СПРАВОЧНИК

КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК СТУДЕНТА

СБОРНИК ОСНОВНЫХ ФОРМУЛ

по аналитической геометрии и линейной алгебре

КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК СТУДЕНТА

Краткий справочник студента

Сборник основных формул по аналитической геометрии и линейной алгебре

АСТ • Астрель • Полиграфиздат
Москва

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73
С23

Автор-составитель
В.В. СТАНЦО

С23 **Сборник основных формул по аналитической геометрии и линейной алгебре / авт.-сост. В.В. Станцо. – М.: АСТ: Астрель: Полиграфиздат, 2011. – 222, [2]с.: ил. – (Краткий справочник студента).**
ISBN 978-5-17-071839-9 (ООО «Издательство АСТ»)
ISBN 978-5-271-32939-5 (ООО «Издательство АСТ»)
ISBN 978-5-4215-1838-9 (ООО «Полиграфиздат»)

В справочнике приведены все основные формулы вузовского курса аналитической геометрии и линейной алгебре.

Пособие предназначено для студентов и преподавателей технических вузов.

УДК 51(075.8)
ББК 22.1я73

**Подписано в печать 15.01.2011. Формат 60x90/ 32.
Усл. печ. л. 7,0. Тираж 4 000 экз. Заказ № СБ 2121.**

ISBN 978-5-17-071839-9 (ООО «Издательство АСТ»)
ISBN 978-5-271-32939-5 (ООО «Издательство АСТ»)
ISBN 978-5-4215-1838-9 (ООО «Полиграфиздат»)

Содержание

Раздел 2

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ

Раздел 3

УРАВНЕНИЯ ЛИНИЙ И ПОВЕРХНОСТЕЙ

Раздел 4

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Раздел 5
ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

От составителя

В настоящее время интенсивность преподавания математики в вузах выросла настолько, что большинство первокурсников, «выучивая» материал последнего занятия, начисто забывают, что было на предпоследнем. Поэтому растет потребность в справочниках-шпаргалках, по которым можно освежить и сгруппировать знания, полученные и забытые некоторое время назад.

Использование формул и методов алгебры (а в алгебраических расчетах именно методы выходят на первый план) требует хотя бы кратких сведений о таких отвлеченных понятиях как линейная зависимость, базис, ранг и т.д. Описанию этих понятий и взаимосвязей между ними посвящена значительная часть книги. В необходимых случаях приведены примеры.

Материал, в основном, сгруппирован так, как это принято в курсах аналитической геометрии и линейной алгебры в технических и экономических вузах (в частности, на факультете «Инженерный бизнес и менеджмент» МГТУ им. Н.Э. Баумана). При составлении сборника использовано большое количество первоисточников, но в наибольшей степени составитель ориентировался на три классических работы:

1. М.Я. Выгодский. «Справочник по высшей математике»;

2. «Сборник задач по математике для втузов» (под ред. А.В. Ефимова и Б.П. Демидовича);

3. «Высшая математика для экономистов» (под ред. Н.Ш. Кремера).

Составитель стремился к тому, чтобы материал каждого раздела можно было читать, имея только самые общие представления о материале предыдущих разделов. В самых важных ситуациях сделаны ссылки на предыдущие параграфы. А иногда и на последующие — главным образом, для того, чтобы ответить на возможный вопрос читателя: «Зачем это надо?»

Курсивом выделены понятия, определяемые в данном предложении. **Жирным**

шрифтом — названия важнейних теорем (например: **Основная теорема алгебры**) или словосочетания в середине предложения, которые **никак нельзя оставить** без внимания читателя.

Если объект имеет несколько названий, первым приводится наиболее употребительное. Другие названия [синонимы] перечислены в квадратных скобках. Использование круглых скобок (помимо их обычной роли знаков препинания) может означать параллельное изложение двух однотипных утверждений. Например, многие свойства матриц сформулированы для их строк (столбцов).

Теоретико-множественные и логические символы (такие как $\in$, $\Leftrightarrow$) употребляются в их обычных значениях. Знак ■ означает конец примера. Знак (!) – ОБРАТИТЕ ВНИМАНИЕ!

Раздел 1

МАТРИЦЫ И СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1.1. Арифметические векторы

Арифметическим вектором размерности n [n-мерным арифметическим вектором] называется упорядоченный набор n действительных чисел

$$\bar{a} = (a_1; a_2; ...; a_n).$$

Числа a_1, a_2, ..., a_n называются *компонентами [координатами]* вектора $\bar{a}$. Они могут быть записаны строкой (*вектор-строка*) или столбцом (*вектор-столбец*).

Далее в разделе 1 слово «арифметический» будет часто опускаться.

Действия над векторами

Сложение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; ...; a_n + b_n).$$

Умножение вектора $\bar{a}$ на число λ:

$$\lambda\bar{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2; ...; \lambda a_n).$$

Нулевой вектор: $\bar{0} = (0; 0; ...; 0)$.

Противоположный вектор (для данного вектора $\bar{a}$):

$$-\bar{a} = (-a_1; -a_2; ...; -a_n).$$

Вычитание векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b}) =$$
$$= (a_1 - b_1; a_2 - b_2; ...; a_n - b_n).$$

Скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n.$$

Основные формулы:

1. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$; $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$;
2. $\lambda(\bar{a} \pm \bar{b}) = \lambda\bar{a} \pm \lambda\bar{b}$;
3. $(\lambda \pm \mu)\bar{a} = \lambda\bar{a} \pm \mu\bar{a}$; $\lambda(\mu\bar{a}) = (\lambda\mu)\bar{a}$;
4. $\bar{a} - \bar{a} = \bar{0}$;
5. $1\bar{a} = \bar{a}$; $0\bar{a} = \bar{0}$; $(-1)\bar{a} = -\bar{a}$;
6. $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$;
7. $(\lambda\bar{a})\bar{b} = \bar{a}(\lambda\bar{b}) = \lambda(\bar{a}\bar{b})$ (поэтому пишут просто $\lambda\bar{a}\bar{b}$);
8. $(\bar{a} \pm \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\bar{c} \pm \bar{b}\bar{c}$;

9. $(\bar{a}+\bar{b})(\bar{c}+\bar{d})=\bar{a}\bar{c}+\bar{b}\bar{c}+\bar{a}\bar{d}+\bar{b}\bar{d}$;

10. $\bar{0}\bar{a}=0$.

В формулах 5 и 10 следует различать число 0 и вектор $\bar{0}$.

(!) Складывать, вычитать и скалярно перемножать можно только векторы одинаковой размерности.

Пример 1. $(1;2;3)+(4;5;6)=(5;7;9)$;
$-2(1;2;3;4)=(-2;-4;-6;-8)$;
$(1;2)-(2;1)=(-1;1)$;
$(1;-1;0;1)(1;1;1;0)=0$. ■

Множество всех n-мерных арифметических векторов с введенными на нем операциями сложения и умножения на число называется *арифметическим n-мерным линейным пространством* и обозначается $\mathbb{R}^n$.

Пропорциональность векторов

Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются *пропорциональными*, если $\bar{a}=\lambda\bar{b}$. Другим выражением пропорциональности служит формула вида

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n},$$

называемая *пропорцией*.

(!) В пропорциях допускается символическая запись вида $\frac{0}{0}$, которая может означать любое число. Например, формула $\frac{1}{2} = \frac{0}{0} = \frac{-2}{-4}$ устанавливает пропорциональность векторов (1; 0; −2) и (2; 0; −4).

Линейная зависимость векторов

Линейной комбинацией векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots$ $\ldots, \bar{e}_m$ с числовыми коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ $\ldots, \lambda_m$ называется вектор $\lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 + \ldots$ $\ldots + \lambda_m\bar{e}_m$. Если этот вектор нулевой, то говорят, что линейная комбинация *нулевая*.

Векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_m$ называются *линейно зависимыми*, если для них существует нулевая линейная комбинация, в которой не все коэффициенты равны нулю. В противном случае векторы называются *линейно независимыми*.

Пример 2. Векторы $\bar{e}_1 = (1; 0; 0)$, $\bar{e}_2 = (0; 1; 0)$, $\bar{e}_3 = (0; 0; 1)$ линейно независимы. В самом деле, их линейная комбинация с произвольными коэффициентами

$$\lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 + \lambda_3\bar{e}_3 = (\lambda_1; 0; 0) + (0; \lambda_2; 0) + (0; 0; \lambda_3) = (\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3).$$

Она нулевая только в том случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. ■

Пример 3. Векторы $\bar{e}_1 = (1; 2; 3)$, $\bar{e}_2 = (4; 5; 6)$, $\bar{e}_3 = (7; 8; 9)$ линейно зависимы. При $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 1$ линейная комбинация $\lambda_1\bar{e}_1 + \lambda_2\bar{e}_2 + \lambda_3\bar{e}_3 = (1; 2; 3) - 2(4; 5; 6) + (7; 8; 9) = (0; 0; 0)$. ■

Простейшие признаки линейной зависимости:

1. Система векторов содержит нулевой вектор.

2. Система векторов содержит два пропорциональных (в частности, одинаковых или противоположных) вектора.

3. Система векторов содержит линейно зависимую подсистему.

Критерий линейной зависимости. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из ее векторов равен линейной комбинации остальных.

Рангом системы векторов называется максимально возможное число векторов в ее линейно независимой подсистеме.

Пример 4.

- Ранг системы векторов (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1) равен 3.
- Ранг системы векторов (1; 2; 3), (4; 5; 6), (7; 8; 9) равен 2.
- Ранг системы векторов (1; 1; −1), (2; 2; −2), (−1; −1; 1) равен 1.
- Ранг системы, состоящей только из нулевого вектора, равен 0. ■

Более детальная информация о линейной зависимости и ранге содержится в §§1.6, 4.2, 4.4.

§ 1.2. Матрицы. Операции над матрицами

Матрицей размера $m \times n$ [$(m \times n)$-*матрицей*] называется прямоугольная таблица из чисел a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

состоящая из m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются ее *эле-*

ментами. Матрицу, состоящую из элементов a_{ij}, кратко обозначают A или (a_{ij}).

При $m = 1$ матрица является вектор-строкой, при $n = 1$ — вектор-столбцом, при $m = n = 1$ — обычным числом.

Сумма матриц:

$$A + B = C, \text{ если } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \ \forall i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Произведение матрицы A на число λ:

$$\lambda A = B, \text{ если } b_{ij} = \lambda a_{ij} \ \forall i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Разность матриц:

$$A - B = A + (-1)B.$$

Нулевая матрица:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Произведением $(m \times k)$-матрицы A на $(k \times n)$-матрицу B называется матрица $C = AB$, каждый элемент которой c_{ij} равен скалярному прозведению i-й строки матрицы A на j-й столбец матрицы B: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj} \ \forall i = 1, 2, \ldots, m, \ j = 1, 2, \ldots, n$.

Основные формулы:

- $A + B = B + A$, $A + (B + C) = (A + B) + C$;
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$, $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$, $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$;
- $A(BC) = (AB)C$, $A(B + C) = AB + AC$, $(A + B)C = AC + BC$.

(!) Вообще говоря, $AB \neq BA$. Более того, одно из этих произведений может существовать, а другое – нет. Даже если оба произведения существуют, они могут быть матрицами разного размера.

Пример 1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) & 0 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ 1 & 17 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3 & 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \\ 1 \cdot 2 + 5 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 5 \cdot 3 & 1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 \\ -1 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & -1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & -1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 9 & 6 \\ 2 & 16 & 11 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Квадратной матрицей n-го порядка называется $(n \times n)$-матрица, т.е. матрица с числом строк и столбцов, равным n.

Единичной матрицей называется квадратная матрица вида

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Основное свойство единичной матрицы. Если произведение EA (соответственно AE) существует, то $EA = A$ $(AE = A)$.

Пример 2.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, \ E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

AE не определено, так как строки матрицы A и столбцы матрицы E имеют разную размерность;

$$EA = \begin{pmatrix} 1 \cdot a + 0 \cdot d & 1 \cdot b + 0 \cdot e & 1 \cdot c + 0 \cdot f \\ 0 \cdot d + 1 \cdot d & 0 \cdot b + 1 \cdot e & 0 \cdot c + 1 \cdot f \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = A. \blacksquare$$

Возведение квадратной матрицы *в степень*:

$$A^0 = E,\ A^1 = A,$$

$$A^k = \underbrace{A\ A\ \ldots\ A}_{k\ \text{раз}} \text{ при } k \in \mathbb{N},\ k > 1.$$

Свойства степени:

$$A^m A^k = A^k A^m = A^{k+m},$$

$$(A^m)^k = (A^k)^m = A^{(km)}.$$

Транспонирование матрицы — переход от матрицы A к матрице A^T, в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка. Матрица A^T называется *транспонированной* относительно матрицы A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Свойства транспонирования:

$(A^T)^T = A$, $(A+B)^T = A^T + B^T$, $(\lambda A)^T = \lambda A^T$, $(AB)^T = B^T A^T$.

В ситуации, описанной в §4.6, для транспонированной матрицы иногда используется обозначение A^*.

§ 1.3. Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями матриц называются следующие:

1. Перестановка строк (столцов);

2. Умножение строки (столбца) на число, не равное нулю;

3. Прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на число.

Вычитание строк (столбцов) также является элементарным преобразованием, поскольку оно представимо в виде суммирования со строкой (столбцом), умноженной на -1.

$(m \times n)$-матрицы A и B называются *эквивалентными*, если B получается из A элементарными преобразованиями строк (но не столбцов!). Обозначение: $A \sim B$.

Свойства эквивалентных матриц:

1. $A \sim A$;
2. Если $A \sim B$, то $B \sim A$;
3. Если $A \sim B$ и $B \sim C$, то $A \sim C$.

Матрица называется *ступенчатой*, если в начале каждой последующей строки стоит больше нулей, чем в начале предыдущей (может быть, за исключением нескольких последних строк, состоящих целиком из нулей).

Теорема 1. Для любой матрицы найдется эквивалентная ей ступенчатая матрица.

Пример 1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} \\ \mathrm{II}-4\cdot\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-7\cdot\mathrm{I} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{r} \\ \\ \mathrm{III}-2\cdot\mathrm{II} \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Символическая запись $\mathrm{II} - 4 \cdot \mathrm{I}$ означает, что из второй строки вычитается первая, умноженная на 4.) ■

Ступенчатая квадратная матрица называется *верхнетреугольной*, а матрица, полученная из верхнетреугольной транспонированием, — *нижнетреугольной*. Матрица является *диагональной*, если она одновременно верхне- и нижнетреугольная. (Пример — единичная матрица.)

Теорема 2. Любая квадратная матрица элементарными преобразованиями строк и столбцов приводится к диагональной.

Теорема 3. Невырожденная квадратная матрица (см. § 1.4) эквивалентна единичной матрице.

§ 1.4. Определители

Определителем 2-го порядка [определителем матрицы M 2-го порядка] называется число

$$\det M = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Определителем [определителем матрицы] *3-го порядка* называется число

$$\det M = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 +$$
$$+ b_1 c_2 a_3 - b_1 c_3 a_2 + c_1 a_2 b_3 - c_1 a_3 b_2.$$

Это соотношение можно записать в виде:

$$\det M = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Таким же образом *определитель 4-го порядка* может быть рассчитан по формуле

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} +$$

$$+ c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{vmatrix} - d_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{vmatrix}.$$

Указанный прием, называемый *разложением определителя по первой строке*, позволяет при любом n свести вычисление определителя n-го порядка к определителям $(n - 1)$-го порядка.

Минором k-го порядка данной $(m \times n)$-матрицы называется определитель квадратной подматрицы k-го порядка ($k \leqslant \min(m, n)$), содержащейся в данной матрице.

Пример 1. (2×3)-матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ имеет 3 минора 2-го порядка:

$$m_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3,$$

$$m_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -6,$$

$$m_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3. \blacksquare$$

Если a_{ij} — элемент квадратной матрицы n-го порядка, *минором элемента* a_{ij} называется определитель m_{ij} подматрицы $(n - 1)$-го порядка, полученной вычеркиванием из матрицы A i-й строки и j-го столбца. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} называют число $A^{(i,j)} = (-1)^{i+j} m_{ij}$.

Формулы разложения определителя матрицы $A = (a_{ij})$:

- по i-й строке: $\det A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} A^{(i,k)}$;
- по j-му столбцу: $\det A = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{kj} A^{(k,j)}$.

Пример 2.

$$\begin{vmatrix} 29 & 7 & 13 \\ 1 & 3 & 17 \\ 0 & 3 & 17 \end{vmatrix} = 29 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 17 \\ 3 & 17 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 13 \\ 3 & 17 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 13 \\ 3 & 17 \end{vmatrix} = 29 \cdot (3 \cdot 17 - 3 \cdot 17) -$$

$$- 1 \cdot (7 \cdot 17 - 13 \cdot 3) = -80.$$

Использовано разложение по 1-му столбцу. ■

Свойства определителей. Элементарные преобразования определителей

1. $\det A^T = \det A$;
2. $\det (AB) = \det A \cdot \det B$;
3. $\det (\lambda A) = \lambda^n \cdot \det A$.
4. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак.
5. При умножении строки (столбца) матрицы на число определитель умножается на то же число.
6. При замене строки (столбца) матрицы ее суммой с другой строкой (столбцом) этой матрицы, умноженной на число, определитель не изменяется.
7. Если матрица $A = (a_{ij})$ верхне- или нижнетреугольная, то

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

В частности, $\det E = 1$.

Пример 3.

$$\begin{vmatrix} 1&1&0&0&0\\ 1&1&1&0&0\\ 0&1&1&1&0\\ 0&0&1&1&1\\ 0&0&0&1&1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&1&0&0&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&1&1&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0\\ 0&1&1&1&0\\ 0&0&1&0&0\\ 0&0&0&1&1 \end{vmatrix} = 0.$$

В расчете использовано только свойство 6 и возможность разложения по 2-й строке. ■

Вырожденные и невырожденные матрицы

Квадратная матрица A называется *вырожденной*, если $\det A = 0$, и *невырожденной*, если $\det A \neq 0$.

Критерий вырожденности. Матрица вырождена тогда и только тогда, когда ее строки (столбцы) линейно зависимы (см. §1.1.)

Простейшие признаки вырожденности:

- Матрица содержит нулевую строку (столбец).
- Матрица содержит пропорциональные (в частности, равные) строки или столбцы.

Пример 4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Этот результат получается как следствие примера 3 §1.1 или примера 1 §1.3. ■

§ 1.5. Обратная матрица

Если A — невырожденная матрица, то существует, и притом единственная, матрица A^{-1}, такая что

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице A.

Для вырожденных матриц не существует обратных, поскольку при $\det A = 0$ и любом $\det B$

$$\det (AB) = \det (BA) = \det A \cdot \det B = 0,$$

$$\det E = 1.$$

Присоединенная матрица $A^{\vee}$ для квадратной матрицы A — это матрица, состоящая из алгебраических дополнений к элементам матрицы (!) A^T:

$$A^\vee = \begin{pmatrix} A^{(1,1)} & A^{(2,1)} & \dots & A^{(m,1)} \\ A^{(1,2)} & A^{(2,2)} & \dots & A^{(n,2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{(1,n)} & A^{(2,n)} & \dots & A^{(n,n)} \end{pmatrix}.$$

Пример 1.

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $A^\vee = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$;

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, $A^\vee = \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ 6 & -12 & 6 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$, поскольку

$$A^{(1,1)} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = -3, \; A^{(2,1)} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A^{(3,1)} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3, \; A^{(1,2)} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A^{(2,2)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -12, \; A^{(3,2)} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A^{(1,3)} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3, \; A^{(2,3)} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6,$$

$$A^{(3,3)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3. \blacksquare$$

Связь между исходной, присоединенной и обратной матрицами:

$$AA^{\vee} = A^{\vee}A = (\det A)E.$$

Если $\det A \neq 0$, то $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}A^{\vee}$.

Пример 2 (продолжение примера 1).

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix}$;

2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}^{-1}$ не существует. ■

Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований

Для данной матрицы A строим $(n\times 2n)$-матрицу $(A|E)$, приписывая к A справа единичную матрицу. Элементарными преобразованиями строк приводим эту матрицу к виду $(E|B)$ — это возможно в силу теоремы 3 §1.3. Тогда $B = A^{-1}$.

Пример 3.

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 1\end{array}\right) \sim_{\mathrm{II}-3\mathrm{I}} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right) \sim$$

$$\sim^{\mathrm{I}+\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 2 & -2 & 1\\ 0 & -2 & -3 & 1\end{array}\right) \sim_{-0{,}5\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 1 & 1{,}5 & -0{,}5\end{array}\right).$$

Мы еще раз убедились, что $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}^{-1} =$ $= \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1{,}5 & -0{,}5\end{pmatrix}$. ■

Свойства обратной матрицы:

$(A^{-1})^{-1} = A;$

$\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A};$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1};$

$(A^m)^{-1} = (A^{-1})^m;$

$(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$, если $\lambda \neq 0;$

$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T;$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\lambda_1^{-1} & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2^{-1} & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^{-1}\end{pmatrix}.$$

§ 1.6. Ранг матрицы

Следующие два определения ранга матрицы равносильны.

Определение 1. *Рангом* матрицы называется наивысший порядок не равных нулю миноров этой матрицы (определение минора см. в §1.4).

Определение 2. *Рангом* матрицы называется ранг системы арифметических векторов (см. §1.1), стоящих в строках (столбцах) этой матрицы.

Ранг матрицы A обозначается $r(A)$ или $\operatorname{rang}(A)$.

Пример 1.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 2.$$

Действительно, эта матрица имеет не равные нулю миноры 2-го порядка, например $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3$. Однако определитель матрицы, т.е. ее единственный минор 3-го порядка, равен нулю. Значит, $r(A) = 2$ в силу определения 1.

С другой стороны, матрица содержит 2 линейно независимых строки (1 2 3) и (4 5 6). Однако система из трех строк матрицы линейно зависима (см. примеры 3 и 4 §1.1). Таким образом, $r(A) = 2$ в силу определения 2. Аналогичное рассуждение можно было бы провести и для столбцов матрицы. ■

Минор, указанный в определении 1 (точнее, любой такой минор, если их несколько), называется *базисным минором*. Система строк (столбцов), содержащая базисный минор, линейно независима и образует *базис* в системе всех строк (столбцов) этой матрицы. Это означает, что любая другая строка (столбец) матрицы единственным образом представима в виде линейной комбинации строк (столбцов) базиса.

Свойства ранга $(m \times n)$-матрицы A:

1. $r(A) \leqslant \min(m; n)$.
2. $r(A) = 0 \Leftrightarrow a_{ij} = 0 \ \forall i, j$, т.е. $A = 0$.
3. $r(A) = 1 \Leftrightarrow$ все строки (столбцы) матрицы пропорциональны.
4. Если $m = n$, то $r(A) = n \Leftrightarrow \det A \neq 0$.
5. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях.

6. Ранг ступенчатой матрицы равен количеству ее ненулевых строк. (Эти строки образуют базис в системе всех строк матрицы. В системе всех столбцов матрицы базис образуют столбцы, содержащие первые ненулевые элементы строк.)

Пример 2.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} \underline{1} & 2 & \underline{3} & 3 & 6 \\ \underline{0} & 0 & \underline{6} & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Подчеркнутые элементы образуют базисный минор. ■

Правило окаймляющих миноров. Пусть в матрице найден минор k-го порядка M, не равный нулю. Рассмотрим лишь те миноры $(k+1)$-го порядка, которые содержат в себе [окаймляют] минор M. Если все они равны нулю, то $r(A) = k$.

Пример 3.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

Выделенный пунктиром минор 2-го порядка не нулевой. Однако все окаймляющие его миноры 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 8 \end{vmatrix} \text{ и } \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 7 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

— равны нулю.

Тот же результат можно получить с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{r} \\ \mathrm{II}-2\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-\mathrm{I} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 10 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{r} \\ \\ \mathrm{III}-2\mathrm{II} \end{array} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Изменение ранга при операциях с матрицами:

$r(A^T) = r(A)$;

$r(AA^T) = r(A^TA) = r(A)$;

$r(\lambda A) = r(A)$, если $\lambda \neq 0$;

$r(A + B) \leqslant r(A) + r(B)$;

$r(A - B) \geqslant |r(A) - r(B)|$;

$r(AB) \leqslant \min(r(A); r(B))$;

$r(AB) = r(A)$, если B — невырожденная;

$r(AB) = r(B)$, если A — невырожденная.

