banach algebras with a countable space of maximal regular ideals. — Proc. Amer. Math. Soc. **7**, 6 (1956), 1005–1010.

Сигал (Segal I. E.)
1. The group ring of a locally compact group. I. — Proc. Nat. acad. Sci. **27** (1941), 348–352.
2. Representation of certain commutative Banach algebras. — Bull. Amer. Math. Soc. **52** (1946), 421–422.
3. Irreducible representations of operator algebras. — Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 73–88.
4. The group algebra of a locally compact group. — Trans. Amer. Math. Soc. **61** (1947), 69–105.
5. Postulates for general quantum mechanics. — Ann. Math. **48** (1947), 930–948.
6. Two-sided ideals in operator algebras. — Ann. Math. **50** (1949), 856–865.
7. A kind of abstract integration pertinent to locally compact groups. I. — Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 46.
8. The two-sided regular representation of a unimodular locally compact group. — Ann. Math. **51** (1950), 293–298.
9. An extension of Plancherel's formula to separable unimodular locally compact groups. — Ann. Math. **52**, 2 (1950), 272–292.
10. A class of operator algebras which are determined by groups. — Duke Math. J. **18** (1951), 221–265.
11. Decompositions of operator algebras. I, II. — Memoirs Amer. Math. Soc. **9** (1951).
12. Hypermaximality of certain operators on Lie groups. — Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 13–15.
13. A non-commutative extension of abstract integration. — Ann. Math. **57** (1953), 401–457.
14. Tensor algebras over Hilbert spaces. I–II. — Trans. Amer. Math. Soc. **81** (1956), 106–134; Ann. Math. **63** (1956), 160–175.
15. The structure of a class of representations of the unitary group on a Hilbert space. — Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 197–203.

Сигал и фон Нейман (Segal I. E., von Neumann J.)
1. A theorem on unitary representations of semisimple Lie groups. — Ann. Math. **52** (1950), 509–517.

Смайли (Smiley M. F.)
1. Right H^*-algebras. — Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 1–5.
2. Right annihilator algebras. — Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 698–701.

Смирнов В. И.
1. Курс высшей математики. Т. V. — М.: Физматгиз, 1959.

Смирнов Ю. С.
1. Необходимое и достаточное условие метризуемости топологического пространства. — ДАН СССР **77** (1951), 197–210.

Сонис М. Г.
1. О винеровском соотношении в коммутативных кольцах. — 1 респ. матем. конф. молодых исследователей. Тезисы, вып. II, Киев, 1965, 616–621.
2. О положительных функционалах во вполне симметричных кольцах. — Вестн. Моск. ун-та **4** (1966), 58–65.

С р и н и в а с а н и Ю - К в е й В а н г (S r i n i v a s a n T. P., J u - K w e i W a n g)

1. Weak-star Dirichlet algebras. Functional Algebras. — Proc. Int. Symposium Tulane Univ., 1965, 216–249.

С т а й н с п р и н г (S t i n e s p r i n g W. F.)

1. Positive functions on C^*-algebras. — Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 211–216.
2. Integration theorems for gages and duality for unimodular groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **90** (1959), 15–56.

С т е р м е р (S t ø r m e r E.)

1. On the Jordan structure of C^*-algebras. — Trans. Amer. Math. Soc. **120**, 3 (1965), 438–447.
2. Jordan algebras of type I. — Acta Math. **115**, 3–4 (1966), 165–184.

С т и д ж м е н (S t e g e m a n J.)

1. Extension of a theorem of H. Helson. — Тезисы докл. на Матем. конгр., Москва, 1966, сер. Функциональный анализ, 28.

С т о у н (S t o n e M. H.)

1. Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis. — Amer. Math. Soc., Coll. Publ. XV, N. Y., 1932.
2. On one-parameter unitary groups in Hilbert space. — Ann. Math. **33** (1932), 643–648.
3. Applications of the theory of Boolean rings to general topology. — Trans. Amer. Math. Soc. **41** (1937), 375–481.
4. A general theory of spectra. I. — Proc. Nat. Acad. Sci. **26** (1940), 280–283.
5. The generalized Weierstrass approximation theorem. — Math. Mag. **21** (1948), 167–187; 237–254.
6. Notes on integration. — Proc. Nat. Acad. Sci. **34** (1948), 447–455.
7. On a theorem of Pôlya. — J. Indian Math. Soc. **12** (1948), 1–7.
8. On the theorem of Gelfand–Mazur. — Ann. Soc. Polon. Math. **25** (1952), 238–240.

С т р и ч а р т ц (S t r i c h a r t z R. S.)

1. Icomorphisms of group algebras. — Proc. Amer. Math Soc. **17**, 4 (1966), 858–862.

С у д з у к и (S u z u k i N.)

1. On the invariants of W^*-algebras. — Tôhoku Math. J. **7** (1955), 177–185.
2. On the automorphisms of W^*-algebras leaving the center elementwise invariant. — Tôhoku Math. J. **7** (1955), 186–191.

С у д з у к и и С а и т о (S u z u k i N., S a i t o)

1. On the operators which generate continuous von Neumann algebras. — Tôhoku Math. J. **15**, 3 (1963), 277–280.

С у н о у ш и (S u n o u c h i H.)

