ЖУРНАЛ КВАНТИК ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 5
май 2020

ЭЙНШТЕЙН, ЧАШКА ЧАЯ И КАРТЕЗИАНСКАЯ МЕДУЗА

СЛОВА НА ЛЕНТЕ

ХЛЕБОБУКВЕННЫЕ ИЗДЕЛИЯ

Enter

№ 5 | май 2020
Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования
e-mail: kvantik@mccme.ru

ПОДПИСКА на II полугодие 2020 года

Подписаться на журнал «КВАНТИК» можно через интернет – на сайтах подписных агентств, – а также в отделениях Почты России

КАТАЛОГ «ГАЗЕТЫ. ЖУРНАЛЫ» АГЕНТСТВА «РОСПЕЧАТЬ»

Индекс **84252** для подписки на полгода или на несколько месяцев полугодия

Подписка онлайн на сайте **press.rosp.ru**, прямая ссылка на «Квантик» – **kvan.tk/rosp**

ОБЪЕДИНЁННЫЙ КАТАЛОГ «ПРЕССА РОССИИ»

Индекс **11346** для подписки на полгода или на несколько месяцев полугодия

Онлайн-подписка по ссылке **akc.ru/itm/kvantik**

Подробнее обо всех способах подписки читайте на сайте **kvantik.com/podpiska**

Приобрести **ЭЛЕКТРОННУЮ ВЕРСИЮ** журнала «Квантик» в хорошем качестве можно в интернет-магазине МЦНМО «Математическая книга». Заходите по ссылке ***kvan.tk/e-shop***

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

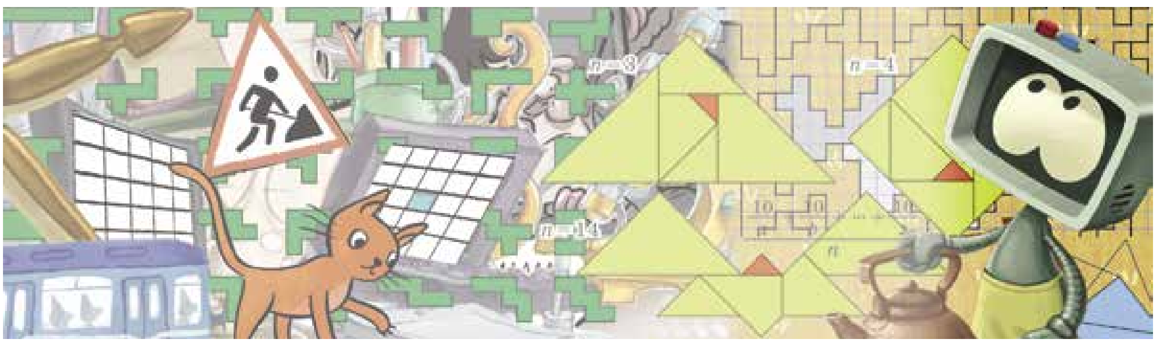
Журнал «Квантик» № 5, май 2020 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор: С.А.Дориченко
Редакция: В.Г. Асташкина, Е.Н. Козакова, Е.А. Котко, Р.В. Крутовский, И.А. Маховая, Г.А. Мерзон, А.Ю. Перепечко, М.В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas
Вёрстка: Р.К.Шагеева, И.Х.Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях Почты России:
- Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)
- Объединённый каталог «Пресса России» (индексы **11346** и **11348**)

Онлайн-подписка
на сайте агентства «Роспечать» **press.rosp.ru**
на сайте агентства АРЗИ **www.akc.ru/itm/kvantik/**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 10.04.2020
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8. Тел.: (831)216-40-40
Заказ № 200908
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

СОДЕРЖАНИЕ



Виктор Клепцын

СлоВА на ленте

Зайдя в гости к Квантику, Женя и Мика обнаружили у него на столе странное устройство. На его ленте было напечатано *ABAAB*.

– А что эта машина делает? – спросил Мика.

– Она читает одну ленту и печатает другую, – начал объяснять Квантик. – Каждый раз, встретив на входной ленте букву *A*, на выходной ленте машина печатает *AB*, а встретив на входной ленте букву *B*, машина печатает *A*. Вот смотрите!

Квантик взял ленту со словом *ABAAB* и перенёс её к считывающей части машины. Машина загудела, потянула ленту и напечатала *ABAABABA*.

– Я начал с самого простого слова, буквы *A*, – продолжил Квантик. – Из него машина сделала *AB*, а из него *ABA*; потом *ABAAB*, а дальше вы видели.

– А что вообще можно про эти слова сказать? – задумалась Женя и переписала их на доску.

– Ага! Каждое новое слово всегда продолжает предыдущее! – заметила она.

– Верно! А доказать сможете? – спросил Квантик.

– Давай с примера начнём, – вмешался практичный Мика. – Вот слово *ABA* начинается со слова *AB*. Следующее за ним слово, *ABAAB*, получается, если машина читает *ABA*. Но при этом сначала она прочтёт *AB* и напечатает как раз *ABA*.

– Точно! Так будет и дальше, – поддержала Женя. – Пусть мы уже знаем, что n-е слово продолжает предыдущее, $(n-1)$-е. Чтобы получить $(n+1)$-е слово, мы подаём на вход n-е слово. Машина сначала прочтёт его первую часть, то есть $(n-1)$-е слово. И, читая его, по определению напечатает n-е слово, с которого $(n+1)$-е слово и начнётся.

– Правильно, – подтвердил Квантик. – Такое рассуждение, когда каждое утверждение выводится из предыдущего, образуя этакую «цепочку вывода», называется *математической индукцией*. Ещё для неё нужно проверить базу: самое-самое первое утверждение, чтобы цепочке было откуда начинаться. Но раз вы уже знаете, что второе слово, *AB*, начинается с первого, *A*, то так будет и дальше: третье будет начинаться со второго, четвёртое с третьего и т.д. –

каждое следующее будет продолжать предыдущее.

Сделав паузу, Квантик продолжил:

– А что ещё об этих словах можно сказать?

– Первое, что приходит в голову, это посмотреть на длины этих слов, – предложила Женя. – Они становятся всё длиннее. Можно посмотреть, как именно.

После недолгих подсчётов на доске появилась таблица:

Слово	Длина
A	1
AB	2
ABA	3
ABAAB	5
ABAABABA	8
ABAABABAABAAB	13

– Это же знаменитая последовательность Фибоначчи! – сказала Женя. – Она начинается с двух единиц, а каждое следующее число – сумма двух предыдущих.

Мика на всякий случай записал начало последовательности Фибоначчи на другой половине доски:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13=8+5,\ \ldots$$

– Точно! Но она тут со сдвигом: длина n-го слова – это $(n+1)$-е число Фибоначчи, – подтвердил он. – Только вот как это доказать?

– Хороший вопрос, – задумалась Женя. – Давай посмотрим, как будут расти длины наших слов. Когда машина читает очередное слово, то из каждой буквы *A* получается две буквы нового слова, а из каждой буквы *B* только одна. Но проблема в том, что мы не знаем, сколько в слове букв *A* и *B* по отдельности!

– Ну, если не знаем, то почему бы нам это не узнать? – с энтузиазмом ответил Мика. – Давай подсчитаем, сколько в каких словах каких букв!

В таблице на доске появились два новых столбца, N_A и N_B, для количеств букв *A* и *B* соответственно – и ещё одна строчка: машина как раз только что закончила печатать слово *ABAABABAABAAB*:

Слово	Длина	N_A	N_B
A	1	1	0
AB	2	1	1
ABA	3	2	1
ABAAB	5	3	2
ABAABABA	8	5	3
ABAABABAABAAB	13	8	5

– Так это те же последовательности, только со сдвигом! – заметила Женя. – Ну конечно! Ведь из каждой буквы предыдущего слова всегда получается ровно одна буква *A*. Поэтому букв *A* в новом слове всегда столько же, какова длина предыдущего слова.

– А буква *B* получается только из буквы *A*, – подхватил Мика. – Значит, в новом слове их столько, сколько букв *A* в предыдущем, то есть какова длина пред-предыдущего!

– Но тогда у нас всё получается! – обрадовалась Женя. – В новом слове столько букв *A*, какова длина предыдущего, и столько букв *B*, какова длина пред-предыдущего. Значит, его длина – это сумма этих длин, и это в точности соотношение, задающее последовательность Фибоначчи. Так что если их длины были числами Фибоначчи, то и длина нового слова будет следующим числом Фибоначчи.

– Верно, – подтвердил Квантик. – И вы опять применили индукцию! Правда, поскольку вы используете два предыдущих утверждения, нужно проверить два первых утверждения «цепочки». Но мы уже знаем, что первые два слова (*A* и *AB*) имеют длины 1 и 2, и это нужные нам числа Фибоначчи.

– А ещё что-нибудь красивое можно про эти слова сказать? – с интересом спросил Мика.

– Конечно! – ответил Квантик. – Вы уже заметили, что следующее слово продолжает предыдущее. А что идёт в следующем слове за этим предыдущим?

– Посмотрим! –взяла мел Женя. – Вот у нас слово *ABAABABAABAAB*; отделяем *ABAABABA*, остаётся…

A

AB

ABA

$\boxed{ABAAB}$

$ABAABABA$

$ABAABABA\ \boxed{ABAAB}$

– Да это же пред-предыдущее слово! – удивилась она. – То есть нашу последовательность слов можно ещё определить так: каждое новое слово в ней – это предыдущее, за которым идёт пред-предыдущее.

– Правильно! А как это доказать?

– Как и раньше, по индукции! – ответила Женя. – Ведь если мы знаем, что n-е слово – это $(n-1)$-е, за которым идёт $(n-2)$-е, и подаём его на вход машине, то получим по определению $(n+1)$-е слово. Но сначала машина (читая $(n-1)$-е) напечатает n-е, а потом (читая $(n-2)$-е) напечатает $(n-1)$-е.

– Молодец, – похвалил Квантик. – И заметьте: раз все слова продолжают друг друга, есть некое бесконечное слово, началами которого они все являются:

ABAABABAABAABABAABABAABAABABAABAAB…

Это слово называется *словом Фибоначчи*. А что будет, если написать его на бесконечной ленте (допустим, у нас есть пара таких) и подать машине на вход?

– Сейчас… – задумалась Женя. – Прочтя *A*, машина напечатает *AB*; прочтя *AB*, напечатает *ABA*… Ой, да ведь она напечатает это же самое слово!

– Именно так. Кстати, слово Фибоначчи – единственное слово с таким свойством. Можешь разобраться почему? – продолжил спрашивать Квантик.