§ 1.7. Первоначальные сведения о системах линейных уравнений

Система m линейных уравнений с n неизвестными [переменными] имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Краткая запись системы линейных уравнений:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Матричная форма системы линейных уравнений: $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Векторная форма: $\sum\limits_{j=1}^{n} x_t A_j = B$, где при $j = 1, 2, ..., n$

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Матрица A называется *основной матрицей* системы, X — [вектор-]столбцом неизвестных, B — [вектор-]столбцом свободных членов, A_j — [вектор-]столбцом коэффициентов при неизвестной x_j. Кроме того, рассматривают *расширенную матрицу* системы $(A|B)$, образованную приписыванием к матрице A столбца B.

Решением [*частным решением*] системы линейных уравнений называется вектор значений переменных $(x_1; x_2; ...; x_n)$, обращающий в верное равенство каждое уравнение системы. *Общим решением* системы называется множество всех частных решений. Системы называются *равносильными* [*эквивалентными*], если их общие решения совпадают.

Совместность и определенность систем

Название	**Ранги**	**Число решений**
Несовместная	$r(A\|B) = r(A) + 1$	Нет
Совместная определенная	$r(A\|B) = r(A) = n$	Единственное
Совместная неопределенная	$r(A\|B) = r(A) < n$	Бесконечно много

Геометрическую интерпретацию этой таблицы см. в §3.3.

Пример 1.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$ — несовместная система.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$ — совместная определенная система. Ее единственное решение $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$ — совместная неопределенная система. Ее общее решение образу-

ют пары чисел вида $x_1 = c$, $x_2 = 1 - c$, где c — любое число. ■

Для совместных систем число $r = r(A) = r(A|B)$ называется *рангом* системы. *Свободными* [*неосновными*] неизвестными называются те неизвестные, которым можно придать любые наперед заданные значения так, чтобы значения оставшихся неизвестных определялись однозначно. Эти оставшиеся неизвестные называются *базисными* [*основными*]. Количество базисных неизвестных равно r, количество свободных $n - r$. В неопределенных системах разбиение неизвестных на базисные и свободные, как правило, не единственно.

Теорема о базисном миноре. Базисными неизвестными являются те неизвестные, коэффициенты при которых образуют базисный минор основной матрицы системы.

§ 1.8. Решение квадратных систем линейных уравнений

Система линейных уравнений называется *квадратной*, если ее основная матрица A — невырожденная квадратная матрица.

Решение такой системы может быть найдено в матричном виде

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A} A^{\vee}B$$

или в скалярном виде (*формулы Крамера*):

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \text{ при } j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\Delta = \det A$, Δ_j — определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой столбца A_j на столбец B.

Пример 1.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Матричное решение:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -8 \neq 0,$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6 & -5 & 13 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -11 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -6 & -5 & 13 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/8 \\ 5/8 \\ 7/8 \end{pmatrix},$$

т. е. $x_1 = -\frac{1}{8}$, $x_2 = \frac{5}{8}$, $x_3 = \frac{7}{8}$.

Решение по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -8, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -7;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{8}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{5}{8}, \ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{7}{8}. \blacksquare$$

§ 1.9. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

С помощью элементарных преобразований над строками (фактически, над самими уравнениями системы) и перестановки столбцов расширенная матрица $(A|B)$ системы линейных уравнений может быть приведена к виду

$$\left(\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{1,r+1} & \dots & \alpha_{1n} & & \beta_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \alpha_{2,r+1} & \dots & \alpha_{2n} & & \beta_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha_{r,r+1} & \dots & \alpha_{rn} & & \beta_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & & 0 & & \beta_{r+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & \beta_m \end{array}\right)$$

Эта матрица является расширенной матрицей системы

$$\begin{array}{r} x_1 + \alpha_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + \alpha_{1n}x_1 = \beta_1, \\ x_2 + \alpha_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + \alpha_{2n}x_1 = \beta_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r + \alpha_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + \alpha_{rn}x_n = \beta_r, \\ 0 = \beta_{r+1}, \\ \dots \\ 0 = \beta_m, \end{array} \qquad (*)$$

которая с точностью до перенумерации неизвестных равносильна исходной системе.

Если хотя бы одно из чисел $\beta_{r+1}, \dots, \beta_m$ не равно нулю, то обе системы несовместны. Если же $\beta_{r+1} = \ldots = \beta_m = 0$, то системы совместны, и формулы (*) дают, по существу, явное выражение для базисных неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_r$ через свободные неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$.

Пример 1.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$$

Решение. Производя элементарные преобразования над строками расширенной матрицы, получаем:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \mathrm{II}-3\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-2\mathrm{I} \\ \mathrm{IV}-\mathrm{I} \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \mathrm{I}+2\mathrm{II} \\ \\ \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Первые две строки последней матрицы образуют расширенную матрицу системы

$$\begin{cases} x_1 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 1, \\ x_2 - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 = 2, \end{cases}$$

равносильной исходной системе. Считая x_1, x_2 базисными, а x_3, x_4 свободными неизвестными, получаем общее решение в виде

$$x_1 = 1 + \frac{4}{5}c_1 + \frac{1}{5}c_2,$$
$$x_2 = 2 + \frac{2}{5}c_1 + \frac{3}{5}c_2,$$
$$x_3 = c_1,\ x_4 = c_2. \blacksquare$$

§ 1.10. Векторная запись общего решения. Однородные и неоднородные системы

Общее решение совместной неопределенной системы зависит от $n - r$ произвольных параметров (по числу свободных неизвестных). Записывая общее решение в виде вектор-столбца, можно вынести эти параметры за скобки как числовые сомножители:

$$X = E_0 + c_1E_1 + \ldots + c_{n-r}E_{n-r}.$$

При этом вектор E_0 является частным решением системы $AX = B$ (для краткости используем матричную форму), а векторы $E_1, \dots, E_{n-r}$ — линейно независимыми частными решениями системы $AX = 0$, где вектор B заменен нулевым вектором. Такие системы называются *однородными*, а системы, в которых $B \neq 0$ — *неоднородными*. Написанная выше формула означает, что **общее решение неоднородной системы равно сумме ее частного решения и общего решения соответствующей однородной системы.**

Пример 1. (продолжение примера 1 §1.9).

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{4}{5}c_1 + \frac{1}{5}c_2 \\ 2 + \frac{2}{5}c_1 + \frac{3}{5}c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 4/5 \\ 2/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1/5 \\ 3/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Данное представление удобно использовать при проверке ответов. При этом вектор E_0 следует подставлять в неоднородную систему, а векторы E_1, ... , E_{n-r} — в однородную.

О роли однородных систем в линейной алгебре см. §§4.4, 4.9.

§ 1.11. Матричные уравнения. Уравнение Леонтьева

Следующие формулы справедливы, если существуют входящие в них обратные матрицы.

Уравнение	**Решение**
$AX = B$	$X = A^{-1}B$
$XA = B$	$X = BA^{-1}$
$AXB = C$	$X = A^{-1}CB^{-1}$
$AX = X - C$	$X = (E - A)^{-1}C$

Последнее уравнение в экономической теории называется *уравнением Леонтьева*.

Его решение может быть преобразовано к виду

$$X = (E - A)^{-1}C = C + AC + A^2C + \ldots$$
$$\ldots + A^kC + \ldots,$$

если последний матричный ряд сходится поэлементно. В этом случае неотрицательность A и C обеспечивает неотрицательность решения X. Достаточным условием сходимости является стремление к нулю элементов матрицы A^k при $k \to \infty$.

Раздел 2

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕКТОРЫ

§ 2.1. Геометрический вектор как направленный отрезок

В физике и технике векторной величиной называется величина, обладающая направлением (например, сила), а скалярной — величина, не имеющая направления (например, температура). В математике *геометрическим вектором* называется направленный отрезок на плоскости или в пространстве (рис. 1), *скаляр* — синоним числа.

Далее в разделе 2 слово «геометрический» будет опускаться, если это не приведет к путанице с понятием арифметического вектора, введенным в §1.1. Связь между геометрическими и арифметическими векторами обсуждается в §§2.3 и 2.5.

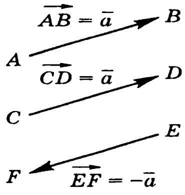


Рис. 1

Вектор, началом которого является точка A, а концом — точка B, обозначается $\overrightarrow{AB}$. Если точки A и B совпадают, то $\overrightarrow{AB}$ считается *нулевым вектором* (пишут: $\overrightarrow{AB} = \bar{0}$), несмотря на то, что направленного отрезка как такового нет.

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ считаются *равными* (обозначение: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$), если они имеют одинаковые длину и направление. Все нулевые векторы равны друг другу.

Векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{EF}$ называются *противоположными* (обозначение: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{EF}$), если они имеют одинаковую длину и противоположное направление.

Если начало вектора зафиксировано, говорят о *закрепленном* векторе. Если же длина и направление вектора известны, а начало не определено (безразлично), вектор называется *свободным*. Свободные векторы обозначают: $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и т.д., в книгах часто также используют полужирный шрифт: **a**, **b**, **c**, ...

Длина вектора $\bar{a}$ иначе называется его *модулем* и обозначается $|\bar{a}|$.

§ 2.2. Линейные операции над геометрическими векторами

Линейными операциями называются сложение векторов и умножение вектора на число.

Сложение векторов

1) Правило треугольника. Пусть $\bar{a} = \overrightarrow{AB}$, $\bar{b} = \overrightarrow{BC}$ (рис. 2). Тогда $\bar{a} + \bar{b} = \overrightarrow{AC}$.

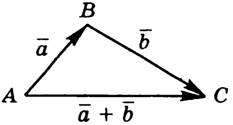


Рис. 2

2) Правило параллелограмма. Пусть $\bar{a} = \overrightarrow{AB}$, $\bar{b} = \overrightarrow{AC}$ (рис. 3). Тогда $\bar{a} + \bar{b} = \overrightarrow{AD}$, где $\overrightarrow{AD}$ — диагональ параллелограмма $ABDC$.

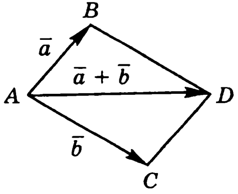


Рис. 3

Свойства сложения (рис. 4)

$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$;

$(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} =$
$= \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$;

$\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$;

$\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$.

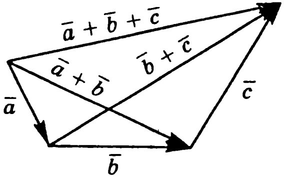


Рис. 4

Пусть $\overline{a_1} = \overrightarrow{A_1A_2}$, $\overline{a_2} = \overrightarrow{A_2A_3}$, ... , $\overline{a_k} = \overrightarrow{A_kA_{k+1}}$. Тогда $\overline{a_1} + \overline{a_2} + ... + \overline{a_k} = \overrightarrow{A_1A_{k+1}}$ (правило многоугольника).

Вычитание векторов: $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$ (рис. 5).

Если $\bar{a} = \overrightarrow{AB}$, $\bar{b} = \overrightarrow{AC}$, то $\bar{a} - \bar{b} = \overrightarrow{CB}$.

Умножение векторов

Произведением вектора $\bar{a}$ на число λ называется вектор $\bar{b} = \lambda\bar{a}$, такой что:

1) $|\bar{b}| = |\lambda||\bar{a}|$;

2) $\bar{b}$ сонаправлен $\bar{a}$ при $\lambda > 0$ и противоположно направлен при $\lambda < 0$ (рис. 6).

Свойства умножения

1) $1\bar{a} = \bar{a}$; $0\bar{a} = \bar{0}$; $(-1)\bar{a} = -\bar{a}$;

2) $\lambda(\mu\bar{a}) = (\lambda\mu)\bar{a}$;

3) $(\lambda \pm \mu)\bar{a} = \lambda\bar{a} \pm \mu\bar{a}$;

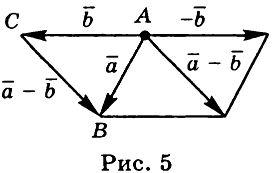


Рис. 5

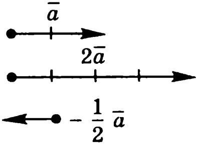


Рис. 6

4) $\lambda(\bar{a} \pm \bar{b}) = \lambda\bar{a} \pm \lambda\bar{b}$;

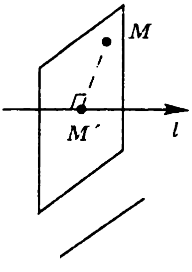
5) $\lambda\bar{0} = \bar{0}$.

Медиана и биссектриса

В треугольнике ABC вектор $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ задает медиану (т.е. D — середина стороны BC). Вектор $\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}$ лежит на биссектрисе угла A, но не равен ей по длине.

§ 2.3. Проекция вектора на ось. Декартовы координаты

Осью называется прямая, на которой выделено одно из ее направлений (на рисунках оно обозначается стрелкой). Каждую ось можно задать *направляющим вектором*, т.е. любым вектором, лежащим на ней и имеющим то же направление.



Пусть задана ось l и некоторая точка M (рис. 7). Плоскость, проходящая через точку M перпендикулярно оси l, пересечет ее в некоторой точке M', которая называется *проекцией*

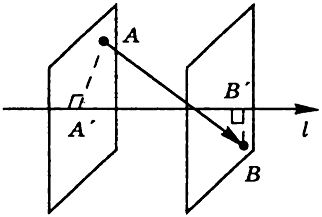


Рис. 8

точки M на ось l. Если $M \in l$, то $M' = M$. Если $M \in l$, то M' — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на ось l.

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось [направление] l называется длина вектора $\left|\overrightarrow{A'B'}\right|$, где A' и B' — проекции точек A и B соответственно (рис. 8), взятая со знаком:

«+», если вектор $\overrightarrow{A'B'}$ сонаправлен оси l;

«−», если вектор $\overrightarrow{A'B'}$ направлен противоположно оси l.

(!) Проекция вектора на ось является числом.

Обозначение: $\text{пр}_l \bar{a}$ или $\text{пр}_{\bar{c}}\, \bar{a}$, если ось задана направляющим вектором $\bar{c}$.

Основные формулы

$$\text{пр}_l\bar{a} = |\bar{a}|\cos(\bar{a}\hat{,}\, l).$$

Если $\bar{a} \perp l$, то $\text{пр}_l\bar{a} = 0$. Обратное верно при $\bar{a} \neq \bar{0}$.

$$\text{пр}_l(\bar{a} + \bar{b}) = \text{пр}_l\bar{a} + \text{пр}_l\bar{b}$$

$$\text{пр}_l(\lambda\bar{a}) = \lambda \cdot \text{пр}_l\bar{a}$$

Декартова система координат

Три взаимно перпендикулярных оси OX, OY, OZ, проходящие через некоторую точку O (рис. 9), образуют *декартову* [*прямоугольную*] *систему координат* в простран-

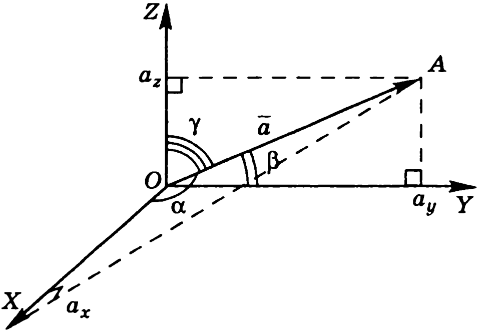


Рис. 9

стве. Точка O называется *началом координат*, OX, OY, OZ — *осями координат* (OX — осью *абсцисс*, OY — осью *ординат*, OZ — осью *аппликат*), а плоскости OXY, OXZ, OYZ — *координатными плоскостями*.

Проекции вектора $\bar{a}$ на оси координат называются его *декартовыми координатами*:

$$a_x = \text{пр}_{OX}\bar{a}\,;\; a_y = \text{пр}_{OY}\bar{a}\,;\; a_z = \text{пр}_{OZ}\bar{a}\,.$$

Таким образом, можно **отождествить** геометрический вектор с трехмерным арифметическим вектором:

$$\bar{a} = (a_x;\, a_y;\, a_z).$$

Если $\bar{a} = \overrightarrow{OA}$ (см. рис. 9), то координаты точки A совпадают с координатами вектора $\bar{a}$. Закрепленный вектор $\overrightarrow{OA}$ называется *радиус-вектором* точки A.

Исключая из предыдущего описания ось аппликат OZ и все, что с ней связано, получим описание *декартовых координат на плоскости*.

§ 2.4. Начальные формулы аналитической геометрии

Действия над векторами, заданными их координатами

Если $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$, $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z)$, то

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z);$$

$$\lambda\bar{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z),$$

что согласуется с определениями §1.1.

Координаты вектора с началом $A(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и концом $B(x_2;\, y_2;\, z_2)$:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\, y_2 - y_1;\, z_2 - z_1).$$

Длина вектора $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,.$$

Расстояние между точками $A(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и $B(x_2;\, y_2;\, z_2)$:

$$d = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

Направляющие косинусы и орт вектора

Если вектор образует с осями координат OX, OY, OZ углы α, β и γ соответственно (см. рис. 9 на с. 53), то

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};\ \cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Эти числа называются *направляющими косинусами* вектора $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$.

Ортом вектора $\bar{a}$ называется сонаправленный ему вектор единичной длины:

$$\bar{a}^0 = \frac{1}{|\bar{a}|}\bar{a} = (\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma);$$

$$\left|\bar{a}^0\right| = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Векторное уравнение отрезка

Если $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ — радиус-векторы точек на концах отрезка, то радиус-векторы точек, принадлежащих отрезку $[A, B]$, задаются формулой

$$\overrightarrow{OM} = \lambda\overrightarrow{OA} + (1 - \lambda)\overrightarrow{OB}, \text{ где } \lambda \in [0,1].$$

При этом $\dfrac{AM}{MB} = \dfrac{1-\lambda}{\lambda}$.

§ 2.5. Линейная зависимость геометрических векторов. Базис и размерность

Определения *линейной комбинации* и *линейной зависимости* (*независимости*) геометрических векторов дословно повторяют соответствующие определения для арифметических векторов, данные в §1.1. Кроме того, сформулированные в §1.1 свойства линейной зависимости без изменений переносятся на геометрические векторы.

Коллинеарность и компланарность

Геометрические векторы, лежащие на параллельных прямых (или на одной и той же прямой), называются *коллинеарными*. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Три (или более) геометрических вектора называются *компланарными*, если после приведения к общему началу они будут лежать в одной плоскости. Если в тройку векторов входит нулевой вектор, такие векторы считаются компланарными.

Геометрическое и алгебраическое представление линейной зависимости

1) Два геометрических вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они

коллинеарны. Для коллинеарных векторов $\bar{a} = (a_x; a_y; a_z)$ и $\bar{b} = (b_x; b_y; b_z) \neq \bar{0}$

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

(О соглашениях, принятых при записи пропорций, см. замечание в §1.1.)

2) Три геометрических вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны. Декартовы координаты таких векторов образуют вырожденную матрицу (см. §1.4):

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

3) Четыре геометрических вектора всегда линейно зависимы.

Базис и размерность

Базисом на прямой считается любой ненулевой вектор, лежащий на этой прямой. *Размерность* прямой равна 1.

Базисом на плоскости считается любая упорядоченная пара неколлинеарных векторов, лежащих в этой плоскости. *Размерность* плоскости равна 2.

Базисом в пространстве считается любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов. *Размерность* пространства равна 3.

Теорема. Любой геометрический вектор (на прямой, на плоскости, в пространстве) однозначно представим в виде линейной комбинации векторов базиса (рис. 10).

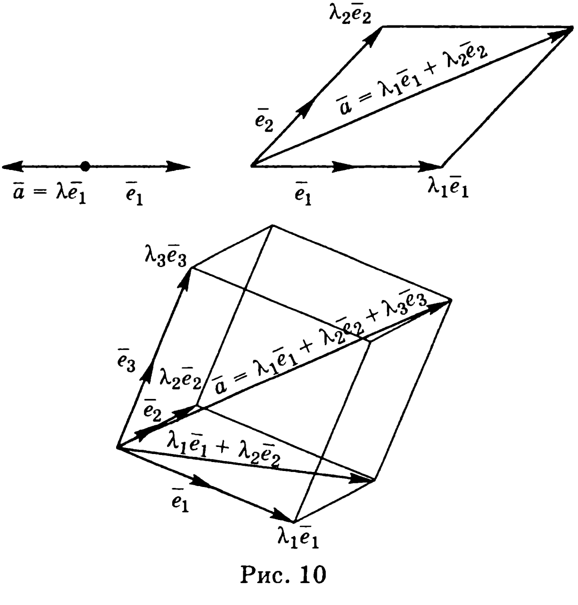


Рис. 10

Указанное представление называется *разложением вектора по базису*. Числовые коэффициенты λ_i, входящие в разложение, называются *координатами* вектора в данном базисе.

Декартовы координаты

Декартовым базисом $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ называется упорядоченная тройка векторов единичной длины, сонаправленных осям OX, OY, OZ декартовой системы координат. Координаты вектора в базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ совпадают с его *декартовыми координатами* в смысле определения, данного в §2.3:

$$\bar{a} = (a_x; a_y; a_z) = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}.$$

(!) Использование букв $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ (вместо $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$) для обозначения базисных векторов подразумевает использование декартова (а не произвольного) базиса.

Нахождение координат вектора в данном базисе

Если векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют базис, координаты вектора $\bar{d} = \lambda_1\bar{a} + \lambda_2\bar{b} + \lambda_3\bar{c}$

в этом базисе удовлетворяют квадратной системе линейных уравнений

$$\begin{cases} a_x\lambda_1 + b_x\lambda_2 + c_x\lambda_3 = d_x, \\ a_y\lambda_1 + b_y\lambda_2 + c_y\lambda_3 = d_y, \\ a_z\lambda_1 + b_z\lambda_2 + c_z\lambda_3 = d_z. \end{cases}$$

Методы решения таких систем описаны в §1.8.

§ 2.6. Скалярное произведение

Скалярным произведением геометрических векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число

$$\bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi,$$

где φ — угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Свойства скалярного произведения

$\bar{a}\,\bar{b} = \bar{b}\,\bar{a}$;

$\bar{a}\,\bar{b} = |\bar{a}|\,\text{пр}_{\bar{a}}\,\bar{b} = |\bar{b}|\,\text{пр}_{\bar{b}}\,\bar{a}$;

$\bar{a}^2 = \bar{a}\,\bar{a} = |\bar{a}|^2$;

$\bar{a}\,\bar{b} = 0 \Leftrightarrow$ векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны [*ортогональны*];

$\bar{a}\,\bar{b} \leqslant |\bar{a}||\bar{b}|$;

$$(\bar{a} + \bar{b})\bar{c} = \bar{a}\,\bar{c} + \bar{b}\,\bar{c};$$

$$(\bar{a} + \bar{b})(\bar{c} + \bar{d}) = \bar{a}\,\bar{c} + \bar{b}\,\bar{c} + \bar{a}\,\bar{d} + \bar{b}\,\bar{d};$$

$$(\lambda\bar{a})\bar{b} = \lambda(\bar{a}\,\bar{b}).$$

Физический смысл скалярного произведения: если $\bar{r}$ — перемещение материальной точки под действием силы $\bar{F}$, то работа силы $A = \bar{F}\,\bar{r}$.

Таблица умножения

$$\bar{i}^2 = 1;\ \bar{i}\,\bar{j} = 0;\ \bar{i}\,\bar{k} = 0;$$

$$\bar{j}\,\bar{i} = 0;\ \bar{j}^2 = 1;\ \bar{j}\,\bar{k} = 0;$$

$$\bar{k}\,\bar{i} = 0;\ \bar{k}\,\bar{j} = 0;\ \bar{k}^2 = 1.$$

Вычисления в декартовых координатах

Скалярное произведение: $\bar{a}\,\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ (что соответствует определению скалярного произведения арифметических векторов, данному в §1.1).

Угол между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2)}}.$$

§ 2.7. Векторное произведение

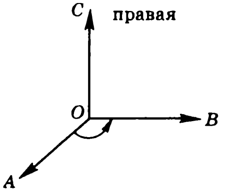
Тройка некомпланарных векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ называется *правой* (*левой*), если поворот вектора $\overrightarrow{OA}$, совмещающий его по кратчайшему пути с вектором $\overrightarrow{OB}$, для наблюдателя, находящегося в точке C (рис. 11), выглядит поворотом против часовой стрелки (по часовой стрелке).

Векторным произведением геометрических векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$, такой что:

1) $|\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin(\widehat{\bar{a}, \bar{b}})$;

2) $\bar{c} \perp \bar{a}$, $\bar{c} \perp \bar{b}$;

3) векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (приведенные к общему началу) образуют правую тройку.



