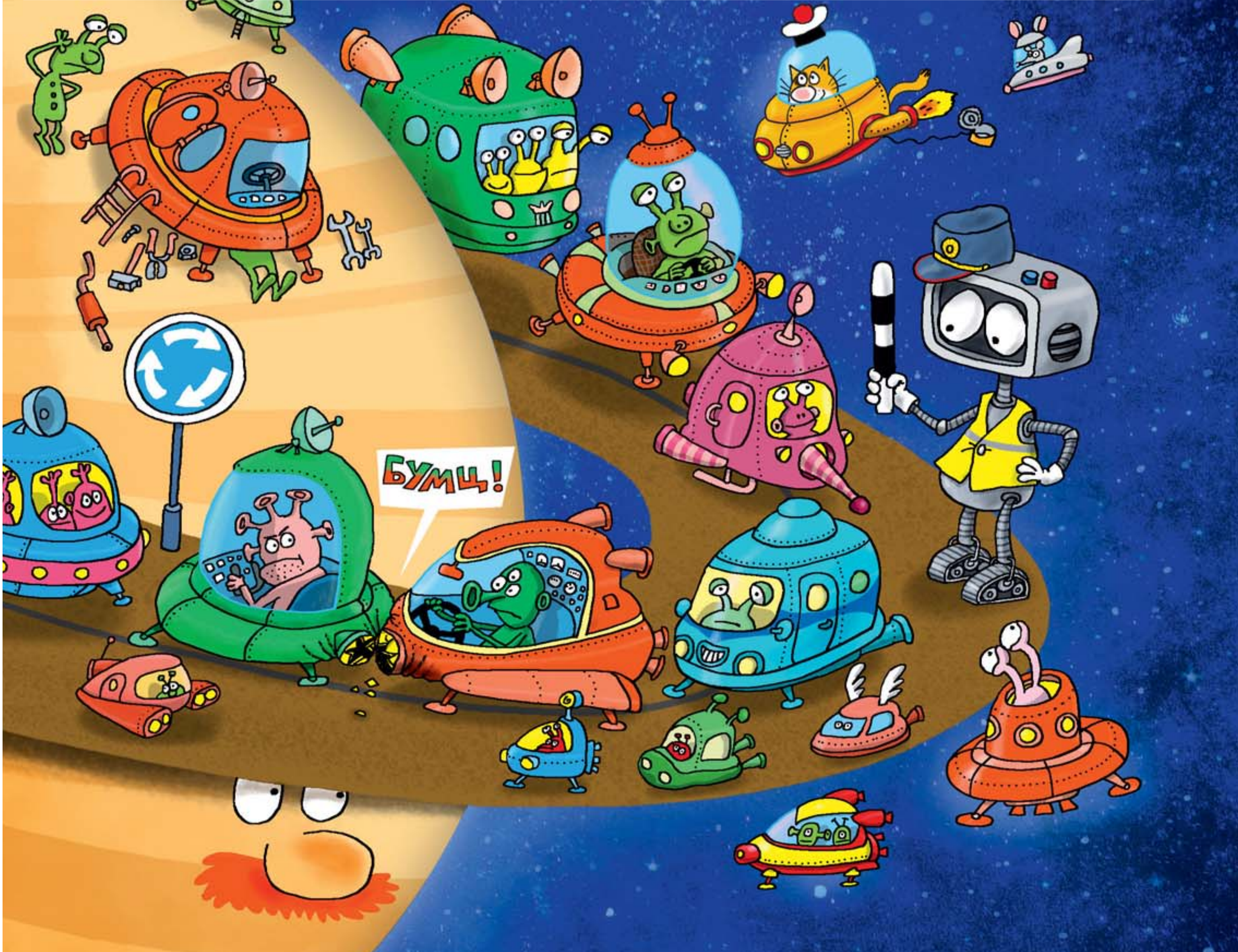
№ 8 | август 2017

ЖУРНАЛ КВАНТИК ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ



Издаётся Московским центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

№ 8
август 2017

САТУРН – ПЛАНЕТА В ШЛЯПЕ

ЧАСЫ НА ЛЬДУ

РОГ ТОРРИЧЕЛЛИ

Enter

Кроме журнала редакция «Квантика» выпускает альманахи, плакаты и календари загадок

Подробнее о продукции «Квантика» и о том, как её купить, читайте на сайте kvantik.com

У «Квантика» есть свой интернет-магазин – **kvantik.ru**

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru

instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12

vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 08, август 2017 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор: С.А.Дориченко
Редакция: В.Г.Асташкина, В.А.Дрёмов, Е.А. Котко, И.А.Маховая, А. Ю. Перепечко, М.В.Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas-07
Вёрстка: Р.К.Шагеева, И.Х.Гумерова
Обложка: художник Николай Воронцов

Учредитель и издатель:
Негосударственное образовательное учреждение «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях связи Почты России:
- Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)
- «Каталог Российской прессы» МАП (индексы **11346** и **11348**)

Онлайн-подписка по «Каталогу Российской прессы» на сайте **vipishi.ru**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 6000 экз.
Подписано в печать: 11.07.2017
Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «ИПК Парето-Принт»,
Адрес типографии: 170546, Тверская обл., Калининский р-н, с/п Бурашевское, ТПЗ Боровлево-1, 3«А»
www.pareto-print.ru
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

СОДЕРЖАНИЕ

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

Валерия Сирота

«Я видел высочайшую планету трёхчастной»

Галилео Галилей (1610)

САТУРН – ПЛАНЕТА В ШЛЯПЕ

Масса	95 масс Земли
Радиус	9 радиусов Земли
Расстояние до Солнца	9,5 а.е.
Период обращения вокруг Солнца	30 земных лет
Период вращения вокруг оси	10 часов
Спутники	известно 62, из них 7 имеют средний диаметр от 400 км и выше

Не слишком понятную фразу, взятую эпиграфом к этой статье, Галилей послал в письме своему другу Кеплеру – записав её на латыни и к тому же анаграммой, то есть переставив как попало буквы. На случай, если кто-то посторонний захочет прочесть... Опасно было писать в письмах такие вещи, да Галилей и сам не понимал, что же это он такое увидел. А «зафиксировать» своё первенство – на случай, если это правда открытие, а не просто показалось – всё-таки хотел.

Галилей думал, что два «нароста» по бокам Сатурна – это спутники. И очень удивился, когда через несколько лет попробовал найти их снова – и не нашёл. Только через 50 лет Христиан Гюйгенс разглядел (в более сильный телескоп) тонкое кольцо вокруг Сатурна, висящее вокруг него каким-то чудом и нигде его не касающееся. И он же догадался, что кольцо это не сплошное, а состоит из множества мелких частичек, каждая из которых крутится вокруг планеты сама по себе.

Задача 1. А почему, кстати, Галилей назвал Сатурн «высочайшим», то есть удалённейшим? Ведь есть же планеты, которые ещё дальше от Солнца...

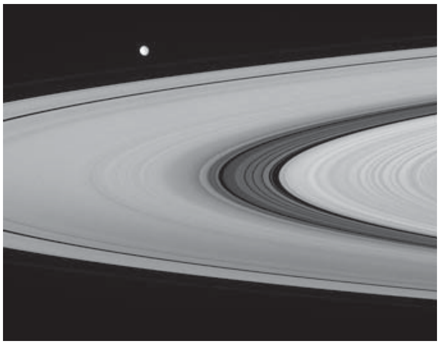
Задача 2. И почему Галилей не увидел кольца, когда собрался снова посмотреть на него после большого перерыва?

Кольца Сатурна – удивительно красивая и загадочная вещь, и раз уж мы о них заговорили, нарушим наш обычный порядок и разглядим сначала то, что вокруг Сатурна, – кольца и спутники, а потом его самого.

Кольца, как потом оказалось, есть и у Юпитера, и у других планет-гигантов. Но до сатурнова кольца им, конечно, далеко! Оно отражает больше солнечного света, чем сам Сатурн, – это потому, что ледяное.

Диаметр кольца – 250 тысяч км, а толщина его – всего 1 км! Сосчитайте-ка, какого размера получится его «правдивая» (то есть масштабная – без искажения пропорций) модель, если вы станете делать её из бумаги (толщина обычного листа бумаги 0,1 мм) – это **Задача 3**.

Сосчитали? Насколько прочным получится такое кольцо, склееное из бумаги? А настоящее-то вовсе не склеено! В хороший телескоп видно, что оно распадается на тысячу тоненьких колечек. А наблюдения космических аппаратов «Вояджер» и «Кассини» показали, что даже щель Кассини – тёмный промежуток между кольцами – не просто пустое пространство, а много-много тонких колечек, разделённых тонкими щелями, внутри которых – ещё более тонкие колечки…

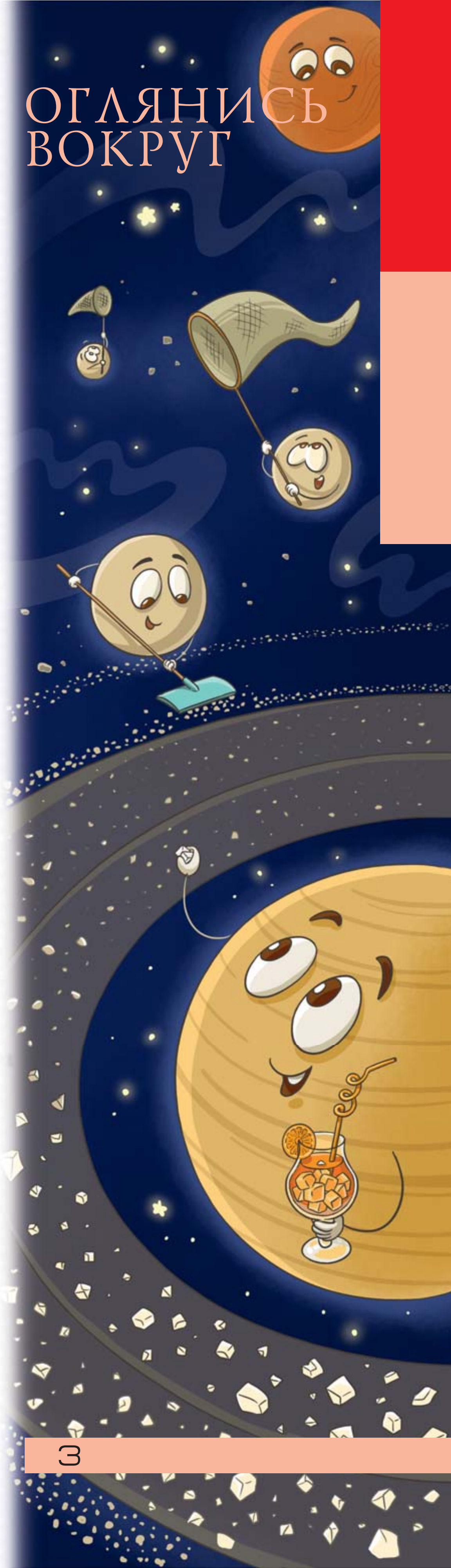


Кольца Сатурна. Тёмно-серая полоса с чёрными краями – щель Кассини. На заднем плане – спутник Мимас.

Да и кольца ничем не скреплены; они составлены из льдинок размером от 1 мм до 10 м, с маленькой примесью пыли и камешков. Если выловить их все да слепить вместе – не хватит даже на небольшой спутник диаметром 100 км.

А ведь каждая льдинка летает вокруг Сатурна сама по себе, никак они друг с другом не «договариваются». А вокруг то спутники пролетают, притягивают их каждый в свою сторону, то Юпитер поблизости (ну, относительно, конечно) проходит – тоже к себе тянет. То какой-нибудь шальной камушек пролетит – врежется в льдинку, собьёт её с пути… Почему же кольцо не разваливается от всех этих воздействий? Учёные это до сих пор как следует не поняли. Во всяком случае, ясно, что само кольцо бы не уцелело: ему помогают спутники-«пастухи», которые вращаются вокруг Сатурна неподалёку от колечек и увеличивают их устойчивость – «пасут» льдинки, возвращают на место, если какая-нибудь из них «сбилась с пути».

Происхождение колец тоже не совсем ясно. Скорее всего, это останки спутника (или спутников), который



давным-давно крутился вокруг Сатурна по слишком близкой орбите; так же как Марс потихоньку притягивает к себе Фобос, Сатурн притянул этот спутник и разорвал приливными силами на мелкие кусочки. Но больше такое ни с кем не случится: все теперешние спутники Сатурна вращаются вокруг него медленнее, чем он сам вокруг оси, и поэтому удаляются от него.