1. A characterization of the maximal ideal in a factore of the case (II_∞). — Kodai Math. Sem. Rep. **6** (1957), 7.
2. A characterization of the maximal ideal in a factor. II. — Kôdai Math. Sem. Rep. **7** (1955), 65–66.
3. Infinite Lie rings. — Tôhoku Math. J. **8** (1956), 291–307.

С у х о м л и н о в Г. А.

1. О продолжении линейных функционалов в комплексном и кватернионном линейном пространстве. — Матем. сб. **3** (1938), 353–358.

С я Д о - Ш и н (D o - S h i n S.)
1. Положительные функционалы на алгебрах. — ДАН СССР **121** (1958), 233–235.
2. О полунормированных кольцах с инволюцией. — ДАН СССР **124**, 6 (1959), 1223–1225.
3. О полунормированных кольцах с инволюцией. — Известия АН СССР **23**, 4 (1959), 509–528.

Т а к е д а (T a k e d a Z.)
1. On a theorem of R. Pallu de la Barriére. — Proc. Japan Acad. **28** (1952), 558–563.
2. Note of Fourier–Stieltjes integral. II. — Kodai Math. Sem. Rep. **2** (1953), 33–36.
3. Conjugate spaces of operator algebras. — Proc. Japan Acad. **30** (1954), 90–95.
4. On the representations of operator algebras. — Proc. Japan Acad. **30** (1954), 299–304.
5. On the representations of operator algebras. — Tôhoku Math. J. **6** (1954), 212–219.

Т а к е н у ш и (T a k e n o u c h i O.)
1. On the maximal Hilbert algebras. — Tôhoku Math. J. **3**, 2 (1951), 123–131.
2. Sur une classe de fonctions continues de type positif sur un groupe localement compact. — Math. J. Okayama Univ. (1955), 143–173.
3. Families of unitary operators defined on groups. — Math. J. Okayama Univ. **6** (1957), 171–179.

Т а к е с а к и (T a k e s a k i M.)
1. A duality in representation theory of C^*-algebras.

Т а н н а к а (T a n n a k a S.)
1. Über den Dualität der nichtkommutativen Gruppen. — Tôhoku Math. J. **45** (1938), 1–12.

Т а т с у у м а (T a t s u u m a N.)
1. A duality theorem for locally compact groups. I, II, III. — Proc. Japan Acad. **41** (1965), 878–882; **42** (1966), 46–49, 87–90.

Т е л е м а н (T e l e m a n S.)
1. Sur les algèbres de J. von Neumann. — Bull. Sci. Math. **82** (1958) 117–126.
2. Contribution à l'analyse harmonique sur un groupe topologique qulconque. — C. R. Acad. Sci., Paris **257**, 16 (1963), 2227–2230.

Т и Е н (Y e n, T i)
1. Trace of finite AW^*-algebras. — Duke Math. J. **22** (1955), 207–222.
2. Isomorphism of unitary groups in AW^*-algebras. — Tôhoku Math. J. **8** (1956), 275–280.
3. Quotient algebra of a finite AW^*-algebra. — Pacif. J. Math. **6** (1956), 389–395.
4. Isomorphism of AW^*-algebras. — Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 345–349.

Т и х о н о в А. Н.
1. Über die topologische Erweiterung von Räumen. — Math. Ann. **102** (1929), 544–561.

Т о м а (T h o m a E.)
1. Zur Reductionstheorie in separablen Hilbert–Räumen. — Math. Zeit. **67** (1957), 1–9.

2. Zur Reductionstheorie in allgemeinen Hilbert–Räumen. — Math. Zeit. **68** (1957), 153–188.
3. Die unitären Darstellungen der Bewegungs-gruppe des R^2. — Abst. Short Comm. Int. Congr. Math. Univ. Edinburgh, 1958, 24–25 (см. также Math. Ann. **134** (1958), 428–452).

Томита (Tomita M.)
1. On rings of operators in non-separable Hilbert spaces. — Memoirs Fac. Sci., Kyusyu Univ. **A7** (1953), 129–168.
2. Of the regulary convex hull of a set in a conjugate Banach space. — Math. J. Okayama Univ. **3** (1954), 143–145.
3. Representations of operator algebras. — Math. J. Okayama Univer. **3** (1957), 147–173.
4. Banach algebras generated by a bounded linear operator. — Math. J. Okayama Univ. **4**, 2 (1955), 97–102.

Томияма (Tomiyama J.)
1. On the projection of norm one in W^*-algebras. — Proc. Japan Acad. **33** (1957), 608–612.
2. Generalized dimension function for W^*-algebras of infinite type. — Tôhoku Math. J. **10** (1958), 121–129.

Турпин (Turpin P.)
1. Sur une classe d'algèbres topologiques généralisant les algèbres localement bornées. — Thèse de troistème cycle, Grenoble, 1966.
2. Sur une classe d'algèbres topologiques. — C. R. Acad. Sci., Paris **263**, 14 (1960), 436–439.

Турумару (Turumary T.)
1. On the commutativity of the C^*-algebra. — Kodai Math. Sem. Rep. (1951), 51.
2. On the direct product of operator algebras. I–II, III, IV. — Tôhoku Math. J. **41** (1953), 242–251; **5**, 2 (1953), 1–7; **6** (1954), 208–211; **8** (1956), 281–285.

Тэйлор (Taylor J. L.)
1. The Tomita decomposition of rings of operators. — Trans. Amer. Math. Soc. **113**, 1 (1967), 30–39.

