

Э. КАРТАН

ГЕОМЕТРИЯ  
РИМАНОВЫХ  
ПРОСТРАНСТВ

ОПТИ ИХТИ СОСР 1936



CAMIER'S SCIENTIFIQUES  
PUBLIÉS SOUS LA DIRECTION DE M. GASTON JULIA

FASCICULE II

LEÇONS  
SUR LA  
**GÉOMÉTRIE DES ESPACES  
DE RIEMANN**


PAR  
**E. CARTAN**  
PROFESSEUR À LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

PARIS  
GAUTHIER-VILLARS ET S<sup>ie</sup>, ÉDITEURS  
1928

**Э. КАРТАН**

# **ГЕОМЕТРИЯ РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВ**

ПЕРЕВОД С ФРАНЦУЗСКОГО Г. Н. БЕРМАНА  
ПОД РЕДАКЦИЕЙ А. М. ЛОПШИЦА



ОБЪЕДИНЕННОЕ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ИКТИ СССР  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ОБЩЕТЕХНИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ И ПОМОГРАФИИ  
МОСКВА 1936 ЛЕНИНГРАД

## АННОТАЦИЯ

Автор книги — выдающийся французский геометр, создавший новые и глубокие обобщения идей Римана в области многомерной дифференциальной геометрии.

Изучение настоящей книги даст учащемуся не только сведения из области классической римановой геометрии, но и подготовит его к изучению оригинальных мемуаров Картана (в книге изложены основные приемы созданного Картаном «омега-исчисления»). В отличие от существующей литературы по римановой геометрии, книга трактует и некоторые вопросы топологического характера.

Книга рассчитана на научного работника, аспиранта и на учащегося старших курсов математического факультета.

Редакция И. Н. Бронштейна. Оформление Э. М. Бейлиной. Корректурa О. Г. Феденовой. Выпускающий Я. Я Вигант. Поступило к печати с матриц 10/VII 1936 г. Листов 15<sup>1/4</sup>. Учет.-авт. л. 18,8. Тираж 3500. В 1 бум. л. 85056 з. Формат 69×94<sup>1/16</sup>. Колич. бум. л. 7<sup>1/2</sup>. Заказ № 808. Общетехнич. дисциплин № 122. Уполн. Главлита В—37054а.

4-я тип. ОНТИ НКТП СССР «Красный Печатник». Ленинград. Международный пр., 75а.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Этот труд является воспроизведением курса, читанного в течение 1-го семестра 1925/26 г. на физико-математическом факультете Парижского университета. В основном я придерживался точки зрения, принятой мною в посвященном этой же теме девятом выпуске сборника *Mémoires de Mathématiques*. Почти всюду я употреблял аналитический аппарат, связанный с координатной системой, в которой задан линейный элемент изучаемого пространства. Это побудило меня дать символику ковариантного дифференцирования, которую я постарался ввести так, чтобы возможно больше обнажить существенно геометрическую сторону дела и сохранять все время самую тесную связь с евклидовой геометрией. Несмотря на большие услуги, которые оказало и еще будет оказывать математикам ковариантное дифференцирование Риччи и Леви-Чивита, мы будем по возможности избегать слишком формальных выкладок, в которых вакханалия индексов маскирует геометрическую картину, подчас очень простую. Именно эту геометрическую картину я старался сделать возможно более очевидной.

Я уделил достаточно много внимания интересной проблеме изучения пространств, которые, будучи локально (*localement*) евклидовыми, отличаются от нашего обычного пространства своей топологической структурой; это — то, что немецкие математики называют пространственными формами Клиффорда-Клейна. Перспективы, которые открывают основаниям элементарной геометрии и некоторым теориям анализа решение этой проблемы, показали мне достаточно веским поводом для того, чтобы посвятить ей ряд страниц. Отчасти в силу тех же соображений я обратил внимание на важную роль, которую играют в геометрии аксиома плоскости и аксиома свободной подвижности, теснейшим образом связанные одна с другой. Это меня привело, вполне естественно, к общему изучению неевклидовых геометрий, в частности для случая двух измерений. То обстоятельство, что такое изучение может оказать существенные услуги различным отделам математики, не нуждается, впрочем, в обосновании.

Две первые ноты, которыми заканчивается труд, возвращаются снова к некоторым понятиям, изученным уже в основном тексте работы; но здесь делаются гипотезы, накладывающие значительно меньшие требова-

ния на аналитический характер коэффициентов основной дифференциальной формы. Я думаю, что в этом отношении понятие *линейной* (не *поверхностной*) римановой кривизны еще не рассматривалось; она найдет, безусловно, приложения в теории относительности. Третья нота, посвященная пространствам с переменной отрицательной кривизной, примыкает к классическому мемуару Адамара о геодезических линиях на поверхностях, главные кривизны которых имеют всюду противоположные знаки.

Библиографический указатель в конце книги ограничивается наиболее важными работами и мемуарами, связанными с изучаемым предметом.

Мне пришлось оставить в стороне большое количество важных проблем. Они составят, быть может, содержание следующего тома, где будет изложен метод подвижного прямоугольного репера и его многочисленные приложения.

Э. Картан

## ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ; ВЕКТОРЫ, ПОЛИВЕКТОРЫ, ТЕНЗОРЫ

### I. Векторы, декартовы координаты

1. Мы предполагаем, что читателю известны классические теоремы о сложении векторов. Напоминаем, что если обозначать вектор буквой жирного шрифта:  $\mathbf{x}$ , то символом  $m\mathbf{x}$ , где  $m$  — числовой коэффициент, обозначается вектор, параллельный вектору  $\mathbf{x}$ , длина которого находится в отношении  $m$  к длине вектора  $\mathbf{x}$  и который направлен так же, как и вектор  $\mathbf{x}$ , или же в противоположную сторону, в зависимости от того, будет ли  $m$  положительно или отрицательно.

Напомним также, что если в  $n$ -мерном евклидовом пространстве выбрать прямоугольные оси координат, то квадрат длины вектора  $\mathbf{x}$ , компонентами которого служат числа  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , выразится так:

$$X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_n^2;$$

скалярное произведение двух векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  с компонентами  $X_i$  и  $Y_i$  запишется аналогично:

$$xy = X_1Y_1 + X_2Y_2 + \dots + X_nY_n.$$

Заметим, что это скалярное произведение может быть получено как коэффициент при  $2\lambda$  в выражении квадрата длины вектора  $\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$ :

$$(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y})^2 = \mathbf{x}^2 + 2\lambda xy + \lambda^2 \mathbf{y}^2 = \sum_i X_i^2 + 2\lambda \sum_i X_i Y_i + \lambda^2 \sum_i Y_i^2.$$

Скалярное умножение двух векторов коммутативно и дистрибутивно; это выражается следующими формулами:

$$xy = yx; (\mathbf{x} + \mathbf{y})z = xz + yz.$$

Наконец, косинус угла  $V$  между двумя векторами  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  дается следующей формулой:

$$\cos V = \frac{xy}{\sqrt{\mathbf{x}^2 \cdot \mathbf{y}^2}} = \frac{\sum_i X_i Y_i}{\sqrt{\sum_i X_i^2 \cdot \sum_i Y_i^2}}. \quad (1)$$



2. В обыкновенном пространстве наиболее общую систему декартовых координат получают следующим образом: в качестве координатных осей беруг три совершенно произвольные прямые  $Ox_1$ ,  $Ox_2$ ,  $Ox_3$  и на каждой из них выбирают свою единицу длины. Координатами некоторой точки  $M$  будут тогда алгебраические числа, измеряющие проекции вектора  $\overline{OM}$  на эти оси, причем каждая проекция измеряется единицей длины, взятой на соответствующей оси, а проектирование проводится параллельно плоскости, определенной двумя другими осями. Эти координатные системы, более общие, чем те, которые обычно рассматриваются в аналитической геометрии, обладают, очевидно, следующим свойством: от одной из них к любой другой можно перейти посредством *линейного* преобразования с постоянными коэффициентами.

В самом деле, пусть  $x_1^0, x_2^0, x_3^0$  будут координаты нового начала относительно старой системы; кроме того, обозначим проекции *единичных* векторов новой системы на оси старой соответственно через

$$\begin{array}{lll} (O'x'_1) & a_{11}, & a_{21}, & a_{31}, \\ (O'x'_2) & a_{12}, & a_{22}, & a_{32}, \\ (O'x'_3) & a_{13}, & a_{23}, & a_{33}. \end{array}$$

Переход от координат  $x'_1, x'_2, x'_3$  некоторой точки, отнесенной к новой системе координат, к координатам  $x_1, x_2, x_3$  этой же точки в старой координатной системе, совершается по формулам:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1^0 + a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3, \\ x_2 &= x_2^0 + a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3, \\ x_3 &= x_3^0 + a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3. \end{aligned}$$

Обратно, всякая группа формул, имеющая только что указанный вид, определяет некоторое преобразование декартовых координат, причем старая система координат может быть выбрана произвольно.

Если мы имеем дело с вектором, то формулы преобразования его координат принимают вид:

$$\begin{aligned} X_1 &= a_{11}X'_1 + a_{12}X'_2 + a_{13}X'_3, \\ X_2 &= a_{21}X'_1 + a_{22}X'_2 + a_{23}X'_3, \\ X_3 &= a_{31}X'_1 + a_{32}X'_2 + a_{33}X'_3, \end{aligned}$$

где через  $X_1, X_2, X_3$  обозначены проекции вектора на старые оси, а через  $X'_1, X'_2$  и  $X'_3$  — его же проекции на новые оси.

Эти рассуждения без труда могут быть обобщены в случае пространства  $n$  измерений.

3. Компоненты вектора в произвольной декартовой системе координат получаются из его же компонент в прямоугольной координатной системе с помощью линейного однородного преобразования; поэтому квадрат

длины вектора с компонентами  $X_1, X_2, \dots, X_n$  будет дан квадратичной формой <sup>1)</sup>:

$$\sum_{i,j} g_{ij} X_i X_j = g_{11} X_1^2 + \dots + 2g_{12} X_1 X_2 + \dots \quad (2)$$

Знание коэффициентов этой формы позволяет образовать скалярное произведение любых двух векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ . В самом деле:

$$(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{y})^2 = \sum_{i,j} g_{ij} X_i X_j + 2\lambda \sum_{i,j} g_{ij} X_i Y_j + \lambda^2 \sum_{i,j} g_{ij} Y_i Y_j,$$

откуда (п<sup>с</sup>1)

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = \sum_{i,j} g_{ij} X_i Y_j = g_{11} X_1 Y_1 + \dots + g_{12} (X_1 Y_2 + X_2 Y_1) + \dots \quad (3)$$

При этом нужно считать, что индексы  $i, j$  принимают независимо один от другого все возможные значения от единицы до  $n$ .

Отсюда немедленно получается формула для косинуса угла между двумя векторами:

$$\cos V = \frac{\sum_{i,j} g_{ij} X_i Y_j}{\sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} X_i X_j} \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} Y_i Y_j}}. \quad (4)$$

Коэффициенты  $g_{ij}$  можно геометрически интерпретировать как скалярные произведения (попарно) единичных координатных векторов. В самом деле, если обозначить эти векторы через  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ , то вектор  $\mathbf{e}_i$  имеет все компоненты равными нулю, за исключением  $i$ -й компоненты, которая равна единице; применяя формулу (3), получим:

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = g_{ij}. \quad (5)$$

4. Будем отныне отмечать компоненты вектора индексами, поставленными сверху (*верхними* индексами):

$$\mathbf{x} = X^1 \mathbf{e}_1 + X^2 \mathbf{e}_2 + \dots + X^n \mathbf{e}_n.$$

Введем, следуя Риччи и Леви-Чивита,  $n$  новых величин  $X_i$  (не смешивать с теми, которые изображались таким образом в предыдущих номерах!). Под  $X_i$  будем понимать, по определению, скалярное произведение  $\mathbf{x}\mathbf{e}_i$  данного вектора  $\mathbf{x}$  на единичный вектор  $\mathbf{e}_i$ . Формула (3) тогда даст:

$$X_i = \sum_{k=1}^{k=n} g_{ik} X^k \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (6)$$

<sup>1)</sup> Необходимые здесь и в дальнейшем тексте сведения о квадратичных формах читатель найдет в книге М. Бохера, «Введение в высшую алгебру», ГТТИ, 1933 г., главы X и XI. *П.и.м. ред.*

Введение этих новых величин, которые называются *ковариантными компонентами* вектора, в отличие от обыкновенных компонент  $X^i$ , называемых его *контравариантными компонентами*, позволяет представить координатное выражение скалярного произведения двух векторов  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  следующим образом (два способа представления):

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = \sum_i X_i Y^i = \sum_i X^i Y_i. \quad (7)$$

Для квадрата длины вектора получаем следующее выражение:

$$\mathbf{x}^2 = \sum_i X_i X^i. \quad (8)$$

Чтобы сделать обратный переход от ковариантных компонент вектора к его контравариантным компонентам, нужно использовать следующие формулы:

$$X^i = \sum_k g^{ik} X_k, \quad (9)$$

где через  $g^{ij}$  обозначены приведенные миноры определителя:

$$g^{ij} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix},$$

соответствующие элементам  $g_{ij}$  (т. е. миноры этого определителя, деленные на значение самого определителя).

Заметим, что вектор, все контравариантные компоненты которого, за исключением  $i$ -й, равны нулю, параллелен  $i$ -й оси координат; если же у вектора равны нулю все ковариантные компоненты за исключением  $i$ -й, то такой вектор перпендикулярен всем координатным осям, за исключением  $i$ -й, т. е. перпендикулярен  $(n-1)$ -мерной гиперплоскости, определенной этими  $(n-1)$  осями.

Ясно, что в прямоугольных координатах ковариантные и контравариантные компоненты вектора совпадают.

## II. Бивекторы, системы бивекторов

5. *Бивектором* называют фигуру, образованную двумя векторами  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ , взятыми в определенном порядке.

Это определение не имеет смысла, пока не будет определено равенство двух бивекторов.

Свяжем с бивектором параллелограмм  $OACB$ , стороны которого  $OA$  и  $OB$  равны и параллельны векторам  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$ , и установим направление обхода по контуру этого параллелограмма, начиная его с  $OA$ . Установив это, будем говорить, что два бивектора равны, если связанные с ними парал-

делограммы лежат в одной плоскости (или в параллельных плоскостях), имеют одинаковые площади и одинаковое направление обхода. Плоскостью бивектора мы будем называть плоскость, в которой лежит связанный с ним параллелограмм, или любую ей параллельную плоскость.

Пусть даны два равных бивектора, один из которых определен векторами  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ , другой — векторами  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ . Уравнения, выражающие, что некоторый вектор  $\mathbf{z}$  перпендикулярен к плоскости первого бивектора, имеют вид:

$$\begin{aligned} Z_1 X^1 + Z_2 X^2 + \dots + Z_n X^n &= 0, \\ Z_1 Y^1 + Z_2 Y^2 + \dots + Z_n Y^n &= 0. \end{aligned}$$

Мы видим, что компоненты  $Z_1, \dots, Z_n$  этого вектора связаны одним единственным соотношением, которое можно получить, исключая  $Z_1$  из написанных выше равенств, а именно:

$$Z_2 (X^1 Y^2 - X^2 Y^1) + Z_3 (X^1 Y^3 - X^3 Y^1) + \dots + Z_n (X^1 Y^n - X^n Y^1) = 0.$$

Положим:

$$P^{ij} = X^i Y^j - X^j Y^i, \quad (10)$$

и аналогично:

$$Q^{ij} = U^i V^j - U^j V^i.$$

Два уравнения

$$\sum_{i>1} Z_i P^{1i} = 0, \quad \sum_{i>1} Z_i Q^{1i} = 0$$

должны быть эквивалентными, поэтому величины  $P^{1i}$  и  $Q^{1i}$  пропорциональны. Это обозначает в сущности только то, что отношение  $\frac{P^{ij}}{Q^{ij}}$  остается неизменным, если изменяется только один из индексов  $i$  или  $j$ . Отсюда тотчас же следует, что то же имеет место, каковы бы ни были оба индекса. Первое условие равенства двух бивекторов выражается, таким образом, соотношениями вида:

$$Q^{ij} = \lambda P^{ij}.$$

Аналогичное рассуждение приведет нас, как нетрудно заметить, к соотношениям:

$$Q_{ij} = \mu P_{ij},$$

в которых положено:

$$P_{ij} = X_i Y_j - X_j Y_i; \quad Q_{ij} = U_i V_j - U_j V_i, \quad (11)$$

причем ясно, что  $\mu = \lambda$ .

6. Чтобы выразить второе условие равенства бивекторов, попробуем подсчитать площадь параллелограмма  $OACB$ , связанного с первым из данных бивекторов. Обозначив квадрат этой площади через  $m^2$ , получим:

$$\begin{aligned} m^2 &= \overline{OA}^2 \cdot \overline{OB}^2 \cdot \sin^2 \widehat{AOB} = \overline{OA}^2 \cdot \overline{OB}^2 - (\overline{OA} \cdot \overline{OB} \cos \widehat{AOB})^2 = \\ &= x^2 \cdot y^2 - (xy)^2 = \begin{vmatrix} x^2 & xy \\ yx & y^2 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Заменяя скалярные произведения их значениями, получим:

$$m^2 = \begin{vmatrix} \sum X_i X^i & \sum X_i Y^i \\ \sum Y_i X^i & \sum Y_i Y^i \end{vmatrix}.$$

Каждый член разложения правой части будет представлять собою произведение четырех множителей, в которое войдут только два различных индекса, причем каждый из них войдет два раза вверх и два раза вниз. Совокупность членов, для которых этими двумя индексами служат единица и двойка, равна, очевидно, определителю:

$$\begin{vmatrix} X_1 X^1 + X_2 X^2 & X_1 Y^1 + X_2 Y^2 \\ Y_1 X^1 + Y_2 X^2 & Y_1 Y^1 + Y_2 Y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X_1 X_2 \\ Y_1 Y_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} X^1 X^2 \\ Y^1 Y^2 \end{vmatrix} = P_{12} P^{12}.$$

Отсюда следует интересующая нас формула:

$$m^2 = \sum_{(ij)} P_{ij} P^{ij}; \quad (12)$$

суммирование в правой части равенства распространяется на все сочетания из индексов  $1, 2, \dots, n$  по два: на это и указывает символ  $(ij)$ , в противоположность знаку  $i, j$ , который фигурирует в суммах формул (2), (3) и (4).

Вторым условием равенства двух бивекторов является, таким образом,  $\lambda^2 = 1$ , т. е.

$$Q^{ij} = \pm P^{ij}.$$

Третье условие (совпадение направлений обхода) сведется, очевидно, к выбору знака  $\pm$  в предыдущей формуле: мы приходим, таким образом, к следующей теореме:

*Чтобы два бивектора были равны, необходимо и достаточно, чтобы  $\frac{n(n-1)}{2}$  величин  $P^{ij}$ , определенных формулами (10), были у обоих бивекторов одинаковы.*

Эти величины  $P^{ij}$  называются *координатами* бивектора.

Условия равенства бивекторов могут быть также сведены к равенству величин  $P_{ij}$ , которые называются *ковариантными компонентами* бивектора, в отличие от  $P^{ij}$ , которые называются его *контравариантными компонентами*.

Отметим, наконец, формулу (12), которая дает квадрат меры<sup>1)</sup> бивектора.

7. Для того, чтобы найти условия равенства двух бивекторов, можно идти и другим путем. Условия, выражающие, что некоторый вектор  $\mathbf{z}$  параллелен плоскости бивектора, определенного с помощью векторов  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ,

<sup>1)</sup> То-есть квадрат площади параллелограмма, характеризующего данный бивектор.  
Прим. ред.

сводятся к тому, что должны равняться нулю все определители третьего порядка, порожденные матрицей:

$$\begin{vmatrix} Z^1 & Z^2 & \dots & Z^n \\ X^1 & X^2 & \dots & X^n \\ Y^1 & Y^2 & \dots & Y^n \end{vmatrix}.$$

В частности, между  $Z^1$ ,  $Z^2$  и  $Z^3$  должно существовать единственное соотношение:

$$Z^1 P^{23} + Z^2 P^{31} + Z^3 P^{12} = 0.$$

Отсюда следует, что равенство двух бивекторов влечет за собою равенство отношений:

$$\frac{Q^{23}}{P^{23}} = \frac{Q^{31}}{P^{31}} = \frac{Q^{12}}{P^{12}};$$

в сущности это и означает, что отношение  $\frac{Q^{ij}}{P^{ij}}$  не изменяется, если изменять только один из индексов  $i, j$ , сохраняя другой постоянным. Значит, все эти отношения равны между собою. Обратно, если удовлетворены соотношения:

$$Q^{ij} = \lambda P^{ij},$$

то условия, выражающие, что вектор  $\mathbf{Z}$  параллелен плоскости бивектора, будут, очевидно, для обоих бивекторов одни и те же.

Установив все это, заметим, что отношение  $\frac{Q^{12}}{P^{12}}$  является не чем иным, как отношением площадей двух параллелограммов, которые служат проекциями на плоскость  $x_1 O x_2$  параллелограммов, связанных с нашими бивекторами. При этом проектирование производится в направлении  $(n-2)$ -мерной гиперплоскости, образованной осями  $Ox_3, \dots, Ox_n$ . Два бивектора будут равны, если это отношение равно единице, и наоборот. Условиями равенства будут, следовательно:

$$Q^{ij} = P^{ij}.$$

8. Переход от контравариантных компонент  $P^{ij}$  бивектора к его ковариантным компонентам  $P_{ij}$  выполняется без затруднений. Мы имеем:

$$P_{ij} = \begin{vmatrix} X_i & X_j \\ Y_i & Y_j \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_k g_{ik} X^k & \sum_k g_{jk} X^k \\ \sum_k g_{ik} Y^k & \sum_k g_{jk} Y^k \end{vmatrix} = \sum_{(hk)} \begin{vmatrix} g_{ih} & g_{ik} \\ g_{jh} & g_{jk} \end{vmatrix} P^{hk}, \quad (13)$$

в последнем выражении суммирование распространено на все сочетания индексов 1, 2, ...,  $n$  по два.

Ясно, что квадрат меры бивектора, а именно:

$$\sum_{(ij)} P^{ij} P_{ij} = \sum_{(ij), (hk)} (g_{ih} g_{jk} - g_{ik} g_{jh}) P^{ij} P^{hk}, \quad (14)$$

определяется выражением, вполне аналогичным выражению квадрата длины вектора [формула (2)]. Единственное различие заключается в том, что бивектор имеет  $\frac{n(n-1)}{2}$  компонент и что коэффициентами соответствующей квадратичной формы являются выражения, несущие по два *сложных* индекса  $(ij)$  и  $(kh)$ , а именно:

$$g_{(ij)(kh)} = g_{ik}g_{jk} - g_{ik}g_{jh};$$

нетрудно заметить, что эти коэффициенты тоже являются симметричными:

$$g_{(ij)(kh)} = g_{(kh)(ij)}.$$

Более того, ковариантные компоненты  $P_{ij}$  образуются из контравариантных  $P^{hk}$  по такому же точно правилу, как и в случае обыкновенных векторов, только роль коэффициентов в  $g_{ij}$  играют теперь коэффициенты  $g_{(ij)(kh)}$ . Значит, каждый бивектор может быть представлен с помощью вектора в евклидовом пространстве  $\frac{n(n-1)}{2}$  измерений, причем метрика этого пространства должна быть определена посредством коэффициентов  $g_{(ij)(kh)}$ .

9. Эти результаты позволяют определить скалярное произведение двух бивекторов с помощью любого из двух равных выражений:

$$\sum_{(ij)} P_{ij} Q^{ij} = \sum_{(ij)} P^{ij} Q_{ij}. \quad (15)$$

Числовое значение этого скалярного произведения не зависит, очевидно, от выбора координатной системы. Чтобы интерпретировать его геометрически, выберем *прямоугольную* систему координат, причем две оси  $Ox_1$  и  $Ox_2$  возьмем в плоскости, параллельной плоскости бивектора. Компоненты  $P^{ij} = P_{ij}$  будут все нулями, за исключением  $P_{12}$ , и скалярное произведение сведется к следующему выражению:

$$P_{12} Q_{12} = (X_1 Y_2 - Y_1 X_2) (U_1 V_2 - V_1 U_2).$$

Оно, очевидно, равно произведению меры  $P_{12}$  первого бивектора на меру проекции второго бивектора на плоскость первого. Оно равно нулю в том случае, если существует направление, параллельное плоскости одного из бивекторов и перпендикулярное плоскости другого.

Можно сейчас же проверить, что в обычном трехмерном пространстве скалярное произведение двух бивекторов равно произведению их мер на косинус угла между их плоскостями. Естественно и в любом пространстве определить угол  $\varphi$  между плоскостями двух бивекторов **a** и **b** с помощью формулы

$$\cos \varphi = \frac{ab}{\sqrt{a^2} \sqrt{b^2}};$$

правая часть равенства, как легко видеть, по абсолютной величине всегда меньше единицы.

10. *Внутренним произведением* бивектора с компонентами  $P^{ij}$  и вектора с компонентами  $Z^i$  называют вектор  $\mathbf{u}$ , имеющий компонентами величины  $U^i$ , определенные формулами:

$$U^i = \sum_k P^{ki} Z_k \quad (16)$$

Важно заметить, что этот вектор имеет значение, не зависящее от выбора координатной системы. В самом деле, вычислим скалярное произведение этого вектора  $\mathbf{u}$  на произвольный вектор  $\mathbf{v}$ . Получим:

$$\sum_i U^i V_i = \sum_{i,k} P^{ki} Z_k V_i = \sum_{(i,k)} P^{ki} (Z_k V_i - Z_i V_k);$$

но это — не что иное, как скалярное произведение данного бивектора и бивектора, определенного векторами  $\mathbf{z}$  и  $\mathbf{v}$ , скалярное произведение, не зависящее от выбора координатных осей. Произведение  $\mathbf{uv}$  при любом  $\mathbf{v}$  не зависит от координатной системы; значит, это же можно сказать и о самом векторе  $\mathbf{u}$ .

Скалярное произведение бивекторов, которое мы только что рассматривали, может быть записано и так:

$$\sum_{(i,k)} P_{ki} (Z^k V^i - Z^i V^k),$$

а значит,

$$U_i = \sum_k P_{ki} Z^k. \quad (17)$$

Чтобы интерпретировать геометрически вектор  $\mathbf{u}$ , введем прямоугольные оси, две из которых ( $Ox_1$  и  $Ox_2$ ) параллельны плоскости бивектора. Получим:

$$U_1 = -P_{12} Z_2, \quad U_2 = P_{12} Z_1, \quad U_3 = 0, \quad \dots, \quad U_n = 0.$$

При этом немедленно получают следующие свойства интересующего нас вектора  $\mathbf{u}$ :

1. Вектор  $\mathbf{u}$  равен нулю, когда вектор  $\mathbf{z}$  перпендикулярен плоскости бивектора.
2. Если вектор  $\mathbf{z}$  параллелен плоскости бивектора (а тогда его можно считать параллельным  $Ox_1$ ), то вектор  $\mathbf{u}$  получится из вектора  $\mathbf{z}$  путем поворота последнего на  $90^\circ$  в плоскости, параллельной плоскости бивектора, в направлении его положительного обхода, причем результат умножается на число, измеряющее этот бивектор.
3. В общем случае скалярное произведение не изменится, если заменить вектор  $\mathbf{z}$  его ортогональной проекцией на плоскость бивектора.



В трехмерном пространстве внутреннее произведение бивектора  $\mathbf{a}$  на вектор  $\mathbf{z}$  равно по величине произведению меры бивектора на длину вектора  $\mathbf{z}$  и на косинус угла между вектором и плоскостью бивектора. В общем случае мы определим угол  $\varphi$  между направлением вектора  $\mathbf{z}$  и плоскостью бивектора  $\mathbf{a}$  посредством формулы:

$$\cos \varphi = \frac{\text{мера } \mathbf{a} \cdot \text{мера } \mathbf{z}}{\text{мера } \mathbf{a} \cdot \text{мера } \mathbf{z}},$$

где мы через «мера  $\mathbf{a}$ » обозначаем число, которым измеряется площадь параллелограмма, связанного с  $\mathbf{a}$ .

11. Будем называть *системой бивекторов* совокупность любого числа бивекторов. Скалярным произведением системы бивекторов на заданный бивектор назовем алгебраическую сумму скалярных произведений бивекторов системы на данный бивектор.

Две системы бивекторов будем считать *равными*, если равны их скалярные произведения на *произвольные* бивекторы. Отсюда следует, что система бивекторов вполне определяется (если отождествлять различные, но *равные* между собой системы) посредством  $\frac{n(n-1)}{2}$  количеств, которые получаются в результате сложения компонент бивекторов системы, причем складываются компоненты, имеющие одинаковые индексы. Система бивекторов имеет контравариантные компоненты  $P^{ij}$  и ковариантные компоненты  $P_{ij}$ .

Нетрудно будет определить, как это было сделано и для одного бивектора, скалярное произведение двух систем бивекторов, внутреннее произведение системы бивекторов на вектор, и т. д.

В пространстве трех измерений всякая система бивекторов равна некоторому единственному бивектору. Пусть, в самом деле,  $P^{23}, P^{31}, P^{12}$  — три произвольных числа; рассмотрим два независимых решения:  $X^1, X^2, X^3$  и  $Y^1, Y^2, Y^3$  линейного однородного уравнения:

$$P^{23}X^1 + P^{31}X^2 + P^{12}X^3 = 0;$$

отсюда немедленно выводим:

$$\frac{X^2Y^3 - Y^2X^3}{P^{23}} = \frac{X^3Y^1 - X^1Y^3}{P^{31}} = \frac{X^1Y^2 - X^2Y^1}{P^{12}}.$$

Значит, достаточно умножить числа  $Y^i$  на один и тот же соответственно подобранный множитель  $\rho$ , чтобы бивектор, определенный векторами  $\mathbf{x}$  и  $\rho\mathbf{y}$ , имел наперед заданные компоненты.

В пространстве четырех измерений такая теорема не имеет места. Впрочем, легко проверить, что компоненты  $P^{ij}$  любого бивектора удовлетворяют соотношениям, имеющим вид:

$$P^{ij}P_{kl} + P^{ik}P_{lj} + P^{il}P_{jk} = 0, \quad (i, j, k, l = 1, 2, \dots, n).$$

Всякая система бивекторов, очевидно, равна системе  $\frac{n(n-1)}{2}$  бивекторов, соответственно параллельных плоскостям, определенным координатами

натными осями, взятыми попарно. Достаточно, в самом деле, выбрать бивекторы, все компоненты которых нули, за исключением компоненты  $P^{ij}$ .

12. Построение бивектора с помощью двух данных векторов может рассматриваться как некоторый вид *умножения*. Если условиться обозначать с помощью символа  $[xy]$  бивектор, определенный векторами  $x$  и  $y$ , то немедленно же получатся формулы:

$$[xy] = -[yx];$$

$$[(x+y)z] = [xz] + [yz]^1.$$

Это умножение дистрибутивно, но не коммутативно, так как меняет знак при изменении порядка множителей. Бивектор  $[xy]$  называют *внешним произведением* векторов  $x$  и  $y$ .

Если положим

$$x = \sum_i X^i e_i, \quad y = \sum_i Y^i e_i,$$

то получим, применяя правила внешнего умножения:

$$[xy] = \sum_{(i,j)} X^i Y^j [e_i e_j] = \sum_{(i,j)} (X^i Y^j - X^j Y^i) [e_i e_j] = \sum_{(i,j)} P^{ij} [e_i e_j].$$

Это снова дает нам разложение бивектора на  $\frac{n(n-1)}{2}$  бивекторов, параллельных  $\frac{n(n-1)}{2}$  координатным плоскостям.

### III. Тривекторы

13. *Три вектором* называют фигуру, образованную тремя векторами, взятыми в определенном порядке. Через точку  $O$  проведем три вектора  $\overline{OA}$ ,  $\overline{OB}$ ,  $\overline{OC}$ , равные трем данным векторам; плоское трехмерное многообразие (трехмерную гиперплоскость), определенное точками  $O$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , будем называть гиперплоскостью тривектора; этим определяется только направление гиперплоскости, т. е. она может быть перемещена параллельно самой себе.

Будем говорить, что два тривектора равны, если их гиперплоскости параллельны, если параллелепипеды, построенные на трех векторах, определяющих эти тривекторы и перенесенных в одну точку, имеют один и тот же объем, если, наконец, оба параллелепипеда одинаково ориентированы.

В пространстве трех измерений объем  $V$  параллелепипеда, построенного на трех векторах  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , связан с определителем

$$P^{123} = \begin{vmatrix} X^1 & X^2 & X^3 \\ Y^1 & Y^2 & Y^3 \\ Z^1 & Z^2 & Z^3 \end{vmatrix},$$

<sup>1)</sup> Под суммой бивекторов здесь понимается система бивекторов, определяемая слагаемыми бивекторами. *Прим. ред.*

составленным из компонент этих трех векторов. В самом деле, отношение  $\frac{P_{123}}{V}$  не меняется, если к вектору  $\mathbf{z}$  прибавить линейную комбинацию векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ . Объем при этом не меняется в силу того, что основание (построенное на  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ ) и высота не меняются. Значение определителя тоже не меняется, так как к последней строке прибавляется линейная комбинация двух первых. Можно, следовательно, не меняя отношения  $\frac{P_{123}}{V}$ , свести рассуждение к случаю, когда вектор  $\mathbf{z}$  направлен параллельно оси  $Ox_3$ ; таким же образом вектор  $\mathbf{x}$  можно свести к вектору, параллельному  $Ox_1$ , вектор  $\mathbf{y}$  — к вектору, параллельному  $Ox_2$ . Тогда получим:

$$\frac{P_{123}}{V} = \frac{x_1 y_2 z_3}{V},$$

причем правая часть равна, очевидно, объему  $V_0$  параллелепипеда, построенного на трех единичных координатных векторах

Чтобы вычислить этот объем  $V_0$ , заметим, что в прямоугольных координатах объем любого параллелепипеда выразится так:

$$V = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix},$$

и, следовательно, возводя определитель правой части в квадрат, получим для квадрата объема:

$$V^2 = \begin{vmatrix} \sum_i X_i^2 & \sum_i X_i Y_i & \sum_i X_i Z_i \\ \sum_i Y_i X_i & \sum_i Y_i^2 & \sum_i Y_i Z_i \\ \sum_i Z_i X_i & \sum_i Z_i Y_i & \sum_i Z_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & xy & xz \\ yx & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{vmatrix}.$$

Прилагая этот результат к параллелепипеду, построенному на трех единичных координатных векторах  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ , получим:

$$V_0^2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = g.$$

Следовательно, объем  $V$  тривектора выразится так:

$$V = V_0 P_{123} = \sqrt{g} P_{123}. \quad (18)$$

Что касается ковариантной компоненты

$$P_{123} = \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{vmatrix},$$

то ее найдем без труда, заменяя  $X_i, Y_i, Z_i$  их значениями и поступая дальше так же, как в ( $n^\circ 8$ ). При этом получается:

$$P_{123} = g P^{123},$$

следовательно, в частности

$$V^2 = P_{123} P^{123}. \quad (19)$$

14. Можно доказать, как это было сделано для бивекторов, что в пространстве более чем трех измерений равенство двух тривекторов выражается равенством контравариантных компонент этих тривекторов:

$$P^{ijk} = \begin{vmatrix} X^i & X^j & X^k \\ Y^i & Y^j & Y^k \\ Z^i & Z^j & Z^k \end{vmatrix}$$

или же равенством их ковариантных компонент:

$$P_{ijk} = \begin{vmatrix} X_i & X_j & X_k \\ Y_i & Y_j & Y_k \\ Z_i & Z_j & Z_k \end{vmatrix}.$$

Квадрат меры  $m$  тривектора равен:

$$m^2 = \sum_{(ijk)} P_{ijk} P^{ijk}.$$

Скалярное произведение двух тривекторов определим с помощью одного из следующих двух выражений:

$$\sum_{(ijk)} P_{ijk} Q^{ijk} = \sum_{(ijk)} P^{ijk} Q_{ijk},$$

которые интерпретируются геометрически так же, как и в случае бивекторов.

Далее можно определить *системы тривекторов* и показать, что построение тривектора по трем данным векторам может рассматриваться как некоторое внешнее умножение

$$[xyz] = [yzx] = [zxy] = -[xzy] = -[zyx] = -[yxz].$$

#### IV. Поливекторы

15. Предыдущие понятия естественно обобщаются, если в пространстве  $n > 3$  измерений определить объем  $n$ -мерного параллелепипеда, построенного на  $n$  данных векторах. В прямоугольных координатах этот объем определяют посредством определителя, элементами которого служат проекции этих векторов; в общих декартовых координатах объем

параллелепипеда, построенного на  $n$  единичных координатных векторах, равен корню квадратному из детерминанта  $g$  величин  $g_{ij}$ .

Если  $p$  — целое число, меньшее или равное  $n$ , то  $p$ -вектор определяется совокупностью  $p$ -векторов, расположенных в некотором определенном порядке. Два  $p$ -вектора будем полагать равными, если у них одинаковы контравариантные компоненты

$$P^{i_1 i_2 \dots i_p} = \begin{vmatrix} X^{i_1} & X^{i_2} & \dots & X^{i_p} \\ Y^{i_1} & Y^{i_2} & \dots & Y^{i_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U^{i_1} & U^{i_2} & \dots & U^{i_p} \end{vmatrix}$$

или же ковариантные компоненты:

$$P_{i_1 i_2 \dots i_p} = \begin{vmatrix} X_{i_1} & X_{i_2} & \dots & X_{i_p} \\ Y_{i_1} & Y_{i_2} & \dots & Y_{i_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{i_1} & U_{i_2} & \dots & U_{i_p} \end{vmatrix};$$

здесь  $X, Y, \dots, U$  — это те  $p$  векторов, которые определяют рассматриваемый  $p$ -вектор.

Квадрат меры  $p$ -вектора дается выражением:

$$\sum_{(i_1 i_2 \dots i_p)} P_{i_1 i_2 \dots i_p} P^{i_1 i_2 \dots i_p}.$$

Можно определить скалярное произведение двух  $p$ -векторов, системы  $p$ -векторов и т. д.

Если  $p = n$ , то мера  $n$ -вектора равна:

$$\sqrt{g} P^{12\dots n} = \frac{1}{\sqrt{g}} P_{12\dots n} = \sqrt{P^{12\dots n} P_{12\dots n}}.$$

## V Дополнительные поливекторы

**16.** Будем называть *дополнительным* поливектором по отношению к некоторому данному  $p$ -вектору  $\mathbf{a}$   $(n-p)$ -вектор  $\mathbf{b}$ , удовлетворяющий следующим трем условиям:

1.  $(n-p)$ -мерная гиперплоскость поливектора вполне нормальна  $p$ -мерной гиперплоскости поливектора  $\mathbf{a}$ , т. е. каждый из  $p$ -векторов, определяющих  $\mathbf{a}$ , перпендикулярен каждому из  $(n-p)$ -векторов, определяющих  $\mathbf{b}$ .

2. Поливекторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  имеют равные меры.

3.  $n$ -вектор, определенный с помощью  $p$ -векторов, определяющих  $\mathbf{a}$ , и  $(n-p)$ -векторов, определяющих  $\mathbf{b}$ , обладает положительной ориентацией.

Последнее условие предполагает, что пространство ориентировано. Это значит, что относительно некоторого определенного  $n$ -вектора сде-

лано соглашение, считать ли его ориентацию положительной или отрицательной. Условимся в дальнейшем брать  $n$  единичных координатных векторов таким образом, чтобы  $n$ -вектор  $[e_1 e_2 \dots e_n]$  имел положительную ориентацию.

Рассмотрим сначала наиболее простой случай, именно положим  $n=3$ , и попробуем определить вектор  $Z$ , дополнительный по отношению к данному бивектору  $[xy]$ .

Прежде всего получим:

$$Z_1 X^1 + Z_2 X^2 + Z_3 X^3 = 0,$$

$$Z_1 Y^1 + Z_2 Y^2 + Z_3 Y^3 = 0,$$

откуда

$$\frac{Z_1}{P_{23}} = \frac{Z_2}{P_{31}} = \frac{Z_3}{P_{12}} = \lambda;$$

аналогичное вычисление даст:

$$\frac{Z^1}{P_{23}} = \frac{Z^2}{P_{31}} = \frac{Z^3}{P_{12}} = \mu.$$

Чтобы определить  $\lambda$  и  $\mu$ , будем исходить из равенства:

$$\sum_i Z_i Z^i = \lambda \mu \sum_{(ij)} P_{ij} P^{ij},$$

из которого на основании второго условия получаем:

$$\lambda \mu = 1$$

Наконец, рассмотрим тривектор  $[xyz]$ , контравариантная компонента которого равна:

$$\begin{vmatrix} X^1 & X^2 & X^3 \\ Y^1 & Y^2 & Y^3 \\ Z^1 & Z^2 & Z^3 \end{vmatrix} = Z^1 P^{23} + Z^2 P^{31} + Z^3 P^{12} = \mu \sum_{(ij)} P_{ij} P^{ij}.$$

Мера этого тривектора, т. е.

$$\sqrt{g} \mu \sum_{(ij)} P_{ij} P^{ij},$$

должна равняться квадрату меры бивектора, откуда следует:

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{g}}; \quad \lambda = \sqrt{g}.$$

Вектор, дополнительный к заданному бивектору, имеет, следовательно, такие компоненты;

$$\left. \begin{aligned} Z_1 &= \sqrt{g} P^{23}, & Z_2 &= \sqrt{g} P^{31}, & Z_3 &= \sqrt{g} P^{12}; \\ Z^1 &= \frac{1}{\sqrt{g}} P_{23}, & Z^2 &= \frac{1}{\sqrt{g}} P_{31}, & Z^3 &= \frac{1}{\sqrt{g}} P_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Этот вектор представляет собою то, что обычно называют *векторным произведением* векторов  $x$  и  $y$ .

В свою очередь бивектор  $[xy]$  будет дополнительным по отношению к вектору  $z$ .

17. Внутреннее произведение  $v$  бивектора  $[xy]$  и вектора  $u$  было определено с помощью формул:

$$\begin{aligned} V_1 &= P_{31}U^2 + P_{31}U^3, \\ V_2 &= P_{12}U^1 + P_{32}U^3, \\ V_3 &= P_{13}U^1 + P_{23}U^2. \end{aligned}$$

Вводя вектор  $z$ , дополнительный к  $[xy]$ , получим:

$$\begin{aligned} V_1 &= \sqrt{g} (Z^2U^3 - Z^3U^2), & V_2 &= \sqrt{g} (Z^3U^1 - Z^1U^3), \\ V_3 &= \sqrt{g} (Z^1U^2 - Z^2U^1); \end{aligned}$$

вектор  $v$  является таким образом дополнительным по отношению к бивектору, определенному векторами  $z$  и  $u$ . В обычных векторных обозначениях внутреннее произведение бивектора  $[xy]$  на вектор  $u$  запишется так:

$$[[xy]u].$$

Нетрудно показать, что если рассматривать некоторый бивектор как геометрическую сумму нескольких бивекторов, то вектор, дополнительный к данному бивектору, будет равен геометрической сумме дополнений бивекторов-слагаемых.

18. В общем случае компонентами  $Q$   $(n-p)$ -вектора, дополнительного к данному  $p$ -вектору с компонентами  $P$  являются:

$$\left. \begin{aligned} Q_{j_1 \dots j_{n-p}} &= \sqrt{g} P_{i_1 i_2 \dots i_p}, \\ Q^{j_1 j_2 \dots j_{n-p}} &= \frac{1}{\sqrt{g}} P^{i_1 i_2 \dots i_p}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

В этих формулах предполагается, что индексы  $i_1, i_2, \dots, i_p, j_1, \dots, j_{n-p}$  образуют *четную* перестановку индексов  $1, 2, \dots, n$ .

Ясно, что если  $b$  — поливектор, дополнительный к  $p$ -вектору  $a$ , то  $p$ -вектор  $a$ , дополнительный к  $b$ , может равняться только либо  $a$ , либо  $-a$ ; последний случай возможен только тогда, когда и  $p$  и  $n-p$  нечетные числа (и, следовательно,  $n$  — четное).

*Система поливекторов*, дополнительная к некоторой данной системе  $p$ -векторов, определяется как совокупность поливекторов, дополнительных к данным  $p$ -векторам.

В случае  $n=4, p=2$  система бивекторов, дополнительная к системе с компонентами  $P^{ij}$  или  $P_{ij}$ , имеет в качестве компонент:

$$\begin{aligned} Q_{23} &= \sqrt{g} P^{14}, & Q_{31} &= \sqrt{g} P^{24}, & Q_{14} &= \sqrt{g} P^{34}, \\ Q_{14} &= \sqrt{g} P^{23}, & Q_{24} &= \sqrt{g} P^{31}, & Q_{34} &= \sqrt{g} P^{12}, \end{aligned}$$

или соответственно:

$$\begin{aligned} Q^{23} &= \frac{1}{\sqrt{g}} P_{11}, & Q^{31} &= \frac{1}{\sqrt{g}} P_{21}, & Q^{12} &= \frac{1}{\sqrt{g}} P_{31}, \\ Q^{14} &= \frac{1}{\sqrt{g}} P_{23}, & Q^{24} &= \frac{1}{\sqrt{g}} P_{31}, & Q^{34} &= \frac{1}{\sqrt{g}} P_{13}. \end{aligned}$$

Скалярное произведение системы бивекторов на дополнительную к ней систему равно нулю в том и только в том случае, когда эта система сводится к одному единственному бивектору.

## VI. Скользящие поливекторы

19. Так же, как и в случае обыкновенных векторов, можно различать поливекторы *свободные* и поливекторы *скользящие*. Скользящий  $p$ -вектор определяется посредством  $p$  векторов, *расположенных в одной  $p$ -мерной гиперплоскости*, и два скользящих  $p$ -вектора считаются равными только в том случае, когда они расположены в одной и той же  $p$ -плоскости; при этом, конечно, предполагается, что соответствующие свободные поливекторы равны между собой. Рассмотренные выше компоненты свободного  $p$ -вектора недостаточны для того, чтобы вполне определить скользящий  $p$ -вектор.

В  $p$ -плоскости, содержащей исследуемый  $p$ -вектор, возьмем точку  $x^1, \dots, x^n$ . Положим для определенности  $p=3$ . Уравнения трехмерной гиперплоскости, содержащей тривектор  $[xyz]$ , получаются путем приравнивания нулю определителей пятого порядка, порожденных матрицей

$$\begin{vmatrix} \xi^1 & \xi^2 & \dots & \xi^n & 1 \\ x^1 & x^2 & \dots & x^n & 1 \\ X^1 & X^2 & \dots & X^n & 0 \\ Y^1 & Y^2 & \dots & Y^n & 0 \\ Z^1 & Z^2 & \dots & Z^n & 0 \end{vmatrix},$$

где через  $\xi^1, \xi^2, \dots, \xi^n$  обозначены текущие координаты гиперплоскости. Ясно, что кроме величин  $P^{ijk}$  в эти уравнения войдут выражения:

$$P^{ijkl} = \begin{vmatrix} x^i & x^j & x^k & x^l \\ X^i & X^j & X^k & X^l \\ Y^i & Y^j & Y^k & Y^l \\ Z^i & Z^j & Z^k & Z^l \end{vmatrix}.$$

Величины  $P^{ijkl}$  сами могут быть записаны в форме  $P^{0ijk}$ , если согласиться считать  $x^0=1$ ,  $X^0=Y^0=Z^0=0$ . Скользящий тривектор можно тогда рассматривать как внешнее произведение  $[Mxyz]$ , если через  $M$  обозначить произвольную точку трехмерной гиперплоскости тривектора. Компоненты образуются здесь по тому же закону, как и в случае сво-



бодного квадrivектора в пространстве  $n+1$  измерений, причем  $(n+1)$ -я координата точки  $M$  равна единице, а  $(n+1)$ -е координаты векторов  $x$ ,  $y$ ,  $z$  равны нулю.

Если  $p=1$ ,  $n=3$ , то получаются шесть классических координат скользящего вектора.

Аналогично определяется система скользящих  $p$ -векторов.

## VII. Приложение к движению твердого тела, имеющего неподвижную точку

20. Если твердое тело находится в непрерывном движении, имея при этом одну неподвижную точку, которая может быть принята за начало координат, то поле скоростей различных точек этого тела обладает следующим основным свойством: проекции скоростей двух любых точек  $M$  и  $M'$  на прямую  $MM'$  равны между собой. Рассматривая две бесконечно близкие точки, мы можем записать это свойство с помощью следующего тождества:

$$\sum_i dv_i dx^i = 0,$$

в котором через  $v_i$  обозначены ковариантные компоненты скорости точки  $(x^1, \dots, x^n)^1$ .

Положим

$$dv_i = \sum_k a_{ki} x^k,$$

тогда предыдущее тождество даст:

$$a_{ij} + a_{ji} = 0.$$

Отсюда легко вывести, что коэффициенты  $a_{ij}$  постоянны. В самом деле, имеем:

$$\frac{\partial v_i}{\partial x^j} = a_{ji}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x^k} = a_{ki},$$

откуда

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial a_{ji}}{\partial x^k} = \frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j}.$$

Принимая во внимание соотношение:  $a_{ij} + a_{ji} = 0$ , получим следующие три соотношения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j} &= 0, \\ \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} &= 0, \\ \frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} &= 0. \end{aligned}$$

---

<sup>1)</sup> Это равенство может быть формально получено путем дифференцирования характеристического для твердого тела тождества  $\Sigma (x^i - x'^i)^2 = \text{const}$ , в котором  $x'^i$  означают координаты точки  $M'(x^i + dx^i)$ . Прим. ред.

Они влекут за собою следствие:

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial a_{jk}}{\partial x^i} = \frac{\partial a_{ki}}{\partial x^j} = 0,$$

которое справедливо при любых значениях индексов  $i, j, k$ , независимо от того, *различны они или нет*. Но если частные производные коэффициентов  $a_{ij}$  по всем переменным равны нулю, то сами коэффициенты  $a_{ij}$  постоянны.

Так как скорость начала координат равна нулю, то получаем:

$$v_i = \sum_k a_{ki} x^k. \quad (22)$$

Эта формула показывает, что *скорость точки М является внутренним произведением системы бивекторов с ковариантными компонентами  $a_{ij}$  на вектор  $\overline{OM}$* .

Мы скажем, что твердое тело обладает мгновенным вращением, аналитическим выражением которого является *система бивекторов* с компонентами  $a_{ij}$ .

Вводя контравариантные компоненты системы бивекторов, получим аналогичным путем:

$$v^i = \sum_k a^{kj} x_k. \quad (23)$$

Вращение называется *простым*, если система бивекторов сводится к одному единственному бивектору; в этом случае точки  $(n-2)$ -мерной гиперплоскости, проведенной через точку  $O$  перпендикулярно плоскости бивектора, обладают скоростью, равной нулю. *Вращение происходит вокруг этой  $(n-2)$ -мерной гиперплоскости*. Кроме того, угловая скорость вращения равна числу, измеряющему бивектор.

В случае  $n=3$ , все вращения оказываются простыми. Самое общее вращение может быть разложено на три вращения вокруг перпендикуляров к трем координатным плоскостям, причем последние вращения имеют соответственно следующие угловые скорости:

$$a^{23} \sqrt{\xi_{23}^2 g_{33} - g_{23}^2}, \quad a^{31} \sqrt{g_{33} g_{11} - g_{31}^2}, \quad a^{12} \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}.$$

Если ввести вектор  $c$ , являющийся дополнением бивектора  $a$ , представляющего вращение, то последнее можно разложить и иначе, а именно на три вращения вокруг координатных осей, имеющие соответственно угловые скорости:

$$\sqrt{g_{11}} c^1 = \sqrt{\frac{g_{11}}{g}} a_{12}, \quad \sqrt{g_{22}} c^2 = \sqrt{\frac{g_{22}}{g}} a_{31}, \quad \sqrt{g_{33}} c^3 = \sqrt{\frac{g_{33}}{g}} a_{12}.$$

В общем случае вращение может быть представлено с помощью системы  $(n-2)$ -векторов, дополнительной к системе бивекторов  $a_{ij}$ , в соответствии с тем, что мы привыкли делать в обыкновенном пространстве.

## VIII. Тензоры

21. Векторы, бивекторы, поливекторы, системы поливекторов или, точнее, *системы чисел, которые их аналитически определяют*, являются частными случаями *тензоров*. В общем случае *тензором* называют систему чисел, определяющую аналитически некоторый геометрический (или физический) объект и притом такую, которая при переходе к новой декартовой системе координат подвергается линейному преобразованию, коэффициенты которого не зависят от численных значений компонент тензора; эти коэффициенты определяются исключительно старой и новой системами координат (и зависят также от природы тензора).

Следуя Риччи и Леви-Чивита, мы сохраним в дальнейшем (если не будет оговорено прямо противоположное) название «тензор» за более узким классом объектов. Будем называть тензором систему величин, имеющих данное число  $p$  индексов, *удовлетворяющих следующему характеристическому условию*: если, например, величины снабжены тремя индексами  $a_{ijk}$ , то сумма

$$\sum_{i,j,k} a_{ijk} X^i Y^j Z^k,$$

где  $X^i, Y^j, Z^k$  обозначают компоненты трех данных векторов, *впрочем, вполне произвольных, имеет числовое значение, не зависящее от системы координат*.

При этом нужно предполагать, что порядок расположения индексов, которые не обязательно должны быть различными, входит существенным образом в определение тензора; в некоторых частных случаях компоненты тензора  $a_{ijk}$  не меняют числового значения, если, например, переставить первые два индекса, или же если изменить произвольным образом порядок всех трех индексов и т. д.

Нетрудно усмотреть, что при переходе к новой декартовой же системе координат величины  $a_{ijk}$  подвергаются линейному преобразованию. Так как, в самом деле, новые компоненты ( $X^i$ ) некоторого вектора получаются из старых посредством формул:

$$(X^i)' = \sum_k \alpha_k^i X^k,$$

то мы получим:

$$\sum_{i,j,k} a'_{ijk} (X^i)' (Y^j)' (Z^k)' = \sum_{i,j,k,\lambda,\mu,\nu} a'_{ijk} \alpha_\lambda^i \alpha_\mu^j \alpha_\nu^k X^\lambda Y^\mu Z^\nu,$$

откуда

$$a_{\lambda\mu\nu} = \sum_{i,j,k} \alpha_\lambda^i \alpha_\mu^j \alpha_\nu^k a'_{ijk}.$$

Векторы, поливекторы и системы поливекторов входят, очевидно, в категорию тензоров, которую мы только что определили; если, например,  $a_i$  обозначают ковариантные компоненты системы бивекторов, то сумма

$$\sum_{i,j} a_{ij} X^i Y^j$$

даст нам скалярное произведение системы бивекторов на бивектор  $[ху]$ , т. е. величину, не зависящую от выбора координатных осей.

Тензор может быть представлен аналитически в нескольких различных формах: достаточно ввести в случае трех индексов, например, величины  $a^i_{jk}$ ,  $a^j_{ik}$ , ...,  $a^{ij}_k$ , ...,  $a^{ijk}$ , определенные с помощью тождеств:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k} a_{ijk} X^i Y^j Z^k &= \sum_{i,j,k} a^i_{jk} X_i Y^j Z^k = \dots = \\ &= \sum_{i,j,k} a^{ij}_k X_i Y_j Z^k = \dots = \sum_{i,j,k} a^{ijk} X_i Y_j Z_k. \end{aligned}$$

Переводя таким образом индексы снизу вверх, нужно заботиться, чтобы не изменился порядок индексов; иногда с этой целью над нижними индексами и под верхними индексами ставят точки; именно пишут:

$$a^i_{\dot{j}\dot{k}}$$

вместо

$$a^i_{jk}.$$

Компоненты тензора, имеющие исключительно нижние индексы, называются ковариантными; те, у которых все индексы верхние, называются контравариантными; остальные называются *смешанными*.

22. Всякий тензор  $a_i$  с одним индексом может быть отождествлен с некоторым вектором; в самом деле, вектор, ковариантные координаты которого равны  $a_i$ , не зависит от выбора декартовой координатной системы, потому что от нее не зависит скалярное произведение  $\sum_i a_i X^i$

этого вектора и определенного, впрочем произвольного, вектора  $X$ . Выражаясь более точно, следовало бы сказать, что *каждый тензор с одним индексом инвариантным образом связан с некоторым определенным вектором*.

Таким же путем можно доказать, что всякий *кососимметрический* тензор с двумя индексами  $a_{ij}$  ( $a_{ij} = -a_{ji}$ ) связан инвариантным образом с некоторой системой бивекторов и т. д.

Кроме векторов, поливекторов и систем поливекторов обратим внимание еще на один важный тензор, именно на тензор, компонентами которого являются величины  $g_{ij}$  (*основной* или *фундаментальный тензор*). Это действительно тензор, так как величина

$$\sum_{i,j} g_{ij} X^i Y^j$$

имеет инвариантное численное значение, потому что представляет собою скалярное произведение векторов  $X$  и  $Y$ .

Смешанные компоненты  $g^i_j$  и  $g_j^i$  определяются с помощью тождеств:

$$\sum_{i,j} g^j_i X^i Y_j = \sum_{i,j} g_j^i X_i Y^j = \sum_k X^k Y_k = \sum_k X_k Y^k;$$

следовательно имеем:

$$g_i^j = g^i_j = 1, \text{ если } i=j; \quad g_i^{(j)} = g^i_j = 0, \text{ если } i \neq j. \quad (24)$$

Что касается контравариантных компонент, то они определяются тождеством:

$$\sum_k X_k Y^k = \sum_{i,j} g^{ij} X_i Y_j,$$

откуда

$$Y^i = \sum_k g^{ik} Y_k;$$

таким образом мы получаем те самые величины, с которыми имели дело в п<sup>о</sup>4 (где они были обозначены так же, как и здесь, хотя определяли мы их там иначе).

Перевод индекса снизу наверх выполняется с помощью следующих формул:

$$a_i^j = \sum_k g^{jk} a_{ik};$$

аналогично для опускания индексов имеем:

$$a_i^j = \sum_k g_{ik} a^{kj}.$$

23. Если дан тензор  $a_{ij}$  с двумя индексами, то с ним всегда можно связать некоторый тензор-скаляр (г. е. скалярную величину, не зависящую от выбора координатной системы) посредством операции, называемой *внутренним свертыванием*. Этот тензор-скаляр имеет вид:

$$\sum_i a_i^i.$$

Чтобы доказать эту теорему, рассмотрим инвариантную форму

$$\sum_{i,j} a_i^j X^i Y_j - \lambda \sum_j X^j Y_j,$$

содержащую два произвольных вектора  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  и параметр  $\lambda$ . Посмотрим, нельзя ли подобрать такой вектор  $\mathbf{x}$ , чтобы эта форма равнялась нулю при любом векторе  $\mathbf{y}$ . Для этого необходимо, чтобы компоненты вектора  $\mathbf{x}$  удовлетворяли системе уравнений:

$$\sum_i a_i^j X^i - \lambda X^j = 0; \quad (j=1, \dots, n),$$

а это возможно лишь в том случае, если определитель

$$\begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - \lambda & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n - \lambda \end{vmatrix}$$

равен нулю. Происхождение этого определителя показывает, что корни его имеют числовые значения, *не зависящие от выбора координатной системы*.

Сумма

$$a_1^1 + a_2^2 + \dots + a_n^n$$

этих корней будет, таким образом, тензором-скаляром.

Можно изложить это иначе. Рассмотрим

$$b_i = \sum_k a_{ik} X^k, \quad (25)$$

в которых  $X^k$  являются компонентами некоторого данного вектора; эти величины  $b_i$  определяют тензор, потому что сумма

$$\sum_i b_i Y^i = \sum_{i,k} a_{ik} X^k Y^i$$

инвариантна. Этот тензор является ( $n^\circ 22$ ) *вектором*, для которого  $b_i$  служат ковариантными компонентами. Формулы (25) устанавливают, таким образом, соотношения между произвольным вектором  $\mathbf{x}$  и вектором  $\mathbf{b}$ ; их можно, впрочем, писать и так:

$$b_i = \sum_k a_i^k X_k, \quad (26)$$

т. е. в форме, указывающей то линейное преобразование, с помощью которого мы от  $X_i$  переходим к  $b_i$ .

Посмотрим, нельзя ли найти вектор  $\mathbf{x}$  так, чтобы соответствующий вектор  $\mathbf{b}$  был ему параллелен, т. е. чтобы имели место соотношения:

$$b_i = \lambda X_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Такие векторы, если они существуют, не зависят от выбора координатной системы, так же как и соответствующие множители  $\lambda$ . Величины  $\lambda$  определяются из уравнения:

$$\begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 - \lambda & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

сумма корней этого уравнения даст нам как раз результат *внутреннего свертывания* тензора  $a_{ij}$ :

$$\sum_i a_i^i.$$

Важно заметить, что существует второй скаляр, который может быть получен из тензора  $a_{ij}$  посредством операции *внутреннего свертывания*, а именно:

$$\sum_i a^i_i,$$

но он равен первому. В самом деле, выполняя вычисления над контравариантными компонентами данного тензора:

$$\begin{aligned}\sum_i a_i^i &= \sum_{i,k} g_{ik} a^{ki}, \\ \sum_i a^i_i &= \sum_{i,k} g_{ik} a^{ik},\end{aligned}$$

мы убеждаемся в равенстве обоих скаляров в силу *симметрии* ( $g_{ik} = g_{ki}$ ) фундаментального тензора.

Предыдущие формулы показывают также, что в частности результат внутреннего свертывания системы бивекторов равен нулю, так как имеем:

$$\sum_i a_i^i = \sum_{i,k} g_{ik} (a^{ki} + a^{ik}) = 0.$$

Свертывая внутренним образом фундаментальный тензор, получим  $n$ , т. е. число измерений пространства.

**24.** К тензорам более чем с двумя индексами также можно применять внутреннее свертывание. Достаточно заметить, что если  $a_{ijkh}$  — тензор, то тензором является также и

$$b_{kh} = \sum_{i,j} a_{ijkh} X^i Y^j,$$

где  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  — два данных произвольных вектора. Результатом свертывания тензора  $b_{kh}$  будет:

$$\sum_k b_k^k = \sum_{i,j,k} a_{ijk}^k X^i Y^j;$$

вид этого нового тензора показывает, что величины

$$c_{ij} = \sum_k a_{ijk}^k$$

определяют в свою очередь тензор. Это — тензор, полученный из данного путем свертывания по двум последним индексам.

Можно было бы получить другие тензоры подобного рода, производя свертывание по различным парам индексов.

Если  $p \geq 4$ , то над результатом свертывания можно в свою очередь произвести внутреннее свертывание и т. д.

В случае системы поливекторов все полученные таким образом тензоры равны нулю.

25. Кроме внутреннего свертывания тензорная алгебра рассматривает несколько действий иного рода, которые позволяют с помощью двух данных тензоров определить некоторый третий тензор.

Первой из этих операций является *сложение*, которое позволяет с помощью двух тензоров с одинаковым числом и одинаковым характером индексов, как например  $a_{ijk}$  и  $b_{ijk}$ , построить третий тензор, имеющий то же число и тот же характер индексов:

$$c_{ijk} = a_{ijk} + b_{ijk}.$$

Тензорный характер величин  $c_{ijk}$  очевиден. Заметим, что геометрическое сложение векторов, бивекторов и т. д. является частным случаем этой операции.

Второй операцией является *умножение*. Если даны два тензора  $a_{ij}$  и  $b_{ijk}$ , то величины

$$c_{ijkhl} = a_{ij} b_{hkl}$$

(индексы  $i, j, h, k, l$  могут принимать все возможные значения) определяют третий тензор. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что если  $x, y, z, u, v$  — пять данных произвольных векторов, то сумма

$$\sum_{i, j, h, k, l} c_{ijkhl} X^i Y^j Z^h U^k V^l$$

будет равна произведению двух сумм:

$$\sum_{i, j} a_{ij} X^i Y^j \quad \text{и} \quad \sum_{h, k, l} b_{hkl} Z^h U^k V^l;$$

следовательно, она не зависит от выбора координатной системы.

Например, *произведением* двух векторов  $x$  и  $y$  будет тензор с ковариантными компонентами

$$a_{ij} = X_i Y_j.$$

26. Последняя операция, которую постоянно приходится употреблять, это так называемое *мультипликативное свертывание*; оно состоит в том, что произведение двух тензоров свертывается один или несколько раз.

Один раз свернутое произведение фундаментального тензора и некоторого произвольного тензора, например  $a_{ijk}$ , может быть представлено в нескольких формах:

$$\sum_a g^a a_{ajk}, \quad \sum_a g^a a_{jak}, \quad \dots, \quad \sum_a g^a a_{ajk}, \quad \dots$$



Принимая во внимание выражения для смешанных компонент фундаментального тензора (п° 22), мы видим что все написанные выше свернутые произведения дают снова тензор  $a_{ijk}$ . При выполнении этих операций фундаментальный тензор играет роль единицы.

Одним из свернутых произведений системы бивекторов  $a_{ij}$  и вектора  $X_i$  является

$$\sum_k a_{ki} X^k;$$

это—ни что иное, как внутреннее произведение системы бивекторов на вектор (п°. 10).

Обобщая, мы можем определить внутреннее произведение системы  $p$ -векторов  $a_{i_1 i_2 \dots i_p}$  на систему  $q$ -векторов  $b_{j_1 \dots j_q}$  ( $q \leq p$ ), как  $q$  раз свернутое произведение двух тензоров:

$$c^{i_{q+1} \dots i_p} = \sum_{k_1, \dots, k_q} a^{k_1 \dots k_q i_{q+1} \dots i_p} b_{k_1 \dots k_q},$$

или, лучше, как частное от деления этого произведения на  $q!$ , а именно:

$$\sum_{(k_1 \dots k_q)} a^{k_1 \dots k_q i_{q+1} \dots i_p} b_{k_1 \dots k_q}.$$

Это внутреннее произведение позволяет определить и вычислить косинус угла между  $p$ -мерной и  $q$ -мерной гиперплоскостями.

В частности возьмем в обычном пространстве внутреннее произведение тривектора  $P^{123}$  и вектора  $X$ ; это будет бивектор, компоненты которого равны:

$$Q^{23} = P^{123} X_1, \quad Q^{31} = P^{231} X_2, \quad Q^{12} = P^{312} X_3.$$

Записывая эти формулы иначе, а именно так:

$$Q^{23} = \sqrt{g} P^{123} \frac{1}{\sqrt{g}} X_1, \quad \dots, \quad Q^{12} = \sqrt{g} P^{312} \frac{1}{\sqrt{g}} X_3,$$

мы видим, что интересующее нас произведение равно бивектору, дополнительному к данному вектору, умноженному на число, измеряющее тривектор.

Заметим, между прочим, что  $n$ -вектор является тензором с одной единственной компонентной, но он не будет тензором-скаляром. При переходе к новым координатам компонента  $P^{12} \dots$  умножается на отношение значений  $\sqrt{g}$  в старой и в новой системе; тензор-скаляр, напротив, имеет числовое значение, не зависящее от выбора системы координат.

## ГЛАВА II

# КРИВОЛИНЕЙНЫЕ КООРДИНАТЫ В ЕВКЛИДОВОЙ ГЕОМЕТРИИ

### I. Линейный элемент пространства в декартовых координатах

27. Мы видели, что в некоторой декартовой координатной системе квадрат длины вектора выражается определенной положительной квадратичной формой от компонент (контравариантных) этого вектора:

$$\sum_{i,j} g_{ij} X^i X^j. \quad (1)$$

Обратно, если дана *a priori* определенная положительная квадратичная форма от  $n$  переменных  $X^1, \dots, X^n$ , то всегда можно подобрать такую декартову систему координат, в которой квадрат длины вектора с компонентами  $X^1, \dots, X^n$  определится посредством этой формы.

Действительно, если форма (I) — определенная положительная, то ее можно представить в виде суммы  $n$  независимых квадратов; иными словами, существует  $n$  линейных форм  $Y_1, \dots, Y_n$  от  $X^i$ , удовлетворяющих тождеству:

$$Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_n^2 = \sum_{i,j} g_{ij} X^i X^j. \quad (2)$$

Исходя из этого, возьмем в пространстве некоторую прямоугольную систему координат и рассмотрим вектор  $\mathbf{x}$ , который в этой системе координат имеет контравариантные координаты  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ . В силу сделанных предположений мы имеем следующие формулы:

$$Y_i = \sum_k a_{ik} X^k,$$

рассмотрим векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ , проекции которых на оси координат соответственно равны (для вектора  $\mathbf{e}_i$ ):

$$a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}.$$

---

1) См. § 45 и 52 упомянутой выше (в приложениях к стр. 9) книги М. Бохера.  
Прим. ред.

Если мы рассмотрим теперь декартову координатную систему, имеющую в качестве единичных основных векторов как раз векторы  $e_1, \dots, e_n$ , то увидим немедленно, что в этой системе контравариантными компонентами вектора  $X$  будут величины  $X^1, X^2, \dots, X^n$ . Тогда тождество (2) покажет, что данная квадратичная форма представляет собою как раз квадрат длины вектора  $X$  в декартовой системе координат.

Но первоначальная прямоугольная координатная система может быть выбрана совершенно произвольно: мы видим поэтому, что *система декартовых координат, соответствующая данной квадратичной форме, вполне определяется с точностью до поворота или поворота с отражением*.

Для того чтобы дифференциальную квадратичную форму с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i,j} g_{ij} du^i du^j$$

можно было рассматривать как квадрат расстояния двух бесконечно близких точек в некоторой декартовой системе координат, необходимо и достаточно, чтобы эта форма была определенной положительной.

28. В обыкновенной аналитической геометрии, рассматривая косоугольные координаты, выбирают обычно в качестве основных координатных векторов векторы, длина которых равна единице. Квадратичная форма, определяющая квадрат длины вектора  $(X, Y, Z)$ , будет тогда иметь вид:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + 2 \cos \lambda YZ + 2 \cos \mu ZX + 2 \cos \nu XY,$$

если через  $\lambda, \mu, \nu$  обозначить плоские углы координатного трехгранника. *Необходимым и достаточным условием, при котором три угла  $\lambda, \mu, \nu$  могут рассматриваться как плоские углы некоторого трехгранного угла, будет, следовательно, определенность и положительность написанной выше квадратичной формы*. Представляя форму в виде суммы квадратов, получим:

$$(X + Y \cos \nu + Z \cos \mu)^2 + \left( Y \sin \nu + Z \frac{\cos \lambda - \cos \mu \cos \nu}{\sin \nu} \right)^2 + \\ + \frac{\sin^2 \mu \sin^2 \nu - (\cos \lambda - \cos \mu \cos \nu)^2}{\sin^2 \nu} Z^2.$$

Искомым условием будет, следовательно:

$$(\cos \lambda - \cos \mu \cos \nu)^2 - \sin^2 \mu \sin^2 \nu < 0,$$

или иначе:

$$[\cos(\mu + \nu) - \cos \lambda][\cos \lambda - \cos(\mu - \nu)] > 0.$$

Если предположить, что  $\lambda$  — наибольший из данных углов, то второй множитель левой части непременно будет отрицательным, и искомое условие сведется к неравенству:

$$\cos \lambda > \cos(\mu + \nu)$$

или, что в сущности то же:

$$\lambda < \mu + \nu < 2\pi - \lambda.$$

Мы получили известные классические условия, а именно: каждый плоский угол должен быть меньше суммы двух других, а сумма плоских углов должна быть меньше четырех прямых. Мы видим, что эти условия достаточны.

## II. Основная теорема метрической геометрии

29. Основными проблемами, которые ставятся теорией криволинейных координат в евклидовой геометрии, являются следующие:

1. *Имея линейный элемент пространства в системе криволинейных координат, определить природу этих координат*, или, что в сущности то же, перейти от этих координат к прямоугольным декартовым координатам.

2. *Выяснить, каким условиям должны удовлетворять коэффициенты данной квадратичной формы, для того чтобы она могла рассматриваться как линейный элемент евклидова пространства в некоторой подходящим образом подобранной системе криволинейных координат.*

Обе эти проблемы были впервые поставлены и решены Ламе (Lamé)<sup>1)</sup> для ортогональных криволинейных координатных систем.

Прежде чем заниматься первой из этих проблем, важно выяснить *a priori*, сколько она может иметь решений.

Сделаем предварительно следующее замечание, которое будет нам полезно.

Пусть

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij} du^i du^j \quad (3)$$

обозначает линейный элемент пространства в какой-то произвольной системе координат. С каждой точкой  $M$ , имеющей координаты  $u^1, u^2, \dots, u^n$ , можно связать декартову координатную систему, начало которой находится в точке  $M$ , а единичные координатные векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  выбраны таким образом, чтобы точка

$$M'(u^1 + du^1, \dots, u^n + du^n),$$

бесконечно близкая к  $M$ , имела координатами как раз  $du^1, du^2, \dots, du^n$ . Для этого достаточно, чтобы вектор  $e_i$  был касательным вектором к  $i$ -й координатной кривой (т. е. к той из координатных кривых, которая получается, если изменять только одну координату  $u^i$ ) или, выражаясь точнее, чтобы он представлял собою *скорость* точки, движущейся по этой кривой, если переменную координату  $u^i$  рассматривать как время.

В этой декартовой системе координат, которая определяет то, что мы будем называть *локальной декартовой координатной системой* или,

1) G. Lamé, Leçons sur les coordonnées curvilignes; Paris, 1859.

короче, *локальным  $n$ -эдром*, связанным с точкой  $M$ , скалярным произведением векторов  $e_i$  и  $e_j$  будет  $g_{ij}$ , и, следовательно, угол  $\varphi_{ij}$  между  $i$ -й и  $j$ -й координатными линиями будет даваться выражением:

$$\cos \varphi_{ij} = \frac{g_{ij}}{\sqrt{g_{ii} g_{jj}}}. \quad (4)$$

В более общем случае косинус угла  $\varphi$  между двумя направлениями, исходящими из  $M$  и определенными посредством символов дифференцирования  $d$  и  $\delta$ , будет:

$$\cos \varphi = \frac{\sum_{i,j} g_{ij} du^i \delta u^j}{\sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} du^i du^j} \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} \delta u^i \delta u^j}}. \quad (5)$$

30. Установив это, предположим, что в обычном трехмерном пространстве линейный элемент задан посредством формы:

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + dw^2. \quad (6)$$

Ясно, что так обстоит дело в любой декартовой прямоугольной системе координат. *Покажем, что не существует никаких иных координатных систем, обладающих этим свойством.*

В самом деле, если мы будем искать уравнение прямых в пространстве, используя их характеристическое свойство, а именно то, что они являются линиями кратчайшего расстояния, то дело сведется к разысканию минимума интеграла  $\int \sqrt{du^2 + dv^2 + dw^2}$ . Если  $u$ ,  $v$ ,  $w$  обозначают прямоугольные координаты, то решение последней аналитической задачи приведет нас к линиям, которые определяются системой двух линейных уравнений относительно  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Но результат вычисления зависит только от данного выражения  $\sqrt{du^2 + dv^2 + dw^2}$ . Поэтому, если линейный элемент пространства имеет такой вид, то *какова бы ни была природа координат  $u$ ,  $v$ ,  $w$* , — линии, определенные уравнениями первой степени, будут непременно прямыми. Координатными линиями будут, таким образом, прямые, соответственно перпендикулярные друг другу в силу формулы (4). Координатными поверхностями  $w = \text{const}$  будут плоскости, потому что всякая прямая, лежащая на одной из них, лежит на ней вся целиком. Координатные прямые ( $w$ ), будучи перпендикулярны плоскости  $w = 0$ , будут все параллельны между собою. Отсюда легко показать, что  $u$ ,  $v$ ,  $w$  представляют собою расстояния данной точки пространства от трех взаимно перпендикулярных плоскостей  $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$ . Следовательно, рассматриваемые координаты непременно будут декартовыми и прямоугольными.

Эти рассуждения можно представить в несколько иной форме, которая имеет то преимущество, что может быть приложена к линейному элементу любого вида.

Предположим, что две системы координат, криволинейные или нет, дают линейному элементу обычного пространства один и тот же вид:

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} du^i du^j.$$

Пусть  $M$  и  $M'$  — две точки пространства, причем координаты точки  $M$  в первой и точки  $M'$  во второй системе одинаковы, а именно равны  $u^1, u^2, u^3$ . Соответствие между точками пространства, которое при этом получается, определяет некоторое *точечное преобразование*, которое переводит точку  $M$  в точку  $M'$  и которое обладает тем свойством, что расстояние между двумя любыми бесконечно близкими точками пространства не меняется при этом преобразовании (преобразование такого рода называется *изометрическим*).