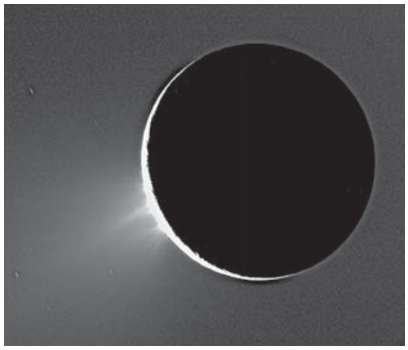
Спутников у Сатурна, как и у Юпитера, много. Но, как и у Юпитера, больше половины из них – далёкие, мелкие и вращаются вокруг планеты «не в ту сторону» – заблудшие захваченные астероиды. Зато остальные – те, которые поближе – очень хорошо воспитаны: они все «не сводят глаз» с Сатурна, повернувшись к нему всегда одной стороной, и почти все вращаются строго в плоскости экватора Сатурна. При этом многие из них ещё и кольца «пасут»: добрая половина этих спутников находится в различных резонансах друг с другом и с кольцами Сатурна. (Помните, что это такое? – Пока один сделает два оборота, другой делает три… а третий – пять…)[1]. Конечно, не может быть, чтобы такое невероятное совпадение получилось случайно. Это приливные силы отодвигали, придвигали, раскачивали и переставляли спутники (а заодно и льдинки в кольцах) до тех пор, пока не получилось чудо, которое мы сейчас видим.

Внешние, захваченные спутники – в основном тёмные и относительно тяжёлые при таких ничтожных размерах. А внутренние, «свои», – очень светлые и лёгкие. Значит, они состоят в основном изо льда. Всего семь спутников Сатурна оказались достаточно тяжёлыми, чтобы приобрести шарообразную форму (и то седьмой – Мимас – похож скорее на яйцо, чем на шар). Остальные так и остались «булыжниками» неправильной формы. Почти каждому спутнику есть чем похвалиться: вот Япет, например, – двухцветный. Передняя по ходу (ведущая) сторона у него чёрная, как ночь, а задняя (ведомая) – светлая, почти как юпитерова Европа. Когда Джованни Кассини открыл его в 1671 году, он долго удивлялся: почему

[1] Как у Юпитера есть троянские астероиды (см. статью «Качели, резонансы и космическое хулиганство», «Квантик» №11, 2015 год), так и у некоторых крупных спутников Сатурна есть троянцы – спутники на той же орбите вокруг Сатурна!

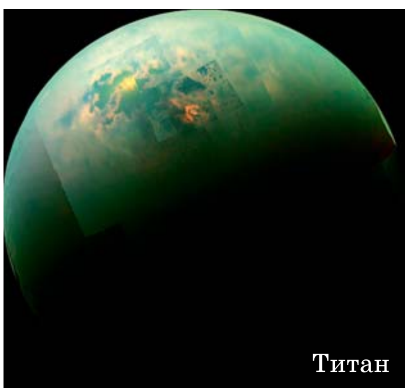
этот странный спутник видно только с одной стороны от Сатурна?! Похожая ситуация у Реи и Дионы (хотя разница там не такая гигантская), только у них наоборот – ведущая сторона светлая, ведомая – тёмная... Но, наверно, самые интересные – Титан и Энцелад.

У Энцелада, как и у юпитеровой Европы, под ледяной поверхностью – океан незамёрзшей воды. И через несколько «дыр» эта вода фонтаном бьёт наружу, прямо в космос, на сотни километров! Там она, конечно, замерзает, и часть льдинок падает обратно на спутник, а остальные становятся строительным материалом для внешнего кольца Сатурна. Но как небольшой Энцелад умудрился сохранить внутри столько тепла, чтобы хватило на обогрев океана? Наверно, как и у Ио и Европы, помогают приливы, возникающие из-за некруговой орбиты, которая поддерживается резонансом с Дионой... И действительно, при движении Энцелада по орбите мощность фонтана сильно меняется от дальней к ближней точке. А может, этот спутник ещё и сам греется изнутри за счёт распада радиоактивных атомов...

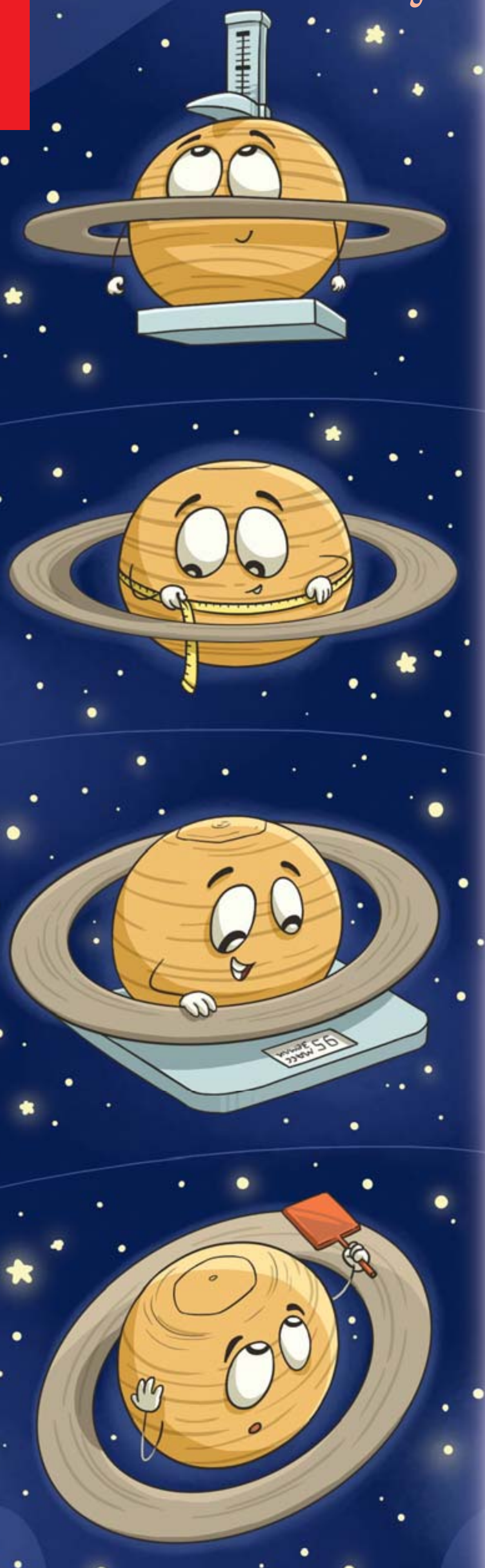


Гейзеры (криовулканы) Энцелада

Титан – единственный большой спутник Сатурна и второй после Ганимеда среди всех спутников. По размеру он больше Меркурия и всего вдвое меньше Земли. Но главное – это единственный спутник, имеющий настоящую, плотную атмосферу! В основном она из азота, как и земная. Давление «воздуха» на поверхности Титана в полтора раза больше, чем на Земле. Кроме того, Титан – единственное (кроме Земли) тело в Солнечной системе, на поверхности которого нашли жидкость – правда, не воду, а жидкий метан.



Титан



Давайте теперь посмотрим наконец на саму планету. Сатурн по размеру практически такой же, как Юпитер, а масса у него в 3 раза меньше. Это значит, что он очень «рыхлый»: это единственная планета в Солнечной системе, средняя плотность которой меньше плотности воды и, кстати, в 10 раз меньше земной. Это потому, что в нём совсем мало тяжёлых атомов (то есть железа и «камней») и даже гелия, и состоит он почти полностью из газа водорода. Из-за такой малой плотности ускорение свободного падения на Сатурне невелико – мы бы весили там примерно столько же, сколько на Земле. Вот только стоять на Сатурне негде – откуда же на планете, состоящей из водорода, возьмёшь твёрдую поверхность!

Сатурн, как и Юпитер, очень быстро вращается вокруг оси. От этого он очень сильно «сплющился». Из всех планет Сатурн – самый «мандаринообразный»: расстояние от центра до полюса отличается от расстояния до экватора на целый радиус Земли.

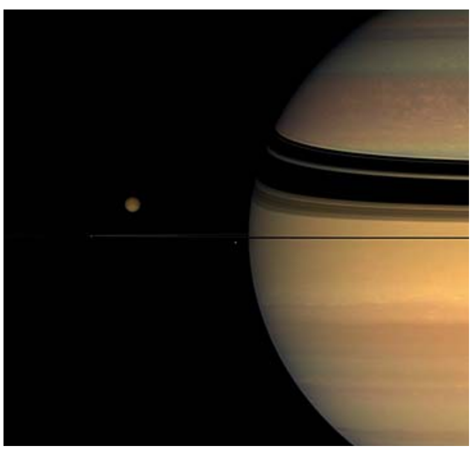
Шестиугольник Сатурна

Сатурн, в общем-то, во многом похож на Юпитер. Вот разве что Большого Красного пятна у него нет: вихри и ураганы там регулярно появляются, но не такие долгоживущие. Зато у Сатурна есть своя особенность – гигантский правильный шестиугольник, в который выстроились облака на северном полюсе. Каждая сторона этого шестиугольника больше диаметра Земли, и он вращается вокруг оси с той же скоростью, с какой, видимо, вращается внутренняя часть Сатурна. Откуда он там взялся и почему не разрушается – никто не знает. Прямые линии, правильные многоугольники встречаются в твёрдых телах, в кристаллах – но в газе?.. Загадка.

И всё-таки, как же получилось, что внутренние планеты – маленькие и каменистые, а внешние – большие и состоят из водорода? Ответ нужно искать в истории возникновения Солнечной системы. Вначале никаких планет не было, а было большое облако пыли и газа (в основном водорода, но и остальных атомов понемножку), в центре которого возникла протозвезда – огромный комок, постепенно сжимающийся и нагревающийся. И чем больше этот комок становился, тем сильнее он притягивал окружающие пыль и газ, и облако постепенно сжималось, становясь потихоньку всё плотнее и меньше. Вот в этом облаке и возникли сгустки вещества – сначала их было много, и каждый старался вырасти, притягивая к себе окружающие газ и пыль. В основном, конечно, пыль, потому что когда ты маленький и лёгкий, удержать газ и не дать ему улететь – трудно. Потом, когда эти сгустки стали уже довольно большие – их называют *планетезималями* – они стали объединяться, сливаться друг с другом, и образовали протопланеты, которые уже могли притягивать и газ. Но чем ближе к центру облака, тем горячее, и из внутренних областей за это время испарились и улетели подальше и вода, и лёгкие газы. Поэтому планеты, которые были близко к звезде, быстро набрали себе тяжёлых атомов («камня и железа»), а газа набрать не успели. А тем, что подальше, – наоборот, газа досталось много. По этой же причине и воды (и льда) на планетах земной группы оказалось мало, а за поясом астероидов – сколько угодно.

Задача 4. Как получена верхняя фотография справа? (Никакого монтажа не было.)

Задача 5. А что, собственно, происходит на нижней фотографии справа? Что значит тонкая полоса посредине снимка? Что это за двойная толстая чёрная полоса на планете?



Фотографии аппарата «Кассини» (NASA/JPL/Space Science Institute)

Художник Мария Усеинова

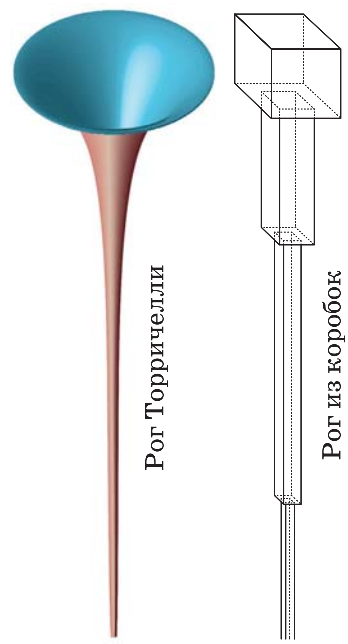
Алексей Панов

РОГ АРХАНГЕЛА ГАВРИИЛА, ОН ЖЕ РОГ ТОРРИЧЕЛЛИ

Эванджелиста Торричелли, портрет кисти Лоренцо Липпи (около 1647 г.)

Конечно же, ни у Гавриила, ни у Торричелли рогов не было. Здесь рог – это всего лишь труба или горн, с помощью которого архангел Гавриил возвестит приход Судного дня, а Эванджелиста Торричелли придумал математический аналог этого горна. Раньше я уже писал об этом великолепном достижении Торричелли («Малярный парадокс», «Квант» №6 за 1986 год). Сейчас я расскажу о том же самом, но чуть попроще.

