

И.А. КЛИМИШИН

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ
В ОБОЛОЧКАХ
ЗВЁЗД



МОСКВА "НАУКА"
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1984

22.66

К49

УДК 523.034.43

К л и м и ш и н И.А. Ударные волны в оболочках звезд. — М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984, 216 с.

Книга посвящена анализу закономерностей движения нестационарных ударных волн в неоднородных оболочках звезд и методам расчета их параметров. В первых главах рассматриваются термодинамические и поглощательные свойства вещества и особенности строения оболочек звезд. Затем подробно анализируются приближенные методы расчета параметров ударных волн. Изложен широко используемый при расчетах на ЭВМ метод конечных разностей. Дается обзор публикаций, относящихся к изучению движения ударных волн в оболочках нестационарных звезд.

Табл. 6, илл. 75, библиограф. 289 назв.

Редактор Д. К. Надёжин

К $\frac{1705040000 - 080}{053 (02)-84}$ 118-84

© Издательство "Наука".
Главная редакция
физико-математической
литературы, 1984

ОГЛАВЛЕНИЕ

От автора	4
Введение	5
Глава 1. Основные уравнения теории внутреннего строения звезд и газовой динамики	8
§ 1. Важнейшие термодинамические соотношения	8
§ 2. Скорости ионизационно-рекомбинационных процессов	12
§ 3. Элементы теории переноса излучения в атмосферах звезд	19
§ 4. Коэффициент поглощения (непрозрачность) вещества оболочек звезд	24
§ 5. Строение оболочек звезд	28
§ 6. Уравнения газовой динамики	34
Глава 2. Стационарные ударные волны	40
§ 7. Адиабата Гюгонио	40
§ 8. Скачки параметров на фронте ударной волны с излучением	45
§ 9. Ионизационные и диссоциационные ударные волны	51
§ 10. Структура ударной волны умеренной интенсивности	55
§ 11. Структура сильной ударной волны	66
§ 12. Эффективная температура фронта сильной ударной волны	76
§ 13. Релятивистские ударные волны	79
Глава 3. Аналитические методы расчета параметров нестационарных ударных волн	84
§ 14. Автомодельное движение газа	84
§ 15. Метод Бринкли — Кирквуда	89
§ 16. Метод характеристик (метод Уизема)	97
§ 17. Метод Чизнелла	101
§ 18. Другие приближенные методы	104
§ 19. Пределы применимости приближенных аналитических методов	106
Глава 4. Численные методы газовой динамики	116
§ 20. Основные понятия метода конечных разностей	117
§ 21. Особенности разностных схем для уравнений газовой динамики	122
§ 22. Разностная аппроксимация уравнений газовой динамики	127
§ 23. Методы решения разностных уравнений	133
§ 24. Некоторые замечания по реализации вычислительного алгоритма на ЭВМ.	144
Глава 5. Закономерности волновых движений в оболочках звезд.	155
§ 25. Особенности распространения звуковых волн в атмосферах звезд.	155
§ 26. Превращение звуковых волн в ударные и их диссипация.	165
§ 27. Ударные волны в атмосферах пульсирующих звезд	174
§ 28. Движение сильных ударных волн в звездах	183
§ 29. Волны охлаждения в оболочках звезд	195
§ 30. Тепловые волны в оболочках звезд	200
Литература	205

ОТ АВТОРА

На протяжении многих лет выдающийся астрофизик, ученый и педагог С.А. Каплан (1921—1978) активно трудился над изучением закономерностей движения нестационарных ударных волн в неоднородных оболочках звезд и в межзвездном пространстве, над проблемами переноса энергии при вспышках новых звезд и нагрева солнечной хромосферы. Этим вопросам он посвятил более двух десятков публикаций. Они же составляют важный раздел книги "Введение в космическую газодинамику" (М.: Физматгиз, 1958), написанной им в соавторстве с Ф.А.Баумом и К.П.Станюковичем, книг "Межзвездная газодинамика" (М.: Физматгиз, 1958) и "Размерности и подобие астрофизических величин" (М.: Наука, 1976, в соавторстве с Э.А.Дибаем).

В 1965 г. в Баку во время одной из незабываемых встреч с ним С.А.Каплан подсказал автору этих строк мысль — написать книгу, в которой были бы проанализированы разработанные к тому времени методы расчета параметров нестационарных ударных волн, а также эффективность их использования в астрофизике. Благодаря всесторонней поддержке С.А.Каплана автором и была подготовлена книга "Ударные волны в неоднородных средах", вышедшая в 1972 г. на украинском языке в издательстве Львовского университета. Книга была благожелательно встречена читателями, и вскоре С.А.Каплан предложил автору продолжить работу над ней с тем, чтобы осуществить ее издание на русском языке, что было поддержано В.Г.Горбацким и В.С.Имшенником. К сожалению, по многим причинам эта работа затянулась на несколько лет. В частности, много времени ушло на то, чтобы некоторые результаты, полученные ранее с помощью приближенных методов, проверить путем строгого расчета на ЭВМ.

Несмотря на крайнюю занятость С.А.Каплана в последние годы его жизни, автору все же удалось при двух встречах с ним и путем переписки согласовать круг вопросов, подлежащих включению в эту книгу. Безусловно, она значительно выиграла бы, если бы Самуил Аронович "прошелся по рукописи рукой мэтра", как он это обещал сделать ...

По сравнению с ее первым вариантом 1972 г. книга написана практически заново. Так как автор не является специалистом по численным методам решения уравнений газодинамики, то с разрешения издательства к работе над четвертой главой был привлечен А.Г.Косовичев.

Огромную и всестороннюю помощь в процессе работы над рукописью этой книги автор получил от Р.Е.Гершберга, В.Г.Горбацкого, Э.К.Грасберга, В.С.Имшенника, А.Г.Косовичева, рецензента Г.С.Бисноватого-Когана и особенно ее редактора Д.К.Надёжина. Часть приведенных в книге расчетов выполнена Б.И.Гнатыком, который оказал автору помощь и в изготовлении иллюстраций. Всем им автор выражает свою искреннюю благодарность.

г. Ивано-Франковск,
март 1983 г.

ВВЕДЕНИЕ

Формы движения вещества в атмосферах Земли и планет, в оболочках Солнца и других звезд, в межпланетном и межзвездном пространстве весьма разнообразны. Это и регулярное движение вещества звездных атмосфер относительно некоторого среднего положения равновесия (пульсации), и движение газа в поле тяжести при наличии определенного градиента температуры (конвекция), и хаотические движения газовых масс (турбулентность). В звездных атмосферах происходят и другие типы движений — от акустических волн широкого диапазона частот до сверхзвуковых движений газа, энергия которых часто превышает энергию гравитационного взаимодействия газа с основной массой звезды.

Для каждого типа движения разработан соответствующий подход, разработаны определенные методы анализа, математический аппарат. Например, задача о пульсациях — это проблема собственных значений с дискретным спектром, связанная с полным набором соответствующих им ортогональных собственных функций. Турбулентное движение подчиняется определенным статистическим закономерностям, в частности, оно описывается так называемыми корреляционными, структурными и спектральными функциями.

Важным разделом космической газодинамики, изучающей движение вещества в атмосферах планет, звезд и в межпланетном пространстве, является теория ударных волн — движущихся со сверхзвуковыми скоростями разрывов параметров, которыми описываются свойства этого вещества. Возможная роль ударных волн как весьма эффективного механизма переноса энергии из глубоких недр звезды наружу при вспышках новых звезд была впервые рассмотрена в 1946 г. А.И.Лебединским (СССР), Э.Шацманом (Франция) и С.Росселандом (Норвегия). Вскоре после этого теория ударных волн была использована для объяснения особенностей спектров некоторых типов пульсирующих переменных звезд (RR Лиры, RV Тельца, Миры Кита и др.), при обсуждении проблемы нагрева солнечной хромосферы и короны, при интерпретации явления сверхновой и т.д. Сегодня решение целого ряда задач астрономии — от установления формы газовой оболочки Земли под действием солнечного ветра до поздних стадий эволюции звезд и образования нейтронных звезд — без привлечения теории ударных волн вообще немислимо.

К настоящему времени теория ударных волн разработана уже в достаточной степени. Основные же соотношения, выполняющиеся на фронте ударной волны, были сформулированы более ста лет назад. Это законы сохранения массы, импульса и энергии, из которых по заданной величине скорости ударной волны определяются скачки давления, плотности и температуры на фронте волны.

Однако ударная волна, движущаяся в неоднородной среде, будь то атмосфера Земли, Солнца или любой другой звезды, является не с т а ц и о

на р н о й: в процессе движения волны ее скорость (и связанные с ней давление и температура за фронтом) непрерывно изменяются. Эта нестационарность обусловлена неоднородностью среды, а также потерями энергии волны на нагрев газа, на ионизацию, высвечивание и другие возможные диссипативные процессы. Методы расчета параметров нестационарных ударных волн и были разработаны за последние 40 лет. Здесь прежде всего следует упомянуть об автомоделных решениях, и о приближенных методах Бринкли — Кирквуда, Чизнелла, Уизема. В недалеком прошлом они сыграли важную роль в изучении закономерностей движения ударных волн в звездных оболочках. В настоящее время в большинстве случаев решение задач космической газодинамики проводится численными методами с помощью электронных вычислительных машин.

Важный вклад в изучение физики ударных волн и закономерностей их движения в атмосфере Земли, в оболочках звезд и в межзвездной среде был сделан отечественными учеными, в частности, С.А.Капланом, С.Б.Пикельнером и Д.А.Франк-Каменецким. Результаты упомянутых исследований широко используются нами в этой книге.

Здесь необходимо отметить и следующее. Физические условия в звездных оболочках таковы, что давление и плотность энергии излучения в них сравнимы с плотностью энергии и давления газа. С увеличением же температуры роль излучения становится все более существенной, так как отношение плотности энергии излучения к плотности энергии газа возрастает пропорционально кубу температуры. Поэтому если даже давление и плотность излучения перед фронтом волны играли незначительную роль, то за фронтом сильной ударной волны положение может стать обратным. Следовательно, основные соотношения, выполняющиеся на фронте "звездной" ударной волны, должны быть сформулированы с учетом давления и плотности энергии излучения.

Не менее важен и учет потока энергии излучения с фронта ударной волны. Резкое повышение температуры на фронте волны (т.е. на расстоянии всего нескольких длин пробега частиц) приводит в дальнейшем к перераспределению энергии между ионами и электронами и к увеличению плотности радиации за фронтом волны. При этом оказывается, что длина свободного пробега фотона больше толщины релаксационной зоны за фронтом, поэтому кванты света проникают в невозмущенный газ еще перед прохождением через него ударной волны и прогревают его. Тем самым значительно усложняется структура ударной волны. При выходе же волны во внешние слои звезды поток излучения с фронта может уходить и на бесконечность. Такая потеря энергии ударной волны приводит к существенному изменению ее параметров. Все эти эффекты и необходимо учитывать в теории "звездных" ударных волн.

За последние 40 лет появилось несколько сотен публикаций, в которых теория ударных волн так или иначе использовалась для интерпретации наблюдательных астрофизических данных. Не все результаты, полученные их авторами, выдержали испытание временем. Некоторые из них выглядят сегодня явно устаревшими. Например, в ряде статей исследование движения ударных волн в атмосферах пульсирующих переменных звезд проводилось в предположении о статическом состоянии вещества перед фронтом волны. В некоторых работах без достаточного обоснования ударная волна предполагалась изотермической из соображений, что энергия нагретого ею газа полностью высвечивается в межзвездное пространство, или же (другой вариант изотермичности) на основании предположения, что благодаря лучистой теплопроводности температура во всей охваченной движением области

принимает одинаковое значение. Между тем такие и им подобные предположения далеки от реальности.

С другой стороны, в космической газодинамике имеется ряд важных проблем, разработка которых лишь начинается. К решению этих задач пока нет единого подхода, более того, из-за математической сложности самой проблемы авторы многих публикаций прибегают к упрощениям, а расчеты проводят для отдельных частных случаев без их надлежащего обобщения. Мы имеем здесь в виду прежде всего крайне важную с точки зрения наблюдательной астрофизики проблему структуры ударной волны умеренной интенсивности. Поэтому, считая исключительно полезной публикацию обзоров на эту тему (что, кстати, и делается на страницах "Успехов физических наук"), мы решились ограничиться здесь лишь весьма поверхностным ее обсуждением. Оставлены вне рассмотрения эффекты вращения звезды и магнитного поля.

Главную задачу книги автор видит в том, чтобы дать исследователю, интересующемуся возможностями использования теории ударных волн для интерпретации данных наблюдений, конкретное представление о методах газодинамики, пользуясь которыми он может сформулировать математическую постановку задачи. Более полное освещение отдельных вопросов физики ударных волн читатель может найти в упомянутых в списке литературы монографиях и статьях.

Глава 1

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ВНУТРЕННЕГО СТРОЕНИЯ ЗВЕЗД И ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

В этой вводной главе приведены важнейшие формулы и соотношения, а также табличные значения отдельных параметров, которые необходимы для постановки той или другой конкретной задачи о движении ударной волны в оболочке звезды.

Прежде всего приводятся уравнение состояния и формула для внутренней энергии смеси газ — излучение в наиболее удобном для использования виде. Далее приведены аналитические формулы для коэффициентов ионизации и рекомбинации с целью проиллюстрировать их зависимость от температуры и таблица рассчитанных в последние годы коэффициентов ионизации и рекомбинации. Записаны основные соотношения теории переноса излучения в атмосферах звезд, даны асимптотические формулы и графики для определения коэффициента непрозрачности вещества звездных оболочек, описано строение оболочек звезд, в частности, гигантов и сверхгигантов. И, наконец, приведены уравнения газовой динамики в форме Эйлера и Лагранжа.

§ 1. Важнейшие термодинамические соотношения

Вещество оболочек звезд характеризуется несколькими физическими параметрами: плотностью ρ , температурой T , давлением p , внутренней энергией (в расчете на единицу массы) E , тепловой функцией ω . Молярная масса вещества μ определяется его химическим составом, т.е. относительным содержанием в нем различных химических элементов и (как и давление и внутренняя энергия) степени ионизации каждого из них. Все перечисленные здесь параметры являются функциями координат (в простейшем одномерном случае — расстояния r от центра звезды), а в нестационарном случае — и времени t .

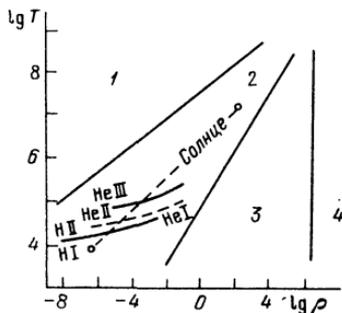
Как показали расчеты (М.Шварцшильд, 1961), равновесие звезд, подобных Солнцу, от их недр до самых внешних слоев поддерживается градиентом газового давления p_G , тогда как роль лучистого давления p_R здесь ничтожно мала. В оболочках же звезд-гигантов и сверхгигантов давление излучения может быть сравнимо с давлением газа. Равновесие звезд белых карликов поддерживается давлением вырожденного электронного газа. При описании условий внутри звезды важность того или другого фактора может быть установлена с помощью диаграммы температура — плотность (рис. 1).

Таким образом, можно утверждать, что вещество, из которого состоит оболочка звезды типа Солнца, является идеальным газом, для которого связь между давлением p_G , плотностью ρ и температурой T записывается в виде

$$p_G = A\rho T = \frac{A T}{V}, \quad (1.1)$$

где $A = \frac{R}{\mu}$ — газовая постоянная в расчете на единицу массы,

Рис. 1. Диаграмма температура — плотность; указаны области, в которых преобладает лучистое (1) и газовое (2) давление; области 3 и 4 соответствуют нерелятивистски и релятивистски вырожденному состоянию, прерывистая линия показывает примерный ход температуры и плотности от поверхности к центру Солнца; указаны также кривые, соответствующие 50%-ной степени ионизации водорода и гелия.



$R = 8,31 \cdot 10^7$ эрг/(град·моль) — универсальная газовая постоянная, $V = \frac{1}{\rho}$ — удельный объем. Слабые возмущения давления в идеальном газе распространяются со скоростью звука

$$a = \sqrt{\gamma AT} = \sqrt{\gamma \frac{p_G}{\rho}}, \quad (1.2)$$

причем $\gamma = c_p/c_v$ — отношение удельных теплоемкостей. Для одноатомных газов (в частности, для нейтрального и полностью ионизованного водорода) $\gamma = 5/3$, для двухатомных (например, водород в молекулярном состоянии) $\gamma = 7/5$.

Внутренняя энергия E и тепловая функция (энтальпия) ω в расчете на единицу массы в случае идеального газа равны соответственно

$$E = \frac{p_G V}{\gamma - 1} + E_0 = \frac{a^2}{\gamma(\gamma - 1)} + E_0, \quad (1.3)$$

$$\omega = \frac{\gamma p_G V}{\gamma - 1} + \omega_0 = \frac{a^2}{\gamma - 1} + \omega_0. \quad (1.4)$$

Здесь с помощью величин E_0 и ω_0 учитываются возможные изменения внутренней энергии и тепловой функции за счет ионизации газа, энерговыделения при детонации или термоядерном синтезе.

В свою очередь, давление и внутренняя энергия излучения равны

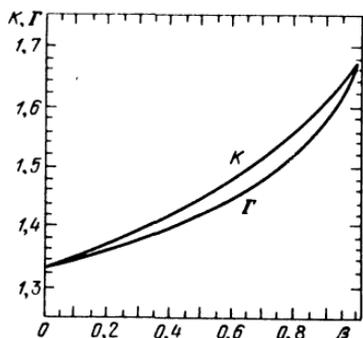
$$p_R = \frac{1}{3} a_R T^4, \quad E_R = \frac{1}{\rho} a_R T^4, \quad (1.5)$$

где $a_R = 7,57 \cdot 10^{-15}$ эрг/(см³·град⁴) — постоянная плотности излучения. Поэтому полное давление и внутренняя энергия смеси "газ — излучение" определяются соотношениями

$$P = A\rho T + \frac{1}{3} a_R T^4, \quad (1.6)$$

$$E = \frac{AT}{\gamma - 1} + \frac{a_R T^4}{\rho} + E_0. \quad (1.7)$$

Рис. 2. Зависимость между параметрами K, Γ и β для смеси газ — излучение.



Для общего анализа состояния среды как смеси газ — излучение удобно ввести: 1) параметр $\beta = p_G/P$ — отношение газового давления p_G к полному давлению $P = p_G + p_R$, 2) показатель адиабаты Γ и 3) газодинамический показатель адиабаты смеси газ — излучение K .

Так как $p_R = (1 - \beta)P$, то из (1.5) следует, что

$$P = \frac{a_R T^4}{3(1 - \beta)}, \quad (1.8)$$

$$\rho = \frac{\beta a_R T^3}{3A(1 - \beta)}. \quad (1.9)$$

С помощью показателя адиабаты Γ описываются адиабатические изменения полного давления P и удельного объема V , при которых выполняется условие (С.Чандрасекар, 1950)

$$\frac{dP}{P} + \Gamma \frac{dV}{V} = 0,$$

причем

$$\Gamma = \beta + \frac{(4 - 3\beta)^2(\gamma - 1)}{\beta + 12(\gamma - 1)(1 - \beta)}. \quad (1.10)$$

Таким образом, если в среде возникло слабое возмущение ($dP \ll P$ и $dV \ll V$), то оно распространяется в ней со скоростью звука, которая в данном случае равна

$$a = \sqrt{\Gamma \frac{P}{\rho}}. \quad (1.11)$$

Как видно из соотношения (1.10), при $\beta \rightarrow 1$ следует $\Gamma \rightarrow \gamma$, если же $\beta \rightarrow 0$, то $\Gamma \rightarrow 4/3$.

Газодинамический показатель адиабаты K позволяет записать внутреннюю энергию и тепловую функцию смеси газ — излучение в расчете на единицу массы в следующем простом виде (И.А.Климишин, 1962):

$$E = \frac{1}{K - 1} \frac{P}{\rho} + E_0, \quad (1.12)$$

$$\omega = \frac{K}{K - 1} \frac{P}{\rho} + \omega_0. \quad (1.13)$$

Сравнивая (1.12) и (1.7), находим, что

$$K = \frac{\beta + (\gamma - 1)(4 - 3\beta)}{\beta + 3(\gamma - 1)(1 - \beta)}. \quad (1.14)$$

Газодинамический показатель адиабаты K , вообще говоря, не совпадает по величине с показателем адиабаты Γ . Однако $K = \Gamma = \gamma$ при $\beta = 1$ и $K = \Gamma = 4/3$, если $\beta = 0$. Зависимость величины K от β показана на рис. 2 и приведена далее в табл. 2 (с. 48).

В релятивистской газодинамике в системе координат, где релятивистский газ покоится, между основными термодинамическими характеристиками идеального газа также выполняются соотношения

$$PV = AT, \quad PV^\gamma = \text{const}, \quad (1.15)$$

где A и γ — постоянные, P и V — соответственно давление и удельный объем.

Плотность ρ в классической газодинамике равна $\rho = \frac{1}{V}$, в релятивистском же случае имеем

$$\rho = \frac{1}{V} + \frac{P}{(\gamma - 1)c^2}, \quad (1.16)$$

где c — скорость света. Здесь первым слагаемым учитывается плотность массы покоя частиц, находящихся в объеме V , вторым — внутренняя энергия этих частиц. В необходимых случаях сюда прибавляют также приращение массы за счет энергии внешнего поля. Величина $\rho_* = \frac{1}{V}$ — плотность массы покоя в неподвижной относительно газа системе координат. Если этот газ состоит из частиц одного сорта с массой m и их концентрацией в единице объема N , то $\rho_* = \frac{m}{V}$.

Внутренняя энергия газа в расчете на единицу объема определяется выражением

$$\tilde{E} = c^2 \rho = \frac{c^2}{V} + \frac{P}{\gamma - 1}. \quad (1.17)$$

Обозначая через \tilde{E}_* ту ее часть, которая обуславливается кинематической энергией составляющих газ частиц, перепишем это соотношение в виде

$$\tilde{E} = \frac{c^2}{V} + \tilde{E}_*. \quad (1.18)$$

Термодинамические характеристики идеального газа \tilde{E}_* и P связаны параметром γ , величина которого зависит от отношения E_*/ρ_* и в целом для одноатомного газа изменяется от $5/3$ до $4/3$.

Для вывода основных соотношений теории релятивистских ударных волн используется тепловая функция (в расчете на единицу объема)

$$\tilde{\omega} = P + \tilde{E} = \frac{\gamma P}{\gamma - 1} + \rho_* c^2. \quad (1.19)$$

Скорость звука a в релятивистской газодинамике равна

$$a = \sqrt{\gamma \frac{P}{\rho} \frac{1}{1 + \frac{P}{\rho c^2}}}. \quad (1.20)$$

В случае ультрарелятивистского газа $\gamma = 4/3$, а уравнение состояния при $\rho_* \ll \frac{P}{(\gamma - 1)c^2}$ имеет вид $P = (\gamma - 1)\rho c^2 = \frac{1}{3}\rho c^2$, а скорость звука имеет максимальное значение $a = \frac{c}{\sqrt{3}}$.

Физические свойства вещества на конечных стадиях эволюции звезд при температурах $10^9 \lesssim T \lesssim 10^{11}$ К и плотностях $10^6 \lesssim \rho \lesssim 10^{12}$ г/см³ подробно рассмотрены в работе В.С.Имшенника и Д.К.Надёжина (1965).

§ 2. Скорости ионизационно-рекомбинационных процессов

При типичных для оболочек звезд температурах и плотностях ($T \approx 10^3 \div 10^6$ К, $\rho \approx 10^{-3} \div 10^{-15}$ г/см³) составляющее их вещество представляет собой плазму — смесь молекул, атомов и ионов различных химических элементов и свободных электронов. Физические свойства этого вещества (в частности, его излучательная способность) определяются как его химическим составом, так и распределением частиц по поступательным, вращательным и др. степеням свободы. Поэтому описать физическое состояние плазмы в общем случае довольно трудно. Однако для широкого круга параметров (скажем, значений плотности и температуры) в плазме выполняются условия термодинамического равновесия, и тогда ее состояние описывается двумя термодинамическими величинами, например, температурой T и плотностью ρ (числом частиц в единице объема N). Мы приведем здесь некоторые хорошо известные формулы, которыми описывается состояние плазмы в условиях термодинамического равновесия, предполагая, что вещество оболочек звезд состоит из чистого водорода.

Прежде всего распределение частиц по скоростям (энергиям) описывается формулой Максвелла. Пусть $u(x)$ — скорость потока вещества, $N(x)$ и $T(x)$ — распределение концентрации частиц и их температуры вдоль оси x , v — скорость частицы, m — ее масса. Тогда функция распределения частиц по скоростям запишется в виде

$$f(v, x) = N(x) \left[\frac{m}{2\pi kT(x)} \right]^{3/2} \exp \left[-\frac{m}{2kT(x)} (v - u(x))^2 \right]. \quad (2.1)$$

Соответствующее этому распределению среднее значение абсолютной величины скорости хаотического движения электронов равно

$$\bar{v}_e = \sqrt{\frac{8kT_e}{\pi m_e}} = 6,21 \cdot 10^5 \sqrt{T} = 6,7 \cdot 10^7 \sqrt{T_{эВ}} \text{ см/с}, \quad (2.2)$$

где учтено, что $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-12}$ эрг и $T_{эВ} = T(\text{в К}) / 11600$.

В стационарном состоянии количество атомов водорода, у которых электроны находятся на n -м энергетическом уровне, определяется по формуле Больцмана

$$\frac{N_n}{N_1} = \frac{g_n}{g_1} e^{-\frac{\chi_1 - \chi_n}{kT}} = n^2 e^{-\frac{\epsilon_{1n}}{kT}} = n^2 10^{-\frac{5040(\epsilon_{1n})_{эВ}}{T}}. \quad (2.3)$$

Здесь N_n — число атомов в n -м состоянии возбуждения, N_1 — число атомов в основном состоянии, $g_n = 2n^2$ — статистический вес n -го состояния, $\chi_n = \frac{13,6}{n^2}$ эВ — потенциал ионизации с этого уровня, ϵ_{1n} — энергия возбуждения того же уровня. В частности, $\epsilon_{12} = \frac{3}{4} \chi_1 = 10,2$ эВ, и из (2.3) следует

$$\frac{N_2}{N_1} = 4e^{-\frac{118000}{T}} = 4 \cdot 10^{-\frac{5,125}{T_4}},$$

где T_4 — температура, измеренная в единицах 10^4 К.

Состояние ионизации водорода в оболочке звезды описывается формулой Саха. Если N_H , N_+ и N_e соответственно числа нейтральных атомов, протонов и свободных электронов, $N = N_H + N_+$ — полное число атомов в едини-

це объема, U и U_+ — статистическая сумма нейтрального и ионизованного атомов водорода, то

$$\frac{N_e N_+}{N_H} = \frac{2U_+}{U} \left[\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right]^{3/2} e^{-\frac{x_1}{kT}} \quad (2.4)$$

где $h = 6,62 \cdot 10^{-27}$ эрг·с — постоянная Планка.

Для водорода $N_e = N_+$. Вводя степень ионизации $\alpha = \frac{N_+}{N_H + N_+}$ и учитывая, что $U \approx 2$ и $\frac{2U_+}{U} \approx 1$, находим

$$\frac{\alpha^2}{1-\alpha} = \frac{2,41 \cdot 10^{15}}{N} T^{3/2} e^{-\frac{157900}{T}} = \frac{2,41 \cdot 10^{21}}{N} T_4^{3/2} 10^{-\frac{6,858}{T_4}} \quad (2.4')$$

Исходя из этого уравнения, нетрудно построить номограмму для определения степени ионизации α в зависимости от концентрации частиц N и температуры T (рис. 3); (в большем масштабе эта номограмма приводится в конце книги). Упомянутая зависимость показана также и на рис. 4.

Напомним, что в уравнениях (2.1), (2.3) и (2.4) температура входит как некоторый параметр. В первом случае ее принято называть кинетической (а если под частицами подразумеваются электроны, то электронной) температурой, во втором — температурой возбуждения, в третьем — ионизационной температурой. Состояние, когда эти три параметра равны, принято называть частичным термодинамическим равновесием. Полное термодинамическое равновесие соответствует случаю, когда то же значение параметра характеризует интенсивность излучения в соответствии с формулой Планка (см. § 3).

В протяженных оболочках звезд-гигантов и сверхгигантов водород находится в молекулярном состоянии. Если $\chi_D = 4,477$ эВ — потенциал диссоциации молекулы H_2 , N_{H_2} и N_H — соответственно число молекул и атомов водорода в единице объема, то

$$\frac{N_H^2}{N_{H_2}} = 8 \left[\frac{\pi k m_H}{h^2} \right]^{3/2} T^{1/2} T_R \left(1 - e^{-\frac{T_V}{T}} \right) e^{-\frac{T_D}{T}} \quad (2.5)$$

Здесь $T_R = 85,3$ К — вращательная температура, $T_V = 5980$ К — колебательная температура, $T_D = 5,2 \cdot 10^4$ К — температура диссоциации. Если $N = N_H + N_{H_2}$ — полное число частиц в единице объема, то степень диссоциации $b = \frac{N_H}{N}$, и левая часть соотношения (2.5) примет вид

$$\frac{N_H^2}{N_{H_2}} = N \frac{b^2}{1-b}$$

Зависимость степени диссоциации молекул H_2 от плотности и температуры также показана на рис. 4.

При движении ударных волн в оболочках звезд непосредственно за фронтом волны имеет место практически мгновенный нагрев тяжелых частиц (атомов и ионов), после чего происходит ионизация атомов и обратные ей процессы рекомбинации. Для изучения этих процессов (в частности, при расчете структуры ударной волны) вводятся соответствующие коэффи-

$\lg N$ (см⁻³)

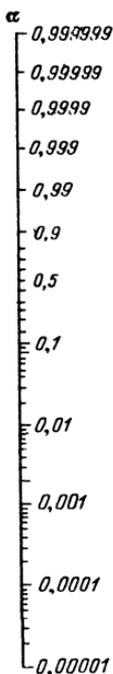
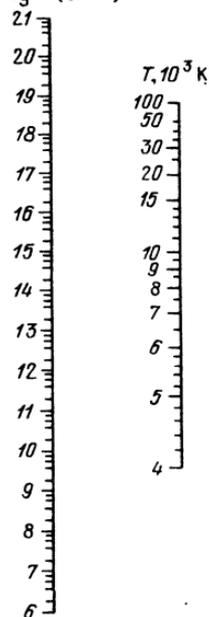
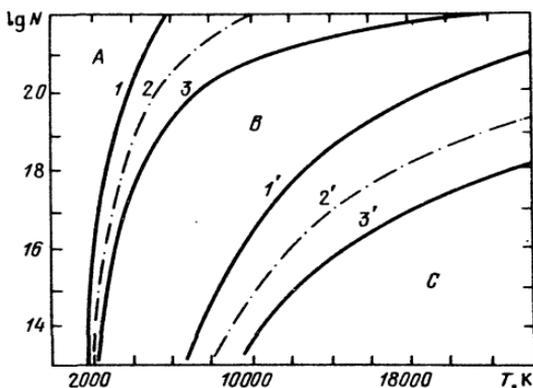


Рис. 3. Номограмма для расчета степени ионизации водорода в атмосфере звезды.

Рис. 4. Диаграмма фазового состояния водорода: *A* — область молекулярного, *B* — атомарного, *C* — ионизованного состояния; кривые 1, 2, 3 соответствуют степени диссоциации $b = 0,1, 0,5$ и $0,9$, кривые 1', 2' и 3' — степени ионизации $\alpha = 0,1, 0,5$ и $0,9$.



циенты ионизации и рекомбинации. Здесь мы приведем некоторые простейшие соотношения, ограничиваясь, как и раньше, случаем чисто водородной среды (Я.Б.Зельдович, Ю.П.Райзер, 1966, С.А.Каплан, С.Б.Пикельнер, 1963, К.Ленг, 1978).

Как известно, ионизация атомов в атмосферах звезд осуществляется двумя путями: в результате фотоэлектрического поглощения и электронными ударами. В свою очередь, рекомбинации происходят с испусканием квантов или же в результате тройных столкновений, причем третьей частицей, которой передается избыток энергии, является, почти как правило, электрон. В случае, если главную роль играют фотопроцессы, уравнение кинетики, которым описывается изменение числа свободных электронов в единице объема, имеет вид

$$\frac{dN_e}{dt} = a_{ph} N_H - CN_+ N_e. \quad (2.6)$$

Если плотность излучения близка к равновесной, соответствующей температуре T , и все атомы пребывают в основном состоянии, то коэффициент фотоионизации равен

$$a_{ph} = \frac{8\pi\chi_1^2 kT}{c^2 h^3} \sigma_{\nu_1}^0 e^{-\frac{\chi_1}{kT}}, \quad (2.7)$$

где $\sigma_{\nu_1}^0 = 7,9 \cdot 10^{-18}$ см² — сечение фотоионизации с основного уровня у порога ионизации. Подставляя численные значения величин, находим

$$a_{ph} = 5,0 \cdot 10^8 T_4 \cdot 10^{-\frac{6,858}{T_4}} \text{ с}^{-1}. \quad (2.7')$$

Коэффициент рекомбинации C находится, в частности, из принципа детального равновесия. Так, если $\frac{dN_e}{dt} = 0$, то из (2.6) следует

$$C = \frac{N_H}{N_+ N_e} a_{ph},$$

что совместно с формулой Саха (2.4) приводит к следующему соотношению:

$$C = 2,07 \cdot 10^{-13} \frac{1}{\sqrt{T_4}} \text{ см}^3/\text{с}. \quad (2.8)$$

Напомним, что при $T \approx 10^4$ К лишь около 40% электронов рекомбинируют непосредственно на первый уровень, около 20% — на второй, в остальных случаях рекомбинации происходят на высшие уровни.

Если же ионизация с основного уровня осуществляется электронным ударом, а обратный ее процесс — столкновениями трех частиц, то уравнение кинетики имеет вид

$$\frac{dN_e}{dt} = s_{1c} N_H N_e - q N_+ N_e^2. \quad (2.9)$$

В целом при $kT \ll \chi_n$ коэффициент ионизации с n -го уровня s_{nc} приближенно описывается соотношением

$$s_{nc} \approx 4\pi a_0^2 \left(\frac{8kT}{\pi m_e}\right)^{1/2} \left(\frac{\chi_1}{\chi_n}\right)^2 e^{-\frac{\chi_n}{kT}}, \quad (2.10)$$

где $a_0 = \frac{h^2}{4\pi^2 m_e e^2} = 0,529 \cdot 10^{-8}$ см — боровский радиус. Отсюда следует,

в частности, что коэффициент ионизации с основного уровня электронным ударом (при $n = 1, \chi_n = \chi_1$) равен

$$s_{1c} = 2,2 \cdot 10^{-8} \sqrt{T_4} 10^{-\frac{6,858}{T_4}} \text{ см}^3/\text{с}. \quad (2.11)$$

Аналогично при $n = 2$ и $\chi_2 = \frac{1}{4} \chi_1$

$$s_{2c} = 3,52 \cdot 10^{-7} \sqrt{T_4} 10^{-\frac{1,71}{T_4}} \text{ см}^3/\text{с}. \quad (2.12)$$

Коэффициент рекомбинации при тройных столкновениях q можно найти из соотношения

$$q = \frac{4\pi \sqrt{2\pi} e^{10}}{9 \sqrt{m} (kT)^{9/2}}, \quad (2.13)$$

где e — заряд электрона. В области температур $8 \div 16$ тысяч градусов коэффициент q равен

$$q = \frac{6 \cdot 10^{-28}}{T_4^{9/2}} \text{ см}^6/\text{с}. \quad (2.13')$$

Очевидно, что величины

$$\left. \begin{aligned} \tau_{ph} &\approx \frac{1-\alpha}{\alpha a_{ph}}, & \tau_r &\approx \frac{1}{CN_e}, \\ \tau_i &\approx \frac{1}{s_{ic} N_H}, & \tau_3 &\approx \frac{1}{qN_H N_e} \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

характеризуют время протекания каждого из перечисленных выше процессов в отдельности. В частности, при $T \approx 10^4$ К, $\alpha \approx 0,5$, $N_e \approx N_H \approx 10^{14}$ см⁻³ находим $\tau_{ph} \approx 0,015$ с, $\tau_r \approx 0,1$ с, $\tau_i \approx 7$ с, $\tau_3 \approx 1$ с. В данном случае главную роль играют фотопроцессы, так как $\tau_{ph} \ll \tau_i$, а $\tau_r < \tau_3$. С увеличением концентрации частиц роль столкновительных процессов соответственно возрастает.

При исследовании структуры ударных волн желательно учитывать и возбуждение атомов из основного состояния. Коэффициент возбуждения второго уровня атома водорода электронным ударом равен

$$s_{12} = \sigma_* \bar{v}_e \left(\frac{\epsilon_{12}}{kT} + 2 \right) e^{-\frac{\epsilon_{12}}{kT}} \quad (2.15)$$

Приняв среднее сечение возбуждения $\sigma_* \approx 10^{-17}$ см², $\bar{v}_e \approx 6,21 \cdot 10^7 \sqrt{T_4}$ см/с, $\frac{\epsilon_{12}}{kT} = \frac{11,8}{T_4}$, находим

$$s_{12} \approx 6,21 \cdot 10^{-10} \sqrt{T_4} \left(\frac{11,8}{T_4} + 2 \right) \cdot 10^{-\frac{5,125}{T_4}} \text{ см}^3/\text{с}. \quad (2.15')$$

Характерное время, соответствующее возбуждению электронным ударом,

$$\tau_{12} \approx \frac{1}{s_{12} N_e} \quad (2.16)$$

При $T_4 \approx 1$ имеем $s_{12} \approx 6,53 \cdot 10^{-14}$ см³/с и при $N_e \approx 10^{14}$ см⁻³ находим $\tau_{12} \approx 0,1$ с.

В настоящее время при изучении кинетики возникновения и исчезновения заряженных частиц все более очевидной становится роль возбужденных атомов. Поэтому разделение ионизации и рекомбинации на ударную и радиационную потеряло смысл. Оказалось, что отдельные этапы перехода электрона в атоме из основного уровня на возбужденный и далее в свободное состояние (и наоборот) обусловлены несколькими различными элементарными процессами. Так возникла необходимость расчетов коэффициентов ионизации и рекомбинации, учитывающих всю совокупность процессов и зависящих не только от температуры, но и от концентрации участвующих в них частиц (Л.М. Биберман, В.С. Воробьев, И.Т. Якубов, 1972, 1979, 1982).

Анализ физических процессов, происходящих в релаксирующей неравновесной плазме, показал, что практически всегда выполняется условие $\sum N_n \ll N_1, N_e$, где N_n и N_1 — число атомов, находящихся соответственно

в n -м и первом состояниях. Если далее τ_n — время релаксации к некоторому квазистационарному распределению возбужденных состояний, τ_T — время релаксации температуры электронов, τ_i — время ионизационной релаксации, то для широкого круга условий выполняется неравенство $\tau_n \ll \tau_T \ll \tau_i$. Другими словами, по сравнению с основным состоянием и непрерывным спектром концентрация возбужденных состояний является

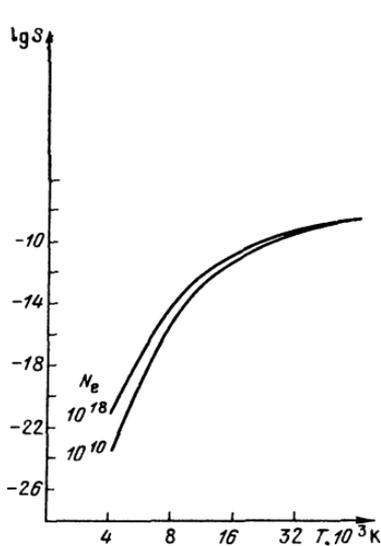


Рис. 5. Зависимость радиационно-столкновительного коэффициента ионизации S от температуры и концентрации частиц по данным L.C. Johnson, E. Hinnov (1973).

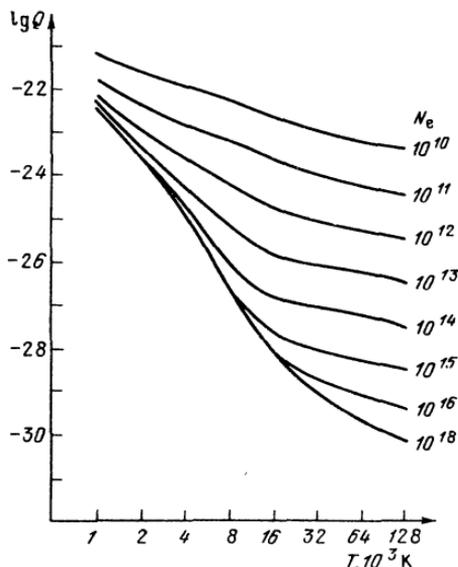


Рис. 6. Зависимость радиационно-столкновительного коэффициента рекомбинации Q от температуры и концентрации частиц по данным L.C. Johnson, E. Hinnov (1973).

малой величиной. Эти возбужденные состояния являются как бы "узким каналом", через который частицы перетекают из одного резервуара в другой. Записанное выше неравенство времен релаксации и дает основание говорить о квазистационарности возбужденных состояний.

Можно поэтому утверждать, что релаксация возбужденных состояний происходит без существенного изменения числа свободных электронов, причем за время, существенно меньшее времени релаксации для основного уровня, которое равно времени ионизационной релаксации. Пользуясь этим квазистационарным приближением, можно рассчитать, с учетом всех возможных элементарных процессов, величины S и Q — соответственно столкновительно-радиационный коэффициент ионизации и столкновительно-радиационный коэффициент рекомбинации для широкого интервала температур и электронных концентраций (D.R. Bates, A.E. Kingston, R.W.P. McWhirter, 1962, L.C. Johnson, E. Hinnov, 1973, A. Burgess, H.P. Summers, 1976). Значения коэффициентов S и Q , рассчитанных для случая водородной плазмы, оптически непрозрачной в линиях лаймановской серии и континууме, приведены в табл. 1 и на рис. 5 и 6. Заметим, что при температуре $(1 \pm 2) \cdot 10^4$ К величина Q по данным Бюргесса и Саммерса примерно в пять раз больше по сравнению с расчетами Джонсона и Хинноу, Бейтса, Кингстона и Мак-Уиртера, тогда как коэффициент S , наоборот, в три раза меньше. Уравнение кинетики при этом имеет вид, аналогичный (2.9),

$$\frac{dN_e}{dt} = SN_H N_e - QN_+ N_e^2. \quad (2.9')$$

Очевидно, что величины

$$\tau_i \approx \frac{1}{N_+ S}, \quad \tau_r \approx \frac{1}{N_e^2 Q} \quad (2.17)$$

Таблица 1. Зависимость столкновительно-радиационного коэффициента ионизации S и столкновительно-радиационного коэффициента рекомбинации Q от температуры T и концентрации электронов N_e (A. Burgess, H.P. Summers, 1976)

		N_e	10^{10}	10^{12}	10^{14}	10^{16}	10^{18}
		T_e, K					
S	$5 \cdot 10^3$		9,49–23	1,43–22	3,99–21	2,14–19	6,36–19
	10		9,82–16	1,30–15	1,36–14	2,71–13	4,28–13
	20		3,80–12	4,66–12	2,53–11	1,88–10	2,19–10
	50		6,83–10	7,79–10	2,54–9	9,11–9	9,63–9
Q	$5 \cdot 10^3$		9,60–23	1,92–24	1,25–25	4,60–26	3,95–26
	10		4,97–23	7,27–25	2,22–26	2,88–27	1,31–27
	20		2,73–23	3,32–25	6,08–27	2,72–28	8,82–29
	50		1,27–23	1,36–25	1,71–27	3,33–29	8,65–30

Примечание: Запись 9,49 – 23 означает $9,49 \cdot 10^{-23}$.

являются соответственно характерными временами ионизации и рекомбинации.

Отметим, что Л.М.Биберману и его школе в рамках представлений о процессе ударно-радиационной ионизации и рекомбинации как о случайном блуждании электрона по дискретным энергетическим уровням удалось получить аналитические выражения для коэффициентов S и Q . Методика расчетов этих коэффициентов изложена также в работе В.А.Бронштэна (1977). В то же время не прекращались поиски как можно более точных выражений для коэффициентов a_{pl} , C , s и q (см., например, D. Mihalas, 1967; L. Auer, D. Mihalas, 1969).

В заключение отметим следующее. Непосредственно за фронтом ударной волны температура ионов существенно выше температуры электронов ($T_i \gg T_e$), некоторое количество которых уже имеется в газе еще до развития процессов ионизации. Поэтому здесь прежде всего происходит обмен энергией между тяжелыми частицами и этими "затравочными" электронами и, как следствие такого обмена, выравнивание температур T_i и T_e . Соответствующее этому процессу уравнение релаксации имеет вид (Л.Спитцер, 1957; Я.Б.Зельдович, Ю.П.Райзер, 1966)

$$\frac{dT_e}{dt} = \frac{T_i - T_e}{\tau_{ie}} \quad (2.18)$$

Время релаксации температуры τ_{ie} для чисто водородной плазмы

$$\tau_{ie} = \frac{252 T_e^{3/2}}{N_e \ln \Lambda} c, \quad (2.19)$$

где кулоновский логарифм

$$\ln \Lambda = 9,43 + 1,15 \lg \left(\frac{T_e^3}{N_e} \right).$$

При $\alpha \approx 0,1$, $N_e \approx 10^{13} \text{ см}^{-3}$, $T_e \approx 10^4 \text{ К}$ и $\ln \Lambda = 8,28$ находим $\tau_{ie} \approx 3,0 \cdot 10^{-6} \text{ с}$. Это гораздо меньше характерного времени протекания любого из перечисленных выше процессов ионизации и рекомбинации, продолжи-

тельность которых определяется формулами (2.14). Можно поэтому утверждать, что за фронтом ударной волны сначала происходит разогрев уже имеющихся в газе свободных электронов, после чего и развиваются процессы ионизации.

§ 3. Элементы теории переноса излучения в атмосферах звезд

Движущийся газ поглощает и излучает энергию, и эти процессы превращения энергии из лучистой в тепловую и наоборот определенным образом изменяют величину его параметров. Синтез газовой динамики с теорией переноса излучения, успешно развивающийся в последние годы, принято называть радиационной газодинамикой. Проблемы динамики излучающего газа и, в частности, свойства волновых движений в излучающем газе, рассмотрены в книгах Я.Б.Зельдовича и Ю.П.Райзера (1966), Бай Ши-и (1968), проблемы радиационной газодинамики с учетом релятивистских эффектов — в книге В.С.Имшенника и Ю.И.Морозова (1981). Здесь мы ограничимся сводкой уравнений переноса излучения с учетом движения среды, которые необходимы для решения задачи о структуре ударной волны. Коротко будет рассмотрен вопрос о скорости затухания температурных неоднородностей в звездных атмосферах.

Как известно, поле излучения в каждой точке среды характеризуется спектральной интенсивностью излучения I_ν и интегральной интенсивностью $I = \int_0^\infty I_\nu d\nu$, т.е. количеством энергии, проходящей через единичную площадку в единичном телесном угле за единицу времени под углом θ к нормали (для спектральной интенсивности — и на единичный интервал частоты). Величины

$$U_\nu = \frac{1}{c} \int I_\nu d\omega, \quad E_R = \frac{1}{c} \int I d\omega = \int_0^\infty U_\nu d\nu \quad (3.1)$$

называются соответственно объемной спектральной и интегральной плотностями энергии излучения. Поток излучения через единичную площадку в единицу времени F и давление излучения p_R определяются соотношениями

$$F = \int I \cos\theta d\omega, \quad p_R = \frac{1}{3c} \int I d\omega. \quad (3.2)$$

Одной из важнейших характеристик газа является коэффициент поглощения k_ν , который сложным образом зависит от частоты падающего излучения ν , температуры T и плотности ρ . Величиной k_ν определяется длина свободного пробега кванта в поглощающей среде

$$l_\nu \approx \frac{1}{k_\nu N} = \frac{1}{k_\nu \rho}, \quad (3.3)$$

где k_ν и κ_ν — коэффициенты поглощения в расчете на одну частицу и на единицу массы соответственно на частоте ν . Более подробно о коэффициенте поглощения см. в § 4. Здесь ограничимся напоминанием, что для атома водорода коэффициент поглощения при фотоионизации электрона с основного уровня у предела лаймановской серии равен $k_{\nu_1}^0 = 0,79 \cdot 10^{-17} \text{ см}^2$, а для $\nu > \nu_1 = 3,99 \cdot 10^{15} \text{ Гц}$ $k_{\nu_1} = k_{\nu_1}^0 \left(\frac{\nu_1}{\nu}\right)^3$.

Другой важной характеристикой газа является спектральный ϵ_ν и интегральный $\epsilon = \int_0^\infty \epsilon_\nu d\nu$ коэффициенты излучения – количество энергии, излучаемое единицей объема в единичном интервале частот для ϵ_ν и в единичном телесном угле за единицу времени. Пусть $\alpha_\nu = k_\nu N$ – объемный коэффициент поглощения. Тогда согласно закону Кирхгофа при термодинамическом равновесии выполняется равенство

$$\frac{\epsilon_\nu}{\alpha_\nu} = B_\nu(T), \quad (3.4)$$

где $B_\nu(T)$ – функция источника, определяемая формулой Планка

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \text{ эрг}/(\text{см}^2 \cdot \text{с} \cdot \text{ср} \cdot \text{Гц}). \quad (3.5)$$

Интегральная функция источника $B(T) = \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu$ равна

$$B(T) = \frac{\sigma}{\pi} T^4, \quad (3.6)$$

где $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-5}$ эрг/(см² · с · град⁴). И, наконец, для равновесного излучения, для которого интенсивность излучения не зависит от направления,

$$U_\nu = \frac{4\pi}{c} B_\nu, \quad E_R = \frac{4\pi}{c} B = \frac{4\sigma}{c} T^4 = a_R T^4, \quad p_R = \frac{1}{3} E_R. \quad (3.7)$$

В гидростатически равновесном состоянии в звездных атмосферах давление и плотность энергии излучения малы по сравнению с газовыми. Однако сильная зависимость от температуры ($\sim T^4$) приводит к резкому повышению роли этих эффектов излучения даже при относительно небольшом увеличении температуры.

Влияние движения газа на процессы переноса излучения учитывается релятивистски ковариантным уравнением переноса излучения. В большинстве представляющих астрофизический интерес задач скорость движения вещества значительно меньше скорости света ($u \ll c$, $\tilde{\beta} = \frac{u}{c} \ll 1$). Если к тому же принять, что коэффициент поглощения не зависит от частоты (приближение серой материи), то это уравнение можно записать в виде (В.С.Имшенник, Ю.И.Морозов, 1964, 1981)

$$\cos\theta [1 + \tilde{\beta} \cos\theta] \frac{dl}{d\tau} = B_0 [1 + 4\tilde{\beta} \cos\theta] - I. \quad (3.8)$$

Здесь и ниже индексом "0" обозначены величины в собственной системе отсчета. Основные характеристики поля излучения в собственной и лабораторной системах отсчета связаны между собой соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \nu_0 &= \nu \frac{1 - \tilde{\beta} \cos\theta}{\sqrt{1 - \tilde{\beta}^2}} = \nu \Delta, & \frac{I_\nu}{\nu^3} &= \frac{I_{\nu_0}}{\nu_0^3}, & I &= I_0 \Delta^{-4}, \\ \epsilon_\nu &= \frac{\epsilon_{\nu_0}}{\Delta^2} = \frac{\alpha_{\nu_0} B_{\nu_0}}{\Delta^2}, & \alpha_\nu &= \alpha_{\nu_0} \Delta. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Входящий в уравнение (3.8) элемент оптической глубины равен $d\tau = Nkdx = \kappa\rho dx$, где κ и α соответственно коэффициент поглощения в расчете на единицу массы и на единицу длины. Обозначим, как обычно, $\mu = \cos \theta$ и введем согласно (3.1) – (3.2) среднюю интенсивность J , поток энергии F и плотность потока импульса излучения $\frac{4\pi}{c} K$:

$$J = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I d\mu, \quad F = 2\pi \int_{-1}^{+1} I \mu d\mu, \quad K = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} I \mu^2 d\mu. \quad (3.10)$$

Применяя к уравнению (3.8) операторы

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (\dots) d\mu, \quad \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} (\dots) \mu (1 - \tilde{\beta}\mu) d\mu,$$

и учитывая (3.10), приходим, пренебрегая малыми членами порядка $\tilde{\beta}^2$, к следующим соотношениям:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{dF}{d\tau} + \tilde{\beta} \frac{dK}{d\tau} = B_0 - J, \quad (3.11)$$

$$\frac{dK}{d\tau} = -\frac{1}{4\pi} F + \tilde{\beta} (K + B_0). \quad (3.12)$$

Для замыкания системы часто используется еще приближение Эддингтона

$$J = 3K. \quad (3.13)$$

В результате система (3.11) – (3.13) сводится к виду (по-прежнему пренебрегаем членами $\sim \tilde{\beta}^2$)

$$\frac{1}{4\pi} \frac{dF}{d\tau} = -3 \left(K - \frac{1}{3} B_0 \right) + \frac{\tilde{\beta}}{4\pi} F, \quad (3.14)$$

$$\frac{dK}{d\tau} = -\frac{1}{4\pi} F + \tilde{\beta} (K + B_0). \quad (3.15)$$

Условия равновесия осуществляются при $T = \text{const}$, $\frac{dF}{d\tau} = 0$ и $\frac{dK}{d\tau} = 0$.

В результате из последних уравнений находим

$$K = \frac{\sigma}{3\pi} T^4, \quad F = \frac{16}{3} \sigma T^4 \frac{u}{c}. \quad (3.16)$$

Здесь u – скорость движения газа относительно фиксированной системы отсчета. Если среда неподвижна, приходим к обычным соотношениям теории переноса

$$\frac{dJ}{d\tau} = -\frac{3}{4\pi} F, \quad \frac{1}{4\pi} \frac{dF}{d\tau} = B - J, \quad (3.17)$$

которые могут быть сведены к одному дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2 J}{d\tau^2} = 3(J - B). \quad (3.18)$$

Граничные условия (3.16) с учетом (3.13) при $u \ll c$ принимают вид

$$J = \frac{\sigma}{\pi} T^4, \quad F = 0. \quad (3.19)$$

Все эти соотношения и будут использованы в § 11 при рассмотрении задачи о структуре сильной ударной волны.

Изменение параметров движущегося газа во времени существенно зависит от скорости выравнивания температурных неоднородностей. Исходным при изучении релаксации температурных неоднородностей излучением является условие сохранения энергии, которое в случае, когда можно пренебречь движением вещества, записывается в виде

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\operatorname{div} F, \quad (3.20)$$

где F — вектор потока тепла. Если плотностью энергии излучения можно пренебречь и $E = E_G = c_p \rho T$, где c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, то (3.20) переписывается так:

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = -\operatorname{div} F. \quad (3.20')$$

Воспользовавшись далее уравнениями (3.17), находим

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = 4\pi k \rho (J - B), \quad (3.21)$$

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} \left[\frac{4\pi}{3k\rho} \operatorname{grad} J \right]. \quad (3.22)$$

Решая (3.21) относительно J и подставляя его в (3.22), сводим последнее уравнение к виду

$$3c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \operatorname{div} \left[\frac{1}{k\rho} \operatorname{grad} \left(a_R c T^4 + \frac{c_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \right) \right], \quad (3.23)$$

которым и описываются тепловые свойства излучающего газа в приближении Эддингтона. Решение этого уравнения получают обычно численными методами. Но в случае, когда возмущение неоднородной среды невелико, так что $T = T_1 + T'$ и $T' \ll T_1 = \text{const}$, из (3.23) следует

$$[\Delta - 3k^2 \rho^2] \frac{\partial T'}{\partial t} = -\frac{4a_R c k T_1^3}{c_p} \Delta T'. \quad (3.24)$$

Величина

$$\tau_R = \frac{c_p}{4a_R c k T_1^3} \quad (3.25)$$

может быть принята за характерное время релаксации температурных неоднородностей путем лучеиспускания. В частности, при $\gamma = 5/3$, $k = 100 \text{ см}^2/\text{г}$ и $T = 6000 \text{ К}$ находим $\tau_R \approx 0,006 \text{ с}$.

Следствиями (3.24) являются два асимптотических уравнения. При $k\rho \rightarrow \infty$ (случай оптически толстой среды) имеем обычное уравнение диффузии

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{1}{3k^2 \rho^2 \tau_R} \Delta T'. \quad (3.26)$$

При $k\rho \rightarrow 0$ (оптически тонкая среда) (3.24) сводится к виду

$$\frac{\partial T'}{\partial t} = -\frac{T'}{\tau_R} + \varphi, \quad (3.27)$$

Рис. 7. Зависимость потерь энергии газа на излучение от температуры.

где φ — произвольная гармоническая функция, которую без потери общности можно положить равной нулю. Таким образом, из (3.27) следует ньютоновский закон охлаждения оптически тонкой среды.

В целом же время релаксации температурных неоднородностей существенно зависит от частоты волнового движения, являющегося их источником. Этот вывод следует из анализа линеаризованных уравнений газодинамики, в которых в уравнении энергии учитывается лучистый теплообмен. Зависимость параметра τ_R от частоты и волнового числа приведена далее в § 25.

В приближении лучистой теплопроводности поток лучистой энергии выражается через градиент температуры

$$F = -\kappa_T \nabla T, \quad (3.28)$$

где κ_T — коэффициент лучистой теплопроводности:

$$\kappa_T = \frac{4a_R c}{3\kappa\rho} T^3. \quad (3.29)$$

При расчете параметров газа за фронтом ударной волны, движущейся во внешних слоях оболочки звезды, необходимо учитывать потери энергии газа на излучение в результате фоторекомбинации и тормозных процессов. Если скорости электронов распределены по закону Максвелла с температурой T , то объемный коэффициент излучения, обусловленный рекомбинациями на все уровни, равен (В.В. Соболев, 1975)

$$\epsilon_\nu^{fb} = N_e N_+ \frac{2^7 \pi^4 e^{10}}{(6\pi)^{3/2} m^2 c^3 h^2} \left(\frac{m}{kT}\right)^{3/2} \sum_{i=j(\nu)}^{\infty} \frac{g_{i\nu}}{i^3} e^{-\frac{\chi_i - h\nu}{kT}}, \quad (3.30)$$

где $g_{i\nu}$ — фактор Гаунта; $j(\nu) = 1$, если ν — превышает частоту, соответствующую границе лаймановской серии, $j(\nu) = 2$ для ν между границами лаймановской и бальмеровской серий, $j(\nu) = 3$, когда ν находится между границами бальмеровской и пашеновской серий и т.д. Приближенное выражение для оценки полной энергии, излучаемой при рекомбинациях, имеет вид (К. Ленг, 1978)

$$\epsilon^{fb} \approx 10^{-21} N_e N_+ T^{-1/2} \text{ эрг}/(\text{см}^3 \cdot \text{с}). \quad (3.31)$$

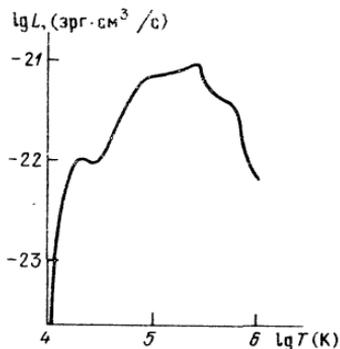
Для свободно-свободных переходов

$$\epsilon_\nu^{ff} = N_e N_+ \frac{2^5 \pi^2 e^6}{(6\pi)^{3/2} m^2 c^3} \left(\frac{m}{kT}\right)^{1/2} g_\nu e^{-\frac{h\nu}{kT}}, \quad (3.32)$$

и величина полной энергии (К.У. Аллен, 1977)

$$\epsilon^{ff} \approx 1,44 \cdot 10^{-27} N_e N_+ T^{1/2} \text{ эрг}/(\text{см}^3 \cdot \text{с}). \quad (3.33)$$

Общая зависимость потерь энергии на излучение от температуры показана на рис. 7. (D.P. Cox, W.H. Tucker, 1969) для смеси Аллера: $A(\lg M) =$



= H(12,00), He(11,20), C(8,60) N(8,04), O(8,95), Ne(8,70), Mg(7,43), Si(7.50), S(7.30). Так как полную энергию, излучаемую единицей объема, можно представить формулой $\epsilon = N_e N_Z L(t)$, то величина $L(t)$, имеющая размерность эрг · см³/с, является функцией исключительно температуры.

§ 4. Коэффициент поглощения (непрозрачность) вещества оболочек звезд

Мера поглощательной способности — непрозрачность — является одной из важнейших характеристик звездного вещества. Она определяется его термодинамическим состоянием (в частности, степенью ионизации) и химическим составом. Как известно (М. Шварцшильд, 1961), непрозрачность вещества обусловлена несколькими процессами: 1) фотоэлектрическими поглощениями (связанно-свободными переходами), при которых в результате поглощения квантов света происходит отрыв электронов от атомов, 2) свободно-свободными переходами электронов вблизи ионов, 3) рассеянием квантов света свободными электронами (томпсонское рассеяние) и 4) дискретным поглощением (поглощением квантов света в отдельных спектральных линиях). В атмосферах звезд поздних спектральных классов на величину непрозрачности влияют и такие процессы, как поглощение квантов света отрицательными ионами H^- , He^- и др., свободно-свободные переходы электронов в поле нейтральных атомов H и молекулярное поглощение.

Непрозрачностью вещества и определяется скорость переноса тепла в звездах, однако в областях, где газ находится в вырожденном состоянии, теплопроводность осуществляется вырожденными электронами (см. далее рис. 8).

Напомним, что для определения коэффициента непрозрачности k предварительно рассчитывают коэффициенты поглощения $k_{bf}(\nu)$ и $k_{ff}(\nu)$, обусловленные соответственно связанно-свободными и свободно-свободными переходами, и коэффициент рассеяния на свободных электронах k_E , после чего находят общий коэффициент поглощения k_ν в зависимости от частоты ν ,

$$k_\nu = [k_{bf}(\nu) + k_{ff}(\nu)] \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right) + k_E, \quad (4.1)$$

где второй множитель учитывает вынужденное излучение. Коэффициентом непрозрачности принято называть росселандово среднее значение коэффициента k_ν , определяемое соотношением

$$\frac{1}{k} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{k_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}, \quad (4.2)$$

где B_ν — функция Планка. Размерность k — см²/г. Величина $\alpha = k\rho$ является объемным коэффициентом поглощения, а

$$l = \frac{1}{k\rho} \quad (4.3)$$

— длина пробега "среднего" кванта между двумя актами поглощения (рассеяния).

Точные формулы, по которым можно рассчитать зависимость величины коэффициента поглощения от частоты падающего излучения, получены лишь для водородоподобных атомов (Hl, Hell, LIII и т.д.), во всех остальных случаях параметр k_p оценивается приближенно. Как известно, еще в 1923 г. Г.А. Крамерс на основании классических представлений получил формулы для определения усредненных по спектру коэффициентов поглощения при связанно-свободных (k_{bf}) и свободно-свободных (k_{ff}) переходах. Более точные квантовомеханические расчеты привели к появлению в этих формулах поправок — факторов Гаунта g_{bf} и g_{ff} , а также введенного А. Эддингтоном обрезающего ("гилютинного") множителя t , которым учитывается зависимость степени ионизации тяжелых элементов от температуры и плотности. Формулы Крамерса, которые нередко используются для оценочных, приближенных расчетов и сегодня, имеют вид (М. Шварцшильд, 1961)

$$k_{bf} = 4,34 \cdot 10^{25} \frac{g_{bf}}{t} Z(1 + X) \frac{\rho}{T^{3,5}}, \quad (4.4)$$

$$k_{ff} = 3,68 \cdot 10^{22} g_{ff} (1 + X)(X + Y) \frac{\rho}{T^{3,5}}. \quad (4.5)$$

Здесь X , Y и Z — весовое содержание водорода, гелия и тяжелых элементов соответственно. Вопрос о величине поправочных множителей g_{bf} , g_{ff} и t подробно рассмотрен А.Н. Коксом (1970); в этой работе даны соответствующие ссылки. Для ориентировочных оценок можно принять, что $g_{bf} \approx g_{ff} \approx t \approx 1$.

Расчеты коэффициентов k_{bf} и k_{ff} для условий, типичных для звездных недр, показали следующее: 1) При наличии в веществе тяжелых элементов именно эти последние играют главную роль в установлении величины коэффициента поглощения для связанно-свободных переходов, тогда как связанно-свободные переходы водорода и гелия не играют существенной роли. 2) Коэффициент поглощения при свободно-свободных переходах водорода и гелия зависит от температуры и плотности так же, как и для связанно-свободных переходов тяжелых элементов, однако численно он значительно меньше. Поэтому, если только содержание тяжелых

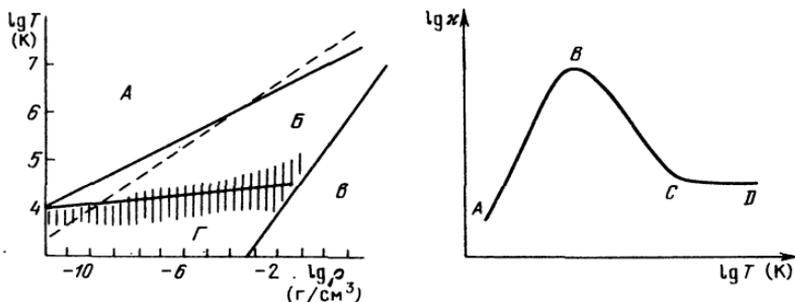


Рис. 8. Диаграмма температура — плотность для процессов, определяющих непрозрачность: А — рассеяние на свободных электронах (при $E_R \geq E_G$), Б — связанно-свободные и свободно-свободные переходы ($E_R \leq E_G$), В — теплопроводность вырожденного газа электронами; заштрихована область ионизации, область Г соответствует состоянию внешних неионизированных слоев оболочек звезд, вдоль прерывистой

$$\text{линии осуществляется условие } \frac{\partial E_R}{\partial T} = \frac{\partial E_G}{\partial T}.$$

Рис. 9. Схема зависимости непрозрачности κ от температуры при заданной плотности ρ .

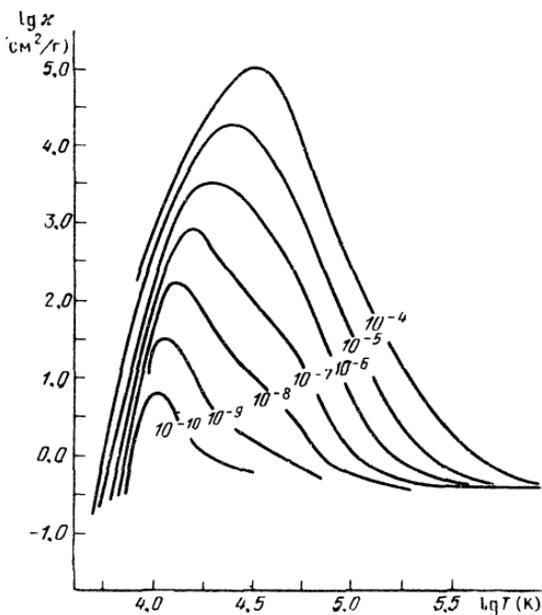


Рис. 10. Зависимость непрозрачности от температуры и плотности для чистого водорода.

элементов Z порядка 2% или более, поглощение, вызываемое связанно-свободными переходами тяжелых элементов, превосходит поглощение, обусловленное свободно-свободными переходами водорода и гелия, и лишь при $Z \leq 0,005$ преобладают эти последние. Свободно-свободными переходами для смеси тяжелых элементов можно пренебречь, поскольку они малоэффективны по сравнению со связанно-свободными переходами.

Непрозрачность, обусловленная рассеянием на свобод-

ных электронах, определяется известным выражением

$$\kappa_E = 0,20(1 + X) \text{ см}^2/\text{г}. \quad (4.6)$$

Она, как это видно из рис. 8, становится существенной при малых плотностях и высоких температурах.

Влияние поглощения в линиях на величину непрозрачности подробно проанализировано А.Н. Коксом (1970). В частности, при температуре $T = 5 \cdot 10^4$ К учет поглощения в линиях увеличивает при $\rho = 10^{-7}$ г/см³ непрозрачность в 1,6 раза, при $\rho = 10^{-4}$ г/см³ — почти в три раза.

К настоящему времени уже проведены достаточно надежные расчеты непрозрачности κ для различных смесей (химического состава) вещества и широких интервалов температуры и плотности. Большую известность получили таблицы непрозрачностей Кокса (A.N. Cox, J.N. Stewart, D.D. Eilers, 1965; A.N. Cox, J.E. Tabor, 1976), которые чаще других используются при расчетах моделей звезд и их атмосфер. При этом в память ЭВМ вводятся таблицы значений κ для начальной смеси и одной или нескольких смесей с уменьшенным содержанием тех элементов, концентрация которых в результате термоядерных реакций уменьшается. Путем линейной интерполяции величины $\lg \kappa$ относительно $\lg \rho$ и $\lg T$ непрозрачность в промежуточных точках рассчитывается с точностью до 10–15%.

Как оказалось, при определенной плотности ρ непрозрачность зависит от температуры весьма сложным образом (рис. 9). Так, на участке AB с увеличением T она возрастает вследствие увеличения числа свободных электронов и ионов благодаря все усиливающейся ионизации вещества. На участке BC величина κ определяется в основном связанно-свободными и свободно-свободными переходами (они как раз и описываются формулами Крамерса) и с ростом T она уменьшается. Участок CD соответствует подавляющей роли электронного рассеяния, здесь $\kappa \approx \text{const}$.

Однако запись непрозрачности в виде таблиц непригодна для каких-либо аналитических исследований. Поэтому многие авторы стремились

Рис. 11. Зависимость непрозрачности температуры при $\rho = 10^{-5}$ г/см³ для следующего химического состава: 1- $X = 1,0$; 2- $X = 0,5, Y = 0,4, Z = 0,1$; 3- $X = 0,5, Y = 0,49999, Z = 0,00001$; 4- $X = 0,0, Y = 0,9, Z = 0,1$; 5- $X = 0,0, Y = 0,99999, Z = 0,00001$.

представить зависимость непрозрачности κ от параметров ρ и T в виде приближенной формулы

$$\kappa = \kappa_0 \rho^m T^{-s}, \quad (4.7)$$

где κ_0, m и s — постоянные. Так, А.В. Тутуков, Л.Р. Юнгельсон и А.Я. Кляйман (1973) при расчете строения оболочек горячих звезд для химического состава, изменяющегося в пределах от $X = 0,602, Z = 0,044$ до $X = 0, Z = 0,044$, использовали для таблиц Кокса следующие интерполяционные формулы:

$$\kappa_{AB} = 10^{-48} \rho^{0,44} T^{13,45} \text{ см}^2/\text{г}, \quad (4.8)$$

$$\kappa_{BD} = \frac{0,2(1+X)}{1+2 \cdot 10^{-9} T} + 10^{23,4} X \rho^{0,99} T^{-3,33} \text{ см}^2/\text{г}. \quad (4.9)$$

Первая из них достаточно хорошо описывает непрозрачность при $T \leq 10^4$ К, вторая — при $10^4 \leq T \leq 2 \cdot 10^6$ К.

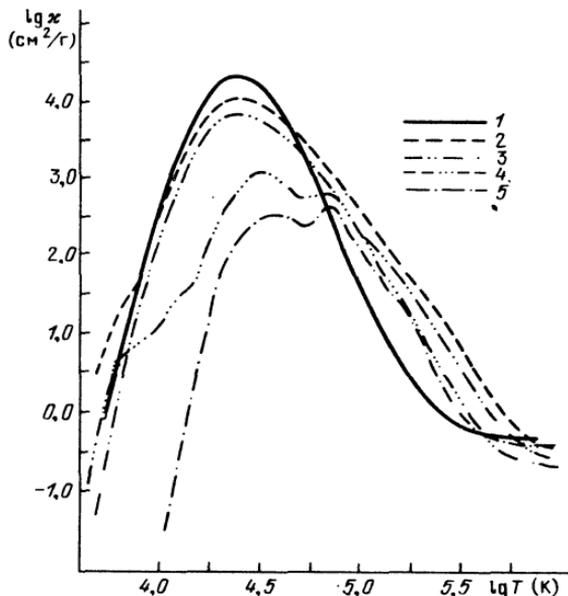
На рис. 10 приведена зависимость κ от параметров ρ и T для чистого водорода, взятая из работы А.Н. Сох, J.E. Tabor (1976). На рис. 11 по данным тех же авторов показана такая же зависимость κ от T для плотности $\rho = 10^{-5}$ г/см³. Как видно, при $T \geq 10^5$ К коэффициент непрозрачности κ изменяется с ростом температуры примерно одинаковым образом. При $T \leq 10^5$ К уменьшение содержания водорода до $X \approx 0,5$ (на самом деле — до $X \approx 0,2$) лишь незначительно влияет на экстремальное значение κ , хотя и заметно изменяет наклон кривой участка BC на рис. 9. При $X \rightarrow 0$ величина κ в интервале температур от $4 \cdot 10^3$ до 10^5 К на полтора — два порядка ниже, чем при $X = 1$. При этом увеличение количества тяжелых элементов Z до 0,1 приводит к возрастанию κ в несколько раз.

Конечно, в определенном интервале плотности и температуры непрозрачность κ можно представить в виде (4.7), выбирая из таблицы непрозрачностей для той или другой смеси три точки (ρ_1, T_1, κ_1) , (ρ_2, T_2, κ_2) и (ρ_3, T_3, κ_3) и составляя систему трех алгебраических уравнений. Так получаем величины κ_0, m и s . В частности, по данным Кокса (А.Н. Сох et al. 1965) при $X = 0,9996, Y = 0,0000, Z = 0,0004$ находим приближенно:

$$\kappa = 10^{25,02} \rho^{0,954} T^{-3,69} \text{ см}^2/\text{г}, \quad (4.10)$$

при $X = 0,0000, Y = 0,9996, Z = 0,0004$

$$\kappa = 10^{19,55} \rho^{1,16} T^{-2,33} \text{ см}^2/\text{г}, \quad (4.11)$$



при $X = 0,70$, $Y = 0,28$, $Z = 0,02$

$$\kappa \approx 10^{21,65} \rho^{0,98} T^{-2,89} \text{ см}^2/\text{г}. \quad (4.12)$$

Соотношения (4.10)–(4.12) можно записать в виде (4.7) при $m = 1$ и $s = 3,5$, исправив соответственно для каждой конкретной пары точек ρ и T величину κ_0 . Так можно найти, что в области с $\rho \approx 10^{-6}$ г/см³ и $T \approx 10^5$ К непрозрачность для упомянутых выше смесей можно аппроксимировать выражением

$$\kappa \approx 3 \cdot 10^{24} \rho T^{-3,5} \text{ см}^2/\text{г}. \quad (4.13)$$

Относительность представлений (4.10)–(4.12) можно проиллюстрировать следующим. Если для вещества с $X = 1,0$ взять точки: 1) $T = 2 \cdot 10^4$, $\rho = 10^{-8}$, $\kappa = 32,8$, 2) $T = 10^5$, $\rho = 10^{-6}$, $\kappa = 4,93$ и 3) $T = 5 \cdot 10^4$ К, $\rho = 10^{-4}$ г/см³, $\kappa = 1,85 \cdot 10^4$, то находим

$$\kappa \approx 10^{29,43} \rho^{1,13} T^{-4,40} \text{ см}^2/\text{г}. \quad (4.14)$$

На основании же точек $T = 2 \cdot 10^4$, $7 \cdot 10^4$ и $5 \cdot 10^4$ К и соответствующих им $\rho = 10^{-8}$, 10^{-6} , 10^{-4} и $\kappa = 32,8$, $34,7$ и $1,85 \cdot 10^4$ следует

$$\kappa \approx 10^{26,99} \rho^{1,08} T^{-3,92} \text{ см}^2/\text{г}. \quad (4.15)$$

Поэтому при конкретных расчетах обычно в память электронной вычислительной машины вводятся табличные значения κ .

§ 5. Строение оболочек звезд

Как известно, гидродинамическое равновесие звезды описывается уравнением

$$\frac{dP(r)}{dr} = - \frac{GM(r)}{r^2} \rho(r), \quad (5.1)$$

где G – гравитационная постоянная, $M(r) = 4\pi \int_0^r \rho r^2 dr$ – масса, находящаяся внутри сферы радиуса r . При изучении внутреннего строения звезд часто используется связь давления P и плотности ρ в виде

$$P = K_1 \rho^{1 + \frac{1}{n}}. \quad (5.2)$$

Здесь K_1 – постоянная, n – индекс политропы. Модель звезды, построенная при условии (5.2), будет политропой индекса n . Напомним, что случай $n = 0$ соответствует несжимаемому веществу ($\rho = \rho_c = \text{const}$ – однородная звезда), индексом $n = 1$ приближенно описывается внутреннее строение твердых тел, в том числе Земли), $n = 1,5$ соответствует полностью конвективной модели, $n = 3$ – звезде, находящейся в лучистом равновесии. Из расчетов следует, что чем больше индекс политропы n , тем больше степень концентрации массы к центру звезды. Так, при $n = 1,5$ $\rho_c/\bar{\rho} = 5,99$,

где $\bar{\rho} = M_*/\frac{4}{3}\pi R_*^3$ – средняя плотность звезды, при $n = 3$ имеем $\rho_c/\bar{\rho} = 54$,

случаю $n = 5$ соответствует $\rho_c/\bar{\rho} = \infty$ (С. Чандрасекар, 1950).

Политропу индекса n можно характеризовать потенциальной или гравитационной энергией E_G ,

$$E_G = - \frac{3}{5-n} \frac{GM_*^2}{R_*}, \quad (5.3)$$

где M_* и R_* — масса и радиус звезды. Индексом * здесь и далее обозначены параметры звезды — ее масса, радиус и светимость, — измеренные в абсолютных единицах (г, см, эрг/с); если же параметры звезды этим индексом не обозначены, то они выражены в солнечных единицах (в M_\odot , R_\odot и L_\odot). Для звезды с $n = 3$ находим

$$E_G = -5,7 \cdot 10^{48} \frac{M^2}{R} \text{ эрг.}$$

Аналитические выражения, которыми описывается распределение плотности ρ и температуры T во внешних слоях звезды, находящихся в лучистом равновесии, если непрозрачность вещества описывается формулой Крамерса (4.7) при $m = 1$ и $s = 3,5$, были получены Чандрасекаром (1950). В частности, если лучистым давлением в оболочке звезды можно пренебречь, то соответствующие выражения для ρ и T имеют вид

$$\rho = \frac{31}{32} \left(\frac{4}{17}\right)^{3,25} \left(\frac{4\pi c a R}{3k_0 L_*}\right)^{1/2} \left(\frac{GM_*}{A}\right)^{3,75} \frac{1}{R_*^{3,25}} \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)^{3,25}, \quad (5.4)$$

$$T = \frac{GM_*}{4,25AR_*} \left(\frac{1}{\xi} - 1\right), \quad (5.5)$$

где $\xi = \frac{r}{R_*}$ — безразмерное расстояние до центра звезды. После подстановки численных значений находим

$$\rho = 4,61 \cdot 10^{12} \frac{(\mu M)^{3,75}}{(k_0 L)^{0,5} R^{3,25}} \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)^{3,25} \text{ г/см}^3, \quad (5.4')$$

$$T = 5,41 \cdot 10^6 \frac{\mu M}{R} \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) \text{ К.} \quad (5.5')$$

Аналогично для конвективной оболочки (М. Шварцшильд, 1961)

$$\rho = \left(\frac{2}{5}\right) \frac{b_0 M_*}{4\pi R_*^3} \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)^{1,5}, \quad (5.6)$$

$$T = \frac{GM_*}{2,5AR_*} \left(\frac{1}{\xi} - 1\right). \quad (5.7)$$

Здесь b_0 — постоянная, которой определяется протяженность конвективной оболочки. Ее численное значение в зависимости от принятой длины пути перемешивания l колеблется в пределах от 1 до 30. Для оболочки Солнца $b_0 = 1$ при $l = H$ (H — высота однородной атмосферы) и $b_0 = 10$ при $l = 2H$. Из (5.6) и (5.7) следует, что

$$\rho = 0,19 \frac{b_0 M}{R^3} \left(\frac{1}{\xi} - 1\right)^{1,5} \text{ г/см}^3, \quad (5.6')$$

$$T = 9,19 \cdot 10^6 \frac{\mu M}{R} \left(\frac{1}{\xi} - 1\right) \text{ К.} \quad (5.7')$$

В частности, при $\xi \approx 1$ имеем

$$\rho = \rho_0 h^n, \quad T = T_0 h, \quad (5.8)$$

где $h \approx 1 - \xi$, $n = 3,25$ и $n = 1,5$ для оболочки, находящейся соответственно в лучистом и конвективном равновесии.

Для внешних слоев оболочки звезды (ее атмосферы), в которой температуру можно считать постоянной ($T = \text{const}$), воспользовавшись уравнением состояния (1.1), находим при $g = \frac{GM_*}{R_*^2} = \text{const}$

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{gh}{AT}} = \rho_0 e^{-\frac{h}{H}} \quad (5.9)$$

Здесь $h = r - r_0$ — высота, отсчитанная от начального уровня r_0 , где $\rho = \rho_0$, $H = \frac{AT}{g}$ — шкала высот (высота однородной атмосферы).

Таким образом, для характеристики строения звезды можно ввести величину

$$\Delta = -\frac{d \ln \rho}{d \ln r}, \quad (5.10)$$

которая имеет одинаковое значение для всех звезд, построенных по одному и тому же закону (политроп одного индекса n). Величина параметра Δ изменяется от $\Delta = 0$ в центре до $\Delta_A = \frac{R_*}{H}$ на "поверхности" звезды (т.е. в ее

атмосфере). Зависимость $\Delta(\xi)$ для оболочек, находящихся соответственно в лучистом и конвективном равновесии, показана на рис. 12. Для Солнца при $H = 180$ км $\Delta_A = 3870$. Параметром Δ и определяется градиент скорости движения ударной волны в оболочке звезды (см. § 19 и § 28).