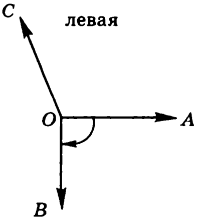


Рис. 11

Свойства векторного произведения

$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0} \Leftrightarrow \bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны;

$\bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}$;

$\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a})$;

$(\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \lambda(\bar{a} \times \bar{b})$;

$(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$;

$(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{c} + \bar{d}) = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c} +$
$+ \bar{a} \times \bar{d} + \bar{b} \times \bar{d}$.

Пример 1.

$(\bar{a} + \bar{b}) \times (\bar{a} - \bar{b}) = \bar{a} \times \bar{a} + \bar{b} \times \bar{a} -$
$- \bar{a} \times \bar{b} - \bar{b} \times \bar{b} = 2\bar{b} \times \bar{a} = -2\bar{a} \times \bar{b}$. ■

(!) Нельзя писать, что $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{a}^2$!

Вычисление площадей (рис. 12)

1) Параллелограмм:

$S_{ABCD} = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$.

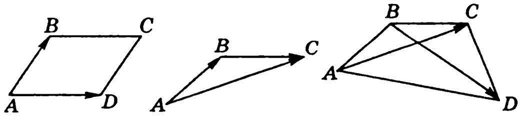


Рис. 12

2) Треугольник:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right| = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|.$$

3) Четырехугольник:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}\right|.$$

Механический смысл векторного произведения

Если вектор силы $\bar{F}$ приложен к точке M, а $\overrightarrow{OM}$ — ее радиус-вектор, то $\overrightarrow{OM} \times \bar{F}$ — момент силы $\bar{F}$ относительно точки O.

Таблица умножения

$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{0}$; $\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}$; $\bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}$;

$\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}$; $\bar{j} \times \bar{j} = 0$; $\bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}$;

$\bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}$; $\bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}$; $\bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}$.

Вычисление в декартовых координатах

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k}.$$

Двойное векторное произведение

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a}\,\bar{c})\bar{b} - (\bar{a}\,\bar{b})\bar{c};$$

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \times \bar{c} = (\bar{a}\,\bar{c})\bar{b} - (\bar{b}\,\bar{c})\bar{a}.$$

§2.8. Смешанное произведение

Смешанное произведение векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$:

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \bar{a}(\bar{b} \times \bar{c}) = (\bar{a} \times \bar{b})\bar{c}$$

Геометрический смысл: $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ (рис. 13), взятому со знаком плюс, если тройка $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ правая, и минус, если тройка $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ левая.

Свойства смешанного произведения

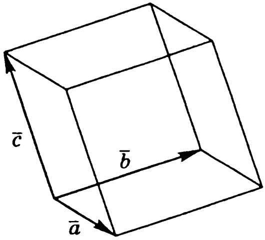


Рис. 13

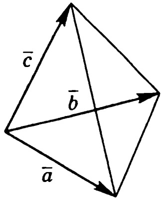


Рис. 14

$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = 0 \Leftrightarrow \bar{a},\ \bar{b},\ \bar{c}$ компланарны;

$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \bar{b}\,\bar{c}\,\bar{a} = \bar{c}\,\bar{a}\,\bar{b}$;

$\bar{b}\,\bar{a}\,\bar{c} = \bar{a}\,\bar{c}\,\bar{b} = \bar{c}\,\bar{b}\,\bar{a} = -\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$.

Объем тетраэдра (рис. 14)

$V = \frac{1}{6}|\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}|$.

Вычисление в декартовых координатах

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Раздел 3

УРАВНЕНИЯ ЛИНИЙ И ПОВЕРХНОСТЕЙ

§ 3.1. Основные принципы аналитической геометрии

Уравнение, связывающее координаты точки, называется *уравнением линии* (*поверхности*), если:

1. Для любой точки, принадлежащей линии (поверхности), ее координаты удовлетворяют этому уравнению.

2. Для любой точки, не принадлежащей линии (поверхности), ее координаты не удовлетворяют этому уравнению.

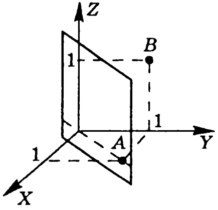


Рис. 15

Пример 1.

а) $y = x$ — прямая на плоскости OXY;

б) То же уравнение задает плоскость в пространстве $OXYZ$ (рис. 15), проходящую через ось OZ. Точка $A(1;\ 1;\ 0)$ принадлежит этой плоскости, а точка $B(0; 1; 1)$ — не принадлежит. ■

Взаимное расположение линий (поверхностей)

Общие точки [*точки пересечения*] нескольких линий (поверхностей) удовлетворяют системе уравнений, задающих эти линии (поверхности).

Пример 2.

а) Окружность $x^2 + y^2 = 2$ и прямая $y = x$ имеют две точки пересечения: $(1; 1)$ и $(-1; -1)$.

б) Плоскость $z = 10$ и сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ не имеют общих точек.

в) Плоскости $x + y + z = 0$ и $x - y + z = 0$ пересекаются по общей прямой, проходящей через точки $(0; 0; 0)$ и $(1; 0; -1)$. ■

Линия в пространстве, как правило, не может быть задана одним уравнением (в исключительных случаях уравнение может задавать не только линию, но даже отдельную точку, см. §3.10). Распространенными способами задания линий в пространстве являются следующие.

1) Общий:

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0, \\ g(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

т.е. линия задается как пересечение поверхностей.

2) Параметрический:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ z = \chi(t), \end{cases}$$

т.е. линия — «траектория точки, движущейся в пространстве при изменении времени». Эта механическая аналогия может быть обобщена на линии, не имеющие никакого отношения к механике.

Пример 3.

а) $\begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$ — уравнения окружности в пространстве (рис. 16, *а*). Первое уравнение задает плоскость, в которой лежит окружность, второе определяет ее форму и радиус.

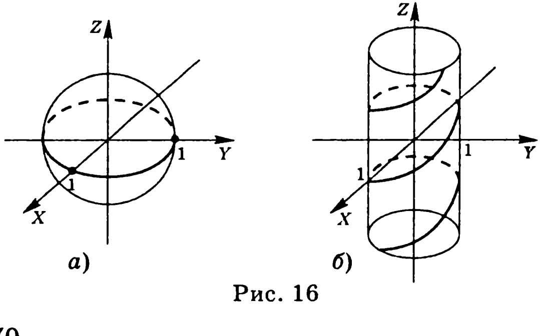


Рис. 16

б) $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = t \end{cases}$ — уравнения винтовой линии (рис. 16, *б*). Эту линию, похожую на резьбу винта, очень сложно задать как пересечение поверхностей. ■

Поверхности вращения и цилиндры

Поверхностью вращения называют такую поверхность, что любое ее сечение, перпендикулярное некоторой фиксированной прямой (оси вращения), — либо окружность с центром на оси вращения, либо точка этой оси.

Пример поверхности вращения дает обычная электрическая лампочка (рис. 17).

Пусть плоская кривая $\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$ задана в полуплоскости $y \geqslant 0$. Тогда поверхность, образованная вращением этой кривой вокруг оси OX, задается уравнением $F(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$. Аналогично задаются уравнения поверхностей вращения вокруг осей OY и OZ.

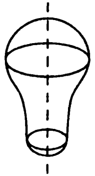


Рис. 17

Цилиндром [*цилиндрической поверхностью*] называется поверхность, образованная прямой (*обра-*

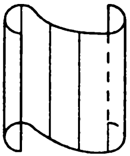


Рис. 18

зующей), которая при перемещении в пространстве не меняет направления и постоянно пересекает определенную линию (*направляющую*).

Если направляющая — плоская кривая, а образующая перпендикулярна плоскости направляющей, цилиндр называется *прямым* (рис. 18). Если при этом направляющая является окружностью, говорят о *прямом круговом* цилиндре (только такой цилиндр изучают в школе).

Уравнение вида $F(x, y) = 0$ определяет в пространстве $OXYZ$ цилиндр с образующей, параллельной оси OZ, и направляющей в плоскости OXY. Аналогично, уравнения, в которых отсутствует переменная x или y, определяют цилиндры с образующими, параллельными оси OX или OY соответственно.

Проекция линии пересечения поверхностей на координатную плоскость

Пусть линия задана общими уравнениями

$$\begin{cases} f(x, y, z) = 0, \\ g(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

из которых можно исключить переменную z, преобразовав систему в уравнение $h(x, y) = 0$. Последнее уравнение определяет линию, полученную проектированием точек исходной линии вдоль оси OZ на плоскость OXY. Аналогично получаются уравнения проекций на плоскости OXZ и OYZ.

Пример 4. Пересечение поверхностей

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 2)z = 0, \\ x^2 + y^2 = 2 - z \end{cases}$$

состоит из точки (0; 0; 2) и окружности $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = 1. \end{cases}$ Уравнение проекции этого множества на плоскость OXY получается следующим образом. Из второго уравнения

$$z = 2 - (x^2 + y^2).$$

Подставив это выражение в первое уравнение и проведя упрощающие преобразования, получим:

$$x^2 + y^2 - (x^2 + y^2)(2 -(x^2 + y^2)) = 0,$$

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - 1) = 0,$$

$$\text{т.е. } \left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{array}\right. \blacksquare$$

§ 3.2. Прямая на плоскости

Общее уравнение прямой

Любая прямая на плоскости в декартовой системе координат OXY может быть задана уравнением вида

$$Ax + By + C = 0,$$

называемым *общим* уравнением прямой.

Коэффициенты $(A;\ B)$ задают *нормальный вектор* прямой $\bar{n}$, т.е. вектор, перпендикулярный этой прямой (рис. 19). Коэф-

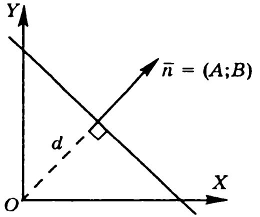


Рис. 19

фициент C связан с расстоянием d от прямой до начала координат формулой

$$d = \frac{|C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

При любом $\lambda \neq 0$ уравнение

$$(\lambda A)x + (\lambda B)y + \lambda C = 0$$

определяет ту же прямую, т.е. общее уравнение прямой не единственно. При $A^2 + B^2 = 1$, $C = -d < 0$ уравнение называется *нормальным* уравнением прямой.

Частные случаи

$A = 0$, т.е. $By + C = 0$ — горизонтальная прямая;

$B = 0$, т.е. $Ax + C = 0$ — вертикальная прямая;

$C = 0$, т.е $Ax + By = 0$ — прямая проходит через начало координат.

Расстояние от точки $M(x_0; y_0)$ до прямой l: $Ax + By + C = 0$ задается формулой

$$\rho(M, l) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Другие виды уравнений прямой

№	Формула (*название*)	Приведение к общему виду	Геометрический смысл коэффициентов
1	$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$	$Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0$	$\boldsymbol{n} = (A;\ B)$ — нормальный вектор, $(x_0;\ y_0)$ — точка на прямой
2	$y = kx + b$ (*с угловым коэффициентом*)	$kx - y + b = 0$	k — тангенс угла наклона к оси OX, $(0;\ b)$ — точка пересечения с осью OY
3	$\dfrac{x - x_0}{p} = \dfrac{y - y_0}{q}$ (*каноническое*)	$qx - py + (py_0 - qx_0) = 0$	$\boldsymbol{l} = (p;\ q)$ — направляющий вектор, $(x_0;\ y_0)$ — точка на прямой
4	$\begin{cases} x = x_0 + pt, \\ y = y_0 + qt \end{cases}$ (*параметрич.*)	То же	То же
5	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ (*в отрезках*)	$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} - 1 = 0$	$(a;\ 0)$ — точка пересечения с OX, $(0;\ b)$ — точка пересечения с OY
6	$\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$	См. № 3	$(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$ — точки на прямой

Взаимное расположение прямых

№	Уравнения	Угол между прямыми	Условие парал-лельн.	Условие пер-пендикулярн.
1	$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ $A_2x + B_2y + C_2 = 0$	$\cos\varphi = \dfrac{\lvert A_1A_2 + B_1B_2\rvert}{\sqrt{(A_1^2 + B_1^2)(A_2^2 + B_2^2)}}$	$\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$	$A_1A_2 + B_1B_2 = 0$
2	$y = k_1x + b_1$ $y = k_2x + b_2$	$\operatorname{tg}\varphi = \left\lvert\dfrac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2}\right\rvert$	$k_1 = k_2$	$k_1k_2 = -1$
3	$\dfrac{x - x_1}{p_1} = \dfrac{y - y_1}{q_1}$ $\dfrac{x - x_2}{p_2} = \dfrac{y - y_2}{q_2}$	$\cos\varphi = \dfrac{\lvert p_1p_2 + q_1q_2\rvert}{\sqrt{(p_1^2 + q_1^2)(p_2^2 + q_2^2)}}$	$\dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{q_1}{q_2}$	$p_1p_2 + q_1q_2 = 0$

Если прямые заданы иными способами, рекомендуется преобразовать уравнения к общему или каноническому виду и затем воспользоваться данной таблицей.

§ 3.3. Плоскость в пространстве. Взаимное расположение плоскостей

Общее уравнение плоскости

Плоскость в декартовой системе координат $OXYZ$ может быть задана уравнением вида

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

называемым *общим* уравнением плоскости.

Коэффициенты $(A; B; C)$ задают *нормальный вектор* плоскости $\bar{n}$, т.е. вектор, перпендикулярный этой плоскости. Коэффициент D связан с расстоянием d от плоскости до начала координат формулой

$$d = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

При любом $\lambda \neq 0$ уравнение

$$(\lambda A)x + (\lambda B)y + (\lambda C)z + \lambda D = 0$$

определяет ту же плоскость, т.е. общее уравнение плоскости не единственно. При $A^2 + B^2 + C^2 = 1$, $D = -d < 0$ уравнение называется *нормальным* уравнением плоскости. В этом случае его можно записать, используя направляющие косинусы вектора $\bar{n}$ (см. §2.4), в виде

$$\cos\alpha x + \cos\beta y + \cos\gamma z - d = 0.$$

Частные случаи

$A = 0$, т.е. $By + Cz + D = 0$ — плоскость параллельна оси OX;

$B = 0$, т.е. $Ax + Cz + D = 0$ — плоскость параллельна оси OY;

$C = 0$, т.е $Ax + By + D = 0$ — плоскость параллельна оси OZ;

$D = 0$, т.е $Ax + By + Cz = 0$ — плоскость проходит через начало координат;

$A = B = 0$, т.е. $Cz + D = 0$ — плоскость параллельна плоскости OXY;

$A = C = 0$, т.е. $By + D = 0$ — плоскость параллельна плоскости OXZ;

$B = C = 0$, т.е $Ax + D = 0$ — плоскость параллельна плоскости OYZ.

Расстояние от точки $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до плоскости p: $Ax + By + Cz + D = 0$ задается формулой

$$\rho(M, p) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Другие виды уравнений плоскости

1) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ плоскость с нормальным вектором $\bar{n} = (A;\ B;\ C)$, проходящая через точку $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ (рис. 20).

2) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ (уравнение в отрезках) — плоскость, пересекающая оси координат OX, OY и OZ в точках $(a;\ 0;\ 0)$, $(0;\ b;\ 0)$ и $(0;\ 0;\ c)$ (рис. 20).

3) $$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = 0$$

— плоскость, проходящая через точку $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ параллельно двум неколлинеарным векторам $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ и $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$ (рис. 21).

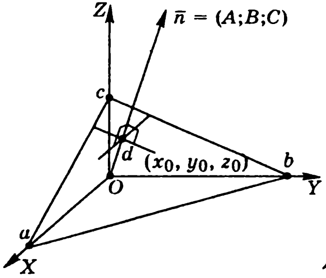


Рис. 20

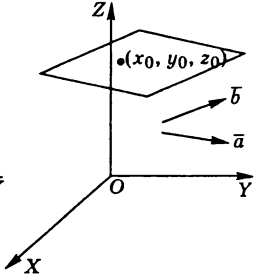


Рис. 21

4) $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$

— плоскость, проходящая через точки $(x_1; y_1; z_1)$, $(x_2; y_2; z_2)$, $(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой (рис. 22).

Уравнения плоскости, проходящей через данные прямые, содержатся в §§3.5, 3.6.

Взаимное расположение плоскостей

Следующие формулы описывают взаимное расположение ***двух*** плоскостей

$$p_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$p_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

с нормальными векторами $\bar{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ и $\bar{n}_2 = (A_2; B_2; C_2)$.

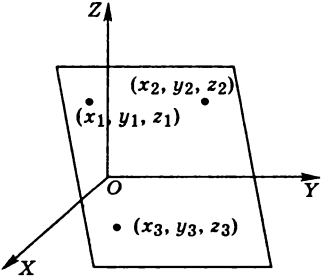


Рис. 22

Угол между p_1 и p_2:

$$\cos\varphi = \frac{|\bar{n}_1 \bar{n}_2|}{|\bar{n}_1||\bar{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Признак параллельности несовпадающих плоскостей

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}, \text{ т.е } \bar{n}_1 = \lambda \bar{n}_2,$$

$$\text{но } \bar{D}_1 \neq \lambda \bar{D}_2.$$

Признак совпадения плоскостей

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}.$$

Признак перпендикулярности плоскостей

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0, \text{ т.е. } \bar{n}_1 \perp \bar{n}_2.$$

Расстояние между параллельными плоскостями

$$p_1: A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0,$$

$$p_2: A(x - x_2) + B(y - y_2) + C(z - z_2) = 0$$

задается формулой

$$\rho(p_1; p_2) = \frac{|A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \left|\text{пр}_{\bar{n}}\bar{a}\right|,$$

где $\bar{n} = (A; B; C)$, $\bar{a} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$.

Взаимное расположение ***трех*** плоскостей определяется свойствами системы линейных уравнений (см. §1.7)

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = -D_1, \\ A_2x + B_2y + C_2z = -D_2, \\ A_3x + B_3y + C_3z = -D_3. \end{cases}$$

1) Если $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0,$

плоскости имеют единственную общую точку. Ее можно найти методами, описанными в §1.8.

2) Если

$$\text{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \neq \text{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix},$$

то общих точек у трех плоскостей нет. Если при этом среди плоскостей нет параллельных, эти плоскости образуют призму (рис. 23).

3) Если

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 2,$$

то плоскости пересекаются по общей прямой. Если среди таких плоскостей нет совпадающих, их расположение иллюстрирует рис. 24.

4) Если

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix} = 1,$$

то все три плоскости совпадают.

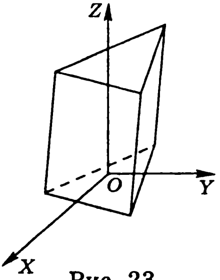


Рис. 23

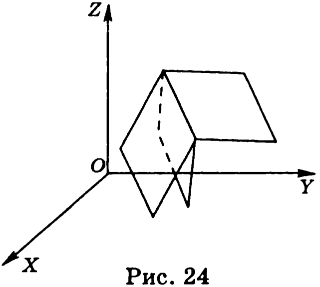


Рис. 24

§ 3.4. Прямая в пространстве

Прямая в декартовой системе координат может быть задана следующими способами.

1) *Общие* уравнения

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

где $(A_1;\ B_1;\ C_1) \neq \lambda(A_2;\ B_2;\ C_2)$, т.е. прямая образована пересечением двух плоскостей с неколлинеарными нормальными векторами $\bar{n}_1 = (A_1;\ B_1;\ C_1)$ и $\bar{n}_2 = (A_2;\ B_2;\ C_2)$.

2) *Параметрические* уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + q_x t, \\ y = y_0 + q_y t, \\ z = z_0 + q_z t, \end{cases}$$

где $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — точка прямой, $\bar{q} = (q_x;\ q_y;\ q_z)$ — направляющий вектор прямой. Эти уравнения допускают векторную форму записи: $\bar{r}(t) = \bar{r}_0 + \bar{q}\,t$, где $\bar{r}(t)$ — радиус-вектор текущей точки прямой, $\bar{r}_0$ — радиус-вектор точки $(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $\bar{q}$ — направляющий вектор (рис. 25).

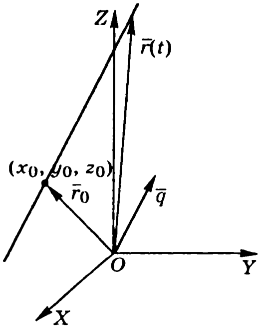


Рис. 25

3) *Канонические* уравнения

$$\frac{x - x_0}{q_x} = \frac{y - y_0}{q_y} = \frac{z - z_0}{q_z},$$

что равносильно заданию прямой как линии пересечения трех плоскостей, проектирующих эту прямую на координатные плоскости (рис. 26). Смысл точки $(x_0; y_0; z_0)$ и вектора $\bar{q} = (q_x; q_y; q_z)$ — тот же, что и в параметрических уравнениях.

Уравнения прямой, ***проходящей через две точки*** $(x_1; y_1; z_1)$ и $(x_2; y_2; z_2)$:

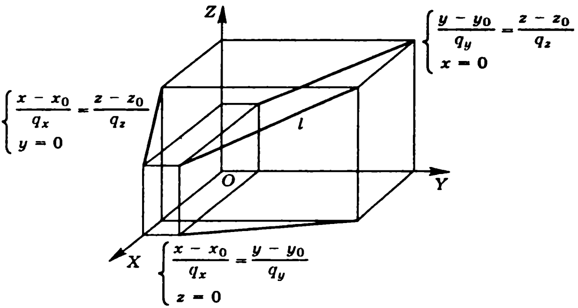


Рис. 26

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Пример 1. Уравнения прямой, проходящей через точки (1; 0; 1) и (1; 1; 0):

$$\frac{x - 1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z - 1}{-1}$$

Нуль в знаменателе в первом члене пропорции означает, что для всех точек прямой $x - 1 = 0$ (см. замечание в §1.1). ■

Расстояние от точки $M(x_1;\ y_1;\ z_1)$ до прямой

$$l\colon\ \frac{x - x_0}{q_x} = \frac{y - y_0}{q_y} = \frac{z - z_0}{q_z}$$

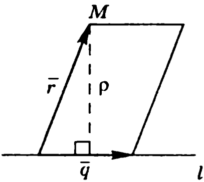


Рис. 27

задается формулой (рис. 27)

$$\rho(M,\, l) = \frac{|\bar r \times \bar q|}{|\bar q|},$$

где $\bar r = (x_1 - x_0;\ y_1 - y_0;\ z_1 - z_0)$, $\bar q = (q_x;\ q_y;\ q_z)$.

Свойства векторного произведения и способ его вычисления описаны в §2.7.

Преобразование общих уравнений прямой к каноническому виду

$$1)\ \bar q = \bar n_1 \times \bar n_2 = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}.$$

2) Точка $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — частное решение общих уравнений прямой, рассматриваемых как система линейных уравнений. Например, при $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ можно взять $z_0 = 0$. Тогда

$$x_0 = -\begin{vmatrix} D_1 & B_1 \\ D_2 & B_2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix},\ y_0 = -\begin{vmatrix} A_1 & D_1 \\ A_2 & D_2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}.$$

§ 3.5. Взаимное расположение прямой и плоскости

В следующих формулах предполагается, что плоскость задана общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а прямая — каноническими уравнениями $\frac{x - x_0}{q_x} = \frac{y - y_0}{q_y} = \frac{z - z_0}{q_z}$ (или соответствующими параметрическими уравнениями). Если это не так, следует прежде всего привести уравнения к указанному виду.

Угол между прямой и плоскостью:

$$\sin\varphi = |\cos(\bar{n}, \bar{q})| = \frac{|Aq_x + Bq_y + Cq_z|}{\sqrt{(A^2 + B^2 + C^2)(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)}}.$$

Признак ***параллельности*** прямой и плоскости:

$$Aq_x + Bq_y + Cq_z = 0, \text{ т.е. } \bar{n} \perp \bar{q}.$$

Признак ***принадлежности*** прямой к плоскости:

$$\begin{cases} Aq_x + Bq_y + Cq_z = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$$

Признак ***перпендикулярности*** прямой и плоскости:

$$\frac{A}{q_x} = \frac{B}{q_y} = \frac{C}{q_z}, \text{ т.е. } \bar{n} = \lambda\bar{q}.$$

Точка пересечения прямой и плоскости может быть найдена путем решения системы, составленной из общего уравнения плоскости и канонических уравнений прямой. Однако проще подставить в уравнение плоскости **параметрические** уравнения прямой:

$$A(x_0 + q_x t) + B(y_0 + q_y t) +$$
$$+ C(z_0 + q_z t) + D = 0,$$

затем найти неизвестное t и с его помощью рассчитать $x = x_0 + q_x t$, $y = y_0 + q_y t$, $z = z_0 + q_z t$.