– Если подать на вход слово, начинающееся с *B*, то вывод будет начинаться всё равно с *A*, и слово на выходе будет другим, – продолжила рассуждать вслух Женя. – Значит, слово должно начинаться с *A*. Но тогда машина, прочитав эту букву, напечатает *AB*, значит, слово начинается с *AB*. А значит, и с *ABA*, которое машина напечатает, прочтя *AB*, и так далее; да это же почти то же самое рассуждение!

– Всё правильно, – подтвердил Квантик. – Кстати, слово Фибоначчи обладает и другими замечательными свойствами. Например, оно не периодично, и мы ещё увидим почему. Но оно *квазипериодично*: любой кусочек, который встречается в нём хоть где-нибудь, встречается регулярно.

– А почему? – заинтересовалась Женя.

– Начнём с простого: можете ли вы что-нибудь сказать про то, как часто встречается буква *A*?

– В тех словах, что мы уже выписали, ни разу даже двух букв *B* подряд не было, – отметил Мика.

– Очень хорошо, а как это доказать?

– Надо чем-нибудь воспользоваться… – задумалась Женя. – Мы знаем, что машина по слову Фибоначчи печатает его же. Но буква *B* может появиться, только если машина прочитала букву *A* и напечатала *AB*. Значит, перед любой буквой *B* идёт буква *A*!

– Замечательно; а что, если мы спросим про слово *AB*? – усложнил задачу Квантик.

– Машина печатает его, прочитав букву *A*, – уверенно ответил Мика. – Но из любых двух соседних букв хотя бы одна – это *A*. Значит, можно разрезать слово Фибоначчи на кусочки *AB* и *A*, и из двух последовательных кусочков хотя бы один будет нужным.

– Правильно. Или можно применить машину ещё раз, и тогда всё слово Фибоначчи разрежется на кусочки *ABA* и *AB*, в каждом из которых есть нужное нам подслово, – согласился Квантик. – А что, если мы ищем кусочек *AAB*?

– Давай его найдём где-нибудь. Вот он, в слове *ABAAB*, – сориентировалась Женя. – Но если мы ещё несколько раз применим нашу машину, слово Фибоначчи разрежется на слова *ABAABABA* и *ABAAB*, и в каждом из них нужный нам кусочек есть. Ой, а ведь это рассуждение и в других случаях сработает?

– Да, – подтвердил Квантик. – Любое подслово X, которое где-нибудь в слове Фибоначчи встречается, содержится в одном из тех слов, которые получаются из буквы *A* чередой прогонов через нашу машину. И всё слово Фибоначчи разрезается на его копии и копии следующего за ним слова. Но раз следующее слово начинается с предыдущего – то в каждом из таких кусочков встречается слово X. Вот мы всё и доказали!

– Кстати, – продолжил Квантик, – аналог такого слова есть и в геометрии, в замощениях плоскости. Возьмём правильный пятиугольник $ABCDE$ и проведём в нём диагонали AC, BD и CE. Треугольники, которые в результате образуются, обладают похожим замечательным свойством: из красного и синего треугольников можно сложить больший треугольник, подобный синему, а из двух красных и синего (или, что то же самое, добавив ещё один меньший красный к большему синему) – больший, подобный красному.

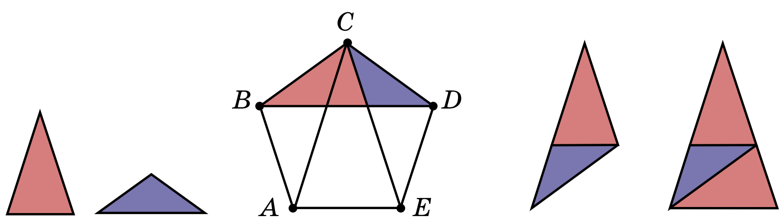


Рис.1. Слева: красный и синий треугольники по отдельности. В центре: их появление в правильном пятиугольнике. Справа: сложенные из них подобные им бóльшие треугольники

Квантик нарисовал соответствующую картинку (рис. 1), и Женя подхватила:

– А дальше мы можем продолжить? Собрать из этих треугольников ещё бо́льшие треугольники?

– Можем, – подтвердил Квантик. – Кстати, это всё равно, что разбить каждый красный и синий треугольники на более мелкие, а потом увеличить всю картинку. И если повторить такую замену много-много раз, то получится *квазипериодичное* разбиение угла в 36° на красные и синие треугольники (рис. 2). А если объединить 10 таких углов, то и всей плоскости!

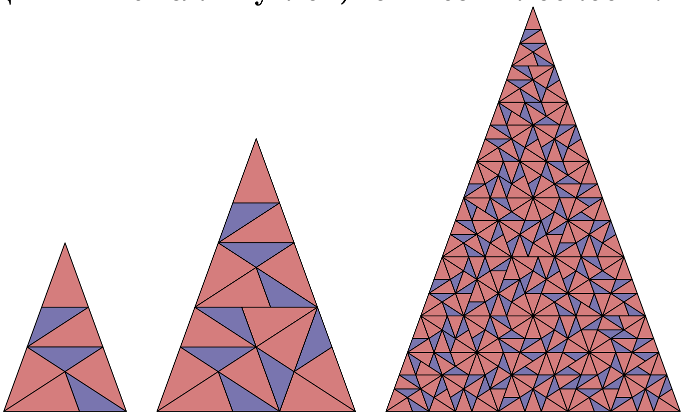


Рис. 2. Красный треугольник после двух, трёх и пяти замен

Сделав паузу, Квантик продолжил:

– Квазипериодические мозаики были известны с 1960-х годов, в 1970-х появились похожие на это разбиение мозаики Пенроуза (рис. 3). А в 1982 году Дан Шехтман открыл устроенные подобным образом вещества – *квазикристаллы*, – что в 2011-м принесло ему Нобелевскую премию по химии!

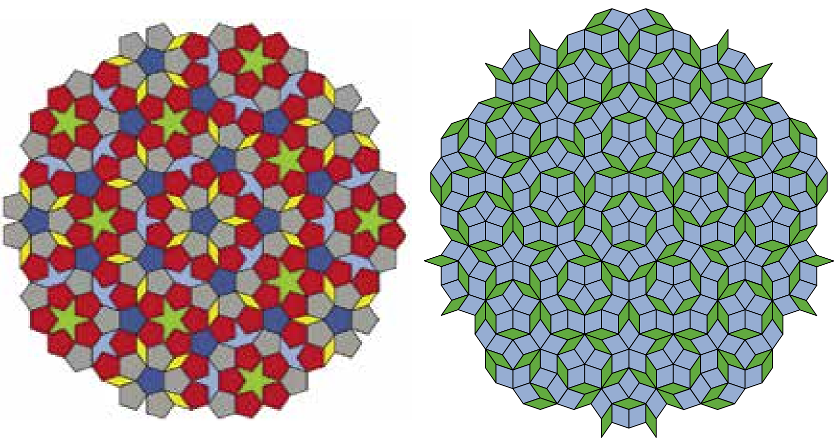


Рис. 3. Мозаики Пенроуза. Автор: Inductiveload, Викисклад

Окончание в следующем номере

Художник Мария Усеинова

Алексей Панов

Если вы утопнете
И ко дну прилипнете,
Год лежите,
два лежите,
А потом привыкнете.

Фольклор

ЭЙНШТЕЙН, ЧАШКА ЧАЯ И КАРТЕЗИАНСКАЯ МЕДУЗА

Картезианская медуза – это один из вариантов картезианского водолаза. Её ещё часто называют магической медузой – Magic Jellyfish.

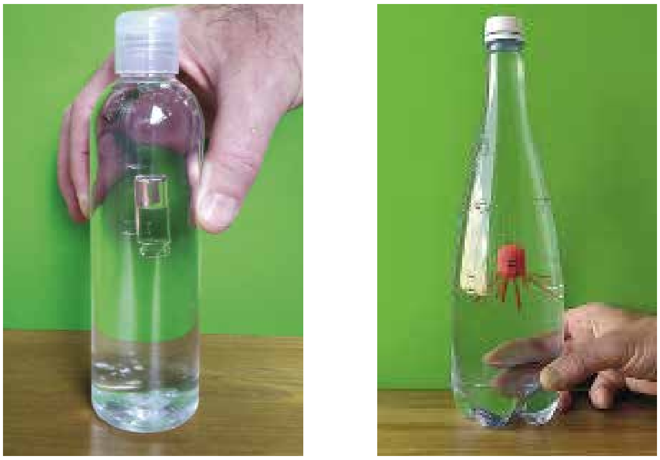


Рис. 1. Стандартный водолаз и картезианская медуза: если сжать бутылку, они опускаются, если отпустить – поднимаются; см. kvan.tk/diver и kvan.tk/jellyfish1

Стандартный картезианский водолаз – это маленький сосуд, частично заполненный водой и плавающий вверх дном в закрытой пластиковой бутылке. Если сжать бутылку, водолаз тонет – потому что воздух внутри водолаза тоже сжимается и туда затекает дополнительная порция воды. Если же отпустить бутылку, объём воздуха внутри водолаза восстановится и водолаз поднимется. Картезианская медуза ведёт себя точно так же.

В ГЛУБОКОЙ БУТЫЛКЕ. Представьте себе, что вы плаваете в океане и рядом с вами плавает картезианский водолаз. Потом вы ныряете вместе с ним на большую глубину и там отпускаете его. Как вы думаете, поднимется водолаз наверх или начнёт тонуть? Я склоняюсь к тому, что он потонет. Дело в том, что с глубиной давление воды возрастает, воздух внутри водолаза сжимается, водолаз всё сильнее и сильнее заполняется водой и в некоторый момент уже будет неспособен к всплытию.

Какой же будет эта предельная глубина, после которой водолаз не сможет всплыть? Оказывается, если правильно настроить водолаза, она может составлять всего лишь несколько сантиметров. Убедитесь в этом, посмотрев ролик kvan.tk/jellyfish2. А правильная настройка – самое трудное дело: надо максимально заполнить водолаза водой так, чтобы он ещё не тонул, но опускался под воду при малейшем толчке.

СПАСТИ ВОДОЛАЗА. Итак, водолаз сначала плавал вверху бутылки, а после её сжатия потонул, можно сказать, прилип ко дну. Как его спасти, заставить подняться? Существует много способов добиться этого – в конце статьи мы дадим соответствующую ссылку. А здесь мы обсудим один новый метод спасения и посмотрим, как он работает для картезианской медузы. Но сперва нам нужно познакомиться с одной работой Эйнштейна.

