ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 11
ноябрь
2020

ЗВЁЗДНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

ПАРАДОКС ЛИФТА

РЕЧНЫЕ ПЕРЕКРЁСТКИ

Enter

№ 11 | ноябрь 2020
Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

ИДЁТ ПОДПИСКА на 2021 год!

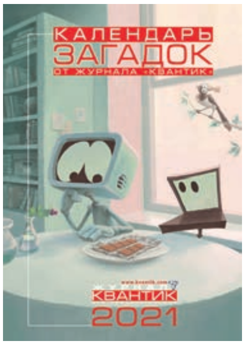
Подписаться на журнал можно в отделениях Почты России и через интернет

ОБЪЕДИНЁННЫЙ КАТАЛОГ «ПРЕССА РОССИИ»
на I полугодие – индекс 11346
на год – индекс 11348
akc.ru/itm/kvantik

КАТАЛОГ «ГАЗЕТЫ. ЖУРНАЛЫ» АГЕНТСТВА «РОСПЕЧАТЬ»
на I полугодие – индекс 84252
press.rosp.ru

Подробнее обо всех способах подписки на журнал «Квантик» читайте на сайте
kvantik.com/podpiska

НАШИ НОВИНКИ



КАЛЕНДАРЬ ЗАГАДОК от журнала «КВАНТИК» на 2021 год – настенный перекидной календарь с интересными задачами-картинками

АЛЬМАНАХ ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ «КВАНТИК», выпуск 16 включает в себя все материалы журналов «Квантик» за II полугодие 2019 года

КАК БУСЕНЬКА ЧТО-ТО-ТАМ. Математические сказки (автор – Константин Кохась) – это третья книга серии «Библиотечка журнала «Квантик», где собраны истории о приключениях Бусеньки и её друзей, публиковавшиеся в журнале в рубрике «Математические сказки»

Приобрести продукцию «Квантика» можно в магазине «Математическая книга» (Москва, Большой Власьевский пер., д.11), в интернет-магазине **kvantik.ru** и других магазинах (см. список на сайте **kvantik.com/buy**)

БИБЛИО-ГЛОБУС
ВАШ ГЛАВНЫЙ КНИЖНЫЙ

Мы предлагаем большой выбор товаров и услуг

г. Москва, м. Лубянка, м. Китай-город
ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1

УСЛУГИ
- Интернет-магазин www.bgshop.ru
- Кафе
- Клубные (дисконтные) карты и акции
- Подарочные карты
- Предварительные заказы на книги
- Встречи с авторами
- Читательские клубы по интересам
- Индивидуальное обслуживание
- Подарочная упаковка
- Доставка книг из-за рубежа
- Выставки-продажи

АССОРТИМЕНТ
- Книги
- Аудиокниги
- Антиквариат и предметы коллекционирования
- Фильмы, музыка, игры, софт
- Канцелярские и офисные товары
- Цветы
- Сувениры

www.biblio-globus.ru

8 (495) 781-19-00 пн – пт 9:00 - 22:00 сб – вс 10:00 - 21:00 без перерыва на обед

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 11, ноябрь 2020 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С.А. Дориченко
Редакция: В.Г. Асташкина, Е.А. Котко, Р.В. Крутовский, И.А. Маховая, Г.А. Мерзон, А.Ю. Перепечко, М.В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р.К. Шагеева, И.Х. Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях Почты России:
- Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индекс **84252**)
- Объединённый каталог «Пресса России» (индексы **11346** и **11348**)

Онлайн-подписка
на сайте агентства «Роспечать» **press.rosp.ru**
на сайте агентства АРЗИ **www.akc.ru/itm/kvantik/**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 08.10.2020
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831) 216-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

СОДЕРЖАНИЕ

Амелия Алаева

ПАРАДОКС ЛИФТА

Ура! У Маши наконец-то начались каникулы. Они всей семьёй едут в Японию! Маша давно хотела побывать в этой необыкновенной стране. Единогласно решили, что нужно пожить неделю – ведь там столько интересного.

Токио Маше сразу же понравился. Больше всего Маше нравится просто идти по улице, вежливо кивая и почтительно кланяясь всем встречным японцам:

– Конничива, – говорит Маша.

– Конничива, – отвечает ей прохожий, и в этом нет наигранности. Просто встретились два вежливых японца.

В Токио есть всё: императорские дворцы, сады и, разумеется, торговые центры. Недалеко от знаменитой телебашни «Tokyo Skytree» находится многоэтажный торговый центр «Тобу». Кажется, что в этом месте собраны все магазины мира, поставленные друг на друга. В Токио тесно, поэтому гипермаркеты и торговые центры растут ввысь. Этаж – отдел. Мама начала шопинг с первого этажа, а Маше приглянулся один из небольших бутиков японских сувениров на восьмом этаже.

Целью Маши были традиционные японские куклы нингё. С того момента, как Маша оказалась во дворце Мэйдзи и увидела этих сказочно красивых кукол, она не могла думать больше ни о чём другом. Маша так часто и много говорила о нингё, что родители поняли: уехать из Японии без нингё шансов нет. Однако сто́ят эти куклы ох как недёшево! Самая маленькая кукольная комната с двумя коллекционными куклами стоит 120 тысяч иен[1]! Конечно, для туристов есть варианты подешевле, но, посмотрев на цены, папа стал почему-то задумчивым и вдруг заявил, что Маша уже самостоятельная, умеет пользоваться мобильным телефоном, а потому прекрасно справится с покупкой без посторонней помощи. Он выдал Маше 20 тысяч иен, напомнил, что через полчаса они встречаются на крыше гипермаркета, и исчез из виду.

[1] Одна иена примерно равна 70 копейкам.

Маша пустилась на поиски своей куклы. Поначалу они были безуспешны и… Вот же она! Прижав к груди коробку, наполненную волшебством, Маша поспешила к лифтовой зоне.

Трудно поверить, что на крыше торгового центра есть самый настоящий сад с дорожками и прудиками. Там же киоски с фастфудом и даже ресторанчики – подходящее место для встречи. Из задумчивости Машу вывело очередное автоматическое объявление о том, как осторожно нужно пользоваться лифтами. Маша поняла, что лифта она ждёт уже минут пять. Причём цифры над закрытыми дверями показывают, что оба лифта опять прячутся где-то внизу и там куда-то движутся, но как-то очень неторопливо.

Что же делать? Мама, наверное, уже беспокоится. Неужели подниматься по эскалаторам? Она почти было решилась на такой подвиг, как вдруг лифт всё-таки пришёл, двери открылись, и Маша начала приветствовать стоящего в лифте японца, а тот начал приветствовать Машу. Но оба приветствия неожиданно трансформировались в нечто совсем иное.

– Кон… ничиво себе! – сумела произнести Маша.

– Конни…чиво ты тут делаешь? – спросил стоящий в лифте японец, которым оказался Машин сосед по лестничной клетке профессор Иван Петрович. Глаза Ивана Петровича и Маши синхронно округлились, придав обоим совершенное сходство с персонажами японского аниме.

– Вы не сказали… – начала было Маша, но тут двери лифта стали закрываться, и Маша поспешила зайти внутрь.

– …что едете в Японию! – в Машином голосе была обида.

– А я должен был? – ответил профессор. – С другой стороны, ты мне тоже не докладывала, что на днях собираешься заглянуть в район Сумида.

– А что вы здесь делаете?

– Я приехал на конференцию в университет Цукубы. Решил вот зайти в магазин и купить себе хозяйственные ножи, – профессор показал на большой пакет, который он держал в руках. – Хотя я успел об этом пожалеть. Никогда ещё не приходилось

испытывать на себе парадокс лифта так долго. Я устал ждать и решил поехать вверх, чтобы потом спуститься на том же лифте.

– Лифта? Какой парадокс лифта?

Тут дверь открылась, и друзья вышли на крышу. Осмотрев окрестности, Иван Петрович передумал ехать вниз, и они зашагали к ресторанчику, где Маша планировала найти родителей.

Помолчав, профессор всё же ответил:

– Да вот такой парадокс лифта. Он заключается в том, что если ты ждёшь лифт на каком-то из верхних этажей высокого здания, то тебе кажется, что лифты чаще идут вверх, чем вниз, хотя на самом деле лифт ходит одинаково часто в обоих направлениях.

– Я же была в верхней части гипермаркета, а лифты были внизу. Потом я отошла, вернулась, а они опять внизу. Глупые лифты. Действительно, парадокс!

– Ключевую роль играет слово «чаще». Конечно, так не всегда, но довольно часто. То есть надо понаблюдать за лифтами какое-то время. Я знаю об этом парадоксе давно, но почувствовал всю его прелесть и силу только здесь – в Японии. Он действительно работает, и даже сложнее, чем думали Стерн и Гамов.

– Это кто?

– Физики. Они работали в разных лабораториях. Георгий Гамов – в нижней части здания, а Марвин Стерн, напротив, – на одном из верхних этажей. Они заметили, что первый приехавший на вызов лифт с разными вероятностями приходит снизу или сверху. На нижних этажах выше вероятность того, что придёт лифт сверху, а на верхних – что придёт лифт снизу. Создаётся впечатление, будто лифтовые кабины «образуются» где-то на среднем этаже, часть идёт вниз, часть – вверх, и обратно они не возвращаются.

– Это как? Куда ж они деваются?

– Будем для простоты считать, что лифт может находиться на каждом этаже с одинаковой вероятностью. Если ты в верхней половине здания, этажей под тобой больше, чем над тобой, и более вероятно, что лифт придёт снизу. И всё наоборот, если ты – в нижней части здания. Ясно, что на самый верхний этаж лифт может приехать только снизу, а на самый нижний – только сверху. Так что вроде парадокс объясняется просто. Но в реальной жизни всё сложнее.

Тут профессору пришлось прервать свой рассказ, поскольку оба достигли точки назначения. Увидев дочь в сопровождении Ивана Петровича, мама и папа на некоторое время потеряли дар речи. А потом Машин папа расхохотался:

– Здравствуйте, дорогой профессор! Вот уж неожиданно. Судя по всему, без теории вероятностей не обойдётся.

– Да уж, не обошлось. Очень есть хочется, – заявила Маша и решительно выбрала курицу терияки.

