№ 6 | июнь 2020

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ

КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№6
ИЮНЬ
2020

ПОЧТОВОЕ ЗАНЯТИЕ

ФИЗИЧЕСКИЙ ФЕЙЕРВЕРК

ИСПОДВЫПОДВЕРТА

Enter

www.kvantik.com

kvantik@mccme.ru

instagram.com/kvantik12

kvantik12.livejournal.com

facebook.com/kvantik12

vk.com/kvantik12

twitter.com/kvantik_journal

ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 6, июнь 2020 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор: С.А.Дориченко
Редакция: В.Г.Асташкина, Е.Н.Козакова, Е.А.Котко, Р.В.Крутовский, И.А.Маховая, Г.А.Мерзон, А.Ю.Перепечко, М.В.Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas
Вёрстка: Р.К.Шагеева, И.Х.Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях Почты России:
▪ Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)
▪ Объединённый каталог «Пресса России» (индексы **11346** и **11348**)
Онлайн-подписка
на сайте агентства «Роспечать» **press.rosp.ru**
на сайте агентства АРЗИ **www.akc.ru/itm/kvantik/**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84x108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 14.05.2020
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831)216-40-40
Заказ № 201088
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

EAC

СОДЕРЖАНИЕ

Виктор Клепцын

СлоВА на ленте

Окончание. Начало в № 5

Напомним, что Квантик, Женя и Мика изучают бесконечное слово Фибоначчи *ABAABABAABAAB*..., которое получается из буквы *A* чередой замен, когда каждая буква *A* заменяется на *AB*, а каждая буква *B* на *A*. Возникающие после замен слова *A*, *AB*, *ABA*, *ABAAB*,... продолжают друг друга и все являются начальными участками слова Фибоначчи.

Тут Мика посмотрел на выписанное начало слова Фибоначчи и задумался:

– Интересно: на вид кажется, что буквы *A* и *B* в нём «размешаны» очень равномерно, причём букв *A* больше. А во сколько раз?

– Мы уже знаем, что количества букв *A* и *B* в каждом очередном начальном слове будут последовательными числами Фибоначчи, – отреагировала Женя. – Поэтому их отношение – это отношение двух последовательных чисел Фибоначчи.

– А такие отношения становятся с ростом номера всё ближе к известному ещё древним грекам *золотому сечению* φ, – продолжил Квантик. – Не хотите попробовать угадать, чему оно должно быть равно?

– Пусть у нас есть какое-то слово, которое мы подаём на вход машине. Тогда в следующем слове букв *B* будет столько, сколько сейчас *A*, а букв *A* столько, сколько букв *A* и *B* вместе взятых. Если отношение почти не меняется, то должно быть такое правило: «букв *A* (примерно) во столько же раз больше, чем букв *B*, во сколько раз всех букв больше, чем букв *A*».

– Правильно; а ещё можно в таком отношении поделить отрезок – тогда *отношение большей части к меньшей будет таким же, как всего отрезка к большей части*; так золотое сечение и определяли древние греки. Кстати, в таком отношении диагональ правильного пятиугольника делит другую диагональ в точке их пересечения. (А ещё об этом можно почитать в прошлых номерах «Квантика»[1] и «Кванта»[2].)

Сделав паузу, Квантик продолжил:

– Ещё не очень сложно написать, какому уравнению золотое сечение φ удовлетворяет. Напишете?

– Если меньшую часть отрезка (или количество

[1] Александра Подгайц. Интересные факты о золотом сечении. «Квантик» №6, 2013.

[2] А. Спивак. Числа Фибоначчи. «Квант» №2, 2003.

букв B) принять за единицу, то бóльшая часть отрезка (количество букв A) будет равна φ, а весь отрезок (или всё слово) будет ещё в φ раз больше и будет равняться φ^2. Но отрезок есть сумма своих частей (а слово состоит из букв A и B) – и получается, что $\varphi^2 = \varphi + 1$. Только как отсюда φ найти?

– Всё верно, – подтвердил Квантик. – Это квадратное уравнение, и вы ещё не умеете его решать. Но если я скажу ответ, то его не очень сложно подставить и проверить. А ответом будет $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Кстати, это число *иррациональное*; нельзя ли это к чему-нибудь применить?

– Мы собирались после разобраться, почему слово Фибоначчи не периодичное. Может быть, сюда? – догадалась Женя. – Если бы слово Фибоначчи было периодичным, оно состояло бы из повторений своего периода. И тогда число израсходованных букв A и B становилось бы всё ближе к их отношению за период. И это было бы рациональное число. А корень из 5 – и золотое сечение – числа иррациональные, их нельзя записать как отношение двух целых чисел! Вот поэтому слово Фибоначчи и не может быть периодичным.

Мика присмотрелся к красно-синим треугольникам на рисунке 2 прошлого номера и начал их считать.

– Так, – сказал он, – в треугольнике, который мы получили за две замены, 3 синих треугольника и 5 красных. В том, что получили за три замены, – 8 синих и 13 красных. Это же опять числа Фибоначчи!

– И если это так, а это наверняка так, – подхватила Женя, – то красных треугольников в большом-большом треугольнике опять примерно в φ раз больше, чем синих. И поэтому то же рассуждение утверждает, что и мозаика на плоскости не может быть периодичной!

– Молодцы, вы абсолютно правы, – подтвердил Квантик. – Ещё можно было бы сказать, что не бывает мозаик, одновременно периодических и сохраняющихся при повороте на 1/10 оборота, но это уже другая история.

– Интересно, – опять задумался Мика. – Вот мы знаем, сколько в начальной части слова Фибоначчи букв A и B, если длина этого начала – число Фибоначчи. А сколько каких букв попадут в первые сто? Или

в первую тысячу? Ведь ни 100, ни 1000 не будут числами Фибоначчи.

– Давай посмотрим! – предложил Квантик. – Возьмём листочек в клеточку и для каждого начального участка отметим, сколько там букв *A* (их мы отложим по горизонтали), а сколько *B* (их мы отложим по вертикали). И ещё раскрасим точку с этими координатами тем же цветом, что и последняя буква участка.

Женя взялась за работу, и через какое-то время точки заняли свои места: у неё получилась картинка как на рисунке 4, слева.

– Ух ты, все точки попали в очень узкую полоску, – удивилась Женя. – То есть отношение количеств букв всегда очень-очень близко к золотому сечению!

– Именно так, – подтвердил Квантик.

– А ещё, – подхватил Мика, – кажется, в этой полосе все синие точки ближе к верхнему краю, а красные – к нижнему. Только это уже на глаз не очень надёжно проверять…

– И это правда, – поддержал его Квантик. – Давайте аккуратно спроецируем их все на перпендикуляр к оси этой полосы; смотрите, что получается!

Квантик добавил все проекции (на этот раз воспользовавшись компьютером, чтобы обеспечить нужную точность) – и оказалось, что проекции синих точек «заметают» один отрезок, а проекции красных – другой (рис. 4, справа).

– Забавно. А что будет, если брать другие правила замены? – поинтересовалась Женя.

– Вообще может получиться довольно много разного. Но самое красивое получается, если перестроить машину так, чтобы слова состояли уже из трёх букв, *A*, *B* и *C*, а машина обрабатывала бы их по правилам $A \to AB$, $B \to AC$, $C \to A$.

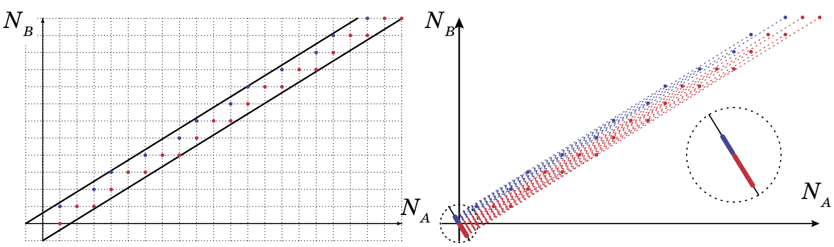


Рис. 4. Количество букв *A* и *B* среди первых *n* букв слова Фибоначчи

– Тогда, – продолжил Квантик, – начав с буквы *A* и применяя новую машину снова и снова, можно получить новое бесконечное слово. Его в шутку называют *словом Трибоначчи*, хотя математика Трибоначчи, конечно, никогда не существовало:

A
AB
ABAC
ABACABA
ABACABAABAC
ABACABAABACABABACABAABACABAC
....

– Интересно! – отреагировал Мика. – А тут в каком соотношении разделятся используемые буквы?

– Тут тоже отношения количеств букв *A* к *B* и *B* к *C* становятся всё ближе и ближе к некоторому числу $x = 1{,}839...$, которое уже задаётся *кубическим* уравнением $x^3 = x^2 + x + 1$. А если отложить количества этих букв по трём осям, то получится красивая пространственная «змейка», ползущая в одном конкретном направлении. И, как и раньше, от этого направления она не сильно уклоняется.

Квантик нажал на несколько кнопок – и на экране появилась картинка как на рисунке 5, слева.

– Но самое интересное будет, если раскрашенные в три цвета (по последней букве слова) точки спроецировать на правильно выбранную плоскость.

Тут Квантик нажал ещё несколько кнопок, и на экране возникла проекция: сначала она состояла из отдельных точек, а потом их стало настолько много, что они слились в фигуры (рис. 5, в центре и справа). А Квантик продолжил объяснять:

– Если для слова Фибоначчи мы видели два отрезка, то тут вся проекция разрезается на три непересе-

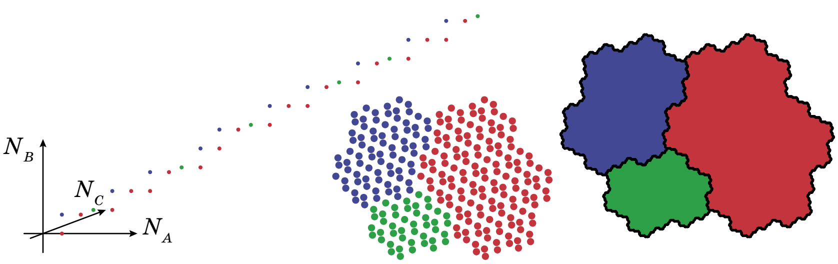


Рис. 5. Количество букв *A*, *B* и *C* среди первых *n* букв слова Трибоначчи и появление фрактала Рози

кающиеся части. И оказывается, все они, и фигура целиком, и каждая из частей, *подобны* друг другу, причём с поворотом! А площади у частей относятся именно как $1:x:x^2$. Эта замечательная фигура называется *фракталом Рози́*.