Свой рог мы будем собирать из водонепроницаемых прямоугольных коробок. Самая верхняя из них имеет форму куба с единичными рёбрами, но без верхней крышки. Та коробка, что под ней, вытянута по вертикали. Её вертикальные рёбра в два раза длиннее, они имеют длину 2, а горизонтальные в два раза короче – имеют длину $\frac{1}{2}$. В дне первой коробки сделано сквозное отверстие размером $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, так что любая жидкость может свободно переливаться из верхней коробки в нижнюю и обратно. Третья коробка ещё больше вытянута – её вертикальные рёбра равны 4, а горизонтальные



равны $\frac{1}{4}$. У следующей рёбра 8 и $\frac{1}{8}$, дальше идёт коробка с рёбрами 16 и $\frac{1}{16}$ и т. д.

Длина такого рога будет бесконечной.

Подсчитаем площадь его боковой поверхности. У первой коробки четыре боковые грани размером 1×1, так что площадь всех четырёх граней будет $4 \times (1 \times 1) = 4$. У второй коробки боковая грань имеет размер $2 \times \frac{1}{2} = 1$, и опять сумма площадей четырёх граней равна 4. В общем, у любой коробки площадь боковых граней равна 4. Рог состоит из бесконечного числа коробок, и у каждой коробки площадь боковых граней равна 4. Так что площадь боковых граней всего рога тоже будет равна бесконечности

$$4+4+4+4+4+\ldots=\infty.$$

Кроме боковых граней, у поверхности рога есть и горизонтальные участки. Так что *площадь всей поверхности рога* тем более *равна бесконечности*.

Теперь подсчитаем объём, заключённый внутри рога. Объём первой коробки, куба с ребром 1, равен $1 \times 1 \times 1 = 1$. Площадь основания второй коробки равна $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$, а её высота 2, так что объём коробки равен $\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \times 2 = \frac{1}{2}$. Объём следующей коробки равен $\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}\right) \times 4 = \frac{1}{4}$, у следующей $\left(\frac{1}{8} \times \frac{1}{8}\right) \times 8 = \frac{1}{8}$, дальше $\left(\frac{1}{16} \times \frac{1}{16}\right) \times 16 = \frac{1}{16}$ и т. д. Поэтому объём всего рога равен

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$$

Но посмотрите:

$$1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}=2-\frac{1}{2},$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\left(2-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}=2-\frac{1}{4},$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\left(2-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{8}=2-\frac{1}{8},$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=\left(2-\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{16}=2-\frac{1}{16}, \ldots$$

И тут отчётливо видно, что эти суммы всё ближе и ближе к 2, а значит, вся бесконечная сумма просто равна 2:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots=2.$$

Итак, *объём всего рога равен 2*.

В этом и состоял основной парадоксальный результат Торричелли. Он нашёл *тело, поверхность которого имеет бесконечную площадь, а объём конечен*. Этот результат шокировал современников. Торричелли был гением, он умел делать красивые вещи и доказывать результаты, которые до него не были известны. Так что его рог выглядит намного элегантнее нашего, угловатого, и применяемые им методы вычисления площадей и объёмов намного изощрённей наших.

Чтобы лучше понять, в чём заключается парадоксальность этого результата, оставим математику и перейдём на бытовой уровень. Будем считать, что единицей измерения длины у нас служит 1 дециметр, то есть 10 сантиметров. Тогда единицей измерения объёма будет 1 литр. Сходите в хозяйственный магазин и купите 2 литра голубой жидкой краски. Залейте эту краску в сконструированный нами рог. Так как его объём тоже равен двум литрам, рог будет заполнен доверху. Подождите немного, встряхните и вылейте из него всю краску обратно. Вся внутренность нашего рога окажется окрашенной в голубой цвет. В этом и заключается парадокс: нам понадобилось всего два литра краски, чтобы закрасить поверхность бесконечной площади. Этот результат и называется малярным парадоксом. Попробуйте разобраться, в чём тут дело.

Напомню ещё о двух замечательных достижениях Торричелли. Он создал в лабораторных условиях торричеллиеву пустоту и сконструировал ртутный барометр, которым до сих пор пользуются современные метеорологи. Торричелли недолгое время сотрудничал с Галилеем, после смерти которого заместил его в должности профессора математики во Флорентийской академии. Торричелли сотрудничал со многими итальянскими учёными. Один из них, Рафаэлло Маджотти, был создателем оригинального аэрогидравлического приспособления. Теперь это игрушка, известная нам под названием *декартов* или *картезианский водолаз* («Водолаз двойного действия», «Квантик» № 5 за 2017 год).

Художник Мария Усеинова

ЧАСЫ на ЛЬДУ

Игорь Акулич

Окончание. Начало в № 7

«Четверо правильно идущих часов лежат на столе циферблатами вверх так, что их центры являются вершинами квадрата. В некий момент концы минутных стрелок часов оказались вершинами квадрата. Докажите, что и в любой другой момент времени четырёхугольник с вершинами в концах минутных стрелок является квадратом. Толщиной часов пренебречь»[2].

– А часы одинаковые?

– Не обязательно.

– То есть и длины стрелок могут различаться? Ничего себе! Даже не знаю, как подступиться.

– Твоё счастье, что я знаю. Могу подсказать, откуда начинать.

– Давай.

– Вот вспомогательная теорема – как принято говорить, *лемма*. Возьмём квадрат с вершинами, обозначенными по часовой стрелке $ABCD$. Перенесём эти вершины в точки A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно таким образом, что все векторы AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 равны по длине, причём каждый последующий повёрнут на 90° *тоже по часовой стрелке* по отношению к предыдущему. Утверждается, что тогда $A_1B_1C_1D_1$ – тоже квадрат. Сумеешь доказать?

– Подожди, дай-ка сначала нарисую (рис. 4). А, так это ж очевидно!

– Ну, не то чтобы совсем очевидно, но доказать несложно. Проще всего отметить центр O квадрата $ABCD$, а потом убедиться, что точки A_1, B_1, C_1 и D_1 находятся на равных расстояниях от этого центра, и углы A_1OB_1, B_1OC_1, C_1OD_1 и D_1OA_1 – прямые.

– Ладно, проехали. Это и впрямь легко. Но дальше-то что?

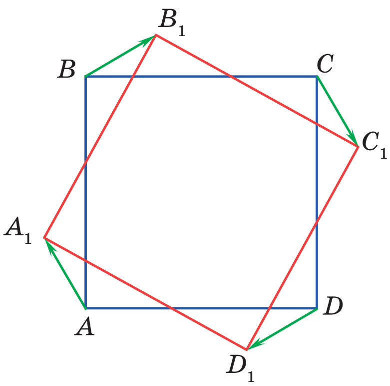
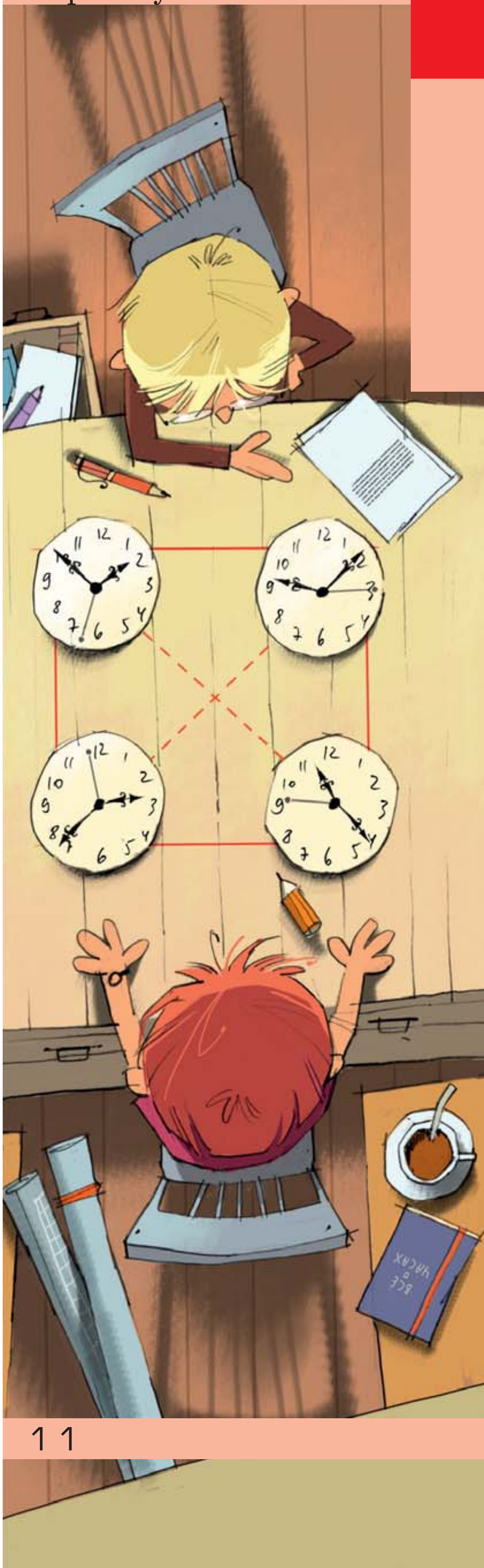
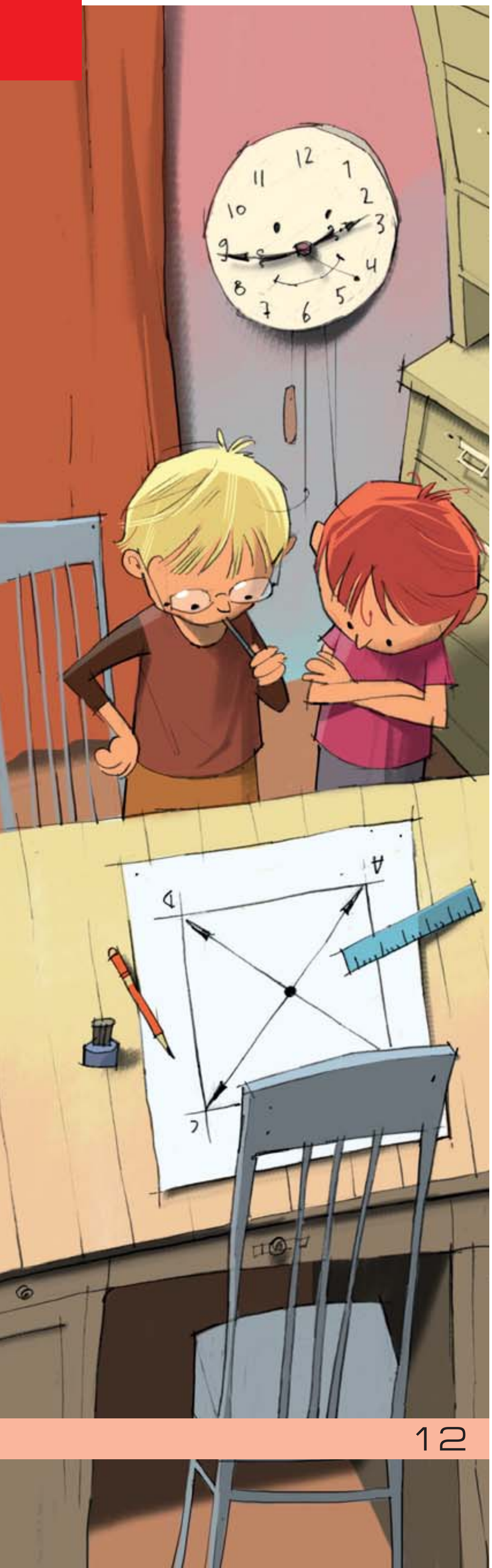


Рис. 4



[2] XIII Всероссийская олимпиада школьников по математике, 1987 г., 10 класс. Автор неизвестен.



– А теперь давай так. Центры часов, по условию, всегда лежат в вершинах квадрата. Обозначим их (по часовой стрелке) $A_0B_0C_0D_0$ (рис. 5). Пусть концы минутных стрелок в какой-то момент являются вершинами квадрата $ABCD$ (естественно, тоже по часовой стрелке, на рис. 5 изображён красным). Теперь аккуратно перенесём все часы (не поворачивая их[3]) так, чтобы их центры совпали с центром O квадрата $A_0B_0C_0D_0$. Концы стрелок при этом тоже перенесутся, но как? Давай нарисуем квадрат $A_0B_0C_0D_0$ и проведём векторы от вершин к его центру O (рис. 6). Смотри: каждый «последующий» вектор переноса равен по величине и повёрнут на 90° по отношению к «предыдущему».

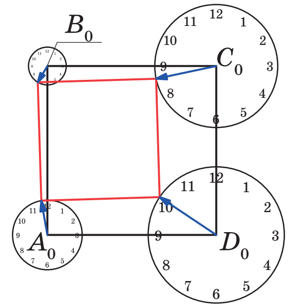


Рис. 5

– Вижу.