Это преобразование переводит дугу кривой в некоторую другую дугу кривой, *которая имеет, очевидно, ту же длину* (потому что она вычисляется посредством того же самого интеграла). Следовательно, расстояние (в элементарном смысле слова) двух произвольных точек  $M$  и  $N$  сохраняется при этом преобразовании. Но в элементарной геометрии доказывается, что две фигуры, между точками которых установлено такое соответствие, при котором сохраняются расстояния, равны или симметричны. Следовательно, *преобразование, которое переводит  $M$  в  $M'$ , будет или движением, или движением, которое сопровождается отражением*.

Если представить себе, что в пространстве построена сеть из трех семейств координатных линий, причем каждая из этих линий занумерована (посредством числовых значений двух координат, которые не меняются вдоль этой линии), то будет ясно, *что две сети, связанные с координатными системами, имеющими один и тот же  $ds^2$ , получаются одна из другой посредством движения, и, быть может, с последующим отражением*.

Можно выразить этот результат иначе, сказав, что какова бы ни была система координат, имеющая данный  $ds^2$ , локальные  $n$ -эдры, связанные с различными точками пространства (определенные в п° 29), будут всегда одинаково расположены друг относительно друга: если выбрать  $n$ -эдр, связанный с некоторой определенной системой значений  $u^i = a^i$ , *то все остальные  $n$ -эдры будут тем самым определены*.

Предыдущая теорема показывает, *что все геометрические свойства пространства виртуально содержатся в его линейном элементе* (с оговоркой относительно ориентации пространства). Она называется *основной теоремой метрической геометрии*.

31. Небезынтересно отметить, что в предыдущих рассуждениях на координаты  $u^i$  были наложены только такие ограничения, которые позволяют представить квадрат расстояния двух бесконечно близких точек в виде дифференциальной квадратичной формы относительно  $du^i$ . Для этого *недостаточно* предположить, что координаты двух любых бесконечно близких точек также бесконечно близки; зато вполне достаточно предположить, что  $u^i$  являются функциями прямоугольных координат, допускающими непрерывные частные производные первого порядка.

Этим же свойством будут обладать и прямоугольные координаты, если их рассматривать как функции  $u^i$ .

Предыдущие доказательства были проведены для случая трехмерного пространства. Полное решение первой проблемы, поставленной в п° 29, покажет, что основная теорема метрической геометрии остается справедливой, каково бы ни было число измерений пространства.

### III. Локальная реконструкция пространства по его линейному элементу

32. Займемся теперь первой основной проблемой, поставленной в (п° 29). Задание линейного элемента

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} du^i du^j \quad (3)$$

позволяет представить себе в каждой точке  $M(u^1, \dots, u^n)$  естественную декартову координатную систему  $(R)$  данной величины и формы<sup>1)</sup> (с точностью до ориентации), имеющую вершиной точку  $M$ . Постараемся прежде всего охарактеризовать положение естественной координатной системы  $(R')$ , связанной с точкой  $M'$ , бесконечно близкой к точке  $M$ , относительно системы  $(R)$ .

Координатные векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  системы  $(R)$  являются ни чем иным, как частными производными  $\frac{\partial M}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial M}{\partial u^n}$ , что иначе может быть выражено посредством равенства:

$$dM = du^1 e_1 + du^2 e_2 + \dots + du^n e_n. \quad (7)$$

С другой стороны, предположения, сделанные относительно аналитической природы координат  $u^i$ , показывают, что векторы  $e'_1, \dots, e'_n$ , связанные с  $M'$ , отличаются бесконечно мало от векторов  $e_1, \dots, e_n$ . Чтобы определить их аналитически, мы вынуждены сделать добавочные предположения, а именно допустить, что координаты  $u^i$ , если рассматривать их как функции прямоугольных координат, допускают непрерывные частные производные *второго порядка*.

Направляющие параметры, т. е. контравариантные компоненты вектора  $e'_i$  относительно  $n$ -эдра  $(R)$ , будут тогда иметь вид:

$$\omega_i^1, \omega_i^2, \dots, \omega_i^{i-1}, 1 + \omega_i^i, \dots, \omega_i^n,$$

где через  $\omega_i^k$  обозначены выражения, линейные относительно дифференциалов  $du^1, \dots, du^n$ :

$$\omega_i^k = \Gamma_{i1}^k du^1 + \Gamma_{i2}^k du^2 + \dots + \Gamma_{in}^k du^n; \quad (8)$$

1) Будем ее называть иначе естественным репером или естественным  $n$ -эдром. Прим. ред.

следовательно, можно написать:

$$de_i = \sum_k \omega_i^k e_k = \sum_{k,r} \Gamma_{ir}^k du^r e_k. \quad (9)$$

Первое, что нам нужно сделать, это — определить  $n^2$  величин  $\Gamma_{ir}^k$ . Если это сделано, то положение всех  $n$ -эдров ( $R'$ ), бесконечно близких к данному  $n$ -эдру ( $R$ ), будет по отношению к этому последнему определено: Если  $\Gamma_{ir}^k$  заданы, то *евклидово пространство может быть реконструировано в окрестности начала  $M$  координатной системы ( $R$ )*.

33. Прежде чем решать интересующую нас проблему, введем новые обозначения. Заметим, что если значок  $i$  в  $\omega_i^k$  остается неизменным, а значок  $k$  меняется, то  $\omega_i^k$  являются контравариантными компонентами вектора  $de_i$  по отношению к ( $R$ ). Введем *ковариантные компоненты*

$$\omega_{ij} = \sum_k g_{jk} \omega_i^k \quad (10)$$

этого вектора и положим:

$$\omega_{ij} = \sum_r \Gamma_{ijr} du^r,$$

иными словами, положим:

$$\Gamma_{ijr} = \sum_k g_{jk} \Gamma_{ir}^k. \quad (11)$$

Установив эти обозначения, мы получим первую группу соотношений, которые послужат для определения коэффициентов, входящих в выражения  $\omega_i^k$ ; это — те соотношения, которые показывают, что величина и форма естественного  $n$ -эдра во всех точках определяются линейным элементом пространства, а именно:

$$e_i e_j = g_{ij}.$$

Дифференцирование этих соотношений даст:

$$\sum_k (g_{jk} \omega_i^k + g_{ik} \omega_j^k) = dg_{ij},$$

или, если использовать формулы (10):

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = dg_{ij}. \quad (I)$$

Число соотношений (I) равно  $\frac{n^2(n+1)}{2}$ . Значит, эти соотношения недостаточны для определения неизвестных коэффициентов.

Мы получим добавочные соотношения, написав условия интегрируемости уравнений (7) и (9):

$$dM = \sum_i du^i e_i; \quad (7)$$

$$de_i = \sum_k \omega_i^k e_k. \quad (9)$$



Удовольствуемся пока условиями интегрируемости уравнений (7); вычисляя двумя различными путями вектор  $\frac{\partial^2 M}{\partial u^i \partial u^j}$ , мы получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 M}{\partial u^i \partial u^j} &= \frac{\partial}{\partial u^j} \left( \frac{\partial M}{\partial u^i} \right) = \frac{\partial e_i}{\partial u^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k; \\ \frac{\partial^2 M}{\partial u^i \partial u^j} &= \frac{\partial}{\partial u^i} \left( \frac{\partial M}{\partial u^j} \right) = \frac{\partial e_j}{\partial u^i} = \sum_k \Gamma_{ji}^k e_k.\end{aligned}$$

Из этих условий интегрируемости получаются следующие соотношения:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad (\text{II})$$

которые можно записывать иначе, используя (II):

$$\Gamma_{ikj} = \Gamma_{jki}. \quad (\text{II}')$$

Оставим пока в стороне условия интегрируемости уравнений (9) и заметим, что число уравнений (II) равно  $\frac{n^2(n-1)}{2}$ ; вместе с  $\frac{n^2(n+1)}{2}$  уравнениями (I) это дает как раз  $n^3$  — число уравнений, равное числу наших неизвестных.

Чтобы решить уравнения (I) и (II'), возьмем в качестве отправного пункта уравнение:

$$\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jik} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k},$$

которое выводится из (I), и заменим в нем  $\Gamma_{jik}$  на  $\Gamma_{kij}$ , что можно сделать в силу (II'). Получим:

$$\Gamma_{kij} + \Gamma_{ijk} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}.$$

Циклическая перестановка индексов, проделанная два раза подряд над буквами  $i, j, k$ , дает два новых уравнения:

$$\Gamma_{ijk} + \Gamma_{jki} = \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i},$$

$$\Gamma_{jki} + \Gamma_{kij} = \frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j}.$$

Отсюда легко выводим:

$$\Gamma_{jki} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right) = \left[ \begin{matrix} ij \\ k \end{matrix} \right],$$

используя символ, введенный Э. Б. Христовфелем <sup>1)</sup> (*символ Христовфеля первого рода*).

<sup>1)</sup> E.-B. Christoffel, Ueber die Transformation der homogenen Differentialgleichungen zweiten Grades (J. de Crelle, t. 70, 1869, стр. 48 и 49).

Легко убедиться в том, что найденные таким образом значения величин  $\Gamma_{jki}$  удовлетворяют уравнениям (I) и (II'); уравнения (II') удовлетворяются, впрочем, немедленно в силу симметрии символов Христовфеля относительно верхних индексов.

Так получают искомые формулы:

$$\Gamma_{ikj} = \Gamma_{jki} = \left[ \begin{smallmatrix} ij \\ k \end{smallmatrix} \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right). \quad (12)$$

Теперь перейдем от  $\Gamma_{ikj}$  к  $\Gamma_{ij}^k$  путем обращения формул (II), получим:

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k = \sum_h g^{kh} \Gamma_{ihj} = \sum_h g^{kh} \left[ \begin{smallmatrix} ij \\ h \end{smallmatrix} \right] = \left\{ \begin{smallmatrix} ij \\ k \end{smallmatrix} \right\}. \quad (13)$$

Выражения  $\left\{ \begin{smallmatrix} ij \\ k \end{smallmatrix} \right\}$  называются *символами Христовфеля второго рода*.

Формулы (12) и (13) вполне решают поставленную задачу. Можно показать, что решение это единственно; это вполне согласуется с основной теоремой метрической геометрии.

Когда реконструкция пространства по его линейному элементу, таким образом, выполнена, тогда путем интегрирования можно будет найти взаимное расположение естественных  $n$ -эдров, связанных с различными точками пространства. Мы возвратимся к этому в дальнейшем изложении.

#### IV. Абсолютное дифференцирование. Кинематические приложения. Уравнения Лагранжа

34. Рассмотрим в пространстве *векторное поле*. В каждой точке  $M$  вектор поля имеет, по отношению к локальному  $n$ -эдру, связанному с этой точкой, определенные контравариантные компоненты  $X^1, X^2, \dots, X^n$ . Определим геометрическое приращение  $\mathbf{x}' - \mathbf{x}$  вектора поля, которое он получает, если от точки  $M$  перейти к бесконечно близкой точке  $M'$ . Равенство

$$\mathbf{x} = \sum_i X^i \mathbf{e}_i$$

дает, если учесть формулы (9):

$$d\mathbf{x} = \sum_i dX^i \mathbf{e}_i + \sum_{i,k} X^i \omega_k^i \mathbf{e}_k = \sum_i \left( dX^i + \sum_k X^k \omega_k^i \right) \mathbf{e}_i.$$

Мы видим, что элементарное геометрическое приращение вектора, или иначе, его *абсолютный дифференциал*, имеет по отношению к локальному  $n$ -эдру, связанному с точкой  $M$ , следующие компоненты:

$$DX^i = dX^i + \sum_k X^k \omega_k^i. \quad (14)$$

Величины  $DX^i$  определяют *абсолютный дифференциал* вектора данного поля; они являются его *контравариантными* компонентами. В частности,

если векторное поле *постоянно*, то абсолютный дифференциал равен нулю и мы получаем:

$$dX^i + \sum_k X^k \omega_k^i = 0. \quad (15)$$

Можно сказать, что если перенести вектор из точки *M* в бесконечно близкую точку таким образом, чтобы он остался равен и параллелен самому себе (параллельное перенесение), то должны будут иметь место соотношения (15).

Важно уметь вычислять *ковариантные* компоненты абсолютного дифференциала некоторого вектора, имеющего ковариантные компоненты  $X_i$ . С этой целью введем произвольное *постоянное* векторное поле с контравариантными компонентами ( $Y^i$ ). Элементарное приращение скалярного произведения

$$xy = \sum_i X_i Y^i$$

может быть получено двумя путями. Во-первых, оно равняется скалярному произведению элементарного приращения вектора *x* на *постоянный* вектор *y*, т. е. выражению

$$\sum_i DX_i Y^i.$$

Во-вторых, можно проделать непосредственное вычисление, что дает

$$\sum_i dX_i Y^i + \sum_i X_i dY^i;$$

вторая сумма, если принять во внимание уравнения, аналогичные (15), которым удовлетворяет *постоянное* поле *y*, может быть записана так:

$$- \sum_{i,k} X_i Y^k \omega_k^i = - \sum_{k,i} X_k Y^i \omega_i^k;$$

окончательно получаем:

$$\sum_i DX_i Y^i = \sum_i \left( dX_i - \sum_k X_k \omega_i^k \right) Y^i.$$

Это равенство справедливо, *каково бы ни было постоянное поле y*: следовательно, его можно сократить на  $Y^i$ , и мы получаем:

$$DX_i = dX_i - \sum_k X_k \omega_i^k. \quad (16)$$

35. Можно смотреть на эти результаты с несколько более общей точки зрения. Свяжем с каждой точкой *M* пространства определенную точку *P*, задав координаты  $x^1, \dots, x^n$  последней относительно локальной координаты

натной системы  $(R)$ , заданной в точке  $M$ . Мы определяем таким образом *поле точек*. Найдем *абсолютное* элементарное смещение точки  $P$  при переходе от  $M$  к  $M'$ . Можно написать:

$$\overline{P-M} = \sum_i x^i \mathbf{e}_i,$$

откуда

$$d(\overline{P-M}) = \sum_i dx^i \mathbf{e}_i + \sum_{k,i} x^k \omega_k^i \mathbf{e}_i.$$

Следовательно, принимая во внимание (6), получим:

$$dP = \sum_i \left[ dx^i + du^i + \sum_k x^k \omega_k^i \right] \mathbf{e}_i.$$

Положим, аналогично тому, что мы сделали в случае **векторного поля**:

$$Dx^i = dx^i + du^i + \sum_k x^k \omega_k^i, \quad (17)$$

эта формула определяет абсолютный дифференциал поля точек.

36. Результаты предыдущих пунктов (п<sup>о</sup> 33 и 34) позволяют нам определить скорость и ускорение подвижной точки  $M$ . Предположим, что криволинейные координаты  $u^i$  этой точки являются заданными функциями времени; контравариантными компонентами скорости точки относительно локального  $n$ -эдра, связанного с этой точкой, будут, очевидно,

$$v^i = \frac{du^i}{dt}. \quad (18)$$

Ускорением называется частное от деления абсолютного дифференциала вектора скорости на  $dt$ :

$$\gamma^i = \frac{Dv^i}{dt} = \frac{d^2 u^i}{dt^2} + \sum_{k,h} \Gamma_{kh}^i \frac{du^k}{dt} \frac{du^h}{dt}. \quad (19)$$

Ясно, что если  $u^i$  как функции времени известны, то достаточно знать числовые значения символов Христоффеля 2-го рода в точке  $M$ , для того чтобы вычислить контравариантные компоненты ускорения.

Формула (19) обобщает известную теорему разложения ускорений.

Таким же путем можно найти ускорения различных порядков.

37. Формула (19) дает нам сейчас же возможность найти уравнения прямых в изучаемой нами координатной системе. Для этого достаточно проинтегрировать систему дифференциальных уравнений 2-го порядка:

$$\frac{d^2 u^i}{dt^2} + \sum_{k,h} \Gamma_{kh}^i \frac{du^k}{dt} \frac{du^h}{dt} = 0;$$

в качестве независимой переменной  $t$  можно взять абсциссу  $s$  текущей точки на прямой, абсциссу, отсчитываемую на самой этой прямой от некоторого начала; тогда получим:

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \sum_{k,h} \Gamma_{kh}^i \frac{du^k}{ds} \frac{du^h}{ds} = 0. \quad (20)$$

Мы получили бы этот же самый результат, если бы искали кривые, дающие минимальное значение интегралу  $\int ds$ .

Общим методом аналитической механики, который позволяет непосредственно получить предыдущий результат, мы обязаны Лагранжу<sup>1)</sup>. В самом деле, если составить выражение  $2T$ , дающее квадрат скорости точки:

$$2T = \sum_{i,j} g_{ij} (u^i)' (u^j)',$$

то уравнениями движения этой точки, на которую по предположению не действуют никакие силы, будут следующие:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial (u^i)'} - \frac{\partial T}{\partial u^i} = 0.$$

Но теория уравнений Лагранжа в механике дает нам больше, чем дифференциальные уравнения прямых. Величины

$$P_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial (u^i)'} - \frac{\partial T}{\partial u^i}$$

позволяют в действительности вычислить элементарную работу вектора ускорения для некоторого произвольного смещения точки  $\delta u^i$ . Эта работа равна:

$$\sum_i \gamma_i \delta u^i = \sum_i P_i \delta u^i;$$

величины  $P_i$  являются таким образом ковариантными компонентами ускорения движущейся точки.

Нетрудно проверить это непосредственным вычислением. Подсчитаем сначала эти ковариантные компоненты непосредственно, отправляясь от контравариантных компонент  $\gamma^i$ , данных формулами (19). Принимая во внимание (11), получим без труда:

$$\gamma_i = \sum_k g_{ik} \frac{d^2 u^k}{dt^2} + \sum_{k,h} \Gamma_{kh}^i \frac{du^k}{dt} \frac{du^h}{dt}.$$

<sup>1)</sup> См. § 36 [в частности формулу 47 этого параграфа] книги, А. Г. Вебстер, *Механика материальных точек твердых, упругих и жидких тел*, ГТТИ, 1933 г. *Прим. ред.*

С другой стороны, вычисление лагранжевых величин  $P_i$  дает:

$$\begin{aligned} P_i = \gamma_i &= \frac{d}{dt} \left( \sum_k g_{ik} \frac{du^k}{dt} \right) - \frac{1}{2} \sum_{k,h} \frac{\partial g_{kh}}{\partial u^i} \frac{du^k}{dt} \frac{du^h}{dt} = \\ &= \sum_k g_{ik} \frac{d^2 u^k}{dt^2} + \frac{1}{2} \sum_{k,h} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^h} + \frac{\partial g_{ih}}{\partial u^k} \right) \frac{du^k}{dt} \frac{du^h}{dt} - \frac{1}{2} \sum_{k,h} \frac{\partial g_{kh}}{\partial u^i} \frac{du^k}{dt} \frac{du^h}{dt} = \\ &= \sum_k g_{ik} \frac{d^2 u^k}{dt^2} + \sum_{k,h} \left[ \begin{matrix} kh \\ i \end{matrix} \right] \frac{du^k}{dt} \frac{du^h}{dt}. \end{aligned}$$

Мы видим полное совпадение обоих результатов.

38. Основная теорема аналитической механики, вытекающая из уравнений Лагранжа, а именно теорема о том, что *существенные механические свойства системы виртуально заключены в аналитическом выражении ее живой силы*, приближается, как мы видим, к основной теореме метрической геометрии; последняя является, собственно, частным случаем первой.

С практической точки зрения алгоритм Лагранжа является чрезвычайно удобным орудием для вычисления символов Христовфеля. Действительно, *величины  $\Gamma_{khi}$  для данного индекса  $i$  являются коэффициентами квадратичной формы относительно первых производных  $\frac{du^k}{dt}$ , которая входит в выражение:*

$$P_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u^i} - \frac{\partial T}{\partial u^i}.$$

В качестве примера рассмотрим линейный элемент пространства в полярных координатах:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2;$$

связем порядковые номера 1, 2, 3 соответственно с переменными  $r, \theta, \varphi$ . Имеем:

$$\begin{aligned} 2T &= r'^2 + r^2 \theta'^2 + r^2 \sin^2 \theta \varphi'^2; \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial r'} \right) - \frac{\partial T}{\partial r} &= r'' - r \theta'^2 + r^2 \sin^2 \theta \varphi'^2, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \theta'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= r^2 \theta'' + 2r r' \theta' - r^2 \sin \theta \cos \theta \varphi'^2, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \varphi'} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= r^2 \sin^2 \theta \varphi'' + 2r \sin^2 \theta r' \varphi' + 2r^2 \sin \theta \cos \theta \theta' \varphi'. \end{aligned}$$

Отсюда получается, если не писать символов Христовфеля, тождественно равных нулю:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right] &= -r, & \left[ \begin{matrix} 33 \\ 1 \end{matrix} \right] &= -r \sin^2 \theta, \\ \left[ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right] &= r, & \left[ \begin{matrix} 33 \\ 2 \end{matrix} \right] &= -r^2 \sin \theta \cos \theta, \\ \left[ \begin{matrix} 13 \\ 3 \end{matrix} \right] &= r \sin^2 \theta, & \left[ \begin{matrix} 23 \\ 3 \end{matrix} \right] &= r^2 \sin \theta \cos \theta. \end{aligned}$$

Отсюда мы без труда переходим к символам Христоффеля 2-го рода поделив соответственно на 1,  $r^2$  и  $r^2 \sin^2 \theta$  уравнения первой, второй, и третьей строк:

$$\begin{aligned}\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} &= -r, & \left\{ \begin{matrix} 33 \\ 1 \end{matrix} \right\} &= -r \sin^2 \theta, \\ \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{r}, & \left\{ \begin{matrix} 33 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \left\{ \begin{matrix} 13 \\ 3 \end{matrix} \right\} &= \frac{1}{r}, & \left\{ \begin{matrix} 23 \\ 3 \end{matrix} \right\} &= \frac{\cos}{\sin \theta}.\end{aligned}$$

**39.** Кривизна пространственной кривой вычисляется без всяких затруднений. Если криволинейные координаты некоторой ее точки выражены как функции одного параметра  $t$ , играющего роль времени, то известно, что бивектор, определенный скоростью и ускорением, имеет свою мерой величину  $\frac{v^2}{\rho}$ , где  $v$  обозначает скорость, а  $\rho$  — радиус кривизны. Величина скорости дается следующим выражением:

$$v^2 = \sum_{i,j} g_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt};$$

ускорение уже было определено; следовательно, можно вычислить меру интересующего нас бивектора и отсюда вывести  $\frac{1}{\rho}$ . Заметим только, что если уравнения кривой даны, то вычисление ее кривизны в некоторой точке  $M$  требует от нас лишь знания числовых значений для этой точки величин  $g_{ij}$  и  $\Gamma_{ij}^k$ , т. е. величин  $g_{ij}$  и их частных производных первого порядка.

Напротив, вычисление кручения требует знания частных производных и первого и второго порядка от величины  $g_{ij}$ .

Пусть теперь дано уравнение некоторой поверхности. Нормальная кривизна различных кривых, лежащих на этой поверхности и проходящих через точку  $M$ , выражается с помощью величин  $g_{ij}$  и их частных производных первого порядка. Значит, то же можно сказать о главных кривизнах поверхности в этой точке, о ее асимптотических направлениях, о касательных к линиям кривизны и т. д.

## V. Тензорный анализ

**40.** Вычисления, проведенные в п° 34 для определения компонент абсолютного дифференциала вектора, могут быть распространены на случай любого тензорного поля. Пусть, например, дано поле смешанного тензора с двумя индексами:  $a_i^j$ . Геометрическое приращение тензора, соответствующее переходу от точки  $M$  пространства к соседней точке, является бесконечно малым тензором, компоненты которого относительно локального  $n$ -эдра, связанного с точкой  $M$ , мы обозначим через  $Da_i^j$ .

Чтобы вычислить эти величины, введем два *постоянных* векторных поля  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  (впрочем произвольных) и рассмотрим сумму

$$\sum_{i,j} a_i^j X^i Y_j;$$

элементарное изменение этой суммы равно, очевидно:

$$\sum_{i,j} D a_i^j X^i Y_j;$$

с другой стороны, непосредственное вычисление показывает, что это же изменение равно

$$\sum_{i,j} d a_i^j X^i Y_j + \sum_{i,j} a_i^j d X^i Y_j + \sum_{i,j} a_i^j X^i d Y_j;$$

учитывая *постоянство* обоих векторных полей  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ , получим:

$$\sum_{i,j} \left[ d a_i^j - \sum_k a_k^j \omega_i^k + \sum_k a_i^k \omega_k^j \right] X^i Y_j.$$

Отсюда немедленно получаем искомые формулы:

$$D a_i^j = d a_i^j - \sum_k a_k^j \omega_i^k + \sum_k a_i^k \omega_k^j. \quad (21)$$

Легко понять, каков был бы результат, если бы мы вычисляли абсолютный дифференциал тензора с каким угодно числом индексов как верхних, так и нижних.

Если приложить изложенное к *фундаментальному тензору*  $g_{ij}$ , то получится *теорема Риччи*, согласно которой *абсолютный дифференциал фундаментального тензора равен нулю*. Эта теорема очевидна, потому что в случае двух произвольных постоянных векторных полей  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  сумма  $\sum_{i,j} g_{ij} X^i Y^j$  *постоянна*: она является скалярным произведением векторов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$ . Мы имеем следовательно:

$$\sum_{i,j} D g_{ij} X^i Y^j = 0.$$

Эту теорему можно доказать и непосредственным вычислением. Имеем:

$$D g_{ij} = d g_{ij} - \sum_k g_{kj} \omega_i^k - \sum_k g_{ik} \omega_j^k;$$

правая часть равна нулю в силу тех самых уравнений (1), которые служили для определения форм  $\omega_i^j$ .



Вычисление абсолютного дифференциала тензора приводит к замечательному результату, если его приложить к  $n$ -вектору  $a^{12\dots n}$ . Имеем:

$$\begin{aligned} Da^{12\dots n} &= da^{12\dots n} + \sum_i a^{i2\dots n} \omega_i^1 + \dots + \sum_l a^{12\dots l} \omega_l^n = \\ &= da^{12\dots n} + a^{12\dots n} (\omega_1^1 + \omega_2^2 + \dots + \omega_n^n). \end{aligned}$$

Если мы предположим в частности, что поле  $n$ -вектора постоянно, т. е. что постоянен объем  $V$   $n$ -вектора, то получим:

$$\frac{da^{12\dots n}}{a^{12\dots n}} = \frac{d \frac{V}{\sqrt{g}}}{\frac{V}{\sqrt{g}}} = - \frac{d \sqrt{g}}{\sqrt{g}} = - \sum_i \omega_i^i,$$

мы получаем таким образом замечательную формулу:

$$\frac{d \sqrt{g}}{\sqrt{g}} = \sum_i \omega_i^i = \sum_{i,k} \Gamma_{ik}^i du^k. \quad (22)$$

41. Абсолютное дифференцирование вводит в тензорный анализ новое понятие — *производную тензорного поля*. В самом деле, коэффициенты  $a_{ijk}$  абсолютного дифференциала некоторого тензора  $a_{ij}$ :

$$Da_{ij} = \sum_k a_{ijk} du^k,$$

являются компонентами нового тензора. Чтобы в этом убедиться, достаточно доказать, что величины

$$b_{ij} = \sum_k a_{ijk} X^k,$$

где  $X$  обозначает произвольное векторное поле, определяют тензор. Для этого представим себе, что по каждой из *силовых линий* векторного поля, которые определяются системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{du^1}{X^1} = \frac{du^2}{X^2} = \dots = \frac{du^n}{X^n},$$

двигается точка, скорость которой все время равна соответствующему вектору поля. Мы получим тогда:

$$b_{ij} = \frac{Da_{ij}}{dt},$$

формулу, которая делает очевидным тензорный характер  $b_{ij}$ . Ясно, что индекс  $k$ , который вводится посредством этой операции, является ковариантным индексом.

Применим эту операцию к векторному полю  $X^i$  (контравариантные компоненты) или  $X_i$  (ковариантные компоненты). В последнем случае мы получим дважды ковариантный тензор  $X_{ij}$ . Из формулы

$$DX_i = dX_i - \sum_k \omega_i^k X_k$$

следует:

$$X_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial u^j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k.$$

Кососимметрический тензор:

$$X_{ji} - X_{ij} = \frac{\partial X_j}{\partial u^i} - \frac{\partial X_i}{\partial u^j}. \quad (23)$$

хорошо известен: это *ротация* (вихрь) векторного поля. Его можно получить и непосредственно, вычисляя билинейный ковариант

$$d\omega(\delta) - \delta\omega(d)$$

инвариантной дифференциальной формы:

$$\omega(d) = X_1 du^1 + X_2 du^2 + \dots + X_n du^n;$$

мы находим:

$$\begin{aligned} d\omega(\delta) - \delta\omega(d) &= \sum_{i,j} \frac{\partial X_i}{\partial u^j} (du^j \delta u^i - \delta u^j du^i) = \\ &= \sum_{(ij)} \left( \frac{\partial X_j}{\partial u^i} - \frac{\partial X_i}{\partial u^j} \right) du^i \delta u^j - du^j \delta u^i; \end{aligned}$$

правая часть является скалярным произведением ротации (которая рассматривается как система бивекторов) и бивектора, определенного двумя бесконечно малыми векторами  $dM$  и  $\delta M$ .

Другим важным тензором, связанным с производной векторного поля, является *дивергенция* поля: это тензор—скаляр, который получается в результате внутреннего свертывания производной векторного поля (у которой предварительно поднят один из индексов, если она была дважды ковариантна):

$$\sum_i X_i^i = \sum_i X_i^i.$$

Из формулы

$$DX^i = dX^i + \sum_k X^k \omega_k^i$$

получаем:

$$X^i_i = \frac{\partial X^i}{\partial u^i} + \sum_k X^k \Gamma_{ki}^i.$$

Принимая во внимание формулу (22), можно дать следующее выражение для дивергенции векторного поля:

$$\operatorname{div} \mathbf{x} = \sum_i \frac{\partial X^i}{\partial u^i} + \sum_k \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial u^k} X^k = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial (\sqrt{g} X^i)}{\partial u^i}. \quad (24)$$

Это простое выражение можно получить и другим путем. Ограничимся для простоты рассуждения трехмерным пространством. В прямоугольных координатах  $x, y, z$  дивергенция  $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$  некоторого векторного поля  $(X, Y, Z)$  вводится чаще всего при вычислении *потока векторов* сквозь замкнутую поверхность посредством формулы:

$$\iiint (X dy dz + Y dz dx + Z dx dy) = \iiint \left( \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (25)$$

Чтобы написать аналогичную формулу в произвольных криволинейных координатах, будем рассматривать элемент поверхности интегрирования как бивектор, плоскость которого касательна к поверхности, а мера равна площади элемента поверхности; этот бивектор должен быть ориентирован таким образом, чтобы его дополнительный вектор был направлен вне объема, ограниченного нашей заданной поверхностью. Подынтегральное выражение в левой части уравнения (25) будет равняться тогда мере тривектора, определенного введенным выше бивектором и вектором  $(X, Y, Z)$ . Что касается подынтегрального выражения в правой части равенства, то оно является произведением дивергенции поля на элемент объема пространства.

Отсюда получаем общую формулу:

$$\iiint \sqrt{g} (X^1 du^2 du^3 + X^2 du^3 du^1 + X^3 du^1 du^2) = \iiint \operatorname{div} \mathbf{x} \sqrt{g} du^1 du^2 du^3.$$

Применяя формулу Остроградского<sup>1)</sup>, получаем тотчас же:

$$\operatorname{div} \mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial (\sqrt{g} X^i)}{\partial u^i}. \quad (24)$$

**42.** Изучение полей тензоров-скаляров (*скалярных полей*) приводит нас к понятиям, особенно важным в геометрии и в математической физике. Скалярное поле является попросту функцией точки  $V(u^1, \dots, u^n)$ , определенной независимо от какой бы то ни было системы референции. Производный тензор

$$V_i = \frac{\partial V}{\partial u^i}$$

является *градиентом* функции  $V$ ; он определяет таким образом поле векторов. Ротация этого поля тождественно равна нулю. Квадрат длины градиента, а именно:

$$\sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial V}{\partial u^i} \frac{\partial V}{\partial u^j} \quad (26)$$

дает нам *первый дифференциальный параметр*  $\Delta_1 V$  Бельтрами (Beltrami).

<sup>1)</sup> См. § 149 книги Э. Гурса, Курс математического анализа, т. 1, ч. 2, ГТТИ, 1932 г. *Прим. ред.*

Что касается дивергенции градиента, то она приводит ко второму дифференциальному параметру Бельтрами:

$$\Delta_2 V = \frac{1}{V\bar{g}} \sum_i \left( \frac{\partial V\bar{g}}{\partial u^i} V^i \right) = \frac{1}{V\bar{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial u^i} \left( V\bar{g} \sum_k g^{ik} \frac{\partial V}{\partial u^k} \right). \quad (27)$$

В прямоугольных координатах получим:

$$\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$

В случае ортогональных криволинейных координат в пространстве трех измерений будем иметь:

$$\begin{aligned} \Delta_2 V &= \frac{1}{V\bar{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial u^i} \left( V\bar{g} g^{ii} \frac{\partial V}{\partial u^i} \right) = \\ &= \frac{1}{V\bar{g}_{11}g_{22}g_{33}} \left[ \frac{\partial \left( V \sqrt{\frac{g_{22}g_{33}}{g_{11}}} \frac{\partial V}{\partial u^1} \right)}{\partial u^1} + \frac{\partial \left( V \sqrt{\frac{g_{33}g_{11}}{g_{22}}} \frac{\partial V}{\partial u^2} \right)}{\partial u^2} + \frac{\partial \left( V \sqrt{\frac{g_{11}g_{22}}{g_{33}}} \frac{\partial V}{\partial u^3} \right)}{\partial u^3} \right]. \end{aligned}$$

Эта формула была впервые получена Ламе.

Мы видим, что в дивергенцию векторного поля, так же как и в оба дифференциальных параметра Бельтрами, входят только частные производные первого порядка от компонент  $g_{ij}$  фундаментального тензора.

В заключение заметим, что вторая тензорная производная  $V_{ij}$  от скалярного поля является *симметрическим* тензором; действительно, мы имеем:

$$V_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial u^i \partial u^j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial V}{\partial u^k};$$

впрочем, это свойство очевидно и без вычислений, потому что в прямоугольных (вообще в декартовых) координатах компоненты  $V_{ij}$  сводятся ко вторым производным  $\frac{\partial^2 V}{\partial u^i \partial u^j}$ , а свойство тензора быть симметричным от координатной системы не зависит: ведь оно выражает только то, что инвариантная сумма  $\sum_{i,j} V_{ij} X^i Y^j$  не изменится, если поменять

местами векторы  $X$  и  $Y$ .

Тем же свойством обладает, очевидно, тензор  $V_{ijk}$ , — результат трехкратного дифференцирования тензора-скаляра  $V$ ; но если бы мы попытались проверить это путем вычисления, мы встретили бы затруднение: пришлось бы использовать условия, которые показывают, что данный  $ds^2$  является квадратом линейного элемента евклидова пространства. С этими условиями мы до сих пор не встречались; займемся теперь их изучением.

## VI. Необходимые условия, которым удовлетворяет линейный элемент евклидова пространства

43. Если дана произвольная дифференциальная квадратичная форма

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} du^i du^j, \quad (3)$$

то в евклидовом пространстве, вообще говоря, не существует такой системы координат (ни декартовой, ни криволинейной), в которой линейный элемент выражался бы с помощью этой формы. Для того чтобы такая система существовала, необходимо, чтобы можно было определить прямоугольные координаты переменной точки  $M$  (относительно некоторой неподвижной системы осей) и проекции единичных векторов  $e_1, \dots, e_n$  локального  $n$ -эдра, связанного с  $M$  таким образом, чтобы выполнялись соотношения:

$$dM = \sum_i du^i e_i, \quad (7)$$

$$de_i = \sum_k \omega_i^k e_k. \quad (9)$$

Здесь  $\omega_i^j$  обозначают дифференциальные выражения

$$\omega_i^j = \sum_k \Gamma_{ik}^j du^k,$$

коэффициенты которых даются формулами (13).

Условия интегрируемости уравнений (7) выполняются автоматически, в силу самого определения коэффициентов  $\Gamma_{ij}^k$ .

Что касается уравнений (9), то в их условия интегрируемости войдут частные производные первого порядка от  $\Gamma_{ij}^k$ , т. е. частные производные второго порядка от коэффициентов  $g_{ij}$ . Мы сможем решить задачу только для того случая, когда  $g_{ij}$  допускают непрерывные частные производные как первого, так и второго порядка. Это вовсе не означает, что задача вообще не может быть поставлена в случае, когда  $g_{ij}$  имеют частные производные только первого порядка. Но в такой постановке задача еще не решена.

Уравнения (9) дают:

$$\frac{\partial e_i}{\partial u^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k;$$

вычислив двумя различными способами вторую производную  $\frac{\partial^2 e_i}{\partial u^r \partial u^s}$ ,

получаем:

$$\sum_k \left( \frac{\partial \Gamma_{ir}^k}{\partial u^s} + \sum_h \Gamma_{ir}^h \Gamma_{hs}^k \right) e_k = \sum_k \left( \frac{\partial \Gamma_{is}^k}{\partial u^r} + \sum_h \Gamma_{is}^h \Gamma_{hr}^k \right) e_k,$$

откуда сейчас же следуют искомые условия:

$$\frac{\partial \Gamma_{ir}^k}{\partial u^s} - \frac{\partial \Gamma_{is}^k}{\partial u^r} + \sum_k (\Gamma_{ir}^k \Gamma_{ks}^k - \Gamma_{is}^k \Gamma_{kr}^k) = 0 \quad (i, k, r, s = 1, 2, \dots, n). \quad (28)$$

Если в этих уравнениях мы заменим  $\Gamma_{ij}^k$  их значениями из формул (13), то получим необходимые условия, которым должны удовлетворять функции  $g_{ij}$  аргументов  $u^1, \dots, u^n$ .

44. К этим уравнениям можно прийти и иначе. С каждой точкой  $M$  пространства, которое мы предполагаем евклидовым, свяжем точку  $P$ , определенную своими локальными координатами  $x^1, \dots, x^n$ . Мы получим таким образом *поле точек*. Абсолютный дифференциал точки дается выражением:

$$Dx^i = dx^i + du^i + \sum_k x^k \omega_k^i.$$

Положим

$$D_r x^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^r} + \varepsilon_{ir} + \sum_k x^k \Gamma_{kr}^i$$

$$(\varepsilon_{ir} = 0, \text{ если } i \neq r; \quad \varepsilon_{ir} = 1, \text{ если } i = r),$$

так что получим возможность написать:

$$Dx^i = \sum_r D_r x^i du^r.$$

Пусть теперь  $\alpha$  и  $\beta$  будут два бесконечно малых параметра (не зависящих от  $u^1, \dots, u^n$ ). Выбрав точку  $M(u^1, \dots, u^n)$ , обозначим соответственно через  $M', M'', M'''$  точки, которые получаются следующим образом: первая — путем увеличения на  $\alpha$  только координаты  $u^r$ , вторая — путем увеличения на  $\beta$  только координаты  $u^s$ , третья — путем одновременного увеличения координаты  $u^r$  на  $\alpha$  и координаты  $u^s$  на  $\beta$ . Обозначим через  $P, P', P'', P'''$  точки поля, связанные соответственно с точками  $M, M', M'', M'''$ .

Бесконечно малый вектор  $\overline{PP'}$  имеет в качестве контравариантных компонент относительно локального  $n$ -эдра, связанного с  $M$ , величины  $\alpha D_r x^i$ . Эти величины определяют поле вжторов. Если мы перейдем от  $M$  к  $M''$ , то вектор этого поля получит приращение

$$\overline{P''P'''} - \overline{PP'},$$

контравариантными компонентами которого будут величины  $\alpha\beta D_s D_r x^i$ .

Таким же путем мы убеждаемся, что бесконечно малый вектор

$$\overline{P'P''} - \overline{PP''}$$

имеет компоненты  $\alpha\beta D_r D_s x^i$ . Отсюда немедленно получается:

$$D_r D_s x^i - D_s D_r x^i = 0.$$

Вычисление дает:

$$\begin{aligned} D_s D_r x^i &= \frac{\partial D_r x^i}{\partial u^s} + \sum_k D_r x^k \Gamma_{ks}^i = \\ &= \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^r \partial u^s} + \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial u^s} \Gamma_{kr}^i + \sum_k x^k \frac{\partial \Gamma_{kr}^i}{\partial u^s} + \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial u^r} \Gamma_{ks}^i + \Gamma_{rs}^i = \sum_{k, h} x^k \Gamma_{kr}^h \Gamma_{hs}^i. \end{aligned}$$

Сравнение с  $D_r D_s x^i$  немедленно приводит к уравнениям (28).

Все это можно изложить иначе. Вектор  $\overline{PP''}$  может быть вычислен двумя путями. Во-первых, его можно рассматривать как сумму векторов  $\overline{PP'}$  и  $\overline{P'P''}$ : первый имеет компоненты  $\alpha D_r x^i$ , а второй, который принадлежит к полю векторов  $\overline{PP''}$ , — компоненты

$$\beta D_s x^i + \alpha \beta D_r D_s x^i.$$

Мы имеем, следовательно:

$$\overline{PP''} = \alpha D_r x^i + \beta D_s x^i + \alpha \beta D_r D_s x^i.$$

С другой стороны, рассматривая  $\overline{PP''}$  как сумму  $\overline{PP''}$  и  $\overline{P''P''}$ , получим:

$$\overline{PP''} = \beta D_s x^i + \alpha D_r x^i = \alpha \beta D_r D_s x^i.$$

#### 45. Вместо двух полей элементарных смещений

$$\overline{MM'} \quad (\delta u^1 = 0, \dots, \delta u^r = \alpha, \dots, \delta u^n = 0)$$

и

$$\overline{MM''} \quad (\delta u^1 = 0, \dots, \delta u^s = \beta, \dots, \delta u^n = 0),$$

можно рассматривать два произвольных поля смещений, которые можно определить с помощью символов дифференцирования  $d$  и  $\delta$ , *перемещаемых между собою*. Если с помощью символов  $D$  и  $\Delta$  обозначить соответствующие *абсолютные* дифференцирования; то искомые условия выражаются формулой:

$$D\Delta x^i = \Delta D x^i.$$

Но

$$\begin{aligned} \Delta x^i &= \delta x^i + \delta u^i + \sum_k x^k \omega_k^i(\delta); \\ D\Delta x^i &= d(\Delta x^i) + \sum_k \Delta x^k \omega_k^i(d) = \\ &= d\delta x^i + d\delta u^i + \sum_k dx^k \omega_k^i(\delta) + \sum_k x^k d\omega_k^i(\delta) + \\ &+ \sum_k \delta x^k \omega_k^i(d) + \sum_k \delta u^k \omega_k^i(d) + \sum_{h, k} x^k \omega_k^h(\delta) \omega_h^i(d); \end{aligned}$$

Сравнивая с  $\Delta D x^i$  и замечая, что  $d\delta x^i = \delta dx^i$ ,  $d\delta u^i = \delta du^i$ , получаем:

$$\sum_k x^k \left\{ d\omega_k^i(\delta) - \delta\omega_k^i(d) + \sum_h [\omega_k^h(\delta)\omega_h^i(d) - \omega_k^h(d)\omega_h^i(\delta)] \right\} + \\ + \sum_{k,h} (\Gamma_{kh}^i - \Gamma_{hk}^i) \delta u^k du^h = 0.$$

Вследствие симметрии  $\Gamma_{ij}^k$  мы получаем искомые условия в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} d\omega_k^i(\delta) - \delta\omega_k^i(d) = \sum_h [\omega_k^h(d)\omega_h^i(\delta) - \omega_k^h(\delta)\omega_h^i(d)] \\ (i, k = 1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Левые части уравнений (29) являются *билинейными ковариантами* выражений  $\omega_k^i$ . Обозначая их с помощью штриха, получим более сокращенную форму записи:

$$(\omega_k^i)' = \sum_h [\omega_k^h \omega_h^i], \quad (30)$$

где символ  $[\omega_k^h \omega_h^i]$  заменяет определитель

$$\begin{vmatrix} \omega_k^h(d) & \omega_h^i(d) \\ \omega_k^h(\delta) & \omega_h^i(\delta) \end{vmatrix}.$$

Положив все  $du^i$  равными нулю, за исключением  $du^r = 1$ , все  $\delta u^i$  тоже равными нулю, за исключением  $\delta u^s = 1$ , мы снова получим формулы (28).

## VII. Линейные элементы евклидова пространства

46. Займемся теперь вопросом, будут ли условия (28), необходимые для того, чтобы данная форма  $ds^2$  давала линейный элемент евклидова пространства, также и достаточными.

Сузим несколько нашу задачу. Рассмотрим определенную форму  $ds^2$  с  $n$  переменными  $u^1, \dots, u^n$ , коэффициенты которой  $g_{ij}$  являются в некоторой числовой области  $(\mathfrak{D})$  функциями, допускающими непрерывные частные производные первых двух порядков, причем дискриминант  $g$  нигде нулю не равен. Мы будем говорить для краткости, что метрика, определенная формой  $ds^2$ , *регулярна* во всей области  $(\mathfrak{D})$ . Предположим, наконец, что область  $(\mathfrak{D})$  *односвязна*. Это значит, что если рассматривать  $u^1, u^2, \dots, u^n$  как декартовы координаты точки в обыкновенном  $n$ -мерном пространстве, то числовая область  $(\mathfrak{D})$  отобразится на такую область это  $o$  пространства, в которой любой замкнутый контур может быть непрерывной деформацией стянут в точку.



Сделав эти предположения, мы сможем доказать, что если соотношения (28) удовлетворены, то всегда возможно отобразить числовую область  $(\mathfrak{D})$  на соответствующим образом подобранную область  $(\Delta)$  евклидова пространства так, чтобы квадрат расстояния двух бесконечно близких точек области  $(\Delta)$  был в точности равен данному  $ds^2$ .

Попробуем с этой целью определить точку  $P$  и векторы  $e_i$  евклидова пространства таким образом, чтобы тождественно выполнялись равенства:

$$\left. \begin{aligned} dP &= \sum_i du^i e_i, \\ de_i &= \sum_k \omega_i^k e_k \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

(см. п° 33). Прибавим к этому следующие начальные условия: если переменные  $u^i$  принимают систему числовых значений  $(u^i)_0$  (расположенную в области  $\mathfrak{D}$ ), то точка  $P$  должна совпасть с данной точкой  $P_0$ , а векторы  $e_i$  — с данными векторами  $(e_i)_0$ , попарные скалярные произведения которых должны быть равны частным значениям  $g_{ij}$  при  $u^i = (u^i)_0$ .

Докажем, что система (31) интегрируема.

Пусть

$$(u^1)_1, (u^2)_1, \dots, (u^n)_1$$

будет некоторая система значений, принадлежащая к области  $(\mathfrak{D})$ . Если система (31) имеет решение, то мы получим точку  $P$  и векторы  $e_i$ , соответствующие этой системе значений, взяв в области  $(\mathfrak{D})$  некоторую кривую, соединяющую  $(u^i)_0$  с  $(u^i)_1$  и интегрируя систему (31) вдоль этой кривой. Будем рассматривать  $u^i$  как функции независимой переменной  $t$ , принимающие при  $t=0$  значения  $(u^i)_0$  и при  $t=1$  значения  $(u^i)_1$ , и проинтегрируем систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= \sum_i \frac{du^i}{dt} e_i, \\ \frac{de_i}{dt} &= \sum_{k,h} \Gamma_{ih}^k \frac{du^h}{dt} e_k, \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

взяв в качестве начальных значений неизвестных точку  $P_0$  и векторы  $(e_i)_0$ . Мы получим таким образом при  $t=1$  совершенно определенную точку  $P$  и векторы  $e_i$ .

47. Докажем прежде всего, что полученные нами векторы  $e_i$  при всех значениях  $t$  удовлетворяют соотношениям:

$$e_i e_j = g_{ij}.$$

В самом деле, в силу формул (32) мы имеем:

$$\frac{d(e_i e_j)}{dt} = \sum_{k,h} \left( \Gamma_{ih}^k \frac{du^h}{dt} e_j e_k + \Gamma_{jh}^k \frac{du^h}{dt} e_i e_k \right).$$

Скалярные произведения  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  удовлетворяют, следовательно, системе дифференциальных уравнений, которая в силу самого определения коэффициентов  $\Gamma_{ij}^k$  (п° 33) имеет в качестве решений функции  $g_{ij}$ . Но оба решения  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  и  $g_{ij}$  удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям при  $t=0$ , должны быть тождественно равны друг другу.

48. Докажем теперь, что, соединив в области  $(\mathfrak{D})$  системы значений  $(u^i)_0$  и  $(u^i)_1$  некоторой иной кривой, мы получим ту же самую точку и те же векторы, что и в первом случае.

В самом деле, раз область  $(\mathfrak{D})$  является односвязной областью, значит, мы можем путем непрерывной деформации перейти от первой кривой ко второй. Представим себе непрерывную последовательность кривых, зависящую от одного параметра  $a$  и содержащую обе данные кривые. Каждая кривая семейства может быть определена посредством уравнений:

$$u^i = f^i(a, t),$$

и, не уменьшая общности, можно предположить, что при  $t=0$

$$u^i = (u^i)_0,$$

и при  $t=1$

$$u^i = (u^i)_1,$$

независимо от того, какое значение имеет параметр  $a$ .

Поступая с каждой кривой семейства так, как это было только что указано, мы получим для каждой системы значений  $a$  и  $t$  некоторую точку  $P$  и векторы  $\mathbf{e}_i$ .

В силу сделанных предположений мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial t} - \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial t} \mathbf{e}_i &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial t} - \sum_{k,h} \Gamma_{ih}^k \frac{\partial u^h}{\partial t} \mathbf{e}_k &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Положим теперь

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial a} - \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial a} \mathbf{e}_i &= \boldsymbol{\varepsilon}, \\ \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial a} - \sum_{k,h} \Gamma_{ih}^k \frac{\partial u^h}{\partial a} \mathbf{e}_k &= \boldsymbol{\varepsilon}_i. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Продифференцируем уравнения (32) по  $a$ , уравнения (33) по  $t$  и вычтем из последних первые. Получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial t} &= \sum_i \left( \frac{\partial u^i}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial a} - \frac{\partial u^i}{\partial a} \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial t} \right), \\ \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_i}{\partial t} &= \sum_{k,h} \Gamma_{ih}^k \left( \frac{\partial u^h}{\partial t} \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial a} - \frac{\partial u^h}{\partial a} \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial t} \right) + \sum_{k,h,l} \frac{\partial \Gamma_{ih}^k}{\partial u^l} \left( \frac{\partial u^l}{\partial a} \frac{\partial u^h}{\partial t} - \frac{\partial u^l}{\partial t} \frac{\partial u^h}{\partial a} \right) \mathbf{e}_k. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Заменим в этих равенствах  $\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial t}$  и  $\frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial a}$  их значениями из уравнений (32) и (33). В силу соотношений (28), которые предполагаются выполненными, уравнения (34) сведутся к следующим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial t} \varepsilon_i, \\ \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial t} &= \sum_{k, h} \Gamma_{ih}^k \frac{\partial u^h}{\partial t} \varepsilon_k. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

При  $t=0$  точка  $P$ , векторы  $\mathbf{e}_i$  и функции  $u^i(t, a)$  не зависят от  $a$ ; следовательно, векторы  $\varepsilon$  и  $\varepsilon_i$  превращаются в нуль при  $t=0$ . Но эти векторы удовлетворяют дифференциальным уравнениям (35), которые допускают решение  $\varepsilon = \varepsilon_i = 0$ . Значит, мы имеем тождественно:

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \dots = \varepsilon_n = 0.$$

Но в силу сделанных предположений при  $t=1$  все  $\frac{\partial u^i}{\partial a}$  равны нулю; формулы (33) показывают, что одновременно с этим (при  $t=1$ ) и

$$\frac{\partial P}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_i}{\partial a} = 0.$$

Следовательно, точка  $P$  и векторы  $\mathbf{e}_i$  не зависят при  $t=1$  от параметра  $a$ , а это как раз и есть то, что нужно было доказать.

49. Точка  $P$  и векторы  $\mathbf{e}_i$  являются определенными функциями координат  $u^1, \dots, u^n$ . Если даны две бесконечно близкие системы значений  $(u^i)$  и  $(u^i + du^i)$ , то можно предполагать, что обе соответствующие системы  $(P, \mathbf{e}_i)$  определены с помощью кривой, выходящей из  $(u^i)_0$  и проходящей через  $(u^i)$  и  $(u^i + du^i)$ . Это показывает, что уравнения (31) удовлетворяются тождественно. Векторы  $\mathbf{e}_i$  образуют локальный  $n$ -эдр евклидова пространства, отнесенного к координатам  $(u^i)$ , и так как мы имеем (п° 47)

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = g_{ij},$$

то  $ds^2$  пространства тождественен с заданной формой  $ds^2$ .

Декартовы координаты  $x^i$  точки  $P$ , которая соответствует системе значений  $(u^i)$ , являются вполне определенными функциями последних:

$$x^i = F^i(u^1, \dots, u^n). \quad (36)$$

Легко видеть, что функциональный определитель  $n$  функций  $F^i$  никогда не превращается в нуль. Уравнение

$$\sum_i (dx^i)^2 = \sum_{i, j} g_{ij} du^i du^j$$

показывает, что

$$\sum_k \frac{\partial x^k}{\partial u^i} \frac{\partial x^k}{\partial u^j} = g_{ij}.$$

Вычисление квадрата функционального определителя функций  $x^i$  по отношению к  $u^i$  дает тотчас же значение  $g$ . Но так как дискриминант  $g$  по предположению отличен от нуля во всей области  $(\mathfrak{D})$ , то тем же свойством будет обладать и наш функциональный определитель.

Из этого еще нельзя заключить, что всякой системе значений  $x^i$ , полученной из уравнений (36), соответствует одна единственная система значений  $u^i$ ; это можно будет утверждать только в том случае, если в области  $(\mathfrak{D})$  ограничиться рассмотрением достаточно малой окрестности системы значений  $(u^i)_0$ .

Отсюда следует, что области  $(\mathfrak{D})$  соответствует в евклидовом пространстве область  $(\Delta)$ , линейный элемент которой в соответствующих координатах выражается с помощью данной формы  $ds^2$ ; но эта область  $(\Delta)$  может частично или полностью перекрываться. Если ограничиться областью  $(\mathfrak{D})$  в достаточно близком соседстве с точкою  $(u^i)_0$ , то соответствующая область  $(\Delta)$  не будет перекрываться, и мы получим взаимно-однозначное соответствие между системами значений  $u^i$  и точками области  $(\Delta)$ . Область  $(\Delta)$  будет односвязной, так же как и соответствующая область  $(\mathfrak{D})$ .

## ЛОКАЛЬНО-ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА <sup>1)</sup>

### I. Понятие многообразия

**50.** Точно определить общее понятие многообразия — задача достаточно трудная. Общее представление о многообразии двух измерений дает поверхность. Если мы рассмотрим, например, сферу или тор, то мы увидим, что эти поверхности можно разложить на конечное число частей, каждая из которых может быть взаимно-однозначно отображена на некоторую односвязную область евклидовой плоскости.

Выражаясь точнее, для каждой точки  $P_0$  многообразия можно найти вблизи этой точки такую систему координат  $u, v$ , что если  $u_0, v_0$  являются координатами самой точки  $P_0$ , то существует положительное число  $r$ , обладающее следующим свойством. Любая система чисел  $u, v$ , удовлетворяющая неравенству;

$$(u - u_0)^2 + (v - v_0)^2 < r^2, \quad (1)$$

представляет собою координаты некоторой точки многообразия, близкой к  $P_0$ , и, наоборот, в достаточно малой окрестности  $P_0$  всякая точка  $P$  имеет координаты  $u, v$ , удовлетворяющие неравенству (1).

Сфера и тор являются многообразиями двух измерений, не имеющими границ. Круглый цилиндр, гиперболический параболоид являются *открытыми* двумерными многообразиями (с границей в бесконечности). Одна полость круглого конуса, из которой исключена вершина, образует многообразие, имеющее границы как в бесконечности, так и на конечном расстоянии (вершина).

Объем, заключенный внутри некоторой сферы, представляет собою открытое многообразие трех измерений, причем границей служит сама сфера. Объем, заключенный внутри сферы, вместе с поверхностью, его ограничивающей, образует трехмерное многообразие, имеющее границу, но граница является частью самого многообразия, которое называется в таких случаях *замкнутым*.

<sup>1)</sup> По поводу материала этой главы см. *W. Killing*, Einführung in die Grundlagen der Geometrie, t. I, Paderborn, 1893; *F. Klein*, Conférences sur les Mathématiques faites à l'Exposition de Chicago (Conf. XI); *J. Hadamard*, Sur la forme de l'espace (Proc. - verb. des séances de la Soc. des Sc. phys. et nat. de Bordeaux, 1897—1898, стр. 83—85); *H. Weyl*, Die Idee der Riemannschen Fläche, (Leipzig und Berlin, 1923, также Math. Ann., t. 77, 1916, стр. 349); *H. Hopf*, Zum Clifford - Kleinschen Raumproblem (Math. Ann. t. 95, 1926, стр. 313—339). Смотри также *F. Enriques* Principes de la géometrie (Encycl. Sc. math., t. III, 1, стр. 131—136).

В предыдущих примерах каждое многообразие было определено как точечное множество, данное в некотором предсуществующем пространстве. Но можно представлять себе и многообразия, данные *in abstracto*. В общем случае многообразие  $n$  измерений характеризуется возможностью представить окрестность каждой точки  $P_0$  с помощью  $n$  координат  $u^i$ , способных принимать все значения, достаточно близкие к системе значений  $(u^i)_0$ , представляющей точку  $P_0$ .

51. Координаты, с помощью которых возможно аналитически представить некоторую часть многообразия, могут быть выбраны бесконечным числом способов. Переходя от одной системы координат к другой, мы всегда подразумеваем, что новые координаты являются непрерывными функциями старых, и наоборот. *Топология* имеет целью изучение свойств многообразий, инвариантных по отношению к таким преобразованиям координат.

В дифференциальной геометрии к этому прибавляется еще одно условие; именно, новые координаты, рассматриваемые как функции прежних, не только должны быть непрерывными, но должны, кроме того, допускать непрерывные частные производные вплоть до некоторого наперед данного порядка. Совокупность свойств, инвариантных по отношению к преобразованиям такого рода, значительно шире совокупности топологически инвариантных свойств.

Определим, например, кривую, задавая координаты ее точек как функции некоторого параметра  $t$ . Сказать, что эти функции дифференцируемы относительно  $t$ , это значит установить некоторое свойство кривой, которое сохраняется при всех допускаемых нами преобразованиях координат: мы приходим таким образом к понятию *линейного элемента*. Аналитически линейный элемент определяется заданием  $n$  координат  $u^1, \dots, u^n$  и отношений их дифференциалов  $du^1, \dots, du^n$ . Геометрически он определяется совокупностью кривых, *касательных между собою* в некоторой данной точке.

Мы приходим к понятию *двумерного элемента* (элементарной площадки), рассматривая множество линейных элементов, исходящих из одной точки и удовлетворяющих системе  $n-2$  уравнений, линейных относительно  $du^1, \dots, du^n$ ; это, очевидно, такое свойство множества линейных элементов, которое сохраняется при преобразованиях координат. Таким же образом определяются элементарные площадки трех, четырех и т. д. измерений.

Если из некоторой данной точки выходят четыре линейных элемента, касательных к одной и той же элементарной площадке, то ангармоническое отношение этих линейных элементов определит число, которое не меняется ни при каком преобразовании координат. Эти соображения можно обобщить многими путями.

Подытоживая все это, мы можем сказать, что изучение свойств такого рода является геометрией многообразия, рассматриваемого с точки зрения группы непрерывных и *дифференцируемых* точечных преобразований, тогда как *топология* является геометрией многообразия с точки зрения группы просто непрерывных точечных преобразований.

Если предположить, что новые координаты допускают частные производные первого и второго порядка относительно старых и наоборот,

то совокупность геометрических понятий еще более возрастет. Можно будет говорить о кривых, имеющих соприкосновение второго порядка и т. д.

52. *Римановым многообразием* или *римановым пространством* называют многообразие, с которым связана метрика. Это значит, что в каждой части многообразия, представленного аналитически с помощью некоторой системы координат  $u^i$ , задана дифференциальная квадратичная форма:

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} du^i du^j.$$

Мы предполагаем, что коэффициенты формы  $g_{ij}$  являются непрерывными функциями, допускающими непрерывные частные производные первого и второго порядка. Мы допускаем, следовательно, только такие преобразования координат, при которых новые координаты допускают непрерывные частные производные первого и второго порядка по отношению к старым, и наоборот.

Мы скажем, что метрика *регулярна* в данной области многообразия, если во всех точках этой области  $ds^2$  является определенной положительной формой от  $du^i$ .

Мы сделаем еще одно естественное предположение, именно мы предположим, что если многообразие составлено из нескольких частей, каждая из которых имеет свое аналитическое представление, то можно установить связь между метриками соседних частей. Можно предположить, например, что аналитическое представление каждой части может быть немного продолжено вне ее, т. е. на соседние части, и что два  $ds^2$ , полученные при этом на общих участках, будут сводимы один к другому посредством преобразования координат, которое связывает одно аналитическое представление с другим.

## II. Локально-евклидовы пространства

53. Риманово многообразие называется локально-евклидовым, если во всех частях этого многообразия, определенных аналитически некоторой системой координат  $u^i$ , форма  $ds^2$  удовлетворяет условиям (28) (п° 43) линейного элемента евклидова пространства.

Это значит, в силу доказанного в конце предыдущей главы, что многообразие в достаточно малой окрестности любой из своих точек  $M_0$  может быть отображено на некоторую малую область евклидова пространства с сохранением линейного элемента  $ds^2$ . Мы будем называть такого рода отображение *развертыванием* рассматриваемой части многообразия на евклидово пространство. Обратно, полученная в результате такой операции область евклидова пространства будет *развертываться* на соответствующий малый участок многообразия.

Если метрика риманова многообразия повсюду регулярна, то ясно, что можно шаг за шагом развернуть все многообразие на евклидово пространство.

Но при этом нельзя быть уверенным *a priori*:

1. Что при развертывании мы получим все точки евклидова пространства.

2. Что некоторая точка евклидова пространства, полученная при развертывании многообразия на это пространство, не может быть получена больше чем один раз.

54. Прежде чем идти дальше, поясним изложенное выше несколькими простыми примерами, относящимися к двумерным многообразиям. Круглый цилиндр в обыкновенном пространстве имеет в качестве линейного элемента

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

если через  $u$  обозначена криволинейная абсцисса (заключенная между 0 и  $l$ ), отсчитанная по круговому сечению, а через  $v$  — ордината: это — евклидов линейный элемент; но многообразие не будет односвязным, и развертывание его на евклидову плоскость даст последовательность бесконечных лент шириною  $l$ . Каждой точке цилиндра соответствует бесконечное число точек плоскости, которые получаются друг из друга в результате переноса, имеющего постоянное направление на расстояние, равное произвольному кратному величины  $l$ . Мы видим, что *плоскость здесь покрыта вся целиком и притом один единственный раз*. Мы получим образ нашего многообразия, если возьмем на плоскости ленту, имеющую ширину  $l$  и бесконечно простирающуюся в обе стороны, и если при этом мы будем считать тождественными две точки, лежащие на параллелях, ограничивающих ленту, если прямая, соединяющая эти точки, перпендикулярна этим параллелям.

Другой пример даст нам тор. Положение точки на торе вполне определяется двумя углами  $\theta$  и  $\varphi$ , каждый из которых заключен между 0 и  $2\pi$ ; задавая на торе линейный элемент с постоянными коэффициентами

$$ds^2 = ad\theta^2 + 2bd\theta d\varphi + cd\varphi^2,$$

мы определим на этом многообразии евклидову метрику <sup>1)</sup>. В евклидовой плоскости переменные  $\theta$  и  $\varphi$  будут декартовыми координатами. При развертывании на евклидову плоскость тор покроет, таким образом, параллелограмм  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , если, определяя развертывание, мы не будем проводить на торе кривых, пересекающих линии  $\theta = 0$  или  $\varphi = 0$ . Если от этих ограничений отказаться, то тор развернется на всю плоскость, которая будет покрыта один единственный раз; но область, представляющей многообразие, будет параллелограмм, противоположные стороны которого должны быть при этом идентифицированы.

В качестве последнего примера рассмотрим одну бесконечную полость круглого конуса, линейный элемент которого  $ds^2$  определяется метрикой объемлющего пространства (обычного). Этот линейный элемент, как известно, тоже будет евклидовым. Только здесь *вершина конуса является*

<sup>1)</sup> W. Killing заметил, что можно реализовать это многообразие (при  $b=0$ ), рассматривая в евклидовом пространстве *четырёх* измерений поверхность, определенную уравнениями:

$$x_1 = \sqrt{a} \cos \theta, \quad x_2 = \sqrt{a} \sin \theta, \quad x_3 = \sqrt{c} \cos \varphi, \quad x_4 = \sqrt{c} \sin \varphi.$$

Clifford дал еще и другую его интерпретацию, в трехмерном эллиптическом пространстве.



особой точкой метрики, потому что полупрямая, исходящая из вершины и проходящая последовательно через все направления (на конусе), *опи- сывает угол меньший*  $2\pi$ . Желая избежать исследования особых точек метрики, мы должны исключить из рассмотрения вершину нашего многообразия; многообразие будет, таким образом, *открытым* со стороны вершины (и в бесконечности) и с точки зрения топологии будет идентично круглому цилиндру.

Развертывание этого многообразия на евклидову плоскость даст теперь всю плоскость (за исключением одной точки), но эта плоскость будет *перекрыта бесконечное число раз* (по крайней мере в том случае, когда синус половины угла при вершине конуса будет иррациональным числом). Результат, как мы видим, резко отличается от того, который мы получили в двух предыдущих случаях.

Наконец, любая развертывающаяся поверхность имеет также евклидов линейный элемент  $ds^2$ , но при этом ребро возврата будет геометрическим местом особых точек метрики; рассматривая только одну полость поверхности, мы получим развертывание, при котором будет покрыта только часть евклидовой плоскости, но эта часть может быть перекрыта несколько раз и даже бесконечное число раз.

55. В связи с тем, что сейчас было сказано, возникает мысль о соотношении между фактом покрытия евклидова пространства (при развертывании некоторого многообразия) целиком и фактом покрытия его один единственный раз. Общим в двух последних примерах было то, что рассматриваемое многообразие было открытым, причем граница была на конечном расстоянии — обстоятельство, которое не имело места в двух первых примерах (цилиндр и тор).

Мы исключим из рассмотрения римановы пространства, имеющие особенности, аналогичные особенностям конуса. Для этого необходимо рассмотреть *внутреннюю* геометрию этих многообразий, не связанную с предсуществующим объемлющим пространством.

Определим сначала расстояние  $[AB]$  двух точек  $A$  и  $B$  риманова пространства с повсюду правильной метрикой как нижнюю границу длин всевозможных дуг кривых (спрямляемых), соединяющих точку  $A$  с точкой  $B$ . Легко видеть, что если даны три любые точки  $A, B, C$ , то будет иметь место неравенство:

$$[AC] \leq [AB] + [BC].$$

Назовем *сферой* с центром  $A$  радиуса  $R$  множество точек, удовлетворяющих неравенству:

$$[AM] \leq R.$$

Бесконечное множество точек пространства мы назовем *ограниченным*, если расстояние от некоторой фиксированной точки  $A$  до точек этого множества является ограниченным; очевидно, это свойство не зависит от выбора постоянной точки  $A$ .

Скажем, что точка  $P$  риманова пространства является *предельной точкой* бесконечного множества  $(E)$  точек этого пространства, если в любой сфере с центром  $P$  произвольно малого радиуса  $r$  существует

по крайней мере одна точка множества  $(E)$ , отличная от  $P$ ; их существует в этом случае и бесчисленное множество.

56. В дальнейшем мы будем рассматривать только римановы пространства с регулярной повсюду метрикой, обладающие тем свойством, что *всякое бесконечное ограниченное множество точек такого пространства имеет по крайней мере одну предельную точку*. Очевидно, бесконечная полость конуса (без вершины), рассматриваемая как двумерное риманово пространство с метрикой, индуцированной объемлющим евклидовым пространством (обычным), не обладает этим свойством. Будем называть *нормальным* риманово пространство, имеющее повсюду регулярную метрику и обладающее указанным свойством. Цилиндр, тор (с метрикой, определенной, как было указано выше), само евклидово пространство — являются, очевидно нормальными пространствами.

Существует два больших класса нормальных пространств.

*Нормальное риманово пространство называется замкнутым, если любое множество точек этого пространства имеет по крайней мере одну предельную точку.* В таком пространстве расстояние от постоянной точки  $A$  до переменной  $M$  ограничено; действительно, в противном случае существовала бы бесконечная последовательность точек  $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ , такая, что расстояние  $[AM_n]$  возрастало бы неограниченно; но это невозможно, потому что такая последовательность имела бы по крайней мере одну предельную точку  $P$ , и внутри сферы с центром  $P$  радиуса  $r$  находилось бы бесконечное число точек последовательности — точек  $M_n$ , как угодно далеких от точки  $A$ , тогда как на самом деле мы имеем:

$$[AM_n] \leq [AP] + r.$$

Можно добавить, что расстояние  $[MM]$  между двумя переменными точками тоже будет ограниченным; это следует из неравенства:

$$[MM] \leq [AM] + [AN].$$

Ясно, что справедливо и обратное предложение: если расстояние двух переменных точек нормального риманова пространства ограничено, то пространство замкнуто, потому что любое бесконечное множество точек этого пространства *a fortiori* ограничено и, следовательно, имеет предельную точку.

Незамкнутое нормальное риманово пространство будем называть *открытым в бесконечности*; таким пространством является круглый цилиндр, а также само евклидово пространство. Это наименование понятно само собой: оно выражает ту мысль, что существуют бесконечные последовательности точек, неограниченно удаляющиеся от некоторой данной точки  $A$  и не имеющие предельных точек.

### III. Нормальные локально-евклидовы римановы пространства

57. Поставим себе целью доказать следующую фундаментальную теорему:

*Если риманово пространство с евклидовой метрикой нормально, то, разворачивая его на евклидово пространство, мы покроем последнее один и только один раз.*

Мы видели, что для каждой точки  $M_0$  риманова пространства существует положительное число  $r$ , обладающее тем свойством, что, установив соответствие между точкой  $M_0$  и точкой  $P_0$  евклидова пространства, мы тем самым автоматически установим взаимно-однозначное соответствие между точками сферы  $(S)$  с центром  $P_0$  радиуса  $r$  и точками риманова пространства, достаточно близкими к  $M_0$ . Эти точки образуют, очевидно, односвязную сферу  $(\Sigma)$  с центром в  $M_0$ .

Число  $r$ , связанное с точкой  $M_0$ , не является, конечно, однозначно определенным, его можно заменить любым меньшим положительным числом. Но здесь важно следующее замечание:

*Если точка  $M'_0$  находится от точки  $M_0$  на расстоянии, меньшем положительного числа  $\varepsilon < r$ , то с  $M'_0$  можно связать число  $r' = r - \varepsilon$ .* Действительно, точка  $M'_0$  лежит внутри  $(\Sigma)$ ; в евклидовом пространстве ей соответствует точка  $P'_0$ , внутренняя по отношению к  $(S)$ , и сфера  $(S')$  с центром в  $P'_0$  радиуса  $r - \varepsilon$  лежит целиком внутри  $(S)$ ; это как раз и доказывает существование взаимно-однозначного соответствия между точками сферы  $(S')$  и некоторой окрестностью точки  $M'_0$ .

58. Предыдущее замечание показывает, что если точка  $M$  остается внутри или на границе некоторой замкнутой области, например сферы риманова пространства, то величина  $r$  остается большей некоторого положительного числа  $\rho$ . В самом деле, если бы это обстоятельство не имело места, то можно было бы найти бесконечную последовательность чисел

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n, \dots,$$

стремящуюся к нулю, а также последовательность точек области

$$M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$$

таким образом, чтобы было невозможно связать с точкой  $M_n$  число  $r$ , большее  $\varepsilon_n$ . Но рассматриваемая последовательность точек имеет по крайней мере одну предельную точку  $M_0$ , с которой можно связать число  $r_0$ . Если  $\varepsilon$  обозначает сколь угодно малое положительное число, то существует бесконечное множество точек последовательности  $M_n$ , расстояние которых от  $M_0$  будет меньше  $\varepsilon$ ; со всеми этими точками можно связать число  $r_0 - \varepsilon$ , которое превзойдет  $\varepsilon_n$  при  $n$  достаточно большом.

Доказав это предложение, сделаем следующее. Выберем в римановом пространстве начало  $M_0$  и поставим ему в соответствие точку евклидова пространства  $P_0$  и декартову систему координат  $(R_0)$ , определенную с точностью до ориентации числовыми значениями коэффициентов  $g_{ij}$  фундаментальной формы в точке  $M_0$ . Заметим, впрочем, что  $(R_0)$  определена с точностью до поворота и отражения. Отправляясь от точки  $P_0$ , снабженной локальной системой координат  $(R_0)$ , мы развернем риманово пространство на пространстве евклидово.

59. **ТВОРЕМА I.** *При разворачивании риманова пространства евклидово пространство покрывается целиком.*

Пусть  $P$  — некоторая произвольная точка евклидова пространства. Соединим  $P_0$  с  $P$  произвольной кривой  $(C)$  конечной длины  $l$ . Рассмотрим в римановом пространстве сферу  $(\Sigma)$  с центром в  $M_0$  радиуса  $R$ , где  $R$  — данное число, большее, чем  $l$ . (Эта сфера может совпадать со

всем римановым пространством, если последнее замкнуто, а  $R$  достаточно велико.) Сфере  $(\Sigma)$  соответствует положительное число  $\rho$ , меньшее, чем все числа  $r$ , связанные с различными точками  $(\Sigma)$ .

Представим себе в евклидовом пространстве последовательность сфер радиуса  $\rho$ , первая из которых имеет центром точку  $P_0$ , последняя — точку  $P$ , причем все промежуточные сферы имеют центры на кривой  $(C)$  и частично перекрывают друг друга, так что каждая точка кривой  $(C)$  является *внутренней* по отношению по крайней мере к одной из сфер последовательности. Кривую  $(C)$  можно будет тогда разделить на некоторое число частичных дуг

$$P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}P,$$

расположенных каждая внутри соответствующей сферы нашей последовательности. Установив это, рассмотрим дугу  $P_0P_1$ ; эта дуга, расположенная внутри первой сферы радиуса  $\rho$ , при отображении евклидова пространства на риманово даст некоторую дугу  $M_0M_1$ , расположенную *целиком внутри сферы*  $(\Sigma)$ ; то же будет с другой  $P_1P_2$  и со всеми следующими дальше дугами, которые дадут в римановом пространстве отображение, лежащее целиком в  $(\Sigma)$ . Кривая  $(C)$  развернется, таким образом, на некоторую кривую  $(\gamma)$ , которая в свою очередь даст кривую  $(C)$  при разворачивании риманова пространства на евклидово. Теорема таким образом доказана.

60. В конечной точке  $M$  кривой  $(\gamma)$  коэффициенты  $g_{ij}$  имеют определенные числовые значения. Если вдоль кривой  $(\gamma)$  в римановом пространстве мы имеем все время одну и ту же систему координат, то локальные  $n$ -эдры, связанные с различными точками кривой  $(C)$ , будут меняться непрерывно, так что каждая точка  $(C)$  будет снабжена своей декартовой координатной системой  $(R)$ .

Если в частях риманова пространства, пересеченных кривою  $(\gamma)$ , будут две различные системы координат  $(u^i)$  и  $(v^i)$ , то на первом участке кривой  $(C)$  мы получим декартову систему  $(R_u)$ , затем на втором участке  $(C)$  получим  $(R_v)$ . На границе участков будет разрыв непрерывности в изменении  $n$ -эдра. Может, впрочем, случиться, что кривая  $(\gamma)$ , отправившись из точки  $M_0$  области с координатами  $u^i$ , пересекает затем область с координатами  $v^i$  и снова возвращается в область координат  $u^i$ . Мы получим тогда на кривой  $(C)$  дугу с местной координатной системой  $(R_u)$ , вторую дугу с системой  $(R_v)$  и третью — снова с системой  $(R_u)$ .