Кстати, бо́льшую из частей можно опять подразбить на три, подобные ей. А потом подразбить и бо́льшие из имеющихся частей, и повторить это несколько раз. Если потом увеличить самую большую из оставшихся частей до исходного размера, получается разбиение всё большей и большей области на плоскости – а в пределе и (непериодичное!) разбиение всей плоскости. Кстати, фрактал Рози возникает и в совсем современных математических статьях (рис. 6).

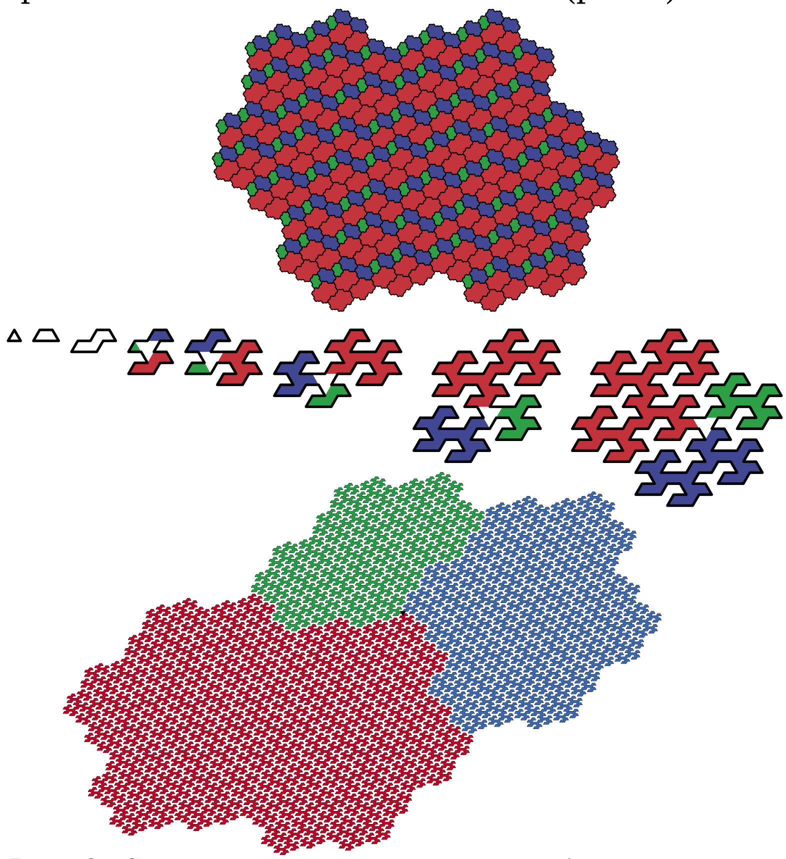


Рис. 6. Сверху – квазипериодичное разбиение плоскости, снизу – появление фрактала Рози в статье W. P. Hooper, B. Weiss «Rel leaves of the Arnoux–Yoccoz surfaces» (Selecta Mathematica, 2018)

P.S. Автор благодарит О. Ромаскевич, Г. Мерзона и А. П. Веселова, без них этой статьи бы не было. Интересные материалы о «хорошо перемешанных» последовательностях букв, подстановочных словах, фрактале Рози см. по ссылке **kvan.tk/fib-lit**

Художник Мария Усеинова

Почтовое занятие

Игорь Акулич

– Сегодняшнее занятие математического кружка назовём *почтовым*. Конечно, можно было бы придумать что-нибудь более торжественное, например «Эйлерово» или «Кэрроллово», но дело не в названии. Для начала посмотрите на эти две картинки (рис. 1).

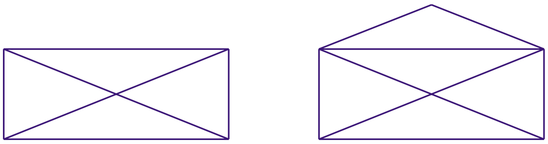


Рис. 1

Они имеют вполне почтовые имена – «закрытый конверт» (слева) и «открытый конверт» (справа). Сумеете ли вы нарисовать каждую из этих фигур, не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды одну и ту же линию? Задача очень известная...

– Да, нам её задавали! Закрытый конверт изобразить нельзя, а открытый – можно.

– Правильно. Причём при рисовании открытого конверта начинать надо непременно от одного из нижних углов, а заканчивать – в другом нижнем углу, иначе вы обречены на неудачу. А закрытый конверт откуда ни начинай рисовать – ничего не выйдет.

– А почему?

– Сейчас поговорим об этом. Началось всё с легендарной истории, которую можно прочесть чуть ли не в каждой книге по истории математики. Шёл XVIII век. Великий учёный Леонард Эйлер, проживавший тогда в Кёнигсберге, задался вопросом: можно ли обойти все семь имевшихся в нём мостов (соединявших острова в дельте реки), пройдя по каждому только один раз? Эйлер поступил очень остроумно: «стянул» острова, соединявшие мосты, в точки, а сами мосты «растянул» в линии (которые, кстати, не обязаны быть прямолинейными!). И получилась вот такая фигура (рис. 2), задача же свелась к тому, чтобы выяснить, можно ли её нарисовать, соблюдая те же требования (будем называть их «эйлеровыми»), что и для наших конвертов.

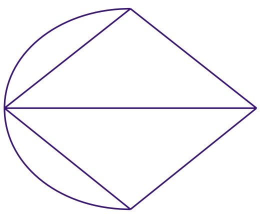


Рис. 2

Эйлер доказал, что *нельзя*, но самое главное – разработал простые правила, позволяющие по внешнему виду любой подобной фигуры определить, можно её нарисовать или нет. Во-первых, фигура, которую можно изобразить, должна быть *связной*, то есть не состоящей из отдельных кусков (это очевидно). Далее необходимо рассмотреть так называемые *узлы* – точки, в которых сходятся несколько линий или же от которых отходит ровно одна линия («свободный конец»). Например, у закрытого конверта пять узлов – четыре угла и центр, а у открытого... вообще-то тоже пять.

– Как это пять? А верхний угол?

– Ну, формально можно считать его узлом, в котором сходятся *две* линии. Но тогда с тем же успехом можно считать узлом и вообще *любую* точку на *любой* линии. Поэтому принято точки на линиях узлами не считать, то есть не рассматривать узлы, к которым подходят две линии. Впрочем, это не имеет значения, поскольку итоговый ответ от наличия таких узлов не зависит.

– А от чего он зависит?

– Сейчас скажу. Разделим узлы на два типа: *чётные* и *нечётные* – в зависимости от того, сколько линий сходится в узле. Если одна, три, пять и т.д. – узел нечётный, а если четыре, шесть, восемь... – то чётный.

Пусть мы нарисовали какую-либо фигуру по указанным правилам. Рассмотрим любой *промежуточный* узел, то есть узел, где маршрут *не* начинается и *не* заканчивается. При рисовании карандаш сколько-то раз «входит» в этот узел и столько же раз «выходит» из него. А значит, *промежуточный* узел – непременно *чётный*! Поэтому если у фигуры *больше двух* нечётных узлов, её изобразить нельзя – ведь не более двух из них могут быть крайними, и обязательно найдётся промежуточный нечётный узел, что недопустимо.

Несколько сложнее доказать, что если у связной фигуры нечётных узлов ровно два или вовсе нет, то фигуру нарисовать *можно* (попробуйте это сделать!). При этом если нечётных узлов нет, то начинать рисовать можно с любой точки, и закончится процесс в той же самой точке, а если нечётных узлов два, то начинать нужно непременно с одного из них (а закончится путь в другом).

– А если нечётный узел *один*?

– Я ждал этого вопроса. Кто скажет, какова судьба фигуры, содержащей *ровно один* нечётный узел?

– Пусть он сначала покажет такую фигуру!

– Очень точное замечание. Потому что таких фигур *не бывает*. Кто может доказать?

– Я! Допустим, что фигура с одним нечётным узлом всё-таки существует. Подсчитаем для каждого узла количество отходящих от него линий и сложим все эти числа. Получится сумма одного нечётного числа и нескольких чётных. Ясно, что эта сумма будет *нечётной*. Но поскольку каждая линия соединяет два узла, эта же сумма равна *удвоенному* количеству линий и обязана быть *чётной*. Противоречие!

– Верно. Итак, фигур с единственным нечётным узлом быть не может, как, впрочем, и фигур с любым *нечётным количеством* нечётных узлов.

Основываясь на результатах Эйлера, мы видим, что закрытый конверт имеет *четыре* нечётных узла (в углах), вследствие чего его изобразить невозможно, а открытый – только два, так что его нарисовать удастся, однако начать придётся с одного из этих узлов. В «мостовой» же схеме Кёнигсберга все 4 узла – нечётные, то есть ответ для неё отрицательный.

А теперь перенесёмся в XIX век – следующий после Эйлера – когда лучший математик среди писателей и лучший писатель среди математиков, несравненный и загадочный Льюис Кэрролл предложил задачу: нарисовать по правилам Эйлера фигуру на рисунке 3.

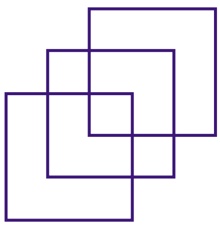


Рис. 3

Вооруженные нашими знаниями, мы без труда определим, что нарисовать такую фигуру *можно*, но Кэрролл кое-что усложнил – дополнительно потребовал, чтобы в процессе рисования *никакие линии не пересекались* (кстати, эта задача встречалась и в «Квантике»). Его собственное решение весьма остроумно: он закрасил некоторые части, на которые делят плоскость проведённые линии, после чего чуть-

чуть «срезал углы» (рис. 4). Осталось просто обвести контур закрашенной фигуры – и готово!