Уилкин (Wilken D. R.)
1. Local behavior in function algebras. — Doct. diss. Tulane Univ. 1965, 56 p.; Dissert. Abst. **26**, 4 (1965), 2243–2244.

Уитни (Whitney H.)
1. Идеалы в кольце дифференцируемых функций. — Математика **10**, 4 (1966).

Умэгаки (Umegaki H.)
1. On some representation theorems in an operator algebra. I–III. — Proc. Japan Acad. **27** (1951), 328–333, 501–505; **28** (1952), 29–31.
2. Operator algebra of finite class. I, II. — Kodai Math. Sem. Rep. (1952), 123–129; (1953), 61–63.
3. Decomposition theorems of operator algebra and their applications. — Japan J. Math. **22** (1952/53), 27–50.
4. Ergodic decomposition of stationary linear functionals. — Proc. J. Acad. **30** (1957), 358–362.
5. Note on irreducible decomposition of a positive linear functional. — Kodai Math. Sem. Rep. **4** (1957), 25–32.

6. Positive definite functions and direct product Hilbert space. — Tôhoku Math. J. **7** (1955), 206–211.
7. Conditional expectation in an operator algebra. II. — Tôhoku Math. J. **8** (1956), 86–100.
8. Weak compactness in an operator space. — Kodai Math. Sem. Rep. **8** (1956), 145–151.

Урбаник (Urbanik K.)
1. On quotient — fields generated by pseudonormed rings. — Studia Math. **15** (1955), 31–33.

Уоделл (Wadell M. C.)
1. Properties of regular rings. — Duke Math. J. **19** (1952), 623–627.

Уолш Б. (Walsh B.)
1. Banach algebras of scalar-type elements. — Proc. Amer. Math. Soc. **16**, 6 (1965), 1167–1170.

Уолш И. (Walsh J. L.)
1. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. — М.: ИЛ, 1961.

Фаге М. К
1. Спектральные многообразия ограниченного линейного оператора в гильбертовом пространстве. — ДАН СССР **58** (1947), 1609–1612.

Фаглид и Кейдисон (Fuglede B., Kadison R. V.)
1. On a conjecture on Murray and von Neumann. — Proc. Nat Acad. Sci. **37** (1951), 420–425.
2. On determinants and a property of a trace in finite factors. — Proc. Nat. Acad. Sci. **37** (1951), 425–431.
3. Determinant theory in finite factors. — Ann. Math. **55** (1952), 510–530.
4. Function Algebras. — Proc. Int. Symposium on Function Algebras, Tulane Univ., 1965.

Фантапье (Fantappie L.)
1. Calcolo degli autovalori e delle autofunzioni degli operatori osservabili su un gruppo compatto. — Archiv Math. **5** (1957), 292–300.
2. Calcola degli autovalori e autoiunzioni degli operatori «fisici» su un gruppo topologico compatto. — Proc. Int. Congr. Math. Amsterdam **2** (1954), 98–100.

Фарелл (Farrell R. N.)
1. Dense algebras of functions in L_p. — Proc. Amer. Math. Soc. **13**, 2 (1962), 324–328.

Фелдман Дж. (Feldman J.)
1. Embedding of AW^*-algebras. — Duke Math. J. **23** (1956), 303–307.
2. Some connections between topological and algebraic properties in rings of operators. — Duke Math. J. **23** (1956), 365–370.
3. Isomorphisms of finite type II rings of operators. — Ann. Math. **63** (1956), 656–571.
4. Nonseparability of certain finite factors. — Proc. Amer. Math. Soc. **7** (1956), 23–26.

Фелдман Ч. (Feldman C.)
1. The Wedderburn principal theorem in Banach algebras. — Proc. Amer. Math. Soc. **2** (1951), 771–777.

Фелдман Дж. и Кейдисон (Feldman J., Kadison R.)
1. The closure of the regular operators in a ring of operators. — Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), 909–916.
Фелдман Дж. и Фелл (Feldman J., Fell J. M. G.)
1. Separable representations of rings of operators. — Ann. Math. **65** (1957), 241–249.
Фелл (Fell J. M. G.)
1. Representations of weakly closed algebras. — Math. Ann. **133** (1957), 118–126.
2. The structure of algebras of operator fields. — Acta Math. **106** (1961), 233–280.
3. The dual spaces of Banach algebras. — Trans. Amer. Math. Soc. **114**, 1 (1965), 227–250.
Фелл и Гарднер (Fell J., Gardner M.)
1. Non-unitary dual spaces of semisimple Lie group. — Тезисы докл. на Матем. конгр., Москва, 1966, сер. Функциональный анализ, 11.
Фелл и Келли (Fell J., Kelley J. L.)
1. An algebra of unbounded operators. — Proc. Nat. Acad. Sci. **38** (1952), 592–598.
Фелл и Тома (Fell J., Thoma E.)
1. Einige Bemerkungen über vollsymmetrische Banachsche Algebren. — Archiv Math. **12**, 1 (1961), 69–70.
Фелпс (Phelps R. R.)
1. Lectures on Choquet's theorem. — N. Y., 1966.
Фёльнер (Følner E.)
1. Becicovitch almost periodic functions in arbitrary groups. — Math. Scand. **5** (1957), 47–53.
Фига-Таламанка (Figa-Talamanca A.)
1. Multipliers of p-integrable functions. — Bull. Amer. Math. Soc. **70** (1967), 666–699.
2. Translation invariant operators in L^p. — Duke Math. J. **32**, 3 (1965), 495–501.
Фига-Таламанка и Ридер (Figa-Talamanca A., Rider D.)
1. A theorem of Littlewood and lacunary series for compact groups. — Pacif. J. Math. **16** (1966), 505–514.
Филиппи (Filippi M.)
1. Variete de non-synthese spectrale sur un group abelian localement compact. — Israel J. Math. **3**, 1 (1965), 43–60.
Фрейндлих (Freundlich M.)
1. Completely continuous elements of a normed ring. — Duke Math. J. **16** (1949), 273–283.
Фриш (Frisch J.)
1. Fonctions analytiques sur un ensemble semianalytique. — C. R. Acad. Sci., Paris **260**, 11 (1965), 2974–2976.
Фойяш (Foiaş C.)
1. Elementi completamente continui e quasi-completamente continui di un' algebra di Banach. — Atti Accad. Naz. Lincie, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. **20** (1956), 1955–1960.