СТАТЬЯ ЭЙНШТЕЙНА. Она была опубликована в 1926 году и называется «Причины образования извилин рек и так называемый закон Бэра». Имеется русский перевод, доступный на сайте журнала «Успехи физических наук». Посмотрите её, там всего четыре странички и нет ни одной формулы.

Эйнштейн начинает с «маленького эксперимента, который каждый может повторить». Он предлагает налить чай в чашку, раскрутить его ложкой, а затем вынуть ложку и убедиться, что чаинки соберутся в центре дна чашки. Эйнштейн объясняет это тем, что в результате взаимодействия вращающейся жидкости с внутренней поверхностью чашки возникают дополнительные потоки (рис. 2). Именно они собирают чаинки на дне, вблизи центра чашки.

Потоки эти возникают от того, что вращение отбрасывает жидкость к стенкам центробежной силой. При этом нижняя часть жидкости тормозится об дно, поэтому отбрасывание сильнее в верхней части. Вот вверху жидкость и расходится к краям, возвращаясь в центр по низу.

Для нас важно, что посередине эти дополнительные потоки сливаются в общий поток, направленный вверх вдоль оси чашки.

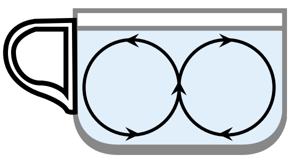
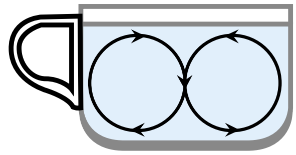


Рис. 2. Чашка неподвижна, жидкость вращается вокруг оси чашки, обозначены возникающие дополнительные потоки

Рис. 3. Вращается чашка, а вместе с ней вращается жидкость, обозначены возникающие дополнительные потоки



Имеется ещё один, дополнительный к эйнштейновскому, сценарий, когда одновременно вращаются и чашка, и увлекаемая ею жидкость (рис. 3). Здесь тоже возникают дополнительные потоки, но на этот раз они направлены в противоположную сторону и создают общий поток, направленный вниз вдоль оси чашки. Наблюдая за поведением медузы, вы сможете самостоятельно убедиться в этом.

Мы готовы прийти на помощь утонувшей медузе.

СПАСЕНИЕ КАРТЕЗИАНСКОЙ МЕДУЗЫ. Итак, сначала медуза плавала вверху. Мы сжали бутылку, и медуза опустилась на дно. Но когда мы отпустили бутылку, медуза не смогла всплыть самостоятельно. К этому времени мы внимательно изучили рисунок 2 и для спасения медузы решили раскрутить жидкость, вращая бутылку. После остановки бутылки жидкость продолжила вращение, и мы оказались в ситуации, показанной на рисунке 2. По центру бутылки возник восходящий поток жидкости, который поднял медузу на некоторую высоту, где давление жидкости стало чуть меньше, воздух внутри медузы чуть расширился и вытеснил из неё небольшой объём воды. Этого оказалось достаточно, чтобы медуза самостоятельно смогла добраться до верха бутылки. Это был пересказ содержания ролика kvan.tk/jellyfish3

Имеется расширенный сценарий, основанный одновременно на обоих рисунках 2 и 3. Посмотрите соответствующий ролик kvan.tk/jellyfish4 и самостоятельно прокомментируйте его. Убедитесь, что в ситуации, обозначенной на рисунке 3, действительно возникает поток, направленный вниз вдоль оси чашки.

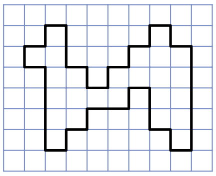
Наша спасательная миссия завершена. Подробности насчёт картезианского водолаза и методов его спасения см. в тексте kvantik.com/diver.pdf. Добавлю ссылку на видео kvan.tk/tealeaf про задачу Эйнштейна о парадоксе чаинок. В нём рассказано о потоках, изображённых у нас на рисунках 2 и 3, и показано поведение чаинок во вращающейся жидкости.

Художник Евгений Паненко • Фото автора

КАК РАЗРЕЗАТЬ ВЕРБЛЮДА?

Григорий Мерзон

Зайдя на Математический праздник (см. «Квантик» №4, с. 26–27), Квантик решил сам порешать задачки – вне конкурса, разумеется, для интереса. Ему понравилась задача Юрия Маркелова про «верблюда»:

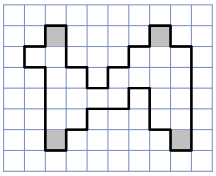


требовалось разрезать фигуру на 3 части, из которых можно сложить квадрат.

– Сначала надо понять, какого размера квадрат складывать, – размышлял Квантик. – Ну это просто: площадь фигуры 25 клеток, значит, квадрат должен быть 5×5.

Но дальше дело застопорилось. Как Квантик ни пытался разрезать верблюда на 3 части, хоть одна из них упорно отказывалась помещаться в квадрат 5×5.

– Очень уж этот верблюд широкий, приходится резать по вертикали... И высокий, потом каждую часть снова придётся резать... А, так вот же доказательство! – И Квантик отметил у верблюда четыре клетки:

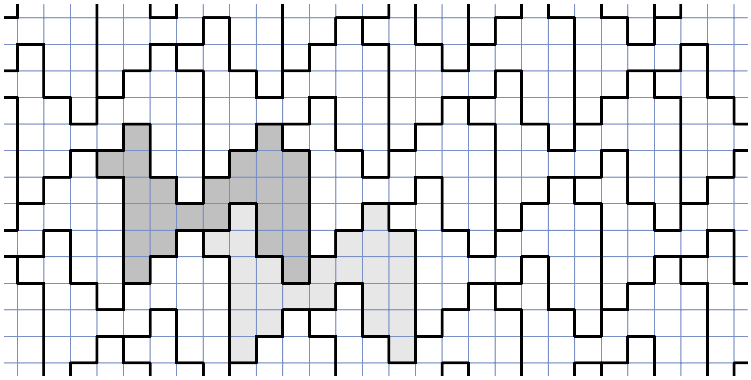


– Как верблюда ни режь на три части, в какую-то из них попадут хотя бы две отмеченные клеточки. Но их не удастся даже просто накрыть «по клеточкам» одним квадратом 5×5. Ничего не выйдет!

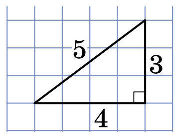
Квантик взял бланк с условиями задач, чтобы записать своё решение, и... обнаружил, что не дочитал условие до конца: верблюда разрешалось резать *не обязательно по линиям сетки*!

– Так, начнём заново... Что вообще хорошего в этой фигуре? Что-то с чем-то же должно состыковываться, чтобы получился ровный квадрат? Вот, например, «голова» с «шеей»... Кажется, рядом с «задней ногой» углубление примерно такой же формы... Или не такой же?

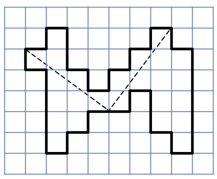
Квантик решил проверить и стал пририсовывать к верблюду ещё одного, а потом ещё и ещё... Скоро весь черновик заполнился *паркетом из верблюдов*:



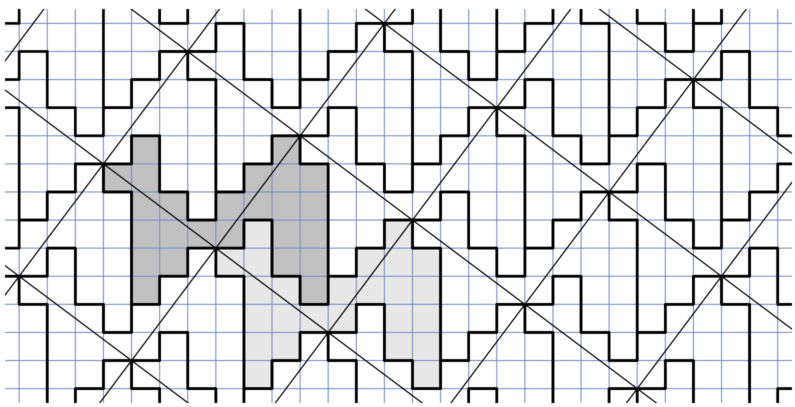
– Что-то я увлёкся... Но раз верблюды так хорошо упаковываются вместе, может, и впрямь получится сложить квадрат? А кстати, «так» – это как? Как связаны первый и второй верблюды? Ага, нужно сдвинуть первого верблюда на 4 клетки вправо и ещё на 3 вниз... 4 клетки по горизонтали и 3 по вертикали... Это же египетский треугольник!



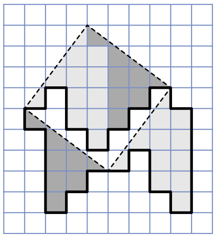
– То есть квадрат можно составлять не прямой, а косой. Надо только найти, как бы эти косые стороны квадрата уместить в верблюда... А вот же!



Когда Квантик нарисовал все такие линии поверх паркета, получилось совсем красиво.



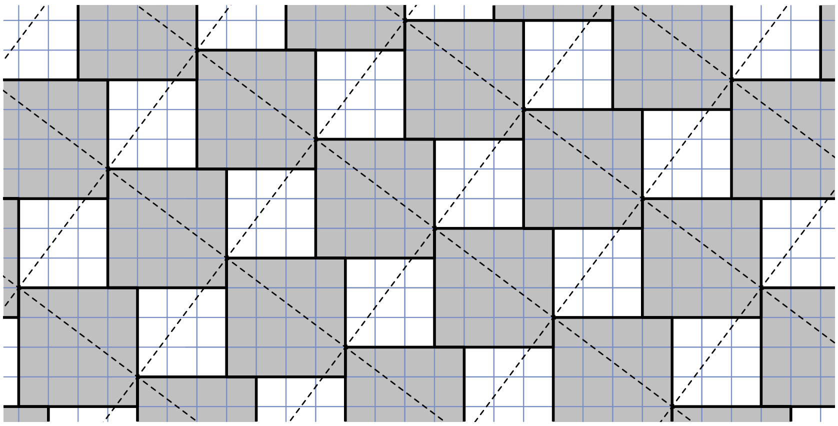
– Ну да, понятно: каждая часть квадрата – это кусочек одного из сдвинутых верблюдов. А если их сдвинуть обратно, составится исходный верблюд:



Время до конца олимпиады ещё оставалось, и Квантик стал размышлять, можно ли решить ещё какие-нибудь задачи на разрезание похожим методом.

– Вот, например, теорема Пифагора. Сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, $a^2 + b^2 = c^2$. Из двух квадратов $a \times a$ и $b \times b$ должен бы складываться квадрат $c \times c$... Значит, надо плиткой из двух этих квадратов замостить плоскость... И чтобы одна плитка из другой получалась сдвигом на a клеток по горизонтали и на b по вертикали...