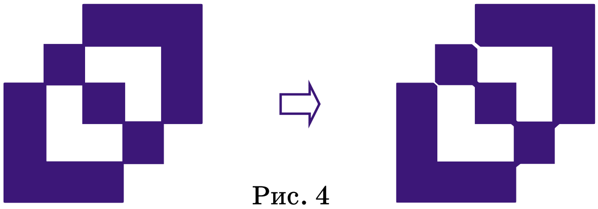


Рис. 4

И возникает естественный вопрос: каким условиям должна удовлетворять фигура, чтобы её можно было нарисовать «по правилам Кэрролла» – то есть без пересечения линий? Понятно, что требования Эйлера должны быть соблюдены. Но, может быть, этого мало и есть ещё ограничения? Подумайте.

< ... *Пауза* ...>

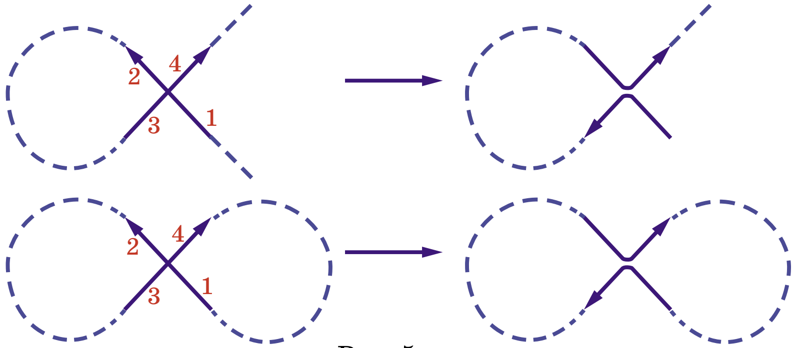
– Похоже, ничего в голову не приходит. Тогда возьмите «из головы» несколько фигур, которые можно нарисовать «по Эйлеру», и попытайтесь сделать для них то же «по Кэрроллу». Получится или нет? Начните хотя бы... с открытого конверта! Ну как?

– Есть! Получилось!

– И не удивительно. Оказывается, справедлива следующая теорема (кстати, совсем не очевидная): если фигуру можно нарисовать по правилам Эйлера, то её же *всегда можно* нарисовать и по правилам Кэрролла. Какие будут мысли насчёт доказательства?

– А если использовать раскраску, как Кэрролл?

– Идея, конечно, заманчивая. Но мы попробуем рассуждать по-другому. Итак, пусть у нас имеется фигура из линий и узлов, которую *можно* нарисовать «по Эйлеру». Понятно, что при её рисовании возможные пересечения линий могут быть только в узлах – и не просто в узлах, а только если сходящихся линий в узле *не меньше четырёх*. Возьмём любое такое пересечение. Пронумеруем линии, образующие пересечение, в том порядке, в котором мы их проходим при рисовании (рис. 5, *а*). Будем рисовать по-другому: с первой линии пойдём на третью, затем обходим участок старого маршрута карандаша в обратном направлении, приходим во вторую линию и сворачиваем на четвёртую, далее как раньше (рис. 5, *б*). Как изменилось количество пересечений?



а) *б*)

Рис. 5

– Уменьшилось на один!

– Не торопитесь. Да, одно пересечение мы устранили. Но в узле может сходиться больше четырёх линий, и тогда карандаш ещё сколько-то раз проходит через узел. Если, например, он подошёл к узлу из угла между линиями 1 и 4 и вышел в угол между линиями 2 и 3, как на рисунке 6 обозначено красным, то число пересечений уменьшится ещё на два.

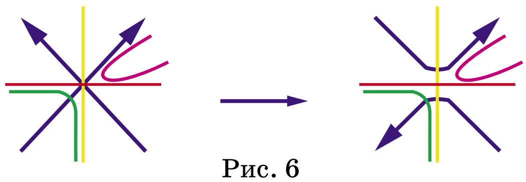


Рис. 6

– А если карандаш по-другому прошёл через узел?

– В других случаях все пересечения сохранятся, а новых не добавится. Случаев мало, на рисунке 6 указаны все, не считая аналогичных. В результате число пересечений уменьшилось на 1 и ещё на 2 для каждого красного прохода карандаша, поэтому, продолжив изменять маршрут, мы устраним все пересечения.

Итак, если фигуру можно нарисовать «по Эйлеру», то и по «Кэрроллу» тоже можно! Вижу, всех радует это открытие, кроме... вон того молодого человека с унылым видом. В чём ваше горе?

– Я нашёл фигуру *ровно с одним* нечётным узлом!

– Очень любопытно. Покажите.

– Показать могу только кусочек, и могу ещё дать общее описание. Вот посмотрите.

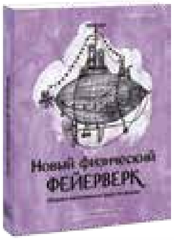
– Что это... А! Понятно! Можете успокоиться, противоречия нет: тут законы чётности неприменимы. Так что всего хорошего, занятие закончено.

Вопрос к читателям. Какую (хоть примерно) фигуру мог найти «строптивый» кружковец?

Художник Алексей Вайнер

ЧТО ПОЧИТАТЬ?

НОВЫЙ ФИЗИЧЕСКИЙ ФЕЙЕРВЕРК



В издательстве «Манн, Иванов и Фербер» в 2019 году вышло переиздание легендарного задачника Джирла Уокера «Новый физический фейерверк» с новыми задачами и подробными ответами. В нём неформальным языком рассказывается о физических законах и явлениях, с которыми мы сталкиваемся в повседневной жизни.

Предлагаем четыре задачи из раздела «Оптика» этой замечательной книги. Ответы – в следующем номере.

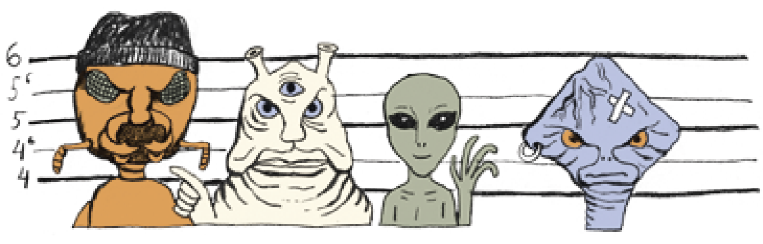
БЕЛАЯ МГЛА И СНЕЖНАЯ СЛЕПОТА

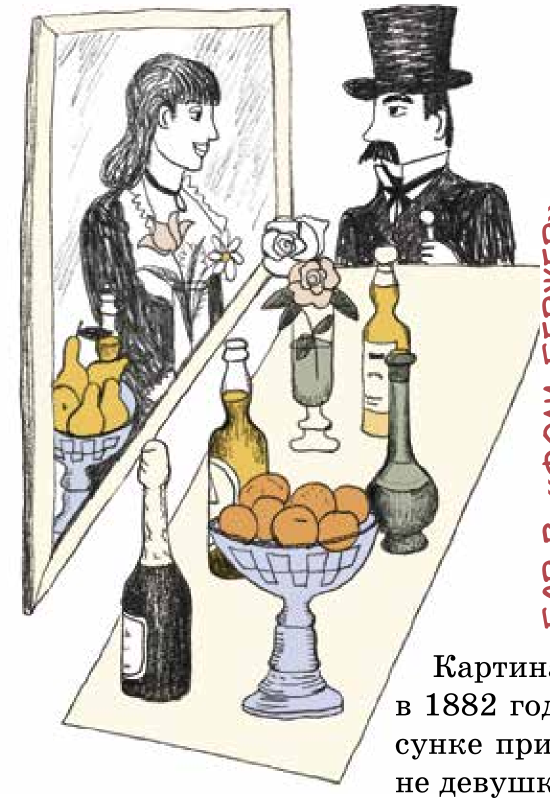
При каких условиях на снежное поле опускается *белая мгла*, при которой человек перестаёт ориентироваться и ничего не видит? Почему при ярком свете пропадает тень? Иногда белая мгла приводит к повреждению глаз, иногда даже к неизлечимой слепоте (так называемой *снежной слепоте*). Опасаться белой мглы надо скорее в солнечный день или в пасмурный?

ОДНОСТОРОННЕЕ ЗЕРКАЛО

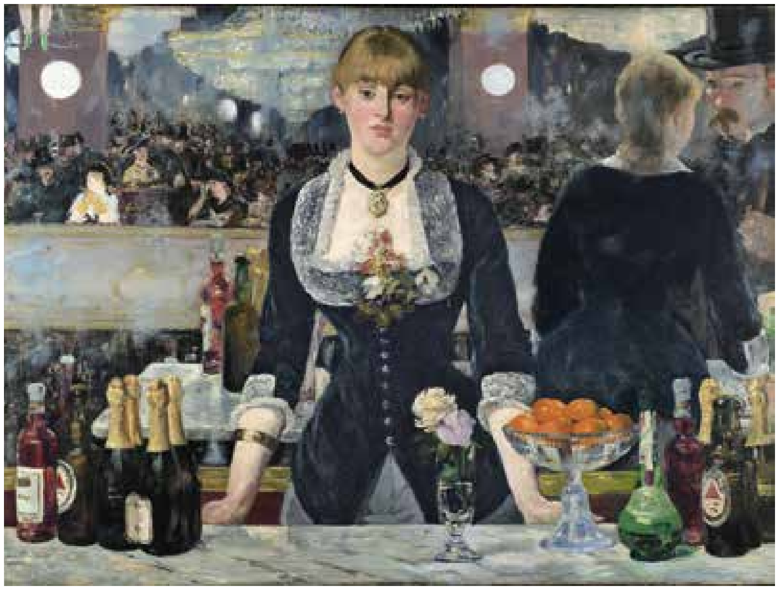
Как зеркало может пропускать свет только в одном направлении?

(Другими словами, как может быть устроено окно, которое с одной стороны работает как обычное окно, а с другой – как зеркало: в нём отражаются предметы, а что за ним – не видно? – *Редакция «Квантика»*.)