Как известно, звезды на самом деле имеют сложную (гетерогенную) структуру и практически не могут быть описаны политропом одного индекса. В особенности это относится к звездам, далеко продвинувшимся в своей эволюции. Поэтому обычно распределение физических параметров (давления, плотности и температуры) в оболочках звезд находят путем расчетов на ЭВМ. При этом было установлено, что истинное распределение этих параметров (благодаря существенному изменению отношения удельных теплоемкостей $\gamma = c_p/c_v$, обусловленному ростом с глубиной h степе-

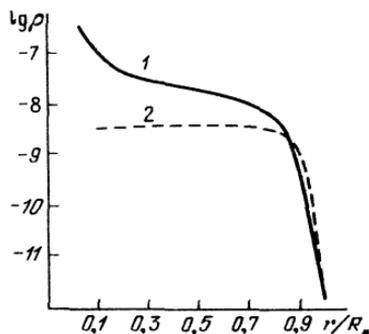
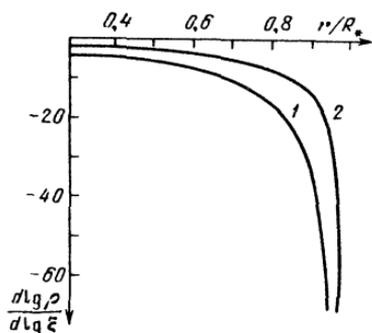
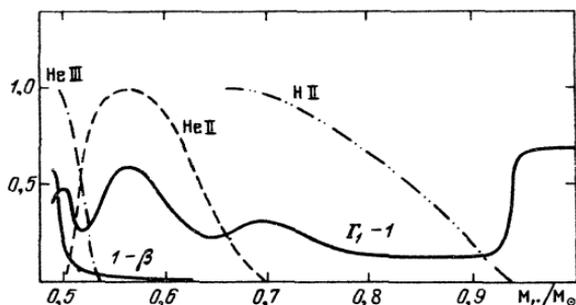


Рис. 12. Зависимость безразмерного градиента плотности от радиуса для лучистой (1) и конвективной (2) оболочек.

Рис. 13. Распределение плотности в конвективных оболочках звезд-гигантов: 1 — $M = 1,5 M_\odot$, $R = 560 R_\odot$, 2 — $M = 5 M_\odot$, $R = 1300 R_\odot$.

Рис. 14. Изменение величины показателя адиабаты Γ_1 и параметра β в оболочке сверхгиганта; указана также степень ионизации водорода (H II), первой (He II) и второй (He III) ионизации гелия (В. Paczyński, J. Ziolkowski, 1968).



ни ионизации вещества) в конвективных оболочках резко отличается от того, которое следует из соотношений (5.6)–(5.7). Пример таких расчетов показан на рис. 13 (У. Уэс, 1973). Как видно, начиная с расстояния от центра звезды $r \approx 0,9 R_*$, где оптическая глубина $\tau = 2/3$, распределение плотности описывается экспоненциальным законом (5.9). Во всей же протяженной оболочке звезды-сверхгиганта плотность практически постоянна и близка к величине $\rho \approx 5 \cdot 10^{-9} \text{ г/см}^3$. Более того, во внешних слоях оболочки может существовать даже инверсия плотности (У. Уэс, 1973). Как показывают расчеты (В. Paczyński, J. Ziolkowski, 1968), в оболочке красного сверхгиганта внутренняя энергия (тепловая плюс энергия ионизации) близка к ее гравитационной энергии E_G — энергии связи оболочки с ядром звезды. Благодаря малой величине параметра γ в оболочке сверхгиганта (рис. 14) легко может наступить ее отрыв, если только масса ядра каким-то образом уменьшается (например, при вспышке нейтринного излучения; см. § 28).

Распределение параметров в атмосфере Солнца показано на рис. 15 (J.E. Vernazza, E.H. Avrett, R. Loeser, 1973).

При изучении вспышек сверхновых звезд оказалось удобным следующее представление строения оболочек сверхгигантов (В.С. Имшенник, Д.К. Надёжин, В.П. Утробин, 1979). Пусть M_0 и R_0 — масса и радиус ядра звезды, M_e и R_e — масса и радиус оболочки, $p(R_0) = p_0$ — давление на поверхности ядра, $p(R_e) = 0$ — давление на внешней свободной границе оболочки, $x = R_0/R_e$ и $\xi = r/R_e$. Тогда при условии, что $\rho \sim \rho^{1+\frac{1}{n}}$, и при $M_e \ll M_0$ распределение давления и плотности с глубиной запишется в виде

$$\rho = p_0 \left(\frac{x}{\xi} \frac{1-\xi}{1-x} \right)^{n+1}, \quad p = p_0 \left(\frac{x}{\xi} \frac{1-\xi}{1-x} \right)^n, \quad (5.11)$$

где

$$\rho_0 = (n+1) \frac{p_0 R_e}{GM_0} \frac{x}{1-x}. \quad (5.12)$$

В свою очередь масса оболочки определяется соотношением

$$M_e = 4\pi\rho_0 R_e^3 \left(\frac{x}{1-x} \right)^n J_2(x, n), \quad (5.13)$$

тогда как гравитационная энергия оболочки

$$E_G = -4\pi \int_{R_0}^{R_e} r^2 \rho \frac{GM_0}{r} dr = -4\pi\rho_0 R_e^3 (n+1) \left(\frac{x}{1-x} \right)^{n+1} J_1(x, n), \quad (5.14)$$

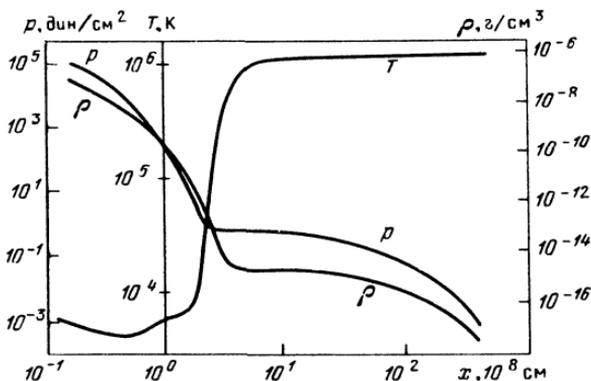


Рис. 15. Распределение давления p , плотности ρ и температуры T в атмосфере Солнца.

или, выраженная через массу оболочки M_e ,

$$E_G = - \frac{GM_0 M_e}{R_e} \frac{J_1(x, n)}{J_2(x, n)}. \quad (5.15)$$

Здесь принято

$$J_k(x, n) = \int_x^1 \xi^k - n(1 - \xi)^n d\xi, \quad k = 1, 2.$$

Для конвективной ($n = 1,5$) и лучистой ($n = 3$) оболочек имеем соответственно

$$\left. \begin{aligned} J_1\left(x, \frac{3}{2}\right) &= \left(\frac{x}{2} - \frac{5}{4}\right) \sqrt{x(1-x)} + \frac{3}{4} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}}, \\ J_2\left(x, \frac{3}{2}\right) &= \left(\frac{x^2}{3} - \frac{7x}{12} + \frac{1}{8}\right) \sqrt{x(1-x)} + \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}}, \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

$$\left. \begin{aligned} J_1(x, 3) &= \frac{3}{2} + \frac{1}{x} + \frac{x^2}{2} - 3 \ln \frac{1}{x} - 3x, \\ J_2(x, 3) &= \frac{x^3}{3} - \frac{3}{2} x^2 - \frac{11}{16} + \ln \frac{1}{x} + 3x. \end{aligned} \right\} \quad (5.17)$$

При постоянном показателе адиабаты γ в соответствии с теоремой о вириале гравитационная энергия E_G и тепловая энергия оболочки E_T связаны соотношением (Я.Б. Зельдович, Л.Н. Иванова, Д.К. Надёжин, 1972)

$$E_T = - \frac{E_G}{3(\gamma - 1)} \left[1 + \frac{4\pi R_0^3 \rho_0}{E_G} \right]. \quad (5.18)$$

Из записанных здесь соотношений следует, что при заданных показателе политропы n и характеристиках ядра звезды M_0 , R_0 и ρ_0 решение определяется одним параметром — радиусом оболочки R_e . Нетрудно найти асимптотические соотношения при $R_e \gg R_0$ ($x \rightarrow 0$) и $R_e \approx R_0$ ($x \rightarrow 1$). В первом случае из (5.13) следует, что при $n = 3$ масса оболочки неограни-

ченно возрастает, а это несовместимо с исходным предположением $M_0 \gg M_e$. При $n > 3$ имеем

$$M_e = 4\pi \frac{n+1}{n-3} \frac{\rho_0 R_0^4}{GM_0}, \quad (5.19)$$

и при $n > 2$

$$E_G = -4\pi \frac{n+1}{n-2} \rho_0 R_0^3, \quad (5.20)$$

$$E_T = - \frac{E_G}{(n+1)(\gamma-1)} = \frac{4\pi\rho_0 R_0^3}{(n-2)(\gamma-1)}. \quad (5.21)$$

Если же $x \rightarrow 1$, то при любых n из (5.13) следует

$$M_e = \frac{4\pi\rho_0 R_0^4}{GM_0}. \quad (5.22)$$

Из приведенных здесь соотношений находим, что в случае $n = 3/2$ радиус оболочки R_e может превышать радиус звезды не более, чем в 5 раз. При $n = 3$ $R_e \approx 20 R_0$, а для $n \geq 4$ допустимы сколь угодно большие значения радиуса R_e .

Приведем другой способ аппроксимации строения оболочек звезд (Д.К. Надёжин, 1979). Можно предположить, что звезда состоит из точечной массы M_0 , расположенной в ее центре, и оболочки с массой M_e , находящейся в гидростатическом равновесии в собственном гравитационном поле и в гравитационном поле точечного ядра, а плотность в оболочке задать следующим образом:

$$\rho = \rho_n \left(1 - \frac{r}{R_*}\right)^n, \quad (5.23)$$

где R_* — радиус звезды. Тогда масса и гравитационная энергия оболочки:

$$M_e = \frac{8\pi R_*^3 \rho_n}{(n+1)(n+2)(n+3)}, \quad (5.24)$$

$$E_G = - \frac{n+3}{2} \frac{GM_e}{R_*} \left[M_0 + \frac{(n+3)(5n+8)}{4(2n+3)(2n+5)} M_e \right]. \quad (5.25)$$

Согласно теореме о вириале гравитационная энергия оболочки E_G и ее внутренняя энергия E_T связаны соотношением $E_G = -3(\gamma-1)E_T$. Поэтому при постоянном показателе адиабаты γ полная энергия оболочки $E = E_G + E_T$ равна

$$E = - \frac{(3\gamma-4)(n+3)}{6(\gamma-1)} \frac{GM_e}{R_*} \left[M_0 + \frac{(n+3)(5n+8)}{4(2n+3)(2n+5)} M_e \right]. \quad (5.26)$$

Согласно современным представлениям на поздних стадиях эволюции ядро звезды (при $M_* \geq 1,3 M_\odot$) коллапсирует в нейтронную звезду или черную дыру, что сопровождается мощным импульсом нейтринного излучения. Соответственно на величину qM_0 уменьшается масса звезды. Это приводит к увеличению гравитационной энергии оболочки на величину

$$\Delta E_G = \frac{(n+3)GM_e}{2R_*} qM_0. \quad (5.27)$$

Из соотношений (5.24) – (5.26) следует, что если γ достаточно близко к критическому значению $\gamma_* = 4/3$, то после коллапса полная энергия оболочки может стать положительной. Это происходит при условии

$$\gamma - \frac{4}{3} < \frac{1}{3} \frac{qM_0}{(1-q)M_0 + \frac{(n+3)(5n+8)}{4(2n+3)(2n+5)} M_e}. \quad (5.28)$$

Таким образом, часть вещества звезды при коллапсе может быть сброшена в межзвездное пространство (см. § 28).

§ 6. Уравнения газовой динамики

Изучая законы движения газа, газовая динамика рассматривает его как непрерывную среду. Это условие выполняется, если размеры системы (например, атмосферы звезды) существенно превышают длину свободного пробега частиц. Движение такой непрерывной (сплошной) среды в газодинамике описывается скоростью u , плотностью ρ , давлением P , температурой T , внутренней энергией E или тепловой функцией ω и энтропией S . Каждый из этих параметров является функцией координат $(x, y, z$ в прямоугольной декартовой системе) и времени t . Если движущуюся среду можно рассматривать как идеальный газ, то давление связано с плотностью и температурой уравнением состояния (1.1).

Математическим аппаратом газовой динамики является система дифференциальных уравнений, описывающая законы сохранения массы, импульса и энергии. К ним прибавляется еще для замыкания системы уравнение состояния. Путем решения этой системы уравнений и находят все параметры движущегося газа. При этом в зависимости от характера поставленной задачи используют два метода: находят зависимость параметров газа u, ρ, P и T как функций пространственных координат x, y, z и времени t (метод Эйлера) или же скорость движения, плотность, давление и температура определяют для каждого фиксированного элемента газа как функции времени и его начальной пространственной координаты (метод Лагранжа). В случае одномерных движений второй метод является более удобным.

а) *Уравнения движения в форме Эйлера.* Первое уравнение газодинамики – уравнение неразрывности – описывает изменение массы в фиксированном элементе объема за счет втекания или вытекания вещества через поверхность, ограничивающую этот объем:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho u) = 0. \quad (6.1)$$

Здесь u – вектор скорости; его компоненты в прямоугольной системе координат равны u_x, u_y и u_z .

Второе – уравнение движения – связывает ускорение массы, заключенной в фиксированном элементе объема, с действующими на нее силами,

$$\rho \frac{du}{dt} + \nabla P - f = 0, \quad (6.2)$$

где ∇P – градиент полного давления, f – внешняя сила, действующая на единицу объема. Если речь идет о силе гравитации, действующей на

расстоянии r от центра звезды массы M , то $f = -g\rho = -\frac{GM(r)r}{r^3}\rho$, где $M(r)$ — масса, находящаяся внутри сферы радиуса r . Оператор

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla$$

характеризует изменение во времени того или другого параметра газа для фиксированного элемента массы, оператор $\frac{\partial}{\partial t}$ — изменение во времени того же параметра газа в данной точке пространства. Поэтому уравнение (6.2) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)_i \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla P + \mathbf{g} = 0. \quad (6.2')$$

Обычно оно расписывается в виде трех уравнений, описывающих изменение газодинамических величин вдоль каждой из координатных осей. Простейший вид это уравнение принимает в случае одномерного движения.

Третье уравнение газодинамики описывает закон сохранения энергии в процессе движения. Если E — внутренняя энергия фиксированного элемента массы, занимающего удельный объем V , то изменение этой энергии в процессе движения происходит за счет работы сжатия, выполняемой над этим элементом внешней средой, а также за счет притока энергии от посторонних источников или оттока энергии, связанного, например, с потерями на излучение. По аналогии с законом сохранения массы найдем, что изменение величины энергии единицы объема в данной точке пространства равно потоку энергии через поверхность, ограничивающую этот объем,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(E + \frac{u^2}{2} \right) \right] = -\operatorname{div} \left[\rho \mathbf{u} \left(E + \frac{u^2}{2} \right) + P\mathbf{u} + \mathbf{F} \right], \quad (6.3)$$

где \mathbf{F} — поток энергии, обусловленный теплопроводностью, величина которого находится из соотношения (3.28).

Общее решение системы (6.1) — (6.3) не удается получить и в "классическом" случае, когда эффекты излучения не учитываются. Трудности становятся еще большими при включении в эти уравнения давления и плотности энергии радиации, потока энергии излучения, изменения ионизации газа и др. Поэтому, в зависимости от характера поставленной задачи, система (6.1) — (6.3) обычно упрощается. Сейчас ее решение находят численными методами, о которых речь пойдет в гл. IV.

Простейшим случаем движения газа является одномерное адиабатическое движение, для которого уравнения газодинамики сводятся к виду

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\alpha u \rho}{r} = 0, \quad (6.1')$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + g = 0, \quad (6.2'')$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + u \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{P}{\rho^2} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} \right] = 0, \quad (6.3')$$

причем $\alpha = 0, 1$ и 2 соответственно для плоского, цилиндрического и сферического движения. Направление ускорения силы тяжести здесь противоположно направлению градиента сил давления. Из (6.2') при $u = 0$ следует условие гидростатического равновесия

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dr} = -g. \quad (6.4)$$

Индексом "1" здесь и в дальнейшем обозначаются значения соответствующих параметров в равновесном состоянии.

б) *Уравнения движения в форме Лагранжа.* Во многих случаях при решении уравнений газодинамики удобнее следить за изменением физических параметров каждой фиксированной частицы (элемента массы) в отдельности. Для этого уравнения газодинамики записываются в форме Лагранжа. Мы ограничимся здесь случаем простейшего одномерного движения. В начальный момент времени (при $t = 0$) каждый элемент массы занимает определенное положение в пространстве, поэтому ему можно приписать определенную эйлерову координату r_1 , которой этот элемент массы и будет характеризоваться при его дальнейшем движении. Под "частицей" удобно подразумевать элементарный слой газа, находящийся в пределах от r_1 до $r_1 + dr_1$. В трехмерном случае это сферический слой с массой

$$dm = 4\pi r_1^2 \rho_1 dr_1. \quad (6.5)$$

В процессе движения толщина этого слоя изменяется, соответственно меняется и плотность вещества, однако масса dm остается постоянной, так что

$$r_1^2 \rho_1 dr_1 = r^2 \rho dr,$$

или, в общем случае, при произвольном α

$$\left(\frac{r_1}{r}\right)^\alpha \frac{\rho_1}{\rho} \frac{dr_1}{dr} = 1. \quad (6.6)$$

Обозначим через Δr смещение фиксированного слоя за время dt , так что $r = r_1 + \Delta r$. Скорость движения слоя $u = \frac{\partial \Delta r}{\partial t}$. Воспользовавшись

очевидным соотношением $dr = \left(1 + \frac{d\Delta r}{dr_1}\right) dr_1$ и дифференцируя соотношение (6.6) по t при фиксированном r_1 , находим уравнение неразрывности в форме Лагранжа:

$$\frac{\rho}{\rho_1} \left(\frac{r}{r_1}\right)^\alpha \frac{\partial u}{\partial r_1} + \frac{\alpha u}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (6.7)$$

Уравнение движения в этом случае принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla P + g = 0 \quad (6.8)$$

или, в случае простейшего одномерного движения,

$$\left(\frac{r_1}{r}\right)^\alpha \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial P}{\partial r_1} + \left(\frac{r_1}{r}\right)^\alpha g = 0. \quad (6.8')$$

Здесь, как и в соотношении (6.7), производная по времени $\frac{\partial}{\partial t}$ экви-

валентна полной производной $\frac{d}{dt}$. Такая запись означает, что производная берется для заданной частицы с определенной лагранжевой координатой r_1 при $r_1 = \text{const}$. Уравнения (6.7) и (6.8) являются исходными в методе Бринкли — Кирквуда.

Подавляющее большинство задач динамики звездных оболочек сводится к изучению сферически-симметричных движений газа в поле тяжести, создаваемом центральными областями звезды (в собственном поле тяготения). Уравнения, описывающие это движение в переменных Лагранжа, имеют вид

$$\frac{\partial r}{\partial t} = u, \quad (6.9)$$

$$V = \frac{1}{\rho} = 4\pi r^2 \frac{\partial r}{\partial m}, \quad (6.10)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 4\pi r^2 \frac{\partial P}{\partial m} + \frac{Gm}{r^2} = 0, \quad (6.11)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{16\pi^2 c a_R}{3} \frac{\partial}{\partial m} \left[\frac{r^4}{\kappa} \frac{\partial T^4}{\partial m} \right] + \epsilon. \quad (6.12)$$

В последнем уравнении — уравнении сохранения энергии — учитывается энергоотвод из слоя за счет лучистой теплопроводности, а также возможный приток энергии за счет термоядерных реакций ϵ . В уравнении

$$(6.11) \quad m = 4\pi \int_0^r r^2 \rho dr \quad \text{— масса, заключенная внутри сферы радиуса } r.$$

За фронтом сильной ударной волны, движущейся в оболочке звезды, давление и плотность энергии излучения соизмеримы или даже больше давления и плотности энергии газа. Поэтому в уравнениях (6.11) и (6.12) под P и E следует подразумевать полное давление $P = p_G + p_R$ и полную удельную плотность энергии $E = E_G + E_R$, которые определяются соотношениями (1.6) и (1.7).

Для проведения расчетов на ЭВМ систему (6.9) — (6.12) удобно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = u, \quad (6.9')$$

$$\frac{\partial r^3}{\partial s} = \frac{3}{\rho}, \quad (6.10')$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -r^2 \frac{\partial P}{\partial s} - \frac{4\pi Gs}{r^2}, \quad (6.11')$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -P \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) - \frac{\partial(r^2 W)}{\partial s} + \epsilon, \quad (6.12')$$

$$W = -\kappa_T \rho r^2 \frac{\partial T}{\partial s}, \quad (6.13)$$

где в качестве лагранжевой массовой переменной использована величина $s = m/4\pi$ — масса в единице телесного угла и введен тепловой поток W , κ_T — коэффициент лучистой теплопроводности (3.29). Замыкают систему уравнения состояния (1.6) и (1.7).

Начальные и граничные условия. При решении системы (6.9) — (6.12) начальные и граничные условия формулируются отдельно для каждой конкретной задачи, хотя общие принципы здесь одинаковы. Так, при изучении движения ударной волны в оболочке звезды в качестве начальных условий иногда принимаются решения, которыми описывается распределение плотности и температуры в политропных моделях (см. § 5).

Далее, до тех пор, пока ударная волна движется в оболочке звезды, в качестве граничных условий "сверху" принимаются условия сохранения массы, импульса и энергии, выполняющиеся на фронте волны (см. § 8). После выхода ударной волны во внешние слои звезды учитывается условие свободно излучающей поверхности:

$$\frac{2\pi c a_R}{3} \left(r^2 \frac{\partial T^4}{\partial t} \right)_{m = M_*} + \frac{c a_R}{4} T_{\text{пов}}^4 = 0. \quad (6.14)$$

"Снизу", на внутренней границе охваченной движением области газа радиус, скорость и падающий изнутри поток излучения полагаются известными функциями времени. Так, можно предположить, что нижние, более плотные слои звезды колеблются относительно среднего положения равновесия и подобно поршню периодически подталкивают газ оболочки вверх. При изучении вспышек сверхновых достаточно на некотором расстоянии от центра звезды задать начальный профиль скоростей или начальный профиль температуры, после чего и исследуется развитие явления во времени.

Уравнения релятивистской газодинамики. Отсылая читателя к специальной литературе (Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, 1954; К.П. Станюкович, 1955; Ф.А. Баум, С.А. Каплан, К.П. Станюкович, 1958; А.С. Компанец, 1960; М.М. Май, Р.Н. Уайт, 1967), ограничимся здесь записью уравнений релятивистской газодинамики в форме Эйлера. Как известно, уравнения движения в релятивистской газодинамике следуют из дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial T_{jk}}{\partial x_k} = 0, \quad (6.15)$$

где

$$T_{jk} = (\rho + \rho c^2) U_j U_k + p \delta_{jk} \quad (6.16)$$

— тензор импульса-энергии, U_j — 4-скорость, δ_{jk} — символ Кронекера. Знак суммы по дважды повторяющемуся индексу в (6.16), как обычно, опущен. При $j = 1, 2, 3$ из (6.15) следуют уравнения движения в прямоугольной системе координат, при $j = 4$ — уравнение сохранения энергии, 4-скорости равны соответственно ($i = \sqrt{-1}$)

$$U_{1,2,3} = \frac{v_{1,2,3}}{c\theta}, \quad U_4 = \frac{i}{\theta} \quad (6.17)$$

при

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

и

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict, \quad \theta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

где v_i — компонента линейной скорости. Если $\omega = \rho V + c^2 p V$ — тепловая функция газа (V — удельный объем), то в простейшем случае плоских одномерных ($v = v_1, v_2 = v_3 = 0$) изэнтропических движений газа из (6.15) и (6.16) следует такая система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\theta^2} \left[\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \left(1 + \frac{p}{c^2 \rho} \right)^{-1} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{v}{c^2 \rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right] &= 0, \\ \left(1 + \frac{p}{c^2 \rho} \right)^{-1} \left[\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} \right] + \frac{1}{\theta^2} \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{v}{c^2} \frac{\partial v}{\partial t} \right] &= 0, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + v \frac{\partial S}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (6.18)$$

где S — энтропия.

Схема численного решения уравнений релятивистской газодинамики подробно рассмотрена в работе Мэй и Уайта (М.М. May, R.H. White, 1967).

Глава 2

СТАЦИОНАРНЫЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

Как уже отмечалось, ударная волна, движущаяся в оболочке звезды, является нестационарной. Поэтому скачки параметров на ее фронте, вообще говоря, не определяются однозначно величиной мгновенной скорости волны, так как определенную роль здесь играет эффект утолщения или сужения самого фронта.

Однако если характерное время установления термодинамического (в частности, ионизационного) равновесия за фронтом волны существенно меньше времени, за которое ее скорость заметно изменяется, то такую волну можно рассматривать как стационарную. Такой подход позволяет сформулировать и решить задачу о влиянии потерь энергии на ионизацию и высвечивание на величину скачков параметров на фронте волны и тем самым проводить сопоставление теоретических расчетов с наблюдениями.

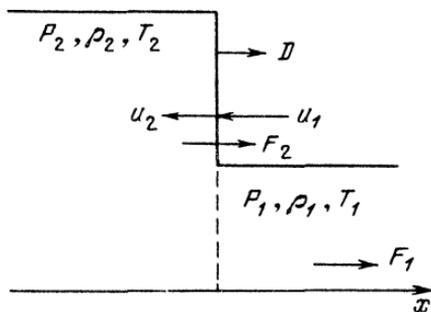
В этой главе и рассмотрены общие соотношения, выполняющиеся на фронте стационарной ударной волны — волны, движущейся в определенный момент времени t с определенной скоростью D . Дан вывод выражений ударной адиабаты и скачков параметров на фронте ударной волны с учетом давления и плотности энергии излучения. Обсуждена сложная и все еще далекая от окончательного решения проблема структуры ударных волн, задача об эффективной температуре ударной волны, движущейся в оболочке звезды.

Важные результаты теоретических и экспериментальных исследований излучательных свойств ударных волн изложены в книгах Я.Б. Зельдовича и Ю.П. Райзера (1966), М.А. Цикулина и Е.Г. Попова (1977); многие сложные проблемы радиационной релятивистской газодинамики в сжатой форме изложены в книге В.С. Имшенника и Ю.И. Морозова (1981).

§ 7. Адиабата Гюгонио

Ударная волна представляет собой движущийся со сверхзвуковой скоростью разрыв газодинамических величин (скорости, плотности, давления и температуры). Толщина этого разрыва Δx по порядку величины равна нескольким длинам свободного пробега частиц вещества $\Delta x \approx l \approx \frac{1}{\sigma_a N}$, где $\sigma_a \approx 10^{-16}$ см² — эффективное сечение частицы, N — концентрация частиц. Даже в случае звездных атмосфер при $N = 10^{14}$ см⁻³ Δx порядка нескольких метров и, во всяком случае, оказывается существенно меньше размеров системы — протяженности атмосферы звезды. Поэтому фронт ударной волны в первом приближении можно рассматривать как математическую поверхность, с которой и связывается система координат, движущаяся вместе с разрывом (о роли потока энергии с фронта волны см. §§ 10 и 11).

Рис. 16. Профиль ударной волны.



Обозначим параметры среды по одну сторону фронта волны, движущегося в направлении координатной оси x , через P_1, ρ_1, T_1 , по другую — P_2, ρ_2, T_2 (рис. 16). Эти параметры связаны между собой законами сохранения массы, импульса и энергии, которые выполняются на поверхности разрыва и которые следуют из дифференциальных уравнений (6.1) — (6.3). Для их вывода разрыв обычно рассматривается как некоторый слой с большими градиентами всех газодинамических параметров и толщиной $x_2 - x_1$. Уравнения газодинамики интегрируются по этому слою от x_1 до x_2 и далее толщина слоя $x_2 - x_1$ устремляется к нулю. Таким образом слагаемые, содержащие производные по времени, исчезают ($\rightarrow 0$), а интегралы от пространственных производных дают разности потоков массы, импульса и энергии на фронте волны, так что

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \quad (7.1)$$

$$P_1 + \rho_1 u_1^2 = P_2 + \rho_2 u_2^2, \quad (7.2)$$

$$\rho_1 u_1 \left[\omega_1 + \frac{u_1^2}{2} \right] - F_1 = \rho_2 u_2 \left[\omega_2 + \frac{u_2^2}{2} \right] - F_2. \quad (7.3)$$

В соотношении (7.3) учтен тот факт, что потоки вещества и излучения как перед, так и за фронтом ударной волны имеют противоположные направления (см. рис. 16). Здесь F_1 — поток лучистой энергии, существующий в оболочке звезды вне зависимости от движения в ней ударной волны, величина же $F_\infty = F_2 - F_1$ — это часть потока излучения из-за фронта, обусловленная ударным действием самой волны. Далее, u_1 — скорость газа по отношению к фронту. Очевидно, что если газ до прохождения фронта покоился, то величина $D = -u_1$ является скоростью движения волны по отношению к неподвижному газу (например, в системе координат, связанной с центром звезды). В этом случае в системе (7.1) — (7.3) скорость u_1 можно заменить величиной $-D$.

Воспользовавшись соотношением (1.4) для тепловой функции ω , находим из (7.1) и (7.2) выражения для скоростей u_1, u_2 и u в следующем виде:

$$u_1^2 = D^2 = V_1^2 \frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2}, \quad (7.4)$$

$$u_2^2 = V_2^2 \frac{P_2 - P_1}{V_1 - V_2}, \quad (7.5)$$

$$u = u_2 - u_1 = \sqrt{(P_2 - P_1)(V_1 - V_2)}. \quad (7.6)$$

Далее, воспользовавшись соотношениями (7.4) и (7.5), можно переписать уравнение сохранения энергии (7.3) в виде

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{1}{2} (P_2 - P_1)(V_1 + V_2) + \frac{F_\infty}{\rho_1 u_1}. \quad (7.7)$$

И, наконец, учтя (1.13), можно свести (7.3) к виду

$$\frac{K_2 + 1}{K_2 - 1} P_2 V_2 - \frac{K_1 + 1}{K_1 - 1} P_1 V_1 + P_1 V_2 - P_2 V_1 = 2q - \frac{2F_\infty}{\rho_1 D} = Q. \quad (7.8)$$

Соотношение (7.7) и эквивалентное ему (7.8) принято называть ударной адиабатой или адиабатой Гюгио. Здесь $q = \omega_{01} - \omega_{02}$ — количество связанной энергии, выделяющейся ($q > 0$) или поглощаемой ($q < 0$) на фронте волны, например, в результате процессов рекомбинации или ионизации. В целом

$$q = - \frac{\sum_i N_i \chi_i (\alpha_{i2} - \alpha_{i1})}{\sum_i N_i m_i}, \quad (7.9)$$

где N_i , χ_i и m_i — соответственно число частиц i -го сорта в единице объема, потенциал ионизации и масса частицы, α_{i1} и α_{i2} — степени ионизации перед и за фронтом ударной волны. Если оболочка звезды состоит из водорода, то

$$q = - \frac{\chi_H}{m_H} (\alpha_2 - \alpha_1). \quad (7.9')$$

В частности, при $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = 0$ имеем $q = 1,3 \cdot 10^{13}$ эрг/г.

На плоскости PV ударная адиабата представляет собой кривую, проходящую через точку P_1, V_1 , которая соответствует начальному состоянию. Эта точка (рис. 17) делит адиабату Гюгио на две части: справа от точки (P_1, V_1) энтропия вещества (смеси газ — излучение) меньше первоначальной ($S < S_1$), слева — больше ее ($S > S_1$). При переходе через фронт ударной волны газ нагревается, а энтропия его возрастает. Поэтому реальный смысл имеет только верхняя, левая часть ударной адиабаты. Из (7.8) непосредственно следует, что если амплитуда ударной волны достаточно велика ($P_2 \gg P_1$), а $Q = 0$, то плотность за фронтом стремится к некоторому пределу

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{K_2 + 1}{K_2 - 1}. \quad (7.10)$$

Вернемся еще раз к системе (7.1) — (7.3). Разрешая ее относительно P_2/P_1 и V_2/V_1 на фронте ударной волны, можно получить еще одну часто используемую запись ударной адиабаты:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\frac{K_1 + 1}{K_1 - 1} - \frac{\rho_1}{\rho_2} + O \frac{\rho_1}{P_1}}{\frac{K_2 + 1}{K_2 - 1} \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1}, \quad (7.11)$$

а также

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{K_2 + 1}{K_2 - 1} \frac{P_2}{P_1} + 1}{\frac{K_1 + 1}{K_1 - 1} + \frac{P_2}{P_1} + Q \frac{\rho_1}{P_1}}, \quad (7.12)$$

Давление P и плотность ρ выражаются через температуру T и параметр β с помощью соотношений (1.8) и (1.9). Записывая их для обеих сторон

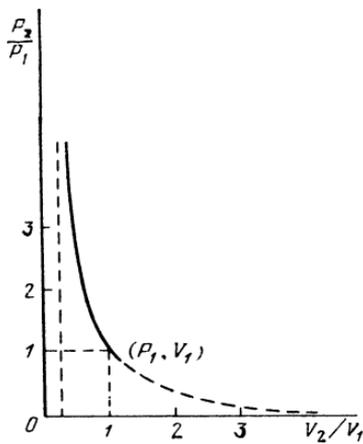


Рис. 17. Адиабата Гюгоню.

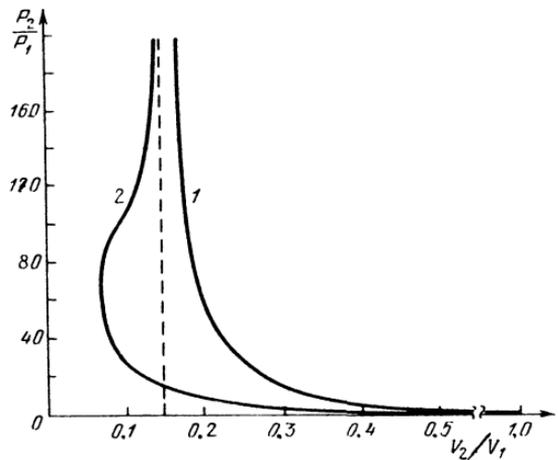


Рис. 18. Ударная адиабата: 1 — при $B = 0$ и 2 — с учетом потерь энергии на ионизацию ($B = -60$).

фронта ударной волны и исключая из них скачок температуры, можно получить еще и такое соотношение, выполняющееся на фронте ударной волны (С.А. Каплан, И.А. Климишин, 1959) :

$$\left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^4 \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^4 \frac{1 - \beta_2}{1 - \beta_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^3 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^4, \quad (7.13)$$

которое и прибавляется к системе (7.1) — (7.3) для ее замыкания.

Уравнение ударной адиабаты можно записать также в виде, связывающем величины T и β . Ее анализ позволяет непосредственно оценить роль эффектов излучения в зависимости от величины температуры смеси газ — излучение. Из уравнений (1.4) — (1.9), (7.1), (7.3) и (7.11) следует

$$\frac{7(\gamma_2 - 1) + \beta_2(8 - 6\gamma_2)}{\gamma_2 - 1} \frac{\mu_1 \beta_1 T_2}{\mu_2 \beta_2 T_1} - \frac{7(\gamma_1 - 1) + \beta_1(8 - 6\gamma_1)}{\gamma_1 - 1} - \frac{1 - \beta_1}{1 - \beta_2} \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 + \frac{\mu_1 \beta_1}{\mu_2 \beta_2} \frac{1 - \beta_2}{1 - \beta_1} \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^3 = B, \quad (7.14)$$

где при $F_\infty = 0$

$$B = \frac{2q\beta_1\mu_1}{RT_1} = -\frac{2\beta_1\mu_1\chi_H}{RT_1 m_H} (\alpha_2 - \alpha_1) = -2\beta_1 \frac{157800}{T_1} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2} - 1\right), \quad (7.15)$$

так как для чистого водорода $\mu = \frac{1}{1 + \alpha}$. Для достаточно сильных ударных

волн при скорости ударной волны $D \geq 70$ км/с степень ионизации за фронтом $\alpha_2 \approx 1$ (см. § 9), поэтому также $\mu_2 = 1/2$. В оболочках типа солнечной $\alpha_1 = 0, \beta_1 \approx 1$. Поэтому при температуре $T_1 = 5000$ К имеем $B = -63$.

Если сильная ударная волна движется в среде, состоящей из водорода, находящегося в молекулярном состоянии, то на ее фронте происходит диссоциация, затем ионизация газа. Поэтому в конечном итоге $\mu_1/\mu_2 = 4$, а параметр B определяется из первого равенства в (7.15) и соотношения (9.6) при потенциале диссоциации молекулы водорода $\chi_{H_2} = 4,477$ эВ. Если $T_1 = 2500$ К, то $B = -150$. Расчет степени ионизации и

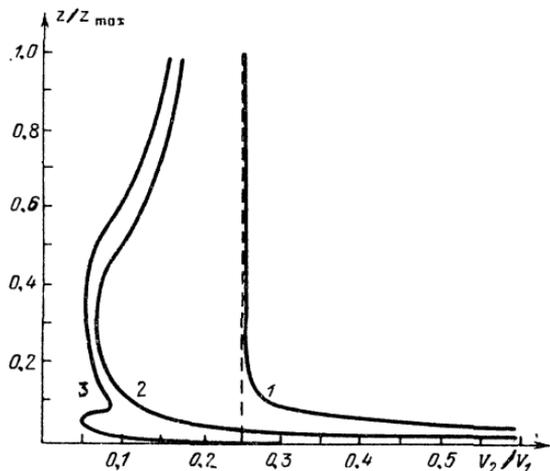


Рис. 19. Зависимость формы ударной адиабаты от начальной температуры среды при $N_1 = 10^{14} \text{ см}^{-3}$; кривые 1, 2 и 3 соответствуют температуре перед фронтом волны $T_1 = 10000, 5000$ и 1000 К .

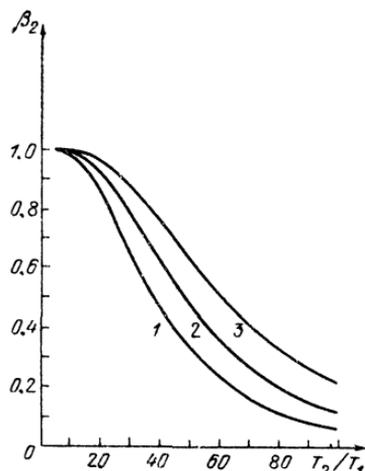


Рис. 20. Диаграмма $T - \beta_2$ смеси газ — излучение при $\beta_1 = 0,9999$.

диссоциации с достаточной степенью точности (см. § 9) можно провести по формулам Саха.

Ударная адиабата с учетом потерь энергии волны на ионизацию водорода при $T_1 = 5000 \text{ К}$ показана на рис. 18. Как видно, форма адиабаты в этом случае (кривая 2) существенно отличается от классической, сжатие на фронте при некоторой величине скачка давления P_2/P_1 в несколько раз больше, чем без учета потерь энергии на поглощение. Здесь асимптотическое значение величины скачка плотности $\rho_2/\rho_1 = 7$ достигается при $P_2/P_1 \rightarrow \infty$, причем ударная адиабата подходит к нему не "справа", а "слева".

Аналогичный вид имеет ударная адиабата при учете потерь энергии на диссоциацию водорода, но с той разницей, что на кривой в данном случае имеет место не один, а два перегиба. В целом зависимость вида ударной адиабаты от положения начальной точки (P_1, V_1) относительно областей диссоциации и ионизации водорода показана на рис. 19 для случая $N_1 = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, причем условно принято, что величина максимального скачка давления $z_{\text{max}} = (P_2/P_1)_{\text{max}}$ соответствует скорости волны $D = 100 \text{ км/с}$. При $T = 10\,000 \text{ К}$ (кривая 1, $z_{\text{max}} = 50,3$) начальная ионизация почти полная, поэтому ударная адиабата имеет классический вид. При $T_1 = 5000 \text{ К}$ (кривая 2, $z_{\text{max}} = 197,3$) потери энергии на ионизацию уже значительны, если же $T_1 = 1000 \text{ К}$ (кривая 3, $z_{\text{max}} = 2002,6$) величина скачка плотности дважды достигает наибольшего значения: при $D = 21,5 \text{ км/с}$ ($\rho_2/\rho_1 = 20,6$) и при $D = 58,5 \text{ км/с}$ ($\rho_2/\rho_1 = 18,0$), когда потери энергии на диссоциацию и ионизацию играют наибольшую роль. Подробнее проблема ионизационных волн рассматривается далее в § 9.

В свою очередь зависимость $T - \beta_2$ для $\beta_1 = 0,9999$ показана на рис. 20 при $\mu_2 = \mu_1, B = 0$ (1), $\mu_2 = \frac{\mu_1}{2}, B = -60$ (2) и $\mu_2 = \frac{\mu_1}{4}, B = -150$ (3).

Видно, что с увеличением скачка температуры (т.е. с увеличением скорости движения фронта волны) значение параметра β_2 (отношения газового давления к полному) за фронтом волны существенно уменьшается. Учет по-

теперь энергии волны на ионизацию газа (учет изменения молярной массы вещества за фронтом) приводит к заметному увеличению параметра β при одной и той же величине скачка температуры, которая определяется скоростью фронта ударной волны.

Очевидно, что в случае $\beta_2 = \beta_1 = 1$ имеем $K_1 = \gamma_1$ и $K_2 = \gamma_2$, а соотношения (7.8), (7.11) и (7.12) сводятся к известным уравнениям классической газодинамики.

Если же фронт ударной волны движется относительно фиксированной системы координат (центра звезды) со скоростью D , а газ перед фронтом движется относительно этой же системы со скоростью u_{10} , то для величин u_1 и u_2 будут верны соотношения

$$u_1 = u_{10} - D, \quad u_2 = u_{20} - D, \quad (7.16)$$

благодаря чему соответственно модифицируются уравнения (7.1) — (7.6).

§ 8. Скачки параметров на фронте ударной волны с излучением

При решении конкретных задач газодинамики состояние газа перед фронтом ударной волны (параметры P_1, ρ_1, T_1 , а следовательно, и скорость звука a_1) обычно считается известным. После того, как произведен расчет скорости движения фронта ударной волны или скачка давления на фронте (интенсивности или "силы" волны) P_2/P_1 , из законов сохранения на фронте можно определить все остальные параметры — ρ_2, T_2, u_2 . В газодинамике принято выражать скачки параметров на фронте ударной волны через число Маха $M = \frac{D}{a_1}$, где D — скорость волны относительно вещества перед фронтом ($D = -u_1$).

Однако газовое давление пропорционально первой, а лучистое — четвертой степени температуры T . Поэтому в случае ударных волн, для которых учет давления и плотности энергии излучения обязателен, уравнения сохранения относительно скачков разрешить в аналитическом виде невозможно. Таким образом, каждый отдельный случай движения ударной волны в среде с заданными параметрами требует хотя и принципиально несложных, но довольно громоздких расчетов.

Эти трудности удалось в значительной степени преодолеть после того, как согласно (1.14) был введен газодинамический показатель адиабаты K , а внутренняя энергия смеси газ — излучение в расчете на единицу массы вещества была представлена в виде (1.12). В результате из условий сохранения (7.1) — (7.3) удается получить выражения для скачков параметров, которые внешне полностью совпадают с выражениями классической теории ударных волн и которые допускают очевидный переход к этой теории в случае, когда эффектами излучения можно пренебречь (при $\beta \rightarrow 1$ имеем $K \rightarrow \gamma$). Для замыкания упомянутой системы (7.1) — (7.3) к ней прибавляется еще уравнение (7.13), связывающее параметр β (а следовательно, и показатель K) по обе стороны ударной волны.

При определении скачков параметров на фронте ударной волны разрешим прежде всего условия сохранения массы и импульса (7.1) — (7.2) относительно скачка давления,

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \Gamma_1 M^2 \left[1 + \frac{u_2}{D} \right], \quad (8.1)$$

где использовано соотношение $u_1 = -D$.

Далее используется условие сохранения энергии (7.3). Для общности в нем уместно сохранить член с Q (см. (7.8)), которым учитываются возможные потери энергии на фронте волны. После исключения из этого уравнения скорости движения вещества и учета соотношения (8.1), следует

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{\Gamma_1 M^2}{K_2 + 1} \left(1 - \frac{K_2}{\Gamma_1 M^2} \right) \times \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2(K_2 + 1)}{M^2 \left(1 - \frac{K_2}{\Gamma_1 M^2} \right)^2} \left[\frac{K_1 - K_2}{\Gamma_1 (K_1 - 1)} - (K_2 - 1) \frac{Q}{2a_1^2} \right]} \right]. \quad (8.2)$$

Здесь удобно ввести обозначение

$$\Delta = \frac{1}{2} \left[\sqrt{1 + \frac{2(K_2 + 1)}{M^2 \left(1 - \frac{K_2}{\Gamma_1 M^2} \right)^2} \left[\frac{K_1 - K_2}{\Gamma_1 (K_1 - 1)} - (K_2 - 1) \frac{Q}{2a_1^2} \right]} - 1 \right], \quad (8.3)$$

после чего выражения для скачков давления, плотности и скоростей движения перед и за фронтом ударной волны сводятся к виду

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{2\Gamma_1 M^2}{K_2 + 1} \left(1 - \frac{K_2}{\Gamma_1 M^2} \right) (1 + \Delta), \quad (8.4)$$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{V_2}{V_1} = 1 - \frac{2}{K_2 + 1} \left(1 - \frac{K_2}{\Gamma_1 M^2} \right) (1 + \Delta). \quad (8.5)$$

Скачок температуры на фронте ударной волны определяется очевидным выражением

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu_2 \beta_2 P_2 V_2}{\mu_1 \beta_1 P_1 V_1}$$

или, после подстановки (8.2) и (8.3),

$$\begin{aligned} \frac{T_2}{T_1} = & \frac{\mu_2 \beta_2}{\mu_1 \beta_1} \left(\frac{K_2 - 1}{K_2 + 1} \right)^2 \left[\frac{2K_1(K_2 + 1)}{(K_1 - 1)(K_2 - 1)} + \right. \\ & + \frac{\Gamma_1^2 M^4 - K_2(1 + 2\Gamma_1 M^2)}{(K_2 - 1)\Gamma_1 M^2} + \frac{K_2 + 1}{K_2 - 1} \frac{\Gamma_1 Q}{a_1^2} + \frac{1 + \Gamma_1 M^2}{\sqrt{\Gamma_1 M}} \times \\ & \left. \times \sqrt{\frac{\Gamma_1^2 M^4 + K_2^2(1 + 2\Gamma_1 M^2)}{\Gamma_1 M^2 (K_2 - 1)^2} - \frac{2K_1(K_2 + 1)}{(K_1 - 1)(K_2 - 1)} - \frac{K_2 + 1}{K_2 - 1} \frac{\Gamma_1 Q}{a_1^2}} \right] \quad (8.6) \end{aligned}$$

В эти уравнения входит еще параметр β . Поэтому система (8.4) – (8.6) дополняется уравнением (7.13), которое можно переписать и так:

$$\frac{1}{\Gamma_1 M^2} \left[\frac{1 - \beta_1}{1 - \beta_2} \left(\frac{T_2}{T_1} \right)^4 - 1 \right] = 1 - \frac{\mu_1 \beta_1 (1 - \beta_2)}{\mu_2 \beta_2 (1 - \beta_1)} \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^3. \quad (8.7)$$

В случае сильных ударных волн ($M \gg 1$) эта система уравнений значительно упрощается и при дополнительном условии $|Q| \gg a_1^2$ сводится

к виду

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\Gamma_1 M^2}{K_2 + 1} \left[1 + \sqrt{1 - \frac{(K_2^2 - 1)'}{D^2} Q} \right], \quad (8.8)$$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{K_2 - 1}{K_2 + 1} + \left[1 - \sqrt{1 - \frac{(K_2^2 - 1)'}{D^2} Q} \right] (K_2 + 1)^{-1}, \quad (8.9)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{K_2 - 1}{(K_2 + 1)^2} \frac{\mu_2 \beta_2}{\mu_1 \beta_1} \Gamma_1 M^2 \left[1 + \frac{K_2 + 1}{D^2} Q + \sqrt{1 - \frac{K_2^2 - 1}{D^2} Q} \right]. \quad (8.10)$$

Если потерями энергии на фронте ударной волны можно пренебречь, то при $Q = 0$ находим из (8.8) – (8.10)

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\Gamma_1 M^2}{K_2 + 1}, \quad (8.11)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{K_2 + 1}{K_2 - 1}, \quad (8.12)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2(K_2 - 1)}{(K_2 + 1)^2} \frac{\mu_2 \beta_2}{\mu_1 \beta_1} \Gamma_1 M^2, \quad (8.13)$$

тогда как уравнение (7.13) принимает вид

$$\left(\frac{\mu_1 \beta_1}{\mu_2 \beta_2} \right)^4 \frac{1 - \beta_2}{1 - \beta_1} = \left[\frac{2\Gamma_1 M^2}{K_2 + 1} \right]^3 \left(\frac{K_2 - 1}{K_2 + 1} \right)^4. \quad (8.14)$$

В случае сильной ударной волны параметр β_2 становится весьма малым, так что $K_2 \approx 4/3$. Поэтому из формулы (8.13) следует

$$T_2 \approx \frac{6\beta_2 \mu_2 D^2}{49R}. \quad (8.15)$$

Учитывая, что при $\beta_2 \ll 1$ $P_2 \sim \rho_{R2} \sim T_2^4$, из (8.11) можно непосредственно получить приближенную формулу для оценки температуры за фронтом ударной волны

$$T_2 \approx \left(\frac{9c\rho_1}{14\sigma} \right)^{1/4} D^{1/2}. \quad (8.16)$$

Как видно, для сильных ударных волн температура за фронтом увеличивается пропорционально корню квадратному из величины скорости движения волны.

Сравнивая соотношения (8.15) и (8.16), находим приближенную формулу для оценки параметра β_2 за фронтом сильной ударной волны

$$\beta_2 \approx \frac{49R}{6\mu_2} \left(\frac{9c\rho_1}{14\sigma D^6} \right)^{1/4} = 2,9 \cdot 10^{12} \frac{1}{\mu_2} \left(\frac{\rho_1}{D^6} \right)^{1/4}, \quad (8.17)$$

где ρ_1 – в г/см³, D – в см/с.

И, наоборот, если давлением и плотностью энергии излучения перед и за фронтом ударной волны можно пренебречь (т.е. при $\beta_2 = \beta_1 = 1$), то система (8.4) – (8.6) при $Q = 0$ и $\Gamma_1 = K_1 = K_2 = \gamma$ сводится к известным

уравнениям классической газодинамики

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{2\gamma M^2 - (\gamma - 1)}{\gamma + 1}, \quad (8.18a)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(\gamma + 1)M^2}{(\gamma - 1)M^2 + 2}, \quad (8.18б)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{[2\gamma M^2 - (\gamma - 1)][(\gamma - 1)M^2 + 2]}{(\gamma + 1)^2 M^2}. \quad (8.18в)$$

В частности, из (8.18 в) следует, что температура за фронтом сильной ударной волны без учета эффектов излучения при $\gamma = 5/3$ равна

$$T_2^* = \frac{3\mu_2 D^2}{16R}. \quad (8.19)$$

Сопоставляя выражения (8.15) и (8.19), находим, что величина

$$\tau = \frac{T_2}{T_2^*} = \frac{32(K_2 - 1)}{3(K_2 + 1)^2} \beta_2 \approx \frac{32}{49} \beta_2$$

для сильных ударных волн может быть существенно меньше единицы, так как $\beta_2 \ll 1$. Отсюда следует, что учет эффектов излучения за фронтом ударной волны важен прежде всего для правильного определения температуры T_2 . Это тем более существенно, что именно величиной температуры определяются все наблюдаемые эффекты, связанные с движением ударных волн в атмосферах звезд.

Вернемся к системе (8.11) — (8.14). Входящий в нее скачок молярной массы μ_2/μ_1 в первом приближении можно считать известным. Так, при движении сильной ударной волны в ионизованном водороде $\mu_2 = \mu_1$, в атомарном водороде за фронтом волны ионизация будет полной, поэтому $\mu_2/\mu_1 = 1/2$, аналогично в молекулярном водороде $\mu_2/\mu_1 = 1/4$. Для опре-

Таблица 2. Зависимость адиабатического показателя Γ , газодинамического показателя адиабаты K и функций $\Phi(\beta)$ и $\Psi(\beta)$ от параметра β при $\mu_2 = \mu_1$ и $\gamma = 5/3$

β	Γ	K	$\lg \Phi(\beta)$	$\lg \Psi(\beta)$
1,00	1,667	1,667	—	—
0,95	1,603	1,635	0,306	2,523
0,90	1,563	1,606	0,668	2,964
0,80	1,511	1,556	1,130	3,561
0,70	1,478	1,513	1,509	4,057
0,60	1,449	1,477	1,876	4,534
0,50	1,426	1,445	2,268	5,028
0,40	1,405	1,417	2,716	5,571
0,30	1,386	1,393	3,265	6,214
0,20	1,368	1,371	4,010	7,046
0,10	1,350	1,352	5,248	8,371
0,05	1,342	1,342	6,468	9,633
0,005	1,334	1,334	10,480	13,682
0,0005	1,333	1,333	14,582	17,788
0,00001	1,333	1,333	21,277	24,486

деления величины параметра β_2 уравнение (8.14) удобно переписать в виде

$$\Phi(\beta_1) M^6 = \Psi(\beta_2), \quad (8.20)$$

где

$$\Phi(\beta) = \frac{8\Gamma^3(1-\beta)}{\beta^4}, \quad \Psi(\beta) = \frac{(K+1)^7(1-\beta)}{(K-1)^4\beta^4} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^4.$$

Зная начальное распределение параметров в оболочке звезды, можно рассчитать значение функции $\Phi(\beta_1)$. Далее, задавая скорость движений ударной волны D (число Маха M) и отношение μ_2/μ_1 , можно найти величину функции $\Psi(\beta_2)$ и тем самым параметр β_2 и соответствующий ему газодинамический показатель адиабаты K_2 . После этого определяются все скачки параметров на фронте волны.

Значения функций $\Phi(\beta)$ и $\Psi(\beta)$ даны в табл. 2. Для расчетов их удобно изобразить графически. В частности, по уравнению (8.20) нетрудно построить номограмму для определения величины β_2 по заданному β_1 и M . Такая номограмма и приведена на рис. 21. Здесь принято $\gamma = 5/3$, $\mu_2 = \frac{1}{2}\mu_1$. По рассчитанным на основании исходных данных величинам M и $1 - \beta_1$ на средней шкале номограммы находим соответствующее им значение параметра β_2 , на этой же шкале указана и величина τ — отношение реальной температуры за фронтом ударной волны T_2 к величине T_2^* , которая находится по формуле (8.18в) и используется обычно в классической газодинамике.

При отношении молярных масс $\mu_2/\mu_1 = 1$ найденную на средней шкале точку следует поднять вверх (в сторону уменьшения параметра β) на величину отрезка δ , при $\mu_1/\mu_2 = 4$ — опустить вниз на δ . Далее по найденной величине β_2 нетрудно уже рассчитать показатели K_2 и Γ и по формулам (8.11) — (8.13) — скачки параметров на фронте ударной волны.

Для иллюстрации применимости полученных здесь решений и номограммы рассмотрим следующий пример. Пусть в среде с плотностью $\rho_1 = 3 \cdot 10^{-7} \text{ г/см}^3$ (это плотность в фотосфере Солнца), молярной массой $\mu_1 = 1$ и температурой $T_1 = 6000 \text{ К}$ движется ударная волна со скоростью $D = 100 \text{ км/с}$. Из (1.8) — (1.9) следует, что в данном случае $1 - \beta_1 = 2 \cdot 10^{-5}$ и при скорости звука $a_1 = 10 \text{ км/с}$ число Маха $M = 10$. На пересечении прямой, соединяющей заданные значения β_1 и M со средней шкалой номограммы, находим $\beta_2 = 0,992$ и $\tau = 0,99$. Таким образом, за фронтом такой ударной волны эффекты излучения еще мало существенны.

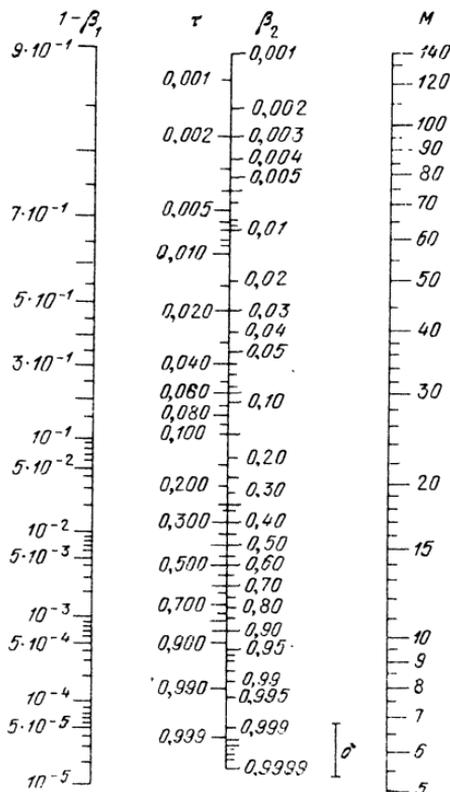


Рис. 21. Номограмма для расчета параметров β и τ за фронтом сильной ударной волны (в большем масштабе см. в конце книги).

Если в той же среде движется ударная волна со скоростью $D = 1000$ км/с ($M = 100$), то $\beta_2 = 0,15$ и $\tau = 0,10$. Здесь уже главную роль за фронтом играют эффекты излучения, а реальная температура за фронтом волны в 10 раз меньше величины T_2^* .

Для протяженных оболочек звезд-гигантов ($\rho_1 \approx 10^{-10}$ г/см³, $T_1 \approx \approx 3000$ К, $a_1 \approx 5$ км/с, $1 - \beta_1 \approx 0,01$) эффекты радиации становятся существенными и для ударных волн умеренной интенсивности.

Таким образом, введение газодинамического показателя адиабаты K смеси газ — излучение существенно облегчает решение задач об определении скачков параметров на фронте сильной ударной волны, движущейся в оболочке звезды. Полученные выражения для скачков параметров на фронте сильной ударной волны внешне похожи на обычные выражения классических ударных волн. Уместно, однако, еще раз подчеркнуть, что между соотношениями (8.4), (8.5) и соответствующими выражениями классической теории имеются существенные различия: 1) в первом случае под давлением подразумевается сумма давлений газа и излучения, 2) газодинамический показатель адиабаты K , входящий в соотношения (8.4) — (8.5), также является величиной, зависящей от величин скачков P_2/P_1 и V_2/V_1 , 3) равенство $K_2 = K_1$, часто предполагаемое в классической теории ударных волн (т.е. $\gamma_2 = \gamma_1$), не может иметь места в теории сильных ударных волн с излучением, так как при переходе через фронт волны параметр β изменяется, и 4) показатель адиабаты Γ не равен газодинамическому показателю адиабаты K , кроме крайних случаев (при $\beta = 1$ или $\beta = 0$).

В случае $\beta_2 = \beta_1 = 1$ и $\Gamma_1 = K_2 = K_1 = \gamma$ из (8.6) находим следующее выражение для скачка температуры на фронте ударной волны:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\gamma(\gamma-1)\mu_2}{(\gamma+1)^2\mu_1} \left\{ \frac{2}{\gamma-1} + \frac{\gamma M^4 - 1}{2\gamma M^2} - \frac{\gamma-1}{a_1^2} \left[\frac{\chi_H}{m_H} (\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{F_\infty}{\rho_1 D} \right] + \frac{1+\gamma M^2}{2\gamma M} \sqrt{\left(M - \frac{1}{M}\right)^2 + \frac{2(\gamma^2-1)}{a_1^2} \left[\frac{\chi_H}{m_H} (\alpha_2 - \alpha_1) + \frac{F_\infty}{\rho_1 D} \right]} \right\} \quad (8.21)$$

и при $\alpha_2 = \alpha_1$ и $M \gg 1$, $\gamma = 5/3$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{5M^2}{32} \frac{\mu_2}{\mu_1} \left[1 - \frac{16F_\infty}{3\rho_1 D^3} + \sqrt{1 + \frac{32F_\infty}{9\rho_1 D^3}} \right]. \quad (8.21')$$

Максимально возможную величину потока излучения с фронта ударной волны F_∞^{\max} нетрудно оценить из соотношений (7.1) — (7.3), принимая $\beta_2 = \beta_1 = 1$, $K_2 = K_1 = \gamma$, $\mu_2 = \mu_1$ и предполагая также, что за счет высвечивания температура волны уменьшается до ее значения перед фронтом, т.е. используя условие $T_2 = T_1$ (Г. Сен, А. Гэсс, 1960). В результате находим

$$F_\infty^{\max} = \frac{1}{2} \rho_1 D^3 \left[1 - \frac{1}{\gamma^2 M^4} \right] \leq \frac{1}{2} \rho_1 D^3 = F_r. \quad (8.22)$$

Как видно, величина потока лучистой энергии с фронта ударной волны в принципе не может превышать величину гидродинамического потока F_r . Ударную волну, для которой $F_\infty = F_r$ и $T_2 = T_1$, принято называть изотермической.

Из системы (8.1) – (8.2) при $P = p_G$ и $T_2 = T_1$ следует также величина скачка плотности на фронте изотермической ударной волны

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{D^2}{AT_1} = \gamma M^2. \quad (8.23)$$

Таким образом, на фронте изотермической ударной волны сжатие вещества может быть сколь угодно большим.

Представление об изотермической ударной волне в свое время получило широкое распространение в астрофизике, оно привлекалось для интерпретации спектральных особенностей переменных звезд типа RR Лиры, W Девы и др. Но, как это будет показано далее (§ 10), условия для превращения ударной волны в изотермическую выполняются лишь в исключительных случаях.

§ 9. Ионизационные и диссоциационные ударные волны

Потери энергии на диссоциацию и ионизацию газа играют существенную роль в теории ударных волн, движущихся со скоростями ~ 100 км/с во внешних слоях звезд красных гигантов и сверхгигантов. Уравнение ударной адиабаты и общие соотношения для скачков параметров на фронте ударной волны с учетом таких потерь приведены в §§ 7–8. Здесь мы более подробно остановимся на зависимости величины скачков параметров ρ_2/ρ_1 , ρ_2/ρ_1 и T_2/T_1 от скорости движения ударной волны для различных начальных значений плотности и температуры. При расчетах предполагалось, что оболочка состоит из чистого водорода и что давлением и плотностью энергии излучения за фронтом ударной волны можно пренебречь.

Вопрос о том, достигается за фронтом ударной волны термодинамически равновесное состояние или нет, является исключительно сложным. Его выяснение в каждом конкретном случае связано с решением задачи о структуре ударной волны (§ 10). Здесь же будут изложены данные о скачках параметров на фронте ударной волны в предположении, что при $N_1 \gtrsim 10^{14}$ см⁻³ при расчетах степени диссоциации и ионизации газа за фронтом ударной волны можно использовать формулу Саха.

Выражения для скачков параметров на фронте ударной волны следуют из соотношений (7.1) – (7.3) в предположении, что $p_R = E_R = \dot{F} = 0$. Очевидно, что число протонов в единице объема равно $N_p = 2N_{H_2} + N_H = 2N_{H_2} + N_{H^0} + N_{H^+}$, средняя же молярная масса такой смеси

$$\mu = \frac{2}{1 + b(1 + 2\alpha)}. \quad (9.1)$$

Здесь $b = \frac{N_H}{N_p}$ – степень диссоциации, $\alpha = \frac{N_{H^+}}{N_H}$ – степень ионизации.

Выражение для внутренней энергии в расчете на единицу массы с учетом энергии диссоциации и ионизации удобно записать в виде

$$E = \left\{ \frac{1-b}{2} \left[\frac{5}{2} + \frac{T_V}{T} \left(e^{\frac{T_V}{T}} - 1 \right)^{-1} \right] + \frac{3}{2} b(1+\alpha) \right\} RT + \frac{1}{2} bRT_D + b\alpha RT_H. \quad (9.2)$$

Здесь первым слагаемым учитывается энергия поступательного, вращательного и колебательного движений молекул, а также поступательного движения атомов, вторым и третьим — соответственно энергия диссоциации молекул и ионизации атомов водорода. При этом $T_V = hc\omega_e/k = 5,98 \cdot 10^3$ К, h — постоянная Планка, c — скорость света, k — постоянная Больцмана, ω_e — колебательная постоянная (К.У. Аллен, 1977), $T_D = \chi_D/k = 5,2 \cdot 10^4$ К, $T_H = \chi_j/k = 1,58 \cdot 10^5$ К, χ_D и χ_j — потенциалы диссоциации молекулы и ионизации атома водорода, R — газовая постоянная.

Введем эффективный показатель адиабаты γ так, чтобы соотношение (9.2) представить в виде

$$E = \frac{RT}{\mu(\gamma - 1)} + bR \left(\frac{1}{2} T_D + \alpha T_H \right) \quad (9.3)$$

при

$$\gamma = \frac{7 + 3b + 10b\alpha + 2(1 - b) \frac{T_V}{T} \left(e^{\frac{T_V}{T}} - 1 \right)^{-1}}{5 + b + 6b\alpha + 2(1 - b) \frac{T_V}{T} \left(e^{\frac{T_V}{T}} - 1 \right)^{-1}} \quad (9.4)$$

В случае, если $b = 1$, из (9.4) следует $\gamma = 5/3$.

Разрешая (7.1) — (7.3) относительно скачков параметров на фронте ударной волны при $p_R = E_R = 0$, $F = 0$, получаем следующее уравнение ударной адиабаты (см. также (7.8)):

$$\frac{z}{\eta_2} \frac{V_2}{V_1} - z + \frac{V_2}{V_1} - \frac{1}{\eta_1} = - \frac{2\gamma_1 q}{a_1^2} \quad (9.5)$$

Здесь $z = \frac{\rho_2}{\rho_1}$, $V_i = \frac{1}{\rho_i}$, $\eta_i = \frac{\gamma_i - 1}{\gamma_i + 1}$ ($i = 1, 2$), $a_1 = \sqrt{\gamma_1 \frac{\rho_1}{\rho_1}}$ — скорость звука перед фронтом волны и

$$q = b_2 R \left(\frac{1}{2} T_D + \alpha_2 T_H \right) - b_1 R \left(\frac{1}{2} T_D + \alpha_1 T_H \right) \quad (9.6)$$

— энергия, затрачиваемая на диссоциацию и ионизацию. Используя (8.1), находим следующие соотношения для скачков параметров на фронте ударной волны:

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\eta_1}{\eta_2} \frac{\eta_2 + z}{1 + \eta_1 z - \frac{2\gamma_1 \eta_1 q}{a_1^2}} \quad (9.7)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = z = 1 + \frac{\gamma_1 M^2}{\gamma_2 + 1} \left[1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1 M^2} + \sqrt{\left(1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1 M^2} \right)^2 + \frac{2(\gamma_1 - \gamma_2)(\gamma_2 + 1)}{\gamma_1(\gamma_1 - 1)M^2} + \frac{2(\gamma_2^2 - 1)q}{D^2}} \right] \quad (9.8)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu_2 \rho_2 \rho_1}{\mu_1 \rho_1 \rho_2} = \frac{\eta_2 \mu_2}{\eta_1 \mu_1} \frac{z}{z + \eta_2} \left[1 + \eta_1 z - \frac{2\gamma_1 \eta_1 q}{a_1^2} \right], \quad (9.9)$$

$$D = M a_1 = a_1 \sqrt{\frac{\eta_2 + z}{\gamma_1 \left[1 - \eta_2 + \frac{\eta_1 - \eta_2}{\eta_1(z-1)} + \frac{2\gamma_1 \eta_2 q}{a_1^2(z-1)} \right]}}. \quad (9.10)$$

При $q = 0$ и $\eta_2 = \eta_1$ эти соотношения сводятся к формулам (8.18) классической газодинамики. Для сильных ударных волн при $M \gg 1$ из (9.7) – (9.9) находим в случае $q \gg a_1^2$.

$$z = \frac{2\gamma_1 M^2}{\gamma_2 + 1} \left[1 + \frac{(\gamma_2^2 - 1)q}{2D^2} \right], \quad (9.11)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma_2 + 1}{\gamma_2 - 1} \left[1 + \frac{2(\gamma_2 + 1)q}{2D^2 - (3 - \gamma_2)(\gamma_2 + 1)q} \right], \quad (9.12)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{2\gamma_1(\gamma_2 - 1)\mu_2}{(\gamma_2 + 1)^2 \mu_1} M^2 \left[1 - \frac{(3 - \gamma_2)(\gamma_2 + 1)q}{2D^2} \right] \quad (9.13)$$

или при $\gamma_1 = \gamma_2 = 5/3$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = 4 \left[1 + \frac{24q}{9D^2 - 16q} \right], \quad (9.14)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{5\mu_2}{16\mu_1} M^2 \left[1 - \frac{16q}{9D^2} \right]. \quad (9.15)$$

Из этих соотношений следует, что потери энергии на диссоциацию и ионизацию газа приводят к увеличению сжатия на фронте ударной волны и к замедлению роста температуры по сравнению со случаем $q = 0$.

Результаты численного решения системы (9.7) – (9.9) с учетом термодинамически равновесных выражений для α и b (см. § 2) для скоростей ударной волны $a_1 < D \leq 100$ км/с приведены в табл. 3 и на рис. 22–24

Таблица 3. Зависимость степени ионизации за фронтом ударной волны и скачков параметров на фронте от скорости волны

D , км/с	$N_1 = 10^{14}$ см ⁻³ , $T_1 = 2500$ К			$N_1 = 10^{17}$ см ⁻³ , $T_1 = 5000$ К		
	α_2	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1	α_2	ρ_2/ρ_1	T_2/T_1
10	0,00	2,77	1,46	0,00	1,32	1,20
20	0,05	5,25	3,01	0,05	3,62	2,10
30	0,19	9,18	3,61	0,17	6,24	2,63
40	0,41	12,73	4,01	0,35	8,37	3,09
50	0,68	15,14	4,46	0,58	9,81	3,55
60	0,96	15,11	5,48	0,83	10,29	4,21
70	1,00	9,66	10,99	0,99	8,94	5,95
80	1,00	7,47	17,90	1,00	7,19	9,28
90	1,00	6,42	25,68	1,00	6,25	13,16
100	1,00	5,83	33,88	1,00	5,70	17,58

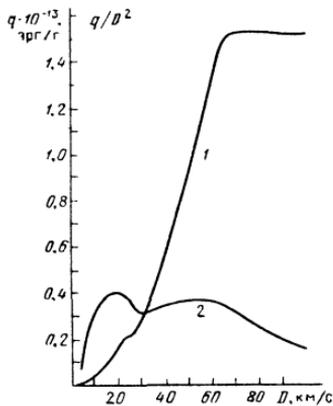


Рис. 22.

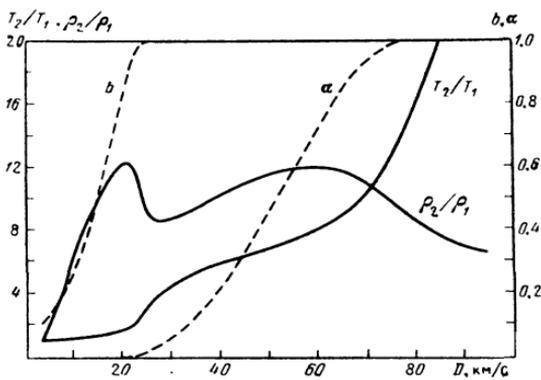


Рис. 23.

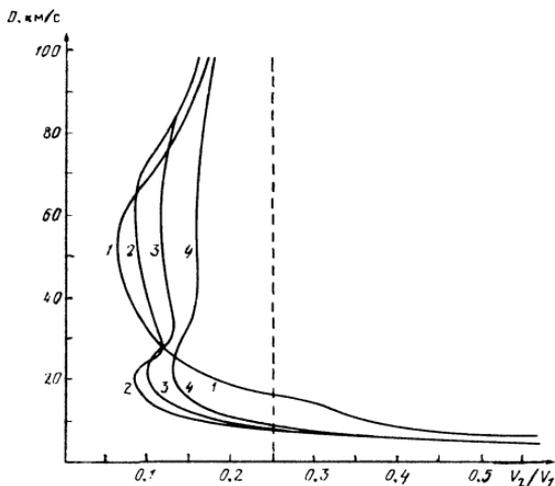


Рис. 24.

Рис. 22. Зависимость величины потерь энергии на фронте ударной волны q (кривая 1) и величины q/D^2 (2) от скорости фронта волны.

Рис. 23. Зависимость скачков плотности и температуры, степени диссоциации и ионизации за фронтом ударной волны от величины ее скорости при $T_1 = 2500$ К, $N_1 = 10^{17}$ см $^{-3}$.

Рис. 24. Зависимость формы ударной адиабаты от плотности среды при $T_1 = 2500$ К: кривая 1 — $N_1 = 10^{14}$, 2 — 10^{17} , 3 — 10^{19} и 4 — $N_1 = 10^{21}$ см $^{-3}$.

(Б.И. Гнатык, И.А. Климишин, 1981). Начальные значения температуры и плотности выбирались так, чтобы учесть все возможные случаи расположения начальной точки (T_1 , ρ_1) относительно областей диссоциации и ионизации (см. рис. 4).

На рис. 22 кривой 1 показана зависимость величины $q \cdot 10^{-13}$ эрг/г от скорости фронта ударной волны при $T_1 = 1000$ К и $N_1 = 10^{14}$ см $^{-3}$. Небольшое плато на кривой 1 при $D \approx 25$ км/с соответствует переходу от полной диссоциации к началу ионизации. При скорости $D = 65$ км/с величина q достигает значения $q = 1,53 \cdot 10^{13}$ эрг/г и при дальнейшем увеличении скорости D она остается неизменной. Величина отношения q/D^2 представлена кривой 2, форма которой соответствует ударной адиабате 3 на рис. 19, построенной при тех же начальных условиях.

На рис. 23 показаны результаты расчетов для случая $T_1 = 2500$ К, $N_1 = 10^{17}$ см $^{-3}$. Видно, что наибольшее сжатие достигается тогда, когда за фронтом ударной волны происходят процессы диссоциации (при $D = 15 \div 25$ км/с) или ионизации (при $D = 40 \div 70$ км/с). При этом максимум диссоциационного сжатия за фронтом ударной волны несколько больше

максимума ионизационного сжатия. Видно также, что процессы диссоциации и ионизации значительно уменьшают рост температуры за фронтом волны при увеличении ее скорости.

Зависимость величины скачка плотности от скорости ударной волны (а следовательно, от величины скачка давления на фронте $\frac{\rho_2}{\rho_1} \sim D^2$) для нескольких значений начальной плотности ρ_1 (концентрации N_1) показана на рис. 24. При $D \rightarrow \infty \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow \infty \right)$ становятся существенными давление и плотность энергии излучения за фронтом волны, поэтому $\frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow 7$.

При этом приближение к указанному пределу происходит слева, а не справа, как это имеет место в классической ударной адиабате (аналогом которой и является рис. 24), где потери энергии на ионизацию не учитываются. При $N_1 = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ (кривая 1) водород почти полностью находится в атомарном состоянии, поэтому незначительные потери энергии на диссоциацию проявляются в понижении ударной адиабаты при $D = 10 \div 15 \text{ км/с}$. Начальные точки в случае кривых 2–4 находятся в области молекулярного водорода. Поэтому для ударной адиабаты характерно наличие двух горбов, соответствующих наибольшему сжатию в результате потери энергии волны соответственно на диссоциацию газа за ее фронтом. С увеличением начальной плотности эти горбы расширяются и смещаются в сторону больших скоростей, а максимальное значение скачка плотности уменьшается.

В целом из расчетов следуют такие выводы:

1) При начальных значениях параметров газа $N_1 = 10^{14} \div 10^{17} \text{ см}^{-3}$ и $T_1 = 1000 \div 2000 \text{ К}$ процессы диссоциации за фронтом ударной волны происходят при скорости фронта $D = 10 \div 25 \text{ км/с}$, полная диссоциация наступает при $D \approx 25 \text{ км/с}$.

2) При $N_1 = 10^{14} \div 10^{17} \text{ см}^{-3}$ и $T_1 = 1000 \div 8000 \text{ К}$ ионизация водорода за фронтом ударной волны происходит при скоростях $D \approx 25 \div 70 \text{ км/с}$, полная ионизация наступает при $D \approx 70 \text{ км/с}$.

3) Величина наибольшего сжатия за фронтом ударной волны заключена в пределах 10–20, в зависимости от начальных условий; наибольшее сжатие, обусловленное процессами диссоциации, достигается при $D \approx 20 \text{ км/с}$, процессами ионизации — при $D \approx 60 \text{ км/с}$.

4) При заданной начальной температуре величина сжатия за фронтом ударной волны с увеличением плотности уменьшается.

5) С увеличением скорости ударной волны скачок давления на фронте растет быстрее, чем в случае $q = 0$.

§ 10. Структура ударной волны умеренной интенсивности

Как показал анализ механизма ударного сжатия, между двумя термодинамически равновесными состояниями газа — “перед” и “за” фронтом ударной волны — существует переходный слой, в котором параметры газа испытывают изменения, а само термодинамическое равновесие может нарушаться. Ширина этого переходного слоя (толщина фронта ударной волны или вязкого скачка) обусловлена диссипативными процессами (вязкостью и теплопроводностью), в результате которых происходит необратимое превращение механической энергии в тепловую и, как его следствие, резкое

увеличение температуры частиц. Протяженность вязкого скачка равна нескольким длинам пробега частицы.

Однако по мере роста амплитуды ударной волны (ее скорости) все большую роль в формировании структуры волны начинает играть поток излучения с фронта волны, прогревающий и ионизирующий впереди лежащий газ. Благодаря этому перед фронтом ударной волны образуется зона прогрева. В этом случае ширина фронта ударной волны определяется уже длиной пробега излучения — величиной, которая существенно превышает длину пробега частицы. Более того, в вязком скачке происходит нагрев лишь тяжелых частиц, поэтому за вязким скачком имеет место релаксация внутренних степеней свободы — происходит выравнивание электронной и ионной температуры, далее — ионизация и обратные процессы рекомбинации, уплотнение и охлаждение вещества благодаря высвечиванию энергии.

Задача о структуре ударной волны представляет интерес не только по теоретическим соображениям. Ее решение необходимо для правильной интерпретации наблюдений многих типов пульсирующих переменных звезд. Прогривная зона, образующаяся перед фронтом сильной ударной волны, задерживает излучение самого фронта, и на бесконечность уходят лишь кванты, излученные передним краем этой прогривной зоны. Температура этого переднего края и будет эффективной температурой ударной волны (см. § 12).

Важной проблемой структуры ударных волн умеренной интенсивности является, в частности, установление зависимости степени ионизации в прогривной зоне от расстояния до вязкого скачка. Заметное количество свободных электронов — ионизационное гало — образуется, например, перед летящим в земной атмосфере космическим аппаратом (см. А.Н. Пирри, Дж.Х. Кларк, 1969; Р.М. Нирем, Дж.Е. Дилли, 1970; В.А. Бронштэн, 1977). Это гало, радиус которого достигает нескольких десятков метров при концентрации в нем свободных электронов $N_e > 10^7 \text{ см}^{-3}$, затрудняет радарную идентификацию корабля и связь с ним. Свободные электроны наблюдаются и перед фронтом ударной волны в трубках, причем на протяжении нескольких лет обсуждались три различных источника этих электронов: 1) их диффузия из-за фронта ударной волны, 2) фотоионизация газа приходящими из-за фронта волны квантами и 3) фотоэмиссия электронов из стенок трубы. Выяснение истинной причины этого явления связано с большими трудностями, так что даже один и тот же автор получал экспериментальные данные, подтверждающие эффективность то первого, то второго из упомянутых механизмов Н.Д. Weymann, 1969; L.B. Holmes, H.D. Weymann, 1969).

В настоящее время нет сомнений в том, что "предшествующие" электроны образуются вследствие фотоионизации холодного газа перед ударной волной излучением, выходящим из-за фронта волны. В целом же в структуре ударной волны умеренной интенсивности принято условно выделять четыре зоны (рис. 25):

1) прогривная зона перед фронтом ударной волны, в которой степень ионизации по мере приближения к фронту нарастает за счет поглощения квантов лаймановского континуума, излучаемых фронтом;

2) переходная зона (вязкий скачок), в которой физические условия определяются вязкостью и теплопроводностью; в ней на протяжении нескольких длин пробега частицы температура тяжелых частиц T_i резко возрастает, тогда как электронная температура T_e еще остается неизменной;

3) зона, в которой происходит перераспределение энергии между тяжелыми и легкими частицами, сопровождаемое ионизацией газа, причем ионизационная релаксация является наиболее медленным процессом;

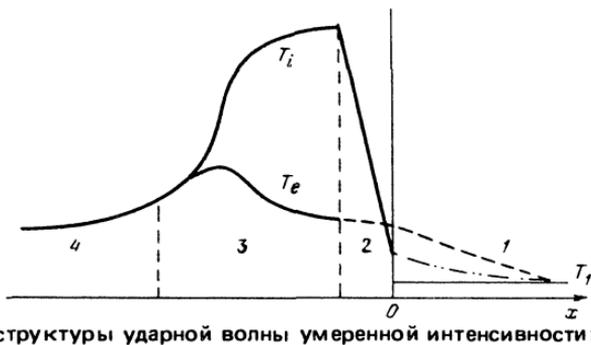


Рис. 25. Схема структуры ударной волны умеренной интенсивности: 1 — зона прогрева перед фронтом, 2 — вязкий скачок; 3 — зона релаксации, 4 — зона высвечивания.

4) зона, в которой происходят рекомбинации и, как их следствие, утечка энергии на бесконечность в бальмеровском и высших континуумах и спектральных линиях.