За обедом после выяснения обстоятельств чудесной встречи речь снова зашла о лифтах. Собственно, заговорил об этом папа, выразивший неудовольствие по поводу непродуманного способа перемещения по «Тобу», каким является лифт. Ждать его – сущее наказание и испытание нервов, заявил папа.

– Да ничего странного. Обычный парадокс лифта, – будничным голосом сообщила Маша.

Мама метнула быстрый взгляд на профессора, который сделал вид, что ничего не заметил, и поспешил внести ясность в вопрос о лифтах.

– Тут, друзья мои, не просто парадокс лифта в понимании Гамова–Стерна. В японских гипермаркетах всё устроено так: чем ниже этаж, тем он многолюднее. На нижних этажах электроника, продукты, затем одежда, потом хозтовары. Выше – игрушки, ещё выше – декор и интерьеры, в верхних этажах модные и дорогие бутики. А на крыше – ресторан и сад, где совсем немноголюдно. Чем выше этаж, тем меньше народу. Это вызывает более активное движение лифтов между, скажем, первым и шестым этажами, чем между седьмым и двенадцатым. И если бы лифты устремлялись на ближайший вызов, то попасть на верхние этажи было бы совсем невозможно.

Поэтому лифты работают по специальному алгоритму – они ездят вверх-вниз, подбирая попутных пассажиров. Конечно, лифтовые кабины ниоткуда не возникают и никуда не исчезают. Сколько раз кабина в некоторую единицу времени прошла вверх, столько же она прошла вниз, и поэтому ждать лиф-

та на любом этаже, казалось бы, придётся недолго. Но на самом деле это не так, поскольку спрос на кабину на разных этажах разный. На посадку и высадку людей на нижних этажах уходит много времени, а на верхних этажах пассажиров немного.

– Да, – призналась Маша. – Представляете, в самом населённом городе мира я стою и одна жду лифта. Это само по себе парадокс.

– Вот-вот. Пока лифт был внизу, он делал частые остановки и долго ждал, пока пассажиры войдут и выйдут. А Маша ждала на восьмом этаже и никак не могла дождаться. А потом лифт всё же вырвался на свободу, быстро подхватил одинокую Машу, быстро обслужил верхние этажи и быстро вернулся вниз, где на него опять напало множество покупателей. Это как с пробкой на дороге: в пробке машины едут медленно, и их скапливается много на одном участке. Затем пробка рассосалась, машины поехали быстро, и кажется, что машин на дороге мало. Но если измерить количество машин, проходящих за единицу времени через определённую точку, то оно может оказаться одинаковым и в пробке, и после неё.

А вот что делает ситуацию ещё более интересной: Дональд Кнут[2] подсчитал, что с увеличением числа лифтов вероятность того, что на любом этаже (кроме первого и последнего) первым придёт лифт снизу, стремится к 1/2, и вероятность того, что первым придёт лифт сверху, также стремится к 1/2. То есть парадокс лифта работает только в том случае, если ждать конкретный лифт. Если же лифтов много и вам не важно, на каком ехать, парадокса заметно не будет: все вероятности будут близки к 1/2.

– Кто бы мог подумать, что даже в движении лифта есть математика и всякие парадоксы, – подытожила Машина мама.

Но Маша уже не слышала рассказ о подсчётах Дональда Кнута. Она думала. Вдруг она вскочила, подбежала к смотровой площадке и глянула вниз на автомобили. Как это – количество машин в пробке и после неё одинаковое? Не может быть. Парадокс.

Художник Мария Усеинова

[2] Дональд Кнут – известный учёный в области computer science, см. статью Г. Фельдмана «Дональд Кнут» в «Квантике» №11 за 2014 г.

Михаил Гельфанд

ДРЕВНЕИНДИЙСКИЕ КАРШАПАНЫ

В Древней Индии в V–II веках до нашей эры (королевство Магадха и империя Маурьев) монеты (каршапаны) чеканили необычным для нас способом. На серебряную пластинку, обычно неправильной формы, наносили оттиски пятью независимыми штемпелями. Расположение этих оттисков было произвольным, они даже могли попадать на край каршапаны и друг на друга; иногда на монете видны не все оттиски. Разные выпуски отличались набором этих штемпелей, причём два были обязательны на всех монетах (с точностью до мелких различий в рисунке), а три других различались, хотя могли и повторяться.

Приведены фотографии десяти каршапан империи Маурьев. Среди них есть три одинаковые (то есть отчеканенные одним и тем же набором штемпелей). Найдите их.

Фото Валентины Асташкиной. Правое нижнее изображение взято с сайта coinindia.com

Художник Артём Костюкевич

Валерия Сирота

ЗВЁЗДНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

«Звезда первой величины» – так часто говорят про человека всем известного, знаменитого, яркого. Но у астрономов звёзды первой величины – не самые яркие. На небе найдётся дюжина звёзд поярче. Какой же тогда они величины? Нулевой и минус первой.

Звёздная величина – мера яркости звёзд на нашем небе. Чем звезда ярче, тем её величина меньше: самая яркая звезда, Сириус, имеет звёздную величину –1,5, а самые слабые звёзды, которые различает невооружённым глазом человек с нормальным зрением, – шестой звёздной величины. Правда, в хорошие ясные ночи зоркие люди могут разглядеть и гораздо более тусклые звёзды – восьмой величины. Для краткости вместо слов «звёздная величина» астрономы приписывают сверху индекс m, например: звезда Вега (ярчайшая звезда созвездия Лиры) 0^m, Полярная звезда 2^m. Планеты бывают ярче самых ярких звёзд – например, Венера или Юпитер могут быть -3^m или даже -4^m. Есть много слабых звёзд, которых мы не видим. В простенький телескоп видны звёзды до 10^m.

Любители астрономии знают наизусть звёздные величины нескольких известных звёзд (а то и нескольких десятков) и определяют «на глаз» яркость любой другой звезды сравнением с ними. Когда на темнеющем вечернем небе появляется несколько (5–10) звёзд – это, скорее всего, звёзды нулевой и первой величины; когда звёзд становится много, вы можете найти «ковш» Большой Медведицы и похожий на букву W силуэт Кассиопеи – почти все звёзды в этих астеризмах (конфигурациях) 2^m, а самые слабые 3^m. Четвёртая величина – часто предел видимости в городе или при небольшой дымке. А уж если виден Млечный Путь и всё усыпано звёздами – вы наверняка (если зрение хорошее) видите звёзды до 6^m.

Вот так же определяли звёздные величины древние греки, которые и придумали их больше двух тысячелетий назад. Почему придумали именно так? Для глаза распределение яркости по звёздным величинам представляется равномерным: звезда 2^m выглядит настолько же ярче, чем 3^m, насколько 3^m ярче, чем 4^m, и т. д. Замечательно, что с тех пор люди изобрели точные приборы, научились измерять количество энергии (можно сказать – прямо число фотонов за секунду[1]), приходящее от каждой звезды, – а древнее определение осталось в силе! Разве что добавили дробные величины, и теперь астрономы могут отличить яркость звезды $3{,}1^{m}$ от $3{,}2^{m}$. Но даже с этим многие любители справляются. Получается, человеческий глаз – такой совершенный прибор?

Но всё ещё удивительнее. Когда научились измерять яркость приборами, оказалось, что соседние звёздные величины отличаются друг от друга не на одно и то же число (фотонов в секунду на квадратный сантиметр, например), а ровно в одно и то же число раз! Это число примерно равно 2,5: звезда 1^{m} в 2,5 раза ярче, чем звезда 2^{m}, и в 2,5 раза тусклее, чем звезда 0^{m}.

Задача 1. Сообразите-ка, а во сколько раз звезда 0^{m} (например, Вега) ярче, чем звезда 2^{m} (например, Полярная)? Во сколько раз звезда 2^{m} ярче звезды 5^{m}?

Задача 2. Во сколько раз Сириус ($-1{,}5^{m}$) ярче красной звезды Бетельгейзе ($0{,}5^{m}$) из созвездия Ориона?

Задача 3 (самая трудная). А во сколько раз Бетельгейзе ($0{,}5^{m}$) ярче, чем другая красная звезда – Антарес (1^{m}) из созвездия Скорпиона?

На самом деле «волшебное число» для перехода от одной звёздной величины к другой – не 2,5, а примерно 2,512. Почему такое странное число? Потому, что тогда разница в 5 звёздных величин оказывается разницей ровно в 100 раз: $100 \approx 2{,}512^{5}$. Так удобнее считать, когда разница в яркости очень большая. Но для маленьких «разниц» вы можете использовать 2,5. И даже не считать точно, а прикидывать – оценивать.

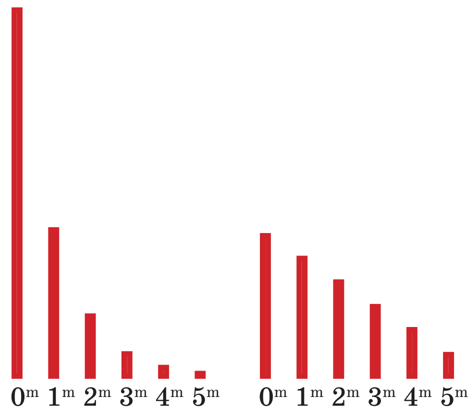
Задача 4. Звёздная величина полной Луны равна $-12{,}7^{m}$, а у Солнца она равна $-26{,}7^{m}$. Во сколько раз отличаются их яркости?

Задача 5. Самые слабые объекты, которые удаётся разглядеть в самый большой на Земле телескоп, имеют звёздную величину 27^{m}. А человеческий глаз, как мы помним, видит до 6^{m}. Во сколько раз телескопы улучшили наш предел яркости?

Почему же глаз устроен так странно, что вдвое более яркие и вдвое более слабые объекты кажутся

[1] Подсчитывать энергию и число фотонов – на самом деле совсем не одно и то же, так как фотоны «разных цветов» несут разную энергию. Но здесь мы эти подробности обсуждать не будем.

ему «одинаково удалёнными» по яркости? Ведь, например, каждому ясно, что 2 «ближе» к 1, чем к 4. А с яркостью не так: на рисунке яркость звёзд разных величин символически изображена отрезком соответствующей длины. А рядом – отрезки, соответствующие звёздным величинам, то есть тому, как мы воспринимаем эти яркости (точнее, разницу между ними). Это как если бы следующим делением линейки после 1 см у нас вместо 2 см стоял бы 1 м, и мы про все отрезки, что больше 10 см, говорили бы: «Это примерно метр!». А ещё следующим делением – после метра – было бы уже 100 м. Странная какая-то линейка...