И Квантик нарисовал такую картинку (как раз для египетского треугольника).



А придя домой, Квантик прочитал в интернете, что доказательство теоремы Пифагора при помощи такой «пифагоровой мозаики» придумали ещё арабские математики Ан-Найризи и Сабит ибн Курра в IX веке.

Художник Алексей Вайнер

Игорь Акулич

ПАМЯТЬ СНОВА ПОДВЕЛА

Немало воды утекло с тех пор, как десятиклассник Коля помогал младшему брату Пете решать задачи, в каждой из которых тот забывал добрую половину условия.[1]

Оба уже окончили школу, жизнь круто изменилась, но Петина самоуверенность в отношении собственной памяти осталась на прежнем изрядно завышенном уровне.

– А ты знаешь, Коля, – спросил он однажды, – что есть такой журнал «Квантик»?

– Как же, слышал. Для младших школьников, в основном.

– Вот-вот. Мне знакомые дали посмотреть. Там проводится конкурс по решению математических задач. В одной из них[2] я обнаружил удивительный факт: оказывается, число 1210 – *автобиографичное!*

– В каком смысле?

– Это такое натуральное число, которое рассказывает о своих собственных цифрах – сколько раз они в нём встречаются.

– И каким же образом?

– Э-э-э... забыл. Погоди-ка, сейчас вспомню. Ну-ка, единица, двойка, опять единица... Ага, понятно! Вот оно в чём дело! Возьмём в нём любую пару соседних цифр. Так вот, первая из них (левая) показывает, сколько раз в этом числе встречается вторая (правая)[3]. Например, пара «12» сообщает, что в числе одна двойка (так

[1] Об этом можно прочитать в статье «Если память подвела» («Квантик» № 9 за 2013 год).

[2] VI тур, задача № 26 («Квантик» № 2 за 2020 год). Составлена по мотивам М. Гарднера.

[3] Как всегда, память Петю бессовестно подводит: в исходной задаче автобиографичными назывались числа, у которых первая цифра равна количеству содержащихся в нём нулей, вторая – количеству единиц, третья – двоек и т.д.

и есть!), пара «21» – что в нём две единицы, и, наконец, пара «10» – что имеется единственный ноль.

– Да, забавный факт. И что требовалось решить?

– Э-э-э... Как-то тоже забылось. Ну, наверно, как всегда в таких задачах: найти наибольшее автобиографичное число[4]. Помоги, а?

– Хм... как тут быть? Сразу-то и не скажешь. Давай-ка для начала поищем не обязательно *наибольшее* число, а хотя бы *какое-нибудь*. Наверняка подойдёт 10, 12, 13 и так далее – любое двузначное число, начинающееся с единицы (кроме 11, конечно).

– А вот ещё: 22!

– Верно. Но тогда сразу в голову приходит 333.

– Точно! И 4444, и 55555... Ну, тогда всё ясно: максимально возможное число 999999999! Куда уж больше?

– Я бы не стал так опрометчиво заявлять. А вдруг есть покрупнее? В общем, подумать надо...

Дорогие читатели! Попробуйте разобраться, прав ли Петя со своей гипотезой о максимальности числа 999999999? Если да – докажите, а если нет – найдите верный ответ.

Кстати, выяснив, верна ли Петина гипотеза, вы решите задачу 44 «Нашего конкурса», см. с. 33 в этом номере журнала.

[4] И здесь память лжёт: в задаче требовалось найти *следующее* автобиографичное число. И, кстати, равно оно 2020 – году публикации задачи. Красиво!

А Петя с Колей, выходит, решают совсем другую задачу. Но что в этом плохого?

Художник Екатерина Ладатко

Четыре задачи

Валерия Сирота

Плотность любого предмета можно узнать, разделив его массу на занимаемый им объём. Вот только этот объём не всегда легко измерить! Зато – это подсказка – если уж вы знаете плотность какого-то материала, то по массе любой конструкции из этого материала всегда можно найти занятый ею объём...

Попросите у взрослых кухонные весы и мерный стакан (кувшин с делениями, отмечающими объём) и решите следующие экспериментальные задачи.

1. Измерьте плотность щебёнки, которой мостят неасфальтированные улицы, или плотность другого имеющегося под рукой камня.

2. Измерьте плотность монеты достоинством 10 руб.

3. Измерьте плотность материала, из которого состоят сосновые шишки.

4. Какую часть объёма песка занимают собственно песчинки, а какую – воздух? Придумайте, как это измерить.

P.S. А могли бы вы в этих опытах обойтись без мерного стакана?

Ответы – в следующем номере.
Художник Мария Усеинова

Чудеса лингвистики

Ольга Кузнецова

ХЛЕБОБУКВЕННЫЕ ИЗДЕЛИЯ

Пока жители разных городов спорят, является ли булкой нарезной батон, подумаем, почему среди десертов и выпечки разных уголков России так много «рогатых». *Рогалик* и вафельный *рожок* с разнообразными начинками встречаются повсеместно. На Русском Севере выпекают *рогульки*, *рогушки* и даже *козули*. В словаре Даля, где можно отыскать массу замечательных диалектных слов, есть характерное определение козули: «ватрушка с рогами, пирог с <...> рогульками», то есть с торчащими во все стороны зубчиками теста. Слово *козуля* – вполне родное для русского языка, именно так раньше именовали косулю – небольшого оленя, внешне несколько сходного с козой. Вообще мы называем *рожка́ми* многие предметы, напоминающие по форме козий рог, но лакомствам особенно повезло. «Животные» названия лепёшек были популярны ещё в древности, когда эти угощения использовались в обрядах. Однако среди них встречаются и «самозванцы» – слова, вызывающие у говорящих по-русски ассоциации с рогами и копытами, но исторически с ними не связанные.

Самые яркие примеры такого съедобного обмана – *козинаки* и *баранки*. Первые происходят из грузинского языка, где их название говорит само за себя: «измельчённые орехи». Впрочем, в ложности «козьего» толкования можно усомниться и не зная грузинского: если *-коз-* – корень, то что за *-инаки*? Странновато для русского суффикса. А с *баранкой* сложнее, так как это слово изменило облик под влиянием «рогатой» аналогии. Обычно его происхождение представляют себе так: *баранка* связана со словом *баран*, потому что скручена в бараний рог. В некоторых регионах так и скажут: *баранок* или даже связка *барашков*. Но раньше вместо *баранка* говорили что-то вроде *обваренок* (приставка сохранилась в украинском и, например, польском языке, а в русском слово упростилось). Это подтверждает и рецепт приготовления баранок: тесто *обваривается* кипятком. Так что исторически *баранки* ближе к *вареникам* и *поварам*, чем к полорогим.

Маменькины словечки

Как связаны слова *метро*, *митрополит*, *перламутр* и *материя*? Все они заимствованы из других языков, дальние «родственники» и восходят к тому самому «первому» и «главному» слову.

«Материнские» корни очень продуктивны. Из них вырастают даже человеческие имена, в том числе ставшие русскими, от *Матрёшки* до *Митрошки*. *Митрофан* («воплощающий свою мать») – «говорящее» имя героя комедии Д. И. Фонвизина «Недоросль».

Метрополитен (сокращённо *метро*) дословно означает «столичный» транспорт, слово произошло от греческого *метрополис*, «город-мать». Так же устроено слово *митрополия* – некая область, где есть свой *митрополит*. Зачем же в русском языке и *метрополия*, и *митрополия*? Эти слова разбежались по смыслу и по написанию, так как были заимствованы из разных языков и в разное время. *Метро* – французский подарочек, а *митрополия* – церковнославянское наследие, причём в древнерусском языке это слово ещё имело значение «столица», и рай называли иногда *небесной митрополией*.

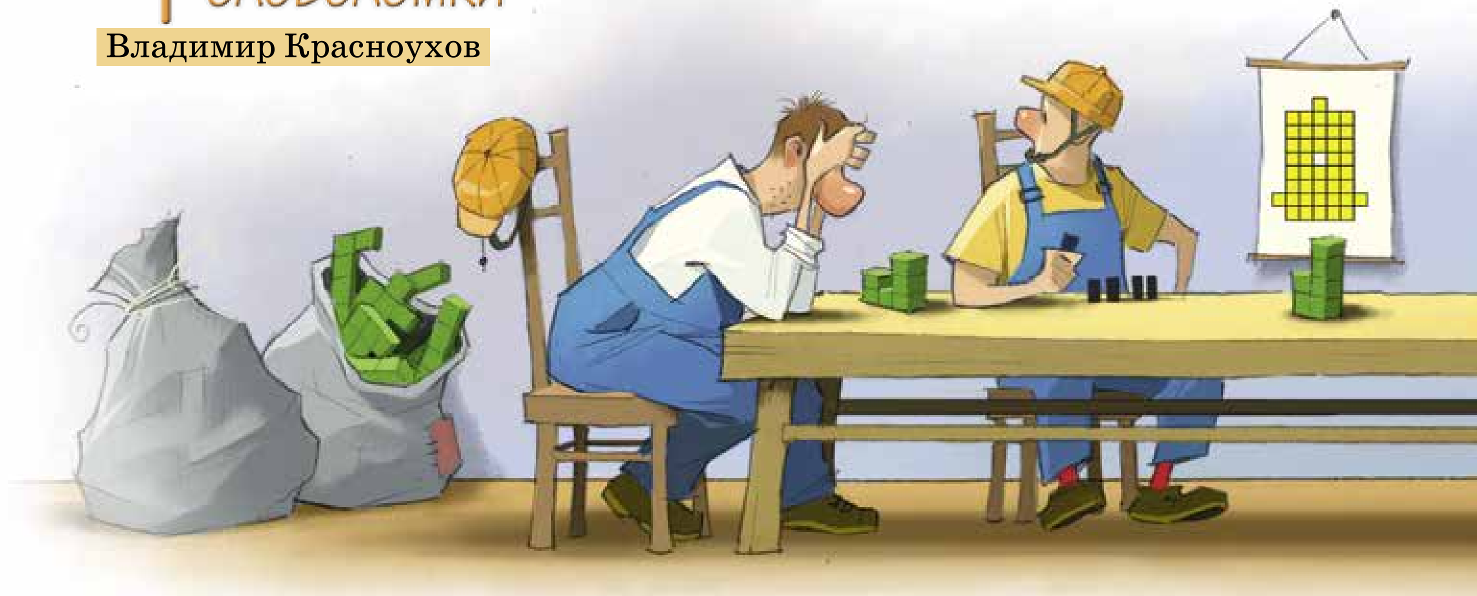
Перламутр, заимствованный из немецкого, тоже имеет два исторических корня: *Perle*, «жемчужина» (отсюда же перловка), и *Mutter*, «мать». «Жемчужной матерью» перламутр называют во многих странах, да и у нас называли вплоть до XVIII в., а в XIX в. встречается забавный вариант *перломатерь*. В романских языках название перламутра устроено наоборот: *madreperla* (итал.). Все знают слово *падре*, изначально «отец». В испанском или итальянском парой к нему будет *madre*, «мать». Похожим образом в русском языке есть слово *отчизна*, но утратилось древнерусское *материзна* – «наследство от матери».