Если одна и та же система координат сохраняется вдоль всей кривой  $(\gamma)$ , то  $n$ -эдр  $(R)$ , связанный с  $P$ , очевидно, будет так же ориентирован, как и  $n$ -эдр  $R_0$ , связанный с  $P_0$ . Но если кривая  $(\gamma)$ , отправляясь из некоторой области с координатами  $u^i$ , возвращается в нее, пересекая область с координатами  $v^i$ , то  $n$ -эдр  $(R_u)$ , связанный с  $P$ , может и *не быть ориентирован так*, как  $n$ -эдр  $(R_u)_0$ , связанный с  $P_0$ . Действительно, в первой граничной точке двух областей оба  $n$ -эдра  $(R_u)$  и  $(R_v)$  будут ориентированы одинаково или же различно, в зависимости от того, каков будет знак у функционального определителя

$$\frac{D(v^1, v^2, \dots, v^n)}{D(u^1, u^2, \dots, u^n)};$$

во второй граничной точке снова будет играть роль знак этого определителя, но нет никаких оснований считать *a priori*, что в обеих рассматриваемых точках знак у определителя будет один и тот же.

В заключение добавим почти очевидное замечание о том, что некоторый определенный путь, выходящий из точки  $P_0$  евклидова пространства, может быть отображением лишь одного единственного пути, выходящего из точки  $M_0$  риманова пространства: это вытекает из того доказательства, которое мы только что привели.

**61. ТЕОРЕМА II.** *При разворачивании риманова пространства евклидово пространство покрывается только один раз.*

Достаточно показать, что два различные кривые  $(C)$  и  $(C')$ , начинающиеся в точке  $P_0$  и оканчивающиеся в точке  $P$ , при отображении евклидова пространства на риманово дают две кривые, начинающиеся в  $M_0$  и оканчивающиеся в одной и той же точке  $M$ . В доказательстве приходится опираться на односвязность евклидова пространства.

Представим себе последовательность дуг кривых:

$$(C), (C_1), \dots, (C_{n1}), (C'),$$

исходящих из точки  $P_0$  и оканчивающихся в точке  $P$ . Обозначим длины кривых  $(C)$  и  $(C')$  соответственно через  $l$  и  $l'$ , и возьмем на каждой из этих кривых параметр  $t$ , непрерывно изменяющийся от 0 до 1, когда мы описываем соответствующую кривую. Можно взять, например,

$$t = \frac{s}{l} \quad \text{для первой кривой,}$$

$$t = \frac{s}{l'} \quad \text{» второй » ,}$$

причем  $s$  обозначает здесь криволинейную абсциссу, отсчитываемую от точки  $P_0$ . Пусть, далее, уравнениями этих кривых в прямоугольных координатах будут соответственно:

$$x_i = f_i(t) \quad (1)$$

и

$$x_i = \varphi_i(t). \quad (2)$$

Определим кривую  $(C_a)$  с помощью уравнений

$$x_i = af_i(t) + (1-a)\varphi_i(t) \quad (0 < a < 1). \quad (3)$$

Для кривой  $(C_a)$  имеем:

$$\sum_i dx_i^2 = [a^2 l^2 + (1-a)^2 l'^2 + 2a(1-a) \sum_i f'_i(t) \varphi'_i(t)] dt,$$

и неравенство

$$\left| \sum_i f'_i(t) \varphi'_i(t) \right| \leq \sqrt{\sum_i f_i'^2(t)} \sqrt{\sum_i \varphi_i'^2(t)} = ll'$$

дает:

$$\sum_i dx_i^2 \leq [al + (1-a)l']^2 dt.$$

Пусть  $L$  будет наибольшее из двух чисел  $l$  и  $l'$ . Мы видим, что *криволинейная абсцисса любой точки кривой  $(C_a)$  не может быть больше  $Lt$* , и, следовательно, *все кривые нашего семейства имеют длину не большую, чем  $L$* .

Пусть  $R$  будет число, большее, чем  $L$ ; рассмотрим в римановом пространстве сферу  $(\Sigma)$  с центром в  $M_0$  и радиусом  $R$  и обозначим через  $\rho$  положительное число, меньшее, чем все числа  $r$ , связанные с различными точками сферы  $(\Sigma)$ .

Оценим, наконец, расстояние между двумя точками, лежащими одна на кривой  $(C_a)$ , другая на кривой  $(C_{a'})$  и соответствующими одному и тому же значению  $t$ . Имеем:

$$\delta^2 = (a - a')^2 \sum_i [f_i(t) - \varphi_i(t)]^2.$$

Обозначим через  $D^2$  наибольшее значение, которое получает сумма в правой части равенства при изменении  $t$  от 0 до 1.

Получим:

$$\delta \leq (a - a') D.$$

Разделим теперь интервал  $(0, 1)$  изменения перемен  $s$  и  $a$  на частичные интервалы, каждый из которых меньше  $\frac{2}{3} \frac{\rho}{D}$ , и рассмотрим кривые  $(C)$ ,  $(C_1)$ , ...,  $(C_n)$ ,  $(C')$ , соответствующие точкам подразделения. Интервал  $(0, 1)$  изменения переменной  $t$  тоже разделим на частичные интервалы, каждый из которых меньше  $\frac{2}{3} \frac{\rho}{L}$ , и обозначим точки деления через

$$0, t_1, t_2, \dots, t_{p-1}, 1.$$

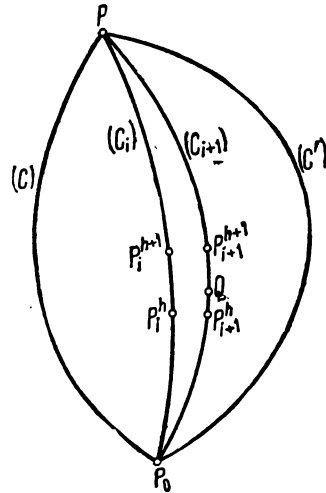
Этим значениям  $t$  соответствуют на каждой из кривых  $(C_i)$  точки  $P_0$ , и  $(p-1)$  промежуточных точек  $P_1^1, \dots, P_{i-1}^{p-1}$ .

*Сферы радиуса  $\rho$ , имеющие центры в точках*

$$P_0, P_1^1, P_1^2, \dots, P_{i-1}^{p-1},$$

*обладают следующим свойством: каждая точка как кривой  $(C_i)$ , так и кривой  $(C_{i+1})$  является внутренней по отношению по крайней мере к одной из этих сфер. Для  $(C_i)$  это очевидно. Положим теперь, что  $Q$  — некоторая точка кривой  $(C_{i+1})$  (фиг. 1), а  $P_{i+1}^k$  — та из  $(p+1)$  точек  $P_{i+1}^k$ , которая расположена всего ближе к  $Q$ ; имеем:*

$$\text{дуга } QP_{i+1}^k < \frac{1}{2} \frac{2}{3} \frac{\rho}{L} L = \frac{1}{3} \rho;$$



Фиг. 1.

с другой стороны,

$$P_i^h P_{i+1}^h < \frac{2}{3} \frac{\rho}{D} D = \frac{2}{3} \rho;$$

следовательно,

$$QP_i^h < \frac{2}{3} \rho + \frac{1}{3} \rho = \rho;$$

иными словами, точка  $Q$  лежит *внутри* сферы радиуса  $\rho$  с центром в точке  $P_i^h$ .

$(p+1)$  сферам радиуса  $\rho$ , имеющим центры на  $(C)$ , соответствуют в римановом пространстве  $(p+1)$  сфер, частично перекрывающихся друг друга, центры которых лежат все *внутри*  $(\Sigma)$ ; кривая  $(C)$  отобразится в римановом пространстве на кривую  $(\gamma)$ , начинающуюся в точке  $M_0$  и оканчивающуюся в точке  $M$ —центре последней сферы. Кривая  $(C_1)$ , очевидно, тоже отобразится на некоторую кривую  $(\gamma_1)$ , начинающуюся в  $M_0$  и оканчивающуюся в  $M$ . Рассматривая  $(p+1)$  сфер, имеющих центры на кривой  $(C_1)$ , мы убеждаемся, что и кривая  $(C_2)$  отобразится на некоторую кривую  $(\gamma_2)$ , которая начинается в  $M_0$  и оканчивается в  $M$ . Продолжая шаг за шагом это рассуждение, мы убеждаемся, что и кривая  $(C')$  даст в римановом пространстве кривую  $(\gamma')$ , исходящую из  $M_0$ , оканчивающуюся в  $M$  и лежащую целиком *внутри*  $(\Sigma)$ .

*Отсюда следует, что при обратном отображении (развертывании) риманова пространства на евклидово только одна точка  $M$  сможет отобразиться в точку  $P$ . А это и требовалось доказать.*

Таким образом наша основная теорема полностью доказана.

**62.** Предположим в частности, что мы имеем односвязное риманово пространство. Отображая евклидово пространство на риманово, мы покроем последнее один и только один раз. Следовательно, *эти два пространства тождественны между собою*, тождественны в том смысле, что существует взаимно-однозначное соответствие между точками этих пространств, сохраняющее расстояния между точками.

*Всякое риманово пространство, нормальное, односвязное и имеющее евклидову метрику, тождественно с евклидовым пространством.*

В частности такое пространство простирается в бесконечность. Отсюда следует в случае  $n=2$ , что *поверхность сферы, которая односвязна, не может быть аналитически задана с помощью одной единственной повсюду регулярной координатной системы*. В противном случае, обозначая через  $u$  и  $v$  координаты и взяв в качестве линейного элемента выражение  $ds^2 = du^2 + dv^2$ , мы определили бы на сфере повсюду регулярную евклидову метрику.

#### IV. Группа голономии нормального локально-евклидова пространства

**63.** Рассмотрим теперь нормальное риманово пространство, локально-евклидово, но многосвязное. При развертывании его на евклидово пространство, точке  $M_0$  будет соответствовать несколько точек (может быть даже бесконечно много):

$$P_0, P_1, P_2, \dots$$

С каждой из этих точек будет связана местная декартова система координат (репер)

$$(R_0), (R_1), (R_2), \dots,$$

определенная значениями коэффициентов  $g_{ij}$  в точке  $M_0$ . Все эти реперы либо тождественны, либо симметричны.

Ясно, что если начать развертывание, установив соответствие между точкой  $M_0$  и точкой  $P_1$ , имеющей репер  $(R_1)$ , то это развертывание ничем существенным не будет отличаться от предыдущего; если некоторый путь  $(\gamma)$ , ведущий от  $M_0$  и  $M$ , приводил при первом отображении в точку  $P$  с локальной координатной системой  $(R)$ , то новое развертывание приведет к точке  $P'$  и системе  $(R')$ , так же расположенным по отношению к  $(R_1)$ , как  $P$  и  $R$  были расположены по отношению к  $(R_0)$ .

Отсюда следует, что перемещение  $S_1$  (которое может сопровождаться отражением), преобразующее в евклидовом пространстве  $(R_0)$  в  $(R_1)$ , переведет  $(R_1)$  в  $(R_2)$ ,  $(R_2)$  в  $(R_3)$  и т. д. Действительно,  $n$ -эдр  $(R_i)$  получается из  $(R_0)$ , при развертывании некоторого замкнутого контура (цикла)  $(\gamma_i)$ , который начинается и оканчивается в  $M_0$ ; если будем развертывать тот же цикл, отправляясь от  $(R_1)$ , то получим некоторый  $n$ -эдр  $(R_j)$ , расположенный относительно  $(R_1)$  так же, как  $(R_i)$  расположен относительно  $(R_0)$ ; этот  $n$ -эдр  $(R_j)$  можно получить, развертывая сначала цикл  $(\gamma_1)$ , затем цикл  $(\gamma_i)$ .

64. Из этих соображений попутно вытекает, что смещения

$$S_1, S_2, S_3, \dots$$

образуют группу. Действительно, сохраняя обозначения предыдущего п<sup>о</sup>, мы видим, что если выполнить последовательно операции  $S_1$  и  $S_i$ , то  $n$ -эдр  $(R_0)$  сначала преобразуется в  $(R_1)$ , затем в  $(R_j)$ ; общее смещение будет, следовательно, тождественно с  $S_j$ :

$$S_i S_1 = S_j.$$

Полученная таким образом группа  $G$  называется группой голономии риманова пространства. Каждому  $n$ -эдру  $(R_i)$  соответствует определенное преобразование этой группы и притом единственное, именно, то, которое переводит  $(R_0)$  в  $(R_i)$ .  $n$ -эдру  $(R_0)$  соответствует тождественное преобразование.

Преобразования группы голономии могут быть приложены к любой точке  $Q$  евклидова пространства. Если, например, преобразование  $S_1$  переводит ее в  $Q_1$ , то это значит, что точка  $Q_1$  так расположена относительно  $(R_1)$ , как точка  $Q$  была расположена относительно  $(R_0)$ . Обозначим через  $(\gamma)$  кривую риманова пространства, которая преобразуется при развертывании в некоторую данную кривую  $(C)$ , соединяющую  $P_0$  с  $Q$ , и пусть  $N$  будет конечная точка этой кривой. Мы получим, очевидно, точку  $Q_1$ , развертывая кривую, составленную из цикла  $(\gamma_1)$  и дуги  $(\gamma)$ ; эта сложная кривая начинается в  $M_0$  и кончается в  $N$ ; следовательно, точки  $Q_1$  и  $Q$  соответствуют одной и той же точке риманова про-



пространства. Будем называть такие точки *гомологическими* или просто *гомологами*.

65. Докажем теперь два основных свойства группы голономии. Пусть  $P$  — произвольная точка евклидова пространства; она соответствует некоторой определенной точке  $M$  риманова пространства. С этой точкой можно связать положительное число  $r$ , обладающее тем свойством, что всякой точке  $P'$ , отличной от  $P$  и расстояние которой от  $P$  меньше  $r$ , соответствует точка  $M'$ , отличная от  $M$ . Следовательно, *гомологи точки  $P$  удалены от нее на расстояние, большее чем  $r$* .

Это свойство выражает собою прерывность группы голономии. Действительно, группа называется прерывной, если с каждой точкой  $P$  можно поставить в соответствие такое число  $r$ , чтобы все отображения точки  $P$  отстояли от нее на расстояние большее чем  $r$ .

В случае непрерывной группы может случиться, что существуют некоторые исключительные точки, которые являются своими собственными гомологами для некоторых из преобразований группы. В нашем случае это не может иметь места. Иными словами, *любое преобразование группы голономии, отличное от тождественного, не имеет ни одной инвариантной точки*.

Мы получаем, таким образом, следующую теорему:

*Группа голономии локально-евклидова пространства прерывна, и никакое из преобразований этой группы, за исключением тождественного, не оставляет инвариантной ни одной точки пространства.*

## V. Фундаментальный полиэдр

66. Когда круглый цилиндр разворачивается на плоскость, каждая точка цилиндра отображается один и только один раз на некоторую полосу, ограниченную двумя параллельными прямыми, расстояние между которыми равно длине окружности сечения, перпендикулярного образующей цилиндра. Мы покажем сейчас, что и в общем случае всегда можно построить полиэдр, содержащий одно и только одно отображение каждой точки риманова пространства. Для определенности проведем рассуждения для случая  $n=3$ .

Такой полиэдр можно построить с помощью так называемого *радиального метода*. Рассмотрим множество точек евклидова пространства, которые расположены ближе к точке  $P_0$ , чем к любой из точек  $P_1, P_2, \dots$ , гомологичных точке  $P_0$ . Это множество определяет область  $\mathfrak{F}$  (*фундаментальную область*), граница которой состоит из точек, равноудаленных от  $P_0$  и от каждой из гомологичных точек.

Область  $\mathfrak{F}$  *выпукла*, потому что, если  $Q$  и  $Q'$  лежат в этой области, то обе они расположены по ту же сторону, что и  $P_0$ , относительно плоскости, перпендикулярной отрезку  $P_0P_1$  и проходящей через его середину (каково бы ни было  $i$ ); следовательно, это же можно сказать и про любую точку  $R$  отрезка  $QQ'$ .

Пусть теперь  $Q$  будет произвольной точкой евклидова пространства. Вследствие прерывности группы голономии  $G$  существует одна или несколько точек из числа  $P_0, P_1, P_2, \dots$ , более близких к  $Q$ , чем все остальные. Предположим сначала, что имеется только одна такая точка  $P_0$ .

Преобразование  $S_i^{-1}$  группы  $G$ , переводящее  $P_i$  в  $P_0$ , переводит  $Q$  в некоторую определенную точку  $R$ , которая, очевидно, ближе к  $P_0$ , чем все другие гомологичные ей точки, и которая, следовательно, лежит внутри области  $\mathfrak{F}$ . С другой стороны, в этой области не существует другой точки  $R'$ , гомологичной  $Q$ , потому что в противном случае преобразование, переводящее  $R'$  в  $Q$ , переводило бы  $P_0$  в некоторую точку  $P_j$ , расположенную ближе к  $Q$ , чем все иные гомологичные точки и, следовательно, совпадающую с  $P_i$ ; следовательно, и точка  $R'$  была бы тождественна с точкой  $R$ . Если бы существовало несколько точек  $P_i, P_j, \dots$ , одинаково удаленных от  $Q$  и более близких к ней, чем все другие гомологичные точки, то операции  $S_i^{-1}, S_j^{-1}, \dots$  перевели бы  $Q$  в точки  $R, R'$ , лежащие на границе  $\mathfrak{F}$  и гомологичные между собою.

**67. Фундаментальная область  $\mathfrak{F}$** , как мы сейчас покажем, представляет собою полиэдр, ограниченный конечным числом плоских граней.

Предположим сначала, что область  $\mathfrak{F}$  конечна. Обозначим через  $R$  максимум расстояния от  $P_0$  до границы  $\mathfrak{F}$ . Все точки сферы с центром в  $P_0$  радиуса  $R$ , сферы, содержащей  $\mathfrak{F}$  внутри себя, расположены, конечно, ближе к  $P_0$ , чем точки  $P_i$ , внешние по отношению к сфере с центром в  $P_0$  и радиуса  $2R$ . Для того чтобы исследовать область  $\mathfrak{F}$ , достаточно, следовательно, рассматривать только те из точек  $P_i$ , которые расположены внутри или на поверхности этой последней сферы. Таких точек может быть только конечное число; следовательно, область  $\mathfrak{F}$  будет ограничена конечным числом плоских граней, лежащих в плоскостях, равноудаленных от  $P_0$  и от некоторых из точек  $P_i$ .

Предположим теперь, что область  $\mathfrak{F}$  простирается в бесконечность. Это значит, что существует по крайней мере одна полупрямая, исходящая из  $P_0$  и целиком лежащая внутри  $\mathfrak{F}$  (в силу выпуклости  $\mathfrak{F}$ ). Если  $P_0z$  — такая полупрямая, то все точки  $P_i$ , гомологичные  $P_0$ , будут, очевидно, расположены либо в плоскости  $(\Pi)$ , проходящей через  $P_0$  и перпендикулярной  $P_0z$ , либо в той части пространства, которая расположена со стороны плоскости  $(\Pi)$ , противоположной прямой  $P_0z$ .

Предположим сначала, что существует только одна полупрямая, расположенная целиком внутри  $\mathfrak{F}$ . Расстояние от  $P_0$  до точек области  $\mathfrak{F}$ , расположенных в плоскости  $(\Pi)$ , или со стороны  $(\Pi)$ , противоположной прямой  $P_0z$ , будет иметь верхнюю грань  $R$ ; тогда, для того чтобы изучить  $\mathfrak{F}$ , достаточно рассмотреть те из точек  $P_i$ , которые расположены внутри или на поверхности сферы с центром в  $P_0$  радиуса  $2R$ , и мы придем к тому же заключению, что и в предыдущем абзаце.

Предположим далее, что существуют две прямо противоположные полупрямые  $P_0z$  и  $P_0z'$ , лежащие целиком внутри  $\mathfrak{F}$ . Теперь все точки  $P_i$  необходимо должны быть расположены в плоскости  $(\Pi)$ , проходящей через  $P_0$  и перпендикулярной к полупрямым  $P_0z$  и  $P_0z'$ . Достаточно рассмотреть те из них, которые расположены внутри или на поверхности сферы с центром в  $P_0$  радиуса  $2R$ , где через  $R$  обозначена верхняя грань расстояния от  $P_0$  до точек области  $\mathfrak{F}$ , расположенных в плоскости  $(\Pi)$ . В этом случае область  $\mathfrak{F}$  представляет собою призму, неограниченно простирающуюся в обе стороны.

Предположим, наконец, что ни один из разобранных выше случаев не имеет места. Существование двух полупрямых (не прямо противоположных)  $P_0z$  и  $P_0z'$ , целиком лежащих внутри  $\mathfrak{F}$ , влечет за собою то, что и все полупрямые  $P_0z''$ , лежащие внутри угла  $zP_0z'$  в плоскости этого угла, оказываются целиком лежащими в  $\mathfrak{F}$ . Множество полупрямых  $P_0z$ , лежащих внутри  $\mathfrak{F}$ , заполняет таким образом коническое (или пирамидальное) выпуклое тело, и все точки  $P_i$  могут расположиться только внутри или на поверхности *дополнительного* конуса. Заканчивается рассуждение так же, как и в предыдущих случаях.

68. Если построить около каждой точки  $P_i$ , гомологичной  $P_0$ , соответствующую фундаментальную область  $\mathfrak{F}_i$ , то все евклидово пространство будет заполнено точками этих областей, и притом так, что различные фундаментальные области не будут перекрываться. Все эти области будут, очевидно, равны между собою, так что мы получим своеобразное разбиение пространства на правильные клетки.

Точкам  $P_i$ , фактически служившим для построения границы области  $\mathfrak{F}$ , соответствует конечное число преобразований  $S_i$  группы голономии. Преобразование  $S_i^{-1}$  переводящее  $P_i$  в  $P_0$ , в свою очередь переводит точку  $P_0$  в некоторую точку  $P_j$ , отличную от  $P_i$ , так как в противном случае середина отрезка  $P_0P_i$  была бы инвариантной точкой преобразования  $S_i$ , а это противоречит основному свойству группы  $G$  (n° 65). Точкам  $P_i$  и  $P_j$  соответствуют две грани  $\mathfrak{F}_i$  и  $\mathfrak{F}_j$  полиэдра  $\mathfrak{F}$ , причем точки этих двух граней попарно гомологичны; действительно, от любой точки  $F_i$  мы переходим к соответствующей точке  $F_j$  посредством преобразования;

$$S_i^{-1} = S_j.$$

Таким образом грани фундаментальной области  $\mathfrak{F}$  попарно гомологичны друг другу, и преобразование, приводящее точки одной грани в совпадение с гомологичными точками другой, тождественно тому преобразованию, которое переводит точку  $P_0$  в точку  $P_j$ , симметричную точке  $P_0$  по отношению ко второй грани.

Эти преобразования называются *фундаментальными преобразованиями* группы голономии. Наименование это объясняется тем, что любое преобразование группы  $G$  получается в результате выполнения фундаментальных преобразований, произведенных в определенном порядке надлежащее количество раз. Действительно, от  $P_0$  к  $P_i$  можно перейти, пересекая некоторое число фундаментальных полиэдров; грани этих полиэдров гомологичны граням  $\mathfrak{F}$ ; достаточно выполнить фундаментальные преобразования, соответствующие этим граням, и притом в порядке обратном тому, в каком эти грани следуют друг за другом, для того чтобы перевести  $\mathfrak{F}$  в  $\mathfrak{F}_i$ , т. е.  $P_0$  в  $P_i$ .

Группа голономии допускает, таким образом, конечное число основных операций, с помощью которых можно построить все преобразования этой группы. Заметим еще, что группа голономии содержит бесконечное число преобразований. Если бы это было не так, то центр средних расстояний от  $P_0$  до ее гомологов, число которых было бы конечно, являлся бы инвариантной точкой для всех операций группы.

## VI. Определение всех нормальных локально-евклидовых пространств

69. Теперь мы в состоянии свести определение всех нормальных локально-евклидовых пространств к некоторой проблеме теории групп.

Пусть  $G$  — группа смещений (связанных или не связанных с отражением), которая обладает двумя свойствами, сформулированными в п° 65, именно — свойством быть прерывной и свойством не содержать ни одного преобразования (кроме тождественного), имеющего инвариантные точки.

Евклидово пространство, если условиться считать в нем тождественными две точки, гомологичные по отношению к группе  $G$ , и принять обычную метрику, дает нам риманово пространство, нормальное, локально-евклидово. Чтобы ясно отдать себе отчет в этом, заметим, что если дана некоторая точка  $Q$  евклидова пространства, то все ее гомологи в силу прерывности группы  $G$  будут расположены вне некоторой сферы с центром в  $Q$  радиуса  $R$ . Возьмем сферу с центром в  $Q$  радиуса  $\frac{R}{2}$ ; внутри этой сферы не может быть двух точек  $Q_1$  и  $Q_2$ , гомологичных между собою; действительно, если бы такие точки были, то преобразование группы  $G$ , переводящее  $Q_1$  в  $Q_2$ , — преобразование, для которого точка  $Q$  не является инвариантной точкой, перевело бы точку  $Q$  в точку  $Q'$ , причем мы имели бы:

$$Q_1 Q = Q_2 Q';$$

но

$$QQ' \leq QQ_2 + Q_2 Q',$$

или

$$QQ' \leq QQ_2 + QQ_1 < R,$$

а это противоречит сделанным нами предположениям. Следовательно, любая часть евклидова пространства, внутренняя по отношению к рассматриваемой сфере радиуса  $\frac{R}{2}$ , состоит из различных точек риманова пространства, и метрика там повсюду регулярна. Число  $r$ , соответствующее (п° 57) точке  $Q$ , рассматриваемой как точка риманова пространства, здесь по меньшей мере равно  $\frac{R}{2}$ .

Можно получить более конкретное воплощение риманова пространства, построив фундаментальный полиэдр, что всегда можно сделать, если только известна группа  $G$ , отправляясь от точки  $P_0$  пространства и ее различных гомологов.

Метод построения фундаментального полиэдра, принятый нами, не является единственно возможным. В некоторых случаях бывает выгодно его несколько видоизменить. Предположим, наприм:р, что преобразования группы голономии  $G$ , оставляющие инвариантной евклидову метрику пространства, оставляют также инвариантной другую метрику, определенную в декартовых прямоугольных координатах дифференциальной квадратичной формой с постоянными коэффициентами. Тогда можно будет построить фундаментальный полиэдр, прилагая попрежнему ради-

альный метод, но приняв эту новую метрику. Полученный таким образом новый полиэдр не будет равен первоначальному, но это не имеет никакого значения.

Если риманово пространство *замкнуто*, то различные фундаментальные полиэдры, которые можно для него построить, будут все ограничены; *они все будут иметь один и тот же объем*, соответствующий полному объему риманова пространства.

Заметим еще, что римановы пространства, связанные с группой  $G$ , состоящей только из смещений (без отражений), являются *ориентируемыми*, в противном же случае — *не ориентируемыми*.

## VII. Нормальные локально-евклидовы пространства двух измерений

70. Применим изложенные выше общие принципы к случаю двух измерений. Нам нужно определить все прерывные группы, составленные из параллельных перемещений или же из параллельных перемещений, сопровождающихся отражением относительно прямой, параллельной направлению движения.

У пространства *ориентируемого* группа голономии будет состоять только из параллельных перемещений. Множество гомологов точки  $P$  (включая и эту точку) образует таким образом либо *линейную сеть*, либо *плоскую сеть*. Первый случай соответствует цилиндру, второй — тору с евклидовой метрикой. Пространства первой категории отличаются друг от друга только величиной основного параллельного смещения, пространства второй категории (пространства Клиффорда) — более существенными признаками; с каждым из них связана система эллиптических (дважды периодических) функций; существенное различие соответствующих пространств обуславливается *модулем* этих функций.

Для построения фундаментального многоугольника здесь можно воспользоваться замечанием, сделанным в п<sup>о</sup> 69. Действительно, любая группа параллельного переноса оставляет инвариантными все метрики с постоянными коэффициентами. Если мы рассмотрим, например, группу

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + pa + qa', \\ y' &= y + pb + qb', \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где  $p$  и  $q$  — два произвольных целых числа,  $a, a', b, b'$  — постоянные, то достаточно будет рассмотреть такую метрику, в которой векторы  $(a, b)$  и  $(a', b')$  будут единичны и ортогональны. Многоугольник, полученный по радиальному методу, будет параллелограмом, стороны которого соответственно равны и параллельны этим векторам.

71. Теория аналитических функций комплексного переменного легко приводит к евклидовым метрикам, по крайней мере в некоторой определенной области. Пусть  $f(z)$  будет аналитическая функция, голоморфная в окрестности точки  $z_0$  и равная нулю только при  $z = z_0$ . Уравнение

$$ds^2 = |f(z) dz|^2$$

определяет в плоскости комплексного переменного  $z$  евклидову метрику, регулярную в окрестности точки  $z_0$ ; действительно, если через  $\varphi(z)$  обозначим некоторую первообразную функцию от  $f(z)$ , например положим

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^z f(z) dz$$

(функция, определенная в окрестности  $z_0$ ), и если положим, кроме того,

$$\varphi(z) = P + iQ,$$

то получим:

$$ds^2 = dP^2 + dQ^2.$$

Этого достаточно, чтобы убедиться, что действительно получилась евклидова метрика. Но, с другой стороны, эта метрика и регулярна, потому что, полагая

$$z = x + iy, \quad f(z) = A(x, y) + iB(x, y),$$

мы получим:

$$ds^2 = (A^2 + B^2)(dx^2 + dy^2),$$

причем коэффициент  $A^2 + B^2$  не равен нулю в точке  $z_0$ .

Легко разыскать локально-евклидовы многообразия, имеющие повсюду регулярную метрику. Возьмем сначала в качестве  $f(z)$  рациональную функцию  $z$ , не имеющую нулей в конечной части плоскости:

$$f(z) = \frac{1}{Q(z)},$$

где  $Q(z)$  — некоторый полином, целый относительно  $z$ . При  $z = \infty$  метрика

$$ds^2 = \left| \frac{dz}{Q(z)} \right|^2$$

останется регулярной, если при  $z = \frac{1}{t}$  выражение  $\frac{dz}{Q(z)}$  примет вид  $\varphi(t) dt$ , причем  $\varphi(0)$  будет отлично от нуля. Это будет иметь место в том случае, когда  $Q(z)$  будет полиномом не выше второй степени. В этом случае многообразие, образованное плоскостью комплексного переменного (включая бесконечно удаленную точку), будет иметь метрику, регулярную везде, кроме двух нулей полинома  $Q(z)$ ; если отвлечься от этих двух точек многообразия, *точек, которые по отношению к рассматриваемой метрике являются бесконечно удаленными точками*, то мы получим двумерно-евклидово пространство с двумя границами в бесконечности. Это пространство, очевидно, ориентируемо. Следовательно, оно разворачивается на евклидову плоскость, образуя бесконечную последовательность лент, таким же образом, как цилиндр. Обозначая через  $u$  и  $v$  прямоугольные координаты евклидовой плоскости, мы увидим, что  $z$

является периодической функцией от  $u + iv$ . Обращение интеграла  $\int \frac{dz}{az^2 + bz + c}$  дает таким образом однозначную просто периодическую функцию.

Можно также рассматривать не однозначную функцию  $f(z)$ ; в этом случае существует риманова поверхность, на которой эта функция однозначна.

Если, например, взять функцию  $f(z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ , то метрика

$$ds^2 = \left| \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} \right|^2$$

будет, как это легко видеть, регулярной во всех точках римановой поверхности, за исключением двух точек  $z = \infty$  на обоих листах; удаляя эти две точки многообразия, мы получим многообразие с двумя границами, но расположенными опять в бесконечности по отношению к рассматриваемой метрике. Обращение даст нам снова просто периодическую функцию.

Возьмем, наконец, эллиптический интеграл  $\int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}}$ , где  $R(z)$  обозначает полином четвертой степени. Метрика

$$ds^2 = \left| \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} \right|^2$$

повсюду регулярна на римановой поверхности, связанной с функцией  $\sqrt{R(z)}$ , не исключая ни единой точки. Мы определяем таким образом замкнутое многообразие с повсюду регулярной евклидовой метрикой. Следовательно, это многообразие, разветываясь на евклидову плоскость, дает сеть параллелограммов, а  $z$ , однозначная функция точки многообразия, является аналитической, однозначной, дважды периодической функцией комплексного переменного  $u + iv$ , где  $u$  и  $v$  обозначают прямоугольные координаты евклидовой плоскости, на которую производится разветвление. Мы доказали, таким образом, основное свойство обращения эллиптического интеграла.

Это же рассуждение без всяких изменений можно было бы приложить к интегралу 1-го рода, связанному с некоторой алгебраической кривой 1-го ранга и  $p$ -й степени,

$$f(z, t) = 0.$$

Метрика

$$ds^2 = \left| \frac{Q(z, t) dz}{f'_t} \right|^2,$$

где  $Q$  — сопряженный полином степени  $p-3$ , повсюду регулярна на римановой поверхности, соответствующей рассматриваемой кривой.

Рассуждение не может быть приложено к гиперэллиптическому интегралу

$$\int \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

потому что метрика становится нерегулярной в двух точках  $z = \infty$ , *точках, которые по отношению к этой метрике не являются бесконечно удаленными.*

72. Перейдем к неориентируемым пространствам. Всякое преобразование группы  $G$ , содержащее отражение, может быть определено в прямоугольных координатах с помощью уравнений вида:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= -y; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

такое преобразование, повторенное два раза подряд, дает смещение, параллельное оси  $Ox$ , на величину  $2a$ . Следовательно, в  $G$  содержатся смещения, параллельные  $Ox$ . Пусть  $a$  — наименьшее положительное из этих смещений: всегда можно добиться того, чтобы  $a$  имело значение, меньшее, чем  $a$ , а так как, кроме того,  $2a$  должно быть кратным  $a$ , то можно положить  $a = \frac{a}{2}$ . Мы будем иметь таким образом в группе  $G$  следующие преобразования:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + na, \\ y' &= y; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + \left(n + \frac{1}{2}\right)a, \\ y' &= -y. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Предположим, что в группе  $G$  имеются смещения, не параллельные оси  $Ox$ , и пусть

$$\begin{aligned} x' &= x + \lambda, \\ y' &= y + \mu \end{aligned}$$

— одно из этих смещений. В группе  $G$  будет тогда и смещение

$$\begin{aligned} x' &= x + \lambda, \\ y' &= y - \mu, \end{aligned}$$

являющееся результатом трех последовательных преобразований:

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{a}{2}; & x' &= x + \lambda; & x' &= x - \frac{a}{2} \\ y' &= -y; & y' &= y + \mu; & y' &= -y, \end{aligned}$$

Следовательно, будут и смещения на величину  $2\lambda$ , параллельные  $Ox$ ; значит  $\lambda$  является целым кратным от  $\frac{a}{2}$ , кратным, которое всегда можно свести к 0 или к  $\frac{a}{2}$ . Но к  $\frac{a}{2}$  его свести нельзя, потому что в этом случае группа содержала бы преобразование

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= -y + \mu, \end{aligned}$$

имеющее инвариантную точку  $\left(0; \frac{\mu}{2}\right)$ .



Следовательно, группа  $G$  содержит смещение, параллельное  $Oy$ . Отсюда немедленно вытекает общая форма преобразований группы:

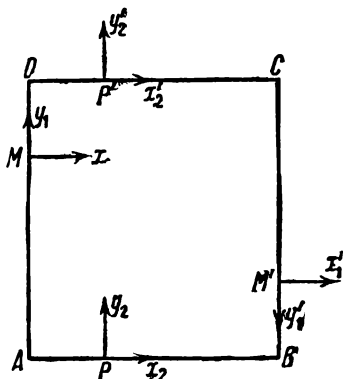
$$\left. \begin{aligned} x' &= x + pa, \\ y' &= y + qb; \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + \left(p + \frac{1}{2}\right)a, \\ y' &= -y + qb, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

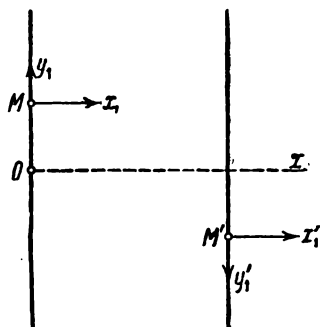
где  $p$  и  $q$  обозначают произвольные целые числа.

73. Существуют, следовательно, два класса неориентируемых локально-евклидовых пространств, соответствующие двум классам пространств ориентируемых.

В качестве фундаментальной области пространств второго класса можно



Фиг. 2.



Фиг. 3.

взять прямоугольник, имеющий центр в начале, стороны которого параллельны осям и равны соответственно  $\frac{a}{2}$  и  $b$  (фиг. 2).

Двумя основными операциями группы будут:

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{a}{2} & \text{и} & & x' &= x, \\ y' &= -y & & & y' &= y + b; \end{aligned}$$

первая переводит сторону  $AD$  в сторону  $CB$ , причем локальная координатная система, связанная с точкой  $M$  на  $AD$ , меняет ориентацию при переходе к гомологичной точке  $M'$  на  $CB$ ; вторая влечет за собой преобразование стороны  $AB$  в сторону  $DC$ , причем локальная координатная система, связанная с точкой  $P$  на  $AB$ , сохраняет свою ориентацию в гомологичной точке  $P'$  стороны  $DC$ .

74. Задержимся несколько дольше на первом классе неориентируемых пространств, группа голономии которых дается формулами:

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + na, \\ y' &= y; \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} x' &= x + \left(n + \frac{1}{2}\right)a, \\ y' &= -y. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

В качестве фундаментальной области можно взять полосу плоскости (фиг. 3), заключенную между прямыми  $x=0$  и  $x=\frac{a}{2}$ , причем основной операцией, переводящей первую прямую во вторую, будет

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{a}{2}, \\ y' &= -y. \end{aligned}$$

Но можно взять иную фундаментальную область, более удобную, заменяя часть первой, расположенную под осью  $Ox$ , ее гомологом относительно основного преобразования. Мы получим таким образом (фиг. 4) часть плоскости, расположенную под осью  $Ox$  между прямыми  $x=0$  и  $x=a$ . Этой области соответствуют два основных преобразования: одно, определенное уравнениями:

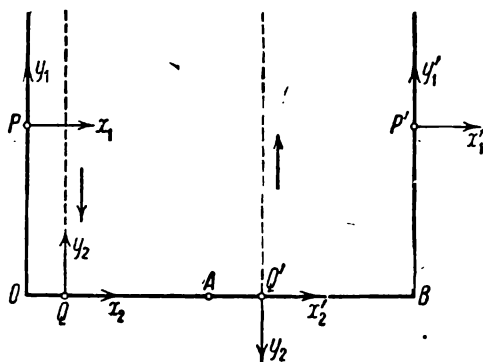
$$\begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= y, \end{aligned}$$

переводит сторону  $x=0$  в сторону  $x=a$ ; другое, определенное уравнениями:

$$\begin{aligned} x' &= x + \frac{a}{2}, \\ y' &= -y, \end{aligned}$$

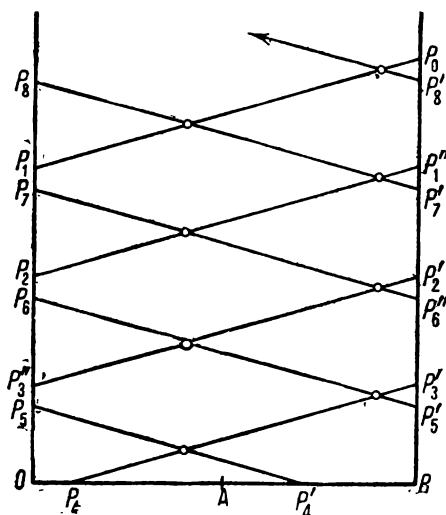
преобразует отрезок  $OA$  и его продолжение  $AB$ . Соотношение между точками, расположенными на границе, и связанными с ними локальными координатными системами указано на чертеже.

Пространство имеет одну замкнутую прямую с длиной  $\frac{a}{2}$ , именно  $OA=AB$ ; прямые, параллельные оси  $Ox$ , тоже замкнуты, но имеют удвоенную длину, именно  $a$ ; прямые, перпендикулярные оси  $Ox$ ,



Фиг. 4.

бесконечны в обоих направлениях, они представлены в фундаментальной области двумя полупрямыми, пробегаемыми в противоположных направлениях; если, например, первая заканчивается в точке  $Q$  (фиг. 4), то вторая начинается в гомологичной точке  $Q'$ . Что касается остальных прямых, то они также бесконечны в обоих направлениях; на фиг. 5



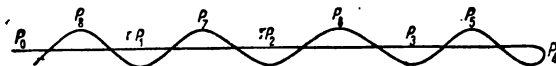
Фиг. 5.

изображена одна из них, причем изображена она целиком внутри фундаментального многоугольника. Мы видим, что она *сама себя пересекает* и притом в бесконечном числе точек; если идти вдоль нее, отправляясь от точки  $P_0$ , то первая точка, в которой она пересечет самое себя, будет лежать между  $P'_4$  и  $P'_5$ ; в дальнейшем они будут следовать одна за другой регулярно, так что с точки зрения топологии рассматриваемая прямая будет иметь форму, изображенную на фиг. 6.

Из этого примера видно, что в некоторых локально-евклидовых пространствах *направление не является абсолютным*; вектор, который перемещается параллельно самому себе и начало которого описывает цикл, может вернуться

в исходную точку, имея направление, отличное от первоначального. В рассматриваемом пространстве существуют два направления абсолютных или *стабильных*: направление, параллельное оси  $x$ , и направление, ей перпендикулярное.

75. Оба класса замкнутых локально-евклидовых пространств имеют каждый в качестве фундаментального многоугольника параллелограм.



Фиг. 6.

Легко проверить, что в обоих случаях имеется по *два* ребра (негомологичных между собою) и по *одной* вершине (все четыре вершины гомологичны между собою). Обозначая через  $A$  число существенно различных ребер, через  $S$ —число существенно различных вершин, получим:

$$A = S + 1.$$

Это соотношение можно связать со свойством, имеющим значительно большую общность. Разобьем произвольным образом двумерное, *замкну-*

то: локально-евклидово пространство (имеющее, следовательно, конечную полную поверхность) на некоторое число многоугольников, достаточно малых для того, чтобы к ним можно было применять теоремы обычной планиметрии. Пусть  $F$  — число этих многоугольников,  $A$  — число их различных сторон,  $S$  — число различных вершин. Сумма углов многоугольника с  $n$  сторонами равна

$$\pi(n - 2);$$

следовательно, общая сумма всех углов всех многоугольников будет

$$\pi(2A - 2F).$$

С другой стороны, общая сумма углов, сходящихся у каждой вершины, равна  $2\pi$ . Мы имеем, следовательно, соотношение:

$$\pi(2A - 2F) = 2\pi S$$

или

$$F + S = A.$$

На основании известной теоремы топологии (*Analysis situs*) справедливость этого соотношения в случае одного какого-либо подразделения пространства на многоугольники влечет за собою справедливость его и при всех других способах подразделения. В частности, рассматривая все пространство как один единственный многоугольник, получим  $F = 1$  и  $A = S + 1$ .

Отсюда можно получить доказанную выше теорему о том, что на сфере не может быть установлена повсюду регулярная евклидова метрика; действительно, разбивая поверхность сферы на многоугольники, мы приходим к классической формуле Эйлера:

$$F + S = A + 2^1).$$

**76.** Определение прерывных групп  $G$  в трехмерном пространстве может быть проведено без особых затруднений. Если риманово пространство ориентируемо, то его группа  $G$  может состоять только из параллельных и винтовых перемещений. За исключением случая, когда группа  $G$  порождена одним единственным винтовым перемещением:

$$x' = x \cos na - y \sin na,$$

$$y' = x \sin na + y \cos na,$$

$$z' = z + nh,$$

где  $n$  — произвольное целое число,  $h$  — постоянная длина и  $a$  — постоянный угол, — все винтовые перемещения, фигурирующие в группе  $G$ , соответствуют углам поворота, равным  $\frac{\pi}{3}$ ,  $\frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{2\pi}{3}$  или  $\pi$ . Фундаментальная область в первом из рассматриваемых случаев, когда угол  $a$  может быть и несоизмеримым с  $\pi$ , представляет собою часть пространства, заключенную между плоскостями  $z = 0$  и  $z = h$ .

<sup>1)</sup> См. Ф. Клейн, *Элементарная математика с точки зрения высшей*, т. II, Геометрия, ГТТИ, 1934 г., стр. 177—182. *Прим. ред.*

### VIII. Нормальные локально-евклидовы пространства и элементарная геометрия

77. В любом достаточно малом участке нормального локально-евклидова пространства выполняются все теоремы евклидовой геометрии, так что, не выходя из этого участка, нельзя решить вопроса о том, является ли данное пространство евклидовым или нет. Некоторые из аксиом элементарной геометрии, в которых говорится о свойствах пространства в целом, сохраняют свою силу, другие — нет.

Среди первых отметим следующую: *между двумя любыми точками пространства можно провести прямую*. В справедливости этой аксиомы мы убеждаемся немедленно, отображив локально-евклидово пространство на его фундаментальный полиэдр.

Напротив, аксиома, в силу которой через каждые две точки проходит единственная прямая, выполняется только в евклидовом пространстве. Действительно, пусть  $P$  и  $Q$  — две точки фундаментально-евклидова пространства; рассмотрим гомологи точки  $Q$ : пусть это будут  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots$ . Прямые  $PQ, PQ_1, PQ_2, \dots, PQ_n, \dots$  евклидова пространства, введенные, если нужно, в фундаментальный полиэдр, представляют собою бесконечное число прямых риманова пространства, соединяющих две его точки, соответствующие  $P$  и  $Q$ .

Мы видим, что аксиома: «Через две любые точки пространства можно провести лишь конечное число прямых» достаточна, чтобы выделить обычное евклидово пространство из всех локально-евклидовых пространств.

78. Можно стать, следуя В. Киллингу, на несколько иную точку зрения. В евклидовом пространстве движение твердого тела передается любому иному твердому телу, неразрывно связанному с первым, если угодно, то даже всему пространству в целом. В локально-евклидовом пространстве твердое тело достаточно малых размеров обладает той же степенью подвижности (без деформаций), что и в евклидовом пространстве. Этого уже не будет, если твердое тело достаточно велико; выражаясь более точно, если его *отображение* на евклидово пространство (при разворачивании риманова пространства) выйдет за пределы фундаментального полиэдра. Евклидово движение, выполняемое вблизи точки  $P_0$ , вызывает в евклидовом пространстве вблизи точки  $P_1$ , гомологичной точке  $P_0$ , движение, вообще говоря, иного характера, нежели рассматриваемое движение: например, скорость точки  $P_1$  будет расположена по отношению к  $n$ -эдру ( $R_1$ ), связанному с  $P_1$ , иначе, чем скорость точки  $P_0$  по отношению к  $n$ -эдру ( $R_0$ ). Можно сказать, что если взять замкнутую цепь твердых тел, каждое из которых наглухо связано с предыдущим, и если сообщить первому телу некоторое движение, то тем самым будет сообщено движение и всей системе в целом, причем может случиться, что предпоследнее тело будет сообщать первому движение, отличное от сообщенного ему первоначально. Иными словами, локально-евклидово пространство не допускает полной свободы движения, свойственной пространству евклидову.

Если мы хотим, чтобы общее движение  $T$  всего пространства было возможно, то для этого необходимо и достаточно, чтобы смещения  $P_i Q_i$ ,

испытываемые различными точками  $P_i$ , гомологичными точке  $P_0$ , были одинаково расположены по отношению к соответствующим  $n$ -эдрам ( $R_i$ ). Следовательно, последовательность смещений  $S_i$  и  $T$ , переводящая  $P_0$  в  $Q_i$  через  $P_i$ , должна быть эквивалентна последовательности тех же смещений, но произведенных в обратном порядке,  $T$  и  $S_i$ , которая тоже переведет  $P_0$  в  $Q_i$ , но на сей раз через  $Q_0$ .

*Разыскание движений, которыми может обладать целиком все риманово пространство, сводится, таким образом, к разысканию смещений евклидова пространства, переместительных по отношению к каждому из преобразований группы голономии.*

Нетрудно доказать, что всякое смещение, — сопровождающееся отражением или нет, безразлично, — переместительное по отношению ко всем параллельным переносам, сводится само к параллельному переносу. Отсюда следует, что не существует никакого смещения (связанного или не связанного с отражением), которое было бы переместительно по отношению ко всем параллельным перемещениям. Таким образом получается следующая теорема:

*Если нормальное локально-евклидово пространство обладает полной подвижностью евклидова пространства, то оно само является евклидовым пространством.*

Двумерное пространство Клиффорда допускает только параллельные перемещения, тогда как цилиндр допускает кроме параллельных перемещений также и отражения относительно замкнутых прямых, которые лежат на нем.

## Г Л А В А IV

# ЕВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА, КАСАТЕЛЬНЫЕ И СОПРИКАСАЮЩИЕСЯ ПО ОТНОШЕНИЮ К ПРОСТРАНСТВАМ РИМАНА

### I. Касательное евклидово пространство

**79.** Рассмотрим риманово пространство, определенное как многообразие, в котором задан произвольно линейный элемент:

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} du^i du^j. \quad (1)$$

Будем считать, что дифференциальная форма в правой части равенства -- определенная положительная форма, коэффициенты которой непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка. Некоторые из рассуждений этого параграфа не потребуют даже существования производных.

Наиболее простой путь исследования геометрических свойств этого пространства состоит в том, что его стараются отождествить *в той мере, в какой это возможно*, с евклидовым пространством. Первый шаг в этом направлении состоит во введении понятия *евклидовой метрики, касательной в некоторой точке к заданной римановской метрике, или евклидова пространства, касательного в некоторой точке к заданному риманову пространству*.

Назовем евклидовой метрикой, касательной в точке  $A(u_0^1, \dots, u_0^n)$  к заданной метрике (1), метрику, определенную посредством евклидова линейного элемента

$$d\sigma^2 = \sum_{i,j} \gamma_{ij} du^i du^j, \quad (2)$$

в котором независимыми переменными являются  $u^1, \dots, u^n$  и который удовлетворяет условию: при  $u^i = u_0^i$ ,  $\gamma_{ij} = g_{ij}$ . Очевидно, существует бесчисленное множество евклидовых метрик, касательных в данной точке: например, можно взять  $\gamma_{ij} = (g_{ij})_0$ . С другой стороны, совокупность этих метрик не зависит от выбора координатной системы, аналитически определяющей риманово пространство, потому что при замене переменных  $u^i$  новыми переменными  $v^i$  новые значения коэффициентов линейного элемента в точке  $A$  зависят только от их прежних значений в этой

точке. Равенство  $\gamma_{ij} = g_{ij}$  в точке  $A$  сохраняется таким образом и в новых переменных.

Вместо того чтобы говорить, что мы определили в изучаемом многообразии новую метрику (евклидову), можно сказать, что мы отображали риманово пространство на пространство Евклида, так что в силу этого отображения линейный элемент евклидова пространства принял вид  $d\bar{z}^2$ . Это евклидово пространство назовем *евклидовым пространством, касательным в точке  $A$  к данному риманову пространству*. Это просто удобный способ выражаться, удобный потому, что он создает наглядность. Можно сказать, что существует бесконечное число евклидовых пространств, касательных в  $A$ , в том смысле, что линейный элемент  $d\bar{z}^2$  зависит от бесконечного числа произвольных элементов. Но так как мы в дальнейшем будем рассматривать только геометрические свойства, общие всем этим пространствам, то естественно будем говорить *об одном евклидовом пространстве, касательном к риманову в точке  $A$* .

80. Первым геометрическим понятием, связанным с касательным евклидовым пространством, является понятие расстояния  $d\sigma$  или, что то же,  $ds$  от точки  $A$  до некоторой бесконечно близкой точки: впрочем, это как раз то понятие, которое лежит в основе определения риманова пространства.

Угол между двумя направлениями  $d$  и  $\delta$ , выходящими из  $A$ , в касательном евклидовом пространстве дается формулой [n° 29, формула (5)]:

$$\cos \varphi = \frac{\sum_{i,j} \gamma_{ij} du^i \delta u^j}{\sqrt{\sum_{i,j} \gamma_{ij} du^i du^j} \sqrt{\sum_{i,j} \gamma_{ij} \delta u^i \delta u^j}};$$

Поэтому в произвольном римановом пространстве можно определить косинус угла между двумя направлениями посредством формулы:

$$\cos \varphi = \frac{\sum_{i,j} g_{ij} du^i \delta u^j}{\sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} du^i du^j} \sqrt{\sum_{i,j} g_{ij} \delta u^i \delta u^j}}. \quad (3)$$

При этом можно быть заранее уверенным, что выражение, стоящее в правой части равенства, не зависит от выбора координатной системы.

Таким же образом можно определить угол между  $p$ -мерной и  $q$ -мерной элементарными площадками; все теоремы элементарной геометрии, относящиеся к углам, имеющим общую вершину, образованным кривыми, поверхностями и т. д., проходящими через эту вершину, — все эти теоремы сохраняют силу и в любом римановом пространстве.

81. В точке  $A$  касательного евклидова пространства можно определить вектор, имеющий по отношению к естественной декартовой координатной системе, связанной с точкой  $A$  (и вполне определенной по величине и форме), контравариантные компоненты  $X^i$  (или ковариантные  $X_j$ ). Сле-



довательно, и в каждой точке риманова пространства можно определить контравариантные и ковариантные векторы. Простой способ наглядно реализовать вектор состоит в том, чтобы представить себе подвижную точку и *скорость* этой точки; это и будет вектор, контравариантными компонентами которого служат производные  $\frac{du^i}{dt}$ . Вектор этот имеет самостоятельное существование в касательном евклидовом пространстве, не зависящее от выбора координатной системы.

Точно таким же образом в точке  $A$  риманова пространства можно определить бивекторы, поливекторы, системы поливекторов и вообще произвольные тензоры.

Но понятие касательного евклидова пространства позволяет ввести в геометрию риманова пространства и такие объекты, которые связаны не только с точкой  $A$ , но и с целой кривой, поверхностью, объемом, содержащимися в римановом пространстве.

Прежде всего, раз нам известно бесконечно малое расстояние между двумя точками, мы можем из него путем сложения (интегрирования) получить длину  $s$  дуги любой кривой <sup>1)</sup>:

$$s = \int \sqrt{g_{ij} du^i du^j};$$

отсюда сейчас же можно получить, как это и было сделано Риманом, понятие о *прямой* или *геодезической* как линии, дающей *extremum* расстояния между двумя точками. Пока мы только констатируем эту возможность; дальше мы к ней вернемся.

Элементарный объем дается (если учесть выражение для элементарного объема касательного евклидова пространства) посредством формулы:

$$d\tau = \sqrt{g} du^1 du^2 \dots du^n; \quad (4)$$

отсюда следует, что конечный объем нужно определить с помощью интеграла:

$$\int \sqrt{g} du^1 du^2 \dots du^n.$$

Таким же путем можно определить площадь некоторого участка поверхности. В трехмерном пространстве элемент поверхности, проходящий через точку  $A$ , определяется бивектором, компоненты которого, если координаты точек поверхности выражены в функции двух параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , даются формулами:

$$du^2 du^3 = \frac{D(u^2, u^3)}{D(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta = a^{23} d\alpha d\beta,$$

$$du^3 du^1 = \frac{D(u^3, u^1)}{D(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta = a^{31} d\alpha d\beta,$$

$$du^1 du^2 = \frac{D(u^1, u^2)}{D(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta = a^{12} d\alpha d\beta;$$

<sup>1)</sup> Мы неявно использовали уже это понятие, определив в  $n^0$  55 расстояние  $[AB]$  между двумя точками  $A$  и  $B$  риманова пространства.

следовательно, мера элемента поверхности будет даваться выражением:

$$\sqrt{a^{23}a_{23} + a^{31}a_{31} + a^{12}a_{12}} da d\beta.$$

Для площади конечного участка поверхности мы сейчас же получаем интеграл:

$$\int \int \sqrt{a^{23}a_{23} + a^{31}a_{31} + a^{12}a_{12}} da d\beta.$$

82. Если в римановом пространстве дано поле векторов, то мы не знаем еще, как определить *тензорную производную* этого поля. Тем не менее нетрудно определить его *ротацию* с помощью пфафова агрегата:

$$X_1 du^1 + X_2 du^2 + \dots + X_n du^n,$$

который в каждой точке касательного евклидова пространства имеет значение, не зависящее от выбора координатной системы. Билинейный ковариант этого агрегата

$$\sum_{(ij)} \left( \frac{\partial X_j}{\partial u^i} - \frac{\partial X_i}{\partial u^j} \right) (du^i du^j - du^j du^i)$$

приводит нас сейчас же к тензору

$$X_{ji} = \frac{\partial X_j}{\partial u^i} - \frac{\partial X_i}{\partial u^j},$$

который и является ротацией.

Рассмотрение *элементарного потока векторов* (для исследования которого тоже достаточно ввести касательное евклидово пространство),

$$\sqrt{g} (X^1 du^2 du^3 + X^2 du^3 du^1 + X^3 du^1 du^2)$$

приводит с помощью формулы Остроградского к понятию дивергенции (п° 41):

$$\operatorname{div} x = \frac{1}{\sqrt{g}} \left[ \frac{\partial (\sqrt{g} X^1)}{\partial u^1} + \frac{\partial (\sqrt{g} X^2)}{\partial u^2} + \frac{\partial (\sqrt{g} X^3)}{\partial u^3} \right]. \quad (5)$$

Точно так же, если дано скалярное поле  $V(u^1, \dots, u^n)$ , то без труда можно определить оба дифференциальных параметра Бельтрами (п° 42);

$$\Delta_1 V = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial V}{\partial u^i} \frac{\partial V}{\partial u^j}, \quad (6)$$

$$\Delta_2 V = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial u^i} \left( \sum_k \sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial V}{\partial u^k} \right). \quad (7)$$

83. Несмотря на большое количество понятий обычной геометрии, которые мы смогли бы обобщить на случай произвольного риманова пространства, у нас отсутствует еще ряд весьма важных элементарных понятий, хотя бы, например, угла между двумя направлениями, исходящими из разных точек. Вообще говоря, любое понятие, которое связано

с введением в каждой точке некоторого скаляра, обобщается легко, то же самое можно сказать о понятии, которое вводит один или несколько векторов, *но при условии, что все эти векторы имеют общее начало*. Дивергенция векторного поля, казалось бы, составляет исключение из этого правила, но это потому только, что мы смогли ее вывести из понятия элементарного потока векторов, *который по существу вводит поле только в одной точке*. В общем до сих пор риманово пространство являлось для нас собранием маленьких кусочков евклидова пространства; оно было в известном смысле аморфно, потому что мы не умеем связать между собою эти отдельные кусочки, определить их взаимное расположение. К этому мы и подойдем сейчас, используя понятие *соприкасающегося евклидова пространства*.

## II. Соприкасающееся евклидово пространство

84. Евклидова метрика, соприкасающаяся в точке  $A(u_0^i)$  с данной метрикой, определяется посредством линейного элемента

$$d\sigma^2 = \sum_{i,j} \gamma_{ij} du^i du^j,$$

коэффициенты которого и их частные производные первого порядка имеют в  $A$  такие же численные значения, как и соответствующие величины данного линейного элемента  $ds^2$ .

Если существуют соприкасающиеся евклидовы метрики, то совокупность этих метрик не зависит от выбора координатной системы, потому что при *заданном преобразовании координат* новые численные значения коэффициентов  $g_{ij}$  и их частных производных первого порядка вполне определяются с помощью числовых значений тех же величин в старой системе координат.

Вместо того чтобы говорить о соприкасающейся евклидовой метрике, можно говорить о *соприкасающемся евклидовом пространстве*.

Первое, что нам нужно сделать, это — доказать существование соприкасающегося евклидова пространства в данной точке  $A$  риманова пространства. Если такое пространство существует, то коэффициенты  $\Gamma_{ij}^k$ , посредством которых естественная декартова система, связанная с точкой  $(u^i + du^i)$ , локализуется относительно такой же системы в точке  $u^i$ , даются формулами, установленными нами во II главе (п° 33). Итак, нам достаточно показать, что в евклидовом пространстве всегда можно найти координаты  $(u^i)$ , такие, что в точке  $O$  этого пространства коэффициенты  $g_{ij}$  и  $\Gamma_{ij}^k$  примут наперед заданные числовые значения (величины  $g_{ij}$  и  $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$  определяют  $\Gamma_{ij}^k$  и наоборот). Формулы евклидовой геометрии:

$$dM = \sum_k du^k e_k,$$

$$de_i = \sum_{k,r} \Gamma_{ir}^k du^r e_k$$

дают:

$$\frac{\partial M}{\partial u^i} = e_i; \quad \frac{\partial^2 M}{\partial u^i \partial u^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k.$$

Установив это, возьмем в точке  $O$  евклидова пространства локальный  $n$ -эдр  $(e_1, \dots, e_n)$ , определенный числовыми значениями коэффициентов  $g_{ij}$  в точке  $A$ , и рассмотрим координаты подвижной точки  $M$  этого пространства (подвижной по отношению к нашему реперу), потребовав, чтобы при  $u^i = u_0^i$  имело место:

$$\frac{\partial M}{\partial u^i} = e_i; \quad \frac{\partial^2 M}{\partial u^i \partial u^j} = \sum_k (\Gamma_{ij}^k)_0 e_k.$$

Это можно сделать бесконечным числом способов; достаточно, например, положить

$$x^i = u^i - u_0^i + \frac{1}{2} \sum_{r,s} (\Gamma_{rs}^i)_0 (u^r - u_0^r) (u^s - u_0^s) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Линейный элемент евклидова пространства, отнесенный к этой системе координат, будет, очевидно, обладать тем свойством, что при  $u^i = u_0^i$ , его коэффициенты и их частные производные первого порядка будут иметь те же числовые значения, что и соответствующие величины линейного элемента заданного риманова пространства. Это — то, что нам и нужно было доказать.

**85.** Все геометрические свойства, общие различным евклидовым пространствам, соприкасающимся в некоторой точке с данным римановым пространством, будут, очевидно, внутренними геометрическими свойствами самого этого риманова пространства. Так будет обстоять со всеми свойствами, которые выражаются только с помощью числовых значений коэффициентов  $g_{ij}$  и  $\Gamma_{ij}^k$  в точке  $A$ .

Представим себе, что в евклидовом пространстве фиксирована точка  $A$  и естественный репер  $(R_0)$ , связанный с этой точкой. Каждая точка  $M$  риманова пространства отобразится в некоторую точку  $\bar{M}$ , координаты которой определяются с точностью до бесконечно малых, порядка *выше*, чем *второго*. Естественный локальный  $n$ -эдр, связанный с точкой  $\bar{M}$  евклидова пространства, определен с точностью до бесконечно малых порядка *выше, чем первого*; более того, с этой степенью точности он совпадает с естественным локальным  $n$ -эдром в точке  $M$  риманова пространства. Любой вектор риманова пространства, имеющий начало в точке  $M$ , отобразится с той же степенью точности равным ему вектором евклидова пространства. Вообще если  $M$  и  $N$  — две любые точки риманова пространства (близкие к  $A$ ) и если соответствующие им в соприкасающемся евклидовом пространстве точки  $\bar{M}$  и  $\bar{N}$  лежат внутри сферы радиуса  $r$  с центром в  $A$ , то скалярное произведение двух векторов, являющихся отображением двух векторов, имеющих начало соответственно в  $M$  и  $N$ , будет определено с точностью до величины, бесконечно малой относительно  $r$ .

Вектору  $\mathbf{x}$ , имеющему начало в точке  $A$ , и вектору  $\mathbf{x}'$ , имеющему начало в точке  $A'$ , бесконечно близкой к  $A$  в римановом пространстве, соответствуют в евклидовом пространстве два вектора, *геометрическая разность* которых на основании того, что сказано выше, может быть определена с точностью до бесконечно малых порядка выше, чем первого. Это приводит нас к распространению понятия *абсолютного дифференциала* вектора, или, общее, тензора на любое риманово пространство; мы будем попрежнему обозначать этот дифференциал символом  $D$ .

Итак, имеем по определению:

$$DX^i = dX^i + \sum_k X^k \omega_k^i, \quad (8)$$

$$DX_i = dX_i - \sum_k X_k \omega_i^k. \quad (9)$$

Здесь важно заметить, что в евклидовой геометрии абсолютный дифференциал являлся *настоящим* (полным) дифференциалом, тогда как в римановой геометрии этого может и не быть.

В частности, обозначая через  $\mathbf{e}_i$  координатные векторы, получим:

$$D\mathbf{e}_i = \sum \omega_i^k \mathbf{e}_k.$$

Два вектора, приложенные в бесконечно близких точках  $A$  и  $A'$ , мы будем называть *равными*, если они равны в соприкасающемся евклидовом пространстве или, что то же, если абсолютный дифференциал первого вектора (когда мы переходим от него ко второму) равен нулю. Условия равенства двух бесконечно близких векторов запишутся, следовательно, так:

$$dX^i + \sum_k X^k \omega_k^i = 0, \quad (10)$$

$$dX_i - \sum_k X_k \omega_i^k = 0. \quad (11)$$

*Параллельным переносом* вектора  $\mathbf{x}$  с началом в  $A$  в бесконечно близкую точку  $A'$  будем называть построение вектора  $\mathbf{x}'$  с началом в  $A'$ , равного (в установленном только что смысле) вектору  $\mathbf{x}$ . Ясно, что этот вектор определен только с точностью до бесконечно малых порядка выше, чем первого. В соприкасающемся евклидовом пространстве эта операция сводится к обычному параллельному переносу (в элементарном смысле) вектора из  $A$  и  $A'$ .

Параллельный перенос обладает важным свойством, впрочем, очевидным: *если из точки  $A$  параллельно переносятся два вектора с общим началом в  $A$ , то их скалярное произведение не меняется.*

Для того чтобы проверить справедливость этой теоремы аналитически, достаточно заметить, что при вычислении дифференциала скалярного произведения приходится иметь дело только с числовыми значениями коэффи-

циентов  $g_{ij}$  и их частных производных первого порядка в точке  $A$ ; выкладки ничем при этом не отличаются от тех, которые пришлось бы сделать в евклидовом пространстве; а для последнего эта теорема очевидна.

Абсолютное дифференцирование можно прилагать к полю любого тензора. В частности, абсолютный дифференциал фундаментального метрического тензора тождественно равен нулю.

86. Определение ускорения подвижной точки в римановом пространстве не вызывает теперь никаких затруднений; если через  $\mathbf{v}$  обозначить вектор скорости, то вектор ускорения будет  $\frac{D\mathbf{v}}{dt}$ . Таким же образом можно определить ускорения различных порядков. Как и в евклидовой геометрии, контравариантные компоненты ускорения даются здесь выражением:

$$\gamma^i = \frac{d^2 u^i}{dt^2} + \sum_{k,h} \Gamma_{kh}^i \frac{du^k}{dt} \frac{du^h}{dt},$$

а ковариантные вычисляются с помощью алгоритма Лагранжа<sup>1</sup>.

Если ускорение движущейся точки тождественно равно нулю, то ее вектор скорости все время равен самому себе. Вообще *прямою* риманова пространства будет такая линия, касательная к которой все время остается параллельной сама себе. Если по такой линии движется точка со скоростью, равной единице, то ускорение этой точки будет равно нулю. Следовательно, уравнения

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \sum_{k,h} \Gamma_{kh}^i \frac{du^k}{ds} \frac{du^h}{ds} = 0. \quad (12)$$

определяют в римановом пространстве *прямые*.

Мы увидим в дальнейшем, что прямые линии риманова пространства являются одновременно и линиями кратчайшего расстояния; они тождественны с геодезическими линиями Римана.

Уравнения динамики точки в евклидовом пространстве сейчас же обобщаются и на произвольное риманово пространство; их можно записать либо так:

$$\gamma^i = F^i,$$

либо так:

$$\gamma_i = F_i,$$

смотря по тому, какими компонентами силы мы пользуемся: контравариантными или ковариантными.

Примечательно то, что общие уравнения динамики системы (голономной и с идеальными связями) сводятся к уравнениям динамики точки, если множество всех состояний системы рассматривать как многообразие, элементами (или точками) которого служат состояния системы. Считая линейным элементом этого пространства произведение живой силы си-

<sup>1</sup>) См. п° 37 и 38. *Прим. ред.*

стемы на квадрат  $dt$ , мы получим в качестве ковариантных компонент ускорения точки многообразия (п° 37):

$$\gamma_i = \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial (u^i)'} - \frac{\partial T}{\partial u^i}. \quad (13)$$

Вследствие уравнений Лагранжа наиболее общие движения системы будут описываться уравнениями:

$$\gamma_i = Q_i,$$

где  $\sum_i Q_i \delta u^i$  обозначает сумму элементарных работ заданных сил. Таким

образом имеется полное соответствие между движениями данной системы, имеющей  $n$  степеней свободы, и движениями точки в римановом пространстве  $n$  измерений; соответствие сохраняет живую силу и сумму элементарных работ сил<sup>1)</sup>.

87. Теория кривизны кривых переносится без изменения на любое риманово пространство<sup>2)</sup>. Пусть, в самом деле,  $M$ —точка кривой,  $\mathbf{t}$ —единичный касательный вектор к кривой в точке  $M$ ,  $ds$ —элемент дуги кривой. Вектор  $\frac{D\mathbf{t}}{ds}$  перпендикулярен к  $\mathbf{t}$  (этот результат получается немедленно, если перейти к евклидову пространству, соприкасающемуся с нашим римановым в точке  $M$ ); пусть

$$\frac{D\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{\rho} \mathbf{n},$$

где  $\mathbf{n}$ —единичный вектор (главная нормаль). Пусть  $\mathbf{b}$  обозначает единичный вектор, перпендикулярный к  $\mathbf{t}$  и  $\mathbf{n}$  и образующий с ними положительно ориентированный триэдр, и пусть

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{n}}{ds} &= \alpha \mathbf{t} + \beta \mathbf{n} + \gamma \mathbf{b}, \\ \frac{D\mathbf{b}}{ds} &= \alpha' \mathbf{t} + \beta' \mathbf{n} + \gamma' \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Соотношения:

$$\mathbf{t}\mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{t}\mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{n}\mathbf{b} = 0, \quad \mathbf{n}^2 = 1, \quad \mathbf{b}^2 = 1$$

дают, при абсолютном дифференцировании следующее:

$$\frac{1}{\rho} + \alpha = 0, \quad \alpha' = 0, \quad \gamma + \beta' = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma' = 0,$$

<sup>1)</sup> См. стр. 130—131 упомянутой в примечании к § 37 книги Вебстера. Прим. ред.

<sup>2)</sup> Относительно свойств кривых и поверхностей в обыкновенном пространстве, см. В. Бляшке, Дифференциальная геометрия, ч. I, ГТТИ, 1935 г. Прим. ред.

Полагая

$$\gamma = -\beta' = \frac{1}{\tau},$$

мы получим обобщенные формулы Серре-Френе:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Dt}{ds} &= \frac{1}{\rho} \mathbf{n}, \\ \frac{D\mathbf{n}}{ds} &= -\frac{1}{\rho} \mathbf{t} + \frac{1}{\tau} \mathbf{b}, \\ \frac{D\mathbf{b}}{ds} &= -\frac{1}{\tau} \mathbf{n}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Величины  $\frac{1}{\rho}$  и  $\frac{1}{\tau}$  и будут кривизной и кручением кривой.

Прямые риманова пространства являются линиями нулевой кривизны. Что касается линий нулевого кручения, то их можно характеризовать тем свойством, что элементарная соприкасающаяся площадка в точке  $M$  кривой *параллельна* элементарной соприкасающейся площадке в бесконечно близкой точке  $M'$ ; вектор  $\mathbf{t} + D\mathbf{t}$ , является единичным вектором касательной, а вектор  $\mathbf{n} + D\mathbf{n}$  — единичным вектором главной нормали в точке  $M'$ ; если их параллельно перенести из  $M$  в  $b$ , то они станут

$$\mathbf{t} + \frac{ds}{\rho} \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} - \frac{ds}{\rho} \mathbf{t} + \frac{ds}{\tau} \mathbf{b};$$

они попадут в элементарную площадку, соприкасающуюся в  $M$  с нашей кривой, в том и только в том случае, если кручение постоянно.

Если риманово пространство отобразить на евклидово пространство, соприкасающееся с ним в точке  $M$ , то данная кривая  $(C)$  отобразится на некоторую кривую  $(\Gamma)$ , имеющую ту же кривизну в  $M$ , что и  $(C)$ . Более того, векторы  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$ , кривой  $(\Gamma)$  будут образами соответствующих векторов кривой  $(C)$ .

Все это станет еще более ясным, если изложить это следующим образом: *независимо от того, принять ли в римановом пространстве некоторую данную метрику или же соприкасающуюся с ней в точке  $M$  евклидову метрику, кривая  $(C)$  будет иметь в  $M$  ту же касательную, что и прежде, ту же главную нормаль, ту же бинормаль и ту же кривизну; но кручение при этом может получиться иное.*

В частности, с точки зрения соприкасающейся евклидовой метрики, всякая прямая линия риманова пространства будет кривой, имеющей в точке соприкосновения точку перегиба.

**88.** Классическая теория кривизны поверхностей тоже без всякого труда распространяется на римановы пространства. Различные кривые, проведенные на поверхности  $(S)$  и проходящие через точку  $M$  этой поверхности, имеют на основании вышесказанного ту же главную нормаль и ту же кривизну, независимо от того, принять ли метрику риманова или же соприкасающегося с ним в  $M$  евклидова пространства. Отсюда следует, что законы, управляющие изменением кривизны этих кривых, когда их касательная поворачивается вокруг  $M$ , остаются теми же, что и в евклидовом пространстве. Все касательные между собою кривые имеют одну и ту же *нормальную кривизну*; эта нормальная кривизна



равна  $\frac{\cos V}{\rho}$ , где  $V$  обозначает угол между главной нормалью к кривой и нормалью к поверхности, а  $\rho$  — радиус кривизны кривой: это — *теорема Менье*.

Существуют два взаимно перпендикулярных касательных к поверхности направления, которые соответствуют максимуму и минимуму нормальной кривизны: это — главные направления, а соответствующие кривизны — главные кривизны. *Линиями кривизны* будут те линии, которые в каждой точке касаются главного направления в этой точке. Если через  $\theta$  обозначить угол, который образует данная кривая с линией кривизны первого семейства, то мы получим для этой кривой, обозначая через  $\frac{1}{R_1}$  и  $\frac{1}{R_2}$  главные кривизны, следующую формулу:

$$\frac{\cos V}{\rho} = \frac{\cos^2 \theta}{R_1} + \frac{\sin^2 \theta}{R_2}. \quad (15)$$

Асимптотическими линиями будут кривые, нормальная кривизна которых равна нулю; они характеризуются тем свойством, что соприкасающаяся плоскость их является касательной плоскостью к поверхности. Их можно также характеризовать следующим свойством: прямая риманова пространства, касательная к асимптотической линии в точке  $M$ , имеет в этой точке касание второго порядка с поверхностью; действительно, это сводится к тому, что в евклидовом пространстве кривая, касающаяся поверхности в точке  $M$  и имеющая в  $M$  точку перегиба, имеет по отношению к поверхности соприкосновение второго порядка в том случае, когда она касается в точке  $M$  с одним из асимптотических направлений.

Линии кривизны можно характеризовать еще и так: если  $M$  — точка кривой, то вектор нормали к поверхности в точке  $M'$ , лежащей на кривой  $u$ , бесконечно близкой к  $M$ , будучи параллельно перенесен в  $M$ , попадает в элементарную площадку, определенную нормалью к поверхности и касательной к кривой в точке  $M$ .

Если через  $\nu$  обозначим единичный вектор нормали к поверхности, через  $\mathbf{t}_1$  и  $\mathbf{t}_2$  — единичные векторы — касательные к линиям кривизны, то, перемещаясь в направлении вектора  $\mathbf{t}_1$  на расстояние  $ds_1$ , получим:

$$D\nu = -\frac{ds_1}{R_1} \mathbf{t}_1,$$

а перемещаясь на расстояние  $ds_2$  в направлении вектора  $\mathbf{t}_2$ :

$$D\nu = -\frac{ds_2}{R_2} \mathbf{t}_2.$$

Это — классические формулы Олинда Родрига. Если переместиться на расстояние  $ds$  в направлении, образующем угол  $\theta$  с  $\mathbf{t}_1$ , то мы получим общую формулу:

$$\frac{D\nu}{ds} = -\frac{\cos \theta}{R_1} \mathbf{t}_1 - \frac{\sin \theta}{R_2} \mathbf{t}_2. \quad (16)$$

Наконец, полная кривизна  $\frac{1}{R_1 R_2}$  поверхности в точке  $M$  может быть определена с помощью процесса, использованного Гауссом в евклидовом пространстве. Рассмотрим элемент поверхности  $d\sigma$ , окружающей точку  $M$ , и в касательном в  $M$  евклидовом пространстве — сферу с центром в  $M$  радиуса 1. Перенесем параллельно в точку  $M$  нормали к поверхности из всех точек элемента  $d\sigma$  и рассмотрим небольшой участок сферы, определенный следами перенесенных таким образом нормалей; отношение  $\frac{d\omega}{d\sigma}$  площади этого участка сферы к площади элемента поверхности равно в пределе полной кривизне  $\frac{1}{R_1 R_2}$ . Величину  $d\omega$  можно рассматривать так же, как телесный угол конуса с вершиной в  $M$ , который получится, если параллельно перенести в  $M$  все нормали из различных точек элемента  $d\sigma$ .