Из сказанного следует, что эта задача относится к числу самосогласованных. Так, L_c -кванты, выходящие из-за фронта ударной волны, поглощаются холодным газом перед фронтом, в результате чего здесь появляются свободные "затравочные" электроны. От их концентрации непосредственно перед фронтом зависит протяженность зоны релаксации и величина достигаемой в ней степени ионизации. Прогревающая зона экранирует фронт ударной волны, задерживая выходящее из-за него излучение. От величины же потока энергии, уходящего на бесконечность с переднего края зона прогрева, зависит конечное состояние газа за фронтом ударной волны.

Итак, корректное исследование задачи о структуре ударной волны требует одновременного расчета методом итераций параметров всех четырех зон. Связано это с огромными трудностями. Так, например, при расчете степени ионизации в зоне прогрева необходимо учитывать, что концентрация атомов на различных возбужденных уровнях, электронная и ионная температуры с расстоянием до вязкого скачка изменяются. Более того, о температуре перед фронтом ударной волны приходится говорить условно, так как термодинамического равновесия там может и не быть. Это значит, в частности, что распределение частиц (скажем, электронов) по скоростям не может быть описано функцией Максвелла.

Задача о структуре ударных волн умеренной интенсивности ($D \leq 100$ км/с), движущихся в аргоне, гелии, воздухе и водородной плазме, рассматривалась многими авторами (см. Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер, 1966; В.С. Имшенчик, 1962, 1975; J.H. Clarke, C.Ferrari, 1965; Е.В. Ступоченко, С.А. Лосев, А.И. Осипов, 1965; Y. Nakagawa, S.T. Wu, 1968; С.К. Chu, R.A. Gross, 1969; Л.М. Биберман, А.Х. Мнацаканян, И.Т. Якубов, 1970; A.V. Farnsworth, J.H. Clarke, 1971; Т. Minota, 1978; М.А. Цикулин, Е.Г. Попов, 1977; Т. Minota, Т. Murakami, 1977 и др.). В ряде работ (С.А. Whitney, A.J. Skalafuris, 1963; В.Г. Горбачкий, И.Н. Минин, 1963; В.И. Голинько, 1970; S. Narita, 1973; Т.А. Weaver, 1976) изложены результаты расчетов структуры ударных волн, движущихся в звездных атмосферах.

Структура ударной волны описывается системой уравнений, которая естественным образом следует из уравнения Больцмана для материальных частиц (Бай Ши-и, 1968; Т.С. Підстригач, 1965; В.Б. Баранов, К.В. Краснобаев, 1977). Пусть $f_n(r, u, t)$ — функция распределения частиц n -го сорта. При отсутствии внешних сил, действующих на частицу в промежутке между

столкновениями, она удовлетворяет следующему уравнению Больцмана:

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} + u \operatorname{grad} f_n = \left(\frac{\delta f_n}{\delta t} \right)_c. \quad (10.1)$$

Член, находящийся в правой части, называется интегралом столкновений. Им учитывается изменение числа частиц в единицу времени, обусловленное их столкновениями между собой, например, атомов с электронами, а также атомов и ионов с фотонами (тем самым учитываются процессы ионизации, рекомбинации и переходы на возбужденные уровни).

Структура ударной волны рассчитывается в стационарном приближении, т.е. на основе предположения, что на заданном расстоянии x от фронта волны параметры газа (функция распределения) не зависят от времени t . Поэтому $\frac{\partial f_n}{\partial t} = 0$ и уравнение Больцмана примет вид

$$u \operatorname{grad} f_n = \left(\frac{\delta f_n}{\delta t} \right)_c. \quad (10.2)$$

Обычно для f_n принимается максвелловская функция распределения вида (2.1). При этом используются предположения о том, что температуры атомов и ионов равны ($T_a = T_i = T$), что в области ионизации и выравнивания температур средние направленные скорости частиц можно считать одинаковыми ($u_a(x) = u_i(x) = u_e(x) = u$), а также, что массы атомов и ионов равны ($m_a = m_i$).

Соотношения (10.2) и (2.1) записываются отдельно для атомов, ионов и электронов. Уравнение (10.2), соответствующее каждому сорту частиц, умножается поочередно на 1, u_x и $\frac{m_n}{2} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)$ (для электронов еще дополнительно на u_x^2) и интегрируется по всем скоростям. В итоге находится система уравнений, выражающая законы сохранения потоков числа частиц n -го сорта, потока суммарного импульса, потока полной энергии системы частиц и, дополнительно, — уравнение, которым учитывается изменение потока энергии электронов. Для фотонного газа в итоге получается уравнение переноса излучения.

Для атмосферы, состоящей исключительно из водорода, числа атомов, ионов и электронов связаны очевидными соотношениями $N_e = N_i = N\alpha$, $N_a = N(1 - \alpha)$, где α — степень ионизации. Поэтому вместо трех уравнений для потока числа частиц достаточно использовать одно, скажем, для потока числа электронов. Вся же система уравнений, которыми описывается структура ударной волны, имеет вид

$$\frac{d}{dx} (N_e u) = N_a N_e S(T_e) - N_i N_e^2 Q(T_e), \quad (10.3)$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ N_e [kT_e + m_e u^2] + (N_i + N_a) [kT + m u^2] \right\} = 0, \quad (10.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left\{ N_e m_e u \left[\frac{u^2}{2} + \frac{5kT_e}{2m_e} \right] + (N_i + N_a) m u \left[\frac{u^2}{2} + \frac{5kT}{2m} \right] \right\} = \\ = -\sum_i \epsilon_i (N_e, T), \end{aligned} \quad (10.5)$$

$$\frac{d}{dx} \left[N_e m_e u \left(\frac{u^2}{2} + \frac{5kT_e}{2m_e} \right) \right] = \epsilon_e(N_e, T) = \frac{N_e k(T - T_e)}{\tau_{ie}}, \quad (10.6)$$

Здесь в соотношении (10.3) $S(T_e)$ — коэффициент ионизации, $Q(T_e)$ — коэффициент рекомбинации (§ 2). В правой части соотношения (10.5) учтены всевозможные потери энергии единицей объема в единицу времени: 1) на ионизацию газа электронным ударом, 2) на рекомбинации, 3) на возбуждение атомов электронным ударом, 4) на излучение при свободно-свободных переходах и (что существенно для разреженной межзвездной среды), 5) на излучение энергии в запрещенных линиях, т.е. на возбуждение метастабильных уровней.

Выражения для ϵ_i необходимо уточнять в каждом конкретном случае; частично они приведены в § 3. Соотношение (10.6) описывает увеличение энергии электронов за счет их столкновений с ионами (здесь — с протонами); характерное время релаксации температуры частиц уже было приведено ранее (формула (2.19)).

Система (10.3) — (10.6) дополняется системой (3.11) — (3.13), с учетом зависимости всех входящих в эти соотношения величин от частоты ν . В качестве граничных условий принимается, что перед фронтом ударной волны (при $x \rightarrow \infty$) скорость газа u равна скорости волны с обратным знаком, т.е. что $u = -D$ и $N = N_1$ ($\rho = \rho_1$), $T = T_1$, степень ионизации $\alpha = \alpha_1$ и $\epsilon_i = 0$. Если потери энергии на излучение отсутствуют, то при $x \rightarrow +\infty$ из системы (10.3) — (10.6) естественно следуют такие же конечные значения $N = N_2$ ($\rho = \rho_2$) и $T = T_2$, как и из соотношений (8.18).

Система (10.3) — (10.6) в полном ее объеме и с учетом всех возможных процессов диссипации энергии за вязким скачком все еще не решалась ни разу (отметим, что при ее численном интегрировании может оказаться удобным способ, разработанный Э.Э. Шнолем (1972)). Но если говорить о протяженности зоны релаксации за фронтом ударной волны (зона 3 на рис. 25) и распределении параметров в ней, то на основании уже имеющихся расчетов (В.Г. Горбацкий, 1961; И.А. Климишин, Б.М. Гүра, 1971; S. Narita, 1973), можно сделать такие выводы:

1) Непосредственно в вязком скачке происходит нагрев тяжелых частиц до температуры $T_{i0} = T_2 \approx \frac{3D^2}{16A}$. Далее в результате обмена энергией

между тяжелыми частицами и свободными электронами за время τ_{ie} (2.19) температура электронов T_e увеличивается в 3—5 раз по сравнению с температурой невозмущенного газа T_1 , после чего она уже несколько медленно нарастает, достигает максимума и затем уменьшается до некоторого квазиравновесного значения, при котором $T_e \approx T_i$. Так, при $N_1 = 10^{11} \text{ см}^{-3}$ и $D = 50 \text{ км/с}$ максимальное значение электронной температуры за фронтом волны при $T_1 = 5000 \text{ К}$, $T_{i0} = 60000 \text{ К}$ равно $T_{em} \approx 25300 \text{ К}$, конечное значение $T_e \approx T_i \approx 13600 \text{ К}$ (рис. 26). При $N_1 = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ $T_{em} \approx 27800 \text{ К}$, электронная и ионная температура при наибольшей степени ионизации достигают величины $T_e \approx T_1 \approx 20000 \text{ К}$. Как видно из рис. 26, основная часть процессов ионизации происходит после выравнивания температуры.

2) Максимальное значение степени ионизации определяется главным образом величиной скорости фронта ударной волны. При переходе к более плотным средам при той же скорости D степень ионизации несколько уменьшается.

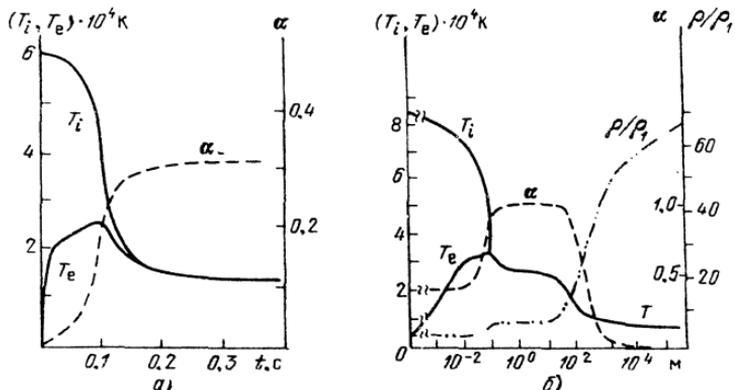


Рис. 26. Изменение со временем по мере удаления от вязкого скачка ионной (T_i) и электронной (T_e) температуры и степени ионизации (α) в зоне релаксации при $N_1 = 10^{11} \text{ см}^{-3}$, $D = 50 \text{ км/с}$, $T_1 = 5000 \text{ К}$, $\alpha_1 = 0,013$ (И.А. Климишин, 1972) (а) и при $\rho_1 = 10^{10} \text{ г/см}^3$, $T_1 = 1000 \text{ К}$, $\alpha_1 = 10^{-4}$, $D = 60 \text{ км/с}$ (S. Narita, 1973) (б).

3) Время t_m , за которое степень ионизации достигает максимума, при одной и той же концентрации частиц N_1 изменяется как $\frac{1}{D^n}$, причем, по-видимому, $n \geq 3$. После того, как t_m найдено из расчетов, нетрудно оценить протяженность зоны ионизационной релаксации $L \approx \frac{3}{4} D t_m$. Результаты уже имеющихся расчетов, однако, сильно различаются между собой, что, вероятно, объясняется различием в исходных предположениях. Так, если потерями энергии на излучение из-за фронта ударной волны пренебречь

(И.А. Климишин (1972)), то $t_m \sim \frac{1}{D^3}$ и

$$L \approx 20 \left(\frac{10^{14}}{N_1} \right) \left(\frac{5 \cdot 10^6}{D} \right)^2 \text{ м}, \quad (10.7)$$

где N_1 измеряется в см^{-3} и D — в см/с . Если же потери энергии на излучение из-за фронта волны значительны, так что при скоростях волны $D \geq 40 \text{ км/с}$ поток излучения с фронта составляет около 75% от гидродинамического потока или еще больше ($F_\infty \geq 0,75 F_{\text{гидр}}$), то (S. Narita, 1973)

$t_m \sim \frac{1}{D^9}$ и

$$L \approx 0,6 \frac{10^4}{N_1} \left(\frac{5 \cdot 10^6}{D} \right)^8 \text{ м}. \quad (10.7')$$

В обоих случаях предполагалось, что ударная волна движется в однородной атмосфере, состоящей из чистого водорода, и что атом водорода обладает двумя дискретными уровнями. Очевидно, что здесь необходимы дальнейшие расчеты.

4) При плотностях $\rho_1 \sim 10^{-13} \text{ г/см}^3$ ($N_1 \sim 10^{11} \text{ см}^{-3}$) главную роль в процессе ионизации водорода играют L_α -кванты, поглощаемые возбуж-

денными на второй уровень атомами. В разреженных слоях оболочек звезд этот процесс является весьма эффективным механизмом превращения L_α -квантов в кванты бальмеровского континуума. Как было показано В.Г. Горбацким (1961), именно поэтому время высвечивания такой среды в линии L_α имеет тот же порядок величины, что и в непрерывном спектре, если только оптическая толщина в бальмеровском континууме меньше единицы. С увеличением плотности среды роль L_α -квантов при ионизации водорода уменьшается. Так, если $N_1 = 10^{11} \text{ см}^{-3}$, то концентрация L_α -квантов в момент времени, соответствующий максимуму электронной температуры, всего на порядок меньше концентрации электронов в это же время ($N_{\alpha m} \approx 0,1 N_e$). При $N_1 = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ имеем уже $N_{\alpha m} \approx 10^{-5} N_e$, т.е.

$$N_{\alpha m} \sim \frac{1}{N_1}.$$

5) Степень ионизации в зоне релаксации в определенной степени зависит от концентрации "затравочных" электронов в зоне прогрева (зона 1 на рис. 25). Так, при $\alpha_1 \approx 0,013$ и $N_1 = 10^{11} \text{ см}^{-3}$, $D = 50 \text{ км/с}$ из расчетов следует $\alpha_3 \approx 0,32$. Если же $\alpha_1 = 0,13$, то при тех же параметрах задачи $\alpha_3 \approx 0,52$. В свою очередь степень ионизации в зоне прогрева определяется потоком L_c -квантов из-за вязкого скачка. Очевидно, что корректное решение задачи о структуре требует одновременного рассмотрения всех процессов, происходящих в зонах 1-4.

Такая попытка и была сделана в работе Уитни и Скалафуриса (С. Whitney, A.J. Skalafuris, 1963). Однако при рассмотрении радиационного охлаждения авторы, с одной стороны, не учитывали излучения в линиях, с другой же, — полагали газ полностью прозрачным для квантов лаймановского континуума. В результате такой переоценки потока энергии из-за фронта в лаймановском континууме степень ионизации в зоне прогрева будет завышенной в ряде случаев, по-видимому, более чем на порядок. Отметив это обстоятельство, И.Т. Якубов (1965) предложил другой приближенный метод оценки степени ионизации перед фронтом. Для расчета скорости охлаждения газа за фронтом энергия излучения водородной плазмы была вычислена с учетом всех радиационных процессов и реабсорбций излучения, подробный анализ которых дан в работе Л.М. Бибермана, В.С. Воробьева и Г.Э. Нормана (1963). Предполагая, что при скоростях волны $D \leq 60 \text{ км/с}$ газ за фронтом является оптически плотным для лаймановского континуума, и принимая, что в частотах этого континуума ($\nu \geq \nu_c$) фронт излучает как абсолютно черное тело, И.Т. Якубов получил выражение для определения степени ионизации непосредственно перед фронтом ударной волны в виде

$$\alpha(0) = \frac{2\pi\nu_c^2 k T_2}{c^2 h N_1 D} e^{-\frac{h\nu_c}{k T_2}} \left[1 + \frac{k T_2}{h\nu_c} \right]^2. \quad (10.8)$$

Здесь ν_c — частота кванта у предела лаймановской серии, T_2 — температура излучения, которая в первом приближении принимается равной температуре газа, найденной из законов сохранения на фронте ударной волны с учетом потерь энергии на ионизацию.

Но, как известно, если процессы рекомбинации доминируют, распределение энергии в спектре высвечивающейся плазмы не может быть аппроксимировано формулой Планка (3.5). Поэтому и формула (10.8) может быть использована в ограниченном диапазоне параметров задачи.

Выражение для оценки степени ионизации в зоне прогрева можно получить, исходя из расчета числа рекомбинаций электронов на основной уро-

вень в той части зоны высвечивания (зона 4 на рис. 25), оптическая толщина которой в лаймановском континууме, отсчитанная от вязкого скачка, порядка единицы (И.А. Климишин, 1973). Убедимся прежде всего, что зона высвечивания 4 быстро становится непрозрачной для излучения в лаймановском континууме. Пусть в момент $t = 0$ граница зон 3 и 4 прошла через фиксированный элемент объема. За время $t_p = \frac{1}{N_e \Sigma C_i}$ после этого в объеме рекомбинирует примерно половина всех свободных электронов. Объем этот в момент времени t_p будет находиться на расстоянии $u_1 t_p$ от границы 3—4. Отсчитанная от нее оптическая глубина этого объема в лаймановском континууме будет равной (при $N_4 u_4 = N_1 D$)

$$\tau_{L_1} = N_{H4} u_4 k_L t_p = \frac{k_L (1 - \bar{\alpha}_3) N_1 D}{N_e \Sigma C_i} \approx$$

$$\approx 1,5 \cdot 10^{-4} D \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{1 - \bar{\alpha}_3}{\bar{\alpha}_3} \approx 2 \cdot 10^{-4} D \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{4 - 3\alpha_2}{4\alpha_2}.$$

Здесь N_{H4} — число нейтральных атомов в зоне 4: $N_{H4} = N_4 (1 - \bar{\alpha}_3)$, средняя на рассматриваемом промежутке степень ионизации $\bar{\alpha}_3 = \frac{1}{2} [\alpha(t=0) + \alpha(t_p)] = \frac{3}{4} \alpha_2$, причем α_2 — степень ионизации непосредственно за границей 3—4 при $t = 0$, $k_L = 6 \cdot 10^{-18} \text{ см}^2$. При $D = 50 \text{ км/с}$, $\alpha_2 \approx 0,72$, $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 14,6$ имеем $\tau_{L_1} \approx 44$. Эта величина с ростом D увеличи-

вается. Это означает, что если даже в начальный момент времени высвечивающаяся среда и была прозрачна в лаймановском континууме, то со временем она становится непрозрачной для L_c -квантов. Поэтому здесь следует говорить не о высвечивании L_c -квантов, а о сложном процессе их диффузии по направлению к фронту ударной волны.

Суммарное количество L_c -квантов, образующихся в полубесконечной среде и выходящих на ее поверхность без поглощения (в расчете на единицу площади в единицу времени) равно, как известно, их числу, соответствующему количеству рекомбинаций в слое с оптической толщиной $\tau_L = 1$. В каждой единице объема такого слоя за единицу времени образуется $N_{L_c} = C_1 N_e^2$ квантов, где C_1 — коэффициент рекомбинации на 1-й уровень. Сюда же выходят и кванты, испытавшие одно или несколько поглощений. При температуре $T \approx 10000 \text{ К}$ вероятность выживания L_c -кванта после одного поглощения равна примерно $\lambda \approx 0,4$. Геометрическая протяженность зоны с оптической толщиной $\tau_L \approx 1$ равна

$$x_c \approx \frac{1}{k_L N_{H1}} \approx \frac{1}{k_L N_4 (1 - \alpha_2)}.$$

Поэтому поток выходящих на границу 3—4 L_c -квантов равен

$$F_{L_c} \approx \frac{1,67 C_1 \alpha_2^2 N_4}{k_L (1 - \alpha_2)}, \quad (10.9)$$

где $1,67 = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n$ — множитель, учитывающий относительное число L_c -квантов, испытавших в среде n поглощений, $C_1 \approx 2 \cdot 10^{-13} \text{ см}^3 \cdot \text{с}$.

При переходе L_c -квантов через зону ионизационной релаксации часть их поглощается в ней. Обозначим через α_1 степень ионизации водорода на границе 2-3 (рис. 25). Тогда средняя концентрация поглощающих частиц в зоне 3 будет равной $\frac{1}{2} [(1 - \alpha_1) + (1 - \alpha_2)] N_1 \approx \frac{1}{2} (2 - \alpha_2) N_1$, так как можно принять $\alpha_1 \approx 0$. Поэтому оптическая толщина этой зоны в лаймановском континууме равна

$$\tau_{3L} = \frac{1}{2} (2 - \alpha_2) N_1 k_L L. \quad (10.10)$$

Степень ионизации в зоне прогрева можно оценить следующим образом. Можно предположить, что падающий поток не меняет гидродинамического состояния зоны, т.е. что $\rho(x) = \text{const} = \rho_1$, $u(x) = \text{const} = -D$. В связанной с фронтом системе координат картина будет стационарной, поэтому $\frac{d}{dt} = -D \frac{d}{dx}$ и зависимость числа электронов в единице объема N_e от расстояния до фронта x запишется в виде

$$-D \frac{dN_e}{dx} = -\frac{dF_L(x)}{dx} + SN_H N_e - QN_e^3, \quad (10.11)$$

где S и Q — коэффициенты ионизации и рекомбинации (см. § 2), $F_L(x)$ — поток L_c -квантов, достигающий расстояния x . Если N_e мало, то из (10.11) следует выражение для степени ионизации в зоне прогрева

$$\alpha(x) = \frac{F_L(x)}{N_1 D} = \alpha(0) e^{-\tau}, \quad (10.12)$$

так как изменение потока L_c -квантов с расстоянием от вязкого скачка можно представить формулой $F_L(x) = F_L(0) e^{-\tau}$. Здесь оптическое расстояние от вязкого скачка $\tau = k_L \int_0^x N_H dx = k_L N_1 \int_0^x (1 - \alpha) dx$.

Из (10.7), (10.10) и (10.12) и следует выражение для оценки степени ионизации непосредственно перед фронтом ударной волны

$$\alpha(0) = \frac{3,9 \cdot 10^4}{D} \left(\frac{10^4}{T} \right)^{1/2} \frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\alpha_2^2}{1 - \alpha_2} \exp \left\{ -0,6(2 - \alpha_2) \left[\frac{5 \cdot 10^6}{D} \right]^2 \right\}. \quad (10.13)$$

Как видно, заметная степень ионизации перед фронтом ударной волны, обусловленная поглощением выходящих из-за вязкого скачка L_c -квантов, будет лишь при $\alpha_2 \approx 1$. Так, при $N_1 = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $D = 50 \text{ км/с}$, $T_1 = 5000 \text{ К}$, $T_2 = 11400 \text{ К}$, $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 14,58$ и $\alpha_2 = 0,72$ имеем $\alpha(0) \approx 0,087$.

Оценки, полученные по формуле (10.13), можно сопоставить с расчетами Кларка и Феррари (J.H. Clarke, C. Ferrari, 1965) структуры ударной волны в аргоне. Потенциал ионизации аргона $\chi_{A1} = 15,76 \text{ эВ}$, т.е. практически такой же, как и водорода. При $N_1 = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ и степени ионизации за

фронтом $\alpha_2 = 0,72 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} = 12,3 \right)$ путем сложных расчетов получено $\alpha(0) = 0,098$. В случае водородной атмосферы с $N_1 = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ степень ионизации $\alpha_2 = 0,72$ достигается при скорости ударной волны $D = 55 \text{ км/с}$, причем $\frac{\rho_2}{\rho_1} = 11,5$, $T_2 = 16400 \text{ К}$. Из (10.13) следует $\alpha(0) = 0,063$, тогда как из (10.8) $\alpha(0) = 0,035$. Причина расхождения между решениями (10.13) и (10.8) очевидна — число L_c квантов, образующихся при рекомбинациях в неравновесной горячей плазме заданной температуры $T \approx 10^4 \text{ К}$, больше, чем это следует из формулы Планка.

Если же $\alpha(0)$ близко к единице, то распределение степени ионизации в зоне прогрева следует находить путем решения уравнения (10.11), т.е. с учетом происходящих здесь процессов переизлучения L_c -квантов. Протяженность зоны прогрева, если $\alpha(0) < 1$, оценивается очевидным соотношением $x_{\Pi} \approx \frac{1}{k_L N_1}$. Для сильной ударной волны при $D \approx 100 \text{ км/с}$ найденная из (10.11) величина x_{Π} оказывается примерно в два раза большей.

С проблемой структуры зоны прогрева перед вязким скачком тесно связан вопрос о том, может ли ударная волна стать изотермической, если часть лучистой энергии уходит из-за вязкого скачка в виде L_c -квантов. Изотермичность ударной волны осуществляется при условии, что весь поток энергии волн, равный гидродинамическому, теряется необратимо. Таким образом, если L_c -кванты и поглощаются в зоне прогрева, то они должны быть трансформированы в кванты других частот и излучены раньше, чем через данный фиксированный объем пройдет ударный фронт. Расчет, однако, показывает, что при движении ударной волны умеренной интенсивности в неионизованной атмосфере картина будет как раз обратной. Так, характерное время рекомбинационной релаксации перед фронтом $t_p \approx \frac{1}{N_e C_1}$ остается больше времени t_{yB} , за которое ударная волна проходит расстояние, равное длине пробега кванта l_L , причем

$$t_{yB} \approx \frac{l_L}{D} \approx \frac{1}{k_L N_H D} \approx \frac{1,5 \cdot 10^{17}}{N_1 (1 - \alpha_{01}) D}$$

Здесь α_{01} — степень ионизации на оптическом расстоянии от фронта волны $\tau_L \approx 1$. Таким образом,

$$\frac{t_{yB}}{t_p} \approx \frac{3 \cdot 10^4}{D} \frac{\alpha_{01}}{1 - \alpha_{01}} \quad (10.14)$$

и $t_{yB} \ll t_p$ при всех $\alpha_{01} < 1$. Так, если $N_1 = 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $D = 50 \text{ км/с}$, $\alpha_{01} = 0,5$, то $t_{yB} \approx 0,0003 \text{ с} \ll t_p \approx 0,05 \text{ с}$. Таким образом, возникшие в определенном объеме зоны прогрева при поглощении L_c -квантов свободные электроны не успевают рекомбинировать до прохождения через этот объем фронта ударной волны. Поэтому в энергетическом балансе ударной волны этот поток L_c -квантов сохраняется.

Условия для превращения ударной волны в изотермическую умеренной интенсивности обеспечиваются при ее движении в разреженной межзвездной среде. В данном случае потери энергии на высвечивание связаны с воз-

буждением метастабильных уровней тяжелых элементов (С.А. Каплан, Т.С. Подстригач, 1965; Т.С. Підстригач, 1965, 1969).

Из всего сказанного здесь видно, что анализ задачи о структуре следует проводить путем совместного решения системы (10.3) — (10.6) и уравнения переноса излучения с учетом реальной зависимости интенсивности излучения I_ν от частоты ν и направления (угла θ , отсчитанного от нормали к фронту волны). С конца 60-х годов начата разработка методов осреднения уравнений переноса излучения — осреднение по углам с учетом истинного углового распределения излучения в определенные моменты времени (Т.А. Гермогенова, Т.А. Сушкевич, 1969; В.Я. Гольдин, Г.В. Данилова, Б.Н. Четверушкин, 1969) и дополнительно осреднение уравнений переноса излучения по энергиям квантов с учетом истинного спектрального состава излучения (И.В. Немчинов, 1970; И.В. Немчинов, В.В. Светцов, В.В. Шувалов, 1977).

Другим примером такого же подхода к проблеме является работа Клейна и др. (R.I. Klein, R.F. Stein, W. Kalkofen, 1976, 1978). Однако методика расчета (использован метод конечных разностей) не позволила авторам подробно изучить кинетику процессов, происходящих непосредственно за вязким скачком, так что в работе сразу использовалось предположение $T_e = T_i$. С другой же стороны, Уивер (Т.А. Weaver, 1976), хотя ему и удалось более подробно изучить структуру зоны Z , ограничился случаем сильно нагретого и плотного газа ($T_1 \geq 10^5$ К) и учитывал лишь потери энергии на тормозное излучение.

В заключение упомянем работу В.И. Голинько (1970), в которой для расчета потока излучения из-за фронта волны получено приближенное распределение температуры за вязким скачком на основе общих термодинамических соображений. В работе Л.М. Бибермана и Б.А. Векленко (1959) на основе теории нестационарной диффузии резонансного излучения показано, что важную роль в установлении величины степени ионизации в прогревной зоне может играть резонансное излучение в линии L_α .

И, наконец, упомянем о попытке использовать в газодинамике развитую В.В. Соболевым (1956) теорию нестационарного рассеяния света для расчета структуры ударной волны с излучением (С.А. Каплан, И.А. Климишин, 1964). Полученное решение, которым описывается распределение температуры в зоне прогрева, имеет вид

$$T(\tau) \approx T_- e^{-\frac{1}{4} k_0 \tau} \quad (10.15)$$

Здесь

$$k_0 = \frac{1}{2\nu} [\sqrt{1 + 4\nu^2} + 1],$$

$\nu = N_H k_L t_1 D$ — безразмерная скорость, $t_1 = \frac{1}{N_e \Sigma C_i}$ — время пребывания

кванта в поглощенном состоянии, T_- — температура непосредственно перед вязким скачком (см. § 11). Недостатком этого решения, по-видимому, является то, что вероятность выживания кванта после акта рассеяния предполагалась равной 100%, т.е. при его получении не учитывалась возможность перераспределения энергии в спектре излучения в различных точках зоны прогрева. Поэтому такое решение может быть использовано лишь в случае ударных волн умеренной интенсивности.

§ 11. Структура сильной ударной волны

Влияние потока излучения с фронта сильной ударной волны на распределение параметров газа перед и за ее фронтом уже изучено достаточно подробно. В частности, структура ударных волн, движущихся в атмосфере Земли, детально исследована Я.Б. Зельдовичем и Ю.П. Райзером (1966). Было установлено, что перед фронтом сильной ударной волны образуется протяженная прогревная зона, которая разделяется на две области — неравновесную и равновесную. В первой из них температура возрастает экспоненциально до значения T_K , при котором плотность излучения в единице объема сравнивается с равновесной, а лучистый поток $F_{л}$ — с гидродинамическим $F_{г}$, так что выполняется равенство

$$\frac{4\sigma T_K^4}{\sqrt{3}^3} = \frac{A\rho_1 D T_K}{\gamma - 1} \quad (11.1)$$

В равновесной области зоны прогрева излучение находится в локальном равновесии с веществом, а перенос излучения осуществляется лучистой теплопроводностью. Совместное решение уравнений переноса (в приближении лучистой теплопроводности) и уравнений гидродинамики приводит к следующей зависимости температуры в этой области от оптической глубины τ ($0 \leq \tau \leq \tau_K$):

$$T = T_K \left[1 + \frac{3\sqrt{3}}{4} (\tau_K - \tau) \right]^{1/3}, \quad (11.2)$$

где

$$\tau_K = \frac{4}{3\sqrt{3}} \left[\left(\frac{T_-}{T_K} \right)^3 - 1 \right], \quad (11.3)$$

и T_- — температура непосредственно перед вязким скачком. Профили температуры и плотности в системе координат, связанной с фронтом волны, показаны на рис. 27. Можно сказать, что в случае сильной ударной волны перед вязким скачком движется тепловая волна, образованная вследствие поглощения квантов света, выходящих из-за фронта волны.

В типичных для звездных атмосфер условиях при $\rho_1 \leq 10^{-7}$ г/см³ величина T_K часто оказывается меньше температуры невозмущенного газа ($T_K \leq T_1$). Например, при $\rho_1 = 10^{-8}$ г/см³ и скорости ударной волны $D = 50$ км/с находим из (11.1) $T_K \approx 4600$ К. Другими словами, в звездных атмосферах в подавляющем большинстве случаев перед фронтом ударной волны неравновесной области в зоне прогрева вообще нет.

Всесторонний анализ задачи о структуре фронта ударной волны с учетом эффектов излучения дан в работе В.С. Имшенника и Ю.И. Морозова (1964) и в нескольких других статьях В.С. Имшенника (1962 а, 1962 б, 1975) и Ю.И. Морозова (1971). Приближенное ее решение дано в нашей работе (И.А. Климишин, 1968).

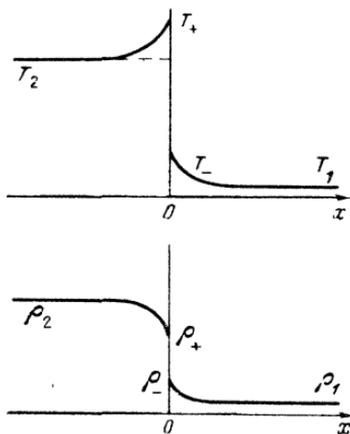


Рис. 27. Профили температуры и плотности в ударной волне докритической амплитуды.

При решении задачи о структуре ударной волны в общем случае, когда существен вклад излучения в давление и энергию среды (а не только его роль в лучистом теплообмене), В.С. Имшеник и Ю.И. Морозов исходили из уравнения переноса (3.8) и вытекающих из него в приближении Эддингтона соотношений (3.13) – (3.15), в которых учтено движение вещества. При этом законы сохранения массы, импульса и энергии, выполняющиеся в текущей точке пространства, удобно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \rho u &= \rho_1 u_1, \\ \rho_G + \rho u^2 + \bar{K} &= \rho_{G1} + \rho_1 u_1^2 + \bar{K}_{p1}, \\ \left[\frac{\gamma \rho_G}{(\gamma - 1) \rho} + \frac{u^2}{2} \right] \rho u + F &= \left[\frac{\gamma \rho_{G1}}{(\gamma - 1) \rho_1} + \frac{u_1^2}{2} \right] \rho_1 u_1 + F_{p1}. \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

Здесь F – поток энергии излучения и $\bar{K} = \frac{4\pi}{c} K$ – плотность потока импульса излучения, F_p и \bar{K}_p – их равновесные значения, определяемые соотношениями (3.10) и (3.16). Индексом "1" обозначены величины, соответствующие бесконечно удаленным точкам перед фронтом ударной волны. Напомним, что фиксированная система отсчета связывается с вязким скачком. При записи уравнения (3.8) предполагалось, что коэффициент поглощения излучения не зависит от частоты, эффекты рассеяния излучения не учитывались.

Для сильной ударной волны $T_1 \ll T_2$ (T_2 – значение температуры в бесконечно удаленной точке за фронтом). Поэтому с достаточной степенью точности можно положить $T_1 = 0$. Тем самым мы пренебрегаем давлением и плотностью энергии невозмущенного газа ρ_{G1} и $\rho_1 E_{G1}$ по сравнению с динамическим давлением газа $\rho_1 D^2$. Для анализа задачи удобно величины, входящие в систему (3.14) – (3.15), представить в безразмерном виде, так что

$$\left. \begin{aligned} B &= \frac{AT_2}{D^2}, \quad q = \frac{D}{c}, \quad \eta = \frac{\rho_1}{\rho}, \quad r = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \\ t &= \frac{T}{T_2}, \quad \delta_1 = \frac{8\sigma T_2^4}{3c\rho_1 D^2}. \end{aligned} \right\} \quad (11.5)$$

и далее

$$J' = \frac{8\pi J}{c\rho_1 D^2}, \quad F' = \frac{2F}{c\rho_1 D^2}, \quad K' = \frac{8\pi K}{c\rho_1 D^2} \quad (11.6)$$

В результате несложных преобразований система (11.4), (3.14) – (3.15) с учетом соотношения (1.1) сводится к виду

$$Bt = \eta \left[1 - \eta - \frac{K'}{2} \right], \quad (11.7)$$

$$F' = \frac{q}{r} \left[(1 - \eta)(\eta - r) - K'\eta \frac{1+r}{2} \right], \quad (11.8)$$

$$\frac{dK'}{dt} = - [F' + q\eta(K' + 3\delta_1 t^4)], \quad (11.9)$$

$$\frac{dF'}{dt} = - 3(K' - \delta_1 t^4) - q\eta F'. \quad (11.10)$$

Граничными условиями для F' и K' за фронтом ударной волны являются соотношения (3.16), так что

$$K' |_{\tau=-\infty} = \delta_1, \quad F' |_{\tau=-\infty} = -4q\eta_1\delta_1, \quad t = 1, \quad (11.11)$$

причем $\eta_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ — величина предельного сжатия. Если теперь подставим (11.11) в (11.7) и (11.8), то получим в безразмерном виде условия Гюгонио, выполняющиеся на фронте ударной волны,

$$\frac{r(1-\eta_1)(1-7\eta_1)}{1-7r} = B, \quad \frac{2(1-\eta_1)(\eta_1-r)}{\eta_1(1-7r)} = \delta_1. \quad (11.12)$$

Величины B и δ_1 существенно положительные. Поэтому из (11.12) следует, что при $r \ll 1/7$ выполняется также неравенство

$$r \leq \eta_1 \leq \frac{1}{7}, \quad (11.13)$$

и наоборот, при $r \gg 1/7$

$$\frac{1}{7} \leq \eta_1 \leq r. \quad (11.14)$$

Последнее имеет место в случае одноатомного газа с $\gamma = 5/3$ и $r = 1/4$. Далее из (11.12) следует такой вывод: если за фронтом ударной волны излучение играет главную роль ($K \gg \frac{2Bt}{\eta}$), то

$$B \approx 0, \quad \eta_1 \approx \frac{1}{7}, \quad \delta_1 \approx \frac{12}{7}. \quad (11.15)$$

Попутно отметим, что из последнего равенства (при $p_2 = p_R$) следует зависимость температуры за фронтом сильной ударной волны от ее скорости D в виде (8.16). Если же роль излучения ничтожно мала, то из (11.12) находим

$$\delta_1 \approx 0, \quad B \approx r(1-r), \quad \eta_1 \approx r, \quad (11.16)$$

откуда следует $T_2 \sim D^2$.

Система уравнений (11.7) — (11.10), описывающих структуру сильной ударной волны, должна решаться при следующих граничных условиях:

$$K' = F' = t = 0, \quad (11.17)$$

при $\tau = \infty$, что соответствует начальному состоянию невозмущенного газа, и

$$K' = \delta_1, \quad F' = -4q\eta_1\delta_1, \quad (11.18)$$

а также

$$t = 1, \quad \eta = \eta_1 \quad (11.19)$$

при $\tau = -\infty$ (конечное равновесное состояние за фронтом волны).

Исследование системы (11.7) — (11.10) проведено В.С. Имшенником и Ю.И. Морозовым (1964) и В.С. Имшенником (1975). Решения для неравновесной области (расстояния от фронта ударной волны $\tau > \tau_K$) нахо-

дятся при очевидном условии, что плотность излучения, приходящего из нагретых областей, существенно больше равновесной плотности излучения в данной точке или что $K' \gg \delta_1 t^4$. Поэтому если в (11.9) и (11.10) пренебречь членом $\delta_1 t^4$ и членами, содержащими q , то нетрудно получить такое решение,

$$K' = \text{const } e^{-\sqrt{3}\tau}. \quad (11.20)$$

и

$$F' = \sqrt{3}K', \quad (11.21)$$

которое соответствует экспоненциальному нарастанию температуры от $T = 0$ до $T = T_{\text{к}}$, как и в случае земных ударных волн.

В равновесной области перед вязким скачком излучение находится в локальном термодинамическом равновесии с веществом, поэтому имеем $K' = \delta_1 t^4$ и система (11.7) – (11.10) может быть записана в следующем виде (приближение лучистой теплопроводности):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} (\delta_1 t^4) &= -\frac{q}{r} \left[(1 - \eta)(\eta - r) - \delta_1 t^4 \eta \frac{1 - 7\eta}{2} \right], \\ F' &= \frac{q}{r} \left[(1 - \eta)(\eta - r) - \delta_1 t^4 \eta \frac{1 + r}{2} \right], \\ \eta &= \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \delta_1 t^4 + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2} \delta_1 t^4\right)^2 - 4Bt} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (11.22)$$

Анализ этой системы показывает, что по мере приближения к вязкому скачку (при $\tau \rightarrow 0$) роль эффектов излучения все возрастает. Из дифференциального уравнения системы (11.22) следует, что протяженность равновесной зоны прогрева по порядку величины равна

$$\tau_{\text{к}} \approx \frac{\delta_1}{q} = \frac{8\sigma T_2^4}{3\rho_1 D^3} \rightarrow \frac{12c}{7D}, \quad (11.23)$$

причем указанный предел соответствует экстремально сильным ударным волнам.

В области за вязким скачком ($\tau < 0$) плотность излучения постоянна и равна предельной: $J' = J'_1 = 3\delta_1$, хотя вблизи вязкого скачка равновесная плотность излучения $J' = 3\delta_1 t^4$ может не быть равной ей. Полагая $K' = \delta_1$ и пренебрегая производной $\frac{dK'}{dt}$, а также вторым членом в правой части (11.10), имеющим порядок малости q^2 , можно свести систему (11.7) – (11.10) к виду

$$\left. \begin{aligned} Bt &= \eta \left(1 - \eta - \frac{1}{2} \delta_1 \right), \\ F' &= \frac{q}{r} \left[(1 - \eta)(\eta - r) - \frac{1}{2} (1 + r) \eta \delta_1 \right], \\ \frac{dF'}{d\tau} &= -3\delta_1 (1 - t^4), \end{aligned} \right\} \quad (11.24)$$

откуда следует дифференциальное уравнение

$$\frac{d\eta}{d\tau} = \frac{3\delta_1 r}{2q} \frac{1 - \tau^4}{\eta + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \delta_1 - 1 \right) (1 + r)}. \quad (11.25)$$

Заменяя, как и раньше, производную в левой части уравнения (11.25) отношениями самих величин $\frac{d\eta}{d\tau} \sim \frac{\eta}{\tau}$, находим, что за вязким скачком оптическая толщина температурного пика по порядку величины равна

$$\tau_3 \approx \frac{q}{\delta_1} \approx \frac{1}{\tau_k}, \quad (11.26)$$

т.е. она обратна оптической толщине равновесной области перед вязким скачком.

Особый интерес представляет определение условий, при которых происходит замена разрывного решения непрерывным. Как и на рис. 27, обозначим параметры непосредственно перед и за вязким скачком соответственно знаками $-$ и $+$. В этом случае при переходе через вязкий скачок поток излучения F , средняя интенсивность излучения J и поток импульса K меняются непрерывно,

$$F_- = F_+, \quad J_- = J_+, \quad (11.27)$$

причем также $T_+ = T_2$ ($t_+ = 1$). В итоге из (11.22) и (11.24) при условии равенства потоков находим следующее соотношение между скачками плотности перед (η_-) и за фронтом (η_+) волны:

$$\eta_-^2 - (1 + r) \left(1 - \frac{1}{2} \delta_1 \right) \eta_- = \eta_+^2 - (1 + r) \left(1 - \frac{1}{2} \delta_1 \right) \eta_+. \quad (11.28)$$

Отсюда следуют два решения:

$$\eta_+^{(1)} = (1 + r) \left(1 - \frac{1}{2} \delta_1 \right) - \eta_-, \quad \eta_+^{(2)} = \eta_-. \quad (11.29)$$

Первое из них соответствует скачку плотности, второе — ее непрерывному изменению при переходе через вязкий скачок. Условие, при котором происходит замена разрывного решения непрерывным, следует из (11.29), если там положить $\eta_+ = \eta_- = \eta^*$ (звездочкой будем обозначать параметры на границе между разрывным и непрерывным решениями):

$$\eta^* = \frac{1}{2} (1 + r) \left(1 - \frac{1}{2} \delta_1^* \right). \quad (11.30)$$

Кроме (11.30), величины η^* и δ_1^* должны удовлетворять второму условию Гюгонио (11.12). Совместное решение этих двух уравнений при заданном r однозначно определяет η^* и δ_1^* , так что

$$\eta^* = \frac{4r(1+r)}{15r-1} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{15r-1}{16r(1+r)}} \right]. \quad (11.30')$$

Подставляя найденное η^* в (11.12), находим δ_1^* и B^* . В частности, при $r = 1/4$ ($\gamma = 5/3$) имеем $\eta^* = 0,150$, $\delta_1^* = 1,52$, $B^* = 0,0134$.

Рис. 28. Профили температуры и плотности в ударной волне сверхкритической амплитуды.

Оказывается, что разрыв плотности на вязком скачке существует, если выполняется неравенство

$$B > B^* = \eta^{*2} \frac{1-r}{1+r} = \frac{1}{\gamma} \eta^{*2}, \quad (11.31)$$

и исчезает при $B \leq B^*$. Условие $B = B^*$ означает, что скорость вещества за фронтом ударной волны u_2^* (относительно фронта) равна адиабатической скорости звука в газе (без учета вклада равновесного излучения в уравнение состояния) (В.С. Имшенник, 1962 а, 1975). В более ранней работе В.А. Белоконь (1959) рассмотрел исчезновение скачка, опираясь на приближение лучистой теплопроводности, которое приводит к несколько большему расчетному значению η^* . В этом приближении критерием исчезновения скачка служит равенство между u_2^* и изотермической скоростью звука, а не адиабатической, как в описанном выше более точном анализе.

Таким образом, для сильных ударных волн температура и плотность при переходе через вязкий скачок меняются непрерывным образом (рис. 28). Это имеет место при плотности $\rho_2 = \frac{1}{\eta^*} \rho_1 = 6,68 \rho_1$ и температуре

$$T_* = \sqrt[3]{\frac{3\delta_1^*}{2B^*} \frac{R\rho_1}{\mu_1 a_R}} \approx 1,23 \cdot 10^8 \sqrt[3]{\frac{\rho_1}{\mu_1}} \text{ К}, \quad (11.32)$$

соответствующую движению ударной волны со скоростью

$$D_* = \sqrt{\frac{RT_*}{B^* \mu_1}} = 8,72 \cdot 10^3 \sqrt[6]{\frac{\rho_1}{\mu_1}} \text{ км/с}. \quad (11.33)$$

При $D > D_*$ на фронте волны выполняются равенства $\rho_- = \rho_2$ и $T_- = T_+ = T_2$.

Величина T_* в четыре раза больше температуры, при которой давление излучения сравнивается с газовым. В атмосфере Солнца при плотности $\rho_1 = 10^{-7} \text{ г/см}^3$ и $\mu_1 = 1$ находим, что $T_* = 570\,000 \text{ К}$ и $D_* = 600 \text{ км/с}$. Если $\rho_1 = 10^{-10} \text{ г/см}^3$, то $D_* = 190 \text{ км/с}$.

Перейдем теперь к изложению приближенного решения задачи о структуре сильной ударной волны, в предположении, что функция источника перед и за вязким скачком может быть аппроксимирована выражениями

$$\left. \begin{aligned} B_a(\tau) &= \frac{\sigma}{\pi} T_a^4(\tau) = \frac{\sigma}{\pi} [(T_-^4 - T_1^4)e^{-\alpha_1 \tau} + T_1^4], & 0 < \tau < \infty, \\ B_b(\tau) &= \frac{\sigma}{\pi} T_b^4(\tau) = \frac{\sigma}{\pi} [(T_+^4 - T_2^4)e^{\alpha_2 \tau} + T_2^4], & -\infty < \tau < 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.34)$$

Здесь α_1 и α_2 — постоянные, определяемые из граничных условий. При $\tau = \pm\infty$ аппроксимация (11.34) естественным образом представляет температуру на значительном удалении от фронта ударной волны.

Структура фронта сильной ударной волны находится путем решения системы уравнений, рассмотренных ранее. Это условие сохранения массы, импульса и энергии, уравнение состояния и уравнение переноса излучения. Здесь запишем законы сохранения с учетом давления и плотности энергии излучения (полное давление $P = p_G + p_R$, внутренняя энергия в расчете на единицу массы $E = E_G + E_R$):

$$\left. \begin{aligned} \rho u &= -\rho_1 D, \\ P + \rho u^2 &= P_1 + \rho_1 D^2, \\ \rho u \left[E + \frac{P}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right] + F &= -\rho_1 D \left[E_1 + \frac{P_1}{\rho_1} + \frac{D^2}{2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (11.35)$$

Как и раньше, величины, обозначенные индексом "1", соответствуют бесконечно удаленным точкам перед вязким скачком, где поток с фронта $F = 0$. Величины без индекса относятся к любой промежуточной точке.

Рассмотрим прежде всего случай, когда за вязким скачком давлением и плотностью излучения можно пренебречь. Физическое состояние газа в каждой текущей точке перед фронтом волны изменяется под действием падающего потока излучения так, что в каждой точке перед вязким скачком выполняются условия (11.35) при $p_R = E_R = 0$.

Введем, как и раньше, обозначения

$$\eta = \frac{\rho_1}{\rho}, \quad r = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}.$$

В результате после несложных преобразований из (11.35), положив предварительно $p_R = 0$, находим

$$T = T_1 \eta \left[1 + \frac{D^2}{AT_1} (1 - \eta) \right], \quad (11.36)$$

$$F = \rho_1 D^3 \frac{1 - \eta}{2r} \left[(\eta - r) - (1 + r) \frac{AT_1}{D^2} \right]. \quad (11.37)$$

Исключая из этих уравнений η и пренебрегая высшими порядками величины $AT_1/D^2 \sim 1/M^2$, т.е. считая волну достаточно сильной, находим выражения для потоков перед и за фронтом ударной волны,

$$F_- = \frac{A\rho_1 D}{2} \frac{1 - r}{r} (T_- - T_1), \quad (11.38)$$

$$F_+ = \frac{(1 - r)A}{2r(1 - 2r)} D\rho_1 (T_+ - T_2), \quad (11.39)$$

причем

$$T_2 = r(1 - r) \frac{D^2}{A}. \quad (11.40)$$

Поток лучистой энергии с фронта ударной волны находится путем решения уравнений моментов (3.17) — (3.18) при граничных условиях (3.19) и условиях непрерывности характеристик поля излучения при переходе через вязкий скачок (11.27). Потребуем также, чтобы в точке $\tau = 0$ лучис-

тые потоки были равны гидродинамическим, а также чтобы были равны производные этих потоков в точке $\tau = 0$:

$$F_a(0)_Г = F_a(0)_Л; F_b(0)_Г = F_b(0)_Л,$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dF_{aГ}}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = \frac{dF_{aЛ}}{d\tau} \Big|_{\tau=0}; \frac{dF_{bГ}}{d\tau} \Big|_{\tau=0} = \frac{dF_{bЛ}}{d\tau} \Big|_{\tau=0} \end{aligned} \right\} \quad (11.41)$$

Поток излучения $F_Л$ находится после приведения системы (3.17) к одному дифференциальному уравнению второго порядка:

$$\frac{d^2 F}{d\tau^2} - 3F - 4\pi \frac{dB}{d\tau} = 0. \quad (11.42)$$

Воспользовавшись представлением (11.34), находим решения

$$F_a = C_1 e^{-\sqrt{3}\tau} + \frac{4\sigma\alpha_1 [T_-^4 - T_1^4]}{3 - \alpha_1^2} e^{-\alpha_1\tau}, \quad (11.43)$$

$$F_b = C_2 e^{\sqrt{3}\tau} + \frac{4\sigma\alpha_2 [T_+^4 - T_2^4]}{\alpha_2^2 - 3} e^{\alpha_2\tau}. \quad (11.44)$$

В конечном итоге из (11.38), (11.39), (11.40), (11.27) и (11.41), пренебрегая малыми величинами $\frac{3AD\rho_1}{32\sigma T_-^3}$ и $\frac{3AD\rho_1}{16\sigma T_+^3}$, находим после несложных преобразований основные параметры структуры ударной волны:

$$\left. \begin{aligned} T_- \approx T_2, \quad T_+ \approx 1,5 T_2, \\ \alpha_1 = \frac{9AD\rho_1}{8\sigma T_2^3} \approx 1,43 \cdot 10^{38} \frac{\rho_1}{\mu_1^4 D^5}, \\ \alpha_2 = \frac{18\sigma T_2^3}{AD\rho_1} = 1,42 \cdot 10^{-37} \frac{\mu_1^4 D^5}{\rho_1}, \end{aligned} \right\} \quad (11.45)$$

так что

$$\alpha_1 = \frac{20,25}{\alpha_2}. \quad (11.46)$$

Масштабная τ_K и полная оптическая толщина зоны прогрева $\tau_{П}$ (при которой $T(\tau_{П}) = T_1$) оцениваются соотношениями

$$\tau_K = \frac{1}{\alpha_1} = \frac{8\sigma T_2^3}{9A\rho_1 D}, \quad (11.47)$$

$$\tau_{П} = \frac{4}{\alpha_1} \ln \frac{T_2}{T_1} = 2,8 \cdot 10^{-38} \frac{\mu_1^4 D^5}{\rho_1} \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (11.48)$$

Толщина пика температуры за фронтом ударной волны равна $\tau_2 \approx \frac{1}{\alpha_2} \approx \frac{\rho_1}{D^5}$.

Эта величина быстро уменьшается с возрастанием скорости волны D .

С учетом (11.40) нетрудно убедиться, что с точностью до коэффициента порядка 2 выражение (11.47) совпадает с (11.3) и (11.23).

Итак, если в оболочке звезды с параметрами $\rho_1 = 10^{-7}$ г/см³, $T_1 = 5000$ К движется ударная волна со скоростью $D = 42$ км/с, то $T_2 = 40000$ К, $\alpha_1 = 0,0110$, полная толщина зоны прогрева $\tau_{\pi} = 760$, а ее геометрическая протяженность $x_{\pi} = \frac{\tau_{\pi}}{N_1 k} \approx 12$ м, где $k \approx 10^{-17}$ см² — коэффициент поглощения

с основного уровня атома водорода. При той же скорости волны в оболочке с плотностью $\rho_1 = 10^{-10}$ г/см³ протяженность зоны прогрева уже порядка 12 км. Это ничтожные по масштабам размеры. Но, как уже отмечалось, в зоне прогрева существенно изменяется спектральный состав выходящего на бесконечность излучения.

Рассмотрим теперь сильную ударную волну, у которой температура за фронтом выше предела (11.32). В данном случае в задаче о структуре единственной неизвестной величиной будет α_1 , так как $\rho_- = \rho_2$, $T_- = T_+ = T_2$, $\alpha_2 = 0$. Представим функцию источника перед фронтом ударной волны в виде

$$B_a(\tau) = \frac{\sigma}{\pi} T_a^4(\tau) = \frac{\sigma}{\pi} T_2^4 e^{-\alpha_1 \tau}. \quad (11.49)$$

Для определения параметра α_1 воспользуемся условием, что поток лучистой энергии через фронт волны равен гидродинамическому. Далее представим лучистый поток на оптической глубине τ в интегральной форме:

$$F_{\pi} = 2\pi \left[\int_{-\infty}^{\tau} B(\tau') e^{-\sqrt{3}(\tau-\tau')} d\tau' - \int_{\tau}^{\infty} B(\tau') e^{-\sqrt{3}(\tau'-\tau)} d\tau' \right]. \quad (11.50)$$

Учтем теперь, что при $\tau' \leq 0$ $B(\tau') = \frac{\sigma}{\pi} T_2^4$, а при $\tau > 0$ верно соотношение (11.49). Таким образом, величина потока лучистой энергии на фронте ударной волны ($\tau = 0$) равна

$$F_{\pi} \Big|_{\tau=0} = \frac{2\sigma T_2^4 \alpha_1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}+\alpha_1)} \approx \frac{2}{3} \sigma T_2^4 \alpha_1. \quad (11.51)$$

Приравняем этот поток к гидродинамическому, определяемому из системы (11.4), в которой под P, E следует подразумевать полное давление и внутреннюю энергию смеси газ — излучение. Воспользовавшись переменными

$$\beta = \frac{p_G}{P}, \quad \eta = \frac{\rho_1}{\rho}, \quad (11.52)$$

и представляя внутреннюю энергию смеси газ — излучение в виде (1.7), находим вместо (11.36) и (11.37)

$$T = \frac{\eta(1-\eta)}{A} \beta D^2, \quad (11.53)$$

$$F_{\pi} = \frac{(1-\eta)(\eta-\eta_1)A}{2\eta_1^2(1-\eta_1)\beta} \rho_1 D T, \quad (11.54)$$

причем здесь $\eta_1 = \frac{K_2 - 1}{K_2 + 1}$. Отсюда, исключая η , находим

$$F_r = \frac{A\rho_1 D T}{(K_2 - 1)\beta}. \quad (11.55)$$

Приравнявая (11.51) и (11.55) и полагая $T = T_a(0) = T_2$, $\rho_- = \rho_2$ и $\beta_a = \beta_2$, находим выражение для параметра α_1 :

$$\alpha_1 = \frac{3A\rho_1 D}{2(K_2 - 1)\sigma\beta_2 T_2^3}. \quad (11.56)$$

Как и раньше, полная оптическая толщина зоны прогрева может быть найдена из соотношения

$$\tau_{\text{п}} = \frac{4}{\alpha_1} \ln \frac{T_2}{T_1} = \frac{8\sigma(K_2 - 1)\beta_2 T_2^3}{3A\rho_1 D} \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (11.57)$$

Для сильных ударных волн $K_2 \approx 4/3$, а параметры β_2 и T_2 определяются выражениями (8.17) и (8.16). Поэтому из (11.56) и (11.57) соответственно следует

$$\alpha_1 = \frac{6}{7} \frac{D}{c}, \quad (11.58)$$

а температура в зоне прогрева изменяется по закону

$$T = T_2 e^{-\frac{1}{4}\alpha_1 \tau}, \quad (11.59)$$

т.е. она уменьшается в e раз на оптическом расстоянии от вязкого скачка $\tau_{\text{к}}$, равном

$$\tau_{\text{к}} = \frac{4}{\alpha_1} = \frac{14c}{3D}. \quad (11.60)$$

Полная оптическая толщина зоны прогрева здесь оценивается выражением

$$\tau_{\text{п}} = \frac{14c}{3D} \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (11.61)$$

В случае однородной среды $\tau_{\text{п}} = N_e \sigma_e x_{\text{п}}$, где $\sigma_e = 0,66 \cdot 10^{-24} \text{ см}^2$ — коэффициент томсоновского рассеяния. Тогда отсчитанная от вязкого скачка протяженность зоны прогрева

$$x_{\text{п}} = \frac{14c}{3\sigma_e N_e D} \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (11.62)$$

Сопоставляя решения (11.60) и (11.23), находим, что величины $\tau_{\text{к}}$, найденные двумя различными путями, практически совпадают. Этими решениями, по-видимому, устанавливается верхний предел протяженности прогревной зоны, образующейся перед фронтом сильной ударной волны. В частности, при скорости волны $D = 55000 \text{ км/с}$ и концентрации частиц $N_e = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ при начальной температуре $T_1 = 20000 \text{ К}$ из (11.62) находим $x_{\text{п}} \approx 3 \cdot 10^{11} \text{ см}$.

Результаты большого цикла расчетов структуры сильных ударных волн, движущихся в однородной среде при начальных значениях плотности числа

частиц $N = 10^{15} \div 10^{22} \text{ см}^{-3}$ и энергиях волны от 1 до 100 МэВ на нуклон, изложены в работе Уивера (Т.А. Weaver, 1976). Из этой работы следует, в частности, что при тех же значениях скорости волны $D = 55000 \text{ км/с}$ и концентрации частиц $N_e = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ величина $x_{\text{п}} \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ см}$. Такое расхождение, по-видимому, следует считать допустимым, если учесть, что из-за сложности задачи численные расчеты так же, как и поиск аналитических решений, проводятся с определенными ограничениями и упрощениями.

§ 12. Эффективная температура фронта сильной ударной волны

При движении ударной волны в звездной атмосфере наблюдаемые характеристики звезды — ее блеск, эффективная температура, показатели цвета — определенным образом изменяются. Очевидно, что временные масштабы и амплитуда этих изменений зависят не только от силы ударной волны, но и от строения атмосферы, поглощательных свойств ее вещества и др.

Здесь мы рассмотрим вопрос об эффективной температуре фронта сильной ударной волны T_{ef} , выходящей из глубоких слоев на поверхность звезды. Величиной T_{ef} и определяется поток лучистой энергии с фронта волны, уходящей на бесконечность. Для ударных волн, возникающих при ядерном взрыве в земной атмосфере, аналогичная задача была рассмотрена Я.Б. Зельдовичем и Ю.П. Райзером (1966).

Из приведенных выше решений следует, что перед фронтом движущейся в оболочке звезды ударной волны существует протяженная прогревная зона, в которой температура плавно возрастает от значения $T = T_1$ до $T = T_-$. Оптическая толщина прогревной зоны $\tau_{\text{п}} \approx 10^2 \div 10^4$. Поэтому в прогревной зоне происходят процессы поглощения и переизлучения квантов, приходящих в нее из-за фронта волны. Квант частоты ν , излученный разогретым ударной волной газом, не уходит прямо на бесконечность,

а поглощается в зоне прогрева, пройдя расстояние $l_{\nu} \approx \frac{1}{k_{\nu}\rho}$. В результате

процессов столкновений энергия этого кванта преобразуется в тепловую энергию атомов и электронов. В дальнейшем вместо кванта с частотой ν излучаются кванты других частот. Такие процессы поглощения и переизлучения квантов в зоне прогрева при их диффузии к ее переднему краю происходят большое число раз. В конечном итоге спектральный состав излучения, выходящего на бесконечность и определяющего эффективную температуру ударной волны, существенно изменяется. Он, конечно, уже не соответствует спектральному составу лучистой энергии, излучаемой разогретым газом непосредственно из-за фронта ударной волны.

Величина эффективной температуры ударной волны может быть оценена путем анализа поглощательных свойств вещества звездных атмосфер, т.е. путем сравнения длины свободного пробега кванта видимого света

l_{ν} со средней по спектру длиной пробега $l \approx \frac{1}{k\rho}$ (росселандовым пробе-

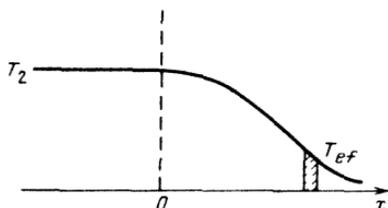
гом). Именно таким путем Я.Б. Зельдович и Ю.П. Райзер установили величину эффективной температуры ударной волны, движущейся в земной атмосфере. Как оказалось, в этом случае с увеличением скорости ударной волны T_{ef} сначала растет примерно до 90 000 К, потом резко уменьшается до 17 000 \div 20 000 К, после чего она остается постоянной, не зависящей от силы ударной волны. Это объясняется следующим: с увеличением темпера-

туры газа в зоне прогрева длина пробега l_ν быстро уменьшается и становится сравнимой с толщиной зоны прогрева, которая определяется средней по спектру длиной пробега прогревающего излучения l . Поэтому на бесконечность уходят кванты, рожденные в некотором излучающем слое прогревной зоны (рис. 29), для которого выполняется равенство

$$l_\nu(T_{ef}) \approx l. \quad (12.1)$$

Другими словами, в том месте зоны прогрева, где $T < T_{ef}$, имеем $l_\nu > l$ — кванты частоты ν (видимого света) свободно уходят на бесконечность.

Рис. 29. Положение излучающего слоя в зоне прогрева перед фронтом ударной волны.



И наоборот, при $T > T_{ef}$ будет $l_\nu < l$ и квант “заперт” в зоне. После поглощения он будет трансформирован в квант другой частоты.

Аналогичный вывод следует и для ударной волны, движущейся в атмосфере звезды. Под эффективной температурой здесь также будем подразумевать температуру того слоя прогревной зоны, в котором выполняется равенство (12.1). Заметим, однако, что поскольку далее речь идет об оценке величины потока излучения с переднего края прогревной зоны лишь в оптическом диапазоне спектра, то это понятие здесь является несколько условным. Обе величины l_ν и l , обратно пропорциональные плотности среды, умноженной на коэффициент поглощения k_ν или k . Поэтому при анализе вопроса о величине T_{ef} можно просто сравнивать коэффициенты поглощения. Очевидно, что газ прозрачен для квантов частоты ν , если $k_\nu < k$, и непрозрачен при $k_\nu > k$. Эффективная температура ударной волны определяется из условия

$$k_\nu(T) = k. \quad (12.2)$$

На рис. 30 приведены рассчитанные по данным К.У. Аллена (1977) коэффициенты поглощения в длинах волн 3000, 5000 и 8000 Å (k_{3000} , k_{5000} , k_{8000}) и средний по спектру коэффициент непрозрачности. Видно, что равенство (12.2) выполняется при температуре ~ 12000 К. При $T > 12000$ К и типичных для звездных атмосфер плотностях ($\rho \sim 10^{-7} - 10^{-10}$ г/см³) коэффициент поглощения в видимой части спектра примерно на порядок больше среднего по спектру. Этот результат полностью подтверждается анализом новых данных о непрозрачности k и коэффициентах k_ν (G. Vode, 1965; R.L. Kurucz, 1979). При этом сравнение k и k_ν для различных химических составов приводит к выводу о практической независимости величины T_{ef} от содержания тяжелых элементов в оболочке звезды (Б.Н. Батушкова, 1981).

Отсюда можно сделать такой вывод. До тех пор, пока температура за фронтом ударной волны $T_2 < 12000$ К, эффективная температура волны совпадает с температурой T_2 , так как здесь $k_\nu \approx k$ и $l_\nu \approx l$. Если же $T_2 > 12000$ К, а $\rho \gtrsim 10^{-10}$ г/см³, то прогревная зона задерживает кванты видимого света, приходящие в нее из-за фронта волны. На бесконечность уходят кванты, рожденные в слое, где $T \approx 12000$ К и где $k_\nu \approx k$. Таким образом, эффективная температура сильной ударной волны, движущейся

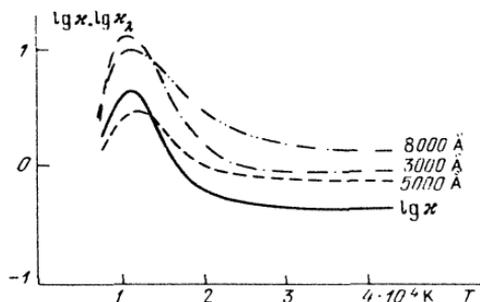


Рис. 30. Зависимость коэффициентов поглощения в видимой области спектра (κ_λ) и росселандова коэффициента непрозрачности от температуры при плотности $\rho_1 = 10^{-10}$ г/см³.

в оболочке звезды, примерно равна величине $T_{ef} = 12\,000$ К на протяжении всего времени ее движения в среде, где $\rho \geq \geq 10^{-10}$ г/см³, и эта величина T_{ef} не зависит от силы ударной волны, т.е. от значения температуры T_2 за фронтом волны. Соответствующий величине $T_{ef} = 12\,000$ К поток излучения $F_{ef} = \sigma T_{ef}^4 \approx 1,2 \cdot 10^{12}$ эрг/(см² · с).

Как уже отмечалось в § 8, поток энергии через вязкий скачок не может превышать гидродинамический, $F_{\text{ж}} \lesssim \frac{1}{2} \rho_1 D^3$, и если весь этот поток в виде лучистой энергии уходит на бесконечность, то $T_2 \rightarrow T_1$. Условием превращения ударной волны в изотермическую и может быть, по-видимому, выход переднего края зоны прогрева в изонизованные слои хромосферы звезды при условии, что скорости элементарных процессов за фронтом еще достаточно велики. Нетрудно провести оценку длины пробега ударной волны в неоднородной атмосфере до ее превращения в изотермическую.

Пусть $D = D_0$ — скорость сильной плоской ударной волны на исходном уровне, где плотность равна ρ_0 , и гидродинамический поток $F_{\text{г}0} = \frac{1}{2} \rho_0 D_0^3$.

Как будет показано дальше (§ 19), при движении плоской ударной волны в неоднородной среде ее скорость изменяется по закону $D = D_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{1/5}$.

Поэтому гидродинамический поток равен

$$F_{\text{г}} = \frac{1}{2} \rho D^3 = \frac{1}{2} \rho_0^{3/5} \rho^{2/5} D_0^3 = F_{\text{г}0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{2/5}. \quad (12.3)$$

Отсюда следует, что при движении сильной ударной волны в сторону уменьшения плотности гидродинамический поток через фронт волны уменьшается. В начальный момент времени этот поток может быть существенно больше лучистого ($F_\infty = \sigma T_{ef}^4$), определяющего потери энергии ударной волны на высвечивание. Однако на некотором расстоянии h_* от исходного уровня оба потока сравниваются: $F_{\text{г}}(h_*) = F_{\text{ж}}(h_*)$. Отсюда можно найти плотность ρ_* (соответствующую высоте h_*), при которой ударная волна превращается в изотермическую,

$$\frac{\rho_*}{\rho_0} = \left(\frac{F_\infty}{F_{\text{г}0}} \right)^{5/2} = \left(\frac{2\sigma T_{ef}^4}{\rho_0 D_0^3} \right)^{5/2}. \quad (12.4)$$

Например, если в атмосфере типа солнечной в слое, где $\rho_0 = 10^{-7}$ г/см³, движется ударная волна со скоростью $D_0 = 50$ км/с, то $\rho_* = 1,5 \cdot 10^{-2} \rho_0 \approx \approx 10^{-9}$ г/см³.

Если принять, что неоднородная атмосфера является изотермической, а распределение плотности в ней описывается барометрической формулой (5.9), то

$$h_* \approx \frac{5a_1^2}{2\gamma g} \ln \frac{\rho_0 D_0^3}{2\sigma T_{ef}^4} \approx \frac{5}{2} H_0 \ln \frac{\rho_0 D_0^3}{2\sigma T_{ef}^4}. \quad (12.5)$$

Отсюда следует, например, что при $\rho_* = 10^{-6}$ г/см³ и $D_0 = 100$ км/с $h_* \approx 15 H_0$.

Из сказанного выше следует, что наличие прогревной зоны перед фронтом ударной волны приводит, с одной стороны, к экранированию фронта волны. С другой же, благодаря большой протяженности этой зоны и выходу ее переднего края в поверхностные слои звезды задолго перед выходом фронта (вязкого скачка), происходит высвечивание ударной волны, ее постепенное превращение в изотермическую. Для звездных атмосфер типа солнечной временные масштабы, соответствующие этому процессу, незначительны — порядка нескольких секунд. Для звезд-гигантов и сверхгигантов высвечивание и изотермизация ударной волны происходит за несколько часов и даже суток. Это подтверждается численными расчетами (Э.К. Грасберг, В.С. Имшенник, Д.К. Надёжин, 1971). Расчеты подтвердили также вывод о реальности понятия эффективной температуры для ударной волны, движущейся в оболочке сверхгиганта (Э.К. Грасберг, Д.К. Надёжин, 1969). При этом оказалось, что при плотности $\rho \approx 10^{-11} - 10^{-12}$ г/см³ $T_{ef} \approx 8000$ К. Передний край зоны прогрева при этом является как бы фотосферой звезды, движущейся в протяженной оболочке сверхгиганта со сверхзвуковой скоростью, причем температура этой "фотосферы" вплоть до выхода переднего края зоны прогрева на поверхность постоянна и примерно равна 8000 К.

§ 13. Релятивистские ударные волны

При выходе ударной волны на поверхность компактной звезды типа белого карлика скорость волны может достигать значений, близких к скорости света. Для описания свойств этих волн в уравнениях газодинамики учитываются релятивистские эффекты. Условия сохранения на фронте релятивистской ударной волны уже обсуждались в литературе (см. А.Н. Тауб, 1948; Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, 1954; К.П. Станюкович, 1955; Р.А. Гросс, 1965). Здесь прежде всего мы изложим результаты расчетов параметров релятивистских ударных волн, проведенных Фуимурой и Кеннелом (F.S. Fujimura, C.F. Kennel, 1979).

Важнейшие термодинамические характеристики идеального релятивистского газа в системе координат, в которой газ покоится, уже приведены в § 1.

Предположим, что поток вещества направлен перпендикулярно к фронту волны. Обозначим здесь через v_1 и v_2 скорости газа перед и за фронтом волны по отношению к фронту, а через U_1 и U_2 соответственно пространственные компоненты 4-скорости газа, т.е.

$$U = \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{v}{c\theta}, \quad \theta = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (13.1)$$

Условия сохранения массы, импульса и энергии на релятивистской ударной волне имеют вид

$$N_1 U_1 = N_2 U_2, \quad (13.2)$$

$$\rho_1 + \tilde{\omega}_1 U_1^2 = \rho_2 + \tilde{\omega}_2 U_2^2, \quad (13.3)$$

Здесь N — плотность числа частиц массы m , так что удельный объем $V = 1/(mN)$, $\tilde{\omega} = p + \tilde{E}$ — тепловая функция единицы объема, p — давление, а \tilde{E} — объемная плотность энергии.

Все эти термодинамические величины относятся к собственной системе отсчета, где вещество покоится, тогда как U и θ рассматриваются в системе координат, связанной с фронтом ударной волны.

Отсюда непосредственно следуют такие важные соотношения теории релятивистских ударных волн:

1) Уравнение релятивистской ударной адиабаты

$$\tilde{\omega}_1 \frac{U_1}{\theta_1} = \tilde{\omega}_2 \frac{U_2}{\theta_2}. \quad (13.4)$$

$$\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^2 = \frac{(\tilde{E}_1 + p_2)(\tilde{E}_1 + p_1)}{(\tilde{E}_2 + p_1)(\tilde{E}_2 + p_2)}. \quad (13.5)$$

Если ввести обозначения

$$\frac{V_2}{V_1} = \gamma, \quad \frac{p_2}{p_1} = z, \quad \frac{\rho_1 V_1}{c^2} = \xi, \quad b = \frac{\gamma}{\gamma - 1}, \quad (13.6)$$

то уравнение (13.5) с учетом (1.17) сводится к виду

$$b(z\gamma - 1) \{2 + b\xi(1 + \gamma z)\} = (z - 1) \{1 + \gamma + b\xi(1 + \gamma z^2)\}, \quad (13.7)$$

в котором оно неоднократно использовалось при конкретном анализе свойств релятивистских ударных волн.

2) Скорость движения фронта ударной волны $D = -v_1$ при условии, что среда "1" находится в состоянии покоя,

$$D = cV_1 \sqrt{\frac{\rho_2 - \rho_1}{\tilde{E}_1 V_1^2 - \tilde{E}_2 V_2^2 + \rho_2 (V_1^2 - V_2^2)}}. \quad (13.8)$$

Воспользовавшись уравнением ударной адиабаты (13.5), можно переписать его в виде

$$D = c \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1)(\rho_1 + \tilde{E}_2)}{(\tilde{E}_2 - \tilde{E}_1)(\rho_2 + \tilde{E}_1)}}, \quad (13.9)$$

или, с учетом (13.6),

$$D = c \sqrt{\frac{\xi z}{1 - \gamma + \xi z(1 - 4\gamma^2)}}. \quad (13.9')$$

3) Скорость движения газа за фронтом ударной волны относительно среды

$$v = c \sqrt{\frac{(\rho_2 - \rho_1)(\tilde{E}_2 - \tilde{E}_1)}{(\rho_1 + \tilde{E}_2)(\rho_2 + \tilde{E}_1)}}. \quad (13.10)$$

или

$$v = c \sqrt{\frac{\xi z(1 - \gamma + 3\xi \gamma z)}{(1 + \xi z)(1 + 3\xi \gamma z)}} \quad (13.10')$$

Переход в соотношениях (13.8) – (13.10') к соответствующим выражениям классической газодинамики осуществляется условием $c \rightarrow \infty$, так что $\rho V \ll c^2$ ($\xi \ll 1$).

Скорость звука a определяется соотношением (1.20), которое можно переписать и так:

$$a^2 = \frac{\gamma c^2 \rho}{\tilde{\omega}}$$

Для дальнейшего удобно ввести химический потенциал μ и поток частиц j :

$$\mu = \frac{\tilde{\omega}}{N} = \frac{\frac{\gamma \rho}{\gamma - 1} + Nmc^2}{N} \quad (13.11)$$

$$j = N_1 U_1 = N_2 U_2, \quad (13.12)$$

а также обозначение

$$X = \frac{\mu_2 N_1}{\mu_1 N_2}, \quad (13.13)$$

и число Маха

$$M_1 = \frac{U_1}{a_1/c} = \frac{v_1}{\theta_1 a_1}, \quad (13.14)$$

или

$$M_1 = U_1 \sqrt{\frac{\xi b_1 + 1}{\xi \gamma_1}}$$

Используя (13.11), можно соотношения (13.2) – (13.4) записать в виде так называемой адиабаты Тауба (А.Н. Тауб, 1948),

$$\mu_2^2 - \mu_1^2 = (\rho_2 - \rho_1) \left(\frac{\mu_1}{N_1} + \frac{\mu_2}{N_2} \right), \quad (13.15)$$

тогда как для потока j следует

$$-j^2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\frac{\mu_2}{N_2} - \frac{\mu_1}{N_1}} \quad (13.16)$$

Таким образом, релятивистскую ударную адиабату можно изобразить в переменных $\rho, \frac{\mu}{N}$ (рис.31).

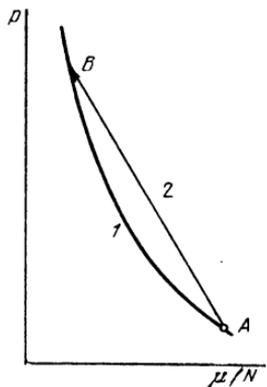


Рис. 31. Релятивистская ударная адиабата (адиабата Тауба).

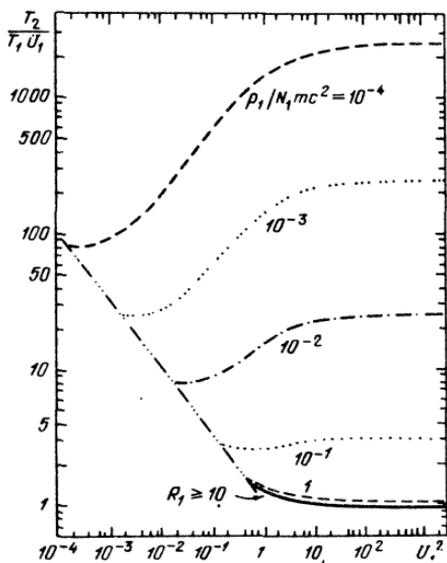


Рис. 32.

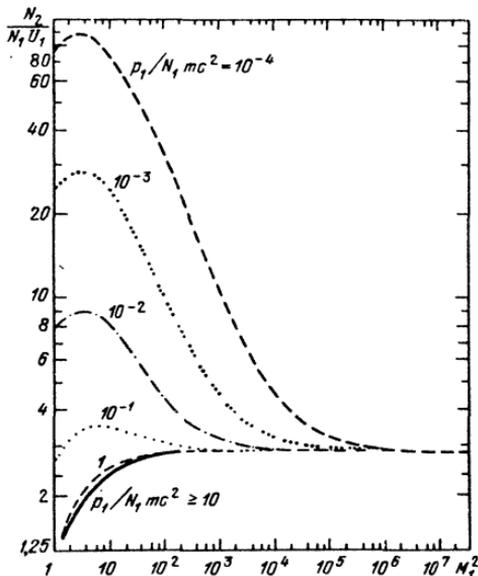


Рис. 33.

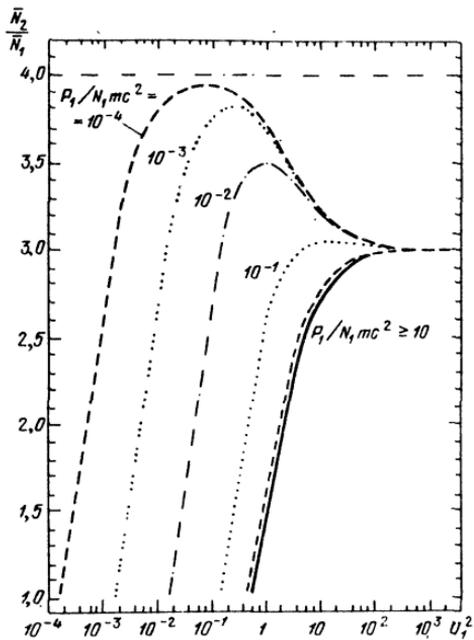


Рис. 34.

Рис. 32. Зависимость изменения температуры, измеренной в собственной системе отсчета частиц, от 4-скорости фронта ударной волны.

Рис. 33. Зависимость изменения концентрации частиц, измеренной в собственной системе отсчета, от релятивистского числа Маха.

Рис. 34. Скачок концентрации частиц в системе координат, связанной с фронтом ударной волны.

Начальное и конечное состояния на диаграмме связаны хордой, наклон которой равен $-j^2 = -(N_1 U_1)^2$. Пересечение хорды 2 с адиабатой Тауба 1 и определяет параметры μ^2/N_2 и ρ_2 в точке B.

Из (13.2) – (13.4) находим также скачки параметров на фронте релятивистской ударной волны с учетом обозначений (13.13)

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \gamma_1 (1 - X) M_1^2 + 1 \quad (13.17)$$

или

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = (1 - X) U_1^2 \frac{\xi b_1 + 1}{\xi} + 1$$

и

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{1 + \{1 + 4b_2 \xi (b_1 \xi + 1) [\gamma_1 M_1^2 (1 - X) + 1] X\}^{1/2}}{2(b_1 \xi + 1) X} \quad (13.18)$$

Используя (13.11), можно найти также скачок плотности в системе координат, связанной с фронтом волны,

$$\frac{\bar{N}_2}{\bar{N}_1} = \frac{N_2 \theta_1}{N_1 \theta_2} = \sqrt{\frac{\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 + U_1^2}{1 + U_1^2}} \quad (13.19)$$

Скачок температуры в случае идеального газа определяется как

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\rho_2 N_1}{\rho_1 N_2} \quad (13.20)$$

На рис. 32 и 33 показана зависимость отношений температуры и концентрации частиц (барионов), измеренных в собственных системах отсчета, на рис. 34 — скачка концентрации частиц в системе координат, связанной с фронтом ударной волны (F.S. Fujimura, C.F. Kennel, 1979).

В реальных, представляющих астрофизический интерес случаях необходимо учитывать давление и плотность энергии излучения, во всяком случае — за фронтом волны. Кроме того, необходимо учитывать образование за ударным фронтом электронно-позитронных пар. При этом задача расчета скачков параметров на фронте релятивистской ударной волны значительно усложняется. Попытка получить соответствующие аналитические соотношения была предпринята Гроссом (R.A. Gross, 1965), численные расчеты для некоторых частных случаев плотностей среды и ее температуры проведены Мазани и др. (A. Masani, V. Borla, A. Ferrari, A. Martini, 1967).