Ф о р е л л и (F o r e l l i P.)
1. Homomorphisms of ideals in group algebras. — Illinois J. Math. **9** (1965), 410–417.
Ф у д з и в а р а (F u j i w a r a K.)
1. Sur les anneaux des fonctions continues a support compact. — Math. J. Okayama Univ. **3** (1954), 175–184.
Ф у к а м и я (F u k a m i y a M.)
1. On B^*-algebras. — Proc. Japan Acad. **27** (1951), 321–327.
2. On a theorem of Gelfand and Neumark and the B^*-algebra. — Kumamoto J. Sci., ser. A, **1**, 1 (1952), 17–22.
Ф у к а м и я, М и с о н о у и Т а к е д а (F u k a m i y a M., M i s o n o u Y., T a k e d a Z.)
1. On order and commutativity of B^*-algebra. — Tôhoku Math. J. **6** (1954), 89–93.
Ф ю р с т е н б е р г (F u r s t e n b e r g H.)
1. Translation invariant cones of functions on semi-simple Lie groups. — Bull. Amer. Math. Soc. **71**, 2 (1965), 271–326.
Х а а р (H a a r A.)
1. Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen. — Ann. Math. **34**, 2 (1933), 147–169.
Х а л и л о в З. И.
1. Линейные сингулярные уравнения в нормированных кольцах. — ДАН СССР **58** (1947), 1613–1616.
Х а л м о ш (H a l m o s P. R.)
1. Теория меры. — М.: ИЛ, 1953.
Х а н (H a h n H.)
1. Über lineare Gllichungssysteme in linearen Räumen. — J. reine angew. Math. **157** (1927), 214–229.
Х а р и ш - Ч а н д р а (H a r i s h - C h a n d r a)
1. Representations of semisimple Lie groups on a Banach space. I–VI. — Proc. Nat. Acad. Sci. **37** (1951), 170–173; 362–365; 366–369; 691–697; **40** (1954), 1076–1077; 1078–1080.
2. Plancherel formula for complex semisimple Lie groups. — Proc. Nat. Acad. Sci. **37** (1951), 813–818.
3. Plancherel formula for the 2×2 real unimodular group. — Proc. Nat. Acad. Sci. **38** (1952), 337–342.
4. Representations of semisimple Lie groups. I, II, III. — Trans. Amer. Math. Soc. **75** (1953), 185–243; **76** (1954), 26–65; 234–253.
5. The Plancherel formula for complex semisimple Lie groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **76** (1954), 485–528.
6. On the Plancherel formula for the right-invariant functions on a semisimple Lie group. — Proc. Nat. Acad. Sci. **40** (1954), 200–204.
7. On the characters of a semisimple Lie group. — Bull. Amer. Math. Soc. **61** (1955), 389–396.
8. Integrable and square-integrable representations of a semisimple Lie group. — Proc. Nat. Acad. Sci. **41** (1955), 314–317.
9. The characters of semisimple Lie groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **83** (1956), 98–163.
10. Invariant differential operators on a semisimple Lie algebra. — Proc. Nat. Acad. Sci. **42** (1956), 252–253.

11. A formula for semisimple Lie groups. — Proc. Nat. Acad. Sci. **42** (1956), 538–540.
12. Representations of semisimple Lie groups. VI. Integrable and square-integrable representations. — Amer. J. Math. **78** (1956), 564–628.
13. Differential operators on a semisimple Lie algebra. — Amer. J. Math. **79** (1957), 87–120.
14. Fourier transforms on a semisimple Lie algebra, I–II. — Amer. J. Math. **79** (1957), 193–257; 653–686.
15. Spherical functions on a semisimple Lie group. — Proc. Nat. Acad. Sci. **43** (1957), 408–409.

Хартман (Hartman S.)
1. Quelques remarques sur les expansions de Fourier. — Studia Math. **17** (1957), 200–208.

Харгман и Минусинский (Hartman S., Mikusinski J.)
1. Teoria miary i catki Lebesgue'a. — PWN, Warzawa, 1957.

Хаузнер (Hausner A.)
1. Ideals in a certain Banach algebra. — Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 246–249.

Хаусдорф (Hausdorff F.)
1. Теория множеств. — М.–Л.: ГТТИ, 1937.

Хебле (Heble M. P.)
1. The semigroup algebra and representations of a compact simple semigroup. — J. Math. Analys. and appl. **12** (1965), 263–300.