– Значит, после переноса, по лемме, концы стрелок останутся вершинами квадрата (рис. 7)! А далее все «перенесённые» часы идут себе и идут, и их минутные стрелки вращаются с одинаковой угловой скоростью. Поскольку они синхронно вращаются, то и квадрат, образованный их концами, останется квадратом, что мы и видим на рисунке 7. Он целиком будет поворачиваться вокруг точки O со скоростью один оборот в час. А теперь возьмём *произвольный* момент времени и проделаем обратную операцию: перенесём центры всех часов обратно в вершины квадрата. Здесь уже каждый вектор переноса сменится на противоположный, но – обрати внимание! – по-прежнему каждый «последующий» вектор равен по величине и повёрнут на 90° по отношению к «предыдущему» (рис. 8). Значит, по той же лемме, концы стрелок опять

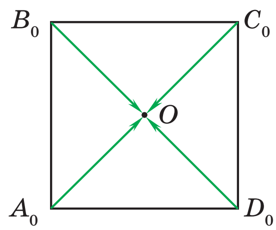


Рис. 6

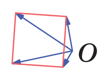


Рис. 7

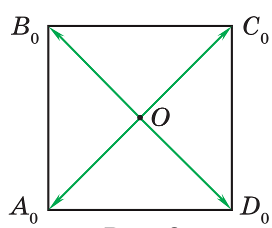


Рис. 8

[3] По-научному это называется *параллельный перенос*.

будут вершинами квадрата. Но это и есть их положение в тот самый произвольный момент времени. Вот и всё!

– Да, задача красивая, но… скажи-ка мне, что означает в условии **«Толщиной часов пренебречь»**?

– Это как раз говорит о том, что толщины всех часов очень и очень малы – практически нулевые. Поэтому мы можем считать их идеально плоскими. Опять же – нет проблем с переносом всех часов в центр квадрата (их пришлось при этом сложить «в стопочку», высотой которой мы тоже пренебрегаем).

– Ах, так? Но тогда часы могут в исходном положении «перекрываться», то есть налегать друг на друга – в условии на это запрета нет!

– Могут… Ну и что?

– А то, что тогда утверждение, которое ты мне тут с блеском доказал, является *неверным*!

– Почему это?

– А вот тебе пример[4]. Возьмём тот же квадрат $A_0B_0C_0D_0$, в вершинах которого находятся центры часов. Концы минутных стрелок в некоторый момент обозначим теми же буквами A, B, C и D. Пусть радиусы часов с центрами в точках A_0 и C_0 очень велики – настолько, что одни из этих часов «накладываются» на другие. При этом стрелка A_0A направлена строго на точку C_0 и почти её достигает, не доходя до неё на какую-то очень малую величину x, намного меньшую стороны квадрата $A_0B_0C_0D_0$. Та же история и со стрелкой C_0C – она почти дотягивается до точки A_0. Стрелки же B_0B и D_0D наоборот, очень короткие, тоже направлены встречно, и длины их обеих равны той же малой величине x. Вот я на рисунке 9 всё это изобразил. Даже специально, чтобы тебе понятней было, стрелки A_0A и C_0C сделал разного цвета и разной толщины. Ты ведь не станешь возражать, что концы стрелок образуют квадрат?

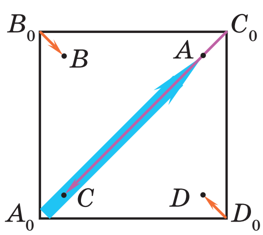
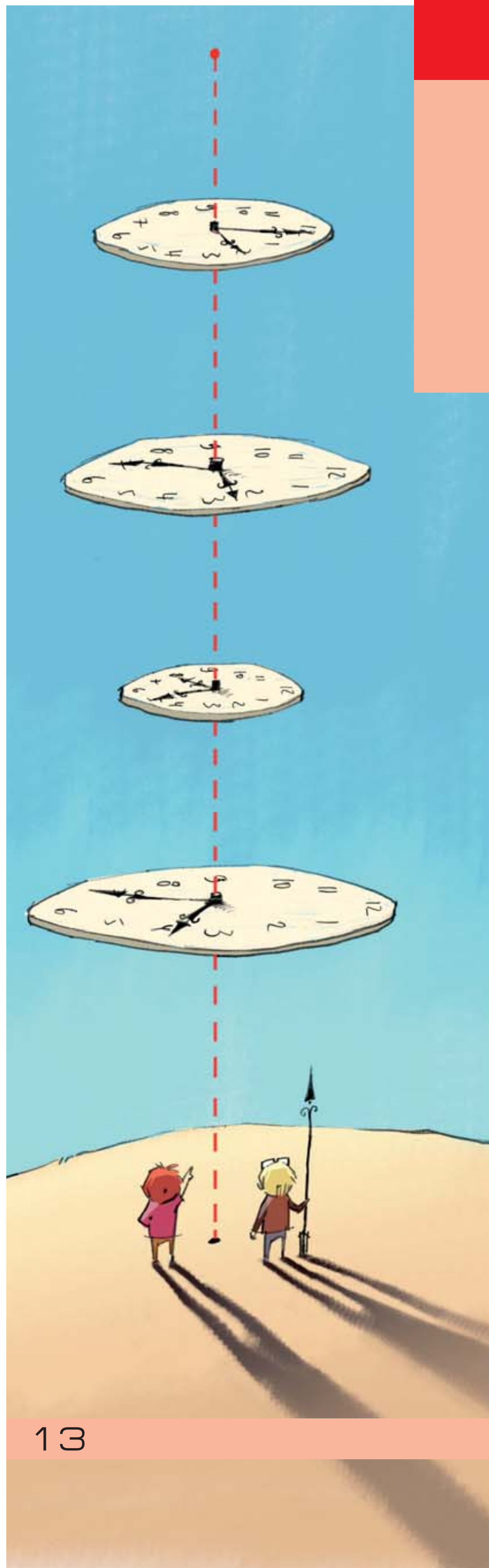


Рис. 9

– Не стану.

– Вот! А теперь посмотри, что будет через полчаса. Каждая стрелка повернётся на 180°. Получится рисунок 10. Здесь-то $ABCD$ – уж явно не квадрат!

[4] Такой опровергающий пример принято называть *контрпримером*.



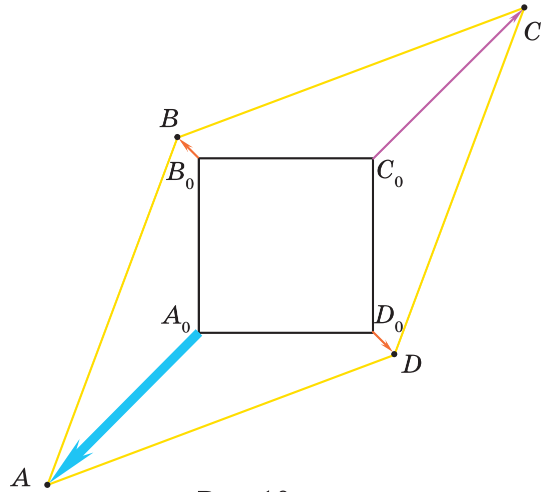


Рис. 10

– И правда. Вытянутый ромб какой-то... Но *почему*?!

– Очень просто. В квадрате *ABCD* на рисунке 9 вершины следуют *против часовой стрелки*, поэтому твою распрекрасную лемму применить здесь нельзя!

– Она не моя...

– Неважно. Главное – олимпиадная задача, получается, была с ошибкой. И через столько лет она вскрылась! Видишь – всё тайное становится явным.

– А может, автор имел в виду, что часы не должны перекрываться?

– Может. Но это надо было указывать в условии! И тогда при решении необходимо дополнительно доказать, что при этом вершины квадрата, образованного концами стрелок, следуют в том же направлении обхода, что и вершины квадрата, в котором находятся центры часов. А как это сделать?

– Ну... например, указать в условии, что длины стрелок не превосходят половины стороны квадрата. Тогда никакие наложения стрелок будут невозможны.

– Верно! Или лучше так: диаметры часов не превосходят стороны квадрата. Так что когда в следующий раз ко мне с задачами сунешься – сперва проверь корректность условия и правильность решения. А то все усилия пропадут впустую.

– Признаю. Согласен. Исправлюсь.

Художник Алексей Вайнер

Михаил Гельфанд

Арабские монеты

В мусульманских странах счёт годам ведётся не от рождения Христа (христианская эра), а от переселения Мухаммеда из Мекки в Медину (хиджра). Приведены фотографии (с обеих сторон) арабских монет, на которых стоят обе даты.

1. В каких годах отчеканены эти монеты?

2. В каком году было переселение Мухаммеда? (*Внимание:* задача с подвохом!)

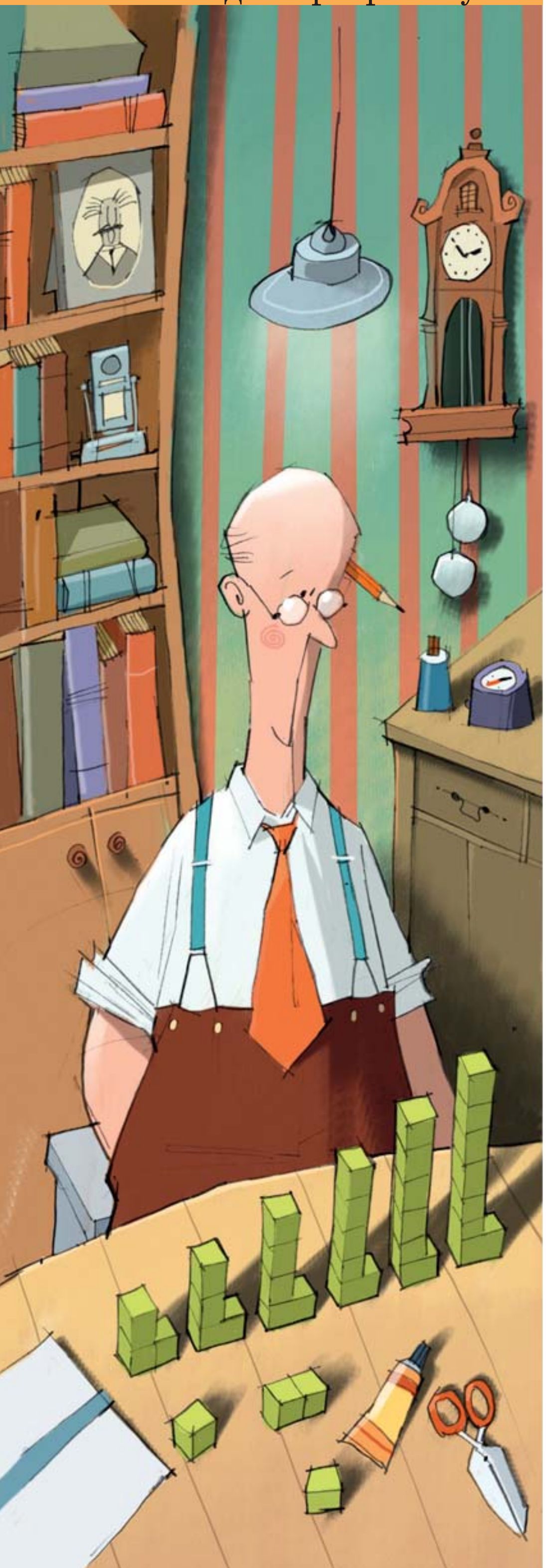
3. Что можно сказать про номиналы этих монет?

4. Пользуясь интернетом, попробуйте определить эти монеты.
(*Подсказка:* в строке поиска Google пишете номинал и год (в обеих эрах) и слово «coin», а потом разглядываете картинки.)

Присылайте решения до 1 сентября по адресу **kvantik@mccme.ru** с пометкой «арабские монеты». Победителей ждут призы!