Результаты расчетов Мазани и др. показывают, что в субрелятивистском случае благодаря образованию электрон-позитронных пар скачок плотности достигает значений $\frac{\rho_2}{\rho_1} \approx 14$. При $T_2 \sim 10^{12}$ К образуются пионы, если $T_2 \sim 10^{13}$ К — нуклон-антинуклонные пары. В этом случае скачок плотности возрастает неограниченно. Однако до скорости ударной волны $D = 10^{10}$ см/с при расчетах параметров ударных волн можно использовать классические формулы.

Глава 3

АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН

В настоящее время анализ конкретных газодинамических задач проводится чаще всего численными методами. И все же изложение здесь аналитических методов — автомодельного, приближенных методов Бринкли—Кирквуда, Уизема и Чизнелла — вполне оправдано. Ознакомление с ними показывает, как был найден выход (к тому же — не один) из, казалось бы, безнадежной ситуации, когда решение системы нелинейных уравнений газодинамики в частных производных представлялось неразрешимой задачей. Поэтому упомянутые методы имеют огромное эвристическое значение, они являются несомненным и важным элементом математической культуры. Именно с такой точки зрения эти методы газодинамики привлекли внимание С.А. Каплана.

Уместно подчеркнуть, что автомодельный метод используется и сейчас в качестве теста для проверки точности расчетов, проводимых численными методами. Приближенный же метод Бринкли—Кирквуда легко поддается обобщениям для учета самых разнообразных факторов — магнитного поля, космических лучей и т.д. Можно поэтому ожидать, что как автомодельный, так и приближенные методы Бринкли—Кирквуда, Уизема и Чизнелла еще определенное время будут использоваться в астрофизике, например, для изучения закономерностей движения ударных волн в протяженных коронах звезд и в межзвездном пространстве и др. В любом случае их можно использовать для оценочных расчетов при выборе исходных параметров задачи (закона распределения плотности в среде, начальной скорости и энергии волны и др.). Ведь на проведение расчетов, скажем, методом Бринкли—Кирквуда, требуется примерно в 50 раз меньшее время на ЭВМ, чем при расчете численным методом.

§ 14. Автомодельное движение газа

Движение газа, возникшее в звездной оболочке под действием ударной волны, описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений (6.1) — (6.3). Решение этой системы с учетом соответствующих начальных и граничных условий дает распределение параметров газа (давления, плотности, температуры) и скорости движения вдоль геометрической координаты в каждый заданный момент времени. Если со временем это распределение параметров остается подобным себе, то такое движение называется автомодельным или самоподобным.

В простейшем случае автомодельного движения все газодинамические величины зависят от геометрической координаты и времени лишь в комбинации $\xi = \frac{r}{t}$, которая и принимается в качестве единственной независимой переменной величины при решении системы (6.1') — (6.3'). Таким

образом, при некотором $\xi = \text{const}$ величины $\rho(\xi)$, $\rho(\xi)$ и т.д. сохраняют свое значение. Другими словами, определенное значение параметра в момент времени $2t, 3t, 4t$ и т.д. соответствует координате $2r, 3r, 4r$ и т.д., так что форма его распределения вдоль координаты остается неизменной.

Движение будет автомодельным и в случае, если автомодельная переменная имеет вид $\xi = r t^\alpha$, при условии, что $\alpha = \text{const}$. Здесь уже масштабы самих газодинамических величин со временем изменяются; однако, как и прежде, форма их распределения в пространстве остается неизменной.

Математическим следствием предположения об автомодельности движения является возможность свести систему нелинейных уравнений газодинамики в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых единственной независимой переменной является автомодельная переменная ξ .

Задача о движении газа будет автомодельной, если она характеризуется не больше, чем двумя параметрами с независимой размерностью. Такими параметрами могут быть, например, энергия взрыва Q и начальная плотность среды ρ_1 при изучении движения ударных волн в земной и звездной атмосферах, скорость движения газа за фронтом волны u_2 и плотность невозмущенной среды ρ_1 в случае движения ионизационной волны в межзвездном пространстве и т.д.

Типичным примером автомодельного движения является движение, возникающее при сильном взрыве в воздухе. Впервые эта задача была решена в 1944 г. Л.И. Седовым (1977), получившим точное аналитическое решение уравнений автомодельного движения. Позже метод автомодельности был использован для изучения сильного взрыва в звездах (P.A. Sargent, P.A. Fox, F. Haas, Z. Kopal, 1951).

При этом было установлено, что в сферическом случае этот метод применим лишь при степенном законе изменения плотности и других параметров в звездной оболочке. Г.М. Гандельман и Д.А. Франк-Каменецкий (1956), а также А. Сакураи (A. Sakurai, 1960) рассмотрели выход сильной ударной волны на поверхность звезды, плотность в оболочке которой изменяется по закону $\rho = Bx^n$ (x — расстояние до поверхности звезды). Эта задача также сводится к автомодельной.

Результаты автомодельных решений, представляющих астрофизический интерес, подробно обсуждены Я.Б. Зельдовичем и Ю.П. Райзером (1966). Поэтому здесь мы ограничиваемся лишь сводкой важнейших результатов.

А. Сильный взрыв в однородной атмосфере. В данном случае сферическое движение газа определяется величиной энергии взрыва Q (размерность $[Q] = \text{эрг}$) и начальной плотностью среды ρ_1 . Начальным давлением газа p_1 пренебрегают по сравнению с давлением на фронте ударной волны p_2 . Из параметров задачи Q и ρ_1 переменных r и t можно составить безразмерную комбинацию

$$\xi = r \left(\frac{\rho_1}{Qt^2} \right)^{1/5}, \quad (14.1)$$

которая и будет автомодельной переменной в данной задаче. При перемещении фронта ударной волны значение величины ξ на фронте $\xi = \xi_0$ сохраняется. Поэтому из (14.1) следует закон движения сферической ударной волны в виде

$$r_{\text{ф}} = \xi_0 \left(\frac{Q}{\rho_1} \right)^{1/5} t^{2/5}, \quad (14.2)$$

а скорость распространения сферической ударной волны равна

$$D = \frac{dr_{\Phi}}{dt} = \frac{2}{5} \xi_0 \left(\frac{Q}{\rho_1} \right)^{1/5} t^{-3/5} = \frac{2}{5} \xi_0^{5/2} \left(\frac{Q}{\rho_1} \right)^{1/2} \frac{1}{r_{\Phi}^{3/2}}, \quad (14.3)$$

причем параметр ξ_0 определяется из условия сохранения энергии волны

$$Q = 4\pi \int_0^{r_{\Phi}} r^2 \rho \left(E + \frac{u^2}{2} \right) dr. \quad (14.4)$$

При показателе адиабаты $\gamma = 1,23$ имеем $\xi_0 = 0,93$, если же $\gamma = 1,4$, то $\xi_0 = 1,033$.

Для цилиндрического ($[Q] = \text{эрг/см}$) и плоского ($[Q] = \text{эрг/см}^2$) движения имеем соответственно при $\xi_0 \approx 1$

$$r_{\Phi} = \left(\frac{Q}{\rho_1} \right)^{1/4} t^{1/2}, \quad D = \frac{1}{2} \left(\frac{Q}{\rho_1} \right)^{1/2} \frac{1}{r_{\Phi}}, \quad (14.5)$$

$$r_{\Phi} = \left(\frac{Q}{\rho_1} \right)^{1/3} t^{2/3}, \quad D = \frac{2}{3} \left(\frac{Q}{\rho_1} \right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{r_{\Phi}}}. \quad (14.6)$$

Параметры газа непосредственно за фронтом ударной волны определяются соотношениями (8.18) при $M \rightarrow \infty$. Распределение их вдоль геометрической координаты находится из решения системы (6.1')–(6.3'),

причем автомодельную переменную ξ удобно представить в виде $\xi_0 \frac{r}{r_{\Phi}}$.

Как уже отмечалось, при автомодельном движении форма распределения давления, плотности и скорости газа за фронтом ударной волны с течением времени сохраняется, изменяются лишь их масштабы в результате изменения этих величин на фронте волны.

На рис. 35 показано распределение параметров газа за фронтом ударной волны для сильного сферического взрыва в газе при $\gamma = 1,23$. Как видно, в результате взрыва практически вся масса газа, равномерно заполнявшая сферу радиуса r_{Φ} , концентрируется в тонком слое вблизи фронта волны. Давление во всем объеме возмущенного газа остается практически постоянным и равным $\sim \frac{1}{2} p_2$, тогда как температура по направле-

нию к центру неограниченно возрастает.

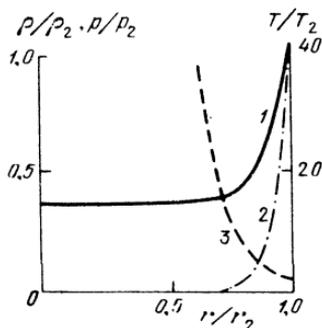
Вот еще несколько соотношений, которыми описывается движение сильной сферической ударной волны в однородной среде. Для одноатомного газа давление на фронте сильной ударной волны равно

$$p_2 = \frac{3}{4} \rho_1 D^2.$$

Поэтому из (14.3) также следует, что $p_2 \sim Q r_{\Phi}^{-3}$. На некотором расстоянии r_3 от места взрыва ударная волна вырождается в звуковую. Это значение радиуса действия ударной волны можно найти из последнего соотношения, если сделать в нем замену $p_2 \approx p_1$. Таким образом,

$$r_3 \approx \left(\frac{Q}{\rho_1} \right)^{1/3}. \quad (14.7)$$

Рис. 35. Распределение давления (1), плотности (2) и температуры (3) за фронтом сильной сферической ударной волны (автомодельное решение).



Характерное время действия ударной волны t_c оценивается как

$$t_c \approx \frac{r_3}{a_1} \approx \frac{\rho_1^{1/2} Q^{1/3}}{\rho_1^{5/6}}, \quad (14.8)$$

где a_1 — скорость звука в невозмущенном газе.

Б. Движение ударной волны в неоднородной среде. Л.И. Седову удалось также получить решение, описывающее движение сильной ударной волны в неоднородной среде, плотность которой изменяется с расстоянием по закону $\rho_1 = Ar^{-\omega}$ при $\omega = \text{const}$. В частности, для сферической ударной волны (Л.И. Седов, 1977)

$$r_\Phi = \xi_0 \left(\frac{Q}{A} \right)^{\frac{1}{5-\omega}} t^{\frac{2}{5-\omega}}, \quad D = \frac{2\xi_0}{5-\omega} \left(\frac{Q}{A} \right)^{1/2} r_\Phi^{\frac{\omega-3}{2}}, \quad (14.9)$$

где ξ_0 по-прежнему определяется из условия сохранения энергии (14.4). Из этого решения следует, что в среде, распределение плотности в которой подчиняется закону $\rho = Ar^{-\omega}$, ударная волна движется с ускорением, если $\omega > 3$. Однако при этом масса, заключенная внутри сферы радиуса r_Φ , бесконечна, тогда как при $\omega < 3$ она конечна.

Автомодельной является также задача о движении ударной волны к поверхности среды, плотность которой изменяется по закону $\rho = Bx^n$, где x — расстояние, отсчитываемое от поверхности вглубь. Именно таким законом описывается строение внешних слоев звезды, находящихся в лучистом или конвективном равновесии (см. § 5). В данном случае в задаче имеется лишь один размерный параметр B , тогда как другой — энергия взрыва, — не задается. Можно предположить, что ударная волна является плоской, а в качестве автомодельной принять величину

$$\xi = \frac{x}{x_\Phi} = \frac{x}{A_1 t^b}, \quad (14.10)$$

где A_1 — постоянная, b — так называемый показатель автомодельности, который заранее неизвестен. Он определяется из условия существования физически однозначного решения системы (6.1') — (6.3') после преобразования ее к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с учетом, что при соответствующей нормировке все неизвестные величины зависят от x и t в комбинации (14.10). Величина x_Φ определяет положение фронта ударной волны в заданный момент времени t (на фронте волны $\xi = 1$). Скорость ударной волны равна

$$D = A_1 b t^{b-1} = b A_1^{\frac{1}{b}} x_\Phi^{-\frac{1-b}{b}} = b A_1^{\frac{1}{b}} x_\Phi^{-\lambda}, \quad (14.11)$$

так что

$$D = b A_1^{\frac{1}{b}} B^n \rho_1^{-\frac{\lambda}{n}} = \text{const} \rho_1^{-\frac{1}{q}}, \quad (14.12)$$

где для сравнения с решениями, полученными другими методами, введено обозначение $q = \frac{n}{\lambda}$, причем также $b = \frac{1}{1+\lambda}$.

Таблица 4. Показатели автомодельности
для избранных значений γ и n .

γ	1,1		4/3		5/3	
	λ	$1/q$	λ	$1/q$	λ	$1/q$
1,5	0,204	0,136	0,286	0,191	0,330	0,220
3,25	0,429	0,132	0,602	0,185	0,696	0,214

Методика определения показателя автомодельности b подробно уже разработана, некоторые результаты расчетов приведены в табл. 4. Как видно, параметр λ существенно зависит от величины γ . В интервале $\gamma = 4/3 \div 5/3$ его с точностью не хуже 1,5% можно аппроксимировать выражением (Э.К. Грасберг, 1981)

$$\lambda = (0,865)^{\frac{n}{n+1}} n \left(2 + \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \right)^{-1} \quad (14.13)$$

В частности, если в звездной оболочке давление газа сравнимо с давлением излучения ($\Gamma_1 \approx 1,43$), то $q \approx 5$ и $D \sim \rho_1^{-1/5}$. В целом же решение (14.11) может быть использовано лишь в случае движения ударной волны

в самых внешних слоях политропной оболочки при $h = \frac{x}{R_*} \ll 0,1$, так как

при больших h распределение плотности в ней описывается не формулой (5.8), а формулами (5.4) и (5.6). Значения параметров газа за фронтом ударной волны находятся численным интегрированием упомянутой выше системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

При решении ряда задач космической газодинамики могут быть использованы полученные А.С. Компанейцем (1960), Э.И. Андрианкиным, А.М. Коганом, А.С. Компанейцем и В.П. Крайновым (1962) результаты изучения особенностей движения ударной волны, возникшей при сильном точечном взрыве в неоднородной атмосфере с распределением плотности

$\rho_1 = \rho_{10} e^{-h/H}$, хотя эта задача и не является автомодельной. Здесь, кроме величины выделившейся энергии Q и плотности в точке взрыва ρ_{10} , движение характеризуется еще масштабной высотой H . Кроме того, движение не одномерно, а двумерно, оно симметрично относительно вертикали. Закон движения волны был получен вначале на основе предположения, что, как и в случае взрыва в однородной среде, давление выравнено практически по всему охваченному взрывной волной объему и в каждый момент времени оно постоянно вдоль поверхности фронта ударной волны. В дальнейшем зависящая от двух независимых переменных — времени и полярного угла — система дифференциальных уравнений, описывающих законы сохранения массы, импульса и энергии, решалась численно на ЭВМ.

Главной характеристикой задачи является величина τ , имеющая размерность времени:

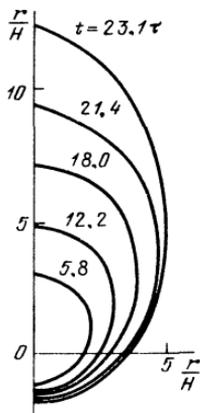
$$\tau = \left(\frac{\rho_{10} H^5}{Q} \right)^{1/2} \quad (14.14)$$

Разрез поверхностей фронта ударной волны вертикальной плоскостью, проходящей через точку взрыва, для моментов времени $\frac{t}{\tau} = 5,8; 12,2;$

Рис. 36. Сечение поверхностей фронта ударной волны вертикальной плоскостью, проходящей через точку взрыва, для нескольких моментов безразмерного времени τ (случай неоднородной среды).

18,0; 21,4; 23,1 при $\gamma = 1,2$ показан на рис. 36. Видно, что форма фронта ударной волны непрерывно изменяется. За время $t \approx 24\tau$ происходит "прорыв" волны на бесконечность. К этому времени ударная волна успевает пройти вниз расстояние порядка $2H$ и по горизонтали (на уровне точки взрыва) — около $3,5H$. Это решение можно использовать, однако, до тех пор, пока давление на фронте ударной волны достаточно велико, так что

$$\rho_2 \sim \frac{Q}{r_{\Phi}^3} \gg 10 \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_1.$$



Недавно С.А. Силич и П.И. Фомин (1982) исследовали распространение ударной волны от точечного взрыва в среде, имеющей экспоненциальное распределение плотности с ненулевой асимптотикой $\rho = \rho_{10} (e^{-z/H} + \alpha)$. Было найдено аналитическое решение в параметрическом виде, описывающее эволюцию ударного фронта, и показано, что даже при малых α ($0 < \alpha \ll 1$) поведение волны качественно меняется по сравнению со случаем $\alpha = 0$.

Были проведены и другие исследования закономерностей движения ударных волн в неоднородной атмосфере с экспоненциальным распределением плотности. Подробный анализ этой задачи содержится в книгах Л.И. Седова (1977), В.П. Коробейникова, Н.С. Мельниковой и Е.В. Рязанова (1961), Х.С. Кестенбойма, Г.С. Рослякова и Л.А. Чудова (1974). В работе В.А. Бронштэна (1970) дано приближенное решение задачи о распространении сильной цилиндрической ударной волны в экспоненциальной атмосфере, пригодное при любом угле наклона оси волны к вертикали.

В заключение обратим внимание на разработанный Г.С. Бисноватым-Коганом и С.И. Блинным (1981) метод "снегоочистителя", который может быть использован при исследовании движения несимметричных ударных волн в межзвездном пространстве. Результаты, полученные с помощью этого метода, оказываются более точными, чем найденные из решений А.С. Компанейца.

§ 15. Метод Бринкли — Кирквуда

Уравнения газодинамики в простейшем одномерном адиабатическом случае связывают частные производные по пространственной r и временной t координате от двух величин — скорости u и давления p (или плотности ρ); всего четыре частные производные. Сущность предложенного Бринкли и Кирквудом (S.R. Brinkley, J.G. Kirkwood, 1947) метода заключается в следующем: система уравнений движения и неразрывности, представленная в форме Лагранжа (уравнения (6.7) и (6.8)), дополняется еще двумя; первое из них получается путем дифференцирования условия сохранения импульса на фронте ударной волны, второе — полуэмпирическое — выражает закон сохранения энергии. Тогда с учетом адиабатичности движения за фронтом ударной волны система уравнений становится замкнутой относительно частных производных функций u и p ,

что позволяет найти выражение для полной производной функции p по направлению распространения ударной волны. Далее задача решается путем численного интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В уравнениях (6.7) и (6.8') входит лагранжева координата r_1 и эйлера r . На фронте ударной волны $r = r_1$. Поэтому в дальнейшем индекс "1" в уравнениях будет опускаться. Обычно лагранжева координата слоя, через который в данный момент проходит ударная волна, обозначается через r , эйлера координата фиксированного элемента газа — через x . Для удобства выкладок вводится понятие "избытка давления" на фронте волны $p = p_2 - p_1$, где p_1 — давление невозмущенного газа перед фронтом ударной волны, градиент которого связан с силой гравитации соотношением (6.4).

В дальнейшем эффектами излучения пренебрегаем. Тогда условия сохранения на фронте волны (7.1) — (7.3) переписуются в виде

$$\rho(D - u) = \rho_1 D, \quad (15.1)$$

$$p = \rho_1 u D, \quad (15.2)$$

$$\Delta \omega = \frac{1}{2} p \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho} \right), \quad (15.3)$$

где $\Delta \omega = \omega_2 - \omega_1$ — прирост тепловой функции при переходе газа через фронт ударной волны.

Как сказано выше, третье уравнение, связывающее частные производные функций p и u , находят путем дифференцирования закона сохранения импульса (15.2). Для этого вводится оператор дифференцирования в системе координат, связанной с фронтом ударной волны и с переходом от одного лагранжевого слоя к другому:

$$\frac{d}{dr} = \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{D} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (15.4)$$

Применив этот оператор к соотношению (15.2), находим искомое уравнение, связывающее частные производные p и u :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + D \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\Omega}{\rho_1 D} \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{\Omega}{\rho_1} \frac{\partial p}{\partial r} = - \frac{uD}{\rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial r} - u \frac{\partial D}{\partial \rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial r} - \\ - u \frac{\partial D}{\partial \rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial r}, \end{aligned} \quad (15.5)$$

где

$$\Omega = 1 - \rho_1 u \frac{\partial D}{\partial \rho} \quad (15.6)$$

и D рассматриваются как функции p , ρ_1 и ρ .

Условия для $\frac{\partial \rho_1}{\partial r}$ и $\frac{\partial \rho}{\partial r}$ находятся из уравнения гидростатического равновесия (6.4) и уравнения состояния (1.1). Частные производные $\frac{\partial D}{\partial p}$, $\frac{\partial D}{\partial \rho_1}$ и $\frac{\partial D}{\partial \rho}$ определяются путем дифференцирования следующего

соотношения, вытекающего из (8.18а) :

$$D^2 = a_1^2 \left[\frac{\gamma + 1}{2\gamma} \frac{p}{p_1} + 1 \right], \quad (15.7)$$

так что

$$\frac{\partial D}{\partial p} = \frac{D^2 - a_1^2}{2Dp}, \quad \frac{\partial D}{\partial p_1} = -\frac{D}{2p_1}, \quad \frac{\partial D}{\partial p_1} = \frac{a_1^2}{2p_1 D}. \quad (15.8)$$

Четвертое, замыкающее систему дифференциальное уравнение следует из закона сохранения энергии, записанного на основе следующих соображений. Пусть ударная волна в момент времени $t_0(r)$ проходит через слой с координатой r . Работа, которую, действуя как поршень, выполняет возмущенный волной слой газа за все время от t_0 до $t = \infty$ (нормированная в сферическом случае на 1 ср), равна

$$A(r) = \int_{t_0(r)}^{\infty} x^\alpha p(t) u(t) dt + p_1 \int_{t_0(r)}^{\infty} x^\alpha u(t) dt,$$

где x — изменяющаяся со временем эйлерова координата рассматриваемого лагранжева слоя ($x = r$ при $t = t_0$), $u(t)$ — его скорость, а $p(t)$ — избыточное (над p_1) давление. Удобно ввести следующие обозначения:

$$W(r) = \int_{t_0(r)}^{\infty} x^\alpha p(t) u(t) dt, \quad \Phi = \int_{t_0(r)}^{\infty} x^\alpha u(t) dt. \quad (15.9)$$

Величину $W(r)$ обычно называют энергией ударной волны.

В неоднородной оболочке звезды работа $A(r)$ расходуется не только на увеличение внутренней энергии газа, но и на его перемещение в поле тяжести. Из закона сохранения энергии следует

$$W(r) = \int_r^{\infty} r^\alpha \rho_1 [E_\infty - E_1 + \varphi_\infty - \varphi_1 + q_\infty] dr - \Phi p_1, \quad (15.10)$$

где индексом ∞ обозначены значения внутренней энергии E и гравитационного потенциала φ в новом равновесном состоянии. При этом из внутренней энергии мы выделили в явном виде энергию q_∞ , затрачиваемую на ионизацию вещества.

Подынтегральная функция в выражении (15.9) для $W(r)$ нормируется ее максимальным значением на фронте ударной волны,

$$\begin{aligned} W(r) &= r^\alpha p(t_0) u(t_0) \int_{t_0}^{\infty} \frac{x^\alpha p(t) u(t)}{r^\alpha p(t_0) u(t_0)} dt = \\ &= r^\alpha p(t_0) u(t_0) \int_{t_0}^{\infty} f(r, t) dt, \end{aligned} \quad (15.11)$$

где

$$f(r, t) = \frac{x^\alpha p(t) u(t)}{r^\alpha p(t_0) u(t_0)}.$$

Здесь оказалось удобным перейти к новой переменной

$$\tau = \frac{t - t_0}{\mu}, \quad (15.12)$$

где μ — некоторая функция, вид которой уточняется ниже. Дополнительной гипотезой метода является предположение о том, что давление газа после достижения равновесия равно его исходному значению, т.е. что $p(t \rightarrow \infty) = p_\infty - p_1 \rightarrow 0$. Кроме того, также $u(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$. Из определения функции $f(r, t)$ следует, что $f(r, t)|_{t=0} = 1$. Значение же μ выбирается так, чтобы выполнялось также равенство

$$\left. \frac{\partial f(r, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = -1. \quad (15.13)$$

Так как $dt = \mu d\tau$, то выражение для энергии ударной волны $W(r)$ переписется в виде

$$W(r) = r^\alpha p(t_0) u(t_0) \mu \int_0^\infty f(r, \tau) d\tau = r^\alpha p(t_0) u(t_0) \nu \quad (15.11')$$

при

$$\nu = \int_0^\infty f(r, \tau) d\tau.$$

Величину μ находим из условия (15.13):

$$\left. \frac{\partial f(r, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = \left. \frac{\partial f(r, t)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \tau} \right|_{t=t_0} = \mu \left[\frac{\partial \ln r^\alpha p u}{\partial t} \right]_{t=t_0} = -1,$$

так что

$$\frac{1}{\mu} = - \left[\frac{\partial}{\partial t} \ln r^\alpha u(t) p(t) \right]_{t=t_0}. \quad (15.14)$$

Соотношения (15.11') и (15.14) и дают четвертое дифференциальное уравнение для частных производных функций p и u (при $t = t_0$):

$$\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\alpha u}{r} = - \frac{\nu r^\alpha p u}{W(r)}. \quad (15.15)$$

При выводе (15.15) до сих пор не делалось никаких предположений: это соотношение является просто результатом формального преобразования выражения (15.11), т.е. (15.15) и (15.11) полностью эквивалентны. Основное предположение метода Бринкли — Кирквуда заключается в том, что безразмерный интеграл ν аппроксимируется каким-либо явным полуэмпирическим выражением. Так, в случае ударных волн, возникающих при взрывах в естественных условиях, функция $f(r, t)$ оказывается монотонно уменьшающейся с ростом t (по крайней мере, на начальном промежутке времени, который вносит основной вклад в интеграл для

ν) и, кроме того, производная $\left. \frac{\partial f(r, t)}{\partial t} \right|_{t=t_0}$ задает правильный масштаб

средней скорости уменьшения $f(r, t)$ за весь существенный интервал времени. Пользуясь определением ν , можно убедиться, что в классе таких функций величина ν изменяется не очень сильно. Например, если $f(r, t)$ имеет треугольный профиль по t (обращается в нуль по линейному закону при некотором $t = t_k$), то $\nu = 1/2$, в случае же спадания по экспоненте $\nu = 1$.

Как показали исследования закономерностей движения ударных волн в атмосфере Земли, величина параметра ν заключена в пределах

$2/3 \leq \nu \leq 1$, причем она тем ближе к верхнему значению, чем сильнее ударная волна. Это позволяет обычно использовать аппроксимацию

$$\nu \approx 1 - \frac{1}{3} e^{-\frac{p}{p_1}}.$$

Разрешая систему (6.7), (6.8'), (15.5) и (15.15) (с учетом, что $r = r_1$ и что производные $\frac{\partial}{\partial t}$ и $\frac{\partial}{\partial r}$ в (15.5) и (15.15) берутся в смысле Лагранжа) относительно частных производных функций p и u , находим, что

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho_1 \{ 2(1 + \Omega) - G \}^{-1} \left\{ \frac{\nu r^\alpha p u^2}{W} (1 + \Omega - G) - \right. \\ \left. - \frac{\alpha}{r} \left[\frac{p}{\rho} - u^2 (1 + \Omega - G) \right] + \left(\frac{u D}{\rho_1} + u \frac{\partial D}{\partial \rho_1} \right) \frac{\partial \rho_1}{\partial r} + u \frac{\partial D}{\partial \rho_1} \frac{\partial \rho_1}{\partial r} \right\} \quad (15.16)$$

и

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{p}{\rho_1 u} \frac{\partial p}{\partial r} - p \left(\frac{\nu r^\alpha p u}{W} + \frac{\alpha u}{r} \right). \quad (15.17)$$

Применим далее оператор (15.4) к функции p и воспользуемся выражением (15.16) и (15.17). В результате имеем

$$\frac{dp}{dr} = 2 \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{p}{D} \left[\frac{\nu r^\alpha p u}{W} + \frac{\alpha u}{r} \right] \quad (15.18)$$

или, после несложных преобразований, с учетом (15.8),

$$\frac{dp}{dr} = \{ 2(1 + \Omega) - G \}^{-1} \left\{ - \frac{\nu r^\alpha p^3 G}{\rho_1 D^2 W} - \frac{\alpha p}{r} \left[2 \frac{\rho_1}{\rho} + \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho} \right) G \right] + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{k} + \frac{a_1^2}{D^2} \right] \frac{p}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dr} \right\}, \quad (15.19)$$

где

$$G = 1 - \left(\frac{\rho_1 D}{\rho a} \right)^2, \quad k = \frac{d \ln \rho_1}{d \ln \rho_1}. \quad (15.20)$$

Заметим, что все три слагаемые правой части уравнения (15.19) отрицательны. Отсюда следует очевидный вывод, что с увеличением расстояния избыток давления на фронте ударной волны уменьшается. Сказанное совершенно не противоречит известному факту ускорения фронта волны при его движении в сторону уменьшающегося давления. Прирост скорости в данном случае связан не с тем или другим знаком в выражении (15.19), а с уменьшением начальной плотности ρ_1 в формуле (15.7), которой и определяется скорость движения ударной волны.

Для расчета энергии ударной волны W_1 уравнение (15.10) переписывается обычно в дифференциальной форме

$$\frac{dW}{dr} = -r^\alpha \rho_1 [h + \varphi_\infty - \varphi_1 + q_\infty] - \Phi \frac{d\rho_1}{dr}, \quad (15.21)$$

где h — полный прирост тепловой функции элемента газа в результате

его прохождения через фронт ударной волны и дальнейшего движения до состояния покоя. Последнее слагаемое правой части учитывает влияние неоднородности среды (градиента давления) на всем промежутке расширения, причем

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dr} &= -r^\alpha U \frac{dt_0}{dr} + \int_{t_0}^{\infty} \frac{\partial x^\alpha U(t)}{\partial r} dt = \\ &= -\frac{r^\alpha U}{D} + \rho_1 r^\alpha \left(\frac{1}{\rho_\infty} - \frac{1}{\rho} \right) = \rho_1 r^\alpha \left(\frac{1}{\rho_\infty} - \frac{1}{\rho_1} \right). \end{aligned} \quad (15.22)$$

Далее из условия сохранения массы следует

$$\frac{dx_\infty}{dx} = \left(\frac{x}{x_\infty} \right)^\alpha \frac{\rho}{\rho_\infty}, \quad (15.23)$$

где плотность, устанавливающаяся в конечном итоге после достижения равновесия с учетом $\rho_\infty = \rho_1$, равна

$$\rho_\infty = \frac{\rho_1}{1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{h \rho_1}{\rho_1}}. \quad (15.24)$$

Как уже отмечалось, условие $\rho_\infty = \rho_1$ является обычным для этого метода. Поэтому полный прирост тепловой функции равен

$$h = \frac{\rho}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho} \right) + \int_{\rho+p_1}^{\rho} \frac{dp'}{\rho'}. \quad (15.25)$$

Прирост гравитационного потенциала определяется соотношениями

$$\Delta\varphi = \varphi_\infty - \varphi_1 = \begin{cases} GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_\infty} \right) & (\text{при } \alpha = 2), \\ GM \ln \frac{r_\infty}{r} & (\text{при } \alpha = 1), \\ g_0 (r_\infty - r) & (\text{при } \alpha = 0). \end{cases} \quad (15.26)$$

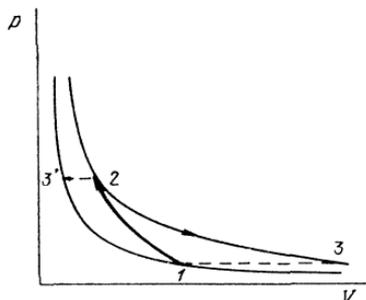
Здесь индекс ∞ означает, что значение величины r или ρ берется на момент времени $t = t_\infty$ для частицы, которая в момент времени $t = t_0$ имела координату $r = r_0$. Величины без индекса соответствуют параметрам газа непосредственно на фронте ударной волны.

Интеграл в соотношении (15.25) находится из условия, что непосредственно после сжатия газа ударной волной (переход 1-2 на рис. 37) происходит его адиабатическое расширение до состояния $\rho_\infty = \rho_1$ (переход 2-3). И поскольку $\rho_2 V_2^\gamma = \rho_\infty V_\infty^\gamma = \rho_1 V_\infty^\gamma$, то в конечном итоге из (15.25) следует

$$h = \frac{a_1^2}{\gamma - 1} \left[\frac{1 + \eta z}{\eta + z} z^{\frac{1}{\gamma}} - 1 \right], \quad (15.27)$$

где $z = \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 + \xi$, а $\xi = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}$, $\eta = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}$.

Рис. 37. К расчету прироста тепловой функции на фронте ударной волны.



Метод Бринкли — Кирквуда неоднократно использовался при обсуждении проблемы нагрева звездных хромосфер (и в первую очередь солнечной) периодическими ударными волнами. При этом иногда предполагалось, что в атмосфере полностью восстанавливается первоначальное термодинамическое состояние, т.е. что $\rho_{\infty} = \rho_1$ и $\rho_{\infty} = \rho_1$ ($V_{\infty} = V_1$), а вся приобретенная элементом газа энергия излучается. Расчеты прироста тепловой функции производились в двух предположениях: 1) после сжатия на фронте ударной волны сначала происходит адиабатическое расширение газа до первоначального давления, после чего газ в результате высвечивания возвращается к исходной плотности ("цикл Шацмана" — переходы 1—2—3—1 на рис. 37); 2) после сжатия на фронте ударной волны газ сначала излучает энергию (при $\rho = \rho_2$) до тех пор, пока не достигает первоначальной энтропии, после чего адиабатически расширяется до исходных значений давления и плотности ("цикл Вейманна" — переходы 1—2—3'—1). Очевидно, что в случае сильных ударных волн второй путь более соответствует реально происходящим процессам. Соответствующие выражения для h имеют вид

$$h_{Sh} = \frac{\rho_2 - \rho_1}{2} \left[\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right] - \frac{\gamma}{\gamma - 1} \left[\frac{\rho_2}{\rho_2} - \frac{\rho_3}{\rho_3} \right], \quad (15.28)$$

$$h_w = \frac{a_1^2}{\gamma(\gamma - 1)} \left\{ \left(1 - \frac{\xi}{2\gamma} \right) \left[1 + \frac{\xi}{2} - \left(1 - \frac{\xi}{2} \right) \left(1 + \frac{\xi}{2\gamma} \right)^{\gamma} \left(1 - \frac{\xi}{2\gamma} \right)^{-\gamma} \right] \right\}. \quad (15.28')$$

Для предельно слабой ударной волны при $\xi \ll 1$ из (15.28) и (15.28') следует

$$h = \frac{(\gamma + 1) a_1^2}{12\gamma^3} \xi^3. \quad (15.29)$$

Уместно отметить, что в плоском случае ($\alpha = 0$) последнее слагаемое уравнения (15.21) компенсируется членом, учитывающим изменение гравитационного потенциала. В свою очередь и при произвольной симметрии в ряде случаев потерями энергии на смещение лагранжевых слоев относительно начального положения можно пренебречь. Поэтому при обсуждении метода Бринкли — Кирквуда обычно речь идет о двух дифференциальных уравнениях — первым определяется изменение давления на фронте волны, вторым — уменьшение энергии волны за счет изменения внутренней энергии газа.

При заданных начальных условиях система (15.19) — (15.23) решается обычными численными методами, причем предварительно ее удобно свести к безразмерным переменным.

Если $\xi = \frac{\rho}{\rho_1}$, то $\rho = \rho_1 \xi$, $\frac{d\rho}{dr} = \rho_1 \frac{d\xi}{dr} + \xi \frac{d\rho_1}{dr}$ и

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{1 + \lambda \xi}{1 + (1 - \lambda) \xi}, \quad D = a_1 \sqrt{1 + \lambda \xi}, \quad u = \frac{a_1 \xi}{\gamma \sqrt{1 + \lambda \xi}}, \quad (15.30)$$

где $\lambda = \frac{\gamma + 1}{2\gamma}$. После несложных преобразований находим также, что

$$\Omega = \frac{2 + \lambda \xi}{2(1 + \lambda \xi)}, \quad G = \frac{\lambda \xi}{1 + \xi}.$$

В итоге уравнение (15.19) сводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\xi}{dr} = & - \frac{\nu \lambda r^\alpha \rho_1 \xi^4}{\gamma W(r) [4 + 2(2 + \lambda) \xi + \lambda(3 - \lambda) \xi^2]} - \\ & - \frac{\alpha \xi}{r} \frac{2 + 2(2 - \lambda) \xi + (2 - 3\lambda + 2\lambda^2) \xi^2}{4 + 2(2 + \lambda) \xi + \lambda(3 - \lambda) \xi^2} - \\ & - \frac{[3 + (3 + 2\lambda) \xi + \lambda(3 - \lambda) \xi^2] - \frac{1}{k} (1 + \xi) (1 + \lambda \xi)}{4 + 2(2 + \lambda) \xi + \lambda(3 - \lambda) \xi^2} \frac{\xi}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dr}. \end{aligned} \quad (15.31)$$

Отсюда нетрудно получить приближенное решение, соответствующее сильной ударной волне ($W(r) \rightarrow \infty$, $\xi \gg 1$), так как в данном случае уравнение (15.31) сводится к виду

$$\frac{d\xi}{dr} = - \frac{\alpha}{r} \frac{2 - 3\lambda + 2\lambda^2}{\lambda(3 - \lambda)} \xi - \left[1 - \frac{1}{k(3 - \lambda)} \right] \xi \frac{d \ln \rho_1}{dr}.$$

Интегрируя, получаем соотношение

$$\frac{\alpha(2 - 3\lambda + 2\lambda^2)}{\xi r} \frac{1}{\lambda(3 - \lambda)} \frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{k(3 - \lambda)} = \text{const}. \quad (15.32)$$

Учтем теперь, что

$$\xi \sim \frac{D^2}{a_1^2} \sim D^2 \rho_1^{-1 + \frac{1}{k}},$$

и, таким образом, находим из (15.32)

$$D \frac{1}{\rho_1} \frac{2 - \lambda}{k 2(3 - \lambda)} \frac{1}{r} - \frac{\alpha(2 - 3\lambda + 2\lambda^2)}{2\lambda(3 - \lambda)} \quad (15.33)$$

или, при $\rho_1 \sim \rho_1^k$,

$$D = \text{const} \rho_1^{-\frac{2 - \lambda}{2(3 - \lambda)}} \frac{1}{r} - \frac{\alpha(2 - 3\lambda + 2\lambda^2)}{2\lambda(3 - \lambda)} \quad (15.34)$$

Таким образом, в случае сильной сферической ударной волны ($\alpha = 2$) имеем при $\gamma = \frac{5}{3}$ и $\lambda = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} = \frac{4}{5}$ следующую аппроксимационную

формулу:

$$D = \text{const } \rho_1^{-\frac{3}{11}} r^{-\frac{\alpha}{4}}. \quad (15.35)$$

Если же ударная волна не является экстремально сильной, то уравнение (15.31) решается совместно с (15.21), для чего это последнее также записывается в безразмерных переменных. Энергия ударной волны обычно представляется в виде

$$W = \rho_{10} L \delta, \quad (15.36)$$

где ρ_{10} — давление на исходном уровне, L — характерная длина. Это может быть радиус звезды ($L = R_*$) или же шкала высот ($L = H$). Начальные значения безразмерных величин ξ_0 и δ_0 — давления на фронте ударной волны и энергии волны — подбираются таким образом, чтобы расчеты наилучшим образом соответствовали данным наблюдений.

В заключение отметим, что подробное изложение метода Бринкли — Кирквуда и его применение для интерпретации астрофизических наблюдений содержится в работах Оджерса, Бхатнагара и Кушвахи (G.F. Odgers, R.S. Kushwaha, 1960; M.S. Bhatnagar, R.S. Kushwaha, 1962, 1963a, б). Метод Бринкли — Кирквуда допускает обобщение для расчета параметров ударной волны, движущейся в неоднородной среде под произвольным углом θ к нормали (M. Saito, 1964), для учета поперечного магнитного поля (там же), для анализа задачи о распространении ударных волн в неоднородной движущейся среде (И.А. Климишин, А.Ф. Новак, 1970; А.Ф. Новак, 1974). Обобщение метода для учета давления и плотности энергии излучения дано в работе Окуды (Т. Okuda, 1974), на случай движения изотермической ударной волны в магнитном поле — в работах С.А. Силича (1978, 1980). Пределы применимости метода Бринкли — Кирквуда и сравнительный анализ всех аналитических методов даны в § 19.

§ 16. Метод характеристик (метод Уизема)

Система (6.1')—(6.3') дифференциальных уравнений космической газодинамики в простейшем случае адиабатического движения может быть сведена к дифференциальному уравнению второго порядка гиперболического типа. Как известно, при решении уравнений этого типа используется метод характеристик. Однако в космической газодинамике он практически не употребляется. Дело в том, что при установлении распределения параметра газа (Π) в пространстве (Π, r, t) методом характеристик необходимо задать его значение вдоль определенной кривой на плоскости (r, t). Такое условие в газодинамике может быть получено, вероятно, лишь в двух случаях: а) если движение газа обусловлено действием поршня, движущегося по наперед заданному закону, или б) если скорость движения ударной волны, возмущающей газ, является заданной функцией расстояния (времени). Очевидно, что оба эти предположения для космических условий являются искусственными.

По-видимому, впервые в космической газодинамике метод характеристик был использован Копалом и Лином (Z. Kopal, C.C. Lin, 1951) при рассмотрении задачи о вспышке новой звезды. С помощью этого метода проводились расчеты поля скоростей и плотности в атмосферах пульсирующих переменных звезд RR Лиры (P.C. Ирошников, 1961) и W Девы (Ch. Whitney, 1956). В этой последней работе предполагалось, что изотермическая атмосфера звезды "снизу" подвергается воздействию поршня, движущегося по синусоидальному закону.

Напомним основные исходные соотношения метода характеристик на примере плоского адиабатического движения газа (давление и плотность связаны законом $p = K\rho^\gamma$) в постоянном поле тяжести (ускорение $g = \text{const}$). В случае адиабатического движения с постоянным γ дифференциалы давления и плотности связаны с дифференциалом скорости звука

$$a(a^2 = \gamma \frac{p}{\rho}) \text{ соотношениями}$$

$$dp = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{a} da, \quad d\rho = \frac{2}{\gamma-1} \frac{\rho}{a} da.$$

Поэтому уравнения (6.1') при $\alpha = 0$ и (6.2') можно переписать в виде

$$\frac{2}{\gamma-1} \frac{\partial a}{\partial t} + u \frac{2}{\gamma-1} \frac{\partial a}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2a}{\gamma-1} \frac{\partial a}{\partial x} + g = 0,$$

сложение и вычитание которых приводит к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial t} [u + gt \pm \frac{2a}{\gamma-1}] + (u \pm a) \frac{\partial}{\partial x} [u + gt \pm \frac{2a}{\gamma-1}] = 0. \quad (16.1)$$

Отсюда следует, что величины

$$J_{\pm} = u + gt \pm \frac{2a}{\gamma-1}$$

— инварианты Римана — сохраняют свое значение вдоль кривых

$$\frac{dx}{dt} = u \pm a,$$

которые называются соответственно C_+ - и C_- -характеристиками задачи. Это линии на плоскости x, t , вдоль которых распространяются малые возмущения давления и плотности, а также величины J_+ (вдоль C_+ -характеристики) и J_- (вдоль C_- -характеристики). Их принято также называть условиями направления. В каждый момент времени через определенную точку пространства слабое возмущение (звуковая волна) может распространяться "вправо" — в направлении движения газа и "влево" — против его движения. Математическим следствием этого является возможность через каждую точку плоскости (x, t) провести две характеристики: C_+ и C_- .

При численных расчетах дифференциалы в характеристических уравнениях заменяются конечными разностями. На плоскости (x, t) пересечением двух этих семейств характеристик образуется сетка. При расчетах находят положения узловых точек на плоскости и приближенные значения параметров газа в этих точках. Так, если параметры газа известны в точках 1 и 2 на кривой $x(t)$, то

1) из условий направления находят приближенное положение точки 3 (т.е. x_3 и t_3) при пересечении характеристики первого семейства, выходящей из точки 1, и характеристики второго семейства, выходящей из точки 2:

$$\left. \begin{aligned} x_3 - x_1 &= (u_1 + a_1)(t_3 - t_1), \\ x_3 - x_2 &= (u_2 - a_2)(t_3 - t_2); \end{aligned} \right\} \quad (16.2)$$

2) приближенные значения u_3 и a_3 при $g = 0$ находятся решением системы уравнений — условий совместности, записанных в конечных разностях:

$$\left. \begin{aligned} u_3 &= \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{2}{\gamma - 1} \frac{a_1 - a_2}{2}, \\ a_3 &= \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u_1 - u_2}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (16.3)$$

Результаты вычислений несколько раз улучшаются, например, путем замены функций u_1 и u_2 в точке 3 их средним значением $u'_1 = \frac{u_1 + u_3}{2}$ и $u'_2 = \frac{u_2 + u_3}{2}$, где u_3 — функция, найденная в результате предыдущего цикла вычислений.

Трудности, возникающие при использовании метода характеристик для расчета параметров газа в атмосфере звезды, если в ней под действием нижележащих слоев образуются ударные волны, видны уже из следующего элементарного примера. Пусть в среде с постоянной плотностью движется поршень с постоянной скоростью U . Для простоты будем считать возникшую при этом ударную волну сильной, так что ее скорость $D = \frac{\gamma + 1}{2} U$, скорость звука за фронтом ударной волны $a = \sqrt{\frac{\gamma(\gamma - 1)}{2}} U$.

Тогда законы движения поршня и ударной волны имеют соответственно вид

$$x_{\text{п}} = Ut, \quad x_{\text{ув}} = \frac{\gamma + 1}{2} Ut,$$

а уравнения характеристик:

$$x_+ = \left(1 + \sqrt{\frac{\gamma(\gamma - 1)}{2}} \right) Ut + C_1, \quad x_- = \left(1 - \sqrt{\frac{\gamma(\gamma - 1)}{2}} \right) Ut + C_2.$$

Отсюда следует, что (рис. 38) в любую находящуюся на поршне точку A_i переносится лишь вдоль C_- -характеристики инвариант J_- , образовавшийся "в прошлом" на фронте ударной волны. И, наоборот, C_+ -характеристика, унося с собой значение инварианта J_+ , образовавшееся в точке A_i на поршне, уходит "в будущее" и спустя некоторое время Δt_i догоняет фронт ударной волны. Но в неоднородной среде ударная волна ускоряется. Поэтому поле скоростей за ее фронтом становится очень сложным, и расчеты приходится прекращать (Ch. Whitney, 1956).

Поскольку C_+ -характеристика достигает фронта ударной волны и ее наклон на (x, t) -плоскости близок к наклону траектории ударной волны, то приближенно мож-

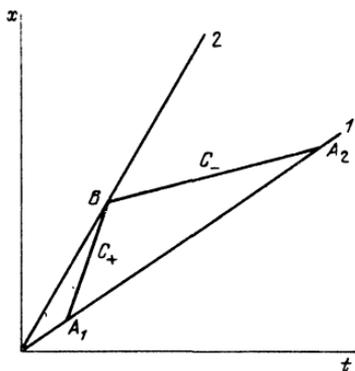


Рис. 38. Направление C_+ и C_- -характеристик в случае движения газа, ограниченного поршнем (1) и фронтом ударной волны (2).

но считать, что параметры газа на фронте ударной волны, связанные с их значениями перед фронтом условиями (8.18), также удовлетворяют уравнению C_+ -характеристики. Это предположение и было сделано Уиземом (G.B. Whitham, 1958). Из системы (6.1') и (6.3') в адиабатическом сферически-симметричном случае следует, что вдоль C_+ -характеристики выполняется условие

$$dp + \rho a du + \frac{\rho a g}{u+a} dr + \frac{2\rho a^2 u}{u+a} \frac{dr}{r} = 0, \quad (16.4)$$

из которого следует записанное выше уравнение для J_+ при $g = \text{const}$, $\rho = K p^\gamma$ и $r \rightarrow \infty$. В случае сильной ударной волны из (2.18) следует, что

$$p = \frac{2}{\gamma+1} \rho_1 D^2, \quad \rho = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} \rho_1, \quad u = \frac{2}{\gamma+1} D. \quad (16.5)$$

Подставляя (16.5) в (16.4) и пренебрегая в последнем третьим слагаемым, которое существенно меньше первых двух, находим дифференциальное уравнение, приближенно описывающее изменение скорости движения сферической ударной волны в неоднородной среде,

$$\frac{dD}{D} = - \frac{\frac{d\rho_1}{\rho_1}}{2 + \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}} - \frac{2 \frac{dr}{r}}{\left[1 + \sqrt{\frac{2}{\gamma(\gamma-1)}}\right] \left[1 + \sqrt{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma}}\right]}. \quad (16.6)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$D = \text{const } \rho_1^{\frac{1}{2 + \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}}} r^{\frac{2}{\left[1 + \sqrt{\frac{2}{\gamma(\gamma-1)}}\right] \left[1 + \sqrt{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma}}\right]}} \quad (16.7)$$

В частности, при $\gamma = \frac{5}{3}$ оно сводится к простой асимптотической формуле

$$D = \text{const } \rho_1^{-0,236} r^{-0,451}. \quad (16.8)$$

Отметим, что хотя при решении уравнения (16.6) учитывающий гравитацию член был отброшен, ее влияние здесь учтено косвенным образом, так как ею определяется равновесное распределение плотности среды.

Метод Уизема был обобщен для учета давления и плотности энергии излучения (S. Sakashita, Y. Tanaka, 1962), на случай релятивистских ударных волн (И.А. Климишин, А.Ф. Новак, 1975; А.Ф. Новак, 1975), а также использован Кондо (M. Kondo, 1975) при изучении эволюции структур, возникающих в первоначально однородной среде за счет возмущений, неустойчивых по Джинсу. Предполагается, что в будущем этот метод сможет конкурировать с методом конечных разностей в смысле удобства расчетов и в точности локализации фронта ударной волны (P.J. Morel, A. Baglin, 1980).

§ 17. Метод Чизнелла

Излагаемый ниже метод был развит Чизнеллом (R.F. Chisnell, 1955) для случая среды с постоянным давлением. Позже он был обобщен на случай переменного давления, имеющего место в оболочке звезды, а также для учета сферичности, магнитного поля, поля излучения и релятивистских эффектов (Y. Ono, S. Sakashita, N. Ohyama, 1961; Y. Ono, S. Sakashita, 1961).

Сущность метода, обобщенного на случай неоднородной среды, заключается в том, что среда, по которой распространяется ударная волна, представляется совокупностью бесконечного множества тонких однородных слоев, на поверхностях раздела которых давление и плотность изменяются скачкообразно. При переходе ударной волны через поверхность раздела двух слоев различной плотности обратно, в сторону более плотной среды, пойдут волны разрежения, учет взаимодействия которых между собой и с движущейся ударной волной является чрезвычайно сложной задачей. Если же, в первом приближении, пренебречь двойными отражениями и отражениями от центра конфигурации, то можно получить сравнительно простое дифференциальное уравнение, которым описывается изменение скорости движения сильной ударной волны в неоднородной среде.

Рассмотрим оболочку звезды, разделенную на однородные слои с массой Δm (в расчете на единицу площади) и разностью давлений на границах слоя, равной Δp . При переходе ударного фронта через границу слоя ударная волна преломляется и отражается (рис. 39). Очевидно, что фиксированный слой массы подвергается одинаковому действию силы тяжести как до, так и после прохождения ударной волны. Поэтому можно записать следующие очевидные соотношения:

$$p_4 - p_3 = p_5 - p_1 = \Delta p = -g\Delta m. \quad (17.1)$$

При переходе через границу двух сред ударная волна ускоряется (или замедляется). Однако для скоростей движения газа по обеим сторонам границы раздела можно записать

$$u_3 = u_4, \quad u_1 = u_5 \quad (17.2)$$

($u_1 = 0$, если газ до прохождения ударной волны покоился). Эти соотношения можно назвать условиями неразрывности движения, свидетельствующими о том, что газ по одну и другую стороны поверхности раздела слоев движется с одинаковой скоростью по отношению к центру звезды. Скорости u_1 и u_5 , измеренные относительно фронта волны и равные

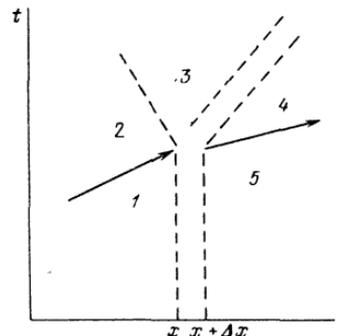
$$u_1 = u_{10} - D, \quad u_5 = u_{50} - D,$$

не будут удовлетворять этим условиям, так как при переходе через границу раздела двух сред ударная волна ускоряется.

Введем обозначения

$$z_{12} = \frac{p_2}{p_1}, \quad z_{54} = \frac{p_4}{p_5},$$

Рис. 39. Схема преломления ударной волны при переходе через границу раздела двух сред с различной плотностью.



и перепишем условия сохранения на фронте ударной волны в виде

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{\eta_1 + z_{12}}{1 + \eta_1 z_{12}}, \quad \eta_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}, \quad (17.3)$$

$$D = u_{10} + \left\{ \frac{\rho_1}{\rho_1} \frac{\eta_1 + z_{12}}{1 - \eta_1} \right\}^{1/2}, \quad (17.4)$$

$$u_1 - u_2 = u_{20} - u_{10} = (z_{12} - 1) \left\{ \frac{\rho_1}{\rho_1} \frac{1 - \eta_1}{\eta_1 + z_{12}} \right\}^{1/2} = \Phi_{12}. \quad (17.5)$$

Они будут совершенно такими же и для ударной волны, движущейся в слое 5.

Фронт волны разрежения движется в сторону слоя 2 со скоростью, равной скорости звука в этой среде. В системе координат, связанной с центром звезды, он движется вслед за фронтом ударной волны ("сносится" движущейся средой слоя 2) со скоростью D_p . Поэтому скорости газа относительно фронта волны разрежения равны соответственно

$$u_3 = u_{30} - D_p, \quad u_2 = u_{20} - D_p.$$

Из основных свойств волн разрежения следует, что

$$u_3 > u_2, \quad \rho_3 < \rho_2, \quad p_3 < p_2.$$

Поэтому аналогичное (17.5) соотношение для фронта волны разрежения будет иметь вид

$$u_2 - u_3 = u_{20} - u_{30} = \{z_{23} - 1\} \left\{ \frac{\rho_2(1 - \eta_1)}{\rho_2(\eta_1 + z_{23})} \right\}^{1/2} = \Phi_{23}. \quad (17.5')$$

Здесь $z_{23} = \frac{\rho_3}{\rho_2} < 1$, поэтому и $\Phi_{23} < 0$. Воспользовавшись условиями (17.2), находим

$$\Phi(z_{12}, \rho_1, \rho_1) - \Phi(z_{23}, \rho_2, \rho_2) = \Phi(z_{54}, \rho_5, \rho_5). \quad (17.6)$$

В свою очередь равенство (17.1) можно записать в виде

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} \frac{\rho_3}{\rho_2} = \frac{\rho_4}{\rho_5} \frac{\rho_5}{\rho_1} - \frac{\Delta p}{\rho_1} = \left(1 + \frac{\Delta p}{\rho_1}\right) \frac{\rho_4}{\rho_5} - \frac{\Delta p}{\rho_1}.$$

Отсюда следует, что

$$z_{12} z_{23} = \left(1 + \frac{\Delta p}{\rho_1}\right) z_{54} - \frac{\Delta p}{\rho_1}. \quad (17.7)$$

Далее предположим, что при переходе от слоя 1 к слою 5 плотность и давление изменяются незначительно, так что

$$\rho_5 = \rho_1 + d\rho, \quad z_{54} = z_{12} + dz = z + dz, \quad (17.8)$$

где $\frac{d\rho}{\rho}$, $\frac{dz}{z}$ — малые величины, квадратами которых можно пренебречь, индекс "12" в дальнейшем будем опускать.

Предположим, также, что в равновесном состоянии среда является политропной, т.е. что давление и плотность в ней связаны зависимостью $p = \text{const } \rho^k$. Для изотермической среды $k = 1$ для модели Эддингтона $k = 4/3$ и для конвективной модели $k = 5/3$. Очевидно, что $\frac{dp}{p} = k \frac{d\rho}{\rho}$.

Таким образом, из (17.6) – (17.8) следует дифференциальное уравнение для скачка давления на фронте плоской ударной волны, движущейся в неоднородной среде,

$$\frac{dz}{d \ln \rho_1} = \frac{(k-1) + 2k \sqrt{\frac{1+\eta_1 z'}{(1+\eta_1)z}}}{\frac{1}{\eta_1+z} - \frac{2}{z-1} \left[1 + \sqrt{\frac{1+\eta_1 z'}{(1+\eta_1)z}} \right]}, \quad (17.9)$$

которое при $z \gg 1$ имеет элементарное решение

$$z = \text{const } \rho_1 \frac{(k-1) + 2k \sqrt{\frac{\eta_1}{1+\eta_1}}}{1 + 2 \sqrt{\frac{\eta_1}{1+\eta_1}}} \quad (17.10)$$

Это последнее можно записать иначе, учитывая, что

$$z = \frac{p_2}{\rho_1} = \frac{2}{\gamma+1} \frac{\rho_1}{\rho_1} D^2,$$

a

$$\frac{p_1}{\rho_1} = \text{const } \rho_1^{k-1}.$$

В результате находим закон движения плоской ударной волны в неоднородной среде в рамках метода Чизнелла:

$$D = \text{const } \rho_1^{-\frac{1}{2 + \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}}} \quad (17.11)$$

В частности, при $\gamma = \frac{5}{3}$ из (17.11) следует

$$D = \text{const } \rho_1^{-0,236}. \quad (17.12)$$

Для учета сферичности ударной волны числитель правой части уравнения (17.9) дополняется выражением (У. Опо, 1960)

$$1 - \frac{4}{(1-\eta_1)(z-1)} \left(\frac{d \ln \rho_1}{d \ln r} \right)^{-1} \sqrt{(1+\eta_1)z(1+\eta_1 z)}$$

Таким образом, для сильной сферической ударной волны верно соотношение

$$z \sim r \frac{4}{\left(1 + \sqrt{\frac{2}{\gamma(\gamma-1)}} \right) \left(1 + \frac{2(\gamma-1)}{\gamma} \right)}$$

или $z \sim r^{-0,9}$, если $\gamma = 5/3$. В целом при $\gamma = 5/3$ скорость сильной сферической ударной волны следующим образом зависит от геометрической координаты r и начальной плотности среды ρ_1 :

$$D \approx \text{const } \rho_1^{-0,236} r^{-0,451}, \quad (17.13)$$

т.е. метод Чизнелла дает в этом случае тот же результат, что и метод Уизема (см. (16.8)).

Метод Чизнелла был обобщен для учета различных факторов, имеющих астрофизическое значение: для учета потерь энергии ударной волны на ионизацию газа (И.А. Климишин, 1962), для учета давления и плотности энергии излучения и на случай плоских релятивистских ударных волн (Y. Ono, S. Sakashita, N. Ohya, 1961).

§ 18. Другие приближенные методы

В 50-х годах было развито и несколько других приближенных методов решения уравнений космической газодинамики, которые, однако, оказались или весьма сложными или же малоэффективными вследствие своей неточности. Поэтому мы здесь ограничимся лишь кратким упоминанием о некоторых из них.

а) Линеаризация уравнений газодинамики

Метод линеаризации уравнений газодинамики при решении задачи о движении слабых ударных волн в звездах был использован Уиземом (G.V. Whitham, 1953) и Симоном (R. Simon, 1955).

Уизем линеаризовал уравнение газодинамики по малой величине

$$\psi(r, t) = m(r, t) - M(r),$$

где $m(r, t)$ — масса, находящаяся внутри сферы радиуса r в момент времени t . Пусть $M(r)$, $\rho_1(r)$ и $p_1(r)$ — масса, заключенная внутри сферы радиуса r , плотность и давление на расстоянии r от центра равновесной конфигурации. Можно предположить, что звезда является изэнтропической, а движение адиабатическим, т.е. что соотношение $p = K\rho^\gamma$ выполняется не только для каждого элемента вещества в процессе его движения, но и вдоль звезды (с той же самой постоянной K). В этом случае из уравнений (6.1') — (6.3') следует

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{4\pi r^2 \rho_1} \frac{\partial \psi}{\partial t}, \quad p(r, t) = p_1 + \frac{a_1^2}{4\pi r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \\ \rho(r, t) &= \rho_1 + \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \\ a &= \left(\frac{dp}{d\rho}\right)^{1/2} = a_1 + \frac{(\gamma - 1)a_1}{2\rho_1} \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (18.1)$$

Этими выражениями и определяются значения скорости u , плотности ρ и давления p после того, как найдена функция $\psi(r, t)$. Линеаризованное уравнение для функции $\psi(r, t)$ находится из уравнения для сохранения импульса после подстановки в него соотношений (18.1) с учетом

$$(6.4) \text{ и соотношения } g = g_1 + \frac{G\psi}{r^2}, \text{ так что}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = a_1^2 \left\{ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \left[\frac{2}{r} + \frac{2(2 - \gamma)a_1'}{a_1} \right] \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{4\pi G\rho_1}{a_1^2} \psi \right\}, \quad (18.2)$$

где $a_1' = \frac{da_1}{dr}$. Решение для функции $\psi(r, t)$ ищется далее в виде ряда.

Задавая определенный закон изменения скорости звука с расстоянием, Уизем в конечном итоге и получил асимптотические выражения для прироста скорости и давления на фронте ударной волны. Проведенный для ряда конкретных звездных моделей анализ показал, однако, что решение линеаризованного уравнения удовлетворительно описывает общую картину движения лишь в случае, если скорость вещества за фронтом ударной волны в два-три раза меньше его параболической скорости. Поэтому метод не может быть использован при решении задач, связанных с выходом ударной волны на поверхность звезды, при котором происходит выброс части ее оболочки в межзвездное пространство.

Симон, изучая движение слабой ударной волны в оболочке обобщенной модели Роша (с распределением плотности по закону $\rho = Br^{-\alpha}$) при решении линеаризованных уравнений газодинамики использовал метод операционного исчисления. Полученное решение может быть использовано в случае $\gamma = 4/3$, однако его нельзя применить при $\gamma = 5/3$.

б) *Разложение в ряд по параметру*

Оригинальный, но чрезвычайно громоздкий метод для решения задачи о движении ударной волны, возникшей в центре политропной звезды в результате мгновенного выделения определенного количества энергии E , был предложен Сакураи (А. Sakurai, 1956). Задача характеризуется двумя параметрами:

$$R_0 = \left(\frac{E}{4\pi\rho_c} \right)^{1/3}, \quad L = \left(\frac{3a_c}{2\pi G\rho_c} \right)^{1/2}, \quad (18.3)$$

где ρ_c , ρ_c и a_c — значения плотности, давления и скорости звука в центре модели. В задаче вместо переменных r и t вводятся новые — $x = \frac{r}{R}$ и $z = \frac{R}{R_0}$, где R характеризует положение фронта ударной волны. Параметры газа определяются через безразмерные функции

$$\left. \begin{aligned} \frac{u}{D} = f(x, z), \quad \frac{p}{\rho_c} = \pi(z) \left(\frac{D}{a} \right)^2 g(x, z), \\ \frac{\rho}{\rho_c} = \sigma(z) h(x, z). \end{aligned} \right\} \quad (18.4)$$

Функции $\pi(z) = \frac{p_1(z)}{\rho_c}$ и $\sigma(z) = \frac{\rho_1(z)}{\rho_c}$, определяющие параметры газа в заданной точке равновесной конфигурации через соответствующие их значения в ее центре, находятся в виде степенных рядов относительно переменной z из условия гидростатического равновесия политропной модели; функции $f(x, z)$, $g(x, z)$ и $h(x, z)$ также представляются рядами типа

$$f(x, z) = f_0(x) + zf_1(x) + z^2f_2(x) + \dots, \quad (18.5)$$

после чего функции $f_i(x)$ и т.д. находятся путем решения системы уравнений газодинамики в i -м приближении. Для этого система уравнений газодинамики с помощью замены операторов дифференцирования

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt} = \frac{D}{R} \left\{ (f-x) \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial z} \right\} \quad (18.6)$$

и подстановкой (18.4) и (18.5) сводится к безразмерному виду. В даль-

нейшем приравняются выражения, стоящие при одинаковых степенях z , вследствие чего получаются системы для определения функций $f_i(x)$, $g_i(x)$ и $h_i(x)$. При этом используется также уравнение сохранения энергии в интегральном виде. В конечном итоге Сакураи получил выражение для скорости движения фронта ударной волны (при $\gamma = 7/5$) в виде

$$D = 1,3a_c \left(\frac{R}{R_0} \right)^{-3/2} \left\{ 1 + 0,41A^2 \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 + \dots \right\}, \quad (18.7)$$

где $A = R_0/L$. Однако в случае $A \gg 1$ (сильный взрыв) решение пригодно лишь для центральных областей звезды и не может быть использовано для анализа особенностей движения ударной волны в оболочке звезды.

в) Предположение о профиле ударной волны

Предположение об определенном профиле волны, т.е. о законе изменения параметров газа в данной точке пространства со временем было сделано уже Бринкли и Кирквудом (функция ν). Вейман (R. Weymann, 1967) при рассмотрении задачи о нагреве звездных хромосфер ударными волнами предположил, что параметры газа за фронтом волны изменяются по линейному закону (зубчатый профиль волны):

$$p = p_2 - \frac{p_2 - p_1}{\Pi} t, \quad u = u_2 - \frac{u_2 - u_1}{\Pi} t, \quad (18.8)$$

где Π — период волнового движения (промежуток времени между двумя прохождениями ударной волны через заданную точку). Это предположение позволяет провести усреднение уравнений газодинамики и получить уравнение для количества энергии W , расходуемой на нагрев хромосферы в расчете на единицу массы вещества и в единицу времени

$$W = - \frac{d}{dx} \left[\frac{\xi^2}{12} \left(\frac{\bar{p}^3 \bar{V}}{\gamma} \right)^{1/2} \right] \bar{V}, \quad (18.9)$$

где \bar{p} и \bar{V} — средние значения давления и удельного объема, $\xi = \frac{p_2 - p_1}{\bar{p}}$.

Предположение о профиле волны позволяет, в частности, получить закон распределения плотности в атмосфере звезды, периодически возмущаемой ударной волной (см. § 27).

В некоторых случаях (например, при изучении движения оболочки звезды, сброшенной под действием сильной ударной волны) оказывается возможным предположить, что давление в каждый заданный момент времени постоянно вдоль геометрической координаты. Поэтому в уравнениях газодинамики можно принять, что $\frac{\partial p}{\partial r} = 0$. Это условие, предопределяющее закон высвечивания оболочки, т.е. уменьшение внутренней энергии газа при его движении, позволяет свести задачу о движении оболочки к автомодельной (В.Г. Горбачкий, 1962; В.А. Метелицын, 1969).

§ 19. Пределы применимости приближенных аналитических методов

Рассмотренные выше приближенные методы решения уравнений газодинамики используются и сегодня при решении конкретных астрофизических задач. Например, не так давно при изучении нагрева хромосферы Солнца был использован метод характеристик (P. Ulmschneider, 1977) и метод Бринкли — Криквуда (G. Gonczi, A. Mangency, P. Souffrin, 1977).

С.А. Силич и П.И. Фомин (1980) изучали с помощью метода Бринкли — Кирквуда особенности распределения скоплений газа в галактиках под действием цилиндрических ударных волн, возникающих в результате активности их ядер. Некоторые особенности движения ударных волн в звездных атмосферах исследованы методом разложения в ряд по параметру (Р. Кап, 1975) и др.

Здесь уместно отметить, что при решении отдельных астрофизических задач расчет параметров ударных волн, движущихся в заданной среде, является промежуточным результатом, на основании которого делаются дальнейшие исследования. Существующая почти всегда определенная условность исходной модели иногда делает излишним стремление к высокой точности при решении такой промежуточной задачи. В этом случае достаточно было бы использовать аппроксимационную формулу, которой можно с достаточной степенью точности описать движение нестационарной ударной волны в среде с заданным распределением плотности.

Как видно из соотношений (14.12), (15.34), (16.7) и (17.13), в случае экстремально сильных ударных волн изложенные выше методы приводят к следующей зависимости скорости ударной волны D от геометрической координаты r и плотности среды $\rho(r)$:

$$D = C\rho^{-a}r^{-b}. \quad (19.1)$$

Здесь показатели степеней a и b являются некоторыми функциями параметров γ (отношение удельных теплоемкостей) и α ($\alpha = 0, 1$ и 2 соответственно для плоской, цилиндрической и сферической ударной волны). Постоянная C определяется из условий, что $D = D_0$ при $r = r_0$ и $\rho(r_0) = \rho_0$, так что

$$a_{\text{БК}} = \frac{3\gamma - 1}{2(5\gamma - 1)}, \quad b_{\text{БК}} = \frac{2\gamma^2 - \gamma + 1}{(5\gamma - 1)(\gamma + 1)} \alpha,$$

$$a_{\text{У,Ч}} = \left(2 + \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma - 1}}\right)^{-1}, \quad b_{\text{У,Ч}} = \frac{\gamma \sqrt{2(\gamma - 1)} \alpha}{(2 + \sqrt{2\gamma(\gamma - 1)})(\sqrt{\gamma} + \sqrt{2(\gamma - 1)})}.$$

В частности, при $\gamma = \frac{5}{3}$ имеем $a_{\text{БК}} = 0,273$, $b_{\text{БК}} = 0,25\alpha$; $a_{\text{У,Ч}} = 0,236$,

$b_{\text{У,Ч}} = 0,225\alpha$, тогда как в случае $\gamma = \frac{4}{3}$ $a_{\text{БК}} = 0,265$, $b_{\text{БК}} = 0,244\alpha$, $a_{\text{У,Ч}} = 0,207$, $b_{\text{У,Ч}} = 0,188\alpha$. Здесь приняты сокращения: БК — метод Бринкли — Кирквуда, У — Уизема, Ч — Чизнелла.

Исходя из этого, С.А. Кап (1967) предложил следующую аппроксимационную формулу для расчета скорости экстремально сильной сферической ударной волны:

$$D = C(\rho r^2)^{-1/4}. \quad (19.2)$$

В то время, однако, уже было известно, что все эти методы дают завышенное значение скорости ударной волны (Д.К. Надёжин, Д.А. Франк-Каменецкий, 1965). Поэтому С.А. Кап подчеркнул необходимость решения уравнений газодинамики методом конечных разностей при различных законах изменения плотности с тем, чтобы установить закон движения ударной волны в неоднородной среде, после чего сопоставить различные приближенные методы и проанализировать условия их применимости при решении конкретных задач космической газодинамики. Эту

программу в определенной степени удалось выполнить (И.А. Климишин, Б.И. Гнатык, 1981).

При расчетах были рассмотрены три различных случая распределения плотности в неоднородной среде:

а) оболочка со степенным законом изменения плотности,

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^m, \quad \Delta = - \frac{d \ln \rho}{d \ln r} = m, \quad (19.3)$$

б) политропная оболочка,

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{1-r}{r} \right)^n, \quad \Delta = \frac{n}{1-r}, \quad (19.4)$$

в) атмосфера с распределением плотности по экспоненциальному закону,

$$\rho = \rho_0 \exp \left(- \frac{r-r_0}{H} \right), \quad \Delta = \frac{r}{H}. \quad (19.5)$$

Здесь r — расстояние от центра звезды, r_0 — начальное положение фронта ударной волны, H — масштабная высота (r , r_0 и H выражены в единицах радиуса звезды), ρ_0 — постоянная, n — индекс политропы. Очевидно, что в случае любого непрерывного (без скачков) закона изменения плотности в окрестности некоторой точки r_* такой, что $\rho(r_*) \neq 0$, плотность ρ можно аппроксимировать выражением $\rho = \rho(r_*) \left(\frac{r}{r_*} \right)^\Delta$.

В каждом случае предполагалось, что сильная ударная волна образуется в результате кратковременного движения поршня по направлению к внешним слоям звезды. Параметры ударной волны находились сначала методом конечных разностей (см. гл. 4), потом — методами Бринкли — Кирквуда и Уизема. Уравнения (15.14)–(15.26) и (16.6) решались методом Рунге — Кутты с использованием начальных данных, полученных методом конечных разностей на момент остановки поршня.

Анализ проведенных расчетов показал, что сильная ударная волна движется ускоренно, если $\Delta > \alpha + 1$, т.е. в сферическом случае при $\Delta > 3$, и замедленно при $\Delta < \alpha + 1$, и что закон движения сильной ударной волны в неоднородной среде с распределением плотности типа (19.3)–(19.5) можно аппроксимировать выражением

$$D = C(\rho r^{\alpha+1})^{-1/2} \quad (19.6)$$

для замедляющихся волн и

$$D = C(\rho r^{\alpha+1})^{-1/5} \quad (19.7)$$

для ускоряющихся ударных волн. Используя обозначение $\Delta = \frac{d \ln \rho}{d \ln r}$, можно формулы (19.6) и (19.7) в окрестностях произвольной точки записать в виде

$$\frac{d \ln D}{d \ln r} = L = \begin{cases} \frac{\Delta - (\alpha + 1)}{2}, & \Delta < \alpha + 1, \\ \frac{\Delta - (\alpha + 1)}{5}, & \Delta > \alpha + 1. \end{cases} \quad (19.8)$$

Таблица 5. Зависимость безразмерного градиента скорости ударной волны $L = \frac{d \ln D}{d \ln r}$ от параметра $m = \frac{d \ln \rho_1}{d \ln r}$

m	L(8)	L(2)	$\gamma = 5/3$			$\gamma = 4/3$		
			L _{кр}	L _{БК}	L _у	L _{кр}	L _{БК}	L _у
0	-1,50	-0,50	-1,54	-1,63	-0,45	-1,53	-1,66	-0,37
2	-0,50	0,00	-0,52	-0,47	0,02	-0,51	-0,54	0,04
3	0,00	0,25	-0,07	-0,02	0,26	-0,04	-0,13	0,25
4	0,20	0,50	0,20	0,49	0,49			
5	0,40	0,75	0,40	0,78	0,73			
6	0,60	1,0	0,60	1,10	0,97	0,60	1,00	0,87

Если $\Delta = \text{const}$, то выражения (19.8) можно использовать наравне с (19.6) – (19.7) для установления соотношения между скоростями ударной волны в двух произвольных точках r_1 и r_2 . Сравнивая (19.7) с (19.1), находим $a_{(8)} = 0,20$, $b_{(8)} = 0,2(1 + \alpha)$.

Аппроксимационные формулы (19.6) и (19.7) получены на основе следующих результатов:

а) Из автомодельного решения Л.И. Седова (1977) для точечного взрыва в среде, плотность в которой изменяется по закону (19.3), следует

$$L_A = \frac{m - (\alpha + 1)}{2}, \text{ причем упомянутое решение может быть использовано}$$

при $m < \alpha + 1$. С другой же стороны, из соотношения типа (19.2) имеем

$$L_k = \frac{m - \alpha}{4} \text{ и, следовательно, аппроксимация (19.2) вообще не может}$$

быть использована при $m < \alpha + 1$, в частности, при $m = 0$. Результаты специальных расчетов (И.А. Климишин, Б.И. Гнатык, 1981) приведены в табл. 5 и для случая $m = 5$ на рис. 40. Здесь $L_{(8)}$, $L_{(2)}$, $L_{кр}$; $L_{БК}$ и

L_y – соответствующие значения параметра $L = \frac{d \ln D}{d \ln r}$, полученные из

аппроксимаций (19.7) и (19.2) методом конечных разностей (кр), методом Бринкли – Кирквуда (БК) и методом Уизема (У). Так как метод Чизнелла дает практически одинаковую с методом Уизема зависимость скорости ударной волны от плотности среды, то расчеты этим методом не проводились.

Как видно, результаты расчетов методом конечных разностей не только неплохо согласуются с аппроксимационной формулой (19.7), но и соответствуют автомодельному решению в области его применимости, т.е. при $m < \alpha + 1$. Метод Бринкли – Кирквуда полностью применим при $m \leq \alpha + 1$, т.е. для замедляющихся ударных волн. Это понятно, так как сам метод разработан для однородной среды. При $m > \alpha + 1$ он дает уже неверные результаты: скорость ударной волны оказывается существенно завышенной по сравнению с ее истинным значением.

В то же время скорость ударной волны, найденная по методу Уизема, не соответствует результатам расчета методом конечных разностей ни при каких m – она всегда завышена, хотя при $m > \alpha + 1$ и несколько меньше, чем это следует из метода Бринкли – Кирквуда.

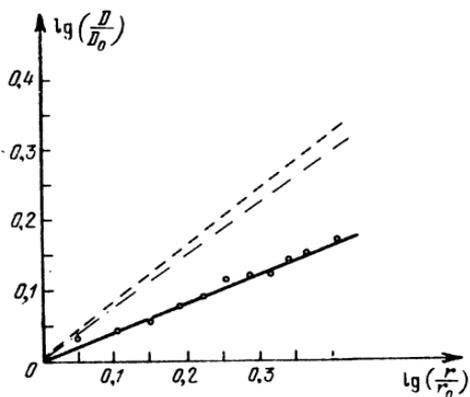


Рис. 40.

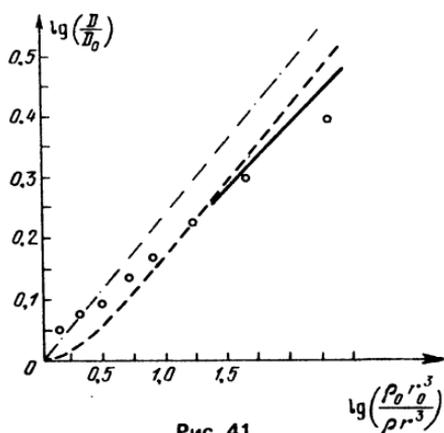


Рис. 41.

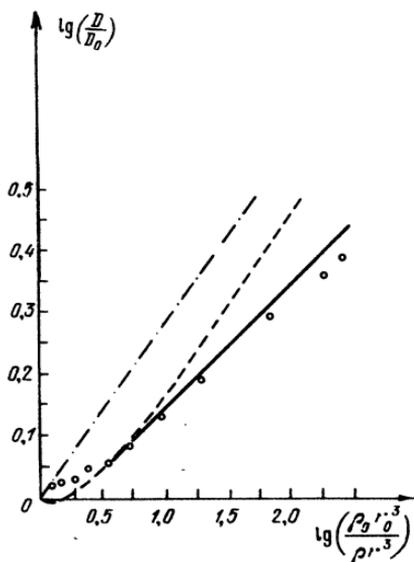


Рис. 42.

Рис. 40. Зависимость скорости сильной сферической ударной волны от расстояния в оболочке, в которой изменяется по закону $-\frac{d \ln \rho}{d \ln r} = m = 5$. Черные кружки — результаты расчета численным методом, штриховая линия — методом Бринкли—Кирквуда, штрих-пунктирная — методом Уизема, сплошная линия — аппроксимация (19.7).

Рис. 41. Изменение скорости сильной сферической ударной волны, движущейся в политропной оболочке индекса $n = 3,25$. Сплошная линия — ход автомодельного решения в области его применимости, остальные обозначения те же, что и на рис. 40.

Рис. 42. Изменение скорости сильной сферической ударной волны в атмосфере с экспоненциальным законом изменения плотности. Сплошная линия — аппроксимация (19.7), остальные обозначения как на рис. 40.

Очевидно, что эти выводы имеют общий характер, т.е. они пригодны в случае сред с произвольным законом изменения плотности, так как любой закон изменения плотности в окрестности некоторой точки r_* можно, как уже отмечалось, аппроксимировать степенным законом.

б) В случае движения сильных ударных волн во внешних слоях политропы (плоская задача: $\alpha = 0$, $r \approx 1$, так что $\Delta = \frac{n}{1-r} \gg 1$) из автомодельного решения (см. табл. 4) следует такое значение параметра a в формуле (19.1): при $\gamma = 5/3$ $a_A = \frac{1}{q} = 0,214$, если $n = 3,25$ и $a_A = 0,220$ при $n = 1,5$. При $\gamma = 4/3$ имеем соответственно 0,185 и 0,191. Таким образом, в области значений параметра γ , представляющих астрофизический интерес ($4/3 \leq \gamma \leq 5/3$), эти решения довольно хорошо аппроксимируются формулой (19.7).

Анализ задачи о распространении ударной волны, возникающей во внешних слоях политропы в результате кратковременного движения поршня, был дан в работе Д.К. Надёжина и Д.А. Франк-Каменецкого (1965); результаты аналогичных расчетов показаны на рис. 41. Как видно, методы Бринкли — Кирквуда и Уизема дают завышенные, по сравнению с автомодельным, значения скорости ударной волны. Метод конечных разностей приводит к значению показателя степени a , входящего в соотношение (19.1), равному $a_{кр} = 0,17$. Это занижение параметра a , возможно, связано с неточностью расчетов, которые начинались с расстояния $r \approx 0,8 R_*$, так как во внешних слоях звезды ширина фронта ударной волны становилась сравнимой с характерным масштабом изменения плотности. Поэтому и в данном случае аппроксимацию (19.7) можно считать удовлетворительной.