Яркости звёзд (слева) и какими они нам кажутся (справа)

Такая линейка, или шкала (не обязательно отсчитывать именно расстояния), на которой каждое следующее деление в определённое число раз больше предыдущего, называется *логарифмической*. А зрение наше устроено логарифмически вот зачем: такое восприятие позволяет перекрыть огромный диапазон яркостей. Мы можем разглядывать – без риска для глаза – чудовищно различающиеся по яркости вещи. Во сколько там раз полная Луна ярче звезды 6^m? А теперь, если минимальный размер, который вы можете отмерить руками, это примерно миллиметр – сможете ли вы отмерить руками (или даже ногами, но не используя никакие приборы) во столько раз большее расстояние? И ведь полная Луна – совсем ещё не предел максимальной доступной глазу яркости...

Такое восприятие немного похоже на то, как мы смотрим на уходящие вдаль рельсы. На ближайшей шпале мы можем разглядеть каждую трещину, каждую растущую возле неё травинку. Следующие несколько шпал нам тоже хорошо видны, но уже гораздо менее подробно, и разобраться, которая там из них восьмая, а которая – девятая, уже не так легко. А вдали шпалы и вовсе сливаются: не то чтобы нам их не видно, и, скажем, человека мы разглядим и с большого расстояния, но вот на какой он шпале стоит – на двухсотой или трёхсотой – нам уже непонятно, да и неважно, всё равно далеко. Так же устроена логарифмическая шкала: разница между 1 м и 1 м 20 см в ней гораздо больше, чем между 100 м и 101 м. Маленькую разницу между слабыми источниками света глаз замечает лучше, чем даже в 10 раз бо́льшую разницу между очень яркими.

Не только зрение, но и слух у нас устроен логарифмически. Громкость звука принято измерять децибелами: 20 дБ – шёпот, 120 дБ – такой громкий звук, что прямо больно становится.[2] Так вот, если один звук громче другого на 10 дБ – это значит, что энергия первого звука ровно в 10 раз больше энергии второго! А сила, с которой этот звук давит на барабанную перепонку, больше в 3 с небольшим раза. И восприятие высоты звука тоже логарифмическое: выше на октаву – значит, частота звука больше в 2 раза.

Задача 6. На сколько децибел отличаются громкости звуков, энергии которых отличаются в тысячу раз? А в миллион раз?

Задача 7. Порог слышимости – самый тихий звук, который различает обычный человек, – это как раз 0 децибел. Считая, что без вреда для глаза можно смотреть на объекты в 5 раз ярче полной Луны, сравните диапазон яркостей, воспринимаемых человеческим глазом, с диапазоном громкостей, воспринимаемых ухом. Во сколько раз самый яркий подходящий нам свет ярче самого тусклого? А во сколько раз отличаются энергии самого громкого и самого тихого звуков? Какой инструмент универсальнее – глаз или ухо?

В завершение заметим: более яркая звезда на нашем небе – не обязательно более яркая «в действительности». Может, она просто ближе. Вот ведь Солнце – вообще-то очень заурядная жёлтая звёздочка, совсем

[2] Про шкалу громкости звуков читайте в статье А. Щетникова «Что такое децибел» в «Квантике» №3 за 2016 год.

Художник Алексей Вайнер

не яркая, а во сколько раз оно для нас ярче других! И Сириус, и Вега – хоть и яркие на самом деле, но не так уж выделяются. Самая «на самом деле яркая» из ярких звёзд нашего неба – Денеб (хвост) из созвездия Лебедя. Если бы они все были на одинаковом расстоянии от нас, Денеб был бы в 8300 раз ярче Сириуса и почти в 200 000 раз ярче Солнца! А самая яркая из известных звёзд ещё в 50 раз ярче. Правда, с Земли её без сильного телескопа вообще не разглядеть – очень уж далеко. «Настоящая яркость» звёзд называется *светимостью*, или – если пользоваться логарифмической шкалой – *абсолютной звёздной величиной*. Абсолютная – это звёздная величина, которая была бы у звезды, если бы она была от нас на расстоянии 10 парсек (примерно 32,5 световых года). Вега, например, к нам чуть ближе этого расстояния (до неё 25 световых лет), поэтому её абсолютная звёздная величина немножко больше видимой. Солнце с расстояния в 10 парсек выглядело бы всего лишь как звезда 5^{m}. А у многих звёзд абсолютная звёздная величина меньше видимой.

Можно ли, глядя на звезду, догадаться, яркая ли она на самом деле или просто близкая? Вообще-то нет. Но есть «подсказки». Это – цвет звезды: если она белая или голубая, значит – уж точно довольно яркая, хотя и не определить на глаз, просто яркая или ***чудовищно*** яркая. А если жёлтая – значит, на самом деле не очень-то яркая, скорее всего, похожа на наше Солнце. Вот с красными сложнее – они могут оказаться и совсем тусклыми, и ужасно яркими. Но про это – как-нибудь в другой раз. А пока – две довольно сложные задачки напоследок.

Задача 8. В телескоп мистера X видны звёзды до 10^{m}. Мистер Y сделал телескоп вдвое большего диаметра. Качество линз и зеркал у него примерно такое же. Какую предельную звёздную величину можно надеяться увидеть в его телескоп? Какой телескоп нужно сделать, чтобы улучшить достижение мистера X на 5 звёздных величин, то есть увидеть 15^{m}?

Задача 9. Звёзды A и B одинаковой светимости, но A в 2 раза дальше. Во сколько раз она слабее на небе? На сколько отличаются их звёздные величины? Во сколько раз дальше должна быть звезда, чтобы казаться на 10^{m} слабее другой такой же звезды?

Фёдор Нилов

ПАРАЛЛЕЛЬНИКИ, ПОЛУПАРАЛЛЕЛЬНИКИ И РАВНЫЕ ПЛОЩАДИ

Параллельник[1] – это многоугольник с таким хитрым свойством. Будем двигаться по контуру многоугольника, начав с любой вершины или стороны, одновременно в двух направлениях: доходим до двух «следующих» вершин (по часовой стрелке и против) и проводим соединяющий их отрезок, идём до двух следующих вершин – и соединяем, и т. д. (Мы как бы «разлиновываем» многоугольник на «полоски», в основном четырёхугольные, только в начале и в конце может быть треугольник, рис. 1.) Так вот, если, с какой вершины или стороны ни начни, все проведённые отрезки будут параллельны друг другу (и стороне, если с неё начинали), перед нами – параллельник.

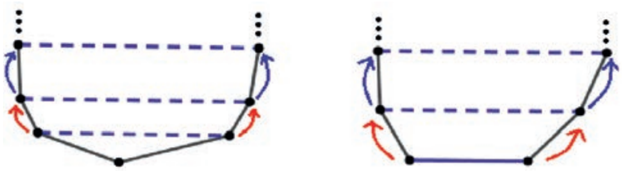


Рис. 1

Любой параллелограмм – параллельник. На рисунке 2 вы видите пятиугольный параллельник (наборы паралелльных отрезков окрашены одним цветом).

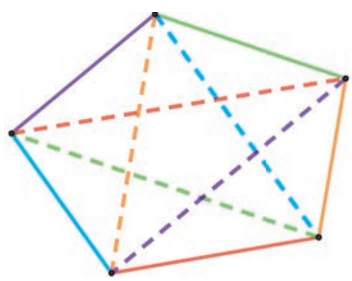


Рис. 2

Если вы знакомы с правильными многоугольниками (в них равны все углы и все стороны), можно сказать ещё и так: в параллельнике параллельны друг другу те же стороны и диагонали, как если бы он был правильным.

[1] По-научному – аффинно правильный многоугольник.

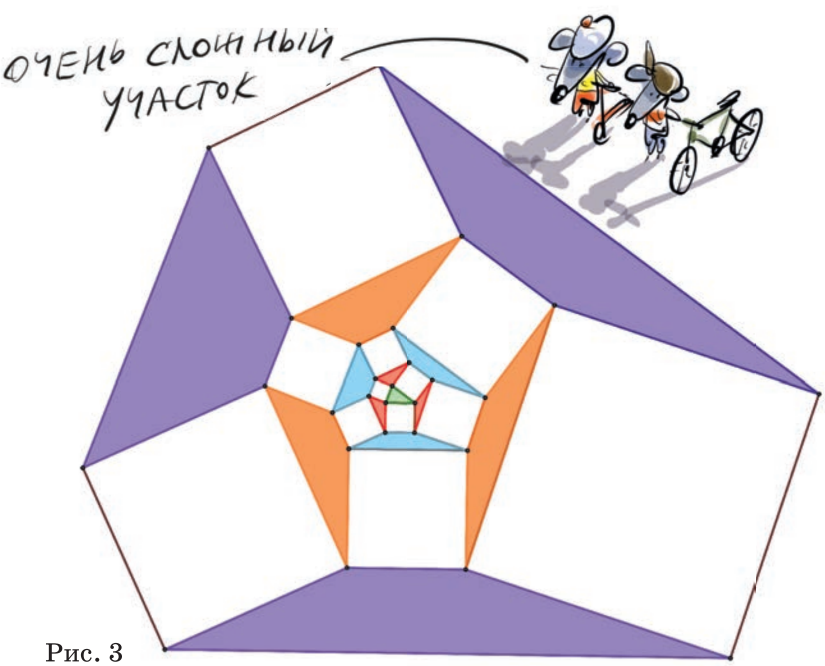


Рис. 3

А теперь посмотрите на рисунок 3. В центре – произвольный треугольник (зелёный). На его сторонах построили «наружу» белые квадраты. Некоторые из их вершин соединили отрезками, на них снова построили «наружу» белые квадраты и т. д. В промежутках между квадратами образовались треугольники и четырёхугольники. Оказывается, площади всех многоугольников одного и того же цвета равны, а все четырёхугольники – трапеции. Эту теорему доказали в 2001 году американские математики D. DeTemple и M. Hudelson.[2]

Они же заметили, что треугольник в центре можно заменить на любой параллельник – и теорема будет верна! На рисунках 4 и 5 – примеры, когда в центре параллелограмм и пятиугольный параллельник.