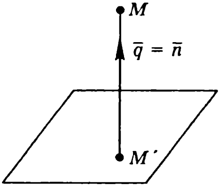


Рис. 28

Пример 1. Найти проекцию точки $M(5; 2; -1)$ на плоскость

$$2x - y + 3z + 23 = 0.$$

Решение. Проекция M' есть точка пересечения плоскости и перпендикулярной ей прямой MM' (рис. 28).

$\bar{q} = \bar{n} = (2; -1; 3)$; $(x_0; y_0; z_0) = (5; 2; -1)$;

$2(5 + 2t) - (2 - t) + 3(-1 + 3t) + 23 = 0$;

$t = -2$;

$x = 5 + 2t = 1$; $y = 2 - t = 4$; $z = -1 + 3t = -7$.

Проекция $M'(1; 4; -7)$. ■

Пучок плоскостей

Множество всех плоскостей, проходящих через прямую, заданную общими уравнениями

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

называется *пучком* плоскостей. Его уравнение:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \\ + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

где $(\alpha; \beta) \neq (0; 0)$. Если $\alpha \neq 0$, $\lambda = \frac{\beta}{\alpha}$, предыдущее уравнение равносильно уравнению

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \\ + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

Пример 2. Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} 3x - y + 2z + 9 = 0, \\ x + z - 3 = 0 \end{cases}$$

параллельно оси OX.

Решение. Искомая плоскость принадлежит пучку

$$3x - y + 2z + 9 + \lambda(x + z - 3) = 0.$$

В силу параллельности оси OX коэффициент при x равен нулю, т.е. $3 + \lambda = 0$. Уравнение плоскости $3x - y + 2z + 9 - 3(x + z - 3) = 0$, т.е. $-y - z + 18 = 0$. Более удобное уравнение той же плоскости имеет положительные коэффициенты при переменных: $y + z - 18 = 0$. ■

Расстояние от прямой до плоскости, которой эта прямая параллельна, выражается формулой расстояния от точки (на прямой) до плоскости (см. §3.3).

§ 3.6. Взаимное расположение прямых

В следующих формулах прямые l_1 и l_2 заданы каноническими уравнениями:

$$\frac{x - x_1}{p_x} = \frac{y - y_1}{p_y} = \frac{z - z_1}{p_z}$$

и

$$\frac{x - x_2}{q_x} = \frac{y - y_2}{q_y} = \frac{z - z_2}{q_z}$$

(или соответствующими параметрическими уравнениями). Для упрощения обозначений введен вектор $\bar{r} = (r_x;\ r_y;\ r_z) = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$.

Признак ***компланарности*** прямых:

Если

$$\begin{vmatrix} p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix} = 0,$$

прямые *компланарны*, т.е. лежат в одной плоскости. В противном случае прямые *скрещиваются*.

Признак ***параллельности*** прямых:

$$\frac{p_x}{q_x} = \frac{p_y}{q_y} = \frac{p_z}{q_z}, \text{ т.е. } \bar{p} = \lambda \bar{q}.$$

Если при этом $\frac{p_x}{r_x} = \frac{p_y}{r_y} = \frac{p_z}{r_z}$, прямые *совпадают*.

Прямые *пересекаются*, если они компланарны, но не параллельны. В этом случае точка пересечения прямых может быть найдена аналогично точке пересечения прямой и плоскости (см. §3.5 и пример далее).

Уравнение плоскости, проходящей через ***пересекающиеся*** прямые l_1 и l_2:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix} = 0.$$

(!) Для ***скрещивающихся*** прямых та же формула задает плоскость, проходящую через прямую l_1 параллельно прямой l_2.

Уравнение плоскости, проходящей через ***параллельные*** прямые l_1 и l_2:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ p_x & p_y & p_z \\ r_x & r_y & r_z \end{vmatrix} = 0.$$

(В средней строке вместо вектора $\bar{p}$ можно использовать вектор $\bar{q}$.)

Пример 1. Доказать, что прямые $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-5}{4}$ и $x = 3t + 7$, $y = 2t + 2$, $z =$

$= -2t + 1$ пересекаются. Написать уравнение плоскости, проходящей через них. Найти точку пересечения прямых.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 7-1 & 2+2 & 1-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \\ 6 & 4 & -4 \end{vmatrix} = 0,$$

но $\frac{2}{3} \neq \frac{-3}{2} \neq \frac{4}{-2}$. Поэтому прямые пересекаются. Уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-5 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

или $-2(x - 1) + 16(y + 2) + 13(z - 5) = 0$. Подставляя параметрические уравнения второй прямой в канонические уравнения первой, получим: $\frac{3t+6}{2} = \frac{2t+4}{-3} = \frac{-2t-4}{4}$, откуда $t = -2$. Точка $(x; y; z) = (1; -2; 5)$. ■

Расстояние между ***параллельными*** прямыми (рис. 29):

$$\rho(l_1; l_2) = \frac{|\bar{p} \times \bar{r}|}{|\bar{p}|}.$$

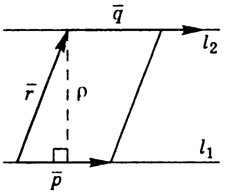


Рис. 29

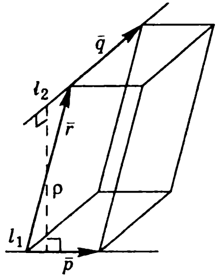


Рис. 30

Расстояние между ***скрещивающимися*** прямыми (рис. 30):

$$\rho(l_1;\, l_2) = \frac{|\bar{p}\bar{q}\bar{r}|}{|\bar{p} \times \bar{q}|}.$$

§ 3.7. Эллипс, гипербола, парабола

Алгебраической кривой второго порядка называется кривая Г, уравнение которой в декартовой системе координат имеет вид

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Общая теория таких уравнений изложена в §§3.9, 3.11. Может оказаться, что уравнение определяет вырожденную кривую (пустое множество, точку, прямую, пару прямых).

Если же кривая Г невырожденная, то для нее найдется такая декартова система координат, в которой *каноническое уравнение* этой кривой имеет один из следующих трех видов:

Эллипс: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a \geqslant b > 0$.

Гипербола: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$.

Парабола: $y^2 = 2px$, $p > 0$.

Эллипс, заданный каноническим уравнением, изображен на рис. 31. Параметры a и b называются *полуосями* эллипса (*большой* и *малой* соответственно), точки $A_1(-a;\ 0)$,

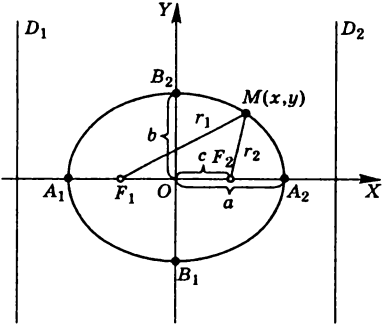


Рис. 31

$A_2(a;\ 0)$, $B_1(0;\ -b)$ и $B_2(0;\ b)$ — его *вершинами*, оси симметрии OX и OY — *главными осями*, а центр симметрии O — *центром* эллипса.

Точки $F_1(-c;\ 0)$ и $F_2(c;\ 0)$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, называются *фокусами* эллипса, векторы $\overrightarrow{F_1M}$ и $\overrightarrow{F_2M}$ — *фокальными радиус-векторами*, а числа $r_1 = |\overrightarrow{F_1M}|$ и $r_2 = |\overrightarrow{F_2M}|$ — *фокальными радиусами* точки M, принадлежащей эллипсу. В частном случае $a = b$ фокусы F_1 и F_2 совпадают с центром, а каноническое уравнение имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, или $x^2 + y^2 = a^2$, т.е. описывает окружность радиуса a с центром O.

Число $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ $(0 \leqslant e < 1)$ называется *эксцентриситетом* эллипса и является мерой его «сплюснутости» (при $e = 0$ эллипс является окружностью).

Прямые D_1: $x = -a/e$ и D_2: $x = a/e$, перпендикулярные оси OX и проходящие на расстоянии a/e от центра, называются *директрисами* эллипса.

Основные соотношения

Если $M(x_0; y_0)$ — точка эллипса, то:

1) $r_1(M) = a + ex_0$; $r_2(M) = a - ex_0$;

2) $r_1(M) + r_2(M) = \text{const} = 2a$;

3) $\dfrac{r_1(M)}{\rho(M, D_1)} = \dfrac{r_2(M)}{\rho(M, D_2)} = \text{const} = e$

(в знаменателях стоят расстояния от точки M до директрис).

4) Уравнение касательной в точке M: $\dfrac{x_0 x}{a^2} + \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$. Касательная образует равные углы с фокальными радиус-векторами точки M.

Гипербола, заданная каноническим уравнением, изображена на рис. 32. Она состоит

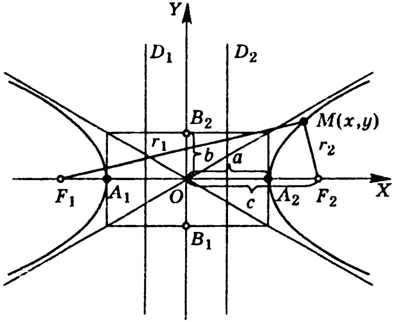


Рис. 32

из двух *ветвей*. Параметры a и b называются *полуосями* гиперболы (*действительной* и *мнимой* соответственно), точки $A_1(-a;\ 0)$ и $A_2(a;\ 0)$ — ее *вершинами*, оси симметрии OX и OY — *действительной* и *мнимой осями*, центр симметрии O — *центром* гиперболы.

Прямые $y = \pm\frac{b}{a}x$ называются *асимптотами* гиперболы.

Точки $F_1(-c;\ 0)$ и $F_2(c;\ 0)$, где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, называются *фокусами* гиперболы, векторы $\overrightarrow{F_1M}$ и $\overrightarrow{F_2M}$ — *фокальными радиус-векторами*, а числа $r_1(M) = |\overrightarrow{F_1M}|$ и $r_2(M) = |\overrightarrow{F_2M}|$ — *фокальными радиусами* точки M, принадлежащей гиперболе.

Число $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$ $(1 < e < +\infty)$ называется *эксцентриситетом* гиперболы. В частном случае $a = b$ гипербола называется *равносторонней*, ее асимптоты перпендикулярны, а эксцентристет $e = \sqrt{2}$.

Прямые D_1: $x = -a/e$ и D_2: $x = a/e$, перпендикулярные действительной оси и проходящие на расстоянии a/e от центра, называются *директрисами* гиперболы.

Основные соотношения

Если $M(x_0; y_0)$ — точка гиперболы, то:

1) $r_1(M) = \pm a \pm ex_0$; $r_2(M) = \mp a \pm ex_0$ (верхние знаки относятся к точкам, лежащим на правой, а нижние — на левой ветви гиперболы);

2) $|r_1(M) - r_2(M)| = \text{const} = 2a$;

3) $\dfrac{r_1(M)}{\rho(M, D_1)} = \dfrac{r_2(M)}{\rho(M, D_2)} = \text{const} = e$;

4) уравнение касательной в точке M: $\dfrac{x_0 x}{a^2} - \dfrac{y_0 y}{b^2} = 1$. Касательная образует равные углы с фокальными радиус-векторами точки M.

Школьное уравнение гиперболы

Уравнение $y = \dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ задает равностороннюю гиперболу с асимптотами $x = 0$ и $y = 0$. Каноническая система координат этой гиперболы повернута на 45° (рис. 33), полуоси $a = b = \sqrt{2|k|}$, каноническое уравнение $\dfrac{(x')^2}{2|k|} - \dfrac{(y')^2}{2|k|} = 1$.

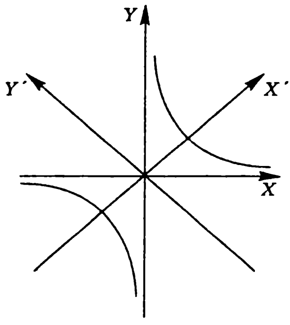


Рис. 33

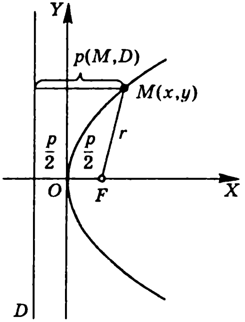


Рис. 34

Сопряженные гиперболы

Две гиперболы называются *сопряженными*, если в некоторой системе координат одна из них задается каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, а другая — *сопряженным* уравнением $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$. Другими словами, сопряженные гиперболы имеют общие асимптоты и равные полуоси, а действительная ось одной из них является мнимой осью другой.

Парабола, заданная каноническим уравнением, изображена на рис. 34. Число p называется *параметром* параболы, точка

O — ее *вершиной*, ось симметрии *OX* — *осью* параболы.

Точка $F(p/2;\ 0)$ называется *фокусом* параболы, вектор $\overrightarrow{FM}$ — *фокальным радиус-вектором*, а число $r(M) = |\overrightarrow{FM}|$ — *фокальным радиусом* точки M, принадлежащей параболе.

Эксцентриситетом параболы считается число 1 (о причинах этого см. далее).

Прямая D: $x = -p/2$, перпендикулярная оси и проходящая на расстоянии $p/2$ от вершины параболы, называется *директрисой* параболы.

Основные соотношения

Если $M(x_0;\ y_0)$ — точка параболы, то:

1) $\dfrac{r(M)}{\rho(M, D_1)} = \text{const} = 1.$

(Сравните с аналогичными соотношениями для эллипса и гиперболы.)

2) Уравнение касательной в точке M: $y_0 y = p(x + x_0)$. Касательная образует равные углы с фокальным радиус-вектором точки M и лучом, исходящим из точки M и сонаправленным с осью параболы.

3) $p = \rho(F, D)$.

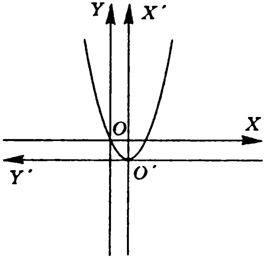


Рис. 35

Школьное уравнение параболы

Уравнение $y = Ax^2 + Bx + C$ определяет параболу с вершиной в точке $O'\left(-\frac{B}{2A}; C - \frac{B^2}{4A}\right)$ и вертикальной осью (рис. 35). Каноническая система координат получается из исходной поворотом на 90° и переносом начала координат в точку O'. Параметр $p = \frac{1}{2|A|}$.

§ 3.8. Полярные координаты

На плоскости введена *полярная система координат*, если заданы:

1) Точка O, называемая *полюсом*.

2) Луч u, исходящий из точки O и называемый *полярной осью*.

Полярными координатами точки $M \neq O$ называются

- *полярный радиус* $r = \overrightarrow{OM} > 0$;
- *полярный угол* φ — угол, на который следует повернуть ось u, чтобы ее направление совпало с направлением вектора $\overrightarrow{OM}$ (как обычно, положительным направлением поворота считается поворот против часовой стрелки). Полярный угол определен с точностью до $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Значение $\varphi \in (-\pi; \pi]$ называется *главным значением* полярного угла.

Для полюса O считают $r = 0$, а угол φ не определен.

Если полюс совпадает с началом декартовой системы координат, а полярная ось — с положительной полуосью абсцисс (и при этом кратчайший поворот от оси OX к оси OY происходит против часовой стрелки), декартовы и полярные координаты произвольной точки $M \neq 0$ связаны формулами (рис. 36)

$$x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Для $M \notin OY$ $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$.

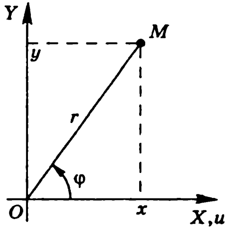


Рис. 36

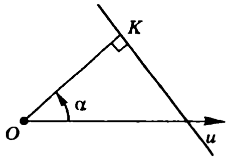


Рис. 37

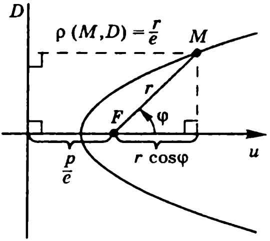


Рис. 38

Уравнение линии в полярных координатах может быть записано в виде $F(r, \varphi) = 0$ или в виде $r = f(\varphi)$.

Пример 1. Определить, какую линию представляет уравнение

$r = 2a\cos\varphi$ $(a > 0)$.

Решение. В результате преобразований

$r^2 = 2ar\cos\varphi$,

$x^2 + y^2 = 2ax$,

$(x - a)^2 + y^2 = a^2$

приходим к уравнению окружности радиуса a с центром $(a; 0)$. ■

Уравнение прямой l, не проходящей через полюс:

$$r = p/\cos(\varphi - \alpha),$$

где $p = \rho(O, l) = |\overrightarrow{OK}|$ (рис. 37), $\alpha = (\widehat{u, \overrightarrow{OK}})$.

Уравнение эллипса, ветви гиперболы, параболы в случае, когда полюс O совпадает с фокусом F, а полярная ось сонаправлена оси кривой (рис. 38):

$$r = \frac{p}{1 - e \cdot \cos\varphi}$$

где $p = e \cdot \rho(F, D)$. Для эллипса и гиперболы берется расстояние от фокуса до ближайшей к нему директрисы.

§ 3.9. Пятичленное уравнение второго порядка

Пятичленным уравнением 2-го порядка называется уравнение вида

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где $A^2 + C^2 \neq 0$ (в этом уравнении отсутствует член $2Bxy$). Выделяя полные квадраты, можно привести такое уравнение к более простому виду, который позволяет построить кривую.

Полный список возможных случаев приведен в таблице на страницах 109–111.

Пример 1. $2x^2 - y^2 + 8x + 4y + 8 = 0$ — уравнение гиперболического типа;

$2(x^2 + 4x) - (y^2 - 4y) + 8 = 0;$

$$2(x^2 + 4x + 4) - 8 - (y^2 - 4y + 4) + 4 + 8 = 0;$$
$$2(x + 2)^2 - (y - 2)^2 = -4;$$

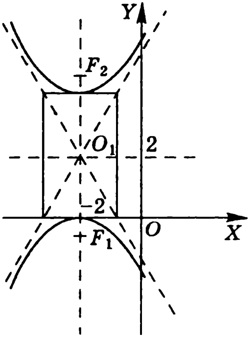


Рис. 39

$$-\frac{(x+2)^2}{2} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$ — гипербола (рис. 39).

Центр гиперболы O' $(-2; 2)$.

Горизонтальная (мнимая) полуось $a = \sqrt{2}$.

Вертикальная (действительная) полуось $b = 2$. ■

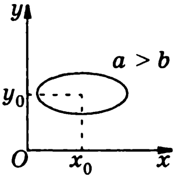
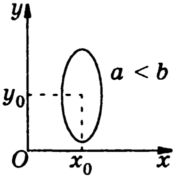
Пример 2. $4x^2 + 9y^2 + 12x - 6y + 10 = 0$ — уравнение эллиптического типа;

$$4(x^2 + 3x) + 9\left(y^2 - \frac{2}{3}y\right) + 10 = 0$$

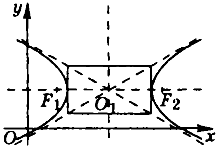
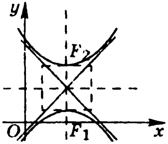
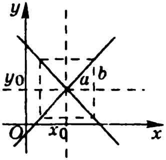
$$4\left(x^2 + 2 \cdot \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}\right) - 9 +$$
$$+ 9\left(y^2 - 2 \cdot \frac{1}{3}y + \frac{1}{9}\right) - 1 + 10 = 0$$

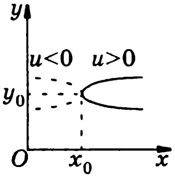
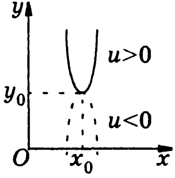
$$4\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 9\left(y - \frac{1}{3}\right)^2 = 0.$$

Уравнение определяет точку $\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{3}\right)$. ■

Тип	Невырожденный случай	Вырожденные случаи
Эллиптический $AC > 0$	Эллипс $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$  	1) Пустое множество [мнимый эллипс] $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1$ 2) Точка $A(x - x_0)^2 + C(y - y_0)^2 = 0$

Окончание таблицы

Тип	Невырожденный случай	Вырожденные случаи
Гиперболический $AC < 0$	Гипербола а) $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ $(a,\, b > 0)$  б) $-\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ $(a,\, b > 0)$ 	Пересекающиеся прямые $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 0$ $\left[y - y_0 = \pm\dfrac{b}{a}(x - x_0)\right]$ 

Параболический $AC = 0$	Парабола а) $(y - y_0)^2 = 2u(x - x_0)$  б) $(x - x_0)^2 = 2u(y - y_0)$ 

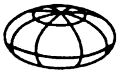
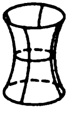
	Исходное уравнение содержит только x или y: $Ax^2 + Dx + F = 0$ ($Cy^2 + Ey + F = 0$) Пусть d — дискриминант. Тогда: $d < 0$ — пустое мн-во; $d = 0$ — прямая; $d > 0$ — 2 параллельных прямых

§ 3.10. Поверхности второго порядка

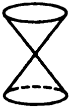
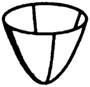
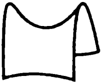
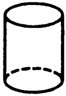
Всякое алгебраическое уравнение второго порядка с тремя переменными, т.е уравнение вида

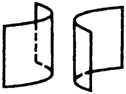
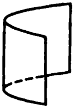
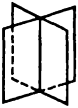
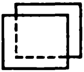
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fzx + \\ + Gx + Hy + Kz + L = 0,$$

можно с помощью перехода к новой системе координат (см. §3.11) преобразовать в одно из перечисленных ниже 17 уравнений, называемых *каноническими*.

№ п/п	Каноническое уравнение	Схематическое изображение	Название поверхности
1	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$		Эллипсоид (в частности, эллипсоид вращения и сфера)
2	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$		Однополостный гиперболоид

Продолжение таблицы

№ п/п	Каноническое уравнение	Схематическое изображение	Название поверхности
3	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = -1$		Двухполостный гиперболоид
4	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2} = 0$		Конус второго порядка
5	$z = \frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}$		Эллиптический параболоид
6	$z = \frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}$		Гиперболический параболоид
7	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$		Эллиптический цилиндр

№ п/п	Каноническое уравнение	Схематическое изображение	Название поверхности
8	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$		Гиперболический цилиндр
9	$y^2 = 2px$		Параболический цилиндр
10	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$		Пара пересекающихся плоскостей
11	$\frac{x^2}{a^2} = 1$		Пара параллельных плоскостей
12	$x^2 = 0$		Пара совпадающих плоскостей

№ п/п	Каноническое уравнение	Схематическое изображение	Название поверхности
13	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 0$		Мнимый конус второго порядка с действительной вершиной (0; 0; 0)
14	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 0$		Пара мнимых плоскостей (пересекающихся по действительной прямой)
15	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = -1$		Мнимый эллипсоид
16	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = -1$		Мнимый эллиптический цилиндр
17	$\frac{x^2}{a^2} = -1$		Пара мнимых параллельных плоскостей

Поверхности № 1–9 называются *невырожденными*, остальные — *вырожденными*. При этом уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 0$ (№ 14) представляет не поверхность, а прямую ($x = 0$, $y = 0$). Однако (по сходству с уравнением № 10) говорят, что оно представляет *пару мнимых плоскостей*, пересекающихся по действительной прямой. Уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = 0$ (№ 13) представляет точку (0; 0; 0). Однако (ср. № 4) говорят, что оно представляет *мнимый конус* с действительной вершиной.

Уравнения № 15, 16, 17 не имеют решений в действительных числах. Однако говорят, что они представляют соответственно *мнимый эллипсоид* (ср. № 1), *мнимый эллиптический цилиндр* (ср. № 7) и *пару мнимых параллельных плоскостей* (ср. № 11).

§ 3.11. Приведение уравнений второго порядка к каноническому виду

Общий метод приведения уравнений 2-го порядка к каноническому виду основан на теории *квадратичных форм* (см. §§4.10, 4.11) и на том, что уравнение 2-го порядка имеет вид

$$q(\bar{x}) + l(\bar{x}) + c = 0,$$

где $q(\bar{x})$ — квадратичная форма (в $\mathbb{R}^2$ или $\mathbb{R}^3$), $l(\bar{x})$ — линейная функция, c — константа.

Уравнение на плоскости:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}$ определяет тип кривой:

$\Delta > 0$ — эллиптический;

$\Delta < 0$ — гиперболический;

$\Delta = 0$ — параболический.