в) Распространению ударной волны в атмосфере с распределением плотности по закону (19.5) посвящено много работ (см. Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер, 1966; Х.С. Кестенбойм, Г.С. Росляков, Л.А. Чудов, 1974; Г. Броуд, 1976). В частности, было установлено, что входящий в соотношение (19.1) коэффициент a равен при $\gamma = 5/3$: $a_A = 0,204$, $a_{кр} = 0,195$, $a_y = 0,236$, тогда как при $\gamma = 4/3$ путем интерполяции имеющихся данных (Г. Броуд (1976)) можно получить $a_A = 0,164$, $a_{кр} = 0,165$, $a_y = 0,207$. Изменение скорости сильной сферической ударной волны в атмосфере с экспоненциальным законом изменения плотности показано на рис. 42. Как видно, результаты, полученные методом конечных разностей, аппроксимируются прямой с наклоном $a_{кр} = 0,18$, что близко к значению 0,20, следующему из (19.7). Но при $\gamma = 4/3$ более подходит аппроксимация

$$D = C(\rho r^3)^{-1/6}. \quad (19.9)$$

Формулы (19.7) и (19.9) в общем описывают движение сильных ударных волн фактически в предположении о центральном взрыве. В случае, если мгновенное выделение энергии произошло на некотором расстоянии от центра симметрии (например, в тонком сферическом слое), то при малых $R = r - r_0$ эффект неоднородности среды играет второстепенную роль. Поэтому скорость сформировавшейся ударной волны будет сначала уменьшаться, при некотором R_* достигать наименьшего значения и далее возрастать. Общее соотношение для скорости сильной ударной волны запишется в виде

$$D(R) = C[\rho(R) R (R + r_0)^\alpha]^{-a}. \quad (19.10)$$

Здесь r_0 — радиус сферического ($\alpha = 2$) или цилиндрического ($\alpha = 1$) слоя, в котором произошло энерговыделение и возникла ударная волна, $r = r_0 + R$ — расстояние фронта ударной волны от центра (оси) симметрии.

Как и раньше, $a = 1/2$ и $a = 1/5$ соответственно для замедляющейся при

$$\bar{\Delta}(R) = -\frac{d \ln \rho}{d \ln R} < 1 + \alpha \frac{R}{R + r_0}$$

и ускоряющейся ударной волны при

$$\bar{\Delta}(R) > 1 + \alpha \frac{R}{R + r_0}.$$

Так как обычно распределение плотности задается в виде функции расстояния до центра звезды, то для распределений (19.3) — (19.5) имеем

соответственно

$$\left. \begin{aligned} \rho(R) &= \rho_0 \left(\frac{r_0}{R+r_0} \right)^m, \quad \bar{\Delta} = m \frac{r-r_0}{r}, \\ \rho(R) &= \rho_0 \left[\frac{1-(R+r_0)}{R+r_0} \right]^n, \quad \bar{\Delta} = \frac{n(r-r_0)}{r(1-r)}, \\ \rho(R) &= \rho_0 \exp \left[-\frac{R+r_0}{H} \right], \quad \bar{\Delta} = \frac{R}{H} = \frac{r-r_0}{H}. \end{aligned} \right\} \quad (19.11)$$

Начальная стадия движения сильной ударной волны (при $R \approx 0$) описывается решением (14.2), (14.5) или (14.6). Это позволяет выразить постоянную в соотношении (19.10) через энергию взрыва (Б.И. Гнатык, 1982). Так, если энерговыделение произошло в тонком сферическом или цилиндрическом слое радиуса r_0 , то скорость сильной ударной волны на этапе затухания (при $\Delta \leq 1 + \alpha \frac{R}{R+r_0}$) определяется выражением

$$D(R) = \frac{2}{3} \left[\frac{E}{B \rho(R)} \right]^{1/2} R^{-1/2} \left(\frac{r_0}{R+r_0} \right)^{\alpha/2}, \quad (19.12)$$

где B — постоянная, E — концентрация энергии на единицу площади.

Наименьшая скорость D_m достигается на расстоянии R_1 , где $\bar{\Delta} = 1 + \alpha \frac{R_1}{R_1+r_0}$. Подставляя $R = R_1$ в (19.12), находим $D_m(R_1)$. Далее скорость ударной волны находится из (19.10):

$$D = D_m(R_1) \left[\frac{\rho(R_1) R_1 (R_1+r_0)^\alpha}{\rho(R) R (R+r_0)^\alpha} \right]^{1/5}. \quad (19.13)$$

Особенности движения сильной ударной волны наиболее четко проявляются в случае ее распространения в атмосфере с экспоненциальным законом изменения плотности. Как показали расчеты (см. далее рис. 43 и работу Р. Куап (1975)), волна движется замедленно до $z = \frac{h}{H} \lesssim 3$ и ускоренно при $z > 3$.

Уточнения методов Бринкли—Кирквуда и Уизема проводились неоднократно. Так, А.А. Румянцев (1972 а) предложил в качестве входящего в (19.1) коэффициента a использовать величину

$$a_p = \left\{ 2 + \frac{\gamma+1}{2} \sqrt{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \right\}^{-1}. \quad (19.14)$$

Уточнялось также значение параметра ν , входящего в уравнение (15.19) путем сопоставления полученного для сильной ударной волны (энергия $W \rightarrow \infty$) решения с автомодельным (P.L. Sachdev, 1971), а также на основе автомодельного решения задачи о сильном точечном взрыве в среде со степенным законом изменения плотности (A. Cavaliere, A. Messina, 1976). Это позволило повысить точность метода Бринкли—Кирквуда, если он используется в случае $-\frac{d \ln \rho}{d \ln r} < 3$.

Уравнение (16.4) метода Уизема было модифицировано Хейсом (W.D. Hayes, 1968 а, б) путем подбора поправочных множителей таким образом, чтобы в пределе сильной ударной волны (число Маха $M \gg 1$) решение совпадало с автомодельным, а в случае слабых ударных волн выполнялось акустическое приближение. Однако полученное таким образом выражение можно использовать лишь при $-\frac{d \ln \rho}{d \ln r} > \alpha + 1$.

Вполне удовлетворительную модификацию методов Бринкли – Кирквуда и Уизема предложил Б.И. Гнатык (1983), исходя из требования, чтобы в случае экстремально сильных ударных волн из (15.31) и (16.4) следовало соотношение (19.7). В первом случае слагаемые с α и k в уравнении (15.31) умножаются соответственно на поправочные коэффициенты $(1 + C_1)$ и $(1 + C_2)$, причем

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{2(\alpha + 1)\lambda(3 - \lambda)a_p}{\alpha(2 - 3\lambda + 2\lambda^2)}, \\ C_2 &= 2 - \lambda - 2(3 - \lambda)a_p, \end{aligned} \right\} \quad (19.15)$$

где a_p записано выше в виде (19.14), $\lambda = \frac{\gamma + 1}{2\gamma}$. В случае $\Delta(R) < \alpha + 1$ следует принимать $C_1 = C_2 = 0$.

Аналогично уравнение метода Уизема (16.4) принимает вид

$$\frac{dD}{D} = \frac{M^2 - 1}{2M^2} \left\{ -q \frac{d\rho_1}{\rho_1} - q \left[\frac{M^2 - 1}{M^2} (\alpha + 1) + \alpha \frac{M + 1}{2M^2} \right] \frac{dR}{R} + \frac{3M^2 + 1}{M^4 - 1} \frac{da_1}{a_1} \right\} \quad (19.16)$$

при

$$q = \varphi + \left(\frac{1}{2} - \varphi \right) M^{-2}$$

и

$$\varphi = \begin{cases} 1, & \text{если } \Delta \leq \alpha + 1, \\ 2a_p & \text{при } \Delta > \alpha + 1. \end{cases}$$

Точность этих модификаций видна из рис. 43, на котором показано изменение скорости газа за фронтом ударной волны при ее движении вверх по атмосфере с экспоненциальным распределением плотности. Скорость газа u измеряется в единицах $u_0 = \left[\frac{E_0}{\rho_0 H} \right]^{1/2}$, где E_0 – начальная энергия ударной волны на единицу поверхности, ρ_0 – плотность газа на уровне, где $z = \frac{h}{H} = 0$. Расчеты проведены для $\gamma = 5/3$.

Здесь уместно отметить, что метод Бринкли – Кирквуда позволяет, хотя и несколько формально, конкретизировать понятия сильной и слабой удар-

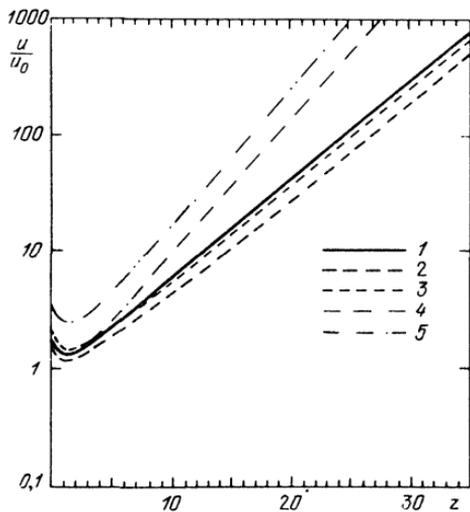


Рис. 43. Изменение скорости газа за фронтом сильной ударной волны, движущейся в экспоненциальной атмосфере. Результаты получены: 1 — методом конечных разностей, 2 — модифицированным методом Бринкли — Кирквуда, 3 — модифицированным методом Уизема, 4 — модифицированными уравнениями Сахдева, 5 — методом Бринкли — Кирквуда без модификации.

ной волны. Как следует из основных соотношений этого метода, ударную волну в каждый момент времени можно характеризовать ее скоростью D (или силой волны p/p_1) и энергией W , между которыми нет однозначной зависимости. Так, скорость движения поршня u может быть относительно невелика.

И все же энергия W возникшей при этом и движущейся со скоростью $D = \frac{\gamma + 1}{2} u$ ударной волны может быть сколь угодно большой, так как она пропорциональна времени действия поршня t , которое можно рассматривать как независимый параметр задачи. В расчете на единицу поверхности энергия ударной волны запишется так:

$$W = p_2 ut. \quad (19.17)$$

Для достаточно сильных ударных волн давление газа за фронтом ударной волны равно $p_2 = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_1 D^2$. Поэтому из (19.17) следует

$$W = \frac{4}{(\gamma + 1)^2} \rho_1 D^3 t. \quad (19.18)$$

В случае плоской ударной волны из (15.31) находим, что если первое слагаемое правой части больше третьего, то главную роль в изменении параметров волны играет диссипация. В противном случае волна не замедляется, а ускоряется за счет неоднородности среды. Приравнявая эти слагаемые, в случае $\xi \gg 1$ находим при $\nu = 2/3$, $k = 1$ (изотермическая атмосфера) и $\gamma = 5/3$ "критическую" величину энергии W_* , при которой оба процесса уравновешиваются.

$$W_* = \frac{3\rho_1 a_1^2 D^2}{20g} = \frac{1}{4} \rho_1 D^2 H. \quad (19.19)$$

Очевидно, что при $W > W_*$ ударную волну можно считать сильной в указанном смысле. Из (19.14) и (19.16) можно найти и время действия поршня, необходимое для того, чтобы ударная волна ускорилась, несмотря на процессы диссипации, связанные с нагревом газа,

$$t_* = \frac{12a_1^2}{45gD} = \frac{4H}{9D}. \quad (19.20)$$

В заключение остановимся еще раз (см. § 15) на некоторых особенностях метода Бринкли — Кирквуда. Функция $f(r, t)$, определенная уравнением (15.11), фактически описывает изменение давления и скорости (в комбинации $p'(t)u'(t)$) для каждой лагранжевой частицы после прохождения через нее ударной волны. Как уже отмечалось, главное предположение метода Бринкли — Кирквуда заключается в том, что функция $f(r, t)$ или $f(r, \tau)$ сохраняет подобие для всех частиц. Это как раз и дает возможность путем выбора параметра ν согласовать получаемое решение с автомодельным решением Л.И. Седова. Поэтому и точность метода Бринкли — Кирквуда высока в тех случаях, для которых профиль ударной волны не меняется со временем или меняется слабо, причем допускаются однородные изменения по всему профилю. Это как раз имеет место при $\Delta(R) < \alpha + 1$. Далее, функция μ , вид которой задается уравнением (15.14), в случае $\Delta < \alpha + 1$, имеет конечное значение. Однако при $\Delta > \alpha + 1$ ее значение неопределенно и может быть даже $\mu = \infty$. Таким образом, при $\Delta > \alpha + 1$ модифицированный метод Бринкли — Кирквуда хотя и дает правильную зависимость скорости от расстояния, фактически не имеет физического обоснования. Поэтому также соотношения (19.19) и (19.20) носят формальный характер. Более того, следует подчеркнуть, что при $-\frac{d \ln \rho_1}{d \ln r} > 3$ происходит ускорение ударной волны практически независимо от величины ее начальной энергии.

В целом же нет никаких сомнений в том, что метод Бринкли — Кирквуда заслуживает внимания и усилий по его модификации, так как на проведение расчета на его основе требуется примерно в 50 раз меньше машинного времени, чем при расчетах методом конечных разностей. А это значит, что метод Бринкли — Кирквуда может быть полезен при решении целого ряда астрофизических задач хотя бы для ориентировочного выбора исходных данных. В той же степени это можно сказать и о методах Уизема и Чизнелла.

Глава 4

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ¹

Несмотря на длительное и интенсивное развитие аналитических методов газовой динамики, с помощью которых было получено большое количество интересных и важных результатов, до сих пор не существует общих методов решения газодинамических задач. Причина этого заключается, главным образом, в нелинейности уравнений газовой динамики. В то же время нелинейные газодинамические течения с ударными волнами представляют наибольший интерес во многих астрофизических приложениях. В большинстве случаев необходимо также учесть ряд дополнительных факторов, влияющих на газодинамические течения, — таких как перенос излучения, процессы диссоциации и ионизации, магнитные поля и т.д. В такой ситуации наиболее эффективным и универсальным способом решения задачи являются численные методы.

Интенсивное развитие численных методов газовой динамики произошло за последние два-три десятилетия и связано, прежде всего, с необходимостью решения крупнейших научно-технических проблем в аэродинамике, ядерной физике, физике плазмы и др. В результате появился новый мощный инструмент исследования сложных реальных процессов — математическое моделирование или, как говорят, вычислительный эксперимент (А.А. Самарский, 1977). Суть этого метода заключается в том, что на основе выбранной математической модели, представленной в виде уравнений, с помощью численных расчетов изучается поведение объекта в различных условиях. Анализ полученных численных результатов и сопоставление с имеющимися экспериментальными данными позволяют определить роль тех или иных процессов в изучаемом явлении и на этой основе уточнить первоначальную модель.

В астрофизике метод вычислительного эксперимента приобретает особое значение, поскольку здесь, в отличие от лабораторных исследований, условия в изучаемом объекте изменить невозможно и экспериментальный материал всегда является неполным. Поэтому причина явления часто остается скрытой. Параметры математической модели легко изменяются, и, таким образом, становится возможным определение наиболее существенных сторон явления.

Важным этапом численного моделирования, во многом определяющим успех исследования, является конструирование вычислительного алгоритма. Это означает, во-первых, построение разностной схемы для математической модели, т.е. аппроксимацию дифференциальных уравнений алгебраическими (разностными), и, во-вторых, создание эффективного метода решения разностных уравнений.

Данная глава посвящена построению вычислительного алгоритма для решения нестационарных сферически-симметричных задач гравитационной

¹ Глава написана А.Г. Косовичевым.

газодинамики. Этот алгоритм может быть использован для расчета распространения ударных волн в оболочках звезд, нелинейных радиальных пульсаций и в других задачах. Соответствующую математическую модель можно записать в виде системы уравнений газодинамики с лучистой теплопроводностью (6.9') — (6.13').

§ 20. Основные понятия метода конечных разностей

Наиболее разработанным численным методом решения задач газовой динамики является метод конечных разностей. Сущность его заключается в том, что непрерывная среда заменяется дискретной моделью, состоящей из конечного множества (сетки) точек — узлов. Вместо функций непрерывного аргумента в такой модели вводятся сеточные функции — функции дискретного аргумента, определенные в узлах сетки, а производные функций непрерывного аргумента заменяются (аппроксимируются) соответствующими разностными отношениями. В итоге вместо дифференциальных уравнений, описывающих непрерывную среду, получают систему разностных алгебраических уравнений, которую дополняют до замкнутости путем соответствующей аппроксимации начальных и краевых условий. Далее при помощи известных методов решения систем алгебраических уравнений находят решение поставленной задачи.

Уместно напомнить основные понятия и важнейшие этапы получения решения в методе конечных разностей (подробнее см. А.А. Самарский, 1977).

1. Разностная сетка. Сеточные функции. Прежде всего в области непрерывного изменения аргумента (или аргументов) строится разностная сетка. Если аргумент x изменяется на отрезке $0 \leq x \leq L$, то, разбив этот интервал точками $x_i = ih$ ($i = 1, 2, \dots, N; h > 0$) на $N - 1$ равных частей, получим равномерную сетку, состоящую из N узлов. Расстояние h между соседними узлами называется шагом сетки. Часто, однако, пользуются неравномерными сетками с шагом $h_i = x_i - x_{i-1}$, зависящим от номера узла. Иногда, наряду с целыми точками x_i , удобно рассматривать и полуцелые $x_{i+\frac{1}{2}}$, определяемые как $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + 0,5 h_{i+1}$. На рис. 44 целые точки изображены кружками, а полуцелые — крестиками.

Далее вместо функции непрерывного аргумента $y(x)$ на отрезке $[0, L]$ вводят функцию дискретного аргумента или сеточную функцию $y(x_i)$.

В случае одномерной нестационарной задачи вводят разностную сетку по временной переменной t : $t_{j+1} = t_j + \tau_j$, $j = 0, 1, \dots$, где τ_j — шаг сетки по времени. Теперь, если в прямоугольной системе координат на плоскости пространственную сетку построить на оси абсцисс, а временную — на оси ординат, то множество узлов (x_i, t_j) , полученных при пересечении двух систем параллельных прямых $x = x_i$, $i = 1, 2, \dots, N$ и $t = t_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$ образуют пространственно-временную разностную сетку. Набор пространственных узлов $(x_i, i = 1, 2, \dots, N)$ при фиксированном j называют j -м временным слоем сетки. Узлы x_1 и x_N ($j = 0, 1, 2, \dots$) называют граничными узлами.

Непрерывной функции $y(x, t)$ ставится в соответствие сеточная функция $y(x_i, t_j) = y_i^j$. Удобно использовать безындексные обозначения сеточных функций:

$$y_i^j = y, \quad y_{i\pm 1}^j = y(\pm 1), \quad y_i^{j\pm 1} = \hat{y}. \quad (20.1)$$

Вопрос выбора разностной сетки в каждой конкретной задаче заслуживает особого внимания. С одной стороны, ясно, что для наилучшего при-

ближения решения дифференциальных уравнений разностными необходимо строить подробные разностные сетки с большим числом узлов. С другой стороны, необходимо учитывать, что возможности ЭВМ (оперативная память и быстродействие) ограничены. И поэтому практические соображения, связанные с затратами машинного времени, вынуждают ограничиваться разностными сетками с небольшим числом узлов, так называемыми "грубыми" сетками. В вычислительной практике часто используются неравномерные разностные сетки, которые сгущаются в области резкого изменения

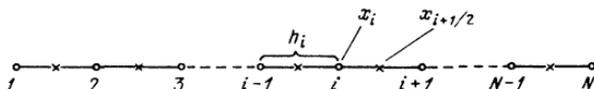


Рис. 44. Разностная сетка в области непрерывного изменения аргумента.

сеточных функций. Для построения такой сетки необходимо иметь априорное представление о решении. Кроме того, часто зона с большими градиентами перемещается по сетке (например, волновой фронт). В этом случае иногда прибегают к подвижным сеткам (Г.Б. Алаыкин и др., 1970). Но и такой прием не является универсальным, так как закон движения особенностей решения, как правило, не известен. Зачастую удачный выбор разностной сетки определяется опытом и интуицией исследователя. К вопросу построения разностных сеток мы вернемся в § 24.

2. Р а з н о с т н а я а п п р о к с и м а ц и я. Важным моментом создания вычислительного алгоритма является разностная аппроксимация дифференциальных уравнений.

Для аппроксимации дифференциальных операторов используется определение производной в классическом смысле:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x + \Delta x, t) - y(x, t)}{\Delta x} \quad (20.2)$$

В случае дискретного аргумента $(\Delta x)_{\min} = h$, и поэтому вместо отношения бесконечно малых вводят отношение конечных разностей, причем используются три способа аппроксимации производной функции в i -м узле разностной сетки:

$$y_x = \frac{y(x_{i+1}, t_j) - y(x_i, t_j)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{y_{i+1}^j - y_i^j}{h_{i+1}} = \frac{y(+1) - y}{h(+1)} \quad (20.3)$$

$$y_{\bar{x}} = \frac{y(x_i, t_j) - y(x_{i-1}, t_j)}{x_i - x_{i-1}} = \frac{y_i^j - y_{i-1}^j}{h_i} = \frac{y' - y(-1)}{h} \quad (20.4)$$

$$y_x^0 = \frac{y(x_{i+1}, t_j) - y(x_{i-1}, t_j)}{x_{i+1} - x_{i-1}} = \frac{y_{i+1}^j - y_{i-1}^j}{h_{i+1} + h_i} = \frac{y(+1) - y(-1)}{h(+1) + h} \quad (20.5)$$

— соответственно правая, левая (односторонние) и центральная разностные производные.

В свою очередь вторая разностная производная определяется так:

$$y_{x^2} = \frac{y_x - y_{\bar{x}}}{x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}} = \frac{y_x - y_{\bar{x}}}{h_i} \quad (20.6)$$

Здесь введено обозначение $h_i = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}} = 0,5(h_{i+1} + h_i)$ — шаг разностной сетки с полуцелыми узлами. В случае равномерной сетки $h_i = h = \text{const}$ (20.6) записывается в виде

$$\bar{y}_{x,x} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = \frac{y(+1) - 2y + y(-1)}{h^2}.$$

Аналогично определяется разностная производная по времени:

$$y_t = \frac{y(x_i, t_{j+1}) - y(x_i, t_j)}{t_{j+1} - t_j} = \frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} = \frac{\hat{y} - y}{\tau}. \quad (20.7)$$

Замена дифференциальных уравнений разностными вызывает ошибку в решении задачи, которая называется погрешностью аппроксимации. Вычислим погрешность аппроксимации первой производной функции одно-сторонней разностной производной, предполагая, что $y(x)$ — гладкая функция:

$$\begin{aligned} \Psi(x_i) &= y_x - \frac{\partial y}{\partial x}(x_i) = \frac{y(x_i + h_{i+1}) - y(x_i)}{h_{i+1}} - \frac{\partial y}{\partial x} = \\ &= \frac{h_{i+1}}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x_i) + O(h_{i+1}^2) = O(h_{i+1}). \end{aligned} \quad (20.8)$$

Здесь использовано разложение в ряд Тейлора

$$y(x_i + h_{i+1}) = y(x_i) + h_{i+1} \frac{\partial y}{\partial x}(x_i) + \frac{h_{i+1}^2}{2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + O(h_{i+1}^3).$$

Из (20.8) видно, что погрешность аппроксимации первой разностной производной (20.3) составляет величину порядка шага разностной сетки в первой степени. Говорят, что в этом случае разностный оператор аппроксимирует дифференциальный с первым порядком аппроксимации.

Нетрудно видеть, что центральная разностная производная аппроксимирует производную (20.2) со вторым порядком, т.е.

$$\Psi(x_i) = y_x - \frac{\partial y}{\partial x}(x_i) = O(h_i^2).$$

Заметим, что правая односторонняя разностная производная (20.3) для узла x_i является центральной разностной производной для полуцелого узла $x_{i+\frac{1}{2}}$ и, следовательно, (20.3) аппроксимирует (20.2) в точке $x_{i+\frac{1}{2}}$ со вторым порядком аппроксимации.

Некоторые особенности разностной аппроксимации дифференциальных уравнений мы продемонстрируем на примере простейшего уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \quad (20.9)$$

Аппроксимируем это уравнение на равномерной разностной сетке в узле (x_i, t_{j+1}) следующим образом:

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} - \frac{y_{i+1}^j - 2y_i^j + y_{i-1}^j}{h^2} = 0, \quad (20.10)$$

или в безындексных обозначениях

$$y_t - y_{\bar{x}x} = 0. \quad (20.10')$$

Набор узлов, использованных при аппроксимации, называется шаблоном (рис. 45, а). Погрешность аппроксимации уравнения (20.9) разностным (20.10) составляет первый порядок по времени и второй по пространству — $O(\tau, h^2)$.

Постановка дифференциальной задачи для уравнения (20.9) включает, помимо самого уравнения, дополнительные условия — начальные и краевые. Характер аппроксимации начальных и граничных условий определяется конкретной постановкой задачи. Разностные уравнения вместе с разностной аппроксимацией начальных и граничных условий составляют разностную схему. Это система алгебраических соотношений, соответствующих исходному дифференциальному уравнению вместе с дополнительными условиями.

Уравнение (20.9) можно аппроксимировать с тем же порядком аппроксимации на другом шаблоне (рис. 45, б) :

$$\frac{y_i^{j+1} - y_i^j}{\tau} - \frac{y_{i+1}^{j+1} - 2y_i^{j+1} + y_{i-1}^{j+1}}{h^2} = 0, \quad (20.11)$$

или в безындексных обозначениях

$$y_t - \hat{y}_{xx} = 0. \quad (20.11')$$

Разностные схемы, записанные по формулам (20.10) и (20.11), принципиально отличаются друг от друга. В случае (20.10) значение искомой сеточной функции y_i^{j+1} ($i = 1, 2, \dots, N$) на $(j+1)$ -м временном слое явно выражается через сеточные функции предыдущего j -го временного слоя. Разностная схема, построенная по такому принципу, называется явной. В случае (20.11) искомые сеточные функции нового временного слоя уже не выражаются явным образом через сеточные функции предыдущего слоя, а связаны между собой разностными уравнениями. Такая разностная схема называется неявной. Решение соответствующей ей системы алгебраических уравнений представляет самостоятельную проблему.

Введем в рассмотрение разностную схему, представляющую собой линейную комбинацию явной и неявной схем:

$$y_t - [\sigma \hat{y}_{xx} + (1 - \sigma) y_{\bar{x}x}] = 0. \quad (20.12)$$

Такая схема записана на шеститочечном шаблоне (рис. 45, в). Для удобства записи введем обозначение $y^{(\sigma)} = \sigma \hat{y} + (1 - \sigma)y$, где $0 \leq \sigma \leq 1$ — так называемый весовой множитель. Тогда получаем

$$y_t - y_{\bar{x}x}^{(\sigma)} = 0. \quad (20.12')$$

Разностная схема (20.12) называется схемой с весами. В частном случае $\sigma = 0,5$ она имеет порядок аппроксимации $O(\tau^2, h^2)$. В остальных случаях $O(\tau, h^2)$.

3. Сходимость и устойчивость разностных схем. Для того, чтобы решение разностной задачи аппроксимировало решение исходного дифференциального уравнения, разностная схема должна удовлетворять некоторым требованиям. Во-первых, она должна быть разрешимой, т.е. полученная система алгебраических уравнений должна иметь решение.

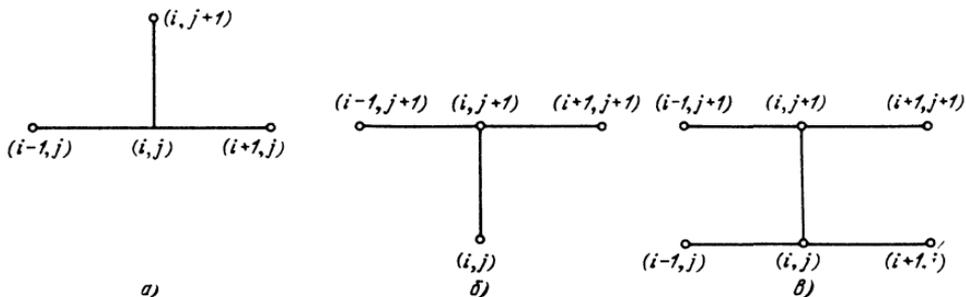


Рис. 45. Типы шаблонов, используемых при решении уравнений газодинамики методом конечных разностей.

Во-вторых, решение разностной задачи при уменьшении шагов сетки должно приближаться (сходиться) к решению исходного дифференциального уравнения. Условие сходимости определяется двумя другими — аппроксимацией и устойчивостью.

Первое условие — аппроксимация — очевидно: разностная схема должна приближать с какой-то точностью соответствующее дифференциальное уравнение (аппроксимировать его). Второе (устойчивость) — связано с особенностью вычислительного процесса в ЭВМ. Все вычисления в машине проводятся с определенной погрешностью, связанной с существованием ошибок округления, поэтому важно, чтобы эти вычислительные погрешности не нарастали в процессе вычислений и не приводили к искажению результатов.

Ошибки округления можно рассматривать как малые возмущения входных данных (начальных и граничных условий), поэтому условие устойчивости можно сформулировать как требование непрерывной зависимости решения задачи от входных данных — при малом изменении входных данных мало должно изменяться решение разностной задачи.

Исследование устойчивости — важнейшая задача теории разностных схем (А.А. Самарский, А.В. Гулин, 1973). В общем случае исследовать устойчивость разностных схем газовой динамики вследствие их нелинейности не удается. Поэтому ограничиваются рассмотрением линейного акустического приближения. Таким образом, об устойчивости той или иной разностной схемы газовой динамики судят по ее анализу в линейном приближении.

Устойчивость разностной схемы в случае функции двух переменных может определяться соотношением между шагами сетки h и τ . Разностная схема называется условно устойчивой, если она устойчива лишь при наличии связи между h и τ . Схема, устойчивая при любых h и τ , называется абсолютно устойчивой.

Оказывается, что явная схема для уравнения теплопроводности (20.10) устойчива лишь при условии $\frac{\tau}{h^2} \leq 0,5$ (условно устойчива), тогда как неявная схема (20.11) устойчива при любых h и τ (абсолютно устойчива). Неявная схема с весами (20.12) при $\sigma \geq 0,5$ устойчива при любых h и τ , а при $0 < \sigma < 0,5$ условно устойчива при $\frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2 - 4\sigma}$. Таким образом, параметр σ управляет не только порядком аппроксимации по времени, но и устойчивостью схемы (20.12).

§ 21. Особенности разностных схем для уравнений газовой динамики

Главная особенность уравнений газодинамики состоит в их нелинейности, тогда как теория разностных схем развита в основном для линейных задач. К нелинейным разностным схемам газовой динамики, вообще говоря, неприменимы основные понятия и выводы теории разностных схем относительно аппроксимации, устойчивости и сходимости. Следует, однако, отметить, что эта теория дает правильное понимание основных особенностей расчета нелинейных газодинамических течений.

При построении разностных схем для уравнений газовой динамики наряду с выводами линейной теории широко используются различные качественные соображения и эвристические принципы, не имеющие строгого математического обоснования. Поэтому основным критерием качества разностных схем служит их апробация в расчетах тестовых задач на ЭВМ. Как правило, в качестве теста берется упрощенная постановка задачи, близкая к исходной задаче и имеющая аналитическое решение. Сопоставление результатов расчетов с точным решением позволяет сделать выводы о точности разностной схемы, устойчивости, скорости сходимости.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые принципы построения разностных схем для уравнений газодинамики.

1. Общий подход к построению разностных схем газовой динамики. Применение метода конечных разностей к задачам газодинамики приводит к некоторой модели сплошной среды. Такая модель содержит новые параметры — шаги разностной сетки по пространству и времени. Процессы в дискретной модели, описываемые разностными уравнениями, вообще говоря, отличаются от соответствующих процессов в непрерывной среде. В некоторых случаях это приводит в расчетах к паразитным (разностным) эффектам, заметно искажающим реальные процессы.

Различие между разностными и дифференциальными уравнениями уменьшается с уменьшением шагов сетки лишь асимптотически при неограниченном увеличении количества узлов сетки. Вместе с тем, вычислительный алгоритм должен быть экономичным, поскольку газодинамические расчеты многовариантны. А это условие накладывает ограничение на число узлов сетки. Таким образом, одно из основных требований при построении разностных схем газовой динамики заключается в получении правильного решения с минимальным искажением на "грубых" сетках, содержащих относительно небольшое число узлов.

В астрофизических приложениях часто рассматривают модель сплошной среды, лишенной вязкости. Хорошо известно, что в такой модели газодинамические течения описываются разрывными функциями — это либо сильные разрывы (ударные волны и контактные разрывы), либо слабые разрывы (волны сжатия и разрежения). Для описания таких течений дифференциальные уравнения неприменимы по той простой причине, что разрывные функции недифференцируемы. В этом случае необходимо использовать интегральную запись уравнений газодинамики. Интегральные уравнения газодинамики представляют собой выражение общих законов сохранения: массы (или объема в массовых лагранжевых координатах), импульса и энергии.

Однако разностная аппроксимация интегральных законов сохранения приводит к неустойчивой разностной схеме при расчете ударных волн. Вместо ударной волны получаются колебания большой амплитуды. Дефект расчета связан с тем, что интегральных уравнений газодинамики недоста-

точно для получения однозначного решения. Эти уравнения необходимо дополнить условием неубывания энтропии, которое исключает появление неустойчивых разрывов.

Существуют два способа устойчивого расчета разрывных решений. Один из них предполагает явное выделение всех разрывов и наложение запрета на решения (типа ударных волн разрежения), для которых нарушен закон неубывания энтропии. Этот способ реализован в методе характеристик (А.И. Жуков, 1960) — наиболее точном методе расчета газодинамических течений с ударными волнами. Однако при наличии большого числа разрывов возникают трудности алгоритмического характера из-за сильно усложняющейся логики расчета особенностей. Это затрудняет реализацию метода характеристик на ЭВМ.

Другой способ численного решения уравнений газовой динамики основан на принципе однородности разностных схем (А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, 1961), который заключается в требовании единообразия вычислительного алгоритма. Разностные схемы, которые записываются одними и теми же формулами во всех узлах разностной сетки, независимо от наличия и характера особенностей решения, называются однородными, или схемами сквозного счета. При таком подходе точность расчета разрывных решений выступает в качестве дополнительного требования к вычислительному алгоритму.

В одном из методов получения однородных схем газовой динамики разностную аппроксимацию интегральных законов сохранения строят так, чтобы получающаяся разностная схема вносила диссипацию (аппроксимационную вязкость) на разрывах. Таким способом удается стабилизировать расчет разрывных решений. Данный подход реализован, например, в разностной схеме "распадов разрывов" (С.К. Годунов и др., 1976).

2. М е т о д п с е в д о в я з к о с т и. Наиболее распространенным приемом построения однородных разностных схем в газодинамике является метод искусственной вязкости или, иначе, псевдовязкости. В этом методе в систему разностных уравнений газодинамики вводят некоторые дополнительные диссипативные члены, моделирующие действие реальной вязкости в ударных волнах. Введение искусственной вязкости позволяет приближенно описать скачок на фронте ударной волны гладким переходом на протяжении нескольких пространственных шагов сетки. При этом фронт ударной волны проявляется как область относительно быстрого изменения параметров газа. Скорость перемещения этой области совпадает со скоростью ударной волны, а изменения термодинамических величин в ней — со скачками на фронте ударной волны. Но протяженность самой области перехода существенно превышает реальную ширину фронта ударной волны, измеряемую несколькими длинами свободного пробега в газе.

Формально псевдовязкость вводится как добавок к давлению, так что в уравнениях газодинамики (6.9') — (6.13') вместо P входит сумма

$$g = P + \omega, \quad (21.1)$$

где ω — "вязкое" давление, зависящее от плотности, градиента скорости и шага разностной сетки.

Наиболее часто рассматриваются два типа вязкости:

а) линейная вязкость

$$\omega = -\frac{\nu\rho}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s} - \left| \frac{\partial u}{\partial s} \right| \right), \quad (21.2)$$

б) квадратичная вязкость

$$\omega = -\frac{\mu\rho}{2} \frac{\partial u}{\partial s} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial s} \right| - \frac{\partial u}{\partial s} \right). \quad (21.3)$$

Видно, что искусственная вязкость работает лишь на фронте ударной волны, где $\frac{\partial u}{\partial s} < 0$. В волнах разрежения $\frac{\partial u}{\partial s} > 0$, и функция $\omega = 0$.

Таким образом, система уравнений газодинамики (6.9') – (6.13'), описывающая одномерное сферически-симметричное движение газа с учетом переноса тепла лучистой теплопроводностью и внутренних источников энергии, после введения искусственной вязкости переписывается так:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = u, \quad (21.4)$$

$$\frac{\partial r^3}{\partial s} = \frac{3}{\rho}, \quad (21.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -r^2 \frac{\partial g}{\partial s} - \frac{4\pi G s}{r^2}, \quad (21.6)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -g \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) - \frac{\partial (r^2 W)}{\partial s} + \epsilon, \quad (21.7)$$

$$W = -kr^2 \frac{\partial T}{\partial s}, \quad (21.8)$$

где g определяется соотношениями (21.1) – (21.3), W – тепловой поток, $k = \kappa_T \rho$, κ_T – коэффициент лучистой теплопроводности, $\epsilon = \mathcal{H}(\rho, T)$ – мощность внутренних источников энергии.

Замыкают систему уравнения состояния

$$P = \mathcal{P}(\rho, T), \quad E = \mathcal{E}(\rho, T). \quad (21.9)$$

3. Законы сохранения. Напомним, что уравнения газодинамики имеют определенный физический смысл.

Уравнение (21.5) выражает закон изменения объема фиксированной массы газа. При использовании эйлеровых координат вместо (21.5) записывается уравнение, выражающее закон сохранения массы. При записи уравнений газодинамики в массовых лагранжевых координатах закон сохранения массы выполнен автоматически. Уравнению (21.5) можно придать форму уравнения неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{\partial}{\partial s} (r^2 u). \quad (21.10)$$

Для этого нужно продифференцировать (21.5) по времени и использовать (21.4).

Уравнение (21.6) представляет закон сохранения импульса.

Уравнение для внутренней энергии (21.7) также имеет непосредственный физический смысл: оно показывает, что изменение внутренней энергии газа происходит за счет работы сил давления и потоков тепла.

Преобразуем (21.7). Умножив предварительно уравнение движения (21.6) на u , получим соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u^2}{2} - \frac{4\pi G s}{r} \right) = -r^2 u \frac{\partial g}{\partial s}, \quad (21.11)$$

которое означает, что изменение суммы кинетической и потенциальной энергии единицы массы газа происходит за счет работы газодинамической силы: $-r^2 \frac{\partial g}{\partial s} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial g}{\partial r}$. Складывая (21.7) и (21.11) с учетом (21.10),

получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(E + \frac{u^2}{2} - \frac{4\pi G s}{r} \right) = -\frac{\partial}{\partial s} (r^2 u g) - \frac{\partial (r^2 W)}{\partial s} + \epsilon. \quad (21.12)$$

Последнее уравнение, представленное в дивергентном виде, выражает закон сохранения полной энергии. Таким образом, уравнение энергии может быть записано в равноправных формах (21.7) и (21.12).

4. Принцип консервативности разностных схем. Построение разностной схемы в газодинамике можно рассматривать как замену непрерывной среды, подчиняющейся дифференциальным уравнениям, некоторым ее дискретным аналогом, который эволюционирует по законам, описываемым разностными уравнениями. Эта модель должна отражать основные свойства среды и правильно передавать физические особенности изучаемых процессов. Разумно требовать в первую очередь выполнения в дискретной модели разностных аналогов законов сохранения массы, импульса и энергии, которые лежат в основе уравнений газодинамики.

Разностные схемы, в которых выполнены разностные аналоги законов сохранения, называются консервативными. На важность принципа консервативности разностных схем указали в начале 50-х годов А.Н. Тихонов и А.А. Самарский. Ими построен пример (А.Н. Тихонов, А.А. Самарский, 1961), когда неконсервативная разностная схема для линейного уравнения теплопроводности, обеспечивающая второй порядок аппроксимации на гладких решениях, расходится в случае разрывного решения. Свойство консервативности является необходимым условием сходимости для широкого класса задач.

Консервативная разностная схема для уравнений газодинамики может быть получена путем разностной аппроксимации дивергентной формы уравнений. Важно, что данный способ аппроксимации обеспечивает выполнение в схеме соотношений Гюгонио на разрывах.

При расчете ударных волн методом искусственной вязкости преимущество консервативных разностных схем становится менее очевидным. Тем не менее, поскольку в расчетах стараются получить максимально крутые фронты ударных волн ("размазанные" всего на несколько разностных узлов), свойство консервативности остается полезным.

Целесообразность использования консервативных разностных схем для решения задач газовой динамики убедительно показывают тестовые расчеты ударных волн. Особое преимущество консервативных разностных схем выявлено при расчете ударных волн в неоднородной среде (D.G. Colombant, J.H. Gardner, 1976). В этой работе в качестве теста выбрана задача о распространении сильной ударной волны в среде с экспоненциально изменяющейся плотностью. Результаты расчетов сравнивались с известным автомодельным решением (Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер, 1966). Оказалось, что только аппроксимация уравнения энергии в дивергент-

ной форме дает правильный результат, в котором скорость ударной волны не зависит сильно от изменения коэффициента искусственной вязкости или шага разностной сетки. При использовании недивергентных форм уравнения энергии, хотя и удается подобрать подходящее значение коэффициента псевдовязкости, но это значение сильно зависит от шага сетки и параметров задачи. Таким образом, в этом случае консервативная разностная схема оказывается единственно приемлемой.

5. Полностью консервативные разностные схемы. Консервативная разностная схема газовой динамики имеет дефект, который в ряде задач становится существенным. В ней оказываются нарушенными балансы отдельных видов энергии — внутренней и кинетической. Причина этого заключается в том, что разностное уравнение, аппроксимирующее уравнение энергии в дивергентном виде (21.12), вообще говоря, не может с использованием остальных разностных уравнений быть сведено к соотношению, аппроксимирующему уравнение для внутренней энергии (21.7). В ходе преобразования в разностном уравнении появляются остаточные члены, приводящие к нарушению баланса внутренней энергии.

Такие энергетические дисбалансы в схеме можно рассматривать как присутствие в дискретной модели некоторых источников энергии, имеющих чисто разностное происхождение, вследствие "рассогласованности" отдельных разностных уравнений. Этот дефект очень опасен, так как может привести к неправильному счету температуры. Величины энергетических дисбалансов зависят от характера решения. На гладких решениях они невелики — порядка погрешности аппроксимации, но в случае сильно меняющихся решений (ударных волн) могут быть сравнимы с величиной внутренней энергии.

Аналогичная ситуация имеет место и при использовании в разностной схеме недивергентного уравнения энергии (21.7). В этом случае в разностной схеме будет нарушен закон сохранения полной энергии.

Оказалось возможным построить разностную схему, в которой выполнялись бы не только разностные аналоги основных законов сохранения (массы, импульса и энергии), но и дополнительные соотношения, выражающие баланс по определенным видам энергии. Схемы, обладающие этим свойством получили название полностью консервативных разностных схем (Ю.П. Попов, А.А. Самарский, 1969). Полностью консервативные разностные схемы прошли многолетнюю проверку на практике и показали высокую надежность (А.А. Самарский, Ю.П. Попов, 1980).

В задачах гравитационной газодинамики требование полной консервативности приобретает особое значение. Дело в том, что в этом случае использовать обычные консервативные схемы не всегда удобно, так как в звездах значения гравитационной и тепловой энергии могут сильно различаться в разных областях. В частности, у поверхности звезды в областях низкой

плотности вклад тепловой энергии E в величину полной энергии $E + \frac{u^2}{2} -$

$\frac{4\pi G_s}{r}$ мал. В такой ситуации вычисление температуры с помощью раз-

ностного аналога уравнения (21.12) приводит к большой ошибке (Д. Поттер, 1975). С этой точки зрения для построения разностных схем предпочтительным является использование недивергентного уравнения энергии (21.7). Однако, как уже отмечалось, разностные схемы с недивергентными уравнениями энергии приводят к неудовлетворительному расчету ударных волн. Принцип полной консервативности позволяет записать разностную схему с недивергентным уравнением энергии таким образом, что в ней автоматически будет выполняться разностный аналог сохранения полной энергии.

Полностью консервативная разностная схема для уравнений (21.4) – (21.9) будет построена в следующем параграфе.

Обзор наиболее важных разностных схем газовой динамики содержится в книге Б.Л. Рождественского и Н.Н. Яненко (1978), проблема их классификации рассмотрена в статье Н.Н. Яненко и др. (1980).

§ 22. Разностная аппроксимация уравнений газовой динамики

1. Разностная схема с недивергентным уравнением энергии. В расчетной области ($0 \leq s \leq S_0$, $t > 0$) введем неравномерную разностную сетку с целыми и полуцелыми узлами s_i и $s_{i+\frac{1}{2}}$, $i = 1, 2, \dots, N-1$. Определим шаги сетки $h_i = s_i - s_{i-1}$ между целыми узлами и $\bar{h}_i = s_{i+\frac{1}{2}} - s_{i-\frac{1}{2}}$ для полуцелых узлов. Сетка по времени: $t_{j+1} = t_j + \tau_j$, $j = 0, 1, \dots$

Будем относить к целым узлам сетки (s_i, t_j) сеточные функции скорости $u_i^j = u(s_i, t_j)$, эйлеровой переменной $r_i^j = r(s_i, t_j)$ и теплового потока $W_i^j = W(s_i, t_j)$, а к полуцелым точкам $(s_{i+\frac{1}{2}}, t_j)$ – сеточные функции давления $P_i^j = P(s_{i-\frac{1}{2}}, t_j)$, плотности $\rho_i^j = \rho(s_{i-\frac{1}{2}}, t_j)$, внутренней энергии $E_i^j = E(s_{i-\frac{1}{2}}, t_j)$ и температуры $T_i^j = T(s_{i-\frac{1}{2}}, t_j)$. На шаблоне, изображенном на рис. 46, построим для уравнений (21.4) – (21.9) разностную схему с весами

$$\frac{r_i^{j+1} - r_i^j}{\tau} = \sigma_1 u_i^{j+1} + (1 - \sigma_1) u_i^j, \quad (22.1)$$

$$\frac{(r_i^{j+1})^3 - (r_i^j)^3}{h_i} = \frac{3}{\rho_i^{j+1}}, \quad (22.2)$$

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = -R_1 \left[\sigma_2 \frac{g_{i+1}^{j+1} - g_i^{j+1}}{\bar{h}_i} + (1 - \sigma_2) \frac{g_{i+1}^j - g_i^j}{\bar{h}_i} \right] - \frac{4\pi Gs}{R_2}, \quad (22.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{E_i^{j+1} - E_i^j}{\tau} = & - [\sigma_3 g_i^{j+1} + (1 - \sigma_3) g_i^j] \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\rho_i^{j+1}} - \frac{1}{\rho_i^j} \right) - \\ & - \left[\sigma_4 \frac{(r_i^{j+1})^2 W_i^{j+1} - (r_{i-1}^{j+1})^2 W_{i-1}^{j+1}}{h_i} + \frac{(r_i^j)^2 W_i^j - (r_{i-1}^j)^2 W_{i-1}^j}{h_{i-1}} \right] + \\ & + \sigma_4 \epsilon_i^{j+1} + (1 - \sigma_4) \epsilon_i^j, \end{aligned} \quad (22.4)$$

$$W_i^{j+1} = -k_*^{j+1} (r_i^{j+1})^2 \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_i^{j+1}}{\bar{h}_i}, \quad (22.5)$$

$$\begin{aligned} P_i^{j+1} &= \mathcal{P}(\rho_i^{j+1}, T_i^{j+1}), \quad E_i^{j+1} = \mathcal{E}(\rho_i^{j+1}, T_i^{j+1}), \\ \epsilon_i^{j+1} &= \mathcal{H}(\rho_i^{j+1}, T_i^{j+1}). \end{aligned} \quad (22.6)$$

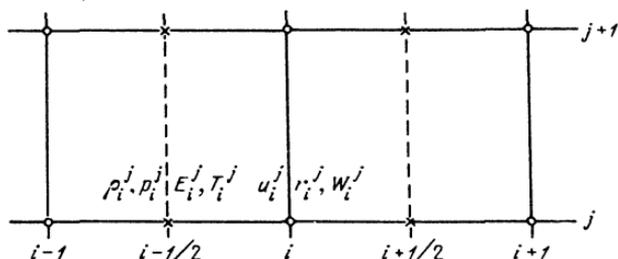


Рис. 46. Шаблон, используемый для расчета параметров газа методом конечных разностей.

Здесь $0 \leq \sigma_k \leq 1$, $k = 1, \dots, 4$ – весовые множители, R_1 и R_2 – некоторые функции величин r_i^{j+1} и r_i^j , аппроксимирующие выражения r^2 (конкретный вид этих функций будет определен позднее), $k_*^{j+1} = \frac{h_{i+1} k_i^{j+1} + h_i k_{i+1}^{j+1}}{h_i + h_{i+1}}$ – интерполяция сеточной функции $k_i^{j+1} = \tilde{K}(\rho_i^{j+1}, T_i^{j+1})$ в целые узлы. Функцию g аппроксимируем в соответствии с (21.1) – (21.3):

$$g_i^{j+1} = \rho_i^{j+1} + \omega_i^{j+1},$$

где

$$\omega_i^{j+1} = -\frac{\nu \rho_i^{j+1}}{2} \left(\frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h_i} - \left| \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h_i} \right| \right)$$

в случае линейной вязкости или

$$\omega_i^{j+1} = -\frac{\mu \rho_i^{j+1}}{2} \left| \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h_i} \right| \left(\frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h_i} - \left| \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h_i} \right| \right)$$

в случае квадратичной вязкости.

Запишем разностную схему в безындексных обозначениях:

$$r_t = u^{(\sigma_1)}, \quad (22.7)$$

$$(r^3)_s^- = \frac{3}{\rho}, \quad (22.8)$$

$$u_t = -R_1 g_s^{(\sigma_2)} - \frac{4\pi G s}{R_2}, \quad (22.9)$$

$$E_t = -g^{(\sigma_3)} \left(\frac{1}{\rho} \right)_t - (r^2 W)_s^{(\sigma_4)} + \epsilon^{(\sigma_4)}, \quad (22.10)$$

$$W = -k_* r^2 T_s, \quad (22.11)$$

$$P = \mathcal{P}(\rho, T), \quad E = \mathcal{E}(\rho, T), \quad \epsilon = \mathcal{H}(\rho, T),$$

$$k_* = \tilde{K}(\rho, \rho(+1), T, T(+1)), \quad g = P + \omega, \quad \omega = \Omega(\rho, u, u(-1)),$$

где

$$\Omega = -\frac{\nu\rho}{2} (u_{\bar{s}} - |u_{\bar{s}}|) - \text{линейная вязкость,}$$

$$\Omega = -\frac{\mu\rho}{2} |u_{\bar{s}}| (u_{\bar{s}} - |u_{\bar{s}}|) - \text{квадратичная вязкость.}$$

При записи использованы безындексные обозначения разностных производных: $y_{\bar{s}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}$ для сеточных функций, определенных в целых узлах,

$y_{\check{s}} = \frac{y_{i+1} - y_i}{\check{h}_i}$ для сеточных функций, определенных в полуцелых узлах.

2. Условие полной консервативности. Попытаемся преобразовать разностную схему таким образом, чтобы уравнение энергии приняло дивергентный вид. Будем поступать аналогично преобразованиям, которые были проведены в предыдущем параграфе для дифференциальных уравнений.

Для этой цели нам потребуются формулы разностного дифференцирования произведения сеточных функций

$$\left. \begin{aligned} (y\nu)_{\bar{s}} &= y\nu_{\bar{s}} + y_{\bar{s}}\nu(-1) = y(-1)\nu_{\bar{s}} + y_{\bar{s}}\nu, \\ (y\nu)_{\check{t}} &= \hat{y}\nu_{\check{t}} + y\nu_{\check{t}}, \end{aligned} \right\} \quad (22.12)$$

формула перехода от одного веса к другому

$$y^{(\alpha)} = y^{(\beta)} + (\alpha - \beta)\tau y_{\check{t}} \quad (22.13)$$

и формула

$$(y_{\bar{s}})_{\check{t}} = (y_{\check{s}})_{\bar{t}}. \quad (22.14)$$

Если сеточная функция $y_i^j = y(s_{i-\frac{1}{2}}, t_j)$ определена в полуцелых узлах, то ее значения в целом узле i будем определять по формуле линейной интерполяции между близлежащими полуцелыми узлами $i + \frac{1}{2}$ и $i - \frac{1}{2}$:

$$y_* = y(s_i, t_j) = \frac{h_{i+1}y_i + h_i y_{i+1}}{h_i + h_{i-1}}. \quad (22.15)$$

Нам понадобится также формула разностного дифференцирования произведения сеточных функций νy_*

$$(y\nu_*)_{\bar{s}} = \nu_{\bar{s}}y + \frac{1}{2} [\nu y_{\check{s}} + \nu(-1)(y(-1))_{\check{s}}]. \quad (22.16)$$

Формулы (22.12) – (22.16) легко проверить, если записать их в индексных обозначениях.

В начале преобразований схемы получим разностное уравнение неразрывности, аппроксимирующее (21.10). Для этого возьмем разностную производную по времени от уравнения (22.8)

$$[(r^3)_{\bar{s}}]_{\check{t}} = 3 \left(\frac{1}{\rho} \right)_{\check{t}}.$$

С помощью (22.14) и (22.7) получим

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_t = (Ru^{(\sigma_1)})_{\bar{s}}, \quad (22.17)$$

где $R = (\hat{v}^2 + \hat{r}r + r^2)/3$.

Теперь, следуя преобразованиям в § 21, получим разностный аналог формулы (21.11). Умножим (22.9) на $u^{(0,5)} = 0,5(\hat{u} + u)$ и преобразуем отдельные слагаемые следующим образом:

$$u^{(0,5)}u_t = \frac{(\hat{u} + u)}{2} \frac{(\hat{u} - u)}{\tau} = \frac{\hat{u}^2 - u^2}{2\tau} = \left(\frac{u^2}{2}\right)_t, \quad (22.18)$$

$$\begin{aligned} u^{(0,5)} \frac{4\pi Gs}{R_2} &= \frac{4\pi Gs}{R_2} [u^{(\sigma_1)} + (\sigma_1 - 0,5)\tau u_t] = \\ &= \frac{4\pi Gs}{R_2} r_t + \frac{4\pi Gs}{R_2} (\sigma_1 - 0,5)\tau u_t = -\left(\frac{4\pi Gs}{r}\right)_t - \delta\epsilon_1, \end{aligned} \quad (22.19)$$

где

$$\delta\epsilon_1 = -4\pi Gs \left[\frac{r_t}{R_2} + \left(\frac{1}{r}\right)_t \right] - \frac{4\pi Gs}{R_2} (\sigma_1 - 0,5)\tau u_t. \quad (22.20)$$

Таким образом, имеем

$$\left(\frac{u^2}{2} - \frac{4\pi Gs}{r}\right) = -R_1 u^{(0,5)} g_s^{(\sigma_2)} + \delta\epsilon_1. \quad (22.21)$$

Введем обозначение: $U = -\frac{4\pi Gs}{r}$ — потенциальная энергия элемента газа единичной массы на расстоянии r от центра звезды. Перепишем (22.20):

$$\left(\frac{u^2}{2} + U\right)_t = -R_1 u^{(0,5)} g_s^{(\sigma_2)} + \delta\epsilon_1. \quad (22.22)$$

Далее определим значение кинетической и потенциальной энергии в полужелом узле $i - \frac{1}{2}$ с помощью линейной интерполяции соответствующих величин в целых узлах i и $i - 1$. Тогда в узле $i - \frac{1}{2}$ имеем

$$\begin{aligned} \left(\frac{u^2 + u(-1)^2}{4} + \frac{U + U(-1)}{2}\right)_t &= -\frac{1}{2} R_1 u^{(0,5)} g_s^{(\sigma_2)} - \\ &- \frac{1}{2} R_1 (-1) u(-1)^{(0,5)} [g(-1)]_s^{(\sigma_2)} + \frac{\delta\epsilon_1 + \delta\epsilon_1(-1)}{2}. \end{aligned} \quad (22.23)$$

Складывая (22.23) и (22.10), с учетом (22.17), получим

$$\left[E - \frac{u^2 + u(-1)^2}{4} + \frac{U + U(-1)}{2}\right]_t = -g^{(\sigma_3)} (Ru^{(\sigma_1)})_{\bar{s}} -$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \left\{ R_1 u^{(0,5)} g_{\bar{s}}^{(\sigma_2)} + R_1 (-1) u(-1)^{(0,5)} [g(-1)]_{\bar{s}}^{(\sigma_2)} \right\} + \\
& + \frac{\delta \epsilon_1 + \delta \epsilon_1 (-1)}{2}.
\end{aligned} \tag{22.24}$$

Слагаемые в правой части преобразуем следующим образом:

$$\begin{aligned}
& g^{(\sigma_2)} (Ru^{(\sigma_1)})_{\bar{s}} = \\
& = [g^{(\sigma_2)} + (\sigma_3 - \sigma_2) \tau g_t] [R(u^{(0,5)} + (\sigma_1 - 0,5) \tau u_t)]_{\bar{s}} = \\
& = g^{(\sigma_2)} (Ru^{(0,5)})_{\bar{s}} - \delta \epsilon_2,
\end{aligned} \tag{22.25}$$

где

$$\delta \epsilon_2 = -\tau [(\sigma_1 - 0,5) g^{(\sigma_2)} (Ru_t)_{\bar{s}} + (\sigma_3 - \sigma_2) g_t (Ru^{(0,5)})_{\bar{s}}]; \tag{22.26}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\{ R_1 u^{(0,5)} g_{\bar{s}}^{(\sigma_2)} + R_1 (-1) u(-1)^{(0,5)} [g(-1)]_{\bar{s}}^{(\sigma_2)} \right\} = \\
& = \frac{1}{2} \left\{ Ru^{(0,5)} g_{\bar{s}}^{(\sigma_2)} + R(-1) u(-1)^{(0,5)} [g(-1)]_{\bar{s}}^{(\sigma_2)} \right\} - \delta \epsilon_3,
\end{aligned} \tag{22.27}$$

где

$$\begin{aligned}
& \delta \epsilon_3 = \frac{1}{2} \left\{ (R - R_1) u^{(0,5)} g_{\bar{s}}^{(\sigma_2)} + \right. \\
& \left. + [R(-1) - R_1(-1)] u(-1)^{(0,5)} [g(-1)]_{\bar{s}}^{(\sigma_2)} \right\}.
\end{aligned} \tag{22.28}$$

Подставляя (22.25) и (22.27) в (22.24), получим

$$\begin{aligned}
& \left[E + \frac{u^2 + u(-1)^2}{4} + \frac{U + U(-1)}{2} \right]_t = -g^{(\sigma_2)} (Ru^{(\sigma_1)})_{\bar{s}} - \\
& - \frac{1}{2} \left\{ Ru^{(0,5)} g_{\bar{s}}^{(\sigma_2)} + R(-1) u(-1)^{(0,5)} [g(-1)]_{\bar{s}}^{(\sigma_2)} \right\} + \\
& + (r^2 W)_{\bar{s}}^{(\sigma_2)} + \epsilon^{(\sigma_4)} + \frac{\delta \epsilon_1 + \delta \epsilon_1 (-1)}{2} + \delta \epsilon_2 + \delta \epsilon_3.
\end{aligned}$$

Первые два слагаемых сворачиваются по формуле разностного дифференцирования (22.16). Окончательно, имеем:

$$\begin{aligned}
& \left[E + \frac{u^2 + u(-1)^2}{4} + \frac{U + U(-1)}{2} \right]_t = \\
& = -(Ru^{(0,5)} g_{\bar{s}}^{(\sigma_2)})_{\bar{s}} + (r^2 W)_{\bar{s}}^{(\sigma_4)} + \epsilon^{(\sigma_4)} + \delta \epsilon,
\end{aligned} \tag{22.29}$$

где $\delta \epsilon = \frac{\delta \epsilon_1 + \delta \epsilon_1 (-1)}{2} + \delta \epsilon_2 + \delta \epsilon_3.$

Полученное соотношение представляет собой разностный аналог дивергентного уравнения энергии (21.12). Его можно рассматривать как закон

сохранения энергии для одного массового интервала (s_{j-1}, s_j) на промежутке времени (t_j, t_{j+1}) . Суммирование уравнений (22.29) по всем узлам разностной сетки дает разностный аналог интегрального закона сохранения полной энергии.

Мы видим, что в исходной разностной схеме (22.1) — (22.6) закон сохранения энергии нарушен за счет появления фиктивных источников энергии $\delta\epsilon$ чисто разностного происхождения. Дисбаланс энергии накапливается со временем. На гладких решениях мощность фиктивных источников порядка $O(\tau)$ (при правильном выборе R_1 и R_2) и практически не зависит от шага пространственной сетки.

Выберем теперь параметры схемы таким образом, чтобы дисбаланс энергии тождественно равнялся нулю: $\delta\epsilon_1 = \delta\epsilon_2 = \delta\epsilon_3 = 0$. Из выражений для дисбаланса (22.20), (22.26) и (22.28) получаем

$$R_2 = -\frac{r_t}{\left(\frac{1}{r}\right)_t} = \hat{r}r, \quad R_1 = R = \frac{\hat{r}^2 + \hat{r}r + r^2}{3}, \quad (22.30)$$

$$\sigma_1 = 0,5; \quad \sigma_3 = -\sigma_2.$$

Таким образом, при выполнении условий (22.30) разностная схема становится полностью консервативной, т.е. в этом случае в схеме выполнены как закон сохранения полной энергии (22.29), так и балансы по отдельным видам энергии: внутренней (22.10) и сумме кинетической и потенциальной (22.22).

Условие полной консервативности позволило конкретизировать разностную аппроксимацию величин R_1 и R_2 и значения весов σ_1 и σ_3 . Два весовых множителя σ_2 и σ_4 (обозначим их соответственно α и β) остались свободными параметрами.

Выпишем двухпараметрическое семейство полностью консервативных разностных схем:

$$\left. \begin{aligned} r_t &= u^{(0,5)}, \quad (r^3)_{\bar{s}} = \frac{3}{\rho}, \quad u_t = -Rg_s^{(\alpha)} - \frac{4\pi Gs}{r\hat{r}}, \\ E_t &= -g^{(\alpha)} \left(\frac{1}{\rho}\right)_t - (r^2 W)_{\bar{s}}^{(\beta)} + \epsilon^{(\beta)}, \quad W = -kr^2 T_s, \\ E &= \mathcal{E}(\rho, T), \quad P = \mathcal{P}(\rho, T), \quad \epsilon = \mathcal{H}(\rho, T), \\ R &= \frac{\hat{r}^2 + \hat{r}r + r^2}{3}, \quad g = P + \omega, \quad \omega = \Omega(\rho, u, u(-1)), \\ k &= \tilde{K}(\rho, \rho(+1), T, T(+1)). \end{aligned} \right\} \quad (22.31)$$

Звездочку при обозначении сеточной функции k в целом узле будем опускать.

Распоряжаясь весовыми множителями α и β , получаем различные разностные схемы; от явной $\alpha=0, \beta=0$ до полностью неявной $\alpha=1, \beta=1$. При $\alpha=\beta=0,5$ получаем единственную полностью консервативную разностную схему со вторым порядком аппроксимации на равномерной сетке $O(\tau^2, h^2)$. В остальных случаях разностные уравнения имеют порядок аппроксимации $O(\tau, h^2)$.

3. Аппроксимация в граничных узлах. Сделаем несколько замечаний по поводу разностной аппроксимации уравнений в граничных

узлах сетки. Для того чтобы избежать изменений в записи разностных уравнений в граничных узлах сетки, воспользуемся следующим приемом. Формально расширим разностную сетку, добавив к ней фиктивные разностные узлы: слева — s_0 и справа — s_N . Величины соответствующих шагов сетки положим равными нулю: $h_1 = s_1 - s_0 = 0$, $h_N = s_N - s_{N-1} = 0$. Также формально введем полуцелые узлы $i = \frac{1}{2}$ и $i = N - \frac{1}{2}$, отнесенные к середине

фиктивного разностного интервала, и в этих полуцелых узлах будем определять функции давления и температуры. По существу, эти величины совпадают со значениями давления и температуры в граничных узлах $i = 1$ и $i = N - 1$, например, $P(s_{\frac{1}{2}}, t_j) = P(s_1, t_j)$ и $P(s_{N-\frac{1}{2}}, t_j) = P(s_{N-1}, t_j)$.

Таким образом, система разностных уравнений (22.31) будет справедлива во всех узлах разностной сетки $i = 1, 2, \dots, N - 1$.

§ 23. Методы решения разностных уравнений

Разностная схема для уравнений газовой динамики в общем случае представляет собой систему нелинейных алгебраических уравнений относительно значений сеточных функций на $j + 1$ -м временном слое. Данную систему уравнений нужно решать на каждом временном слое. Если принять во внимание, что размерность системы достаточно велика ($\sim nN$, $N \approx 30 \div 300$ — число узлов сетки, $n \approx 10$ — число переменных), то становится понятным, что разработка эффективного алгоритма для решения разностных уравнений представляет самостоятельную проблему.

1. Явная разностная схема. Рассмотрим систему уравнений, представляющую полностью консервативную схему (22.31). В частном случае $\alpha = \beta = 0$ система уравнений разрешается относительно неизвестных сеточных функций на $j + 1$ -м временном слое по явным формулам через значения сеточных функций на j -м слое. Расчетные формулы в этом случае легко выписать. Простота программной реализации является привлекательной чертой явной схемы.

Однако исследование устойчивости такой разностной схемы показывает, что условие устойчивости накладывает жесткое ограничение на временной шаг:

$$\tau < \frac{\Delta r_i}{a_i}, \quad (23.1)$$

$$\tau < \frac{(\Delta r_i)^2}{2q_i}, \quad (23.2)$$

где $\Delta r_i = r_{i+1} - r_i$, a_i — локальное значение скорости звука, $q_i = \frac{\kappa_{T,i} \rho_i}{c_{V,i}}$ — коэффициент температуропроводности, $c_{V,i}$ — удельная теплоемкость.

Условие (23.1), так называемое условие Куранта, возникает из-за явной аппроксимации уравнений движения ($\alpha = 0$), а (23.2) — из-за явной аппроксимации уравнения энергии ($\beta = 0$).

В большинстве задач критерий устойчивости сильно ограничивает величину шага по времени. Следовательно, для решения задачи требуется большое число временных шагов, что, в свою очередь, означает большие затраты

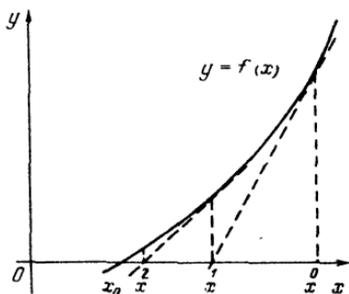


Рис. 47. К объяснению итерационного метода Ньютона.

(23.1). В такой разностной схеме явным образом разрешаются только первые три уравнения системы (22.31), а для решения уравнения энергии нужно использовать итерационные методы.

2. Неявные разностные схемы. Детальное рассмотрение разностных схем газовой динамики приводит к выводу о целесообразности использования неявных разностных схем, которые являются абсолютно устойчивыми при $\alpha \geq 0,5$ и $\beta \geq 0,5$. В основных чертах аргументация сводится к следующему (Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко, 1978) :

1) Локальные значения скорости звука в разных узлах сетки могут сильно различаться. (Заметим, что такая ситуация характерна для большинства астрофизических задач). В этом случае критерий устойчивости явных схем (23.1) может привести к неоправданно малому шагу по времени, что ведет к уменьшению точности расчета и сглаживанию профилей решения.

2) Для точного счета ударных волн желательно, чтобы фронт волны перемещался за один временной шаг на один шаг пространственной сетки. Явная схема в силу критерия (23.1) не может быть использована для такого расчета.

3) Величина временного шага схемы определяется двумя требованиями: точности и устойчивости. Точность определяется, в основном, величиной градиентов решения: чем больше градиенты, тем быстрее протекает газодинамический процесс, тем меньше допустимый шаг, и наоборот. Устойчивость явной схемы определяется условием (23.1), которое с градиентами никак не связано. Поэтому при расчете газодинамических процессов с малыми градиентами временной шаг, допустимый по точности, намного превышает шаг, допустимый по устойчивости. Ясно, что в этом случае необходима неявная схема.

Рассмотрим подробнее реализацию неявной разностной схемы.

3. Метод Ньютона. Для численного решения системы нелинейных алгебраических уравнений, представляющих разностную схему, наиболее часто используется итерационный метод Ньютона (И.С. Березин, Н.П. Жидков, 1962).

Поясним его на примере функции одной переменной. Пусть требуется найти решение $x = x_0$ уравнения $f(x) = 0$. Представим значение функции $f(x)$ в точке x_0 с помощью разложения в ряд Тейлора с сохранением линейных членов:

$$0 = f(x_0) \approx f(x) + \left(\frac{df}{dx} \right) (x_0 - x).$$

Выразим отсюда x_0 : $x_0 \approx x - \frac{f(x)}{f'(x)}$. На основе этого соотношения строят

итерационный процесс для нахождения x_0 : $x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$, где $k = 0, 1, \dots$

номер итерации. Итерации повторяют до достижения заданной точности. Метод Ньютона можно представить как последовательное построение касательных к кривой $y = f(x)$ (рис. 47). Точка пересечения касательной, проведенной в точке x^k , с осью x определяет значение x^{k+1} . Метод Ньютона

обладает высокой (квадратичной) скоростью сходимости: $|x^{k+1} - x^k| < \text{const} |x^k - x^{k-1}|^2$. В случае системы n уравнений с n неизвестными $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$,
 \dots
 $f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$

применение метода Ньютона приводит к итерационному процессу, в котором на каждой итерации нужно решить систему линейных уравнений:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} (x_1^{k+1} - x_1^k) + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} (x_2^{k+1} - x_2^k) + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n} (x_n^{k+1} - x_n^k) = -f_1^k,$$

$$\dots$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial x_1} (x_1^{k+1} - x_1^k) + \frac{\partial f_n}{\partial x_2} (x_2^{k+1} - x_2^k) + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n} (x_n^{k+1} - x_n^k) = -f_n^k.$$

Все производные вычисляются по значениям аргументов на предыдущей итерации. Решить систему линейных уравнений можно известными методами линейной алгебры (например, методом исключения Гаусса).

В дальнейшем для сокращения записи будем использовать обозначение

$$\delta x_i = x_i^{k+1} - x_i^k. \quad (23.3)$$

Рассмотрим подробнее применение метода Ньютона к решению системы уравнений газодинамики (22.31). Запишем эту систему уравнений следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} f_{1,i}^{j+1}(r_i^{j+1}, u_i^{j+1}) &= \tau [r_i - u^{(0.5)}]_i^{j+1} = \\ &= r_i^{j+1} - r_i^j - 0,5\tau(u_i^{j+1} + u_i^j) = 0, \\ f_{2,i}^{j+1}(r_i^{j+1}, r_{i-1}^{j+1}, \rho_i^{j+1}) &= \left[\frac{(r^3)_{\bar{s}}}{3} - \frac{1}{\rho} \right]_i^{j+1} = \\ &= \frac{(r_i^{j+1})^3 - (r_{i-1}^{j+1})^3}{3h_i} - \frac{1}{\rho_i^{j+1}} = 0, \\ f_{3,i}^{j+1}(u_i^{j+1}, r_i^{j+1}, R_i^{j+1}, g_{i+1}^{j+1}, g_i^{j+1}) &= \tau \left[u_t + Rg_{\bar{s}}^{(\alpha)} + \frac{4\pi Gs}{\hat{r}r} \right]_i^{j+1} = \end{aligned} \right\} (23.4)$$

$$\begin{aligned}
&= u_i^{j+1} - u_i^j + \tau R_i^{j+1} \left[\alpha \left(\frac{g_{i+1}^{j+1} - g_i^{j+1}}{h_i} \right) + (1 - \alpha) \left(\frac{g_{i+1}^j - g_i^j}{h_i} \right) \right] + \\
&+ \tau \frac{4\pi G s_i}{r_i^{j+1} r_i^j} = 0, \\
f_{4,i}^{j+1} (E_i^{j+1}, g_i^{j+1}, \rho_i^{j+1}, r_i^{j+1}, r_{i-1}^{j+1}, W_i^{j+1}, W_{i-1}^{j+1}, \epsilon_i^{j+1}) = \\
&= \tau \left[E_t + g^{(\alpha)} \left(\frac{1}{\rho} \right)_t + (r^2 W)_{\bar{s}}^{(\beta)} - \epsilon^{(\beta)} \right]_i^{j+1} = E_i^{j+1} - E_i^j + \\
&+ (\alpha g_i^{j+1} + (1 - \alpha) g_i^j) \left(\frac{1}{\rho_i^{j+1}} - \frac{1}{\rho_i^j} \right) + \\
&+ \tau \beta \frac{(r_i^{j+1})^2 W_i^{j+1} - (r_{i-1}^{j+1})^2 W_{i-1}^{j+1}}{h_i} + \\
&+ \tau (1 - \beta) \frac{(r_i^j)^2 W_i^j - (r_{i-1}^j)^2 W_{i-1}^j}{h_i} - \tau \beta \epsilon_i^{j+1} - \tau (1 - \beta) \epsilon_i^j = 0, \\
f_{5,i}^{j+1} (W_i^{j+1}, k_i^{j+1}, r_i^{j+1}, T_{i+1}^{j+1}, T_i^{j+1}) = [W + kr^2 T_{\bar{s}}]_i^{j+1} = \\
&= W_i^{j+1} + k_i^{j+1} (r_i^{j+1})^2 \frac{T_{i+1}^{j+1} - T_i^j}{h_i} = 0, \\
f_{6,i}^{j+1} (R_i^{j+1}, r_i^{j+1}) = \left[R - \frac{1}{3} (\hat{r}^2 + \hat{r}r + r^2) \right]_i^{j+1} = \\
&= R_i^{j+1} - \frac{1}{3} (r_i^{j+1})^2 + r_i^{j+1} r_i^j + (r_i^j)^2 = 0, \\
f_{7,i}^{j+1} (g_i^{j+1}, \rho_i^{j+1}, T_i^{j+1}, u_{\bar{s},i}^{j+1}) = [g - \mathcal{P}(\rho, T) - \Omega(\rho, u_{\bar{s}})]_i^{j+1} = \\
&= g_i^{j+1} - \mathcal{P}(\rho_i^{j+1}, T_i^{j+1}) - \Omega(\rho_i^{j+1}, u_{\bar{s},i}^{j+1}) = 0, \\
f_{8,i}^{j+1} (k_i^{j+1}, \rho_{i+1}^{j+1}, \rho_i^{j+1}, T_{i+1}^{j+1}, T_i^{j+1}) = \\
&= [k - \tilde{K}(\rho, \rho(+1), T, T(+1))]_i^{j+1} = \\
&= k_i^{j+1} - \tilde{K}(\rho_i^{j+1}, \rho_{i+1}^{j+1}, T_i^{j+1}, T_{i+1}^{j+1}) = 0, \\
f_{9,i}^{j+1} (\epsilon_i^{j+1}, \rho_i^{j+1}, T_i^{j+1}) = [\epsilon - \mathcal{H}(\rho, T)]_i^{j+1} = \epsilon_i^{j+1} - \mathcal{H}(\rho_i^{j+1}, T_i^{j+1}) = 0, \\
f_{10,i}^{j+1} (E_i^{j+1}, \rho_i^{j+1}, T_i^{j+1}) = [E - \mathcal{E}(\rho, T)]_i^{j+1} = \\
&= E_i^{j+1} - \mathcal{E}(\rho_i^{j+1}, T_i^{j+1}) = 0.
\end{aligned} \tag{23.4}$$

Применение метода Ньютона к системе нелинейных уравнений (23.4) приводит к следующей системе линейных разностных уравнений для приращений (23.3) искомых функций на $k+1$ -й итерации:

$$\begin{aligned}
 & \delta r_i^{k+1} - 0,5\tau\delta u_i^{k+1} = -f_{1,i}^k, \\
 & \frac{(r_i^k)^2 \delta r_i^{k+1} - (r_{i-1}^k)^2 \delta r_{i-1}^{k+1}}{h_i} + \frac{1}{(\rho_i^k)^2} \delta \rho_i^{k+1} = -f_{2,i}^k, \\
 & \delta u_i^{k+1} + \tau g_{\bar{y}}^{(\alpha)} \delta R_i^{k+1} + \alpha \tau R_i^k (\delta g^k)_{\bar{y}} - \tau \frac{4\pi G s_i}{(r_i^k)^2 r_i^j} \delta r_i^{k+1} = -f_{3,i}^k, \\
 & \delta E_i^{k+1} + \alpha \left(\frac{1}{\rho_i^k} - \frac{1}{\rho_i^j} \right) \delta g_i^{k+1} - \frac{g^{(\alpha)}}{(\rho_i^k)^2} \delta \rho_i^{k+1} + 2\beta \tau (r^k W \delta r^k)_{\bar{y}} + \\
 & + \beta \tau ((r^k)^2 \delta W)_{\bar{y}} - \beta \tau \delta \epsilon_i^{k+1} = -f_{4,i}^k, \\
 & \delta W_i^{k+1} + (r_i^k)^2 T_{\bar{s}}^k \delta k_i^{k+1} + 2r_i^k k_i^k T_{\bar{y}}^k (\delta r^k)_{\bar{y}} + (r_i^k)^2 k_i^k (\delta T^k)_{\bar{s}} = -f_{5,i}^k, \\
 & \delta R_i^{k+1} - \frac{1}{3} (2r_i^k + r_i^j) \delta r_i^{k+1} = -f_{6,i}^k, \\
 & \delta g_i^{k+1} - \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho_i^k} \right) \delta \rho_i^{k+1} - \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial T_i^k} \right) \delta T_i^{k+1} - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \rho_i^k} \right) \delta \rho_i^{k+1} - \\
 & - \left(\frac{\partial \Omega}{\partial u_{\bar{s},i}^k} \right) (\delta u^k)_{\bar{s}} = -f_{7,i}^k, \\
 & \delta k_i^{k+1} - \left(\frac{\partial \tilde{K}}{\partial \rho_i^k} \right) \delta \rho_i^{k+1} - \left(\frac{\partial \tilde{K}}{\partial \rho_{i+1}^k} \right) \delta \rho_{i+1}^{k+1} - \left(\frac{\partial \tilde{K}}{\partial T_i^k} \right) \delta T_i^{k+1} - \\
 & - \left(\frac{\partial \tilde{K}}{\partial T_{i+1}^k} \right) \delta T_{i+1}^{k+1} = -f_{8,i}^k, \\
 & \delta \epsilon_i^{k+1} - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \rho_i^k} \right) \delta \rho_i^{k+1} - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T_i^k} \right) \delta T_i^{k+1} = -f_{9,i}^k, \\
 & \delta E_i^{k+1} - \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho_i^k} \right) \delta \rho_i^{k+1} - \left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T_i^k} \right) \delta T_i^{k+1} = -f_{10,i}^k.
 \end{aligned} \tag{23.5}$$

Для сокращения записи будем опускать номер итерации и применять безындексные обозначения для всех сеточных функций. Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{4\pi G s_i}{(r_i^k)^2 r_i^j}, \quad \bar{r} = \frac{1}{3} (2r_i^k + r_i^j), \quad \left(\frac{1}{\rho}\right)_t = \frac{1}{\tau} \left(\frac{1}{\rho_i^k} - \frac{1}{\rho_i^j}\right), \\ \mathcal{P}_T &= \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial T_i}\right)^k, \quad \mathcal{P}_\rho = \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho_i}\right)^k, \quad g_\rho = \mathcal{P}_\rho + \Omega_\rho, \quad \Omega_u = \left(\frac{\partial \Omega}{\partial u_{\bar{s}}}\right), \\ \tilde{K}_T &= \left(\frac{\partial \tilde{K}}{\partial T_i}\right)^k, \quad \tilde{K}'_T = \left(\frac{\partial \tilde{K}}{\partial T_{i+1}}\right)^k \text{ и т.п.} \end{aligned} \right\} (23.6)$$

Кроме того, с целью упрощения итерационного процесса пренебрежем в выражении для приращения коэффициента теплопроводности δk приращением плотности $\delta \rho$. Основанием этого служит тот физический факт, что коэффициент лучистой теплопроводности в гораздо большей степени определяется температурой, чем плотностью.