Материя – слово, полученное нами через польский из латинского языка. Означает оно «вещество» или даже первовещество в философском смысле, отсюда и «материнство» корня. Кстати, с ним связан напиток *мадера*, именуемый по месту изобретения, острову *Мадейра*. Название острова означает «древесина» (видимо, из-за экспорта) – важнейший *материал* – и относится всё к тому же словесному семейству.

Художник Ольга Демидова

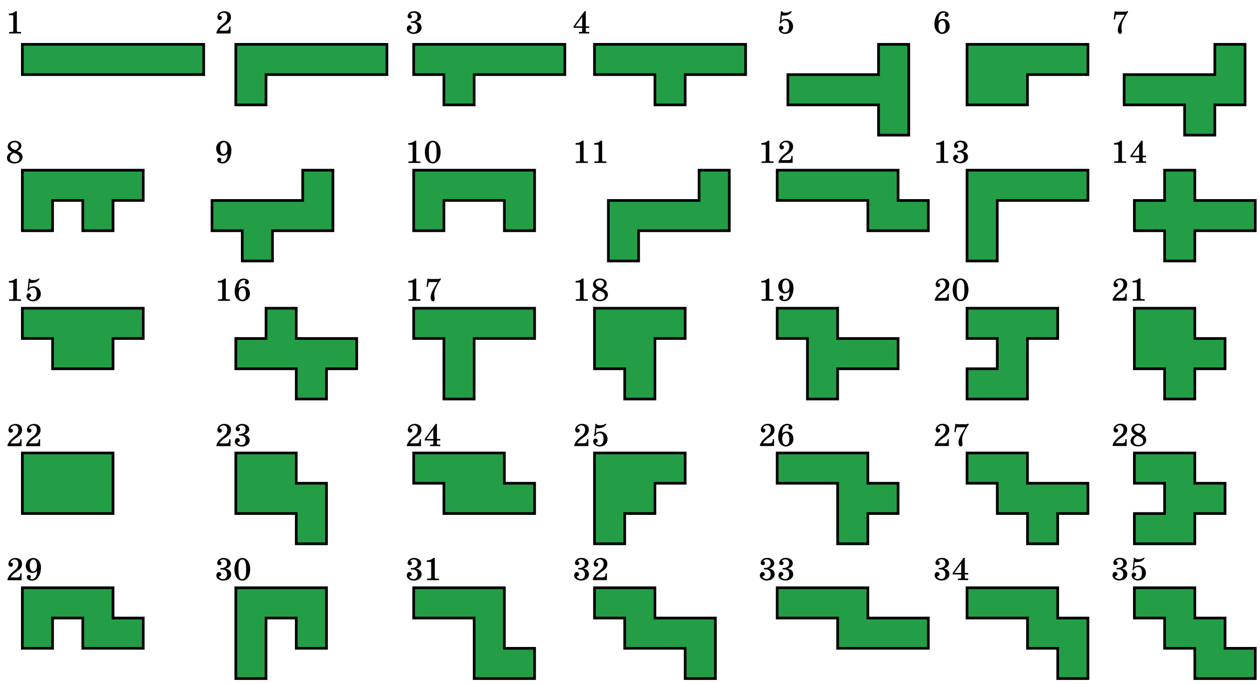
Владимир Красноухов

ГЕКСАМИНО:



ГЕКСАМИНО – это фигурки, составленные из шести единичных квадратиков. Всего различных таких фигурок 35, они показаны на рисунке. Их несложно вырезать из фанеры, пластика или картона.

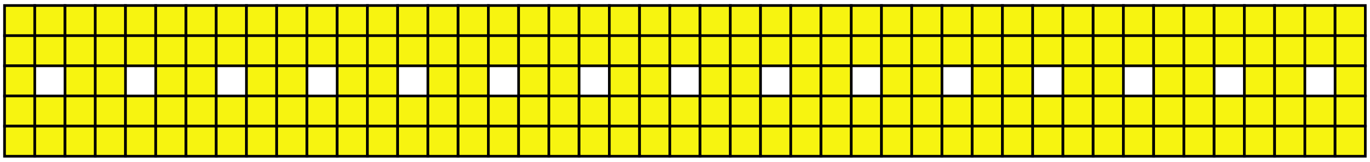
Предлагаем нашим читателям три задачи различной сложности, в каждой надо целиком использовать один комплект гексамино.



ТРИ ЗАДАЧИ

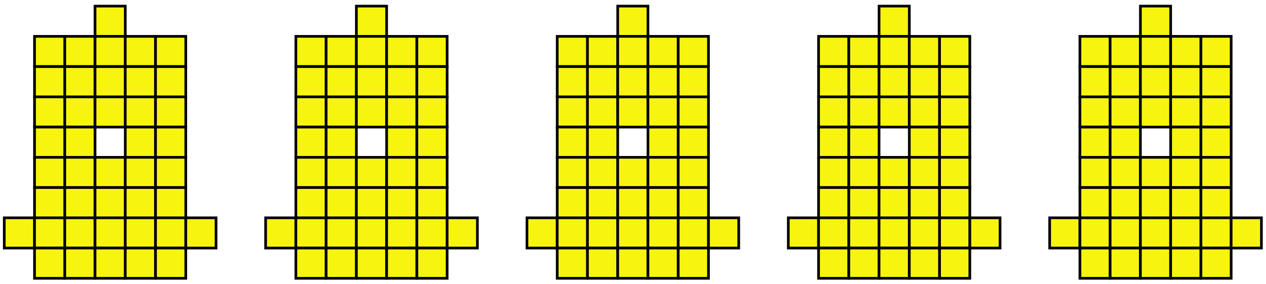
1 (НЕПРОСТАЯ ЗАДАЧА)

Сложите прямоугольник 5×45 с 15 симметрично расположенными отверстиями, силуэт приведён на рисунке.



2 (ОЧЕНЬ НЕПРОСТАЯ ЗАДАЧА)

Сложите 5 одинаковых фигур, силуэты которых заданы на рисунке.



3 (ОЧЕНЬ-ОЧЕНЬ НЕПРОСТАЯ ЗАДАЧА)

Используя все 35 элементов гексамино, сложите одновременно 7 равных фигур. Силуэты фигур жёстко не заданы... казалось бы, свобода! Единственное требование к фигурам – они должны быть одинаковыми между собой по форме и размерам.

ЖЕЛАЕМ УСПЕХОВ!

Ответы в следующем номере

Художник Алексей Вайнер

Игорь Акулич

Две большие разницы

– А сегодня, Даня, у тебя вид недовольный... Какая тут причина, и где же корень зла?

– Не знаешь где? Ты, Федя, и есть этот самый корень!

– Я?

– Конечно. Предлагаешь задачи, даешь к ним неверные решения, я тебе верю, а потом оказывается – всё не так!

– Что за обвинения? Конкретику давай!

– Пожалуйста. Вот та самая задача[1]:

В некоторый момент времени относительная скорость движения концов часовой и минутной стрелок (то есть скорость, с которой меняется расстояние между концами стрелок) оказалась равной 6 мм/с. Может ли она в какой-то другой момент оказаться равной 5 мм/с?

А вот и твоё решение. В нём мы исходим из того, что:

– угловая скорость вращения часовой стрелки в 12 раз меньше, чем минутной;

– часовая стрелка всегда *короче* минутной.

Следовательно, если скорость движения конца минутной стрелки равна v, то скорость движения конца часовой стрелки заведомо *меньше* $\frac{1}{12}v$. Поэтому относительная скорость концов стрелок лежит в пределах от $\frac{11}{12}v$ до $\frac{13}{12}v$, и отношение относительных скоростей в любые два момента времени больше $\frac{11}{13}$, но меньше $\frac{13}{11}$. А так как $\frac{5}{6} < \frac{11}{13}$, то относительная скорость не может составить 5 мм/с.

– По-моему, безупречно.

– Как бы не так! Ведь что такое относительная скорость двух движущихся точек? Как известно, чтобы её определить, надо связать систему отсчёта с одной из точек (как бы сделать её «неподвижной»), и тогда скорость второй точки в этой системе отсчё-

[1] См. статью «Федя, Даня и Кэрролл» из 12-го номера «Квантика» за 2016 год.

та как раз будет той самой относительной скоростью движения точек. Верно?

– Верно.

– А ты что в условии написал? Посмотри – в скобках! По твоему мнению, относительная скорость есть скорость, *с которой меняется расстояние между концами стрелок*. А это, как говорят в Одессе, две большие разницы!

– Неужели?

– Вот именно! Приведу простой пример. Рассмотрим на часах одну стрелку длиной r, которая вращается с угловой скоростью ω. Какова скорость движения конца стрелки относительно оси вращения?

– Понятно, какая: ωr.

– Но ведь расстояние между осью вращения и концом стрелки *постоянно*. Поэтому скорость изменения этого расстояния равна *нулю* – это и будет относительная скорость *согласно твоему определению*!

– ???

– Ага, рот раскрыл! Вот так и оставайся, поделом тебе.

– Да, похоже, ты прав... Скорость изменения расстояния – это не совсем то, что принято считать относительной скоростью.

– Совсем не то! И если уж в условии тебя угораздило дать иное определение относительной скорости (в твою честь уместно назвать её *Ф-скоростью*), то и решение должно соответствовать именно ему. А у тебя не соответствует! Так что надо искать верное решение – другого выхода нет.

– Может, поищем?

– Об этом я как раз и думаю. Но что-то пока не выходит. Оттого-то и грусть-тоска меня съедает.

– Погоди-ка, по-моему, всё не так сложно. Когда стрелки направлены в одну сторону, с какой скоростью меняется расстояние?

– Не знаю. Если Ф-скорость ненулевая, то расстояние в данный момент или возрастает, или убывает.

– Точно! Но когда стрелки направлены одинаково, расстояние между их концами наименьшее возможное. Чуть позже и чуть раньше расстояние больше, а значит, ни убывать, ни возрастать не может.