Приведение уравнения кривой к каноническому виду происходит в два этапа. На первом этапе **ортогональным преобразованием** приводится к каноническому виду квадратичная форма:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = \lambda_1(x')^2 + \lambda_1(y')^2.$$

Старые и новые координаты связаны соотношениями

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ или } \begin{cases} x = p_{11}x' + p_{12}y', \\ y = p_{21}x' + p_{22}y'. \end{cases}$$

Подстановка этих формул в исходное уравнение дает пятичленное уравнение 2-го порядка:

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_1(y')^2 + D'x' + Ey' + F = 0.$$

Дальнейшие действия описаны в §3.9.

Пример 1. Построить кривую:

$$13x^2 + 10xy + 13y^2 = 72.$$

Решение. Квадратичная форма $13x^2 + 10xy + 13y^2$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 13 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix}$ ($\Delta = 144$, эллиптический тип).

$$\begin{vmatrix} 13-\lambda & 5 \\ 5 & 13-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 26\lambda + 144 = 0.$$

Собственные числа: $\lambda_1 = 8$, $\lambda_2 = 18$.

Ортонормированный собственный базис:

$$\bar{e}_1^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1;\ 1);\ \bar{e}_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1;\ 1).$$

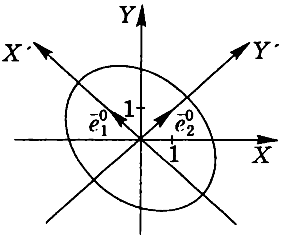


Рис. 40

Уравнение в новых координатах:

$$8(x')^2 + 18(y')^2 = 72.$$

Каноническое уравнение: $\dfrac{(x')^2}{9} + \dfrac{(y')^2}{4} = 1$ (эллипс, рис. 40). ■

Уравнение в пространстве

$$q(x, y, z) + Gx + Hy + Kz + L = 0 \ (q \neq 0)$$

приводится к каноническому виду аналогичным методом. На первом этапе ортогональная замена переменных позволяет получить уравнение

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + \lambda_3(z')^2 + G'x' + H'y' + \\ + K'z' + L = 0,$$

где $\lambda_1 \neq 0$ и $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant |\lambda_3|$.

Далее

$$\lambda_1(x')^2 + G'x' = \lambda_1\left(x' + \frac{G'}{2\lambda_1}\right)^2 - \frac{(G')^2}{4\lambda_1} =$$

$$= \lambda_1(x'')^2 - \frac{(G')^2}{4\lambda_1}.$$

Если $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$, то члены с y' и z' преобразуются тем же способом. (Это случаи № 1–4, 13, 15 таблицы в §3.10). Если $\lambda_3 = 0$, линейные члены могут остаться в каноническом уравнении (случаи № 5, 6, 9) или сократиться в ходе преобразований (остальные случаи).

Раздел 4

ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 4.1. Понятие линейного пространства

Линейным пространством называется множество L произвольной природы, если в нем введены операции *сложения* элементов и *умножения* элемента на число. Эти операции должны обладать естественными свойствами обычных сложения и умножения. А именно, для любых x, y, $z \in L$ и α, $\beta \in \mathbb{R}$ должны выполняться следующие соотношения.

№	Формула	Название
1	$x + y = y + x$	*Коммутативный* [*переместительный*] закон сложения
2	$(x + y) + z = x + (y + z)$	*Ассоциативный* [*сочетательный*] закон сложения

Окончание таблицы

№	Формула	Название
3	Существует $\theta \in L$, такой что $x + \theta = x$ при всех $x \in L$	Наличие *нулевого* элемента [*нуля*]
4	Для любого $x \in L$ найдется $(-x) \in L$, такой что $x + (-x) = \theta$	Наличие *противоположных* элементов
5	$\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$	*Ассоциативный* закон умножения
6	$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$	*Дистрибутивный* [*распределительный*] закон для суммы элементов
7	$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$	*Дистрибутивный* [*распределительный*] закон для суммы чисел
8	$1x = x$	Свойство единицы

Эти 8 свойств называются *аксиомами* линейного пространства. Из них следуют еще три свойства, верных в любом линейном пространстве:

9) Не существует двух не равных друг другу нулей. В самом деле, если элементы $\theta_1, \theta_2 \in L$ обладают свойством нуля (№ 3), то $\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2$.

10) $0x = 0$ для всех $x \in L$.

11) $(-1)x = (-x)$ для всех $x \in L$.

Элементы линейного пространства называются также его *векторами*.

Основные примеры линейных пространств

1) Пространство $\mathbb{R}^n$ всех n-мерных арифметических векторов (см. §1.1). В частности ($n = 1$), само множество $\mathbb{R}$ вещественных чисел.

2) Пространства V^k геометрических векторов (см. §§2.1, 2.2, 2.5). Возможны значения $k = 1, 2, 3$.

3) Пространство $C[a; b]$ всех функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$.

4) Пространство $\mathcal{P}^n$ всех многочленов степени меньше n, т.е. функций вида $p(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_{n-1} t^{n-1}$, где $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, ..., n - 1$.

(!) Примеры множеств, которые не являются линейными пространствами:

1) Множество n-мерных целочисленных арифметических векторов вида $\bar{a} = (a_1, ..., a_n)$, где $a_i \in \mathbb{Z}$. (В этом множестве выполнимо сложение, но невыполнимо умножение на нецелые числа.)

2) Множество геометрических векторов единичной длины. (Невозможны ни сложение, ни умножение.)

3) Множество всех многочленов степени n. (Сумма таких многочленов может иметь меньшую степень.)

4) Любое множество, не содержащее нулевого элемента. (Этот пример обобщает примеры 2 и 3.)

§ 4.2. Базис, координаты, размерность

Линейная зависимость

Линейная комбинация элементов линейного пространства [векторов] есть выражение вида

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k,$$

где $e_1, e_2, \dots, e_k$ — векторы, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ — числа (для арифметических и геометрических векторов эта формула записывалась в §§1.1 и 2.5).

Система векторов $e_1, e_2, \dots, e_k$ *линейно зависима*, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ $\dots, \lambda_k$, не равные одновременно нулю, такие что

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_k e_k = 0.$$

В противном случаи векторы называются *линейно независимыми*.

Критерий линейной зависимости. Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из ее векторов равен линейной комбинации остальных.

Пример 1.

а) Система функций $\sin x$, $\cos x$, $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ линейно зависима, так как $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ (т.е. $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = 0$).

б) Система функций $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$ линейно независима. Соотношение между ними $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ не является линейной комбинацией. ■

Примеры для арифметических и геометрических векторов см. в §§1.1 и 2.5. Признаки линейной зависимости, описанные в §1.1, дословно переносятся на случай произвольного линейного пространства.

Основные определения

Размерностью $\dim(L)$ линейного пространства L называется максимально возможное количество векторов $e_1, e_2, \ldots, e_{\dim(L)}$, образующих линейно независимую систему (*базис*). Если количество векторов в линейно независимой системе не ограничено, то $\dim(L) = \infty$. Бесконечномерное пространство не имеет базисов. Все базисы конечномерного пространства содержат одинаковое число векторов.

Теорема 1. Любой вектор конечномерного линейного пространства L однозначно представим в виде линейной комбинации векторов базиса.

(Сравните эту теорему с аналогичной теоремой в §2.5).

Указанное представление имеет вид

$$e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_k e_k,$$

где $k = \dim(L)$, и называется *разложением вектора по базису*. Коэффициенты $(\lambda_1; \lambda_2; \ldots; \lambda_k)$ называются *координатами* вектора в данном базисе.

Стандартные базисы

Конечномерное пространство имеет бесчисленное множество базисов. Однако в ряде случаев (не всегда!) среди них имеется самый удобный базис, называемый *стан-*

№	Пространство	dim	Стандартный базис	Другие базисы
1	Арифметические векторы ($\mathbb{R}^n$)	n	$e_1 = (1; 0; ..., 0)$ $e_2 = (0; 1; ..., 0)$ .... $e_n = (0; 0; ..., 1)$	Любые n векторов, компоненты которых образуют невырожденную матрицу
2	Геометрические векторы (V^3)	3	$\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$	Любые 3 некомпланарных вектора
3	Многочлены ($\mathcal{P}^n$)	n	$1, t, t^2, ... , t^{n-1}$	См. далее замечание к теореме 2

дартным [*каноническим*]. Представление о них дает таблица.

Пространство непрерывных функций $C[a; b]$ бесконечномерно. Функции 1, t, t^2, ... , t^k образуют в нем линейно независимую систему (но не базис!), причем k может быть как угодно велико.

Действия над координатами векторов

Теорема 2. Пусть $\dim(L) = n$, $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис. Пусть векторы $x, y \in L$ имеют в этом базисе координаты $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ и $(y_1; y_2; \ldots; y_n)$ соответственно. Тогда в этом же базисе

1) координаты вектора $x + y$: $(x_1 + y_1; x_2 + y_2; \ldots; x_n + y_n)$;

2) координаты вектора αx: $(\alpha x_1; \alpha x_2; \ldots; \alpha x_n)$.

(!) Эта теорема показывает, что все n-мерные пространства устроены одинаково (*изоморфны*). Фиксация базиса и представление каждого вектора его координатами позволяет свести изучение произвольного n-мерного пространства (например, $\mathcal{P}^n$) к изучению арифметического пространства $\mathbb{R}^n$.

§ 4.3. Переход к новому базису

Пусть в пространстве L имеются два базиса:

1) старый $\beta = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$;

2) новый $\beta' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$.

Каждый вектор нового базиса можно разложить по старому базису:

$$\begin{aligned} e_1' &= t_{11}e_1 + t_{12}e_2 + \ldots + t_{1n}e_n, \\ e_2' &= t_{21}e_1 + t_{22}e_2 + \ldots + t_{2n}e_n, \\ &\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ e_n' &= t_{n1}e_1 + t_{n2}e_2 + \ldots + t_{nn}e_n. \end{aligned}$$

Матрица $T_{\beta\to\beta'} = (t_{ij})^T$ называется *матрицей перехода* от базиса β к базису β'.

Матричная запись уравнений перехода

$$(e_1' \, e_2' \ldots e_n') = (e_1 \; e_2 \; \ldots \; e_n)T_{\beta\to\beta'}.$$

Связь между старыми и новыми координатами

Если $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ и $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ — координаты вектора в базисах α и β соответственно, то выполняются соотношения:

$$1)\; (e_1 \; e_2 \; \cdots \; e_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = (e_1' \; e_2' \ldots e_n')\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \cdots \\ x_n' \end{pmatrix},$$

$$2)\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = T_{\beta\to\beta'}\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \cdots \\ x_n' \end{pmatrix}.$$

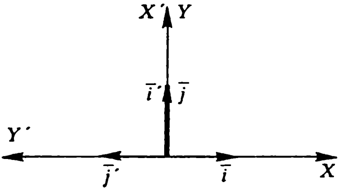


Рис. 41

Пример 1. На геометрической плоскости $\beta = (\bar{i}, \bar{j})$

$$\beta' = (\bar{j}, -\bar{i}) = (\bar{i}', \bar{j}')$$

(рис. 41). Из соотношений

$$\bar{i}' = 0\bar{i} + 1\bar{j},$$

$$\bar{j}' = -1\bar{i} + 0\bar{j}$$

получаем матрицу перехода $T_{\beta\to\beta'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Связь между старыми и новыми координатами описывается матричным уравнением

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

или скалярными уравнениями $x = -y'$; $y = x'$. ■

Пример 2. Найти координаты геометрического вектора $\bar{a} = -\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k}$ в базисе, состоящем из векторов $\bar{e}_1' = \bar{i} + \bar{j}$, $\bar{e}_2' = \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{e}_3' = \bar{i} + \bar{k}$

Решение. Матрица перехода равна

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Старые и новые координаты связаны матричным уравнением

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

или квадратной системой линейных уравнений (см. §1.8)

$$\begin{cases} x' + z' = -1, \\ x' + y' = 2, \\ y' + z' = 1. \end{cases}$$

Из этих уравнений находим $x' = 0$, $y' = 2$, $z' = -1$. ■

Пример 3. В пространстве $\mathcal{P}^4$ найти матрицу перехода от стандартного базиса $\beta = (1, t, t^2, t^3)$ к базису $\beta' = (1, t + 1, (t + 1)^2, (t + 1)^3)$.

Решение. Раскрывая скобки и переставляя слагаемые, получим:

$$1 = 1,$$
$$t + 1 = 1 + t,$$
$$(t + 1)^2 = 1 + 2t + t^2,$$
$$(t + 1)^3 = 1 + 3t + 3t^2 + t^3.$$

Отсюда

$$T_{\beta\to\beta'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

(!) Матрицу перехода можно записать, не прибегая к транспонированию промежуточной матрицы. А именно, координаты вектора e_i' в базисе β записывают в i-й столбец матрицы $T_{\beta\to\beta'}$.

Свойства матриц перехода

1) $\det(T_{\beta\to\beta'}) \neq 0$;

2) $(T_{\beta\to\beta'})^{-1} = T_{\beta'\to\beta}$;

3) $T_{\beta\to\beta'} \cdot T_{\beta'\to\beta''} = T_{\beta\to\beta''}$.

§ 4.4. Подпространства. Линейные оболочки

Подмножество L_1 линейного пространства L называется его *подпространством*, если:

1) $x, y \in L_1 \Rightarrow x + y \in L_1$;

2) $x \in L_1, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda x \in L_1$.

Соотношение размерностей: $\dim(L_1) \leqslant \leqslant \dim(L)$.

Подпространства в $\mathbb{R}^n$

Подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ является его подпространством тогда и только тогда, когда оно совпадает с множеством решений некоторой однородной системы линейных уравнений (см. §1.10)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

где $m \geqslant 1$. Базис этого подпространства называется *фундаментальной системой решений* соответствующей системы уравнений. Размерность подпространства равна $n - r$, где $r = \mathrm{rang}(a_{ij})$ (см. §§1.6, 1.7).

Пример 1. Уравнение $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ задает в $\mathbb{R}^3$ 2-мерное подпространство с базисом $\bar{e}_1 = (1; 0; -1)$, $\bar{e}_2 = (0; 1; -1)$. ■

Подпространства в пространствах функций выделяются следующими типичными ограничениями ($f(x) \in L_1$):

1) $f(x_0) = 0$, где x_0 — фиксированная точка;

2) $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = 0$, где $g(x)$ — фиксированная непрерывная функция;

3) $f^{(n)}(x) + a_1(x)f^{(n-1)}(x) + \ldots + a_{n-1}(x)f'(x) + a_n(x)f(x) = 0$, где $a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x), a_n(x)$ — фиксированные непрерывные функции.

Если исходное пространство L конечномерно, то каждое ограничение вида 1) или 2), как правило, уменьшает размерность подпространства на 1. Ограничение вида 3) (*линейное однородное дифференциальное уравнение*) выделяет в пространстве всех функций подпространство размерности n. (При записи дифференциальных уравнений вместо символов $f(x), f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ обычно используют символы $y, y', \ldots, y^{(n)}$.)

Линейная оболочка системы векторов $b_1, b_2, \ldots, b_k \in L$ — это множество L_1 всех линейных комбинаций вида $\lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_k b_k$, где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Обозначение: $L_1 = \langle b_1; b_2; \ldots; b_k \rangle$. Линейная оболочка всегда является подпространством пространства L.

Рангом системы векторов называется максимально возможное число векторов в ее линейно независимой подсистеме. (Аналогичное определение и примеры для систем арифметических векторов см. в §1.1.) Ранг системы векторов b_1; b_2; ... ; b_k совпадает с размерностью их линейной оболочки $\langle b_1; b_2; \dots ; b_k\rangle$.

Пример 2. Линейной оболочкой $\langle \bar{i}, \bar{k}\rangle$ является пространство геометрических векторов вида $a_x\bar{i} + a_z\bar{k}$, т.е. векторов, параллельных плоскости XOZ. ■

Пример 3. Множество решений дифференциального уравнения $y'' + y = 0$ есть $\langle \sin x, \cos x\rangle$, т.е. множество функций вида $y = C_1\sin x + C_2\cos x$. ■

§ 4.5. Евклидовы пространства

Евклидовым пространством называется линейное пространство E, в котором задана дополнительная операция — *скалярное произведение*, сопоставляющая паре векторов $x, y \in E$ число $(x, y) \in \mathbb{R}$ и удовлетворяющая следующим четырем *аксиомам* скалярного произведения:

1) $(x, y) = (y, x)$;

2) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$;

3) $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;

4) $(x, x) \geqslant 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Примеры скалярных произведений см. в §1.1 (арифметические векторы) и §2.6 (геометрические векторы). В пространствах непрерывных функций и многочленов скалярное произведение может быть задано формулой

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

(!) Все эти скалярные произведения не являются единственно возможными в указанных пространствах с точки зрения аксиом скалярного произведения.

Пример 1. Формула $(\bar{a}, \bar{b}) = (a_1 + a_2) \times \times (b_1 + b_2) + a_2 b_2$ задает в $\mathbb{R}^2$ скалярное произведение, удовлетворяющее аксиомам 1)—4), но не совпадающее со стандартным скалярным произведением $\bar{a}\,\bar{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$. ■

Норма [*длина*] вектора $x \in E$:

$|x| = \sqrt{(x, x)}$ [другое обозначение: $\|x\|$].

Свойства нормы:

1) $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$

2) $|(x, y)| \leqslant |x| \cdot |y|$ — неравенство Коши–Буняковского;

3) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ — неравенство треугольника.

Угол между векторами $x, y \in E$:

$\cos\varphi = \dfrac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$ $(\varphi \in [0; \pi])$.

Векторы $x, y \in E$ называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$.

Пример 2. В пространстве $C[-\pi; \pi]$ функции $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots$ попарно ортогональны, т.е. для любых натуральных m, n:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \sin mx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \cos mx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx dx = 0,$$

а при $m \neq n$ $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx dx = 0,$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx dx = 0. \blacksquare$$

Базис $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ n-мерного евклидова пространства E называется *ортогональ-*

ным, если $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$. Если, кроме этого, $|e_i| = 1$ при $i = 1, 2, ..., n$, базис называется *ортонормированным*.

Свойства координат в ортонормированном базисе

Если $x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n$, $y = y_1e_1 + y_2e_2 + ... + y_ne_n$, то:

1) $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n$;

2) $x_i = (x, e_i)$ для $i = 1, 2, ... , n$;

3) $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$.

Процесс ортогонализации Грама–Шмидта позволяет для любой линейно независимой системы векторов $f_1, f_2, ... , f_k \in E$ получить ортогональный базис линейной оболочки $\langle f_1, f_2, ... , f_k\rangle$ с помощью формул

$$e_1 = f_1,$$

$$e_2 = f_2 - \frac{(f_2, e_1)}{|e_1|^2} e_1,$$

$$e_3 = f_3 - \frac{(f_3, e_1)}{|e_1|^2} e_1 - \frac{(f_3, e_2)}{|e_2|^2} e_2,$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$e_k = f_k - \frac{(f_k, e_1)}{|e_1|^2} e_1 - \ldots - \frac{(f_k, e_{k-1})}{|e_{k-1}|^2} e_{k-1}.$$

В частности, если $f_1, f_2, \dots, f_n$ — базис пространства E, процесс ортогонализации позволяет построить ортогональный базис того же пространства.

Нормирование базиса. Если $e_1, e_2, \dots, e_k$ — ортогональный базис, то векторы $e_1^0, e_2^0, \dots, e_n^0$, где $e_i^0 = \dfrac{e_i}{|e_i|}$, $i = 1, 2, \dots, n$, образуют ортонормированный базис пространства E.

Ортогональные матрицы

Квадратная невырожденная матрица A называется ортогональной, если $A^{-1} = A^T$.

Свойства ортогональных матриц

1) $\det A = \pm 1$.

2) Пусть $\beta = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ — ортонормированный базис пространства E, $\beta' = (e_1', e_2', \dots, e_n')$ — другой базис того же пространства. Матрица перехода $T_{\beta \to \beta'}$ (см. §4.3) ортогональна тогда и только тогда, когда базис β' также ортонормирован.

Пример 3. Матрица $\begin{pmatrix} 2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ ортогональна. ■

§ 4.6. Линейные операторы и их матрицы

Если задан закон (правило), по которому каждому вектору x пространства L_1 ставится в соответствие единственный вектор y пространства L_2, то говорят, что задан *оператор* [*векторная функция, отображение, преобразование*], действующий из L_1 в L_2. Обозначения: $\tilde{A} : L_1 \to L_2$; $y = \tilde{A}(x)$.

Оператор $\tilde{A}$ называется *линейным*, если для любых x_1, $x_2 \in L$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ выполняются соотношения:

1) $\tilde{A}(x_1 + x_2) = \tilde{A}(x_1) + \tilde{A}(x_2)$ (свойство *аддитивности*);

2) $\tilde{A}(\lambda x_1) = \lambda \tilde{A}(x_1)$ (свойство *однородности*).

Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — базис в L_1, $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$ и $\tilde{A} : L_1 \to L_2$ — линейный оператор, то

$$\tilde{A}(x) = x_1 \tilde{A}(e_1) + x_2 \tilde{A}(e_2) + \ldots + x_n \tilde{A}(e_n).$$

Таким образом, линейный оператор $\tilde{A}$ од нозначно определяется системой вектороı $\tilde{A}(e_1), \tilde{A}(e_2), \ldots, \tilde{A}(e_n) \in L_2$.

Матрица линейного оператора

Далее рассматривается случай $L_1 = L_2 = L$, $\dim(L) = n$. В этом случае векторы $\tilde{A}(e_1), \tilde{A}(e_2), \ldots, \tilde{A}(e_n)$ можно разложить по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$\tilde{A}(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n,$$
$$\tilde{A}(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n,$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$\tilde{A}(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n.$$

(!) Обратите внимание на запись индексов в коэффициентах a_{ij}!

Матрицей линейного оператора $\tilde{A}: L \to L$ в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называется матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

где в i-м **столбце** записаны координаты вектора $\tilde{A}(e_i)$.

Координатно-матричная запись линейного оператора

Если $(x_1; x_2; \dots ; x_n)$ — координаты вектора x, $(y_1; y_2; \dots ; y_n)$ — координаты вектора $y = \tilde{A}(x)$, то

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Примеры линейных операторов

Пример 1. Оператор $\tilde{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, читающий вектор $\bar{x}$ справа налево:

$\tilde{A}(x_1; x_2; x_3) = (x_3; x_2; x_1)$,

линеен. Его матрица в стандартном базисе равна

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

так как $\tilde{A}(1; 0; 0) = (0; 0; 1)$, $\tilde{A}(0; 1; 0) = (0; 1; 0)$, $\tilde{A}(0; 0; 1) = (1; 0; 0)$. ■

Пример 2. Линейный оператор $\breve{U}_\varphi$: $V^2 \to V^2$ поворачивает каждый вектор плоскости OXY, закрепленный в начале коорди-

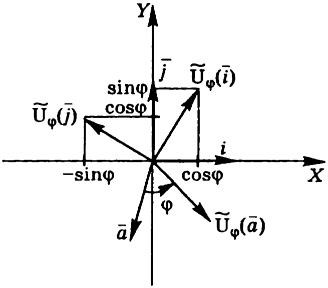


Рис. 42

нат, на угол φ против часовой стрелки (рис. 42). Его матрица в базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$:

$$U_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Пример 3. Линейный оператор дифференцирования $\tilde{D}\colon \mathcal{P}^4 \to \mathcal{P}^4$ сопоставляет многочлену $p(t)$ его производную $p'(t)$. В стандартном базисе $1, t, t^2, t^3$ этот оператор имеет матрицу

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

поскольку $1' = 0$, $t' = 1$, $(t^2)' = 2t$, $(t^3)' = 3t^2$. $\blacksquare$

Действия над линейными операторами

В следующей таблице все операторы действуют из L в L. Формулы, стоящие во 2-м столбце, верны при всех $x \in L$.

Название	Определение	Матрицы
Сложение	$\tilde{C}(x) = \tilde{A}(x) + \tilde{B}(x)$	$C = A + B$
Умножение на число	$\tilde{B}(x) = \lambda\tilde{A}(x)$	$B = \lambda A$
Композиция [произведение]	$\tilde{C}(x) = \tilde{A}(\tilde{B}(x))$	$C = AB$
Тождественный оператор	$\tilde{E}(x) = x$	E — единичная матрица
Оператор, обратный оператору $\tilde{A}$	$\tilde{B}(\tilde{A}(x)) = \tilde{A}(\tilde{B}(x)) = x$	$B = A^{-1}$

Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

$$A' = (T_{\beta\to\beta'})^{-1}AT_{\beta\to\beta'},$$

где A — матрица оператора в базисе β, A' — матрица оператора в базисе β', $T_{\beta\to\beta'}$ — матрица перехода от базиса β к базису β' (см. §4.3).