БАР В «ФОЛИ-БЕРЖЕР»



Картина Эдуарда Мане «Бар в «Фоли-Бержер», написанная в 1882 году, неизменно притягивает к себе зрителей. На рисунке приведена небольшая репродукция. На переднем плане девушка-барменша за стойкой, её глаза выдают усталость. Сзади большое зеркало. В нём отражаются сама девушка, посетитель, батарея бутылок на стойке и заполнившая бар публика. Мане несколько деформировал реальность, что придало картине дополнительное очарование. Взглянув на неё, испытываешь некий суеверный страх и не сразу сообразишь, что «неправильно». Вы видите «ошибки» художника?

Художник Артём Костюкевич

НЕДОЛИТОЕ ПИВО

Почему у пивных кружек часто бывают толстые стенки и толстое дно? Кружка может и сужаться книзу. Возможно, это сделано для того, чтобы кружка казалась увесистой, но как это создаёт иллюзию, что в неё налито пива больше, чем на самом деле?

Ольга Кузнецова

Исподвыподверта

Всё на свете движется, вращается, вьётся и крутится в постоянном устремлении – от мыслей в голове до ног, выписывающих кренделя, особенно если есть где развернуться. Кажется, в XVIII веке авторы особенно замечали, какая в мире царит *круговерть*, *коловратность*, сколько *превращений* происходит.

Птицы *вьют* гнёзда, пчёлы *вьются* в танце, по земле ползут *вьюнки*, а ещё от *вить* наверняка образованы и *вьюга*, и *вихрь*, недаром у последнего в древнерусском языке был синоним *заверт*. Древнерусское (заимствованное из тюркских языков) слово *юк* «груз, поклажа» тоже сблизилось с *вить* и превратилось во *вьюк* (отсюда и *вьючное животное*). Мир природы полон *уховёртками* и *коловратками*, *вертишейками* и *винторогими* козлами.

Нередко «вращающимися» словами мы описываем хулиганство и непорядок. Окружающим бывает сложно терпеть наши *выкрутасы*, а *вертлявым* ученикам чаще делают замечания. *Увёртливым* называют хитреца, *взвинченным* – взволнованного человека, который с трудом управляет собой.

Кручёный удар или выстрел, наоборот, бывает точнее. С этим связано и название *винтовки* – винтового ружья (например, для биатлона). У неё в стволе есть спиралевидные нарезы, благодаря которым выпущенный снаряд юлой вращается в полёте.

Пышно и старательно оформленные мысли, тексты в древности называли *словесным извитием* и *плетением*. Грань между высокой оценкой этой изысканности и насмешкой над избытком закорючек тут очень тонкая. Позже похожим образом говорили о *кудрявом* почерке и *кудреватом* стиле – смеются над вами или хвалят такой характеристикой?

Кора полушарий головного мозга состоит из *извилин*. Хотя на самом деле это лишь биологическая форма, мы связываем с шевелением извилин напряжённые размышления. Кроме вращения колёсиков и шестерёнок, которым

тоже в переносном смысле описывают работу мысли, «вьющимися» словами называют и то, что происходит на голове. Одни люди пользуются *завивкой*, другие кудрявы от рождения. *Кудри* (устаревшее *кудерь*, *кудерцы*), возможно, связаны со словом *кудель* – волокно для прядения, а *вихор* – это, в сущности, тот же *вихрь*. В древнерусских травниках (сборниках с описанием растений) говорится о *кудерявых* и *кудреватых* деревьях: авторы подразумевают их пышный лиственный покров.

Новые слова постоянно входят в любой живой язык. «Вертящийся» корень существует в русском давно, но остаётся продуктивным: слова *отвёртка*, *вертолёт*, как мы понимаем, сравнительно молоды. А *винт* и прочие «завинчивающиеся» объекты – заимствования, они попали к нам каких-нибудь неполных 400 лет назад. В XVIII в. существовали технические термины *завинтованный* и *винтоватый*, которые сегодня кажутся каламбурами – шутливыми переделками слов *забинтованный* и *виноватый*. Зато вполне уверенно чувствуют себя в современном русском слова с иностранным «вращательным» и «катящимся» корнем *ролл-*: *роликовые* коньки, разнообразные съедобные *роллы* и даже *рулеты*, *рок-н-ролл* и *мотороллер*, пришедшие из разных языков.

А вот несколько задач для самых изворотливых умов:

1. Отгадайте, какой нужный школьнику инструмент называли в XVII веке словом *кружало*? Его современное название имеет близкий по смыслу корень, но латинского происхождения.

2. Составьте словосочетание о человеке, который готовил мясо «по-старинному» – так, чтобы при написании два входящих в него слова не отличались друг от друга.

3. Попробуйте подобрать два слова с одинаковыми приставками, суффиксами, окончаниями и синонимичными корнями. В одном из них скорее ожидаешь увидеть какой-нибудь текст, в другом – какой-нибудь текстиль.

Художник Ольга Демидова

Аркадий Скопенков

ПРОСТРАНСТВЕННО

Хотите потренировать своё пространственное воображение? Оно пригодится в самых разных областях науки и техники – математике, программировании, физике... Вот несколько задач, решить которые можно без предварительных знаний по стереометрии.

Ответы – в следующем номере

1. Нетрудно разрезать куб плоскостью так, чтобы срез имел форму треугольника или квадрата (см. рисунки). Нарисуйте, как разрезать куб плоскостью, чтобы срез имел форму правильного шестиугольника.

2. Куб $3 \times 3 \times 3$ составлен из единичных кубиков. Нарисуйте

а) «ежа», составленного из центрального кубика и кубиков, имеющих с центральным общую грань;

б) то, что получится, если из куба удалить угловые кубики;

в) то, что получится, если из куба удалить «ежа».

Е ВООБРАЖЕНИЕ

3. Можно ли заполнить всё пространство непересекающимися «ежами» из предыдущей задачи?

4. Для каждой грани тетраэдра проведём две параллельные ей плоскости так, чтобы они делили каждое не лежащее в этой грани ребро на три равные части. На сколько частей разбивают тетраэдр проведённые плоскости?

Художник Мария Усеинова

Константин Кохась

ЧЬЯ ПЛОЩАДЬ БОЛЬШЕ

Бусенька и её друзья – мышь Огрыза, уж Ушася и таракан Кузька – праздновали день рождения дятла Спятла. Имениннику подарили торт с шоколадными слониками. Праздник был в самом разгаре, как вдруг...

– Спасайся, кто может! – закричал дятел Спятел и выпрыгнул в окно.

Гости бросились врассыпную. Огрыза нырнула в подвал, Кузька исчез за шкафом, а Бусенька, схватив Ушасю за что попалось (а попался, естественно, хвост), запрыгнула в сейф дятла Спятла, выкинув из него статуэтку Хрустального Питона. Комната начала заполняться блестящими кольцами питона Уккха.

– Где же именинникххх? – поинтересовался Уккх. – И куда пропали госссссти? – продолжал он, осматриваясь, постоянно высовывая длинный раздвоенный язык – принюхиваясь. – А, вот вы куда залезли, – сказал он, заметив сейф.

– Вылезайте, – строго сказал Уккх и сквозь замочную скважину посмотрел на Ушасю так, что тому захотелось всё бросить и запрыгать, поползти, протиснуться, полететь и броситься прямо Уккху в пасть. К счастью, Бусенька крепко держала дверь.

– Не вылезем! – сказала она. – Дверь закрыта, а площадь сечения замочной скважины – 3 см^2 – слишком мала, чтобы мы через неё пролезли.

Уккх проглотил огромный кусок торта («Мммм... какие вкусные слоники!»), отправил в пасть миску витаминного салата из огурцов с остроухом и задумался. Взгляд его немного подобрел.

– У замочной скважины сложная форма, – наконец сказал он. – Как ты подсчитала её площадь?

– Съешь вон ту банку варенья, – сказала Бусенька, не отпуская дверцу, – а после этого поговорим!

Уккх схватил кончиком хвоста банку варенья и послушно проглотил её содержимое. Поморщившись и поискав взглядом по сторонам, он кинул в пасть нераспечатанную упаковку печенья. Бусенька выждала 20 секунд и приоткрыла дверцу сейфа.

– Печёные яблоки явно удались! – посоветовала она, показав на блюдо с яблоками. Уккх тут же надкусил одно яблоко и одобрительно кивнул.

– Как я подсчитала площадь? Да как обычно. Что такое площадь фигуры? Это такое число. Во-первых, оно неотрицательно. Во-вторых, площадь совсем простой фигуры, например прямоугольника, равна произведению длин его сторон. В-третьих, если маленькая фигура содержится в большой, то площадь маленькой фигуры не может быть больше площади большой фигуры. И наконец, в-четвёртых, если фигуру разрезать по прямой на две части, площадь фигуры будет равна сумме площадей частей.

– А если резать не по прямой? – с подозрением спросил Ушася.

– Всё зависит от того, как ты понимаешь слово «резать».

– Какое непростое определение, – сказал Уккх, – и как же найти площадь сложной фигуры, такой как сечение замочной скважины?

– И вообще, у любой ли фигуры существует площадь? – усомнился Ушася.

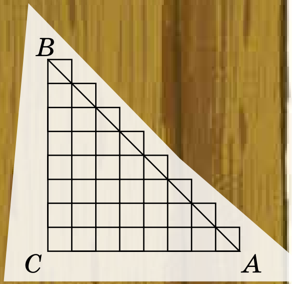
– У любой! – стала объяснять Бусенька. – Накроем несколькими квадратами, причём будем использовать только квадраты с вертикальными и горизонтальными сторонами. Подсчитаем сумму их площадей. Потом покроем фигуру квадратиками помельче, чтобы они лучше прилегали к её границам. Снова подсчитаем сумму площадей. Каждое такое вычисление даёт нам слегка завышенное значение площади фигуры. Чем больше таких экспериментов мы проведём, тем точнее нам будет известна площадь фигуры.

– Неужели этот громоздкий рецепт действительно позволяет вычислить площадь хоть какой-нибудь фигуры? – спросил Уккх.

– Конечно, позволяет! Вот, например, разрежем единичный квадрат по диагонали на два прямоугольных треугольника. Найдите по этому рецепту площадь одного такого треугольника.