– Значит, Ф-скорость в этот момент – ноль?

– Да. И потому в процессе плавного перехода от 6 мм/с к нулю обязательно наступит момент, когда она примет и *промежуточное* значение 5 мм/с! Ведь не может же она, непрерывно меняясь, через него «перепрыгнуть»!

– Получается, ответ в задаче противоположный: «может»!

– Конечно, так оно и есть. Сожалею, что я тебя ввёл в заблуждение, но повинную голову меч не сечёт – тут топор нужен. С другой стороны, возникает вопрос: при каком угле между стрелками достигается максимальная возможная Ф-скорость, если заданы длины стрелок r и R...

– ...и угловая скорость часовой стрелки ω!

– А вот это, полагаю, задавать не надо. Мы ведь и так знаем, что минутная стрелка проходит один оборот за час, так что значение ω легко вычисляется.

– Верно. Ну, что – подумаем?

– Подумаем!

Не будем ждать, пока наши герои решат эту задачу, и сразу опишем ответ. В системе отсчёта, в которой минутная стрелка неподвижна, конец часовой движется также по окружности радиуса r. Скорость изменения расстояния будет самой большой, когда конец короткой стрелки удаляется или приближается ровно в направлении на конец длинной стрелки. То есть когда конец короткой стрелки находится в точке касания окружности с прямой, проходящей через конец длинной стрелки. Чтобы найти угол, нужна тригонометрия. От угловой скорости ответ не зависит, лишь бы угловые скорости были постоянны.

Художник Мария Усеинова

LXXXIII Московская математическая олимпиада: избранные задачи 8 класса

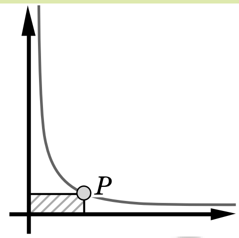
1 марта 2020 года прошла очередная Московская математическая олимпиада (одновременно с Турниром городов). Приводим избранные задачи для 8 класса. Решения см. на сайте olympiads.mccme.ru/mmo/

1. Том написал на заборе из досок слово ММО, а Гек – число 2020. Ширина каждой буквы и цифры 9 см, а ширина доски забора – 5 см. Мог ли Гек испачкать меньше досок, чем Том? (Доски расположены вертикально, а слова и числа пишутся горизонтально. Цифры и буквы пишутся через равные промежутки.)

Д. Мухин, А. Федулкин, И. Эльман

2. На графике функции $y = 1/x$ Миша отмечал подряд все точки с абсциссами 1, 2, 3, ..., пока не устал. Потом пришла Маша и закрасила все прямоугольники, одна из вершин которых – это отмеченная точка, ещё одна – начало координат, а ещё две лежат на осях. Затем учительница попросила ребят посчитать площадь фигуры, состоящей из всех точек, закрашенных ровно один раз. Сколько получилось?

Д. Мухин



3. Дано натуральное число N. Вера делает с ним такие операции: сначала прибавляет 3 до тех пор, пока получившееся число не станет делиться на 5 (если изначально N делится на 5, то ничего прибавлять не надо). Получившееся число Вера делит на 5. Далее делает эти же операции с новым числом и т.д. Из каких чисел такими операциями нельзя получить 1?

А. Шаламова

4. В турнире по гандболу участвуют 20 команд. После того как каждая команда сыграла с каждой по разу, оказалось, что количество очков у всех команд разное. После того как каждая команда сыграла с каждой по второму разу, количество очков у всех команд стало одинаковым. В гандболе за победу команда получает 2 очка, за ничью 1, за поражение – 0. Найдутся ли две команды, по разу выигравшие друг у друга?

Б. Френкин, А. Заславский

5. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Перпендикуляр, опущенный из точки A на сторону CD, проходит через середину диагонали BD, а перпендикуляр, опущенный из точки D на сторону AB, проходит через середину диагонали AC. Докажите, что трапеция равнобокая.

А. Доледенок

Художник Сергей Чуб

XLI ТУРНИР ГОРОДОВ
ВЕСЕННИЙ ТУР, 8–9 КЛАССЫ

16 февраля и 1 марта 2020 года прошёл весенний тур XLI Турнира городов. Приводим задачи базового и сложного вариантов для 8–9 классов, кроме самой сложной задачи. В скобках после номера задачи указано число баллов, присуждавшихся за её полное решение. При подведении итогов учитываются три задачи, по которым участник набрал больше всего баллов. Подробнее см. сайт **turgor.ru**

Базовый вариант

1 (4). Карта Квадрляндии представляет собой квадрат 6×6 клеток. Каждая клетка – либо королевство, либо спорная территория. Королевств всего 27, а спорных территорий 9. На спорную территорию претендуют все королевства по соседству и только они (то есть клетки, соседние со спорной по стороне или вершине). Может ли быть, что на каждые две спорные территории претендует разное число королевств?

Михаил Евдокимов

2 (4). Какое наибольшее количество различных целых чисел можно выписать в ряд так, чтобы сумма каждых 11 подряд идущих чисел равнялась 100 или 101?

Егор Бакаев

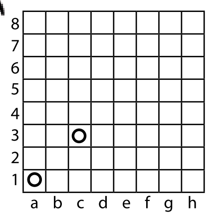
3 (4). На диагонали AC ромба $ABCD$ построен параллелограмм $APQC$ так, что точка B лежит внутри него, а сторона AP равна стороне ромба. Докажите, что B – точка пересечения высот треугольника DPQ.

Егор Бакаев

4 (5). Целое число n таково, что уравнение $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=n$ имеет решение в целых числах x, y, z. Докажите, что тогда и уравнение $x^2+y^2-xy=n$ имеет решение в целых числах x, y.

Александр Юран

5 (5). На доске 8×8 в клетках a1 и c3 стоят две одинаковые фишки. Петя и Вася ходят по очереди, начинает Петя. В свой ход игрок выбирает любую фишку и сдвигает её либо по вертикали вверх, либо по горизонтали вправо на любое число клеток. Выиграет тот, кто сделает ход в клетку h8. Кто из игроков может действовать так, чтобы всегда выигрывать, как бы ни играл соперник? В одной клетке может стоять только одна фишка, прыгать через фишку нельзя.



Владимир Ковальджи

Сложный вариант

1 (4). Существует ли число, делящееся на 2020, в котором всех цифр 0, 1, 2, ..., 9 поровну?

Михаил Евдокимов

XLI ТУРНИР ГОРОДОВ
ВЕСЕННИЙ ТУР, 8-9 КЛАССЫ

2 (5). Три богатыря бьются со Змеем Горынычем. Илья Муромец каждым своим ударом отрубает Змею половину всех голов и ещё одну, Добрыня Никитич – треть всех голов и ещё две, Алёша Попович – четверть всех голов и ещё три. Богатыри бьют по одному в каком хотят порядке, отрубая каждым ударом целое число голов. Если ни один богатырь не может ударить (число голов получается нецелым), Змей съедает всех троих. Смогут ли богатыри отрубить все головы 41!-головому Змею? ($41!=1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 41$.)

Алексей Заславский

3. Существует ли вписанный в окружность N-угольник, у которого нет одинаковых по длине сторон, а все углы выражаются целым числом градусов, если

а) (4) $N=19$; **б) (3)** $N=20$?

Михаил Малкин

4 (8). Для каких N можно расставить в клетках квадрата $N\times N$ действительные числа так, чтобы среди всевозможных сумм чисел на парах соседних по стороне клеток встречались все целые числа от 1 до $2(N-1)N$ включительно (ровно по одному разу)?

Максим Дидин

5 (9). Трапеция $ABCD$ вписана в окружность. Её основание AB в 3 раза больше основания CD. Касательные к описанной окружности в точках A и C пересекаются в точке K. Докажите, что угол KDA прямой.

Александр Юран

6 (9). У Пети есть колода из 36 карт (4 масти по 9 карт в каждой). Он выбирает из неё половину карт, какие хочет, и отдаёт Васе, а вторую половину оставляет себе. Далее каждым ходом игроки по очереди выкладывают на стол по одной карте (по своему выбору, в открытом виде); начинает Петя. Если в ответ на ход Пети Вася смог выложить карту той же масти или того же достоинства, Вася зарабатывает 1 очко. Какое наибольшее количество очков он может гарантированно заработать?

Михаил Евдокимов

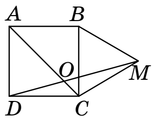
Художник Сергей Чуб

НАШ КОНКУРС, VII тур («Квантик» № 3, 2020)

31. *Мимо пассажира «Ласточки», едущей с постоянной скоростью, встречный «Сапсан» пронёсся за 3 секунды, а попутный «Сапсан» – за 7 секунд. Длины и скорости «Сапсанов» были одинаковы. За сколько секунд этот пассажир проедет мимо такого же, но стоящего «Сапсана»?*

Ответ: 10,5 секунд. Примем длину «Сапсана» за 1. Тогда скорость встречного «Сапсана» относительно пассажира равна $\frac{1}{3}$ в секунду, а попутного – $\frac{1}{7}$. То есть $\frac{1}{3}$ – это сумма скоростей «Сапсана» и «Ласточки», а $\frac{1}{7}$ – разность. Тогда удвоенная скорость «Ласточки» равна $\frac{1}{3}-\frac{1}{7}=$ $=\frac{4}{21}$ в секунду, и пассажир «Ласточки» проедет мимо стоящего «Сапсана» за $\frac{21}{2}$ секунд.

32. *На стороне BC квадрата $ABCD$ во внешнюю часть построен равносторонний треугольник BMC. Отрезки AC и MD пересекаются в точке O. Докажите, что $OA=OM$.*



Треугольник DCM равнобедренный с углом при вершине C, равным $90°+60°=150°$. Значит, угол CMD равен $(180°-150°)/2=15°$. Тогда углы BMO и BAO равны по 45°. С другой стороны, углы MAB и AMB тоже равны (по 15°), откуда равны углы OAM и OMA, то есть треугольник AOM равнобедренный, что и требовалось.

33. *Три разбойника украли пять алмазов (возможно, разного веса) и решили разделить их между собой поровну по весу, не распиливая на куски. Они отмерили треть, но остальные алмазы нельзя было разделить на две равные части. Докажите, что разбойникам не удастся поделить алмазы, даже если они смогут отмерить треть по-другому.*

Пусть разбойникам удалось поделить алмазы на три части. Так как алмазов 5, одна из частей будет состоять из одного алмаза, назовём его Брусок. Но тогда алмазы можно было разделить и при первой попытке, так как Брусок либо был исходной отмеренной третью, либо был среди оставшихся $\frac{2}{3}$ алмазов, которые, тем самым, делятся на две части по $\frac{1}{3}$. Противоречие.