[2] D. DeTemple, M. Hudelson. Square-Banded Polygons and Affine Regularity. The American Mathematical Monthly, vol. 108, no. 2 (feb., 2001), pp. 100–114.

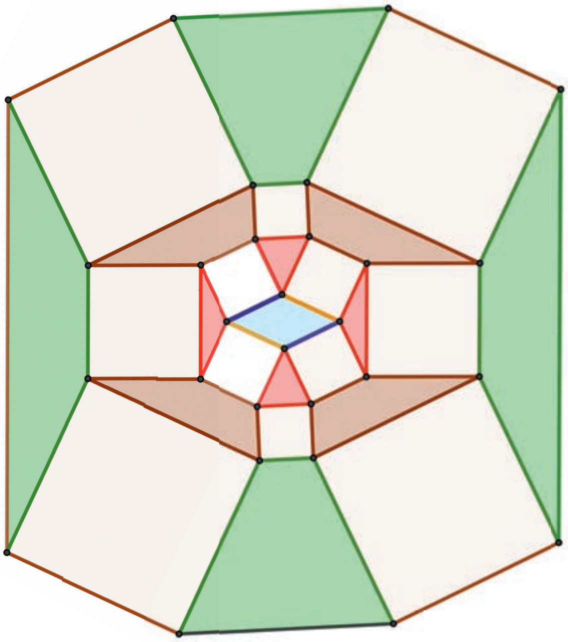


Рис. 4

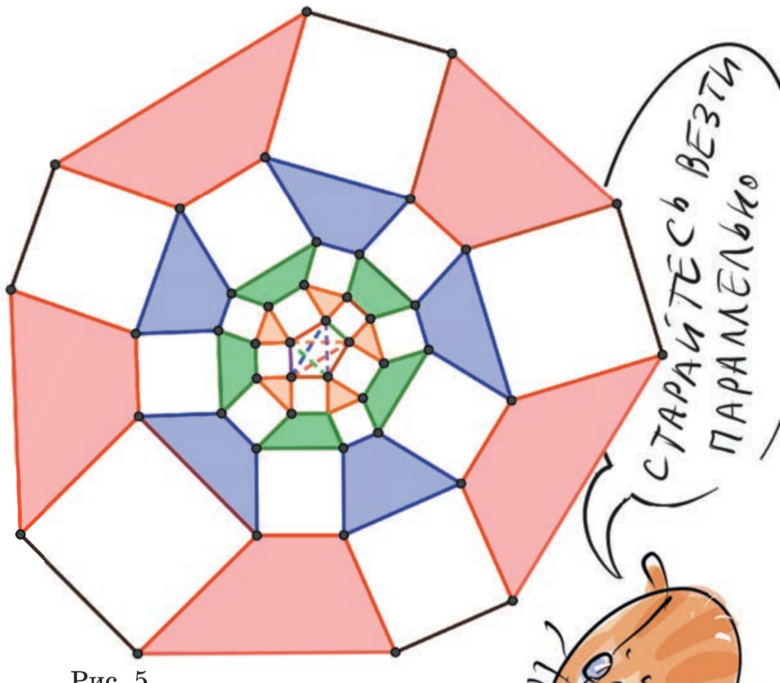
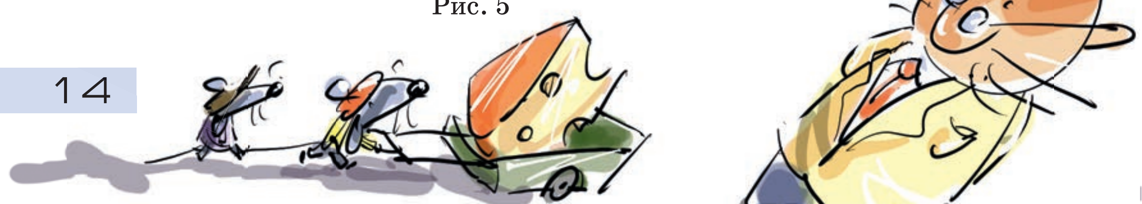


Рис. 5



А что, если вместо параллельника взять *полупараллельник*? Его определение почти такое же, только теперь мы всегда начинаем обход многоугольника с пары соседних вершин (см. рис. 1, справа). Для нечётноугольников ничего не изменится: даже если начнём со стороны, придём к вершине. А для чётноугольников мы выкинем половину условий. На рисунке 6 – пример шестиугольного полупараллельника. Диагонали, отрезающие противоположные углы, уже не обязаны быть параллельными (таких там три пары).

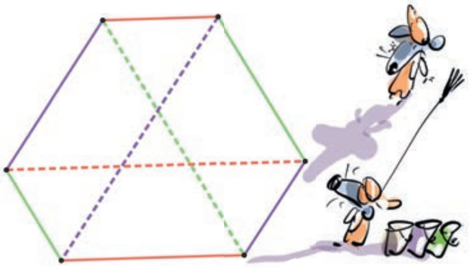


Рис. 6

Оказывается, теорема тоже будет верна «наполовину». Раньше в каждом «круговом» слое были равны площади всех многоугольников между белыми квадратами, а теперь в чётных слоях (2-м, 4-м, 6-м, ...) они будут равны «через один». На рисунках 7 и 8 равные площади – одного цвета.

Теперь четырёхугольники между белыми квадратами будут трапециями лишь в чётных слоях. Отметим также, что диагонали одноцветных четырёхугольников делят друг друга в одинаковых отношениях. Четырёхугольники могут даже самопересекаться, и тогда надо рассматривать их *ориентированную площадь* (но это тема для отдельного разговора).

Доказательства утверждений о полупараллельниках планируется напечатать в одном из ближайших номеров журнала «Квант». Чертежи к статье подготовлены в программе GeoGebra. Поэкспериментировать с чертежами можно по ссылке kvan.tk/parall

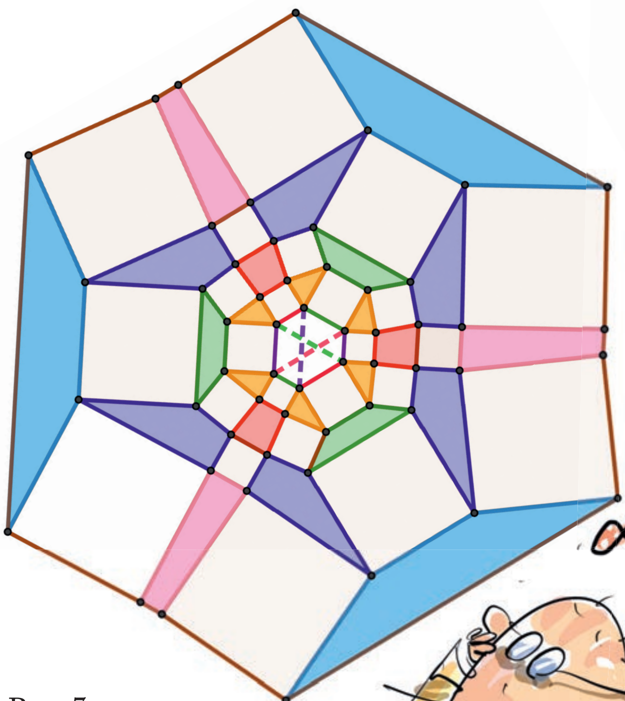


Рис. 7

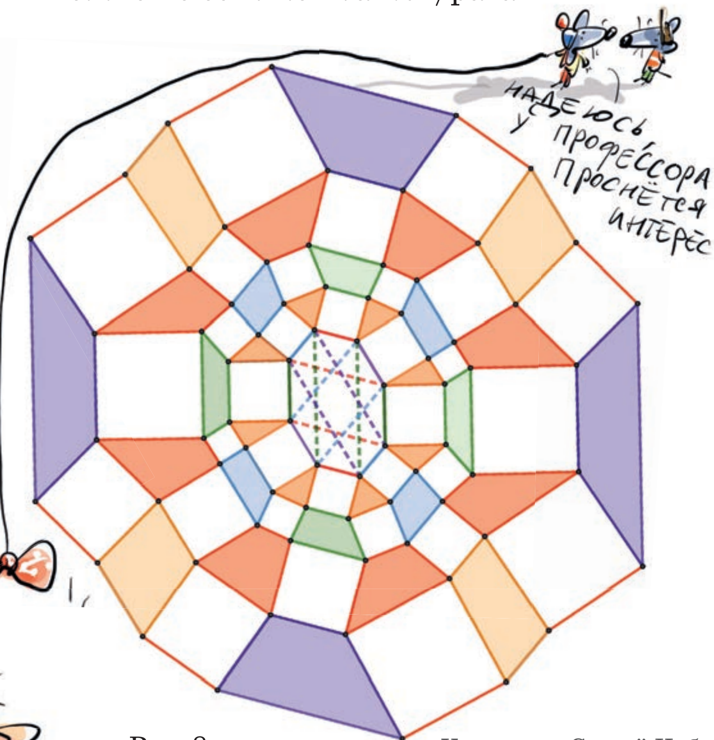


Рис. 8

Художник Сергей Чуб

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

Борис Дружинин

РЕЧНЫЕ ПЕРЕКРЁСТКИ

Уверен, каждый хоть раз в жизни пускал весной кораблики и видел, как два ручейка сливаются и дальше бежит уже один ручей. Большие реки ничуть не хуже. Так, алтайские реки Катунь и Бия сливаются, и дальше течёт великая река Обь.

Бывает и наоборот – река разделяется на две самостоятельные речки, которые в дальнейшем не соединяются и впадают в разные водоёмы. Классический пример *бифуркации* – река Ориноко в Южной Америке, которая делится на собственно Ориноко, текущую на север, и реку Касикьяре, текущую на юг и впадающую в реку Риу-Негру бассейна Амазонки.

А может быть сразу и слияние, и разделение? В это трудно поверить, но может!

Фото 1, wikimedia.org
Slawomir Duda-Klimaszewski

Фото 2, wikimedia.org
Olivier Cleynen

В Польше рядом с городком Вонгровец есть место, где под прямым углом пересекаются две реки – Велна и Нельба (фото 1). Но это скорее условность, потому что Нельба до пересечения мельче, чем её «продолжение». После перекрёстка, огибая центр Вонгровца с двух сторон, реки окончательно сливаются.