– Ну… если это не очень сложно…

– Не сложно, – воодушевился Ушася. – Нарисуем наш треугольник ABC на листе в клетку. Пусть длина стороны клетки равна $\frac{1}{n}$. Тогда вдоль стороны помещается ряд из n клеток (на рисунке оказалось $n = 8$). А весь треугольник покрывается ступенчатой фигу-



рой из клеточек: в верхнем ряду одна клетка, во втором ряду – две, в третьем – три и т.д., вплоть до последнего ряда, где n клеток. Всего, значит, имеется

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

клеток. Площадь одной клеточки равна $\frac{1}{n^2}$, значит, суммарная площадь этой клетчатой фигуры равна

$$\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}.$$

Чем больше мы возьмём число n, тем меньше будут сторона клеточки $\frac{1}{n}$ и слагаемое $\frac{1}{2n}$ в подсчитанной нами сумме и тем ближе будет эта величина к $\frac{1}{2}$. Поэтому площадь этого треугольника равна $\frac{1}{2}$.

– И для замочной скважины вычисления аналогичны, – подтвердила Бусенька. – Только там формулы похитрее. Но у меня геометрический сопроцессор, мне такие штуки легко даются.

– Всё ясно, – сказал Уккх. – А правильно ли я понял, что необязательно брать квадратики одинакового размера? Некоторые могут быть совсем крупными, а некоторые совсем маленькими.

– Зачем так усложнять? – возразил Ушася. – Сначала берёшь крупную сетку, потом помельче, потом – совсем миллиметровку… Главное, каждый раз учитывать только те квадратики, которые задевают фигуру. Очень практичный способ получается!

– Нет-нет, – не согласилась Бусенька, – клеточки могут быть разными, причём не только квадратными, но и прямоугольными. Они могут пересекаться, и вообще, их может быть бесконечно много!

– Как это бесконечно много? Мы же считаем площадь ограниченной фигуры!

– Ну да, фигура ограниченная, скажем, помещается на одном листе бумаги, но, накрывая фигуру, мы можем брать квадратики всё меньшего и меньшего размера – так, что в результате их общее количество будет бесконечным!

– Я понял, – сказал Уккх. – Например, предыдущий треугольник можно накрыть такими вот уменьшающимися клеточками. Тут вообще все клеточки умещаются внутри фигуры. Правда… если мы хотим, чтобы треугольник содержался в объединении этих клеточек, лучше бы взять его без стороны AB. Зато клеточек получается бесконечно много!

– Только не надо думать, что прямоугольники должны умещаться внутри фигуры, – предупредила Бусенька, – они могут вылезать за её пределы – так же, как это было в вычислении Ушаси.

– Мой подход к вычислению площади значительно проще и удобнее, чем у Уккха! – заявил Ушася.

– А мой – более гибкий! – возразил Уккх.

– Не спорьте, – вмешалась Бусенька, – давайте я попрошу вас вычислить площадь какой-нибудь хитрой фигуры, у кого лучше получится – тот и прав!

– Разве таким способом принято решать математические споры? – усомнился Ушася.

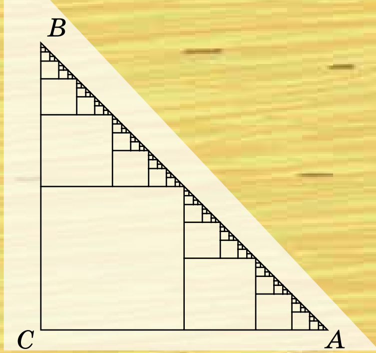
– Давай нам свою хитрую фигуру, – энергично потребовал Уккх и облизнулся.

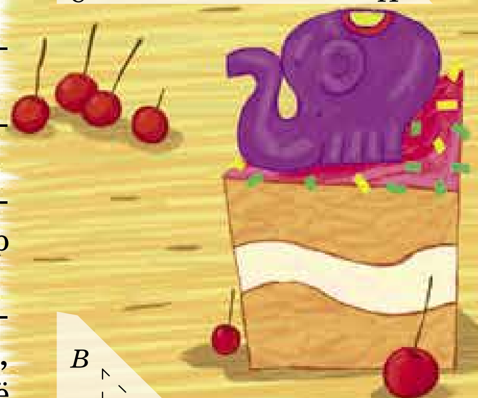
– Хорошо. Но сначала скажите-ка мне для разминки, чему равна площадь одной точки, например точки A из нашего предыдущего треугольника?

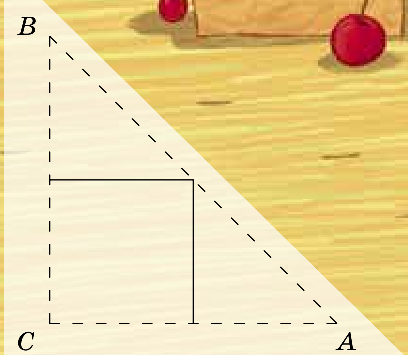
– Нулю, – тут же сказал Уккх, – мы можем накрыть точку квадратиком со стороной 1, значит, площадь точки меньше 1. Но мы можем накрыть её и квадратиком со стороной $\frac{1}{10}$, тогда получится, что площадь точки меньше $\frac{1}{100}$. И точно так же окажется, что площадь точки меньше любого другого положительного числа. Значит, площадь равна нулю.

– Ладно, вот тогда вам хитрая фигура! Возьмём всё тот же треугольник ABC. И нарисуем внутри него линии первой сетки – той, где размер клеточек был равен $\frac{1}{2}$. Потом нарисуем внутри него линии более мелкой сетки – со стороной $\frac{1}{3}$. Кстати, а чему равна площадь «лесенки», составленной из этих линий?

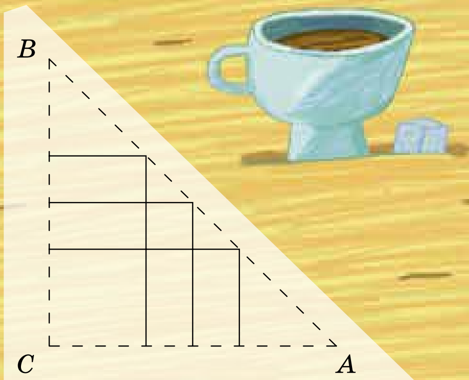
– Тоже нулю, – выпалил Ушася. – На очень мелкой миллиметровке каждый отрезок можно накрыть прямоугольником, состоящим из одного ряда клеток. Ширина такого прямоугольника равна стороне одной клетки, поэтому его площадь очень мала. Всего у нас будет шес-с-с-ть таких прямоугольников, их суммарная площадь тоже очень мала. Какое положительное число ни возьми, эту лесенку можно накрыть прямоугольниками, у которых сумма площадей будет мень-







Нарисуем сетку со стороной $\frac{1}{2}$



Добавим сетку со стороной $\frac{1}{3}$. Получилась «лесенка» ше этого числа. Значит, площадь лесенки равна нулю.

– Верно! – согласилась Бусенька. – Но я ещё не дорисовала хитрую фигуру. Мы уже нарисовали линии сетки со сторонами $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$. Теперь нарисуем линии следующей сетки – со стороной $\frac{1}{4}$, потом со стороной $\frac{1}{5}$ – и так далее (до бесконечности). Моя хитрая фигура – это объединение всех-всех этих линий. Спрашивается, чему равна её площадь?

– Одной второй, – немного подумав, сказал Ушася.

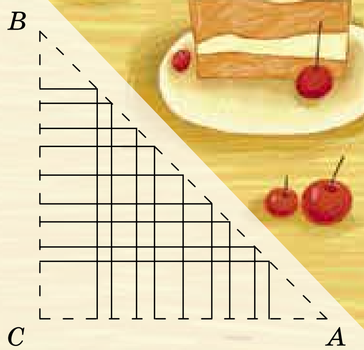
– Нулю, – почти сразу же с ним произнес Уккх.

– А как вы посчитали?

– Возьмём совершенно любую квадратную сетку, – стал объяснять Ушася, – к примеру, со стороной квадрата $\frac{1}{100}$. Посмотрим только на квадратики, накрывающие треугольник. Мы должны выбрать из них набор квадратиков, накрывающих хитрую фигуру. Но фигура действительно ужасно хитрая: она ведь содержит все линии более мелкой сетки со стороной $\frac{1}{200}$, а они рассекают каждый квадратик сетки со стороной $\frac{1}{100}$. Получается, что для того, чтобы накрыть фигуру, нам придётся взять все квадратики, накрывающие треугольник *ABC*! Значит, любое измерение площади фигуры «по клеточкам» даёт такой же результат, как для треугольника *ABC*. Поэтому площадь фигуры равна площади треугольника!

– Хм, вроде всё правильно. А ты как посчитал? – спросила Бусенька Уккха.

– Площадь равна нулю, поскольку я могу накрыть эту фигуру набором прямоугольников сколь угодно маленькой площади, – уверенно сказал Уккх. – Вот, например, как построить набор прямоугольников, чтобы их суммарная площадь была равна $\frac{1}{1000}$? Начнём рисовать первую сетку (со стороной $\frac{1}{2}$). Нарисуем первый отрезок и сразу накроем его каким-нибудь прямоугольником площади $\frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{2}$. Нарисуем второй отрезок и накроем его каким-нибудь прямоугольником площади $\frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{4}$. Потом нарисуем третий отрезок. Ой, нет, в первой сетке больше нет отрезков, значит, переходим к рисованию отрезков второй сетки.



Потом добавим сетки со стороной $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{5}$ ...

Рисуем отрезок второй сетки и накрываем его прямоугольником площади $\frac{1}{1000}\cdot\frac{1}{8}$. И так далее: рисуя очередной отрезок очередной сетки, тут же накрываем его прямоугольником, площадь которого в два раза меньше предыдущего прямоугольника. Получится бесконечно много прямоугольников, но их площадь конечна и очень мала. Она равна

$$\frac{1}{1000}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots\right)=\frac{1}{1000}.$$

Итак, я накрыл фигуру прямоугольниками, суммарная площадь которых равна $\frac{1}{1000}$, а мог бы вместо $\frac{1}{1000}$ взять любое другое положительное число. Значит, площадь фигуры равна нулю.