С учетом сказанного перепишем систему (23.5) в виде

$$\left. \begin{aligned} \delta r - 0,5\tau \delta u &= -f_1, \\ (r^2 \delta r)_{\bar{s}} + \frac{\delta \rho}{\rho^2} &= -f_2, \\ \delta u + \tau g_{\bar{s}}^{(\alpha)} \delta R + \alpha \tau R (\delta g)_{\bar{s}} - \tau F \delta r &= -f_3, \\ \delta E + \alpha \tau \left(\frac{1}{\rho}\right)_t \delta g - \frac{g^{(\alpha)}}{\rho^2} \delta \rho + 2\beta \tau (rW \delta r)_{\bar{s}} + \\ + \beta \tau (r^2 \delta W)_{\bar{s}} - \beta \tau \delta \epsilon &= -f_4, \\ \delta W + r^2 T_{\bar{s}} \delta k + 2rk T_{\bar{s}} \delta r + r^2 k (\delta T)_{\bar{s}} &= -f_5, \\ \delta R - \bar{r} \delta r &= -f_6, \\ \delta g - g_\rho \delta \rho - \mathcal{P}_T \delta T - \Omega_u (\delta u)_{\bar{s}} &= -f_7, \\ \delta k = -\tilde{K}_T \delta T - \tilde{K}'_T \delta T (+1) &= -f_8, \\ \delta \epsilon - \mathcal{K}_\rho \delta \rho - \mathcal{K}_T \delta T &= -f_9, \\ \delta E - \mathcal{E}_\rho \delta \rho - \mathcal{E}_T \delta T &= -f_{10}. \end{aligned} \right\} (23.7)$$

Исключим из системы (23.7) приращения всех функций, кроме скорости и температуры. В результате получим систему двух линейных уравнений. Выразим δr , $\delta \rho$, δR , δg через δu и δT :

$$\delta r = 0,5\tau \delta u - f_1, \quad (23.8)$$

$$\delta \rho = -0,5\tau \rho^2 (r^2 \delta u)_{\bar{s}} - Y, \quad (23.9)$$

где

$$Y = \rho^2 [f_2 - (r^2 f_1)_{\bar{s}}], \quad (23.10)$$

$$\delta R = 0,5\tau \bar{r} \delta u - (\bar{r} f_1 + f_6), \quad (23.11)$$

$$\delta g = -0,5\tau g_\rho \rho^2 (r^2 \delta u)_{\bar{s}} + \Omega_u (\delta u)_{\bar{s}} + \mathcal{P}_T \delta T - g_\rho Y - f_7. \quad (23.12)$$

Подставляя (23.8) — (23.12) в третье уравнение системы (23.7), получим первое уравнение, связывающее δu и δT :

$$a_{11,i} \delta u_{i-1} - c_{11,i} \delta u_i + b_{11,i} \delta u_{i+1} - c_{12,i} \delta T_i + b_{12,i} \delta T_{i+1} = -F_{1,i}, \quad (23.13)$$

где коэффициенты $a_{11}, c_{11}, b_{11}, c_{12}, b_{12}$ и правая часть F_1 зависят только от значений сеточных функций на k -й итерации и определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} a_{11,i} &= \alpha_{1,i} (a_i r_{i-1}^2 - b_i), \\ c_{11,i} &= 1 + a_{1,i} + \alpha_{1,i} [r_i^2 (a_{i+1} + a_i) - (b_{i+1} + b_i)], \\ b_{11,i} &= \alpha_{1,i} (a_{i+1} r_{i+1}^2 - b_{i+1}), \\ c_{12,i} &= -\alpha_{1,i} \mathcal{P}_{T,i}, \\ b_{12,i} &= -\alpha_{1,i} \mathcal{P}_{T,i+1}, \\ F_{1,i} &= -f_{3,i} - \tau F_i f_{1,i} + \tau g_s^{(\alpha)} (f_{6,i} + \bar{r}_i f_{1,i}) + \alpha \tau R_i (g_\rho Y + f_7)_s, \end{aligned} \right\} \quad (23.14)$$

где

$$\alpha_{1,i} = \frac{\alpha \tau R_i}{h_i}, \quad a_{1,i} = 0,5 \tau^2 (\bar{r}_i g_s^{(\alpha)} - F_i),$$

$$a_i = \frac{\tau \rho_i^2 g_{\rho,i}}{2 h_i}, \quad b_i = \frac{\Omega_{u,i}}{h_i}.$$

Далее выразим δE , δg , δk , δW и $\delta \epsilon$ через δu , δT и $\delta \rho$:

$$\delta E = \mathcal{E}_\rho \delta \rho + \mathcal{E}_T \delta T - f_{10}, \quad (23.15)$$

$$\delta g = g_\rho \delta \rho + \Omega_u (\delta u)_s + \mathcal{P}_T \delta T - f_7, \quad (23.16)$$

$$\delta k = \tilde{K}_T \delta T + \tilde{K}'_T \delta T (+1) - f_8, \quad (23.17)$$

$$\delta W = -(b_1 \tilde{K}'_T + b_2) \delta T (+1) + (b_2 - \tilde{K}_T b_1) \delta T - \tau (kr T_s) \delta u - b_3, \quad (23.18)$$

$$\delta \epsilon = \mathcal{H}_\rho \delta \rho + \mathcal{H}_T \delta T - f_9, \quad (23.19)$$

где

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= r_i^2 T_s, \quad b_2 = \frac{k_i r_i^2}{h_i}, \\ b_3 &= f_5 - 2(kr T_s) f_1 - (r^2 T_s) f_8. \end{aligned} \right\} \quad (23.20)$$

Подставим (23.15) — (23.20) в четвертое уравнение из (23.7):

$$c_1 \delta \rho + c_2 \delta T + \alpha \tau \left(\frac{1}{\rho} \right)_i \Omega_u (\delta u)_s + \beta \tau^2 (rW \delta u)_s + \beta \tau (r^2 \delta W)_s = c_3, \quad (23.21)$$

где

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= \mathcal{E}_\rho + \alpha \tau \left(\frac{1}{\rho} \right)_i g_\rho - \frac{g^{(\alpha)}}{\rho^2} - \beta \tau \mathcal{H}_\rho, \\ c_2 &= \mathcal{E}_T + \alpha \tau \left(\frac{1}{\rho} \right)_i \mathcal{P}_T - \beta \tau \mathcal{H}_T, \\ c_3 &= -f_4 + f_{10} - \beta \tau f_9 + \alpha \tau \left(\frac{1}{\rho} \right)_i f_7 + 2\beta \tau (rW f_1)_s. \end{aligned} \right\} \quad (23.22)$$

Наконец, подставляя (23.9) и (23.21), получаем второе уравнение, связывающее δu и δT :

$$a_{21,i} \delta u_{i-1} - c_{21,i} \delta u_i + a_{22,i} \delta T_{i-1} - c_{22,i} \delta T_i + b_{22,i} \delta T_{i+1} = -F_{2,i}, \quad (23.23)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{21,i} &= \beta_1 d_{i-1} + d_{1,i} - d_{2,i} r_{i-1}^2, \\ c_{21,i} &= \beta_1 d_i + d_{1,i} - d_{2,i} r_i^2, \\ a_{22,i} &= \beta_1 f_{i-1}, \quad c_{22,i} = c_{2,i} + \beta_1 (e_{i-1} + f_i), \quad b_{22,i} = \beta_1 e_i, \\ \beta_1 &= \frac{\beta \tau}{h_i}, \quad d_{1,i} = \frac{\alpha \tau}{h_i} \left(\frac{1}{\rho} \right)_t \Omega_{u,i}, \\ d_{2,i} &= 0,5 \tau \rho_i^2 \frac{c_{1,i}}{h_i}, \\ d_i &= \tau r_i (W_i - r_i^2 k_i T_s), \\ e_i &= r_i^2 (b_2 + \tilde{K}'_T b_1)_i, \\ f_i &= r_i^2 (b_2 - \tilde{K}_T b_1)_i, \\ F_{2,i} &= c_{3,i} + c_{1,i} Y_i + \beta \tau (r^2 b_3)_{\bar{s}}. \end{aligned} \right\} \quad (23.24)$$

Введя вектор-функции $Y_i = \begin{pmatrix} \delta u_i \\ \delta T_i \end{pmatrix}$, $F_i = \begin{pmatrix} F_{1,i} \\ F_{2,i} \end{pmatrix}$, перепишем систему (23.13), (23.23) в матричной форме:

$$A_i Y_{i-1} - C_i Y_i + B_i Y_{i+1} = -F_i, \quad i = 2, 3, \dots, N-2, \quad (23.25)$$

где

$$A_i = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B_i = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}, \quad C_i = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}.$$

Граничные условия для системы (23.25) в общем случае можно записать в виде

$$-C_1 Y_1 + B_1 Y_2 = -F_1, \quad A_{N-1} Y_{N-2} - C_{N-1} Y_{N-1} = -F_{N-1}. \quad (23.26)$$

Конкретный вид матриц $C_1, B_1, A_{N-1}, C_{N-1}$ и векторов F_1, F_{N-1} зависит от постановки задачи.

4. Метод матричной прогонки. Для решения векторного разностного уравнения (23.25) с граничными условиями (23.26) применяют метод матричной прогонки (А.А. Самарский, 1977). Суть этого метода заключается в следующем. Сначала по рекуррентным формулам определяют так называемые прогоночные коэффициенты — матрица α_i и вектор β_i (прямая прогонка):

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= C_1^{-1} B_1, \quad \beta_1 = C_1^{-1} F_1, \\ \alpha_{i+1} &= (C_i - A_i \alpha_i)^{-1} B_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-2, \\ \beta_{i+1} &= (C_i - A_i \alpha_i)^{-1} (F_i + A_i \beta_i), \quad i = 1, 2, \dots, N-1. \end{aligned} \right\} \quad (23.27)$$

Затем также по рекуррентной формуле определяется неизвестная вектор-функция Y_i (обратная прогонка):

$$\left. \begin{aligned} Y_{N-1} &= \bar{\beta}_N, \\ Y_i &= \alpha_{i+1} Y_{i+1} + \bar{\beta}_{i+1}, \quad i = N-2, N-3, \dots, 1. \end{aligned} \right\} \quad (23.28)$$

По ходу вычислений приходится обращаться матрицы второго порядка.

Опишем вкратце вычислительный алгоритм. На каждом новом шаге по времени в качестве нулевого приближения ($k=0$) используются значения сеточных функций, полученных на предыдущем временном слое. Затем

по формулам (23.14) и (23.24) определяются элементы матриц A_i^k, B_i^k, C_i^k и вектора F_i^k ($k=0$). Решив уравнение (23.25) с помощью алгоритма

матричной прогонки (23.27) и (23.28) и найдя приращения $\delta u^k, \delta T^k$, по формулам (23.8) – (23.12) и (23.15) – (23.20) можно вычислить приращения остальных функций $\delta r^{k+1}, \delta \rho^{k+1}, \delta R^{k+1}, \delta g^{k+1}, \delta E^{k+1}, \delta k^{k+1}, \delta W^{k+1}$ ($k=0$).

Далее по общей формуле $y^{k+1} = y^k + \delta y^k$ ($k=0$) определяются значения неизвестных функций на первой итерации – следующее приближение к решению на $j+1$ -м слое. Затем процедура повторяется: снова вычисляются $A_i^k, B_i^k, C_i^k, F_i^k$ ($k=1$), определяются приращения функций и их значения на второй итерации.

Итерации продолжаются до тех пор, пока не будет выполнено заданное число итераций или не будет достигнуто условие сходимости итераций

$$|y_i^{k+1} - y_i^k| < \epsilon_1 |y_i^k| + \epsilon_2 \quad (23.29)$$

для всех i . Здесь y_i^k либо u_i^k , либо T_i^k ; ϵ_1 – относительная точность. Малое число ϵ_2 добавляется, чтобы условие (23.29) правильно работало в случае $y_i^k = 0$.

Обычно полагают $\epsilon_1 = 10^{-4}$, $\epsilon_2 = 10^{-6}$. Сеточные функции, определенные на последней итерации, дают искоемые значения на $j+1$ -м временном слое.

Для алгоритма матричной прогонки требуется значительный объем оперативной памяти ЭВМ и довольно сложная программная реализация.

5. Метод раздельных прогонок. Более простой алгоритм можно построить на основе метода раздельных прогонок (А.А. Самарский и др., 1968). Суть его заключается в следующем.

Разностные уравнения (22.31) разделяют на две группы:

1. "Динамическая группа":

$$\left. \begin{aligned} r_t &= u^{(0,5)}, \quad (r^3)_s = \frac{3}{\rho}, \quad u_t = -Rg_s^{(\alpha)} - \frac{4\pi Gs}{\hat{r}_r}, \\ g &= P + \omega, \quad \omega = \Omega(\rho, u_s), \quad R = \frac{\hat{r}^2 + \hat{r}\hat{r} + r^2}{3}, \\ P &= \mathcal{P}(\rho, T). \end{aligned} \right\} \quad (23.30)$$

II. "Тепловая группа":

$$\left. \begin{aligned} E_t &= -g^{(\alpha)} \left(\frac{1}{\rho} \right)_t - (r^2 W)_{\bar{s}}^{(\beta)} + \epsilon^{(\beta)}, \\ W &= -kr^2 T_{\bar{s}}, \quad E = \mathcal{E}(\rho, T), \\ k &= \tilde{K}(\rho, \rho(+1), T, T(+1)), \quad \epsilon = \mathcal{H}(\rho, T). \end{aligned} \right\} \quad (23.31)$$

Уравнения каждой группы решаются независимо итерационным методом Ньютона (внутренние итерации) с последующими дополнительными (внешними) итерациями между группами. В первой группе определяются сеточные функции r, u, ρ, g , значения температуры T считаются неизменными — "замораживаются". Во второй группе находятся T и W при заданных значениях r, ρ . Система линейных алгебраических уравнений, получающаяся в каждой группе, сводится к одному уравнению: в первой группе — для δu , во второй — для δT . Эти уравнения получаются из (23.13) и (23.23), если положить $b_{12} = c_{12} = a_{21} = c_{21} = 0$:

$$F_2 = -f_4 + f_{10} + \alpha\tau \left(\frac{1}{\rho} \right)_t f_7 + \beta\tau (r^2 f_5)_{\bar{s}}.$$

Остальные коэффициенты и F_1 определяются по формулам (23.14) и (23.24):

$$\left. \begin{aligned} a_{11,i} \delta u_{i-1} - c_{11,i} \delta u_i + b_{11,i} \delta u_{i+1} &= -F_{1,i}, \\ a_{22,i} \delta T_{i-1} - c_{22,i} \delta T_i + b_{22,i} \delta T_{i+1} &= -F_{2,i}. \end{aligned} \right\} \quad (23.32)$$

Трехточечные разностные уравнения (23.32) решаются методом скалярной прогонки, алгоритм которой совпадает с алгоритмом матричной прогонки (23.27), (23.28) для нахождения вектор-функции единичной размерности. Процедура итераций внутри каждой группы полностью аналогична случаю матричной прогонки. Внешний итерационный цикл сходится достаточно быстро. На практике ограничиваются тремя-четырьмя итерациями.

Преимущества метода отдельных прогонок — использование небольшого объема оперативной памяти и простота программной реализации. Основным его недостатком является заметное ограничение на временной шаг, возникающее из условия сходимости внешнего итерационного процесса. Это приводит к большим затратам машинного времени по сравнению с методом матричной прогонки.

Метод последовательных прогонок становится особенно неэффективным в случае сильной нелинейной зависимости коэффициента теплопроводности от температуры ($k \sim T^\alpha$, $\alpha > 3$) (Ю.А. Повещенко и др., 1981).

6. Г р а н и ч н ы е у с л о в и я. Рассмотрим способы задания граничных условий. Пусть расчетная область занимает по радиусу интервал от $r = 0$ до $r = R_0$, где R_0 — радиус звезды. Соответственно, массовая лагранжева координата $0 \leq s \leq S_0 = \frac{M_0}{4\pi}$, где M_0 — масса звезды. Тогда граничные

условия имеют следующий вид:

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial s}(0, t) = 0 \quad (23.33)$$

— условия симметрии при $r = 0$;

$$P(S_0, t) = 0, \quad W(S_0, t) = \sigma T^4(S_0, t) \quad (23.34)$$

– условия на свободной поверхности звезды, σ – постоянная Стефана – Больцмана.

Краевые условия (23.33) и (23.34) встречаются в теории звездных пульсаций.

При формулировке разностной задачи эти условия аппроксимируются естественным образом:

$$u_1^{j+1} = 0, \quad T_1^{j+1} - T_2^{j+1} = 0, \quad (23.35)$$

$$P_N^{j+1} = 0, \quad W_{N-1}^{j+1} - \sigma (T_N^{j+1})^4 = 0. \quad (23.36)$$

В соответствии с замечанием, сделанным в конце § 22, граничные условия (23.35) и (23.36) записаны на расширенной сетке, дополненной слева и справа фиктивными интервалами $h_1 = 0$ и $h_N = 0$. Заметим, что граничные условия аппроксимируются с первым порядком точности $O(h)$.

Применение метода Ньютона к уравнениям (23.25) дает граничные условия для приращений на $k+1$ -й итерации:

$$\delta u_1^{k+1} = 0, \quad \delta T_1^{k+1} - \delta T_2^{k+1} = 0. \quad (23.37)$$

Используя уравнения системы (23.4) и полагая псевдовязкость на границе равной нулю, выразим граничные условия (23.36) через приращения температуры и скорости. Применяя метод Ньютона к уравнению

$$f_{3,N-1}^{j+1} = u_{N-1}^{j+1} - u_{N-1}^j + \tau R_{N-1}^{j+1} \left[\alpha \frac{P_N^{j+1} - P_{N-1}^{j+1}}{h_{N-1}} + (1 - \alpha) \frac{P_N^j - P_{N-1}^j}{h_{N-1}} \right] + \frac{4\pi G s_0}{r_{N-1}^{j+1} r_{N-1}^j} = 0 \quad (23.38)$$

и используя (23.11) и (23.12), с учетом граничного условия $P_N = 0$ получаем:

$$a_{11,N-1} \delta u_{N-2} - c_{11,N-1} \delta u_{N-1} - c_{12,N-1} \delta T_{N-1} = -F_{1,N-1}, \quad (23.39)$$

где a_{11} , c_{11} , c_{12} , F_1 вычисляются по формулам (23.11), в которых полагается $P_N = 0$, $\Omega_N = \Omega_{N-1} = 0$, $a_N = 0$.

Рассмотрим второе уравнение из (23.36)

$$\left. \begin{aligned} f_{11,N-1}^{j+1} &= W_{N-1}^{j+1} - \sigma (T_N^{j+1})^4 = 0, \\ \delta W_{N-1}^{k+1} - 4\sigma (T_N^k)^3 \delta T_N^{k+1} &= -f_{11,N-1}^k. \end{aligned} \right\} \quad (23.40)$$

Подставим в (23.40) выражение для δW_{N-1}^{k+1} из (23.18):

$$-d_{1,N-1} \delta T_{N-1} + d_{2,N-1} \delta T_N - d_{3,N-1} \delta u_{N-1} = -d_{4,N-1}, \quad (23.41)$$

где

$$\begin{aligned} d_{1,N-1} &= (\tilde{K}_T b_1 - b_2)_{N-1}, & d_{2,N-1} &= -(b_2 + \tilde{K}'_T b_1)_{N-1} - 4\sigma T_N^3, \\ d_{3,N-1} &= \tau (kr T_s^2)_{N-1}, & d_{4,N-1} &= b_{3,N-1} + f_{11,N-1}. \end{aligned}$$

Здесь b_1, b_2, b_3 вычисляются в узле $N-1$ по формулам (23.19).

Далее запишем разностное уравнение (23.23) на расширенной сетке при $i = N - 1$:

$$a_{21, N-1} \delta u_{N-2} - c_{21, N-1} \delta u_{N-1} + a_{22, N-1} \delta T_{N-2} - c_{22, N-1} \delta T_{N-1} + b_{22, N-1} \delta T_N = -F_{2, N-1}. \quad (23.42)$$

Исключая из (23.41) и (23.42) δT_N , получим второе граничное условие:

$$\tilde{a}_{21, N-1} \delta u_{N-2} - \tilde{c}_{21, N-1} \delta u_{N-1} + \tilde{a}_{22, N-1} \delta T_{N-2} - \tilde{c}_{22, N-1} \delta T_{N-1} = -\tilde{F}_{2, N-1}. \quad (23.43)$$

где

$$\tilde{a}_{21, N-1} = (a_{21} d_2)_{N-1}, \quad \tilde{c}_{21, N-1} = (c_{21} d_2 + b_{22} d_3)_{N-1},$$

$$\tilde{a}_{22, N-1} = (a_{22} d_2)_{N-1}, \quad \tilde{c}_{22, N-1} = (c_{22} d_2 + b_{22} d_1)_{N-1},$$

$$\tilde{F}_{2, N-1} = (F_2 d_2 - b_{22} d_4)_{N-1}.$$

Таким образом, уравнения (23.37), (23.39) и (23.43) задают граничные условия для системы разностных уравнений (23.13), (23.23). Эти граничные условия можно записать в матричном виде (23.26), где

$$C_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{N-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ \tilde{a}_{21} & 0 \end{pmatrix}_{N-1}, \quad C_{N-1} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ \tilde{c}_{21} & \tilde{c}_{22} \end{pmatrix}_{N-1},$$

$$F_2 = \begin{pmatrix} F_1 \\ \tilde{F}_2 \end{pmatrix}_{N-1}.$$

Аналогично, нетрудно получить граничные условия для алгоритма раздельных прогонок.

§ 24. Некоторые замечания по реализации вычислительного алгоритма на ЭВМ

В предыдущих параграфах были рассмотрены основные принципы построения разностных схем одномерной нестационарной газовой динамики, получено семейство полностью консервативных разностных схем, описаны алгоритмы для их численной реализации. Однако даже при полной ясности алгоритма составление программы, отладка и проведение расчетов вызывают определенные трудности.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые примеры реализации вычислительного алгоритма, которые обычно используются в вычислительной практике, а также приведем пример применения полностью консервативных разностных схем к расчету ударных волн в атмосфере Солнца.

1. Обезразмеривание задачи. Один из первых шагов при составлении вычислительного алгоритма состоит в приведении системы уравнений, начальных и граничных условий к безразмерному виду. Выбор подходящей системы единиц измерения имеет важное значение, потому что во многих случаях пользоваться в расчетах обычными единицами СИ и СГС невозможно в силу ограниченности диапазона чисел на ЭВМ.

Существуют два подхода в выборе единиц измерения. В одном из них для каждого параметра независимо от остальных выбирается характерная единица измерения таким образом, чтобы соответствующая безразмерная величина была порядка единицы. В этом случае в системе уравнений появляются безразмерные коэффициенты: число Маха, число Рейнольдса и т.п., что, вообще говоря, делает запись системы уравнений более громоздкой.

В численных расчетах удобным оказывается другой подход, в котором в соответствии с общей теорией размерности независимо выбираются единицы измерения только четырех параметров, например,

$$t_0, r_0, \rho_0, T_0. \quad (24.1)$$

Размерности остальных параметров определяются через эти величины. В данном случае система уравнений для безразмерных величин имеет обычный вид, такой же, как для размерных параметров. При таком подходе переход от расчета задач одного класса к другому осуществляется изменением четырех величин (24.1), что совершенно не отражается на расчетных формулах. Это придает вычислительному алгоритму большую универсальность.

Рассмотрим второй способ обезразмеривания более подробно. Определим размерные величины, входящие в уравнения (21.4) – (21.8), следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} t &= t_0 \tilde{t}, \quad s = s_0 \tilde{s}, \quad r = r_0 \tilde{r}, \quad u = u_0 \tilde{u}, \\ \rho &= \rho_0 \tilde{\rho}, \quad g = g_0 \tilde{g}, \quad G = G_0 \tilde{G}, \quad E = E_0 \tilde{E}, \\ W &= W_0 \tilde{W}, \quad k = k_0 \tilde{k}, \quad T = T_0 \tilde{T}, \end{aligned} \right\} \quad (24.2)$$

где величины с индексом "нуль" обозначают размерные масштабные множители, а величины с тильдой – безразмерные параметры. Подставим (24.2) в (21.4):

$$\frac{r_0}{t_0} \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \tilde{t}} = u_0 \tilde{u}. \quad (24.3)$$

Если положить $u_0 = \frac{r_0}{t_0}$, то уравнение (24.3) будет совпадать с исходным (21.4). Аналогично получаем выражение для остальных размерных множителей через (24.1):

$$\begin{aligned} s_0 &= \rho_0 r_0^3, \quad g_0 = \frac{\rho_0 r_0^2}{t_0^2}, \quad G_0 = \frac{1}{\rho_0 t_0^2}, \\ W_0 &= \frac{\rho_0 r_0^3}{t_0^3}, \quad E_0 = \frac{r_0^2}{t_0^2}, \quad k_0 = \frac{\rho_0^2 r_0^4}{t_0^3 T_0}. \end{aligned}$$

Заметим, что в уравнениях состояния (21.9) могут встретиться атомные константы. Разумеется, их не следует выражать через параметры (24.1), которые задают систему единиц газодинамических параметров. В этом случае уравнения состояния обезразмериваются по первому способу, и в них появятся безразмерные константы.

В тех случаях, когда расчетная область захватывает значительную часть массы звезды, удобно выбрать четыре параметра с независимыми размерностями следующим образом:

$$r_0 = R_*, \quad s_0 = \frac{M_*}{4\pi}, \quad G_0 = G, \quad T_0 = \frac{GM_*}{RR_*},$$

где R — газовая постоянная. Тогда единица времени

$$t_0 = R_* \sqrt{\frac{R_*}{GM_*}} = 1,59 \cdot 10^3 \left(\frac{R^3}{M} \right)^{1/2} \text{ с,}$$

единица скорости

$$u_0 = \sqrt{\frac{GM_*}{R_*}} = 4,37 \cdot 10^7 \left(\frac{M}{R} \right)^{1/2} \text{ см/с,}$$

единица температуры

$$T_0 = \frac{GM_*}{RR_*} = 2,29 \cdot 10^7 \left(\frac{M}{R} \right) \text{ К,}$$

единица плотности

$$\rho_0 = \frac{M_*}{4\pi R_*^3} = 0,47 \frac{M}{R^3} \text{ г/см}^3,$$

единица давления

$$P_0 = \frac{GM_*^2}{4\pi R_*^4} = 8,96 \cdot 10^{14} \frac{M^2}{R^4} \text{ дин/см}^2,$$

единица удельной энергии

$$E_0 = \frac{GM_*}{R_*} = 1,91 \cdot 10^{15} \frac{M}{R} \text{ эрг/г,}$$

единица теплового потока

$$W_0 = \frac{GM_*^2}{4\pi R_*^4} \sqrt{\frac{GM_*}{R_*}} = 3,91 \cdot 10^{22} \frac{M^2}{R^4} \sqrt{\frac{M}{R}} \text{ эрг/(см}^2 \cdot \text{с).}$$

Здесь $M = \frac{M_*}{M_\odot}$, $R = \frac{R_*}{R_\odot}$ — масса и радиус звезды в солнечных единицах.

2. Блочная структура программы. Написание и отладка программы существенно упрощаются, если ее разбить на отдельные блоки — модули. Каждый блок соответствует определенному этапу вычислительного алгоритма. Особенно удобной блочная структура программы становится при использовании метода отдельных прогонов.

Программу, реализующую соответствующий вычислительный алгоритм, целесообразно разбить на такие блоки (рис. 48): 1) расчет "динамической" группы уравнений; 2) расчет "тепловой" группы; 3) блок расчета

искусственной вязкости, т.е. величин Ω , $\frac{\partial \Omega}{\partial \rho}$, $\frac{\partial \Omega}{\partial u_\xi}$; 4) блок вычисления

коэффициента теплопроводности k и производной $\frac{\partial \tilde{K}}{\partial T}$; 5) блок урав-

нений состояния — расчет функции $\mathcal{P}(\rho, T)$, $\mathcal{E}(\rho, T)$ и $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \rho}$, $\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial T}$, $\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \rho}$,

$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}$; 6) расчет энергетических источников $\epsilon = \mathcal{H}(\rho, T)$ и $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial T}$.

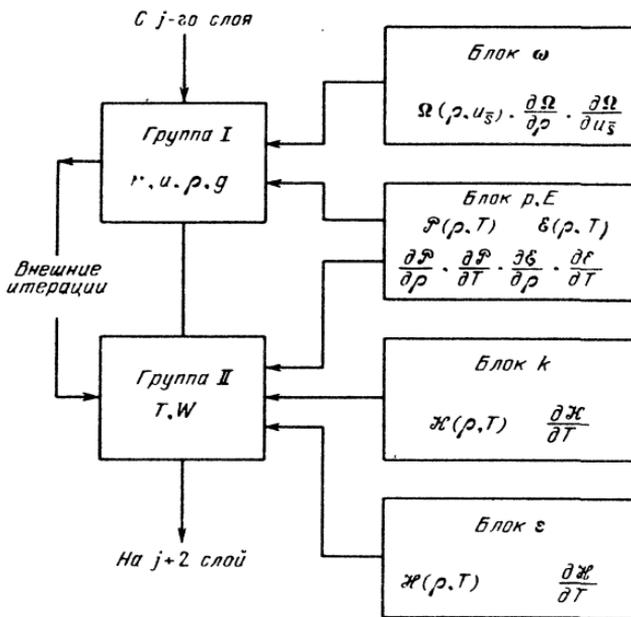


Рис. 48. Последовательность итерационных приближений при расчете параметров газа методом конечных разностей и блок-схема программы.

Блочная структура программы позволяет сравнительно легко переходить от задач одного класса к другим задачам путем замены отдельных блоков, вычисляющих коэффициенты теплопроводности, уравнения состояния и мощность источников энергии. С помощью включения в блок-схему соответствующих модулей можно учесть дополнительные физические факторы, например, магнитные поля, перенос излучения, химические реакции и т.д.

Блочная структура программы упрощает расчет задач со сложной пространственной структурой, состоящей из областей с различными физическими свойствами. Основные расчетные формулы здесь не изменяются. Нужно лишь при вычислении характеристик газа в данной области обратиться к соответствующему блоку.

Блочная структура программы существенно облегчает отладку, позволяя проводить ее по отдельным сравнительно простым блокам.

3. Метод отладки программ. Следующий этап после составления программы — отладка. Ее цели не ограничиваются выявлением возможных ошибок в программе. На этапе отладки с помощью специальных тестов исследуется качество вычислительного алгоритма — точность, сходимость и т.д.

Отладку производят на специально подобранных тестах, в качестве которых используют точные решения задачи в упрощенной постановке. Близость численного и точного решений позволяет сделать выводы правильности работы программы и о точности расчета. Разумеется, система тестов должна быть подобрана таким образом, чтобы проверить правильность работы всех блоков программы.

В качестве теста часто выбирают автомодельные решения. Например, правильность расчета ударных волн можно проверить на задаче о сферическом поршне и задаче о сильном точечном взрыве в центре звезды

(Л.И. Седов, 1977). Блок расчета "тепловой" группы уравнений при отключенных динамических процессах ($u = 0$) можно отлаживать на известных решениях уравнения теплопроводности. Здесь можно рекомендовать авторские решения типа "бегущей волны" в среде с нелинейной теплопроводностью (А.А. Самарский, И.М. Соболев, 1963).

В тех случаях, когда получение точного решения затруднительно, прибегают к так называемому методу пробных функций. Суть этого метода заключается в следующем. Приравняем рассчитываемые параметры некоторым произвольным функциям времени и координаты. Затем подставим эти функции в систему уравнений и получившиеся дисбалансы будем рассматривать как известные источники в правой части уравнений. Другими словами, изменяем уравнения таким образом, чтобы выбранные произвольные функции были решением этой системы. Поскольку дополнительные члены в уравнениях являются функциями только времени и координаты, то в вычислительном алгоритме нужно будет внести соответствующие изменения в выражения (23.4). Остальные расчетные формулы не изменяются.

4. Выбор искусственной вязкости; аппроксимационная вязкость. Как уже отмечалось в § 21, для сквозного расчета ударных волн используют искусственную вязкость. Наиболее часто рассматривают два типа вязкости: линейную (21.2) и квадратичную (21.3).

Строгое исследование влияния искусственной вязкости на структуру фронта ударной волны (см., например, А.А. Самарский, Ю.П. Попов, 1980) показывает, что линейная вязкость приводит к гладкому ударному переходу, который описывается аналитической функцией. Эффективная ширина фронта ударной волны при этом равна

$$\Delta = \frac{8\nu}{(\gamma + 1) D \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{\rho_0} \right)}, \quad (24.4)$$

где D — скорость перемещения ударной волны по координате s (массовая скорость), ρ_0 — плотность газа перед фронтом ударной волны, ρ_1 — плотность за фронтом. В случае квадратичной вязкости функция, описывающая гладкий профиль фронта ударной волны, имеет разрыв производных в точках выхода решения на стационарные решения перед и за фронтом ударной волны. Фронт ударной волны оказывается более крутым, и его ширина определяется формулой

$$\Delta = \sqrt{\frac{2\mu}{\gamma + 1}} \pi, \quad (24.5)$$

где γ — показатель адиабаты.

В расчетах линейная вязкость приводит к монотонному разностному решению; при этом ширина фронта зависит от интенсивности ударной волны: для слабых — она велика, для сильных — стремится к нулю. В случае квадратичной вязкости ширина фронта ударной волны не зависит от ее интенсивности, но разностное решение оказывается не монотонным — появляются затухающие осцилляции за фронтом ударной волны. На практике часто используют линейную комбинацию двух типов искусственной вязкости.

Заметим, что при расчете ударной волны в неоднородной среде более предпочтительной оказывается квадратичная вязкость, так как скорость ударной волны может сильно изменяться.

Коэффициент искусственной вязкости подбирают таким образом, чтобы ширина фронта составила $3 \div 4$ шага разностной сетки. В случае квадратич-

ной вязкости из условия $\Delta = (3 \div 4)h_i$ получаем

$$\mu_i = (1 \div 2)h_i^2. \quad (24.6)$$

В случае неравномерной сетки коэффициент вязкости зависит от номера узла разностной сетки.

Как уже отмечалось, разностная схема обладает внутренним диссипативным механизмом, который возникает вследствие ошибок аппроксимации — так называемая аппроксимационная вязкость (Б.Л. Рождественский, Н.Н. Яненко, 1978). Явный вид аппроксимационной вязкости можно получить с помощью метода дифференциальных приближений (Ю.И. Шокин, 1979).

Рассмотрим разностное уравнение движения, в котором для простоты пренебрежем гравитационным членом:

$$u_t = -Rg_s^{(\alpha)}. \quad (24.7)$$

Это уравнение аппроксимирует дифференциальное уравнение $\frac{\partial u}{\partial t} =$

$= -r^2 \frac{\partial g}{\partial s}$ с точностью $O(\tau, h^2)$. Одновременно (24.7) можно рассматривать как разностную аппроксимацию другого дифференциального уравнения,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -r^2 \frac{\partial g}{\partial s} + (\alpha - 0,5) \tau r^2 \frac{\partial^2 g}{\partial s \partial t} \quad (24.8)$$

со вторым порядком $O(\tau^2, h^2)$. Уравнение (24.8) называется первым дифференциальным приближением разностного уравнения (24.7). Член порядка $O(\tau)$ можно трактовать как дополнительную вязкость

$$\omega = -(\alpha - 0,5) \tau \frac{\partial g}{\partial t}. \quad (24.9)$$

Коэффициент аппроксимационной вязкости зависит от параметров α и τ . Действие этой вязкости особенно заметно при расчете по неявной разностной схеме ($\alpha = 1$) быстро изменяющихся решений (например, ударной волны) с большим шагом по времени. В этом случае аппроксимационная вязкость приводит к дополнительному размазыванию фронта ударной волны, причем ее действие аналогично линейной искусственной вязкости.

5. Построение разностной сетки. В численных расчетах часто встречаются ситуации, когда целесообразно использовать неравномерные сетки. В § 20 уже отмечалось, что для повышения точности численного решения в области резкого изменения параметров шаг разностной сетки нужно уменьшить — “сгустить” сетку. Кроме того, для правильной аппроксимации, очевидно, необходимо выбирать шаги разностной сетки малыми по сравнению с характерным размером задачи.

Во многих задачах астрофизики, помимо характерной длины, равной размеру расчетной области, имеются внутренние характерные размеры,

которые определяются градиентами параметров: $L = \left(\frac{d \ln y}{dr} \right)^{-1}$, где под

функцией y следует понимать газодинамические параметры. Если мы выбираем шаг разностной сетки по эйлеровой переменной $\Delta r \geq L$, то тем самым отказываемся от детального рассмотрения процессов внутри данной области.

Для иллюстрации рассмотрим внешнюю оболочку звезды — атмосферу. Будем предполагать ее достаточно тонкой по сравнению с радиусом звезды. Тогда уравнения неразрывности и движения можно представить в виде

$$R_0^2 \frac{dr}{ds} = \frac{1}{\rho}, \quad \frac{du}{dt} = -R_0^2 \frac{dP}{ds} - f, \quad (24.10)$$

где $f = \frac{GM_0}{R_0^2}$ — ускорение силы тяжести. Переменные r и s отсчитываются

от нижней границы атмосферы, где $r = 0$, $s = 0$. В равновесном состоянии:

$$u = 0, \quad P = P_0 \left(1 - \frac{s}{s_0}\right), \quad \text{где } P_0 \text{ — давление в основании атмосферы, } s_0 = \frac{R_0^2 P_0}{f}.$$

Если атмосфера состоит из идеального газа с постоянной температу-

турой, то плотность также распределена по линейному закону:

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{s}{s_0}\right). \quad (24.11)$$

Введем по массовой координате s равномерную сетку $s_i = s_0 \frac{i-1}{N-1}$. Разностная аппроксимация уравнения неразрывности (24.10) позволяет определить соответствующие шаги сетки по эйлеровой переменной

$$\Delta r_i = \frac{h}{\rho_i R_0^2} = \frac{s_0}{\rho_0 R_0^2 \left(1 - \frac{i-1}{N-1}\right)} = \frac{H}{N-i}, \quad (24.12)$$

где $H = \frac{P_0}{f \rho_0}$ — характерный масштаб изменения плотности, который часто называют высотой однородной атмосферы.

Из формулы (24.12) видно, что при выборе равномерной сетки в массовых лагранжевых координатах расстояния между соседними узлами сетки в эйлеровых координатах вблизи верхней границы оказываются порядка внутреннего характерного размера H . Очевидно, что для получения хорошей точности в расчетах необходимо выбрать шаг сетки так, чтобы соответствующая величина в эйлеровых координатах Δr_i была мала по сравнению с H . Для выполнения этого условия сетку следует выбрать неравномерной.

Основное требование при построении неравномерной разностной сетки заключается в близости величин соседних разностных интервалов. На сильно неравномерных сетках нарушается аппроксимация производных.

Рассмотрим для примера разностную аппроксимацию второй производной:

$$y_{\overline{ss}} = \frac{1}{h_i} \left[\frac{y_{i+1} - y_i}{h_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} \right]. \quad (24.13)$$

Отметим, что разностный оператор (24.13) аппроксимирует в уравнении энергии член, соответствующий процессам теплопроводности. Погрешность

аппроксимации (24.13) имеет вид

$$y_{ss}'' - \left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \right)_i = \frac{h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}}{4h_i} \left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} \right)_i + \frac{h_i^2 - h_{i-1}^2}{6h_i} \left(\frac{\partial^3 y}{\partial s^3} \right)_i + O(h_i^2). \quad (24.14)$$

Как видно, погрешность аппроксимации в случае произвольной неравномерной сетки уже не $O(h^2)$, как это имеет место для равномерной сетки, а $O(1)$. Однако если соседние шаги сетки не сильно отличаются, то первые два члена в правой части невелики.

На практике весьма полезным оказывается способ построения неравномерной сетки, в котором укрупнение или дробление сетки осуществляется по закону геометрической прогрессии $h_{i+1} = qh_i$ со знаменателем q , близким к единице.

Тогда коэффициенты в (24.14) имеют вид

$$A = \frac{h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}}{4h_i} = \frac{q - 2 + \frac{1}{q}}{4} = \frac{(q - 1)^2}{4q},$$

$$B = \frac{h_i^2 - h_{i-1}^2}{6h_i} \approx \frac{q^2 - 1}{6} h_i,$$

и, например, если $q = 1,1$: $A = 0,002$, $B = 0,035 h_i$.

В настоящее время не существует общих методов оптимизации распределения узлов сетки. В этом направлении делаются только первые шаги (Б.Л. Пирсон, П. Кутлер, 1980). Поэтому основным методом повышения точности служит проведение серии расчетов на последовательности сеток. Сначала проводят предварительный расчет на грубой сетке, после чего выбирается новая сетка так, чтобы в областях сильного изменения параметров шаг сетки был помельче, и задача решается повторно на новой сетке.

6. Применение полностью консервативной схемы к расчету распространения ударных волн в атмосфере Солнца. В заключение в качестве примера рассмотрим особенности численного решения задачи о распространении ударных волн в атмосфере Солнца (А.Г. Косовичев, Ю.П. Попов, 1979).

Как уже отмечалось, движения газа в атмосфере на высотах много меньше радиуса звезды можно рассматривать в плоской геометрии с постоянным ускорением силы тяжести. Соответствующая система уравнений газодинамики имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= u, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial s} - f, \quad \frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{\rho}, \\ \frac{\partial E}{\partial t} &= -P \frac{\partial u}{\partial s}, \quad P = R\rho T, \quad E = \frac{RT}{\gamma - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (24.15)$$

Здесь x — переменная Эйлера — высота над уровнем фотосферы, $f = \frac{CM_0}{R_0^2}$ —

ускорение силы тяжести, R — газовая постоянная. Обратим внимание на несколько отличный от предыдущего выбор лагранжевой координаты: $ds = \rho dx$. Начальные термодинамические функции в такой постановке определяются заданием некоторого распределения температуры $T(s, 0)$, взятым из какой-либо известной модели атмосферы, и уравнением гидро-

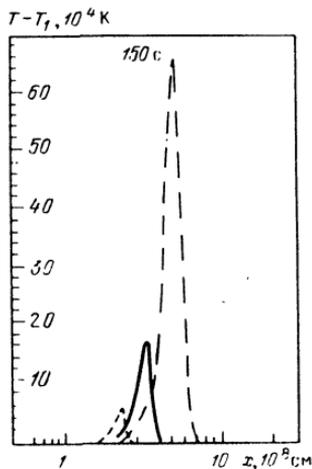
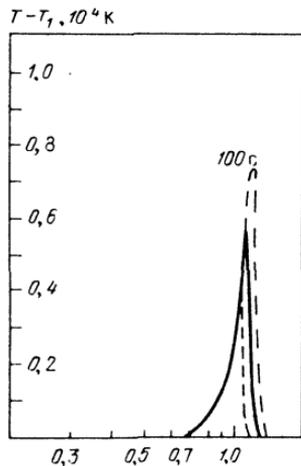
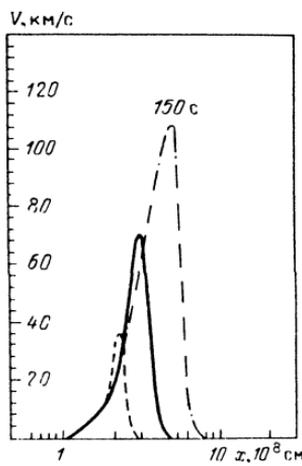
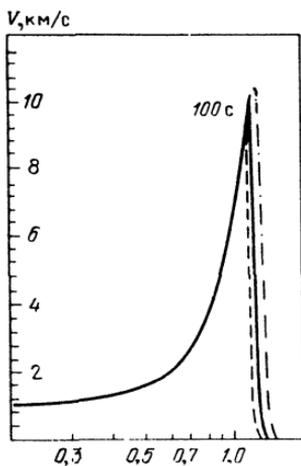


Рис. 49. Профили скорости и температуры при движении ударной волны, возникающей в атмосфере Солнца под действием движущегося со скоростью 1 км/с поршня для трех значений параметра α : $\alpha=0,5$ (сплошная линия), $\alpha=0$ (прерывистая линия) и $\alpha=1,0$ (штрих-пунктир), T_1 — начальная температура.

статического равновесия $\frac{\partial P}{\partial s} = -f$. Считается также, что в начальный момент газ покоится: $u(s, 0) = 0$.

Рассмотрим аппроксимацию системы (24.15) двухпараметрической разностной схемой:

$$x_t = u^{(\alpha)}, \quad (24.16)$$

$$u_t = -g_s^{(\beta)} - f, \quad g = P + \omega, \quad (24.17)$$

$$x_s = \frac{1}{\rho}, \quad (24.18)$$

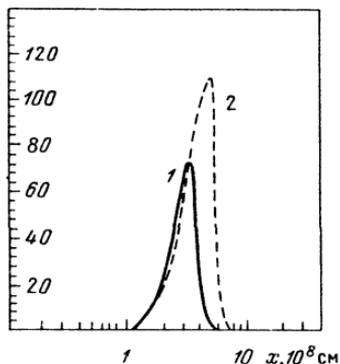
$$E_t = -g^{(\beta)} u_s^{(0,5)}, \quad (24.19)$$

$$P = R\rho T, \quad E = \frac{RT}{\gamma - 1}. \quad (24.20)$$

Выясним, как в данной разностной схеме обстоит дело с законом сохра-

Рис. 50. Профили скорости на момент времени $t = 150$ с, если $\alpha = 1$, $\beta = 1$, при двух значениях коэффициента искусственной вязкости $\mu = 4$ (1) и $\mu = 1$ (2).

$V, \text{км/с}$



нения полной энергии, который в дифференциальной форме имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(E + \frac{u^2}{2} + f_x \right) = - \frac{\partial (Pu)}{\partial s}. \quad (24.21)$$

Суммируя уравнение (24.19) с уравнением (24.17), умноженным на $u^{(0,5)}$, получаем с помощью алгебраических преобразований

$$\begin{aligned} (E + 0,5u^2 + f_x)_t = \\ = - (u^{(0,5)} p^{(\beta)} (-1))_s + \delta \epsilon, \end{aligned} \quad (24.22)$$

где $\delta \epsilon = (\alpha - 0,5) \tau f u_t$. Уравнение (24.22) является разностным аналогом дифференциального закона сохранения (24.21). Видно, что в общем случае этот закон нарушен за счет фиктивного источника энергии $\delta \epsilon$ разностного происхождения. При $\alpha = 0,5$ получаем полностью консервативную разностную схему.

Целесообразность использования полностью консервативных разностных схем в задачах гравитационной газодинамики иллюстрирует пример расчета задачи о распространении ударной волны в атмосфере. В простейшей постановке ударная волна возникает в результате действия поршня, расположенного в основании атмосферы и движущегося вверх (против направления гравитационной силы) с постоянной скоростью $u(t) = \text{const}$. Двигаясь по среде с убывающей плотностью, ударная волна увеличивает свою амплитуду. Течение газа за фронтом ударной волны тормозится силой тяжести, и в результате формируется зона разрежения за фронтом.

Для расчета использовалась неявная разностная схема ($\beta = 1$). Система разностных уравнений решалась итерационным методом Ньютона с применением прогонки (§ 23). Для сквозного расчета ударных волн применялась квадратичная искусственная вязкость. Значение α варьировалось: $\alpha = 0; 0,5; 1$.

На рис. 49 приведено сравнение результатов расчетов при различных значениях α . Представлены профили скорости и температуры для двух моментов времени $t = 100, 150$ с и для $\alpha = 0; 0,5; 1$. В момент времени $t = 150$ с результаты расчетов при различных α существенно различаются. Видно, что в случае $\alpha = 1$ ударная волна имеет большую энергию, а в случае $\alpha = 0$ — меньшую. Это соответствует тому, что фиктивный источник энергии принимает положительное значение в первом случае и отрицательное во втором. Расчеты также показали, что влияние дисбаланса $\delta \epsilon$, имеющего порядок величины $O(\tau)$, уменьшается при уменьшении шага сетки по времени. Мощность источника пропорциональна u_t и, следовательно, зависит от величины размазывания фронта ударной волны на разностной сетке. Ширина фронта ударной волны в свою очередь определяется значением коэффициента искусственной вязкости. Расчеты показали, что в случае $\alpha = 1$ с уменьшением коэффициента искусственной вязкости энергия ударной волны увеличивается, так как возрастает величина дисбаланса $\delta \epsilon$ (рис. 50). В случае же полностью консервативной разностной схемы ($\alpha = 0,5$) положение фронта ударной волны не зависит от величины размазывания фронта.

Эти результаты позволяют сделать вывод, что использование не полностью консервативной схемы в задачах такого рода может заметно ис-

казить решение за счет действия фиктивных источников энергии, имеющих чисто разностное происхождение. Отметим, что в данной задаче полностью консервативная схема позволяет проводить расчеты с крупным шагом по времени, соответствующим числу Куранта $K = \frac{\rho a \tau}{h} \approx 5 \div 6$ (a — скорость звука), в то время как, например, при $\alpha = 1$ максимально допустимый шаг по времени соответствует $K \approx 1 \div 2$.

Таким образом, расчеты наглядно показывают, что полностью консервативные разностные схемы обладают определенными качественными и количественными преимуществами перед другими схемами того же порядка аппроксимации в задачах газодинамики с ударными волнами.

Глава 5

ЗАКОНОМЕРНОСТИ ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЙ В ОБОЛОЧКАХ ЗВЕЗД

В этой главе после рассмотрения вопроса об особенностях распространения звуковых волн в атмосферах звезд и условий их превращения в ударные волны изложены некоторые результаты применения теории ударных волн к решению важных проблем наблюдательной астрофизики — в особенности проблем вспышек сверхновых. Рассматриваются также основные свойства волн охлаждения, распространение которых в расширяющихся оболочках звезд, по-видимому, обуславливает появление известного “плеча” на кривой блеска сверхновой II типа.

Отметим, что общий анализ волновых процессов в неоднородной среде дан, в частности, в книге Л.А. Дикого (1969), исследование особенностей движения ударных волн в звездах и межзвездной среде проведено в книгах В.Г. Горбачко (1977), Э.А. Дибая и С.А. Каплана (1976), В.Б. Баранова и К.В. Краснобаева (1977). Обстоятельный обзор физических процессов, определяющих эволюцию звезды на стадии предсверхновой, сделан недавно В.С. Имшенником и Д.К. Надёжиным (1982).

§ 25. Особенности распространения звуковых волн в атмосферах звезд

Динамическое состояние атмосферы Солнца и других звезд исключительно сложно. Изучается оно путем анализа асимметрии фраунгоферовых линий, смещения ядер линий, флуктуаций интенсивности ядер линий и др. Как оказалось (R.V. Leighton, R.W. Noyes, G.W. Simon, 1962), в каждый момент времени фотосфера Солнца заполнена осциллирующими областями, причем колебания постепенно затухают и вновь нарастают примерно в тех же местах. Основным волновым процессом на Солнце являются 5-минутные колебания с амплитудами скорости $0,3 \pm 1,6$ км/с. Эти волны наблюдаются практически на всей поверхности Солнца и на всех уровнях атмосферы, в спокойных и активных областях (см. обзор Э.Е. Дубова, 1978).

Наблюдения указывают на некоторый разброс значений периодов колебаний от 200 до 400 с, а вблизи лимба обнаружены колебания с периодом 100 с. В фотосфере существуют также длиннопериодные поля скоростей: 20- и даже 50-минутные колебания. Обнаружены колебания с периодом 160 минут (A.V. Severny, V.A. Kotov, T.T. Tsap, 1976).

Пятиминутные колебания наблюдаются цугами волн длительностью в несколько периодов, причем горизонтальный размер цуга волн может быть сравним с размером супергранулы, т.е. достигать величины $4 \cdot 10^9$ см.

В хромосфере обнаружены три системы волн: 1) волны, распространяющиеся от супергранул или от полутени малых пятен внутри супергранул, их наблюдаемые горизонтальные скорости $60 \div 70$ км/с, вертикальная составляющая около 5 км/с, колебания скоростей сопровождаются флуктуациями интенсивности с периодами $150 \div 190$ с; 2) колебания в хромо-

сферной грануляции, сопровождающиеся колебаниями интенсивности, запаздывающими по фазе на четверть периода, причем сам период меняется от точки к точке, при этом изменяется лишь вертикальная скорость, тогда как горизонтальных смещений не обнаружено и 3) изменения интенсивности, распространяющиеся горизонтально со скоростью около 12 км/с (R.Giovanelli, 1975).

По существующим представлениям, сложные волновые движения, в том числе звуковые волны, возбуждаются в солнечной оболочке на верхней границе конвективной зоны. Распространяясь вверх, звуковые волны превращаются в ударные, а эти последние являются вероятным механизмом нагрева верхней хромосферы (С.А. Каплан, С.Б. Пикельнер, В.Н. Цытович, 1977.)

Изучение условий распространения волновых движений в неоднородной атмосфере и их влияния на основные характеристики среды было начато еще в конце прошлого века Ламбом (Г. Ламб, 1947 и H.Lamb, 1909). В 40-х годах был проведен непосредственный анализ вопроса о переносе механической энергии от фотосферы звезды волнами сжатия (L. Biermann, 1946, M. Schwarzschild, 1948). Общие вопросы теории волновых движений в неоднородной атмосфере изложены в книгах Бьеркнеса и др. (V. Bjerknes, J. Bjerknes, H. Solberg, T. Bergeron, 1934) и Л.А. Дикого (1969) и в ряде статей: Ch. Whitney (1958), В.В. Касинский (1967), Ю.Д. Жугжда (1975), F.L. Deubner (1980), Н.А. Hill (1980), А.Б. Северный, В.А. Котов, Т.Т. Цап (1981). Распространение плоских акустических волн в среде с высоким лучистым давлением рассмотрено в работе Г.С. Бисноватого-Когана и С.И. Блиникова (1978); общий анализ проблемы генерации звуковой энергии в оболочках холодных звезд дан в работе В.В. Музыкаева и А.В. Тутукова (1973).

Здесь мы ограничимся кратким рассмотрением простейших типов волновых движений и условий их распространения в неоднородной атмосфере звезды: звуковых и внутренних гравитационных волн. Напомним, что в условиях звездных атмосфер на каждый фиксированный элемент газа при его отклонении от положения равновесия действует несколько сил. Это сила упругости, возникающая при сжатии среды, далее — сила плавучести (архимедова сила), обусловленная неоднородностью атмосферы, и, наконец, сила тяжести. При адиабатическом перемещении элемента газа по вертикали его плотность будет отличаться от плотности окружающей среды, разность же действующих сил — архимедовой и силы тяготения — вынуждает этот элемент газа возвращаться (в случае конвективно устойчивой среды) в исходное положение. Поэтому в среде возникают колебания относительно положения равновесия. Если в неоднородной атмосфере отклонения давления и плотности от их равновесных значений связаны между собой адиабатическим соотношением

$$\frac{dp}{dt} = a^2 \frac{d\rho}{dt}, \quad (25.1)$$

то линеаризованные уравнения газодинамики сводятся к виду (D.W. Moore, E.A. Spiegel, 1964) :

$$\rho_1 \frac{\partial u}{\partial t} = - \text{grad } p' + \rho' g \quad (25.2)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \text{div}(\rho_1 u) = 0, \quad (25.3)$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_1 \mathbf{u} \mathbf{g} + \rho_1 a^2 \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (25.4)$$

Здесь ρ_1 и ρ_1' — равновесные значения давления и плотности газа, ρ' и ρ_1' — приращения ($\rho' \ll \rho_1, \rho_1' \ll \rho_1$). Уравнение (25.4) следует из (25.1) при учете (25.3) и условия гидростатического равновесия $\nabla \rho_1 = \rho_1 \mathbf{g}$.

Предположим, что координатные оси x и y расположены в горизонтальной плоскости, а ось z направлена вертикально в направлении действия силы тяжести (вниз). Исключая из (25.2) — (25.4) величины ρ и ρ' , находим после несложных преобразований следующее уравнение для $\chi = \operatorname{div} \mathbf{u}$:

$$\frac{\partial^4 \chi}{\partial t^4} - a^2 \Delta \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} - \left(\gamma g + \frac{da^2}{dz} \right) \frac{\partial^3 \chi}{\partial t^2 \partial z} - \left[(\gamma - 1)g - \frac{da^2}{dz} \right] g \Delta_1 \chi = 0, \quad (25.5)$$

где введено обозначение

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

причем одновременно выполняется также соотношение

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \operatorname{rot} \mathbf{u} = \left[(\gamma - 1)g - \frac{da^2}{dz} \right] \left(i \frac{\partial}{\partial y} - j \frac{\partial}{\partial x} \right) \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (25.6)$$

Здесь i и j — единичные векторы в направлениях x и y соответственно. Из последнего соотношения следует, что возникшее движение будет безвихревым лишь в двух случаях: 1) если $\gamma = 1, a = \text{const}$, что возможно при изотермическом движении в среде с постоянной температурой, и 2) если выполняется условие

$$\frac{dT}{dz} = \frac{\gamma - 1}{\gamma A} g,$$

которое и имеет место в случае конвективного равновесия. Вводя переменную

$$\psi = \rho_1^{1/2} \chi = \rho_1^{1/2} \operatorname{div} \mathbf{u},$$

сводим уравнение (25.5) к виду

$$a^2 \Delta \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \frac{da^2}{dz} \frac{\partial^3 \psi}{\partial z \partial t^2} - \frac{\gamma^2 g^2}{4a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - g \left[\frac{da^2}{dz} - (\gamma - 1)g \right] \Delta_1 \psi - \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} = 0. \quad (25.7)$$

В случае изотермической атмосферы ($a = \text{const}$) оно существенно упрощается. Так, получаем

$$a^2 \Delta \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{\gamma^2 g^2}{4a^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + (\gamma - 1)g^2 \Delta_1 \psi - \frac{\partial^4 \psi}{\partial t^4} = 0. \quad (25.8)$$

Будем рассматривать движение среды как простое гармоническое колебание, при котором величина χ изменяется по закону

$$\chi \sim \psi \sim e^{i(\omega t - k r)},$$

где ω — круговая частота, k — волновой вектор с компонентами k_x, k_y, k_z . Проводя обычное в таких случаях дифференцирование и подставляя произ-

водные ψ в (25.8), находим дисперсионное характеристическое уравнение

$$\omega^4 - \frac{\gamma^2 g^2}{4a^2} \omega^2 = [a^2 \omega^2 - (\gamma - 1)g^2] (k_x^2 + k_y^2) + a^2 \omega^2 k_z^2. \quad (25.9)$$

Анализ этого уравнения приводит к следующему важному выводу: при действительной частоте ω уравнение (25.9) может иметь действительные решения для волнового числа k при $\omega > \omega_1$ или же, если $\omega < \omega_2$, где

$$\omega_1 = \frac{\gamma g}{2a} = \frac{a}{2H}, \quad (25.10)$$

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{\gamma - 1}g}{a} = \frac{\sqrt{\gamma - 1}}{\gamma} \frac{a}{H} \quad (25.11)$$

Здесь $H = \frac{a^2}{\gamma g}$ — высота однородной атмосферы (при $T = 6000$ К,

$a = 9$ км/с, $g = 274$ м/с² имеем $H = 180$ км). Величина ω_2 называется частотой Брунта — Вайсала. Колебания с частотой $\omega_2 < \omega < \omega_1$, возникающие в атмосфере, не могут распространяться в ней, поскольку в этом случае не существует действительных k , удовлетворяющих (25.9). В самом деле, при мнимом k ($k = -ik$) закон изменения величины χ примет вид $\chi \sim e^{-kr} e^{i\omega t}$, где первый множитель и определяет уменьшение амплитуды с расстоянием.

Были проведены расчеты основных характеристик движения вдали от источника возмущений, в частности, поверхностей постоянной фазы (D.W. Moore, E.A. Spiegel, 1964), задаваемых условием $kr = \text{const}$. Как оказалось, при $\omega \gg \omega_1$ поверхность постоянной фазы близка к сферической, отклонение же обусловлено гравитационным притяжением.

В данном случае фазовая скорость $U_{\text{ф}} = \frac{\omega}{k} = a$, как это и должно быть для обычных звуковых волн. Поэтому колебания с частотой $\omega > \omega_1$ рассматриваются как *звуковые* (акустические) волны, модифицированные гравитацией.

Для частот $\omega < \omega_2$ колебания могут распространяться лишь в пределах угла $\alpha = \arcsin \frac{\omega}{\omega_2}$, отсчитанного от горизонтали. Если $\omega \rightarrow 0$, то $\alpha \rightarrow 0$ — движение происходит вдоль горизонтали, причем основным фактором здесь является сила тяжести. Фазовая скорость движения равна $\frac{\sqrt{\gamma - 1}a}{\gamma} = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} gH$. Известно (Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, 1954), что величиной \sqrt{gh} описывается фазовая скорость внутренних гравитационных волн в канале с глубиной h . Таким образом, волны с частотой $\omega < \omega_2$ являются *внутренними гравитационными волнами*, модифицированными сжимаемостью среды.

В простейшем случае изотермического движения ($\gamma = 1$) из (25.9) следует, что волновое число k и круговая частота ω связаны между собой соотношением

$$k = \frac{1}{a} \sqrt{\omega^2 - \frac{a^2}{4H^2}} = \frac{1}{2H} \sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 - 1}. \quad (25.12)$$

Поэтому длина волны $\lambda = \frac{2\pi}{k}$, соответствующая периоду $P = \frac{2\pi}{\omega}$, равна

$$\lambda = \frac{4\pi H}{\sqrt{\left(\frac{P_1}{P}\right)^2 - 1}}, \quad (25.13)$$

и при $P \ll P_1$ имеем $\lambda \approx aP$. Фазовая скорость волны

$$u_{\phi} = \frac{\omega}{k} = a \sqrt{1 + \frac{1}{4k^2 H^2}}, \quad (25.14)$$

тогда как групповая, соответствующая скорости переноса энергии,

$$u_{гр} = \frac{d\omega}{dk} = a \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{1 + \frac{1}{4k^2 H^2}}}. \quad (25.15)$$

Таким образом, при $\omega \rightarrow \infty$ и $k \rightarrow \infty$ имеем

$$u_{\phi} \approx u_{гр} \approx a \text{ если же } \omega \rightarrow \omega_1, \text{ то } k \rightarrow 0 \text{ и } u_{\phi} \rightarrow \infty,$$

тогда как $u_{гр} \rightarrow 0$. Другими словами, механическую энергию от фотосферы в хромосферу Солнца могут переносить лишь волны с периодом $P < P_1$ и длиной волны $\lambda < 4\pi H$.

Если же вертикальный градиент температуры не равен нулю ($\beta(z) = \frac{dT_1}{dz} \neq 0$), то, как и раньше, на заданной высоте z в вертикальном направлении не могут распространяться волны с частотой $\omega < \omega_1(z)$, где

$$\omega_1(z) = \frac{\gamma g}{2a(z)}. \quad (25.16)$$

В горизонтальном направлении могут распространяться лишь волны, для которых $\omega < \omega_2$, причем

$$\omega_2(z) = \frac{g}{a(z)} \sqrt{(\gamma - 1) \left(1 - \frac{\beta}{\beta_a}\right)}, \quad (25.17)$$

где

$$\beta_a = \left| \frac{dT}{dz} \right|_{ад} = \frac{g}{c_p}$$

— адиабатический градиент температуры: при $\beta > \beta_a$ наступает конвективная неустойчивость. Таким образом, из (25.17) следует, что в конвективно неустойчивых областях внутренние гравитационные волны распространяться не могут, так как в этом случае на фиксированный элемент газа действует сила, направленная в ту же сторону, что и его смещение.

Распространение волновых движений в атмосфере Солнца усложняется еще и тем, что несколько выше конвективной зоны температура имеет минимальное значение, увеличиваясь вверх и вниз от этой точки. Кан (F.D. Kahn, 1962) предложил описывать это распределение параболическим

законом

$$a^2(z) = a_0^2 (1 + \delta^2 z^2), \quad (25.18)$$

где $a_0 = 7,1$ км/с, $\frac{1}{\delta} \approx 360$ км, а z отсчитывается от высоты, на которой температура минимальна. Тем самым из (25.16) и (25.17) можно получить значения критических периодов, ограничивающих распространение волновых движений в горизонтальном и вертикальном направлениях в атмосфере Солнца (R.W. Noyes, R.B. Leighton, 1963),

$$P_1(z) = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{4\pi a_0}{\gamma g} [1 + \delta^2 z^2]^{1/2}, \quad (25.19)$$

$$P_2(z) = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2\pi a_0}{\sqrt{g}} \left[\frac{1 + \delta^2 z^2}{(\gamma - 1)g - 2a_0^2 \delta^2 z} \right]^{1/2}. \quad (25.20)$$

Зависимость критических периодов P_1 и P_2 от высоты для параболического профиля температуры (25.18) показана на рис. 51. Здесь принято $\gamma = 1,1$, вертикальной линией отмечена верхняя граница конвективной зоны фотосферы, а заштрихованная зона соответствует колебаниям, которые не могут свободно распространяться от конвективной зоны в хромосферу. Видно, что нижняя хромосфера полностью прозрачна лишь для колебаний с периодом, меньшим $P \approx 4,5$ мин ≈ 270 с. Если же принять $\gamma = 1,66$, то эта величина критического периода будет еще меньше и равна $P_{\text{крит}} \approx 3$ мин = 180 с. В большинстве случаев при интерпретации наблюдений принимают $P_{\text{крит}} \approx 240$ с.

Таким образом, в атмосфере звезды могут существовать волны трех типов (без учета эффектов магнитной гидродинамики): a (акустические), γ (внутренне гравитационные) и промежуточные s (стационарные, стоячие волны). Расчет показывает (S. Kato, 1966), что если источником возмущения является осциллятор, колеблющийся в вертикальном направлении бесконечно долгое время, то синфазные колебания возникают лишь в узком столбике над ним. Теория в этом случае позволяет рассчитать и распределение кинетической энергии в этом столбике.

Вернемся еще раз к соотношению (25.11). Если $\gamma = 1$, то отсюда следует, что $\omega_2 = 0$ и, таким образом, в этом случае внутренние гравитационные волны отсутствуют. Но $\gamma = 1$ соответствует случаю, когда время релаксации температурных неоднородностей τ_R (время охлаждения) очень мало. Тогда, очевидно, при $\tau_R \rightarrow 0$ процесс является изотермическим, если же $\tau_R \rightarrow \infty$, то процесс адиабатический.

Условия распространения волн в атмосфере с конечным временем релаксации подробно исследовал Суффрен (P. Souffrin, 1966), показавший, что критические частоты ω_1 и ω_2 связаны с τ_R соотношениями

$$\omega_1^2 = \frac{1}{2} \left[\omega_{10}^2 - \frac{\gamma}{\tau_R^2} + \left\{ \left(\omega_{01}^2 - \frac{\gamma}{\tau_R^2} \right)^2 + \frac{4\omega_{10}^2}{\tau_R^2} \right\}^{1/2} \right], \quad (25.21)$$

$$\omega_2^2 = \begin{cases} \omega_{20}^2 - \frac{1}{\tau_R^2} & \text{при } \tau_R \omega_{20} \geq 1, \\ 0 & \text{при } \tau_R \omega_{20} < 1, \end{cases} \quad (25.22)$$

где ω_{10} и ω_{20} определяются соотношениями (25.10) и (25.11). Отсюда как будто следовал вывод, что распространение внутренних гравитацион-

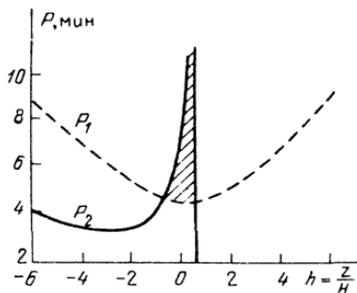


Рис. 51. Зависимость критических периодов P_1 и P_2 от высоты в солнечной атмосфере.

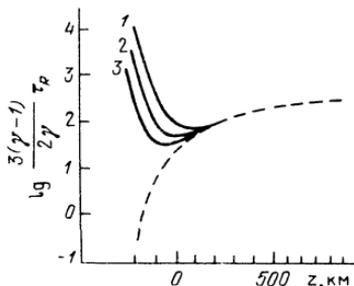


Рис. 52. Зависимость времени релаксации температурных неоднородностей в солнечной атмосфере τ_R от высоты z и длины волны возмущения: 1 — $\lambda = 10^4$ км, 2 — $\lambda = 5 \cdot 10^3$ км, 3 — $\lambda = 2,5 \cdot 10^3$ км.

ных волн в солнечной атмосфере является невозможным. Однако поиски зависимости параметра τ_R от частоты колебаний волны говорят скорее о противоположном (Р. Mein, 1966). Оказалось, что время релаксации температурных неоднородностей зависит от волнового числа $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, так что

$$\tau_R = \frac{2\gamma C}{48(\gamma - 1)k\sigma T^3} \left[1 - \frac{k\rho}{k} \operatorname{arccotg} \frac{k\rho}{k} \right]^{-1}, \quad (25.23)$$

где k — коэффициент непрозрачности. Если $\frac{1}{\tau_R} \gg \omega$, то в (25.23) следует принимать $C = c_V$ — это изохорический процесс очень быстрого охлаждения. При $\frac{1}{\tau_R} \ll \omega$ принимается $C = c_p$ — изобарический процесс (Т. Osaki, 1966).

На рис. 52 показана зависимость времени релаксации τ_R от высоты z в солнечной атмосфере, рассчитанная по формуле (25.23). Штриховая кривая соответствует случаю $\frac{k\rho}{k} \rightarrow 0$, т.е. когда длина свободного пробега фото-на намного превосходит длину волны, сплошные — определенным длинам волн колебаний (Р. Mein, 1966). Видно, что на верхней границе солнечной фотосферы время релаксации $\tau_R \geq 100$ с, а для оптических глубин $\tau \approx 0,001$ — даже 400 с. Отсюда следует, что в солнечной атмосфере распространение гравитационных внутренних волн возможно.

Возвращаясь к вопросу о нагреве хромосферы, отметим, что этот нагрев происходит, по-видимому, благодаря переносу энергии от конвективной зоны акустическими волнами с периодом от 30 до 60 с, хотя подробно исследовать эти движения путем наблюдений не удалось.

Посмотрим еще, как изменяется амплитуда колебания при движении его вверх, в сторону уменьшающейся плотности. Предположим, что температура в атмосфере звезды равна определенному значению T_1 , а плотность в ней изменяется с высотой по экспоненциальному закону $\rho_1 = \rho_{10} e^{-z/H}$. Обозначим вертикальное смещение частицы через $\xi(z, t)$. Если ξ , $\Delta\rho$ и Δp невелики, то линеаризованные уравнения газодинамики запишутся в виде

(R.W. Noyes, R.B. Leighton, 1963)

$$\rho_1 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = - \frac{\partial p}{\partial z} - g \rho_1 = - \frac{\partial}{\partial z} (p - \rho_1), \quad (25.24)$$

$$\rho \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) = \rho_1. \quad (25.25)$$

В уравнениях (25.24) и (25.25) z — лагранжева координата. В отличие от принятого ранее в этом параграфе способа ее отсчета здесь z увеличивается по направлению вверх от центра звезды.

Далее из условия адиабатичности процесса ($\Delta p = a^2 \Delta \rho$) и учитывая, что $\Delta \rho = \rho \frac{\partial \xi}{\partial z}$, находим

$$p - p_1 = -\gamma \rho_1 \frac{\partial \xi}{\partial z}$$

и в конечном итоге из (25.24) — волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \gamma g \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0, \quad (25.26)$$

решение которого имеет вид

$$\xi = \xi_0 e^{\frac{z}{2H}} e^{i(\omega t - kz)}, \quad (25.27)$$

$$\text{где } k^2 = \left(\frac{\omega}{a} \right)^2 - \frac{1}{4H^2} \text{ и } H = \frac{a^2}{\gamma g}.$$

Отсюда следует, что амплитуда волны с высотой увеличивается экспоненциально, что соответствует закону сохранения энергии, выполняющемуся при движении волны в сторону уменьшающейся плотности.

Однако решение (25.27) получено в предположении, что смещение мало. Переход же к нелинейной трактовке задачи физически означает поиск условий превращения бегущей волны в ударную.

Следует также отметить, что решение (25.27) не учитывает потерь энергии волны при ее движении в атмосфере. Как было показано С.Б. Пикельнером (1959), движение звуковой волны при учете нелинейных эффектов во втором порядке приводит к перемешиванию атмосферы и к гравитационному затуханию волны, которое несущественно в пределах высоты однородной атмосферы, но на больших расстояниях нарастает экспоненциально. Поэтому закон изменения амплитуды плоской волны в действительности имеет вид

$$\xi_A = \xi_0 \exp \left\{ \frac{gz}{2a^2} (\gamma - 1) \right\}, \quad (25.28)$$

а не $\xi_0 \exp \left\{ \frac{\gamma gz}{2a^2} \right\}$, как это следует из (25.27).

А.Г. Косовичев и Ю.П. Попов (1979) провели численное исследование распространения возмущений в верхних слоях оболочки Солнца. Источник

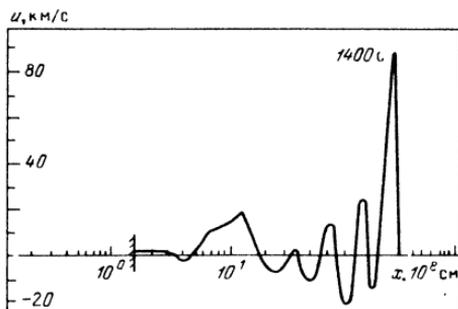
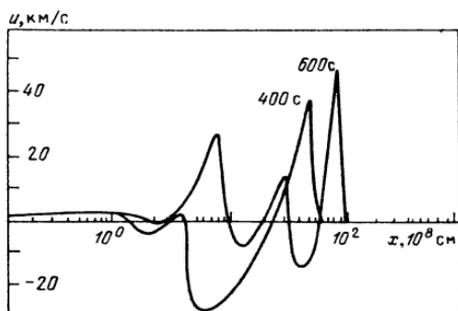
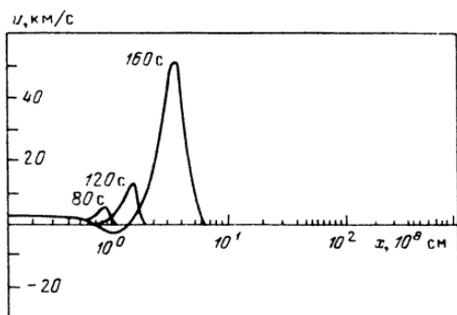


Рис. 53. Профили скоростей в различные моменты времени при движении в атмосфере Солнца поршня со скоростью $u_{\text{п}} = 1 \text{ км/с}$.

возмущения — поршень — располагался в конвективной зоне на глубине 10^5 км , скорость его движения подбиралась таким образом, чтобы в атмосфере величина скорости в звуковой волне соответствовала наблюдаемым значениям. Как оказалось, при движении поршня с постоянной скоростью в конвективной зоне формируется звуковая волна с крутым фронтом, которая распространяется на периферию и отражается в нижней хромосфере. Энергия волны, входящей в атмосферу, составляет всего около 0,1% от ее значения в конвективной зоне. В атмосфере звуковая волна быстро увеличивает свою амплитуду, за ее фронтом образуется волновой след (рис. 53). В фотосфере период возникающих колебаний $P \approx 300 \text{ с}$, в хромосфере — меньше 200 с. Амплитуда волн, возникших в волновом следе, достигает 20 км/с, они превращаются в ударные и выходят в корону (см. § 26).

Расчет показал также, что явление возникновения колебаний не зависит от закона движения поршня. Если, однако, поршень движения с ускорением, то в конвективной зоне может появиться несколько волновых фронтов. В итоге образуется цуг волн, состоящий из нескольких (до 5–6) колебаний, причем их период при изменении закона движения поршня изменяется незначительно. Фазовая скорость колебаний в фотосфере и в хромосфере примерно на порядок превышает скорость звука. Найдено также, что колебания температуры опережают колебания скорости по фазе примерно на

$\frac{\pi}{2}$. Таким образом, наблюдаемые в атмосфере Солнца колебания с периодом 3–5 минут могут быть результатом переходного процесса в атмосфере при распространении через нее звуковой волны, возбужденной в конвективной зоне.

Существует и другая возможность возбуждения таких колебаний. Колебания с периодом около 5 мин в виде периодически повторяющихся цугов

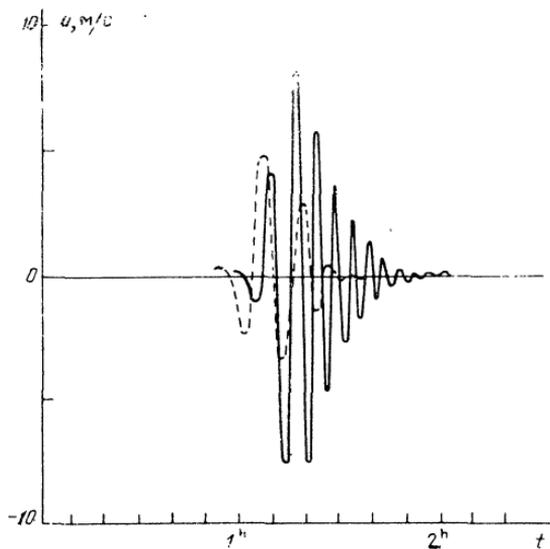


Рис. 54. Зависимость скорости от времени вблизи границы политропного шара при $r = 0,99 R_*$ (штриховая линия) и в атмосфере на высоте $h = 1460$ км (сплошная линия).

волн могут возникать в атмосфере Солнца и благодаря эффекту волнового следа при последовательных отражениях сферической волны от центра Солнца и от нижней границы его атмосферы (А.Г. Косовичев, А.Б. Северный, 1981). Такая волна может образоваться в результате возмущения в центральном ядре радиуса $0,1 R_*$, где происходит основное выделение энергии ядерных реакций.

Как оказалось, если в центральной области Солнца формируется распространяющаяся к периферии сферическая волна с начальной амплитудой 10^{-3} м/с, то эта амплитуда возрастает до 10 м/с на нижней границе атмосферы Солнца и до 15 м/с на высоте 1500 км. При этом скачок плотности $\frac{\Delta \rho}{\rho}$ увеличивается от $4 \cdot 10^{-9}$ до 10^{-4} у границы атмосферы. Таким образом достаточно ничтожно малого возмущения плотности в центре, чтобы получить наблюдаемую амплитуду скорости у поверхности.

Величина периода колебаний в волновом следе (рис. 54) составляет около 5 минут, что близко к величине наблюдаемой, и практически не зависит от вида начального возмущения. Длительность волнового следа составляет около 60 минут.

Время прохождения волны возмущения от поверхности к центру Солнца и обратно

$$\Pi = 2 \int_0^{R_*} \frac{dr}{a} \approx 126 \text{ минут.}$$

Поэтому в результате последовательного отражения волн от атмосферы и от центра Солнца в его атмосфере может установиться стационарный режим колебаний с периодом появления цугов на поверхности Π минут.

§ 26. Превращение звуковых волн в ударные и их диссипация

Анализ особенностей распределения температуры в хромосфере и в короне Солнца (см. § 5) показал, что для поддержки температуры короны на уровне $T \approx 10^6$ К необходим постоянный приток тепла снизу мощностью 10^4 эрг/(см² · с) (И.С. Шкловский, 1962). Начиная с середины 40-х годов высказывались предположения, согласно которым нагрев хромосферы и короны связан с диссипацией механической энергии волновых движений и прежде всего — звуковых волн, возникающих в верхней части конвективной зоны в результате движения гранул (M. Schwarzschild, 1948). Несложный расчет показывает, что поток энергии, переносимой гранулами к вершине конвективной зоны, оценивается величиной $1,7 \cdot 10^7$ эрг/(см² · с), что на три порядка больше, чем требуется для поддержания высокой температуры в короне.

Вопрос же о том, насколько эффективны процессы переноса энергии звуковыми волнами, все еще подвергается дискуссии. Поэтому здесь уместно изложить некоторые соотношения, которыми описывается движение звуковых волн в неоднородной атмосфере, условия их превращения в ударные волны и диссипация.

Слабое возмущение, для которого $\Delta \rho \ll \rho_1$, $\Delta p \ll p_1$, распространяется в атмосфере звезды со скоростью звука. Каждая частица среды при этом совершает упругие колебания относительно положения равновесия, а скорость частицы связана с изменением плотности среды соотношением

$$u = \pm \frac{a_1}{\rho_1} \Delta \rho = \pm \frac{\Delta p}{\rho_1 a_1}. \quad (26.1)$$

Здесь знак "+" относится к волне, бегущей в сторону положительных x . Из (26.1) следует также, что скорость частиц направлена в сторону движения волны там, где вещество сжато ($\Delta \rho > 0$), и наоборот.

Если возмущение имеет произвольную, не бесконечно малую амплитуду, то его распространение от фотосферы вверх представляет собой бегущую в одном направлении волну, которая описывается особыми решениями газодинамики (см. § 16). Определенная комбинация газодинамических величин (инвариант Римана) сохраняет свое значение вдоль определенного направления на плоскости x, t , определяемого условием $\frac{dx}{dt} = u + a$. В

случае политропной среды эти решения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x &= (u + a)t + F(u), \\ u &= -\frac{2}{\gamma - 1} a + \text{const}, \end{aligned} \right\} \quad (26.2)$$

где $F(u)$ — некоторая функция, определяемая начальными условиями. Так, если бегущая волна распространяется в сторону положительных x в невозмущенный газ, для которого $a = a_1$ и $u = 0$, то

$$a - \frac{\gamma - 1}{2} u = a_1 = \text{const}. \quad (26.3)$$

Заданное состояние среды переносится со скоростью $u + a$. Если два состояния характеризуются различными значениями a (и соответственно u), то они будут распространяться с различными скоростями.

В процессе распространения возмущения, имевшего первоначально синусоидальный профиль, точки, находящиеся на гребне волны (где $\Delta\rho > 0$) будут, в соответствии с (26.3), двигаться быстрее чем остальные точки волны. В итоге происходит деформация волны, области сжатия обгоняют движущуюся впереди область разрежения, гребень волны становится все круче, превращаясь наконец в вертикальный фронт — ударную волну.

Звуковая волна несет с собой энергию $E = \rho_1 u^2$. На фронте возникающей ударной волны часть этой энергии необратимо превращается в тепловую, газ за фронтом волны нагревается, а сама ударная волна диссипирует. Именно благодаря этому и возможен процесс переноса тепла от слоев звезды с развитой конвекцией в корону через относительно холодный коридор. Поэтому также вопрос о превращении бегущей волны в ударную, о длине пробега звуковой волны до ее вырождения в ударную интересен с точки зрения теории звездных атмосфер. Задача эта относится к числу самосогласованных задач: звуковые и ударные волны движутся в неоднородной среде, параметры которой, в свою очередь, определяются движением и диссипацией этих же волн. Здесь мы и приведем некоторые приближенные аналитические решения этой задачи.

Как уже отмечалось, условием образования ударной волны является превращение гребня волны в вертикальный фронт. При этом, если волна граничит с покоящимся газом, выполняются следующие условия:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \infty, \quad \frac{\partial u}{\partial t} \rightarrow \infty, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)_{u=0} = 0. \quad (26.4)$$

Линеаризованное уравнение неразрывности (25.25), если смещение ξ и $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ малы, можно записать в виде

$$\rho (1 + \operatorname{div} \xi) = \rho_1. \quad (26.5)$$

Необходимость в нелинейной трактовке возникает тогда, когда в уравнениях газодинамики квадратичный член становится одинакового порядка с линейным. При этом в уравнение неразрывности можно ввести член второго порядка (Э. Шацман, 1964), так что

$$\rho = \rho_1 [1 - \operatorname{div} \xi + (\operatorname{div} \xi)^2]. \quad (26.6)$$

Условием превращения волны в ударную является $\frac{\delta\rho}{\rho} \approx 1$ или

$$|\operatorname{div} \xi| = 1. \quad (26.7)$$

Поэтому в случае изотермической атмосферы из (25.27) и (26.7) следует

$$|\operatorname{div} \xi| = \frac{\omega}{a} \xi_0 \exp\left(\frac{L_S}{2H}\right) = 1, \quad (26.8)$$

где L_S — расстояние, пробегаемое звуковой волной до ее превращения в ударную. Так как $\omega \xi_0 = u_0$ равно амплитуде скорости источника, возбуждающего колебания, то

$$L_S = 2H \ln \frac{a}{u_0}. \quad (26.9)$$

В атмосфере Солнца $a = 7,1$ км/с. Принимая $u_0 = 0,5$ км/с, находим, что $L_S \approx 7,3 H$. Из (26.9) следует, что чем больше амплитуда скорости u_0 , тем меньший путь проходит волна до ее вырождения в ударную.