Хотя о настоящем пересечении рек нам неизвестно, бывает скрещивание! Например, в Магдебурге судоходный мост над Эльбой соединяет два канала (фото 2).

А в Англии один канал проходит над другим по Бартонскому поворотному мосту, который поворачивается на 90°, чтобы по нижнему каналу мог пройти крупный корабль (фото 3 и 4).

Фото 3, flickr.com
ARG_flickr

Фото 4, geograph.org.uk
Peter Whatley

Художник Евгений Паненко

Григорий Мерзон

Игры Конвея, рисунки Эйлера

1. Игра Конвея. В «Квантике» №10 за 2020 год предлагалась следующая «игра в ростки» Дж.Конвея.

На плоскости нарисовано N крестиков. Двое ходят по очереди. За ход нужно соединить два свободных конца (в начале у каждого крестика по 4 свободных конца) линией, не пересекающей уже проведённые, и поставить на ней засечку (при этом образуется два новых свободных конца; на рисунке 1 пример положения после двух ходов для $N = 2$). Тот, кто не может сделать ход, проигрывает. Кто – начинающий или второй игрок – может выиграть, как бы ни играл соперник?

Задумаемся над тем, почему партия вообще заканчивается.

Игроки делят плоскость на грани (регионы). Партия закончится, когда каждый из $4N$ свободных концов – их количество не меняется в ходе игры! – окажется в отдельной грани.

Подумаем теперь, как появляются новые грани. Каждая новая линия либо соединяет две *компоненты связности* (части) рисунка – и тогда новых граней не появляется («ход первого типа», рис. 2, *а*), либо соединяет два конца в одной компоненте связности – и тогда одна грань разделяется на две («ход второго типа», рис. 2, *б*).

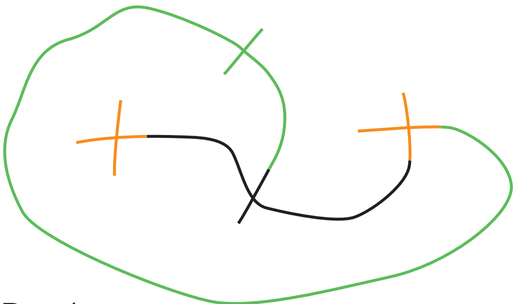


Рис. 1

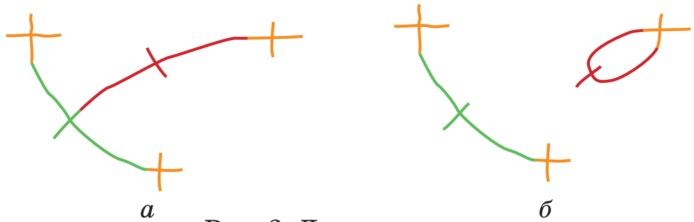


Рис. 2. Два типа ходов:
а) минус одна компонента связности;
б) плюс одна грань

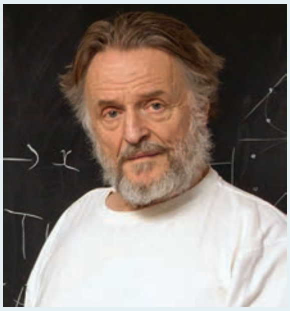
И прочие проблемы

Заметим, что в каждой грани обязательно остаётся хотя бы один свободный конец, поэтому граней не может стать больше, чем концов.

Итак, в начале партии у рисунка N компонент связности, в конце – одна, поэтому всего будет $N-1$ ходов первого типа. В начале партии грань одна, а в конце – столько же, сколько свободных концов, $4N$, поэтому всего будет $4N-1$ ходов второго типа.

	Компоненты связности	Грани
Начало	N	1
	$N-1$ ходов	$4N-1$ ходов
Конец	1	$4N$

То есть всего будет сделано $N-1+$ $+\,4N-1=5N-2$ ходов. Получается, что «игра в ростки» – это игра-шутка: что бы ни делали игроки, если число $5N-2$ нечётно, то делает последний ход и выигрывает первый, если чётно – второй.



Джон Конвей (John Horton Conway)

Знаменитый математик Джон Конвей (1937–2020) придумал в начале 1960-х годов (вместе с Майклом Патерсоном) игру в рассаду («sprouts»), а уже по её мотивам – «игру в ростки» («Brussels sprouts»).

Правила игры в рассаду выглядят даже проще: в начале на плоскости отмечено N точек, а за ход нужно соединить две из точек линией, не пересекающей уже имеющиеся линии, и поставить на ней новую точку; при этом из каждой точки должно выходить не более 3 линий.

Задача 1. Докажите, что партия игры в рассаду заканчивается не более чем за $3N-1$ ходов. Покажите, что количество ходов зависит от действий игроков: партия может закончиться ровно за $3N-1$ ходов, но может и быстрее.

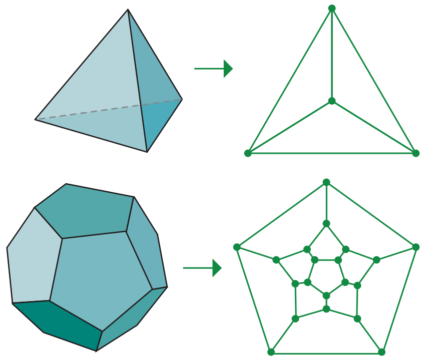
Но кто – начинающий или второй игрок – может выиграть, как бы ни играл соперник? Компьютерный перебор вариантов для небольших N позволил выдвинуть гипотезу: если N даёт остаток 3, 4 или 5 при делении на 6, то выигрывает первый, иначе – второй. Но это до сих пор не доказано!

2. Формула Эйлера. Каждый знает, что у многоугольника столько же вершин, сколько сторон. А какой аналог этого утверждения для многогранников? У многогранника можно сосчитать количество вершин (V), рёбер (E), граней (F). Но, зная только одну из этих величин, нельзя определить другие – см. таблицу.

Многогранник	V	E	F
Куб	8	12	6
7-угольная пирамида	8	14	8
Октаэдр	6	12	8

И всё же между этими тремя величинами, как мы увидим, есть связь!

Перейдём, во-первых, к изображениям многогранников на плоскости, причём таким, на которых рёбра не пересекаются. Например, можно подойти к одной из граней и сфотографировать многогранник сквозь неё, используя сверхширокоугольный объектив, – получатся картинки типа изображённых на рисунке 3.



Тетраэдр

Додекаэдр

Рис. 3

Действуем примерно как в предыдущем разделе: на чистом листе бумаги отметим сначала V вершин, а дальше будем проводить рёбра по одному.

Каждое новое ребро – это линия, которая либо соединяет две компоненты связности (рис. 4, *а*), не меняя числа регионов, либо (если ребро соединяет две вершины в одной компоненте связности) делит один из имеющихся регионов на два (рис. 4, *б*).

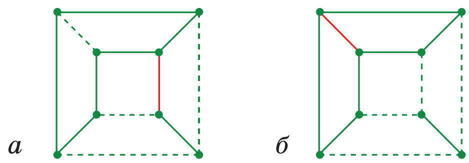


Рис. 4. Два типа ходов: а) минус одна компонента связности; б) плюс одна грань

В начале компонент связности V, в конце – одна; в начале вся плоскость представляет собой один регион, в конце будет F регионов (граней). Поэтому из E проведённых рёбер было $V-1$ первого типа и $F-1$ второго типа. Значит, $E=(V-1)+(F-1)$. Мы получили следующую *формулу Эйлера*.

Если у многогранника V вершин, E рёбер, F граней, то $V-E+F=2$.

На плоскости можно нарисовать правильный N-угольник для любого N. А вот правильных многогранников существует всего пять! И это можно доказать при помощи формулы Эйлера.

Но сначала нужно дать определение правильного многогранника (как ни странно, это не так просто). Мы примем такое: выпуклый многогранник называется *правильным*, если все его грани – правильные многоугольники, а в каждой вершине сходится одно и то же количество граней.

Задача 2. а) Выведите из формулы Эйлера, что если у многогранника все грани – n-угольники, а в каждой вершине сходится по k граней, то

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{E}.$$

б) Докажите, что все правильные многогранники изображены на рисунке.

Можно превратить рисование подобных картинок в игру. В её начале на плоскости отмечено N точек, причём никакие 3 не лежат на одной прямой. Двое по очереди соединяют какую-то пару отмеченных точек отрезком, не пересекающим уже проведённые, пока картинка не разобьётся на треугольники. Тот, кто не может сделать ход, проигрывает.

Задача 3. а) Кто выигрывает, если изначально отмечены вершины правильного N-угольника?

б) Докажите, что как бы ни были расположены точки, получается игра-шутка: кто выиграет, не зависит от действий игроков.

ке 5 (то есть $n=3$, $k=3$, или $n=3$, $k=4$, или $n=4$, $k=3$, или $n=3$, $k=5$, или $n=5$, $k=3$).

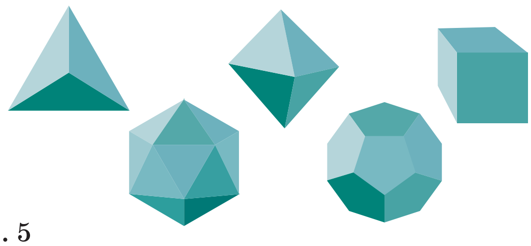


Рис. 5

3. Доказательства и опровержения. Существует ли многогранник, все грани которого – шестиугольники?

Пусть у такого многогранника F граней. В каждой грани 6 рёбер, а каждое ребро входит ровно в 2 грани – значит, $2E=6F$. В каждой грани 6 вершин, в каждой вершине сходится не меньше 3 граней – значит, $3V \leqslant 6F$. Итак, $E=3F$, $V \leqslant 2F$. Но тогда $V-E+F \leqslant 2F-3F+F=0$. А по формуле Эйлера эта сумма должна быть равна 2. Значит, таких многогранников не бывает.

По аналогичным причинам не бывает многогранника, все грани которого семиугольники (и т. д.). Но примеры таких многогранников приведены в «Квантике» №4 за 2020 год! (Заметка «Многогранник из семиугольников?».)

Мораль тут такая: хотя приведённое рассуждение «по сути правильное», полным доказательством его считать не стоит, а опираться на «примерно понятные» рассуждения – дело опасное...