34. *Какое наибольшее количество флажков, изображённых на рисунке 1, можно разместить в квадрате а) 8×8; б) 14×14? Флажок должен располагаться по линиям сетки. Никакие два флажка не должны иметь ни одной общей точки. В качестве примера на рисунке 2 показано, как в квадрате 3×3 можно разместить три флажка.*


Рис. 1

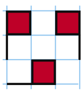
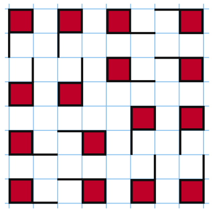


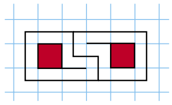
Рис. 2

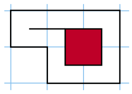
Ответ: а) 16; б) 45.



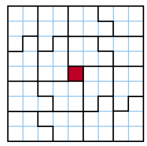
а) На рисунке справа приведён пример для 16 флажков.

Почему нельзя больше? Обернём каждый флажок полоской шириной в полклетки, как на рисунках ниже. Получится фигурка из 5 клеточек – пентамино, но в сдвинутой клетчатой сетке. Её узлы – это центры клеточек исходной сетки.

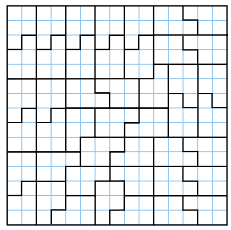




Для любой расстановки флажков получившиеся из них пентамино не пересекаются и содержатся в квадрате, полученном из исходного добавлением «вокруг» полоски в полклетки. То есть из квадрата 8×8 получится квадрат 9×9 с пентамино. Расстановка пентамино, соответствующая нашему примеру, приведена справа. Поскольку площадь квадрата – 81, пентамино может быть не больше $\frac{81}{5}=16\frac{1}{5}$, то есть 16 флажков – максимум для квадрата 8×8.



б) Аналогично, перейдём к размещению пентамино в квадрате 15×15. Пример для 45 пентамино приведён справа. Больше быть не может, так как покрыт весь квадрат.



35. *В гирлянде n лампочек и n кнопок с номерами. По инструкции, 1-ю кнопку надо соединить с одной лампочкой, 2-ю – с двумя, 3-ю – с тремя, и т. д., но с какими именно лампочками соединяется каждая кнопка, решает пользователь. Сначала все лампочки погашены. Нажатие на любую кнопку меняет состояние всех соединённых с ней лампочек на противоположное (горящие лампочки гаснут, не горящие – зажигаются).*

Коля уверен, что можно так соединить кнопки с лампочками, чтобы, нажав нужные кнопки, можно было получить любую комбинацию горящих и не горящих лампочек. Петя же считает, что любую такую комбинацию можно получить, как ни соединяй лампочки и кнопки – лишь бы по инструкции.

а) При каких n прав Коля?

б) При каких n прав Петя?

Ответ: а) при всех n; б) 1 или 2.

а) Соединим k-ю кнопку с первыми k лампочками. Тогда, чтобы получить заданную комбинацию горящих лампочек, будем идти от последней лампочки к первой. Приводя k-ю лампочку в нужное положение нажатием (или не-нажатием) k-й кнопки, мы не затронем уже правильно выставленные следующие лампочки.

б) Для одной лампочки задача очевидна, а для двух лампочек – сводится к пункту а).

Пусть лампочек хотя бы три. Назовём первые две из них близняшками. Соединим 1-ю кнопку с 3-й лампочкой (не близняшкой), а остальные по правилу: k-ю кнопку соединяем с первыми k лампочками (обе близняшки среди них). Тогда мы не сможем получить комбинацию, в которой одна близняшка горит, а вторая – нет.

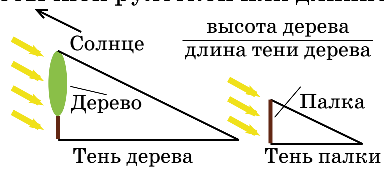
ДЕРЕВЬЯ И ИХ ИЗМЕРЕНИЯ

(«Квантик» № 4, 2020)

1. Солнце в нашей стране в зените не бывает. Поэтому тень от деревьев с шарообразной кроной получается овальная, а точнее, эллипсовидная: ведь тень от шара на горизонтальной поверхности, если светить не сверху, а под углом, будет эллипсом. У деревьев с плоской (зонтичной) кроной (обычно это южные «родственники» сосны, в том числе пиния) тень своей формой повторяет крону. А если крона плоская и круглая – тень тоже будет круглой. Тень от ёлки – треугольник с основанием, как диаметр ёлочной кроны внизу, а длина тени больше высоты ёлки. Точнее, ёлочная тень – это треугольник с «приклеенным» к нему кругом: тень верхней части кроны + тень нижних веток, образующих практически ровный горизонтальный круг.

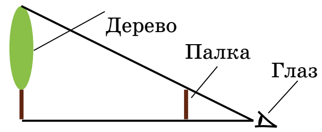
Солнце движется по небу – и тени деформируются: овалы сначала «укорачиваются», потом – после полудня – обратно «удлиняются». Лишь тень от круга как была кругом, так и остаётся – только двигается, и размер её не меняется.

2. Высоту дерева можно измерить, используя идею подобия треугольников. В солнечный день дерево во столько же раз короче (или длиннее) своей тени, во сколько раз любая палка короче (или длиннее) тени этой палки. Выберите палку повыше (не меньше 1 м, а то будет очень неточно), воткните её в землю или попросите товарища подержать – и вперёд. Или используйте столб, до верха которого вы можете дотянуться. Высоту палки или столба измерьте обычной рулеткой или длинной линейкой.



$$\frac{\text{высота дерева}}{\text{длина тени дерева}} = \frac{\text{высота палки}}{\text{длина тени палки}}$$

Если пасмурно, можно обойтись одной палкой. Поставьте её на подходящем расстоянии от дерева и найдите такое место, откуда, наклонившись к самой земле, вы видите вершину палки и вершину дерева на одной и той же высоте (палка «закрывает» дерево). Опять получились подобные треугольники! Во сколько раз расстояние от вашего пункта наблюдения до дерева больше расстояния до палки, во столько же раз дерево выше палки.



$$\frac{\text{высота дерева}}{\text{расстояние до дерева}} = \frac{\text{высота палки}}{\text{расстояние до палки}}$$

Некоторые ребята постарше меряют транспортиром угол, под которым видят дерево снизу, и вычисляют высоту дерева, пользуясь умным словом «тангенс». Но транспортир маленький, и точность будет заметно хуже из-за больших погрешностей измерений.

Диаметр проще всего измерить, опять используя подобие, на этот раз окружностей. Ведь диаметры любых двух окружностей отличаются во столько же раз, во сколько раз отличаются их длины. С помощью любой верёвочки или нитки измерьте окружность ствола («обхват») дерева, а для сравнения возьмите любой круг похожего размера – например, кастрюлю. Вот формула:

$$\frac{\text{диаметр дерева}}{\text{обхват дерева}} = \frac{\text{диаметр кастрюли}}{\text{обхват кастрюли}}$$

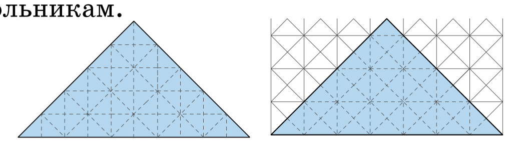
Но есть и другие способы. Например, Аня Ли, учась в 4-м классе, придумала и сделала деревоизмерительный прибор из длинной линейки и двух угольников, скреплённых резинками (рисунок справа).

3. В дереве специальным инструментом высверливают дырку до середины ствола шириной в 1–2 см и аккуратно вынимают древесину, которая была на этом месте. По ней и считают годовые кольца. Биологи говорят, что дереву это неопасно и даже не больно – бо́льшая часть его древесины состоит из мёртвых клеток.

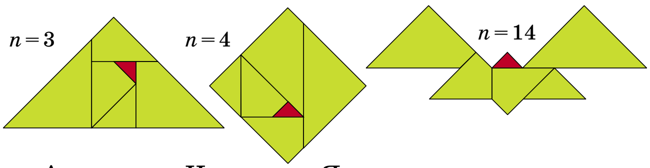
4. Осенью дерево сухое и лёгкое: готовясь к зиме, «выгоняет» воду в землю, чтобы та не замёрзла и не разорвала древесину в холод. А весной в дереве активно идёт обмен веществ, соки переносят минеральные вещества из почвы наверх, и древесина вся пропитана ими. Она тяжёлая, «вязкая», и пилить её труднее.

МЕДВЕЖИЙ УГОЛ – 2 («Квантик» № 4, 2020)

«Парадокс» основан на том, что коробочка по площади равна 50 красным треугольникам (слева), а остальные элементы в сумме – 49 треугольникам.

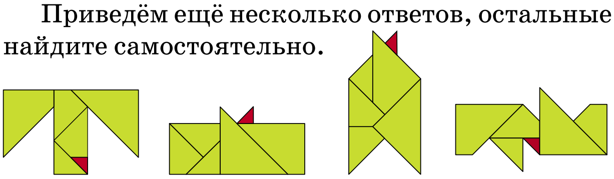


Решения задач 1, 2, 3:



Александр Чиряев из Якутска первым из наших читателей построил ещё один симметричный 14-угольник, опровергнув утверждение автора о единственности решения, и собрал различные симметричные многоугольники, расширив возможности головоломки. Благодарим Александра Константиновича за активность и высылаем ему подарок – набор механических головоломок, опубликованных в «Квантике».

Приведём ещё несколько ответов, остальные найдите самостоятельно.



$n=8$ $n=9$ $n=10$ $n=14$

НЕОБЫКНОВЕННАЯ ДЕВОЧКА («Квантик» № 4, 2020)

Все числа в стихотворении приведены в двоичной системе счисления: например, 10 обозначает двойку, 100 – четвёрку.

ПАРАДОКС СРЕДНЕЙ СРЕДНЕЙ СКОРОСТИ («Квантик» № 4, 2020)

Пусть бегуны потратили a, b, …, z секунд, тогда их средние скорости – $10/a$, $10/b$, …, $10/z$ км/с, а их средняя скорость в среднем – это $\dfrac{\frac{10}{a}+\frac{10}{b}+\dots+\frac{10}{z}}{n}$, где n – количество бегунов. Поделим расстояние 10 на среднюю скорость в среднем, получим $\dfrac{n}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\dots+\frac{1}{z}}$ – это *среднее гармоническое чисел* a, b, …, z.