Художник Артём Костюкевич

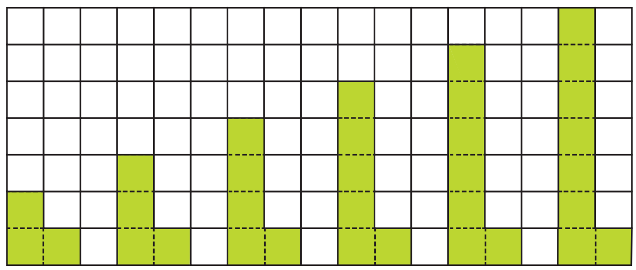
Владимир Красноухов



L-головоломка

Как-то в «Квантике» мне встретилась задача популяризатора занимательной математики Михаила Евдокимова:

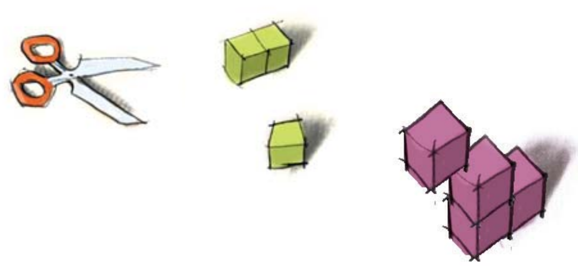
Даны шесть штук L-образных элементов (см. рисунок). Требуется составить из этих элементов прямоугольник. Элементы можно как угодно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.

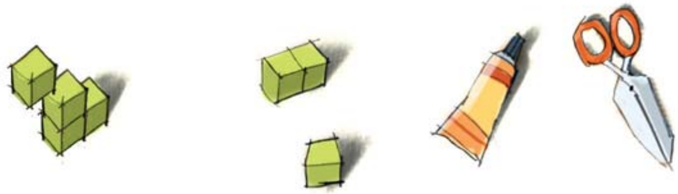


Мне понравилась эта изящная по содержанию и несложная в изготовлении миниатюра, и я пополнил ею свою домашнюю игротеку. Опыт показал: примерно половина из числа неопытных решателей принимается бездумно прикладывать элементы друг к другу, и… прямоугольник у них почему-то не выстраивается.

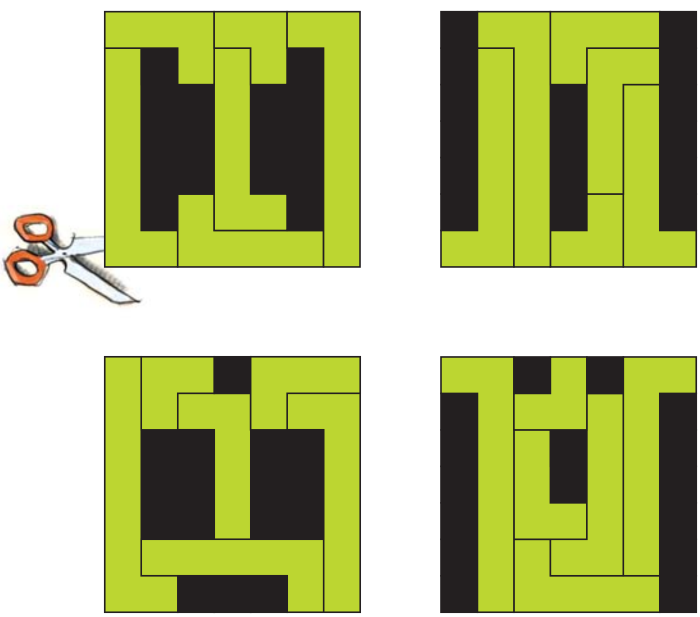
В таких случаях я обычно предлагаю немного подумать, прежде чем двигать элементы. Удивительно, но эта универсальная подсказка срабатывает! Стоит лишь подсчитать суммарное количество клеточек в игровых элементах, и задача решается почти в уме.

Некоторое продолжение у этой головоломки появилось, когда я изготовил (для хранения игровых элементов) плоскую коробочку с бортиками. Внутренний размер коробочки 7×7 клеток. Кроме функции хранения и удобства транспортировки появляется ещё несколько задач, которыми хотелось бы поделиться с нашими читателями.





Итак, новые задачи. Расположите все 6 элементов головоломки в рамочке 7×7 так, чтобы элементы находились в режиме антислайд (то есть ни один элемент не мог перемещаться ни в каком направлении ни на одну клеточку) и при этом образовывали симметричную фигуру. Нам известно более 80 вариантов таких решений. Они содержат разные количества (n) пустых областей, от 1 до 6. По одному примеру таких фигур для n, равного 2, 3, 4 и 5, мы приводим на рисунке (пустые области показаны чёрным цветом), остальные вы можете найти самостоятельно.



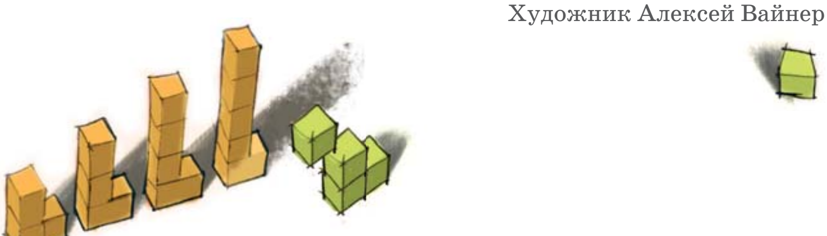
А теперь решите самые сложные задачи – постройте симметричные антислайды

1) с одной пустой областью ($n = 1$),

2) с шестью пустыми областями ($n = 6$).

Желаем успехов!

Художник Алексей Вайнер



ДЕТЕКТИВНЫЕ ИСТОРИИ

Борис Дружинин

КАНДИДАТ В ДЕПУТАТЫ

Лиза и Вова гостили на каникулах у подруги Маши в селе Бараново. Ох и весело они отдыхали: купались и загорали, ловили рыбу, ходили по грибы и ягоды, по вечерам кружились на танцплощадке. А какая вкусная картошка, испечённая в костре! Как-то в среду на дверях сельского клуба появилось объявление.

В СУББОТУ В 15 ЧАСОВ
СОСТОИТСЯ КОНЦЕРТ АГИТБРИГАДЫ.
В ПРОГРАММЕ ПЕСНИ, СТИХИ, ПАНТОМИМА, ФОКУСЫ

В субботу к полудню подкатил автобус с артистами. Руководил агитбригадой Афанасий Спиридонович Курбский – тот самый режиссёр, что ставил в школе спектакль «Приключения Буратино» с Лизой в роли Мальвины. Вид у него был довольно грустный.

– У нас несчастье, – вместо «здрасьте» пожаловался он Лизе и Вове. – Наш фокусник попал в больницу с аппендицитом. А в афише объявлены фокусы. Обманывать ожидания людей неудобно.

– Так Вова может фокусы показывать, – Лиза подтолкнула локтем Вову. – Покажешь?

– Мне как-то неловко, – застеснялся Вова. – Да и фокусы у меня чисто математические.

– Ничего страшного, – Афанасий Спиридонович сразу взбодрился и похлопал Вову по плечу. – Пусть зрители мозгами пошевелят и школьные знания свои вспомнят.

Вова кивнул и побежал готовить свои фокусы. Для этого ему понадобились два больших детских кубика. Концерт прошёл под несмолкающие аплодисменты и крики «Бис!» и «Браво!». Настала очередь Вовы.

– Надеюсь, вы не разучились считать, – обратился он к зрителям. – У многих телефоны с калькуляторами, так что в уме считать не придётся. А теперь фокус.

Задумайте любое трёхзначное число, состоящее из разных цифр. Задумали? Теперь поменяйте местами первую и последнюю цифры. Поменяли? Вычтите из большего числа меньшее. В полученном результате зачеркните любую цифру. Сложите оставшиеся, сумму сообщите мне, и я назову зачёркнутую цифру.

Пару минут зрители возились со своими мобильниками и, наконец, раздались голоса:

– У меня 11.

– Вы 7 зачеркнули, – сразу ответил Вова.

– Моя сумма 14.

– Вы 4 зачеркнули.

– 13.

– Зачёркнута пятёрка.

И кто бы ни называл свою сумму, Вова правильно угадывал зачёркнутую цифру.

В чём секрет фокуса?

Настала очередь второго фокуса. Вова объяснил зрителям его суть.

Перед вами два кубика – красный и жёлтый. На красном написаны числа 1, 2, 3, 4, 5 и 6. На жёлтом написаны числа 7, 8, 9, 10, 11 и 12. Все желающие по очереди, чтобы не загораживать обзор зрителям, будут бросать эти кубики. То число, что выпало на жёлтом кубике, надо возвести в квадрат. Кто не помнит – просто умножить само на себя. К полученному результату можно прибавить число, выпавшее на красном кубике, а можно и вычесть. Последний результат сообщите мне, и я назову числа, выпавшие на обоих кубиках.

Для верности Вове завязали глаза и представление продолжилось. Первым на сцену вышел сам мэр Баранова. Он бросил кубики, на минуту задумался, рассматривая потолок и шевеля губами, и сообщил Вове.

– Пятьдесят три!

– На красном кубике выпала четвёрка, на жёлтом семёрка, – не задумываясь отчеканил Вова.

И народ пошёл вслед за мэром.

– Восемьдесят семь.

– Шестёрка и девятка.

– Сто двадцать два.

– Единица и одиннадцать.

Заминка вышла с главным бухгалтером.

– Тридцать семь, – сказал он.

Вова слегка задумался и прокомментировал:

– Вы на жёлтом кубике приняли девятку за шестёрку.

Демонстрация фокуса продолжалась до тех пор, пока все зрители не побывали в роли участников, и Вова ни разу не ошибся.

В чём секрет фокуса?

Режиссёр Курбский долго благодарил Вову и выписал ему вполне достойный гонорар. Агитбригада уехала, и жизнь вернулась в прежнее состояние. Но вскоре новое событие всколыхнуло сонное Бараново. Предстояли выборы в областную Думу, и началась агитационная кампания.

Однажды по всему селу развесили объявления.

В ПЯТНИЦУ В 16 ЧАСОВ
СОСТОИТСЯ ВСТРЕЧА С ИЗБИРАТЕЛЯМИ
КАНДИДАТА В ДЕПУТАТЫ ОБЛАСТНОЙ ДУМЫ
ИВАНА ВАСИЛЬЕВИЧА КОШКИНА.
ЯВКА ВСЕХ ЖЕЛАЮЩИХ СТРОГО ОБЯЗАТЕЛЬНА!

Вова и Лиза тоже пришли на эту встречу. На сцене на фоне своей фотографии стоял сам Кошкин и представляющая его женщина.

– Иван Васильевич смелый человек, – говорила женщина. – Он получил медаль «За отвагу при пожаре», когда вынес из задымившейся конторы зарплатную ведомость. Он также награждён знаком «Почётный филателист». А недавно Иван Васильевич стал свидетелем того, как злодеи похитили у малыша формочку, чтобы использовать её как стакан, и не заплатили бабусе за кулёк семечек. Пока остальные свидетели фотографировали происшествие, Кошкин вступил в схватку со злодеями, скрутил одного из них, но тот умудрился вывернуться и даже сломал Ивану Васильевичу руку. Вот такой замечательный человек Иван Васильевич Кошкин, голосуйте за него!

– Что вы собираетесь сделать для нашего села? – спросили зрители Кошкина.

– Я построю в Бараново самый большой в мире «Диснейленд», – ответил кандидат в депутаты. – Родители повезут сюда детей со всего мира. Правительство России будет вынуждено построить здесь гостиницы-небоскрёбы, а вы все получите в них работу. Заживёте как боги!

– Во загибает! – улыбнулся Вова.

– Да, – согласилась Лиза и предупредила подругу: – Ты скажи своим, что Кошкин обманщик.

И действительно, обман быстро раскрылся.

Как Лиза и Вова раскрыли обман кандидата в депутаты?

Художник Екатерина Ладатко

Саша Прошкин и птицы Таймыра

Иван Кобиляков

В начале августа биологи и географы решили отправиться в экспедицию на полуостров Таймыр. Рано утром у причала уже кипела работа: по моторным лодкам распределяли коробки с провизией и оборудованием. Когда погрузка была завершена, участники экспедиции расселись по местам, и лодки отчалили от берега. Вдруг крышка одной из коробок приоткрылась, и оттуда появился Саша Прошкин.

– Можно мне с вами?

– Ну что с тобой поделать?! – развёл руками руководитель экспедиции биолог Михаил Зверев. – Назад поворачивать не будем. Садись на нос лодки. Будешь впередсмотрящим!

Флотилия двинулась в путь. Чем дальше на Север, тем ниже становились деревья, растущие по берегам реки. Лесотундра сменилась тундровыми кочками и болотами. Преодолев очередной поворот реки, лодка вспугнула большую чёрную птицу. Размашисто и тяжело работая крыльями, она, как гидроплан, разбежалась по воде и взмыла в воздух. Глазастый Саша успел заметить, что эта птица не целиком чёрная: на спине, крыльях и шее у неё были белые пятнышки, похожие на чешую рыбы. Брюшко и клюв тоже были белыми.

– Это полетела самая большая среди живущих на Таймыре гагар, – посмотрев в бинокль на улетающую птицу, сказал Михаил Зверев, – она называется белоклювой гагарой и занесена в Красную книгу России.