Закончим цитатой из одноимённой с этим разделом книги И. Лакатоша, которая вся состоит из обсуждения доказательств формулы Эйлера и возникающих при этом вопросов:

Сигма. Но ведь ничего не установлено. Мы не можем остановиться теперь.

Учитель. Сочувствую вам. Эта последняя стадия даст важные источники пищи для нашей дискуссии. Но научное исследование «начинается и кончается проблемами». (Покидает классную комнату.)

Бета. Но вначале у меня не было проблем! А теперь у меня нет ничего, кроме проблем!

Художник Мария Усеинова

ЗНАЕТЕ ЛИ ВЫ РИМСКИЕ ЦИФРЫ?

Даны некоторые арифметические примеры, в которых числа записаны так, как они записывались в Древнем Риме:

• + •••• = •••••

••• + ••••• = S••

••• × •••• = •

•••• + ••••• = ?

S × •••• = ?

•• : ••• = ?

Расшифруйте эти примеры. Найти решение и проверить ответ поможет равенство ниже. Его можно сделать верным, заменив «?» уже не на число, а на знак арифметического действия, причём двумя способами.

S ? S = I

Художник Елена Цветаева

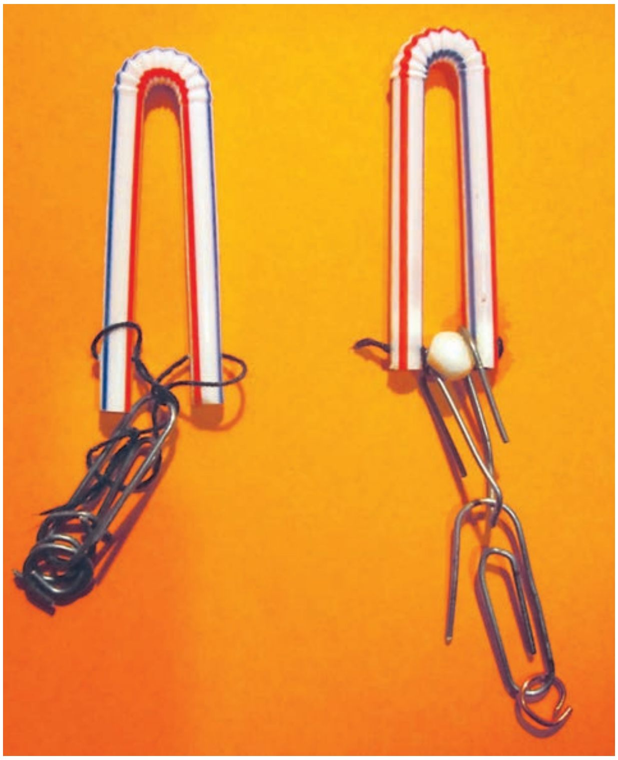
По задаче А. С. Бердичевского на XLVI Традиционной олимпиаде по лингвистике, включённой в книгу «Традиционная Олимпиада по лингвистике: 49 лучших задач» (МЦНМО, 2020)

Михаил Старшов

ПОХОЖЕ, НО – КАКАЯ РАЗНИЦА!

С интервалом в несколько дней были сделаны две невиданные «конструкции» из совершенно бросового материала. Кто обращает внимание на трубочки для питья? Кончился напиток, и трубочка отправилась в мусорное ведро. Но если затратить полчасика, можно из них сделать одну из самых популярных физических игрушек с красивыми именами – декартов поплавок, картезианский водолаз, «американский житель» (в России) или «русский ныряльщик», diver (в Америке).

Как говорится, найди десять отличий (см. фото).



А вот если опустить эти штучки в пластиковую бутылку, или в две разные бутылки, завернуть пробку и слегка сжать бутылку рукой, обе трубочки практически одинаково погрузятся.

Могут опуститься до самого дна, но могут остановиться где-то на середине. Это зависит от силы нажатия на стенки посуды.

Совсем другое дело, когда вы станете сжимать бутылку короткими толчками. Один из поплавков начнёт вращаться вокруг вертикальной оси против часовой стрелки, если смотреть на бутылку сверху. Только один, хотя на глаз между ними разница совершенно незначительная.

Много лет демонстрирую подобную игрушку на сеансах физических опытов, начиная общение с публикой, и всегда она вызывает удивление и интерес присутствующих, будь то дети, студенты или пенсионеры из «университета третьего возраста». Модели использую самые разные, но вот эта, из трубочки, кажется наиболее простой и доступной для повторения.

Как видите, через концы трубочки с помощью иголки продета нитка, на которой подвешены скрепки – без них поплавок слишком легко всплывает. На правом поплавке на нитку нанизан пенопластовый шарик, чтобы концы трубки не были слишком близко друг к другу (зачем – догадайтесь). Поэтому пришлось немного увеличить груз. К скрепкам прибавлено колечко из медной проволоки, иначе приходилось чересчур сильно сжимать бутылку для погружения поплавка. Колечко можно сделать и из скрепки, если найдёте, чем откусить.

Между прочим, внимательный читатель мог обратить внимание на слова о вращении одного из поплавков на фото «против часовой стрелки». А самый догадливый и активный может сделать поплавок сам и организовать вращение в обратном направлении.

Художник Алексей Вайнер

Фото автора

Ольга Красноухова

ПАСЬЯНС из словесных квадратов

Художник Екатерина Ладатко

В этой головоломке мы будем иметь дело с клетчатыми словесными квадратами. В клетки вписываются буквы так, что в строках и столбцах получаются слова. Обычно это нарицательные существительные в начальной форме, как в кроссвордах. Мы ограничимся квадратами 4×4, их несложно составлять самим. Справа – два примера.

с	л	о	й
п	у	з	о
о	ж	о	г
р	а	н	а

п	о	л	е
о	б	е	д
л	е	т	о
е	д	о	к

Верхний квадрат восьмисловный: все слова в его строках и столбцах различны. Нижний квадрат четырёхсловный: он симметричен относительно диагонали, и слова по столбцам те же, что и по строкам.

Задача 1 (для тренировки). Даны 12 слов:

икра	крах	лоза	мера
обоз	опус	осот	рань
таль	учёт	хром	чадо

Используя их по одному разу и записывая по строкам, составьте одновременно 3 восьмисловных квадрата.

Если зайдёте в тупик – вот подсказка: в решении в столбцах появятся 12 новых слов, в том числе *очки*, *роба*, *сеча*, *тать*, *хлор*.

Задача 2 (более сложная). Используя следующие 16 слов по одному разу и записывая их по строкам, составьте одновременно 4 восьмисловных квадрата.

акын	анод	атом	вата
депо	зола	коза	лоза
лоск	овощ	рать	узел
усач	урок	шнур	фара

Удобно написать каждое слово на отдельную картонную полоску и перекладывать полоски. Так можно сэкономить карандашную резинку и уйму времени.

Желаем успехов. Терпение и интуиция, а также знание русского языка вам в помощь!

Борис Дружинин

ЗАДАЧКИ НА ДВИЖЕНИЕ

Эти задачи только напоминают обычные текстовые задачи на движение и работу. Внимательно читайте условие и не торопитесь с ответом!

1. Восемь второклассников бежали кросс. Перед самым финишем Коле удалось обогнать Олега, который до этого бежал вторым. Какое место занял в этом забеге Коля?

2. Хор из 20 детей исполняет гимн школы за 10 минут. За сколько минут исполнит этот гимн хор из 40 детей?

3. Лифт поднимается на 3-й этаж за 12 секунд. За сколько секунд лифт поднимется на 9-й этаж?

4. От дома Вовы до дома Пети ровно 900 метров по прямой дороге. Вова и Петя сразу после завтрака одновременно покинули свои дома и отправились навстречу друг другу. Вова шёл со скоростью 100 метров в минуту, Петя бежал со скоростью 200 метров в минуту. Какое было между ними расстояние за 5 минут до встречи?

5. Петя отправился по тропинке в лес. Навстречу ему по той же тропинке вошёл в лес Саша. Между ними было 10 км. Петя шёл со скоростью 3 км/ч, а Саша со скоростью 2 км/ч. Как только Петя вошёл в лес, у него из-под ног выскочил заяц и бросился бежать по тропинке в сторону Саши со скоростью 10 км/ч. Встретившись с Сашей, заяц тут же повернул обратно и побежал навстречу Пете. Так и метался заяц от Пети к Саше и обратно, пока ребята не встретились. Сколько километров пробежал заяц?

Художник Ольга Демидова

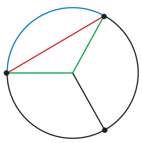
НАШ КОНКУРС, I тур («Квантик» № 9, 2020)

1. *Гриша положил на левую чашку равноплечих весов три гирьки массой 1/8, 1/9 и 1/10 граммов. Можно ли положить на правую чашку две гирьки, веса которых – дроби с числителем 1, чтобы они уравновесили три гирьки на левой чашке?*

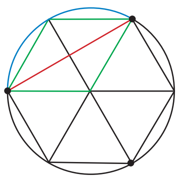
Ответ: да, 1/3 и 1/360. Действительно, $(1/8+1/9)+1/10=17/72+1/10=242/720=121/360$.

С другой стороны, $1/3+1/360=120/360+1/360=121/360$.

2. *На окружности расположены три дома на равном расстоянии друг от друга. Как короче пройти от одного дома до другого – по дуге окружности (синий путь) или через центр окружности (зелёный путь)?*



Ответ: через центр окружности. Впишем в окружность правильный шестиугольник так, чтобы три его вершины совпали с домиками. Отметим ещё один зелёный путь по двум сторонам шестиугольника (см. рисунок). Поскольку шестиугольник состоит из равных правильных треугольников, оба зелёных пути равны. Но каждая из сторон шестиугольника будет короче дуги окружности, опирающейся на эту сторону (ведь кратчайший путь – отрезок). Значит, зелёный путь короче синего.



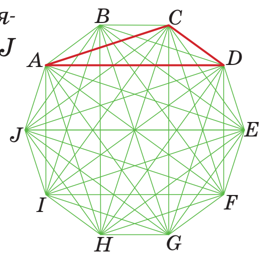
Комментарий. Если радиус окружности равен 1, то длина окружности (утроенный синий путь) равна 2π, а периметр шестиугольника (утроенный зелёный путь) – 6. Тем самым мы доказали, что $\pi>3$.