Линейные операторы в евклидовом пространстве

Пусть линейный оператор $\tilde{A}: E \to E$ действует в евклидовом пространстве E. Оператор $\tilde{A}^*: E \to E$ называется *сопряженным* к оператору $\tilde{A}$, если для всех $x, y \in E$

$$(x, \tilde{A}(y)) = (\tilde{A}^*(x), y).$$

В **ортонормированном** базисе матрица A^* сопряженного оператора транспонирована к матрице A (см. §1.2), а предыдущая формула может быть переписана в координатно-матричном виде:

$$X^TAY = (A^*X)^TY,$$

где $X = (x_1; x_2; \dots ; x_n)^T$, $Y = (y_1; y_2; \dots ; y_n)^T$.

Оператор называется *самосопряженным*, если $\tilde{A}^* = \tilde{A}$. Матрица самосопряженного оператора в ортонормированном базисе симметрична, т.е $A^* = A^T = A$.

§ 4.7. Комплексные числа

Сложение и умножение комплексных чисел

Полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ называется пространство $\mathbb{R}^2$, в котором наряду с обычной операцией *сложения* векторов введена операция *умножения* комплексных чисел:

$$(x_1;\ y_1) + (x_2;\ y_2) = (x_1 + x_2;\ y_1 + y_2);$$
$$(x_1;\ y_1) \cdot (x_2;\ y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2;\ x_1y_2 + x_2y_1).$$

Для сложения и умножения комплексных чисел выполняются обычные правила: для всех $z_1;\ z_2;\ z_3 \in \mathbb{C}$

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1;\ (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3);$

$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1;\ (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3);$

$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3;$

$z_1 + \mathbf{0} = \mathbf{0} + z_1 = z_1$, где $\mathbf{0} = (0;\ \theta)$. В дальнейшем это комплексное число обозначается обычным символом 0.

$z_1 \cdot \mathbf{1} = \mathbf{1} \cdot z_1 = z_1$, где $\mathbf{1} = (1;\ 0)$. В дальнейшем это комплексное число обозначается обычным символом 1.

Вообще, каждое комплексное число вида $(x;\ 0)$ можно отождествить с вещественным числом x, так как $(x_1; 0) + (x_2; 0) = (x_1 + x_2; 0)$, $(x_1; 0) \cdot (x_2; 0) = (x_1 \cdot x_2; 0)$.

Комплексное число $i = (0; 1)$ называется *мнимой единицей*. Ее основное свойство:

$$(0; 1)^2 = (-1; 0),$$

т.е. $i^2 = -1$. Каждый вектор $(x; y)$ есть линейная комбинация векторов $(1; 0)$ и $(0; 1)$, т.е.

$$z = (x; y) = x + iy.$$

Вещественные числа $x = \operatorname{Re} z$ и $y = \operatorname{Im} z$ называются соответственно *вещественной* и *мнимой частью* комплексного числа z. Число z называется *чисто мнимым*, если $\operatorname{Re} z = 0$, т.е. $z = iy$.

Числа z и $\bar{z}$ называются *сопряженными*, если $\operatorname{Re} \bar{z} = \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} \bar{z} = -\operatorname{Im} z$. Другими словами, если $z = x + iy$, то $\bar{z} = x - iy$.

Деление комплексных чисел:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2},$$

т.е.

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Пример 1.

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i. \blacksquare$$

Геометрическое представление комплексных чисел

Число $z = (x;\ y)$ может быть представлено как геометрический вектор на комплексной плоскости OXY. При этом ось OX называется *вещественной осью*, ось OY — *мнимой осью*.

Матричное представление комплексных чисел

Каждому комплексному числу $z = (x;\ y)$ соответствует (2×2)-матрица $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$. При этом сумме и произведению комплексных чисел соответствует сумма и произведение матриц. Обратная матрица $\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1}$ существует при $z \neq 0$ и соответствует числу $1/z$. Сопряжению комплексных чисел соответствуют транспонирование матриц.

Модуль и аргумент комплексного числа $z = x + iy$

Модуль: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Аргумент:

$$\operatorname{Arg} z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + 2\pi k \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ при } x > 0, \\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ при } x = 0, \ y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ при } x = 0, \ y < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + (2k+1)\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

Эти величины могут быть интерпретированы как полярные координаты (см. §3.8) геометрического вектора, представляющего число z (рис. 43). Значение многозначной функции $\operatorname{Arg} z$, лежащее в промежутке $(-\pi; \pi]$, называется главным значением аргумента и обозначается $\arg z$.

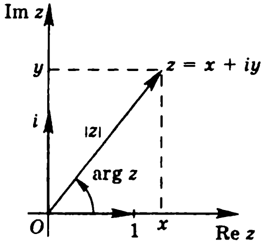


Рис. 43

Тригонометрическая форма комплексного числа:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\,\sin\varphi),$$

где φ — любое значение $\operatorname{Arg} z$.

Основные соотношения

1) $|z| \geqslant 0$, причем $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$;

2) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$;

3) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2|$;

4) $\operatorname{Arg}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2$;

5) $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$. В частности, $|1/z| = 1/|z|$;

6) $\operatorname{Arg}(z_1/z_2) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2$. В частности, $\operatorname{Arg}(1/z) = -\operatorname{Arg} z$;

7) $|\bar{z}| = |z|$;

8) $\operatorname{Arg} \bar{z} = -\operatorname{Arg} z$.

§ 4.8. Корни многочленов

Число c (вещественное или комплексное) называется *корнем* многочлена n-й степени $p_n(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \ldots + a_1 t + a_0$, если $p_n(c) = 0$.

Теорема. $p_n(c) = 0 \Leftrightarrow p_n(t) = (t - c)p_{n-1}(t)$, где $p_{n-1}(t)$ — многочлен $(n - 1)$-й степени.

Корень c имеет *кратность* k, если $p_n(t) = (t - c)^k p_{n-k}(t)$, причем $p_{n-k}(c) \neq 0$. Корни кратности 1 называются *простыми*, корни кратности выше 1 — *кратными*.

Если $z \in \mathbb{C}$ (причем $\operatorname{Im} z \neq 0$) — корень многочлена $p_n(t)$ с вещественными коэффициентами, то $\bar{z}$ является его корнем той же кратности. При этом $p_n(t) = (q_2(t))^k p_{n-2k}(t)$, где $q_2(t) = (t - z)(t - \bar{z}) = t^2 - 2\operatorname{Re} z \cdot t + |z|^2$ — вещественный многочлен второй степени.

Основная теорема алгебры. Всякий многочлен n-й степени имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Пример 1. Многочлен $t^4 + t^2$ имеет корни $t_{1,2} = 0$, $t_{3,4} = \pm i$. Его разложение на вещественные и комплексные сомножители:

$$t^4 + t^2 = t^2(t^2 + 1) = t^2(t - i)(t + i). \blacksquare$$

§ 4.9. Собственные числа и собственные векторы

Вектор $x \neq 0$ называется *собственным вектором* линейного оператора $\hat{A}: L \to L$, если $\tilde{A}(x) = \lambda x$. При этом λ — *собственное число* линейного оператора $\tilde{A}$.

Если в конечномерном пространстве L введен базис, предыдущее равенство может быть записано в матричном виде

$$AX = \lambda X \text{ или } (A - \lambda E)X = O$$

(в этом случае говорят о собственном числе и собственном векторе матрицы A), а также в виде однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет ненулевое решение в том и только в том случае, когда λ — вещественный корень *характеристического многочлена* $p_n(\lambda) = \det(A - \lambda E)$, т.е выполнено *характеристическое уравнение*

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Пример 1. Найти собственные векторы и собственные числа оператора $\tilde{P}_{OXY}$ проек-

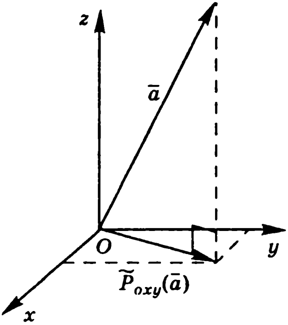


Рис. 44

тирования на плоскость OXY в пространстве V^3 (рис. 44).

Геометрическое решение

Равенство $\widetilde{P}_{OXY}(\bar{a}) = \lambda\bar{a}$ означает, что векторы $\bar{a}$ и $\widetilde{P}_{OXY}(\bar{a})$ коллинеарны. Это возможно только в двух случаях.

а) Вектор $\bar{a}$ компланарен плоскости OXY. Тогда $\widetilde{P}_{OXY}(\bar{a}) = \bar{a}$, т.е $\lambda = 1$.

б) Вектор $\bar{a}$ перпендикулярен плоскости OXY. Тогда $\widetilde{P}_{OXY}(\bar{a}) = \bar{0}$, т.е $\lambda = 0$.

Аналитическое решение

В базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ оператор $\tilde{P}_{OXY}$ имеет матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен:

$$\det(P - \lambda E) = (1 - \lambda)^2 \cdot (-\lambda).$$

Корни характеристического многочлена (с учетом кратности): $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = 0$.

Для собственных векторов с собственным числом 1

$$\begin{cases} (1 - 1)x = 0, \\ (1 - 1)y = 0, \\ -z = 0, \end{cases}$$

т.е. $\bar{a}_1 = x\bar{i} + y\bar{j} \neq \bar{0}$.

Для собственных векторов с собственным числом 0

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

т.е. $\bar{a}_0 = z\bar{k} \neq 0$.

Пример 2. Оператор поворота на угол φ (см. пример 2 §4.6) не имеет собственных векторов при $\varphi \neq \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Его характеристический многочлен

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\cos\varphi \cdot \lambda + 1$$

не имеет вещественных корней (комплексные корни: $\lambda_{1,2} = \cos\varphi \pm i\sin\varphi$). При $\varphi = \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$) все ненулевые векторы пространства V^2 являются собственными ($\lambda = 1$ при четном k, $\lambda = -1$ при нечетном k). ■

Диагонализация операторов (матриц)

Базис пространства L называется *собственным базисом* оператора $\hat{A} : L \to L$, если он состоит из собственных векторов оператора $\hat{A}$. Матрица оператора $\hat{A}$ в этом базисе диагональна:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где λ_i — собственное число, соответствующее i-му вектору собственного базиса.

Матрица A оператора $\hat{A}$ в произвольном базисе β связана с D равенством

$$D = T^{-1}AT, \text{ или } A = TDT^{-1},$$

где T — матрица перехода от базиса β к собственному базису.

Матрица (оператор), для которой существует собственный базис, называется *диагонализуемой*, а процесс вычисления собственного базиса для данной матрицы (см. пример 3 далее) — *приведением к диагональному виду* [*диагонализацией*].

Инвариантность характеристического уравнения

Для любых базисов β, β' в пространстве L

$$\det(T^{-1}_{\beta\to\beta'}AT_{\beta\to\beta'} - \lambda E) =$$

$$= \det(T^{-1}_{\beta\to\beta'}(A - \lambda E)T_{\beta\to\beta'}) = \det(A - \lambda E).$$

Это означает, что все коэффициенты характеристического многочлена не зависят от выбора базиса (*инвариантны*). В частности, $\det A$ — свободный член характеристического многочлена, а $\mathrm{tr} A = a_{11} + a_{22} + \dots$ $\dots + a_{nn}$ (*след* матрицы A) — коэффициент при λ, взятый с обратным знаком. Поэтому для матриц, приводимых к диагональному виду,

$$\det A = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n,$$
$$\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n.$$

Для матриц, не приводимых к диагональному виду, эти соотношения останутся верны, если использовать корни характеристического многочлена (в том числе комплексные) с учетом их кратности.

Пример 3. Матрица $\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}$ диагонализуема.

Характеристический многочлен:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ 6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Собственные числа: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

Уравнения собственных векторов при $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 = 0, \\ 6x_1 - 6x_2 = 0, \end{cases} \text{откуда } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Уравнения собственных векторов при $\lambda = -1$:

$$\begin{cases} 6x_1 - 4x_2 = 0, \\ 6x_1 - 4x_2 = 0, \end{cases} \text{откуда } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Собственный базис (наиболее удобный):

$$\bar{e}_1 = (1;\ 1);\ \bar{e}_2 = (2;\ 3).$$

Матрицы перехода от исходного базиса к собственному и обратно:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};\ T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Связь диагонального вида матрицы с исходным видом:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Жордановы нормальные формы* (2×2)-*матриц

Жордановой нормальной формой квадратной матрицы A называется матрица B простейшего вида, связанная с A равенством $B = T^{-1}AT$ (т.е. простейшая матрица линейного оператора, представленного матрицей A). Жордановы нормальные формы связаны с корнями характеристического уравнения [*характеристическими корнями*]. Для (2×2)-матриц эта связь описывается следующей таблицей.

№	Характеристические корни	Нормальная форма
1	$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$	$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
2	$\lambda_{1,2} = a \pm bi \in \mathbb{C} \ \ (b > 0)$	$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$
3	$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$, $A \neq \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$
4	$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Аналогичная классификация существует и для $(n \times n)$-матриц при $n > 2$.

§ 4.10. Квадратичные формы

Квадратичной формой n переменных называется выражение

$$q(x_1; x_2; \dots ; x_n) = \sum_{i=1}^{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j,$$

где $q_{ji} = q_{ij} \ \forall i, j = 1, 2, \dots , n$.

Симметричная матрица $Q = (q_{ij})$ называется *матрицей квадратичной формы.*

Матричная запись квадратичной формы:

$$q(X) = X^T Q X,$$

где $X = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)^T$.

Пример 1.

$$q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 12x_1x_2 - 10x_1x_3 + \\ + x_2^2 - 3x_3^2.$$

В матричной записи

$$q(x_1, x_2, x_3) = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 4 & -6 & -5 \\ -6 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Преобразование квадратичной формы при замене координат [переменных]

Пусть старый и новый вектор-столбцы переменных $X = (x_1\ x_2\ \dots\ x_n)^T$ и $Y = (y_1\ y_2\ \dots\ y_n)^T$ связаны равенством $X = PY$, где P — невырожденная *матрица перехода* (сравните с §4.3). Тогда $X^TQX = Y^TP^TQPY$, т.е. $Q' = P^TQP$ — матрица квадратичной формы в новых координатах.

Пример 2. Пусть $q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 3x_2^2$. Подставляя сюда выражения

x_1, x_2 через новые координаты: $x_1 = 2y_1 - 3y_2$, $x_2 = y_1 + y_2$, получим форму

$$q'(y_1, y_2) =$$
$$= 2(2y_1 - 3y_2)^2 + 4(2y_1 - 3y_2)(y_1 + y_2) -$$
$$- 3(y_1 + y_2)^2 = 2(4y_1^2 - 12y_1y_2 + 9y_2^2) +$$
$$+ 4(2y_1^2 - y_1y_2 - 3y_2^2) - 3(y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2) =$$
$$= 13y_1^2 - 34y_1y_2 + 3y_2^2.$$

Матрицы формы в старых и новых координатах связаны равенством

$$\begin{pmatrix} 13 & -17 \\ -17 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Операторная [инвариантная] запись квадратичной формы

$q(\bar{x}) = \bar{x}\,\tilde{Q}(\bar{x})$, где $\tilde{Q} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — самосопряженный линейный оператор (см. §4.6), имеющий матрицу Q в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^n$, а скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$ определено стандартным образом (формулой из §1.1).

(!) Записи формы в разных системах координат считаются не разными формами, а **разными видами одной и той же формы.**

§ 4.11. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Квадратичная форма имеет *канонический вид*, если каждое ее слагаемое содержит только одну переменную:

$$q'(y_1, y_2, \dots, y_n) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2.$$

Другими словами, это форма с диагональной матрицей

$$Q' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Метод Лагранжа [метод полных квадратов]

Форма, не имеющая канонического вида, может быть преобразована к нему с помощью выделения полных квадратов.

Пример 1.

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3 = (x_1^2 + 2x_1(2x_2 - 2x_3) + (2x_2 - 2x_3)^2) - (2x_2 - 2x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2 + 6x_2x_3 = (x_1 + 2x_2 - 2x_3)^2 - 3x_2^2 + 14x_2x_3 - 3x_3^2.$$

Далее,

$$-3x_2^2 + 14x_2x_3 - 3x_3^2 =$$

$$= -3\left(x_2^2 - 2x_2 \cdot \frac{7}{3}x_3 + \frac{49}{9}x_3^2\right) + \frac{49}{3}x_3^2 - 3x_3^2 =$$

$$= -3\left(x_2 - \frac{7}{3}x_3\right)^2 + \frac{40}{3}x_3^2.$$

Таким образом,

$$q(x_1, x_2, x_3) = q'(y_1, y_2, y_3) =$$

$$= y_1^2 - 3y_2^2 + \frac{40}{3}y_3^2,$$

где

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 - 2x_3, \\ y_2 = x_2 - \frac{7}{3}x_3, \\ y_3 = x_3. \end{cases}$$

т.е.

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - \frac{8}{3}y_3, \\ x_2 = y_2 + \frac{7}{3}y_3, \\ x_3 = y_3. \blacksquare \end{cases}$$

Пример 2.

$$q(x_1, x_2) = x_1x_2 = \frac{1}{4}(x_1 + x_2)^2 - \frac{1}{4}(x_1 - x_2)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2. \blacksquare$$

(!) Недостаток метода Лагранжа состоит в том, что новая система координат, как правило, неортогональна.

Метод ортогональных преобразований [метод собственных векторов]

В основе метода лежат следующие две теоремы.

Теорема 1. Собственные векторы самосопряженного линейного оператора $\tilde{Q}$, соответствующие разным собственным числам, ортогональны.

Теорема 2. Любой самосопряженный оператор $\tilde{Q}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеет ортонормированный собственный базис.

Из этой теоремы следует, что для любой симметричной матрицы Q найдутся диагональная матрица Q' и ортогональная матрица P (см. §4.5), такие что

$$Q' = P^{-1}QP = P^{T}QP.$$

На первом этапе рассчитывают собственные числа и собственные векторы матрицы Q (см. §4.9). На втором этапе в множестве собственных векторов выбирают ортонормированный базис; при необходимости методом Грама–Шмидта (см. §4.5) производят ортогонализацию системы линейно независимых собственных векторов, соответствующих одному и тому же собственному числу.

Пример 3.

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3.$$

1) Матрица квадратичной формы

$$Q = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет собственные числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}$.

Отсюда

$$q'(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - \frac{1}{2}y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2.$$

Уравнения собственных векторов при $\lambda_1 = 1$:

$$\begin{cases} -x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ \frac{1}{2}x_1 - x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3 = 0, \end{cases}$$

откуда $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Уравнения собственных векторов при $\lambda_{2,3} = -\frac{1}{2}$:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \end{cases}$$

откуда $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2) Вектор $\bar{f}_1 = (1;\ 1;\ 1)$ ортогонален векторам $\bar{f}_2 = (1;\ -1;\ 0)$ и $\bar{f}_3 = (1;\ 0;\ -1)$, но $\bar{f}_2$ и $\bar{f}_3$ не ортогональны. Проведем ортогонализацию системы ($\bar{f}_2$, $\bar{f}_3$):

$$\bar{e}_2 = \bar{f}_2 = (1;\ -1;\ 0);$$

$$\bar{e}_3 = \bar{f}_3 - \frac{\bar{f}_3\bar{e}_3}{\bar{e}_2^2}\,\bar{e}_2 = (1;\ 0;\ -1) - \frac{1}{2}(1;\ -1;\ 0) =$$

$$= \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ -1\right).$$

Векторы $\bar{e}_1 = \bar{f}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ образуют ортогональный собственный базис. Осталось их нормировать:

$$\bar{e}_1^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1;\ 1;\ 1),$$

$$\bar{e}_2^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1;\ -1;\ 0),$$

$$\bar{e}_3^0 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1;\ 1;\ -2).$$

Ортогональная матрица перехода:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{6}}y_3, \\[2ex] x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \dfrac{1}{\sqrt{6}}y_3, \\[2ex] x_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}y_1 - \dfrac{2}{\sqrt{6}}y_3. \end{cases}$$

Связь между матрицами квадратичной формы в старых и новых координатах:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}. \blacksquare$$

Применение метода ортогональных преобразований к построению кривых и поверхностей второго порядка описано в § 3.11.

Закон инерции. Количество положительных, отрицательных и нулевых коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы не зависит от способа приведения формы к каноническому виду.

§ 4.12. Знакоопределенность квадратичных форм

№	Название	Определение	Собственные числа
1	Положительно определенная	$q(\bar{x}) > 0$	$\lambda_i > 0$
2	Неотрицательно определенная	$q(\bar{x}) \geqslant 0$	$\lambda_i \geqslant 0$
3	Отрицательно определенная	$q(\bar{x}) < 0$	$\lambda_i < 0$
4	Неположительно определенная	$q(\bar{x}) \leqslant 0$	$\lambda_i \leqslant 0$

В таблице перечислены все случаи *знакоопределенности квадратичных форм*. Неравенства третьего столбца рассматриваются при всех $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, кроме $\bar{x} = \bar{0}$. Неравенства четвертого столбца относятся ко всем собственным числам матрицы квадратичной формы.

Знакоопределенность симметричной матрицы Q равнозначна знакоопределенности квадратичной формы $q(X) = X^T Q X$.

Критерий Сильвестра

Главным минором k-го порядка Δ_k $(n \times n)$-матрицы Q называется определитель подматрицы, образованной первыми k строками и первыми k столбцами матрицы Q.

Теорема.

1) $q(X)=X^TQX > 0 \Leftrightarrow \Delta_k>0$, $k = 1, 2, \ldots, n$;

2) $q(X) = X^TQX < 0 \Leftrightarrow (-1)^k\Delta_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Пример 1.

Матрица $Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ отрицательно определена, поскольку ее главные миноры

$$\Delta_1 = -1 < 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 3 > 0,$$

$$\Delta_3 = \det Q = -5 < 0. \blacksquare$$

Раздел 5

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

§ 5.1. О задачах математического программирования

Задачей *математического программирования* [задачей *оптимизации*] называется задача вида

$$f(x) \xrightarrow[x \in D]{} \text{extr (min или max)}.$$

Множество D называется *допустимым множеством*, его элементы — *допустимыми решениями*, фунция $f\colon D \to \mathbb{R}$ — *целевой функцией*.

Оптимальным решением называется такое $x^* \in D$, что $f(x^*) = \operatorname{extr}\{f(x) | x \in D\}$. Задача математического программирования считается решенной, если найдено одно из ее оптимальных решений (их, вообще говоря, может быть несколько) или доказано, что оптимальных решений нет.

К задачам математического программирования относятся как классические задачи оптимизации, изучаемые в курсах дифференциального исчисления, так и задачи, решаемые принципиально иными методами (линейное, дискретное, динамическое, сетевое программирование).

§ 5.2. Виды задач линейного программирования

Задачей линейного программирования (сокращенно ЗЛП) называется такая задача математического программирования, в которой:

1) D — множество точек [векторов] в арифметическом линейном пространстве $\mathbb{R}^n$, заданное системой линейных ограничений (уравнений и нестрогих неравенств);

2) Функция f линейна.

Стандартная ЗЛП

ЗЛП называется *стандартной*, если все ограничения имеют вид неравенств, и на все переменные x_i наложены условия неотрицательности $x_i \geqslant 0$.

Пример 1 (Задача о наилучшем использовании ресурсов).

Предприятие выпускает n видов продукции, используя m видов ресурсов. Затраты i-го ресурса на производство единицы продукции j-го вида равны a_{ij}. Запасы i-го ресурса равны b_i. Прибыль от реализации единицы продукции j-го вида равна c_j. Составить оптимальный план производства.

Формализация. Введем переменные x_j — количество производимой продукции j-го вида. Оптимальный план максимизирует суммарную прибыль, которая равна $c_1x_1 + ... + c_nx_n$. Затраты i-го ресурса на производство всей продукции j-го вида равны $a_{ij}x_j$. Общий расход i-го ресурса равен $a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n$ и не должен превышать b_i. Таким образом, приходим к следующей стандартной ЗЛП.

$$\begin{array}{lll} & c_1x_1+...+c_nx_n \to \max; & \\ (5.2.1) & a_{i1}x_1+...+a_{in}x_n \leqslant b_i, & i = 1, ..., m; \\ & x_j \geqslant 0, & j = 1, ..., n. \end{array}$$

Эту задачу (как и многие другие) можно записать короче, используя векторно-матричные обозначения. Введем вектор выпуска $\mathbf{X} = (x_1, ..., x_n)^T$, вектор цен $\mathbf{C} = (c_1, ..., c_n)$, вектор запасов $\mathbf{B} = (b_1, \ldots, b_m)^T$, технологическую матрицу $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Векторно-матричная запись задачи имеет вид:

$$\mathbf{CX} \to \max;$$
$$\mathbf{AX} \leqslant \mathbf{B};$$
$$\mathbf{X} \geqslant \mathbf{0}.$$

Сравнение векторов происходит покомпонентно. ■

Каноническая ЗЛП

ЗЛП называется *канонической*, если на все переменные наложены условия неотрицательности, а все остальные ограничения имеют вид уравнений. Примером канонической ЗЛП служит транспортная задача (см. §5.8).