Услышав знакомое название, Саша Прошкин вспомнил нганасанскую сказку, которую рассказывала ему бабушка, и пересказал её биологу Михаилу:

– В стародавние времена не было суши, а был только бескрайний океан, – начал мальчик. – Чтобы где-то жить, звери и люди попросили гагару достать им со дна кусочек земли… Добрая птица нырнула и принесла в клюве землю. Эта земля потом увеличилась в размерах и стала домом для всех, кто не умеет плавать.

Дослушав легенду до конца, Михаил Зверев улыбнулся:

– Гагары замечательные пловцы! Они ныряют на двадцать метров в глубину и могут задерживать дыхание на две минуты. Может быть, с этим и связана нганасанская легенда. Есть у гагар, правда, один секрет…

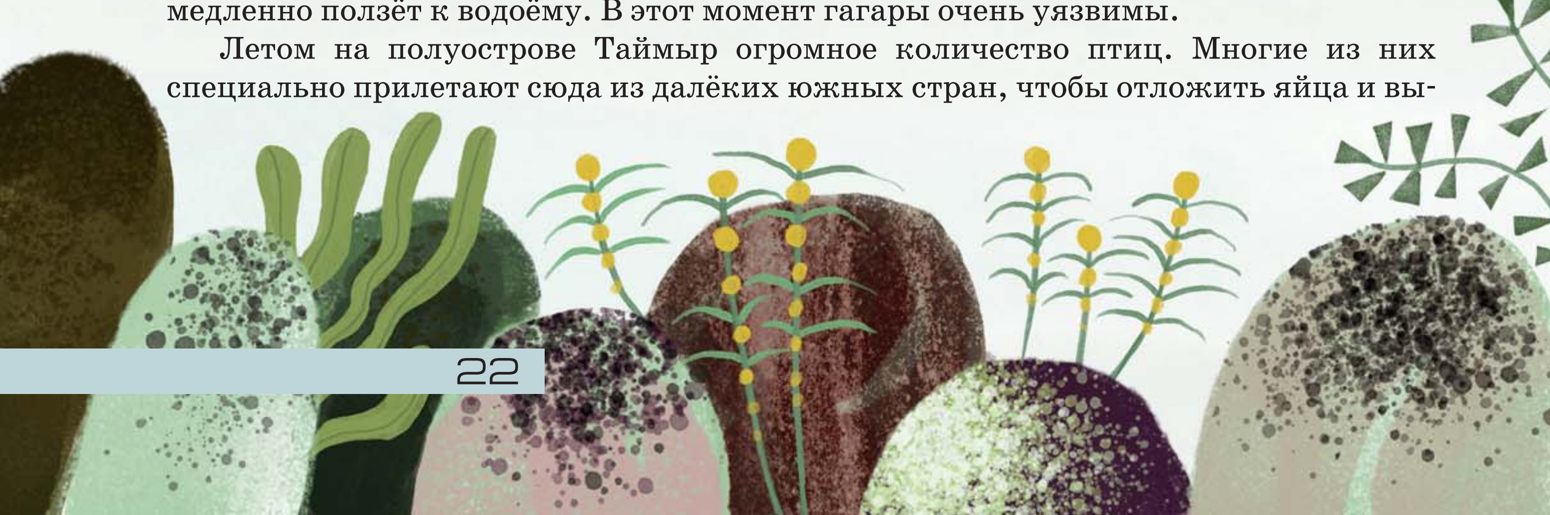
– Какой? – спросил Саша.

– Они очень сильно привязаны к рекам и озёрам. Гагары не умеют ходить, умеют только плавать и летать. Для того чтобы подняться в воздух, им нужно разбежаться по поверхности воды, а вот суша в качестве взлётной полосы не подходит…

– А если гагара всё-таки оказалась на суше?

– Такое бывает, но очень редко. Тогда она, смешно переваливаясь с боку на бок, медленно ползёт к водоёму. В этот момент гагары очень уязвимы.

Летом на полуострове Таймыр огромное количество птиц. Многие из них специально прилетают сюда из далёких южных стран, чтобы отложить яйца и вы-



растить птенцов. Саше Прошкину и Михаилу Звереву на реке встречались не только гагары, но и всевозможные гуси, утки и даже лебеди. Вот у берега поплыл маленький гусь-пискулька, а вот взлетела, испугавшись шума мотора, стая гусей-гуменников; на высокой тундровой кочке распушил свой пышный воротник кулик-турухтан… За каждым поворотом реки появлялись всё новые и новые птицы!

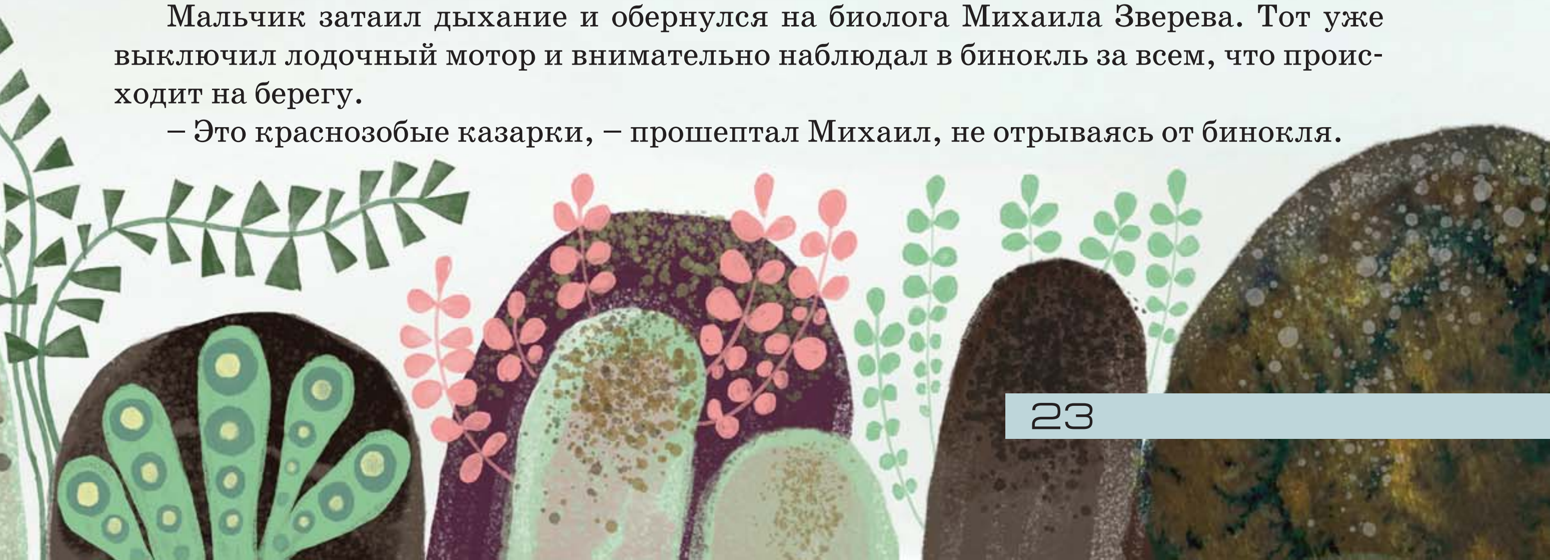
Но плыть без остановок трудно даже на моторных лодках.

– Надо остановиться на ночлег! – предложил Михаил.

Зоркому Саше Прошкину было поручено искать место, где будет удобно пришвартоваться. Он внимательно всматривался вдаль и заметил у песчаного берега двух птиц с яркой красной грудкой. Рядом сновали уже успевшие немного подрасти птенцы. Было приятно наблюдать за этими красивыми птицами. Но вдруг прямо над беззаботным семейством на вершине обрыва появился серый хищный зверёк. Саша тут же догадался, что это песец, сменивший свой белоснежный зимний наряд на новую летнюю одёжку. Ещё мгновение – и песец бросится вниз с обрыва, чтобы поймать одного из птенцов!

Мальчик затаил дыхание и обернулся на биолога Михаила Зверева. Тот уже выключил лодочный мотор и внимательно наблюдал в бинокль за всем, что происходит на берегу.

– Это краснозобые казарки, – прошептал Михаил, не отрываясь от бинокля.



– Лучше бы им побыстрее улететь отсюда, не то попадут на обед к хищнику, – с волнением заметил Саша.

– Давай посмотрим, что будет. У казарок есть покровитель, который не даст их в обиду.

Всё произошло в один короткий миг! В воздухе над обрывом появилась самая быстрая птица на нашей планете – сапсан. Он спикировал на песца так, что тот еле успел увернуться от атаки. Забыв про добычу, неудачливый охотник бросился наутёк – только его и видели!

– Вот и всё. Казаркам больше ничего не грозит. – Михаил отложил в сторону бинокль и снова завёл мотор. Лучше было выбрать другое место для ночлега, чтобы не тревожить редких птиц...

От радости Саша захлопал в ладоши и чуть не перевернул лодку. У него в голове всегда был миллион вопросов, но теперь остался только один: почему сапсан решил защитить краснозобых казарок?

Биолог Михаил Зверев не стал тянуть с ответом.

– Дело в том, – сказал он, – что сапсан защищал своё собственное гнездо, которое, скорее всего, находится не дальше чем в 100 метрах отсюда. Зная о силе и смелости сапсанов, казарки всегда селятся от него неподалёку. И, как мы сегодня увидели, не зря...

Художник Ольга Демидова
Фото Дмитрий Болдырев

Избранные задачи конкурса «Кенгуру»

Материал подготовил Дмитрий Максимов

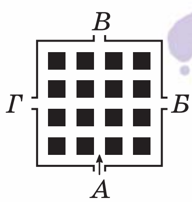
«Кенгуру» – это массовый международный математический конкурс-игра под девизом «Математика для всех». Главная цель конкурса – привлечь как можно больше ребят к решению математических задач, показать каждому школьнику, что обдумывание задачи может быть делом живым, увлекательным и даже весёлым! Мы приводим подборку задач этого года, предлагавшихся российским участникам (их было примерно 1,3 миллиона человек). В скобках рядом с номером каждой задачи указано, из какого она варианта и во сколько баллов оценивается.

Подробнее о конкурсе можно прочитать на сайте **mathkang.ru**

1. (2 класс, 5 баллов) В коробке лежали 3 цветные ленты: красная, синяя и зелёная. Катя, Маша и Даша выбрали себе по одной ленте. Оказалось, что Катина лента длиннее, чем синяя, красная лента короче, чем Дашина, а Машина лента не той длины, что красная. Что верно?

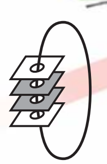
(А) лента Даши зелёная; (Б) лента Маши красная; (В) лента Кати не красная; (Г) лента Даши самая короткая; (Д) лента Маши самая длинная.

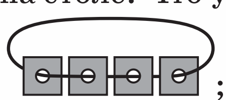
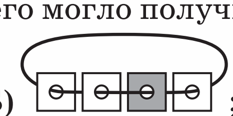
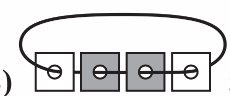
2. (3–4 класс, 4 балла) Дима катался на велосипеде по дорожкам парка. Он въехал в парк в ворота *А*. Во время прогулки он три раза поворачивал направо, четыре раза налево и один раз разворачивался. Через какие ворота он выехал?

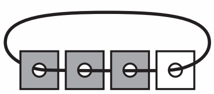
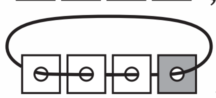


(А) *А*; (Б) *Б*; (В) *В*; (Г) *Г*; (Д) ответ зависит от порядка поворотов.

3. (3–4 класс, 5 баллов) Стопка карточек с дырками нанизана на нитку (см. рисунок справа). Каждая карточка с одной стороны белая, а с другой – закрашенная. Вася разложил карточки на столе. Что у него могло получиться?



(А) ; (Б) ; (В) ;

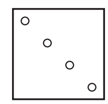
(Г) ; (Д) .

Избранные задачи конкурса «Кенгуру»

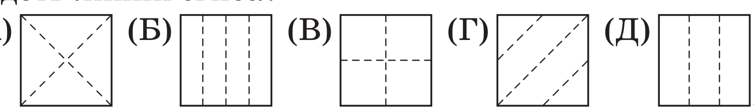
4. (3–4 класс, 5 баллов) Из аэропорта на автовокзал через каждые три минуты отправляется автобус, который едет 1 час. Через 2 минуты после отправления автобуса из аэропорта выехал автомобиль и ехал до автовокзала 35 минут. Сколько автобусов он обогнал?