3. *На листках отрывного календаря на год написаны числа, соответствующие датам каждого месяца. Хулиган Петя хочет оторвать несколько листков (не обязательно подряд) так, чтобы на оставшихся листках не нашлось двух чисел, одно из которых в три раза больше другого. Какое наименьшее число листков ему придётся оторвать?*

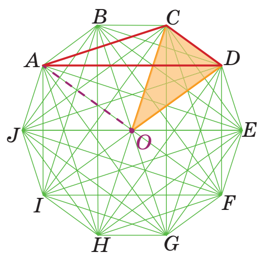
Ответ: 95. Сначала решим задачу для января. Выпишем «цепочки» чисел, в которых одно больше другого в 3 раза, каждый раз начиная с числа, не вошедшего в предыдущие цепочки. Для каждой цепочки выпишем количество листков, которое необходимо оторвать, чтобы «разрушить» все пары чисел. В цепочке 1-3-9-27 необходимо убрать 2 листка, а в цепочках 2-6-18, 4-12, 5-15, 7-21, 8-24 и 10-30 необходимо убрать по 1 листку. То есть в январе нужно оторвать 8 листков.

Понятно, что столько листков нужно оторвать во всех остальных месяцах, кроме февраля. Мы будем отрывать те же самые листки, что и в январе. А в феврале можно оторвать на один листок меньше, потому что в нём нет пары 10-30. Итого, в календаре на год необходимо оторвать $11\cdot8+7=95$ листков.

4. *Дан правильный десятиугольник ABCDEFGHIJ (все его стороны равны, и углы тоже). Какую часть его площади занимает треугольник ACD?*



Ответ: 1/10. Обозначим центр нашего 10-угольника через O. Отрезки CD и AO параллельны. Значит, треугольники ACD и OCD имеют одинаковую площадь: у них равны высоты, опущенные на общее основание CD (такие *перекашивания* с сохранением площади помогают в разных задачах – см., например, статью «Площади и перекашивания» в «Квантике» № 2 за 2020 г.). Весь 10-угольник состоит из равнобедренных треугольников с вершиной в O и основаниями на сторонах 10-угольника. Таких треугольников 10 и площадь каждого равна площади OCD.



5. *На клетчатой плоскости (все клетки – квадратики 1×1) нарисован прямоугольник по линиям сетки. Его разрезали по линиям сетки на N прямоугольников, проведя несколько горизонтальных и вертикальных разрезов от края до края. Докажите, что можно покрасить какие-то из этих N прямоугольников (возможно, один или все) так, чтобы окрашенная область была прямоугольником площади, делящейся на N.*

Пусть горизонтальные разрезы делят вертикальную сторону на a частей, длины которых x_1, x_2, ..., x_a соответственно. По принципу Дирихле, среди $a+1$ чисел 0, x_1, x_1+x_2, $x_1+x_2+x_3$, ..., $x_1+x_2+\ldots+x_a$ найдутся два, имеющих одинаковый остаток при делении на a. Тогда их разность делится на a и равна сумме длин $x_i+\ldots+x_j$ каких-то последовательных частей вертикальной стороны. Они заключены между двумя горизонтальными прямыми (разрезами или сторонами).

Теперь обратимся к вертикальным разрезам. Пусть они делят горизонтальную сторону на b частей. Аналогично, найдутся две вертикальные прямые (разрезы или стороны), расстояние между которыми делится на b.

Тогда площадь прямоугольника, ограниченного четырьмя найденными прямыми (парой горизонтальных и парой вертикальных), будет делиться на ab. Но $N = ab$.

ПЯТЬ СТОРОН СВЕТА («Квантик» № 10, 2020)

Поскольку слова *urait*, *kalaut*, *anait* и *suali* во время прогулки путешественника то и дело «меняют значения», видимо, носители языка мбало ориентируются не по сторонам света. Ориентация относительно человека (направо – налево – вперёд – назад) также не согласуется с данными условия. Ошибка путешественника в том, что он пытается применить к незнакомому языку привычную ему систему ориентации, не задумавшись, насколько это правомерно.

Путь от алмазного рудника к школе – *andoor*, а к дому вождя – *suali*, хотя школа и дом вождя лежат в одном направлении. Но можно заметить, что их разделяет река.

Посмотрим внимательно на использование слова *suali*. Относительно дома вождя это направление на запад, относительно рисовой плантации – на юг, относительно школы и алмазного рудника – на восток. Но во всех этих случаях местные жители указывают путешественнику дорогу через реку!

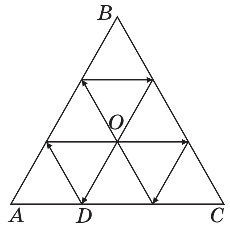
Ответ: основанием системы ориентации в языке мбало является река. Слово *urait* означает «против течения», *kalaut* – «по течению», *anait* – «от реки» и *suali* – «через реку». Отсутствующее в словарике путешественника слово *andoor* означает «к реке».

Дополнение. Интересно, что в языке мбало вообще нет понятий «справа», «слева», «впереди», «позади». Там, где путешественник сказал бы: «Вождь стоит слева от меня, а учитель – справа», – жители деревни выразились бы иначе: «Вождь стоит к реке ‘от путешественника’, а учитель – от реки».

Мбало относится к языкам, в которых люди описывают положение чего-либо с помощью неподвижных ориентиров, а не относительно себя. К удивлению европейцев, носители подобных языков за столом просят передать соль, которая стоит «к югу» от слушающего, а учась танцам, делают «шаг на восток, два шага на запад». Исключение делается для частей своего тела: правая и левая рука остаются правой и левой независимо от расположения их владельца. Чтобы свободно говорить, носителям таких языков надо всегда знать, где они находятся и с какой стороны север и юг или их аналоги.

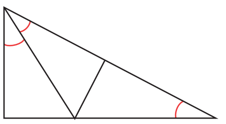
Ориентирами могут быть и стороны света, и местные их эквиваленты, как в языке мбало. В деревне на острове Калимантан, где говорят на этом языке, вся жизнь организована вокруг реки – неудивительно, что река занимает центральную позицию и в системе координат мбало.

ИЗ ЖИЗНИ БАРОНА МЮНХГАУЗЕНА («Квантик» № 10, 2020)



1. Ответ: могут. Пример изображён на рисунке. Поставим шар в точку D, для которой $AD = AC/3$, и пустим его параллельно стороне BC. Тогда шар пройдёт через центр треугольника ABC (точка O) три раза в трёх различных направлениях и вернётся в исходную точку.

2. Ответ: могут. Из трёх одинаковых прямоугольных треугольников с углами 30° и 60° можно составить один большой прямоугольный треугольник с углами 30° и 60° (см. рисунок).



3. Ответ: не обманывает. Заметим, что сумма весов пяти монет не менее $10\,г + 20\,г + 30\,г + 40\,г + 50\,г = 150\,г$, а сумма весов двух монет не более $70\,г + 80\,г = 150\,г$, причём только в случае этих наборов две монеты уравновесят пять монет. Следовательно, если барон положит на одну чашу весов две монеты, а на другую – пять и весы установятся в равновесии, он сможет утверждать, что осталась монета весом 60 г.

4. Ответ: одна гиря. Совсем без гирь не обойтись. Покажем, что достаточно одной гири весом 1 кг. С помощью неё барон может показать, что каждая следующая утка ровно на 1 кг тяжелее предыдущей. Итак, утки имеют веса x, $x+1$, $x+2$, ..., $x+14$ кг. Положим теперь на первую чашу весов 8 самых лёгких уток, а на вторую – семь остальных и гирю 1 кг. Весы установятся в равновесии тогда и только тогда, когда выполнено равенство:

$x+(x+1)+(x+2)+\ldots+(x+7)=$
$=1+(x+8)+(x+9)+\ldots+(x+14),$ откуда $8x+28=7x+78$ и $x=50$. Так барон докажет, что самая лёгкая утка весит 50 кг. Поэтому остальные весят 51 кг, 52 кг, ..., 64 кг.

ПУЗЫРЬКИ («Квантик» № 10, 2020)

1. Чтобы весь воздух оказался в средней части, достаточно закрутить игрушку вокруг вертикальной оси. Всё дело в центробежной силе, которая направлена от оси вращения (вспомните карусель, на которой прижимает к стенкам). Эта сила играет роль силы тяжести, и вода прижимается к стенкам, а пузырьки воздуха «всплывают», то есть движутся против центробежной силы – к оси вращения. По тому же принципу разделяются смеси в центрифугах: более лёгкие компоненты оказываются ближе к оси вращения.

2. Пузырь, пытаясь всплыть, тянет за собой жидкость. Получается горка с пузырём на вершине. Когда два пузыря рядом, уровень воды между пузырями выше, чем с других сторон от пузырей (рис. 1). Всплывая, пузыри устремляются в сторону большего уровня воды и тем самым сближаются. О похожем эффекте читайте в статье «Фотографии свободно плавающих тел» в «Квантике» №8 за 2018 год.

Рис. 1

Обычно у стенки тоже вырастает горка жидкости, например, если вода, чай или газировка налиты не до самого верха. Поэтому пузырь устремится к стенке. Если же жидкость налита с горкой, то на поверхности пузыри будут двигаться не к стенке, а от неё.

3. Если жидкость после того, как пузырь лопается, отчётливо собирается в круглые капли, то поверхностное натяжение играет тут большýю роль. И чем меньше размеры капли, тем больше натяжение доминирует над массой. Представьте, что мы разрезали большую каплю на маленькие. На ту же (суммарную) массу воды придётся гораздо больше энергии поверхностного натяжения: ведь, разрезая каплю, мы как бы растянули её поверхность, причём во много раз, делая разрезы по всей толще капли. Вот меньшие капли и выстреливают выше – суммарно подлетает одно и то же количество воды, но энергия увеличилась!

Поскольку во время схлопывания сила тяжести не играет большой роли, можно понять и почему вертикальные брызги становятся наклонными у краёв сосуда. Раз капля ориентируется не на направление силы тяжести, а на форму поверхности воды вокруг, логично, что у краёв, где поверхность воды наклонена из-за смачивания, аналогично наклоняются и выстрелы.