С.А. Каплан и Л.А. Островский (1963) разработали метод расчета условий превращения звуковых волн, движущихся в неоднородной атмосфере, в ударные волны при любом законе распределения плотности и температуры, если только длина звуковой волны много меньше масштабной высоты ($\lambda \ll H$), а сами возмущения невелики. Суть метода заключается в следующем. В случае однородной среды вертикальное движение плоской волны описывается уравнением

$$t - \frac{z}{u+a} = f(u). \quad (26.10)$$

При движении волны в неоднородной среде скорость u будет изменяться и за счет изменения плотности. Это изменение можно записать в виде закона сохранения потока энергии, который при $T = \text{const}$ примет вид

$$\rho_0 u_0^2 = \rho(z) u^2(z) = \rho(y) u^2(y), \quad (26.11)$$

где y — промежуточная высота ($0 \leq y \leq z$). В случае неоднородной изотермической среды по аналогии с (26.10) решение для бегущей волны можно представить в виде

$$t - \int_0^z \frac{dy}{a + u(z) \left[\frac{\rho(z)}{\rho(y)} \right]^{1/2}} = f[u[\rho(z)]^{1/2}]. \quad (26.12)$$

Так как $u \ll a$ и $\rho(z) \ll \rho(y)$, то, разлагая подынтегральное выражение в ряд, находим

$$t - \frac{z}{a} + \frac{u}{a^2} [\rho(z)]^{1/2} \int_0^z \frac{dy}{[\rho(y)]^{1/2}} = f[u[\rho(z)]^{1/2}]. \quad (26.13)$$

Это решение и описывает движение газа в волне при ее распространении в неоднородной изотермической атмосфере. При $z = 0$ оно должно удовлетворять граничному условию

$$u = u_0 \sin \omega t. \quad (26.14)$$

Тем самым определяется вид произвольной функции

$$f = \frac{1}{\omega} \arcsin \left[\frac{u}{u_0} \left[\frac{\rho(z)}{\rho_0} \right]^{1/2} \right]. \quad (26.15)$$

В итоге нетрудно из (26.13) получить длину пробега волны L_S

$$\int_0^{L_S} \left[\frac{\rho_0}{\rho(y)} \right]^{1/2} dy = \frac{2a^2}{(\gamma+1)u_0\omega} = L_0. \quad (26.16)$$

Здесь L_0 — расстояние, пробегаемое звуковой волной до ее превращения в ударную в среде с постоянной плотностью. Оно зависит как от начальной амплитуды, так и от частоты волнового движения. Если плотность меняется с высотой по экспоненциальному закону, то

$$L_S = 2H \ln \left[1 + \frac{L_0}{2H} \right]. \quad (26.17)$$

В частности, при $\Pi = 100$ с, $\omega = 6,3 \cdot 10^{-2}$, $H = 100$ км имеем $L_0 \approx 1200$ км $\approx 12 H$ и $L_S \approx 3,9 H$.

Итак, из (26.9) и (26.17) следует, что звуковая волна превращается в ударную на протяжении нескольких масштабных высот. Если же температура в атмосфере с высотой возрастает, как это имеет место в хромосфере, по закону $T \approx T_0 e^{\alpha z}$, то для L_S будет верным такое соотношение:

$$L_S = \frac{4H}{2 - 5\alpha H} \ln \left[1 + (2 - 5\alpha H) \frac{L_0}{4H} \right]. \quad (26.18)$$

При достаточно большом положительном ($\alpha > 0$) градиенте температуры $L_S \rightarrow L_0$. Если же градиент температуры отрицателен (как это имеет место в подфотосферных слоях звезды), то длина пробега волны до ее превращения в ударную будет существенно меньше, чем в изотермическом случае. В частности, сильные бегущие волны сжатия образуются при пульсациях звезд.

Соотношение между давлением в месте возникновения бегущей волны p_i и давлением p_s в месте ее превращения в ударную было получено С.А. Капланом (1962) из следующих соображений.

Пусть бегущая волна движется в звездной оболочке, состояние которой описывается соотношениями

$$T = \frac{gh}{(n+1)A}, \quad \rho \sim T^n,$$

где h — глубина, отсчитываемая от поверхности звезды, g — ускорение силы тяжести, n — индекс политропы. Введем лагранжеву координату

$$m = \int_0^h \rho dh \sim T^{n+1},$$

так что в стационарном состоянии $p_1 = gm$. Если возникшее движение считать адиабатическим, то давление p и удельный объем V связаны соотношением

$$\frac{1}{\rho^\gamma} V = \gamma B^2, \quad (26.19)$$

где B — постоянная, определяемая начальными условиями

$$B = \frac{a_1}{\gamma} p_1^{\frac{1-\gamma}{2\gamma}},$$

а a_1 и p_1 — скорость звука и давление в состоянии равновесия. Если далее $\gamma = \frac{n+1}{n}$, то параметр B не зависит от m . Это означает, что энтропия заданного элемента газа не меняется с глубиной.

Отмеченное условие выполняется в тех областях звезды, где имеется конвективное адиабатическое равновесие.

Воспользовавшись соотношением (26.19), можно уравнения движения, представленные в форме Лагранжа

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial p}{\partial m} + g = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial m} = 0,$$

свести к виду

$$\left[\frac{\partial}{\partial m} \pm \frac{B}{\rho^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}} \frac{\partial}{\partial t} \right] \left(u + gt \mp \frac{2\gamma B}{\gamma-1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right) = 0. \quad (26.20)$$

Здесь, как и раньше, u считается положительной, если вещество движется от центра звезды, т.е. $u = -\frac{\partial h}{\partial t}$. Из (26.20) следует, что инварианты Римана

$$J_{\mp} = u + gt \mp \frac{2\gamma B}{\gamma-1} \rho^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad (26.21)$$

сохраняются вдоль направлений, определяемых условием

$$B dm = \pm \rho^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}} dt. \quad (26.22)$$

На самом деле давление p зависит от m , поэтому в неоднородной среде — звездной оболочке — выражение (26.21) не является инвариантом в полном смысле слова. Однако показатель степени $\frac{\gamma+1}{2\gamma} \lesssim \frac{1}{5}$, так что в первом приближении зависимостью J_{\mp} от глубины (от m) можно пренебречь. В этом случае решение для простой волны, распространяющейся по направлению к поверхности звезды, переписывается в виде

$$Bm = -\rho^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}} t + F(p). \quad (26.23)$$

где функция $F(p)$ определяется начальными условиями.

Интегрируя (26.22) (здесь имеется в виду интегрирование по начальному гидростатически равновесному распределению $p_1(m)$ в случае изэнтропической оболочки, для которой $B = \text{const}$), можно найти время пробега звуковой волны от уровня с давлением p_i до уровня с меньшим давлением p_s :

$$\frac{B}{g} \frac{dp_1}{\rho_1^{\frac{\gamma+1}{2\gamma}}} = -dt, \quad t = \frac{2\gamma}{\gamma-1} \frac{B}{g} \left[\rho_i^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - \rho_s^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right] = \frac{2}{\gamma-1} \frac{a_i}{g} \left[1 - \left(\frac{\rho_s}{\rho_i} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \right], \quad (26.24)$$

так как $dp_1 = g dm$.

Математическим условием образования фронта ударной волны является $\frac{\partial p}{\partial m} \rightarrow \infty$ (или $\frac{\partial p}{\partial x} \rightarrow \infty$) или же $\frac{\partial m}{\partial p} \rightarrow 0$. Дифференцируя (26.23)

по p , находим время образования ударной волны

$$t = \frac{2\gamma}{\gamma+1} \rho_s^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} F'(\rho_s). \quad (26.25)$$

Промежутки времени (26.24) и (26.25) должны быть равными между собой, так как оба они описывают движение одной и той же волны, хотя и различных ее частей. Первым из них описывается движение переднего фронта волны, распространяющегося со скоростью звука, вторым — гребня волны, догоняющего передний край. Из равенства этих промежутков времени и следует условие для определения давления в месте образования ударной волны:

$$F'(p_s) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{B}{g} \left[\left(\frac{p_i}{p_s} \right)^{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} - 1 \right]. \quad (26.26)$$

Пусть в области с первоначальным давлением p_i происходит нарастание давления по закону

$$p = p_i \left(1 + \frac{t}{\tau} \right),$$

где τ — характерный масштаб времени. В результате из (26.24) и (26.25) следует

$$F(p) = B m_i + p^{\frac{\gamma + 1}{2\gamma}} \frac{p - p_i}{p_i}. \quad (26.27)$$

Дифференцируя это выражение по p , находим из (26.26) соотношение, определяющее давление в месте появления ударной волны

$$\frac{p_s}{p_i} = \frac{2(\gamma + 1)}{(\gamma - 1)(3\gamma + 1)} \frac{a_i}{g\tau} \left[1 - \left(\frac{p_s}{p_i} \right)^{\frac{\gamma - 1}{2\gamma}} \right]. \quad (26.28)$$

Нетрудно убедиться, что

$$0 \leq \frac{p_s}{p_i} \leq 1,$$

причем нижний предел достигается при $\tau \rightarrow \infty$, верхний при $\tau \rightarrow 0$.

Следовательно, если в результате нарастания давления на определенной глубине в оболочке звезды возникает бегущая волна, то она превращается в ударную, пройдя расстояние, на котором давление уменьшается меньше,

чем в два раза. Так как $p \sim h^{n+1} \sim h^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$, то $\frac{h_i}{h_s} \leq 2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$.

В частности, при $\gamma = \frac{5}{3}$ (конвективная оболочка) $\frac{h_i}{h_s} \leq \sqrt[5]{4} \approx 1,32$ — ударная волна образуется, пройдя примерно 30% расстояния возмущающего источника до поверхности звезды. Плотность на этом расстоянии уменьшается в 1,5 раза.

Таким образом, во внешних слоях оболочек звезд возникшее волновое движение превращается в слабую ударную волну.

В работе Прасада (P. Prasad, 1967) рассмотрены условия превращения звуковых и бегущих волн произвольной амплитуды в ударные волны при условии, что давление и плотность энергии излучения одинакового порядка с газовыми. Оказалось, что поле излучения не влияет существенно на условия образования ударных волн.

В свою очередь длину пробега слабой ударной волны в атмосфере и скорость диссипации ее энергии можно оценить в рамках метода Бринкли — Кирквуда (см. § 15). Соответствующие расчеты проводились неоднократно (см. E. Schatzman, 1949; Э.Е. Дубов, 1960; D.G. Wentzel, A.B. Solinger, 1967; R.Y. Bray, R.E. Loughhead, 1974 и др).

Величину потока энергии, переносимого ударной волной, на различных расстояниях от места ее формирования, можно оценить из следующих соображений. Потери энергии ударной волны h на нагрев газа в расчете на единицу массы вещества были записаны ранее в виде (15.28') или, для слабой ударной волны, в виде (15.29). Предположим, что на "исходном" уровне энергия ударной волны равна W_0 , а соответствующий ей поток энергии F_0 . В результате диссипации энергии на промежутке dz потери энергии равны $dW = -\rho h dz$ (z увеличивается к поверхности звезды), а поток уменьшится на величину dF , так что

$$-\frac{\rho h dz}{W} = +\frac{dF}{F}. \quad (26.29)$$

Это соотношение, отнесенное к единице пути, принято называть коэффициентом затухания волны. Пусть Π — промежуток времени между двумя прохождениями фронта волны через заданную точку (период волны), D — скорость фронта, u — скорость вещества за фронтом. Тогда из (15.9) в случае плоской волны находим, что энергия волны и поток связаны соотношением

$$W = \rho u^2 D \Pi = F \Pi. \quad (26.30)$$

Так как из закона сохранения массы $\rho(D - u) = \rho_1 D$ следует, что $\frac{\Delta V}{V_1} = -\frac{u}{D}$, то в результате вместо (15.29) находим

$$h = -\frac{\gamma + 1}{12} a^2 \left(\frac{\Delta V}{V_1}\right)^3 = \frac{\gamma + 1}{12} a^2 \frac{u^3}{D^3} = \frac{(\gamma + 1) a^2 F^{3/2}}{12 \rho^{3/2} D^{9/2}}. \quad (26.31)$$

Таким образом, из (26.29) и (26.31) находим уравнение для изменения величины потока энергии в виде

$$\frac{dF}{F^{3/2}} = -\frac{(\gamma + 1) a^2}{12 \Pi D^{9/2} \rho^{1/2}} dz. \quad (26.32)$$

В случае изотермической атмосферы, в которой плотность изменяется с высотой по экспоненциальному закону, из (26.32) при $D \approx a = \text{const}$ получаем

$$\frac{1}{F^{1/2}} = \frac{1}{F_0^{1/2}} + \frac{(\gamma + 1) H a^2}{12 \Pi D^{9/2} \rho_{10}^{1/2}} \left[e^{\frac{z}{2H}} - 1 \right]. \quad (26.33)$$

Как видно, в изотермической неоднородной атмосфере затухание ударной волны имеет асимптотический характер ($F \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \infty$). Разрешая уравнение (26.33) относительно z , находим выражение для оценки расстояния, на котором энергия волны уменьшается в заданное число раз:

$$z = 2H \ln \left\{ 1 + \frac{12 D^4 \Pi}{(\gamma + 1) a^2 u_0 H} \left[\left(\frac{F_0}{F}\right)^{1/2} - 1 \right] \right\}. \quad (26.34)$$

Скорость движения газа за фронтом слабой ударной волны $u = \frac{4}{\gamma + 1} (D - a)$. Предположим далее, что $D \approx 1,5 a$, так что при $\gamma = \frac{5}{3}$ $u_0 \approx$

$\approx 0,75 a$. Тогда из (26.34) следует, что при $H = 100$ км, $a = 7,1$ км/с и $\Pi = 10$ с поток энергии уменьшается вдвое на расстоянии $z \approx 4,6 H$; на расстоянии $z_4 \approx 15 H \approx 1500$ км он уменьшается на четыре порядка.

На самом деле величина H в хромосфере больше, у границы с короной она порядка 1000 км. Принимая в среднем $H \approx 500$ км, находим для z_4 величину $z_4 \approx 12 H \approx 6000$ км.

Отсюда видно, что ударная волна является неэффективным механизмом переноса энергии от конвективной зоны до основания короны, так как диссипация ее энергии наступает уже в нижних слоях хромосферы. Поэтому для решения этого вопроса и привлекаются другие возможные механизмы (в частности, альвеновские волны).

Примером численного решения самосогласованной задачи о распространении в атмосфере Солнца звуковых волн, превращения их в ударные и диссипации этих последних с учетом влияния этой диссипации на температурный профиль среды является работа С.А. Каплана, Л.А. Островского, Н.С. Петрухина и В.Е. Фридмана (1972), в ней использовано коротковолновое приближение (длина волны $\lambda \ll H$), позволяющее с помощью характеристик свести эту задачу к решению уравнений с обыкновенными производными. Принималось, что на некотором уровне в подфотосферных слоях находится источник монохроматической (с частотой ω_0) звуковой волны, распространяющейся вертикально вверх. Тогда скорость частиц газа вблизи источника $u(r=0, t) = u_0 \sin \omega_0 t$, где $u_0 < a_1$ — амплитуда скорости. Было принято $u_0 = (0,4 \div 2) \cdot 10^5$ см/с, $\omega_0 = 0,1 \div 0,2$ с⁻¹, а соответствующие значения температуры и плотности на исходном уровне $T_0 = 5500$ К и $\rho_0 = 5 \cdot 10^{-7}$ г/см³. Результаты расчетов показаны частично на рис. 55. Как видно, эффективный нагрев хромосферы может осуществляться лишь волнами с $\omega_0 \leq 0,17$ с⁻¹ (период $\Pi \geq 40$ с), причем чем меньше частота, тем выше начинается рост температуры, однако происходит он тогда быстрее. Согласно с наблюдениями достигается лишь в случае, если коэффициент непрозрачности увеличить в η раз для учета влияния спектральных линий на процессы переноса и учета возможных ошибок, связанных с диффузионным приближением. При $\eta < 30$ происходит быстрое излучение диссипируемой в ударных волнах энергии, так что температура в хромосфере с высотой даже несколько уменьшается. Инверсия температуры возможна лишь при $\eta \geq 100$ (рис. 55 соответствует величине $\eta = 150$).

На рис. 56 показан ход изменения величины потока энергии в волне. Как видно, на больших расстояниях поток уменьшается по экспоненциальному закону в соответствии с формулой (26.33).

Заслуживает внимания и проведенное А.Г. Косовичевым и Ю.П. Поповым (1978, 1979) численное исследование задачи о распространении слабых возмущений в атмосфере Солнца с учетом нелинейных эффектов (но в отсутствие диссипативных процессов, в том числе излучения). Образование в среде нелинейных структур — ударных волн — при монотонном внешнем воздействии на ее границу видно из рис. 53. Скорость движения поршня принята равной $u_{11} = 1$ км/с. Возмущение, распространяющееся от поршня, к моменту времени 100 с на высоте 800 км формирует ударную волну. Двигаясь в среде с убывающей плотностью, ударная волна ускоряется и при $t = 160$ с со скоростью 50 км/с входит в корону. Под действием силы тяжести газ за фронтом ударной волны тормозится, благодаря чему форми-

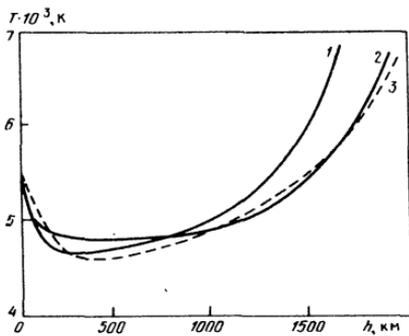


Рис. 55. Распределение температуры T по высоте h в нижней части хромосферы согласно расчетным (1, 2) и наблюдательным данным (3). Кривые 1 и 2 соответствуют нагреванию волнами с периодами 80 и 40 секунд соответственно.

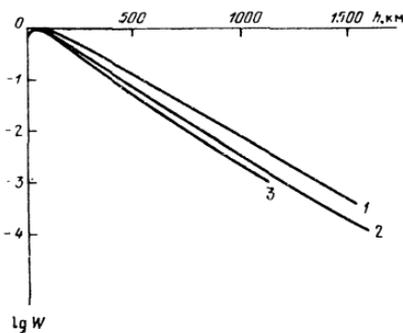


Рис. 56. Изменение потока энергии в волне по мере ее подъема при начальных значениях амплитуды: 1 — 0,6 км/с, 2 — 1,3 км/с и 3 — 6 км/с.

руется зона разрежения, в которой происходит охлаждение газа и его движение вниз. Это явление можно рассматривать как своеобразную аккрецию. Как только скорость течения в потоке за фронтом ударной волны становится меньше скорости поршня (при $t = 150$ с), формируется волна сжатия, которая к моменту $t = 200$ с превращается в ударную и которая далее ускоряется. Постепенно создаются условия для образования третьей и последующих ударных волн. В итоге образуется система ударных волн, разделенных опускающимися массами газа. Характерный период процесса порядка 200 с, т.е. он близок к величине $p_1 = \frac{4\pi a_1}{\gamma g}$. Амплитуда вторич-

ных ударных волн оказывается того же порядка, что и начальной волны. Образование сильных ударных волн прекращается при $t \approx 2000$ с, само же время действия поршня может быть гораздо меньшим.

Возникновение аккреционной ударной волны, сопутствующей движению первичного ударноволнового возмущения в атмосфере, подтверждено расчетами Клейна и др. (R.I. Klein, R.F. Stein, W. Kalkofen, 1978). В данном случае исследовалось влияние поршня на состояние атмосфер звезд классов А ($T_{eff} = 11500$ К, $g = 10^4$ см/с², атмосфера состоит из неионизованного водорода) и В ($T_{eff} = 22500$ К, $g = 10^3$ см/с², полностью ионизованный водород). Скорость поршня принималась равной 40% от скорости звука — соответственно 4 и 6 км/с. Уравнения газодинамики решались численно совместно с уравнением переноса излучения методом конечных разностей; при этом число атомов N_1 и N_2 , у которых электроны находятся соответственно на первом и втором уровнях, рассчитывалось с помощью уравнений кинетики типа (2.9).

Как оказалось, в процессе движения поршня в атмосфере звезды класса А впереди формируется ударная волна. Кванты, уходящие с фронта ударной волны вперед, интенсивно поглощаются в том слое, где оптическая глубина, отсчитанная от бесконечности у предела бальмеровской серии, $\tau_{Ba} \approx 1$. Тем самым в этих слоях возникает волна давления (рис. 57), что некоторым образом напоминает клапанный механизм, возбуждающий и поддерживающий пульсацию звезд. Двигаясь вперед, волна давления превращается в слабую ударную волну, на фронте которой скачок плотности достигает значения $\frac{\rho_2}{\rho_1} \approx 2$ при числе Маха $M = \frac{D}{a_1} \approx 1,7$. За время около

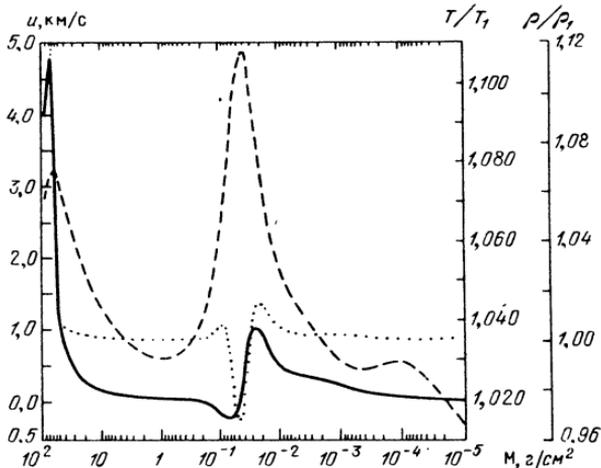


Рис. 57. Профили скорости (сплошная линия), температуры (штриховая) и плотности (пунктир) в волне давления, которая образуется в результате поглощения квантов, уходящих из-за фронта ударной волны спустя 100 с после начала движения поршня со скоростью $u_{\text{п}} = 4$ км/с. По горизонтали отложена лагранжева координата $m = \int \rho dr$, отсчитанная от "поверхности" звезды (R.J. Klein и др., 1978).

550 с волна выходит к внешней границе атмосферы звезды. За ее фронтом вещество ускоряется наружу, но в дальнейшем происходит его свободное падение в обратную сторону, благодаря чему и возникает аккреционная ударная волна.

На возможность ускорения акустической волны до сверхзвуковых скоростей, если только в результате сжатия вещества его поглощательная способность увеличивается и оно поглощает энергии больше чем излучает, указал ранее Скалафурис (A.J. Skala fur is, 1968).

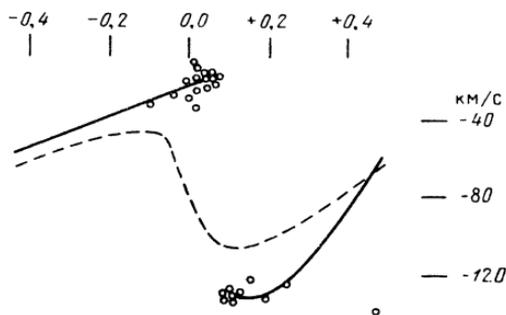
В заключение отметим, что в ряде публикаций (Н.Д. Костюк, С.Б. Пикельнер, 1974; А.Г. Косовичев, 1979; А.Г. Косовичев, М.А. Лившиц, Ю.П. Попов, 1980; М.А. Лившиц, О.Г. Бадалян, А.Г. Косовичев, М.М. Кацова, 1980; В.И. Sermulina, В.В. Somov, А.Р. Spector, S.I. Syrovatskii, 1980) обсуждался вопрос о воздействии на атмосферу частиц высоких энергий (прежде всего электронов), возникающих при солнечных вспышках. В процессе развития явления, как показали расчеты, образуется сложная система волн сжатия, ударных, тепловых и волн разрежения.

§ 27. Ударные волны в атмосферах пульсирующих звезд

В спектрах пульсирующих переменных звезд типа RR Лиры, W Девы, RV Тельца периодически наблюдается кратковременное расщепление линий. Явление это свидетельствует об одновременном присутствии в атмосфере звезды двух поглощающих (излучающих) слоев, движущихся с различными скоростями. Очевидно, что такие периодически повторяющиеся разрывы скоростей могут быть вызваны лишь движущейся в атмосфере звезды ударной волной.

Вот как, например, выглядят наблюдения звезды RR Лиры по данным Сенфорда (R.F. Sanford, 1949) и Престона (G.W. Preston, 1959). Практически в минимуме блеска резко смещаются в сторону коротких длин волн линии металлов. Через 10–15 минут раздваиваются линии H и K кальция,

Рис. 58. Разрыв кривой лучевых скоростей в спектре звезды RR Лир, наблюдаемый в линии H_{α} ; смещение линий металлов для той же фазы периода P показано штриховой линией.



еще через 10–15 минут наблюдается раздвоение линий серии Бальмера, а примерно через 70 минут от начала явления (что составляет 0,09 периода пульсации звезды) наступает расщепление линии H_{α} . Картина в целом хорошо объясняется движением через атмосферу звезды ударной волны (Н.А. Аbt, 1959).

Из этих наблюдений можно сделать вывод, что ударная волна образуется уже на уровне формирования линий металлов, однако скорость ее здесь еще невелика, вероятно, порядка 10 км/с. Относительное смещение фиолетовой и красной компонент линий поглощения на уровне H и K кальция равно $\Delta u_{\text{л}} = 76$ км/с, на уровне формирования линии H_{α} — $\Delta u_{\text{л}} = 112$ км/с (рис. 58).

Для перехода от лучевых скоростей к радиальным учитывается эффект потемнения диска к краю, так что $u_r = \frac{24}{17} u_{\text{л}}$. Скорость движения ударной

волны можно найти из закона сохранения массы $\rho_1 (D - u_{10}) = \rho_2 (D - u_{20})$, где u_{10} , u_{20} и D — соответственно скорости газа до и за фронтом и самого фронта по отношению к центру звезды. Если принять, что скорость движения газа вверх непосредственно за фронтом волны u_{20} равна скорости его падения вниз перед фронтом u_{10} , то в конечном итоге получим

$$D = \frac{24}{17} \frac{\Delta u_{\text{л}}}{2} \frac{1 + \eta_1}{1 - \eta_1}, \quad (27.1)$$

где $\eta_1 = \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{1}{4}$ в адиабатическом и $\eta_1 = 0$ в изотермическом случае.

Принимая $\eta_1 = \frac{1}{4}$, находим, что скорость движения ударной волны на уровне H и K кальция $D = 89$ км/с, а на уровне формирования линии H_{α} $D = 132$ км/с. Более вероятно, что за фронтом ударной волны, происходят процессы ионизации и высвечивания, так что скачок плотности достигает величины $\eta_1 = \frac{1}{10}$. Тогда скорость фронта волны на этих уровнях равна

соответственно 65 и 96 км/с. Зная среднюю скорость движения ударной волны между уровнями и запаздывание во времени эффекта расщепления спектральных линий, можно рассчитать и протяженность хромосферы звезды: расстояние порядка $4 \cdot 10^{10}$ см ударная волна проходит за время 400 с.

Особенности движения газодинамических разрывов в атмосферах звезд типа *W Девы* изучены несколько меньше. Расщепление линий в спектрах упомянутых типов звезд наблюдается около максимума блеска. Во время этой фазы одна из компонент указывает на расширение фотосферы со скоростью около 25 км/с. В это время еще существует длинноволновая компонента, соответствующая движению слоя вниз примерно с той же скоростью. Вскоре после максимума блеска длинноволновая компонента исчезает, коротковолновая же медленно передвигается вправо, занимая к очередному максимуму место первой.

Расщепление линий с амплитудой радиальных скоростей порядка 40 км/с наблюдается и у звезд типа *RV Тельца*. Не исключено, что слабые ударные волны формируются и в атмосферах классических цефеид (C.G. Davis, 1975).

Сам процесс образования ударной волны в пульсирующей атмосфере звезды типа *RR Лир* уже достаточно ясен (R.F. Christy, 1966). Известно, что амплитуда колебаний лагранжева слоя тем больше, чем ближе он расположен к поверхности звезды. Глубокие слои колеблются по синусоидальному закону, чего, однако, нельзя сказать о поверхностных слоях. Обозначим через *A* слой, начиная с которого деформация синусоиды становится заметной. Как показали расчеты, параметры газа в этом слое имеют порядок $\rho \approx 10^{-7}$ г/см³ и $T \approx 60\,000$ К. В момент все замедляющегося движения вниз слоя *A* на него при падении наталкивается вышележащий, более разреженный слой *B*. В результате происходит сжатие последнего, в нем образуется слабый ударный фронт. При падении еще более высокого слоя *C* на слой *B* ударный фронт передвигается вверх и т.д. В системе координат, связанной с центром звезды, ударный фронт в момент его формирования движется вниз, немногим позже останавливается, а потом начинает все ускоряющееся движение вверх по падающему вниз потоку. Такое движение ударной волны поддерживается пульсациями — расширением нижних, действующих как поршень более плотных слоев звезды.

Двигаясь по направлению от центра звезды, ударная волна увлекает за собой газ, составляющий атмосферу звезды. В нижних слоях атмосферы скорость волны значительно меньше параболической. Поэтому в движении каждого элемента газа можно отметить три существенных момента: толчок по направлению вверх при переходе через фронт ударной волны, достижение наивысшего положения относительно начального уровня атмосферы и все ускоряющееся падение на звезду до встречи с последующим ударным фронтом (Ch. Whitney, 1956). В самих внешних, ненаблюдаемых слоях атмосферы скорость волны, вероятно, превышает параболическую, что приводит к срыву этой части атмосферы звезды и ее рассеянию в пространстве.

Одной из важных задач газодинамики пульсирующих атмосфер, решение которой необходимо для правильной интерпретации спектральных наблюдений, является распределение плотности в атмосфере, устанавливающееся здесь под действием периодической ударной волны. В целом эта проблема относится к числу самосогласованных задач: скорость ударной волны здесь зависит от распределения плотности в среде, но, с другой стороны, последнее в определенной степени связано с величиной этой скорости. Задача трудно поддается исследованию даже при численном интегрировании уравнений газодинамики. Так как поток вещества перед фронтом волны нестационарен, то его характеристики — плотность и скорость движения — меняются в каждой точке со временем и поэтому $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} \neq 0$ и $\frac{\partial u_1}{\partial t} \neq 0$. К тому

же часть энергии ударной волны при ее движении в прозрачной атмосфере теряется на излучение.

Одна из первых оценок величины масштабной высоты H_{ef} в атмосфере пульсирующей звезды была дана Уитни (Ch. Whitney, 1956), который определил ее путем графического интегрирования уравнений движения, предполагая $g = \text{const}$ и $T_1 = \text{const}$. Предполагалось, что на уровне $h = 0$ имеется источник возмущения — поршень, движущийся по закону

$$u = u_0 e^{i\omega t}.$$

Расчет проведен методом характеристик для случаев $u_0 = \frac{1}{2} H_0 \omega$, $u_0 = H_0 \omega$

и $\omega = \frac{2a_1}{\sqrt{\gamma} H_0}$, $\frac{a_1}{\sqrt{\gamma} H_0}$. Здесь через H_0 обозначена масштабная высота стати-

ческой атмосферы. Было найдено, что

$$H_{ef} = H_0 \left[1 + 1,62 \left| \frac{u_0}{a_1} \right| \right]. \quad (27.2)$$

В случае звезды RR Лиры при $u_0 = 45$ км/с и изотермической скорости звука $a_s = \frac{a_1}{\sqrt{\gamma}} = 7,5$ км/с следует $H_{ef} \approx 8,5 H_0$. Но так как движение газа оказалось очень сложным, то численное решение прекращалось после нескольких колебаний поршня.

Более основательно эту задачу рассмотрел Хилл (S.J. Hill, 1972), решая методом конечных разностей систему уравнений газодинамики совместно с уравнением переноса в приближении Эддингтона. Было принято, что масса звезды типа RR Лиры $M_* = 0,58 M_\odot$, ее эффективная температура $T_{ef} = 6500$ К, абсолютная болометрическая звездная величина $M_{bol} = 0,82$. Поршень, движущийся по синусоидальному закону, располагался на оптической глубине $\tau = 4$. Поглощение и рассеяние учитывалось введением средней непрозрачности по Планку, протяженность атмосферы над поршнем в равновесном состоянии принята равной $21 H_0$. Удвоенная амплитуда колебаний поршня ($2r_A$) составляла около $6,2 \cdot 10^{10}$ см, период $\Pi = 4,3 \cdot 10^4$ с.

Этому соответствует амплитуда скорости $u_A = \omega r_A = \frac{2\pi}{\Pi} r_A \approx 50$ км/с.

Было установлено, что в результате пульсирующего движения формируется динамическая атмосфера, протяженность которой на момент наиминшего положения поршня в 20 раз больше, чем в случае статической атмосферы, т.е. $H_{ef} = 20 H_0$. На протяжении каждого периода формируется две ударные волны — при движении поршня вверх и его перемещении вниз. Траектории отдельных слоев атмосферы показаны на рис. 59, а соответствующая зависимость разности скоростей до и после фронта от высоты — на рис. 60. Как видно, несмотря на встречный поток ударная волна все же существенно ускоряется. На некоторой высоте, где благодаря прозрачности вещества движение становится изотермическим, фронт ударной волны движется с постоянной скоростью. В полном соответствии с наблюдениями получаются и разрывы кривой лучевых скоростей, хотя сброс вещества в межзвездное пространство в этом расчете не возникает.

Получены уже и приближенные аналитические решения задачи о распределении плотности в атмосфере пульсирующей звезды. Здесь подробнее остановимся на одном из них (И.А. Климишин, 1967). Так, можно предпо-

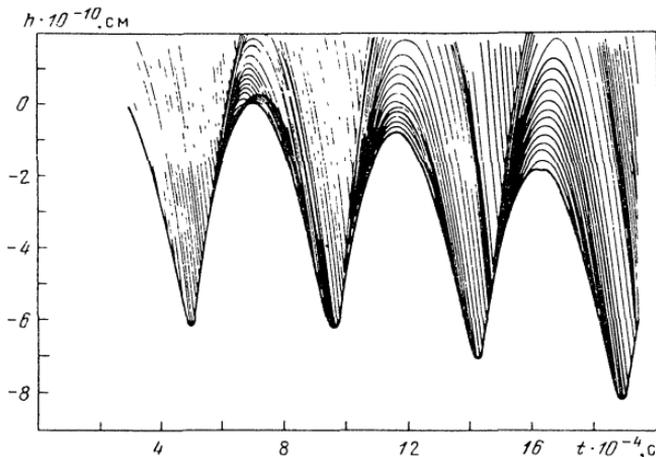


Рис. 59. Траектории отдельных слоев звездной атмосферы, ограниченные снизу поршнем, движущимся по синусоидальному закону, черными полосами отмечено положение ударных фронтов (S.J. Hill, 1972).

ложить, что в атмосфере установилось определенное динамическое равновесие, при котором

а) каждая последующая волна в данной точке атмосферы (по отношению к центру звезды) движется с той же скоростью, что и предыдущая (меньше параболической),

б) распределение параметров газа перед и за фронтом ударной волны тождественно повторяется, температура же газа постоянна вдоль всей атмосферы и не меняется при прохождении ударной волны (предполагается сильное высвечивание),

в) скорость движения газа u , давление p и плотность ρ для каждого фиксированного лагранжевого слоя являются линейными функциями времени (зубчатый профиль волны), т.е.

$$\left. \begin{aligned} p &= p_2 - \frac{p_2 - p_1}{\Pi} t, \quad u = u_2 - \frac{u_2 - u_1}{\Pi} t, \\ \rho &= \rho_2 - \frac{\rho_2 - \rho_1}{\Pi} t, \end{aligned} \right\} \quad (27.3)$$

где Π — период волны, индексами "1" и "2" обозначены параметры газа перед и за фронтом ударной волны,

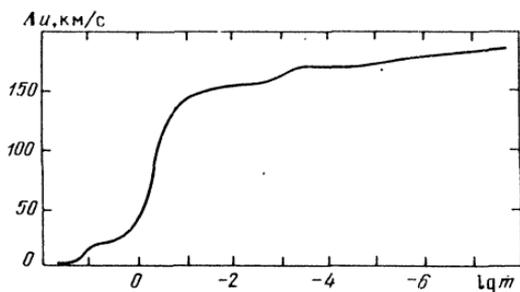


Рис. 60. Прирост скорости $\Delta u = u_2 - u_1$ при переходе газа через фронт ударной волны, соответствующий времени $t = (1,2 \div 1,6) \cdot 10^5$ с рис. 59; по горизонтали отложен логарифм лагранжевой координаты — массы на единицу площади (в $\text{г}/\text{см}^2$), отсчитанной от "поверхности" звезды (S.J. Hill, 1972).

г) средний поток массы через фиксированную поверхность равен нулю, т.е. элемент газа, проходящий через эту поверхность в нулевой момент времени вверх, возвращается в эту точку непосредственно перед прохождением последующей ударной волны,

д) начальная скорость движения газа вверх u_2 равна скорости его падения вниз непосредственно перед фронтом и практически равна скорости движения ударной волны в соответствии с условиями сохранения на фронте волны при $T_2 = T_1$, так как в данном случае

$$u_2 = D + \frac{a_s^2}{u_1 - D}, \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{(u_1 - D)^2}{a_s^2} \quad (27.4)$$

и $\rho = a_s^2 p$; это, впрочем, автоматически следует из условия г), т.е. из соотношения $\int_0^{\Pi} u dt = 0$,

е) энергия ударной волны теряется на торможение падающего вниз газа и на выполнение работы по перемещению его вверх (высвечивание учтено условием $T_2 = T_1$).

Основное уравнение для определения закона изменения плотности с высотой можно получить двумя путями: исходя из соображений теории диссипации ударных волн или же путем усреднения уравнений газодинамики по периоду Π ; результат при принятых выше предположениях получается один и тот же. Количество энергии ударной волны, которое может быть превращено в работу, запишем в виде

$$W(r) = \int_0^{\Pi} p' u' dt, \quad (27.5)$$

где r — лагранжева координата, p' и u' — давление и скорость движения в рассматриваемой точке. Подставляя (27.3) в (27.5) и принимая, согласно предположению е), $u_1 \approx -u_2$, находим

$$W(r) = \frac{\Pi}{6} (p_2 - p_1) u_2. \quad (27.6)$$

Работу по перемещению газа в поле тяжести представим как сумму двух слагаемых: первое учитывает энергию, теряемую на торможение газа, падающего вниз со скоростью u_1 , второе — кинетическую энергию того же элемента газа, движущегося вверх со скоростью u_2 . Тогда потери энергии ударной волны в расчете на единицу объема за период по порядку величины равны

$$A(r) \approx \frac{1}{2} \rho_1 (u_1^2 + u_2^2) \approx \rho_1 u_1^2 \approx \rho_1 D^2, \quad (27.7)$$

что соответствует изменению энергии ударной волны на единице длины при переходе от точки r до $r + dr$. Таким образом, дифференциальное уравнение, описывающее баланс энергии ударной волны, примет вид

$$\frac{dW(r)}{dr} = -A(r). \quad (27.8)$$

Учитывая, что промежуток Π между двумя прохождениями ударной волны является постоянным вдоль атмосферы звезды, и предполагая, что на расстоянии $h = r - r_0$ скорость ударной волны меняется незначительно,

причем $D \gg a_s$, приходим к следующему решению:

$$\rho_1(h) \approx \rho_{10} e^{-\frac{3h}{2\Pi D_0}}, \quad (27.9)$$

где ρ_{10} и D_0 — плотность и скорость волны на уровне $h = 0$ ($r = r_0$). Отсюда следует, что

$$H_{ef} \approx \frac{2}{3} \Pi D_0. \quad (27.10)$$

Значение плотности непосредственно за фронтом ударной волны находится из (27.4), так что

$$\rho_2(h) \approx \frac{4D^2}{a_s^2} \rho_1(h). \quad (27.11)$$

Исходя из сделанных выше предположений, можно положить, что период волны Π равен времени, за которое увлеченный ударной волной элемент газа, достигнув наибольшего отклонения от положения равновесия, возвращается в первоначальное положение:

$$\Pi = \frac{2u_2}{g} = \frac{2D_0}{g}. \quad (27.12)$$

Очевидно, что с уменьшением скорости ударной волны искомое решение должно приближаться к барометрической формуле, а $H_{ef} \rightarrow H_0$. Можно поэтому предположить, что коэффициент $4/3$, который появляется в решении после подстановки (27.12) в (27.10), является результатом сделанных выше довольно грубых предположений и поэтому должен быть отброшен. В итоге для эффективной масштабной высоты получаем (скорее поэтому полуэмпирическое, чем следующее из приведенных выше рассуждений) выражение

$$H_{ef} \approx \frac{D^2}{a_1^2} H_0, \quad (27.13)$$

где a_1 — адиабатическая скорость звука (ниже индекс "1" опускается).

Для атмосферы звезды RR Лиры при $D_0 = 45$ км/с и $a_1 \approx 9,7$ км/с находим, что $H_{ef} \approx 22 H_0$. А это по порядку величины неплохо согласуется с приведенными выше результатами Уитни и Хилла.

Более строгое решение в случае адиабатического движения получено в работе О.В. Федоровой (1978):

$$H_{ef} = H_0 \left\{ \frac{\gamma D \Pi g}{a^2} \left(\ln \frac{\frac{D}{a} + \frac{\gamma g \Pi}{2a}}{\frac{D}{a} - \frac{\gamma g \Pi}{2a}} \right)^{-1} \right\}. \quad (27.14)$$

Здесь скорость движения ударной волны D связана с периодом Π соотношением

$$\left(\frac{D}{a} + \frac{g \Pi}{2a} \right) \left(\frac{D}{a} - \frac{\gamma g \Pi}{2a} \right) = 1, \quad (27.15)$$

которое следует из законов сохранения массы, импульса и энергии при $u_1 = -u_2$ и $u_2 = \frac{g\Pi}{2}$. Атмосфере звезды типа RR Лиры соответствует $\frac{g\Pi}{2} = 20$,

так что $D = 16,7 a$ и $H_{ef} \approx 82 H_0$.

В той же работе О.В. Федоровой получены также решения задачи о протяженности атмосферы пульсирующей звезды для экспоненциального закона изменения давления со временем

$$p(t) = p_2 \exp \left[- \left(\ln \frac{p_2}{p_1} \right) \frac{t - t_0}{\Pi} \right], \quad (27.16)$$

а также случая, когда скорости u_1 и u_2 связаны соотношением $u_2 - u_1 = v$.

Была предложена (S.J. Hill, L.A. Willson, 1979) и такая приближенная формула:

$$H_{ef} = \frac{a_s^2 + \frac{1}{2} D^2}{g}. \quad (27.17)$$

Возможно, истинное значение величины H_{ef} находится между величинами (27.13) и (27.17).

Заметим, что так как ускорение силы тяжести с высотой уменьшается, то в верхних слоях пульсирующей звезды, по-видимому, выполняется нера-

венство $\Pi < \frac{2D}{g}$. — газ, увлеченный ударной волной, не успевает возвратиться в первоначальное положение к последующему прохождению волны. В итоге происходит (рис. 61) пульсирующее истечение вещества в межзвездное пространство (S.J. Hill, L.A. Willson, 1979). Простые соображения приводят к выводу, что высота однородной атмосферы при этом должна быть больше, чем это следует из (27.13).

В работе А.В. Тутукова и Ю.А. Фадеева (1981) показана принципиальная возможность формирования протяженной оболочки при установлении пульсационного движения в ней. При этом возникают условия для регулярного формирования здесь мощных ударных волн. Первоначальный радиус звезды был принят равным $50 R_\odot$, ее масса — $1 M_\odot$, светимость $3 \cdot 10^3 L_\odot$, масса оболочки $M_e \leq 0,05 M_\odot$. В состоянии равновесия радиус внутренней границы оболочки составлял 2,4% радиуса звезды. Роль малых возмущений, вызвавших переход из равновесного состояния к пульсациям, сыграл "вычислительный шум". После экспоненциального роста амплитуды пульсаций установилось стационарное пульсационное движение с периодом $\Pi = 29$ суток, важной особенностью которого является периодическое движение через оболочку мощной ударной волны. В итоге радиус оболочки

(слоя с оптической толщиной $\tau = \frac{2}{3}$) возрос до величины $R_e = 800 R_\odot$,

причем часть массовых зон при каждой пульсации получала скорость больше параболической и ускользала. Изменение положения отдельных массовых зон во времени показано на рис. 62. Как оказалось, в процессе движения газа одна ударная волна возникает при движении слоев по направлению к центру звезды; она как бы погружается в более глубокие слои и исчезает. Между тем в верхних слоях оболочки уже формируется вторая ударная волна, которая в момент максимального сжатия слоев движется к внешней границе оболочки. В итоге часть слоев получает скорость больше параболической, что приводит к потере массы около $10^{-5} M_\odot$ за цикл.

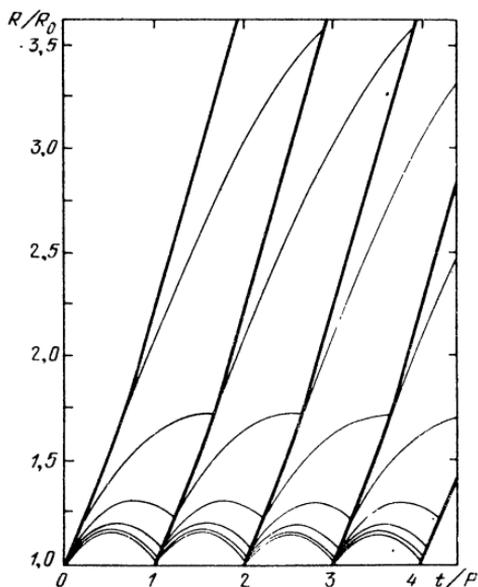
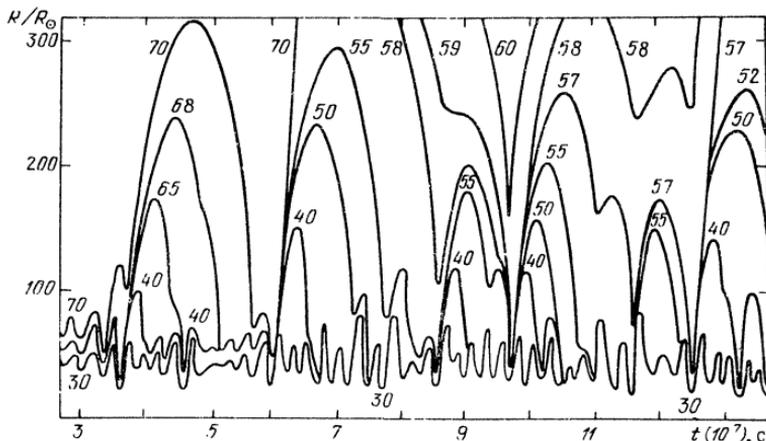


Рис. 61. Пульсирующее истечение вещества, возникающее при прохождении периодической ударной волны в атмосфере звезды с массой $M = 5 M_{\odot}$, период волны $P = 1,6 \cdot 10^7$ с (S.J. Hill, L.A. Willson, 1979).

Рис. 62. Изменение положения отдельных массовых зон в атмосфере звезды-гиганта при установлении в ней пульсационного движения (А.В. Тутуков, Ю.А. Фадеев, 1981).



В последние годы увеличилось число публикаций, в которых анализируются особенности движения ударных волн в атмосферах долгопериодических переменных звезд в связи с проблемой образования околозвездных оболочек (см., например, S.Slutz, 1976). Однако относительно величины скорости движения ударных волн в протяженных оболочках звезд типа Миры Кита нет единого мнения. Существует предположение (L.A. Willson, 1976), что с расстоянием эта скорость уменьшается по закону

$$D = 70 \left(\frac{10^{14}}{r} \right) \text{ км/с.}$$

По другим данным (P.R. Wood, 1979) величина скорости ударной волны вообще невелика, всего около 5 – 10 км/с, и поэтому главную роль в формировании потока вещества играет лучистое давление.

Анализ общих проблем динамики оболочек звезд поздних спектральных классов дан в работе А.В. Тутукова и Б.М. Шустова, 1979.

Здесь уместно также отметить влияние ударных движений волн в атмосферах звезд на показатели цвета пульсирующих переменных. Как известно, для определения радиусов этих звезд используется метод Весселинка: прирост радиуса ΔR , найденный по изменению визуальной величины звезды m_V при одном и том же показателе цвета (т.е. величина $\frac{\Delta R}{R} = -0,46 \Delta m_V$),

составляется с приростом ΔR , полученным в результате интегрирования кривой лучевых скоростей. Однако если в спектре пульсирующей переменной наблюдается расщепление линий (если в атмосфере звезды движется ударная волна), то величина найденного по методу Весселинка радиуса существенно зависит от фазы, для которой велось измерение. Это расхождение в результатах удается устранить, если учесть вклад в изменение блеска звезды излучения с фронта ударной волны, движущейся в ее атмосфере (Н.А. Аbt, 1959). Обозначим прирост видимой величины звезды за счет высвечивания ударной волны через ΔV , приросты цветов соответственно через $\Delta(U - B)$ и $\Delta(B - V)$. Если в атмосфере пульсирующей звезды ударные волны не возникают, то изменения цветов $U - B$ и $B - V$ рассчитываются теоретически. Задача теории заключается в том, чтобы показать, как связаны между собой приросты ΔV , $\Delta(U - B)$ и $\Delta(B - V)$. Зная два последних из наблюдений, можно найти прирост ΔV , исправить наблюдаемую величину амплитуды блеска звезды Δm_V и, в конечном итоге, определить ее радиус методом Весселинка.

Для расчета потока излучения с фронта ударной волны необходимы данные о структуре излучающей области за фронтом волны. Как было отмечено в § 10, строгое решение этой задачи еще предстоит получить. Из приближенных же оценок (Н.А. Аbt, 1959), В.И.Голинько (1970) следует, что избыток цвета $\Delta(B - V)$ при увеличении блеска звезды и росте силы ударной волны остается практически равным нулю. Величина ультрафиолетового избытка пропорциональна обусловленному ударной волной изменению звездной величины в желтых лучах ΔV

$$\Delta(U - B) \approx \Delta V. \quad (27.18)$$

Отмечено, что излучение высокотемпературной области из-за фронта ударной волны слабо влияет на горбы на кривых блеска в синих и желтых лучах. Их величина для слабой ударной волны определяется в основном волной сжатия, движущейся за ударным фронтом.

§ 28. Движение сильных ударных волн в звездах

Представление о том, что вспышки новых и сверхновых связаны с выходом на поверхность звезды сильной ударной волны, используется уже с 1946 г. При этом долгое время вопрос о том, как и где формируются ударные волны, оставался в стороне. Взрыв моделировался искусственным мгновенным выделением такого количества энергии в центральной части звезды, чтобы вещество вблизи ее поверхности ускорялось ударной волной до наблюдаемых скоростей. В принципе это оправдано, так как для степенного закона уменьшения плотности (а именно так можно приближенно представить строение внешних слоев звезды) распространение сильной ударной волны является автомодельным, не зависящим от начальных условий. Это и позволяло рассматривать выход ударной волны на поверхность, не вникая в детали ее формирования в глубоких недрах звезды.

В 1969 г. Спаркс (W.M. Sparks, 1969) исследовал динамику оболочки новой в предположении, что энергия вспышки освобождается медленно —

на протяжении нескольких часов, и эта идея оказалась весьма плодотворной. Пусть t_s — время прохождения звука через оболочку толщиной h , t_R — время диффузии радиации через эту оболочку, t_E — промежуток времени, на протяжении которого происходит освобождение энергии вспышки. Тогда если $t_E < t_s$, т.е. если время освобождения энергии в определенной области звезды меньше времени прохождения звука через эту область, то перенос энергии осуществляется ударной волной. Если же $t_s < t_E < t_R$ и если выделившаяся энергия больше потенциальной энергии оболочки, выброс ее вещества происходит за счет повышенного давления в подповерхностном слое звезды. Как будет отмечено ниже, именно этим путем лучше всего объясняются наблюдаемые характеристики сверхновых I типа.

Конкретные представления о природе, скажем, сверхновых звезд за последние годы существенно изменились. Так, в недалеком прошлом предполагалось, что сверхновые II типа — это горячие массивные звезды, оболочки которых находятся в лучистом равновесии, тогда как сверхновые I типа — красные сверхгиганты с протяженными конвективными оболочками. О нынешних взглядах на природу этих объектов речь идет ниже. Однако конкретные расчеты движения ударных волн в оболочках той или другой структуры, проведенные десять и двадцать лет назад, целиком сохраняют свое эвристическое значение и сегодня.

Большой цикл расчетов с целью изучения закономерностей движения ударных волн в политропных газовых шарах был проведен Д.К.Надежиным и Д.А.Франк-Каменецким (1964, 1965). На результатах этих работ мы и остановимся в первую очередь.

Для имитации центрального и периферического взрывов в расчетах задавались профили скоростей, как это показано на рис. 63. В первом случае газ первоначально движется к центру звезды, сжимается и нагревается. Вскоре близ самого центра образуется отраженная ударная волна, распространяющаяся к поверхности звезды. При имитации периферического взрыва происходит схлопывание газовых масс, в результате которого образуются две ударные волны, расходящиеся в разные стороны от места возмущения. Первая вскоре достигает поверхности звезды, вторая движется к центру, отражается от него и также двигается наружу. Зависимость скорости от лагранжевой координаты при центральном взрыве показана на рис. 64.

В момент прохождения ударной волны через определенный лагранжевый слой последний получает скорость $u(\xi) = \frac{2}{\gamma + 1} D(\xi)$. В том слое, где эта

скорость сравнивается с параболической, т.е. где $u(\xi_0) = u_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{r_{от}}}$,

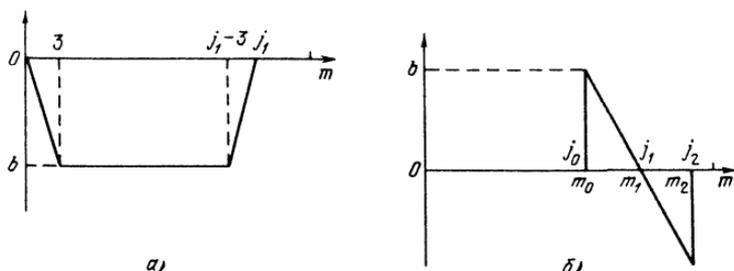


Рис. 63. Начальные профили скоростей (при $t = 0$) в случае центрального схлопывания (а) и схлопывания подповерхностных слоев (б).

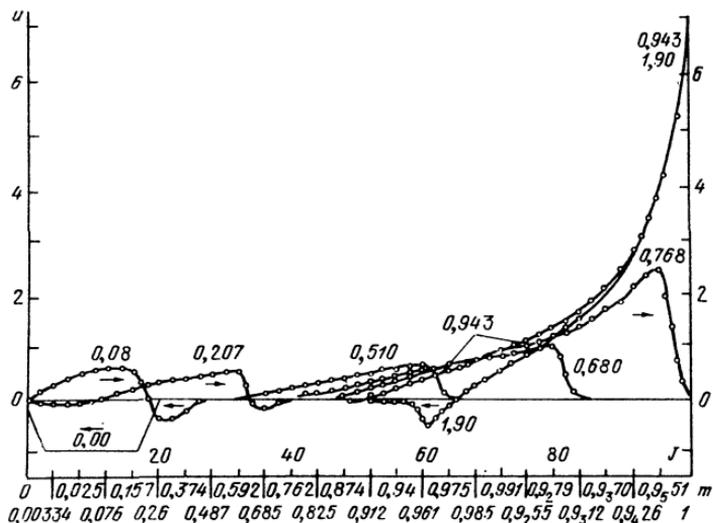


Рис. 64. Зависимость безразмерной скорости вещества от лагранжевой координаты для нескольких значений безразмерного времени при имитации центрального взрыва в политропе индекса $n=3$.

оболочка отрывается от звезды. Ее массу можно оценить по очевидной формуле

$$\Delta M_0 = \int_{M_{\text{отр}}}^{M_*} dM = 4\pi R_*^3 \int_{\xi_0}^1 \xi^2 \rho d\xi. \quad (28.1)$$

На самом деле масса отделившейся от звезды оболочки будет больше. Ведь возмущению подвергаются не только слои с $\xi \geq \xi_0$, но и более нижние. В движущейся же оболочке имеется градиент давления, который действует в направлении движения и поэтому препятствует ее торможению гравитационным полем звезды. И до тех пор, пока этот градиент давления в оболочке компенсирует действие гравитационной силы, движущиеся слои газа достигают такого расстояния от звезды, где их скорость становится больше местной параболической, и присоединяются к сброшенной оболочке, увеличивая ее массу. Расчет показывает, что для политропы индекса $n=3$ реальная масса сброшенной оболочки в 10–20 раз больше величины ΔM_0 , если возмущение слабое (при $\frac{\Delta M_0}{M_*} \sim 10^{-5}$). При $\frac{\Delta M_0}{M_*} \sim 0,1$ прирост массы относительно невелик.

Важными характеристиками сброшенной оболочки являются ее кинетическая энергия E_K , импульс P_K и средняя скорость \bar{u} , которые находятся из очевидных соотношений

$$E_K = \frac{1}{2} \int_{\xi_0}^1 u^2 dM = \frac{1}{2} \Delta M \bar{u}^2, \quad (28.2)$$

$$P_K = \int_{\xi_0}^1 u dM = \Delta M \bar{u}. \quad (28.3)$$

Как показали расчеты, средняя скорость начальной оболочки всего на 15% больше параболической для политропы $n=1,5$ и на 22% — при $n=3,25$.

Таблица 6. Важнейшие характеристики взрывного процесса в политропах индекса $n = 3$ и $n = 1,5$
(Д.К.Надёжин, Д.А.Франк-Каменецкий, 1964)

n	Подная энергия возмущения, E_{Π}	Кинетическая энергия оболочки, E_K	Доля выброшенной массы, ΔM	Скорость наружного края оболочки, u_J	Время выхода ударной волны на поверхность, t_B
3	1,66	0,79	1,00	23,3	0,32
	0,415	$4,86 \cdot 10^{-2}$	$4,62 \cdot 10^{-2}$	13,1	0,52
	$2,59 \cdot 10^{-2}$	$1,77 \cdot 10^{-4}$	$2,59 \cdot 10^{-4}$	4,72	1,01
	$1,04 \cdot 10^{-3}$	$5,28 \cdot 10^{-7}$	$1,17 \cdot 10^{-6}$	1,95	1,30
1,5	0,898	0,460	1,00	4,86	0,44
	0,201	$0,98 \cdot 10^{-2}$	$1,9 \cdot 10^{-2}$	2,79	0,64
	$6,58 \cdot 10^{-2}$	$2,88 \cdot 10^{-4}$	$7,85 \cdot 10^{-4}$	1,44	0,92

В целом, средняя скорость оболочки порядка параболической скорости на поверхности звезды. Если при этом энергия взрыва имела порядок гравитационной энергии звезды, то наступает полный разлет массы звезды. Но если энергия взрыва выделяется в подповерхностном слое, то разлет наступает лишь после отражения движущейся вглубь ударной волны от центра звезды.

Если же выделившаяся при взрыве энергия меньше гравитационной, то после выхода ударной волны на поверхность звезды основная масса начинает совершать затухающие колебания. Период пульсации звезды Π близок к тому, который следует из линейной теории пульсаций,

$$\Pi = C_1 \sqrt{\frac{R_*^3}{GM_*}} = C_1 \Pi_0, \quad (28.4)$$

где $C_1 = 2,1$ при $n = 3$ и $C_1 = 4,6$ при $n = 1,5$, причем

$$\Pi_0 = 0,01845 \sqrt{\frac{R^3}{M}} \text{ суток.}$$

В случае $R \approx 1$, $M \approx 3$, $n = 3$ имеем $\Pi \approx 0,55$ часа. Гидростатическое равновесие восстанавливается после 4 — 6 циклов колебаний. Радиус звезды после сброса оболочки не слишком отличается от первоначального.

Газ, находящийся на нижней границе оболочки и имеющий скорость меньше параболической, под действием силы тяжести тормозится и начинает обратное движение к центру звезды. При столкновении его с более глубокими слоями образуется ударный фронт, который медленно передвигается к границе расширяющейся оболочки. Поэтому фотосфера вспыхнувшей звезды интенсивно разогревается. Этот подогрев падающим веществом продолжается несколько дней.

Результаты расчетов движения ударных волн в политропных газовых шарах, проведенных Д.К.Надёжиным и Д.А.Франк-Каменецким (1964), приведены частично в табл. 6. Здесь E_{Π} — полная энергия, выделенная при взрыве, E_K — кинетическая энергия оболочки, ΔM — доля выброшенной массы, u_J — скорость наружного края оболочки, t_B — время выхода ударной волны на поверхность. Энергия, скорость и время даны в единицах

$$(\text{см. гл. 4}) : \mathcal{E}_0 = E_0 M M_{\odot} = 3,8 \cdot 10^{48} \frac{M^2}{R} \text{ эрг.}$$

$$u_0 = 4,37 \cdot 10^7 \sqrt{\frac{M}{R}} \text{ см/с} \quad \text{и} \quad t_0 = 1,59 \cdot 10^3 \sqrt{\frac{R^3}{M}} \text{ с.}$$

За наружный край оболочки принят слой, выше которого находится $9 \cdot 10^{-6}$ и $2,5 \cdot 10^{-9}$ от всей массы звезды соответственно для $n = 1,5$ и $n = 3$. Вот некоторые выводы, следующие из этой таблицы:

1) Скорость движения наружного слоя u_j для звезды с конвективной оболочкой примерно в четыре раза меньше, чем для звезды с лучистой оболочкой.

2) Эта скорость даже в случае полного разлета звезды, когда энергия взрыва порядка гравитационной энергии звезды, всего в 16,5 раза больше параболической u_n для $n = 3$ и в 3,5 раза больше u_n при $n = 1,5$. Это соответствует скоростям порядка 7000 и 1500 км/с.

3) Кинетическая энергия оболочки имеет одинаковый порядок с полной энергией, выделившейся при взрыве, если энергия взрыва типична для сверхновых. В случае взрывов меньшей силы в кинетическую энергию оболочки превращается всего около 1% энергии, выделенной при центральном взрыве, остальная энергия идет на нагрев основной массы звезды.

Вывод о различии в скоростях движения лучистой и конвективной оболочек после срыва следует и непосредственно из формулы (19.7). Как было отмечено в § 5, для каждого безразмерного расстояния от центра звезды

$\xi = \frac{r}{R_*}$ можно ввести величину $\bar{m} = \frac{d \ln \rho_1}{d \ln \xi}$, которая имеет одинаковое значение

для всех звезд, построенных по одному и тому же закону (политроп одного индекса). Для лучистой оболочки \bar{m} почти вдвое больше, чем для конвективной. Поэтому соответственно и градиент скорости движения ударной волны в лучистой оболочке больше, чем в конвективной. Формулами (5.4) — (5.7) можно пользоваться, начиная примерно с $\xi \geq 0,3$. Подставляя их в соотношение (19.7), находим соответственно законы изменения скорости сильной ударной волны в лучистой и конвективной оболочках

$$\left. \begin{aligned} D_{\text{луч}} &= \frac{\text{const}}{\xi^{3/5} \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right)^{13/20}}, \\ D_{\text{конв}} &= \frac{\text{const}}{\xi^{3/5} \left(\frac{1}{\xi} - 1 \right)^{3/10}}. \end{aligned} \right\} \quad (28.5)$$

Результаты расчетов по этим формулам приведены на рис. 65. Как видно, если на глубине $\xi = \frac{r}{R_*} = 0,3$ возникла сильная сферическая ударная

волна, то при ее движении в лучистой оболочке на расстоянии от $r = 0,3 R_*$ до $0,6 R_*$ она ускоряется почти в полтора раза, при $\xi = 0,95$ ее скорость почти в 6 раз больше первоначальной. В результате дальнейшего расширения расстояние между каждыми соседними сферическими слоями (их ско-

рости $u = \frac{3}{4} D$) будет быстро возрастать. Такая оболочка должна быстро рассеяться в межзвездном пространстве. В конвективной же оболочке скорость движения ударной волны остается практически постоянной почти вдоль всей оболочки за исключением самых ее наружных слоев ($r \geq 0,9 R_*$), где скорость волны всего в 1,3 — 1,6 раза больше начальной. Очевидно, что такая оболочка и после срыва долго будет оставаться относительно компактным образованием.

В целом даже при вспышках типа сверхновой скорости движения наружных слоев звезды относительно невелики. И все же при определенном соотношении между параметрами звезды некоторая часть вещества оболочки может приобрести скорости, близкие к скорости света. Обозначим массу вещества, получившую скорость больше qc , через m_q , место отрыва от звезды через ξ_q . Тогда $m_q = 4\pi R_*^3 \int_{\xi_q}^1 \rho d\xi$. Распределение плотности в поли-

тропной оболочке при $\xi \approx 1$ задается выражением 5.8, скорость движения газа за фронтом волны при $\xi \approx 1$ изменяется пропорционально $u = \frac{\text{const}}{(1-\xi)^b}$, где $b = 0,695$, если $\gamma = \frac{5}{3}$ и $n = 3,25$ (см. § 14). После элементарного интегрирования находим, сравнивая величины m_q и ΔM ,

$$m_q = \Delta M \left(\frac{u_n}{qc} \right)^{\frac{n+1}{b}} \quad (28.6)$$

Решение (4.12) верно для нерелятивистского случая, поэтому величина q не может быть больше 0,5. Принимая $\Delta M \approx M_* \approx 30 M_\odot$, $u_n \approx 1000$ км/с, находим (Д.К.Надёжин, Д.А.Франк-Каменецкий, 1964), что $m_q \approx 2,6 \cdot 10^{-12} M_\odot$, т.е. что скорость, большую $\frac{1}{2}c$, получает лишь ничтожная доля массы звезды.

Большой выход релятивистских частиц может быть получен при вспышке сверхновой лишь при условии, что радиус звезды существенно меньше солнечного (S.A.Colgate, R.H.White, 1966; Л.Н.Иванова, В.С.Имшенник, Д.К.Надёжин, 1969; Э.К.Грасберг, В.С.Имшенник, Д.К.Надёжин, 1971). При этом, однако, теоретическая кривая блеска сверхновой не согласуется с наблюдаемой.

В уже упоминавшейся работе Спаркса было принято, что в недрах звезды (политропы индекса $n = 3$) с параметрами $M = 1$, $R_* = 2 \cdot 10^{10}$ см, $T_{ef} = 29\,500$ К освобождение энергии вспышки происходит на протяжении 1 – 24 часов. Как оказалось, в результате повышенного давления на глубине $r \approx 0,5 R_*$ оболочка звезды сгребается в тонкий слой, движущийся в межзвездное пространство как целое практически без градиента скорости (рис. 66). Далее. В случае срыва оболочки ударной волной скорость веще-

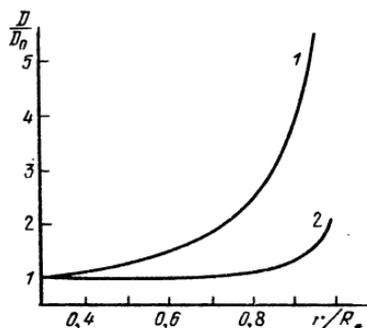


Рис. 65. Изменение скорости ударной волны при ее движении в лучистой (1) и конвективной (2) оболочке.

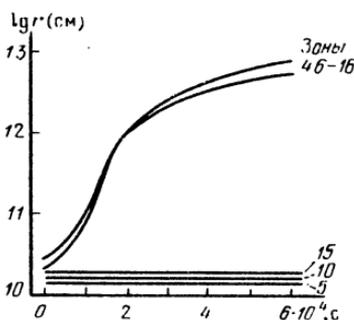
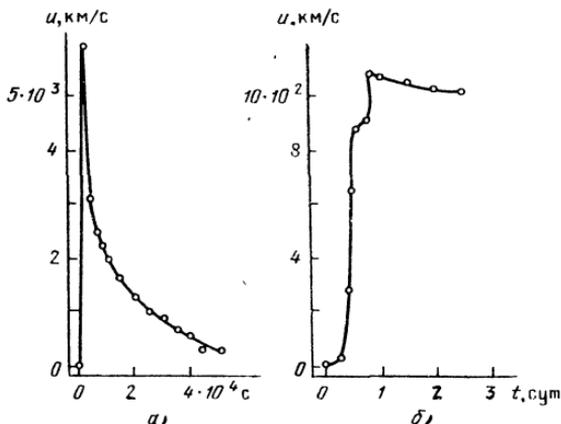


Рис. 66. Движение оболочки звезды, сброшенной в результате медленного выделения энергии новой звезды на глубине $r \approx 0,5 R_*$ (W.M. Sparks, 1969).

Рис. 67. Скорость движения фотосферы новой звезды (слой с оптической глубиной $\tau = 2/3$: а) при срыве оболочки ударной волной, б) при медленном (на протяжении примерно суток) выделении энергии вспышки в недрах звезды (W.M. Sparks, 1969).



ства "фотосферы", оптическая глубина которой в непрерывном спектре $\tau = 2/3$, со временем существенно уменьшается. Если же срыв оболочки обусловлен нарастанием давления в недрах звезды, то скорость движения фотосферного слоя после достижения своего наибольшего значения остается практически неизменной (рис. 67).

Посмотрим теперь, какое место занимает теория ударных волн в современных представлениях о механизме вспышек сверхновых, основываясь на обзоре В.С.Имшенника и Д.К.Надёжина (1980а). Расчеты показывают, что если масса образовавшегося в процессе эволюции углеродно-кислородного ядра звезды $M_{\text{C}O}$ больше $1,44 M_{\odot}$, то, завершив ядерную эволюцию образованием в центральной области железного ядра с массой $M_{\text{Fe}} \geq 1 M_{\odot}$, звезда на диаграмме температура—плотность попадает в так называемый "овраг неустойчивости", где показатель адиабаты $\gamma < 4/3$. В итоге происходит развал ядер железа и рождение электронно-позитронных пар; при этом показатель изэнтропии γ становится меньше величины $\gamma_{\text{кр}} = 4/3$. Следствием этого является "беззвучный" коллапс с образованием нейтронной звезды или черной дыры. Никакого заметного (сравнимого по энергии со вспышкой сверхновой) выброса внешней оболочки звезды при $M_{\text{C}O} > 1,44 M_{\odot}$ не происходит. Расчет показывает (D.K.Nadyozhin, 1977), что в процессе гравитационного коллапса образуется сильная ударная волна, которая быстро затухает, растратив свою энергию на излучение нейтрино в процессе столкновения с падающими к центру наружными слоями звезды (рис. 68).

Расчет показывает также (Д.К.Надёжин, 1979), что в принципе, если только при коллапсе $\gamma < 4/3$, может произойти отрыв оболочки, масса и энергия которых по порядку величины соответствуют вспышкам новых звезд, но световое излучение в этом случае должно сильно отличаться от типичной кривой блеска новой. Так, при относительной доле потерянной на излучение нейтрино массы $q = 0,1$ из (5.28) при $n = 0$, $M_0 = 10 M_{\odot}$ и $R_* = 1000 R_{\odot}$ следует, что масса оболочки может достигать $10 - 30 M_{\odot}$, а ее средняя скорость расширения $\bar{u} = 24 \text{ км/с}$.

Термоядерный взрыв типа сверхновой с выбросом оболочки возможен, если масса углеродно-кислородного ядра $M_{\text{C}O} < 1,44 M_{\odot}$. В данном случае соотношение между скоростью термоядерного энерговыделения $\epsilon_{\text{СС}}$ и скоростью нейтринных потерь энергии $\epsilon_{\nu\bar{\nu}}$ таково, что начавшееся горение углерода происходит с нарушением гидростатического равновесия и приобретает характер теплового взрыва. По-видимому, вспышка сверхновой

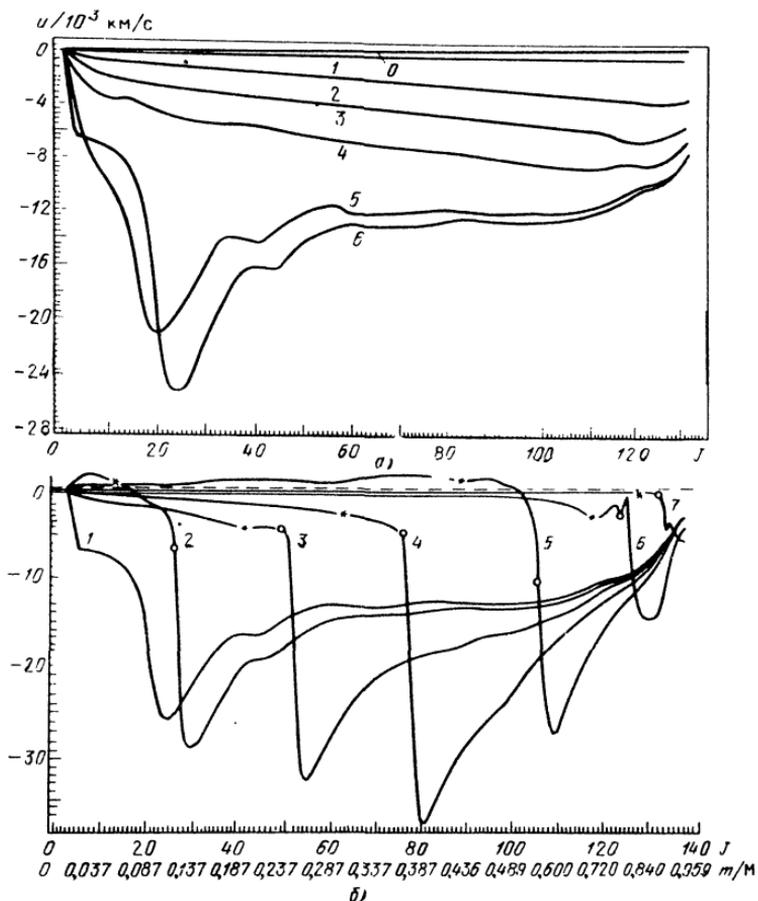


Рис. 68. Распределение скорости по лагранжевой координате внутри коллапсирующей железно-кислородной звезды с массой $M = 2 M_{\odot}$: а) на прозрачной и б) на непрозрачной стадии коллапса. Момент $t = 0$ соответствует оптической нейтринной толще $\tau_{\nu\bar{\nu}} = 0,001$. Цифры у кривых соответствуют следующим моментам времени: а) 0 (-15 с), 1 (-0,625 с), 2 (-0,0627 с), 3 (-0,0189 с), 4 (-0,00522 с), 5 (0,00134 с) и 6 (0,00191 с), б) 1 (0,00191 с), 2 (0,00248 с), 3 (0,00428 с), 4 (0,00648 с), 5 (0,0106 с), 6 (0,0368 с), 7 (0,125 с). Кружком обозначена граница нейтринно-непрозрачного ядра звезды, звездочка — положение нейтринной фотосферы. Вдоль горизонтальной оси указана связь между номером счетного интервала J и относительной массой m/M .

II типа и связана с полным разлетом CO-ядер звезд, у которых масса ядра $M_{CO} < 1,44 M_{\odot}$ и центральная плотность $\rho_c \leq 9 \cdot 10^9 \text{ г/см}^3$. Никакого гравитационно связанного остатка при этом не остается. Профили скоростей вещества в случае полного разлета звезды показаны на рис. 69 (В.С. Имшенник, Д.К. Надёжин, 1980б). Здесь принято $\rho_c = 5,03 \cdot 10^9 \text{ г/см}^3$, кинетическая энергия вещества $E_k = 1,8 \cdot 10^{51}$ эрг. Горение углерода происходит в пульсационном режиме и в самом конце приобретает характер детонации. Поэтому вслед за слабыми пульсациями (моменты 1–5) происходит сильное расширение (моменты 6–7), а затем новое сжатие (8–9), которое и заканчивается образованием мощной ударной волны и полным разлетом звезды (моменты 10–12).

При вспышке сверхновой I типа ядро с массой $M = 1,4 M_{\odot}$, близкой к чандрасекаровскому пределу для углеродно-кислородной звезды, и плотностью $\rho_c > 9 \cdot 10^9 \text{ г/см}^3$ сжимается, образуя нейтронную звезду. Этому коллапсу соответствует выброс оболочки с массой $M_e \leq 0,1 M_{\odot}$ и энергией около $(1-5) \cdot 10^{49}$ эрг. Соответствующие этому профили скоростей показаны на рис. 70. Положительные скорости внешних слоев СО-ядра звезды (моменты 6 - 10) возникают благодаря детонации, обусловленной нейтринным нагревом (В.С.Имшенник, Д.К.Надёжин, 1980б). Основная энергия вспышки сверхновой выделяется в последнее время, возможно, за счет мощного магнито-дипольного излучения образовавшегося пульсара.

В первом случае (при $\rho_c < 9 \cdot 10^9 \text{ г/см}^3$) СО-ядро звезды окружено протяженной и массивной водородно-гелиевой оболочкой. Во втором (при $\rho_c > 9 \cdot 10^9 \text{ г/см}^3$) звезда, являясь компонентой двойной системы, вообще лишена оболочки.

Здесь уместно напомнить некоторые наблюдательные данные. Как известно, максимальная фотографическая светимость сверхновых I типа $L_{pg}^{\max} = 7 \cdot 10^{42}$ эрг/с ($M_{pg} = -20^m$), II типа - $L_{pg}^{\max} = 2 \cdot 10^{42}$ эрг/с ($M_{pg} = -18^m, 5$). В спектрах сверхновых II типа наблюдаются яркие линии водорода, доплеровские фиолетовые смещения и уширение которых свидетельствуют о движении вещества со скоростями порядка 10^9 см/с . В спектрах сверхновых I типа имеются широкие линии поглощения ионизованных металлов и гелия, тогда как линии водорода отсутствуют (Э.Р.Мустель, 1974).

Как оказалось, интерпретация кривых блеска и особенностей спектров сверхновых наилучшим образом возможна в рамках следующих предположений. Если радиус звезды $R_* = (1 \div 10) R_{\odot}$, то после мгновенного взрыва

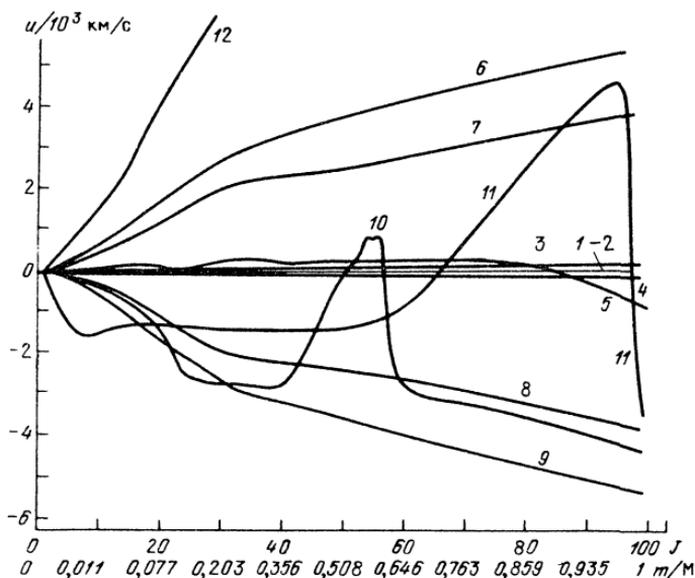


Рис. 69. Распределение скорости по лагранжевой координате в процессе углеродной вспышки, заканчивающейся полным разлетом звезды. Цифры у кривых соответствуют следующим моментам времени: 1 - $6,5 \cdot 10^{-3}$ с, 2 - 4,96 с, 3 - 9,88 с, 4 - 11,27 с, 5 - 12,26 с, 6 - 13,35 с, 7 - 15,90 с, 8 - 16,46 с, 9 - 19,01 с, 10 - 19,68 с, 11 - 19,75 с, 12 - 21,27 с.

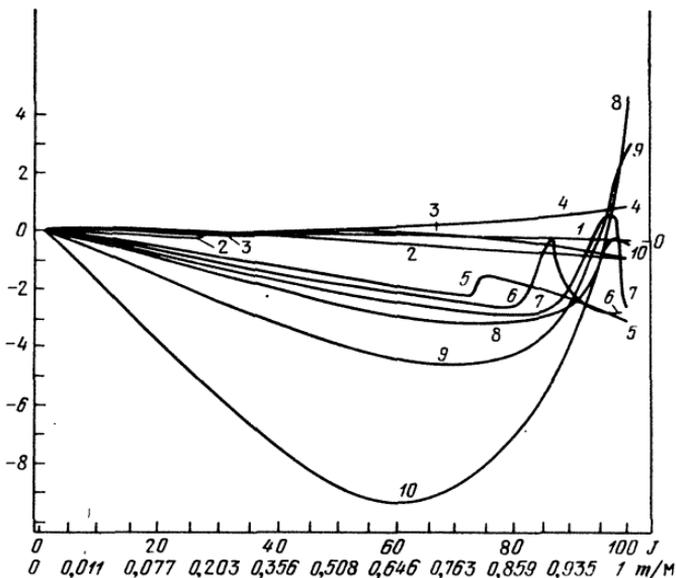
$u/10^3, \text{ км/с}$ 

Рис. 70. Распределение скорости по лагранжевой координате в различные моменты времени для коллапсирующего углеродно-кислородного ядра звезды в следующие моменты времени: 1 — 0,109 с, 2 — 3,162 с, 3 — 3,192 с, 4 — 3,256 с, 5 — 3,549 с, 6 — 3,560 с, 7 — 3,568 с, 8 — 3,576 с, 9 — 3,593 с, 10 — 3,603 с.