(А) 12; (Б) 11; (В) 10; (Г) 8; (Д) 7.

5. (5–6 класс, 3 балла) Боб сложил квадратный лист бумаги и проткнул в нём дырку. Потом он развернул лист и увидел то, что изображено на рисунке справа. Как могли выглядеть линии сгиба?



(А) (Б) (В) (Г) (Д)

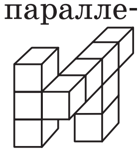


6. (5–6 класс, 4 балла) У калькулятора испортились клавиши с цифрами А и В: вместо А вводится В и наоборот, а в остальном калькулятор работает правильно. На рисунке справа показано, какие результаты выдаёт этот калькулятор при нажатии некоторых четвёрок клавиш. Какие клавиши перепутаны?

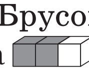
7 × 2 = → 14
3 × 8 = → 24
4 + 2 = → 11
4 × 3 = → 12

(А) 4 и 9; (Б) 2 и 4; (В) 3 и 4; (Г) 3 и 8; (Д) 2 и 7.

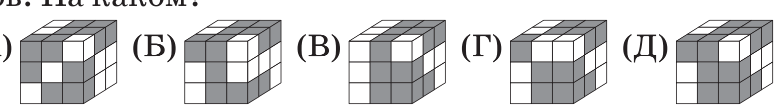
7. (5–6 класс, 4 балла) Прямоугольный параллелепипед был склеен из кубиков со стороной 1. Когда несколько из них отвалились, осталась фигура, изображённая на рисунке справа. Какие наименьшие размеры мог иметь этот параллелепипед?

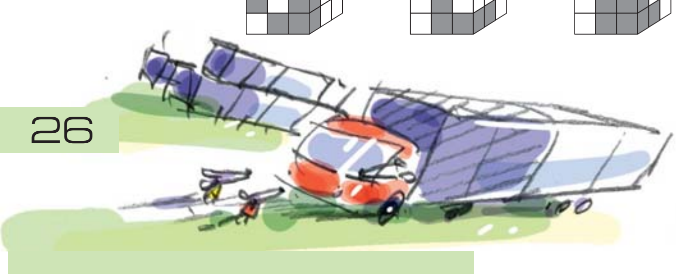


(А) $2\times3\times4$; (Б) $3\times3\times4$; (В) $2\times4\times4$;
(Г) $3\times4\times4$; (Д) $4\times4\times5$.

8. (5–6 класс, 5 баллов) Брусок склеен из двух тёмных и одного белого кубика . На одном из рисунков (А) – (Д) изображён куб, сложенный из таких брусков. На каком?

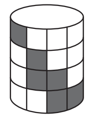
(А) (Б) (В) (Г) (Д)

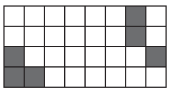
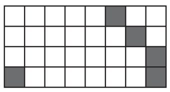
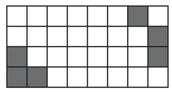


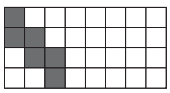
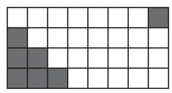


Избранные задачи конкурса «Кенгуру»

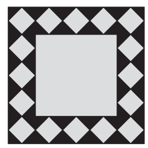
9. (7 – 8 класс, 3 балла) Как может выглядеть развёртка цилиндра, изображённого справа?



(А)  (Б)  (В) 

(Г)  (Д) 

10. (7 – 8 класс, 4 балла) Квадратная скатерть украшена узором из 17 светлых квадратов (см. рисунок). Какая часть площади скатерти является тёмной?

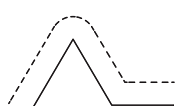


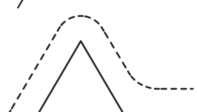
(А) 16 % ; (Б) 24 % ; (В) 25 % ; (Г) 32 % ; (Д) 36 % .

11. (9 – 10 класс, 3 балла) Как известно, минутой называется не только 1/60 часть часа, но и 1/60 часть градуса. На сколько минут за 1 минуту поворачивается минутная стрелка часов?

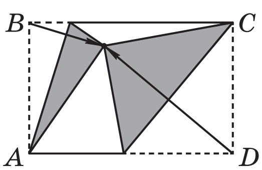
(А) 30; (Б) 60; (В) 360; (Г) 720; (Д) 3600.

12. (9 – 10 класс, 3 балла) Колесо катят по склонам холма. По какой линии движется центр колеса?

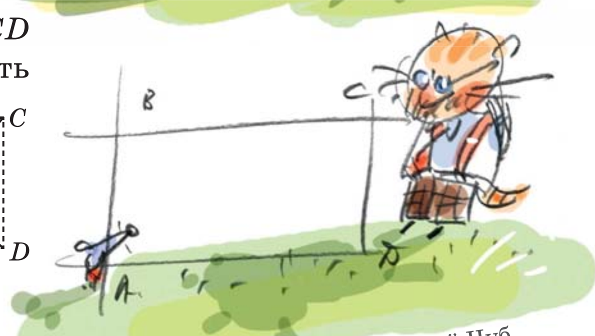
(А)  (Б) 

(В)  (Г)  (Д) 

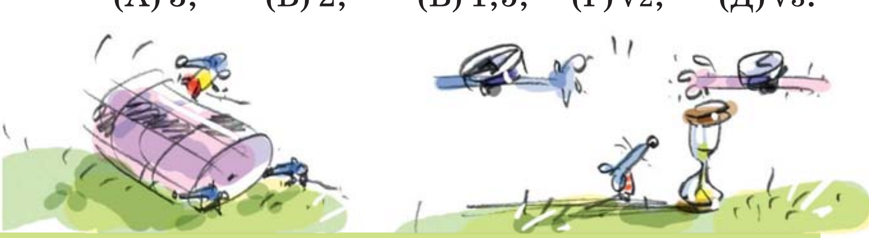
13. (9 – 10 класс, 5 баллов) В прямоугольнике $ABCD$ сторона AB равна 1. Оказалось, что его можно согнуть по линиям, проходящим через вершины A и C так, что вершины B и D попадут в одну точку (см. рисунок). Какое наибольшее значение может принимать сторона BC?



(А) 3; (Б) 2; (В) 1,5; (Г) $\sqrt{2}$; (Д) $\sqrt{3}$.



Художник Сергей Чуб



НАШ КОНКУРС («Квантик» № 6, 2017)

46. *На конференции присутствовали представители двух конкурирующих фирм «Megasoft» и «Gamesoft» Алекс, Бен и Карл. Представители одной и той же компании всегда говорят правду друг другу и врут конкурентам. Алекс сказал Бену: «Карл из Megasoft». Бен ответил: «Я тоже». Где работает Алекс?*

Ответ: в Megasoft. Если Алекс и Бен из одной компании, то Бен сказал правду, значит, они оба из Megasoft. Если Алекс и Бен из разных компаний, то Бен соврал, то есть он из Gamesoft, а Алекс снова из Megasoft.

47. *У двух игроков есть кубическая картонная коробка, в которой лежит приз. Они по очереди выбирают одно из рёбер коробки и разрезают коробку вдоль этого ребра. Выигрывает тот, после чьего хода можно открыть коробку и достать приз. Кто может обеспечить себе победу – начинающий или второй игрок? Коробка открывается, если она разрезана вдоль трёх рёбер одной грани.*

Ответ: второй. Пусть в ответ на начальный ход первого второй разрежет противоположное параллельное ребро куба. Какое бы следующее ребро ни разрезал первый, оно окажется на одной грани с одним из двух уже разрезанных рёбер. Тогда второй разрежет ещё одно ребро на той же грани, и коробка откроется.

48. *Костя приехал в аэропорт, посмотрел на электронное табло, которое показывает время (часы и минуты), и заметил, что на табло горят четыре различные цифры. Когда он посмотрел на табло в следующий раз, там горели четыре другие различные цифры. Какое наименьшее время могло пройти между двумя этими моментами?*

Ответ: 36 минут. Могло ли быть меньше? Если да, то Костя смотрел на табло в два соседних часа с разным числом десятков в числе часов. Среди вариантов 09 и 10, 19 и 20, 23 и 00 остаётся только второй, потому что в остальных повторяется цифра 0. Минимальное число минут после «20:» равно 34, потому что цифры 0, 1 и 2 уже встречаются. Максимальное число минут после «19:» – это 58, потому что цифра 9 уже встречается. С 19:58 до 20:34 прошло 36 минут.

49. *Метроморфы могут менять свой рост. Двадцать пять метроморфов стали в одну шеренгу, рост каждого – целое число сантиметров. В конце каждой минуты все метроморфы, слева и справа от которых более низкие, чем они, уменьшают свой рост на 1 см, а те, слева и справа от которых более высокие, увеличивают свой рост на 1 см. Остальные, в том числе и стоящие по краям шеренги, не меняют роста.*

а) Докажите, что через несколько минут все метроморфы перестанут менять свой рост.

б) Верно ли это утверждение, если метроморфы уменьшают и увеличивают свой рост на 2 см?

а) Предположим, что метроморфы *А* и *Б* стоят рядом и рост *А* с какого-то момента перестал меняться. Докажем, что рост *Б* тоже когда-нибудь перестанет изменяться. Разница в росте *А* и *Б* может только уменьшаться, причём если в начале *Б* был выше *А*, то *Б* никогда не станет ниже *А* и наоборот. Когда разница в росте *А* и *Б* достигнет своего минимума, рост *Б* перестанет меняться.

Рост крайних метроморфов не меняется, значит, как мы доказали, рост их соседей тоже когда-нибудь перестанет меняться, потом и рост соседей их соседей и так далее, пока все метроморфы в шеренге не зафиксируют свой рост.

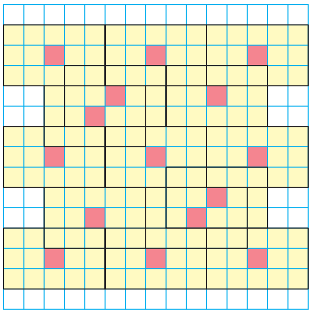
б) Неверно. Пусть метроморфы были такого роста: 2, 1, 2, 3, 2, 1, 2, 3, ..., 2. Через минуту они станут такого роста: 2, 3, 2, 1, 2, 3, 2, 1, ..., 2. А ещё через минуту вернутся к исходному росту. Дальше всё будет повторяться до бесконечности.

50. *а) Дан клетчатый квадрат* 15×15. *Можно ли закрасить* 15 *клеток так, чтобы любой прямоугольник* 3×5 *со сторонами, параллельными сторонам квадрата, составленный из клеток, содержал хоть одну закрашенную клетку?*

б) А можно ли так закрасить всего 14 *клеток?*

а) Одно из решений приведено на рисунке на с. 29. Можете убедиться самостоятельно, что в каждом прямоугольнике 5×3 (со сторонами, идущими вдоль сетки) найдётся один из 15 красных квадратиков, но всё же мы приведём здесь объяснение. Поскольку рисунок симметричен относительно диагонали, достаточно это доказать лишь для прямоугольников 5×3, у которых горизонтальная сторона равна 5.

Для каждого прямоугольника с горизонтальной стороной 3 симметричный ему будет с горизонтальной стороной 5.



Вместе с каждой красной клеткой нарисуем жёлтую прямоугольную область 5×3 с центром в этой клетке и заметим, что если центр прямоугольника попал в жёлтую область, то он содержит красную клетку – центр области. Жёлтые области на рисунке покрывают все возможные положения центров прямоугольников 5×3 (эти положения образуют центральный прямоугольник 11×13). Значит, любой прямоугольник 5×3 содержит красную клетку.

Решение на рисунке не единственное, попробуйте найти ещё хотя бы два.

б) Квадрат 15×15 можно разбить на 15 прямоугольников 5×3. Тогда в каждом прямоугольнике должна быть красная клетка! Значит, клеток всего не меньше 15.

Это соображение может помочь строить пример в пункте а). Дело в том, что квадрат можно разбить на 15 прямоугольников 5×3 двумя способами (симметричными друг другу относительно диагонали квадрата), и для каждого способа в каждом прямоугольнике должна найтись красная клетка.

БЛИКИ НА СКАМЕЙКЕ

(«Квантик» № 7, 2017)

Поскольку фонарь расположен далеко, он освещает скамейку пучком почти параллельных лучей света. Они падают на каждую цилиндрическую перекладину, из которых собрана скамейка, под одним и тем же углом. Отражённые лучи образуют тот же угол с цилиндром, но расходятся от него в разные стороны.