89. Можно распространить на самые общие римановы пространства понятие геодезического кручения кривой, лежащей на данной поверхности. Действительно, обозначим через  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали к кривой, а через  $\mathbf{t}_1$ ,  $\mathbf{t}_2$ ,  $\nu$  попрежнему будем обозначать единичные векторы главных направлений и нормали к поверхности. Пусть, наконец, через  $\theta$  будет обозначен угол между касательной к кривой и первым главным направлением, а через  $V$  — угол между главной нормалью к кривой и нормалью к поверхности. Направляющие косинусы векторов  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  по отношению к векторам  $\mathbf{t}_1$ ,  $\mathbf{t}_2$ ,  $\nu$  даются следующей таблицей:

	$\mathbf{t}_1$	$\mathbf{t}_2$	$\nu$
$\mathbf{t}$	$\cos \theta$	$\sin \theta$	0
$\mathbf{n}$	$-\sin \theta \sin V$	$\cos \theta \sin V$	$\cos V$
$\mathbf{b}$	$\sin \theta \cos V$	$-\cos \theta \cos V$	$\sin V$

В качестве отправного пункта возьмем обобщенные формулы Серре-Френе:

$$\left. \begin{aligned} \frac{D\mathbf{t}}{ds} &= \frac{1}{\rho} \mathbf{n}, \\ \frac{D\mathbf{n}}{ds} &= -\frac{1}{\rho} \mathbf{t} + \frac{1}{\tau} \mathbf{b}, \\ \frac{D\mathbf{b}}{ds} &= -\frac{1}{\tau} \mathbf{n}, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

а также формулу:

$$\frac{D\nu}{ds} = -\frac{\cos \theta}{R_1} \mathbf{t}_1 - \frac{\sin \theta}{R_2} \mathbf{t}_2. \quad (16)$$

Если мы продифференцируем соотношения:

$$tv = 0, \quad nv = \cos V, \quad bv = \sin V,$$

то получим два существенно различных уравнения, а именно:

$$\frac{\cos V}{\rho} = \frac{\cos^2 \theta}{R_1} + \frac{\sin^2 \theta}{R_2}, \quad (15)$$

$$\frac{dV}{ds} + \frac{1}{\tau} = \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sin \theta \cos \theta. \quad (17)$$

Левая часть второго уравнения и представляет собою то, что называют *геодезическим кручением кривой*; из правой части уравнения видно, что оно одинаково у всех кривых, имеющих общую касательную. Для линий кривизны оно равно нулю.

Если формулу (17) приложить к асимптотической линии ( $V = \frac{\pi}{2}$ ) (если она не является прямою), то получим:

$$\frac{1}{\tau} = \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sin \theta \cos \theta;$$

кроме того, для асимптотической линии имеем:

$$-\frac{\cos^2 \theta}{R_1} + \frac{\sin^2 \theta}{R_2} = 0;$$

отсюда выводим:

$$\frac{1}{\tau} = \pm \sqrt{\frac{-1}{R_1 R_2}}; \quad (18)$$

это — *теорема Бельтрами-Эннепера*, обобщенная на случай произвольного риманова пространства.

*Асимптотические линии, проходящие через точку M поверхности, имеют в этой точке равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку кручения; абсолютная величина их равна корню квадратному из полной кривизны поверхности, взятой с обратным знаком.*

В частности, кручение *двойной* асимптотической линии тождественно равно нулю.

Известно, что если в евклидовом пространстве оба семейства асимптотических некоторой поверхности совпадают, то эти асимптотические являются прямыми линиями. Эта теорема не имеет места в произвольном римановом пространстве<sup>1)</sup>; тем не менее на основании теоремы Эннепера можно утверждать, что это — кривые с нулевым кручением.

**90.** Теория *сопряженных направлений* тоже обобщается на случай произвольного риманова пространства. Если  $M$  и  $M'$  — две бесконечно близкие точки кривой  $(C)$ , лежащей на поверхности  $(S)$ , то элементарная площадка, касательная к поверхности в точке  $M'$ , будучи перенесена параллельно в точку  $M$ , пересекается с элементарной площадкой, касательной к поверхности в  $M$ , по некоторой прямой, которая и определяет

<sup>1)</sup> E. Cartan, Sur les courbes de torsion nulle et les surfaces développables dans les espaces de Riemann. (Comptes rendus, т. 184, 1927, стр. 138—141.)

направление, *сопряженное* с направлением кривой ( $C$ ) в точке  $M$ . Два взаимно сопряженных направления являются гармоническими сопряженными по отношению к асимптотическим направлениям. Наконец, абсолютный дифференциал единичного вектора, нормального к поверхности при переходе от  $M$  к  $M'$ , перпендикулярен к направлению, сопряженному с направлением кривой. Все эти свойства становятся очевидными, если сделать отображение на евклидово пространство, соприкасающееся с данным римановым в точке  $M$ .

91. Закончим этот параграф обобщением знаменитой теоремы Дюпена. Известно, что трижды ортогональной системой называется система, образованная тремя однопараметрическими семействами кривых, пересекающимися под прямым углом. Теорема Дюпена утверждает, что кривая, по которой пересекаются две поверхности, принадлежащие к двум различным семействам поверхностей трижды ортогональной системы, является линией кривизны для каждой из этих поверхностей.

Аналитическое доказательство, которое мы сейчас дадим, приложимо с одинаковым успехом как к римановым, так и к евклидову пространству. Возьмем в качестве координат параметры  $u^1, u^2, u^3$  трех семейств поверхностей. Линейный элемент пространства будет тогда иметь вид:

$$ds^2 = g_{11}(du^1)^2 + g_{22}(du^2)^2 + g_{33}(du^3)^2,$$

потому что косинусы углов, под которыми встречаются различные координатные кривые, равны нулю. Условие, которое выражает, что, например, координатная кривая ( $C_1$ ) ( $u^1$  переменна) является линией кривизны для поверхности  $S_3$  ( $u^3$  постоянно), состоит в том, что вектор  $e_3 + D_1 e_3 du^1$ , нормальный к этой поверхности в точке  $M'$ , бесконечно близкой к точке  $M$  и лежащей на кривой ( $C$ ), должен лежать в плоскости векторов  $e_3$  и  $e_1$ . Иначе говоря, коэффициент при  $e_2$  в выражении дифференциала  $D_1 e_3$  должен быть нулем. Имеем:

$$\begin{aligned} D_1 e_3 &= \omega_3^1 e_1 + \omega_3^2 e_2 + \omega_3^3 e_3, \\ D_1 e_3 &= \Gamma_{31}^1 e_1 + \Gamma_{31}^2 e_2 + \Gamma_{31}^3 e_3. \end{aligned}$$

• Нужно, следовательно, доказать, что  $\Gamma_{31}^2 = 0$ , или, поскольку

$$\Gamma_{321} = g_{22}\Gamma_{31}^2,$$

нужно доказать, что символ Христоффеля  $\begin{bmatrix} 31 \\ 2 \end{bmatrix}$  равен нулю. Но это очевидно, потому что  $g_{23} = g_{31} = g_{12} = 0$ .

### III. Евклидово пространство, соприкасающееся с римановым вдоль кривой линии

92. Мы получим новые геометрические свойства и новые теоремы, если будем *развертывать* кривую риманова пространства на пространство Евклида.

Начнем с точки  $A_0$  кривой; мы предположим, что координаты точек этой кривой выражены в функции параметра  $t$ , который равен нулю в точке  $A_0$ . Возьмем в евклидовом пространстве начало  $O$ , с которым

связем местную декартову систему координат (репер)  $(R_0)$ , определяющийся по форме и величине числовыми значениями коэффициентов  $g_{ij}$  в точке  $A_0$ . Поставим в соответствие каждой точке  $M$  кривой точку  $M'$  евклидова пространства и локальный  $n$ -эдр  $(e'_1, \dots, e'_n)$ , связанный с этой точкой.

Как мы это уже делали раньше (п° 46), мы будем исходить из дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} dM' &= \sum_i du^i e'_i, \\ de'_i &= \sum_k \omega^k_i e'_k, \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

куда в качестве независимой переменной входит параметр  $t$ . Неизвестные функции  $M'$  и  $e'_i$  определяются с помощью начальных условий: при  $t=0$ ,  $M'$  совпадает с  $O$ , а вектор  $e'_i$  — с вектором  $(e'_i)_0$   $n$ -эдра  $(R_0)$ . Можно показать, как это было сделано и раньше (п° 47), что  $n$ -эдр  $(R)$ , связанный с переменной точкой  $t$ , при попарном скалярном перемножении составляющих его векторов дает как раз соответствующие коэффициенты  $g_{ij}$ . Более того, если  $M$  и  $M_1$  — две бесконечно близкие точки, лежащие на заданной кривой,  $M'$  и  $M'_1$  — соответствующие точки евклидова пространства, то два равных вектора, приложенные в точках  $M$  и  $M_1$ , имеют в качестве образов два равных (в обычном смысле слова) вектора, приложенных в точках  $M'$  и  $M'_1$ .

Благодаря тому, что в каждой точке  $M'$  определена местная декартова система координат  $(R)$ , мы можем фактически развернуть на евклидово пространство не только самую данную кривую, но и бесконечно малую область риманова пространства, окружающую эту кривую. Чтобы получить абсолютное геометрическое изменение вектора, начало которого описывает в римановом пространстве дугу данной кривой, *достаточно построить обычную геометрическую разность двух векторов, полученных в результате только что разобранного развертывания*. Мы имеем таким образом точное и строгое определение этого абсолютного геометрического изменения. Точно так же мы получаем точное и строгое определение параллельного переноса вектора вдоль заданного пути.

93. Можно еще более уточнить разобранную только что операцию, показав, что существует *евклидова метрика, соприкасающаяся с данной метрикой*, вдоль всей данной кривой, или, говоря иначе, что существует *евклидово пространство, соприкасающееся с данным* вдоль данной кривой. Это значит, что можно определить евклидов линейный элемент с независимыми переменными  $u^i$ , такой, что вдоль данной кривой и сами коэффициенты  $g_{ij}$  и их частные производные первого порядка будут иметь такие же значения, как и соответствующие коэффициенты данного линейного элемента <sup>1)</sup>.

Чтобы доказать это предложение, рассмотрим только что реализованное нами развертывание данной кривой на евклидово пространство. Мы

<sup>1)</sup> Эта теорема была высказана впервые Ферми. См. Rend. Acc. Lincei, t. 31<sup>2</sup>, 1922, стр. 21—23, 51—52.

предположим для простоты, что  $n=3$ . Не уменьшая общности, можно далее предположить, что кривая определена уравнениями  $u^1=0$ ,  $u^2=0$ . Развертывание дало нам точку  $M'$  и векторы  $e'_1$ ,  $e'_2$ ,  $e'_3$  в функциях  $u^3$ ; из уравнений (19) мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dM'}{du^3} &= e'_3, \\ \frac{de_i}{du^3} &= \sum_k \Gamma_{i3}^k e'_k. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

После этого определим точку  $P$  евклидова пространства как функцию  $u^1$ ,  $u^2$ ,  $u^3$  с помощью следующих начальных условий:

При  $u^1=u^2=0$  должно быть:

$$\left. \begin{aligned} P &= M', \\ \frac{\partial P}{\partial u^1} &= e'_1, \quad \frac{\partial P}{\partial u^2} = e'_2, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial (u^1)^2} &= \sum_k \Gamma_{11}^k e'_k, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial u^1 \partial u^2} = \sum_k \Gamma_{12}^k e'_k, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial (u^2)^2} = \sum_k \Gamma_{22}^k e'_k, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где  $\Gamma_{ij}^k$  должны быть заменены числовыми значениями, которые они принимают при  $u^1=u^2=0$ .

Эти условия, очевидно, совместны; достаточно, например, положить:

$$P = M' + u^1 e'_1 + u^2 e'_2 + \frac{1}{2} (u^1)^2 \sum_k \Gamma_{11}^k e'_k + u^1 u^2 \sum_k \Gamma_{12}^k e'_k + \frac{1}{2} (u^2)^2 \sum_k \Gamma_{22}^k e'_k.$$

Эта формула относит евклидово пространство к криволинейной системе координат  $u^1$ ,  $u^2$ ,  $u^3$ . При  $u^1=u^2=0$  естественный репер, связанный с точкой  $P$  (которая сводится здесь к  $M'$ ), определяется векторами  $\frac{\partial P}{\partial u_i}$ , которые здесь сводятся соответственно к  $e'_1$ ,  $e'_2$ ,  $e'_3$ ; коэффициенты линейного элемента  $ds^2$  евклидова пространства будут совпадать при этом с коэффициентами  $g_{ij}$  данного риманова пространства. Что касается  $\Gamma_{ij}^k$  евклидова пространства, то мы получим их, взяв коэффициенты при  $e_k$  в выражении второй производной  $\frac{\partial^2 P}{\partial u^i \partial u^j}$ . Если ни один из индексов  $i$  или  $j$  не равен 3, то мы получим при этом вследствие (21) одновременно и коэффициенты  $\Gamma_{ij}^k$  риманова пространства; если индекс  $i$  отличен от 3, а индекс  $j$  равен 3, то при  $u^1=u^2=0$  мы получим вследствие (20):

$$\left( \frac{\partial^2 P}{\partial u^i \partial u^3} \right)_0 = \frac{d}{du^3} \left( \frac{\partial P}{\partial u^i} \right)_0 = \frac{de'_i}{du^3} = \sum_k \Gamma_{i3}^k e'_k,$$

и заключение остается прежним. Если, наконец,  $i=j=3$ , то

$$\left[ \frac{\partial^2 P}{\partial (u^3)^2} \right]_0 = \frac{de'_3}{du^3} = \sum_k \Gamma_{33}^k e'_k;$$

наше заключение остается справедливым. Теорема, таким образом, доказана.

Мы видим, что построение *евклидова пространства соприкасающегося с римановым вдоль данной кривой, выполняется без интегрирования, если только осуществлено отображение (развертывание) этой кривой на евклидово пространство.*

94. Следствия доказанной только что теоремы исключительно многочисленны и важны. Прежде всего мы видим, что *наблюдатель, который перемещается вдоль данной кривой и ограничивается производством измерений только в непосредственной близости от этой кривой, никогда не сможет установить, находится ли он в евклидовом пространстве или же в общем римановом, если только он будет пренебрегать бесконечно малыми выше, чем первого порядка.*

Другое важное следствие заключается в следующем. Если в римановом пространстве рассмотреть дугу кривой, бесконечно близкой к данной кривой ( $C$ ), то *длина этой дуги будет, с точностью до бесконечно малых второго порядка, одна и та же, независимо от того, пользуемся ли мы при ее вычислении римановой метрикой, или же евклидовой, соприкасающейся с римановой вдоль ( $C$ ).*

Действительно, в бесконечной близости к кривой ( $C$ ) коэффициенты данного линейного элемента равны, с точностью до бесконечно малых второго порядка, коэффициентам соприкасающейся евклидовой метрики. Следовательно, *отображение риманова пространства на соприкасающееся евклидово сохраняет, с точностью до бесконечно малых второго порядка, все расстояния, измеренные в соседстве с заданной кривой.*

95. Когда некоторая кривая развертывается на евклидово пространство, то отображенная кривая имеет, очевидно, во всех своих точках ту же кривизну и то же кручение, что и данная кривая, потому что при развертывании абсолютному дифференциалу вектора, начало которого описывает данную кривую, соответствует обычное геометрическое приращение этого вектора. Таким образом, обобщенные формулы Серре-Френе становятся в соприкасающемся евклидовом пространстве *обыкновенными* формулами Серре-Френе:

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\rho} \mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}}{ds} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{t} + \frac{1}{\tau} \mathbf{b}, \quad \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\frac{1}{\tau} \mathbf{n}.$$

Кривая нулевого кручения развернется при этом на плоскую кривую, кривая нулевой кривизны — на прямую. *Прямые риманова пространства, это, следовательно, — такие кривые, которые развертываются на обычные прямые.* Отсюда немедленно вытекает эквивалентность определения прямых, данного в п° 75 (принятого нами в предыдущем), и риманова определения геодезических. В самом деле, если кривая ( $C$ ) развертывается на прямую и если провести в римановом пространстве бесконечно близкую к ней кривую ( $C'$ ), начинающуюся в заданной точке  $A$  кривой ( $C$ ) и кончающуюся в заданной точке  $B$  этой же кривой, то отображение кривой ( $C'$ ) в соприкасающемся евклидовом пространстве будет иметь, с точностью до бесконечно малых второго порядка, ту же длину, что и сама ( $C'$ ). Но в евклидовом пространстве отображение кривой ( $C$ ) является результатом варьирования прямолинейного отрезка; следовательно,

ее длина *равняется*, с точностью до бесконечно малых второго порядка, длине прямолинейного отрезка. Следовательно, и в пространстве Римана первая вариация длины прямолинейного отрезка тождественно равняется нулю, и «прямая» реализует экстремум расстояния, в полном соответствии с классическим определением Римана.

Отсюда можно получить иное следствие; если рассмотрим дугу  $AB$  геодезической и дугу  $A'B'$  кривой, бесконечно к ней близкой; то, *как и в евклидовом пространстве*, получим:

$$\text{дуга } A'B' - \text{дуга } AB = -AA' \cos(AB, AA') - BB' \cos(BA, BB').$$

В частности, на всех геодезических, проходящих через точку  $A$ , отметим точки, отстоящие от  $A$  на расстояние  $R$ ; геометрическим местом этих точек будет некоторая поверхность, аналогичная сфере: *касательная плоскость к этой поверхности в точке  $M$  нормальна геодезической линии  $AM$* . То же самое мы получим, если из  $A$  проведем геодезические, образующие некоторую поверхность: отложив на всех них одну и ту же длину, мы получим геометрическое место, касательная которому в любой точке  $M$  нормальна геодезической  $AM$ .

Дальнейшим следствием будет обобщение свойств *параллельных поверхностей*. Если через все точки некоторой поверхности провести нормальные геодезические и отложить на этих геодезических постоянную длину, то геометрическое место всех полученных таким образом точек образует поверхность, которая в каждой из своих точек нормальна соответствующей геодезической. Отсюда следует, что если семейство геодезических, зависящее от двух параметров, нормально к некоторой поверхности, то оно будет нормально и к бесконечному множеству поверхностей.

96. Рассмотрение соприкасающегося евклидова пространства позволяет без труда обобщить ряд классических теорем, например *теорему Иохимсталь*. Рассмотрим кривую  $(C)$  и две поверхности  $(S_1)$  и  $(S_2)$ , пересекающиеся вдоль  $(C)$ ; если кривая  $(C)$  служит линией кривизны для каждой из этих поверхностей, то это свойство сохраняется при развертывании на соприкасающееся евклидово пространство. Следовательно, в этом соприкасающемся пространстве обе поверхности будут пересекаться под постоянным углом: *следовательно, то же будет и в пространстве Римана*. Обратное предложение столь же очевидно.

97. То, что мы сейчас сделали для кривой, нельзя, вообще говоря, проделать в случае поверхности: *в общем случае не существует евклидова пространства, соприкасающегося с данным вдоль целой поверхности*. Основанием этому служит тот факт, что самой поверхности нельзя, вообще говоря, развернуть на евклидово пространство. Предположим для простоты, — и это не уменьшает общности, — что поверхность определена с помощью уравнения  $u^3 = 0$ . Развертывание потребовало бы интегрирования уравнений в полных дифференциалах с двумя независимыми переменными  $u^1$  и  $u^2$ :

$$\left. \begin{aligned} dM' &= du^1 e'_1 + du^2 e'_2, \\ de'_i &= \sum_k (\Gamma_{ik}^1 du^1 + \Gamma_{ik}^2 du^2) e'_k; \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

условия интегрируемости здесь, вообще говоря, не выполняются.



Важно, однако, заметить следующее. Если некоторая поверхность риманова пространства разворачивается на евклидово пространство, то существует евклидово пространство, соприкасающееся с римановым по всей этой поверхности. Действительно, сказать, что разворачивание возможно, это значит утверждать, что в евклидовом пространстве существуют точка  $M'$  и векторы  $e'_1, e'_2, e'_3$  — функции от  $u^1$  и  $u^3$ , удовлетворяющие уравнениям (22) и соотношениям:

$$e'_i e'_j = g_{ij}(u^1, u^3, 0).$$

Установив это, определим в евклидовом пространстве точку  $P$  как функцию от  $u^1, u^3, u^3$  с помощью условия, состоящего в том, что при  $u^3=0$  должны выполняться следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} P &= M', \\ \frac{\partial P}{\partial u^3} &= e'_3, \\ \frac{\partial^2 P}{\partial (u^3)^2} &= \sum_k \Gamma_{33}^k e'_k. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Этим условиям можно удовлетворить бесконечным числом способов, можно взять, например,

$$P = M' + u^3 e'_3 + \frac{1}{2} (u^3)^2 \sum_k \Gamma_{33}^k e'_k.$$

Евклидово пространство отнесено, таким образом, к криволинейным координатам  $u^1, u^2, u^3$ . При  $u^3=0$  естественный локальный  $n$ -эдр, определенный этими криволинейными координатами, будет:

$$\frac{\partial P}{\partial u^1} = \frac{\partial M'}{\partial u^1} = e'_1, \quad \frac{\partial P}{\partial u^2} = \frac{\partial M'}{\partial u^2} = e'_2, \quad \frac{\partial P}{\partial u^3} = e'_3;$$

коэффициенты линейного элемента этого пространства будут, следовательно, при  $u^3=0$ , те же, что и соответствующие коэффициенты риманова пространства. Что касается коэффициентов  $\Gamma_{ij}^k$ , то при  $u^3=0$  они определяются посредством векторов  $\frac{\partial^2 P}{\partial u^i \partial u^j}$ . Итак, мы имеем:

при  $i, j \neq 3$ :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u^i \partial u^j} = \frac{\partial^2 M'}{\partial u^i \partial u^j} = \sum_k \Gamma_{ij}^k e'_k;$$

при  $i \neq 3, j=3$ :

$$\frac{\partial^2 P}{\partial u^i \partial u^3} = \frac{\partial}{\partial u^i} \left( \frac{\partial P}{\partial u^3} \right) = \frac{\partial e'_3}{\partial u^i} = \sum_k \Gamma_{3i}^k e'_k;$$

наконец, при  $i=j=3$ :

$$\frac{\partial^2 P}{(\partial u^3)^2} = \sum_k \Gamma_{33}^k e'_k.$$

Это показывает, что при  $u^3 = 0$  частные производные от коэффициентов линейного элемента риманова пространства равны соответствующим частным производным от коэффициентов линейного элемента пространства евклидова.

Заметим, что некоторая поверхность наверное может быть развернута на евклидово пространство, если параллельное перенесение любого вектора вдоль этой поверхности является *голономным*, т. е. дает результат, не зависящий от пути, который ведет на поверхности от начала исходного вектора к началу конечного.

98. Отметим еще одно, последнее, приложение соприкасающегося вдоль кривой евклидова пространства. Рассмотрим в трехмерном римановом пространстве поверхность  $(S)$  и *геодезическую*  $(C)$  этой поверхности, т. е. кривую, которая осуществляет кратчайшее расстояние *на этой поверхности*. В евклидовом пространстве, соприкасающемся с римановым вдоль кривой  $(C)$ , кривая  $(C)$  попрежнему обладает стационарной длиной по отношению ко всем кривым, лежащим на поверхности и имеющим в качестве концов две данные точки на кривой  $(C)$ ; следовательно, в силу классического свойства геодезических на поверхности евклидова пространства, соприкасающаяся плоскость кривой  $(C)$  будет нормальна к поверхности. *Это свойство, имеющее место в соприкасающемся вдоль кривой евклидовом пространстве, будет иметь место и в пространстве Римана.*

#### IV. Приложение к теории поверхностей обычного пространства

99. Поверхность, находящуюся в обычном пространстве, можно рассматривать как двумерное риманово пространство, линейным элементом которого служит обычный (гауссов) линейный элемент поверхности. Здесь мы имеем *конкретную интерпретацию евклидова пространства* (в нашем случае, плоскости), *соприкасающегося с римановым в точке M*. Действительно, спроектируем ортогонально точки поверхности на касательную плоскость в точке  $M$ ; мы получим, таким образом, некоторое отображение поверхности на евклидову плоскость, и *метрика плоскости будет соприкасающейся по отношению к метрике поверхности*. Это становится очевидным, если в качестве начала координат взять точку  $M$ , а в качестве плоскости  $xy$  — касательную плоскость. Используя классические обозначения Монжа, получим для линейного элемента поверхности следующее выражение:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + (p\,dx + q\,dy)^2,$$

а для линейного элемента плоскости — следующее:

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2;$$

мы видим, что в начале координат совпадают как сами коэффициенты обеих квадратичных форм, так и их частные производные первого порядка.

Можно было бы установить более общее соответствие, именно: точке  $M'(x, y, z)$  поверхности сопоставить точку  $(x_1, y_1)$  касательной плоскости, полученную в результате пересечения последней с произвольной прямой, проходящей через  $M'$  и удовлетворяющей единственному условию: именно, угол между этой прямой и нормалью в  $M$  к поверхности должен стремиться к нулю, когда  $M'$  стремится к  $M$ . Говоря более точно, можно взять прямую

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = z,$$

где  $l$  и  $m$  — непрерывные функции, имеющие непрерывные производные первого порядка и превращающиеся в нуль при  $x = y = 0$ . Имеем, в самом деле:

$$\begin{aligned} x_1 &= x - lz, & y_1 &= y - mz, \\ dx_1^2 + dy_1^2 &= (dx - l dz - z dl)^2 + (dy - m dz - z dm)^2; \end{aligned}$$

раскрыв скобки в правой части равенства и пренебрегая бесконечно малыми выше, чем второго порядка, получим:

$$dx_1^2 + dy_1^2 = dx^2 + dy^2.$$

Заметим, что если бы мы хотели ограничиться *евклидовым пространством, касательным в точке  $M$* , то мы могли бы каждой точке  $M'$  поверхности поставить в соответствие точку  $M'_1$  касательной плоскости, полученную из первой посредством цилиндрической проекции, причем *направление цилиндрической проекции должно быть подчинено единственному условию — не быть параллельным к касательной плоскости в точке  $M$* . Можно было бы также воспользоваться конической проекцией, причем вершина конуса может быть помещена где угодно, за исключением точек касательной плоскости в  $M$ .

100. Гаусс первый развил *внутреннюю* теорию поверхностей, изучая их с точки зрения тех свойств, которые зависят только от линейного элемента; в этом отношении он является предшественником Римана. В частности он ввел понятие геодезической кривизны кривой, лежащей на поверхности. Это то, что мы называли просто *кривизной* кривой, рассматриваемой как кривая двумерного риманова пространства, образованного поверхностью. Чтобы избежать всяких недоразумений, примем наименование Гаусса и обозначим через  $\frac{1}{\rho_g}$  геодезическую кривизну кривой; сохраним наименование кривизны (без прилагательного) за обычной кривизной кривой, рассматриваемой безотносительно поверхности, и обозначим ее через  $\frac{1}{\rho}$ .

Геодезическая кривизна кривой  $(C)$  в точке  $M$  равняется на основании общей теории, и в частности п° 99, обыкновенной кривизне проекции  $(C')$  кривой  $(C)$  на касательную плоскость в  $M$ . Если мы рассмотрим теперь цилиндр, проектирующий ортогонально кривую  $(C)$  на касательную плоскость, то увидим, что обе кривые  $(C)$  и  $(C')$  имеют на этом цилиндре

одну и ту же нормальную кривизну. Но угол, который главная нормаль кривой ( $C$ ) образует с нормалью цилиндра, является дополнительным по отношению к углу  $V$  между этой главной нормалью и нормалью к поверхности ( $S$ ); отсюда — формула:

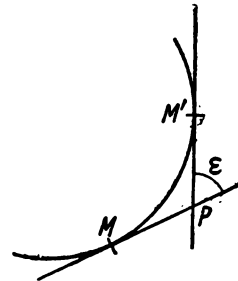
$$\frac{1}{\rho_g} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - V\right)}{\rho} = \frac{\sin V}{\rho}.$$

В силу этого *геодезическими* на поверхности (кривыми нулевой геодезической кривизны) могут быть либо прямые объемлющего пространства ( $\frac{1}{\rho} = 0$ ), либо такие кривые, соприкасающаяся плоскость которых нормальна к поверхности ( $\sin V = 0$ ).

Можно получить другое выражение для геодезической кривизны, не связанное с объемлющим пространством. Заметим сначала, что в римановом двумерном пространстве два вектора  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{x}'$ , приложенные в бесконечно близких точках  $M$  и  $M'$ , *параллельны* между собою, если они образуют один и тот же угол с геодезической  $MM'$ . Это вытекает из того, что при перемещении вдоль геодезической вектор, касательный к ней, остается параллелен самому себе. Возьмем теперь в качестве отправной точки формулу Френе:

$$\frac{D\mathbf{t}}{ds} = \frac{1}{\rho_g} \mathbf{n}_g,$$

где  $\mathbf{n}_g$  обозначает единичный вектор, нормальный к кривой, но *касательный к поверхности*. Число, измеряющее вектор  $D\mathbf{t}$ , равно углу  $\varepsilon$ , образованному касательной в  $M$  с касательной в  $M'$ , параллельно перенесенной из  $M'$  в  $M$  (угол смежности). Следовательно, *геодезическая кривизна равна отношению  $\frac{\varepsilon}{ds}$  угла смежности к длине дуги  $MM'$* . Чтобы вычислить  $\varepsilon$ , рассмотрим (фиг. 7) две геодезические, касательные в точках  $M$  и  $M'$  данной кривой, и пусть  $P$  будет точка их пересечения (бесконечно близкая к  $M$  и  $M'$ ). Для того чтобы перенести параллельно самому себе (с точностью до бесконечно малых второго порядка) направление касательной в точке  $M'$  из  $M'$  в  $M$ , можно поступить так: сначала перенести это направление из  $M'$  в  $P$ ; это даст нам направление самой геодезической  $PM'$  в точке  $P$ . Переноса его далее из  $P$  в  $M$ , мы не изменим угла между этим направлением и направлением геодезической  $MP$ . Следовательно, *угол смежности является ни чем иным, как тем углом, под которым пересекаются в  $P$  обе рассматриваемые геодезические*. Мы получаем, таким образом, такое же определение геодезической кривизны, как и в случае евклидовой плоскости.

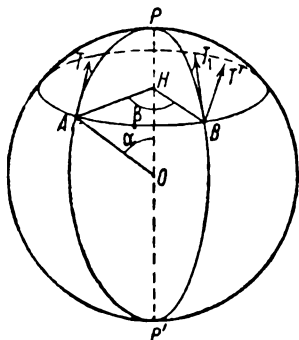


Фиг. 7.

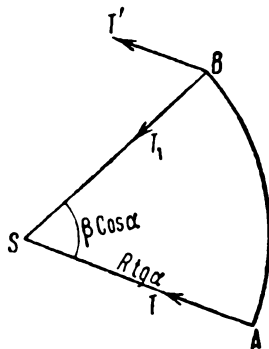
101. Проектируя ортогонально точки поверхности на развертывающуюся поверхность ( $\Sigma$ ), описанную около данной вдоль кривой ( $C$ ), мы получим конкретную интерпретацию *евклидова пространства* (здесь плоского), *соприкасающегося* с данным вдоль кривой ( $C$ ). Действительно,

пусть  $M$  — точка кривой  $(C)$ ,  $M'$  — достаточно близкая точка поверхности; нормаль, опущенная из  $M'$  на  $(\Sigma)$ , и нормаль к поверхности в  $M$  образуют угол, бесконечно малый (первого порядка малости) по отношению к расстоянию  $MM'$ . Метрика, которую определяет на  $(\Sigma)$  такое точечное соответствие между  $(S)$  и  $(\Sigma)$ , будет при этом (п° 99) соприкасающейся евклидовой метрикой в точке  $M$  по отношению к метрике поверхности, и, следовательно, поверхность  $(\Sigma)$ , будучи развернута на плоскость, даст евклидово пространство, соприкасающееся с нашим вдоль  $(C)$ .

Отсюда вытекает способ (так сказать, механический) параллельного переноса вектора вдоль некоторой кривой  $(C)$ , лежащей на данной



Фиг. 8.



Фиг. 9.

поверхности. Рассмотрим, например, сферу радиуса  $R$  и на этой сфере — дугу параллели, лежащую на широте  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ , и поставим задачу: перенести параллельно из  $A$  в  $B$  касательную  $AT$  к меридиану  $PAP'$  (фиг. 8). Развертывающаяся поверхность, описанная около сферы, будет здесь конусом, образующие которого, считая от данной параллели сферы, имеют длину  $R \operatorname{tg} \alpha$ ; если  $\beta$  — центральный угол, соответствующий дуге  $AB$ , то при разворачивании конуса получится (фиг. 9) дуга окружности радиуса  $R \operatorname{tg} \alpha$  длиной  $R \beta \sin \alpha$ . Геодезическая кривизна параллели равна, следовательно,  $\frac{\operatorname{ctg} \alpha}{R}$ ; центральный угол сектора, который получится при разворачивании конуса, будет  $\beta \cos \alpha$ . Отсюда сейчас же следует, что это и будет угол, образованный на сфере вектором  $BT$  (который получается при переносе  $AT$ ) с касательной  $BT_1$  к меридиану, проходящему через  $B$ . Этот угол  $\beta \cos \alpha$  равен нулю, если рассматриваемая окружность является экватором: отсюда следует, что экватор является геодезической; касательная к этой геодезической все время остается параллельной сама себе, и вектор  $AT$  образует с ней все время прямой угол.

Эти результаты можно получить аналитически, исходя из классического выражения для линейного элемента сферы:

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi.$$

Вычисление символов Христоффеля дает:

$$\Gamma_{22}^1 = \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right\} = -\sin \theta \cos \theta, \quad \Gamma_{12}^2 = \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = \operatorname{ctg} \theta,$$

все остальные  $\Gamma_{ij}^k$  равны нулю. Уравнения параллельного переноса вектора вдоль параллели имеют вид:

$$\begin{aligned} dX^1 + X^2 \omega_2^1 &\equiv dX^1 - X^2 \sin \theta \cos \theta d\varphi = 0, \\ dX^2 + X^1 \omega_1^2 &\equiv dX^2 + X^1 \operatorname{ctg} \theta d\varphi = 0. \end{aligned}$$

Здесь мы имеем:

$$\theta = \alpha, \quad (X^1)_0 = 1, \quad (X^2)_0 = 0;$$

интегрирование, выполненное от  $\varphi_0$  до  $\varphi_0 + \beta$ , дает в точке  $B$ :

$$X^1 = \cos(\beta \cos \alpha), \quad X^2 = -\frac{1}{\sin \alpha} \sin(\beta \cos \alpha),$$

что совпадает с результатом, полученным геометрически.

**102.** Способ, указанный в  $\text{п}^\circ 99$ , посредством которого можно получить соприкасающуюся евклидову метрику в данной точке поверхности, может быть обобщен на случай любого риманова пространства  $n$  измерений. Достаточно представить себе, что в евклидовом пространстве достаточно большого числа измерений  $N$  задано многообразие  $n$  измерений, линейный элемент которого в точности совпадает с линейным элементом заданного риманова пространства. Мы реализуем такое многообразие, если сумеем найти  $N$  функций  $x_1, \dots, x_N$  от  $u^1, \dots, u^n$ , удовлетворяющих уравнению:

$$dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_N^2 = \sum_{i,j} g_{ij} du^i du^j.$$

Это равенство сводится к системе  $\frac{n(n+1)}{2}$  уравнений в частных производных первого порядка с  $N$  неизвестными функциями. Эта система будет наверное вполне интегрируемой (на это указывает более углубленный анализ), если число уравнений не будет превышать числа неизвестных функций, в частности если мы возьмем  $N = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ .

Установив это, возьмем в  $N$ -мерном евклидовом пространстве многообразие  $V_n$ , имеющее данный линейный элемент. Мы получим соприкасающуюся евклидову метрику в точке  $M$ , если спроектируем ортогонально точки многообразия на плоское  $n$ -мерное многообразие, касательное к  $V_n$  в точке  $M$ . Линейный элемент, который мы получим таким образом в плоском многообразии, удовлетворяет требуемым условиям. Отсюда получается следующий способ построения двух векторов, касательных к  $V_n$ , имеющих начало в двух бесконечно близких точках  $M$  и  $M'$  и удовлетворяющих условию параллелизма. Достаточно, чтобы ортогональная проекция второго на касательное в  $M$  плоское многообразие была параллельна первому вектору в элементарном смысле этого слова. Именно таким образом Леви-Чивита и ввел впервые понятие параллелизма; но если стать непосредственно на эту точку зрения, то нужно еще доказать, что параллелизм связан только с линейным элементом многообразия. Это и было сделано Леви-Чивита <sup>2)</sup>.

<sup>1)</sup> См. *M. Janet* (Annales Soc. Pol. Math., t. 5, 1926, стр. 38—43 и *E. Cartan*, тот же сборник, t. 6, 1927, стр. 1—7).

<sup>2)</sup> *T. Levi-Civita*, Nozione di parallelismo in una varietà qualunque (Rend. Circ. matem. Palermo, t. 42, 1907, стр. 173—205).

## ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ; АКСИОМА ПЛОСКОСТИ И АКСИОМА СВОБОДНОЙ ПОДВИЖНОСТИ

### I. Поверхности, геодезические в точке; теорема Сёвери

103. Если через точку  $A$  риманова пространства провести все возможные геодезические <sup>1)</sup>, касательные в этой точке к данной элементарной площадке, то получится поверхность, которая называется *геодезической в точке  $A$* . Для того чтобы выяснить, является ли некоторая данная поверхность геодезической в одной из своих точек, достаточно рассмотреть геодезические линии, касательные к поверхности в этой точке: они должны лежать целиком на поверхности.

У поверхности, геодезической в точке  $A$ , обе главные кривизны в этой точке равны нулю, потому что нормальная кривизна в направлении любой касательной к поверхности равна в точке  $A$  нулю. Следовательно, абсолютный дифференциал единичного вектора нормали к поверхности при переходе от точки  $A$  к бесконечно близкой точке той же поверхности  $A'$  равен нулю. Стало быть, если параллельно перенести из  $A$  в  $A'$  вектор, касательный к поверхности в  $A$ , то и в точке  $A'$  он останется касательным к поверхности (с точностью до бесконечно малых выше, чем первого порядка).

На основе этих соображений можно установить способ геометрического построения параллельного перенесения вектора, данный Ф. Севери <sup>2)</sup>.

*Чтобы вектор  $x$ , приложенный в  $A$ , перенести параллельно в бесконечно близкую точку  $A'$ , нужно провести геодезическую  $AA'$  и геодезическую поверхность в точке  $A$ , касательную в  $A$  к вектору  $x$  и к геодезической  $AA'$ . Искомый вектор  $x'$  должен касаться в  $A'$  этой поверхности и образовывать с геодезической  $AA'$ , продолженной за  $A'$ , угол, равный углу, образованному с этой же геодезической вектором  $x$ .*

Последняя часть нашего утверждения вытекает из того, что направление геодезической  $AA'$  в  $A'$  параллельно ее же направлению в  $A$ , и из того, что при параллельном перенесении угол между двумя направлениями сохраняется.

Важно заметить, что если вектор  $x$  переносить параллельно вдоль конечной дуги геодезической  $AA'$  (продолженной достаточно далеко), то

<sup>1)</sup> Здесь и в дальнейшем имеются в виду *геодезические линии пространства*, т. е. «прямые».

<sup>2)</sup> F. Severi, Sulla curvatura delle superficie e varietà (Rend. Circ. matem. Palermo, t. 42, 1917, стр. 227—259).

вектор, полученный в результате этой операции, не будет, вообще говоря, касательным к рассматриваемой геодезической поверхности. Действительно, нет никаких оснований предполагать *a priori*, чтобы эта поверхность, геодезическая в  $A$ , оставалась геодезической во всех точках кривой  $AA'$ .

Если две поверхности, пересекаясь по кривой  $(C)$ , являются обе геодезическими во всех точках этой кривой, то они пересекаются под постоянным углом, потому что кривая  $(C)$  может рассматриваться как линия кривизны на обеих поверхностях (п° 96).

## II. Вполне геодезические поверхности; плоскости

**104.** Поверхность, геодезическая во всех своих точках, называется просто *геодезической поверхностью* (или *вполне геодезической поверхностью*) <sup>1)</sup>. Характеристическим свойством ее является следующее: любая геодезическая, касательная к этой поверхности, лежит на ней целиком.

Вторым характеристическим свойством является то, что любая геодезическая, имеющая две точки (достаточно близкие) на такой поверхности, лежит на ней всеми своими точками. Действительно, пусть  $A$  и  $A'$  — эти две точки; через точку  $A$  проходит бесконечное множество геодезических, заполняющих поверхность сплошь, если ограничиться достаточно малой окрестностью точки  $A$ . Одна из них necessarily пройдет через точку  $A'$ . Она совпадает с данной геодезической линией, потому что через две достаточно близкие точки пространства проходит только одна геодезическая. Обратное предложение доказывается точно так же.

Таким образом, вполне геодезические поверхности обладают свойствами, присущими *плоскостям* в евклидовом пространстве. За ними можно сохранить наименование *плоскостей*. Но мы увидим, что *существование плоскостей в римановом пространстве является, вообще говоря, исключением*.

**105!** Вполне геодезическая поверхность обладает следующими тремя очевидными свойствами:

Прежде всего, *ее главные кривизны во всех точках равны нулю*.

Во-вторых, *при параллельном переносе вдоль поверхности единичный вектор нормали к поверхности остается все время нормальным к ней*.

В-третьих, *любой касательный к поверхности вектор остается касательным при любом параллельном переносе вдоль поверхности*.

Второе свойство является непосредственным следствием первого, которое в свою очередь вытекает из второго. Что касается второго и третьего, то они, очевидно, эквивалентны одно другому.

Мы докажем сейчас, что третье свойство является *характеристическим* для вполне геодезических поверхностей; следовательно, два первых будут тоже характеристическими.

Предположим, что любой вектор, касательный к данной поверхности  $(S)$ , остается касательным к ней при параллельном перенесении, при котором начало его описывает любую кривую, лежащую на поверхности  $(S)$ .

<sup>1)</sup> Это понятие было введено Адамаром (*J. Hadamard*) (Bull. Soc. math., 2-я серия, т. 25, 1901, стр. 37—40).



Отсюда следует, что ускорение точки, описывающей любую кривую поверхности, само касается поверхности. Если координаты точек поверхности даны как функции двух параметров  $\alpha, \beta$ , то достаточно *двух* дифференциальных уравнений второго порядка относительно  $\alpha$  и  $\beta$ , чтобы выразить, что ускорение движущейся точки равно нулю. *Следовательно, на поверхности существует геодезическая, проходящая через любую точку этой поверхности и имеющая в этой точке произвольное направление, касательное к поверхности*; следовательно, наша поверхность — вполне геодезическая.

Нетрудно проверить это путем вычисления. Не уменьшая общности, можно предположить, что поверхность определена уравнением  $u^3 = 0$ . Для того чтобы найти геодезические линии пространства, целиком лежащие на поверхности, нужно решить систему трех уравнений:

$$\frac{d^2(u^1)}{ds^2} + \sum_{i,j}^{1,2} \Gamma_{ij}^1 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0,$$

$$\frac{d^2(u^2)}{ds^2} + \sum_{i,j}^{1,2} \Gamma_{ij}^2 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0,$$

$$\sum_{i,j}^{1,2} \Gamma_{ij}^3 \frac{du^i}{ds} \frac{du^j}{ds} = 0.$$

Таким образом, для того чтобы поверхность была вполне геодезической, необходимо и достаточно, чтобы  $\Gamma_{ij}^3$  равнялись нулю:

$$\Gamma_{11}^3 = \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{22}^3 = 0. \quad (1)$$

Эти уравнения выражают одно из трех: либо то, что главные кривизны равны нулю, либо то, что абсолютный дифференциал каждого из векторов  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ , касательных к поверхности, сам является вектором, касательным к поверхности:

$$D\mathbf{e}_1 = (\Gamma_{11}^1 du^1 + \Gamma_{12}^1 du^2) \mathbf{e}_1 + (\Gamma_{11}^2 du^1 + \Gamma_{12}^2 du^2) \mathbf{e}_2,$$

либо то, что абсолютный дифференциал нормального вектора с ковариантными компонентами  $X_1 = X_2 = 0, X_3 = 1$  нормален к поверхности:

$$DX_1 = dX_1 - \sum_i X_i \omega_1^i = -\omega_1^3 = -\Gamma_{11}^3 du^1 - \Gamma_{12}^3 du^2 = 0,$$

$$DX_2 = dX_2 - \sum_i X_i \omega_2^i = -\omega_2^3 = -\Gamma_{21}^3 du^1 - \Gamma_{22}^3 du^2 = 0.$$

**106.** Еще одним важным свойством вполне геодезических поверхностей является следующее: *если развернуть любую из кривых, целиком ле-*

жащих на вполне геодезической поверхности, на евклидово пространство, то получится плоская кривая. Действительно, абсолютный дифференциал единичного касательного вектора будет касательным к поверхности; следовательно, и главная нормаль будет касательной к поверхности. Точно такое же рассуждение показывает, что и бинормаль будет касательной к поверхности. Это показывает, что кручение кривой равно нулю; а если так, то при разворачивании она дает плоскую кривую.

*Обратное предложение тоже справедливо.* Предположим, что кручение любой кривой, целиком лежащей на нашей поверхности, равно тождественно нулю; иными словами, что скорость, ускорение первого порядка и ускорение второго порядка точки, произвольно двигающейся по поверхности, все время компланарны. Пусть, кроме того, поверхность определена посредством уравнения  $u^3 = 0$ . Представим себе вторую подвижную точку, которая перемещается по поверхности таким образом, что в каждый данный момент величины  $\frac{du^i}{dt}$  и  $\frac{d^2u^i}{dt^2}$  имеют одни и те же числовые значения для обеих точек, величины же  $\frac{d^3u^1}{dt^3}$  и  $\frac{d^3u^2}{dt^3}$ , напротив, разнятся соответственно на некоторые произвольные количества  $\alpha^1$  и  $\alpha^2$ . Отсюда следует, что произвольный вектор  $(\alpha^1, \alpha^2)$ , касательный к поверхности, компланарен скорости и ускорению первой точки; следовательно, это ускорение лежит в касательной плоскости к поверхности, и все кривые, лежащие на поверхности, являются асимптотическими линиями. Следовательно, наша поверхность — вполне геодезическая.

**107.** В качестве следствия из только что изложенного материала мы сейчас докажем замечательную теорему, которая принадлежит Г. Риччи<sup>1)</sup>.

*Если в римановом пространстве существует семейство «плоскостей», зависящее от одного параметра, то ортогональные траектории этого семейства устанавливают между отдельными плоскостями изометрическое точечное соответствие.*

Действительно, пусть  $(P)$  — одна из плоскостей семейства,  $(P')$  — бесконечно близкая плоскость. Пусть, далее,  $(C)$  — произвольная кривая, лежащая в плоскости  $(P)$ , а  $(C')$  — геометрическое место точек пересечения плоскости  $(P')$  и ортогональных траекторий, проведенных через  $(C)$ . Отобразим риманово пространство на евклидово, соприкасающееся вдоль  $(C)$ . При таком отображении кривая  $(C)$  перейдет в плоскую кривую, а кривая  $(C')$  — в кривую, которая получается из первой так: из каждой ее точки проводится нормаль и на ней откладывается бесконечно малый отрезок. Следовательно, первая вариация длины любой дуги кривой  $(C)$  при переходе от нее к  $(C')$  равна нулю. Но так как, с другой стороны, при нашем отображении длина  $(C')$  сохраняется с точностью до бесконечно малых второго порядка, то мы видим, что и в римановом пространстве первая вариация длины любой дуги кривой  $(C)$  равна нулю, если перейти от плоскости  $P$  к бесконечно близкой плоскости  $(P')$ , а это нам как раз и нужно было доказать.

Отсюда вытекает интересное следствие. На одной из плоскостей  $(P_0)$  нашего семейства возьмем произвольную систему координат  $u, v$  и обо-

<sup>1)</sup> G. Ricci, *Formole fondamentali nella teoria generale della varietà e della loro curvatura* (Rend. Acc. Lincei, t. 121, 1903, стр. 409—420).

значим через  $w$  переменный параметр, индивидуализирующий различные плоскости семейства. В этих координатах линейный элемент пространства примет вид:

$$ds^2 = du^2 + H(u, v, w) dw^2, \quad (2)$$

если через  $d\sigma^2$  обозначить линейный элемент плоскости ( $P_0$ ):

$$d\sigma^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) du dv + G(u, v) dv^2. \quad (3)$$

Этот же результат можно получить чисто формальным путем, если взять в качестве третьего семейства координатных линий ( $u = \text{const}$ ,  $v = \text{const}$ ) ортогональные траектории наших плоскостей, а в качестве третьего семейства координатных поверхностей ( $w = \text{const}$ ) — самые плоскости. При этих условиях линейный элемент пространства удовлетворит условиям:

$$g_{13} = g_{23} = 0. \quad (4)$$

Для того чтобы поверхность  $w = \text{const}$  была вполне геодезической поверхностью, необходимо и достаточно, чтобы имели место соотношения:

$$\Gamma_{11}^3 = \Gamma_{12}^3 = \Gamma_{22}^3 = 0,$$

или, принимая во внимание (4):

$$\Gamma_{131} = \Gamma_{132} = \Gamma_{232} = 0,$$

или, пользуясь символами Христоффеля:

$$\begin{bmatrix} 11 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 3 \end{bmatrix} = 0.$$

Эти уравнения приводятся к следующим:

$$\frac{\partial g_{11}}{\partial w} = \frac{\partial g_{12}}{\partial w} = \frac{\partial g_{22}}{\partial w} = 0,$$

и мы получаем данное выше выражение для  $ds^2$ .

Этот линейный элемент, содержащий только одну произвольную функцию трех независимых переменных (а также и функции двух независимых переменных), показывает, что римановы пространства, допускающие семейства плоскостей, зависящих от одного параметра, являются исключительным случаем, потому что, как это заметил еще Риман, наиболее общий линейный элемент трехмерного пространства зависит от *трех* произвольных функций трех переменных (мы имеем шесть различных коэффициентов, но возможность произвольного преобразования координат уменьшает число произвольных функций до трех).

### III. Аксиома плоскости и аксиома свободной подвижности пространства

108. В обычном пространстве через любые три точки можно провести плоскость, или, что то же, плоскость всегда можно провести через две пересекающиеся прямые. Мы скажем, что риманово пространство удовлетворяет *аксиоме плоскости*, если оно обладает следующим свойством:

*Через любую точку пространства и в направлении любого двумерного элемента, содержащего эту точку, проходит вполне геодезическая поверхность, т. е. такая поверхность, которая целиком содержит любую геодезическую, имеющую с ней две общие точки.*

Несколько ниже мы определим все римановы пространства, удовлетворяющие аксиоме плоскости. Но сначала мы покажем, что они имеют еще одно важное свойство, сближающее их с евклидовым пространством.

Евклидово пространство допускает бесчисленное множество изометрических точечных преобразований; иными словами, любую фигуру можно всегда перемещать так, *чтобы она оставалась равна сама себе*. При этом любую точку  $A$  фигуры можно совместить с любой точкой пространства  $B$ , и две любые полупрямые, исходящие из  $A$ , — с двумя любыми полупрямыми, исходящими из  $B$ , если только последние образуют такой же угол между собою, как и первые.

Существование таких перемещений или, что в сущности то же, понятие равенства фигур служит основанием почти всей элементарной геометрии.

Мы скажем, что риманово пространство удовлетворяет аксиоме свободной подвижности, если оно допускает перемещения, сохраняющие форму кривых и обладающие той же степенью общности, как и в пространстве Евклида.

Мы докажем сейчас, что в любом римановом пространстве *аксиома плоскости влечет за собою аксиому свободной подвижности, и наоборот*.

**109.** Докажем сначала, что если любая поверхность, геодезическая в некоторой точке  $A$ , является вполне геодезической, то пространство обладает *свободной подвижностью вокруг точки  $A$* . Это значит, что оно допускает изометрические точечные преобразования, оставляющие неподвижной точку  $A$  и преобразующие любые два направления, исходящие из  $A$ , в любые два другие направления, образующие между собою тот же угол.

Ясно, что если такое изометрическое точечное преобразование существует, то оно определяется однозначно, потому что в касательном в точке  $A$  евклидовом пространстве оно сводится к повороту около оси, проходящей через  $A$ . Каждое направление преобразуется вполне определенным образом, и каждой точке  $M$ , расположенной на геодезической, исходящей из  $A$ , соответствует точка  $M'$ , расположенная на геодезической, исходящей из  $A$  в преобразованном направлении на том же расстоянии от  $A$ , что и точка  $M$ . При этом предполагается, что изометрическое преобразование является *прямым*, т. е. сохраняет ориентацию триэдров, имеющих вершину в  $A$ .

Заметив это, предположим, что все поверхности, геодезические в точке  $A$ , являются вместе с тем вполне геодезическими. Рассмотрим *сферу* с центром в  $A$ , т. е. геометрическое место точек, находящихся на всех возможных геодезических, исходящих из точки  $A$  и лежащих на расстоянии  $R$  от нее. Назовем *большим кругом* этой сферы сечение сферы *плоскостью*, проходящей через  $A$ , и рассмотрим две дуги больших кругов  $MN$  и  $M'N'$ , соответствующих двум равным центральным углам

$\widehat{MAN}$  и  $\widehat{M'AN'}$ .

Проведем на сфере кривую  $MM'$ , нормальную к большому кругу  $MN$  в точке  $M$  и к большому кругу  $M'N'$  в точке  $M'$ , что всегда возможно. Рассмотрим семейство плоскостей, построенное следующим образом: через произвольную точку  $P$  кривой  $MM'$  проводится геодезическая  $AP$  и геодезическая поверхность, содержащая  $AP$  и нормаль к  $MM'$  в точке  $P$ ; это сделать можно, потому что радиус  $AB$  нормален к сфере в точке  $P$ .

Ортогональные траектории семейства плоскостей определяют изометрическое соответствие между точками этих плоскостей; точке  $M$  плоскости  $AMN$  (принадлежащей к семейству) соответствует точка  $M'$  плоскости  $AM'N'$  (тоже принадлежащей семейству); геодезической  $AN$  соответствует геодезическая  $AN'$ , образующая с  $AM'$  такой же угол, какой  $AN$  образует с  $AM$ ; следовательно, точке  $N$  соответствует точка  $N'$ . Изометрическое преобразование позволяет, таким образом, перейти от дуги большого круга  $MN$  к дуге большого круга  $M'N'$ .

Отсюда следует, что на каждой сфере с центром в  $A$  равным центральным углом соответствуют равные дуги больших кругов (т. е. дуги равной длины).

Рассмотрим теперь точечное преобразование риманова пространства, соответствующее, как было объяснено выше, вращению касательного в  $A$  евклидова пространства вокруг точки  $A$ . Пусть  $M$  и  $N$  — две соседние точки, расположенные на одной и той же геодезической, исходящей из  $A$ , и пусть  $M'$  и  $N'$  — отображения этих точек; отображения тоже расположены на одной геодезической, исходящей из  $A$ , причем, очевидно,  $M'N' = MN$ . Пусть теперь  $M$  и  $N$  будут две соседние точки, расположенные на одной и той же сфере с центром в  $A$ ;  $M'$  и  $N'$  попрежнему будут их отображения, расположенные, конечно, на этой же сфере. Здесь снова имеет место равенство  $M'N' = MN$ , потому что соответствующие центральные углы, очевидно, равны. Но всякое элементарное смещение в римановом пространстве может рассматриваться как результат двух взаимно ортогональных элементарных смещений: радиального и нормального к радиусу-вектору, исходящему из  $A$ . Это доказывает, что рассматриваемое нами точечное преобразование является изометрическим.

К этому можно еще кое-что добавить. Рассуждение, которое мы только что привели, может быть без всяких изменений приложено к точечному преобразованию, соответствующему *отражению* касательного в  $A$  евклидова пространства.

Следовательно, если все поверхности, геодезические в  $A$ , являются вполне геодезическими, то пространство допускает  $\infty^3$  прямых и  $\infty^3$  непрямых точечных преобразований, которые все являются изометрическими и оставляют неподвижной точку  $A$ .

110. Докажем теперь обратное предположение. Допустим, что пространство обладает свободной подвижностью вокруг точки  $A$ . Отсюда немедленно следует, что на любой сфере с центром в  $A$  равные элементарные дуги соответствуют равным центральным углам. Рассмотрим, далее, элементарную площадку, содержащую точку  $A$ , и *отражение* относительно этой площадки в касательном евклидовом пространстве. Это отражение влечет за собою точечное преобразование риманова пространства, при котором точке  $M$  соответствует точка  $M'$ , расположенная таким образом, что направления геодезических  $AM$  и  $AM'$  симметричны в точке  $A$  отно

сительно данной элементарной площадки, а дуги  $AM$  и  $AM'$  равны между собою по длине. Это точечное преобразование, сохраняющее длины элементарных дуг, лежащих на сфере с центром в  $A$ , и элементарных дуг, нормальных к этой сфере, изометрично. Иными словами, существование  $\infty^3$  изометрических *прямых* преобразований, сохраняющих неподвижной точку  $A$ , влечет за собою существование стольких же *непрямых* преобразований.

Рассмотрим теперь поверхность, геодезическую в точке  $A$  и касательную в этой точке к данной элементарной площадке. Эта поверхность, очевидно, инвариантна по отношению к *отражению*, существование которого мы только что доказали, именно к отражению относительно данной элементарной площадки. Если  $M$  и  $N$  — две любые точки нашей геодезической поверхности, то геодезическая  $MN$ , очевидно, инвариантна по отношению к отражению; то же можно сказать относительно геодезической  $AP$ , соединяющей  $A$  с любой точкой  $P$  кривой  $MN$ ; но единственные геодезические, исходящие из  $A$  и инвариантные по отношению к нашему отражению, лежат в рассматриваемой геодезической поверхности; следовательно, любая точка кривой  $MN$  лежит на геодезической поверхности. Иными словами, *все поверхности, геодезические в  $A$ , являются вполне геодезическими*.

111. Обратное предложение, которое мы только что доказали, сразу показывает, что если некоторое риманово пространство удовлетворяет аксиоме свободной подвижности, то оно удовлетворяет и аксиоме плоскости, потому что все поверхности, геодезические в произвольной точке пространства, являются вполне геодезическими. Обратно, если некоторое риманово пространство удовлетворяет аксиоме плоскости, то оно удовлетворяет и аксиоме свободной подвижности. Действительно, пусть  $A$  и

$A'$  — две произвольные (достаточно близкие) точки, а  $\widehat{BAC}$  и  $\widehat{B'A'C'}$  — два равные угла; подходящим образом подобранное вращение (изометрическое преобразование) вокруг середины дуги геодезической  $AA'$  переведет точку  $A$  в  $A'$ ; в результате второго поворота около  $A'$  придут в совмещение оба данные угла.

112. Докажем сейчас весьма замечательную теорему, которой мы обязаны Ф. Шуру <sup>1)</sup>, а именно следующую: *если в римановом пространстве имеются две точки (достаточно близкие)  $A$  и  $B$ , обладающие тем свойством, что все поверхности геодезические в любой из этих точек являются вполне геодезическими, то пространство удовлетворяет аксиоме плоскости; более того, его можно отобразить на обычное пространство таким образом, что любой геодезической будет соответствовать прямая*.

Первую часть теоремы можно сформулировать еще и иначе, а именно так: *если риманово пространство обладает свободной подвижностью около двух точек, то оно удовлетворяет аксиоме свободной подвижности*.

Если стать на последнюю точку зрения, то теорема доказывается легко. Действительно, если  $M$  — любая точка (достаточно близкая к  $A$  и  $B$ ),

<sup>1)</sup> F. Schur, Über den Zusammenhang der Räume constanten Krümmungsmasses mit den projektiven Räumen (Math. Ann., t. 27, 1886, стр. 537—567).

то пространство допускает поворот на произвольный угол как вокруг геодезической  $MA$ , так и вокруг геодезической  $MB$ . Но в евклидовом пространстве, касательном к данному в точке  $M$ , любой поворот около  $M$  может быть получен путем сложения в определенном порядке достаточного числа поворотов около двух данных прямых, исходящих из  $M$ <sup>1)</sup>. Эти операции, произведенные в самом римановом пространстве, приводят к изометрическим преобразованиям, доказывающим свободную подвижность пространства вокруг точки  $M$ .

**113.** Докажем теперь теорему Шура чисто проективным путем. Любая геодезическая, проходящая через  $A$ , может быть задана аналитически с помощью направляющих параметров  $x, y, z$  этой геодезической в точке  $A$ , параметров относительно местной декартовой системы координат в точке  $A$ , причем существенными являются только их отношения. Точно так же любая геодезическая, проходящая через  $B$ , может быть аналитически задана с помощью своих параметров  $x', y', z'$  в  $B$ . С каждой точкой пространства (достаточно близкой к  $A$  и  $B$ ) связываются, таким образом, *шесть чисел*:  $x, y, z, x', y', z'$ , причем существенными параметрами являются только взаимные отношения чисел первой тройки к одному из них и соответственно чисел второй тройки. Таким образом фактически получаются *четыре* координаты, между которыми необходимо должно быть некоторое соотношение.

Чтобы найти это соотношение, заметим прежде всего, что любая плоскость (вполне геодезическая поверхность), проходящая через  $A$ , задается линейным однородным уравнением относительно  $x, y, z$ ; точно так же любая плоскость, проходящая через  $B$ , задается линейным однородным уравнением относительно  $x', y', z'$ . Следовательно, любая плоскость, содержащая геодезическую  $AB$ , может быть задана двумя различными уравнениями; с одной стороны, уравнением вида:

$$a_1x + b_1y + c_1z + m(a_2x + b_2y + c_2z) = 0, \quad (5)$$

где  $m$  — параметр, меняющийся вместе с рассматриваемой плоскостью, с другой стороны — уравнением вида:

$$a'_1x' + b'_1y' + c'_1z' + m'(a'_2x' + b'_2y' + c'_2z') = 0, \quad (6)$$

где  $m'$  — параметр, тоже меняющийся одновременно с заданной плоскостью.

Уравнениями

$$a_1x + b_1y + c_1z = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2z = 0$$

определяются две плоскости (*основные плоскости*) того пучка, который образован плоскостями, содержащими  $AB$ ; то же можно сказать и про уравнения:

$$a'_1x' + b'_1y' + c'_1z' = 0, \quad a'_2x' + b'_2y' + c'_2z' = 0.$$

<sup>1)</sup> См. § 153 книги *М. Лагранжи*, «Векторное исчисление», ГТТИ, 1936 г. *Прим ред.*

Ничто не мешает предположить, что в  $A$  и  $B$  в качестве основных взяты одни и те же плоскости; можно также предположить, что некоторая третья плоскость соответствует одновременно значениям  $m=1$  и  $m'=1$ .

Условившись относительно этого, заметим еще следующее. Величина  $\frac{a'_1x' + b'_1y' + c'_1z'}{a'_2x' + b'_2y' + c'_2z'}$  принимает одно и то же значение во всех точках, соответствующих одинаковым значениям величины  $\frac{a_1x + b_1y + c_1z}{a_2x + b_2y + c_2z}$ . Следовательно, эти величины связаны функциональной зависимостью; эта зависимость и дает искомое соотношение между координатами произвольной точки. Далее, нетрудно заметить, что *ангармоническое отношение четырех плоскостей, проходящих через  $AB$ , одно и то же и в то же  $A$ , и в точке  $B$* . Действительно, рассмотрим поверхность  $(S)$ , пересекающую геодезическую  $AB$  в точке  $C$ . Любая точка этой поверхности может быть определена посредством однородных координат  $x, y, z$  геодезической, соединяющей эту точку с точкой  $A$ . Если пересечь поверхность  $(S)$  четырьмя плоскостями, проходящими через  $AB$ , то мы получим четыре кривых, выходящих из  $C$  и определенных посредством уравнений:

$$a_1x + b_1y + c_1z + m_i(a_2x + b_2y + c_2z) = 0.$$

Следовательно, *ангармоническое отношение этих четырех кривых в точке  $C$  равно ангармоническому отношению четырех значений параметра  $m$* . В самом деле, если в точке  $C$   $z \neq 0$ , то всегда можно предположить, что  $z=1$ ; полагая  $\frac{x}{z}=X$ ,  $\frac{y}{z}=Y$ , мы увидим, что *направления* четырех кривых в точке  $C$  определяются уравнениями:

$$a_1 dX + b_1 dY + m_i(a_2 dX + b_2 dY) = 0.$$

Точно такое же рассуждение показывает, что это ангармоническое отношение равно ангармоническому отношению четырех значений  $m'_i$  параметра  $m'$ , соответствующих этим четырем плоскостям. *Следовательно, между параметрами  $m$  и  $m'$ , относящимися к одной и той же плоскости, содержащей  $AB$ , существует гомографическое соответствие*. Так как значениям  $m=0, \infty, 1$  соответствуют те же самые значения  $m'=0, \infty, 1$ , то это гомографическое соотношение сводится к  $m'=m$ . Иными словами, шесть величин  $x, y, z; x', y', z'$  связаны равенством:

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1z}{a_2x + b_2y + c_2z} = \frac{a'_1x' + b'_1y' + c'_1z'}{a'_2x' + b'_2y' + c'_2z'}. \quad (7)$$

Фиксируем координаты  $x, y, z$ , и умножим  $x', y', z'$  на некоторый множитель (что всегда можно сделать), подобранный таким образом, чтобы выполнялось равенство:

$$a_1x + b_1y + c_1z = a'_1x' + b'_1y' + c'_1z'.$$



Тогда автоматически выполнится равенство:

$$a_2x + b_2y + c_2z = a'_2x' + b'_2y' + c'_2z'.$$

Возьмем теперь форму  $a_3x + b_3y + c_3z$ , линейно независимую от двух форм:

$$a_1x + b_1y + c_1z \quad \text{и} \quad a_2x + b_2y + c_2z.$$

Введем также форму  $a'_3x' + b'_3y' + c'_3z'$ , линейно независимую от форм:

$$a'_1x' + b'_1y' + c'_1z' \quad \text{и} \quad a'_2x' + b'_2y' + c'_2z'.$$

Положим, наконец:

$$\left. \begin{aligned} X &= a_1x + b_1y + c_1z = a'_1x' + b'_1y' + c'_1z', \\ Y &= a_2x + b_2y + c_2z = a'_2x' + b'_2y' + c'_2z', \\ Z &= a_3x + b_3y + c_3z, \\ T &= a'_3x' + b'_3y' + c'_3z'. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Любая точка пространства вполне определяется величинами  $X, Y, Z, T$  (или, вернее, отношениями этих величин к одной из них), потому что, зная  $X, Y, Z$ , мы сейчас же можем определить  $x, y, z$ , а зная  $X, Y, T$  — найти  $x', y', z'$ .

114. Полученная нами система координат обладает тем свойством, что *всякая плоскость, проходящая через точку  $A$ , определяется уравнением, линейным относительно  $X, Y, Z$ , а всякая плоскость, проходящая через  $B$ , — уравнением, линейным относительно  $X, Y, T$ .*

Возьмем произвольную геодезическую нашего пространства; эта геодезическая вместе с точкой  $A$  определяет вполне геодезическую поверхность, уравнение которой линейно относительно  $X, Y, Z$ . Вместе с точкой  $B$  эта же геодезическая определяет другую вполне геодезическую поверхность, уравнение которой линейно относительно  $X, Y, T$ . Итак, *любая геодезическая определяется двумя уравнениями первой степени относительно  $X, Y, Z, T$ .*

Обратное предложение справедливо, потому что любая система двух уравнений первой степени эквивалентна такой линейной системе, в которой первое уравнение содержит только переменные  $X, Y, Z$ , а второе —  $X, Y, T$ . Она определяет кривую пересечения двух вполне геодезических поверхностей, т. е. непременно геодезическую кривую.

Если  $X, Y, Z, T$  мы будем рассматривать как однородные координаты точки в обычном пространстве, то убедимся, что *часть риманова пространства, близкая к точкам  $A$  и  $B$ , допускает отображение на евклидово пространство, при котором геодезическим соответствуют прямые* (геодезическое отображение).

Аксиома плоскости является непосредственным следствием предыдущего результата. Поверхность, которая отображается на некоторую плоскость обычного пространства, непременно является вполне геодезической поверхностью, потому что из каждой ее точки исходит бесконечное мно-

жество геодезических, расположенных на этой поверхности и касающихся в этой точке одной и той же элементарной площадки.

Мы видим, в частности, что *аксиома плоскости влечет за собою возможность геодезического отображения риманова пространства на обычное*; обратное предложение очевидно, как мы это только что видели.

Таким образом, если для риманова пространства имеет место одно из трех условий:

- 1) оно удовлетворяет аксиоме свободной подвижности,
- 2) оно удовлетворяет плоскости,
- 3) оно допускает геодезическое отображение на обычное пространство, то необходимо имеют место и оба других.

115. Предыдущие теоремы распространяются и на случай любого числа измерений  $n > 3$ . Мы ограничимся тем, что дадим общее определение геодезических и вполне геодезических многообразий и докажем относящуюся к этим многообразиям теорему.

Многообразие  $p$  измерений  $V_p$ , проходящее через точку  $A$ , называется *геодезическим* в  $A$ , если оно содержит все геодезические, проходящие через  $A$  и касательные в этой точке к одной и той же элементарной  $p$ -мерной площадке  $E_p$ . Многообразие  $V_p$  называется *вполне геодезическим*, если оно является геодезическим в каждой из своих точек, или, иначе, если любая геодезическая, проходящая через две точки этого многообразия, лежит в нем целиком.

Предположим, что все поверхности (двумерные многообразия), геодезические в некоторой точке  $A$ , являются вполне геодезическими. Мы сейчас докажем, что и все многообразия  $V_p$  ( $p > 2$ ), геодезические в  $A$ , будут тоже вполне геодезическими. Действительно, пусть  $M$  и  $N$  — две произвольные точки одного из этих многообразий. Геодезические  $AM$  и  $AN$  определяют в точке  $A$  элементарную площадку  $E_2$ , содержащуюся в элементарной площадке  $E_p$ , определяющей многообразии  $V_p$ . Существует поверхность  $S$ , геодезическая в  $A$ , касательная к  $E_2$ . Эта поверхность содержит точки  $M$  и  $N$ ; будучи вполне геодезической, она содержит и всю геодезическую  $MN$ . Многообразие  $V_p$ , содержащее поверхность  $S$ , содержит и геодезическую  $MN$ . Следовательно, оно является вполне геодезическим.

Обратно, предположим, что все многообразия  $V_p$  ( $p > 2$ ), геодезические в  $A$ , являются вполне геодезическими. Рассмотрим поверхность  $S$ , геодезическую в  $A$  и касательную в точке  $A$  к элементарной площадке  $E_2$ . Эту элементарную площадку можно рассматривать как результат пересечения бесконечного множества  $p$ -мерных элементарных площадок  $E_p$ ; следовательно, поверхность  $S$  можно рассматривать как результат пересечения бесконечного множества многообразий  $V_p$ , геодезических в  $A$ . Пусть теперь  $M$  и  $N$  — две точки, лежащие на  $S$ ; они лежат в каждом из многообразий  $V_p$ ; следовательно, геодезическая  $MN$  лежит целиком в каждом из этих многообразий. Следовательно, она лежит целиком на их пересечении, т. е. на поверхности  $S$ , которая является, таким образом, вполне геодезической поверхностью.

116. В случае  $n = 2$  второе из трех свойств, отмеченных в п° 114, не имеет смысла. *Эквивалентность первого и третьего свойств*

*попрежнему существует*, но в этом случае доказательство значительно труднее, чем при  $n = 3$ . Впрочем, в пространствах Вейля, которые являются дальнейшим обобщением римановых пространств, эквивалентность первого, второго и третьего свойств в случае  $n = 3$  сохраняется, но при  $n = 2$  эквивалентность первого и второго свойств *не* имеет места.

Бельтрами первый доказал невозможность геодезического отображения произвольной поверхности на плоскость<sup>1)</sup>. Единственными поверхностями, для которых такое отображение возможно, являются поверхности постоянной полной кривизны, налагающиеся на сферу (действительного или чисто мнимого радиуса). Только такие поверхности удовлетворяют аксиоме свободной подвижности.

---

<sup>1)</sup> *Beltrami*, Risoluzione del problema: riportare i punti di una superficie sopra un piano in modo che le linee geodetiche veggano rappresentate su linee rette (Ann. di matem., 1-я серия, 7, 1865, стр. 185—204; Opere matem. I, Milan, 1902, стр. 262—280).

## ГЛАВА VI

### НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ. СФЕРИЧЕСКОЕ, ЭЛЛИПТИЧЕСКОЕ И ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ ПРОСТРАНСТВА <sup>1)</sup>

117. В этой главе мы изучим в общих чертах класс римановых пространств, допускающих геодезическое отображение на обычное пространство; эти пространства называются пространствами *постоянной кривизны*. Иначе их называют еще *неевклидовыми* пространствами; геометрию этих пространств называют *неевклидовой* геометрией. Мы начнем с простейшего случая  $n=2$ .

#### I. Сферическая геометрия двух измерений

118. Рассмотрим (в обычном пространстве) сферу радиуса  $R$ . Любая точка сферы аналитически определяется своими координатами  $x, y, z$ , отнесенными к прямоугольным осям, имеющим начало в центре сферы; эти величины связаны соотношением:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2; \quad (1)$$

при этом

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (2)$$

Роль прямых (геодезических) играют здесь большие круги сферы. Очевидно, сфера допускает геодезическое отображение на плоскость: достаточно спроектировать ее из центра на любую плоскость. Также очевидно, что аксиома свободной подвижности здесь выполняется, потому что с помощью вращения всегда можно любую точку сферы перевести в любую другую точку таким образом, чтобы наперед заданное направление в первой точке совместились с любым направлением во второй. Все аксиомы равенства, которые принято помещать в начале обычной евклидовой планиметрии, сохраняют силу и в сферической геометрии.

Основная разница между обычной планиметрией и сферической геометрией заключается в следующем: через две точки сферы может пройти более чем одна прямая (большой круг), и тогда их проходит бесчислен-

---

<sup>1)</sup> Литература по вопросам, связанным с неевклидовыми геометриями, весьма значительна. Интересующихся отсылаем к прекрасному мемуару Клейна (*F. Klein*), озаглавленному: *Über die sogenannte nicht-euklidische Geometrie* (Math. Ann. т. 4, 1871, стр. 573—625). См. также *P. Barbarin, La Géométrie non-euclidienne*, с комментариями Буля (*A. Buhl*), из серии Scientia, Gauthier-Villars, Paris, 1928. [См. также изложение этих идей в книге *Ф. Клейна*, «Элементарная математика с точки зрения высшей», т. II, Геометрия, ГТТИ, 1934, стр. 217—335. (*Прим. ред.*)].

ное множество. Это обстоятельство имеет место в том случае, когда рассматриваемые точки диаметрально противоположны друг другу.

Существуют и иные существенные различия. Например, двумерное сферическое пространство конечно (площадь его  $4\pi R^2$ ); прямые (большие круги) — замкнутые линии конечной длины  $2\pi R$ .

И все же эти различия являются поверхностными, а не существенными различиями, потому что мы видели (гл. III), что некоторые *локально-евклидовы* пространства отличаются от обычного евклидова пространства еще более резкими качественными признаками.

Локальную разницу между сферой и евклидовой плоскостью мы обнаружим, рассмотрим сумму углов треугольника. На сфере эта сумма всегда больше  $\pi$ , причем разница (сферический избыток) равна частному от деления площади треугольника на квадрат радиуса сферы.

Заметим еще, что каждая окружность имеет здесь каждая два центра и, следовательно, два радиуса:  $r$  и  $\pi R - r$ ; что радиус кривизны окружности равняется  $R \operatorname{tg} \frac{r}{R}$ ; наконец, что окружность радиуса  $\frac{\pi R}{2}$  имеет нулевую кривизну, т. е., иными словами, является прямою; при этом все радиусы перпендикулярны к прямой.