Общая ЗЛП

Если ЗЛП не может быть отнесена ни к классу стандартных, ни к классу канонических задач, она назаывается *общей* ЗЛП.

Пример 2 (задача о максимальном потоке).

Четверых любителей денег зовут Макс, Марго, Жанна и Дэн. Макс должен Дэну 100 рублей, а Жанне 200 рублей. Жанна должна 200 рублей Дэну и 100 рублей Марго. Дэн должен 200 рублей Марго. Какие долги удастся погасить, если Макс и Марго поженятся и объединят свои финансы?

Формализация. Представим, что Марго дает Максу некоторую сумму, которая проходит по цепочкам выплат и возвращается к Марго. Все заинтересованы в том, чтобы эта сумма была максимально возможной. Введем следующие пять переменных:

MJ — выплата Макса Жанне;

MD — выплата Макса Дэну;

JD — выплата Жанны Дэну;

JM — выплата Жанны Марго;

DM — выплата Дэна Марго.

Каждый участник выплачивает каждому не больше, чем он должен, и не меньше нуля. Кроме того, Жанна и Дэн выплачивают ровно столько денег, сколько получают. Таким образом, формальная постановка задачи содержит как уравнения, так и неравенства:

$$MJ + MD \to \max;$$

$$0 \leqslant MJ \leqslant 200;$$

$$0 \leqslant MD \leqslant 100;$$

$$0 \leqslant JD \leqslant 200;$$

$$0 \leqslant \mathrm{JM} \leqslant 100;$$

$$0 \leqslant \mathrm{DM} \leqslant 200;$$

$$\mathrm{MJ} = \mathrm{JD} + \mathrm{JM};$$

$$\mathrm{MD} + \mathrm{JD} = \mathrm{DM}. \blacksquare$$

Сведение ЗЛП различных видов друг к другу

1) Стандартная → каноническая

Без ограничения общности можно считать, что стандартная ЗЛП записана в виде (5.2.1). В самом деле, если какое-то неравенство исходной задачи (кроме условий неотрицательности) содержит знак $\geqslant$, то умножением этого неравенства на -1 можно изменить знак на противоположный. Введем m дополнительных переменных $x_{n+1}, \ldots \ldots, x_{n+m}$ и наряду с задачей (5.2.1) рассмотрим каноническую ЗЛП

$$c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n \to \max;$$

$$(5.2.2) \quad a_{i1} x_1 + \ldots + a_{in} x_n + x_{n+i} = b_i;$$

$$i = 1, \ldots, m,\ x_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, m + n.$$

Пусть $x_1^*, \ldots, x_n^*, x_{n+1}^*, \ldots, x_{n+m}^*$ — оптимальное решение задачи (5.2.2). Тогда его первые n компонент x_1^*, ..., x_n^* образуют оптимальное решение задачи (5.2.1).

2) Общая → каноническая

Вообще говоря, не на все переменные общей ЗЛП накладываются условия неотрицательности. Если для некоторой переменной x_j условие неотрицательности отсутствует, вместо нее вводят две неотрицательные переменные по формуле $x_j = y_j - z_j$. После этого неравенства преобразуют в уравнения способом, описанным для стандартной задачи.

Пример 3.

$x_1 + x_2 \to \min;$

$x_1 + 2x_2 \geqslant 6;$

$x_2 \geqslant 0.$

Здесь отсутствует условие неотрицательности на переменную x_1. Сделаем замену $x_1 = y_1 - z_1$ и получим стандартную задачу

$y_1 - z_1 + x_2 \to \min;$

$y_1 - z_1 + 2x_2 \geqslant 6;$

$x_2 \geqslant 0,\ y_1 \geqslant 0,\ z_1 \geqslant 0.$

Преобразуем первое неравенство к виду: $-y_1 + z_1 - 2x_2 \leqslant -6$, введем дополнительную неотрицательную переменную x_3 и составим каноническую ЗЛП

$$y_1 - z_1 + x_2 \to \min;$$
$$-y_1 + z_1 - 2x_2 + x_3 = -6;$$
$$y_1 \geqslant 0,\ z_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0. \blacksquare$$

3) Каноническая → стандартная

Пусть имеется каноническая ЗЛП вида

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \text{extr};$$
$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i\ ,\ i = 1, \ldots, m;$$
$$x_j \geqslant 0, \qquad\qquad j = 1, \ldots, n.$$

1-й способ. Каждое уравнение этой задачи равносильно системе двух неравенств

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \leqslant b_i,$$
$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \geqslant b_i.$$

Таким образом, каноническая ЗЛП, содержащая m уравнений, равносильна стандартной ЗЛП, содержащей $2m$ неравенств.

2-й способ. Если система линейных уравнений, входящая в каноническую ЗЛП, совместна, то можно разделить переменные на базисные и свободные (см. §1.7). Выразив базисные переменные через свободные и подставив эти выражения в условия неотрицательности и целевую функцию, получим стандартную ЗЛП.

Пример 4.

$x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min;$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6;$

$x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3.$

Поскольку $x_1 = 6 - 2x_2 - 3x_3$, эта задача сводится к стандартной ЗЛП с двумя переменными:

$6 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_2 + x_3 = 6 - 2x_3 \to \min;$

$6 - 2x_2 - 3x_3 \geqslant 0;$

$x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0.$

Легко догадаться, что оптимальное решение последней задачи: $x_2^* = 0$, $x_3^* = 2$. Используя уравнение для x_1, получаем оптимальное решение исходной задачи: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 2$. ■

§ 5.3. Графическое решение ЗЛП

Стандартные ЗЛП с двумя переменными

Допустимое множество задачи

$c_1x_1 + c_2x_2 \to \text{extr};$

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leqslant b_i,\ i = 1, \ldots, m;$

$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$

можно изобразить на плоскости в декартовой системе координат OX_1X_2. Каждое неравенство задает полуплоскость, ограниченную прямой $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ или $x_j = 0$. Для того чтобы определить положение полуплоскости относительно граничной прямой, можно подставить в неравенство координаты какой-либо точки, не лежащей на прямой (при $b_i \neq 0$ проще всего взять точку $(0; 0)$), и проверить, выполняется ли оно.

Пересечение нескольких полуплоскостей может быть:

1) пустым множеством (в этом случае ЗЛП неразрешима);

2) многоугольником;

3) неограниченным многоугольным множеством;

4) непустым вырожденным множеством (прямой, лучом, отрезком, точкой).

Линии уровня целевой функции

$$c_1x_1 + c_2x_2 = \text{const}$$

являются параллельными прямыми. Их общий нормальный вектор [*градиент*] $\bar{n} = (c_1; c_2)$ указывает направление возрастания целевой функции. Если перемещать произвольную линию уровня, проходящую через допустимое множество, параллельно самой себе в направлении градиента (против градиента), то максимальное (минимальное) значение целевой функции достигается при крайнем положении линии уровня, еще имеющей с допустимым множеством хотя бы одну общую точку.

Пример 1.

$65x_1 + 80x_2 \to \max;$

$0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leqslant 12;$

$0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 \leqslant 10;$

$0{,}3x_1 + 0{,}3x_2 \leqslant 21;$

$x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, 3.$

Допустимое множество — пятиугольник с вершинами (0; 0), (0; 60), (20; 50), (30; 40) и (50; 0) (рис. 45). Оптимальная точка $\bar{x}^* =$

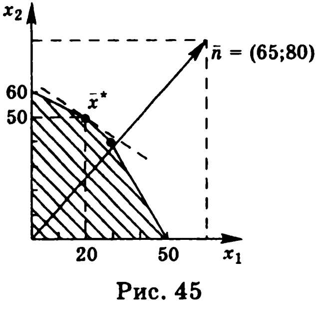


Рис. 45

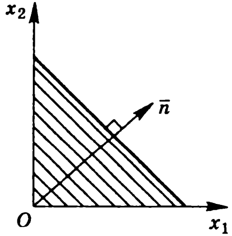


Рис. 46

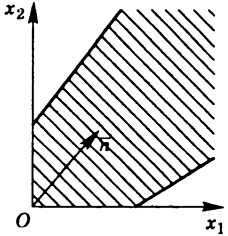


Рис. 47

$= (20;\ 50)$. Максимум целевой функции $f^* = $
$= 65 \cdot 20 + 80 \cdot 50 = 5300$.

Задача линейного программирования может иметь бесконечно много оптимальных решений (рис. 46), а в случае неограниченного допустимого множества — не иметь ни одного оптимального решения (рис. 47).

Канонические ЗЛП с двумя свободными переменными

Базисные переменные исключаются из задачи методом, изложенным в §5.2. Полученная стандартная ЗЛП решается графически.

Пример 2.

$x_1 - x_2 \to \max;$

$2x_1 - 4x_2 - x_3 + x_4 = 3;$

$$4x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 6;$$
$$x_1 + 4x_2 + x_3 + x_5 = 15;$$
$$x_j \geqslant 0, j = 1, 2, \dots, 5.$$

Решение. Элементарными преобразованиями система уравнений сводится к виду

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_5 = 9, \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 3. \end{cases}$$

Вспомогательная стандартная ЗЛП имеет вид

$$x_1 - x_2 \to \max;$$
$$2x_1 + x_2 \leqslant 9;$$
$$-x_1 + 3x_2 \leqslant 6;$$
$$x_1 - x_2 \leqslant 3;$$
$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0.$$

Ее графическое решение приведено на рис. 48. Множество оптимальных решений — отрезок $[\bar{a}, \bar{b}] = \{\lambda\bar{a} + (1 - \lambda)\bar{b} \mid \lambda \in [0, 1]\}$ (см. §2.4). Координаты концов отрезка:

- во вспомогательной задаче: $\bar{a} = (3; 0)$, $\bar{b} = (4; 1)$;

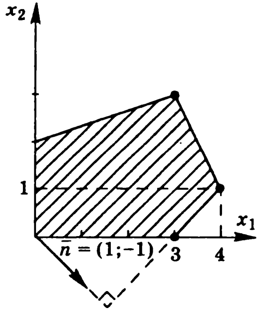


Рис. 48

● в исходной задаче: $\bar{a} = (3;\ 0;\ 9;\ 0;\ 3)$, $\bar{b} = (4;\ 1;\ 7;\ 0;\ 0)$. ■

§ 5.4. Симплекс-метод

Основной метод решения канонических ЗЛП называют *симплекс-методом*. Симплекс — понятие многомерной геометрии, обобщающее понятия отрезка, треугольника, тетраэдра ... Детальное знакомство с этим понятием не является необходимым для понимания сущности метода.

В дальнейшем предполагается, что в канонической ЗЛП на минимум

$$
\begin{aligned}
& c_1x_1 + \dots + c_nx_n \to \min; \\
(5.4.1)\quad & a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i,\ i = 1, \dots, m; \\
& x_j \geqslant 0,\ \ j = 1, \dots, n;
\end{aligned}
$$

система уравнений совместна, и $r = m$. Также будет предполагаться, что в качестве базисных могут быть взяты переменные x_1, x_2, ..., x_m, а в качестве свободных — переменные x_{m+1}, ..., x_n. (Этого всегда можно достичь перенумерацией переменных.)

Угловые точки

Угловой точкой [*базисным допустимым решением*, *БДР*] задачи (5.1) называется такое решение ее системы уравнений, в котором свободные переменные равны нулю, а базисные неотрицательны.

Пример 1. В задаче

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \to \min,$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6,$$

$$x_j \geqslant 0, j = 1, 2, 3$$

имеются три угловых точки, соответствующие трем способам разбиения переменных на свободные и базисные:

$\bar{x}^{(1)} = (6;\ 0;\ 0),$

$\bar{x}^{(2)} = (0;\ 3;\ 0),$

$\bar{x}^{(3)} = (0;\ 0;\ 2).$

Смысл названия «угловая точка» виден из рис. 49. ■

Основная теорема линейного программирования. Если каноническая ЗЛП разрешима, то среди ее оптимальных решений обязательно найдется угловая точка.

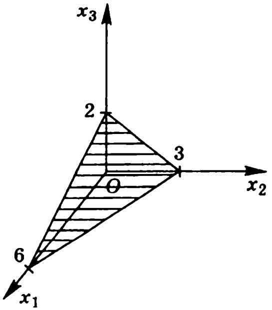


Рис. 49

Базисная допустимая форма

Базисной допустимой формой (*БДФ*) называется такая форма канонической ЗЛП, в которой:

1) целевая функция выражена через свободные переменные;

2) каждая базисная переменная входит (с коэффициентом 1) только в одно уравнение, и в это уравнение не входят другие базисные переменные;

3) правые части всех уравнений неотрицательны.

Отметим, что каноническая ЗЛП имеет, вообще говоря, множество разных БДФ, которые отличаются друг от друга наборами базисных и свободных переменных.

В случае, если базисные переменные имеют индексы 1, ..., m, а свободные — индексы $m+1$, ..., n, то соответствующая БДФ записывается следующим образом:

$$p_{m+1}x_{m+1} + \ldots + p_J x_J + \ldots + p_n x_n =$$
$$= f(\bar{x}) - p_0 \to \min \ldots + \alpha_{1,J}x_J + \ldots \qquad [Ц]$$

$$x_1 + \alpha_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{1,J}x_J + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_{1,n}x_n = \beta_1; \qquad [1]$$

$$
\begin{aligned}
(5.4.2)\ & \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\
& x_I + \alpha_{I,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{I,J}x_J + \ldots \\
& \ldots + \alpha_{I,n}x_n = \beta_I; \qquad\qquad\qquad [I] \\
& \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\
& x_m + \alpha_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_{m,J}x_J + \ldots \\
& \ldots + \alpha_{m,n}x_n = \beta_m; \qquad\qquad\qquad [m] \\
& \bar{x} \geqslant \bar{0}.
\end{aligned}
$$

Целевая функция записана здесь в виде, удобном для применения к ней элементарных преобразований (см. §§1.3, 1,9). Смысл выделенных индексов I и J разъяснен далее.

Аналогично может быть записана любая другая БДФ.

Улучшение угловой точки

С каждой БДФ взаимно однозначно связана угловая точка. Значения свободных переменных в этой точке равны нулю — следовательно, в силу имеющихся уравнений, значения базисных переменных равны правым частям уравнений. Например, с БДФ (5.4.2) связана угловая точка $\bar{x}^{(0)} = (\beta_1, \ldots, \beta_m; 0, \ldots, 0)$. Если в целевой строке

при всех $j = m + 1, ..., n$ коэффициенты $p_j \geqslant 0$, эта угловая точка оптимальна.

Если же найдется хотя бы один индекс J, для которого $p_J < 0$, увеличение переменной x_J при сохранении нулевых значений остальных свободных переменных приведет:

1) к уменьшению значения целевой функции;

2) к изменениям базисных переменных в силу равенств

$x_i + \alpha_{i,J} x_J = \beta_i$.

Если $\alpha_{i,J} = 0$, то при росте x_J значение базисной переменной x_i не изменится, а при $\alpha_{i,J} < 0$ рост x_J приведет к росту x_i. Таким образом, **если в J-м столбце нет положительных коэффициентов, переменная x_J может расти неограниченно, при этом** $\min f(x) = -\infty$.

Напротив, если $\alpha_{i,J} > 0$ для некоторого индекса i, рост x_J приведет к убыванию x_i, ограниченному условием неотрицательности. Равенство $x_i = 0$ будет достигнуто при $x_J = \beta_i / \alpha_{i,J}$. Значит, рост x_J ограничен минимальным из таких отношений. Зафиксируем индекс I, такой что

$$\beta_I / \alpha_{I,J} = \min_{\alpha_{i,J}>0} \{\beta_i / \alpha_{i,J}\}.$$

Таким образом, получается новая угловая точка, с новой базисной переменной $x_J = \beta_I / \alpha_{I,J}$ и новой свободной переменной $x_I = 0$. Роли остальных переменных не изменятся.

Преобразование БДФ

Нужно построить новую БДФ, соответствующую набору базисных и свободных переменных для улучшенной угловой точки. Это делается при помощи следующих элементарных преобразований старой БДФ:

$$
\begin{aligned}
&[\text{Ц}']: = [\text{Ц}] - p_J/\alpha_{I,J} \cdot [I];\\
&[1']: = [1] - \alpha_{1,J}/\alpha_{I,J} \cdot [I];\\
&\dots \dots \dots \dots \dots\\
&[I']: = 1/\alpha_{I,J} \cdot [I];\\
&\\
&[m']: = [m] - \alpha_{m,J}/\alpha_{I,J} \cdot [I].
\end{aligned}
\qquad (5.4.3)
$$

Шаг симплекс-метода закончен.

На следующем шаге проверяют оптимальность новой угловой точки, и если она не оптимальна, повторяют описанные выше действия. За конечное (и, как правило, небольшое) число шагов находят оптимальное решение.

Коэффициент $\alpha_{I,J}$, играющий важнейшую роль в формулах (5.4.3), называется *опорным элементом*. J-й столбец коэффициентов называется *опорным столбцом*, а I-е уравнение — *опорным уравнением*.

К сожалению, число шагов симплекс-метода, необходимое для решения ЗЛП, нельзя указать заранее. Более того, это число шагов зависит от того, насколько удачно мы выбираем опорный столбец, если запись целевой функции в БДФ содержит несколько отрицательных коэффициентов.

(!) Попадание в *вырожденные* угловые точки, для которых $\beta_I = 0$, может привести к зацикливанию. Чтобы этого избежать, в компьютерных программах, реализующих симплекс-метод, предусмотрены некоторые меры предосторожности. Они позволяют решить задачу даже при вырожденных угловых точках.

Пример 2.

$$65x_1 + 80x_2 \to \max;$$

$$0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \leqslant 12;$$

$$0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 \leqslant 10;$$

$$0{,}3x_1 + 0{,}3x_2 \leqslant 21;$$

$$x_j \geqslant 0,\ j = 1,\ 2,\ 3.$$

Геометрическое решение этой задачи (см. пример 1 §5.3) позволяет сделать полезные сопоставления с алгебраическими результатами, полученными симплекс-методом.

Преобразование стандартной ЗЛП в каноническую с помощью дополнительных переменных дает БДФ:

$$-65x_1 - 80x_2 \to \min;$$

$$0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 + x_3 = 12;$$

$$0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 + x_4 = 10;$$

$$0{,}3x_1 + 0{,}3x_2 + x_5 = 21;$$

$$x_j \geqslant 0,\ j = 1,\ \ldots,\ 5.$$

В этой БДФ переменные x_3, x_4, x_5 — базисные, а x_1, x_2 – свободные. Ей соответствует угловая точка $\bar{x}^{(0)} = (0, 0, 12, 10, 21)$. Эта точка неоптимальна, так как оба коэффициента в целевой строке отрицательны. В качестве переменной, вводимой в базис, можно использовать как x_1, так и x_2. На первый взгляд, второй вариант даст больший выигрыш, поэтому увеличиваем x_2 (на самом деле, этот выигрыш может обернуться проигрышем во времени работы на последующих шагах, но будущее нам неизвестно!).

Предельное значение, до которого можно увеличить x_2, равно $\min\{12/0{,}2;\ 10/0{,}1;\ 21/0{,}3\} = 12/0{,}2 = 60$. При таком x_2 мы получим $x_3 = 0$. Методом элементарных преобразований построим новую БДФ с базисными переменными x_2, x_4, x_5 и свободными x_1, x_3.

$$-25x_1 + 400x_3 = f(x) + 4800 \rightarrow \min;$$

$$0{,}5x_1 + 5x_3 + x_2 = 60;$$

$$0{,}15x_1 - 0{,}5x_3 + x_4 = 4;$$

$$0{,}15x_1 - 1{,}5x_3 + x_5 = 3;$$

$$x_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, 5.$$

Соответствующая угловая точка $\bar{x}^{(1)} = (0, 60, 0, 4, 3)$ снова неоптимальна (сравните с графическим решением!). Поэтому нужно сделать второй шаг симплекс-метода, увеличивая переменную x_1 до величины $\min\{60/0{,}5;\ 4/0{,}15;\ 3/0{,}15\} = 20$. При этом переменная x_5 станет равной нулю, а значения других переменных определяются следующей БДФ:

$$500/3x_5 + 150x_3 = f(x) + 5300 \to \min$$

$$\ldots x_5 + \ldots\ x_3 + x_2 = 50$$

$$\ldots x_5 + \ldots\ x_3 + x_4 = 1$$

$$\ldots x_5 + \ldots\ x_3 + x_1 = 20$$

$$x_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, 5,$$

где многоточиями заменены несущественные для дальнейшего рассуждения коэффициенты.

Анализ целевой строки показывает, что последней БДФ соответствует оптимальная угловая точка, и следующего шага симплекс-метода не будет. Именно поэтому можно не тратить время на вычисление шести коэффициентов в уравнениях системы. Правые части этих уравнений все-таки следует вычислить, так как они равны значениям базисных переменных в оптимальном решении: $\bar{x}^* = (20, 50, 0, 1, 0)$.

Отметим, что начав решение на первом шаге с увеличения переменной x_1, мы бы получили тот же результат не за два, а за три шага симплекс-метода. ■

§ 5.5. Симплекс-таблицы

Каноническая ЗЛП

$c_1x_1 + ... + c_nx_n \to \min;$

$a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n = b_i,\ i = 1, ..., m;$

$x_j \geqslant 0,\ j = 1, ..., n$

может быть описана таблицей коэффициентов, которая называется *полной симплекс-таблицей*:

A	b
c	0

где $A = (a_{ij})$ — основная матрица системы уравнений, $\bar{b}$ — вектор-столбец правых частей, $\bar{c}$ — вектор-строка коэффициентов целевой функции. В правом нижнем углу стоит ноль, если формула целевой функции не содержит свободного члена. В противном случае он записывается в правой нижней клетке с обратным знаком.

Если задача записана в БДФ, столбцы полной симплекс-таблицы, соответствующие базисным переменным, имеют стандартный вид: на одном месте единица, на остальных нули. В том числе, ноль стоит в нижней (целевой) компоненте такого столбца. Для БДФ, заданной формулой (5.4.2), это будет таблица, содержащая в качестве подматрицы единичную матрицу:

1	0	...	0	$\alpha_{1,m+1}$	...	α_{1n}	β_1
0	1	...	0	$\alpha_{2,m+1}$	...	α_{2n}	β_2
...	...	...	...	...		...	...
0	0	...	1	$\alpha_{m,m+1}$	...	α_{mn}	β_n
0	0	...	0	p_{m+1}	...	p_n	$-p_0$

Столбцы, соответствующие свободным переменным и правым частям, содержат почти всю информацию о БДФ. (В приведенном примере эта часть таблицы расположена справа от пунктирной черты). Поэтому полную симплекс-таблицу можно укоротить:

	x_{m+1}	...	x_n	
x_1	$\alpha_{1,m+1}$	...	α_{1n}	β_1
x_2	$\alpha_{2,m+1}$	...	α_{2n}	β_2
...	...	...	...	...
x_m	$\alpha_{m,m+1}$	...	α_{mn}	β_m
f	p_{m+1}	...	p_n	$-p_0$

Чтобы не забыть, какая именно базисная переменная описана строкой *укороченной симплекс-таблицы*, эту переменную записывают в заголовке строки. Столбцы также снабжаются заголовками, указывающими на свободные переменные БДФ.

Преобразования укороченной симплекс-таблицы

1) Выбрать опорный элемент $\alpha_{I,J}$, как это описано в §5.4.

2) Поменять местами заголовки x_I и x_J.

3) На место опорного элемента записать 1.

4) На место остальных элементов опорной строки записать их старые значения без изменений.

5) На место остальных элементов опорного столбца записать их старые значения с противоположными знаками.