Хейдер (Heider L. J.)
1. Directed limits on rings of continuous functions. — Duke Math. J. **23** (1956), 293–296.

Хелгасон (Helgason S.)
1. The derived algebra of a Banach algebra. — Proc. Nat. Acad. Sci. **40** (1957), 994–995.
2. Multipliers of Banach algebras. — Ann. Math. **64** (1956), 240–254.

Хелемский А. Я.
1. О коммутативных нормированных кольцах с конечномерным радикалом. — Вестн. Моск. ун-та, сер. матем.-мех., **6** (1964), 7–16.
2. Описание аннуляторных коммутативных банаховских алгебр. — ДАН СССР **157**, 1 (1964), 60–62.
3. Аннуляторные расширения коммутативных банаховских алгебр. — Известия АН СССР, сер. матем., **29**, 4 (1965), 945–956.
4. Об одном аналитическом условии на радикал коммутативной банаховской алгебре и связанных с ним вопросах разложимости. — ДАН СССР **167**, 3 (1966), 525–527.

Хельсон (Helson H.)
1. Spectral synthesis of bounded functions. — Arkiv Mat. **1** (1952), 497–502.
2. On the ideal structure of group algebras. — Arkiv Mat. **2** (1952), 83–86.
3. Isomorphisms of abelian group algebras. — Arkiv Mat. **2** (1953), 475–487.
4. Lectures on invariant subspaces. — Academic Press, N. Y.–London, 1964.
5. Compact groups with ordered duals. — Proc. London Math. Soc. **A14** (1965), 144–156.

Хельсон и Кахан (Helson H., Kahane J. P.)
1. Sur les fonctions opérant dans les algèbres de transformées de Fourier de suites ou de fonctions sommables. — C. R. Acad. Sci., Paris **247** (1958), 626.

Хельсон и Квигли (Helson H., Quigley F.)
1. Maximal algebras of continuous functions. — Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 111–114.
2. Existence of maximal ideals in algebras of continuous functions. — Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 115–119.

Хенриксен (Henriksen M.)
1. On the ideal structure of the ring of entire functions. — Pacif. J. Math. **2** (1952), 179–184.

Хиа Дао-Хинг (Xia Dao-Xing (Hsia Tao-Hsing))
1. On locally bounded topological algebras. — Acta Math. Sinica **14** (1964), Chinise Math. **5** (1964), 261–276.

Хилле (Hille E.)
1. On the theory of characters of groups and semi-groups in normed vector rings. — Proc. Nat. Acad. Sci. **30** (1944), 58–60.
2. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1951.
3. On roots and logarithms of elements of a complex Banach algebra. — Math. Ann. **136** (1958), 46–57.

Хилле и Филлипс (Hille E., Phillips R.)
1. Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962.

Хинрич (Hinrich L. H.)
1. Open ideals in $C(X)$. — Pacif. J. Math. **14**, 4 (1964), 1255–1263.

ван Хов (van Hove L.)
1. L'ensemble des fonctions analytiques sur un compact en tant qu'algèbre topologique. — Bull. Soc. Math. Belgique (1952), 8–17.

Холладэй (Holladay J. C.)
1. A note on the Stone–Weierstrass theorem for quaternious. — Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 656–657.

Хонго (Hongo E.)
1. On quasi-unitary algebras with semi-finite left rings. — Bull. Kyusyu Inst. Technol., Math. Nat. Sci. **3** (1957), 1–10.

Хонго и Орихара (Hongo E., Orihara M.)
1. A remark on a quasi-unitary algebra. — Yokohama Math. J. **2** (1957), 69–72.

Хохшильд (Hochschild G.)
1. On the cohomology groups of an associative algebra. — Ann. Math. **46** (1945), 58–68.

Хургин Я. И.
1. О подкольцах кольца непрерывных функций в круге. — Уч. зап. МГУ, сер. матем., **3** (1950).

Хургин Я. И. и Щетинин Н. И.
1. О замкнутых подкольцах кольца функций с n непрерывными производными. — ДАН СССР **29** (1940), 288–291.

Хьюит (Hewitt E.)
1. Certain generalizations of the Weierstrass approximation theorem. — Duke Math. J. **14** (1947), 419–427.

2. Rings of real-valued continuous functions. I. — Trans. Amer. Math. Soc. **64** (1948), 45–99.
3. A note on normed algebras. — Ann. Acad. Brasil. Ci. **22** (1950), 171–174.
4. Fourier transforms of the class L_p. — Arkiv Mat. **2** (1954), 571–574.
5. A survey of abstract harmonic analysis. — Some aspects of analysis and probability, N. Y., 1958, 107–168. (Русский перевод: «Математика» **4**, 4 (1960), 75–133.)

Хьюит и Вигнер (Hewitt E., Wigner E. P.)
1. On a theorem of Magnus. — Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 740–744.

Хьюит и Росс (Hewitt E., Ross K.)
1. Abstract harmonic analysis. Vol. 1. — Springer, Berlin, 1963.

Хьюит и Цукерман (Hewitt E., Zuckerman H.)
1. The l_1-algebra of a commutative semi-group. — Trans. Amer. Math. Soc. **83** (1956), 70–97.

Цаанен (Zaanen A.)
1. Linear analysis. Measure and integral, Banach and Hilbert space, linear integral equations. — Noordhoff, Groningen, 1953.