## II. Эллиптическая геометрия двух измерений

**119.** Осуществим посредством проекции из центра  $O$  некоторой сферы ее геодезическое отображение на плоскость ( $P$ ). Любой точке сферы соответствует одна единственная точка плоскости (на конечном расстоянии или же бесконечности). Но любой точке плоскости соответствуют две точки сферы — именно диаметрально противоположные точки ее. Определим элементарное расстояние (*неевклидово*) между двумя бесконечно близкими точками  $M$  и  $N$  плоскости как расстояние между соответствующими точками сферы  $M'$  и  $N'$  (отсчитанное на сфере). Это расстояние не изменится, если вместо  $M'$  и  $N'$  мы возьмем диаметрально противоположные точки, которые тоже соответствуют точкам  $M$  и  $N$  плоскости ( $P$ ). Двумерное риманово пространство, полученное таким образом, называется *эллиптической плоскостью*, а геометрия этого пространства — *эллиптической* геометрией.

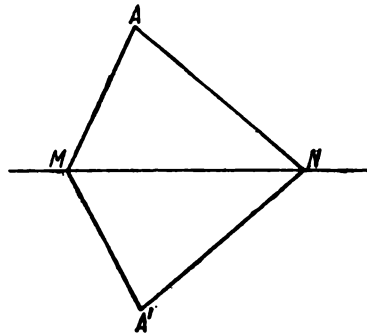
Нужно заметить, что эллиптическое пространство является замкнутым многообразием. Те точки, которые лежат в бесконечности, если пользоваться обычной евклидовой метрикой, будут с точки зрения эллиптической метрики обыкновенными точками, лежащими на конечном расстоянии (они образуют *прямую*, соответствующую большому кругу сферы, параллельному плоскости  $P$ ). С точки зрения *топологии* эллиптическая плоскость тождественна (гомеоморфна) проективной плоскости.

Топологическое различие между сферой и эллиптической плоскостью становится вполне очевидным, если заметить, что каждую точку сферы можно привести в соответствие с одной и только одной *полупрямой*, исходящей из  $O$ , тогда как любой точке эллиптической плоскости соответствует единственная проходящая через  $O$  *прямая*. Рассмотрим теперь плоскость (II), проходящую через  $O$ . Многообразие полупрямых, исходящих из  $O$ , разделяется этой плоскостью на две различные области; из

одной такой области нельзя непрерывным движением перейти в другую, не пересекая плоскость (II). Напротив, эта же плоскость *не разделяет* на две различные части многообразие всех прямых, проходящих через  $O$ . От одной прямой, проходящей через  $O$ , можно непрерывным движением перейти к любой другой, не пересекая при этом плоскости (II). Иными словами, прямая (большой круг) на сфере делит сферу на две различные области, тогда как прямая эллиптической плоскости на такие две области последнюю не делит. В этом легко отдать себе отчет, если рассмотреть обыкновенную бесконечно удаленную прямую; действительно, от любой точки плоскости к любой другой можно перейти, не пересекая эту прямую.

120. Хотя эллиптическая плоскость и сфера *локально* тождественны друг другу, тем не менее между обоими многообразиями в целом существует, как мы видели, достаточно резкая разница. Проследим за нею дальше.

Через две любые точки эллиптической плоскости всегда проходит одна и только одна прямая; обратно, две любые прямые всегда пересекаются, и притом в единственной точке. *Первые аксиомы евклидовой планиметрии выполняются, таким образом, и в случае эллиптической плоскости.* Можно поставить себе вопрос, начиная с какого момента эллиптическая и евклидова геометрии расходятся, если теоремы последней расположить в том порядке, в каком это



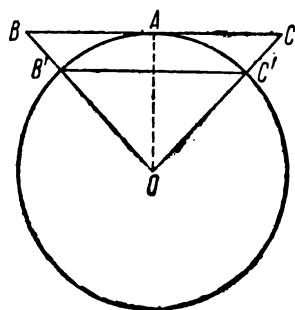
Фиг. 10,

принято обычно в школьных курсах. Критический момент наступит тогда, когда придется ввести евклидов постулат. Непосредственно перед тем, как вводить этот постулат, доказывается теорема, что через каждую точку, лежащую вне прямой, проходит по крайней мере одна прямая, параллельная первой. В эллиптической геометрии эта теорема не имеет места, потому что в этой геометрии любые две прямые пересекаются. Доказательство этой теоремы основывается на том, что из точки вне прямой можно опустить на последнюю только один перпендикуляр.

Напомним доказательство этой теоремы. Пусть  $D$  — данная прямая,  $A$  — точка вне ее (фиг. 10). Соединим  $A$  с произвольной точкой  $M$  прямой  $D$  и построим при точке  $M$  по другую сторону прямой  $D$  угол  $NMA'$ , равный углу  $NMA$ ; наконец, отложим  $MA' = MA$ . Пусть  $N$  — некоторая точка прямой  $D$ , отличная от  $M$ ; мы видим, что треугольники  $AMN$  и  $A'MN$  равны, потому что имеют по равному углу, заключенному между соответственно равными сторонами; следовательно, углы  $MNA$  и  $MNA'$  тоже равны. Если теперь прямая  $AN$  перпендикулярна к прямой  $D$ , то углы  $MNA$  и  $MNA'$  будут смежными углами, и точки  $A, N, A'$  будут лежать на одной прямой; обратное предположение тоже справедливо. Следовательно, существует только один перпендикуляр, опущенный из  $A$  на прямую  $D$ : это — прямая  $AA'$ .

Предыдущее заключение имеет силу постольку, поскольку точки  $A$  и  $A'$  различны. Но это последнее обстоятельство может и не иметь ме-

ста в эллиптической плоскости, которую прямая линия не делит на две различные области. Если  $A'$  совмещается с  $A$ , то все прямые, проходящие через  $A$ , будут перпендикулярны прямой  $D$ . Это в действительности имеет место тогда, когда на эллиптической плоскости берутся прямая и точка, которым на сфере соответствуют большой круг и его полюс. В эллиптической плоскости любую прямую можно считать окружностью радиуса  $\frac{\pi R}{2}$ , центр которой является полюсом прямой. Легко видеть, используя в качестве вспомогательного средства сферу, что окружность радиуса  $r < \frac{\pi R}{2}$  имеют длину  $2\pi R \sin \frac{r}{R}$ ; когда  $r$  стремится



Фиг. 11.

к  $\frac{\pi R}{2}$ , эта длина стремится к  $2\pi R$ , но длина предельной прямой равняется только половине этой величины, именно  $\pi R$ . Точно так же площадь круга радиуса  $r$  равна  $4\pi R^2 \sin^2 \frac{r}{2R}$ ; она стремится к  $2\pi R^2$ , площади всей эллиптической плоскости, когда  $r$  стремится к  $\frac{\pi R}{2}$ .

121. Если в качестве плоскости ( $P$ ) взять плоскость, касательную к сфере в точке  $A$ , то, проектируя точки сферы из ее центра  $O$  (расположенного на нормали к сфере в точке  $A$ ), мы осуществим [на плоскости ( $P$ ), на которой задана обычная евклидова метрика] соприкасающуюся евклидову метрику к метрике сферы (п° 99) и, следовательно, к метрике эллиптической плоскости. Таким образом, на плоскости возникает отображение эллиптической плоскости, одновременно сохраняющее прямые и реализующее соприкасающуюся евклидову метрику в точке  $A$  (т. е. сохраняющее кривизну кривых, проходящих через  $A$ ). Более того, окружность с центром в  $A$  отображается окружностью же с центром тоже в  $A$ ; радиус геодезической кривизны малого круга  $B'C'$  сферы (фиг. 11) равен радиусу  $AB = AC$  окружности  $BC$ ; следовательно, рассматриваемое отображение сохраняет кривизну окружностей с центром в точке  $A$ . При этом ясно видно, как радиус кривизны этих окружностей возрастает от 0 до  $+\infty$ , когда их неевклидов радиус возрастает от 0 до  $\frac{\pi R}{2}$ .

122. Попробуем теперь определить непосредственно, с помощью чисто проективных понятий, расстояние (неевклидово) между двумя точками эллиптического пространства, кривизна которого равна  $\frac{1}{R^2}$ <sup>1)</sup>. Для этого определим аналитически точку плоскости прямоугольными координатами  $x, y, z$  соответствующей точки сферы (нормальные координаты). На плоскости они являются в сущности проективными координатами, связанными соотношением:

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

<sup>1)</sup> Этим способом выражения мы напоминаем о той сфере, отображением которой является эллиптическая плоскость.

Установив это, рассмотрим две точки плоскости  $M$  и  $M'$ , имеющие соответственно координаты  $x, y, z$  и  $x', y', z'$ . Обозначая через  $d$  неевклидово расстояние между этими точками, получим, очевидно:

$$R^2 \cos \frac{d}{R} = xx' + yy' + zz'.$$

Нужно найти геометрический смысл выражения, стоящего в правой части этого равенства.

Изотропный конус, вершиной которого служит центр сферы, пересекается с плоскостью  $(P)$  по коническому сечению  $\Gamma$  (называемому *абсолют*), уравнение которого имеет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0.$$

Пусть  $N_1$  и  $N_2$  — две точки (комплексные сопряженные), в которых прямая  $MM'$  пересекается с абсолют. Координаты текущей точки на прямой  $MM'$  могут быть записаны так:

$$x + \lambda x', \quad y + \lambda y', \quad z + \lambda z',$$

причем  $\lambda$  здесь — переменный параметр. Точке  $M$  соответствует значение параметра 0, точке  $M'$  — бесконечность; пусть  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  будут значения, соответствующие точкам  $N_1$  и  $N_2$ . Их можно определить из квадратного уравнения:

$$\lambda^2 (x'^2 + y'^2 + z'^2) + 2\lambda (xx' + yy' + zz') + x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

которое можно записать и так:

$$\lambda^2 + 2\lambda \cos \frac{d}{R} + 1 = 0.$$

Ангармоническое отношение  $(MM'N_1N_2)$  равняется, как известно, ангармоническому отношению четырех чисел: 0,  $\infty$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ , т. е. попросту отношению  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ ; простой подсчет дает:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = e^{2i \frac{d}{R}}.$$

Следовательно, расстояние  $d$  может быть определено формулой Кэли (Cauley):

$$d = \frac{R}{2i} \ln (MM'N_1N_2), \quad (3)$$

содержащей натуральный логарифм ангармонического отношения четырех точек  $M$ ,  $M'$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ . Определенная таким образом длина называется



*кэлиевым расстоянием между двумя точками, вычисленными относительно абсолюта  $\Gamma$ .*

Из этой формулы можно сейчас же получить важное следствие. Если через некоторую точку  $O$  (которую мы можем считать центром сферы) провести две произвольные прямые, то угол между этими прямыми будет равен произведению  $\frac{1}{2i}$  на логарифм ангармонического отношения двух данных и двух изотропных прямых, проходящих через  $O$  и лежащих в плоскости первых. Эта теорема была установлена Лагерром (Laguerre); в обычной геометрии она дает нам *проективное* определение угла.

Вернемся к эллиптической плоскости. Мы видим, что две гармонически сопряженные по отношению к абсолюту точки отстоят друг от друга на расстояние  $\frac{\pi R}{2}$ . Ангармоническое отношение  $(MM'N_1N_2)$  равно при этом  $-1$ , значит, натуральный логарифм его равен  $i\pi$ . Полюс некоторой прямой является, таким образом, ее полюсом (в обычном смысле) по отношению к абсолюту.

Проективным же путем в эллиптической плоскости можно определить угол между двумя прямыми, выходящими из точки  $A$ . Этот угол, зависящий только от числовых значений коэффициентов линейного элемента эллиптической плоскости в точке  $A$ , может быть определен как произведение  $\frac{1}{2i}$  на логарифм ангармонического отношения двух данных прямых и двух изотропных прямых (нулевой длины), выходящих из  $A$ . Но прямая  $AA'$  является изотропной в том случае, если две ее точки пересечения  $B_1$  и  $B_2$  с абсолютом  $\Gamma$  совпадают (потому что при этом ангармоническое отношение  $(AA'B_1B)$  будет равно единице и кэлиево расстояние между точками  $A$  и  $A'$  будет нулем). Следовательно, *угол между двумя прямыми, выходящими из  $A$ , равняется произведению  $\frac{1}{2i}$  на логарифм ангармонического отношения, образованного этими двумя прямыми с двумя касательными к абсолюту, проходящими через точку  $A$ .*

Если кривизна  $\frac{1}{R^2}$  эллиптической плоскости равна единице, то существует полная двойственность между понятием расстояния и понятием угла; расстоянию между двумя точками соответствует в силу принципа двойственности угол между двумя прямыми.

123. Поставим себе задачей разыскать уравнение окружности. Пусть  $(a, b, c)$  — нормальные координаты точки  $A$ , а  $x, y, z$  — нормальные координаты точки  $M$ , находящейся на расстоянии  $r$  от точки  $A$ , имеем:

$$ax + by + cz = R^2 \cos \frac{r}{R};$$

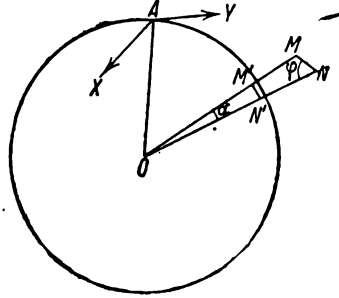
это и есть искомое уравнение. Его можно сделать однородным, возводя в квадрат и учитывая, что координаты, которыми мы пользуемся, являются нормальными координатами; таким образом мы получаем:

$$R^2(ax + by + cz)^2 = \cos^2 \frac{r}{R} (x^2 + y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2).$$

Мы видим, что *любая окружность представлена в эллиптической плоскости коническим сечением, имеющим общую с абсолютом двойную касательную*; соприкасающаяся прямая имеет уравнение  $ax + by + cz = 0$ ; следовательно, она является *полярной центра окружности* как по отношению к абсолюту, так и по отношению к самой этой окружности.

**124.** Найдем теперь аналитическое выражение линейного элемента эллиптической плоскости. Спроектируем точки сферы из ее центра на плоскость  $(P)$ , касательную к сфере в точке  $A$ , и определим аналитически точку  $M$  плоскости  $(P)$  посредством прямоугольных координат  $X, Y$ , причем начало координат пусть будет в точке  $A$ . Таким образом

$$ds = \sqrt{dX^2 + dY^2}$$



Фиг. 12.

будет обычным расстоянием двух бесконечно

близких точек  $M$  и  $N$  плоскости  $(P)$  (фиг. 12). Пусть, далее,  $\alpha = \frac{ds}{R}$  обозначает центральный угол  $MON$ . Наконец, через  $\varphi$  обозначим угол  $ONM$ . Имеем:

$$\frac{MN}{\alpha} = \frac{OM}{\sin \varphi},$$

откуда

$$ON \cdot MN \sin \varphi = \alpha \cdot OM \cdot ON = \frac{ds}{R} (X^2 + Y^2 + R^2).$$

Произведение  $ON \cdot MN \sin \varphi$  равно удвоенной площади треугольника  $OMN$ ; иными словами, оно является мерой бивектора, определенного векторами  $OM$  и  $MN$ , причем компоненты этих векторов равны соответственно:

$$\begin{matrix} X, & -Y, & R, \\ dX, & dY, & 0; \end{matrix}$$

следовательно,

$$OM \cdot MN \sin \varphi = \sqrt{(XdY - YdX)^2 + R^2(dX^2 + dY^2)}.$$

Окончательно получаем:

$$ds^2 = R^2 \frac{R^2(dX^2 + dY^2) + (XdY - YdX)^2}{(X^2 + Y^2 + R^2)^2}.$$

Положим  $\frac{1}{R^2} = K$ ; тогда предыдущая формула переписывается так:

$$ds^2 = \frac{dX^2 + dY^2 + K(XdY - YdX)^2}{[1 + K(X^2 + Y^2)]^2}. \quad (4)$$

Эта формула делает очевидным уже отмеченное нами обстоятельство, что евклидова метрика плоскости  $(P)$  ( $ds^2 = dX^2 + dY^2$ ) является соприкасающейся в точке  $A$  по отношению к метрике эллиптической пло-

скости. Найденный нами линейный элемент определяется, таким образом, двумя свойствами: прямым соответствуют линейные относительно  $X, Y$  уравнения, и евклидова плоскость с прямоугольными координатами  $(X, Y)$  соприкасается с эллиптической в начале координат.

Полезно заметить, что найденный линейный элемент имеет смысл во всех точках эллиптической плоскости, *за исключением точек, расположенных на поляре точки  $X=Y=0$*  (соответствующей бесконечно большим значениям  $X$  и  $Y$ ).

### III. Гиперболическая геометрия двух измерений

125. Формулы, выражающие геометрические свойства фигур эллиптической плоскости, кривизна которой равна  $\frac{1}{R^2}$ , содержат некоторый положительный параметр  $K = \frac{1}{R^2}$ . Если этому параметру дать отрицательное значение  $K = -\frac{1}{R^2}$ , то мы получим *гиперболическую* геометрию. Ее можно определить и непосредственно, отправляясь от *действительного* конического сечения в проективной плоскости и называя *расстоянием* (кэлиевым или неевклидовым) между двумя точками плоскости  $M$  и  $M'$  произведение  $\frac{2}{R}$  на логарифм ангармонического отношения двух данных точек и двух точек пересечения прямой, соединяющей наши точки с абсолютом. Если мы хотим, чтобы это расстояние было действительным для всех прямолинейных отрезков, исходящих из  $M$ , необходимо (и достаточно), чтобы эта точка была расположена *внутри* абсолюта. Таким образом, *гиперболическая плоскость представляет собою многообразие, образованное всеми точками, расположенными внутри абсолюта* Г. Если точка  $M$  фиксирована, а точка  $M'$  стремится к некоторой произвольной точке абсолюта, то непосредственно видно, что расстояние (кэлиевое) между этими точками неограниченно возрастает. Абсолют является, таким образом, геометрическим местом бесконечно удаленных точек.

Как и в случае эллиптической плоскости, угол между двумя прямыми, пересекающимися в точке  $A$ , определяется как произведение  $\frac{1}{2i}$  на логарифм ангармонического отношения двух данных прямых и двух касательных к абсолюту, проходящих через точку  $A$ . В частности, две прямые перпендикулярны (в смысле Кэли), если они сопряжены по отношению к абсолюту, т. е. если одна из них проходит через полюс второй (полюс, который, собственно говоря, не является точкой, действительно принадлежащей гиперболической плоскости).

Геодезическими линиями гиперболической плоскости будут, очевидно, прямые, потому что вычисление, с помощью которого мы найдем эти геодезические, ничем не отличается от соответствующего вычисления в случае эллиптической плоскости (единственное отличие состоит в том, что параметр  $K$  здесь отрицателен).

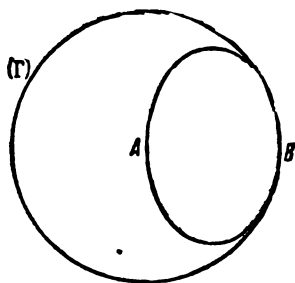
Постулат Евклида в гиперболической плоскости не выполняется; через точку  $A$ , расположенную вне прямой  $D$ , можно провести бесчисленное



прямая, соединяющая точки касания, будет лежать вне абсолюта, а полюсом этой прямой будет центр соответствующей окружности.

Промежуточным будет случай пучка прямых, вершиной которого служит точка  $H$  абсолюта. Ортогональными траекториями будут здесь конические сечения, имеющие в точке  $H$  соприкосновение третьего порядка с абсолютом; их называют *орициклами*. Следовательно, *орициклами являются ортогональные траектории семейства параллелей Лобачевского*.

Если представить себе точку  $A$  и проходящую через нее прямую  $D$ , то среди конических сечений, дважды касающихся абсолюта и касающихся, кроме того, прямой  $D$  в точке  $A$ , будут три различные катедры кривых: окружности, два орицикла и эквидистанты.



Чтобы исследовать кривизну этих кривых, осуществим отображение гиперболической геометрии на плоскость таким образом, чтобы уравнение абсолюта в *обычных прямоугольных координатах* приняло вид:

$$X^2 + Y^2 - R^2 = 0;$$

в начале координат  $A$  евклидова метрика плоскости является соприкасающейся по отношению к кэлиевой (гиперболической) метрике. Абсолютом служит круг радиуса  $R$  (фиг. 15). Если представить себе орицикл, проходящий через  $A$  и касающийся  $\Gamma$  в точке  $B$ , то можно заметить, что радиусы кривизны (в обычном смысле) этого конического сечения в точках  $B$  и  $A$  одинаковы; следовательно, радиус кривизны его в  $A$  равен  $R$ . Следовательно, *радиус кривизны любого орицикла равен*  $R = \frac{1}{\sqrt{-K}}$ . При этом мы видим, что *радиус кривизны любой окружности меньше, чем  $R$ , а любой эквидистанты — больше*.

Впрочем, мы знаем в силу аналогии с эллиптической геометрией, что обыкновенная кривизна окружности с центром в  $A$  равна ее неевклидовой кривизне; следовательно, она всегда больше, чем  $\frac{1}{R}$ .

Тот же результат получим, исходя из формулы

$$\rho = R \operatorname{tg} \frac{r}{R},$$

дающей радиус (геодезической кривизны  $\rho$  окружности, лежащей на сфере и имеющей радиус  $r$  (считая по поверхности сферы). При переходе от эллиптической к гиперболической геометрии, формула принимает вид:

$$\rho = R \operatorname{th} \frac{r}{R};$$

она показывает, что  $\rho$  возрастает от 0 до  $R$ , когда  $r$  возрастает от 0 до  $+\infty$ . Таким же образом найдем кривизну эквидистант, заметив,

что на сфере радиус кривизны геометрического места точек, расположенных на расстоянии  $a$  от большого круга, равен  $\frac{R}{2} - a$ ; следовательно, радиус геодезической кривизны будет равен:

$$\rho = R \operatorname{ctg} \frac{a}{R}.$$

В гиперболической геометрии радиус кривизны геометрического места точек, расположенных на расстоянии  $a$  от заданной прямой, будет выражен таким образом:

$$\rho = R \operatorname{cth} \frac{a}{R};$$

он всегда больше, чем  $R$ .

127. Формула, выражающая площадь сферического треугольника:

$$A + B + C - \pi = \frac{S}{R^2} = KS,$$

сохраняет силу и в гиперболической геометрии; здесь сумма углов треугольника всегда меньше двух прямых, и разность  $\pi - (A + B + C)$  равна  $\frac{S}{R^2}$ .

Таким образом площадь треугольника не может превзойти  $\pi R^2$ .

Предел этот достигается в случае треугольника, все три вершины которого лежат на абсолюте; стороны такого треугольника попарно параллельны друг другу (в смысле Лобачевского).

128. Вычисление линейного элемента гиперболической плоскости приводит к результату, сходному с тем, который был получен в случае плоскости эллиптической. Если на плоскости взять проективные (однородные) координаты так, чтобы уравнение абсолюта приняло вид:

$$F(x, y, z) = 0,$$

и если предположить (а это всегда возможно), что точки, лежащие внутри абсолюта, делают  $F$  отрицательным, то мы получим:

$$ds^2 = F(dx, dy, dz),$$

причем  $x, y, z$  удовлетворяют условию:

$$F(x, y, z) = -R^2 = \frac{1}{K}.$$

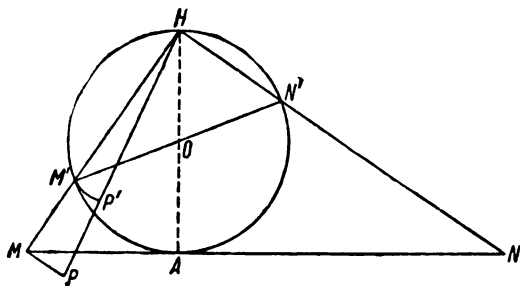
Обратим еще внимание на следующее выражение, о котором была уже речь (n° 124):

$$ds^2 = \frac{dX^2 + dY^2 + K(XdY - YdX)^2}{[1 + K(X^2 + Y^2)]^2}. \quad (4)$$

#### IV. Конформное представление сферической и гиперболической геометрий

129. В предыдущем изложении мы пользовались *геодезически* отображением сферической, эллиптической и гиперболической геометрий, отображением, при котором прямые переходят в прямые же. Другим столь же важным отображением является конформное, сохраняющее углы.

В отношении сферической геометрии мы осуществляем такое отображение посредством стереографической проекции сферы на плоскость; при



Фиг. 16.

этом приходится иметь дело не с проективной плоскостью, а с плоскостью теории функций, обладающей одной единственной бесконечно удаленной точкой (той, которой на сфере соответствует полюс  $H$  стереографической проекции). Всего выгоднее взять в качестве плоскости проекции касательную плоскость к сфере с точкой касания  $A$ , диаметрально противополож-

ной полюсу  $H$ : действительно, таким образом мы получим евклидову плоскость, соприкасающуюся с двумерным римановым пространством, которым является поверхность сферы.

При этом отображении окружности переходят в окружности, прямые (большие круги) — тоже в окружности, но только обладающие следующим характеристическим свойством: *степень точки  $A$  относительно этих окружностей постоянна и равна  $-4R^2$* . Действительно, из фиг. 16 получаем:

$$AM = 2R \operatorname{tg} \widehat{MHA},$$

$$AN = 2R \operatorname{tg} \widehat{NHA},$$

откуда

$$\overline{AM} \cdot \overline{AN} = -4R^2.$$

Можно сказать еще, что прямые отображаются окружностями, ортогональными окружности (мнимой) с центром в  $A$  радиуса  $2iR$ ; эта окружность называется *абсолютом*; ее уравнение в прямоугольных координатах имеет вид:

$$X^2 + Y^2 + 4R^2 = 0.$$

Она является пересечением плоскости  $(P)$  и изотропного конуса с вершиной  $H$ .

Линейный элемент сферы в прямоугольных координатах  $X, Y$  ее стереографической проекции определить легко. Действительно, если  $M$  и  $P$  —

две бесконечно близкие точки плоскости, соответствующие точкам  $M'$  и  $P'$  сферы (фиг. 16), то

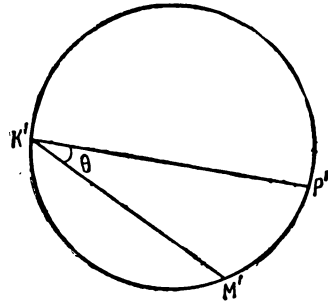
$$\left. \begin{aligned} \frac{MP}{M'P'} &= \frac{HM \cdot HP}{4R^2}, \\ \frac{\sqrt{dX^2 + dY^2}}{ds} &= \frac{X^2 + Y^2 + 4R^2}{4R^2} = 1 + \frac{K}{4}(X^2 + Y^2), \\ ds^2 &= \frac{dX^2 + dY^2}{\left[1 + \frac{K}{4}(X^2 + Y^2)\right]^2}; \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ясно, что евклидово многообразие с элементом  $ds^2 = dX^2 + dY^2$  является соприкасающимся в точке  $A$  по отношению к сферическому.

130. Чтобы в *конформной* плоскости определить расстояние между двумя точками  $M$  и  $P$  с помощью абсолюта, рассмотрим окружность, проходящую через эти точки и ортогональную к абсолюту. Пусть  $Q_1$  и  $Q_2$  — точки (комплексные сопряженные), в которых эта окружность пересекается с абсолютом. Четыре точки  $M, P, Q_1, Q_2$ , лежащие на одной и той же окружности, имеют на этой окружности некоторое определенное ангармоническое отношение. Чтобы его вычислить, заметим, что эти четыре точки являются проекциями четырех точек  $M', P', Q_1$  и  $Q_2'$  большого круга сферы. Но абсолют является следом (на плоскости проекции) изотропного конуса с вершиною в  $H$ ; таким образом точки  $Q_1'$  и  $Q_2'$  являются двумя бесконечно удаленными циклическими точками  $J$  и  $J'$  большого круга  $M'P'$  сферы. Если взять теперь произвольную точку  $K'$  на этом большом круге (фиг. 17), то ангармоническое отношение четырех прямых  $K'M', K'P', K'J, K'J'$  будет равно  $e^{2i\theta}$ , где  $\theta$  обозначает угол  $M'K'P'$  или же  $e^{\frac{id}{R}}$ , где через  $d$  обозначено расстояние между точками  $M'$  и  $P'$ , отсчитанное на сфере. Таким образом, для расстояния (сферического) между двумя точками  $M$  и  $P$  плоскости мы получаем формулу:

$$d = \frac{R}{i} \ln(MPQ_1Q_2). \quad (6)$$

131. Чтобы получить конформное отображение гиперболической плоскости, возьмем в плоскости (II) абсолют (Г). Существует бесконечное число точек  $H$  таких, что конус с вершиною в  $H$  и направляющей (Г) будет конусом вращения (в обычном смысле слова). Выберем одну из этих точек и впишем в конус сферу (Σ) (фиг. 18); конус касается сферы вдоль окружности (Г'), которая делит сферу на две части. Пусть теперь любой точке  $M$  (внутренней по отношению к абсолюту) плоскости (II) соответствует точка  $M'$  пересечения прямой  $HM$  с одной из этих частей, раз навсегда выбранной; мы получаем таким образом отображение гиперболической плоскости на рассматриваемую часть сферы; окруж-



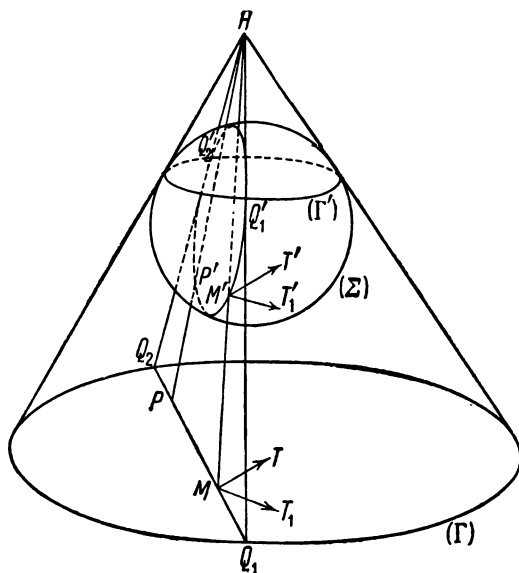
Фиг. 17.



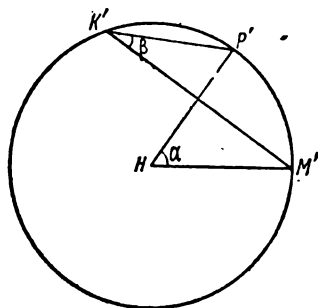
ность  $(\Gamma')$ , проекцией которой служит  $(\Gamma)$ , тоже будет называться *абсолютом*.

Докажем, что при этом отображении сохраняются углы, т. е. что угол (обычный) между двумя кривыми на сфере, исходящими из  $M'$ , равен углу (неевклидову) между соответствующими кривыми на плоскости  $(\Pi)$ . Обозначим касательные к рассматриваемым кривым через  $MT$ ,  $MT_1$  в плоскости  $(\Pi)$  и через  $M'T'$ ,  $M'T'_1$  — в плоскости, касательной в  $M'$  к сфере. Неевклидов угол  $TMT_1$  зависит от ангармонического отношения прямых  $MT$ ,  $MT_1$  и двух касательных, проведенных из  $M$  к  $(\Gamma)$ ; это ангармоническое отношение равно ангармоническому отношению прямых  $M'T'$ ,  $M'T'_1$  и двух касательных, проведенных из  $M'$  к кривой, по ко-

торой наш конус пересекается с плоскостью касательной в  $M'$  к сфере. В силу теоремы Дандлена (Dandelin) точка  $M'$  будет одним из фокусов полученного конического сечения; следовательно, две касательные, выходящие из  $M'$ , являются обыкновенными изо-



Фиг. 18.



Фиг. 19.

тропными прямыми, выходящими из  $M'$  и лежащими в касательной плоскости. Следовательно, обыкновенный угол  $T'MT'_1$  будет равен углу (неевклидову)  $TMT_1$ , что и требовалось доказать.

132. В рассматриваемом конформном отображении всякой прямой гиперболической плоскости соответствует сечение сферы плоскостью, проходящей через  $H$ ; это сечение представляет собою окружность, *ортогональную к абсолюту*  $(\Gamma')$  в точках  $Q'_1$  и  $Q'_2$ , которые являются проекциями точек  $Q_1$  и  $Q_2$  пересечения прямой с абсолютом. Если на этой окружности взять точки  $M'$  и  $P'$ , соответствующие точкам  $M$  и  $P$  рассматриваемой прямой гиперболической плоскости, то можно поставить задачу: вычислить расстояние (неевклидово) между этими точками с помощью ангармонического отношения  $(M'P'Q'_1Q'_2)$  двух данных точек  $M'$ ,  $P'$  и точек  $Q'_1$ ,  $Q'_2$  (фиг. 18). Имеем:

$$d = \frac{R}{2} \ln (MPQ_1Q_2) = \frac{R}{2} \ln (H \cdot M'P'Q'_1Q'_2);$$

остается сравнить между собою ангармонические отношения  $(M'P'Q_1'Q_2')$  и  $(H \cdot M'P'Q_1'Q_2')$ .

Чтобы это сделать, осуществим гомографическое преобразование, относящее точкам  $Q_1'$  и  $Q_2'$  две циклические точки в бесконечности; точка  $H$  становится тогда центром круга (фиг. 19), и мы получаем:

$$(H \cdot M'P'Q_1'Q_2') = e^{2i\alpha},$$

причем через  $\alpha$  обозначаем угол  $M'HP'$ . С другой стороны, обозначая через  $K'$  произвольную точку окружности, получим:

$$(M'P'Q_1'Q_2') = (K' \cdot M'P'Q_1'Q_2') = e^{2i\beta},$$

где  $\beta$  обозначает угол  $M'K'P'$ . Отсюда получается:

$$(H \cdot M'P'Q_1'Q_2') = (M'P'Q_1'Q_2')^2,$$

и, следовательно,

$$d = \frac{R}{2} \ln (H \cdot M'P'Q_1'Q_2') = R \ln (M'P'Q_1'Q_2'); \quad (6')$$

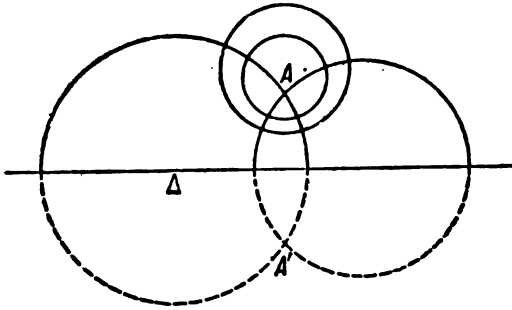
по существу эта формула совпадает с формулой (6) сферической геометрии.

**133.** Теперь нетрудно видеть, что окружностям (неевклидовым), орициклам и эквидистантам плоскости (II) соответствуют на сфере окружности (или дуги окружностей). Действительно, конус с вершиною  $H$ , направляющей которого служит одна из этих кривых, дважды касается конуса вращения с вершиною в  $H$ , описанного около сферы; значит, он дважды касается сферы; следовательно, *кривая его пересечения со сферой распадается на две плоские кривые*, т. е. на две окружности. Если исходить от окружности плоскости (II), то мы получим на сфере две окружности, но только одна из них лежит целиком на интересующей нас части сферы. Напротив, если исходить от эквидистанты, то мы получим две окружности, пересекающиеся на  $(\Gamma')$  и от которых нужно оставить только те дуги, которые лежат на используемой нами части сферы; эти дуги соответствуют двум ветвям эквидистанты, разделенным точками касания ее с абсолютом.

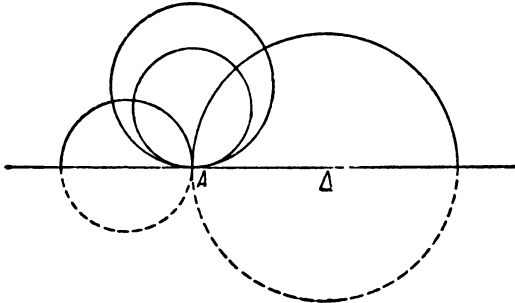
**134.** Теперь мы можем перейти к конформному отображению гиперболической плоскости на обычную, выполнив инверсию, полюсом которой служил одна из точек сферы. Если этот полюс лежит внутри неиспользованной нами части окружности, то все точки гиперболической плоскости отобразятся точками, внутренними по отношению к некоторой действительной окружности  $(\Gamma'')$  (*абсолют*), причем прямые перейдут в окружности, ортогональные к абсолюту.

Более интересное отображение, которое было использовано А. Пуанкаре (H. Poincaré) в его теории фуксовых функций, состоит в том, что инверсия выполняется относительно полюса, лежащего на абсолютe  $(\Gamma')$ . Этот абсолют переходит тогда в прямую, а точкам гиперболической плоскости соответствуют точки одной из полуплоскостей, ограниченных

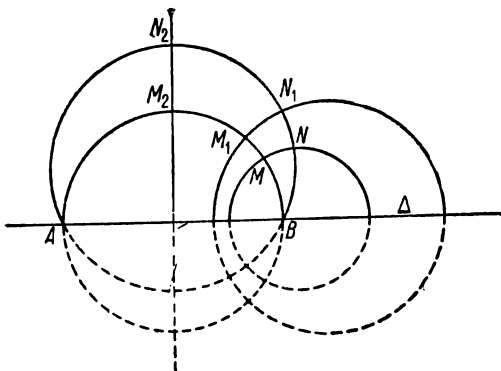
этой прямой (*полуплоскость Пуанкаре*). Обозначая буквой  $\Delta$  эту прямую (абсолют), можем сказать, что прямые переходят в полуокружности, расположенные в полуплоскости Пуанкаре и центры которых лежат на  $\Delta$ .



Фиг. 20.



Фиг. 21.



Фиг. 22.

Нетрудно установить, что неевклидовы окружности отображаются окружностями же. Рассмотрим, в самом деле, пучок окружностей, ортогональных прямой  $\Delta$  и проходящих через точку  $A$  полуплоскости Пуанкаре (и через точку  $A'$ , симметричную с  $A$  относительно  $\Delta$ ). Ортогональными траекториями этого пучка будут неевклидовы окружности, центром которых (неевклидовым) служит точка  $A$ ; известно, что они образуют пучок окружностей, предельными точками которого являются  $A$  и  $A'$  (фиг. 20); точка  $A$  является полюсом (в обычном смысле этого слова) прямой  $\Delta$  по отношению к любой из этих окружностей.

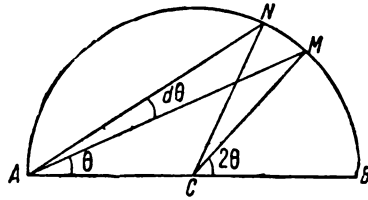
Возьмем теперь пучок окружностей (*неевклидовых параллелей*), проходящих через некоторую точку  $A$ , лежащую на прямой  $\Delta$ , и имеющих центры на  $\Delta$ ; ортогональные их траектории образуют в свою очередь пучок окружностей, касающихся прямой  $\Delta$  в точке  $A$  (фиг. 21); они служат отображением орициклов, нормальных к рассматриваемым параллельным прямым.

Возьмем, наконец, пучок окружностей, центры которых лежат на  $\Delta$ , имеющих две предельных точки  $A$  и  $B$ , тоже лежащих на  $\Delta$  (фиг. 22); их ортогональными траекториями

будут окружности, проходящие через  $A$  и  $B$ , являющиеся, таким образом, отображением эквидистант. Среди них имеется одна прямая (неевклидова), отображением которой служит полуокруг с диаметром  $AB$ ;

прямолинейные отрезки (неевклидовы)  $MN$ ,  $M_1N_1$ ,  $M_2N_2$ , перпендикулярные прямой (неевклидовой)  $AB$ , имеют все одну и ту же длину.

135. Если мы отнесем полуплоскость Пуанкаре к прямоугольной системе координат, взяв в качестве оси  $OX$  прямую  $\Delta$ , то без труда найдем аналитическое выражение для линейного элемента гиперболической плоскости. Действительно, рассмотрим две соседние точки  $M$ ,  $N$  и окружность, ортогональную к  $\Delta$  и проходящую через  $M$  и  $N$  (фиг. 23); пусть  $A$  и  $B$  — точки ее пересечения с прямой  $\Delta$ . Положение точки  $M$  на окружности можно выразить рационально с помощью параметра



Фиг. 23.

$$t = \operatorname{tg} \theta,$$

где  $\theta$  обозначает угол  $BAM$ . Значениями  $t$ , соответствующими точкам

$$M, N, A, B,$$

будут:

$$\operatorname{tg} \theta, \operatorname{tg} (\theta + d\theta), \infty, 0,$$

и мы получим:

$$(MNAB) = \frac{\operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg} (\theta + d\theta)}{\operatorname{tg} \theta} = 1 + \frac{d \operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \theta} = 1 + \frac{2d\theta}{\sin 2\theta};$$

следовательно,

$$ds = R \ln \left( 1 + \frac{2d\theta}{\sin 2\theta} \right) = R \frac{2d\theta}{\sin 2\theta}.$$

Обозначим теперь через  $r$  обыкновенный радиус окружности  $AMNB$ , через  $C$  — ее центр; получим:

$$\frac{d(2\theta)}{\sin 2\theta} = \frac{rd(2\theta)}{r \sin 2\theta} = \frac{\sqrt{dX^2 + dY^2}}{Y};$$

следовательно,

$$ds^2 = R^2 \frac{dX^2 + dY^2}{Y^2} = -\frac{1}{K} \frac{dX^2 + dY^2}{Y^2}. \quad (7)$$

136. Подведем итоги. В случае эллиптической геометрии мы нашли замечательный линейный элемент

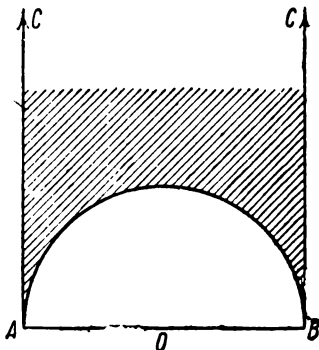
$$ds^2 = \frac{dX^2 + dY^2 + K(X dY - Y dX)^2}{[1 + K(X^2 + Y^2)]^2}; \quad (4)$$

при этом координаты  $X$ ,  $Y$  выбраны таким образом, что любая прямая задается уравнением первой степени. С помощью этих координат можно задать все точки пространства, за исключением точек одной прямой, именно полярных точек ( $X = Y = 0$ ).

Сферическая геометрия допускает линейный элемент

$$ds^2 = \frac{dX^2 + dY^2}{\left[1 + \frac{K}{4}(X^2 + Y^2)\right]^2}, \quad (5)$$

причем координаты  $X, Y$  выбираются так, чтобы с их помощью осуществлялось конформное отображение на евклидову плоскость. С помощью этих координат можно задать все точки сферы, за исключением одной, антипода точки  $(X=Y=0)$ .



Фиг. 24.

Гиперболическая геометрия допускает три замечательных линейных элемента. Два из них получаются из предыдущих формул, если дать в них параметру  $K$  отрицательное значение; в обоих этих случаях все точки гиперболической плоскости аналитически задаются координатами  $X, Y$ , удовлетворяющими в первом случае неравенству:

$$1 + K(X^2 + Y^2) > 0,$$

а во втором — неравенству:

$$1 + \frac{K}{4}(X^2 + Y^2) > 0.$$

Кроме того, существует еще одна замечательная форма линейного элемента (конформное отображение на полуплоскость Пуанкаре), именно:

$$ds^2 = -\frac{1}{K} \frac{dX^2 + dY^2}{Y^2}; \quad (7)$$

все точки аналитически задаются в координатах  $X, Y$  (при условии  $Y > 0$ ). Элемент площади (неевклидов) имеет вид:

$$d\sigma = R^2 \frac{dX dY}{Y^2}; \quad (8)$$

нетрудно проверить, что треугольник, все три вершины которого лежат в бесконечности (на абсолют), т. е. такой, какой изображен на фиг. 24, и который ограничен полуокружностью с центром в  $O$  радиуса (обыкновенного)  $a$  и двумя полупрямыми  $AC$  и  $BC$ , имеет площадь, равную  $\pi R^2$ . Действительно, если  $OA = OB = a$ , то дело сводится к вычислению интеграла

$$J = R^2 \int \frac{dX dY}{Y^2},$$

распространенного на область, определенную неравенствами:

$$\begin{aligned} -a &\leq X \leq a, \\ X^2 + Y^2 &\geq a^2; \end{aligned}$$

интегрирование дает:

$$J = R \int_{-a}^{+a} \frac{dX}{\sqrt{a^2 - X^2}} = \pi R^2.$$

На чертеже непосредственно видно, что все три угла этого треугольника равны нулю.

## V. Группа движений неевклидовых геометрий

137. Каждое из трех типов двумерных неевклидовых пространств (сферическое, эллиптическое, гиперболическое пространства) удовлетворяет аксиоме свободной подвижности и допускает непрерывную группу изометрических преобразований (*неевклидовых движений*), зависящую от трех параметров; оно допускает также трехпараметрическую группу не-прямых изометрических преобразований (движений с отражениями).

Оставим в стороне сферу, свойства которой достаточно известны, а также — эллиптическую плоскость и займемся гиперболическими движениями.

Если мы выполним геодезическое отображение неевклидовой плоскости (плоскости Лобачевского) на проективную плоскость, то сейчас же увидим, что *любому гомографическому преобразованию, сохраняющему абсолют, соответствует изометрическое неевклидово преобразование*. Впрочем, нет надобности специально останавливаться на том, что гомографическое преобразование сохраняет множество точек, лежащих внутри абсолюта, ибо это множество обладает проективно-инвариантным свойством: касательная, проведенная из любой его точки к абсолют, является мнимой прямой.

Известно, что можно выразить однородные координаты точек конического сечения рациональными вещественными функциями некоторого вещественного переменного  $t$ ; любому гомографическому преобразованию, сохраняющему абсолют, соответствует гомографическое преобразование параметра  $t$ . Обратно, любое гомографическое преобразование абсолюта влечет за собою гомографическое преобразование всей плоскости; это вытекает из того, что любая точка плоскости вполне определяется точками касания прямых, выходящих из этой точки, с абсолютом, а любая прямая — своими точками пересечения с абсолютом. Все это становится вполне очевидным, если сделать вычисления, причем выбрать такую систему проективных координат, чтобы точки абсолюта удовлетворяли условию:

$$\frac{x}{t^2} = \frac{y}{t} = \frac{z}{1},$$

что всегда возможно.

Если теперь выполнить над абсолютом гомографическое преобразование

$$t' = \frac{at + b}{a't + b'},$$

то для всей плоскости получится:

$$\begin{aligned} \rho x' &= a^2 x + 2aby + b^2 z, \\ \rho y' &= aa'x + (ab' + ba')y + bb'z, \\ \rho z' &= a'^2 x + 2a'b'y + b'^2 z. \end{aligned}$$

Таким образом, для того чтобы классифицировать неевклидовы движения, нам достаточно классифицировать вещественные гомографические преобразования с одной переменной. Для этой классификации прежде всего имеет значение знак величины  $ab' - ba'$ . Положительный знак соответствует собственным движениям, отрицательный — движениям, сопровождаемым отражениями.

**138. Собственно движения** могут быть расклассифицированы в зависимости от характера двойных точек соответствующего гомографического преобразования.

1. *Двойные точки мнимы.* При движении остается неподвижной вещественная прямая, соединяющая двойные точки (прямая, лежащая вне абсолюта), а также ее полюс  $A$  (внутри абсолюта). Полученное движение, очевидно, является *вращением вокруг неподвижной точки  $A$* . При непрерывном вращении вокруг точки  $A$  различные точки плоскости описывают окружности (неевклидовы) с центром в  $A$ .

2. *Двойные точки действительны и различны.* Если  $A$  и  $B$  — эти двойные точки, то при движении остается неподвижной прямая  $AB$ , причем каждая точка этой прямой смещается вдоль нее на отрезок постоянной длины (неевклидовой). Получается то, что можно назвать *параллельным перемещением* (неевклидовым). При непрерывном параллельном перемещении вдоль оси  $AB$  точки, не лежащие на оси, описывают эквидистанты (постоянной кривизны, меньшей чем  $\frac{1}{R}$ ).

3. *Двойные точки совпадают.* Если  $A$  — единственная двойная точка, то соответствующее движение оставляет ее неподвижной и, следовательно, преобразует друг в друга прямые пучка параллелей Лобачевского с вершиной  $A$ . При непрерывном движении вокруг  $A$  каждая точка плоскости описывает орицикл, отображением которого является коническое сечение, соприкасающееся с абсолютом в точке  $A$ .

*Движения, сопровождаемые отражением,* могут иметь место только в том случае, когда гомографическое преобразование абсолюта имеет вещественные различные двойные точки. Уравнение, дающее двойные точки, имеет вид:

$$a't^2 + (b' - a)t - b = 0;$$

дискриминант его дается выражением:

$$(b' - a)^2 + 4ba' = (b' + a)^2 - 4(ab' - ba') > 0.$$

Если  $A$  и  $B$  — двойные точки гомографического преобразования абсолюта, то соответствующее преобразование плоскости сведется к параллельному перемещению вдоль оси  $AB$  и к отражению относительно этой оси.

**139.** Перейдем теперь к конформному отображению гиперболической плоскости на плоскость комплексного переменного, причем для простоты рассмотрим отображение на полуплоскость Пуанкаре. В силу определения, принятого для неевклидова расстояния между двумя точками, любое преобразование, переводящее круги в круги и сохраняющее абсолют,

будет изометрическим преобразованием. Но в *конформной плоскости* существуют два класса точечных преобразований, переводящих круги в круги (так называемые *Kreisverwandtschaften* Мёбиуса). Будем задавать точку плоскости ее аффиксом  $z = X + iY$ , отнесенным к двум взаимно перпендикулярным координатным осям (причем действительной осью будет абсолют  $\Delta$ ). Первый класс преобразований (прямые преобразования) определяется формулой:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\alpha' z + \beta'},$$

где  $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$  — произвольные *комплексные* константы. Второй класс (непрямые преобразования) определяется формулой:

$$z' = \frac{\alpha z_0 + \beta}{\alpha' z_0 + \beta'},$$

где через  $z_0$  обозначено число  $X - iY$ , комплексно-сопряженное числу  $z$ .

Преобразования первого класса, сохраняющие вещественную ось  $\Delta$  и каждую из полуплоскостей, ограниченных ею, получаются, если величинам  $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$  давать только *вещественные* значения  $a, b, a', b'$ :

$$z' = \frac{az + b}{a'z + b'} \quad (ab' - ba' > 0). \quad (9)$$

Соответствующие неевклидовы движения попрежнему классифицируются сообразно с природой двойных точек преобразования (9).

Если двойные точки мнимы (комплексно-сопряженны), то они являются аффиксами точки  $A$ , лежащей в полуплоскости Пуанкаре, и точки  $A'$ , симметричной с  $A$  относительно  $\Delta$ . Движение представляет собою *вращение* (неевклидово) вокруг точки  $A$ .

Если двойные точки вещественны, то они являются аффиксами двух точек  $A$  и  $B$ , лежащих на абсолютe. Соответствующим движением будет параллельное перемещение, осью которого является полукружность (неевклидова прямая), построенная на  $AB$  как на диаметре.

Если, наконец, двойные точки совпадают, то мы получаем единственную точку  $A$ , лежащую на абсолютe; соответствующее преобразование переводит друг в друга прямые (неевклидовы), т. е. окружности, ортогональные к  $\Delta$  и проходящие через  $A$ . Если в частности точка  $A$  уходит в бесконечность, то соответствующий пучок параллелей Лобачевского переходит в пучок обычных прямых, параллельных оси  $OY$ : орициклы, которые являются ортогональными траекториями этого пучка, будут даны обычными параллелями оси  $OX$ , а соответствующее неевклидово движение — обычным параллельным перемещением вдоль  $OX$ .

Перейдем к движениям, связанным с отражениями; аналитически они задаются формулой вида:

$$z' = \frac{\alpha z_0 + b}{a' z_0 + b'}, \quad (10)$$

где  $a, b, a', b'$  — вещественные числа, удовлетворяющие условию  $ab' - ba' < 0$  (чтобы преобразование сохраняло обе полуплоскости). Такое



преобразование оставляет неподвижными две вещественные точки абсолюта, и мы вновь получаем рассмотренную выше интерпретацию: параллельное перемещение, сопровождающееся отражением относительно оси движения.

## VI. Трехмерные неевклидовы пространства

140. Естественнее всего, как мы это сделали и в случае  $n=2$ , исходить от *сферического* пространства, каждая точка которого определяется четырьмя координатами  $x, y, z, t$ , связанными соотношением:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = R^2,$$

причем линейный элемент имеет вид:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2.$$

Про такое пространство говорят, что оно имеет кривизну, равную  $\frac{1}{R^2}$ .

Рассмотрим все это с общей проективной точки зрения. Пусть в трехмерном проективном пространстве, отнесенном к проективным координатам  $x, y, z, t$ , задана своим уравнением:

$$f(x, y, z, t) = 0$$

некоторая поверхность второго порядка (*абсолют*). Будем умножать проективные координаты любой точки на некоторый множитель так, чтобы выполнялось равенство:

$$f(x, y, z, t) = \frac{1}{K}, \quad (11)$$

где  $K$  — некоторая данная константа, и определим линейный элемент формулой:

$$ds^2 = f(dx, dy, dz, dt). \quad (12)$$

Для того чтобы определенное таким образом риманово пространство имело действительные точки и чтобы его линейный элемент был определенной положительной формой, необходимо прежде всего, чтобы полярная по отношению к абсолюту плоскость точки  $(x, y, z, t)$  не пересекала абсолюта; действительно, четыре величины  $dx, dy, dz, dt$  связаны одним единственным соотношением:

$$f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz + f'_t dt = 0,$$

которое выражает, что точка  $(dx, dy, dz, dt)$  лежит в плоскости, полярной по отношению к точке  $(x, y, z, t)$ . Если бы полярная плоскость и абсолют пересекались, то дифференциальная форма  $ds^2$  не могла бы сохранять постоянный знак.

Предыдущее условие исключает из рассмотрения линейчатые поверхности второго порядка, потому что любая плоскость пересекается с такой поверхностью по действительной кривой.

Таким образом возможны только две гипотезы:

1. Абсолют — мнимая поверхность (с вещественным уравнением). При этом необходимо, чтобы форма  $f$  была определенной положительной; следовательно, и константа  $K$  непременно положительна. Мы получаем эллиптическое пространство положительной кривизны.

2. Абсолют — действительная не линейчатая поверхность, например эллипсоид. Плоскостями, не пересекающими этой поверхности, будут плоскости, лежащие вне ее; следовательно, форма  $f$  будет положительна вне поверхности. Точки  $(x, y, z, t)$  риманова пространства будут лежать внутри нее (так как их полярные плоскости должны лежать снаружи), поэтому  $K$  непременно будет отрицательно. Мы получаем, таким образом, гиперболическое пространство отрицательной кривизны  $K$ . Форма  $f$  содержит при этом три положительных квадрата и один отрицательный.

141. Можно непосредственно получить проективную интерпретацию элементарного расстояния между двумя точками  $M$  и  $M'$ . Координаты любой точки прямой  $MM'$  имеют вид:

$$x + \lambda dx, \quad y + \lambda dy, \quad z + \lambda dz, \quad t + \lambda dt;$$

значения  $\lambda$ , соответствующие точкам пересечения нашей прямой с абсолют,  $P_1, P_2$ , даются уравнением:

$$f(x + \lambda dx, \dots, t + \lambda dt) \equiv \frac{1}{K} + \lambda^2 ds^2 = 0,$$

откуда:

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{-K} ds}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\sqrt{-K} ds}.$$

Ангармоническое отношение  $(MM'P_1P_2)$  равно ангармоническому отношению четырех значений  $\lambda$ , соответствующих четырем рассматриваемым точкам:

$$(MM'P_1P_2) = (0, 1, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_1(1-\lambda_2)}{\lambda_2(1-\lambda_1)} = \frac{1 - \frac{1}{\lambda_2}}{1 - \frac{1}{\lambda_1}} = \frac{1 + ds\sqrt{-K}}{1 - ds\sqrt{-K}};$$

переходя к логарифмам и ограничиваясь их главными значениями, получаем:

$$ds = \frac{1}{2\sqrt{-K}} \ln (MM'P_1P_2).$$

Путем интегрирования вдоль конечного прямолинейного отрезка мы получаем из этой формулы выражение неевклидова расстояния между двумя точками  $M$  и  $M'$ , расстояния, отсчитываемого вдоль прямой:

$$d = \frac{1}{2\sqrt{-K}} \ln (MM'P_1P_2), \quad (13)$$

откуда в свою очередь получается формула:

$$\frac{1}{2}(x'f'_x + y'f'_y + z'f'_z + t'f'_t) = \frac{1}{K} \cos(d\sqrt{K}). \quad (14)$$

Скоро мы дадим прямое доказательство того, что прямая является геодезической.

**142.** В предыдущем мы рассматривали проективные координаты точки, удовлетворяющие соотношению:  $f = \frac{1}{K}$ . Можно было бы стать на более общую точку зрения и рассматривать любую совокупность четырех координат  $(x, y, z, t)$ , не равных одновременно нулю, называя эту совокупность *аналитической точкой*; две *аналитические точки*, координаты которых пропорциональны, но не равны, мы будем считать различными, хотя они и занимают одно и то же положение в пространстве.

Назовем *скалярным квадратом* такой точки величину  $f(x, y, z, t)$ ; более обще будем называть *скалярным произведением* двух аналитических точек  $(x, y, z, t)$  и  $(x', y', z', t')$  выражение:

$$\frac{1}{2} \left( x' \frac{\partial f}{\partial x} + y' \frac{\partial f}{\partial y} + z' \frac{\partial f}{\partial z} + t' \frac{\partial f}{\partial t} \right).$$

Если  $M$  и  $N$  — две любые аналитические точки, то скалярный квадрат точки  $\lambda M + \mu N$ , координаты которой получаются из координат данных точек  $M$  и  $N$  путем соответственного умножения на  $\lambda$  и  $\mu$  и сложения, будет равен:

$$\lambda^2 M^2 + 2\lambda\mu M \cdot N + \mu^2 N^2.$$

Две точки, скалярное произведение которых равно нулю, взаимно сопряжены по отношению к абсолюту; каждая из них лежит в полярной плоскости другой.

Бесконечно малый вектор, определенный двумя бесконечно близкими точками  $M, M'$ , аналитически определяется четырьмя величинами:  $dx, dy, dz, dt$ . Подчиним координаты рассматриваемых точек условию  $f(x, y, z, t) = \frac{1}{K}$  (иными словами, положим  $M^2 = \frac{1}{K}$ ); четыре числа:  $dx, dy, dz, dt$  определяют аналитическую точку проективного пространства, лежащую в полярной плоскости точки  $M$  относительно абсолюта, скалярный квадрат которой  $f(dx, dy, dz, dt) = ds^2$  равен квадрату длины вектора. Мы назовем ее *точкой, соответствующей вектору*.

Обобщая это, мы можем сказать, что любому вектору эллиптического или гиперболического пространства, приложенному в точке  $M$ , соответствует аналитическая точка, лежащая в полярной плоскости точки  $M$  относительно абсолюта, скалярный квадрат которой равен квадрату длины вектора. Точка эта лежит на прямой, выходящей из  $M$  в направлении вектора. Нетрудно проверить, что *скалярное произведение двух векторов, приложенных в  $M$ , равно скалярному произведению соответствующих им точек*.

143. Координаты, которые рассматривались нами до сих пор, были произвольными проективными координатами. Среди них существуют и такие, которые обобщают декартовы координаты евклидова пространства.

Отправимся от некоторой точки  $A$  (со скалярным квадратом  $\frac{1}{K}$ ) эллиптического или гиперболического пространства и рассмотрим точки  $e_1, e_2, e_3$ , соответствующие трем единичным ортогональным векторам, приложенным в  $A$ . Любую аналитическую точку  $M$  проективного пространства можно будет представить так:

$$M = tA + xe_1 + ye_2 + ze_3,$$

и мы получим в силу очевидных равенств:

$$Ae_i = 0, \quad e_i^2 = 1, \quad e_i e_j = 0 \quad (i \neq j; i, j = 1, 2, 3)$$

следующее выражение для скалярного квадрата  $M$ :

$$M^2 = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{K} t^2.$$

Если точка  $M$  является точкой эллиптического или гиперболического пространства, имеющей скалярный квадрат  $\frac{1}{K}$ :

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{K} t^2 = \frac{1}{K},$$

то для линейного элемента пространства мы получим следующее выражение:

$$ds^2 = dM^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{1}{K} dt^2.$$

Полученные таким образом координаты, удовлетворяющие соотношению:

$$x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{K} t^2 = \frac{1}{K},$$

носят название *координат Вейерштрасса*.

Если  $K$  стремится к нулю, то  $t$  стремится к единице, а  $ds^2$ , как трудно видеть, стремится к  $dx^2 + dy^2 + dz^2$ .

Координаты Вейерштрасса определены только с точностью до знака. Если в эллиптическом пространстве условиться считать различными точки, вейерштрассовы координаты которых отличаются только знаком, то мы получим сферическое пространство. В случае гиперболического пространства тоже можно считать различными точки  $(x, y, z, t)$  и  $(-x, -y, -z, -t)$ , но при этом *оказывается невозможным непрерывный переход от точки с положительной координатой  $t$  к точке, у которой соответствующая координата отрицательна*; этому препятствует соотношение

$$t^2 = 1 - K(x^2 + y^2 + z^2) \geq 1.$$

Условие, благодаря которому мы переходим от эллиптического пространства к сферическому, приводит здесь к *несвязному* пространству, т. е. к двум *совершенно отдельным* многообразиям. Мы исключаем такую возможность. Мы видим, что в гиперболическом пространстве координату  $t$  можно считать всегда *положительной*.

144. Переход от одной системы декартовых координат к другой осуществляется посредством линейного преобразования. Если первая система закреплена, а вторая меняется, то мы можем взять любое линейное преобразование, имеющее инвариантом форму  $x^2 + y^2 + z^2 + \frac{1}{K} t^2$ . Инвариантом всех этих преобразований является также линейный элемент:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + \frac{1}{K} dt^2;$$

следовательно, они определяют группу изометрических преобразований пространства. Это — группа с шестью параметрами, этой же степенью произвола характеризуется наиболее общая система вейерштрассовых координат, т. е. по существу наиболее общий тетраэдр, сопряженный относительно абсолюта.

В эллиптическом пространстве мы получим то же самое изометрическое преобразование, если изменим все знаки на обратные; напротив, в пространстве сферическом мы получаем, таким образом, два различных движения. В гиперболическом пространстве мы не можем менять знаки у коэффициентов, если условимся считать всегда  $t$  и  $t'$  положительными.

Нетрудно доказать, что определитель, составленный из коэффициентов преобразования, равен либо  $+1$ , либо  $-1$ . Собственно движениям соответствует определитель, равный  $+1$ ; движениям, связанным с отражениями, — определитель, равный  $-1$ .

145. Нетрудно определить евклидову метрику, соприкасающуюся в данной точке  $A$  с метрикой эллиптического или гиперболического пространства. Рассмотрим, в самом деле, систему вейерштрассовых координат  $x, y, z, t$  с началом в точке  $A$ . В достаточно малой окрестности точки  $A$  мы имеем:

$$\begin{aligned} t^2 &= 1 - K(x^2 + y^2 + z^2), \\ t &= 1 - \frac{1}{2} K(x^2 + y^2 + z^2) + \dots \end{aligned}$$

Выражая линейный элемент пространства в переменных  $x, y, z$  и пренебрегая в коэффициентах членами выше, чем первого порядка, мы получим просто  $dx^2 + dy^2 + dz^2$ , т. е. евклидов линейный элемент. Таким образом мы получаем отображение данного пространства на одно из евклидовых, соприкасающихся с ним в точке  $A$ , ставя в соответствие точке  $(x, y, z, t)$  точку с прямоугольными координатами  $x, y, z$ . Мы получим более удобное отображение, если введем неоднородные координаты

$$X = \frac{x}{t}, \quad Y = \frac{y}{t}, \quad Z = \frac{z}{t};$$

с той же степенью приближения, что и выше, мы получим:

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2.$$

При отображении на это соприкасающееся евклидово пространство мы получим в качестве абсолюта *сферу*:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + \frac{1}{K} = 0.$$

Но прямая проективного пространства (в котором локализовано исследуемое эллиптическое или гиперболическое пространство) переходит при отображении на соприкасающееся евклидово пространство снова в прямую, евклидова кривизна которой в точке соприкосновения, очевидно, равна нулю. Отсюда следует, что любая прямая проективного пространства имеет нулевую кривизну (неевклидову) в любой из своих точек и, значит, является геодезической линией неевклидова пространства. Следовательно, плоскости проективного пространства являются вполне геодезическими поверхностями; аксиома плоскости выполняется таким образом и в эллиптическом и в гиперболическом пространстве.

Можно отметить еще одно важное следствие. Если дана прямая, выходящая из точки  $A$ , то *параллельная* (в смысле Леви-Чивита) к ней прямая, выходящая из бесконечно близкой точки  $A'$ , отобразится в соприкасающемся евклидовом пространстве прямой, параллельной (в обычном смысле) первой. Следовательно, в проективном пространстве она *пересечется с первой в некоторой точке плоскости  $t=0$ , — полярной плоскости точки  $A$  относительно абсолюта*. Мы получаем таким образом весьма простое геометрическое построение этой прямой.

146. Чтобы обобщить *декартовы* координаты, естественнее всего взять в качестве отправного пункта некоторую точку  $A$  (со скалярным квадратом  $\frac{1}{K}$ ) эллиптического или гиперболического пространства и три произвольных вектора, приложенных в  $A$ , которым соответствуют произвольные точки  $e_1, e_2, e_3$ , лежащие в плоскости, полярной к  $A$  относительно абсолюта. Если положим

$$M = tA + xe_1 + ye_2 + ze_3,$$

то получим:

$$M^2 = \frac{1}{K} t^2 + g_{11}x^2 + g_{22}y^2 + g_{33}z^2 + 2g_{23}yz + 2g_{31}zx + 2g_{12}xy,$$

где коэффициенты  $g_{ij}$  равны скалярным произведениям  $e_i e_j$ .

Как и в евклидовом пространстве, эти декартовы координаты применяются в теории криволинейных координат. Если взять в  $n$ -мерном неевклидовом пространстве произвольную систему координат  $u^1, \dots, u^n$ , то с каждой точкой  $M$  пространства можно будет связать местную декартову систему координат, определенную своим началом  $M$  (со скалярным квадратом  $\frac{1}{K}$ ) и точками, соответствующими векторам  $e_i = \frac{\partial M}{\partial u^i}$ .

Геометрические функции  $M, e_i$  переменных  $u^1, \dots, u^n$  связаны соотношениями:

$$M^2 = \frac{1}{K}, \quad M \cdot e_i = 0, \quad e_i e_j = g_{ij},$$

причем

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} du^i du^j.$$

Обратно, задание линейного элемента  $ds^2$  эллиптического или гиперболического пространства позволяет, как и в случае евклидова пространства, построить все пространство целиком. Действительно, мы имеем соотношения вида:

$$dM = \sum_i du^i e_i, \quad (15)$$

$$de_i = \omega_i^0 M + \sum_k \omega_i^k e_k. \quad (16)$$

Пфаффовы выражения

$$\omega_i^0 = \sum_r \Gamma_{ir}^0 du^r, \quad \omega_i^k = \sum_r \Gamma_{ir}^k du^r$$

определяются с помощью соотношений:

$$M^2 = \frac{1}{K}, \quad M \cdot e_i = 0, \quad e_i e_j = g_{ij},$$

которые, будучи продифференцированы, дают:

$$\omega_i^0 = -K \sum_k g_{ik} du^k \quad \text{или} \quad \Gamma_{ik}^0 = -K g_{ik}, \quad (17)$$

$$dg_{ij} = \sum_k (g_{jk} \omega_i^k + g_{ik} \omega_j^k) = \omega_{ij} + \omega_{ji}. \quad (18)$$

Наконец, условие интегрируемости уравнения (15) дает:

$$\Gamma_{ij}^0 M + \sum_k \Gamma_{ij}^k e_k = \Gamma_{ji}^0 M + \sum_k \Gamma_{ji}^k e_k,$$

откуда

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k. \quad (19)$$

Мы видим, что величины  $\Gamma_{ij}^k$  и формы  $\omega_i^k$  определяются здесь точно так же, как и в общей теории римановых пространств. Отсюда, в частности, выводятся следующие формулы для элементарного абсолютного смещения векторов  $e_i$ :

$$De_i = \sum_k \omega_i^k e_k = de_i + K \sum_k g_{ik} du^k \cdot M. \quad (20)$$

**147.** Найдем теперь условия, которым должны удовлетворять коэффициенты  $g_{ij}$  для того, чтобы данный линейный элемент был локально-

эллиптическим или гиперболическим кривизны  $K$ . Системы (15) и (16) должны при этом быть вполне интегрируемыми. Выражая, как и в п°43, условия интегрируемости системы (16), мы получим следующие формулы, которые являются обобщением формул (28) п° 43:

$$\frac{\partial \Gamma_{ir}^k}{\partial u^s} - \frac{\partial \Gamma_{is}^k}{\partial u^r} + \sum_h (\Gamma_{ir}^h \Gamma_{hs}^k - \Gamma_{is}^h \Gamma_{hr}^k) = K (\epsilon_{ks} g_{ir} - \epsilon_{kr} g_{is}), \quad (21)$$

где  $\epsilon_{\alpha\beta}$  равен единице, если  $\alpha = \beta$ , и нулю, если  $\alpha \neq \beta$ .

Их можно записать в более сжатой форме, обобщающей уравнения (30) п°45, именно:

$$(\omega_i^k)' - \sum_h [\omega_i^h \omega_h^k] = -K \sum_h g_{ih} [du^h du^k]. \quad (22)$$

## VII. Локально-сферические и локально-гиперболические нормальные римановы пространства

**148.** Если линейный элемент риманова пространства удовлетворяет найденным условиям для некоторого определенного числового значения константы  $K$ , то любую достаточно малую часть этого пространства можно *наложить* (развернуть) на неевклидово (эллиптическое или гиперболическое) пространство кривизны  $K$ . Если метрика пространства всюду регулярна и нормальна, то можно повторить рассуждения, которые были применены нами в случае евклидова пространства (гл. III). Эти рассуждения опирались только на следующие свойства евклидова пространства: во-первых, на свойство его допускать группу повсюду правильных изометрических преобразований; во-вторых — на *односвязность* его, которая выражается в том, что любой замкнутый контур в этом пространстве может быть путем непрерывной деформации стянут в точку.

Первым свойством обладают и сферическое, и эллиптическое, и гиперболическое пространства. Вторым, — очевидно, обладает гиперболическое пространство. Мы увидим сейчас, что и *сферическое* пространство обладает этим свойством.

Действительно, пусть каждая точка сферического пространства аналитически определяется четырьмя числами  $x, y, z, t$ , связанными соотношением:

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = R^2.$$

Осуществим стереографическое отображение этого пространства, полагая:

$$\frac{x}{R-t} = X, \quad \frac{y}{R-t} = Y, \quad \frac{z}{R-t} = Z;$$

возводя в квадрат, складывая и учитывая соотношение, связывающее  $x, y, z, t$ , получаем:

$$\frac{R+t}{R-t} = X^2 + Y^2 + Z^2,$$



откуда в свою очередь получается:

$$\left. \begin{aligned} t &= R \frac{X^2 + Y^2 + Z^2 - 1}{X^2 + Y^2 + Z^2 + 1}, \\ x &= R \frac{2X}{X^2 + Y^2 + Z^2 + 1}, \\ y &= R \frac{2Y}{X^2 + Y^2 + Z^2 + 1}, \\ z &= R \frac{2Z}{X^2 + Y^2 + Z^2 + 1}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Будем рассматривать  $X, Y, Z$  как прямоугольные координаты точки обыкновенного пространства; любой точке сферического пространства, за исключением одной, именно  $(x=y=z=0, t=R)$  соответствует одна и только одна точка евклидова пространства; обратно, любой точке евклидова пространства соответствует одна единственная точка пространства сферического.

Установив это, рассмотрим произвольный замкнутый контур, лежащий в сферическом пространстве; можно предположить, что он не проходит через точку

$$(x=y=z=0, t=R).$$

В евклидовом пространстве ему соответствует замкнутый контур, который непрерывной деформацией может быть стянут в точку; следовательно, первоначальный контур, данный в сферическом пространстве, тоже может быть стянут в точку путем непрерывной деформации.

Итак, сферическое пространство односвязно; того же нельзя сказать, как мы сейчас увидим, про эллиптическое пространство.

**149.** Таким образом теория локально-евклидовых нормальных пространств автоматически распространяется на локально сферические и локально гиперболические пространства. Налагая данное риманово пространство на пространство сферическое или гиперболическое, мы покрываем последнее целиком один и только один раз. Если, кроме того, данное пространство еще и односвязно, то оно тождественно со сферическим или же — соответственно — с гиперболическим пространством. В противном случае ему будет соответствовать в одном из этих двух пространств фундаментальный полиэдр, определенный посредством группы голономии, порожденной изометрическими преобразованиями пространства и удовлетворяющей следующим двум условиям:

1°. Группа прерывна.

2°. Ни одно из преобразований этой группы (за исключением тождественного) не имеет неподвижных точек.

Оставим в стороне локально-гиперболические пространства. При  $n=2$  определение ориентируемых пространств такого рода сводится к разысканию фуксовых групп, ни одно из преобразований которых не имеет неподвижных точек *внутри* полуплоскости Пуанкаре, т. е. таких фуксовых групп, которые состоят исключительно из параболических<sup>1)</sup> или же

<sup>1)</sup> В своей книге, озаглавленной «Einführung in die Grundlagen der Geometrie» (Paderborn 1893), *M. Killing* ошибочно формулирует теорему о том, что подстановки этой группы должны быть исключительно гиперболическими.

*гиперболических* преобразований. Здесь возможен, впрочем, и такой случай, когда фундаментальный многоугольник имеет бесконечное число сторон.

150. Изучение локально-сферических пространств приводит к интересным теоремам. Любая точка  $(n-1)$ -мерного сферического пространства кривизны 1 (случай, к которому сводятся все остальные) определяется  $n$  числами, связанными соотношением:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1.$$

Группой движений (связанных или не связанных с отражениями) будет здесь группа *линейных ортогональных преобразований* с  $n$  переменными. Пусть

$$x'_i = \sum_k a_{ik} x_k \quad (i = 1, \dots, n) \quad (24)$$

будет одно из этих преобразований. Равенство

$$x_1'^2 + \dots + x_n'^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$$

приводит к следующим соотношениям между коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} \sum_k a_{ki}^2 &= 1 \quad (i = 1, \dots, n), \\ \sum_k a_{ki} a_{kj} &= 0 \quad (i \neq j; i, j = 1, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Эти соотношения позволяют разрешить уравнения преобразования относительно  $x_i$ , что дает:

$$x_i = \sum_k a_{ki} x'_k \quad (i = 1, \dots, n). \quad (26)$$

Сейчас мы получим замечательную каноническую форму для уравнений ортогонального преобразования (24). Посмотрим сначала, не существует ли системы неравных одновременно нулю значений  $(x_1, \dots, x_n)$  таких, чтобы соответствующие значения  $(x'_1, \dots, x'_n)$  получались из них путем умножения на один и тот же множитель  $\lambda$ . Соотношения

$$\lambda x_i = \sum_k a_{ik} x_k$$

приводят к уравнению  $n$ -й степени относительно  $\lambda$  (характеристическое уравнение):

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Система неравных одновременно нулю значений  $x_i$  определяет в  $n$ -мерном евклидовом пространстве вектор, приложенный в начале координат. Ортогональное преобразование (24) ставит в соответствие с этим вектором некоторый другой вектор, имеющий, впрочем, ту же длину. Говоря более обще, оно сохраняет скалярное произведение любых двух векторов.

Предположим, что характеристическое уравнение имеет мнимый корень  $\lambda$ . Тогда найдется вектор  $\mathbf{e}$  (непрерывно мнимый), которому будет соответствовать вектор  $\lambda \mathbf{e}$ :

$$\mathbf{e}' = \lambda \mathbf{e}.$$

Заменяя в этом равенстве все величины комплексно-сопряженными (которые мы обозначим с помощью нижнего индекса 0), получим:

$$\mathbf{e}'_0 = \lambda_0 \mathbf{e}_0;$$

отсюда следует:

$$\mathbf{e} \mathbf{e}_0 = \lambda \lambda_0 \mathbf{e} \mathbf{e}_0,$$

откуда наконец:

$$\lambda \lambda_0 = 1.$$

Итак, корень  $\lambda$  имеет вид  $e^{i\alpha}$ . Кроме того,

$$\mathbf{e}^2 = \lambda^2 \mathbf{e}^2,$$

откуда, поскольку  $\lambda^2$  не может равняться единице, находим:

$$\mathbf{e}^2 = 0.$$

Положим:

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}_1 + i \mathbf{e}_2,$$

причем  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  — вещественные векторы. Имеем:

$$\mathbf{e}_1^2 = \mathbf{e}_2^2, \quad \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2 = 0.$$

Таким образом векторы  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  взаимно перпендикулярны и имеют одинаковую длину. Но вектор  $\mathbf{e}$  определен только с точностью до множителя, значит, можно считать  $\mathbf{e}_1$  и  $\mathbf{e}_2$  единичными векторами и *взять их в евклидовом пространстве в качестве двух первых координатных векторов*.