Посмотрите на фотографию, которую держит в руках Квантик. Представим себе момент, когда она была сделана, и проведём через фотоаппарат мысленную прямую, параллельную цилиндрам скамейки. Тогда все лучи, пришедшие в фотоаппарат, как отражённые, так и прямо от фонаря, составляют с этой прямой один и тот же угол. То есть образуют конус, расходящийся из фотоаппарата и имеющий в качестве оси проведённую нами мысленную прямую.

На снимке конус превращается в окружность, на которой располагаются блики и фонарь, а мысленная прямая – в точку, к которой сходятся цилиндры скамейки.

САТУРН – ПЛАНЕТА В ШЛЯПЕ

1. Во времена Галилея (начало XVII века) Уран и Нептун ещё не были известны: невооружённым глазом их не видно. Уран открыл Уильям Гершель в 1781 году.

2. Кольца расположены ровно над экватором Сатурна, который наклонён под углом приблизительно 28° к плоскости его орбиты. По сравнению с расстоянием до Сатурна Земля находится почти рядом с Солнцем, поэтому когда на Сатурне весна или осень, мы колец не видим: они повёрнуты к нам (и к Солнцу) ребром. А когда на Сатурне лето или зима, кольца видно лучше всего.

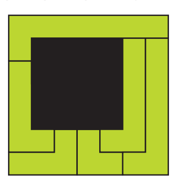
Ещё и поэтому (а не только потому, что состоят из камушков и пыли, а не изо льда) кольца Юпитера с Земли не видны: ось Юпитера, как мы помним из статьи «Времена года на Земле и других планетах» в №6 «Квантика» за 2016 год, перпендикулярна плоскости его орбиты, и кольца всегда видны «с ребра».

3. При толщине бумажного кольца 0,1 мм его диаметр должен быть 25 м, так что не то что в комнату, а даже и на детскую площадку во дворе оно не влезло бы.

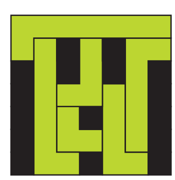
4. Космический аппарат находится ЗА Сатурном и фотографирует затмение Солнца Сатурном. Солнце подсвечивает кольца и край атмосферы, а сам Сатурн мы видим с теневой стороны.

5. Тонкая полоса – это кольцо, видимое с ребра. Толстая чёрная полоса на Сатурне – тень кольца. Большой спутник на фото – Титан.

L-ГОЛОВОЛОМКА



$n = 1$



$n = 6$

Левый рисунок симметричен относительно диагонали квадрата.

КАНДИДАТ В ДЕПУТАТЫ

Первый фокус. Если в любом трёхзначном числе, состоящем из разных цифр, поменять местами первую и последнюю цифры, а потом вычесть из большего числа меньшее, то получится $\overline{abc}-\overline{cba}=(100a+10b+c)-(100c+10b+a)=$ $=99(a-c)$, то есть одно из следующих чисел: 99, 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792 и 891. Сумма цифр в каждом равна 18. Поэтому достаточно вычесть из 18 названное зрителем число, чтобы получить зачёркнутую им цифру.

Второй фокус. Вова просто подбирает в уме ближайший к названному числу квадрат: 49, 64, 81, 100, 121 или 144. Разность между этим квадратом и названным числом даёт число, выпавшее на красном кубике. На жёлтом кубике будет число, дающее этот ближайший квадрат. Например, зритель назвал число 78. Тогда на жёлтом кубике 9 (так как ближайший квадрат это $9\cdot9=81$), на красном кубике 3 (так как $81-78=3$).

У Кошкина бинт намотан прямо на пиджак.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ КОНКУРСА «КЕНГУРУ»

1. Ответ: А.

Сначала заметим, что в условиях задачи красная лента упоминается два раза: известно, что она короче, чем Дашина, и не той длины, что Машина. Значит, эту ленту выбрала Катя. Кроме того, эта лента длиннее синей, но короче, чем лента у Даши. Тогда самая короткая лента – синяя, средняя лента – красная у Кати, а самая длинная – у Даши. Осталось заметить, что у Маши самая короткая лента (синяя), а зелёная – самая длинная. Теперь легко проверить, что единственное верное утверждение – лента Даши зелёная.

2. Ответ: Б.

Для начала заметим, что нас интересует только направление, в котором двигается Дима. Поэтому можно считать, что он доехал до центрального перекрестка, там выполнил все свои повороты и выехал через те ворота, напротив которых в итоге оказался. Тогда становится понятно, что порядок поворотов значения не имеет, а важно только их количество. Теперь остаётся заметить, что четыре поворота налево не меняют направление, два поворота направо – это то же самое, что один разворот, а два разворота тоже не меняют направления движения. Значит, можно считать, что Дима просто один раз повернул направо и выехал через ворота Б.

3. Ответ: А.

Будем говорить, что карточка лежит на столе *правильно*, если на рисунке мы видим, что справа от дырочки верёвочка проходит под карточкой, а слева – над ней. Иначе будем говорить, что карточка лежит *неправильно*. Заметим, что если мы возьмёмся за верёвочку слева от карточек и поднимем её, то правильно лежащие карточки будут обращены вверх той же стороной, которую мы видим на рисунке. А неправильно лежащие карточки при подъёме развернутся, и мы увидим их с другой стороны.

Теперь посмотрим на рисунок в условии задачи: на нём две средние карточки обращены вверх тёмными сторонами, а две крайние – белыми (но если мы продвинем, например, верхнюю карточку вдоль верёвочки так, чтобы она оказалась в самом низу, то она всё равно будет обращена вверх белой стороной). Это значит, что среди предложенных рисунков надо выбрать такой, на котором после подъёма две соседние карточки будут «смотреть вверх» одной стороной, а две другие – другой. Этому условию отвечает только рисунок А: на нём крайние карточки лежат неправильно, а средние – правильно, причём сейчас все они обращены к нам тёмной стороной. Значит, если мы возьмёмся за верёвочку слева от карточек и поднимем её, то средние карточки мы по-прежнему увидим тёмными, а крайние развернутся вверх белой стороной.

Подняв таким же образом верёвочку с рисунка Б, мы увидим сверху подряд три тёмные карточки и одну светлую (внизу). Все карточки с рисунка В мы увидим белыми. Рисунок Г даст нам три подряд белые карточки и ниже – одну тёмную. Наконец, рисунок Д даёт нам сверху одну тёмную карточку и под ней три белые.

4. Ответ: Г.

Пусть автомобиль выехал в 16:00, тогда он приехал в 16:35. Обогнал он те автобусы, которые выехали раньше него, а приедут позже. Так как автобус едет ровно час, то нам надо подсчитать количество автобусов, которые отправились из аэропорта позже 15:35, но раньше 16:00. Последний из этих автобусов выехал за две минуты до автомобиля, то есть в 15:58. К этому моменту с 15:35 прошло 23 минуты, но

$23=3\cdot7+2$, следовательно, кроме этого последнего автобуса автомобиль обгонит ещё семь (самый ранний из них выехал в 15:37).

5. Ответ: Г.

Образующиеся на листе дырки должны быть симметричными относительно линий сгиба. Это верно только для рисунка Г.

6. Ответ: Д.

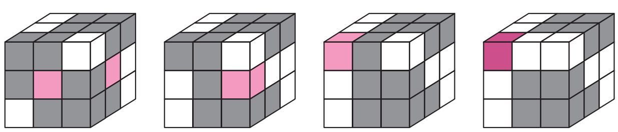
Заметим, что если ответ в примере верный, то либо обе клавиши работают правильно, либо обе работают неправильно. Если же ответ в примере неверный, то неправильно работает точно одна из использованных клавиш. Из третьего примера видно, что неправильно работает то ли клавиша с цифрой 4, то ли клавиша с цифрой 2. Если клавиша 4 – неправильная, то из последнего примера следует, что местами поменялись 3 и 4. Но тогда клавиша с цифрой 8 должна работать правильно, и во втором примере должно было бы получаться 32. Значит, клавиша 4 работает правильно, и с какой-то другой цифрой поменялась цифра 2. Но тогда из первого примера следует, что она поменялась с цифрой 7.

7. Ответ: В.

Внимательно присмотревшись к рисунку, мы видим, что конструкция имеет ширину 2, высоту 4 и длину тоже 4. Значит, наименьший параллелепипед, из которого могла получиться такая конструкция, имеет размеры $2\times4\times4$.

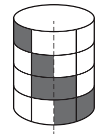
8. Ответ: Д.

Заметим, что кубик Д собрать из таких брусков возможно: все они будут размещены горизонтально и параллельно переднему краю рисунка. Положение восьми блоков определяется по восьми белым кубикам, которые видны на рисунке. Девятый блок – средний в нижнем ряду, расположен так, что белый кубик на нём не виден. По разным причинам остальные четыре кубика собрать из таких брусков нельзя. Например, на рисунке *А* два отмеченных белых кубика не могут принадлежать непересекающимся брускам. На рисунках *Б*, *В* и *Г* отмечено по одному кубику, которые, не могут принадлежать ни одному бруску.



А *Б* *В* *Г*

9. Ответ: В.



Заметим, что если на невидимой стороне цилиндра нет закрашенных клеток, то, проведя на его поверхности разрез так, как указано на рисунке, мы получим развёртку В. Остальные развёртки не подходят.

10. Ответ: Г.

Будем считать, что диагональ маленького светлого квадрата равна двум единицам. Тогда сторона скатерти равна 10, а большой светлый квадрат имеет размеры 6×6. Следовательно, суммарная площадь светлой области равна $16\cdot2+6\cdot6=68$ (квадрат с диагональю 2 имеет площадь 2). Значит, площадь тёмной области равна $10\cdot10-68=32$. А так как площадь всей скатерти равна 100, то тёмная часть составляет от неё 32%.

11. Ответ: В.

За 60 минут минутная стрелка поворачивается на $360°$, следовательно, за 1 минуту она поворачивается на $6°$, или на $6\cdot60=360$ минут.

12. Ответ: Б.

Заметим, что расстояние от центра колеса до ближайшего склона холма должно быть постоянным (и равным радиусу колеса). Помня это, несложно убедиться в том, что правильной траекторией центра колеса является вариант Б.

13. Ответ: Д.

Обозначим через O точку, в которую попали вершины B и D после сгибания листа. Тогда $AO=AB=1$ и $OC=DC=1$. По неравенству треугольника получаем: $AO+OC\geqslant AC$, то есть $AC\leqslant2$. Итак, диагональ данного прямоугольника не превосходит 2. По теореме Пифагора отсюда следует, что другая сторона не превосходит $\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$. Покажем, что прямоугольник со сторонами 1 и $\sqrt{3}$ можно сложить нужным образом. За линии сгиба возьмём перпендикуляры, опущенные на диагональ BD из вершин A и C. Тогда точка O будет серединой диагонали BD (заметим, что в таком прямоугольнике диагонали образуют со сторонами углы в $30°$ и $60°$, поэтому треугольники AOB и COD будут правильными). Итак, наибольшее возможное значение стороны AD равно $\sqrt{3}$.

наш КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем
заочном математическом конкурсе.

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, не позднее 1 сентября электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com** или обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик»**.

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы.

Желаем успеха!

XII ТУР

56. Когда угол между часовой и минутной стрелками больше: в пять минут двенадцатого или в десять минут первого?

57. В многодетной семье у каждого ребёнка спросили: «Сколько у тебя братьев?» Каждый из детей назвал одно натуральное число, а сумма всех названных чисел оказалась равна 35. Сколько детей в семье, если все дети ответили правильно?

Авторы: Сергей Львовский (56), Михаил Евдокимов (57, 58), Александр Перепечко (59), Андрей Егоров (60)

58. Из девяти одинаковых кирпичей-уголков, каждый из которых склеен из трёх кубиков $1\times1\times1$, можно сложить куб $3\times3\times3$ (см. задачу 16 конкурса). Один из кирпичей-уголков потеряли и заменили его прямым кирпичом $3\times1\times1$. Можно ли из нового набора сложить куб $3\times3\times3$?

59. Двое игроков по очереди забирают камешки из большой кучи камней. Первый забирает один камешек, а далее каждый игрок берёт либо на камешек больше, либо на камешек меньше, чем соперник перед ним, но не менее одного камешка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при оптимальной игре, если игроки не могут оценить размер кучки, пока в ней больше десяти камешков?

60. С какого-то момента директор компании «Не обманешь – не продашь» стал ежемесячно заявлять собранию акционеров, что доход за последние 7 месяцев превосходит расход, а налоговой инспекции – что расход за последние 12 месяцев превосходит доход. Как долго это может продолжаться, если директор не врёт?

Художник Николай Крутиков

ISSN 2227-7986
9 772227 798176 17008