– Выглядит убедительно, – согласилась Бусенька.

– Моя площадь больше – значит, я выиграл! – закричал Ушася.

– А тогда я тебя съем! – злобно ответил Уккх.

Но Бусенька была начеку. Схватив Ушасю за что попало (да-да, опять за хвост, вы правильно догадались), она прыгнула в сейф. Уккх посмотрел на захлопнувшуюся дверцу и на Хрустального Питона, валявшегося на полу, и грустно облизнулся.

– Здорово я его обыграл? – спросил Ушася Бусеньку, когда они надежно заперлись в сейфе.

– Здорово, – сказала Бусенька. – Но ты заметил, что площадь у тебя странная? Площадь хитрой фигуры равна $\frac{1}{2}$, и точно так же проверяется, что площадь остальной части треугольника тоже равна $\frac{1}{2}$. Получается, что мы разбили треугольник площади $\frac{1}{2}$ на две части, и у обеих частей площадь равна $\frac{1}{2}$!

– Действительно, странно... Хотя... Это не противоречит твоему определению площади! Ты же говорила, что площадь фигуры равна сумме площадей кусочков, когда мы режем фигуру по прямой. А здесь нет ничего похожего на разрезание по прямой. Твою хитрую фигуру вообще невозможно вырезать из треугольника! А что, у Уккха площадь не странная?

– Тоже странная. Но в этом можно убедиться с помощью уж совсем хитрых фигур.

– Ну, значит, я действительно его победил!

Художник Инга Коржнева

УТКОНОС, ПАУК-МУРАВЬЕД, АКУЛА

Сергей Федин

Две из этих историй известны, а одна полностью придумана. Надо догадаться, какая именно. Вычислить её можно по какой-нибудь нелепости, несуразности, спрятанной в тексте. Попробуйте!

УТКОНОС

Одно из самых странных животных на земле – утконос. Хорошо известно, что он живёт в Австралии, откладывает яйца, имеет ядовитые шпоры и т.д. Гораздо менее известно, что иногда, пусть и достаточно редко, утконос ведёт себя подобно кукушке, подбрасывая свои яйца... страусу. Ничего не подозревающий птичий верзила вскармливает вылупившегося утконосёнка наравне со своими детёнышами. Примерно через полгода после своего рождения «гадкий страусёнок», достаточно окрепнув, возвращается к своей маме-утконосихе.

Остаётся только радоваться тому, что страус в отместку не подбрасывает свои огромные яйца утконосу.

ПАУК-МУРАВЬЕД

На какие только ухищрения не пускаются хищники всех видов, чтобы добраться до добычи!

Одни из самых хитроумных – пауки-муравьеды. Охотясь за добычей, они не подстерегают её, прячась где-нибудь в окрестностях муравейника, а дерзко проникают прямо внутрь, затесавшись в колонны муравьёв-солдат.

Но на восьми ногах к муравьям, у которых шесть ног, домой «не въедешь». То ли муравьи умеют считать до восьми, то ли нутром чуют опасность... И тогда хитрец-паук поднимает вверх две «лишние» передние ноги, как усики-антенны у муравья, и таким вот манером преспокойненько входит в муравейник.

Поймав же и обездвижив ядом одинокую жертву, этот паук-обманщик пускается на новую хитрость и тащит несчастного муравьишку наружу, подражая муравьям-чистильщикам, выносящим умершего собрата на кладбище. При этом паук прикрывается не только телом выносимого муравья, но и его запахом.

АКУЛА

Фразеологизм «выворачивать наизнанку», понятный каждому, кого хоть раз в жизни тошнило, для некоторых видов акул никакое не образное выражение, а суровая правда жизни. Потому что, прочищая желудок, они буквально выворачивают его наизнанку через рот. Как они при этом ухитряются не поранить его острыми зубами, одному Богу известно.

Художник Капыч

Избранные задачи конкурса «Кенгуру-2019»

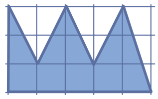
Материал подготовил
Дмитрий Максимов

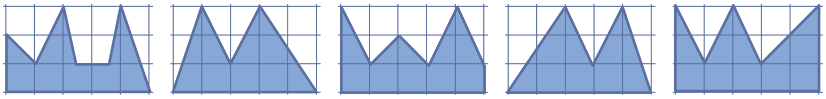
«Кенгуру» – массовый международный математический конкурс-игра под девизом «Математика для всех». Приводим подборку задач 2019 года, предлагавшихся российским участникам (их было больше миллиона). Подробнее о конкурсе см. на сайте **mathkang.ru.**

1. (3 – 4 класс, 4 балла) В числе 2019 две цифры поменяли местами, а потом одну цифру стёрли. Какое самое большое число могло получиться?

(А) 901 (Б) 910 (В) 912 (Г) 920 (Д) 921

2. (9 – 10 класс, 3 балла) Многоугольники изображены на клетчатом листе. Какой из них целиком поместится в многоугольнике, изображённом справа?





(А) (Б) (В) (Г) (Д)

3. (7 – 8 класс, 3 балла) Если 2019 десятых разделить на 2019 сотых, то получится

(А) 0,1 (Б) 1 (В) 10 (Г) 100 (Д) 1000

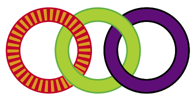
4. (5 – 6 класс, 5 баллов) Иван Иванович написал пять утверждений. Оказалось, что ровно одно из них неверно. Какое?

(А) У моего сына Василия два брата.
(Б) У моей дочери Анны два брата.
(В) У моей дочери Анны две сестры.
(Г) У моего сына Василия три сестры.
(Д) У меня пятеро детей.

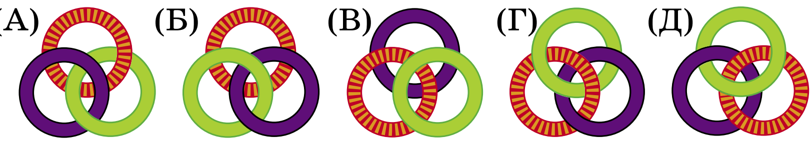
5. (3 – 4 класс, 4 балла) Все страницы в книге пронумерованы. Цифра 5 встречается в номерах страниц ровно 13 раз. Сколько страниц в этой книге?

(А) 50 (Б) 56 (В) 57 (Г) 58 (Д) 60

6. (7 – 8 класс, 3 балла) На рисунке справа изображены три кольца, образующие цепочку. На каком из рисунков изображена эта же цепочка?



(А) (Б) (В) (Г) (Д)



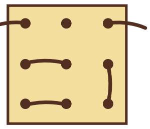
7. (5 – 6 класс, 3 балла) В Цветочном городе коротышки учатся с понедельника по пятницу. Сколько дней в неделю Знайка может сказать: «Позавчера и послезавтра – учебные дни»?

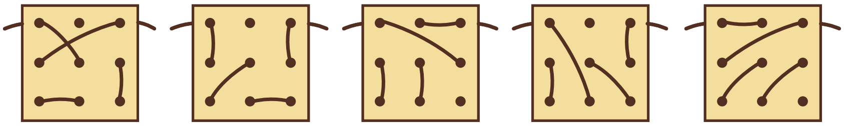
(А) 1 (Б) 2 (В) 3 (Г) 4 (Д) 5

8. (9–10 класс, 3 балла) Сколько сантисантиметров в кilокилометре?

(А) 10^4 (Б) 10^6 (В) 10^{10} (Г) 10^{12} (Д) 10^{16}

9. (3–4 класс, 5 баллов) Шнурок продет через дырки в дощечке, как показано на рисунке справа. Как может выглядеть эта дощечка с обратной стороны?



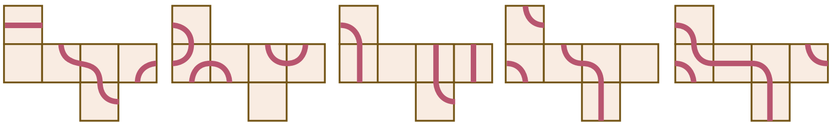


(А) (Б) (В) (Г) (Д)

10. (5–6 класс, 4 балла) Джентльмены Алекс, Боб и Карл ежедневно ходят на прогулку. Если Алекс гуляет без шляпы, то Боб в шляпе. Если Боб без шляпы, то Карл в шляпе. Сегодня Боб гуляет без шляпы. Кто сегодня в шляпе?

(А) Алекс и Карл (Б) только Алекс
(В) только Карл (Г) никто (Д) все

11. (7–8 класс, 5 баллов) Из какой развёртки получится кубик, на поверхности которого будет замкнутая линия?



(А) (Б) (В) (Г) (Д)

12. (3–4 класс, 5 баллов) Малыш, Карлсон и фрекен Бок едят плюшки. Малыш съедает 2 плюшки за то же время, за которое фрекен Бок съедает 7. Пока она ест 3 плюшки, Карлсон съедает 5. За некоторое время Малыш и фрекен Бок съели 27 плюшек. Сколько плюшек за это время съел Карлсон?

(А) 10 (Б) 15 (В) 35 (Г) 40 (Д) 45

13. (9–10 класс, 5 баллов) Из листа 4×8, складывая его несколько раз пополам, получили в итоге квадрат 1×1. Потом его развернули обратно, и некоторые отрезки оказались «выгнуты» вверх, а другие – «выгнуты» вниз. Какой не могла оказаться сумма длин отрезков, выгнутых вверх?

(А) 22 (Б) 24 (В) 26 (Г) 28 (Д) 30

Художник Сергей Чуб

Владимир Красноухов

Попробуй, перестрой-ка!

Перерисуйте приведённые фигуры на клетчатую бумагу или картон.