Заменяя в формулах (24)  $x_i$  и  $x'_i$  координатами  $(1, i, 0, 0, \dots, 0)$  и  $(e^{i\alpha}, ie^{i\alpha}, 0, 0, \dots, 0)$  векторов  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{e}'$ ; мы получим:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \cos \alpha, & a_{21} &= -\sin \alpha, & a_{31} &= 0, & \dots, & a_{n1} &= 0, \\ a_{12} &= \sin \alpha, & a_{22} &= \cos \alpha, & a_{32} &= 0, & \dots, & a_{n2} &= 0. \end{aligned}$$

Первые из соотношений (25), приложенные к коэффициентам преобразования (26), обратного по отношению к (24), дают нам для  $i=1, 2$ :

$$\begin{aligned} a_{13} &= 0, & \dots, & & a_{1n} &= 0, \\ a_{23} &= 0, & \dots, & & a_{2n} &= 0. \end{aligned}$$



все точки, которые получаются в результате приравнивания нулю координат, соответствующих корням, отличным от единицы, были бы при этом неподвижными точками. Обратное предложение тоже справедливо. Мы получим таким образом всегда  $n = 2p + q$ .

*Предположим сначала, что пространство имеет четное число измерений, т. е. что  $n$  нечетно.* Раз корень  $\lambda = 1$  отсутствует, значит, корень  $\lambda = -1$  встретится четное число раз; следовательно, *все отличные от тождественного преобразования группы голономии будут движениями, связанными с отражением.* Если  $S$  — одно из этих преобразований, то преобразование  $S^2$ , являющееся собственно движением, должно свестись к тождественному преобразованию; это значит, что квадраты  $e^{2i\alpha}$  комплексных корней должны быть все равны единице, что невозможно. Следовательно, все корни характеристического уравнения равны  $-1$ , и единственным преобразованием группы голономии, отличным от тождественного, будет:

$$x'_i = -x_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

Если, следовательно, рассматриваемое пространство не является пространством сферическим, то оно может быть получено из последнего путем отождествления его диаметрально противоположных точек. *Таким образом получается эллиптическое пространство*, причем видно, что оно не ориентируемо. Мы получаем следующую теорему, первая часть которой принадлежит Киллингу:

*Любое нормальное локально-сферическое пространство четного числа измерений либо тождественно сферическому пространству, либо — эллиптическому. Первое — ориентируемо, второе — нет.*

В частности, эллиптическая плоскость (или топологически эквивалентная ей проективная плоскость) не ориентируема (односторонняя поверхность).

*Предположим теперь, что пространство имеет нечетное число измерений, т. е. что  $n$  четно.* Каноническая форма ортогонального преобразования показывает, что в случае, когда  $\lambda = 1$  не является корнем, корень  $\lambda = -1$  будет четной кратности; следовательно, определитель подстановки будет равен единице. Отсюда следующая теорема:

*Всякое нормальное локально-сферическое пространство нечетного числа измерений ориентируемо.*

В частности эллиптическое пространство нечетного числа измерений ориентируемо: оно соответствует группе голономии, состоящей из преобразования  $x'_i = -x_i$  и из тождественного преобразования.

## VIII. Трехмерные римановы пространства, удовлетворяющие аксиоме плоскости

**152.** Мы покажем теперь, что единственными трехмерными римановыми пространствами, удовлетворяющими аксиоме плоскости, являются локально-евклидовы, локально-эллиптические и локально-гиперболические пространства.

Мы видели (п° 114), что любая достаточно малая область каждого из этих пространств допускает геодезическое отображение на обычное

пространство. Осуществим это отображение. Изотропные направления, исходящие из  $M$ , образуют конус (мнимый) второго порядка с вершиною в  $M$ , который мы обозначим  $(\Gamma_M)$ . Рассмотрим две произвольные точки  $A, B$  (принадлежащие той области обыкновенного пространства, на которую делается отображение), а также и прямую, их соединяющую. Мы видели (п° 103), что две произвольные плоскости, содержащие  $AB$ , пересекаются в точках  $A$  и  $B$  под одним и тем же углом (определенным с помощью метрики риманова пространства, т. е. посредством изотропных конусов с вершинами в  $A$  и  $B$ ). Инволюция, определенная любой парой взаимно перпендикулярных плоскостей, проходящих через  $AB$ , будет одна и та же как в  $A$ , так и в  $B$ ; то же можно сказать и про двойные плоскости этой инволюции. Следовательно, касательные плоскости конуса  $(\Gamma_A)$ , проходящие через  $AB$ , будут касаться также и конуса  $(\Gamma_B)$ . *Иными словами, два любых изотропных конуса имеют две общие касательные плоскости.*

Мы можем продолжать наши рассуждения либо следуя геометрическому пути, либо — чисто аналитическому. Изберем геометрический путь.

Пусть  $A, B, C$  — три произвольные точки некоторой прямой. Рассмотрим плоскости  $P_A, P'_A$ , являющиеся общими касательными конусов  $(\Gamma_B)$  и  $(\Gamma_C)$ ; плоскости  $P_B$  и  $P'_B$  — общие касательные конусов  $(\Gamma_C)$  и  $(\Gamma_A)$ ; плоскости  $P_C, P'_C$  — общие касательные конусов  $(\Gamma_A)$  и  $(\Gamma_B)$ ; рассмотрим, наконец, плоскость  $\Pi_A$ , касательную к конусу  $(\Gamma_A)$  и отличную от  $P_B, P'_B, P_C, P'_C$ , и две аналогичные плоскости  $\Pi_B$  и  $\Pi_C$ .

Девять плоскостей, которые мы только что определили, служат касательными к одной и той же поверхности второго порядка  $(Q)$ . Мы докажем сейчас, что *изотропный конус с вершиною  $A$  описан около этой поверхности*. Действительно, конус с вершиною  $A$ , описанный около  $(Q)$ , и конус  $(\Gamma_A)$  имеют *пять* общих касательных плоскостей, именно  $P_B, P'_B, P_C, P'_C, \Pi_A$ ; следовательно, они совмещаются. Точно так же доказывается, что и изотропные конусы с вершинами в  $B$  и  $C$  описаны около поверхности  $(Q)$ .

Пусть теперь  $M$  — произвольная точка. Конус с вершиною в  $M$ , описанный около  $(Q)$ , и конус  $(\Gamma_M)$  имеют шесть общих касательных плоскостей, именно — общие касательные плоскости конусов  $(\Gamma_M)$  и  $(\Gamma_A)$ , общие касательные плоскости конусов  $(\Gamma_M)$  и  $(\Gamma_B)$  и общие касательные плоскости конусов  $(\Gamma_M)$  и  $(\Gamma_C)$ . Следовательно, конус  $(\Gamma_M)$  описан около поверхности  $(Q)$ .

Отсюда следует, что все изотропные конусы описаны около поверхности  $(Q)$ . Эта поверхность может вырождаться в кривую второго порядка (непрерывно мнимую); нетрудно доказать, что она не может вырождаться в систему двух точек. Если она не вырождается, то она может быть как мнимой, так и действительной нелинейчатой поверхностью, потому что, если бы она была действительной линейчатой, то в любой точке  $M$  существовали бы действительные изотропные направления. Впрочем, если она действительная и нелинейчатая, то точки  $M$  обычного пространства, отображающие точки риманова пространства, непременно будут расположены внутри этой поверхности.

В трех возможных здесь случаях можно определить соответственно евклидову, эллиптическую или гиперболическую метрику (и даже беско-

нечное число таких метрик), для которой поверхность  $(Q)$  играет роль абсолюта. Евклидова метрика соответствует случаю, когда поверхность  $(Q)$  сводится к коническому сечению, которое посредством гомографии всегда может быть преобразовано в омбиликаль. Во всех случаях метрика (евклидова или нет) зависит от единицы длины, которая может быть выбрана произвольно. В метриках, определенных посредством абсолюта  $(Q)$ , угол между двумя направлениями в одной и той же точке  $M$  будет равен соответствующему углу в метрике исходного риманова пространства, потому что конус изотропных направлений в обоих случаях один и тот же.

Итак, искомые римановы пространства обладают свойством допускать отображение, одновременно геодезическое и конформное, на одно из трех пространств: либо на евклидово, либо на эллиптическое, либо на гиперболическое.

153. Теперь нетрудно усмотреть, что если два римановых пространства могут быть отображены одно на другое посредством преобразования, одновременно геодезического и конформного, то линейные элементы этих пространств отличаются только постоянным множителем. Параллельное перенесение вектора  $\mathbf{x}$  из точки  $M$  в бесконечно близкую точку  $M'$  дает в обоих пространствах векторы  $\mathbf{x}'$  и  $\bar{\mathbf{x}}'$  одного и того же направления; действительно, для того чтобы осуществить это перенесение, мы можем согласно теореме Севери провести геодезическую  $MM'$ , построить поверхность, геодезическую в  $M$  и касательную в этой точке к  $MM'$  и  $\mathbf{x}$ , и, наконец, построить вектор, касательный в точке  $M'$  к этой геодезической поверхности и образующий с продолжением  $MM'$  угол, равный углу между  $\mathbf{x}$  и  $MM'$  в точке  $M$ . В обоих пространствах это построение приводит к одному и тому же конечному результату.

Мы покажем теперь, что векторы  $\mathbf{x}'$  и  $\bar{\mathbf{x}}'$  не только имеют одно и то же направление, но что они в точности равны друг другу.

Действительно, обозначим через  $(u^i)$  и  $(u^i + du^i)$  координаты точек  $M$  и  $M'$ , а через  $X^i$  — координаты вектора  $\mathbf{x}$ . Координаты векторов  $\mathbf{x}'$  и  $\bar{\mathbf{x}}'$  будут соответственно

$$X^i - \sum_{k, h} X^k \Gamma_{kh}^i du^h$$

и

$$X^i - \sum_{k, h} X^k \bar{\Gamma}_{kh}^i du^h,$$

если через  $\Gamma_{kh}^i$  и  $\bar{\Gamma}_{kh}^i$  обозначить символы Христовфеля обоих пространств.

Для векторов  $\mathbf{x}'$  и  $\bar{\mathbf{x}}'$  мы получим одни и те же компоненты с точностью до множителя  $1 + \omega$ , бесконечно близкого к единице, не зависящего от вектора  $\mathbf{x}$ . Таким образом мы получаем:

$$\sum_k X^k (\bar{\Gamma}_{kh}^i - \Gamma_{kh}^i) du^h = \omega X^i.$$

Отсюда сейчас же вытекает равенство коэффициентов  $\Gamma_{kh}^i$  и  $\bar{\Gamma}_{kh}^i$  в случае, если верхний индекс  $i$  отличается хотя бы от одного из нижних индексов  $k$  и  $h$ . В случае равных индексов мы получим:

$$\bar{\omega} = (\bar{\Gamma}_{ii}^i - \Gamma_{ii}^i) du^i;$$

но это возможно только в том случае, если  $\bar{\omega} = 0$  и  $\bar{\Gamma}_{ii}^i = \Gamma_{ii}^i$ .

Но если символы Христоффеля в обоих пространствах одни и те же, то это и значит, что *закон параллельного перенесения один и тот же в обоих пространствах.*

**154.** Поскольку отображение одного из пространств на другое является конформным, мы имеем  $ds_1^2 = k^2 ds_2^2$ , где  $k$  — некоторый конечный множитель (функция  $u^1, \dots, u^n$ ). Отправимся от некоторой определенной точки  $A$ ; вектор  $X$  с началом в  $A$  измеряется в обоих пространствах числами, отношение которых равно численному значению  $k_0$ , которое принимает функция  $k$  в точке  $A$ . Перенесем параллельно этот вектор из точки  $A$  в точку  $M$  по некоторой определенной, но произвольной кривой; он перейдет в вектор  $X'$ , который в каждом из двух пространств имеет ту же длину, что и вектор  $X$ ; следовательно, отношение чисел, измеряющих этот вектор в обоих пространствах, попрежнему равно  $k_0$ . Мы получаем таким образом  $k = k_0 = \text{const}$ , что и требовалось доказать.

Линейный элемент любого риманова пространства, удовлетворяющего аксиоме плоскости, отличается, таким образом, только постоянным множителем от евклидова или неевклидова (эллиптического или гиперболического) линейного элемента; следовательно, и сам он является евклидовым или неевклидовым линейным элементом, и мы приходим к следующей теореме:

*Всякое риманово пространство, удовлетворяющее аксиоме плоскости, является либо локально-евклидовым пространством, либо локально-эллиптическим (постоянной положительной кривизны), либо локально-гиперболическим (постоянной отрицательной кривизны).*

В качестве следствия мы получаем теорему, доказанную непосредственно в п° 111, в силу которой аксиома плоскости влечет за собою аксиому свободной подвижности.

Предыдущее доказательство, проведенное для случая  $n=3$ , не может быть распространено на двумерные римановы пространства, допускающие геодезическое отображение на плоскость. Тем не менее эти пространства являются либо локально-евклидовыми, либо локально-эллиптическими, либо локально-гиперболическими; доказательство может быть проведено только путем вычисления.

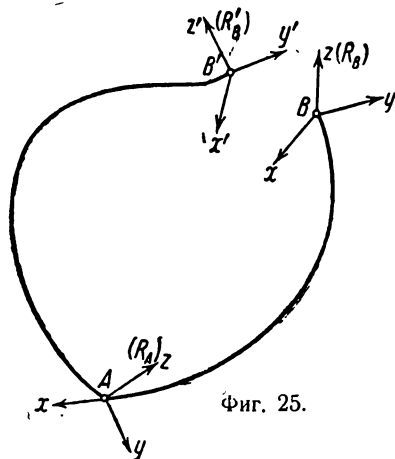


# РИМАНОВА КРИВИЗНА

## I. Движение, ассоциированное с циклом

155. Теперь мы вернемся к наиболее общим римановым пространствам и посмотрим, что же собственно отличает их от пространства Евклида.

Мы видели (п° 92), что если в римановом пространстве дана дуга кривой  $acb$ , с каждой точкой которой связана соответствующая естественная декартова координатная система  $(R)$ , то можно *развернуть* эту дугу и связанные с ней координатные системы на евклидово пространство (например на касательное в  $a$  евклидово пространство). Если исследуемое пространство не является локально-евклидовым, а точки  $a$  и  $b$  не слишком удалены одна от другой, то разворачивание другой дуги  $ac'b$ , соединяющей те же точки  $a$  и  $b$ , приведет к иным результатам. Если точке  $a$  и  $n$ -эдру  $(R)$  соответствуют в евклидовом пространстве точка  $A$  и  $n$ -эдр  $(R_A)$ , то в первом случае мы придем к точке  $B$  и  $n$ -эдру  $(R_B)$ , во втором — к  $B'$  и  $(R'_B)$  (фиг. 25).



Фиг. 25.

Этот результат можно сформулировать несколько иначе. Предположим, что, отправляясь в евклидовом пространстве от положения  $B'$  и  $(R'_B)$  как от начального, мы разворачиваем замкнутый контур или *цикл*  $bc'acb$ ; описав его и вернувшись к исходной точке  $b$  и связанному с ней  $n$ -эдру, мы получим в евклидовом пространстве конечное положение  $B$  и  $(R_B)$ . Чтобы вернуться от этого положения к начальному, нужно в *евклидовом пространстве* осуществить *некоторое движение*, именно то, которое переводит  $B$  в  $B'$  и  $(R_B)$  в  $(R'_B)$ ; про это движение говорят, что оно *ассоциировано* с данным циклом. Оно зависит, конечно, от начального положения, которое мы выбрали для  $B'$  и  $(R'_B)$ ; но можно сказать, что *по отношению* к  $n$ -эдру  $(R'_B)$  оно вполне определено. Иначе говоря, это движение вполне определено в касательном в точке  $B'$  евклидовом пространстве.

156. Изучить непосредственно движение, *ассоциированное* с произвольным циклом, содержащим данную точку, — задача весьма трудная. Мы

ограничимся *бесконечно малым* циклом, при этом будем предполагать, что цикл имеет некоторую специфическую форму.

Рассмотрим две различные операции дифференцирования, которые будем обозначать соответственно символами  $d$  и  $\delta$ . Величины  $du^i$  можно рассматривать как произведения параметра (бесконечно малого)  $\alpha$  на некоторые функции (произвольные)  $\xi^i(u^1, \dots, u^n)$ :

$$du^i = \alpha \xi^i(u^1, \dots, u^n).$$

Точно так же

$$\delta u^i = \beta \eta^i(u^1, \dots, u^n).$$

Пусть теперь  $m$  — произвольная точка риманова пространства с координатами  $(u^i)$ ; пусть  $m_1$  — точка с координатами  $(u^i + du^i)$ , а  $m_2$  — точка с координатами  $(u^i + \delta u^i)$ . Вектор  $\overrightarrow{mm_1}$  определяет элементарное смещение  $d$ ; вектор  $\overrightarrow{mm_2}$  — элементарное смещение  $\delta$ . Осуществим теперь элементарное смещение  $\delta$ , но только не в точке  $m$ , а в точке  $m_1$ . Мы придём к точке  $m_3$  с координатами

$$u^i + du^i + \delta(u^i + du^i) = u^i + du^i + \delta u^i + d\delta u^i.$$

Точно так же выполним элементарное смещение  $d$  в точке  $m_2$ ; мы получим точку  $m'_3$  с координатами:

$$u^i + \delta u^i + d(u^i + \delta u^i) = u^i + \delta u^i + du^i + d\delta u^i.$$

Мы видим, что точка  $m'_3$  совпадает с точкой  $m_3$ , если

$$d\delta u^i = \delta du^i,$$

иными словами, если можно менять порядок обеих дифференциальных операций. В этом случае, если  $f$  — произвольная функция координат, то

$$d\delta f = \delta df.$$

Допустим, что мы рассматриваем такие дифференциальные операции, порядок которых можно менять. Тогда любую точку  $m$  пространства можно будет рассматривать как одну из вершин *элементарного цикла*  $mm_3m_2$ , который пробегается в направлении, указанном предыдущим обозначением (таким образом, направление обхода совпадает с направлением вращения, переводящего направление смещения  $d$  в направление смещения  $\delta$ ).

Только такие элементарные циклы мы и будем в дальнейшем рассматривать. В частном случае, когда

$$\begin{aligned} \xi^r &= 1, & \text{все остальные } \xi & \text{— нули,} \\ \eta^s &= 1, & \text{» } & \text{» } & \eta & \text{— нули,} \end{aligned}$$

точки  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$  имеют те же самые координаты, что и  $m$ , за исключением координаты  $u^r$  точки  $m_1$  (возросла на  $\alpha$ ), координаты  $u^s$  точки  $m_2$  (возросла на  $\beta$ ) и координат  $u^r$  и  $u^s$  точки  $m_3$  (возросли соответственно на  $\alpha$  и на  $\beta$ ).

157. Когда сторона  $mm_1$  цикла разворачивается на евклидово пространство, тогда точка  $M$  и векторы  $e_i$  связанной с ней декартовой координатной системы получают элементарные геометрические приращения, которые даются формулами:

$$\left. \begin{aligned} dM &= \sum_k du^k e_k, \\ de_i &= \sum_k \omega_i^k(d) e_k. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Точно так же разворачивание  $mm_2$  дает:

$$\left. \begin{aligned} \delta M &= \sum_k \delta u^k e_k, \\ \delta e_i &= \sum_k \omega_i^k(\delta) e_k. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Развернем теперь контур  $mm_1m_3$ . Для этого нужно, отправляясь от точки  $M_1$  и координатной системы  $(R_1)$ , применить операцию  $\delta$ , определенную формулами (2); но формулы (2) определяют операцию  $\delta$  в точке  $M$ , тогда как теперь ее нужно выполнить в точке, которая получается из  $M$  путем применения операции  $d$ .

Иными словами, нам нужно выполнить операцию  $\delta + d\delta$  (в точке  $M$ ). Таким образом, полученные нами в евклидовом пространстве точка  $M_3$  и координатная система  $(R_3)$  будут иметь такой вид:

$$\begin{aligned} M_3 &= M + dM + \delta M + d\delta M; \\ (e_i)_3 &= e_i + de_i + \delta e_i + d\delta e_i. \end{aligned}$$

. Напротив, разворачивание контура  $mm_2m_3$  даст:

$$\begin{aligned} M'_3 &= M + \delta M + dM + \delta dM, \\ (e_i)'_3 &= e_i + \delta e_i + de_i + d\delta e_i. \end{aligned}$$

Следовательно, в результате движения, ассоциированного с циклом  $mm_1m_2m_3$ , точка  $M_3$  и векторы  $(e_i)_3$  получают геометрические приращения:

$$\begin{aligned} \nabla M_3 &= M'_3 - M_3 = \delta dM - d\delta M; \\ \nabla(e_i)_3 &= (e_i)'_3 - (e_i)_3 = \delta de_i - d\delta e_i. \end{aligned}$$

На самом деле эти величины определяют только *главную часть* интересующих нас движений, главную часть, порядок которой равен порядку произведения  $\alpha\beta$ , т. е. порядку площади, ограниченной циклом. Нужно

заметить, что эти движения отнесены к координатной системе  $(R)$ , связанной с точкой  $M$ ; но в окончательных формулах можно с достаточной степенью точности рассматривать  $e_i$  как векторы координатной системы  $(R'_3)$ ; связанной с  $M'_3$ .

Вычисление дает:

$$\begin{aligned}\delta dM - d\delta M &= \sum_k (\delta du^k - d\delta u^k) e_k + \sum_k (du^k \delta e_k - \delta u^k de_k) = \\ &= \sum_{k,h} [du^k \omega^h_k(\delta) - \delta u^k \omega^h_k(d)] e_h = \sum_{r,s,h} (\Gamma^h_{rs} - \Gamma^h_{sr}) du^r \delta u^s e_h = 0; \\ \delta de_i - d\delta e_i &= \sum_k [\delta \omega^k_i(d) - d\omega^k_i(\delta)] e_k + \sum_{k,h} [\omega^k_i(d) \omega^h_k(\delta) - \omega^k_i(\delta) \omega^h_k(d)] e_h = \\ &= \sum_k \Omega^k_i(\delta, d) e_k,\end{aligned}$$

где через  $\Omega^k_i$  обозначено следующее:

$$\Omega^k_i(\delta, d) = \delta \omega^k_i(d) - d\omega^k_i(\delta) - \sum_h [\omega^h_i(\delta) \omega^k_h(d) - \omega^h_i(d) \omega^k_h(\delta)].$$

Используя сокращенную систему записи, введенную в п°45, мы видим, что билинейную альтернированную форму  $\Omega^k_i$  можно написать так:

$$\Omega^k_i = (\omega^k_i)' - \sum_h [\omega^h_i \omega^k_h]. \quad (3)$$

Окончательно, для движения, связанного (ассоциированного) с элементарным циклом, мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} \nabla M &= 0, \\ \nabla e_i &= \sum_k \Omega^k_i(\delta, d) e_k. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Мы видим, что это движение оставляет неподвижным начало цикла и сводится, таким образом, к повороту около этого начала.

158. Вычисление можно вести и иначе. Свяжем (мысленно) с каждой точкой  $m$  риманова пространства точку  $p$ , определенную своими координатами  $(x^i)$  относительно естественной декартовой системы  $(R)$ . При развертывании евклидова пространства эта точка  $p$  займет, естественно, положение  $P$ , определенное ее декартовыми координатами. При развертывании стороны  $mm_1$  нашего цикла точка  $P$  испытывает элементарное абсолютное смещение, контравариантные компоненты которого равны (п°44)

$$Dx^i = dx^i + au^i + \sum_k x^k \omega^i_k(d).$$

Точно так же при разворачивании  $mm_3$ , она получит геометрическое приращение с компонентами:

$$\Delta x^i = \delta x^i + \delta u^i + \sum_k x^k \omega_k^i(\delta).$$

Разворачивание контура  $mm_1m_3$  дает при этом точку  $P_3$ , координаты которой в системе  $(R)$ , связанной с  $M$ , имеют вид:

$$x^i + Dx^i + \Delta x^i = D\Delta x^i;$$

разворачивание же контура  $mm_2m_3$  даст точку  $P'_3$  с координатами:

$$x^j + \Delta x^j + Dx^j + D\Delta x^j.$$

Смещение точки  $P_3$ , вызванное движением, ассоциированным с циклом, имеет в качестве контравариантных компонент выражения:

$$\nabla x^i = \Delta Dx^i - D\Delta x^i.$$

Вычисление дает:

$$\nabla x^i = \delta Dx^i + \sum_k Dx^k \omega_k^i(\delta) - d\Delta x^i - \sum_k \Delta x^k \omega_k^i(d).$$

Но

$$\begin{aligned} \delta Dx^i + \sum_k Dx^k \omega_k^i(\delta) &= \delta dx^i + \delta du + \sum_k \delta x^k \omega_k^i(d) + \sum_k x^k \delta \omega_k^i(d) + \\ &+ \sum_k dx^k \omega_k^i(\delta) + \sum_k du^k \omega_k^i(\delta) + \sum_{k,h} x^h \omega_h^k(d) \omega_k^i(\delta). \end{aligned}$$

Отсюда немедленно получается:

$$\begin{aligned} \nabla x^i &= \sum_k x^k \{ \delta \omega_k^i(d) - d\omega_k^i(\delta) - \sum_h [\omega_k^h(\delta) \omega_h^i(d) - \omega_k^h(d) \omega_h^i(\delta)] \} + \\ &+ \sum_k [du^k \omega_k^i(\delta) - \delta u^k \omega_k^i(d)]. \end{aligned}$$

Последняя сумма равна нулю, и мы получаем:

$$\nabla x^i = \sum_k \Omega_k^i(\delta, d) x^k. \quad (5)$$

То обстоятельство, что в правой части равенства член, не зависящий от  $x^i$ , равен нулю, как раз и показывает, что элементарное движение, ассоциированное с циклом, представляет собою вращение около начала цикла.

Величины  $\Omega_k^i(\delta, d)$  представляют собою смешанные компоненты системы бивекторов, определяющей это вращение. Ковариантными компонентами этой системы бивекторов будут величины:

$$\Omega_{ki}(\delta, d) = \sum_h g_{ih} \Omega_k^h(\delta, d).$$

Мы можем быть заранее уверены в справедливости соотношений

$$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} = 0;$$

и их проверим скоро вычислением.

## II. Тензор Римана-Христоффеля.

159. Посмотрим, каким образом цикл входит в компоненты ассоциированного с ним вращения. Выражения  $\Omega_i^j$  являются билинейными альтернированными формами дифференциалов  $du^i$ ; иными словами, они имеют вид:

$$\Omega_i^j(d, \delta) = \sum_{(rs)} R_{rs}^j (du^r \delta u^s - du^s \delta u^r) = \sum_{(rs)} R_{rs}^j p^{rs};$$

следовательно, они линейны относительно контравариантных компонент  $p^{rs}$  бивектора, определенного параллелограмом, связанным с нашим циклом. Таким образом, обозначая через  $a_i^j$  смешанные компоненты системы бивекторов, выражающей вращение, ассоциированное с циклом, мы получим формулу:

$$a_i^j = \sum_{(rs)} R_{rs}^j p^{rs}. \quad (6)$$

Эта формула является общей в том смысле, что она не связана с формой контура цикла; важно только, чтобы последний охватывал поверхность, эквивалентную бивектору с компонентами  $p^{rs}$ . Этот результат мы примем без доказательства.

Величины  $R_{rs}^j$  определяют так называемый *тензор Римана-Христоффеля*.

Вычисление этих величин не представляет никаких затруднений. Получаем:

$$R_{rs}^j = \frac{\partial \Gamma_{is}^j}{\partial u^r} - \frac{\partial \Gamma_{ir}^j}{\partial u^s} - \sum_k [\Gamma_{ir}^k \Gamma_{ks}^j - \Gamma_{is}^k \Gamma_{kr}^j], \quad (7)$$

причем, очевидно:

$$R_{rs}^j = -R_{sr}^j.$$

160. Займемся теперь вычислением ковариантных компонент системы бивекторов, определяющей вращение, ассоциированное с некоторым данным циклом. Имеем по определению:

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} &= \sum_k g_{jk} \Omega_i^k = \sum_k g_{jk} \{ (\omega_i^k)' - \sum_h [\omega_i^h \omega_h^k] \} = \\ &= \left( \sum_k g_{jk} \omega_i^k \right)' - \sum_k [dg_{jk} \omega_i^k] - \sum_h [\omega_i^h \omega_h^k] = \\ &= (\omega_{ij})' - \sum_k [\omega_{jk} \omega_i^k] - \sum_k [\omega_{kj} \omega_i^k] - \sum_k [\omega_i^k \omega_{kj}]; \\ \Omega_{ij} &= (\omega_{ij})' + \sum_k [\omega_i^k \omega_{jk}] = (\omega_{ij})' + \sum_k [\omega_{ik} \omega_j^k]. \end{aligned} \quad (8)$$

Оба полученные выражения эквивалентны, потому что

$$\sum_k [\omega_i^k \omega_{jk}] = \sum_{k,h} g_{kh} [\omega_i^k \omega_j^h] = \sum_h [\omega_{ih} \omega_j^h].$$

Формула (8) показывает, что замена  $i$  на  $j$  и  $j$  на  $i$  связана с переменной знака у  $\mathcal{Q}_{ij}$ ; действительно, равенство

$$dg_{ij} = \omega_{ij} + \omega_{ji}$$

дает:

$$0 = \omega'_{ij} = \omega'_{ji}.$$

К формуле (8) можно притти еще и иным путем, быть может более коротким. Действительно, величина  $\mathcal{Q}_{ij}(\delta, d)$  является  $j$ -й ковариантной компонентой вектора

$$\nabla \mathbf{e}_i = \delta d\mathbf{e}_i - d\delta \mathbf{e}_i;$$

таким образом мы получаем:

$$\mathcal{Q}_{ij}(\delta, d) = (\delta d\mathbf{e}_i - d\delta \mathbf{e}_i) \cdot \mathbf{e}_j = \delta(d\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) - d(\delta \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) + \delta \mathbf{e}_i d\mathbf{e}_j - d\mathbf{e}_i \delta \mathbf{e}_j.$$

Далее имеем:

$$\begin{aligned} d\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j &= \omega_{ij}(d), \quad \delta \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \omega_{ij}(\delta); \\ \delta \mathbf{e}_i d\mathbf{e}_j &= \sum_k \omega_i^k(\delta) \omega_{jk}(d) = \sum_k \omega_{ik}(\delta) \omega_j^k(d), \\ d\mathbf{e}_i \delta \mathbf{e}_j &= \sum_k \omega_i^k(d) \omega_{jk}(\delta) = \sum_k \omega_{ik}(d) \omega_j^k(\delta); \end{aligned}$$

следовательно:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{ij}(\delta, d) &= \delta \omega_{ij}(d) - d\omega_{ij}(\delta) + \sum_k [\omega_i^k(\delta) \omega_{jk}(d) - \omega_i^k(d) \omega_{jk}(\delta)] = \\ &= \delta \omega_{ij}(d) - d\omega_{ij}(\delta) + \sum_k [\omega_{ik}(\delta) \omega_j^k(d) - \omega_{ik}(d) \omega_j^k(\delta)]. \end{aligned}$$

Мы снова получаем уравнения (8), только в иной записи.

Фактическое вычисление коэффициентов  $R_{ij,rs}$  формы  $\mathcal{Q}_{ij}$  выполняется без труда, если в качестве исходного пункта взять эти уравнения. Имеем:

$$R_{ij,rs} = \frac{\partial \Gamma_{ijs}}{\partial u^r} - \frac{\partial \Gamma_{ijr}}{\partial u^s} + \sum_{k,h} g^{kh} (\Gamma_{ikr} \Gamma_{jhs} - \Gamma_{iks} \Gamma_{jhr}).$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma_{ijs}}{\partial u^r} &= \frac{\partial}{\partial u^r} \left[ \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^s} \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^r \partial u^s} + \frac{\partial^2 g_{js}}{\partial u^i \partial u^r} - \frac{\partial^2 g_{is}}{\partial u^j \partial u^r} \right), \\ \frac{\partial \Gamma_{ijr}}{\partial u^s} &= \frac{\partial}{\partial u^s} \left[ \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^r} \right] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial u^r \partial u^s} + \frac{\partial^2 g_{jr}}{\partial u^i \partial u^s} - \frac{\partial^2 g_{ir}}{\partial u^j \partial u^s} \right). \end{aligned}$$

Следовательно:

$$R_{ij,rs} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 g_{ir}}{\partial u^j \partial u^s} + \frac{\partial^2 g_{js}}{\partial u^i \partial u^r} - \frac{\partial^2 g_{is}}{\partial u^j \partial u^r} - \frac{\partial^2 g_{jr}}{\partial u^i \partial u^s} \right) + \\ + \sum_{k,h} g^{kh} \left\{ \left[ \begin{smallmatrix} ir \\ k \end{smallmatrix} \right] \left[ \begin{smallmatrix} js \\ h \end{smallmatrix} \right] - \left[ \begin{smallmatrix} is \\ k \end{smallmatrix} \right] \left[ \begin{smallmatrix} jr \\ h \end{smallmatrix} \right] \right\}. \quad (9)$$

Следующие замечательные свойства симметрии *риманова символа*  $R_{ij,rs}$  являются непосредственным следствием из полученной нами формулы:

$$R_{ij,rs} = -R_{ji,rs} = -R_{ij,sr} \quad (10)$$

$$R_{ij,rs} = R_{rs,ij} \quad (11)$$

$$R_{ij,kh} + R_{ik,hj} + R_{ih,jk} = 0. \quad (12).$$

Нетрудно проверить, что из соотношений (10) и (12) вытекают соотношения (11).

### III. Риманова кривизна двумерных пространств <sup>1)</sup>

161. В случае двух измерений движение, связанное с элементарным циклом, сводится к вращению около начала  $M$  цикла. Если через  $d\sigma$  обозначить площадь, ограниченную циклом, а через  $Kd\sigma$  — угол поворота, отсчитанный в направлении положительного обхода цикла, то коэффициент  $K$  будет называться *римановой кривизной* пространства в точке  $M$ .

Если через  $a^{12} = -R_{12}^{12} p^{12}$  обозначить контравариантную компоненту бивектора, выражающего вращение, то получим:

$$Kd\sigma = \sqrt{g} a^{12} = -R_{12}^{12} \sqrt{g} p^{12} = -R_{12}^{12} d\sigma;$$

следовательно,

$$K = -R_{12}^{12} = -\frac{1}{g} R_{12,12}.$$

В качестве примера возьмем поверхность в обыкновенном пространстве и будем ее рассматривать как двумерное риманово пространство. Чтобы получить риманову кривизну этой поверхности в точке  $A$ , отнесем ее к трем взаимно перпендикулярным осям  $Ax$ ,  $Ay$ ,  $Az$  с началом в точке  $A$ , причем ось  $Az$  пусть будет направлена по нормали к поверхности. Взяв в качестве координат на поверхности  $x$  и  $y$  и обозначая, как обычно, через  $p, q, r, s, t$  частные производные двух первых порядков от функции  $z$ , определяющей поверхность, по переменным  $x, y$ , мы приддем к вычислению формы:

$$\Omega_{12} = \omega'_{12} + \sum_i [\omega_1^i \omega_2^i].$$

<sup>1)</sup> Здесь полезно воспользоваться «Théorie des surfaces» Г. Дарбу (*G. Darboux*), (т. III, книга VI).



Но в точке  $A$  все коэффициенты суммы, стоящей в правой части равенства, равны нулю, потому что  $dx^2 + dy^2$  является евклидовым линейным элементом, соприкасающимся в точке  $A$  с линейным элементом поверхности.

С другой стороны

$$ds^2 = (1 + p^2) dx^2 + 2pq dx dy + (1 + q^2) dy^2,$$

$$\begin{aligned} \omega_{12} &= \Gamma_{121} dx + \Gamma_{122} dy = \begin{bmatrix} 11 \\ 2 \end{bmatrix} dx + \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \end{bmatrix} dy = \\ &= \left( \frac{\partial g_{12}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial y} \right) dx + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial x} dy = q (rdx + sdy) = q dp. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\omega'_{12} = [dq dp] = [(sdx + tdy)(rdx + sdy)] = (s^2 - rt) [dx dy].$$

Таким образом в точке  $A$  получаем:

$$K = -R_{12, 12} = rt - s^2.$$

Но если в качестве осей  $x$  и  $y$  взять главные касательные в точке  $A$ , то получим в этой точке:

$$r = \frac{1}{R_1}, \quad t = \frac{1}{R_2}, \quad s = 0,$$

где  $\frac{1}{R_1}$  и  $\frac{1}{R_2}$  — обе главные кривизны. Значит,

$$K = \frac{1}{R_1 R_2};$$

*риманова кривизна поверхности в данной точке равна ее полной кривизне* — произведению двух главных кривизн. Как известно, Гаусс первый доказал, что выражение  $\frac{1}{R_1 R_2}$  вполне определяется линейным элементом поверхности.

**162.** Интересно на частном примере разобрать движение, ассоциированное с некоторым циклом. Возьмем сферу радиуса  $R$  и малый круг на ней с полюсом  $P$  (фиг. 26). Обозначим через  $\alpha$  половину угла при вершине конуса, основанием которого служит наш малый круг, а вершиной — центр сферы. Чтобы развернуть окружность малого круга на плоскость, нужно развернуть на плоскость разvertyающуюся поверхность, описанную около сферы вдоль этой окружности: эта поверхность является конусом. Свяжем с каждой точкой  $M$  окружности две взаимно перпендикулярные оси:  $Mx$  — касательную к окружности, направленную в соответствии с выбранным нами направлением обхода, и  $My$  — касательную к меридиану, проходящему через  $M$ . Развертывание даст дугу окружности с центром в  $S$  радиуса  $R \operatorname{tg} \alpha$  (n°101), причем длина этой дуги будет равна длине окружности малого круга на сфере, а именно  $2\pi R \sin \alpha$ . Если теперь через  $\varphi$  обозначить угол  $A'SA$ , то получим:

$$R \operatorname{tg} \alpha (2\pi - \varphi) = 2\pi R \sin \alpha$$

или

$$\varphi = 2\pi(1 - \cos \alpha).$$

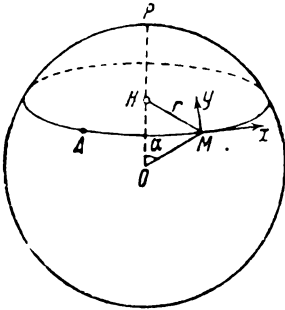
С другой стороны, площадь, ограниченная на сфере нашей окружностью, равна:

$$S = \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = 2\pi R^2 \int_0^\alpha \sin \theta d\theta = 2\pi R^2 (1 - \cos \alpha);$$

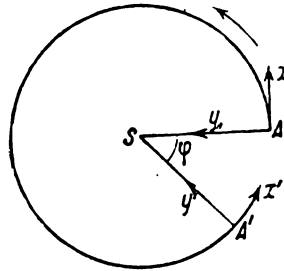
таким образом мы получаем:

$$\varphi = \frac{S}{R^2}.$$

Мы видим, что вращение, благодаря которому оси системы  $x'Ay'$  становятся параллельными осям системы  $xAy$ , сводится к повороту на угол  $\varphi$ ,



Фиг. 26.



Фиг. 27.

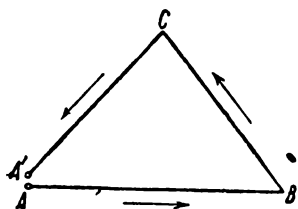
выполненному в направлении обхода цикла. Угол поворота равен, таким образом, произведению площади  $S$ , охваченной циклом, на кривизну сферы  $\frac{1}{R^2}$ .

С этим поворотом связано параллельное перемещение, именно то, которое переводит точку  $A'$  в  $A$ ; длина пути равна при этом  $2R \operatorname{tg} \alpha \sin \frac{\varphi}{2}$ . Она не равна нулю. Но если цикл бесконечно мал, то это параллельное перемещение бесконечно мало сравнительно с вращением; его главная часть равна нулю, если в качестве основной бесконечной малой взять площадь, ограниченную циклом.

163. В случае произвольной поверхности мы можем дать простую геометрическую интерпретацию римановой кривизны; интерпретацию, связанную со знаменитой теоремой Гаусса относительно суммы углов геодезического треугольника.

Рассмотрим цикл, образованный весьма малым геодезическим треугольником, лежащим на данной поверхности. Если его развернуть на плоскость, касательную к поверхности в одной из его вершин  $A$ , то мы получим прямолинейный треугольник  $ABCA'$  (фиг. 28), причем точка  $A'$  с достаточной степенью точности может считаться совпадающей с  $A$ . Сторона  $AB$ , с которой мы начали развертывание, является касательной

к стороне  $ab$  геодезического треугольника. Что касается направления стороны  $ac$ , то чтобы его найти, нужно повернуть направление  $AC$  на угол  $Kd\sigma$ . Но при разворачивании углы  $\hat{B}$  и  $\hat{C}$  сохраняются; угол  $\hat{BAC}$  прямолинейного треугольника равен  $\pi - \hat{B} - \hat{C}$ ; чтобы найти угол  $\hat{A}$  геодезического треугольника, нужно повернуть  $AC$  на угол  $Kd\sigma$ ; следовательно,



Фиг. 28.

откуда:

$$\pi - \hat{B} - \hat{C} - Kd\sigma = \hat{A},$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi = Kd\sigma. \quad (13)$$

Это и есть теорема Гаусса.

В частном случае сферы радиуса  $R$  левая часть уравнения (13) (сферический избыток) равна, как известно, площади сферического треугольника, деленной на  $R^2$  (теорема Альбера Жира).

Таким образом риманова кривизна в некоторой точке поверхности (или иного двумерного риманова пространства) может быть определена как предел отношения  $\frac{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi}{d\sigma}$ , в котором  $A, B, C$  являются углами бесконечно малого геодезического треугольника, для которого точка  $A$  служит вершиной и площадь которого равна  $d\sigma$ .

164. Став на более общую точку зрения, мы можем рассмотреть произвольный бесконечно малый цикл. При разворачивании этого цикла касательные в двух достаточно близких точках  $M, M'$ , соответствующих точкам  $m, m'$  цикла, образуют угол, равный геодезическому углу смежности цикла, именно  $\frac{ds}{\rho_g}$ , причем  $\rho_g$  обозначает радиус геодезической кривизны (п° 100). Направление касательной в исходной точке  $A$  развернутого цикла поворачивается в конечном счете на угол  $\int \frac{ds}{\rho_g}$ ; дополнительный угол, на который его нужно повернуть, чтобы получить  $2\pi$ , разняется, следовательно,  $Kd\sigma$ , и мы получаем формулу, тоже данную Гауссом:

$$2\pi - \int \frac{ds}{\rho_g} = Kd\sigma;$$

эту формулу можно распространить на произвольный цикл. При этом получим:

$$2\pi - \int \frac{ds}{\rho_g} = \iint Kd\sigma.$$

Теорема о геодезическом треугольнике является частным случаем этой формулы. В случае геодезического многоугольника формула принимает вид:

$$s - (n - 2)\pi = \iint Kd\sigma, \quad (14)$$

$s$  здесь — сумма углов многоугольника, а  $n$  — число его сторон.

165. Предыдущая формула приводит к интересным заключениям, если ее приложить к замкнутому риманову пространству с повсюду правильной метрикой. Если разбить это пространство на геодезические многоугольники и обозначить через  $F$  число многоугольников, через  $S$  — общее число их вершин и через  $A$  — общее число сторон, то сумма в левой части равенства (14) будет равна

$$2\pi(F + S - A);$$

таким образом мы получаем:

$$F + S - A = \frac{1}{2\pi} \int \int K d\sigma,$$

причем последний интеграл должен быть распространен на все пространство.

Известно, что целое число  $F + S - A$  зависит только от топологических свойств пространства. Если пространство гомеоморфно поверхности сферы, то это целое число равно двум, и мы получаем формулу:

$$\int \int K d\sigma = 4\pi,$$

которая показывает, что среднее значение римановой кривизны пространства равно  $\frac{4\pi}{S}$ , если через  $S$  обозначена полная поверхность этого пространства. Таким образом на многообразии, гомеоморфном сфере, нельзя определить метрику, сообщающую многообразию риманову кривизну, всюду отрицательную или равную нулю.

Если пространство гомеоморфно эллиптической (или проективной) плоскости, то среднее значение его кривизны равно только  $\frac{2\pi}{S}$ .

Если пространство гомеоморфно тору, то это среднее значение равно нулю. Действительно, мы уже видели, что на торе можно установить повсюду евклидову метрику.

Впрочем, все эти результаты становятся очевидными, если ограничиться рассмотрением замкнутых поверхностей обычного пространства, так как величина  $K d\sigma$ , по теореме Гаусса, дает нам ориентированную площадь сферического отображения поверхности.

#### IV. Риманова кривизна трехмерных пространств

166. Чтобы изучить риманову кривизну в точке  $A$  трехмерного пространства, мы предположим, что местная координатная система, связанная с точкой  $A$ , является прямоугольной. Тензор Римана-Христоффеля будет иметь шесть существенных компонент, которые для краткости мы будем обозначать следующим образом: мы положим:

$$\left. \begin{aligned} R_{23, 23} &= -K_{11}, \\ R_{31, 31} &= -K_{22}, \\ R_{12, 12} &= -K_{33}, \\ R_{31, 12} = R_{12, 31} &= -K_{13}, \\ R_{12, 23} = R_{23, 12} &= -K_{21}, \\ R_{23, 31} = R_{31, 23} &= -K_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Каждый элементарный цикл с началом в  $A$  может быть определен с помощью вектора, являющегося дополнением к бивектору, ограниченному циклом. Если через  $\alpha, \beta, \gamma$  обозначить направляющие косинусы нормали к элементарной площадке, содержащей цикл, и если через  $d\sigma$  обозначить площадь, ограниченную циклом, то величины

$$\alpha d\sigma, \beta d\sigma, \gamma d\sigma$$

определяют бивектор, ограниченный циклом.

Вращение, ассоциированное с циклом, тоже может быть представлено с помощью вектора, отложенного на оси вращения; обозначим его компоненты так:

$$p d\sigma, q d\sigma, r d\sigma.$$

Тогда

$$\begin{aligned} p d\sigma &= -(R_{23, 23} \alpha d\sigma + R_{23, 31} \beta d\sigma + R_{23, 12} \gamma d\sigma) = \\ &= (K_{11} \alpha + K_{12} \beta + K_{13} \gamma) d\sigma. \end{aligned}$$

Следовательно, можно написать:

$$\left. \begin{aligned} p &= K_{11} \alpha + K_{12} \beta + K_{13} \gamma, \\ q &= K_{21} \alpha + K_{22} \beta + K_{23} \gamma, \\ r &= K_{31} \alpha + K_{32} \beta + K_{33} \gamma. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Будем называть римановой кривизной пространства  $K$  в точке  $A$  в направлении заданной элементарной площадки проекцию на эту площадку вектора  $(p, q, r)$ , изображающего вращение, отнесенное к единице поверхности, ассоциированное с циклом, ограничивающим площадку. Имеем:

$$\begin{aligned} K &= p\alpha + q\beta + r\gamma = \\ &= K_{11}\alpha^2 + K_{22}\beta^2 + K_{33}\gamma^2 + 2K_{23}\beta\gamma + 2K_{31}\gamma\alpha + 2K_{12}\alpha\beta. \end{aligned} \quad (17)$$

Правая часть этого равенства представляет собою квадратичную форму, которую мы обозначим  $\Phi(\alpha, \beta, \gamma)$ .

167. Важно заметить, что, зная риманову кривизну пространства в направлении всех элементарных площадок, проходящих через точку  $A$ , мы фактически знаем и тензор Римана-Христоффеля, который вполне определяется шестью коэффициентами формы  $\Phi$ .

Закон изменения римановой кривизны в направлении переменной элементарной площадки геометрически формулируется достаточно просто. Рассмотрим в евклидовом пространстве, касательном в точке  $A$ , поверхность второго порядка с центром в  $A$ , определяемую уравнением:

$$\Phi(x, y, z) = 1.$$

Назовем ее *индикатриссой Римана*. Риманова кривизна в направлении данной площадки может быть получена так. К заданной площадке про-

Водится в точке  $A$  нормаль и берется точка  $P$ , в которой она пересекается с римановой индикатриссой. При этом получаем:

$$K = \frac{1}{AP^2}.$$

Действительно, координаты точки  $P$  равны  $\alpha\rho, \beta\rho, \gamma\rho$ ; значит,

$$1 = \Phi(\alpha\rho, \beta\rho, \gamma\rho) = \rho^2 \Phi(\alpha, \beta, \gamma) = K\rho^2,$$

откуда

$$K = \frac{1}{\rho^2}.$$

Индикатрисса Римана может быть мнимым эллипсоидом (в этом случае кривизна пространства положительна во всех направлениях), действительным эллипсоидом (кривизна отрицательна во всех направлениях), гиперболоидом, эллиптическим или гиперболическим цилиндром, или же, наконец, системой двух параллельных плоскостей. Индикатрисса исчезает в случае евклидова пространства.

Пространство называется *изотропным* в точке  $A$ , если его риманова индикатрисса представляет собою сферу: в этом случае говорят, что риманова кривизна пространства в точке  $A$  постоянна (локально).

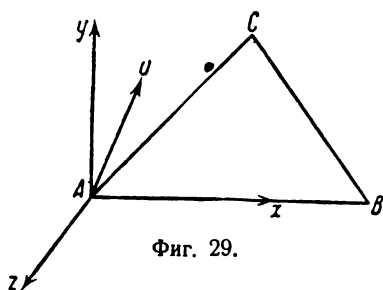
Если мы вернемся теперь к формулам (16), дающим отнесенное к единице поверхности вращение, ассоциированное с некоторым циклом, то мы без труда заметим, что *ось этого вращения перпендикулярна к диаметральной плоскости, сопряженной с нормалью к площадке цикла относительно римановой индикатриссы*. Вращение происходит вокруг нормали к циклу в том и только в том случае, когда эта нормаль является одной из осей римановой индикатриссы. *Направления осей римановой индикатриссы называются главными направлениями (Риччи) пространства в точке  $A$* . Они становятся неопределенными, если пространство изотропно в точке  $A$ .

168. Теперь мы можем, наконец, отдать себе отчет в том, почему существование *вполне геодезических поверхностей* в произвольном римановом пространстве представляет собою исключительный случай. Действительно, если некоторая поверхность является вполне геодезической, то нормаль к этой поверхности, переносимая параллельно себе самой вдоль цикла, лежащего на этой поверхности, все время будет оставаться нормалью и, следовательно, возвратится к исходному положению. Следовательно, вращение, ассоциированное с любым элементарным циклом, лежащим на поверхности, имеет свою осью нормаль цикла. Таким образом *вполне геодезическая поверхность в каждой из своих точек должна быть нормальна одному из главных направлений в этой точке*.

Эта теорема, которою мы обязаны Риччи, показывает, что в произвольном римановом пространстве не существует, вообще говоря, вполне геодезических поверхностей. Если все главные направления различны, то существует самое большее три однопараметрических семейства вполне геодезических поверхностей; для того чтобы эта возможность осуществилась, необходимо, чтобы каждое из уравнений в полных дифференциалах, кото-

рые выражают, что нормаль к поверхности является главным направлением, было *вполне интегрируемым*. Однако это условие недостаточно. Более глубокое исследование показывает, что *только евклидово пространство допускает трижды ортогональную систему, построенную из вполне геодезических поверхностей*.

169. Можно распространить на трехмерные пространства теорему Гаусса относительно суммы углов геодезического треугольника. Рассмотрим точку  $A$  риманова пространства и элементарную площадку, проходящую через эту точку; проведем через  $A$  две достаточно малые дуги геодезических  $Ab$  и  $Ac$ , касательные к нашей площадке, и проведем геодезическую  $bc$ . Развернем цикл  $Abc$  на евклидово пространство, касательное к риманову в точке  $A$ , и пусть  $ABC$  будет полученный в результате этой операции прямолинейный треугольник (фиг. 29). Возьмем



Фиг. 29.

три взаимно перпендикулярные оси с началом в точке  $A$ ; пусть ось  $Ax$  направлена по  $AB$ , ось  $Ay$  лежит в рассматриваемой элементарной площадке, ось  $Az$  перпендикулярна к ней. Представим себе еще касательную  $Au$  к геодезической  $Ac$  в точке  $A$ . От  $AC$  к  $Au$  можно перейти посредством вращения  $(pd\sigma, qd\sigma, rd\sigma)$ , ассоциированного с циклом  $Abc$ . Обратно, переход от  $Au$  к  $AC$  совершается посредством вращения  $(-pd\sigma, -qd\sigma, -rd\sigma)$ . Рассмотрим угол

между осью  $Ax$  и направлением  $Au$ , к которому, собственно и прилагается наше вращение. Начальное значение этого угла равно  $\hat{A}$ , конечное:  $\pi - \hat{B} - \hat{C}$ . Но вращение  $(-pd\sigma, -qd\sigma, -rd\sigma)$  может быть разложено на три вращения: одно — вокруг оси  $Au$ , другое — вокруг  $AB$  и третье  $(-rd\sigma)$  — вокруг  $Az$ . Ни одно из двух первых не меняет угла между  $Au$  и  $Ax$ ; последнее уменьшает его на  $rd\sigma$ ; таким образом мы получаем:

$$\hat{A} - (\pi - \hat{B} - \hat{C}) = rd\sigma$$

или

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi = rd\sigma.$$

Но  $r$  как раз дает нам кривизну  $K$  пространства в направлении рассматриваемой элементарной площадки. Мы получаем таким образом обобщенную формулу Гаусса:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi = Kd\sigma.$$

170. Существует, наконец, обобщение теоремы о том, что риманова кривизна поверхности, вложенной в евклидово пространство, равняется ее полной кривизне.

Пусть в произвольном римановом пространстве задана поверхность  $(S)$ . Выберем на этой поверхности произвольную систему координат  $u, v$ .

Положение любой точки пространства  $P$  можно тогда будет определить посредством координат  $u, v$  точки  $M$  поверхности, которую находим, опуская из  $P$  геодезическую нормаль  $PM$ , и посредством длины  $w$  дуги  $MP$ . В этой системе координат линейный элемент пространства имеет вид:

$$ds^2 = g_{11} du^2 + 2g_{12} dudv + g_{22} dv^2 + dw^2.$$

Линейный элемент поверхности получается отсюда, если положить  $w = 0$ :

$$d\sigma^2 = g_{11} du^2 + 2g_{12} dudv + g_{22} dv^2.$$

Нетрудно видеть, что величины  $g^{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) имеют в любой точке поверхности одно и то же значение, независимо от того, рассматриваются ли они как коэффициенты метрической формы (с поднятыми индексами) объемлющего пространства или же самой поверхности. Действительно, в обоих случаях имеем:

$$\frac{g^{11}}{g_{22}} = \frac{g^{12}}{-g_{12}} = \frac{g^{22}}{g_{11}} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

То же можно сказать относительно величин  $\Gamma_{ikj}$  и  $\Gamma_{ij}^k$ , индексы которых принимают значения 1 и 2. Действительно, в выражение

$$\Gamma_{ikj} = \left[ \begin{matrix} ij \\ k \end{matrix} \right]$$

входят только частные производные коэффициентов  $g_{11}, g_{12}, g_{22}$  относительно переменных  $u$  и  $v$ ; что касается выражений  $\Gamma_{ij}^k$ , то они выводятся из  $\Gamma_{ikj}$  с помощью коэффициентов  $g^{11}, g^{12}$  и  $g^{22}$ .

Установив это, мы видим, что внутренняя кривизна поверхности дается формой  $\Omega_{12}$ , вычисленной в двумерном римановом пространстве, которое представляет собою наша поверхность; обозначая ее через  $(\Omega_{12})_i$ , получим:

$$(\Omega_{12})_i = \omega'_{12} + \sum_{k=1}^{k=2} [\omega_1^k \omega_{2k}].$$

Риманова кривизна объемлющего пространства в направлении элементарной площадки, касательной к поверхности, дается формой:

$$(\Omega_{12})_e = \omega'_{12} + \sum_{k=1}^{k=2} [\omega_1^k \omega_{2k}] + [\omega_1^3 \omega_{23}];$$

мы имеем таким образом:

$$(\Omega_{12})_e - (\Omega_{12})_i = [\omega_1^3 \omega_{23}].$$

Из этой формулы вытекает, что разность между обеими римановыми кривизнами в точке  $M$  поверхности зависит только от числовых значений коэффициентов форм  $\omega_1^3$  и  $\omega_{23}$  в этой точке; следовательно, она не меняется, если данную метрику заменить соприкасающейся метрикой.



в точке  $M$ . Возьмем, например, соприкасающуюся евклидову метрику; разность  $K_i - K_s$  сводится тогда к римановой кривизне поверхности, равной произведению  $\frac{1}{R_1 R_2}$  ее главных кривизн. Но эти главные кривизны не зависят от того, вычисляем ли мы их в римановой или же в соприкасающейся евклидовой метрике; мы получаем таким образом общую формулу:

$$K_i - K_s = \frac{1}{R_1 R_2}. \quad (18)$$

Эта формула выражает следующее: *внутренняя риманова кривизна поверхности в ее точке  $M$  равна римановой кривизне огибающего пространства в этой точке в направлении элементарной площадки, касательной к нашей поверхности, увеличенной на полную кривизну последней (произведение полных кривизн) в точке  $M$ .*

В частности *риманова кривизна пространства в точке  $M$  в направлении заданной элементарной площадки равна внутренней кривизне в точке  $M$  поверхности, геодезической в этой точке и касательной к этой элементарной площадке.*

Данное Риманом определение кривизны может быть связано с предыдущими рассуждениями. Действительно, Риман рассматривает геодезическую в  $M$  поверхность, касательную к данной элементарной площадке, и полную кривизну в гауссовом смысле, связанную с линейным элементом этой поверхности; таким образом получается то, что он называл кривизною пространства в данной точке и в данном направлении.

## V. Риманова кривизна пространств более чем трех измерений. Пространства постоянной римановой кривизны

171. В случае пространства произвольного числа  $n$  измерений вращение, ассоциированное с бесконечно малым циклом, выражается посредством системы бивекторов. Риманова кривизна пространства в направлении элементарной площадки цикла получится в результате скалярного умножения этой системы бивекторов на бивектор, определенный циклом, причем результат нужно еще разделить на квадрат площади, ограниченной циклом. Нетрудно видеть, что это определение в случае  $n=3$  совпадает с тем, которое было дано выше. Действительно, скалярное произведение бивектора  $(\alpha d\tau, \beta d\tau, \gamma d\tau)$ , характеризующего цикл, на бивектор  $(p d\tau, q d\tau, r d\tau)$ , характеризующий вращение, ассоциированное с циклом, равно:

$$(p\alpha + q\beta + r\gamma) d\sigma^2 = K d\tau^2.$$

Обозначая в общем случае контравариантные компоненты бивектора, характеризующего цикл, через  $p^{ij}$ , а ковариантные компоненты ассоциированного с циклом вращения — через  $a_{ij}$  получим:

$$a_{ij} = - \sum_{(kh)} \epsilon_{ij, kh} p^{kh},$$

следовательно,

$$Kd\sigma^2 = - \sum_{(ij), (kh)} R_{ij, kh} p^{ij} p^{kh}$$

или окончательно:

$$K = - \frac{\sum_{(ij), (kh)} R_{ij, kh} p^{ij} p^{kh}}{\sum_{(ij)} p^{ij} p_{ij}}. \quad (19)$$

172. Важно заметить, что, зная риманову кривизну пространства в точке  $M$  в направлении всех возможных элементарных площадок, проходящих через  $M$ , мы тем самым знаем значения всех компонент тензора Римана-Христоффеля в этой точке. Иными словами, из равенства

$$\sum_{(ij), (kh)} R_{ij, kh} p^{ij} p^{kh} = \sum_{(ij), (kh)} \bar{R}_{ij, kh} p^{ij} p^{kh}, \quad (20)$$

которое выполняется для всех бивекторов  $p^{ij}$ , следует равенство соответственных компонент тензоров  $R_{ij, kh}$  и  $\bar{R}_{ij, kh}$ . Можно сказать еще и так. Если риманова кривизна пространства в точке  $M$  равна нулю в направлении всех элементарных площадок, проходящих через  $M$ , то равны нулю и все компоненты тензора Римана-Христоффеля в этой точке.

Эта теорема далеко не очевидна, потому что в тождестве (20) переменные  $p^{ij}$  не являются независимыми, так как компоненты бивектора связаны некоторыми соотношениями. Введем независимые переменные, определяя бивектор посредством двух произвольных векторов  $X^i$  и  $Y^j$ ; тогда тождество (20) примет вид:

$$\sum_{i, j, k, h} R_{ij, kh} X^i Y^j X^k Y^h = \sum_{i, j, k, h} \bar{R}_{ij, kh} X^i Y^j X^k Y^h;$$

теперь оно должно быть справедливо при любых значениях переменных  $X^i$  и  $Y^j$ . Приравнявая последовательно между собою коэффициенты при  $(X^i)^2 (Y^j)^2$ , при  $(X^i)^2 Y^j Y^k$ , при  $X^i X^k Y^j Y^h$ , где все индексы различны, получаем:

$$\left. \begin{aligned} R_{ij, ij} &= \bar{R}_{ij, ij}, \\ R_{ij, ih} + R_{ih, ij} &= \bar{R}_{ij, ih} + \bar{R}_{ih, ij}, \\ R_{ij, kh} + R_{kj, ih} + R_{ih, kj} + R_{kh, ij} &= \bar{R}_{ij, kh} + \bar{R}_{kj, ih} + \bar{R}_{ih, kj} + \bar{R}_{kh, ij}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Доказанные в п<sup>о</sup> 160 соотношения:

$$R_{ij, kh} = R_{kh, ij} \quad (11)$$

показывают нам, что

$$R_{ij, kh} = \bar{R}_{ij, kh}.$$

Далее, в силу (21) и (11) имеем:

$$R_{ij, kh} + R_{ih, kj} = \bar{R}_{ij, kh} + \bar{R}_{ih, kj}$$

или

$$R_{ij, kh} - \bar{R}_{ij, kh} = R_{ih, kj} - \bar{R}_{ih, kj},$$

откуда путем круговой перестановки индексов  $j, k, h$  получаем:

$$R_{ik, hj} - \bar{R}_{ik, hj} = R_{ij, kh} - \bar{R}_{ij, kh} = R_{ih, jk} - \bar{R}_{ih, jk}.$$

Общее значение этих трех разностей равно нулю, потому что сумма их равна нулю в силу соотношения

$$R_{ij, kh} + R_{ik, hj} + R_{ih, jk} = 0, \quad (12)$$

которому удовлетворяют компоненты  $\bar{R}$  и  $R$  (п° 160).

Теорема таким образом доказана.

Мы видим, что для доказательства нужны только те свойства  $R_{ij, kh}$ , которые выражаются равенствами (11), (12) и

$$R_{ij, kh} = -R_{ji, kh} = -R_{ij, hk}. \quad (10)$$

**173.** Предположим, в частности, что в рассматриваемой точке наше пространство *изотропно*, т. е. что оно имеет одну и ту же риманову кривизну в направлении всех возможных элементарных площадок, проходящих через эту точку. Равенство (19) напишется тогда так:

$$\sum_{(ij), (kh)} R_{ij, kh} p^{ij} p^{kh} = -K \sum_{(ij), (kh)} (g_{ik} g_{jh} - g_{ih} g_{jk}) p^{ij} p^{kh}.$$

Но так как коэффициенты квадратичной относительно  $p^{ij}$  формы, стоящей в правой части равенства, удовлетворяют соотношениям (10), (11) и (12), то мы получаем:

$$R_{ij, kh} = -K (g_{ik} g_{jh} - g_{ih} g_{jk}) \quad (22)$$

или в более наглядной форме:

$$\sum_{(kh)} R_{ij, kh} p^{kh} = -K p_{ij}. \quad (23)$$

Это равенство показывает, что ковариантные компоненты  $a_{ij}$  вращения, ассоциированного с элементарным циклом  $p^{ij}$ , имеют вид:

$$a_{ij} = K p_{ij}. \quad (24)$$

В переводе на геометрический язык это значит, что *вращение характеризуется бивектором, расположенным в элементарной площадке*

цикла, величина которого получается в результате умножения кривизны на площадь, ограниченную циклом. Направление вращения совпадает с направлением цикла, если  $K$  положительно, противоположно ему, если  $K$  отрицательно. Число  $K$  измеряет риманову кривизну пространства в точке  $M$ , причем, очевидно, нет надобности указывать, в каком направлении эта кривизна берется.

**174.** Обратное предложение тоже справедливо. Если вращение, ассоциированное с любым элементарным циклом, имеющим начало в  $M$ , характеризуется простым бивектором, расположенным в элементарной площадке цикла, то пространство изотропно в точке  $M$ .

Действительно, соотношения

$$\frac{a_{12}}{\rho_{12}} = \frac{a_{13}}{\rho_{13}} = \dots = \frac{a_{ij}}{\rho_{ij}} = \dots,$$

справедливые, согласно сделанным нами предположениям, для любого бивектора, образуют последовательность рациональных дробей относительно  $2n$  независимых переменных  $X^1, \dots, X^n; Y^1, \dots, Y^n$ , с помощью которых определяется произвольный бивектор. Эти рациональные дроби после всех возможных упрощений должны давать одну и ту же несократимую дробь. Но знаменатели  $X_i Y_j - X_j Y_i$  являются, очевидно, первыми между собою; следовательно, общим выражением рассматриваемых функций будет целый полином нулевой степени, т. е. *постоянная*. Таким образом мы получаем соотношения (24), в которых через  $K$  обозначена соответственно подобранная константа.

**175.** Возможен случай, когда мы заранее уверены в том, что пространство изотропно в некоторой данной точке  $M$ ; это будет тогда, когда пространство обладает свободной подвижностью вокруг этой точки. Действительно, в этом случае существует изометрическое преобразование, оставляющее неподвижной точку  $M$  и переводящее любую элементарную площадку в любую иную площадку, наперед нам заданную. Очевидно, такое преобразование не меняет римановой кривизны (зависящей только от линейного элемента); поэтому пространство будет иметь одну и ту же риманову кривизну в направлении всех возможных элементарных площадок, проходящих через  $M$ .

Если пространство удовлетворяет аксиоме свободной подвижности, то оно изотропно во всех своих точках, и его риманова кривизна тоже во всех точках постоянна; такое пространство называется пространством *постоянной римановой кривизны*.

Локально эллиптические или гиперболические пространства должны обладать этим свойством, потому что они удовлетворяют аксиоме свободной подвижности. Проверку посредством вычисления можно провести следующим образом:

Рассмотрим абсолют в некотором проективном пространстве. Обозначим через  $M$  точку (со скалярным квадратом, равным  $\frac{1}{K}$ , где  $K$  — кривизна пространства в том смысле, который был дан этому слову в гл. VI). Пусть, кроме того,  $e_1, \dots, e_n$  — точки, расположенные в гиперплоскости, полярной к точке  $M$  относительно абсолюта. Эти точки аналитически

определяются точно так же, как основные векторы локальной координатной системы, связанной с точкой  $M$ . Мы доказали (п° 146) справедливость формул:

$$\left. \begin{aligned} dM &= \sum_k du^k \mathbf{e}_k, \\ d\mathbf{e}_i &= -K \sum_k g_{ik} du^k \cdot M + \sum_k \omega_i^k \mathbf{e}_k, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

в которых символы  $dM$  и  $d\mathbf{e}_i$  обозначают настоящие дифференциалы.

Чтобы вычислить ковариантные компоненты  $\Omega_{ij}$  вращения, ассоциированного с элементарным циклом, вычислим сначала  $\omega_{ij}$ . Имеем:

$$\omega_{ij} = d\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j;$$

следовательно,

$$\omega_{ij}' = [d\mathbf{e}_j, d\mathbf{e}_i] = \sum_k [\omega_j^k \omega_{ik}] + K \left[ \sum_k g_{jk} du^k \sum_k g_{ik} du^k \right]. \quad (26)$$

Отсюда немедленно получается:

$$\Omega_{ij} = -K \left[ \sum_k g_{ik} du^k \sum_k g_{jk} du^k \right],$$

и далее

$$a_{ij} = \Omega_{ij}(\delta, d) = K p_{ij},$$

причем через  $p_{ij}$  обозначены ковариантные компоненты бивектора, ограниченного циклом.

Значит, пространство имеет постоянную риманову кривизну  $K$ .

Предыдущее вычисление приводит к другому важному заключению. Условия интегрируемости уравнений (25), в которых  $M$  и  $\mathbf{e}_i$  — неизвестные геометрические функции в проективной плоскости, в которой определена эллиптическая или гиперболическая метрика заданной кривизны  $K$ , даются как раз уравнениями (26), выражающими, что риманова кривизна имеет постоянное значение  $K$ . Следовательно, любое пространство, риманова кривизна которого постоянна, является либо локально-эллиптическим (если  $K$  положительно), либо локально-гиперболическим (если  $K$  отрицательно), либо локально-евклидовым пространством ( $K=0$ ). Действительно, развертывание его на эллиптическое, гиперболическое или евклидово пространство может быть осуществлено, так как уравнения (25), которыми дается это развертывание, вполне интегрируемы.

**176.** Теперь мы можем доказать теорему, в силу которой аксиома плоскости выполняется только в таких пространствах, которые изотропны в каждой из своих точек. Предположим сначала, что все  $(n-1)$ -мерные многообразия, геодезические в данной точке  $A$ , являются вполне геодезическими. Рассмотрим одно из этих многообразий и элементарный цикл, проходящий через  $A$  и лежащий целиком на этом многообразии; система бивекторов, характеризующая вращение, ассоциированное с этим циклом, может быть разложена на бивекторы, расположенные в  $(n-1)$ -мерной

элементарной площадке, касательной к многообразию, и бивектор, лежащий в элементарной площадке, содержащей нормаль к многообразию. Вращения, характеризующие первые бивекторы, оставляют неподвижным единичный вектор нормали многообразия; отсюда следует, что этим же свойством должно обладать и вращение, характеризующее последним бивектором; следовательно, этот бивектор должен равняться нулю. Если мы возьмем теперь какой-нибудь элементарный цикл с началом в  $A$ , то ассоциированное с ним вращение будет представлено простым бивектором, расположенным в элементарной площадке цикла, так как в противном случае можно было бы найти вектор, нормальный к этой элементарной площадке и не инвариантный относительно нашего вращения: многообразие  $V_{n-1}$ , геодезическое в  $A$  и нормальное к этому вектору, не было бы при этом вполне геодезическим.

Если вращение, ассоциированное с любым циклом, характеризуется простым бивектором, расположенным в элементарной площадке цикла, то пространство изотропно в точке  $A$ . Следовательно, если в пространстве выполняется аксиома плоскости, то оно изотропно во всех своих точках. В следующей главе мы увидим, что такое пространство непременно оказывается пространством постоянной кривизны.

## VI. Свернутый тензор кривизны. Главные направления

177. Тензор Римана-Христоффеля может быть свернут по двум индексам. При этом получается тензор:

$$R_{ij} = \sum_k R_i^k{}_{jk}.$$

С помощью формулы (11) легко показать, что этот тензор симметричен:

$$R_{ij} = R_{ji}.$$

Второе свертывание дает:

$$R = \sum_i R_i^i = \sum_{i,k} R_{ik}^{ik}.$$

Полученный скаляр называется *скалярной римановой кривизной* пространства.

Совокупность направлений, исходящих из одной точки и удовлетворяющих соотношению

$$\sum_{i,j} R_{ij} du^i du^j = 0,$$

определяет конус второго порядка, инвариантно связанный с точкой. Мы назовем его *конусом Риччи*. Риччи называет главные направления этого конуса главными направлениями пространства в рассматриваемой точке <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> G. Ricci, *Direzioni e invarianti principali di una varietà qualunque* (Atti R. Istit. Veneto, t. 63, 1904, стр. 1233—1239).

Главные направления становятся неопределенными, если в рассматриваемой точке пространство изотропно; но обратное предложение может не быть справедливым. Однако во всех случаях, когда это обстоятельство имеет место, обнаруживается существование изотропии иного рода, более широкой, чем изотропия, рассматривавшаяся до сих пор. Обе изотропии совпадают в случае  $n=3$ . В дальнейшем мы вернемся еще к этому понятию (п° 196).

## ТОЖДЕСТВА БЬЯНКИ

### I. Внешние дифференциальные формы<sup>1)</sup>

178. Назовем знакопеременными или, короче, внешними дифференциальными формами формы, которые встречаются под знаком кратного интегрирования. К этим формам приложимо своеобразное исчисление, о котором мы скажем несколько слов.

Возьмем, например, в обычном трехмерном пространстве двойной интеграл, распространенный на некоторый участок поверхности:

$$I = \iint P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

Входящие в дифференциальную форму

$$\bar{\omega} = P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

выражения  $dy dz$ ,  $dz dx$ ,  $dx dy$  обладают свойствами, несколько отличными от свойств обычных произведений. Если координаты точек поверхности интегрирования выразить в функции двух параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ; то величины  $\alpha$ ,  $\beta$  можно будет рассматривать как координаты точки некоторой вспомогательной плоскости; при этом интеграл  $I$  можно будет свести к обычному двойному интегралу, распространенному на некоторую область этой плоскости. Чтобы осуществить эту редукцию, символы

$$dy dz, \quad dz dx, \quad dx dy$$

заменяем соответственно выражениями:

$$\frac{D(y, z)}{D(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta, \quad \frac{D(z, x)}{D(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta, \quad \frac{D(x, y)}{D(\alpha, \beta)} d\alpha d\beta.$$

Отсюда видно, что  $dy dz$  не может быть тождественно с  $dz dy$ , так как последнее выражение приходится рассматривать как величину, *отличающуюся от первого знаком*.

Все это можно представить себе следующим образом. Введем два символа дифференцирования  $d_1$  и  $d_2$ , положив:

$$d_1 u = \frac{\partial u}{\partial \alpha} d\alpha, \quad d_2 u = \frac{\partial u}{\partial \beta} d\beta;$$

<sup>1)</sup> См. E. Cartan, Leçons sur les invariants intégraux (Paris, Hermann, 1922).



такие символы дифференцирования переместительны. С помощью этой системы обозначений можем написать:

$$dy dz = \begin{vmatrix} d_1 y & d_1 z \\ d_2 y & d_2 z \end{vmatrix}, \quad dz dx = \begin{vmatrix} d_1 z & d_1 x \\ d_2 z & d_2 x \end{vmatrix}, \quad dx dy = \begin{vmatrix} d_1 x & d_1 y \\ d_2 x & d_2 y \end{vmatrix}.$$

Выражения  $dy dz$ ,  $dz dx$ ,  $dx dy$  безусловно можно рассматривать как произведения, но как *произведения внешние* (в смысле Грассмана), так как знак произведения меняется при перемене порядка сомножителей.

Став на более общую точку зрения, можно ввести два произвольные символа дифференцирования  $d_1$  и  $d_2$ , подчинив их только условию переместительности. Если результаты операций  $d_1$  и  $d_2$  бесконечно малы, то можно покрыть поверхность интегрирования сеткой маленьких криволинейных параллелограмов, каждый из которых имеет соответственно следующие вершины:

$$\begin{aligned} & x, y, z; \\ & x + d_1 x, y + d_1 y, z + d_1 z; \\ & x + d_1 x + d_2 d_1 x, y + d_1 y + d_2 d_1 y, z + d_1 z + d_2 d_1 z; \\ & x + d_2 x, y + d_2 y, z + d_2 z; \end{aligned}$$

при этом интеграл  $I$  можно будет представить как сумму величин

$$P(d_1 y d_2 z - d_1 z d_2 y) + Q(d_1 z d_2 x - d_1 x d_2 z) + R(d_1 x d_2 y - d_1 y d_2 x),$$

распространенную на все элементарные параллелограммы.

Во избежание недоразумений условимся помещать внешнее произведение дифференциалов в прямые скобки, если только это произведение не стоит под знаком интеграла (ср. н° 45, 147, 157, 160, 175).

179. Предыдущие рассуждения распространяются на кратные интегралы любого числа измерений и приводят к дифференциальным формам, представляющим собою сумму членов вида:

$$A [dx_1 dx_2 \dots dx_p];$$

внешнее произведение в прямых скобках может быть заменено определителем  $p$ -го порядка, членами которого служат  $p$  символов дифференцирования, обладающих свойством переместительности. Это произведение меняет знак, если поменять местами любые два из его множителей (с этой точки зрения коэффициент  $A$  не может рассматриваться как сомножитель).