6) На место остальных элементов таблицы записать числа, рассчитанные по формулам определителей 2-го порядка:

$$\alpha'_{i,j} = \alpha_{i,j*}\alpha_{I,J} - \alpha_{i,J*}\alpha_{I,j};$$

$$\beta'_i = \beta_{i*}\alpha_{I,J} - \alpha_{i,J*}\beta_I;$$

$$p'_i = \mathrm{p}_{j*}\alpha_{I,J} - p_{J*}\alpha_{I,j};$$

$$(-p'_0) = (-p_0)_*\alpha_{I,J} - p_{J*}\beta_I.$$

(Заметьте, что произведение, содержащее опорный элемент, всегда берется со знаком плюс независимо от его расположения в симплекс-таблице.)

7) Все элементы полученной таблицы поделить на $\alpha_{I,J}$ (старое!).

Каждой укороченной симплекс-таблице соответствует угловая точка. Свободные переменные в этой точке равны нулю, а базисные — числам, стоящим в правом столбце таблицы, кроме правого нижнего. Последнее число — значение целевой функции с обратным знаком.

Пример 1 (продолжение примера 2 §5.4).

Исходная симплекс-таблица:

	x_1	x_2	
x_3	0,1	0,2	12
x_4	0,2	0,1	10
x_5	0,3	0,3	21
f	−65	−80	0

Жирным шрифтом выделен опорный элемент. Преобразования по описанным выше правилам дадут (проверьте!) симплекс-таблицу, соответствующую новой БДФ:

	x_1	x_3	
x_2	0,5	5	60
x_4	0,15	−0,5	4
x_5	0,15	−1,5	3
f	−25	400	4800

Последней таблице соответствует точка $\bar{x}^{(1)} = (0, 60, 0, 4, 3)$. ■

§ 5.6. Разрешимость систем линейных уравнений в неотрицательных числах

Для запуска симплекс-метода требуется, чтобы ЗЛП была сведена к БДФ. Однако случайное разбиение переменных на базисные и свободные может привести к неудаче: в правых частях уравнений, разрешенных относительно базисных переменных, окажутся отрицательные числа. Равные им значения базисных переменных будут недопустимыми.

Существуют уравнения и системы, вообще неразрешимые в неотрицательных числах: например, уравнение $x_1 + x_2 = -1$.

Метод искусственного базиса для решения канонической ЗЛП

$$
\begin{aligned}
& f(\bar{x}) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \to \min; \\
(5.6.1)\quad & a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i,\ i = 1, \ldots, m; \\
& x_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

состоит в замене ее на задачу

$$
\begin{aligned}
F(\overline{X}) = {} & c_1x_1 + \ldots + c_nx_n + \\
& + M(x_{n+1} + \ldots + x_{n+m}) \to \min;
\end{aligned}
$$

(5.6.2) $a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n + x_{n+i} = b_i;$

$$i = 1, ..., m,\ x_j \geqslant 0,\ j = 1, ..., m + n,$$

где M — достаточно большое положительное число.

(!) В частности, если требуется установить разрешимость системы уравнений в неотрицательных числах, можно ввести $f(\bar{x}) = 0$, $M = 1$, $F(\overline{X}) = x_{n+1} + ... + x_{n+m}$.

Без ограничения общности можно считать, что $b_i \geqslant 0$, $i = 1, ..., m$. (Если для какого-то уравнения исходной системы это не так, умножим его на -1.) Тогда задача (5.6.2) станет базисной допустимой формой после исключения из целевой функции искусственно введенных базисных переменных $x_{n+1}, ..., x_{n+m}$, которые выражаются через свободные переменные $x_1, ..., x_n$. После этого задачу (5.6.2) можно решить симплекс-методом.

При этом возможны следующие исходы:

1) $\min F(\overline{X}) = -\infty$. Поскольку

$$\min\{M(x_{n+1} + ... + x_{n+m})\} \geqslant 0,$$

отсюда следует, что

$$\min f(x) = -\infty.$$

2) Задача (5.6.2) имеет оптимальное решение $X^* = (x_1^*, ..., x_n^*, x_{n+1}^*, ..., x_{n+m}^*)$, причем последние m компонент равны нулю. Тогда первые n компонент образуют оптимальное решение задачи (5.6.1).

3) Задача (5.6.2) имеет оптимальное решение $\overline{X}^* = (x_1^*, ..., x_n^*, x_{n+1}^*, ..., x_{n+m}^*)$, но среди последних m компонент имеются ненулевые. Тогда допустимое множество задачи (5.6.1) пусто.

Как обычно, при расчетах следует использовать симплекс-таблицы. Можно делать это так же, как описано в предыдущем параграфе, но при этом целевая строка будет содержать громоздкие выражения с неопределенным параметром M. Можно сделать расчет более удобным, записывая целевую строку «в два этажа», как показано в примере ниже.

Пример 1.

$f(x) = 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \to \min;$

$2x_1 - x_3 + x_4 = 8;$

$x_1 - 6x_2 + 4x_3 - x_4 = -2;$

$x_j \geqslant 0,\ j = 1, ..., 4.$

Составим вспомогательную задачу:

$$F(\overline{X}) = 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + M(x_5 + x_6) \to$$
$$\to \min;$$
$$2x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = 8;$$
$$-x_1 + 6x_2 - 4x_3 + x_4 + x_6 = 2;$$
$$x_j \geqslant 0,\ j = 1, ..., 6.$$

Чтобы получить БДФ, сложим уравнения, входящие в систему, и умножим сумму на M:

$$M(x_1 + 6x_2 - 5x_3 + 2x_4) +$$
$$+ M(x_5 + x_6) = 10M.$$

Отсюда получим выражение целевой функции через свободные переменные:

$$F(\overline{X}) = 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 -$$
$$- M(x_1 + 6x_2 - 5x_3 + 2x_4) + 10M.$$

Составим укороченную симплекс-таблицу вспомогательной задачи. В «верхнем этаже» целевой строки запишем коэффициенты последней формулы, не содержащие параметр M (они равны коэффициентам исходной целевой функции f), в «нижнем этаже» — коэффициенты, зависящие от M:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_5	2	0	−1	1	8
x_6	−1	6	−4	1	2
f	3	1	1	1	0
M	$-M$	$-6M$	$+5M$	$-2M$	$-10M$

Шаг 1.

Выбор опорного элемента. Поскольку M — достаточно большое положительное число (например, 100), отрицательные выражения появляются в целевой строке в первом, втором и четвертом столбцах. Последнее из действий, которые следует произвести над симплекс-таблицей (см. §5.5), — деление на опорный элемент; желательно, чтобы этот элемент был равен 1. С этой точки зрения опорным столбцом лучше всего сделать четвертый. Так как $\min\{8/1; 2/1\} = 2$, опорный элемент находится во второй строке (он выделен жирным шрифтом).

Преобразование симплекс-таблицы. Используем правила, описанные в §5.5. При этом распределительный закон умножения дает нам возможность работать с двумя этажами целевой строки как с двумя независимыми строками. Например, при расчете первого столбца: $(3 - M) \cdot 1 - (1 - 2M) \cdot (-1) = 3 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) + (-M) \cdot 1 - (-2M) \cdot (-1)$. Новая симплекс-таблица:

	x_5	x_2	x_3	
x_1	1/3	−2	3	2
x_4	1/3	4	−3	4
f	−4/3	3	1	−10
M	M	0	0	0

В дальнейшем мы можем не записывать столбец коэффициентов при переменной x_6. В самом деле, мы добились того, что эта искусственно введенная переменная стала равна нулю. Это означает, что в дальнейших расчетах мы сможем без нее обойтись.

Шаг 2.

Выбор опорного элемента. Опорным столбцом можно сделать первый или третий столбец. Действуя наугад, выберем первый. Опорный элемент находится в первой строке, так как во второй стоит отрицательное число.

Преобразование симплекс-таблицы. В результате вычислений получим таблицу:

	x_5	x_2	x_3	
x_1	1/3	−2	3	2
x_4	1/3	4	−3	4
f	−4/3	3	1	−10
M	M	0	0	0

Таким образом, мы исключаем последнюю искусственную переменную x_5 и столбец ее коэффициентов. M-строка таблицы теперь состоит только из нулей и также исключается. Оставшаяся симплекс-таблица описывает начальную БДФ исходной задачи.

Эта начальная БДФ является также и конечной, так как в целевой строке нет отрицательных коэффициентов при переменных x_2, x_3. Оптимальное решение: $x_1^* = 2$, $x_4^* = 4$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = 0$. Минимум целевой функции $f^* = 10$. ■

§ 5.7. Двойственность

Для каждой задачи линейного программирования существует *двойственная* задача. Связь между решениями прямой и двойственной задач описывается *теоремами двойственности* (см. далее).

Задача, двойственная к двойственной задаче, совпадает с исходной. Поэтому во всех таблицах ниже слова «прямая» и «двойственная» можно поменять местами. Неравенства с противоположным знаком, не внесенные в таблицы, нужно преобразовать, умножая на -1.

Двойственность в стандартной ЗЛП

Прямая задача	Двойственная задача
$f(\bar{x}) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max;$	$g(\bar{y}) = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min;$
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i,$	$\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \geqslant c_j,$
$i = 1, \ldots, m;$	$j = 1, \ldots, n;$
$x_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n$	$y_j \geqslant 0,\ i = 1, \ldots, m.$

Если прямая задача — о наилучшем использовании ресурсов (см. пример 1 §5.2), двойственная задача позволяет рассчитать возможные [*учетные, внутренние, неявные, теневые*] цены ресурсов. Собственник ресурсов имеет возможность переработать их самостоятельно или продать. Смысл ограничений двойственной задачи: продажа ресурсов должна быть не менее выгодна, чем переработка. Смысл целевой функции: покупатель заинтересован приобрести ресурсы за минимальную сумму.

Двойственность в канонической ЗЛП

Прямая задача	Двойственная задача
$f(\bar{x}) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min;$	$g(\bar{y}) = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i \to \max;$
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,$	$\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \leqslant c_j,$
$i = 1, \dots, m;$	$j = 1, \dots, m.$
$x_j \geqslant 0,\ j = 1, \dots, n$	

Двойственность в общей ЗЛП

	Прямая задача	Двойственная задача
1	$f(\bar{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min;$	$g(\bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} b_i y_i \to \max;$
2	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \geqslant b_i;$	$y_j \geqslant 0;$
3	$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = b_i;$	нет условия $y_j \geqslant 0;$
4	$x_j \geqslant 0$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \leqslant c_j;$
5	нет условия $x_j \geqslant 0$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \leqslant c_j.$

Каждое из правил 2–5 действует, если в задаче имеется ограничение данного вида. Например, таблица для канонической ЗЛП может быть получена из строк 1, 3, 4 последней таблицы.

Теоремы двойственности

Теорема 1 (*основная*). Прямая и двойственная задачи либо одновременно неразрешимы, либо одновременно разрешимы, причем $f(\bar{x}^*) = g(\bar{y}^*)$.

Теорема 2 (*теорема равновесия*). Оптимальность допустимых решений прямой и двойственной задач $\bar{x}^* = (x_1^*;\ x_2^*;\ \ldots\ ;\ x_n^*)$ и $\bar{y}^* = (y_1^*;\ y_2^*;\ \ldots\ ;\ y_m^*)$ равносильна выполнению равенств:

$$1)\ x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_j^* - c_j\right) = 0;$$

$$2)\ \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right)y_i^* = 0.$$

Равенства теоремы 2 называются *условиями равновесия* [*условиями дополняющей нежесткости*].

§ 5.8. Транспортная задача

Постановка задачи

Имеется m поставщиков груза и n потребителей. Запасы i-го поставщика равны a_i. Запросы j-го потребителя равны b_j. Стоимость перевозки единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю равна c_{ij}.

Составить план перевозки груза от поставщиков к потребителям с минимальными затратами.

Формализация

Пусть x_{ij} — количество груза, перевозимого от i-го поставщика к j-му потребителю. Условия задачи приводят к следующим соотношениям.

$\sum\limits_{i,j} c_{ij}x_{ij} \to \min$ (минимизация стоимости);

$\sum\limits_{j} x_{ij} = a_i$, $i = 1, \ldots, m$ (весь груз вывезен у поставщиков);

$\sum\limits_{i} x_{ij} = b_j$, $j = 1, \ldots, n$ (весь груз привезен потребителям);

$x_{ij} \geqslant 0$.

Транспортная задача — частный случай канонической ЗЛП. Необходимым и достаточным условием совместности ее системы уравнений является равенство $\Sigma a_i = \Sigma b_j = S$. В этом случае число базисных переменных равно $m + n - 1$. Ее БДР (см. §5.4) называются базисными перевозками.

При решении транспортной задачи используют таблицы вида

	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	c_{11} / x_{11}	c_{12} / x_{12}	... / ...	c_{1n} / x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} / x_{21}	c_{22} / x_{22}	... / ...	c_{2n} / x_{2n}	a_2
...	... / ...	... / ...	... / ...	... / ...	...
A_m	c_{m1} / x_{m1}	c_{m2} / x_{m2}	... / ...	c_{mn} / x_{mn}	a_m
	b_1	b_2	...	b_n	S

называемые *таблицами транспортной задачи* (ТТЗ). Буквами A_1, A_2, ... , A_m обозначены поставщики, буквами B_1, B_2, ... , B_n — потребители.

Клетки ТТЗ, соответствующие базисным (свободным) переменным базисной перевозки, называют *базисными* (*свободными*). Значения $x_{ij} = 0$ в свободных клетках не записывают.

Построение начальной перевозки методом минимального тарифа

В ТТЗ выбирают клетку с минимальным значением c_{ij} и для нее устанавливают $x_{ij} =$

$= \min\{a_i, b_j\}$. Если $x_{ij} = a_i$, то из ТТЗ вычеркивают i-ю строку, а значение b_j уменьшают на a_i. (Аналогично действуют при $x_{ij} = b_j$, вычеркивая столбец.) В уменьшенной таблице действия повторяют. После $m + n - 1$ итерации получается начальная базисная перевозка.

(!) Если $a_i = b_j$, вычеркивается **только** строка (или **только** столбец). В дальнейшем должно получиться **базисное** значение $x_{ij} = 0$, которое **записывают** в ТТЗ.

Двойственная задача

$$\sum_{i=1}^{m} u_i + \sum_{j=1}^{n} v_j \to \max;$$

$$u_i + v_j \leqslant c_{ij},\ i = 1, \dots, m,\ \ j = 1, \dots, n.$$

Двойственные переменные транспортной задачи u_i, v_j называют *потенциалами*.

Проверка оптимальности базисной перевозки

Для базисных клеток ТТЗ решают систему уравнений

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

(Для определенности к этой системе из $m + n - 1$ уравнения с $m + n$ переменными добавляют уравнение $u_1 = 0$.) После этого для свободных клеток проверяют неравенства $u_i + v_j \leqslant c_{ij}$. Если все они выполнены, то перевозка **оптимальна**. Если хотя бы для одной свободной клетки $u_i + v_j > c_{ij}$, то перевозка неоптимальна.

Улучшение неоптимальной базисной перевозки

Для свободной клетки, в которой $u_i + v_j > c_{ij}$, составляют *цикл*, т.е. ломаную с чередующимися вертикальными и горизонтальными звеньями и вершинами в базисных клетках ТТЗ (и в исходной свободной клетке). Исходную клетку помечают знаком «+», смежные с ней клетки цикла — знаком «−», далее метки «+» и «−» чередуют (общее число клеток цикла четно). Среди «−» клеток выбирают клетку с минимальным объемом перевозки d, которая в следующей базисной перевозке считается свободной. Остальные клетки цикла в новой перевозке считаются базисными, причем объем перевозок:

- в «+» клетках увеличивается на d;
- в «−» клетках уменьшается на d.

Роли клеток, не вошедших в цикл, и объемы перевозок в них не меняются.

В результате описанной операции (*перекачки по циклу*) суммарная стоимость перевозки уменьшается на

$$\Delta = (u_i + v_j - c_{ij}) \cdot d.$$

Перекачки (с пересчетом потенциалов) повторяют до тех пор, пока не будет получена оптимальная перевозка.

Пример 1. Начальная ТТЗ:

	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	7	4	6	100
A_2	5	2	3	4	110
A_3	6	4	5	7	90
	80	70	100	50	300

Методом минимального тарифа находим значения базисных переменных:

$$x_{22} = 70,\ x_{11} = 80,\ x_{23} = 40,$$
$$x_{31} = 20,\ x_{33} = 40,\ x_{43} = 50.$$

(В конце мы вынуждены делать дорогие перевозки!)

Расчет потенциалов:

$$u_1 = 0,\ v_1 = 3,$$
$$v_3 = 4,\ u_2 = -1,$$
$$v_2 = 3,\ u_3 = 1,\ v_4 = 6.$$

Перевозка не оптимальна, так как $u_2 + v_4 > c_{24}$. Цикл состоит из 4 клеток.

- «+» клетки: (2; 4), (3; 3);
- «−» клетки: (2; 3), (3; 4);

$d = \min\{40; 50\} = 40$.

Новая ТТЗ:

	$v_1 = 3$	$v_2 = 4$	$v_3 = 4$	$v_4 = 6$	
$u_1 = 0$	3 / 80	7	4 / 20	6	100
$u_2 = -2$	5	2 − / 70	3	4 + / 40	110
$u_3 = 1$	6	4 +	5 / 80	7 − / 10	90
	80	70	100	50	300

Расчет потенциалов (они вписаны в ТТЗ) показывает, что условие оптимальности нарушено в клетке (3; 2). Перекачка по циклу, отмеченному в ТТЗ ($d = x_{34} = 10$), дает оптимальную перевозку:

	$v_1 = 3$	$v_2 = 3$	$v_3 = 4$	$v_4 = 5$	
$u_1 = 0$	3 / 80	7	4 / 20	6	100
$u_2 = -1$	5	2 / 60	3	4 / 50	110
$u_3 = 1$	6	4 / 10	5 / 80	7	90
	80	70	100	50	300

Минимальные затраты: $F^* = 80 \cdot 3 + 60 \times \times 2 + 10 \cdot 4 + 20 \cdot 4 + 80 \cdot 5 + 50 \cdot 4 = 1080.$ ■

Приложение

Деление многочленов

Если c — корень многочлена $p_n(t)$, то $p_n(t) = (t - c)p_{n-1}(t)$. Многочлен $p_{n-1}(t)$ можно вычислить, поделив $p_n(t)$ на $t - c$ «уголком», подобно тому, как это делается для чисел.

Пример 1. Многочлен $t^3 + 3t^2 - 2t - 2$ имеет корень 1. Запишем делимое и делитель в виде:

$$\begin{array}{l|l} t^3 + 3t^2 - 2t - 2 & t - 1 \\ \cline{2-2} & t^2 \end{array}$$

Под горизонтальной чертой запишем *первое неполное частное* $t^2 = t^3 : t$ (старший член делимого делится на старший член делителя). Умножим t^2 на делитель $t - 1$ и результат запишем «в столбик» по степеням под делимым:

$$\begin{array}{l|l} t^3 + 3t^2 - 2t - 2 & t - 1 \\ \cline{2-2} t^3 - t^2 & t^2 \end{array}$$

Произведем вычитание и припишем к разности следующий член делимого:

$$
\begin{array}{rl}
-\begin{array}{l} t^3 + 3t^2 - 2t - 2 \\ t^3 - t^2 \\ \hline \qquad 4t^2 - 2t \end{array} & \begin{array}{|l} t - 1 \\ \hline t^2 \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

Повторим проделанные действия. А именно, справа от вертикальной черты добавим к t^2 *второе неполное частное* $4t = 4t^2 : t$. Умножим его на делитель, вычтем результат из $4t^2 - 2t$ и допишем следующее слагаемое:

$$
\begin{array}{rl}
-\begin{array}{l} t^3 + 3t^2 - 2t - 2 \\ t^3 - t^2 \\ \hline \qquad -\begin{array}{l} 4t^2 - 2t \\ 4t^2 - 4t \\ \hline \qquad 2t - 2 \end{array} \end{array} & \begin{array}{|l} t - 1 \\ \hline t^2 + 4t \\ \\ \\ \\ \end{array}
\end{array}
$$

Повторяя процедуру в третий раз, заканчиваем расчет.

$$
\begin{array}{r|l}
t^3 + 3t^2 - 2t - 2 & t - 1 \\
\cline{2-2}
-\ t^3 - t^2 \qquad\qquad & t^2 + 4t + 2 \\
\cline{1-1}
4t^2 - 2t \quad\ \ & \\
-\ 4t^2 - 4t \quad\ \ & \\
\cline{1-1}
2t - 2 & \\
-\ 2t - 2 & \\
\cline{1-1}
0 \ \ & \\
\end{array}
$$

Частное равно $t^2 + 4t + 2$. Ноль, записанный внизу, есть остаток от деления. Он позволяет контролировать правильность вычислений. ■

Применение описанного метода иногда вызывает затруднения у студентов, если делимое или частное содержат (в неявном виде) члены с нулевыми коэффициентами. В следующих двух примерах показано, как нужно действовать в этих случаях.

Пример 2.

$2t^3 - 4t^2 - 3t + 6 = (t - 2)(2t^2 - 3)$

$$
\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} 2t^3 - 4t^2 - 3t + 6 \\ 2t^3 - 4t^2 \phantom{{}- 3t + 6} \end{array} & t - 2 \\ \cline{2-2}
\overline{} & 2t^2 + 0t - 3 \\
-\begin{array}{r} 0t^2 - 3t + 6 \\ - 3t + 6 \end{array} & \\
\overline{} & \\
0 &
\end{array}
$$

Написанные здесь выражения с нулевыми коэффициентами обычно только подразумевают, оставляя место их записи пустым. ■

Пример 3.

$-2t^4 + t + 1 = (t - 1)(-2t^3 - 2t^2 - 2t + 1)$

$$
\begin{array}{r|l}
-2t^4 + 0t^3 + 0t^2 + t + 1 & t - 1 \\
\cline{2-2}
-\underline{-2t^4 + 2t^3 } & -2t^3 - 2t^2 - 2t + 1 \\
-2t^3 + 0t^2 & \\
-\underline{-2t^3 - 2t^2 } & \\
-2t^2 + t & \\
-\underline{-2t^2 + 2t } & \\
-t + 1 & \\
-\underline{-t + 1} & \\
0 &
\end{array}
\blacksquare
$$

Деление «уголком» возможно для многочленов любых степеней. При этом остаток от деления должен иметь меньшую степень, чем делитель.

Пример 4.

$$
\begin{array}{l|l}
\begin{array}{r}
-\begin{array}{l} x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x \\ x^4 + x^3 + x^2 \end{array} \\ \hline
-\begin{array}{l} 2x^3 - 3x^2 + 5x \\ 2x^3 + 2x^2 + 2x \end{array} \\ \hline
-\begin{array}{l} -5x^2 + 3x + 0 \\ -5x^2 - 5x - 5 \end{array} \\ \hline
8x + 5
\end{array}
&
\begin{array}{l} x^2 + x + 1 \\ \hline x^2 + 2x - 5 \end{array}
\end{array}
$$

Таким образом, $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 5x =$
$= (x^2 + x + 1)(x^2 + 2x - 5) + 8x + 5.$ ■

Справочное издание

СБОРНИК ОСНОВНЫХ ФОРМУЛ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

Автор-составитель
СТАНЦО ВИТАЛИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ

Редакция «Образовательные проекты»

Ответственный редактор *Г. Н. Хромова*
Художественный редактор *Т. Н. Войткевич*
Технический редактор *А. Л. Шелудченко*
Корректор *И. Н. Мокина*
Оригинал-макет подготовлен *ООО «Бета-Фрейм»*

Общероссийский классификатор продукции
ОК-005-93, том 2, 953005 — литература учебная

Санитарно-эпидемиологическое заключение
№ 77.99.60.953.Д.001683.02.10 от 05.02.2010 г.

ООО «Издательство Астрель».
129085, г. Москва, проезд Ольминского, д. 3а

ООО «Издательство АСТ».
141100, РФ, Московская обл., г. Щелково, ул. Заречная, д. 96

Наши электронные адреса: www.ast.ru. E-mail: astpub@aha.ru

Типография ООО «Полиграфиздат»
144003, г. Электросталь, Московская область, ул. Тевосяна, д. 25

По вопросам приобретения книг обращаться по адресу:
0129085, Москва, Звездный б-р, дом 21, 7 этаж
Отдел реализации учебной литературы
«Издательство группы АСТ»
Справки по телефонам: (495)615-53-10, 232-17-04

СБОРНИК ОСНОВНЫХ ФОРМУЛ ПО АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ И ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

- В справочнике приведены все основные необходимые формулы вузовского курса аналитической геометрии и линейной алгебры.
- Структура данного справочника позволяет быстро найти любую нужную формулу.
- Книга адресована студентам высших учебных заведений.

ISBN 978-5-17-071839-9

9 785170 718399

www.ast.ru
www.elkniga.ru