Целлер-Мейер (Zeller-Meier Q.)
1. Produit croisés d'une C-algèbre par un groupe d'automorphismes. — C. R. Acad. Sci., Paris **263**, 1 (1966), 20–23.

Цернер (Zerner M.)
1. Fonctionnelles propres des operateurs sur les espaces nucleaires. — Summer school on topological algebra theory, Bruges, 1966, 186–232.

Цесельский и Семадени (Ciesielsky Z., Semadeni Z.)
1. Przeglad niektórych nowzych metod w teorii potencjala. I, II. — Rocziki Polsk. Tow. Matem., ser. I, Prace Matem. **VIII** (1967), 147–191; **IX** (1965), 149–168.

Цорн (Zorn M.)
1. A remark on method in transfinite algebra. — Bull. Amer. Math. Soc. **41** (1935), 667–670.

Цудзи (Tsuji K.)
1. N^*-algebras and finite class group. — Bull. Kyusyu Inst. Technol., Math. Nat. Sci. **1** (1955), 1–9.
2. Representations theorems of operator algebra and their applications. — Proc. Japan Acad. **31** (1955), 272–277.
3. Harmonic analysis on locally compact groups. — Bull. Kyusyu Inst. Technol., Math. Nat. Sci. **2** (1956), 16–32.
4. W^*-algebras and abstract (L)-spaces. — Bull. Kyusyu Inst. Technol., Math. Nat. Sci. **3** (1957), 11–13.
5. ω-almost periodic functions on arbitrary groups. — Bull. Kyusyu Inst. Technol., Math. Nat. Sci. **4** (1958), 7–14.
6. Tensor product of annihilating spaces. — Bull. Kyusyu Inst. Technol., Math. Nat. Sci. **10** (1963), 15–18.
7. Annihilator of W^*-algebras annihilating spaces. — Bull. Kyusyu Inst. Technol., Math. Nat. Sci. **10** (1963), 25–39.
8. The J. von Neumann commutation Theorem. — Bull. Kyusyu Inst. Technol. **13** (1966), 1–3.

Чех (Ĉech E.)
1. On bicompact spaces. — Ann. Math. **38**, 2 (1937), 823–844.

Шарк (Schark I. J.)

1. The maximal ideals in an algebra of bounded analytic functions. — J. Math. and Mech. **10**, 5 (1961).

Шарль (Charles B.)

1. Sur certains anneaux commutatifs d'operateurs linéaires. — C. R. Acad. Sci., Paris **236** (1953), 990.
2. Sur l'algèbre des opérateurs linéaires. — J. Math. Pures et Appl. **33** (1954), 81–145.

Шатц (Schatz J. A.)

1. Representation of Banach algebras with involution. — Canad. J. Math. **9** (1957), 435–442.

Шварц Дж. (Schwartz J.)

1. Two finite, non-hyperfinite, non-isomorphic factors. — Comm. Pure and Appl. Math. **16**, 1 (1963), 19–26.
2. Non-isomorphism of a pair of factors of type III. — Comm. Pure and Appl. Math. **16**, 2 (1963), 111–120.

Шварц Л. (Schwartz L.)

1. Sur une propriété de synthése spectrale dans les groups non compacts. — C. R. Acad. Sci., Paris **227** (1948), 424–426.
2. Théorie des distributions. I, II. — Paris 1950; 1951.

Шевалле и Фринк (Chevalley C., Frink O.)

1. Bicompactness of cartesian products. — Bull. Amer. Math. Soc. **47** (1941), 612–614.

Шерман С. (Sherman S.)

1. The second adjoint of a C^*-algebra. — Proc. Int. Congr. Math., Cambridge, **1** (1950), 470.
2. Order in operator algebra. — Amer. J. Math. **73** (1951), 227–232.

Шерман Т. (Sherman T.)

1. A weight theory for unitary representation. — Canad. J. Math. **18**, 1 (1960), 159–168.

Шига (Shiga K.)

1. Representations of a compact group on a Banach space. — J. Math. Soc. Japan **7** (1955), 224–248.
2. Bounded representations on a topological vector space and weak almost periodicity. — Japan J. Math. **25** (1955), 21–35.

Шилов Г. Е.

1. Идеалы и подкольца кольца непрерывных функций. — ДАН СССР **22** (1939), 7–10.
2. К теории идеалов в нормированных кольцах функций. — ДАН СССР **27** (1940), 900–903.
3. О расширении максимальных идеалов. — ДАН СССР **29** (1940), 83–85.
4. О некоторых нормированных кольцах. Сб. научн. студ. работ МГУ **18** (1940), 5–25.
5. О регулярных нормированных кольцах. — Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова **31** (1947), 1–118.
6. О нормированных кольцах с одной образующей. — Матем. сб. **31** (1947), 25–47.
7. Пример континуальной системы примарных идеалов в кольце функций. — Уч. зап. МГУ (1947).
8. Об одном свойстве колец функций. — ДАН СССР **58** (1947), 985–988.