Если мы захотим подчеркнуть, какие именно  $p$  символов дифференцирования входят во внешнюю дифференциальную форму  $\bar{\omega}$  порядка  $p$ , то будем писать:

$$\bar{\omega}(d_1, d_2, \dots, d_p).$$

Если даны две внешние дифференциальные формы  $\bar{\omega}_1$  и  $\bar{\omega}_2$ , одна  $p$ -го, другая  $q$ -го порядка, то мы определим внешнее произведение двух форм

$[\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2]$  как формулу порядка  $(p+q)$ , которая получается в результате перемножения (внешнего) каждого члена первой формы на каждый член второй, причем порядок, в котором следуют друг за другом дифференциалы, должен приниматься во внимание. Если, например,  $\bar{\omega}_1$  — форма первого порядка,  $\bar{\omega}_2$  — второго, и если через  $\bar{\omega}_3$  обозначить их внешнее произведение, то, вводя три символа дифференцирования, обладающих переместительным свойством, получим:

$$\bar{\omega}_3(d_1 d_2 d_3) = \bar{\omega}_1(d_1) \bar{\omega}_2(d_2, d_3) - \bar{\omega}_1(d_2) \bar{\omega}_2(d_1, d_3) + \bar{\omega}_1(d_3) \bar{\omega}_2(d_1, d_2);$$

эту достаточно сложную формулу можно сокращенно записать так:

$$\bar{\omega}_3 = [\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2].$$

**180.** Существует целый ряд важных формул, позволяющих преобразовать кратный интеграл порядка  $p$ , распространенный на некоторую замкнутую область, в кратный интеграл порядка  $(p+1)$ , распространенный на область, для которой предыдущая область служит границей. Простейшей из этих формул является так называемая формула Грина:

$$\int P dx + Q dy = \int \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy; \quad (1)$$

далее следует формула Стокса:

$$\begin{aligned} \int P dx + Q dy + R dz = \\ = \int \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \end{aligned} \quad (2)$$

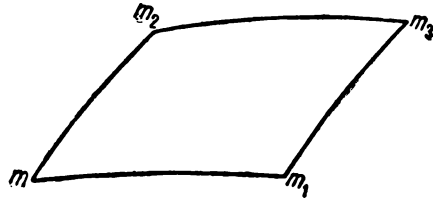
затем — формула Остроградского:

$$\iiint P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iiint \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz. \quad (3)$$

Аналогичные формулы существуют и в пространствах более чем трех измерений.

Метод, с помощью которого получают все эти формулы, может быть изложен весьма просто. Рассмотрим сначала случай криволинейного интеграла  $\int \bar{\omega}(d)$ , распространенного на замкнутый контур  $(C)$ . Пусть  $(S)$  — часть поверхности (в  $n$ -мерном пространстве), ограниченная кривою  $(C)$ . Введем

на  $(S)$  два символа дифференцирования  $d_1$  и  $d_2$ , обладающие свойством переместительности, и представим себе, что  $(S)$  покрыта соответствующей сетью бесконечно малых параллелограммов.



Фиг. 30.

Если  $m$  — вершина такого параллелограмма (фиг. 30), если  $m_1$  и  $m_2$  — вершины, которые получаются из нее в результате операций  $d_1$  и  $d_2$ , то, получим:

$$\begin{aligned} \int_m^{m_1} \bar{\omega} &= \bar{\omega}(d_1), \quad \int_m^{m_2} \bar{\omega} = \bar{\omega}(d_2), \\ \int_{m_1}^{m_2} \bar{\omega} &= \int_m^{m_2} \bar{\omega} + d_1 \int_m^{m_1} \bar{\omega} = \bar{\omega}(d_2) + d_1 \bar{\omega}(d_1), \\ \int_{m_1}^{m_2} \bar{\omega} &= \bar{\omega}(d_1) + d_2 \bar{\omega}(d_1); \end{aligned}$$

значит, интеграл  $\int \bar{\omega}$ , взятый по контуру параллелограмма, будет равен:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(d_1) + [\bar{\omega}(d_2) + d_1 \bar{\omega}(d_1)] - [\bar{\omega}(d_1) + d_2 \bar{\omega}(d_1)] - \bar{\omega}(d_2) = \\ = d_1 \bar{\omega}(d_2) - d_2 \bar{\omega}(d_1). \end{aligned}$$

Выражение в правой части равенства является попросту билинейным ковариантом дифференциальной формы  $\bar{\omega}$ . Если, например,  $Pdx$  есть один из членов формы  $\bar{\omega}$ , то имеем:

$$d_1(Pd_2x) - d_2(Pd_1x) = d_1Pd_2x - d_2Pd_1x = [dPdx].$$

Таким образом получается формула Стокса:

$$\int Pdx + Qdy + Rdz = \int dPdx + dQdy + dRdz, \quad (2)$$

которая может быть распространена на случай любого числа переменных.

Чтобы преобразовать теперь двойной интеграл в тройной, введем в трехмерной области интегрирования три символа дифференцирования, обладающих взаимной переместительностью; это позволит нам покрыть область сетью элементарных параллелепипедов. Нетрудно показать, что двойной интеграл  $\iint \bar{\omega}$ , распространенный по поверхности одного из этих параллелепипедов, равен

$$d_1 \bar{\omega}(d_2, d_3) - d_2 \bar{\omega}(d_1, d_3) + d_3 \bar{\omega}(d_1, d_2).$$

Пусть теперь  $A dx dy$  — один из членов формы  $\bar{\omega}$ . Нетрудно проверить тождество:

$$\begin{aligned} d_1 \left( A \begin{vmatrix} d_2x & d_3x \\ d_2y & d_3y \end{vmatrix} \right) + d_2 \left( A \begin{vmatrix} d_3x & d_1x \\ d_3y & d_1y \end{vmatrix} \right) + d_3 \left( A \begin{vmatrix} d_1x & d_2x \\ d_1y & d_2y \end{vmatrix} \right) = \\ = \begin{vmatrix} d_1A & d_2A & d_3A \\ d_1x & d_2x & d_3x \\ d_1y & d_2y & d_3y \end{vmatrix}; \end{aligned}$$

отсюда следует, что

$$\iint A dx dy = \iiint dA dx dy.$$

Обобщая этот результат, получаем: если

$$\bar{\omega} = \sum_{i,j} A_{ij} dx_i dx_j,$$

то

$$\iint \bar{\omega} = \iiint \sum_{i,j} dA_{ij} dx_i dx_j.$$

Обозначим дифференциальную форму третьего порядка, стоящую под знаком тройного интеграла, так:  $\bar{\omega}'$  и будем называть ее *внешней производной* формы  $\bar{\omega}$ .

Процесс внешнего дифференцирования, установленный для форм первого и второго порядка, может быть распространен на любые дифференциальные формы: внешней производной формы

$$A [dx_1 dx_2 \dots dx_p]$$

будет форма:

$$[dA dx_1 dx_2 \dots dx_p].$$

**181.** Внешнее дифференцирование обладает некоторыми важными свойствами, впрочем весьма простыми.

Пусть  $\bar{\omega}$  — внешняя дифференциальная форма,  $\bar{\omega}'$  — ее внешняя производная,  $m$  — множитель — заданная функция переменных. Имеем:

$$(m \bar{\omega})' = m \bar{\omega}' + [dm \bar{\omega}]. \quad (4)$$

Действительно, возьмем какой-нибудь член формы  $\bar{\omega}$ , например

$$A [dx_1 \dots dx_p];$$

ему в  $m \bar{\omega}$  соответствует член

$$mA [dx_1 \dots dx_p],$$

внешняя производная которого равна, очевидно,

$$m [dA dx_1 \dots dx_p] + A [dm dx_1 \dots dx_p];$$

складывая все аналогичные члены, убеждаемся в справедливости теоремы.

Более общей является следующая формула. Пусть  $\bar{\omega}_1$  и  $\bar{\omega}_2$  — две внешние дифференциальные формы, порядок которых соответственно равен  $p$  и  $q$ . Рассмотрим форму  $[\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2]$  порядка  $p+q$ . Пусть

$$A [dx_1 \dots dx_p], \quad B [dy_1 \dots dy_q]$$

— два произвольных члена этих форм. В форме  $[\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2]$  им соответствует член

$$AB [dx_1 \dots dx_p dy_1 \dots dy_q],$$

внешняя производная которого равна:

$$B[dA dx_1 \dots dx_p dy_1 \dots dy_q] + A[dB dx_1 \dots dx_p dy_1 \dots dy_q].$$

Второй член можно записать так:

$$(-1)^p A [dx_1 \dots dx_p dB dy_1 \dots dy_q].$$

Отсюда получается формула:

$$[\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2]' = [\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2] + (-1)^p [\bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2']. \quad (5)$$

**182.** Существует важная теорема, которой мы обязаны А. Пуанкаре, касающаяся последовательных внешних производных: *вторая внешняя производная любой дифференциальной формы тождественно равна нулю.* Если в обычном пространстве мы будем исходить от линейной формы

$$\omega = Pdx + Qdy + Rdz,$$

то теорема очевидна. Рассмотрим, в самом деле, произвольную замкнутую поверхность  $(S)$  и интеграл  $\iint \bar{\omega}'$ , распространенный на эту поверхность. Разделим поверхность на две части  $(S_1)$  и  $(S_2)$  с помощью некоторой замкнутой кривой  $(C)$ . Интеграл  $\iint \bar{\omega}'$ , распространенный на  $(S_1)$ , равен интегралу  $\int \bar{\omega}$ , взятому вдоль кривой  $(C)$ , пробегаемой в некотором определенном направлении; интеграл  $\iint \bar{\omega}'$ , распространенный на  $(S_2)$ , равен интегралу  $\int \bar{\omega}$ , взятому вдоль кривой  $(C)$ , но *пробегаемой в противоположном направлении*. Отсюда следует, что интеграл  $\iint \bar{\omega}'$ , распространенный на всю поверхность  $(S)$ , равен нулю, какова бы ни была эта замкнутая поверхность. Следовательно, внешняя производная от  $\bar{\omega}'$  тождественно равна нулю.

Аналитическое доказательство теоремы Пуанкаре для общего случая весьма просто. Пусть

$$A[dx_1 dx_2 \dots dx_p]$$

— произвольный член данной формы  $\bar{\omega}$ ; соответствующий член формы  $\bar{\omega}'$  будет:

$$[dA dx_1 \dots dx_p].$$

Чтобы найти внешнюю производную этой формы, мы будем рассматривать ее как внешнее произведение двух форм:  $dA$  и  $[dx_1 \dots dx_p]$ , и применим только что выведенную формулу (5). Но внешняя производная каждой из этих дифференциальных форм равна нулю, потому что  $dA$  является точным дифференциалом, а коэффициент при  $[dx_1 \dots dx_p]$  равен единице, т. е. постоянной.

Справедлива также теорема, обратная теореме Пуанкаре, но нам она не понадобится.

## II. Тензорные дифференциальные формы

183. На ряду со *скалярными* дифференциальными формами, которые изучались нами до сих пор, полезно рассматривать *тензорные* дифференциальные формы.

Будем считать сначала, что мы находимся в евклидовом пространстве, отнесенном к определенной декартовой системе координат. Рассмотрим  $p$ -мерную область интегрирования, с каждым элементом которой связан бесконечно малый *тензор*. Мы предположим, что каждая из компонент этого тензора является дифференциальной формой порядка  $p$ . Если, например, дело идет о смешанном тензоре второго порядка, то каждая из его компонент будет дифференциальной формой  $\bar{\omega}_i^j$ . Геометрическая сумма всех этих бесконечно малых тензоров будет тензором той же природы с компонентами  $\int \bar{\omega}_i^j$ .

Можно вычислить внешнюю производную от тензорной дифференциальной формы, причем, например, внешней производной от  $\bar{\omega}_i^j$  будет  $(\bar{\omega}_i^j)'$ .

Если евклидово пространство отнесено к произвольным криволинейным координатам, то с каждой точкой пространства будет связана локальная декартова система. Чтобы получить *абсолютную внешнюю* производную тензорной формы  $\bar{\omega}_i^j$ , придется ввести два постоянных вектора с компонентами  $X^i$  и  $Y_j$  и рассмотреть сумму:

$$\sum_{i,j} X^i Y_j \bar{\omega}_i^j;$$

эта сумма — *скалярная величина*, поэтому ее внешняя производная будет иметь вид:

$$\sum_{i,j} X^i Y_j (\bar{\omega}_i^j)' + \sum_{i,j} Y_j [dX^i \bar{\omega}_i^j] + \sum_{i,j} X^i [dY_j \bar{\omega}_i^j].$$

Поле векторов  $x, y$  постоянно, поэтому

$$dX^i + \sum_k X^k \omega_k^i = 0;$$

$$dY_j - \sum_k Y_k \omega_k^j = 0;$$

следовательно, искомая внешняя производная будет выражением:

$$\sum_{i,j} X^i Y_j \left\{ (\bar{\omega}_i^j)' - \sum_k [\omega_k^i \bar{\omega}_k^j] + \sum_k [\omega_k^j \bar{\omega}_k^i] \right\}.$$

Отсюда следует, что *абсолютная внешняя производная тензорной формы  $\bar{\omega}_i^j$  будет иметь вид:*

$$\Pi_i^j = (\bar{\omega}_i^j)' - \sum_k [\omega_k^i \bar{\omega}_k^j] + \sum_k [\omega_k^j \bar{\omega}_k^i]. \quad (6)$$

Впрочем, вычисление внешней производной производится точно так же, как если бы евклидово пространство было отнесено к определенной декартовой системе координат, только при этом частные производные коэффициентов формы  $\bar{\omega}_i^j$  должны быть заменены их *абсолютными* производными.

Так, например, если форма  $\bar{\omega}_i^j$  линейна:

$$\bar{\omega}_i^j = \sum_k a_{ik}^j du^k,$$

то мы получим:

$$\Pi_i^j = \sum_{k, h} a_{ikh}^j [du^h du^k],$$

причем тензор  $a_{ikh}^j$  будет *тензорной производной* от  $a_{ik}^j$ , а  $h$  будет обозначать индекс дифференцирования.

184. Рассмотрим теперь риманово пространство. Если взять в этом пространстве произвольную область интегрирования, то геометрическая сумма бесконечно большого числа бесконечно малых тензоров (например векторов), связанных с элементами области интегрирования, вообще *не будет иметь смысла*. Но если область интегрирования лежит целиком в бесконечно малой окрестности данной точки  $A$  риманова пространства, то линейный элемент риманова пространства можно будет заменить соприкасающимся с ним в точке  $A$  евклидовым линейным элементом. В этом случае тензорный интеграл будет иметь смысл, главная часть его будет тензором, заданным в точке  $A$ , причем эта главная часть *не будет зависеть от выбранной соприкасающейся евклидовой метрики*.

В частности рассмотрим  $(p+1)$ -мерную область и ее  $p$ -мерную границу. Тензорный интеграл, элементом которого служит  $\bar{\omega}_i^j$ , распространенный на эту границу, будет равен интегралу от  $\Pi_i^j$ , распространенному на всю заданную область; но в точке  $A$  коэффициенты  $\Pi_i^j$  связаны с соприкасающейся евклидовой метрикой только посредством величин  $\Gamma_{ih}^j$ , *которые совпадают с соответствующими коэффициентами римановой метрики*.

Таким образом можно определить тензорный интеграл, распространенный на бесконечно малую область риманова пространства; при этом операция абсолютного внешнего дифференцирования будет производиться по тем же правилам, что и в евклидовом пространстве.

- 185. Рассмотрим, например, векторный интеграл  $\int dM$ , взятый вдоль бесконечно малого цикла. Имеем:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^i &= du^i, \\ \Pi^i &= (du^i)' + \sum_k [\omega_k^i du^k] = \sum_{(kh)} (\Gamma_{kh}^i - \Gamma_{hk}^i) [du^h du^k] = 0. \end{aligned}$$

Поэтому *геометрическая сумма векторов  $\overline{MM'}$ , соединяющих соседние точки бесконечно малого цикла, равна нулю*.

Этот результат может быть связан с рассуждениями, изложенными в предыдущей главе. Действительно, возьмем бесконечно малый цикл с началом в  $A$ . Если складывая геометрически векторы  $\overline{MM'}$ , мы перенесем их для этого все параллельно из точек  $M$  в точку  $A$  вдоль нашего цикла (в направлении, обратном принятому нами обходу цикла), то полученная таким образом геометрическая сумма будет иметь ту же главную часть, что и искомый интеграл. Произведенная нами операция сводится к тому, что цикл разворачивается на касательное в точке  $A$  евклидово пространство, и уже в этом пространстве складываются геометрически векторы  $\overline{MM'}$ . Но при этом разворачивании цикл остается замкнутым; ясно, что искомая геометрическая сумма будет равняться нулю.

186. Легко проверить, что если  $\overline{\omega}^i$  и  $\theta^j$  — две векторные формы, то абсолютная внешняя производная формы  $[\overline{\omega}^i \theta^j]$  с двумя индексами получится как абсолютная внешняя производная произведения, т. е. будет равна

$$[\Pi^i \theta^j] + (-1)^h [\overline{\omega}^i \theta^j],$$

причем  $h$  обозначает здесь степень  $\overline{\omega}^i$ , а  $\Pi^i$  и  $\theta^j$  — абсолютные внешние производные соответственно от  $\overline{\omega}^i$  и  $\theta^j$ .

В частности, отсюда следует, что абсолютные внешние производные форм

$$\overline{\omega}^{ij} = [du^i du^j], \quad \overline{\omega}^{ijk} = [du^i du^j du^k], \dots$$

равны нулю.

Аналогично доказывается, что если взять, например, две тензорные формы  $\overline{\omega}^i$  и  $\theta^{jk}$ , одну векторную, другую — бивекторную, то тензорная форма

$$\chi^{ijk} = [\overline{\omega}^i \theta^{jk}] + [\overline{\omega}^j \theta^{ki}] + [\overline{\omega}^k \theta^{ij}]$$

будет иметь следующую внешнюю абсолютную производную:

$$[\Pi^i \theta^{jk}] + [\Pi^j \theta^{ki}] + [\Pi^k \theta^{ij}] + (-1)^h \{[\overline{\omega}^i \theta^{jk}] + [\overline{\omega}^j \theta^{ki}] + [\overline{\omega}^k \theta^{ij}]\},$$

причем через  $h$  обозначена степень формы  $\overline{\omega}^i$ , а через  $\Pi^i$  и  $\theta^{jk}$  — абсолютные внешние производные форм  $\overline{\omega}^i$  и  $\theta^{jk}$ .

### III. Тождества Бьянки

187. Будем исходить из формул, указанных в п<sup>о</sup> 157 и 160, дающих формы  $\Omega_i^j$  и  $\Omega_{ij}$ , определяющие риманову кривизну:

$$\Omega_i^j = (\omega_i^j)' - \sum_k [\omega_i^k \omega_k^j], \quad (7)$$

$$\Omega_{ij} = (\omega_{ij})' + \sum_k [\omega_{ik} \omega_j^k]. \quad (8)$$



Возьмем внешнюю производную от обеих частей уравнения (7); учитывая сами эти уравнения, мы придем к новым соотношениям:

$$(\Omega_i^j)' = - \sum_k [\Omega_i^k \omega_k^j] + \sum_k [\omega_i^k \Omega_k^j]. \quad (9)$$

Если мы теперь обратим внимание на формулу (6), то увидим, что соотношения (9) показывают, что абсолютная внешняя производная тензорной дифференциальной формы  $\Omega_i^j$  равна нулю.

Форма  $\Omega_i^j$  — второй степени; поэтому соотношения (9) в системе записи абсолютного дифференциального исчисления будут выглядеть так:

$$R_{i\alpha\beta}^j + R_{j\beta\gamma}^i + R_{i\gamma\alpha}^j = 0 \quad (i, j, \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots, n); \quad (10)$$

действительно, внешняя производная формы

$$\sum_{(\alpha\beta\gamma)} a_{\alpha\beta} [du^\alpha du^\beta]$$

имеет вид:

$$\sum_{(\alpha\beta\gamma)} \left( \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} + \frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial a_{\gamma\alpha}}{\partial u^\beta} \right) [du^\alpha du^\beta du^\gamma].$$

Соотношение (10) принято называть *тождествами Бьянки* (Bianchi), Тензорная форма  $\Omega_{ij}$  представляет собою ковариантную запись формы  $\Omega_i^j$ ; поэтому и ее абсолютная внешняя производная равна нулю; это дает нам тождества:

$$R_{ij, \alpha\beta\gamma} + R_{ij, \beta\gamma\alpha} + R_{ij, \gamma\alpha\beta} = 0, \quad (11)$$

которые, впрочем, могут быть выведены непосредственно из (10).

Тензор  $\Omega_{ij}$ , или, вернее, тензор  $-\Omega_{ij}$ , представляет собою систему бивекторов, определяющую вращение, ассоциированное с контуром элемента поверхности, лежащей в нашем пространстве. Отсюда сейчас же получается геометрическое истолкование тождеств Бьянки:

*Если рассматривать трехмерную элементарную область пространства, то бивекторы, характеризующие вращения, ассоциированные с элементами поверхности, ограничивающей этот объем, дают геометрическую сумму, равную нулю.*

#### IV. Теорема Пуанкаре в римановых пространствах

**188.** Мы видели (п° 182), что вторая внешняя производная дифференциальной формы тождественно равна нулю; в этом заключалась теорема Пуанкаре. В евклидовом пространстве эту теорему можно распространить и на любые тензорные дифференциальные формы. В римановом пространстве дело обстоит, вообще говоря, иначе.

Для определенности будем исходить из векторной дифференциальной формы с компонентами  $\bar{\omega}^i$ . Абсолютная внешняя производная ее имеет вид (п° 183):

$$\Pi^i = (\bar{\omega}^i)' + \sum_k [\omega_k^i \bar{\omega}^k].$$

Возьмем еще раз абсолютную внешнюю производную:

$$(\Pi^i)' + \sum_k [\omega_k^i \Pi^k];$$

вычисление дает немедленно:

$$\sum_k [\Omega_k^i \bar{\omega}^k].$$

Мы видим, что в это выражение входит риманова кривизна пространства, благодаря чему вторая абсолютная внешняя производная от  $\bar{\omega}^i$  не будет, вообще говоря, равняться нулю.

Дальнейшие абсолютные дифференцирования дают:

$$\begin{aligned} & \sum_k [\Omega_k^i \Pi^k], \\ & \sum_{k, h} [\Omega_k^h \Omega_h^i \bar{\omega}^k], \\ & \sum_{k, h} [\Omega_k^h \Omega_h^i \Pi^k], \\ & \dots \end{aligned}$$

Аналогичные выражения мы получим, отправляясь от любой тензорной формы.

Если в частности  $\omega^i = du^i$ , то внешняя абсолютная производная равна нулю; значит, и вторая производная должна равняться нулю, и мы получим:

$$\sum_k [du^k \Omega_k^i] = 0. \quad (12)$$

Это соотношение является следствием симметрии коэффициентов

$$\Gamma_{kh}^i = \Gamma_{hk}^i.$$

Если кривизна пространства постоянна, то нетрудно проверить, что все суммы

$$\sum_h [\Omega_k^h \Omega_h^i]$$

равны нулю; значит, четвертая производная любой тензорной формы не обходимо равняется нулю.

### V. Векторные кривизны. Первая их интерпретация

189. Вернемся к геометрическому истолкованию тождеств Бьянки. Они выражают то обстоятельство, что если рассматривать трехмерный элемент пространства, то геометрическая сумма бивекторов, характеризующих вращения, ассоциированные с элементами поверхности, ограничивающими область, равна нулю.

Здесь дело идет о *свободных* бивекторах. Посмотрим, что получится, если мы будем рассматривать *скользящие* бивекторы (п° 19). Тогда с каждым элементом поверхности будет ассоциирована система скользящих бивекторов

$$-\sum_{(ij)} [Me_i e_j] \Omega^{ij}.$$

Геометрическая сумма всех этих скользящих бивекторов даст систему скользящих бивекторов же и систему свободных тривекторов. первая система равна нулю в силу тождеств Бьянки. Остаются только свободные тривекторы. Интеграл

$$-\iint \sum_{(ij)} [Me_i e_j] \Omega^{ij}$$

дает, очевидно, систему:

$$-\iiint \sum_{(ijk)} (du^i \Omega^{jk} + du^j \Omega^{ki} + du^k \Omega^{ij}) [e_i e_j e_k].$$

Условимся говорить, что система тривекторов с компонентами

$$\bar{\omega}^{ijk} = -\{[du^i \Omega^{jk}] + [du^j \Omega^{ki}] + [du^k \Omega^{ij}]\} \quad (13)$$

определяет *тензорную кривизну* рассматриваемого трехмерного элемента. Совокупность ее коэффициентов определяет тензор шестого ранга. Вот его компоненты:

$$\begin{aligned} R_{ijk}^{ijk} &= R_{jk}^{jk} + R_{ki}^{ki} + R_{ij}^{ij}, \\ R_{ijh}^{ijk} &= R_{jh}^{jk} + R_{ih}^{ik} \quad (k \neq h), \\ R_{ihl}^{ijk} &= R_{hl}^{ik}, \\ R_{hln}^{ijk} &= 0 \quad (i, j, k, h, l, n \text{ различны}). \end{aligned}$$

190. Рассмотрим теперь ( $n \geq 4$ ) элементарную четырехмерную область пространства и тривекторные (свободные) кривизны трехмерных элементов, ее ограничивающих. Их геометрическая сумма будет дана абсолютной внешней производной формы  $\bar{\omega}^{ijk}$ ; эта производная равна нулю, потому что производная каждой из форм:  $du^i$  и  $\Omega^{jk}$  равна нулю. Итак, *геометрическая сумма свободных тривекторных кривизн элементов, ограничивающих бесконечно малую область четырех измерений, равна нулю.*

Если мы будем рассматривать *скользящие* тривекторные кривизны, то это равенство уже не будет иметь места и мы получим систему свободных, квадриквекторов с компонентами:

$$\begin{aligned}\bar{\omega}^{ijkh} &= [du^i \bar{\omega}^{jkh}] - [du^j \bar{\omega}^{ikh}] + [du^k \bar{\omega}^{ijh}] - [du^h \bar{\omega}^{ijk}] = \\ &= -2\{[du^i du^j \bar{\omega}^{kh}] + [du^j du^k \bar{\omega}^{ih}] + [du^k du^i \bar{\omega}^{jh}] + \\ &\quad + [du^i du^h \bar{\omega}^{jk}] + [du^j du^h \bar{\omega}^{ki}] + [du^k du^h \bar{\omega}^{ij}]\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Можно считать, что эта система квадриквекторов или, лучше, ее половина, определяет квадриквекторную кривизну (свободную) четырехмерного элемента пространства.

Ясно, каким путем можно продолжать эти операции и как можно определить  $p$ -векторную кривизну (свободную или скользящую)  $p$ -мерного элемента пространства. Таким образом мы приходим к следующей общей теореме:

**ТЕОРЕМА.** Если дана бесконечно малая  $p$ -мерная область риманова пространства, то геометрическая сумма  $(p-1)$ -векторных свободных кривизн элементов ее границы равна нулю; геометрическая сумма скользящих  $(p-1)$ -векторных кривизн этих же самых элементов равна (с точностью до числового множителя) свободной  $p$ -векторной кривизне области.

**191.** Посмотрим, в частности, что будет происходить в случае бесконечно малой области  $(n-1)$  измерений. Компонентами  $(n-1)$ -векторной кривизны будут:

$$\bar{\omega}^{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} = -[du^{i_1} \dots du^{i_{n-2}} \bar{\omega}^{i_{n-1} i_n}] + \dots$$

Имеем:

$$\begin{aligned}R_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}^{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} &= \sum_{(\alpha \beta)} R_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}^{\alpha \beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, n-1), \\ R_{i_1 i_2 \dots i_{n-2} i_n}^{i_1 i_2 \dots i_{n-2} i_n} &= \sum_k R_{i_n}^{k i_n}.\end{aligned}$$

Ориентируем пространство и обозначим через  $l_i d\tau$  ковариантные компоненты векторного дополнения рассматриваемого  $(n-1)$ -мерного элемента.

Обозначим далее через  $q_i d\tau$  векторное дополнение  $(n-1)$ -векторной кривизны данного элемента. Имеем:

$$\begin{aligned}q_{i_n} d\tau &= \sqrt{g} (i_1 i_2 \dots i_n) \bar{\omega}^{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} = \\ &= \sqrt{g} (i_1 i_2 \dots i_n) \left[ \sum_{(\alpha \beta)} R_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}^{\alpha \beta} \frac{1}{\sqrt{g}} (i_1 i_2 \dots i_n) l_{i_n} d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \sum_k R_{i_n}^{k i_n} \frac{1}{\sqrt{g}} (i_1 i_2 \dots i_n) l_{i_{n-1}} d\tau - \right. \\ &\quad \left. - \dots \dots \dots \right], \\ q_{i_n} &= l_{i_n} \sum_{(\alpha \beta)} R_{i_1 i_2 \dots i_{n-1}}^{\alpha \beta} \sum_{\alpha, k} R_{i_n}^{k i_n} l_{i_n}.\end{aligned}$$

Положим, наконец,

$$R = \sum_{(h,k)} R_{kh}^{hk}.$$

Имеем:

$$q_i = l_i R - \sum_{k,h} R_{hi}^{hk} l_k = l_i R - \sum_k R_{ik} l^k. \quad (15)$$

Таким образом вводится скалярная риманова кривизна  $R$  и свернутый тензор  $R_{ij}$  (п° 177).

Эти формулы можно интерпретировать следующим образом.

Рассмотрим в евклидовом пространстве, касательном к данному в некоторой точке, поверхность второго порядка с центром в этой точке, уравнение которой имеет вид:

$$\sum_{i,j} S_{ij} X^i X^j = R \sum_i X^i X_i - \sum_{i,j} R_{ij} X^i X^j = 1.$$

Назовем эту поверхность *индикатриссой Эйнштейна*.

Кривизна  $(n-1)$ -мерного элемента величиною  $d\sigma$  может быть представлена посредством вектора  $q_i d\tau$ , причем

$$q_i = \sum_k S_{ik} l^k, \quad (16)$$

где через  $l^k$  обозначены контравариантные компоненты единичного вектора. Мы видим, что *вектор нормален к диаметральной гиперплоскости, сопряженной с направлением  $l^i$  относительно индикатриссы Эйнштейна*.

Общая теорема п° 190 показывает нам при этом, что *геометрическая сумма векторов, соответствующих элементам границы  $n$ -мерной бесконечно малой области, равна нулю*.

Аналитически эта теорема сводится к тому, что дивергенция тензора  $S_{ij}$  равна нулю, т. е.

$$\sum_k S_i^k|_k = 0;$$

если  $n=4$ , то это — как раз те самые уравнения, которыми в теории Эйнштейна дается теорема о сохранении количества движения и энергии. Действительно, вектор кривизны трехмерного элемента пространства (пространства — времени) представляет собою не что иное, как количество движения и энергию, содержащиеся в этом элементе.

Замежим, что формулы (16) дают как частный случай формулы (16) п° 166, с помощью которых выражалась кривизна трехмерного пространства.

192. *Главные направления* Риччи (п° 177) являются одновременно главными направлениями и конуса Риччи и индикатриссы Эйнштейна. Теперь можно доказать общую теорему Риччи, которую мы разбирали уже для частного случая  $n=3$  (п° 168).

Представим себе вполне геодезическое многообразие  $V_{n-1}$ . Если нормаль к этому многообразию переносить параллельно вдоль любого пути, лежащего на  $V_{n-1}$ , то она остается нормалью; следовательно, вращение, ассоциированное с любым циклом, лежащим на многообразии, оставляет ее неизменной. Таким образом система бивекторов, ассоциированная с таким циклом, является касательной к многообразию. Отсюда немедленно следует, что система тривекторов, связанная с трехмерным элементом многообразия, тоже является касательной к  $V_{n-1}$ , потому что она представляет собою сумму касательных бивекторов. Рассуждение автоматически распространяется на любой элемент многообразия  $V_{n-1}$  какого угодно числа измерений. В частности  $(n-1)$ -вектор, определяющий кривизну  $(n-1)$ -мерного элемента многообразия  $V_{n-1}$ , будет касаться  $V_{n-1}$ , а нормальный вектор  $q_i d\sigma$  будет нормален и к  $V_{n-1}$ , т. е. нормален к нашему элементу. Таким образом нормаль к  $V_{n-1}$  является одновременно главным направлением индикатриссы Эйнштейна; т. е. главным направлением пространства.

## VI. Векторные кривизны. Вторая их интерпретация

193. В предыдущем параграфе мы определили риманову кривизну  $p$ -мерного элемента пространства и представили эту кривизну с помощью системы  $p$ -векторов. Существует иной способ ее задания, именно посредством дополнительных  $(n-p)$ -векторов, которые мы можем представлять себе либо свободными, либо скользящими. Этот второй способ задания предполагает, что пространство уже ориентировано. Мы его уже использовали в случае

$$p = n - 1 \text{ (n}^\circ \text{ 191).}$$

Если взять свободные  $(n-p)$ -векторы, то теорема n° 190 покажет, что сумма свободных  $(n-p)$ -векторов, соответствующих кривизне элементов, ограничивающих бесконечно малую  $(p+1)$ -мерную область, равна нулю.

Весьма примечательно следующее обстоятельство. Вопреки результатам предыдущего параграфа, геометрическая сумма соответствующих скользящих  $(n-p)$ -векторов здесь тоже равна нулю.

При доказательстве ограничимся случаем  $p=2$ ; в случае  $p > 2$  приходится использовать точно такие же соотношения.

Система бивекторов, характеризующая вращение, ассоциированное с элементом поверхности, имеет следующие компоненты:

$$\bar{\omega}^{ij} = -\Omega^{ij},$$

а система дополнительных  $(n-2)$ -векторов — следующие:

$$\theta_{i_1 i_2 \dots i_{n-2}} = -\sqrt{g} \Omega^{i_1 i_2},$$

причем предполагается, что перестановка  $(i_1 i_2 \dots i_{n-2})$  — четная. Далее, система свободных  $(n-1)$ -векторов, к которой сводится сумма скользящих

$(n-2)$ -векторов, связанных с границей малой трехмерной области, имеет следующую ковариантную компоненту:

$$\begin{aligned} \chi_{23\dots n} &= \sum_k g_{2k} [du^k \Omega_{34\dots n}] - \sum_k g_{3k} [du^k \Omega_{24\dots n}] + \dots = \\ &= -\sqrt{g} \sum_k [du^k (g_{2k} \Omega^{12} + g_{3k} \Omega^{13} + \dots + g_{nk} \Omega^{1n})] = \\ &= \sqrt{g} \sum_k [du^k \Omega_k^1]. \end{aligned}$$

Но последняя сумма равна нулю (п° 188) в силу симметрии коэффициентов  $\Gamma_{kh}^1$ . То же можно сказать и про остальные ковариантные компоненты нашей системы.

**194.** В частном случае ( $p=n-1$ ) эта теорема показывает, что *векторы, характеризующие кривизны элементов, ограничивающих бесконечно малую область  $n$  измерений, могут рассматриваться как некоторая система сил, находящихся в равновесии.*

При  $n=4$  эта теорема дополняет физическое истолкование гравитационных уравнений Эйнштейна. Векторы, с помощью которых в механике задается «количество движения-энергии», являются на самом деле *скользящими*, а вовсе не свободными векторами.

В случае  $n=3$  теореме можно придать замечательную механическую форму.

Пусть  $A$  — некоторая точка трехмерного риманова пространства. Свяжем с этой точкой локальную прямоугольную координатную систему и рассмотрим некоторую малую область, окружающую точку  $A$ . Компоненты  $pd\sigma$ ,  $qd\sigma$ ,  $rd\sigma$  вектора, связанного с элементом поверхности, ограничивающей область, будут иметь вид (п° 166):

$$\begin{aligned} p &= K_{11}\alpha + K_{12}\beta + K_{13}\gamma, \\ q &= K_{21}\alpha + K_{22}\beta + K_{23}\gamma, \\ r &= K_{31}\alpha + K_{32}\beta + K_{33}\gamma; \end{aligned}$$

$\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  обозначают здесь направляющие косинусы нормали к элементу. Эти формулы тождественны с теми, посредством которых задаются упругие силы в некоторой непрерывной материальной среде. Мы получаем, таким образом, следующую теорему:

*Если представить себе трехмерное риманово пространство как некоторую непрерывную материальную среду, причем таким образом, чтобы упругое давление на каждый элемент поверхности было равно вектору, характеризующему риманову кривизну этого элемента, то под действием этих упругих сил среда будет в равновесии.*

## VII. Теорема Шура

**195.** Предыдущие рассуждения приводят нас, естественно, к вопросу о том, какой вид примут теоремы, относящиеся к векторной кривизне, в случае пространства, изотропного во всех своих точках.

В этом случае вращение, ассоциированное с элементом поверхности, сводится к бивектору, касательному к этому элементу и равному произведению этого элемента на скаляр  $K$ . Значит, контравариантные компоненты этого бивектора равны

$$\bar{\omega}^{ij} = K [du^i du^j].$$

Выражая, что его абсолютная внешняя производная равна нулю, и замечая, что абсолютная внешняя производная тензора  $[du^i du^j]$  — тождественный нуль (п° 186), получаем:

$$[dK du^i du^j] = 0.$$

Если  $n > 3$ , то при этом все частные производные  $\frac{\partial K}{\partial u^k}$  будут равны нулю; следовательно,  $K$  будет постоянной величиной. Мы получаем следующую теорему, доказанную Ф. Шуром <sup>1)</sup>:

*Риманово пространство с числом измерений  $n \geq 3$ , изотропное во всех своих точках, является пространством постоянной кривизны.*

196. Существует более общая теорема, относящаяся к пространствам с неопределенными главными направлениями, т. е. к таким пространствам, во всех точках которых индикатрисса Эйнштейна представляет собою гиперболу. *Иначе эти пространства характеризуются тем, что в каждой из их точек кривизна во всех  $(n-1)$ -мерных направлениях одна и та же.*

В случае пространства, обладающего этим свойством, кривизна некоторого  $(n-1)$ -мерного элемента задается  $(n-1)$ -вектором, расположенным в той же  $(n-1)$ -плоскости, что и сам этот элемент, и пропорциональным последнему. Контравариантные компоненты этого  $(n-1)$ -вектора имеют вид:

$$\bar{\omega}^{i_1 i_2 \dots i_{n-1}} = H [du^{i_1} du^{i_2} \dots du^{i_{n-1}}].$$

Абсолютная внешняя производная полученной таким образом тензорной формы равна нулю. Значит,

$$[dH du^{i_1} du^{i_2} \dots du^{i_{n-1}}] = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial H}{\partial u^{i_n}} = 0.$$

Следовательно, кривизна  $H$  везде одна и та же.

Впрочем, имеем:

$$S_{ij} = H g_{ij} = R g_{ij} - R_{ij},$$

откуда

$$R_{ij}^i = 0 \quad (i \neq j),$$

$$R_i^i = \sum_k R_{ik}^k = R - H.$$

<sup>1)</sup> F. Schur Math. Ann., т. 27, 1886, стр. 563.



Суммируя по  $i$ , получаем:

$$\begin{aligned} 2R &= n(R-H), \\ H &= \frac{n-2}{n} R. \end{aligned}$$

Следовательно, скалярная риманова кривизна  $R$  постоянна.

В случае  $n=3$  предыдущая теорема сводится к теореме Шура.

Она близка к теореме гидростатики, в силу которой идеальная жидкость, находящаяся в равновесии под действием одних упругих сил, имеет во всех точках одно и то же давление.

В заключение укажем на следующее интересное обстоятельство. Если кривизна риманова пространства равна нулю в направлении всех  $p$ -мерных элементов, проходящих через некоторую точку, то все компоненты тензора Римана-Христоффеля в этой точке равны нулю. Исключительным является только случай  $p=n-1$ , так как здесь наши предположения приводят к  $\frac{n(n+1)}{2}$  соотношениям:

$$R_{ij} = 0,$$

которые показывают, что свернутый тензор кривизны равен нулю. Пространства, в которых выполняются эти соотношения, являются пространствами с постоянной кривизной, *но только в  $(n-1)$ -мерных направлениях*. В теории Эйнштейна пространство-время обладает этим свойством там, где оно пусто, т. е. там, где нет ни количества движения, ни энергии.

## РИМАНОВЫ НОРМАЛЬНЫЕ КООРДИНАТЫ

### 1. Нормальные координаты

**197.** Рассмотрим некоторую точку  $O$  риманова пространства и предположим, что с этой точкой связана локальная прямоугольная система координат. Любую точку  $M$ , достаточно близкую к  $O$ , можно соединить с  $O$  некоторой вполне определенной геодезической; пусть  $\alpha^i$  — направляющие косинусы касательной к дуге  $OM$ , проведенной в точке  $O$ . *Нормальными координатами* точки  $M$  назовем  $n$  величин  $x^i$ , которые определяются соотношениями:

$$x^i = \alpha^i s. \quad (1)$$

Практически всегда можно, отправляясь от любой наперед заданной координатной системы  $(u^1, \dots, u^n)$ , определить другую систему, такую, что в точке  $O$  значения всех координат будут равны нулю, а коэффициенты  $g_{ij}$  фундаментальной формы будут равны единице, если  $i=j$ , или же нулю, если  $i \neq j$ . Для этого достаточно подвергнуть  $u^i$  соответственно подобранному линейному преобразованию с постоянными коэффициентами. Предположим, что это сделано. Тогда мы получим нормальные координаты, интегрируя дифференциальные уравнения геодезических:

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \sum_{k,h} \Gamma_{kh}^i \frac{du^k}{ds} \frac{du^h}{ds} = 0,$$

с начальными условиями  $u^i = 0$  при  $s = 0$ . Тогда:

$$x^i = s \left( \frac{du^i}{ds} \right)_0.$$

**198.** Если угодно, формулы (1) определяют отображение риманова пространства на пространство евклидово, причем в последнем  $x^i$  играют роль классических прямоугольных координат. Непосредственно очевидно, что любая геодезическая, проходящая через  $O$ , отобразится прямою линией, а любое многообразие, геодезическое в  $O$ , — плоским многообразием. Евклидово пространство, на которое отображается таким образом риманово, называется *нормальным евклидовым пространством, связанным с точкой  $O$* .

Нетрудно видеть, что нормальное евклидово пространство соприкасается с римановым в точке  $O$ .

Действительно, пусть заданы дифференциальные уравнения геодезических в нормальных координатах:

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \sum_{k,h} \Gamma_{kh}^i \frac{dx^k}{ds} \frac{dx^h}{ds} = 0. \quad (2)$$

Они должны выполняться, если вместо  $x^i$  подставить  $a^i$ 's, где  $a^i$  — произвольные константы; поэтому для любой точки рассматриваемой геодезической получим:

$$\sum_{k,h} \Gamma_{kh}^i a^k a^h = 0. \quad (3)$$

В частности в точке  $O$  эти соотношения выполняются, каковы бы ни были постоянные  $a^i$ . Поэтому получаем:

$$(\Gamma_{kh}^i)_0 = 0,$$

а это как раз и выражает то, что евклидово нормальное пространство соприкасается с римановым в точке  $O$ .

**199.** Вычислим линейный элемент риманова пространства  $ds^2$  в окрестности точки  $O$ . Положим

$$ds_0^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^n)^2;$$

тогда все коэффициенты разности  $ds^2 - ds_0^2$  будут по меньшей мере второй степени относительно  $x^i$ . Пусть  $\Phi(x, dx)$  — совокупность членов второй степени в разложении формы  $ds^2 - ds_0^2$ , которое мы предполагаем возможным. Если мы будем перемещаться вдоль геодезической, проходящей через  $O$ , то получим, очевидно,  $ds^2 = ds_0^2$ ; более того,  $dx^i$  будут при этом пропорциональны  $x^i$ ; таким образом будем иметь:

$$\Phi(x, x) = 0.$$

Это заставляет нас предположить, что форма  $\Phi(x, dx)$  является однородным выражением второй степени относительно величин  $x^i dx^j - x^j dx^i$ . Вычисление позволит нам проверить это.

**200.** Благодаря уравнениям (3) во всех точках пространства выполняются соотношения:

$$\sum_{k,h} \Gamma_{kh}^i x^k x^h = 0.$$

Коэффициенты  $\Gamma_{kh}^i$  равны нулю в точке  $O$ ; определим их главные части. Величины  $\Gamma_{kh}^i$  и  $\Gamma_{kih}$  имеют одинаковые главные части в силу соотношения

$$\Gamma_{kih} = \sum_j g_{ij} \Gamma_{kh}^j$$

и предположений, сделанных относительно числовых значений коэффициентов  $g_{ij}$  в точке  $O$ .

Таким образом мы можем написать:

$$\sum_{i,j} \Gamma_{irj} x^i x^j = 0. \quad (4)$$

Приравнявая нулю коэффициент при  $x^i x^j x^k$ , получим:

$$\frac{\partial \Gamma_{irj}}{\partial x^k} + \frac{\partial \Gamma_{jrk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \Gamma_{kri}}{\partial x^j} = 0. \quad (5)$$

Но в силу  $n^\circ 160$  имеем:

$$\Omega_{ir} = \omega'_{ir} + \sum_k [\omega_i^k \omega_{rk}],$$

причем

$$\omega_{ir} = \sum_k \Gamma_{irk} dx^k.$$

Таким образом с достаточной для нас степенью приближения имеем:

$$\Omega_{ir} = \omega'_{ir} = \sum_{(jk)} \left( \frac{\partial \Gamma_{irk}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{irj}}{\partial x^k} \right) [x^j dx^k],$$

откуда

$$\frac{\partial \Gamma_{kri}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma_{irj}}{\partial x^k} = R_{ir,jk}. \quad (6)$$

Круговая перестановка индексов дает еще два соотношения:

$$\frac{\partial \Gamma_{irj}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{jrk}}{\partial x^i} = R_{jr,ki}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Gamma_{jrk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{kri}}{\partial x^j} = R_{kr,ij}. \quad (8)$$

Заметим, что из трех соотношений (6), (7) и (8) только два являются существенно различными, третье же является следствием первых двух, в чем нетрудно убедиться, сложив их все почленно. Решение трех уравнений (5), (6) и (7) дает нам:

$$3 \frac{\partial \Gamma_{irj}}{\partial x^k} = R_{jr,ki} - R_{ir,jk} = -R_{jr,ik} - R_{ir,jk};$$

следовательно, ограничиваясь членами первой степени, имеем:

$$\Gamma_{irj} = -\frac{1}{3} \sum_k (R_{ir,jk} + R_{jr,ik}) x^k. \quad (9)$$

Отсюда с той же степенью точности:

$$\omega_{sr} = -\frac{1}{3} \sum_{j,k} (R_{sr,jk} + R_{jr,sk}) x^k dx^j. \quad (10)$$

Окончательно получаем:

$$dg_{rs} = \omega_{rs} + \omega_{sr} + \frac{1}{3} \sum_{j,k} (R_{r,j,sk} + R_{sj,rk}) x^k dx^j.$$

Интегрирование дает немедленно:

$$g_{rs} = \varepsilon_{rs} + \frac{1}{3} \sum_{j,k} R_{r,j,sk} x^j x^k \quad (\varepsilon_{rs} = 1 \text{ при } r=s; \varepsilon_{rs} = 0 \text{ при } r \neq s). \quad (11)$$

Таким образом мы получаем интересующую нас формулу:

$$ds^2 = ds_0^2 + \frac{1}{3} \sum_{j,k,r,s} R_{jr,ks} x^j x^k dx^r dx^s,$$

которую можно записать и иначе <sup>1)</sup>:

$$ds^2 = ds_0^2 + \frac{1}{3} \sum_{(jr), (ks)} R_{jr,ks} (x^j dx^r - x^r dx^j) (x^k dx^s - x^s dx^k). \quad (12)$$

Совершенно ясно, что коэффициентами  $R_{jr,ks}$  в нашей формуле служат константы, а именно числовые значения компонент тензора Римана-Христоффеля в точке  $O$ .

**201.** Формулу (12) можно истолковать геометрически следующим образом. В нормальном евклидовом пространстве рассмотрим весьма малый параллелограмм  $ОММ'Р$ , одна из вершин которого лежит в точке  $O$ . Пусть  $x^i$  — координаты точки  $M$ ,  $dx^i$  — координаты точки  $P$ ; тогда точка  $M'$  будет иметь координаты  $x^i + dx^i$ . Этот параллелограмм определяет бивектор с компонентами

$$p^{ij} = x^i dx^j - x^j dx^i.$$

Формула (12) показывает, что квадрат расстояния  $ММ'$  ( $ds^2$ ), вычисленный с помощью римановой метрики, равен квадрату этого же самого расстояния, вычисленному при помощи нормальной евклидовой метрики ( $ds_0^2$ ), увеличенному на величину

$$\frac{1}{3} \sum_{(jr), (ks)} R_{jr,ks} p^{jr} p^{ks}.$$

<sup>1)</sup> Эта формула впервые была дана Риманом (*B. Riemann, Gesamm. Werke* Leipzig, 1876, стр. 261). Доказана она была впервые Дедекиндом в его примечаниях к «*Gesammelte Werke*» Римана (стр. 384—391).

Но по самому определению римановой кривизны  $K$  в данном направлении, написанная нами сумма равна  $-\frac{1}{3} K dS^2$ , если через  $dS$  обозначить площадь параллелограмма. Значит, мы имеем формулу:

$$ds^2 = ds_0^2 - \frac{1}{3} K dS^2. \quad (13)$$

Пусть  $h$  — расстояние от  $O$  до  $MM'$ ; тогда

$$dS = h ds_0;$$

следовательно,

$$ds^2 = ds_0^2 \left(1 - \frac{1}{3} K h^2\right), \quad (14)$$

или

$$ds = ds_0 \left(1 - \frac{1}{6} K h^2\right). \quad (15)$$

Мы видим, что если кривизна  $K$  положительна, то в результате отображения на нормальное евклидово пространство увеличиваются длины всех дуг, лежащих в рассматриваемой элементарной площадке достаточно близко от точки  $O$ . Если же  $K$  отрицательно, то длины соответствующих дуг уменьшаются.

## II. Симметрия и параллельный перенос

**202.** Рассмотрим точечное преобразование, определенное в окрестности точки  $O$  и переводящее точку  $M$  в точку  $M'$ , лежащую на продолжении геодезической  $MO$  на расстоянии  $OM'$ , равном  $OM$ . Это преобразование, которое мы назовем *симметрией*, вообще говоря, не является изометрическим преобразованием. Равным образом, каждому вектору, приложенному в  $M$ , это преобразование ставит в соответствие некоторый определенный вектор, приложенный в  $M'$ ; если первый вектор рассматривать как скорость движущейся точки, то второй дает нам скорость движения симметричной точки.

В нормальных координатах симметрия точек и векторов выразится соответственно при помощи уравнений:

$$(x^i)' = -x^i$$

и

$$(X^i)' = -X^i.$$

Рассмотрим две точки  $M$  и  $M'$ , симметричные по отношению к  $O$  и лежащие весьма близко к этой точке; рассмотрим также два симметричных вектора  $x$  и  $x'$ , приложенных в  $M$  и  $M'$ . Вектор  $x''$ , приложенный в точке  $M'$ , равный и противоположный вектору  $x'$ , имеет те же координаты, что и вектор  $x$ . Так как коэффициенты  $\Gamma_{ij}^k$  равны нулю в точке  $O$ , то этот вектор является результатом параллельного переноса вектора  $x$  из  $M$  в  $M'$ . Мы получаем таким образом новую точку зрения на параллельный перенос:

Чтобы вектор  $\mathbf{x}$  перенести параллельно из  $M$  в бесконечно близкую точку  $M'$ , достаточно построить вектор  $\mathbf{x}'$ , симметричный к  $\mathbf{x}$  относительно середины  $O$  дуги геодезической  $MM'$ , и взять вектор  $\mathbf{x}''$ , равный по величине и прямо противоположный по направлению вектору  $\mathbf{x}$ .

Мы сейчас покажем, что если перенос производится вдоль дуги геодезической  $MM'$ , то указанное построение дает результат с точностью до бесконечно малых третьего порядка.

Предположим, — и это не уменьшит общности, — что точка  $M$  лежит на  $Ox^1$ , и обозначим через  $a$  ее абсциссу. Предположим, что в точке  $O$  компоненты вектора, который переносится нами, равны  $(X^i)_0$ . Уравнения, определяющие параллельный перенос, имеют вид:

$$\frac{dX^i}{dx^1} + \sum_k X^k \Gamma_{k1}^i = 0.$$

Таким образом, для компонент вектора  $\mathbf{x}$  в точке  $M$  мы получим:

$$X^i = (X^i)_0 - \frac{1}{2} a^2 \sum_k (X^k)_0 \left( \frac{\partial \Gamma_{k1}^i}{\partial x^1} \right)_0 + \dots$$

или в силу (9):

$$X^i = (X^i)_0 - \frac{1}{6} a^2 \sum_k R_{1i,1k} (X^k)_0 + \dots \quad (16)$$

Вектор  $\mathbf{x}'$  в точке  $M'$  имеет те же самые координаты с точностью до бесконечно малых третьего порядка. Это и нужно было доказать.

**203.** Из предыдущего построения вытекает замечательная теорема. Предположим, что симметрия относительно любой точки пространства будет изометрическим преобразованием. Перенесем параллельно из  $M$  в  $M'$  элементарный параллелограмм  $\mathfrak{P}$  с началом в  $M$ . Для этого достаточно построить  $\mathfrak{P}'$ , симметричный с  $\mathfrak{P}$  относительно середины  $O$  дуги  $MM'$ , и взять затем параллелограмм  $\mathfrak{P}''$ , равный и противоположный  $\mathfrak{P}'$ . По сделанному нами предположению кривизна пространства в  $M'$  в направлении элементарной площадки  $\mathfrak{P}'$  и следовательно  $\mathfrak{P}''$ , та же, что и в точке  $M$  и в направлении  $\mathfrak{P}$ . Таким образом мы получаем следующую теорему:

*Если симметрия относительно любой точки пространства является изометрическим преобразованием, то параллельный перенос сохраняет риманову кривизну пространства.*

Обратная теорема тоже справедлива. Мы не будем ее здесь доказывать<sup>1)</sup>. Заметим только, что она очевидна в случае пространств постоянной кривизны.

**204.** Используем формулу (16) для того, чтобы оценить ошибку, которую мы делаем, взяв вместо риманова расстояния между двумя точками расстояние между их отображениями в нормальном евклидовом простран-

<sup>1)</sup> Относительно пространств, обладающих рассматриваемым свойством, см. E. Cartan. Sur une classe remarquable d'espaces de Riemann (Bull. Soc. math., т. 54, 1926, стр. 214—264; т. 55, 1927, стр. 114—134).

стве. На этот вопрос дает, правда, ответ формула (15), но только в случае бесконечно малых расстояний.

Через точку  $M(a, 0, 0, \dots)$  проведем геодезическую с направляющими параметрами  $X^i$  и отложим на этой геодезической длину  $MP = b$ . Дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \sum_{h,k} \Gamma_{hk}^i \frac{dx^h}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0$$

дают нам:

$$\begin{aligned} x^i &= (x^i)_0 + b X^i - \frac{1}{2} b^2 \sum_{h,k} (\Gamma_{hk}^i)_0 X^h X^k - \\ &- \frac{1}{6} b^3 \sum_{h,k,l} \left[ \left( \frac{\partial \Gamma_{hk}^i}{\partial x^l} \right)_0 - \sum_m (\Gamma_{hl}^m)_0 (\Gamma_{mk}^i)_0 + (\Gamma_{kl}^m)_0 (\Gamma_{mh}^i)_0 \right] X^h X^k X^l + \dots \end{aligned}$$

Мы видим, учитывая соотношения (5), что коэффициент при  $b^3$  имеет порядок величины  $a$ ; что касается коэффициента при  $b^2$ , то в силу (9) он равен

$$+ \frac{1}{3} a \sum_{h,k} R_{1h,ik} X^h X^k,$$

если пренебречь членами, содержащими  $a^2$ . Таким образом с точностью до бесконечно малых четвертого порядка, мы получаем следующее:

$$\left. \begin{aligned} x^1 &= a + b X^1 + \frac{1}{3} ab^2 \sum_{h,k} R_{1h,1k} X^h X^k, \\ x^i &= b X^i + \frac{1}{3} ab^2 \sum_{h,k} R_{1h,ik} X^h X^k. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Квадрат евклидова расстояния между отображениями точек  $M$  и  $P$  равен:

$$\begin{aligned} b_0^2 &= (x^1 - a)^2 + \sum_i (x^i)^2 = \\ &= b^2 \sum_i (X^i)^2 + \frac{2}{3} ab^3 \sum_{i,h,k} R_{1h,ik} X^i X^h X^k + \dots = b^2 \sum_i (X^i)^2, \end{aligned}$$

если пренебречь бесконечно малыми пятого порядка.

Обозначая через  $(X^i)_0$  направляющие косинусы направления  $X^i$ , перенесенного из  $M$  в  $O$ , получим, учитывая (16), с точностью до бесконечно малых третьего порядка:

$$\sum_i (X^i)^2 = 1 - \frac{1}{3} a^2 \sum_{i,k} R_{1i,1k} (X^i)_0 (X^k)_0.$$

Таким образом окончательно мы получаем:

$$b^2 = b_0^2 \left[ 1 + \frac{1}{3} a^2 \sum_{i,k} R_{1i,1k} (X^i)_0 (X^k)_0 \right],$$

с точностью до бесконечно малых пятого порядка.



Предположим, и это не уменьшит общности, что направление  $(X^i)_0$  лежит в плоскости  $x^1 O x^2$ :

$$(X^1)_0 = \cos \varphi, \quad (X^2)_0 = \sin \varphi, \quad (X^3)_0 = 0, \dots$$

Получим:

$$b^2 = b_0^2 \left( 1 - \frac{1}{3} K a^2 \sin^2 \varphi \right) = b_0^2 \left( 1 - \frac{1}{3} K h^2 \right),$$

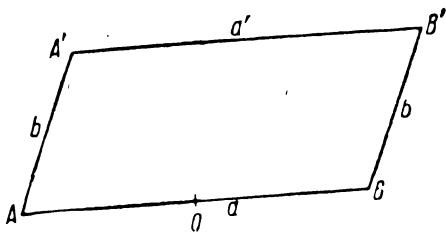
причем через  $h$  здесь обозначено расстояние от точки  $O$  до прямой  $MP$  (в нормальном евклидовом пространстве). Мы приходим таким образом к следующей формуле, обобщающей формулу (15):

$$b = b_0 \left( 1 - \frac{1}{6} K h^2 \right), \quad (18)$$

причем в скобках мы пренебрегаем членами третьего порядка.

### III. Параллелограмм Леви-Чивита

**205.** Леви-Чивита называет *параллелограммом* фигуру, полученную следующим образом: берутся дуги геодезических  $AB$  и  $AA'$ , затем дуга  $BB'$ , которая получается в результате параллельного переноса  $AA'$  вдоль  $AB$ , и наконец, дуга геодезической, соединяющая точки  $A'$  и  $B'$  (фиг. 31).



Фиг. 31.

Если длину дуги  $AB$  обозначить через  $a$ , общую длину дуг  $AA'$  и  $BB'$  — через  $b$ , наконец, длину дуги  $A'B'$  — через  $a'$ , то можно вывести замечательную формулу, выражающую риманову кривизну пространства  $K$  в направлении параллелограмма (который предполагается весьма малым) через длины  $a$ ,  $a'$  и площадь  $S$  параллелограмма.

Чтобы получить эту формулу, отобразим нашу фигуру на евклидово пространство, нормальное в точке  $O$  — середине дуги  $AB$ . Обозначим через  $X^i$  направляющие параметры единичного вектора, касательного к  $AA'$  в точке  $A$ . С точностью до бесконечно малых третьего порядка ( $n^\circ 202$ ) они равны направляющим параметрам единичного вектора, касательного к  $BB'$  в точке  $B$ .

Формулы (17) дают нам нормальные координаты точки  $B'$ :

$$x^1 = \frac{a}{2} + bX^1 + \frac{1}{6}ab^2 \sum_{h,k} R_{1h,1k} X^h X^k,$$

$$x^i = bX^i + \frac{1}{6}ab^2 \sum_{h,k} R_{1h,ik} X^h X^k.$$

Нормальные координаты точки  $A'$  подучаются отсюда, если  $a$  заменить

на  $-a$ . Квадрат евклидова расстояния  $a'_0$  между точками  $A'$  и  $B'$ , если пренебречь бесконечно малыми пятого порядка, будет равен:

$$a'^2_0 = a^2 \left( 1 + \frac{2}{3} b^2 \sum_{k,h} R_{1h,1k} X^h X^k \right).$$

Положим:

$$(X^1)_0 = \cos \varphi, \quad (X^2)_0 = \sin \varphi, \quad (X^3)_0 = 0 \dots;$$

получим:

$$a'^2_0 = a^2 \left( 1 - \frac{2}{3} K b^2 \sin^2 \varphi \right)$$

и, учитывая формулу (18):

$$a'^2 = a^2 \left( 1 - \frac{2}{3} K b^2 \sin^2 \varphi \right) \left( 1 - \frac{1}{3} K h^2 \right),$$

где через  $h$  обозначено, очевидно,  $b \sin \varphi$ . Следовательно:

$$a'^2 = a^2 (1 - K b^2 \sin^2 \varphi) = a^2 - K S^4.$$

Отсюда мы получаем формулу Леви-Чивита: <sup>1)</sup>

$$K = \frac{a^2 - a'^2}{S^2}. \quad (19)$$

#### IV. Геодезические треугольники

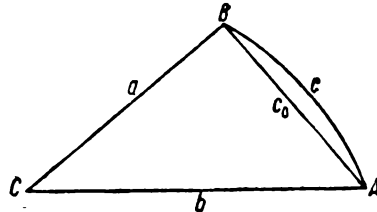
**206.** Употребление нормальных координат позволит нам дополнить теорему о сумме углов геодезического треугольника, доказанную в п° 163.

Рассмотрим в римановом пространстве весьма малый геодезический треугольник  $ABC$  и отобразим его на евклидово пространство, нормальное в  $C$  (фиг. 32). Обозначая через  $a, b, c$  римановы длины трех сторон, через  $a_0, b_0, c_0$  — евклидовы расстояния между вершинами, взятыми попарно, получим:

$$a = a_0, \quad b = b_0;$$

далее, в силу (18)

$$c = c_0 \left( 1 - \frac{1}{3} K h^2 \right),$$



Фиг. 32.

где через  $h$  обозначена высота, опущенная из  $C$ .

Имеем:

$$c^2_0 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

откуда

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C - \frac{1}{3} K h^2 c^2,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C - \frac{2}{3} K S ab \sin C.$$

<sup>1)</sup> Т. Levi-Civita, Nozione di parallelismo in una varietà qualunque (Rend. Circ. Mat. Palermo, т. 42, 1917, стр. 201).

Здесь через  $S$  обозначена площадь треугольника. Эту формулу можно иначе записать так:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \left( c - \frac{KS}{3} \right). \quad (20)$$

Она приводит к следующей теореме, классической в теории поверхностей<sup>1)</sup>:

*Если в евклидовой плоскости построить прямолинейный треугольник, стороны которого равны по длине сторонам данного геодезического треугольника, то углы  $A_0, B_0, C_0$  евклидова треугольника будут отличаться от соответственных углов  $A, B, C$  геодезического треугольника на одну и ту же величину, именно на  $1/3 KS$ , где  $K$  — риманова кривизна пространства в направлении элементарной площадки, в которой расположен треугольник  $ABC$ .*

207. Складывая равенства:

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= A - \frac{1}{3} KS, \\ B_0 &= B - \frac{1}{3} KS, \\ C_0 &= C - \frac{1}{3} KS, \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

получаем:

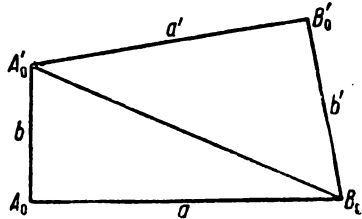
$$\pi = A + B + C - KS,$$

откуда

$$K = \frac{A + B + C - \pi}{S}. \quad (22)$$

Эту формулу мы уже раньше доказали другим путем.

208. Отсюда можно было бы получить новое доказательство теоремы Леви-Чивита относительно параллелограмма, разлагая последний на два геодезических треугольника. Мы ограничимся тем, что докажем этим способом формулу Ф. Севери, аналогичную формуле Леви-Чивита.



Фиг. 33.

Рассмотрим весьма малую дугу геодезической  $AB = a$ ; перпендикулярно к ней проведем через  $A$  дугу геодезической  $AA'$  длиной  $b$ ; единичный вектор касательной к  $AB$  перенесем из  $A$  в  $B$  и проведем геодезическую, для которой полученный вектор служит касательной; наконец, из  $A'$  проведем геодезическую  $A'B'$  перпендикулярно к последней. Мы получим геодезический четырехугольник, имеющий три прямых угла, именно углы  $A, B$  и  $B'$ . Обозначим длины дуг  $A'B'$  и  $BB'$  соответственно через  $a'$  и  $b'$ .

Проведем диагональ  $A'B$  и построим в евклидовой плоскости прямолинейные треугольники  $A_0 B_0 A'_0, B_0 B'_0 A_0$ , стороны которых равны соот-

<sup>1)</sup> Darboux, Théorie des surfaces, т. III, книга VI, гл. VI.

ветственным сторонам наших геодезических треугольников (фиг. 33). Обозначая через  $S$  площадь четырехугольника, получим:

$$\begin{aligned}\hat{A}_0 &= \frac{\pi}{2} - \frac{KS}{6}, \\ \hat{B}'_1 &= \frac{\pi}{2} - \frac{KS}{6}.\end{aligned}$$

Непосредственно оценить угол  $\widehat{A_0 B_0 B'_0}$  мы не можем, потому что сумма углов  $\widehat{ABA'}$  и  $\widehat{A'BB'}$  не равна в точности углу  $\widehat{ABB'} = \frac{\pi}{2}$ , так как три геодезические  $BA$ ,  $BA'$  и  $BB'$  могут и не быть касательными к одной и той же элементарной площадке. Однако мы сейчас покажем, что с интересующей нас степенью приближения все происходит именно так, как будто бы последнее обстоятельство имело место и, значит,

$$\widehat{A_0 B_0 B'_0} = \frac{\pi}{2} - \frac{KS}{3}.$$

Рассмотрим, в самом деле, нормальное в точке  $B$  евклидово пространство; возьмем в качестве оси  $x^1$  направление  $BA$ , в качестве оси  $x^2$  — перпендикулярное ему направление  $BB'$ . Направляющие параметры направления  $AA'$  в точке  $A$  в силу формул (16) имеют вид:

$$\begin{aligned}X^1 &= 0, \\ X^2 &= 1 - \frac{1}{6} a^2 R_{12,12} = 1 + \frac{1}{6} K a^2, \\ X^3 &= -\frac{1}{6} a^2 R_{13,12}, \\ &\dots \dots \dots\end{aligned}$$

Таким образом, используя (17), получаем следующие выражения для координат точки  $A'$ :

$$\begin{aligned}x^1 &= a - \frac{1}{3} K a b^2, \\ x^2 &= b, \\ x^3 &= -\frac{1}{3} R_{13,23} a b^2, \\ &\dots \dots \dots\end{aligned}$$

Далее, имеем:

$$\begin{aligned}\cos \widehat{ABA'} &= \frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + \dots}}, \\ \cos \widehat{B'BA'} &= \frac{x^2}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + \dots}};\end{aligned}$$

отсюда получаем, пренебрегая под корнем членами пятого порядка:

$$\cos \widehat{ABA'} = \frac{x^1}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}}, \quad \cos \widehat{B'BA'} = \frac{x^2}{\sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}}.$$

Мы видим, что с интересующей нас степенью точности все происходит так, как если бы геодезическая  $BA'$  имела в  $B$  следующие направляющие параметры:

$$a - \frac{1}{3}Kab^2, \quad b, \quad 0, \quad 0, \dots,$$

т. е. как если бы три геодезические  $BA$ ,  $BA'$ ,  $BB'$  были касательными к одной и той же элементарной площадке.

Установив все это, спроектируем фигуру  $A_0B_0B'_0A'_0$ , лежащую в евклидовой плоскости, на  $A_0B_0$ . Угол между направлениями  $A_0B_0$  и  $A'_0B'_0$  равен  $\frac{KS}{2}$ , поэтому

$$a = a' + b \frac{KS}{6} + b' \frac{KS}{3} = a' + b \frac{KS}{2},$$

с точностью до бесконечно малых четвертого порядка. Соотношения:

$$a - a' = b \frac{KS}{2},$$

$$a + a' = 2a,$$

точные соответственно до бесконечно малых четвертого и второго порядка, дают при перемножении:

$$a^2 - a'^2 = KS^2,$$

причем последнее равенство точно до бесконечно малых пятого порядка.

Отсюда получаем формулу Севери <sup>1)</sup>:

$$K = \frac{a^2 - a'^2}{S^2}, \quad (23)$$

аналогичную формуле Леви-Чивита.

В силу симметрии получаем вторую формулу:

$$K = \frac{b'^2 - b^2}{S^2}.$$

**209.** Существуют различные пути, с помощью которых можно получать формулы, аналогичные формулам Леви-Чивита и Севери.

Возьмем, например, дугу геодезической  $AB$  длиной  $a$  и другую дугу геодезической  $AA'$  длиной  $b$ , перпендикулярную в точке  $A$  к первой.

<sup>1)</sup> F. Severi, Sulla curvatura delle superficie e varietà (Rend. Circ. Mat. Palermo, 42, 1917, стр. 227—259).

Перенесем параллельно дугу  $AA'$  из  $A$  в  $B$ ; она опишет участок поверхности  $ABA'B'$ , сторона которого  $A'B'$  не будет, вообще говоря, геодезической (фиг. 34).

В евклидовом пространстве соответствующая площадь будет

$$S_0 = ab.$$

Постараемся оценить площадь, которую имеет эта фигура в римановом пространстве.

Разобьем эту площадь на малые части, проведя траектории достаточно большого числа точек  $M$  дуги  $AA'$  и отметив достаточное число промежуточных положений этой дуги. Элемент площади  $PQRS$ , полученный таким образом, соответствующий смещению по  $AB$ , равному  $dx$ , измеряется произведением

$$PQ \cdot PS,$$

потому что траектория точки  $M$  пересекает различные положения геодезической  $AA'$  ортогонально. Обозначим длину  $AM$  через  $y$ . В параллелограмме  $PQqr$  с основанием  $pq$  длиной  $dx$  имеем:

$$PQ^2 = dx^2 - Ky^2 dx^2,$$

откуда

$$PQ = dx \left( 1 - \frac{1}{2} Ky^2 \right);$$

следовательно, элемент площади равен

$$dx dy \left( 1 - \frac{1}{2} Ky^2 \right).$$

Таким образом мы получаем:

$$S = a \int_0^b \left( 1 - \frac{1}{2} Ky^2 \right) dy = ab \left( 1 - \frac{1}{6} Kb^2 \right),$$

или

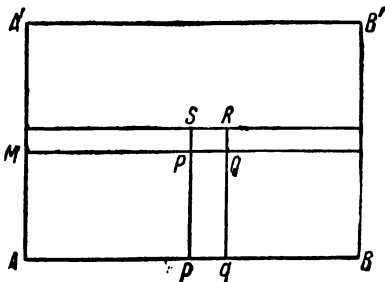
$$S = S_0 \left( 1 - \frac{1}{6} Kb^2 \right).$$

Мы приходим, таким образом, к новой формуле:

$$\frac{S_0 - S}{S_0 b^2} = \frac{K}{6}. \quad (24)$$

Эту формулу можно проверить на сфере радиуса  $R$ ; несложное вычисление дает здесь:

$$S = Ra \sin \frac{b}{R} = ab \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{b^2}{R^2} + \dots \right).$$



Фиг. 34.

## V. Круги, сферы, гиперсферы

**210.** Выведем некоторые новые формулы, в которые войдет кривизна пространства в направлении плоского элемента более чем двух измерений.

Рассмотрим сначала поверхность, геодезическую в точке  $O$ , и окружность с центром в  $O$ , которая получится, если на всех геодезических, исходящих из  $O$ , отложить постоянную длину  $R$  (достаточно малую).

Мы всегда можем предположить, что геодезическая поверхность определена в нормальных координатах уравнениями:

$$x^3 = x^4 = \dots = x^n = 0.$$

Тогда на этой поверхности имеем:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 - \frac{1}{3} K (x^1 dx^2 - x^2 dx^1)^2,$$

причем через  $K$  обозначена кривизна пространства в точке  $O$  и в направлении рассматриваемой геодезической поверхности.

Площадь  $\mathfrak{U}$  круга радиуса  $R$  дается двойным интегралом:

$$\iint \sqrt{g} dx^1 dx^2.$$

Вычислим  $g$ . Имеем:

$$g = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{3} K (x^1)^2 & \frac{1}{3} K x^1 x^2 \\ \frac{1}{3} K x^1 x^2 & 1 - \frac{1}{3} K (x^2)^2 \end{vmatrix} = 1 - \frac{1}{3} K r^2;$$

через  $r$  здесь обозначено расстояние от текущей точки до точки  $O$ . Вводя полярные координаты, получаем:

$$\mathfrak{U} = \iint \left(1 - \frac{1}{6} K r^2\right) r dr d\theta = \pi R^2 - \frac{1}{12} K \pi R^4. \quad (25)$$

Обозначим через  $\mathfrak{U}_0$  площадь евклидова круга радиуса  $R$ . Получим:

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}_0 \left(1 - \frac{1}{12} K R^2\right),$$

или иначе

$$\frac{\mathfrak{U}_0 - \mathfrak{U}}{\mathfrak{U}_0 R^2} = \frac{K}{12}. \quad (26)$$

Эта формула позволяет определить риманову кривизну  $K$  посредством площади  $\mathfrak{U}$  круга радиуса  $R$ . Эта площадь меньше соответствующей евклидовой площади, если кривизна положительна, и больше ее, если кривизна отрицательна.

Длина  $\mathfrak{C}$  окружности получается весьма просто из формулы (25). Действительно,  $\mathfrak{U}$  есть функция радиуса, производная которой как раз равняется  $\mathfrak{C}$ . Значит,

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0 - \frac{1}{3} K \pi R^3 = \mathfrak{C}_0 \left(1 - \frac{1}{6} K R^2\right);$$

отсюда

$$\frac{\mathfrak{C}_0 - \mathfrak{C}}{\mathfrak{C}_0 R^2} = \frac{K}{6}. \quad (27)$$

211. Рассмотрим теперь трехмерное многообразие, геодезическое в точке  $O$ ; не уменьшая общности, можно предположить, что оно определено уравнениями:

$$x^4 = \dots = x^n = 0.$$

На этом многообразии имеем:

$$ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + \frac{1}{3} \left[ R_{23,23} (x^2 dx^3 - x^3 dx^2)^2 + \dots \right].$$

Объем  $V$  сферы с центром в  $O$  радиуса  $R$  дается тройным интегралом:

$$\iiint \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3,$$

распространенным в нормальном евклидовом пространстве на обычную сферу того же радиуса с центром в  $O$ . Обозначая через  $\gamma_{ij}$  коэффициенты формы  $ds^2 = ds_0^2$ , получим:

$$g = 1 + \gamma_{11} + \gamma_{22} + \gamma_{33} = 1 + \Phi(x^1, x^2, x^3),$$

где  $\Phi$  — однородный многочлен второй степени.

В интеграле

$$\iiint \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 = V_0 + \frac{1}{2} \iiint \Phi(x^1, x^2, x^3) dx^1 dx^2 dx^3$$

достаточно рассмотреть те члены выражения  $\Phi$ , которые представляют собою квадраты координат, так как остальные при интегрировании дадут, очевидно, нуль. С другой стороны, в силу симметрии имеем:

$$\begin{aligned} \iiint (x^1)^2 dx^1 dx^2 dx^3 &= \iiint (x^2)^2 dx^1 dx^2 dx^3 = \\ &= \iiint (x^3)^2 dx^1 dx^2 dx^3 = \frac{1}{3} \iiint r^2 dx^1 dx^2 dx^3 = \frac{4}{15} \pi R^5. \end{aligned}$$

Нам остается подсчитать сумму коэффициентов тех членов  $\Phi$ , которые содержат квадраты координат. Эта сумма, очевидно, равна

$$\frac{2}{3} (R_{23,23} + R_{31,31} + R_{12,12}).$$



Окончательно получаем:

$$V = V_0 + \frac{4}{45} (R_{23,23} + R_{31,31} + R_{12,12}) \pi R^5.$$

Но величина  $-(R_{23,23} + R_{31,31} + R_{12,12})$  представляет собою ( $n^{\circ}189$ ) относенную к единице объема кривизну  $K$  пространства в направлении рассматриваемого трехмерного плоского элемента. Таким образом мы можем написать:

$$V = V_0 \left( 1 - \frac{K}{15} R^2 \right),$$

или

$$\frac{V_0 - V}{V_0 R^2} = \frac{K}{15}. \quad (28)$$

Мы видим, что изменение, которое испытывает объем весьма малой сферы, при переходе от евклидова пространства к риманову, зависит только от кривизны пространства в направлении трехмерного плоского элемента, содержащего сферу.