А вот само возникновение всплеска устроено непросто. Но в сложном процессе схлопывания/распрямления поверхности пузыря часть его жидкости разгоняется к центру, и когда она там сталкивается (сама с собой), ей некуда деваться кроме как вверх и вниз. Верхняя струя, направленная вдоль оси симметрии пузыря (эта ось перпендикулярна поверхности воды, по которой плавает пузырь), быстро распадается на отдельные капли, что мы и видим.

4. Как и в задаче 3, работу на подлёт капельки совершает поверхностное натяжение воды: прежняя капля сливается с водой, позволяя натяжению сокращать общую поверхность. И, как растянутая пружина, которой позволили сжаться, оно, высвобождая энергию, может попутно подкинуть каплю. Причём, как и в задаче 3, чем меньше размер, тем выше поверхностное натяжение подкидывает каплю.

Но детали самого подскока не совсем похожи (правда, тоже замысловаты). В процессе «схлопывания» капельки, у её макушки тоже возникает поток воды к центру. Макушка пытается выстрелить вертикально вверх, и её отрывающаяся верхушка — это и есть следующая капелька. Но тут (в отличие от пузыря) прибывающая вода имеет больше пространства для отступления и разгоняется вверх слабее – не быстрой тонкой струёй, а толстым медленным столбиком. И пока этот столбик (относительно медленно) пытается разорваться, он, как оттянутая вверх пружина, устремляется вниз. В результате, когда верх столбика оторвётся, эта отделившаяся капелька уже быстро летит вниз, и (если не сольётся с водой) отскочит от поверхности вверх – как мяч, с силой брошенный вниз, отскакивает высоко вверх.

ДРЕВНЕИНДИЙСКИЕ КАРШАПАНЫ

На рисунке одинаковыми цветами показаны повторяющиеся оттиски. Одинаковый набор – на монетах 2, 6, 10:

1 2 3

Никто не знает, что эти символы значат. Думают, что два универсальных – солнце (красное) и колесо с шестью выступами (жёлтое) – это символы государственной власти, а остальные обозначают конкретного правителя, место чеканки и т. п., но это лишь предположения.

ЗВЁЗДНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. В $2{,}5\cdot 2{,}5=6{,}25$ раз; в $2{,}5\cdot 2{,}5\cdot 2{,}5\approx 15{,}6$ раз.

2. $0{,}5^{\text{m}}-(-1{,}5^{\text{m}})=2^{\text{m}}$; разница опять в $2{,}5\cdot 2{,}5=6{,}25$ раз.

3. $0{,}5^{\text{m}}$ во столько же раз ярче 1^{m}, во сколько слабее 0^{m}. Поэтому они отличаются в такое число x раз, что $x\cdot x=2{,}5$; $x=\sqrt{2{,}5}\approx 1{,}6$ раз.

4. Разница $-12{,}7^{\text{m}}-(-26{,}7^{\text{m}})=14^{\text{m}}$; $14=5+5+5-1$. Значит, отличие в $100\cdot 100\cdot 100:2{,}5=400\,000$ раз.

5. Разница $27^{\text{m}}-6^{\text{m}}=21^{\text{m}}$, $21=4\cdot 5+1$; отличие в $100\cdot 100\cdot 100\cdot 100\cdot 2{,}5=250$ млн раз.

6. $1000=10\cdot 10\cdot 10$, поэтому громкость отличается на $3\cdot 10=30$ дБ. Миллион – это 6 перемноженных десяток, каждое умножение на 10 соответствует изменению громкости на 10 дБ, поэтому разница $6\cdot 10=60$ дБ. Это разница между тихим шёпотом и звуком проезжающего мимо грузовика.

7. Свет: $5^{\text{m}}-(-12{,}7^{\text{m}})=17{,}7^{\text{m}}$ от слабой звезды до Луны, перепад между самым ярким и самым слабым $5\cdot 100\cdot 100\cdot 100\cdot 100:(2{,}5\cdot 2{,}5)\approx 100$ млн раз. Звук: 120 дБ $=12\cdot 10$ дБ, перепад $10^{12}=1$ миллион миллионов раз. Выходит, у уха диапазон больше, чем у глаза. (Мы считали, что глаз адаптирован к ночному пейзажу.)

8. Площадь объектива увеличилась в 4 раза. Количество улавливаемого телескопом света возросло в 4 раза $\approx 2{,}5\cdot\sqrt{2{,}5}$, то есть на полторы звёздных величины, до $11{,}5^{\text{m}}$. Различие на 5^{m} – это в 100 раз. Чтобы в 100 раз увеличить площадь, нужно взять диаметр в 10 раз больше.

9. Энергия, излучаемая звездой каждую секунду, распределяется равномерно во всех направлениях. Окружим каждую звезду воображаемой сферой с радиусом, равным расстоянию от неё до нас. Радиус сферы вокруг A окажется в 2 раза больше, чем вокруг B, а площадь сферы – в 4 раза больше. Одинаковая энергия излучения «размазывается» на бóльшую площадь, и на каждый кусочек (например, 1 см^2) сферы A попадёт в 4 раза меньше энергии, чем на такой же кусочек сферы B. Значит, звезда A для нас светит в 4 раза слабее, чем B. Это примерно $1{,}5^{\text{m}}$.

Разница 10^{m} – это в $100\cdot 100=10^4$ раз. Значит, звезда в $\sqrt{10000}=100$ раз дальше.

ПОХОЖЕ, НО – КАКАЯ РАЗНИЦА!

На трубке, изображённой на фото справа, есть дырочка. А концы трубки закупорены белыми пробками – их можно разглядеть сквозь едва прозрачную поверхность трубки. Когда сжимают бутылку, порция воды за счёт избыточного давления затекает внутрь трубки. При этом трубка чуточку поворачивается по часовой стрелке. Когда бутылку отпускают, вытекающая из отверстия короткая струйка воды сильно закручивает трубку в обратную сторону.

Как это происходит, можно посмотреть на видео: kvan.tk/diver-rot1 и kvan.tk/diver-rot2

ПАСЬЯНС ИЗ СЛОВЕСНЫХ КВАДРАТОВ

1.

о	п	у	с
ч	а	д	о
к	р	а	х
и	к	р	а

х	р	о	м
л	о	з	а
о	б	о	з
р	а	н	ь

о	с	о	т
м	е	р	а
у	ч	ё	т
т	а	л	ь

2.

у	р	о	к
д	е	п	о
а	к	ы	н
р	а	т	ь

у	с	а	ч
л	о	з	а
о	в	о	щ
в	а	т	а

ш	н	у	р
к	о	з	а
а	т	о	м
ф	а	р	а

л	о	с	к
у	з	е	л
з	о	л	а
а	н	о	д

По столбцам появились 16 слов, которых не было в исходном списке: *удар*, *река*, *опыт*, *конь*, *улов*, *сова*, *азот*, *чаща*, *шкаф*, *нота*, *узор*, *рама*, *луза*, *озон*, *село*, *клад*.

ЗАДАЧКИ НА ДВИЖЕНИЕ

1. Второе. **2.** За 10 минут.

3. Лифт поднимается на 2 этажа за 12 секунд, значит, на 8 этажей поднимется за 48.

4. За 3 минуты Вова пройдёт 300 метров, а Петя пробежит 600 метров и они встретятся. Значит, за 5 минут до встречи они были дома и между ними было 900 метров.

5. Петя и Вася сближались за час на 5 км, и, значит, встретились через 2 часа. За это время заяц со скоростью 10 км/ч пробежал 20 км.

наш КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Первый этап состоит из четырёх туров и идёт с сентября по декабрь.

Высылайте решения задач III тура, с которыми справитесь, не позднее 5 декабря в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

III ТУР

11. а) Можно ли составить из ненулевых цифр 1001-значное число с таким хитрым свойством: если вычеркнуть в нём несколько цифр (не обязательно подряд) так, чтобы осталось семизначное число, то это оставшееся число точно не будет делиться на 77?

б) А если всегда должно оставаться шестизначное число, которое точно не будет делиться на 77?

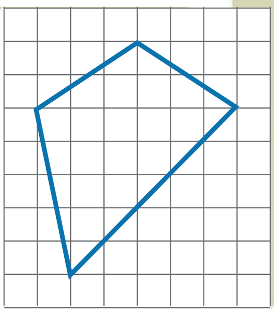
12. За день пребывания в Волшебной школе количество знаний увеличивается на столько процентов (по сравнению с предыдущим днём), какое в этот день число. Например, за 31 октября знаний станет больше на 31%, а за 1 ноября – только на 1%. Незнайка учился в Волшебной школе с 10 по 20 октября включительно, а Знайка – с 11 по 21 октября. У кого теперь больше знаний и на сколько процентов, если до Волшебной школы их знания были одинаковыми?

Авторы: Григорий Гальперин (11), Александр Перепечко (13), Михаил Евдокимов (14, 15)

13. Три орнитолога, каждый на своей башне, следят за одной цаплей. Орнитологи всё время смотрят прямо на цаплю, поворачиваясь вслед за ней. Утром цапля вылетела из гнезда на охоту и вечером вернулась обратно. Могло ли оказаться так, что в результате первый орнитолог сделал ровно один оборот вокруг себя по часовой стрелке, второй – против, а третий – вовсе не сделал ни одного полного оборота?

14. Можно ли записать в каждой вершине куба натуральное число так, чтобы все 8 чисел были различны, но произведение чисел в вершинах каждой грани было одно и то же?

15. а) На клетчатом листе нарисовали четырёхугольник с вершинами в узлах сетки (см. рисунок). Докажите, что у него один из углов в два раза больше другого.



б) Нарисуйте на клетчатом листе выпуклый четырёхугольник с вершинами в узлах сетки, у которого один из углов в четыре раза больше другого.

Художник Николай Крутиков

ЗАДАЧА О ГВОЗДЯХ И НИТКАХ

В дощечку вбито 16 гвоздей. Между гвоздями натянуты нитки, они делят большой квадрат со стороной 36 см на 9 маленьких квадратов, как показано на рисунке. На пересечении любых двух ниток можно вбить гвоздь, а между любыми двумя гвоздями – натянуть нитку (запрещается ниткой огибать несколько гвоздей, нитка может проходить только по прямой). Можно ли вбить два гвоздя на расстоянии 5 см друг от друга, используя только три нитки? А если ниток всего две? Двигать или снимать уже натянутые нитки запрещено!

Автор Георгий Караваев, ученик 11 класса

Художник Елена Цветаева

ISSN 2227-7986