9. Кольца типа C. — ДАН СССР **66** (1949), 813–816.
10. Кольца типа C на прямой и на окружности. — ДАН СССР **66** (1949), 1063–1066.
11. Об одной теореме И. М. Гельфанда и ее обобщениях. — ДАН СССР **72** (1950), 641–644.
12. Описание одного класса нормированных колец функций. — Матем. сб. **26** (1950), 291–310.
13. О непрерывных суммах конечномерных колец. — Матем. сб. **27** (1950), 471–484.
14. Однородные кольца функций. — УМН **6** (1951), 31–137.
15. О кольцах функций с равномерной сходимостью. — Укр. матем. ж. **3** (1951), 404–411.
16. Об однородных кольцах функций на торе. — ДАН СССР **87** (1952), 681–684.
17. О кольцах функций на n-мерном торе. — Матем. зб. Київськ. держ. ун-ту **6** (1952), 17–23.
18. О разложении коммутативного нормированного кольца в прямую сумму идеалов. — Матем. сб. **32** (1953), 353–364.
19. Критерий компактности в однородном пространстве функций. — ДАН СССР **92** (1953), 11–12.
20. О некоторых задачах общей теории коммутативных нормированных колец. — УМН **12**, 1 (1957), 246–249.
21. Об аналитических функциях в нормированном кольце. — УМН **15**, 3 (1960).
22. О локально аналитических функциях [К статье автора «Об аналитических функциях в нормированном кольце», в журн. «Успехи матем. наук», т. 15, № 3, 1960. Письмо в ред.]. — УМН **31**, 6 (1966), 177–182.

Хирота (Shirota T.)
1. On ideals in rings of continuous functions. — Proc. Japan Acad. **30** (1954), 85–89.

Шмульян В. Л.
1. О мультипликативных линейных функционалах в некоторых специальных нормированных кольцах. — ДАН СССР **26** (1940), 13–16.

Шноль Э. Э.
1. Структура идеалов в кольцах R_α. — Матем сб. **27** (1950), 143–146.
2. Замкнутые идеалы в кольце непрерывно дифференцируемых функций. — Матем. сб. **27** (1950), 281–284.

Шрейдер Ю. А.
1. Строение максимальных идеалов в кольцах мер со сверткой. — Матем. сб. **27** (1950), 297–318.

Штольценберг (Stolzenberg Q.)
1. A maximal ideal space with no analytic structure. — J. Math. and Mech. **12** (1963), 103–111.
2. Polynomially and rationally convex sets. — Acta Math. **109** (1963), 259–289.
3. Uniform approximation on smooth curves. — Acta Math. **115** (1966), 185–198.

Шэттен (Schatten R.)
1. A theory of cross-spaces. — Ann. Math. Studies **26**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1950.

Эберлейн (Eberlein W. F.)

1. A note on Fourier–Stieltjes transform. — Proc. Amer. Math. Soc. **6** (1955), 310–312.
2. Spectral theory and harmonic analysis. — Proc. Symp. Spectral Theory and Differential Problems, Oklahoma, 1955, 209–219.

Эдвардс (Edwards R. E.)

1. Multiplicative norms on Banach algebras. — Proc. Cambridge Phil. Soc. **47** (1951), 473–474.
2. On functions which are Fourier transforms. — Proc. Amer. Math. Soc. **5** (1954), 71–78.
3. Note on two theorems about function algebras. — Mathematika London **4** (1957), 138–139.
4. Bounded functions and Fourier transforms. — Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 440–446.
5. Bipositive and isometric isomorphisms of some convolution algebras. — Canad. J. Math. **17** (1965), 839–846.
6. Operators commuting with translations. — Pacif. J. Math. **16**, 2 (1966), 259–265.

Эдвардс и Хьюит (Edwards R. E., Hewitt E.)

1. Pointwise limits for sequences of covolution operators. — Acta Math. **113**, 3–4 (1965), 181–218.

Эллиот (Elliott R. J.)

1. Some results in spectral synthesis. — Proc. Cambridge Phil. Soc. **61**, 2 (1965), 395–424.
2. Two notes on spectral synthesis of discrete Abelian groups. — Proc. Cambridge Phil. Soc. **61**, 2 (1965), 617–620.
3. Analytic functions in locally convex algebras. — Proc. London Math. Soc. **16**, 2 (1966), 321–341.

Эмброз (Ambrose W.)

1. Spectral resolution of groups of unitary operators. — Duke Math. J. **11** (1944), 589–595.
2. Structure theorems for a special class of Banach algebras. — Trans. Amer. Math. Soc. **57** (1945), 364–386.
3. The L_2-system of a unimodular group. — Trans. Amer. Math. Soc. **65** (1949), 27–48.

Эренпрайз и Маутнер (Ehrenpreis L., Mautner F.)

1. Some properties of the Fourier transform on semi-simple Lie groups. I, II. — Ann. Math. **61** (1955), 406–439; Trans. Amer. Math. Soc. **84** (1957), 1–55.
2. Uniformly bounded representations of groups. — Proc. Nat. Acad. Sci. **41** (1955), 231–233.

Эрнест (Ernest J. A.)

1. A decomposition theory for unitary representations of locally compact groups. — Trans. Amer. Math. Soc. **104** (1962), 252–277.
2. Notes on the duality theorem of non-commutative noncompact topological groups. — Tôhoku Math. J. **15** (1963), 182–186.
3. A new group algebra for locally compact groups. I, II. — Amer. J. Math. **86** (1964), 467–492; Canad. J. Math. **17** (1965), 604–615.
4. The representation lattice of a locally compact group. — Illinois J. Math. **10**, 1 (1966), 127–133.

5. The big group algebra. — Тезисы докл. на Матем конгр., Москва, 1966, сер. Функциональный анализ, 11.

Эфрос (Effros E. G.)