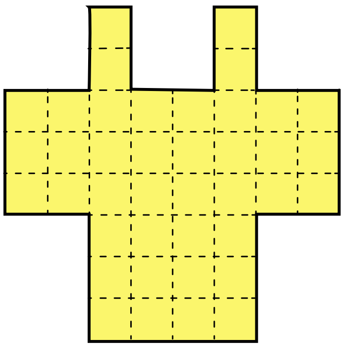


Рис. 1

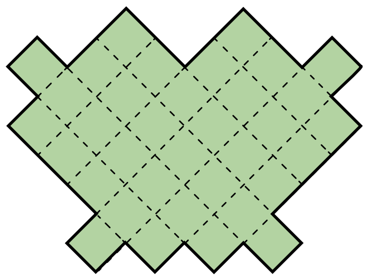


Рис. 2

1. Разрежьте фигуру (рис. 1) на пять одинаковых по форме и размерам элементов (октомино) и постройте из них другую симметричную фигуру. Элементы, как обычно в таких задачах, можно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.

2. Разрежьте фигуру (рис. 2) на пять одинаковых по форме и размерам элементов (гептамино) и постройте из них последовательно шесть других симметричных фигур.

Желаем успехов!

Художник Евгений Паненко

НАШ КОНКУРС, VIII тур
(«Квантик» № 4, 2020)

36. *Петя решал задачу из книги: «В Канаде __ процентов населения говорит по-английски, а __ процентов – по-французски (на других языках в Канаде не говорят). Какой процент населения Канады говорит и по-английски, и по-французски?». (Числа из книги мы заменили пропусками.) «Какая лёгкая задача! – сказал он. – Надо просто вычесть из первого числа второе, вот и всё решение!» Петя посмотрел ответы в конце книги и убедился, что его ответ правильный. Какой процент населения Канады говорит по-французски, по мнению этой книги?*

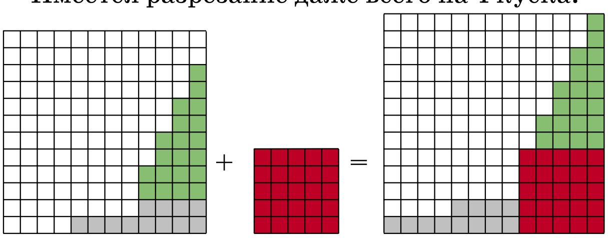
Ответ: 50%. Пусть x% населения говорит по-английски, а y% – по-французски. Тогда $(x+y)$% – это число всех жителей Канады плюс число двуязычных (они посчитаны дважды). Поэтому ответ на задачу из книги равен $(x+y-100)$%. А Петин ответ равен $(x-y)$%, и поскольку он оказался правильным, $x+y-100=x-y$, откуда $2y=100$.

37. *Когда родился Квантик, его старшему брату было x месяцев. Число x равно наименьшему общему кратному всех чисел от 1 до 9, кроме одного, а также равно произведению трёх последовательных чисел. Сколько полных лет старшему брату, если Квантику сейчас 100 месяцев?*

Ответ: 50. Числом от 1 до 9, на которое не делится x, может быть 5, 7, 8 или 9. Тогда x равно соответственно $7\cdot8\cdot9$, $5\cdot8\cdot9$, $5\cdot7\cdot4\cdot9$ или $5\cdot7\cdot8\cdot3$. Число $4\cdot5\cdot7\cdot9$ лежит между $9\cdot10\cdot11$ и $10\cdot11\cdot12$, а число $3\cdot5\cdot7\cdot8$ – между $8\cdot9\cdot10$ и $9\cdot10\cdot11$. Число $5\cdot8\cdot9$ меньше, чем $6\cdot7\cdot8$, но больше, чем $5\cdot6\cdot7$. Поэтому $x=7\cdot8\cdot9=504$. Тогда сейчас брату 604 месяца, то есть 50 лет 4 месяца. (Кстати, старший брат «Квантика» – это журнал «Квант».)

38. *Клетчатые квадраты 12×12 и 5×5 разрежьте (один или оба) по линиям сетки так, чтобы всего получилось пять кусков и из этих пяти кусков можно было сложить квадрат 13×13.*

Имеется разрезание даже всего на 4 куска:



Меньшим числом кусков уже не обойтись, потому что угловые клетки квадрата 13×13 должны лежать в разных кусках.

39. *Положительные числа x и y таковы, что левая дробь больше правой:*

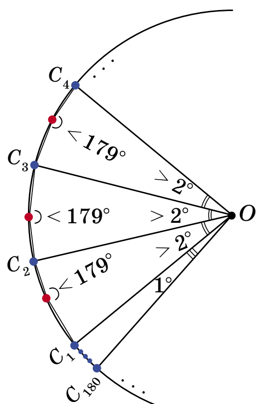
$$\cfrac{1}{2+\cfrac{3}{4+\cfrac{5}{\cdots\,2018+\cfrac{2019}{2020+x}}}} > \cfrac{1}{2+\cfrac{3}{4+\cfrac{5}{\cdots\,2018+\cfrac{2019}{2020+y}}}}.$$

Что больше: x или y?

Ответ: $x>y$. Число, которое прибавляется к 2 в первой дроби, обозначим за a, а во второй – за b. Тогда $\frac{1}{2+a}>\frac{1}{2+b}$, откуда $2+a<2+b$, то есть $a<b$. Мы свели задачу к неравенству между дробями a и b, у которых этажей стало на 1 меньше, и знак неравенства поменялся. Действуя далее аналогично, мы каждый раз уменьшаем на 1 «этажность» и меняем знак неравенства. От исходных дробей к числам x и y нужно сделать столько таких переходов, сколько чисел в последовательности 1, 3, 5, ... 2019, то есть $(2019+1)/2=1010$ – чётное число; знак сменится чётное число раз и останется, каким был.

40. *В окружность вписан 1000-угольник, его вершины покрашены поочерёдно в красный и синий цвет. Каково наибольшее возможное количество красных вершин, углы при которых меньше 179°?*

Ответ: 179. Рассмотрим один такой красный угол ABC, меньший 179° (вершины A и C синие, а B – красная). Он опирается на дугу, которая по свойству вписанного угла будет меньше 358°. Значит, дуга ABC будет больше 2°. Поскольку градусная мера всей окружности равна 360°, а каждый такой красный угол занимает более 2°, таких углов не больше 179.



Опишем пример со 179 углами. Отметим на окружности 180 синих точек C_1, C_2, ..., C_{180} по порядку так, чтобы дуги C_1C_2, C_2C_3, ..., $C_{179}C_{180}$ были равны по $(359/179)°$, и на каждой дуге поставим по красной точке. Поскольку $359/179>358/179=2$, углы при этих красных точках будут меньше $(360-2)°/2=179°$. Остальные точки расположим на оставшейся дуге (величиной в 1°).

ЗАДАЧИ ПРО ПЛОТНОСТЬ
(«Квантик» № 5, 2020)

1. 2 – 2,5 г/см³. **2.** 6,5 г/см³.
3. 0,5 г/см³. **4.** Воздух 30 – 45% .

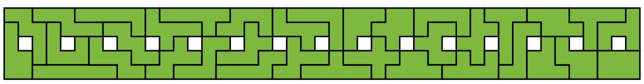
Как найти объём? Камни можно положить в мерный стакан с водой – и посмотреть, насколько поднялся уровень воды. (Так Архимед узнал объём царской короны.) Только надо брать побольше камней, или один большой, чтобы измерить поточнее. Монет нужно совсем много, штук 100, они же маленькие. Если столько нет, составим штук 10 в столбик и измерим его высоту, а потом умножим на площадь монетки, равную $\pi D^2 : 4$ ($\pi \approx 3,14$, D – диаметр монетки). Массу тоже надо измерять сразу как минимум у 10 монеток, даже на электронных весах.

Шишки погрузить в воду не получится – они всплывают. Поэтому закопайте в манку или в соль – и посмотрите, как изменился объём.

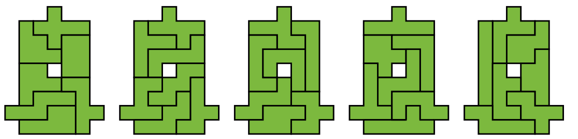
Сухой песок залейте водой «под завязку», но не «с верхом» – и измерьте, насколько он стал тяжелее. Разницу в весе – это вес воды, заполнившей пустоты – делим на плотность воды (1 г/см³), получаем объём пустот.

Объём любой ёмкости, взятой вместо мерного стакана, найдите, налив туда воду и измерив массу этой воды. Плотность воды 1 г/см³.

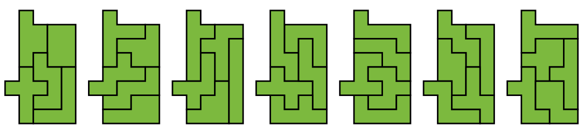
ГЕКСАМИНО: ТРИ ЗАДАЧИ
(«Квантик» № 5, 2020)



1.



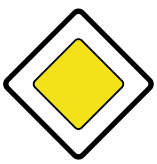
2.

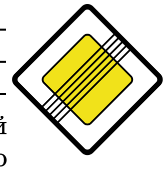


3.

ОСТРИЁМ ВНИЗ («Квантик» № 5, 2020)

Речь идёт об очень важных знаках «Главная дорога» и «Уступи дорогу», которые регулируют порядок проезда на перекрёстках. Уникальная форма этих знаков позволяет водителю опознать их, даже если они нечитаемы: покрыты грязью, снегом, закрашены вандалами и т. д.; а ещё эти знаки понятны и водителям, движущимся по встречной полосе или с других сторон перекрёстка.

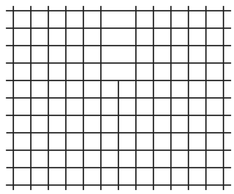




Есть, правда, «опасный» предупреждающий знак – «Конец главной дороги». Он тоже имеет вид повёрнутого квадрата (на нём жёлтый квадрат перечёркнут). Его нужно вешать далеко от перекрёстка, чтобы он был виден лишь тому, кто едет по этой дороге, а не по перпендикулярной – иначе может возникнуть путаница. Но службы, отвечающие за дорожные знаки, сами не всегда понимают логику и, бывает, вешают этот знак где попало.

ПОЧТОВОЕ ЗАНЯТИЕ

Почему ученик не смог нарисовать всю схему целиком? А что если она... бесконечная! Вот пример. Возьмём линии, делящие бесконечную плоскость на клетки. Все узлы (вершины клеток) будут чётными, поскольку в каждом сходятся 4 линии. А теперь удалим один из лучей, идущий вверх из какого-то узла. Фрагмент получившейся фигуры показан на рисунке. У неё *ровно один* узел нечётный (в нём сходятся три линии), а остальные – чётные.