Среднее время – это $\frac{a+b+\dots+z}{n}$, *среднее арифметическое чисел* a, b, …, z. Формулы получились разными, так что парадокса нет.

На самом деле среднее арифметическое всегда больше среднего гармонического, кроме случая, когда все числа совпадают.

Если бегунов было всего двое, а на забег они потратили 4000 с и 5000 с соответственно, то их среднее арифметическое равно 4500 с, а среднее гармоническое равно 4444 с, как в условии.

«Правильно» ведёт себя при взятии среднего *темп* – отношение затраченного времени к пройденному расстоянию. Убедитесь, что средний темп в среднем всегда равен отношению среднего времени к расстоянию.

XLI ТУРНИР ГОРОДОВ. ВЕСЕННИЙ ТУР, 8 – 9 классы

Базовый вариант

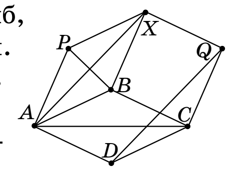
1. Ответ: да. Один из примеров см. на рисунке (пустые клетки – королевства, а цифра в клетке обозначает, сколько королевств претендует на эту спорную территорию).

0	2				
1	3			8	
	5	6			
			7		
		4			

2. Ответ: 22 числа. *Оценка.* Пусть нашлись 23 различных числа так, что сумма каждых 11 подряд идущих равна A или B. Если сумма первых 11 равна A, то вторая сумма (со 2-го по 12-е число) равна B (иначе 1-е и 12-е числа совпадут), третья сумма – снова A, четвёртая – B и т.д. А значит, 1-е число отличается от 12-го на 1, а 12-е от 23-го – тоже на 1, но в другую сторону. Тогда 1-е и 23-е числа равны – противоречие.

Пример: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, −35, 1, 2, 7, 8, 13, 14, 19, 20, 25, 26, −34.

3. Построим ромб $APXB$. Тогда четырёхугольник $CBXQ$ – тоже ромб, а $ADQX$ – параллелограмм. Поэтому $PB \perp AX \parallel DQ$, то есть прямая PB содержит высоту треугольника DPQ. То же верно и для QB, что и требовалось.



4. Решение следует из тождества $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=(x-z)^2+(y-z)^2-(x-z)(y-z)$.

5. Ответ: Вася. Изначально фишки стоят на диагонали из a1 в h8, не соседствуя. Петя сбегает с неё, а Вася пусть возвращает эту фишку на диагональ, сохранив указанную ситуацию, если может. Вася не сможет это сделать, лишь если фишки окажутся в одной или соседних линиях. Тогда Вася делает такой ход, чтобы фишки образовали доминошку. После этого Вася будет сохранять доминошку, повторяя ход Пети другой фишкой. В итоге Петя первым выскочит на верхнюю или правую линию, после чего Вася сдвинет эту фишку в h8 и победит.

Сложный вариант

1. Ответ: да. Поскольку $2020 = 20 \cdot 101$, то число 10198987676545432320 подходит.

2. Ответ: да. Если число голов чётно, богатыри могут уменьшить его, сохранив чётность. Действительно, если голов $4n-2$, то после удара Ильи их станет $2n-2$. Если же голов $4n$, то после удара Алёши их станет $3n-3$, а после следующего за ним удара Добрыни их станет $2n-4$.

Богатыри могут так действовать, пока не останется 4 или 2 головы, для которых хватит одного удара Алёши или Ильи соответственно.

3. а) Ответ: нет. Пусть такой 19-угольник существует. Рассмотрим вписанные углы, опирающиеся на его последовательные стороны. Все они разные, и сумма каждых двух углов, соответствующих соседним сторонам, целая (она дополняет один из углов 19-угольника до 180°). Рассмотрим два случая.

1) Все эти вписанные углы выражаются целым числом градусов. Тогда их сумма не меньше $1°+2°+\ldots+19°>180°$, что невозможно.

2) Есть угол с ненулевой дробной частью ε. Тогда у соседнего угла дробная часть равна $1-\varepsilon$, у следующего – снова ε и т.д. Поскольку 19 – нечётное число, то $\varepsilon=\frac{1}{2}$. Но тогда сумма углов, опирающихся на все стороны, не меньше чем $\left(\frac{1}{2}^{\circ}+1\frac{1}{2}^{\circ}+2\frac{1}{2}^{\circ}+\ldots+18\frac{1}{2}^{\circ}\right)=\frac{1}{2}(1°+3°+5°+\ldots+37°)=$ $=\frac{1}{2}\cdot 361°>180°$. Снова противоречие.

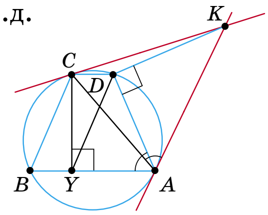
б) Ответ: да. Пусть вписанные углы, опирающиеся на последовательные стороны 20-угольника, равны $4\frac{1}{3}^{\circ}$, $4\frac{2}{3}^{\circ}$, $5\frac{1}{3}^{\circ}$, $5\frac{2}{3}^{\circ}$, …, $13\frac{1}{3}^{\circ}$, $13\frac{2}{3}^{\circ}$. Сумма этих чисел равна $2(4°+5°+\ldots+13°)+10°=$ $=180°$. Каждый угол 20-угольника равен 180° минус сумма двух соседних из указанного списка углов, а все эти суммы целые.

4. Ответ: для всех $N>1$. Мы приводим примеры для $N=4$ и $N=5$. Аналогично строятся примеры для всех чётных (нечётных) N: в первом столбце реализуются все суммы от 1 до $N-1$, на стыке первого и второго столбцов – от N до $2N-1$, во втором столбце – от $2N$ до $2N-2$ и т.д.

0	4	7	11
1	4	8	11
1	5	8	12
2	5	9	12

0	5	9	14	18
1	5	10	14	19
1	6	10	15	19
2	6	11	15	20
2	7	11	16	20

5. Проведём высоту CY. Треугольники ADY и AKC равнобедренные и подобны (угол KAC, как угол между касательной и хордой, равен углу DAY, опирающемуся на такую же дугу). Тогда подобны и треугольники ADK и AYC (аналогично, равны углы KAD и CAY, а $KA:AC=DA:AY$ в силу первого подобия). Следовательно, $\angle ADK=90°$.



6. Ответ: 15 очков. Если Петя возьмёт себе все черви, все тузы, короли и дамы, то Вася не сможет набрать очки на тузе, короле и даме червей, то есть наберёт не больше $36/2-3=15$ очков.

Переформулируем задачу. Рассмотрим доску 4×9. Петя закрашивает чёрным 18 клеток. Докажем, что Вася сможет выделить не менее 15 непересекающихся *хороших* пар: в каждой паре две клетки разного цвета, находящиеся в одной строке или одном столбце.

Пусть *вес* столбца – число чёрных клеток в нём. Сначала Вася разбивает каждый столбец веса 2 на две хорошие пары и вычёркивает его.

С точностью до симметрии будем считать, что столбцов веса 0 не больше, чем веса 4. Тогда для каждого столбца веса 0 Вася выберет парный столбец веса 4. Такие пары столбцов разбиваются на четвёрки хороших пар и вычёркиваются.

Поскольку чёрных и белых клеток поровну, столбцов веса 3 не больше, чем веса 1. Каждому столбцу веса 3 сопоставляем парный веса 1 и разбиваем на 4 хорошие пары, как на рисунках.

1	1
2	2
3	3
4	4

1	4
2	2
3	3
1	4

Итак, остались столбцы веса 4 и 1. Пока есть столбец веса 4, Вася сможет найти два столбца веса 1 и выделить из такой тройки столбцов хотя бы пять хороших пар клеток (см. рисунки).

1	1	4
2	2	
3	5	3
	5	4

1	1	
2	2	5
3	3	5
4		4

Когда же столбцы веса 4 закончатся, столбцов веса 1 тоже не останется. Таких троек столбцов будет не более 3, ведь всего столбцов 9. Значит, мы разобьём на хорошие пары все клетки, кроме не более чем $3\times 2=6$ клеток.

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем
заочном математическом конкурсе.

Высылайте решения задач IX тура, с которыми справитесь, не позднее 5 июня в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

IX ТУР

41. Перед игроком стоят в ряд 3 шкатулки, в одной из которых лежит приз. К шкатулкам прикреплены записки с утверждениями, как на рисунке справа.

Известно, что ровно одно из утверждений истинно. Какую шкатулку нужно открыть, чтобы получить приз?

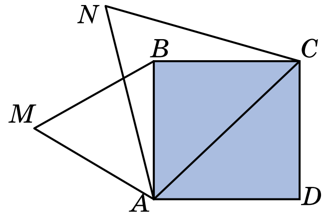
42. Толя Втулкин отметил на прямой три точки и заметил, что всевозможных отрезков с концами в этих точках оказалось 3, а всевозможных лучей с началами в этих точках – 6, в два раза больше.

«Интересно, – подумал Толя, – а можно ли отметить столько точек, чтобы получилось наоборот: число всевозможных лучей с началами в этих точках было бы в два раза меньше количества всевозможных отрезков с концами в этих точках?»

Ответьте на вопрос Толи.

Авторы: Михаил Евдокимов (41, 43), Сергей Дворянинов (42), Игорь Акулич и Максим Прасолов (44), Сергей Костин (45)

43. На диагонали и стороне единичного квадрата $ABCD$ построены правильные треугольники AMB и ANC так, как показано на рисунке. Чему равно расстояние MN?



44. Число 1210 обладает таким свойством: каждая его цифра, кроме последней, показывает, сколько раз в нём встречается следующая цифра. А именно: «12» означает, что в числе одна двойка, «21» – что в числе две единицы, «10» – что в числе один ноль. Существует ли число с таким же свойством, большее миллиарда?

45. Можно ли записать в клетках фигуры F натуральные числа так, чтобы сумма чисел в любом горизонтальном прямоугольнике 1×3, целиком лежащем внутри фигуры, равнялась 10, а сумма чисел в любом вертикальном прямоугольнике 3×1, целиком лежащем внутри фигуры, равнялась 11, если фигура F – это

а) квадрат 5×5;

б) квадрат 5×5, у которого удалили центральную клетку?

Художник Николай Крутиков

ОСТРИЁМ ВНИЗ

Большое число знаков дорожного движения имеют квадратную или треугольную форму. Как правило, они выглядят как квадрат или правильный треугольник, расположенный на одной из своих сторон. И только два знака повёрнуты вершиной вниз. Почему?

Автор Лев Емельянов

Художник Елена Цветаева

ISSN 2227-7986