1. A decomposition theory for representations of C^*-algebras. — Trans. Amer. Math. Soc. **107**, 1 (1963), 83–106.
2. Order ideals in a C^*-algebras and its dual. — Duke Math. J. **30**, 3 (1963), 391–411.
3. The Borel space of von Neumann algebras on a separable Hilbert space. — Pacif. J. Math. **15**, 4 (1965), 1153–1164.

Юд (Yood B.)

1. On ideals in operator rings over Banach spaces. — Bull. Amer. Math. Soc. **53** (1947), 281.
2. Banach algebras of bounded functions. — Duke Math. J. **16** (1949), 151–163.
3. Transformations between Banach spaces in the uniform topology. — Ann. Math. **50** (1949), 486–503.
4. Banach algebras of continuous functions. — Amer. J. Math. **73** (1951), 30–42.
5. Topological properties of homomorphisms between Banach algebras. — Amer. J. Math. **76** (1954), 155–167.
6. Difference algebras of linear transformations on a Banach space. — Pacif. J. Math. **4** (1957), 615–636.
7. Periodic mappings on Banach algebras. — Amer. J. Math. **77** (1955), 17–28.
8. Faithful representations of normed algebras. — Pacif. J. Math. **10**, 1 (1960), 345–363.

Янков В.

1. Об униформизации A и B множеств. — ДАН СССР **30** (1941), 591–592.

Дополнения при корректуре

Баде и Кёртис (Bade W. G., Curtis P. C.)

1*. Embedding theorems for commutative Banach algebras. — Pacif. J. Math. **18**, 3 (1966), 391–409.

Вовден (Vowden B. J.)

1*. On the Gelfand–Neumark theorem. — J. London Math. Soc. **42**, 4 (1967), 725–731.

Гордон (Gordon H.)

1*. The maximal ideal space of a ring of measurable functions. — Amer. Math. J. **88**, 4 (1966), 827–843.

Горин Е. А., Лин В. Я.

1*. Об одном условии на радикал банаховой алгебры, обеспечивающем сильную разложимость. — Математич. заметки **2**, 6 (1967), 589–592.

Грамш (Gramsch B.)

1*. Eine Idealstruktur Banachscher Operatorenalgebra. — J. reine and angew. Math. **225** (1967), 97–115.

Джонсон (Johnson B. E.)

1*. A commutative semisimple annihilator Banach algebra which is not dual. — Bull. Amer. Math Soc. **73**, 3 (1967), 407–409.

2*. The uniqueness of the (complete) norm topology. — Bull. Amer. Math. Soc. **73**, 4 (1967), 537–539.

Домбре (Dhombres J.)

1*. Caracterisation d'une classe de transformation semi-multiplicatives. — C. R. Acad. Sci., Paris **264** (1967), A–113–116.

Дункан (Duncan J.)

1*. The continuity of the involution on Banach'-algebras. — J. London. Math. Soc. **41**, 4 (1966), 701–706.

Мюллинс (Mullins R. E.)

1. The essential set of function algebras. — Proc. Amer. Math. Soc. **18**, 2 (1967), 271–273.

Пауэрс (Powers R. T.)

1. Representations of uniformly hyperfinite algebras and von Neumann rings. — Ann. Math. **86**, 1 (1967), 138–171.

Пелчинский (Pelczynski A.)

1. Uncomplemented function algebras with separable. — Math. J. **33**, 3 (1966), 605–612.

Раджисвара и Рао К. (Rajeswara, Rao K. V.)

1. On a generalised corona problem. — J. Analyse Math. **18** (1967), 277–278.

Рейнуотер (Reinwater J.)

1. A remark on regular Banach algebras. — Proc. Amer. Math. Soc. **18**, 2 (1967), 255–256.

Эйдлин

1*. О топологической характеристике пространства максимальных идеалов банаховой алгебры. — Вестн. Ленингр. ун-та **13** (1967), 173–174.

Именной указатель

Предметный указатель

Готический алфавит

𝔄 𝔞	—	A a	𝔑 𝔫	—	N n
𝔅 𝔟	—	B b	𝔒 𝔬	—	O o
ℭ 𝔠	—	C c	𝔓 𝔭	—	P p
𝔇 𝔡	—	D d	𝔔 𝔮	—	Q q
𝔈 𝔢	—	E e	ℜ 𝔯	—	R r
𝔉 𝔣	—	F f	𝔖 𝔰	—	S s
𝔊 𝔤	—	G g	𝔗 𝔱	—	T t
ℌ 𝔥	—	H h	𝔘 𝔲	—	U u
ℑ 𝔦	—	I i	𝔙 𝔳	—	V v
𝔍 𝔧	—	J j	𝔚 𝔴	—	W w
𝔎 𝔨	—	K k	𝔛 𝔵	—	X x
𝔏 𝔩	—	L l	𝔜 𝔶	—	Y y
𝔐 𝔪	—	M m	ℨ 𝔷	—	Z z

Научное издание

НАЙМАРК Марк Аронович

НОРМИРОВАННЫЕ КОЛЬЦА

Редактор *И.Л. Легостаева*
Оригинал-макет: *Д.А. Воробьев*
Оформление переплета: *А.В. Андросов*

Подписано в печать 08.11.10. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 43. Уч.-изд. л. 47,3. Тираж 100 экз.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано в ППП «Типография «Наука»
121099, г. Москва, Шубинский пер., 6

ISBN 978-5-9221-1273-4