Никакого противоречия нет – в доказательстве мы подсчитывали, сколько линий суммарно выходит из всех узлов, но если сумма бесконечна, то говорить о её чётности не имеет смысла.

ИСПОДВЫПОДВЕРТА

1. Циркуль. **2.** Вертéл вéртел (или наоборот). **3.** Свиток и свёрток.

УТКОНОС, ПАУК-МУРАВЬЕД, АКУЛА

Выдумана история про утконоса. Страус никак не может вскармливать новорожденного утконосёнка, потому что утконос – млекопитающее животное (и при этом ещё и яйцекладущее!). Есть ещё одна неточность: в диком виде страус живёт только в Африке; обитающий же в Австралии «страус эму» – вовсе не страус, он относится к отряду казуарообразных.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ КОНКУРСА «КЕНГУРУ-2019»

1. Чтобы в старшем разряде получить наибольшую цифру, надо поменять 9 и 2. Получим

9012. Из него уберём цифру 0, чтобы на втором месте тоже стояла максимально возможная цифра – получим 912. **Ответ:** В.

2. Легко видеть, что многоугольник А помещается в многоугольнике, изображённом в условии справа, а остальные – нет. **Ответ:** А.

3. Составив описанную в условии дробь (2019 · 0,1)/(2019 · 0,01), мы видим, что множитель 2019 сокращается, и остаётся частное 0,1 : 0,01, которое равно 10. **Ответ:** В.

4. Попробуем для каждого из утверждений А–Д подсчитать количество сыновей и дочерей Ивана Ивановича: А) 3 сына, Б) 2 сына, В) 3 дочери, Г) 3 дочери, Д) 5 детей. Пункты А и Б противоречат друг другу, значит, из этих утверждений верно только одно. Из пунктов В – Д получаем, что всего 3 дочери и 5 – 3 = 2 сына. Значит, Б верно, А неверно. **Ответ:** А.

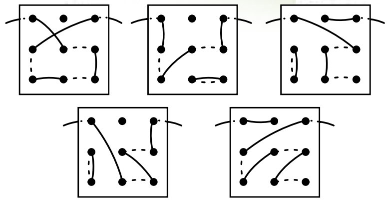
5. Цифра 5 встречается в номерах страниц 13 раз, это 5, 15, 25, 35, 45, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56. Значит, в книге 56 страниц. **Ответ:** Б.

6. Видно, что зелёное кольцо должно цепляться за два других кольца. Этому условию удовлетворяют только ответы А и Г. Но в ответе Г фиолетовое кольцо и полосатое тоже зацеплены, а на исходной цепочке – нет. Значит, остаётся вариант А, и, если немного присмотреться, становится понятно, что он подходит. **Ответ:** А.

7. Дни, в которые послезавтра выходной, – это четверг и пятница. Дни, в которые позавчера был выходной, – это понедельник и вторник. Остаются среда, суббота и воскресенье, они и подходят. **Ответ:** В.

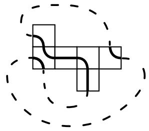
8. Выразим обе величины в метрах. Приставка «санти» означает сотую часть, значит, сантисантиметр – это сотая доля сантиметра, то есть сотая доля сотой доли метра: $1/10000 = 10^{-4}$ метра. Приставка «кило» означает умножение на тысячу, значит, километр – это 1000 километров, то есть $1000000 = 10^6$ метров. Теперь разделим: $10^6 : 10^{-4} = 10^{10}$. Это и есть ответ. **Ответ:** В.

9. Дорисуем на каждом из предложенных ответов невидимые части шнурка (которые видны на картинке из условия). При этом надо не забыть, что если мы смотрим на дощечку с обратной стороны, то левая и правая части рисунка меняются местами. Теперь легко увидеть, что сплошная линия (и без повторений) получается только на рисунке А. **Ответ:** А.



10. Заметим, что поскольку Боб без шляпы, Карл должен быть в шляпе. Кроме того, если бы Алекс был без шляпы, то Боб гулял бы в шляпе, а мы знаем, что он сегодня без шляпы. Значит, Алекс тоже в шляпе. **Ответ:** А.

11. На рисунке показано, какие стороны квадратиков развёртки Д будут образовывать одно и то же ребро собранного куба. Легко видеть, что при этом участки линий на гранях будут без разрывов переходить один в другой. Рассуждая аналогично, увидим, что на всех остальных развёртках какие-то отрезки не имеют продолжения на смежной грани куба. То есть других замкнутых линий получиться не может. **Ответ:** Д.

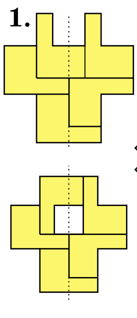


12. 27 плюшек Малыша и фрекен Бок – это 3 девятки, в каждой 2 плюшки съел Малыш, а 7 – фрекен Бок. 21 плюшка фрекен Бок – это семь раз по 3. Пока она ела 3, Карлсон съел 5. Значит, Карлсон съел семь раз по 5. **Ответ:** В.

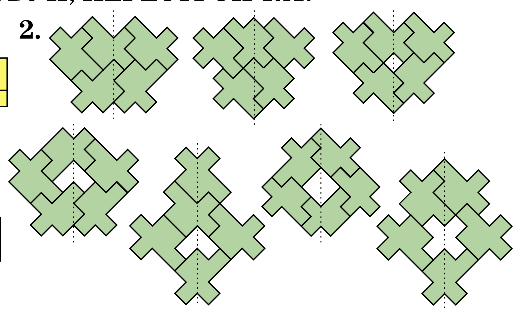
13. После первого складывания листа пополам он делится на две половины: А и В. Что бы мы ни делали дальше, «рисунок» на половине А будет в точности противоположен «рисунку» на половине В: отрезкам, выгнутым вверх, будут соответствовать отрезки, выгнутые вниз, и наоборот. Заметим, что всего отрезков (выгнутых или вверх, или вниз) 3 · 8 + 4 · 7 = 52 (3 сгиба вдоль длинной стороны листа и 7 сгибов – вдоль короткой). В зависимости от первого сгиба всего отрезков, выгнутых одним способом, на 4 или на 8 больше, чем других. Получаем 4 случая: 52 = 24 + 28 = 28 + 24 = 30 + 22 = 22 + 30. **Ответ:** В.

ПОПРОБУЙ, ПЕРЕСТРОЙ-КА!

1.



2.



Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем
заочном математическом конкурсе.

Высылайте решения задач X тура, с которыми справитесь, не позднее 5 июля в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

X ТУР

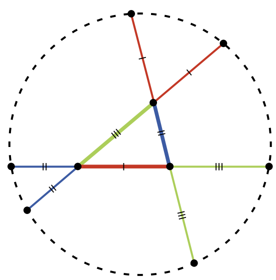
46. Квантик получил по почте кубическую посылку, запечатанную со всех сторон. Он хочет открыть коробку, разрезав её по рёбрам на две части, но так, чтобы у любой грани было разрезано не более двух рёбер. Удастся ли ему это?

47. Два лифта едут вниз с одинаковой скоростью с 95-го этажа офисного небоскрёба. Второй лифт стартовал через 45 секунд после первого. На этажах с номерами, делящимися на 2 или 3, стоит по сотруднику (остальные этажи пустые). Всем нужно на первый этаж. Лифт, приехавший к сотруднику первым, останавливается на 10 секунд, чтобы его забрать (другой лифт проезжает мимо). Какой лифт раньше попадёт на первый этаж?

Авторы: Мария Ахмеджанова (46), Михаил Евдокимов (47, 48), Сергей Костин (49), Джон Конвей (50)

48. У фокусника есть две копии «хитрой» клетчатой фигуры. Зритель называет любое целое число N от 2 до 100, и фокусник разрезает первую копию на N клетчатых частей, из которых *можно* сложить квадрат, а вторую копию – на N клетчатых частей, из которых *нельзя* сложить квадрат. Приведите пример «хитрой» фигуры и объясните, как разрезать её в каждом из случаев, чтобы фокус удавался. (Все части должны использоваться; наложения частей и дырки не допускаются.)

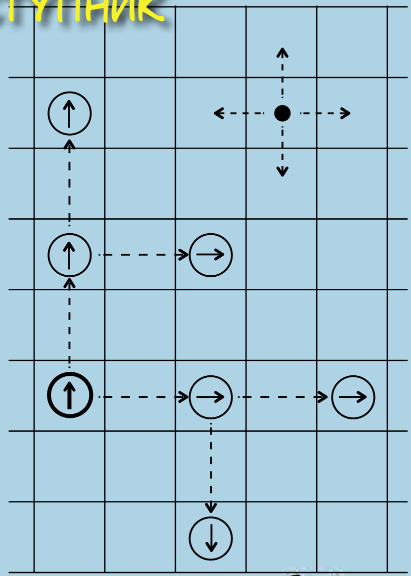
49. Каких семизначных натуральных чисел больше: у которых произведение цифр равно 1024, или у которых произведение цифр равно 2048?



50. Каждую сторону произвольного треугольника продлили в обе стороны так, как показано на рисунке. Докажите, что полученные 6 точек лежат на одной окружности.

Художник Николай Крутиков

ПРАВОБОКАЯ МАШИНА И ПРЕСТУПНИК



На бесконечной клетчатой доске в одной из клеток стоит полицейская машина (фишка со стрелкой). За ход она сдвигается на 2 клетки по стрелке: либо сразу, либо предварительно повернув направо. На рисунке вы видите, куда машина может доехать за 2 хода.

В другой клетке находится преступник (маленькая чёрная фишка). За ход он сдвигается в любую из 4 соседних клеток (по стороне).

Полицейская машина ловит преступника, если попадает в одну из восьми клеток рядом с ним.

Первым ходит преступник. Отметьте все его начальные положения, для которых полицейские смогут его поймать.

По задаче Руфуса Айзекса

Художник Николай Воронцов

ISSN 2227-7986