Переходя от объема к поверхности, находим сейчас же при помощи дифференцирования:

$$\frac{S_0 - S}{S_0 R^2} = \frac{K}{9}. \quad (29)$$

**212.** Предыдущие формулы обобщаются без всякого затруднения на случай поверхности и объема гиперсферы радиуса  $R$ , лежащей в многообразии  $V_p$ , геодезическом в точке  $O$ . Не уменьшая общности, можно предположить, что это многообразие определено уравнениями:

$$x^{p+1} = \dots = x^n = 0.$$

Здесь мы получим:

$$V = \iiint \left[ 1 + \frac{1}{2} (\gamma_{11} + \gamma_{22} + \dots + \gamma_{pp}) \right] dx^1 dx^2 \dots dx^p,$$

причем интеграл распространен на гиперсферу с центром  $O$  радиуса  $R$  в нормальном евклидовом пространстве.

В коэффициентах  $\gamma_{ii}$  можно ограничиться только квадратными членами. Вместе с тем имеем:

$$\int (x^i)^2 dx^1 dx^2 \dots dx^p = \frac{1}{p} \int r^2 dx^1 dx^2 \dots dx^p.$$

Обозначим через

$$V_0 = ar^p$$

(где  $a$  — соответствующим образом подобранная постоянная), выражение для объема евклидовой гиперсферы радиуса  $r$ ; поверхность ее равна:

$$S_0 - \frac{dV_0}{dr} = par^{p-1}.$$

Имеем:

$$\int r^3 dx^1 \dots dx^p = \int r^3 S_0(r) dr = p a \int r^{p+1} dr = \frac{p}{p+2} a r^{p+2} = \frac{p}{p+2} V_0 r^2.$$

Сумма коэффициентов квадратных членов в выражении  $\gamma_{11} + \gamma_{22} \dots + \gamma_{pp}$  равна

$$\frac{2}{3} \sum_{(ij)} R_{ij, ij} = -\frac{2}{3} K;$$

$K$  здесь — кривизна в точке  $O$  и в направлении многообразия  $V_p$ .

Таким образом получаем:

$$V = V_0 - \frac{1}{3(p+2)} K V_0 R^2,$$

откуда, далее,

$$\frac{V_0 - V}{V_0 R^2} = \frac{K}{3(p+2)}. \quad (30)$$

Наконец, дифференцируя равенство

$$V = a R^p - \frac{1}{3(p+2)} K a R^{p+2},$$

получаем:

$$S = p a R^{p-1} - \frac{1}{3} K a R^{p+1} = S_0 \left( 1 - \frac{K}{3p} R^2 \right),$$

откуда

$$\frac{S_0 - S}{S_0 R^2} = \frac{K}{3p}. \quad (31)$$

<sup>1)</sup> Общие формулы этого параграфа впервые были выведены Вермейлем. *H. Vermeil*, Gött. Nachrichten (1917, стр. 334—344).

## ПРИБАВЛЕНИЕ I

### ОБ АКСИОМЕ ПЛОСКОСТИ И КЭЛИЕВЫХ ГЕОМЕТРИЯХ

Изучая аксиому плоскости (гл. V), мы неявно подчинили геодезические поверхности риманова пространства некоторым условиям аналитического характера, с которыми теперь познакомимся ближе. В дальнейшем мы будем предполагать, что коэффициенты фундаментальной формы допускают непрерывные частные производные первого порядка; это обеспечит нам непрерывность коэффициентов  $g_{ij}$ . Предположим, кроме того, что эти величины обладают свойствами, вполне достаточными для того, чтобы:

1° Дифференциальные уравнения геодезических

$$\frac{d^2 u^i}{ds^2} + \sum_{k, h} \Gamma_{kh}^i \frac{du^k}{ds} \frac{du^h}{ds} = 0 \quad (1)$$

имели одно и только одно решение, соответствующее данным начальным условиям:

$$u^i = (u^i)_0, \quad \frac{du^i}{ds} = (v^i)_0 \quad \text{при } s = 0;$$

2° В достаточно малой области пространства через любые две данные точки проходила одна и только одна геодезическая.

Оставим в стороне вопрос об отыскании аналитических условий, которым должны удовлетворять коэффициенты  $g_{ij}$  для того, чтобы пространство обладало указанными свойствами. Для этого, очевидно, достаточно, чтобы они допускали непрерывные частные производные двух первых порядков.

Поставим себе задачу выяснить, каким образом выполнение условий 1° и 2° и аксиома плоскости влекут за собою возможность геодезического отображения на обычное пространство.

Положим  $n = 3$  и будем писать  $u, v, w$  вместо  $u^1, u^2, u^3$ .

### I. Основные факты

1. Если положить

$$x = u'_0 s, \quad y = v'_0 s, \quad z = w'_0 s, \quad (2)$$

где через  $u'_0, v'_0, w'_0$  обозначены начальные значения производных от

неизвестных функций  $u, v, w$ , то уравнения геодезических, проходящих через данную точку  $A(u_0, v_0, w_0)$ , можно будет записать так:

$$\left. \begin{aligned} u - u_0 &= f(x, y, z), \\ v - v_0 &= g(x, y, z), \\ w - w_0 &= h(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Формулы (3) определяют отображение риманова пространства на *нормальное* евклидово пространство (гл. IX).

В силу условия  $2^\circ$ , уравнения (3) разрешимы относительно  $x, y, z$  (если разности  $u - u_0, v - v_0, w - w_0$  достаточно малы).

2. Предположим, что в рассматриваемой области риманова пространства коэффициенты  $\Gamma_{kh}^i$  не превосходят по абсолютной величине некоторого постоянного числа  $M$ . Рассмотрим дугу геодезической, лежащую целиком в этой области. Обозначая через  $s$  криволинейную абсциссу, получим:

$$u - u_0 = u'_0 s + \frac{1}{2} s^2 u''(0s) \quad (0 < \theta < 1)$$

Далее, обозначая через  $u, v, w$  координаты точки на геодезической, криволинейная абсцисса которой равна  $\theta s$ , имеем:

$$u''(\theta s) = -\Gamma_{11}^1(u, v, w)[u'(\theta s)]^2 - \dots$$

Если  $u', v', w'$  принимают во всех точках рассматриваемой области всевозможные значения, совместимые с требованием, чтобы вектор  $(u', v', w')$  был единичным, то правая часть этого равенства остается меньшей, чем некоторая постоянная величина  $hM$ , где  $h$  зависит только от коэффициентов  $g_{ij}$ . Мы получаем таким образом:

$$\left. \begin{aligned} u - u_0 &= u'_0 s + \frac{1}{2} \theta_1 h M s^2, \\ v - v_0 &= v'_0 s + \frac{1}{2} \theta_2 h M s^2, \\ w - w_0 &= w'_0 s + \frac{1}{2} \theta_3 h M s^2, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

причем

$$|\theta_1| < 1, \quad |\theta_2| < 1, \quad \theta_3 < 1.$$

Отсюда легко выводится, что если перемещаться по поверхности, геодезической в  $A(u_0, v_0, w_0)$ , и если через  $l_1, l_2, l_3$  обозначить ковариантные компоненты единичного вектора нормали к поверхности в точке  $A$ , то будут иметь место неравенства вида:

$$\begin{aligned} |l_1(u - u_0) + l_2(v - v_0) + l_3(w - w_0)| &< kM[(u - u_0)^2 + \\ &+ (v - v_0)^2 + (w - w_0)^2], \end{aligned} \quad (5)$$

в которых через  $k$  обозначен некоторый постоянный коэффициент.

3. Рассмотрим теперь содержащую данную геодезическую линию  $\gamma$  поверхность  $(S)$ , геодезическую во всех точках этой линии. Докажем, что единичный вектор нормали к  $(S)$  в некоторой точке кривой  $(\gamma)$  при параллельном переносе вдоль этой кривой остается нормальным к поверхности.

Не уменьшая общности, мы можем предположить, что геодезическая  $(\gamma)$  определена уравнениями  $u=v=0$ ; отсюда следует, если учесть еще (1), что во всех точках  $(\gamma)$  выполняется соотношение:

$$\Gamma_{33}^1 = \Gamma_{33}^2 = 0.$$

Ковариантные компоненты единичного вектора нормали к  $(S)$  в некоторой точке кривой  $(\gamma)$  имеют вид  $(l_1, l_2, 0)$ . Докажем, что во всех точках кривой  $(\gamma)$  удовлетворяются равенства:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dl_1}{dw} - l_1 \Gamma_{13}^1 - l_2 \Gamma_{13}^2 &= 0, \\ \frac{dl_2}{dw} - l_1 \Gamma_{23}^1 - l_2 \Gamma_{23}^2 &= 0, \\ -l_1 \Gamma_{33}^1 - l_2 \Gamma_{33}^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Третье соотношение выполняется автоматически. Чтобы доказать первые два, возьмем некоторую точку  $A$  кривой  $(\gamma)$  и предположим, что в этой точке  $w=0$ . Сделаем такую замену переменных, чтобы в точке  $A$  все  $\Gamma_{ij}^k$  превратились в нуль (п° 84). При этих условиях достаточно будет показать, что в точке  $A$  справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \frac{dl_1}{dw} &= 0, \\ \frac{dl_2}{dw} &= 0. \end{aligned}$$

Эти равенства по существу сводятся к одному, так как соотношение:

$$g^{11}l_1^2 + 2g^{12}l_1l_2 + g^{22}l_2^2 = 1$$

при дифференцировании дает (в точке  $A$ ):

$$(g^{11}l_1 + g^{12}l_2) \frac{dl_1}{dw} + (g^{12}l_1 + g^{22}l_2) \frac{dl_2}{dw} = 0.$$

Если, например, мы предположим, что уравнение элементарной площадки, касательной к  $(S)$  в  $A$ , имеет вид  $du=0$  ( $l_2=0$ ), то нам нужно будет доказать, что

$$\frac{dl_2}{dw} = 0,$$

или, иначе, что отношение  $\frac{l_2}{w}$  стремится к нулю, когда  $w$  стремится к нулю.

Рассмотрим определенную геодезическую  $(\gamma')$ , проходящую через  $A$  и лежащую на поверхности  $(S)$ , причем пусть:

$$u'_0 = 0, \quad v'_0 = b \neq 0, \quad w'_0 = c \neq 0.$$

Возьмем сколь угодно малое положительное число  $\eta$ ; найдется такая область  $(D)$ , окружающая точку  $A$ , внутри которой непрерывные коэффициенты  $\Gamma_{kh}^i$  будут по абсолютной величине меньше чем  $\eta$ . Тогда вследствие уравнений (4) мы получим для геодезической  $(\gamma')$ :

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \theta_1 h \eta s^2, \\ v &= bs + \frac{1}{2} \theta_2 h \eta s^2, \\ w &= cs + \frac{1}{2} \theta_3 h \eta s^2. \end{aligned}$$

Но  $w$ , рассматриваемое как функция от  $s$ , допускает непрерывные производные двух первых порядков; значит, то же можно сказать про  $s$ , если рассматривать его как функцию  $w$ . Обозначая через  $h'$  постоянный коэффициент, можем написать:

$$\left. \begin{aligned} u &= \theta'_1 h' \eta w^2, \\ v &= \frac{b}{c} w + \theta'_2 h' \eta w^2, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

причем

$$|\theta'_1| < 1, \quad |\theta'_2| < 1.$$

Дадим  $w$  постоянное значение  $w_0$  и рассмотрим соответствующую точку геодезической  $(\gamma')$ , причем на поверхность  $(S)$  будем смотреть как на геодезическую в точке  $(0, 0, w_0)$ . В силу соотношений (5) получим:

$$|l_1 u + l_2 v| < k \eta (u^2 + v^2),$$

или

$$\left| l_2 \frac{b}{c} w_0 + h' \eta w_0^2 (\theta'_1 l_1 + \theta'_2 l_2) \right| < k \eta w_0^2 \left[ \left( \frac{b}{c} + \theta'_2 h' \eta w_0 \right)^2 + \theta_1'^2 h'^2 \eta^2 w_0^2 \right],$$

или еще иначе:

$$\left| \frac{b}{c} \frac{b^2}{w_0} \right| < h' \eta |\theta'_1 l_1 + \theta'_2 l_2| + k \eta \left[ \left( \frac{b}{c} + \theta'_2 h' \eta w_0 \right)^2 + \theta_2'^2 h'^2 \eta^2 w_0^2 \right].$$

Наконец, мы можем написать:

$$\left| \frac{b}{c} \frac{l_2}{w_0} \right| < A \eta,$$

причем через  $A$  мы обозначаем некоторое определенное число, не зависящее ни от  $\eta$ , ни от  $w_0$ , ни от  $l_1$ , ни от  $l_2$ .

Это неравенство показывает, что если  $\eta$  — положительное наперед заданное сколь угодно малое число, то всегда можно выбрать  $\omega_0$  настолько малым, чтобы отношение  $\frac{l_2}{\omega}$  было по абсолютной величине меньше, чем  $A \left| \frac{c}{b} \right| \eta$ . Это и значит, что  $\frac{l_2}{\omega}$  стремится к нулю вместе с  $\omega$ , — предложение, которое мы хотели доказать.

4. Из предыдущей теоремы сразу вытекает следствие:

*Если две поверхности  $(S_1)$  и  $(S_2)$  пересекаются вдоль геодезической  $(\gamma)$  и если они обе являются геодезическими во всех точках кривой  $(\gamma)$ , то они пересекаются под постоянным углом.*

Действительно, единичные нормальные векторы к  $(S_1)$  и  $(S_2)$  в некоторой точке кривой  $(\gamma)$  остаются таковыми, если их параллельно перенести вдоль  $(\gamma)$ ; следовательно, угол между нормальными к поверхностям постоянен вдоль всей  $(\gamma)$ .

## II. Теорема Шура

5. Из доказанных только что теорем следует, что вполне геодезическая поверхность, определенная как геодезическая в каждой своей точке, допускает повсюду касательную элементарную площадку, притом изменяющуюся непрерывно.

Если все поверхности, геодезические в точке  $A$ , являются вполне геодезическими, то нетрудно видеть, что всегда найдется поверхность, геодезическая в  $A$  и проходящая через данную геодезическую линию (по крайней мере в некоторой достаточно малой области, окружающей точку  $A$ ). Действительно, пусть  $(\gamma)$  — геодезическая линия,  $M$  — одна из ее точек. Через точки  $A$  и  $M$  проходит геодезическая  $(\gamma')$ ; рассмотрим единичный вектор, нормальный в  $M$  и к  $(\gamma)$  и к  $(\gamma')$ , и перенесем его параллельно из  $M$  в  $A$  вдоль кривой  $(\gamma')$ . Существует поверхность  $(S)$ , геодезическая в  $A$  и нормальная в этой точке к нашему вектору; *эта поверхность будет геодезической вдоль  $(\gamma')$* ; нормаль к ней в точке  $M$  будет согласно п<sup>о</sup>3 нормальна не только к  $(\gamma')$ , но и к  $(\gamma)$ ; геодезическая  $(\gamma)$ , касательная в  $(M)$  к  $(S)$ , будет, таким образом, целиком лежать на поверхности  $(S)$ , геодезической в  $M$ .

Теперь мы можем доказать теорему Шура, в силу которой пространство удовлетворяет аксиоме плоскости, если существуют две точки  $A, B$  такие, что любая поверхность, геодезическая в одной из этих точек, является вполне геодезической (п<sup>о</sup> 112).

Прежде всего мы можем, как это было сделано в п<sup>о</sup>113, с каждой точкой пространства  $M$  связать шесть величин  $x, y, z, x', y', z'$ , причем каждая тройка определена только до числового множителя. В тексте мы доказали важное соотношение, связывающее эти величины, причем мы опирались на свойство, по которому четыре геодезические поверхности, проходящие через  $AB$ , имеют и в  $A$  и в  $B$  одно и то же ангармоническое отношение. Доказательство, данное нами в тексте, не может быть применено здесь. Но благодаря теореме, доказанной в п<sup>о</sup>4, это свойство очевидно, потому что углы, под которыми линии поверхности пересекаются в  $A$ , те же, под которыми они пересекаются и в  $B$ .

Таким образом мы можем считать установленным общий результат, сформулированный нами в начале п<sup>о</sup> 114. *С каждой точкой пространства можно связать такие четыре однородные координаты  $X, Y, Z, T$ , что любая вполне геодезическая поверхность, проходящая через  $A$ , будет определена уравнением, линейным относительно  $X, Y, Z$ , а любая вполне геодезическая поверхность, проходящая через  $B$ , — уравнением, линейным относительно  $X, Y, T$ .* Следовательно, любая геодезическая, будучи пересечением двух таких поверхностей, определяется системой уравнений, линейных относительно  $X, Y, Z, T$ . Иными словами, *риманово пространство допускает такое отображение на обыкновенное пространство, при котором геодезическим соответствуют прямые линии.*

6. При этом вовсе не очевидно, что плоскости обыкновенного пространства будут служить отображением геодезических поверхностей пространства Римана; действительно, неоднородные координаты  $\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}, \frac{Z}{T}$  обычного пространства будут функциями координат  $u, v, w$  пространства Римана, — функциями, природа которых нам неизвестна. Вследствие этого нельзя быть уверенным в том, что геодезические, касательные к одной и той же элементарной площадке в пространстве Римана, отображаются в обычном пространстве прямыми, лежащими в одной и той же плоскости.

Убедимся, что это обстоятельство действительно имеет место. Для доказательства рассмотрим точку  $P$  риманова пространства и ее образ  $P'$  в пространстве обычном. Любая геодезическая, выходящая из  $P$ , определяется взаимными отношениями трех величин  $(du, dv, dw)$ ; точно так же соответствующая прямая определяется взаимными отношениями трех величин  $d\xi, d\eta, d\zeta$ , если через  $\xi, \eta, \zeta$  обозначить хотя бы отношения  $\frac{X}{T}, \frac{Y}{T}, \frac{Z}{T}$ . Будем считать  $du, dv, dw$  с одной стороны;  $d\xi, d\eta, d\zeta$  — с другой, однородными координатами двух точек  $m$  и  $m'$  некоторой плоскости  $(\Pi)$ . Пусть  $a$  и  $b$  — соответствующие точки геодезических  $PA, PB$ ; пусть  $a', b'$  — соответствующие точки прямых  $P'A', P'B'$ .

Любая элементарная площадка риманова пространства, проходящая через  $P$ , отобразится на плоскости  $(\Pi)$  прямою  $d$ ; любая элементарная площадка обычного пространства, проходящая через  $P'$  — прямою  $d'$ . Если прямая  $d$  проходит через  $a$ , то проходящая через  $P$  элементарная площадка, касательная ко вполне геодезической поверхности, проходящей через  $A$ , отображается на элементарную площадку, проходящую через  $P'$  и лежащую в плоскости, проходящей через  $A'$ . Следовательно, *каждой прямой  $d$ , проходящей через  $a$ , соответствует прямая  $d'$ , проходящая через  $a'$ .* Точно так же любой прямой  $d$ , проходящей через  $b$ , соответствует прямая  $d'$ , проходящая через  $b'$ . Наконец, ангармоническое отношение четырех прямых  $d$ , выходящих из  $a$  (или из  $b$ ), равно ангармоническому отношению четырех соответствующих прямых  $d'$ , выходящих из  $a'$  (или из  $b'$ ); действительно, ангармоническое отношение четырех прямых  $d$ , выходящих из одной и той же точки, равно ангармоническому отношению четырех элементарных площадок, отображением которых они являются.



7. Установив это, рассмотрим произвольную прямую  $\delta$  плоскости (II), (соответствующую поверхности  $\Sigma$ , геодезической в  $P$ ); отыщем геометрическое место точек  $m'$  соответствующих разным точкам  $m$  прямой  $\delta$ . Пусть  $m_0$  — точка пересечения  $\delta$  и  $ab$ , а  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$  — три какие-либо иные точки  $\delta$ . Анггармоническое отношение четырех прямых  $(a, m_0 m_1 m_2 m_3)$  равно анггармоническому отношению в  $A$  четырех геодезических поверхностей, проходящих через геодезическую линию  $AP$ ; значит, оно равно анггармоническому отношению этих же четырех поверхностей в точке  $P$ ; следовательно, оно равно анггармоническому отношению четырех прямых, по которым эти поверхности пересекаются с  $\Sigma$ . Тот же результат получится, если взять анггармоническое отношение четырех прямых  $(b, m_0 m_1 m_2 m_3)$ . Точно так же получим:

$$(a' \cdot m'_0 m'_1 m'_2 m'_3) = (b' \cdot m'_0 m'_1 m'_2 m'_3);$$

следовательно, точки  $m'_1$ ,  $m'_2$ ,  $m'_3$  лежат на одной прямой. Таким образом, прямой  $\delta$  соответствует прямая  $\delta'$ .

Соответствие  $(mm')$  в плоскости (II) обладает тем свойством, что любой прямой соответствует прямая; отсюда следует, что любой элементарной площадке риманова пространства соответствует площадка пространства обычного. Следовательно, *поверхности риманова пространства, отображениями которых в обычном пространстве служат плоскости, являются вполне геодезическими поверхностями*. Таким образом в римановом пространстве установлена аксиома плоскости.

8. Более того, точечное соответствие  $(m, m')$  в плоскости II является проективным соответствием. Иными словами, двигаясь вдоль любой геодезической, выходящей из точки  $P$ , мы получим:

$$\frac{du}{ad \frac{X}{T} + b d \frac{Y}{T} + c d \frac{Z}{T}} = \frac{dv}{a' d \frac{X}{T} + b' d \frac{Y}{T} + c' d \frac{Z}{T}} = \frac{dw}{a'' d \frac{X}{T} + b'' d \frac{Y}{T} + c'' d \frac{Z}{T}}.$$

Таким образом, в обычном пространстве, на которое производится отображение, косинус угла между двумя направлениями будет иметь такой же вид, какой он имеет в декартовой системе координат, изотропным конусом которой служит некоторый вполне определенный конус второго порядка.

Можно добавить еще, что если перемещаться вдоль прямой  $d \frac{Y}{T} = d \frac{Z}{T} = 0$ , то величины  $\frac{\Delta u}{\Delta \frac{X}{T}}$ ,  $\frac{\Delta v}{\Delta \frac{X}{T}}$ ,  $\frac{\Delta w}{\Delta \frac{X}{T}}$  будут стремиться к определенным пределам; иными словами, *координаты  $u$ ,  $v$ ,  $w$  допускают по отношению к  $\frac{X}{T}$ ,  $\frac{Y}{T}$ ,  $\frac{Z}{T}$  частные производные первого порядка, и наоборот*.

Чтобы перейти теперь к кэлиевым геометриям, мы можем рассуждать с этого момента точно так же, как делали это в тексте (п° 152 — 154). Таким образом, *любое риманово пространство, удовлетворяющее аксиоме плоскости, является либо-локально-евклидовым, либо локально-сферическим, либо локально-гиперболическим*.

## ПРИБАВЛЕНИЕ II

### О ЛИНЕЙНОЙ РИМАНОВОЙ КРИВИЗНЕ

В гл. VI мы показали, что риманова кривизна проявляется при развертывании пространства вдоль замкнутого контура. В случае контура, ограничивающего весьма малую площадь около данной точки, кривизна эта зависит от направления площадки; если направление дано, то кривизна пропорциональна величине площадки. Можно сказать, что риманова кривизна является *суперфициальной* величиной (т. е. величиной, связанной с некоторым элементом площади).

При этом мы предполагаем, что коэффициенты  $g_{ij}$  фундаментальной формы допускают непрерывные частные производные двух первых порядков.

Мы увидим, что дело будет обстоять иначе, если не сделать такого предположения. Ограничимся изучением наиболее простого случая, когда в некоторой области риманова пространства коэффициенты  $g_{ij}$  допускают непрерывные частные производные двух первых порядков всюду, за исключением точек некоторой поверхности  $(\Sigma)$ , пересекающей область. Мы предположим, что во всех точках этой поверхности коэффициенты  $g_{ij}$  имеют непрерывные частные производные первого порядка, *но что при этом нормальная производная разрывна*. Выражаясь точнее, скажем, что функция  $g_{ij}$  допускает в точке  $M$  поверхности  $(\Sigma)$  производную в любом направлении, но производные в двух прямо противоположных направлениях, нормальных к  $(\Sigma)$ , не равны между собою, тогда как две производные, взятые во взаимно-противоположных направлениях, касательных к  $(\Sigma)$ , между собою равны.

Ничто не мешает предположить, что поверхность  $(\Sigma)$  определена уравнением  $u^3 = 0$ . Назовем стороны поверхности  $(\Sigma)$  *положительной* и *отрицательной* сторонами. Если индексы  $i$  и  $j$  фиксированы, то ковариантный вектор

$$\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right)_+ - \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}\right)_-$$

будет, по предположению, нормален к поверхности: его первые две ковариантные компоненты ( $k=1$  и  $2$ ) будут равны нулю. Если обозначим через  $h_{ij}$  конечное приращение нормальной производной, которое она получает при переходе с отрицательной стороны поверхности на положительную, то получим:

$$\left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^3}\right)_+ - \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^3}\right)_- = \frac{1}{\sqrt{g^{33}}} h_{ij}. \quad (1)$$

Обозначим через  $H_{ikj}$  разность между значениями  $\Gamma_{ikj}$  на положительной и на отрицательной стороне поверхности  $(\Sigma)$ ; тогда без труда получим следующие значения для  $H_{ikj}$ :

$$\left. \begin{aligned} H_{ikj} &= 0, & (i, k, j = 1, 2) \\ H_{i3j} &= -H_{3ij} = -\frac{1}{2} \frac{h_{ij}}{\sqrt{g^{33}}}, & (i, j = 1, 2) \\ H_{33i} &= 0, \quad H_{3i3} = \frac{h_{i3}}{\sqrt{g^{33}}}, & (i = 1, 2) \\ H_{333} &= \frac{1}{2} \frac{h_{33}}{\sqrt{g^{33}}}. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Установив это, рассмотрим малую дугу кривой  $MM'$ , лежащую на поверхности  $(\Sigma)$ . Возьмем вектор  $(X_i)$ , приложенный в  $M$ , и перенесем его параллельно вдоль дуги кривой  $MM'$  по отрицательной стороне  $(\Sigma)$ , а затем — вдоль  $M'M$  по положительной ее стороне. В результате первого переноса компоненты вектора принимают значения  $(Y^i)$ , которые даются формулами:

$$Y^i = X^i - \sum_{k, r} X^k (\Gamma_{kr}^i)_- du^r,$$

а в результате второго — значения  $(Z^i)$ , данные формулами:

$$Z^i = Y^i + \sum_{k, r} Y^k (\Gamma_{kr}^i)_+ du^r = X^i + \sum_{k, r} X^k H_{kr}^i du^r. \quad (3)$$

Заметим, что в силу соотношений (2) коэффициенты  $H_{kir}$ , третий индекс которых  $r$  отличен от трех, удовлетворяют соотношениям:

$$H_{kir} = -H_{ikr}.$$

Отсюда следует, что в результате такого параллельного переноса наш вектор испытывает бесконечно малый поворот, ковариантные компоненты которого имеют вид:

$$a_{ij} = \sum_r^{1, 2} H_{ijr} du^r.$$

Без труда находим:

$$\left. \begin{aligned} a_{12} &= 0, \\ a_{13} &= -\frac{1}{2 \sqrt{g^{33}}} (h_{11} du^1 + h_{12} du^2), \\ a_{23} &= -\frac{1}{2 \sqrt{g^{33}}} (h_{12} du^1 + h_{22} du^2). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Таким образом мы видим, что с любой элементарной дугой кривой, лежащей на  $(\Sigma)$ , связано некоторое вращение вокруг оси, касательной

$\kappa(\Sigma)$ , определяющее собою то, что можно назвать линейной римановой кривизной пространства в направлении этой кривой.

Если через  $ds$  обозначить длину дуги кривой, через  $\alpha^1, \alpha^2$  — направляющие параметры ее касательной, то простое вычисление покажет, что внутреннее произведение вектора  $\overline{MM'}$  на бивектор, характеризующий вращение, равняется:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [h_{11}(du^1)^2 + 2h_{12}du^1du^2 + h_{22}(du^2)^2] = {}^2_{22} \\ & = \frac{1}{2} [h_{11}(\alpha^1)^2 + 2h_{12}\alpha^1\alpha^2 + h_{22}(\alpha^2)^2] ds^2. \end{aligned}$$

Скаляр

$$K = \frac{1}{2} [h_{11}(\alpha^1)^2 + 2h_{12}\alpha^1\alpha^2 + h_{22}(\alpha^2)^2] \quad (5)$$

представляет собою риманову кривизну пространства в направлении  $(\alpha^1, \alpha^2)$ ; это выражение связано с разрывностью нормальных производных трех коэффициентов  $g_{11}, g_{12}, g_{22}$ , определяющих метрику на поверхности. Если на нормалях к нашей поверхности во всех точках нашей дуги отложить в обе стороны весьма малую длину  $\epsilon$ , то мы получим две новых дуги длиной соответственно  $d\sigma_+$  и  $d\sigma_-$ . Имеем:

$$K = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d\sigma_+^2 + d\sigma_-^2 - 2ds^2}{2\epsilon ds^2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{d\sigma_+ + d\sigma_- - 2ds}{\epsilon ds}.$$

*Кривизна  $K$  представляет собою сумму коэффициентов удлинения дуги кривой, лежащей на поверхности, которые получаются, если перемещать эту кривую нормально к поверхности в обоих направлениях.*

### ПРИБАВЛЕНИЕ III

#### О НОРМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ ИЛИ НУЛЕВОЙ РИМАНОВОЙ КРИВИЗНЫ

Пользуясь нормальными координатами Римана, можно установить замечательные свойства *нормальных* римановых пространств переменной кривизны в том случае, когда эта кривизна в любой точке и в любом направлении отрицательна или равна нулю.

##### 1. Свойства линейного элемента в нормальных координатах

1. В п°56 мы дали определение нормального риманова пространства. Здесь мы сделаем еще одно дополнительное предположение, быть может, впрочем, лишнее; мы предположим, что в любой части пространства, определенного аналитически с помощью системы координат  $u^i$ , коэффициенты  $g_{ij}$  фундаментальной формы допускают непрерывные частные производные *трех* первых порядков<sup>1)</sup>, причем сама эта форма является, конечно, определенной, положительной. При этих условиях  $\Gamma_{ij}^k$  будут иметь непрерывные частные производные двух первых порядков, а  $R_{ij,rs}$  — непрерывные частные производные первого порядка.

На основании классических теорем теории дифференциальных уравнений мы можем утверждать, что величины  $u^i — (u^i)_0$ , рассматриваемые как функции координат

$$x^1 = a^1 s, \dots, x^n = a^n s,$$

нормальных в точке  $(u^i)_0$ , допускают непрерывные частные производные двух первых порядков. То же можно сказать относительно компонент вектора, который получается в результате параллельного переноса некоторого определенного вектора вдоль геодезической, выходящей из точки  $(u^i)_0$ .

2. Вместо того, чтобы непосредственно рассматривать линейный элемент пространства  $ds^2$ , данный в нормальной системе координат, мы определим его как сумму квадратов проекций бесконечно малого вектора  $\overline{MM'}$  на оси прямоугольной координатной системы с началом в  $M$ , подходящим образом подобранной. Для этого мы возьмем определенную локальную систему координат  $(R)$ , связанную с точкой  $O(u^i)_0$ , и перенесем ее параллельно вдоль геодезической, соединяющей  $O$  с  $M$ . Этого сделать нельзя, если не существует геодезической, соединяющей эти две точки; поэтому мы оставим без рассмотрения те части пространства,

1) Вместо *двух*, как мы это предполагали в п° 52.

точки которых не могут быть соединены с точкой  $O$  геодезической линией. Наоборот, если существует несколько геодезических, соединяющих  $O$  с  $M$ , то мы свяжем с  $M$  ровно столько же локальных координатных систем, причем каждой из этих систем будет соответствовать координатная система, нормальная в  $M$ .

Обозначим через

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

направляющие параметры вектора, касательного в  $O$  к некоторой геодезической, причем параметры эти пусть будут связаны с местной координатной системой  $(R_0)$ . Величину этого вектора мы не подчиним пока никаким ограничениям. Положим далее, что нормальные координаты точки  $M$ , лежащей на этой геодезической, равны

$$x_1 = a_1 t, \quad x_2 = a_2 t, \quad \dots, \quad x_n = a_n t, \quad (1)$$

так что длина дуги  $OM$  будет:

$$s = t \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}. \quad (2)$$

В общем мы вводим  $(n+1)$  координат:

$$a_1, a_2, \dots, a_n; t \geq 0.$$

3. Обозначим через  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  — проекции на оси локальной координатной системы  $(R)$  с началом в  $M$  бесконечно малого вектора, компонентами которого относительно *естественной* локальной координатной системы с началом в  $M$  будут величины  $du^1, du^2, \dots, du^n$ . Величины  $\omega^i$  представляют собою формы, линейные относительно  $du^1, \dots, du^n$ , причем коэффициенты этих форм допускают непрерывные частные производные двух первых порядков.

Вращение около  $M$ , благодаря которому основные векторы локальной координатной системы  $(R)$  становятся параллельными основным векторам системы  $(R')$ , связанной с соседней точкой  $M'$ , определяется системой бивекторов, компоненты которой относительно  $(R)$  мы обозначим  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ . Это — формы, линейные относительно  $du^1, \dots, du^n$ , коэффициенты которых допускают непрерывные частные производные первого порядка.

Если менять только  $t$ , а параметры  $a_i$  оставить неизменными, то бесконечно малый вектор  $\overline{MM'}$  будет иметь в качестве направляющих параметров как раз величины  $a_i$  и, следовательно, формы  $\omega_i$  сведутся к

$$\omega_i = a_i dt.$$

Точно так же, перемещая параллельно локальный  $n$ -эдр  $(R)$  вдоль геодезической  $OM$ , получим:

$$\omega_{ij} = 0.$$

Положим:

$$\left. \begin{aligned} \omega_i &= a_i dt + \bar{\omega}_i, \\ \omega_{ij} &= \bar{\omega}_{ij}; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

новые формы  $\bar{\omega}_i$  и  $\bar{\omega}_{ij}$  будут линейны относительно  $da_1, da_2, \dots, da_n$  и при  $t=0$  будут превращаться в нуль.

4. Мы видели (п° 185), что векторный интеграл  $\int dM$ , взятый вдоль бесконечно малого замкнутого контура (цикла), равняется нулю. Значит, абсолютная внешняя производная векторной формы  $\omega_i$  равна нулю, т. е. (п° 183):

$$\omega'_i + \sum_k [\omega_k \omega_k] = 0. \quad (4)$$

Точно так же, обозначая через  $\Omega_{ij}$  компоненты системы бивекторов, характеризующей вращение, ассоциированное с нашим циклом, получим формулы (п° 160):

$$\omega'_{ij} + \sum_k [\omega_k \omega_{jk}] = \Omega_{ij}. \quad (5)$$

Мы будем применять формулы (4) и (5), используя два символа дифференцирования:  $d$  и  $\delta$ , из которых первый соответствует изменению одной только переменной  $t$ , а второй — произвольному изменению переменных  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Из (3) получаем:

$$\begin{aligned} \omega_i(d) &= a_i dt, & \omega_{ij}(d) &= 0, \\ \omega_i(\delta) &= \bar{\omega}_i(\delta), & \omega_{ij}(\delta) &= \bar{\omega}_{ij}(\delta). \end{aligned}$$

Отсюда, применяя (4) и (5), получаем:

$$\begin{aligned} d\bar{\omega}_i(\delta) - \delta a_i dt - \sum_k a_k \bar{\omega}_{ki}(\delta) dt &= 0, \\ d\bar{\omega}_{ij}(\delta) &= \sum_{r,s} R_{ij,rs} a_r \bar{\omega}_s(\delta) dt, \end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{\omega}_i(\delta)}{dt} &= \delta a_i + \sum_k a_k \bar{\omega}_{ki}(\delta), \\ \frac{d\bar{\omega}_{ij}(\delta)}{dt^2} &= \sum_{r,s} R_{ij,rs} a_r \bar{\omega}_s(\delta). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Эти формулы являются основными.

5. Вообще говоря, мы уверены только в том, что коэффициенты форм  $\omega_i$  и  $\omega_{ij}$ , если их рассматривать как функции переменных  $t, a_1, a_2, \dots, a_n$ , допускают непрерывные частные производные *первого* порядка; однако

уравнения (6) показывают нам, что формы  $\bar{\omega}_i$ , представляющие собою линейные комбинации  $\delta a_1, \dots, \delta a_n$ , допускают непрерывные частные производные *второго* порядка по переменной  $t$ . Если мы продифференцируем по  $t$  первую группу уравнений (6), то, учитывая вторую группу, получим:

$$\frac{d^2 \bar{\omega}_i(\delta)}{dt^2} = \sum_{k, r, s} R_{ki, rs} a_k \bar{\omega}_s(\delta). \quad (7)$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} \sum_i \bar{\omega}_i(\delta) \frac{d^2 \bar{\omega}_i(\delta)}{dt^2} &= \sum_{i, k, r, s} R_{ki, rs} a_k \bar{\omega}_i(\delta) \bar{\omega}_s(\delta) = \\ &= \sum_{ki, (rs)} R_{ki, rs} [a_k \bar{\omega}_i(\delta) - a_i \bar{\omega}_k(\delta)] [a_r \bar{\omega}_s(\delta) - a_s \bar{\omega}_r(\delta)]. \end{aligned}$$

Если правую часть помножить на квадрат меры бивектора, определенного векторами  $(a_i)$  и  $[\bar{\omega}_i(\delta)]$ , то получим выражение, которое только знаком отличается от римановой кривизны пространства в направлении элементарной площадки этого бивектора. Гипотеза, сделанная нами относительно знака римановой кривизны пространства, дает нам сейчас же основное неравенство:

$$\sum_i \bar{\omega}_i(\delta) \frac{d^2 \bar{\omega}_i(\delta)}{dt^2} \geq 0. \quad (8)$$

Отсюда немедленно вытекает:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \sum_i \bar{\omega}_i^2 \right) \geq 2 \sum_i \left( \frac{d \bar{\omega}_i}{dt} \right)^2. \quad (9)$$

6. Будем сумму  $\sum \bar{\omega}_i^2$  рассматривать как функцию переменного  $t$  (а величины  $a_i$  и  $\delta a_i$  будем считать параметрами). И сама эта сумма и ее первая производная превращаются в нуль при  $t=0$ ; вторая же ее производная положительна; поэтому и сама сумма существенно *положительна*. Вследствие неравенства (9) это заключение могло бы быть ошибочным для системы значений  $(t_0, u_i, \delta a_i)$  только в том случае, если бы для всех значений  $t$ , заключенных между 0 и  $t_0$ , мы бы имели  $\frac{d \bar{\omega}_i}{dt} = 0$ .

Но согласно (6) начальное значение этой производной равно  $\delta a_i$ , значит, необходимо, чтобы все дифференциалы  $\delta a_i$  были равны нулю.

При любых значениях величин  $da_1, da_2, \dots, da_n$  сумма  $\bar{\omega}_1^2 + \dots + \bar{\omega}_n^2$  представляет собою определенную положительную квадратичную форму.

7. Можно пойти еще дальше. Рассмотрим функцию  $\sqrt{\bar{\omega}_1^2 + \dots + \bar{\omega}_n^2}$ , которая равна нулю в начале координат и производная которой по  $t$  при  $t=0$  равняется  $\sqrt{da_1^2 + \dots + da_n^2}$ .



Нетрудно проверить формулу:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( V \overline{\omega_1^2 + \dots + \omega_n^2} \right) \frac{\sum_i \overline{\omega_i} \frac{d^2 \overline{\omega_i}}{dt^2}}{V \sum_i \overline{\omega_i^2}} + \frac{\sum_{(i,j)} \left( \overline{\omega_i} \frac{d \overline{\omega_j}}{dt} - \overline{\omega_j} \frac{d \overline{\omega_i}}{dt} \right)^2}{\left[ \sum_i \overline{\omega_i^2} \right]^2} \geq 0.$$

Таким образом, имеем:

$$V \overline{\omega_1^2 + \dots + \omega_n^2} \geq t V \overline{da_1^2 + da_2^2 + \dots + da_n^2},$$

или окончательно:

$$\overline{\omega_1^2} + \overline{\omega_2^2} + \dots + \overline{\omega_n^2} \geq t^2 (da_1^2 + da_2^2 + \dots + da_n^2). \quad (10)$$

8. Возвратимся теперь к нормальным координатам  $x_i$ . Линейный элемент пространства  $ds^2$  зависит только от этих координат, т. е. от  $n$  комбинаций  $a_i t$ ; поэтому его можно получить из предыдущих формул, полагая  $t=1$ ,  $a_i = x_i$ . При этом  $ds^2$  сведется к  $\overline{\omega_1^2} + \dots + \overline{\omega_n^2}$ , а формула (10) примет вид:

$$ds^2 \geq dx_1^2 + dx_2^2 + \dots + dx_n^2. \quad (11)$$

Ограничимся следующими двумя следствиями этой формулы:

1. В любой точке  $M$  пространства, которую можно соединить с  $O$  геодезической, функциональный определитель нормальных координат  $x_i$  по отношению к переменным  $u^i$  отличен от нуля, потому что он равен корню квадратному из отношения дискриминантов линейных элементов, из которых один выражен в переменных  $x_i$ , а другой — в переменных  $u^i$ .

2. При отображении пространства Римана на нормальное евклидово пространство риманово расстояние между двумя точками всегда больше соответствующего евклидова расстояния (или равно ему).

Мы уже доказали это свойство (п° 201) для области, лежащей в непосредственной близости к точке  $O$ .

Можно было бы потребовать, чтобы параметры  $a_i$  удовлетворяли соотношению:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = 1;$$

нетрудно проверить, что при этом получится:

$$ds^2 \geq dt^2 + t^2 (da_1^2 + \dots + da_n^2), \quad (12)$$

причем  $t$  обозначает теперь длину геодезической  $OM$ .

## II. Покрывающее односвязное пространство

9. С помощью нормального линейного элемента данного риманова пространства, которое мы обозначим через  $\mathcal{E}$ , можно определить нормальное односвязное пространство  $\mathcal{E}'$ , гомеоморфное евклидову пространству; точками этого пространства будут точки  $M$  пространства  $\mathcal{E}$ , которые могут быть соединены с  $O$  дугами геодезических; если между  $O$  и  $M$  можно провести несколько дуг геодезических, то будем считать, что  $M$  порождает соответствующее число различных точек в пространстве  $\mathcal{E}'$ . Иными словами, любая точка  $\mathcal{E}'$  представляет собою систему, состоящую из точки  $M$  пространства  $\mathcal{E}$  и нормальных координат  $(x_1, \dots, x_n)$  этой точки.

Ясно, что каждой точке пространства  $\mathcal{E}'$  соответствует одна и только одна точка пространства  $\mathcal{E}$ , но точке  $\mathcal{E}$  может соответствовать несколько точек  $\mathcal{E}'$ . Покажем, что *любой точке  $\mathcal{E}$  соответствует по крайней мере одна точка в  $\mathcal{E}'$ , т. е., что любая точка пространства  $\mathcal{E}$  может быть соединена с  $O$  дугой геодезической линии.*

10. Действительно, соединим  $O$  с  $M$  произвольной непрерывной кривой  $(C)$ . Мы можем, по крайней мере вблизи  $O$ , *развернуть* кривую  $(C)$  на пространство  $\mathcal{E}'$ , т. е. рассматривать совокупность непрерывно меняющихся значений нормальных координат  $(x_1, \dots, x_n)$  точек кривой  $(C)$ . *Это развертывание можно выполнить для всех точек кривой  $(C)$ .* Действительно, предположим противное и обозначим через  $A$  первую предельную точку множества тех точек  $(C)$ , которые не имеют соответствующих точек в  $\mathcal{E}'$ .

Мы никогда не достигнем точки  $A$ ; действительно, в противном случае она имела бы определенные нормальные координаты  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ; при этом функциональный определитель функций  $x_i$  по отношению к переменным  $u_i$  не равен нулю вблизи  $A$ ; значит, развертывание можно было бы продолжить во всех точках, достаточно близких к  $A$ , а это противоречит сделанным предположениям.

До точки  $A$  мы никогда не дойдем, но мы дойдем до всех точек, предшествующих  $A$ ; нормальные координаты  $x_1, \dots, x_n$  этих точек имеют по крайней мере одну систему предельных значений  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ ; действительно, в силу (12) мы имеем:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq L^2;$$

где через  $L$  обозначена общая длина дуги  $(C)$ , а это показывает, что множество точек  $(x_1, \dots, x_n)$  *ограниченно*. При этом мы не можем иметь более одной предельной точки, потому что на кривой  $(C)$  между точками  $O$  и  $A$  имеем согласно (11):

$$ds^2 \geq dx_1^2 + \dots + dx_n^2,$$

так что евклидово расстояние между двумя точками  $(x_i)$  и  $(x'_i)$ , соответствующими двум точкам кривой  $(C)$ , достаточно близким к  $A$ , остается все время сколь угодно малым.

Итак, мы достигнем точки  $A$  при нашем процессе; ее нормальные координаты будут  $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ ; мы пришли таким образом к противоречию.

*Пространство  $\mathcal{E}$  целиком покрыто геодезическими, выходящими из одной какой-нибудь его точки.*

11. Назовем  $\mathcal{E}'$  *покрывающим пространством для пространства  $\mathcal{E}$* ; по отношению к последнему оно играет ту же роль, какую евклидово пространство играет по отношению к нормальным локально-евклидовым пространствам. Оно односвязно и гомеоморфно евклидову пространству.

В частном случае, когда пространство  $\mathcal{E}$  само является односвязным, т. е. когда любой замкнутый контур в нем непрерывной деформацией может быть стянут в точку, мы можем доказать, точно так же, как это было сделано в гл. III (п° 61), что любой точке  $\mathcal{E}$  соответствует одна единственная точка  $\mathcal{E}'$ . Таким образом существует взаимно-однозначное соответствие между точками обоих пространств и, следовательно, между точками риманова и точками евклидова пространства с координатами  $(x_1, \dots, x_n)$ .

Значит, *любое нормальное риманово пространство, односвязное, риманова кривизна которого повсюду отрицательна или равна нулю, гомеоморфно евклидову пространству.*

Это предложение не является простой тавтологией. Например, мы можем себе представить *a priori* пространство, гомеоморфное объему, заключенному между двумя концентрическими сферами (с точки зрения метрики нашего пространства поверхности этих сфер будут лежать в бесконечности). Такое пространство не может иметь повсюду отрицательную или нулевую кривизну, потому что хотя оно и односвязно, но не гомеоморфно евклидову пространству, оно содержит замкнутые поверхности, которые непрерывной деформацией не могут быть стянуты в точку.

### III. Геодезические линии односвязных пространств

12. Если риманово пространство односвязно, *то через любые две его точки проходит геодезическая, и притом только одна.* Действительно, пусть одна из данных точек играет роль точки  $O$  предыдущих параграфов, тогда другая точка  $M$  будет иметь единственным образом определенные нормальные координаты, в свою очередь определяющие единственную геодезическую, соединяющую  $O$  с  $M$ . Эта геодезическая может быть продолжена за точку  $M$  до бесконечности (значит и за первую точку); таким образом она ни в коем случае не может быть замкнутой. Формула (12) показывает, что геодезическая  $OM$  короче любой другой линии, соединяющей  $O$  с  $M$ .

Далее, формула (11) показывает, что если через  $l$  обозначим длину произвольной кривой, соединяющей точки  $M$  и  $M'$  с нормальными координатами  $(x_i)$  и  $(x'_i)$ , то получим:

$$l^2 \geq (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2.$$

Прилагая этот результат к геодезической  $MM'$  треугольника  $OMM'$ , мы видим, что любой геодезический треугольник со сторонами  $a, b, c$  и углами  $A, B, C$  удовлетворяет неравенству:

$$c^2 \geq a^2 + b^2 - 2ab \cos C; \quad (13)$$

в частности в прямоугольном геодезическом треугольнике квадрат гипотенузы больше (или в крайнем случае равен) суммы квадратов двух катетов. Длина геодезической  $OA$ , нормальной к геодезической  $\Gamma$ , проходящей через  $A$ , осуществляет таким образом минимум расстояния от точки  $O$  до некоторой переменной точки кривой  $\Gamma$ .

13. Из этого последнего свойства вытекает, что расстояние  $OM$  от некоторой определенной точки  $O$  до переменной точки, лежащей на геодезической  $\Gamma$ , не может иметь максимума, хотя бы относительного, потому что геодезическая, соединяющая  $O$  с соответствующей точкой  $\Gamma$ , была бы нормальна к  $\Gamma$  (п° 95). Но, с другой стороны, это расстояние неограниченно возрастает, когда точка  $M$  кривой  $\Gamma$  удаляется в бесконечность. Поэтому оно имеет минимум, притом единственный, и, следовательно, из любой точки  $O$  на любую геодезическую  $\Gamma$  можно опустить геодезический перпендикуляр и притом только один. Длиною этой геодезической измеряется расстояние от  $O$  до  $\Gamma$ .

14. И этот, и ряд новых результатов могут быть получены на ином пути, именно, если ввести другую форму линейного элемента пространства. Возьмем основную геодезическую  $\Gamma$ , выберем на ней начало  $A$  и определенное положительное направление. В произвольной точке  $P$  кривой  $\Gamma$  с криволинейной абсциссой  $u$  восставим какой-нибудь геодезический перпендикуляр  $G$ . Свяжем с  $A$  ортогональный локальный  $n$ -эдр  $(R_0)$ ,  $n$ -й основной вектор которого касателен к  $\Gamma$ . С любой точкой  $M$  кривой  $G$  свяжем локальный  $n$ -эдр  $(R)$ , который получается из  $(R_0)$  в результате параллельного переноса последнего из  $A$  в  $P$  вдоль  $\Gamma$  и далее из  $P$  в  $M$  вдоль  $G$ .

Положение точки  $M$  определится следующими данными:

1. Абсциссой  $u$  точки  $P$ .
2. Направляющими параметрами  $(a_1, \dots, a_{n-1})$  геодезической  $G$  в точке  $P$  относительно локального  $n$ -эдра, связанного с этой точкой.
3. Величиною  $t \geq 0$ , произведение которой на

$$\sqrt{a_1^2 + \dots + a_{n-1}^2}$$

дает длину дуги  $MP$ .

Из введенных таким образом  $(n+1)$  координат  $n$  последних входят только в  $n-1$  произведениях  $x_i = ta_i$ .

Сохраняя обозначения п° 3, получим:

$$\left. \begin{aligned} \omega_i &= a_i dt + \bar{\omega}_i, & (i=1, \dots, n-1), \\ \omega_n &= \bar{\omega}_n, \\ \omega_{ij} &= \bar{\omega}_{ij}, & (i, j=1, \dots, n), \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

причем формы  $\bar{\omega}_i$ ,  $\bar{\omega}_n$ ,  $\bar{\omega}_{ij}$  линейны относительно  $du$ ,  $da_1, \dots, da_{n-1}$  и равны нулю при  $t=0$ , за исключением формы  $\omega_n$ , которая при  $t=0$  равна  $du$ .

Уравнения (4) и (5) сохраняют силу; при тех же соглашениях, что и выше, они приводят к соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\bar{\omega}_i(\delta)}{dt} &= \delta a_i + \sum_{k=1}^{k=n-1} a_k \bar{\omega}_{ki}(\delta) \quad (i=1, 2, \dots, n-1), \\ \frac{d\bar{\omega}_n(\delta)}{dt} &= \sum_{k=1}^{k=n-1} a_k \bar{\omega}_{kn}(\delta), \\ \frac{d\bar{\omega}_{ij}(\delta)}{dt} &= \sum_{r,s} R_{ij,rs} a_r \bar{\omega}_s(\delta). \quad (i, j=1, 2 \dots n). \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Начальное значение  $\frac{d\bar{\omega}_i}{dt}$  ( $i < n$ ) равно таким образом  $\delta a_i$ , тогда как  $\frac{d\bar{\omega}_n}{dt}$  имеет начальное значение, равное нулю.

15. Из соотношений (15), точно так же как в п° 5, выводим неравенство:

$$\frac{d^2}{dt^2} \left( \sum_{i=1}^{i=n} \bar{\omega}_i^2 \right) \geq 2 \sum_{i=1}^{i=n} \left( \frac{d\bar{\omega}_i}{dt} \right)^2. \quad (16)$$

Отсюда можно вывести те же самые заключения. Форма  $\sum \bar{\omega}_i^2$  относительно переменных  $da_1, da_2, \dots, da_{n-1}, du$ , равная  $du^2$  при  $t=0$  и производная которой по  $t$  равна нулю при  $t=0$ , будет при  $t=t_0$  больше  $du^2$ , по крайней мере в том случае, когда во всем интервале  $(0, t_0)$   $\frac{d\bar{\omega}_i}{dt} = 0$ , в частности  $da_i = 0$ .

Дифференциальная квадратичная форма  $\sum \bar{\omega}_i^2$  относительно переменных  $du, da_1, \dots, da_{n-1}$  является определенной положительной формой, и притом большей, чем  $du^2$ .

Но  $ds^2$  пространства зависит только от  $u$  и от произведений  $x_i = ta_i$ ; поэтому, чтобы получить  $ds$ , достаточно положить всюду  $t=1$ ,  $a_i = x_i$ . Из этого мы заключаем, что он представляет собою определенную положительную квадратичную форму, превосходящую по величине  $du^2$ .

Но можно действовать и иначе, именно, можно связать параметры  $a_i$  соотношением:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 = 1;$$

нетрудно проверить, что тогда будем иметь:

$$ds^2 = dt^2 + \bar{\omega}_1^2 + \dots + \bar{\omega}_{n-1}^2 > dt^2 + du^2. \quad (17)$$

16. Пользуясь одной из двух полученных нами форм для  $ds^2$ , можно было бы показать, как мы это сделали в п° 10, что из любой точки  $M$  пространства можно провести одну единственную геодезическую  $G$ , пересекающую  $\Gamma$  и нормальную к ней, что, впрочем, нам уже известно. Неравенство (17) дает снова теорему о том, что в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы больше, чем сумма квадратов двух катетов (в крайнем случае равен ей).

Применим к разысканию геодезических линий пространства уравнения Лагранжа (п° 37), используя форму (17) квадрата линейного элемента. Соответствующее уравнение нам даст:

$$\frac{d^2 t}{ds^2} - \frac{1}{ds^2} \sum_i \bar{\omega}_i \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial t} = 0;$$

но функция  $\sum_i \bar{\omega}_i \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial t}$ , равная нулю при  $t=0$ , имеет заведомо неотрицательную производную по  $t$ ; значит, и сама она неотрицательна. Следовательно, *если перемещаться вдоль геодезической линии  $G$ , то вторая производная от расстояния  $t$  между переменной точкой на этой геодезической с криволинейной абсциссой  $s$  и основной геодезической  $\Gamma$  по переменной  $s$  либо положительна, либо равна нулю.*

Итак, расстояние  $t$  не может иметь максимума. При этом возможны два случая:

1. Расстояние  $t$  имеет минимум, который согласно формуле, данной в п° 95 (стр. 103), соответствует геодезической  $M_0 \mu_0$ , ортогонально секущей обе данные геодезические (в том случае, конечно, если эти геодезические не пересекаются; в противном случае минимум будет, очевидно, равен нулю). В этом случае расстояние  $t$  от точки  $M$  кривой  $G$  до  $\Gamma$  неограниченно возрастает, когда точка  $M$  удаляется от  $M_0$  в любом направлении. Две геодезические имеют общий перпендикуляр, и притом только один.

2. Расстояние  $t$  является все время возрастающей или все время убывающей функцией от  $s$ . Например, при  $s \rightarrow -\infty$ ,  $t \rightarrow +\infty$  и при  $s \rightarrow +\infty$ ,  $t \rightarrow h$ , где  $h$  — некоторое число, положительное или равное нулю. В этом случае говорят, что геодезическая, ориентированная в направлении возрастающих  $s$ , является *асимптотой* кривой  $\Gamma$ .

17. Если  $G$  является асимптотой  $\Gamma$  в направлении возрастающих  $s$ , то основание  $\mu$  перпендикуляра  $M\mu$ , опущенного из  $M$  на  $\Gamma$ , уходит в бесконечность, перемещаясь все время в одном направлении, когда  $s$  стремится к  $+\infty$ . Действительно, пусть  $A$  — некоторая определенная точка на  $G$ , и  $Aa$  — перпендикуляр, опущенный из  $A$  на  $\Gamma$ . Возьмем на  $G$  точку  $M$ , лежащую за  $A$ ; при возрастании  $s$  расстояние  $M\mu$  умень-

шается, значит, угол  $\widehat{AN\mu}$  — тупой (п° 95); следовательно, в силу (13) расстояние  $A\mu$  больше  $AM$ . Как только  $AM$  превзойдет  $Aa$ , расстояние  $A\mu$  наверное станет больше, чем  $Aa$ ; точка  $\mu$  на кривой  $\Gamma$  все время будет находиться по одну сторону от  $a$ ; но, с другой стороны, расстояние  $A\mu$  неограниченно возрастает; *значит, точка  $\mu$  на  $\Gamma$  уходит в бесконечность* <sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Если бы  $G$  не была асимптотой  $\Gamma$ , то подобное обстоятельство могло бы и не иметь места. Заметим еще, что точка  $\mu$  не обязательно должна была бы перемещаться все время в одном направлении, по крайней мере в случае  $n > 2$ . Действительно, проведем через точку  $P_0$  на  $\Gamma$  всевозможные геодезические, нормальные к  $\Gamma$ ; они образуют гиперповерхность, *геодезическую* в  $P_0$ , но, вообще говоря, не *вполне геодезическую*. На этой гиперповерхности можно будет найти две точки  $M$  и  $N$  такие, что геодезическая  $MN$  не будет лежать на гиперповерхности. Основание перпендикуляра, опущенного из переменной точки этой геодезической на  $\Gamma$ , пройдет через точку  $P_0$ , чтобы удалиться от нее и снова к ней вернуться.

Благодаря этому расстояние между  $\mu$  и  $G$  остается ограниченным (и меньшим  $h$ ), когда  $\mu$  уходит в бесконечность; следовательно, если  $G$  является асимптотой  $\Gamma$ , то, и обратно  $\Gamma$  является асимптотой  $G$ .

Точно так же видим, что две геодезические  $G_1$  и  $G_2$ , являющиеся асимптотами к третьей геодезической  $\Gamma$ , и притом в одном и том же направлении, являются асимптотами друг по отношению к другу, потому что на  $G_1$  и  $G_2$  можно найти уходящие в бесконечность точки  $M_1$  и  $M_2$ , расстояние между которыми ограничено.

Наконец, можно доказать, что через любую точку, не лежащую на геодезической  $\Gamma$ , проходит одна единственная геодезическая, являющаяся асимптотой к  $\Gamma$  в заданном направлении <sup>1)</sup>.

#### IV. Многосвязные нормальные пространства

18. Если данное пространство  $\mathcal{E}$  не является односвязным, то некоторые из доказанных нами только что теорем теряют силу; однако все эти теоремы сохраняют силу в покрывающем пространстве  $\mathcal{E}'$ ; изучение покрывающего пространства  $\mathcal{E}'$  показывает, как нужно видоизменить эти теоремы, чтобы они выполнялись и в основном пространстве. В частности, если даны две точки  $O$  и  $A$  пространства  $\mathcal{E}$ , то *через эти точки проходит ровно столько геодезических*; сколько в пространстве  $\mathcal{E}'$  имеется точек  $A'$ , соответствующих  $A$ , т. е. столько, сколько существует между  $O$  и  $A$  путей, не сводимых один к другому.

Для большей ясности рассмотрим точки пространства  $\mathcal{E}'$ , соответствующие точке  $O$  пространства  $\mathcal{E}$ . Пусть

$$O', O'_1, O'_2, \dots, O'_n, \dots$$

— эти точки. Каждой из них  $O'_i$  соответствует точечное преобразование (изометрия) пространства  $\mathcal{E}'$ , переводящая  $O'$  в  $O'_i$  и сохраняющая линейный элемент пространства  $\mathcal{E}'$ . Все эти изометрические преобразования образуют группу  $\mathfrak{G}$ , которую можно назвать *группой связности* пространства  $\mathcal{E}$ ; она аналогична группе голономии локально-евклидова пространства ( $n^\circ 64$ ). Ни одно из преобразований этой группы, кроме тождественного, не имеет неподвижных точек в пространстве  $\mathcal{E}'$ . Таким образом группа  $\mathfrak{G}$  — *прерывная группа*.

Пользуясь преобразованиями этой группы, можно в пространстве  $\mathcal{E}'$  построить фундаментальную область  $\mathfrak{F}$ , представляющую пространство  $\mathcal{E}$ , т. е. такую область, каждой точке которой соответствует одна и только одна точка пространства  $\mathcal{E}$ . Положим для простоты  $n=3$ .

<sup>1)</sup> Все эти свойства впервые были доказаны (для  $n=2$ ) Адамаром (*J. Hadamard*) в его прекрасном мемуаре: *Les surfaces à courbures opposées* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 5 серия, т. 4, 1898, стр. 27—73). Впрочем этот выдающийся геометр указал на возможность распространения своих результатов и на случай произвольного  $n$ ; для этого он использовал доказанное им же предложение, согласно которому поверхности, представляющие собою геометрическое место геодезических, имеют всюду отрицательную риманову кривизну. См. *Sur la courbure dans les espaces à plus de deux dimensions* (*Procès-verbaux des Séances de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 1897—1898, стр. 85—87). При  $n=3$  это свойство является непосредственным следствием теоремы  $n^\circ 170$ .

Рассмотрим поверхность  $V_i$ , представляющую собою геометрическое место точек пространства  $\mathcal{E}'$ , равноотстоящих от  $O'$  и  $O'_i$ . Очевидно, эта поверхность разделит  $\mathcal{E}'$  на две различные области, каждая из которых (например та, которая содержит  $O'$ ) односвязна и гомеоморфна евклидову пространству. Это основывается на том, что нашу область можно получить, построив все полугеодезические, выходящие из  $O'$ , и взявши на каждой из них либо конечный сегмент  $O'P'$ , либо всю полугеодезическую. Мы видим, действительно, что если точка  $P'$  равноудалена от  $O'$  и  $O'_i$ , то все точки геодезической  $O'P'$ , расположенные между  $O'$  и  $P'$ , лежат ближе к  $O'$ , чем к  $O'_i$ , а те, которые расположены за  $P'$ , — ближе к  $O'_i$ , чем к  $O'$ .

Можно добавить, хотя это и не является необходимым для дальнейшего, что поверхность  $V_i$  состоит из одной полости; действительно, если  $P'$  и  $Q'$  — две ее точки и если, что всегда можно предположить, все точки  $M'$  геодезической  $P'Q'$ , расположенные между  $P'$  и  $Q'$ , больше удалены от  $O'$ , чем от  $O'_i$ , то на каждой из геодезических  $O'M'$  будет точка, расположенная между  $O'$  и  $M'$ , принадлежащая поверхности  $V_i$ .

19. Из предыдущего следует, что часть пространства  $\mathcal{E}'$ , состоящая из всех точек, лежащих по ту же сторону, что и  $O'$ , относительно всех поверхностей  $V_i$ , как раз и образует искомую фундаментальную область  $\mathfrak{F}$ . Эта область может быть ограничена конечным или бесконечным числом граней  $\mathfrak{F}_i$ , представляющих собою каждая некоторую часть соответствующей поверхности  $V_i$  и попарно связанных основными изометриями группы  $\mathfrak{G}$ . Область  $\mathfrak{F}$  односвязна и гомеоморфна евклидову пространству, потому что мы получим ее, взяв на каждой полугеодезической, выходящей из  $O'$ , определенный отрезок  $O'P'$  (или всю полугеодезическую целиком).

Мы видим теперь, что если  $n$ -мерное пространство может быть снабжено нормальной метрикой с повсюду отрицательной или нулевой кривизной, то оно должно обладать следующим свойством: будучи сделано односвязным посредством системы  $(n-1)$ -мерных перегородок, оно становится гомеоморфным евклидову пространству.

20. Наконец, мы можем обобщить замечание, сделанное (п° 68) при изучении локально-евклидовых пространств, именно замечание о том, что группа связности  $\mathfrak{G}$  состоит из бесчисленного множества операций. Действительно, если бы группа  $\mathfrak{G}$  была конечной, то  $O'$  имела бы конечное число гомологичных точек  $O'_1, O'_2, \dots, O'_{h-1}$ . Обозначим через  $r_i$  расстояние от произвольной точки пространства  $\mathcal{E}'$  до точки  $O'_i$  и рассмотрим функцию  $r_0^2 + r_1^2 + \dots + r_{h-1}^2$ . Множество ее значений имеет, очевидно, нижнюю грань  $a^2$ , которая достигается по крайней мере в одной точке  $A'$ . Если обозначим через  $\alpha_i$  угол, который образует в точке  $A'$  геодезическая  $A'O'_i$  с некоторым раз навсегда выбранным направлением, то, используя условия экстремума в точке  $A'$ , получим (п° 95):

$$r_0 \cos \alpha_0 + r_1 \cos \alpha_1 + \dots + r_{h-1} \cos \alpha_{h-1} = 0.$$

Пусть теперь  $B'$  — произвольная точка пространства  $\mathcal{E}'$ ,  $d$  — расстояние  $A'B'$  и  $\alpha_i$  — угол, образованный в  $A'$  двумя геодезическими  $A'O'_i$  и  $A'B'$ .



В силу формул (12) получим:

$$r_i'^2 \geq r_i^2 + d^2 - 2 dr_i \cos \alpha_i,$$

следовательно:

$$\sum_i r_i'^2 \geq \sum_i r_i^2 + h d^2.$$

Таким образом, нижняя грань  $a^2$  значений функции  $\sum_i r_i^2$  может быть достигнута только в одной точке  $A'$ . Очевидно, любое преобразование группы  $\mathfrak{G}$ , переставляющее точки  $O', O'_1, \dots, O'_{h-1}$ , оставляет неподвижной точку  $A'$ , а это, как мы знаем, невозможно.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

1. *Gauss*, Disquisitiones generales circa superficies curvas (представлено научному обществу в Гёттингене в 1827 г.; опубликовано в *Comment Soc. Göttingensis*; 6, 1823—1827; *Gesamm. Werke*, 4, Göttingen, 1873, стр. 217 и след.).

2. *Riemann* (B.), Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen (*Habilitationschrift*, 1854; *Gött. Abh.*; 13, 1868, стр. 1; *Gesamm. Werke*. 2-е издание, Leipzig 1892, стр. 272).

Этот фундаментальный мемуар Римана был издан с примечаниями Вейля (Berlin 1919, 3-е издание 1923).

3. *Riemann* (B.), *Commentatio mathematica*, etc. (*Gesamm. Math. Werke*, стр. 370—380).

4. *Lamé* (G.), *Leçons sur les coordonnées curvilignes* (Paris 1859).

5. *Christoffel* (E. — B.), Ueber die Transformation der homogenen Differentialausdrücke zweiten Grades (*J. de Crelle*, 70, 1869, стр. 46—70).

6. *Beltrami* (E.), Saggio di interpretazione della Geometria non euclidea (*Giornale di Matem.*, 6, 1869, стр. 284—312; франц. перевод J. Hoüel, *Ann. École Norm.*, 6, 1869, стр. 251—288).

7. *Beltrami* (E.), Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante (*Annali di Matem.*, 2-я серия, 2, 1868, стр. 232—255, франц. перевод J. Hoüel, *Ann. École Norm.*, 6, 1869, стр. 345—375).

8. *Schur* (F.), Ueber den Zusammenhang der Räume constanten Krümmungsmasses mit den projektiven Räumen (*Math. Ann.*, 27, 1886, стр. 537—567).

9. *Klein* (F.), Ueber die sogenannte nicht-euklidische Geometrie (*Math. Ann.*, 4, 1871, стр. 573—625; 6, 1873, стр. 112—145).

10. *Klein* (F.), Zur nicht-euklidischen Geometrie (*Math. Ann.*, 37, 1890, стр. 544—572).

11. *Klein* (F.), Nicht-euklidische Geometrie (литограф. лекции, два тома, Гёттинген 1893).

12. *Klein* (F.), *Conférences sur les Mathématiques*, перевод L. Laugel (Paris, Hermann, 1898).

13. *Killing* (W.), Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung (Leipzig 1885).

14. *Darboux* (G.), *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. III (Paris, Gauthier-Villars, 1894).

15. *Ricci* (G.) et *Levi-Civita* (T.), Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications (*Math. Ann.*, 54, 1901, стр. 125—201).

16. *Ricci* (G.), Formole fondamentali nella teoria generale delle varietà e della loro curvatura (*Rend. Accad. Lincei*, 5-я серия, 11<sup>a</sup>, 1902, стр. 355—362).

17. *Ricci* (G.), Sulle superficie geodetiche in una varietà qualunque e in particolare nelle varietà a tre dimensioni (*Rend. Accad. Lincei*, 5-я серия, 12<sup>a</sup>, 1903, стр. 409—420).

18. *Ricci* (G.), Direzioni e invarianti principali di una varietà qualunque (*Atti R. Istit. Veneto*, 63, 1904, стр. 1233—1239).

19. *Levi-Civita* (T.), Nozione di parallelismo in una varietà qualunque (*Rend. Circ. matem. Palermo*, 42, 1917, стр. 173—205).

20. *Bompiani (E.)*, Sugli spazi curvi (*Atti R. Ist. Veneto*, 80, 1921, стр. 355—386; 839—859; 1113—1145).
21. *Weyl (H.)*, Raum, Zeit, Materie (5. Auflage, Teubner, 1928).
22. *Struik (D.—J.)*, Grundzüge der mehrdimensionalen Differentialgeometrie in direkter Darstellung (Berlin, J. Springer, 1922).
- Эта работа снабжена подробной библиографией.
23. *Schouten (J.—A.)*, Der Ricci-Kalkül (Berlin, J. Springer, 1924).
24. *Bouligand (G.)*, Leçons de Géométrie vectorielle (Paris, Vuibert, 1924).
25. *Levi-Civita (T.)*, Lezioni di calcolo differenziale assoluto (Roma, A. Stock, 1925, немецкий перевод: Absolute differentialcalcul, Berlin, J. Springer, 1927).
26. *Cartan (E.)*, La Géométrie des espaces de Riemann (*Mémoires de Math.*, fasc. IX, 1925).
27. *Eisenhart (L.—Pf.)*, Riemannian Geometry (Princeton University Press, 1926).

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	Стр. 5
-----------------------	-----------

### Глава I

#### Декартовы координаты; векторы, поливекторы, тензоры

I. Векторы, декартовы координаты . . . . .	7
II. Бивекторы, системы бивекторов . . . . .	10
III. Тривекторы . . . . .	17
IV. Поливекторы . . . . .	19
V. Дополнительные поливекторы . . . . .	20
VI. Скользящие поливекторы . . . . .	23
VII. Приложение к движению твердого тела, имеющего неподвижную точку . . . . .	24
VIII. Тензоры . . . . .	26

### Глава II

#### Криволинейные координаты в евклидовой геометрии

I. Линейный элемент пространства в декартовых координатах . . . . .	33
II. Основная теорема метрической геометрии . . . . .	35
III. Локальная реконструкция пространства по его линейному элементу . . . . .	38
IV. Абсолютное дифференцирование. Кинематические приложения. Уравнения Лагранжа . . . . .	41
V. Тензорный анализ . . . . .	46
VI. Необходимые условия, которым удовлетворяет линейный элемент евклидова пространства . . . . .	52
VII. Линейные элементы евклидова пространства . . . . .	55

### Глава III

#### Локально-евклидовы пространства

I. Понятие многообразия . . . . .	60
II. Локально-евклидовы пространства . . . . .	62
III. Нормальные локально-евклидовы римановы пространства . . . . .	65
IV. Группа голономии нормального локально-евклидова пространства . . . . .	70
V. Фундаментальный полиэдр . . . . .	72
VI. Определение всех нормальных локально-евклидовых пространств . . . . .	75
VII. Нормальные локально-евклидовы пространства двух измерений . . . . .	76
VIII. Нормальные локально-евклидовы пространства и элементарная геометрия . . . . .	84

### Глава IV

#### Евклидовы пространства, касательные и соприкасающиеся по отношению к пространствам Римана

I. Касательное евклидово пространство . . . . .	86
II. Соприкасающееся евклидово пространство . . . . .	90
III. Евклидово пространство, соприкасающееся с римановым вдоль кривой линии . . . . .	99
IV. Приложение к теории поверхностей обычного пространства . . . . .	105

## Глава V

## Геодезические поверхности; аксиома плоскости и аксиома свободной подвижности

	<i>Стр.</i>
I. Поверхности, геодезические в точке; теорема Севери . . . . .	110
II. Вполне геодезические поверхности; плоскости . . . . .	111
III. Аксиома плоскости и аксиома свободной подвижности пространства . . . . .	114

## Глава VI

## Неевклидовы геометрии. Сферическое, эллиптическое и гиперболическое пространства

I. Сферическая геометрия двух измерений . . . . .	123
II. Эллиптическая геометрия двух измерений . . . . .	124
III. Гиперболическая геометрия двух измерений . . . . .	130
IV. Конформное представление сферической и гиперболической геометрии . . . . .	134
V. Группа движений неевклидовых геометрий . . . . .	141
VI. Трехмерные неевклидовы пространства . . . . .	144
VII. Локально-сферические и локально-гиперболические нормальные римановы пространства . . . . .	151
VIII. Трехмерные римановы пространства, удовлетворяющие аксиоме плоскости . . . . .	156

## Глава VII

## Риманова кривизна

I. Движение, ассоциированное с циклом . . . . .	160
II. Тензор Рима (а-Христоффеля) . . . . .	165
III. Риманова кривизна двумерных пространств . . . . .	167
IV. Риманова кривизна трехмерных пространств . . . . .	171
V. Риманова кривизна пространств более чем трех измерений. Пространства постоянной римановой кривизны . . . . .	176
VI. Свернутый тензор кривизны. Главные направления . . . . .	181

## Глава VIII

## Тождества Бьянки

I. Внешние дифференциальные формы . . . . .	183
II. Тензорные дифференциальные формы . . . . .	189
III. Тождества Бьянки . . . . .	191
IV. Теорема Пуанкаре в римановых пространствах . . . . .	192
V. Векторные кривизны. Первая их интерпретация . . . . .	194
VI. Векторные кривизны. Вторая их интерпретация . . . . .	197
VII. Теорема Шура . . . . .	198

## Глава IX

## Римановы нормальные координаты

I. Нормальные координаты . . . . .	201
II. Симметрия и параллельный перенос . . . . .	205
III. Параллелограммид Леви-Чивита . . . . .	208
IV. Геодезические треугольники . . . . .	209
V. Круги, сферы, гипersферы . . . . .	214

<i>Прибавление I.</i> Об аксиоме плоскости и кэлиевых геометриях . . . . .	218
--	-----

<i>Прибавление II.</i> О линейной римановой кривизне . . . . .	221
--	-----

<i>Прибавление III.</i> О нормальных пространствах отрицательной или нулевой римановой кривизны . . . . .	228
---	-----

Библиографический указатель . . . . .	241
---------------------------------------	-----

### Замеченные опечатки

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
26	5 снизу	$a_{\lambda\mu\nu} = \sum_{i,j,k} a_{\lambda}^i a_{\mu}^j a_{ijk}^{\prime}$	$a_{\lambda\mu\nu} = \sum_{i,j,k} a_{\lambda}^i a_{\mu}^j a_{ijk}^{\prime}$
48	9 сверху	$\sum_i = \omega_i^i$	$\sum_i \omega_i^i$
56	10 снизу	$\frac{dP}{dt} = \sum_i \frac{du^i}{dt} e_i$	$\frac{dP}{dt} = \sum_i \frac{du^i}{dt} e_i$
63	3 снизу	$x_4 = \sqrt{c} = \sin \varphi$	$x_4 = \sqrt{c} \sin \varphi$
81	15 снизу	под осью $Ox$	над осью $Ox$
164	8 сверху	$x^j + \Delta x^j + D x^j + \Delta D x^j$	$x^j + \Delta x^j + D x^j + \Delta D x^j$
215	6 сверху	$\frac{\mathfrak{G}_0 - \mathfrak{G}}{\mathfrak{G}_0 R^3} = \frac{K}{6}$	$\frac{\mathfrak{G}_0 - \mathfrak{G}}{\mathfrak{G}_0 R^3} = \frac{K}{6}$

Картан. Геометрия римановых пространств.