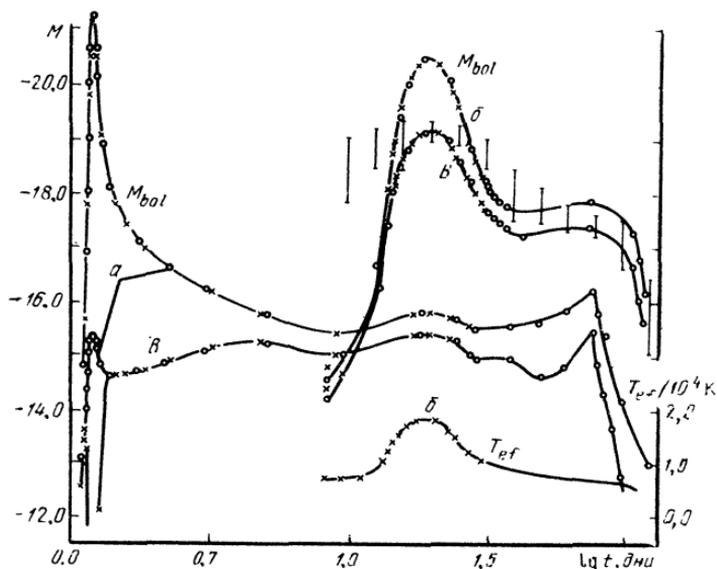


Рис. 71. Болومترические и B -кривые блеска сверхновой II типа, полученные в результате расчета взрыва звезды с массой $M = 17 M_{\odot}$: a — "желтый" гигант, b — "красный" сверхгигант; для варианта b указана эффективная температура.

возникает максимум блеска продолжительностью всего несколько десятков минут, что соответствует выходу фронта ударной волны на поверхность звезды. Далее светимость звезды быстро уменьшается из-за расширения и адиабатического охлаждения вещества ее оболочки. Существование же последующего, протяженностью до 100 суток, пологого участка (плато) кривой блеска со светимостью на 2–3 порядка меньше, чем в максимуме, обусловлено движением внутрь разлетающейся оболочки волны охлаждения. В целом же особенности кривой блеска сверхновых II типа объясняются движением ударных, тепловых и волн охлаждения в протяженной ($R_* = (10^3 \div 10^4) R_\odot$) оболочке звезды-сверхгиганта. Именно в этом случае при мгновенном (взрывном) выделении энергии светимость сверхновой II типа будет иметь максимальное значение ($L_{\max} \approx 10^{4.3}$ эрг/с) на протяжении нескольких десятков дней.

Итак, первоначальный подъем к максимуму блеска у сверхновой II типа связан с прогревом атмосферы звезды-гиганта ударной и распространяющейся впереди нее тепловой волнами. Благодаря этому происходит перенос энергии взрыва от внутренних слоев звезды к наружным, частичное превращение этой энергии в излучение. Максимум блеска достигается тогда, когда потери энергии на излучение начинают преобладать над скоростью диссипации энергии взрыва в тепло. Скорость движения ударной волны в оболочке — около 5000 км/с. Плато на кривой блеска (если светимость звезды в этой фазе блеска не превышает $10^{4.1}$ эрг/с) объясняется движением в оболочке сверхновой волны охлаждения (см. § 29). Резкое уменьшение блеска после фазы "плато" связано, по-видимому, с просвечиванием наружных слоев оболочки сверхновой, т.е. с уменьшением радиуса фотосферы. Изменение характеристик сверхновой показано на рис. 71 (В.С.Имшенник, В.П.Утробин, 1977). "Хвост" на заключительной фазе свечения обусловлен активностью остатка (нейтронной звезды, если она образуется), выделением энергии в результате распада радиоактивного изотопа $^{56}_{28}\text{Ni}$ или же распространением волны охлаждения до центра звезды.

Явление вспышки сверхновой I типа происходит, по-видимому, в два этапа (В.С.Имшенник, Д.К.Надежин, В.П.Утробин, 1979). Прежде всего во внешних слоях звезды типа белого карлика, радиус которого $R_* \approx 10^{-2} R_\odot$ происходит мгновенный взрыв, в результате которого верхние слои звезды с массой около $(0,001 \div 0,1) M_\odot$ разлетаются со скоростью, близкой к параболической, $u_p \approx 10^9$ см/с. Этим объясняется наблюдаемый градиент скорости и линейчатый спектр звезды. Далее происходит медленное, на протяжении 2–20 дней, выделение энергии с мощностью $L \approx 10^{4.4}$ эрг/с, возможно, посредством магнито-ротационного механизма (Г.С.Бисноватый-Коган, 1970). При этом основная оболочка с массой около $0,5 M_\odot$, сгребаясь в тонкий сферический слой, выталкивается в окружающее пространство. Высвечивание оболочки и обеспечивает многодневный максимум ("купол") на кривой блеска и непрерывный спектр. Движущаяся оболочка догоняет сорванное ранее вещество, при этом образуется ударная волна, и высвечивание с ее фронта замедляет процессы рекомбинации в оболочке.

Излом на кривой блеска сверхновой I типа соответствует моменту, когда оптическая толщина оболочки по отношению к томсоновскому рассеянию становится порядка 1. Далее происходит высвечивание внутренних слоев, окружающих нейтронную звезду. Как показали расчеты (В.П.Утробин, 1977, 1978), величина массы оболочки M_e возрастает с увеличением скорости выделения энергии вспышки L_e . В свою очередь при увеличении массы сброшенной оболочки M_e светимость в максимуме блеска, эффективная температура, радиус фотосферы и скорость оболочки на этот мо-

мент уменьшаются, тогда как ширина купола увеличивается. Примечательно, что несмотря на изменение в широких пределах параметров моделей и способов выделения энергии, между этими параметрами с большой точностью существует связь $\frac{M_e u^5}{\kappa L_e^2} = \text{const} = 1,3 \cdot 10^4$, где κ — непрозрач-

ность, причем численное значение константы соответствует случаю, когда M_e выражено в M_\odot , u в 10^8 км/с, L_e в 10^{44} эрг/с, а κ в $\text{см}^2/\text{г}$.

Роль вращения звезды в формировании полярных конденсаций при взрыве типа новой и сверхновой и распространение ударной волны во вращающейся звезде рассматривалось ранее А.А.Румянцевым (1972 б).

Продолжает оставаться актуальной проблема ускорения космических лучей в оболочках новых и сверхновых звезд (Е.Т.Sarris, 1975), а также синтеза легких химических элементов на фронте сильной ударной волны, движущейся во внешних слоях звезды (S. A. Colgate, 1974, R. I. Epstein, W.D. Arnett, D.N. Schramm, 1976).

Оболочка, сброшенная при вспышке сверхновой, движется в межзвездное пространство. Предполагая степенную аппроксимацию распределения плотности в оболочке, Д.К.Надёжин (1981) получил автомодельное решение для сферически симметричного случая. При этом оказалось, что движение обрاملено двумя ударными волнами. Во внутренней ударной волне вещество звезды сжимается и тормозится. Вторая, «нешняя» ударная волна распространяется по околозвездному газу впереди расширяющейся оболочки (см. также R.A.Chevalier, 1974, 1976; B.Gaffet, 1978). Возникновение ударной волны при взаимодействии главной и околозвездной оболочек в случае новых звезд рассмотрено в работе О.В.Федоровой (1974).

Ряд проблем, относящихся к особенностям движения ударных волн в газовых потоках в двойных системах, проанализирован в книге В.Г.Горбачко (1974).

В заключение отметим, что хотя уже имеется несколько десятков серьезных исследований закономерностей движения релятивистских ударных волн во внешних слоях оболочек компактных звезд, подробное изложение их результатов, по-видимому, следует считать еще преждевременным. При всех несомненных успехах в решении отдельных задач релятивистской газодинамики общее состояние вопроса скорее напоминает ситуацию, сложившуюся в классической газодинамике в начале 60-х годов.

Как и в классической газодинамике, при решении записанных в форме Лагранжа уравнений релятивистской газодинамики методом конечных разностей для учета возможного возникновения ударных волн и исследования закономерностей их движения вводится фиктивная вязкость (М.М.Май, Р.Н. White, 1967). Разработана разностная схема численного решения уравнений релятивистской газодинамики методом характеристик (С.Р.Мс Кеэ, S.A.Colgate, 1973). При изучении выхода плоской релятивистской ударной волны на поверхность неоднородной среды с заданным степенным распределением плотности удается свести задачу к автомодельной (G.D. Ray, 1979, G.D. Ray, G. Sanaul, 1981). При изучении осесимметричного движения газа за фронтом релятивистской ударной волны, движущейся в атмосфере с экспоненциальным распределением плотности, использован метод разложения в ряд по параметру (см. § 18).

Конкретное решение задачи о движении релятивистской ударной волны при вспышке сверхновой I типа (звезда — лишенный оболочки белый карлик) получено Колгейтом (S.A.Colgate, 1975). Краткий обзор результатов других исследований, представляющих астрофизический интерес, можно найти в работе Шапиро (P.R.Shapiro, 1979), где изложены также расчеты

движения релятивистской ударной волны в однородной среде и дано обобщение решения А.С.Компанейца (§ 14) на случай экспоненциальной атмосферы. Исследование структуры релятивистской ударной волны, движущейся в идеальном газе, проведено путем численного решения уравнения Больцмана (G.E.Chapline, T.A. Weaver, 1979).

§ 29. Волны охлаждения в оболочках звезд

Анализ процессов, происходящих в расширяющейся оболочке сверхновой II типа, приводит к выводу, что спустя несколько суток после срыва от ее внешней границы в глубь начинает двигаться волна охлаждения. Существование такой волны на протяжении нескольких десятков дней и обеспечивает, по-видимому, постоянство блеска сверхновой на этой стадии развития явления.

Волны охлаждения, возникающие при сильных взрывах в земной атмосфере, были обнаружены и исследованы в работах Я.Б.Зельдовича, А.С.Компанейца и Ю.П.Райзера (1958). Сущность же самого явления заключается в следующем. В нагретом шаре радиуса порядка сотен метров, образовавшемся после взрыва, температура изменяется от нескольких сотен тысяч кельвинов вблизи центра до нескольких тысяч кельвинов (и еще ниже) на периферии. В связи с этим от центра к краю резко изменяется (возрастает) средняя длина свободного пробега излучения. На бесконечность из нагретого объема уходят лишь кванты, рожденные в некотором шаровом слое толщиной около 10 м, где длина свободного пробега порядка расстояния, на котором температура заметно меняется. Температура этого слоя (в земных условиях она равна 10 000 К) T_2 называется температурой прозрачности.

Развитие волны охлаждения происходит следующим образом. В начальный момент времени t_0 распределение температуры вдоль лагранжевой координаты является плавным (рис. 72). Но из слоя, где $T = T_2$, кванты уходят на бесконечность и охлаждают его, поэтому образуется "выемка", которая в дальнейшем превращается в температурный уступ, движущийся по направлению к центру шара. Одновременно в результате расширения шара происходит его общее охлаждение (температура падает во всех лагранжевых координатах).

Особенностью волн охлаждения в земной атмосфере является то, что процесс охлаждения воздуха протекает при постоянном давлении, тогда как плотность ρ увеличивается пропорционально $1/T$. Скорость $u_{в.о.}$ движения волны охлаждения, которую можно рассматривать как разрыв, следует из закона сохранения энергии. Так, если F — поток излучения с фронта, ρ_1 — начальная плотность нагретого воздуха в момент подхода волны, ω_1 и ω_2 — тепловая функция газа (в расчете на единицу массы) до и после его прохождения через фронт, то

$$F = \rho_1 u_{в.о.} (\omega_1 - \omega_2). \quad (29.1)$$

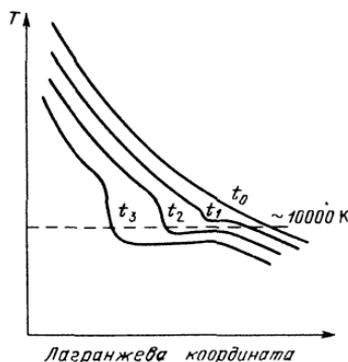


Рис. 72. Возникновение и распространение волны охлаждения в разлетающемся и адиабатически охлаждающемся воздухе, $t_0 < t_1 < t_2 < t_3$.

Поэтому при $\omega_2 \ll \omega_1$

$$u_{в.о} = \frac{(\gamma - 1)F}{\gamma \rho_1} \left(1 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \approx \frac{(\gamma - 1)F}{\gamma \rho_1}, \quad (29.2)$$

где γ — эффективный показатель адиабаты.

В свою очередь величина потока излучения с фронта волны охлаждения определяется температурой слоя, разграничивающего непрозрачную (на рис. 72 слева) и прозрачную (справа) области, и приближенно равна

$$F = 2\sigma T_2^4. \quad (29.3)$$

В условиях земной атмосферы $T_2 \approx 10\,000$ К и при $\rho_1 = 1$ атм $u_{в.о} \approx 1$ км/с. Расчет показывает также, что геометрическая толщина волны составляет всего несколько метров. Эффективная оптическая толщина волны определяется ее амплитудой, так что

$$\tau_k \approx \frac{8}{3} \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^4. \quad (29.4)$$

Излагаемые ниже свойства волн охлаждения, движущихся в оболочках сверхновых, подробно исследованы в работах Э.К. Грасберга, В.С. Имшенника, Д.К. Надёжина (1971) и Э.К. Грасберга, Д.К. Надёжина (1976). Первоначально при этом принимались во внимание лишь процессы рекомбинации водорода, в связи с чем волна была названа рекомбинационной. В дальнейшем, однако, было установлено, что в оболочке сверхновой может существовать волна охлаждения, в которой высвечивается в основном не энергия ионизации, а тепловая энергия равновесного излучения.

Общая картина развития волны охлаждения в оболочке сверхновой выглядит следующим образом. Непосредственно после прохождения ударной волны через оболочку температура в ней достигает сотен тысяч и миллионов кельвинов. В дальнейшем в результате свободного разлета и расширения происходит охлаждение вещества, которое практически можно считать адиабатическим. Как только внешние слои оболочки становятся прозрачными для излучения, в глубь и начинает двигаться волна охлаждения. Температуру T_2 ее наружного края можно оценить, приравнивая средний пробег кванта l характерному размеру системы — радиусу оболочки R :

$$l \approx \frac{1}{k\rho} \approx R, \quad (29.5)$$

где k — коэффициент непрозрачности. Для k с достаточной степенью точности можно принять выражение

$$k = \frac{0,4}{A} x + \frac{6 \cdot 10^{16}}{AT^2} (1 - x) e^{-\frac{x}{kT}}, \quad (29.6)$$

где A — массовое число, x и χ — степень и потенциал ионизации. Первый член в (29.6) учитывает рассеяние на свободных электронах (этот эффект и вносит основной вклад в непрозрачность на холодном крае волны), второй — фотоэффект и тормозное поглощение при первой ионизации.

Как оказалось, в оболочках сверхновых волны охлаждения движутся со сверхзвуковыми скоростями. В этом их существенное отличие от волн охлаждения в земной атмосфере. И если в этих последних при переходе вещества через фронт волны оставалось постоянным давление, то в "звездных" волнах охлаждения практически постоянной остается плотность, тогда

как давление и температура испытывают скачок. В данном случае для скорости волны по аналогии с (29.1) — (29.3) находим

$$u_{в.о} = \frac{2\sigma T_2^4}{\rho \Delta E}, \quad (29.7)$$

где ΔE — изменение внутренней энергии вещества, прошедшего через фронт волны охлаждения.

Значения температуры T_2 , которой определяется поток лучистой энергии с фронта волны охлаждения, найденные из решения системы (29.5) — (29.6) в предположении, что радиус оболочки $R \approx 10^4 R_\odot$, приведены на рис. 73. Как видно, при плотности $\rho \approx 10^{-12}$ г/см³ для оболочки, состоящей из чистого водорода, $T_2 \approx 5000$ К, она имеет примерно то же значение, если оболочка на 100% состоит из кислорода. Для гелиевой оболочки $T_2 \approx 8000$ К, железной (а также кремниевой) $T_2 \approx 3000$ К. С увеличением плотности среды температура T_2 несколько уменьшается.

Величина температуры T_1 , при которой потери внутренней энергии на адиабатическое охлаждение компенсируются выделением энергии в результате рекомбинации, находится из следующих соображений. Пусть плотность газа в результате расширения оболочки уменьшилась на величину $\Delta\rho$. Соответственно его внутренняя энергия (в расчете на единицу массы) уменьшается на $\Delta E_v = -\frac{P}{\rho^2} \Delta\rho$. Температура газа остается приблизительно постоянной, если эта потеря близка к приросту внутренней энергии при рекомбинациях

$\Delta E_p = \frac{\chi}{Am_H} \Delta x$, где m_H^x — масса атома водорода, Δx — изменение степени ионизации. В начале процессов рекомбинации $x \approx 1$ и $\Delta x = 1 - x \ll 1$, поэтому для чистого водорода из формулы Саха (2.4) следует, что

$$\Delta x \approx \frac{k\rho}{0,33m_H} T^{-\frac{3}{2}} \frac{\chi}{e^{kT}}. \quad (29.8)$$

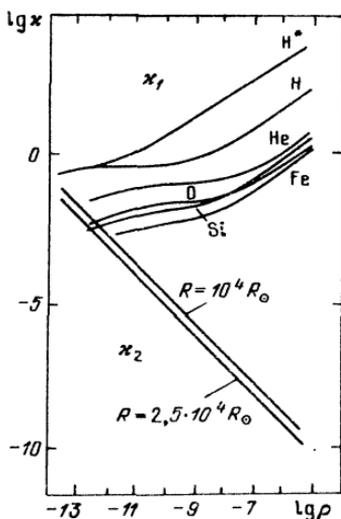
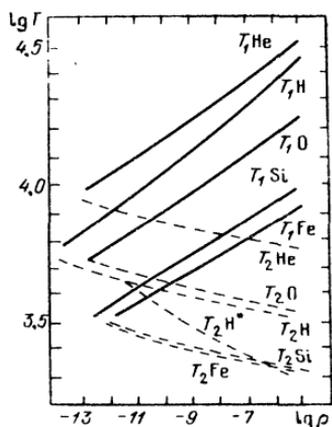


Рис. 73. Зависимость температуры холодного наружного (T_2) и внутреннего (T_1) края волны охлаждения для различных веществ.

Рис. 74. Зависимость непрозрачности на внутреннем (κ_1) и наружном (κ_2) крае волны охлаждения от плотности для различных веществ.

Здесь k — постоянная Больцмана. Приравнявая ΔE_B и ΔE_p , учитывая, что полное давление $P = \frac{1}{\beta} \rho_G$, и полагая $\Delta \rho \approx \rho$, находим формулу, по которой и может быть оценена величина T_1 ,

$$T_1 \approx \frac{\chi}{k \ln \left[\frac{0,66 m_H T_1^{2,5}}{\chi \beta \rho} \right]} \quad (29.9)$$

Более общая формула, пригодная для расчетов температуры T_1 при произвольном значении массового числа A , имеется в работе Э.К.Грасберга и Д.К.Надежина (1976). Там же приведены результаты расчетов температуры T_1 , зависимость которой от плотности частично воспроизведена на рис. 73. Для чистого водорода и гелия, в частности, верны такие аппроксимационные формулы:

$$T_1 = 6,7 \cdot 10^4 \rho^{0,078} \text{ К},$$

$$T_1 = 8 \cdot 10^4 \rho^{0,071} \text{ К}.$$

При плотности $\rho \approx 10^{-12}$ г/см³ находим, что $T_1 \approx 8000$ К (чистый водород) и $T_1 \approx 11\,000$ К (гелий).

Оказалось также, что волна охлаждения в оболочке сверхновой может существовать лишь при выполнении следующего условия: поток энергии F_2 , уносимый с наружного ее края в виде излучения, должен существенно превышать диффузионный поток F_1 на внутреннем крае волны охлаждения, причем

$$F_1 = - \frac{4a_{RC} T_1^3}{3\kappa_1 \rho} \frac{\partial T}{\partial r} \approx \frac{a_{RC} T_1^4}{\kappa_1 \rho R} \quad (29.10)$$

Так как из (29.5) для внешнего края волны следует $\rho R \approx \frac{1}{\kappa_2}$, то условие $F_2 \gg F_1$ эквивалентно неравенству

$$\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \gg \left(\frac{T_1}{T_2} \right)^4 \quad (29.11)$$

Как видно из рис. 74, где сопоставлены коэффициенты κ_1 и κ_2 для различных веществ, волна охлаждения может существовать лишь при плотности, превышающей некоторую критическую: для водорода при $\rho \gtrsim 3 \cdot 10^{-14}$, гелия — $\rho \gtrsim 10^{-12}$, железа — $\rho \gtrsim 10^{-11}$ г/см³.

Из условия (29.11) следует также, что геометрическая толщина фронта волны охлаждения ΔR мала по сравнению с радиусом оболочки. Величину ΔR можно оценить, приравняв средний диффузионный поток энергии через фронт волны потоку F_2 :

$$\frac{a_{RC}}{3\kappa_1 \rho} \frac{T_1^4 - T_2^4}{\Delta R} \approx \frac{a_{RC}}{2} T_2^4.$$

Учитывая (29.5), находим, что

$$\frac{\Delta R}{R} \approx \frac{2\kappa_2}{3\kappa_1} \left[\left(\frac{T_1}{T_2} \right)^4 - 1 \right]. \quad (29.12)$$

И если только выполняется неравенство (29.11), то всегда $\Delta R \ll R$. Опти-

ческая же толщина волны охлаждения $T_{в.о.}$, как и в земной атмосфере, определяется соотношением (29.4).

Из расчетов также следует, что при плотностях $3 \cdot 10^{-14} - 3 \cdot 10^{-12}$ г/см³ в водороде и $3 \cdot 10^{-12} - 10^{-10}$ г/см³ в гелии энергия равновесного излучения превышает энергию ионизации и в то же время выполняется неравенство (29.11) и существует четко выраженная волна охлаждения. В этом случае скорость волны относительно вещества находим из (29.7), если вместо энергии E подставить энергию равновесного излучения, так что

$$u_{в.о.} = \frac{c}{2 \left[\left(\frac{T_1}{T_2} \right)^4 - 1 \right]}. \quad (29.13)$$

Распространение же волны охлаждения в оболочке описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{dR}{dt} = u - u_{в.о.}, \quad (29.14)$$

где R — расстояние фронта волны от центра звезды (радиус волны охлаждения), u — скорость расширения оболочки. Волна охлаждения возникает в тех слоях расширяющейся оболочки, где влиянием на движение вещества градиента давления и силы тяжести можно пренебречь, а оболочку можно рассматривать находящейся в состоянии свободного разлета. Тогда скорость вещества в месте нахождения волны охлаждения определяется соотношением

$$u = \frac{R}{t}. \quad (29.15)$$

Если перед началом свободного разлета скорость вещества u задается в виде функции некоторой степени расстояния от центра звезды — $u \sim r^q$, тогда как плотность $\rho \sim r^{-s}$, то можно показать, что в состоянии свободного разлета на фронте волны охлаждения при $r = R$

$$\rho = CR^{-\nu} t^{\nu-3}, \quad (29.16)$$

где C — постоянная, а $\nu = 3 - (3 - s)/q$. Как было установлено Э.К. Грасбергом и Д.К. Надёжиным (1976), при $\nu \approx 4$ светимость сверхновой остается постоянной на протяжении многих десятков дней. В этом случае $u_{в.о.} \approx u$, т.е. волна охлаждения движется по направлению к центру звезды примерно с той же скоростью относительно газа оболочки, с какой происходит ее расширение. В это время радиус фронта волны охлаждения $R \approx \text{const}$ и светимость звезды

$$L = 4\pi R^2 F_2 = 8\pi R^2 \sigma T_2^4 \approx \text{const}. \quad (29.17)$$

И, наконец, пусть Δt — продолжительность существования плато на кривой блеска сверхновой, т.е. время движения волны охлаждения через оболочку звезды. Тогда масса оболочки, прошедшая через фронт волны охлаждения, может быть оценена из соотношения

$$\bar{L}_b \Delta t = \Delta E \Delta m, \quad (29.18)$$

где \bar{L}_b — средняя болометрическая светимость на стадии волны охлажде-

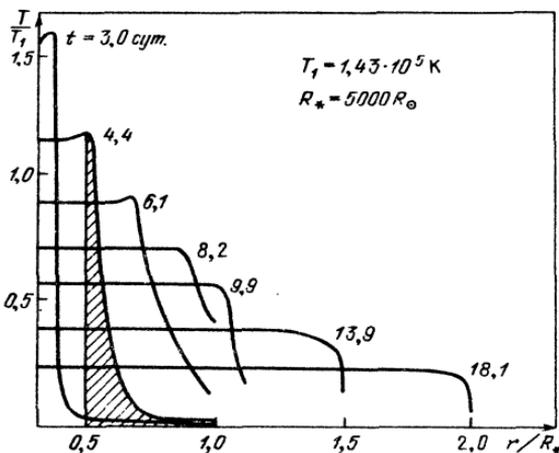


Рис. 75. Распределение температуры вдоль эйлеровой координаты, соответствующее различным моментам времени движения сильной ударной волны в протяженной оболочке звезды-сверхгиганта; заштрихованная область — прогретая зона (тепловая волна), образующаяся перед фронтом ударной волны.

ния. Используя (29.17), находим при $\Delta E \approx \frac{\chi}{Am_H}$

$$\Delta m = \frac{8\pi R^2 Am_H \sigma T_2^4}{\chi} \Delta t. \quad (29.19)$$

Для сверхновых II типа, в оболочках которых много водорода, при $\Delta t \approx 50$ суток с учетом всего сказанного выше находим $\Delta m \lesssim 20 M_\odot$.

Как оказалось, единственным индикатором существования волн охлаждения в оболочках сверхновых является постоянство во времени цветовой температуры. В свою очередь температура T_2 и болометрическая звездная величина очень сильно зависят от химического состава. Поэтому детальные исследования кривых блеска сверхновых и показателей их цвета на протяжении десятков дней совместно с привлечением теории волн охлаждения дают возможность оценивать массы оболочек, устанавливать их химический состав, а по особенностям кривых блеска и закон распределения плотности в оболочке.

В результате дальнейшего анализа проблемы (И.А.Климишин, Б.И.Гнатых, 1981), было выяснено, что по мере продвижения фронта тепловой волны в разреженные внешние слои оболочки звезды определяющим становится томсоновское рассеяние. Поэтому в значительной степени изменяется и картина теплопереноса. Подробные расчеты для неоднородной среды все еще не проведены. По-видимому, хотя в ряде случаев тепловые волны и могут быть эффективным механизмом переноса энергии из внутренних слоев звезды к ее поверхности, то главная роль в этом принадлежит все же ударным волнам.

§ 30. Тепловые волны в оболочках звезд

При движении сильной ударной волны в оболочке звезды наиболее существенным механизмом, приводящим к отклонению от адиабатичности движения, является лучистая теплопроводность. Благодаря ей, как уже отмечалось, перед фронтом ударной волны образуется протяженная прогретая зона (см. рис. 75) толщиной $\Delta R_T = \frac{c}{3k_E \rho D}$ (Э.К.Грасберг, В.С.Имшенник, Д.К.Надёжин, 1971). В частности, при скорости волны 200

$D = 5000$ км/с и при $k_E = 0,4$ см²/г, $\rho = 10^{-12}$ г/см³ толщина этой зоны достигает величины $\Delta R_T \approx 700 R_\odot$, что сравнимо с протяженностью оболочки звезды-сверхгиганта. Поэтому потери энергии на высвечивание с переднего края зоны прогрева (фронта тепловой волны) становятся существенными задолго до выхода самой ударной волны к внешнему краю оболочки звезды.

В определенных случаях, по-видимому, реализуется (хотя бы на протяжении относительно небольших отрезков времени) возможность переноса энергии вспышки исключительно механизмом лучистой теплопроводности, который в этом смысле можно считать альтернативным ударной волне. В земной атмосфере это имеет место на ранней стадии развития явления взрыва (Я.Б.Зельдович, Ю.П.Райзер, 1966). Здесь при мгновенном выделении энергии прежде всего формируется тепловая волна, распространяющаяся по практически неподвижному газу. Нагреваясь этой тепловой волной, газ начинает двигаться в ту же сторону. И как только уменьшающаяся скорость фронта тепловой волны D_T сравняется со скоростью звука в нагретом газе a_2 , вперед вырывается сформировавшаяся к тому времени ударная волна, которая лишь с этого момента начинает играть главную роль в развитии явления вспышки. Таким образом, условие переноса энергии взрыва механизмом лучистой теплопроводности имеет вид

$$D_T > a_2. \quad (30.1)$$

Общее решение задачи о движении тепловых волн в однородной среде, если только теплопроводность пропорциональна заданной степени температуры ($k_T \sim T^m$), уже получено (А.С.Компанеев, 1977; Э.И.Андрианкин, 1958). Найдены решения и для случая движения сильных тепловых волн в политропных оболочках звезд при той же зависимости $k_T \sim T^m$ (И.А.Климишин, 1973; В.С.Имшенник, И.А.Климишин, И.В.Отрощенко, 1977). Было установлено, что тепловые волны могут быть эффективным механизмом переноса выделившейся при мгновенном взрыве энергии, если только непрозрачность вещества описывается формулой Крамерса (4.7). Некоторые результаты этих исследований и изложены ниже.

Как известно, распределение (профиль) температуры в области, нагретой тепловой волной, и закон движения фронта волны находятся путем решения уравнения лучистой теплопроводности (3.20), причем поток лучистой энергии выражается через градиент температуры в виде (3.28) с учетом соотношений (1.5), совместно с условием сохранения энергии

$$Q = 2^\alpha \pi \frac{\alpha(3-\alpha)}{2} r_\phi \int_0^{\tilde{r}} \tilde{E} r^\alpha dr. \quad (30.2)$$

Здесь Q — величина освобожденной при взрыве энергии, $\alpha = 0, 1$ и 2 соответственно для плоского, цилиндрического и сферического случая, $\tilde{E} = \tilde{E}_G + \tilde{E}_R$ — полная энергия в расчете на единицу объема, r_ϕ — координата фронта тепловой волны.

Аналитическое решение задачи о движении тепловой волны в общем случае, при произвольном соотношении величин \tilde{E}_G и \tilde{E}_R , а также с учетом всех составляющих коэффициента непрозрачности (4.1) получить нельзя. Поиски решений для ограниченных диапазонов изменения температуры и плотности необходимо проводить, пользуясь диаграммой $T - \rho$ (рис. 1) и определяя предварительно относительную роль плотности энергии излучения. На диаграмме $T - \rho$ кроме релятивистской области и области вырож-

дения, требующих специального рассмотрения, можно выделить три существенно различные по своим свойствам области:

1) Область A , где $\tilde{E}_R \gg \tilde{E}_G$, а непрозрачность в основном определяется рассеянием на свободных электронах, так что $\kappa = \text{const} = \kappa_E = 0,40 \text{ см}^2/\text{г}$. Верхняя граница области определяется условием $\tilde{E} = \rho c^2$ или $T_r = = 5,9 \cdot 10^8 \rho^{1/4}$, нижняя — из условия $\frac{\partial \tilde{E}_R}{\partial T} = \frac{\partial \tilde{E}_G}{\partial T}$ или $T_B = 2 \cdot 10^7 \rho^{1/3}$

(отметим, что $\tilde{E}_R = \tilde{E}_G$ при $T = 1,6 T_B$). Строго говоря, приближение лучистой теплопроводности справедливо не во всей области A , а только в той ее части, где коэффициент истинного поглощения не слишком мал по сравнению с коэффициентом чистого рассеяния, так что поддерживается локальное термодинамическое равновесие вещества с излучением вследствие процессов поглощения. Этот вопрос требует специального рассмотрения.

2) Область B , где $\tilde{E}_G \gg \tilde{E}_R$, а непрозрачность определяется процессами истинного поглощения и может быть аппроксимирована в виде (4.7) или, конкретнее, $\kappa_B = \kappa_0 \rho T^{-3,5}$, где $\kappa_0 \approx 10^{24,5}$. Нижняя граница области определяется максимальным значением непрозрачности, почти полной ионизацией и соответствует температуре $T \approx 2 \cdot 10^4 \text{ К}$.

3) Область C , где $E_G \gg E_R$ и $\kappa = \kappa_1 \rho^{1/2} T^7$. Характерной особенностью этой области является наличие зоны ионизации и уменьшение непрозрачности при уменьшении температуры. В большей части области длина свободного пробега фотонов $l = \frac{1}{\kappa \rho}$ превышает характерные размеры звездных оболочек, поэтому приближение лучистой теплопроводности здесь неприменимо.

В области A в случае однородной среды ($\rho = \text{const}$) решение уравнения теплопроводности (3.20) имеет вид (Я.Б. Зельдович, Ю.П. Райзер, 1966)

$$\tilde{E}_R(r, t) = \tilde{E}_0 \exp\left(-\frac{r^2}{4\chi t}\right), \quad \tilde{E}_0 = \tilde{E}_R(0, t) = \frac{Q}{(4\pi\chi t)^{3/2}}, \quad (30.3)$$

где $\chi = \frac{c}{3\kappa\rho} = \text{const}$. Скорость распространения основного количества тепла здесь можно определить как скорость перемещения такой точки r_ϕ , в которой $\tilde{E}_R(r_\phi, t) = \tilde{E}_0 e^{-1}$, где $e = 2,718$ — основание натуральных логарифмов, а расстояние r_ϕ принимать за радиус нагретой области. Уравнение движения такого фронта $r_\phi^2 = 4\chi t$ дает характерную скорость распространения тепла при линейной теплопроводности

$$D_T = \frac{dr_\phi}{dt} = \frac{2\chi}{r_\phi}. \quad (30.4)$$

Для плоской тепловой волны $\tilde{E}_0 = \tilde{E}_R(0, t) = \frac{\bar{Q}}{(4\pi\chi t)^{1/2}}$, причем размерность \bar{Q} — эрг/см². Скорость звука в нагретой области равна, с учетом (30.2), $a_2 = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{\bar{Q}}{e\sqrt{\pi\rho}r_\phi}}$. Из (30.1) нетрудно получить, что лучистая теплопроводность доминирует на расстояниях

$$r_\phi < r_2 \approx 3 \cdot 10^{22} (\rho \bar{Q})^{-1} \text{ см}. \quad (30.5)$$

Особенности переноса тепла механизмом линейной теплопроводности в неоднородной среде пока не исследовались.

Закономерности движения тепловых волн в однородной среде при $\tilde{E}_G \gg \tilde{E}_R$ (в области B), $\kappa = \text{const } T^{-s}$ подробно рассмотрены в книге Я.Б.Зельдовича и Ю.П.Райзера (1966). Установлено, что как раз в случае нелинейной теплопроводности и существует четкая граница, отделяющая нагретую область от холодной, которую и принято называть фронтом тепловой волны. Как оказалось, для тепловой волны с сильно зависящим от температуры коэффициентом теплопроводности характерно существование "плато" температуры: во всей нагретой области температура практически одинакова, и лишь в сравнительно тонком слое она быстро спадает до нуля (точнее, $T \rightarrow T_1$). С увеличением расстояния фронта тепловой волны от места взрыва при $\alpha = 2$ скорость фронта изменяется по закону $D_T \sim \sim r_\phi^{- (3s+10)}$ или при $s = 3,5$ $D_T \sim r_\phi^{-20,5}$.

В случае однородной среды из соотношений (3.20) и (30.2) с учетом условия (30.1) нетрудно получить следующие выводы:

а) Скорость сферической тепловой волны больше скорости звука a_s на расстояниях

$$r < r_* = 9 \cdot 10^{-6} (Q^6 \rho^{-9})^{1/19} \text{ см.} \quad (30.6)$$

И так как условие $\tilde{E}_G \gg \tilde{E}_R$ выполняется лишь начиная с некоторого расстояния $r > r_{\min} = 3 \cdot 10^{-6} (Q \rho^{-4})^{1/9}$ см, при котором $\bar{T} < T_c$, то дополнительным условием эффективности тепловой волны будет

$$Q \leq 2 \cdot 10^{25} \rho^{-5/3}.$$

б) В случае плоской тепловой волны $D_T \sim r_\phi^{-7,5}$, а условие $D_T > a_s$ выполняется до тех пор, пока расстояние фронта волны от места взрыва удовлетворяет неравенству

$$r_\phi < r_{**} = 5 \cdot 10^{-14} [\bar{Q}^6 \rho^{-9}]^{1/7} \text{ см.} \quad (30.7)$$

При этом режим движения не выходит за рамки области $\tilde{E}_G \gg \tilde{E}_R$, если $r_\phi \geq r_{\min}$, где $r_{\min} = 10^{-16} \bar{Q} \rho^{4/3}$ см. Поэтому дополнительным условием эффективности механизма лучистой теплопроводности будет $\bar{Q} < < 8 \cdot 10^{18} \rho^{1/3}$. Здесь показатель степени в формуле Крамерса принят равным $s = 3,5$.

Как уже отмечалось выше, мгновенное выделение энергии Q в недрах звезды можно имитировать, задавая профиль скоростей на момент времени $t = 0$ (см. рис. 63). Однако для выяснения вопроса, переносится энергия взрыва ударной или тепловой волной, целесообразно задавать начальный профиль температуры и проследить за его дальнейшей эволюцией. В случае сферического движения $Q = 4\pi r_0^2 \Delta r \frac{A\bar{T}}{\gamma - 1}$, причем r_0 — расстояние от центра звезды до слоя, в котором произошло выделение энергии.

Решение уравнений газодинамики с учетом эффектов лучистой теплопроводности показало, что если только в процессе движения тепловой волны во всей нагретой области выполняется условие $\tilde{E}_R \ll \tilde{E}_G$ и процессы истинного поглощения играют доминирующую роль, то представление о прямоугольном профиле тепловой волны можно использовать и в случае неоднородной среды. В итоге методом моментов было получено аналитическое решение задачи о движении тепловой волны в политропной оболоч-

ке звезды и в атмосфере, плотность которой изменяется по экспоненциальному закону (И.А.Климишин, 1973). В первом случае при $\rho = \rho_0 h^n$, причем

$$h = \frac{R_* - r}{R_*} \text{ — расстояние от поверхности звезды, } n \text{ — индекс политропы,}$$

$\rho_0 = \text{const}$, скорость тепловой волны D_T вначале уменьшается. Далее, на расстоянии $h_* \sim 0,7h_0$, где h_0 — глубина выделения энергии, эта скорость достигает наименьшего значения, после чего она снова увеличивается, так что на конечном этапе развития явления

$$D_T \sim h^{-n(m+1)}. \quad (30.8)$$

Аналогично, если плотность среды изменяется по закону $\rho = \rho_* \exp\left(-\frac{x}{H}\right)$, где H — масштабная высота, то после такого же замедления в движении скорость тепловой волны возрастает по закону

$$D_T \sim \exp\left[\frac{(m+1)x}{H}\right]. \quad (30.9)$$

Из условия (30.1) нетрудно найти предельное значение концентрации выделившейся энергии \bar{Q}_* , так что при $\bar{Q} < Q_*$ в политропной оболочке тепловая волна, пройдя расстояние $(h_0 - h)R_* \leq (h_0 - h_*)R_*$, вырождается в ударную, если же $\bar{Q} > Q_*$, то тепловая волна выходит на поверхность звезды.

Сложность вопроса, однако, заключается в следующем (И.А.Климишин, Б.И.Гнатык, 1981). Если даже на начальной стадии развития явления вспышки и возникла тепловая волна, то по мере продвижения ее фронта в разреженные внешние слои оболочки звезды определяющими в этих последних могут стать процессы томсоновского рассеяния, т.е. начиная с некоторого расстояния может иметь место неравенство $\tilde{E}_G < E_R$. Из-за этого профиль тепловой волны существенно отличается от прямоугольного (если расчеты ведутся численным методом с учетом всех составляющих непрозрачности), а высота скачка температуры в вырывающемся вперед языке гораздо меньше \bar{T} . В этом случае движение на самом деле продолжается в режиме ударной волны.

С другой же стороны, обсуждаемая задача содержит большое число независимых параметров — плотность среды и ее градиент, непрозрачность, концентрацию выделенной энергии. Поэтому в относительно разреженной среде эффекты лучистой теплопроводности могут быть доминирующими. Здесь, однако, необходимы дальнейшие расчеты.

При переносе энергии взрыва из недр звезды к ее поверхности при вспышке новой или сверхновой, по-видимому, главную роль играет ударная волна. Однако, учитывая роль механизма лучистой теплопроводности в образовании зоны прогрева перед фронтом ударной волны, можно утверждать, что в этом случае фактически реализуется вполне определенная комбинация двух волновых движений — ударной и тепловой волны, как это, впрочем, и следует из рис. 75. Протяженность прогревной зоны по мере продвижения ударной волны во внешние слои непрерывно возрастает. Ее передний край — фронт тепловой волны в неоднородной среде — движется ускоренно в соответствии с формулами типа (30.8) или (30.4). Выход же тепловой волны на поверхность звезды приводит к существенному высвечиванию энергии взрыва до того, как этой поверхности достигнет сам фронт ударной волны.

ЛИТЕРАТУРА

- Апалькин Г.Б., Годунов С.К., Киреева И.Л., Плинер Л.А. Решение одномерных задач газовой динамики в подвижных сетках. — М.: Наука, 1970.
- Аллен К.У. Астрофизические величины. — М.: Мир, 1977.
- Андрианкин Э.И. Распространение неавтономной тепловой волны. — ЖЭТФ, 1958, т. 35, с. 428.
- Андрианкин Э.И., Коган А.М., Компанец А.С., Крайнов В.П. Распространение сильного взрыва в неоднородной атмосфере. — ПМТФ, 1962, № 6, с. 3.
- Бай Ши-ц. Динамика излучающего газа. — М.: Мир, 1968.
- Баранов В.Б., Краснобаев К.В. Гидродинамическая теория космической плазмы. — М.: Наука, 1977.
- Батюшкова Б.Н. Об эффективной температуре фронта ударной волны, движущейся в атмосфере звезды. — Астрон. цирк. АН СССР, 1982, № 1236, с. 2—4.
- Баум Ф.А., Каплан С.А., Станюкович К.П. Введение в космическую газодинамику. — М.: Физматгиз, 1958.
- Белоконь В.А. Исчезновение изотермического скачка при большой плотности излучения. — ЖЭТФ, 1959, т. 36, с. 341.
- Белоконь В.А. Влияние радиации на амплитуду изотермического скачка. — ДАН СССР, 1972, т. 202, с. 1296.
- Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений: Т. II. — М.: Физматгиз, 1962.
- Биберман Л.М., Векленко Б.А. О радиационных процессах перед фронтом ударной волны. — ЖЭТФ, 1959, т. 37, с. 164.
- Биберман Л.М., Воробьев В.С., Норман Г.Э. Энергия, испускаемая равновесной плазмой в спектральных линиях. — Оптика и спектроскопия, 1963, т. 14, с. 330.
- Биберман Л.М., Воробьев В.С., Якубов И.Т. Кинетика неравновесной низкотемпературной плазмы. — М.: Наука, 1982.
- Биберман Л.М., Воробьев В.С., Якубов И.Т. Кинетика ударно-радиационной ионизации и рекомбинации. — УФН, 1972, т. 107, вып. 3, с. 353.
- Биберман Л.М., Воробьев В.С., Якубов И.Т. Низкотемпературная плазма с неравновесной ионизацией. — УФН, 1979, т. 128, вып. 2, с. 233.
- Биберман Л.М., Мнацаканян А.Х., Якубов И.Т. Ионизационная релаксация за сильными ударными волнами в газах. — УФН, 1970, т. 102, с. 431.
- Биберман Л.М., Якубов И.Т. Состояние газа за фронтом сильной ударной волны. — Теплофизика высоких температур, 1965, т. 3, № 2.
- Бисноватый-Коган Г.С. О механизме взрыва вращающейся звезды как сверхновой. Астрон. ж., 1970, т. 47, с. 813.
- Бисноватый-Коган Г.С., Блинные С.И. Распространение волн в среде с высоким лучистым давлением. — Препринт ИКИ № 421, 1978.
- Бисноватый-Коган Г.С., Блинные С.И. Сферизация остатков несимметричного взрыва сверхновой в однородной среде. — Препринт ИТЭФ № 124, 1981.
- Бронштэн В.А. Распространение сильной цилиндрической волны в неоднородной атмосфере. — Изв. АН СССР. Сер. Механика жидкости и газа, 1970, т. 6, с. 108.
- Бронштэн В.А. Неравновесная ионизация при гиперзвуковом обтекании. — В кн.: Низкотемпературная плазма в космосе и на Земле. — М.: ВАГО, 1977.
- Брууд Г. Расчеты взрывов на ЭВМ. — М.: Мир, 1976.
- Гандельман Г.М., Франк-Каменецкий Д.А. Выход ударной волны на поверхность звезды. — ДАН СССР, 1956, т. 107, с. 811.
- Гермогенова Т.А., Сушкевич Т.А. Решение уравнения переноса излучения методом средних потоков. — Вопросы физики защиты реакторов, 1969, вып. 3, с. 34.
- Гнатык Б.И. О расчете скорости сильной ударной волны в неоднородной среде. — Астрон. цирк. АН СССР, 1981, № 1195, с. 4.
- Гнатык Б.И. О приближенных аналитических методах расчета движения ударных волн в неоднородных средах. — Проблемы космической физики, 1983, т. 17, с. 112.

Гнатык Б.И., Климишин И.А. Результаты расчета параметров ионизационно-диссоциативных ударных волн, движущихся в оболочках звезд. — Астрометрия и астрофиз., 1981, т. 44, с. 3.

Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976.

Гольцман В.И. О свечении из-за ударного фронта в звездных атмосферах. — Астрон. ж., 1970, т. 47, с. 145.

Гольдин В.Я., Данилов Г.В., Четверушкин Б.Н. Приближенный метод расчета кинетического уравнения. — В кн.: Вычислительные методы в теории переноса. — М.: Атомиздат, 1969, с. 50.

Горбачкий В.Г. О причинах появления ярких линий водорода в спектрах долгопериодических переменных звезд. — Астрон. ж., 1961, т. 38, с. 2.

Горбачкий В.Г. О свечении оболочки новой звезды за фронтом ударной волны. — Вестник Ленингр. ун-та, 1962, № 19, с. 112.

Горбачкий В.Г. Новоподобные и новые звезды. — М.: Наука, 1974.

Горбачкий В.Г. Космическая газодинамика. — М.: Наука, 1977.

Горбачкий В.Г., Минин И.Н. Нестационарные звезды. — М.: Физматгиз, 1963.

Грасберг Э.К. К автомодельному решению задачи о выходе ударной волны на границу газа. — Астрон. ж., 1981, т. 58, с. 155.

Грасберг Э.К., Имшенник В.С., Надёжин Д.К. К теории кривых блеска сверхновых звезд. — Astrophys. Sp. Sci., 1971, v. 10, p. 3.

Грасберг Э.К., Надёжин Д.К. О кривых блеска сверхновых звезд. — Астрон. ж., 1969, т. 46, с. 745.

Грасберг Э.К., Надёжин Д.К. Выход ударной волны в протяженную оболочку звезды и вспышки сверхновых. — Научн. информ. Астросовета АН СССР, 1969, т. 13, с. 96.

Грасберг Э.К., Надёжин Д.К. Волна охлаждения в оболочках сверхновых звезд. — Astrophys. Sp. Sci., 1976, v. 44, p. 429.

Дибай Э.А., Каплан С.А. Размерности и подобие астрофизических величин. — М.: Наука, 1976.

Дикий Л.А. Теория колебаний земной атмосферы. — Л.: Гидрометиздат, 1969.

Дубов Э.Е. Распределение и диссипация волн в хромосфере. — Изв. КРАО, 1960, т. 23, с. 362.

Дубов Э.Е. Колебания и волны в атмосфере Солнца. — ВИНТИ. Сер. "Астрономия", 1978, т. 14.

Жужда Ю.Д. Термогравитационная неустойчивость и пятиминутные колебания в атмосфере Солнца. — В кн.: Исследования по проблемам солнечно-земной физики. — М.: Наука, 1975, с. 71.

Жуков А.И. Применение метода характеристик к численному решению одномерных задач газовой динамики. — Труды матем. ин-та АН СССР, 1960, т. 7.

Зельдович Я.Б., Иванова Л.И., Надёжин Д.К. Нестационарная гидродинамическая аккреция на нейтронную звезду. — Астрон. ж., 1972, т. 49, с. 253.

Зельдович Я.Б., Компанеец А.С., Райзер Ю.П. Об охлаждении воздуха излучением. — ЖЭТФ, 1958, т. 34, с. 1278, 1447.

Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1966.

Иванова Л.И., Имшенник В.С., Надёжин Д.К. Исследование динамики взрыва сверхновой. — Научн. информ. Астросовета АН СССР, 1969, т. 13, с. 3.

Имшенник В.С. Численное интегрирование дифференциальных уравнений структуры ударной волны в плазме. — Ж. выч. матем. и матем. физ., 1962а, т. 2, с. 206.

Имшенник В.С. О структуре ударной волны в высокотемпературной плотной плазме. — ЖЭТФ, 1962б, т. 42, с. 236.

Имшенник В.С. Структура ударных волн в плотной высокотемпературной плазме. — Физ. плазмы, 1975, т. 1, с. 202.

Имшенник В.С., Климишин И.А., Отрощенко И.В. О движении тепловых волн в полнотропных оболочках звезд. — Астрофизика, 1977, т. 13, с. 103.

Имшенник В.С., Морозов Ю.И. Структура ударной волны с учетом переноса импульса и энергии излучением. — ПМТФ, 1964, № 2, с. 8.

Имшенник В.С., Морозов Ю.И. Радиационная релятивистская газодинамика высокотемпературных явлений. — М.: Атомиздат, 1981.

Имшенник В.С., Надёжин Д.К. Газодинамическая модель вспышки сверхновой II типа. — Астрон. ж., 1964, т. 41, с. 829.

Имшенник В.С., Надёжин Д.К. Термодинамические свойства вещества при больших плотностях и высоких температурах. — Астрон. ж., 1965, т. 42, с. 1154.

Имшенник В.С., Надёжин Д.К. Конечные стадии эволюции звезд и вспышки сверхновых. — Препринт ИТЭФ № 91, 1980а.

Имшенник В.С., Надёжин Д.К. Конечные стадии эволюции звезд и гидродинамическая теория вспышек сверхновых. — Препринт ИТЭФ № 98, 1980б.

Имшенник В.С., Надежин Д.К. Конечные стадии эволюции звезд и вспышки сверхновых. — Итоги науки, ВИНТИ. Сер. "Астрономия", 1982, т. 21, с. 63.

Имшенник В.С., Надежин Д.К., Утробин В.П. Динамическая модель образования атмосферы сверхновой I типа с градиентом скорости. — Препринт ИТЭФ № 134, 1979, *Astrophys. Sp. Sci.* 1981, v. 78, p. 105.

Имшенник В.С., Утробин В.П. К вопросу о кривых блеска сверхновых II типа. — Письма в АЖ, 1977, т. 3, с. 68.

Ирошников Р.С. Ударные волны в атмосфере RR Леры. — *Астрон. ж.*, 1961, т. 38, с. 623.

Каплан С.А. Простые волны и образование ударных волн в звездах. — *Циркуляр АО Львовск. ун-та*, 1962, № 37—38.

Каплан С.А. К теории распространения сильных ударных волн в неоднородной космической среде. — *Астрон. ж.*, 1967, т. 44, с. 384.

Каплан С.А., Климишин И.А. Ударные волны в оболочках звезд. — *Астрон. ж.*, 1959, т. 36, с. 410.

Каплан С.А., Климишин И.А. О структуре ударной волны с излучением. — *Астрон. ж.*, 1964, т. 41, с. 657.

Каплан С.А., Островский Л.А. К теории образования ударных волн в хромосфере и короне. — *Солн. данные*, 1963, *Бюлл.* № 6, с. 53.

Каплан С.А., Островский Л.А., Петрухин Н.С., Фридман В.Е. Расчет самосогласованных моделей хромосфер Солнца и звезд. — *Астрон. ж.*, 1972, т. 49, с. 1267.

Каплан С.А., Пикельнер С.Б. Межзвездная среда. — М.: Физматгиз, 1963.

Каплан С.А., Пикельнер С.Б., Цытович В.Н. Физика плазмы солнечной атмосферы. — М.: Наука, 1977.

Каплан С.А., Подстригач Т.С. Параметры ударных волн в частично ионизованном газе. — *Астрон. ж.*, 1965, т. 42, с. 552.

Касинский В.В. Грануляция, волны и нестационарные процессы в атмосфере Солнца. — В кн.: *Результаты набл. и иссл. в период МГСС*, 1967, вып. 4, с. 44.

Кестенбойм Х.С., Росляков Г.С., Чудов Л.А. Точечный взрыв. — М.: Наука, 1974.

Климишин И.А. К теории звездных ударных волн. — *Астрон. ж.*, 1962, т. 39, с. 887.

Климишин И.А. О влиянии периодических ударных волн на распределение плотности в атмосфере пульсирующей звезды. — *Астрофизика*, 1967, т. 3, с. 259.

Климишин И.А. О структуре ударной волны, движущейся в звездной атмосфере. — *Астрофизика*, 1968, т. 4, с. 257.

Климишин И.А. Ударные волны в неоднородных средовищах. — Львов: Изд. Львовск. ун-та, 1972.

Климишин И.А. Ионизационные ударные волны в звездах. — *Пробл. косм. физ.*, 1973, т. 8, с. 174.

Климишин И.А. О тепловых волнах в звездах. — *Астрофизика*, 1973, т. 9, с. 307.

Климишин И.А., Гнатык В.И. О тепловых волнах в звездах. — *Пробл. косм. физ.*, 1976, т. 11, с. 140; 1977, т. 12, с. 113.

Климишин И.А., Гнатык В.И. Об эволюции тепловых возмущений в звездах. — *Пробл. косм. физ.*, 1981, т. 16, с. 109.

Климишин И.А., Гнатык В.И. О законе движения сильных ударных волн в оболочках звезд. — *Астрофизика*, 1981, т. 17, с. 547.

Климишин И.А., Гура Б.М. Расчет степени ионизации за фронтом ударной волны, движущейся в звездной атмосфере. — *Цирк. АО Львовск. ун-та*, 1971, № 46, с. 9.

Климишин И.А., Костюк О.А., Лыско И.Д. Об эффективной температуре ударной волны, движущейся в звездной оболочке. — *Астрон. цирк. АН СССР*, 1981, № 1149.

Климишин И.А., Новак А.Ф. К теории ударных волн в движущихся средах. — *Астрометрия и астрофиз.*, 1970, т. 9, с. 147.

Климишин И.А., Новак А.Ф. К расчету параметров нестационарных релятивистских ударных волн. — *Пробл. косм. физ.*, 1975, т. 10, с. 154.

Кокс А.Н. Коэффициенты поглощения и непрозрачности звездного вещества. — В кн.: *Внутреннее строение звезд*. — М.: Мир, 1970.

Колесник И.Г. Численные исследования коллапса протозвезд. — *Астрометрия и астрофиз.*, 1980, т. 40, с. 3.

Компанец А.С. Точечный взрыв в неоднородной атмосфере. — *ДАН СССР*, 1960, т. 130, с. 1001.

Коробайников В.П., Мельникова Н.С., Рязанов Е.В. Теория точечного взрыва. — М.: Физматгиз, 1961.

Косовичев А.Г. Численное исследование тепловых и газодинамических процессов в задаче о нагреве солнечной атмосферы потоком ускоренных электронов. — Препринт ИПМ № 167, 1979.

Косовичев А.Г., Лившиц М.А., Попов Ю.П. Исследование численными методами отклика хромосферы на нагрев ускоренными электронами. — Препринт ИПМ № 68, 1980.

- Косовичев А.Г., Попов Ю.П.* К расчету одномерных нестационарных задач гравитационной газовой динамики. — Ж. вычисл. матем и матем. физ., 1979, т. 19, с. 1253.
- Косовичев А.Г., Северный А.Б.* О возбуждении колебаний Солнца, — Письма в Астрон. ж., 1981, т. 7, № 5, с. 304.
- Костюк Н.Д., Пикельнер С.Б.* Газодинамика вспышечной области, прогреваемой потоком ускоренных электронов. — Астрон. ж., 1974, т. 51, с. 1002.
- Ламб Г.* Гидродинамика. — М.: Гостехиздат, 1947.
- Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Механика сплошных сред. — М.: Гостехиздат, 1954.
- Ленг К.* Астрофизические формулы: ч. 1. — М.: Мир, 1978.
- Лившиц М.А., Бадалян О.Г., Косовичев А.Г., Кацова М.М.* Непрерывное оптическое излучение солнечных и звездных вспышек. — Препринт ИЗМИРАН № 7 (273), 1980.
- Метелицын В.А.* О движении газа за фронтом сильной ударной волны с учетом потери энергии на излучение. — Журн. техн. физ., 1969, № 12, с. 1105.
- Морозов Ю.И.* Роль излучения в структуре стационарной ударной волны. — Препринт ИПМ № 66, 1971.
- Музылев В.В., Тутуков А.В.* Оболочки холодных звезд и генерация звуковой энергии. — Научн. информ. Астросовета, 1973, т. 26, с. 13.
- Мустель Э.Р.* Наблюдательные данные о новых и сверхновых. — Научн. информ. Астросовета, 1974, т. 29, с. 49.
- Надёжин Д.К.* Некоторые вторичные признаки гравитационного коллапса. — Препринт ИПМ № 11, 1979; *Astrophys. Sp. Sci.*, 1980, v. 69, p. 115.
- Надёжин Д.К.* О начальной фазе взаимодействия разлетающейся оболочки звезды с окружающей средой. — Препринт ИТЭФ № 1, 1981.
- Надёжин Д.К., Франк-Каменецкий Д.А.* Ускорение частиц при автомодельном выходе ударной волны на поверхность звезды. — Астрон. ж., 1964, т. 41, с. 361.
- Надёжин Д.К., Франк-Каменецкий Д.А.* Движение ударных волн в политропных газовых слоях. — Вопр. космогонии, 1964, т. 10, с. 154.
- Надёжин Д.К., Франк-Каменецкий Д.А.* Распространение ударных волн во внешних слоях звезды. — Астрон. ж., 1965, т. 42, с. 290.
- Немчинов И.В.* Об осредненных уравнениях переноса излучения и их использовании при решении газодинамических задач. — Прикл. матем. и мех., 1970, т. 34, с. 706.
- Немчинов И.В., Светцов В.В., Шувалов В.В.* Решение задачи о распространении сильных интенсивно излучающих ударных волн в воздухе методом осреднения уравнений переноса излучения. — В кн.: Низкотемпературная плазма в космосе и на Земле. — М.: ВАГО, 1977, с. 47.
- Нирем Р.М., Дилли Дж.Е.* Анализ результатов измерений микроволнового излучения ударного слоя при летных испытаниях возвращаемого аппарата. — Ракетн. техн. и космонавт., 1970, т. 7, с. 137.
- Новак А.Ф.* К теории нестационарных релятивистских ударных волн в неоднородной космической среде. — Астрометр. и астрофиз., 1974, т. 24, с. 53.
- Новак А.Ф.* К теории диссипации ударных волн в неоднородных стационарно движущихся средах. — Астрометр. и астрофиз., 1975, т. 26, с. 38.
- Памятных А.А.* Об использовании модифицированной формулы Кристи в расчетах непрозрачности. — Научн. информ. Астросовета, 1973, т. 27, с. 99.
- Підстригач Т.С.* Про структуру ударних хвиль в неповністю іонізованому газі. — Укр. фіз. ж., 1965, т. 10, с. 601.
- Підстригач Т.С.* Сильні ударні хвилі в частково іонізованому водні. — Укр. фіз. ж., 1969, т. 14, с. 1367.
- Пикельнер С.Б.* О гравитационном затухании звука. — ЖЭТФ, 1959, т. 37, с. 1827.
- Пирри А.Н., Кларк Дж.Х.* Картина ионизации излучением в холодной предшествующей области перед осесимметричной отошедшей ударной волной. — Ракетн. техн. и космонавт., 1969, т. 9, с. 48.
- Пирсон Б.Л., Кутлер П.* Оптимизация распределения узловых точек в целях повышения точности расчетов гидродинамических задач. — Ракетн. техн. и космонавт., 1980, т. 18, с. 58.
- Повещенко Ю.А., Попов Ю.П., Самарская Е.А.* Об алгоритмах решения уравнений газодинамики с теплопроводностью. — Препринт ИПМ № 121, 1981.
- Попов Ю.П., Самарский А.А.* Полностью консервативные разностные схемы. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1969, т. 9, с. 953.
- Поттер Д.* Вычислительные методы в физике. — М.: Мир, 1975.
- Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений. — М.: Наука, 1978.
- Румянцев А.А.* О распространении ударной волны в неоднородной среде. — Ж. техн. физ., 1972а, т. 42, с. 2435.
- Румянцев А.А.* Распространение ударной волны во вращающейся звезде. — Астрон. ж., 1972б, т. 49, с. 744.
- Самарский А.А.* Теория разностных схем. — М.: Наука, 1977.

Самарский А.А., Волосевич П.П., Волчинская М.И., Курдюмов С.П. Метод конечных разностей для решения одномерных нестационарных задач магнитной гидродинамики. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1968, т. 8, с. 1025.

Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. — М.: Наука, 1973.

Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные схемы газовой динамики. — М.: Наука, 1980.

Самарский А.А., Соболев И.М. Примеры численного расчета температурных волн. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, с. 702.

Северный А.Б., Котов В.А., Цап Т.Т. Глобальные колебания Солнца. — Исслед. по геомагн., аэроном. и физ. Солнца, 1981, № 56, с. 11.

Седов Л.И. Метод подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1977.

Сен Г., Гэсс А. Влияние высоких температур на структуру ударных волн. — 3-й симп. по косм. газодин. — М.: ИЛ, 1960, с. 342.

Силич С.А. О методе Бринкли — Кирквуда в магнитной газодинамике. — Астрометр. и астрофиз., 1978, т. 35, с. 67.

Силич С.А. О распространении изотермических ударных волн в средах с неоднородной плотностью. — Препринт ИТФ АН УССР, 1980, 80—93 P.

Силич С.А., Фомин П.И. О выметании газа из центральных областей галактик с активными ядрами. — Препринт ИТФ АН УССР, 1980, 80 — 27 P.

Силич С.А., Фомин П.И. Точечный взрыв в экспоненциальной атмосфере с ненулевой асимптотикой. — Препринт ИПФ АН УССР, 1982, 27 P.

Собельман И.И. Введение в теорию атомных спектров. — М.: Наука, 1977.

Соболев В.В. Перенос лучистой энергии в атмосферах звезд и планет. — М.: Гостехиздат, 1956.

Соболев В.В. Курс теоретической астрофизики. — М.: Наука, 1975.

Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа. — М.: ИЛ, 1957.

Станюкович К.П. Неустойчившиеся движения сплошной среды. — М.: Гостехиздат, 1955.

Ступоченко Е.В., Лосев С.А., Осипов А.И. Релаксационные процессы в ударных волнах. — М.: Наука, 1965.

Тихонов А.Н., Самарский А.А. Об однородных разностных схемах. — Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 1, с. 5.

Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.

Тутуков А.В., Фадеев Ю.А. Образование протяженной оболочки вокруг пульсирующей звезды. — Научн. информ. Астросовета, 1981, т. 49, с. 48.

Тутуков А.В., Шустов Б.М. Динамическая и спектральная эволюция газовых оболочек, сброшенных звездами, находящимися на поздних стадиях эволюции. — Научн. информ. Астросовета, 1979, т. 46, с. 111.

Тутуков А.В., Юнгельсон Л.Р., Кляйман А.Я. Эволюция первичных компонент тесных двойных звезд большой массы. — Научн. информ. Астросовета, 1973, т. 27, с. 3.

Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.

Утробин В.П. Модели сверхновых звезд с медленным выделением энергии и галактические остатки сверхновых. — Препринт ИПМ, 68, 1977; *Astrophys. Sp. Sci.*, 1978, v. 55, p. 441.

Уус У. Эволюция звезд на стадии роста углеродно-кислородного ядра. — *Астрон. ж.*, 1973, т. 59, с. 297.

Федорова О.Ф. О взаимодействии главной и околозвездной оболочек новых звезд. — *Вестн. Ленингр. ун-та*, 1974, № 1, с. 156.

Федорова О.В. О расширении атмосферы пульсирующей звезды под действием периодических ударных волн. — *Астрофизика*, 1978, т. 14, с. 239.

Цикулин М.А., Попов Е.Г. Излучательные свойства ударных волн в газах. — М.: Наука, 1977.

Чандрасекар С. Введение в учение о строении звезд. — М.: ИЛ, 1950.

Шацман Э. Распространение ударных волн в атмосфере переменной плотности: Вводный доклад. — В кн.: *Космическая газодинамика*. — М.: Мир, 1964.

Шварцшильд М. Строение и эволюция звезд. — М.: ИЛ, 1961.

Шкловский И.С. Физика солнечной короны. — М.: Физматгиз, 1962.

Шкловский И.С. Сверхновые звезды. — М.: Наука, 1976.

Шноль Э.Э. О численном интегрировании уравнений химической кинетики при наличии быстрых реакций. — *Изв. КрАО*, 1972, т. 46, с. 79.

Шокин Ю.И. Метод дифференциального приближения. — Новосибир.: Наука, 1979.

Якубов И.Т. Влияние излучения на состояние газа при прохождении ударной волны в водороде. — *Опт. и спектроскоп.*, 1965, т. 19, с. 26.

Яненко Н.Н., Шокин Ю.И., Тушева Л.А., Федотова З.И. Классификация разностных схем одномерной газовой динамики методом дифференциального приближения. — *Числ. методы мех. сплошн. среды*, 1980, т. II, № 2, с. 123.

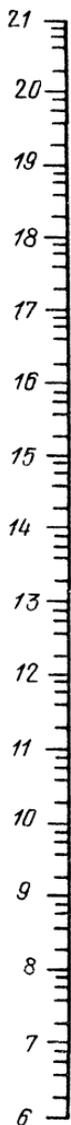
- Abt H.A.* Wesselinks method and shock wave in RR Lyrae. — *Astrophys. J.*, 1959 v. 130, p. 824.
- Ashraf S., Ahmad Z.* Approximate analytic solution of a strong shock with radiation near the surface of the star. — *Indian J. Pure and Appl. Math.*, 1975, v. 6, No. 10, p. 1090.
- Auer L., Mihalas D.* Non-LTE model atmospheres. III. A complete-linearization method. — *Astrophys. J.*, 1969, v. 158, p. 641.
- Bates D.R., Kingston A.E., McWhirter R.W.P.* Recombination between electrons and atomic ions. — *Proc. Roy. Soc.*, 1962, v. A270, p. 155.
- Bhatnagar M.S., Kushwaha R.S.* Decay of a shock wave in a stellar atmosphere. — *Ann. Astrophys.*, 1961, v. 24, p. 211; 1962, v. 25, p. 410.
- Bhatnagar M.S., Kushwaha R.S.* Shock wave in the atmosphere of a β Cephei star. — *Proc. Nat. Inst. Sci., India.* — 1963a, v. A29, p. 143.
- Bhatnagar M.S., Kushwaha R.S.* Decay of intense shock wave in stellar atmosphere. — *Proc. Nat. Acad. Sci., India*, 1963b, v. A33, p. 189.
- Biermann L.* Zur Deutung der Chromosphärischen Turbulenz und des Excesses der UV-Strahlung der Sonne. — *Naturwiss.*, 1946, v. 33, p. 118.
- Bjerknes V., Bjerknes J., Solberg H., Bergeron T.* — *Physicalische Hydrodynamik.* — J. Springer Verlag, 1933.
- Bode G.* Kontinuierliche Absorption von Sternatmosphären. — Kiel, 1965.
- Bray R.Y., Loughhead R.E.* The Solar Chromosphere, 1974.
- Brinkley S.R., Kirkwood J.G.* Theory of the propagation of shock waves. — *Phys. Rev.*, 1947, v. 71, p. 606.
- Brown Y.C.* On the ionization of hydrogen in optical flares. — *Solar Phys.*, 1973, v. 29, p. 421.
- Burgess A., Summers H.P.* The recombination and level populations of ions. I. Hydrogen and hydrogenic ions. — *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 1976, v. 174, p. 345.
- Carrus P.A., Fox P.A., Haas F., Kopal Z.* Propagation of shock waves in generalised Roche model. — *Astrophys. J.*, 1951, v. 113, p. 193, 496.
- Cavaliere A., Messina A.* Propagation of blast waves. — *Astrophys. J.*, 1976, v. 209, p. 424.
- Chapline G.F., Weaver T.A.* Structure of relativistic shock waves in simple gases. — *Phys. Fluids*, 1979, v. 22, p. 1884.
- Chevalier R.A.* The evolution of supernova remnants, I. Spherically symmetric models. — *Astrophys. J.*, 1974, v. 188, p. 501.
- Chevalier R.A.* The hydrodynamics of type II Supernovae. — *Astrophys. J.*, 1976, v. 207, p. 872.
- Chisnell R.F.* The normal motion of a shock wave through a non-uniform one-dimensional medium. — *Proc. Roy. Soc.*, 1955, v. A232, p. 350.
- Christy R.F.* A study of pulsation in RR Lyrae models. — *Astrophys. J.*, 1966, v. 144, p. 108.
- Christy R.F.* Computational method in stellar pulsation. — In: *Methods in computational physics*, v. 7. Astrophysics. — New-Y., London: Acad. Press, 1967, p. 191.
- Chu C.K., Gross R.A.* Shock waves in plasma physics. — *Advances Plasma Phys.*, 1969, v. 2, p. 139.
- Clarke J.H., Ferrari C.* Gas dynamics with nonequilibrium radiative and collisional ionization. — *Phys. Fluid*, 1965, v. 8, p. 2121.
- Colgate S.A.* The formation of deuterium and the light elements by spallation in supernova shocks. — *Astrophys. J.*, 1974, v. 187, p. 321.
- Colgate S.A.* The prompt effects of supernovae. — *Ann. N.-Y. Acad. Sci.*, 1975, v. 262, p. 34.
- Colgate S.A., White R.H.* The hydrodynamic behavior of supernovae explosions. — *Astrophys. J.*, 1966, v. 143, p. 626.
- Colombant D.G., Gardner J.H.* Shock wave propagation in an inhomogeneous medium using finite differences. — *J. Comp. Phys.*, 1976, v. 22, p. 389.
- Cox A.N., Stewart J.N., Eilers D.D.* Effects of bound-bound absorption on stellar opacities. — *Astrophys. J. Suppl.*, 1965, v. 11, No. 94, p. 1.
- Cox A.N., Tabor J.E.* Radiative opacity tables for 40 stellar mixtures. — *Astrophys. J. Suppl.*, 1976, v. 31, p. 271.
- Cox D.P., Tucker W.H.* Ionization equilibrium and radiative cooling of a lowdensity plasma. — *Astrophys. J.*, 1969, v. 157, p. 1157.
- Davis C.G.* Hydrodynamic effects in the atmospheres of variable stars. — *Mem. Soc. Roy. Sci. Liège*, 1975, v. 6, S. VIII, p. 197.
- Deubner F.-L.* Some properties of velocity fields in the solar photosphere. — *Solar Phys.*, 1974, v. 39, No. 1, p. 31.
- Deubner F.-L.* Observations of the hydrodynamic wave mode spectrum of the Sun. — *Variability Stars and Galaxies*, Liège, 1980.
- Epstein R.J., Arnett W.D., Schramm D.N.* Synthesis of the light elements in supernovae. — *Astrophys. J., Suppl.*, 1976, v. 31, p. 111.

- Falk S.W., Arnett W.D.* Radiation dynamics, envelope ejection and supernova light curves. — *Astrophys. J., Suppl.*, 1977, v. 33, p. 515.
- Farnsworth A.V., Clarke J.H.* Radiatively and collisionally structured shock waves exhibiting large emission-convection ratio. — *Phys. Fluids*, 1971, v. 14, No. 7, p. 1352.
- Fujimura F.S., Kennel C.F.* Numerical solutions of the trans-relativistic shock relations. — *Astron. Astrophys.*, 1979, v. 79, p. 299.
- Gaffet B.* Analytical method for the hydrodynamical evolution of supernova remnants. — *Astrophys. J.*, 1978, v. 225, p. 442.
- Giovanelli R.* Wave systems in the chromosphere. — *Solar Phys.*, 1975, v. 44, No. 2, p. 299.
- Goncz G., Mangency A., Souffrin P.* On the theory of shock-heated atmospheres. — *Astron. Astrophys.*, 1977, v. 54, p. 689.
- Gross R.A.* Strong ionizing shock waves. — *Rev. Mod. Phys.*, 1965, v. 37, p. 724.
- Gulliford P.* A simple shock wave model of supernova remnant IC 443. — *Astrophys. Sp. Sci.*, 1974, v. 31, p. 241.
- Hayes W.D.* Self-similar strong shock in an exponential medium. — *J. Fluid Mech.*, 1968a, v. 32, p. 305.
- Hayes W.D.* The propagation upward of the shock wave from a strong explosion in the atmosphere. — *J. Fluid Mech.*, 1968b, v. 32, p. 317.
- Hill H.A.* Solar pulsation. — *Space Sci. Rev.*, 1980, v. 27, p. 283.
- Hill S.J.* Hydrodynamic and radiative-transfer effects on an RR Lyrae atmosphere. — *Astrophys. J.*, 1972, v. 178, p. 793.
- Hill S.J., Willson L.A.* Theoretical velocity structure of long-period variable star photospheres. — *Astrophys. J.*, 1979, v. 229, No. 3, p. 1029.
- Hinnov E., Hirschberg J.G.* Electron-ion recombination in dense plasmas. — *Phys. Rev.*, 1962, v. 125, p. 795.
- Holmes L.B., Weymann H.D.* Precursors ahead of shock waves. — *Phys. Fluids*, 1969, v. 12, p. 1200.
- Johnson L.C., Hinnov E.* Ionization, recombination and population of excited levels in hydrogen plasmas. — *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 1973, v. 13, p. 333.
- Kahn F.D.* Sound wave trapped in the solar atmosphere. — *Astrophys. J.*, 1962, v. 135, p. 547.
- Kato S.* The response of an unbounded atmosphere to point disturbances. — *Astrophys. J.*, 1966, v. 143, p. 893.
- Klein R.I., Stein R.F., Kalkofen W.* Radiative shock dynamics. — *Astrophys. J.*, 1976, v. 205, p. 499, 1978, v. 220, p. 1024.
- Kondo M.* The development of condensations in uniform media. — *Publ. Astron. Soc. Japan*, 1975, v. 27, p. 215.
- Königl A.* Relativistic gasdynamics in two dimensions. — *Phys. Fluids*, 1980, v. 23, p. 1083.
- Kopal Z., Lin C.C.* Propagation of spherical shock waves in stellar interior. — *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 1951, v. 37, p. 415.
- Kuan P.* Shock waves in stellar atmospheres. — *Astrophys. J.*, 1975, v. 200, p. 653.
- Kurucz R.L.* Model atmospheres for G, F, A, B and O stars. — *Astrophys. J., Suppl.*, 1979, v. 40, No. 1, p. 1.
- Kutter G.S., Sparks W.M.* Studies of hydrodynamic events in stellar evolution. I. Method for computation. — *Astrophys. J.*, 1972, 175, p. 407.
- Lamb H.* The theory of waves propagated in the atmosphere. — *Proc. London Math. Soc.*, 1909, v. 7, p. 122.
- Leighton R.B., Noyes R.W., Simon G.W.* Velocity fields in the solar atmosphere. I. — Preliminary report. — *Astrophys. J.*, 1962, v. 135, p. 474.
- Masani A., Borla V., Ferrari A., Martini A.* Shock waves at high temperatures. — *Nuovo Cimento*, 1967, v. 48 B, p. 326.
- May M.M., White R.H.* Stellar dynamics and gravitational collapse. — *Methods in Comput. Phys.*, 1967, v. 7, p. 219.
- McKee C.R., Colgate S.A.* Relativistic shock hydrodynamics. — *Astrophys. J.*, 1973, v. 181, p. 903.
- Mein P.* Champ macroscopique des vitesses dans l'atmosphère solaire, d'après les mesures de déplacement des raies de Fraunhofer. — *Ann. Astrophys.*, 1966, v. 29, p. 153.
- Mihalas D.* Statistical-equilibrium model atmospheres for early-type stars. — *Astrophys. J.*, 1967, v. 149, p. 169.
- Minota T.* Effect of thermal radiation on shock wave in the gas-particle mixture. — *J. Phys. Soc. Jap.*, 1978, v. 45, No. 3, p. 1025.
- Minota T., Murakami T.* Shock wave structure in gas-particle mixture. — *J. Phys. Soc. Jap.*, 1977, v. 43, No. 5, p. 1792.
- Moore D.W., Spiegel E.A.* The generation and propagation of waves in a compressible atmosphere. — *Astrophys. J.*, 1964, v. 139, p. 48.

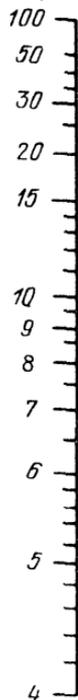
- Morel P.J., Baglin A.* Numerical solution of the 1D spherical non stationary radiating shock using characteristics. — *Astron. Astrophys.*, 1980, v. 90, p. 327.
- Nadyozhin D.K.* The gravitational collapse of iron-oxygen stars with masses of $2M_{\odot}$ and $10M_{\odot}$. — *Astrophys. Sp. Sci.*, 1977, v. 51, p. 283.
- Nakagawa Y., Wu S.T.* On multifluids description of shock structure with radiation. — *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer*, 1968, v. 8, p. 555.
- Narita S.* The radiative energy loss from the shock front. — *Progr. Theor. Phys.*, 1973, v. 49, p. 1911.
- Neumann J. von, Richtmyer R.* A method for numerical calculation of hydrodynamic shocks. — *J. Appl. Phys.*, 1950, v. 21, p. 232.
- Noyes R.W., Leighton R.B.* Velocity fields in the solar atmosphere. — *Astrophys. J.*, 1963, v. 138, p. 631.
- Odgers G.F., Kushwaha R.S.* Shock waves in the atmosphere of a long-period variable. — *Publ. Domin. Astrophys. Obs.*, 1960, v. 11, p. 253.
- Okuda T.* The shock propagation through an atmospheric model of an RR Lyrae type Star. — *Mem. Facult. Sci. Kyoto Univ., Ser. Phys.*, 1974, v. 34, No. 3, p. 261.
- Ono Y.* The spherical shock waves. — *Progr. Theor. Phys.*, 1960, v. 24, p. 825.
- Ono Y., Sakashita S., Ohyama N.* On the mechanism of stellar explosion. — *Progr. Theor. Phys. Suppl.*, 1961, No. 20, p. 85.
- Ono Y., Sakashita S., Yamazaki H.* Propagation of shock waves in inhomogeneous gases. I. — *Progr. Theor. Phys.*, 1960, v. 23, No. 2, p. 294.
- Osaki T.* Radiative smoothing of temperature fluctuation. — *Publ. Astron. Soc. Japan*, 1966, v. 18, p. 433.
- Paczynski B.* Envelopes of red supergiants. — *Acta Astron.*, 1969, v. 19, p. 1.
- Paczynski B., Ziolkowski J.* On the origin of planetary nebulae and Mira variable. — *Acta Astron.*, 1968, v. 18, p. 255.
- Prasad P.* Non-linear waves in radiation-gasdynamics. — *J. Ind. Inst. Sci.*, 1967, v. 49, p. 148.
- Preston G.W.* A spectroscopic study of the RR Lyrae stars. — *Astrophys. J.*, 1959, v. 130, p. 507.
- Ray G.D.* Propagation of plane relativistic shock waves. — *Astrophys. Sp. Sci.*, 1979, v. 61, p. 81.
- Ray G.D., Chakraborty T.K., Banerjee S.N.* Propagation of axi-symmetric relativistic shock waves. — *Astrophys. Sp. Sci.*, 1980, v. 72, p. 323.
- Ray G.D., Sanual G.* Plane relativistic shock waves at the edge of a gas. — *Astrophys. Sp. Sci.*, 1981, v. 74, p. 453.
- Sachdev P.L.* Blast wave propagation in an inhomogeneous atmosphere. — *J. Fluid Mech.*, 1971, v. 50, p. 669.
- Sachdev P.L.* Propagation of a blast wave in uniform or non-uniform media: A uniformly valid analytic solution. — *J. Fluid Mech.*, 1972, v. 52, p. 369.
- Saito M.* Transport of mechanical energy in the solar chromosphere. — *Publ. Astron. Soc. Japan*, 1964, v. 16, p. 179.
- Sakashita S., Tanaka Y.* On the origin of planetary nebulae. — *Progr. Theor. Phys.*, 1962, v. 27, p. 127.
- Sakurai A.* Propagation of spherical shock wave in stars. — *J. Fluid Mech.*, 1956, v. 1, p. 436.
- Sakurai A.* On a problem of a shock wave arriving at the edge of a gas. — *Communs Pure and Appl. Math.*, 1960, v. 13, p. 553.
- Sanford R.F.* Radial velocities of RR Lyrae from Coude spectrograms. — *Astrophys. J.*, 1949, v. 109, p. 208.
- Sarris E.T.* On the acceleration of cosmic rays. — *Astrophys. Sp. Sci.*, 1975, v. 36, p. 467.
- Schatzman E.* The heating of the solar corona and chromosphere. — *Ann. Astrophys.*, 1949, v. 12, p. 203.
- Schwarzschild M.* On noise arising from the solar granulation. — *Astrophys. J.*, 1948, v. 107, p. 1.
- Sermulina B.J., Somov B.V., Spector A.R., Syrovatskii S.I.* Gas dynamics of impulsive heated solar plasma. — *Symp. IAU No. 91.* — Dordrecht e.a., 1980, p. 491.
- Severny A.B., Kotov V.A., Tsap T.T.* Observations of solar pulsation. — *Nature*, 1976, v. 259, No. 5539, p. 87.
- Shapiro P.R.* Relativistic blast waves in two dimensions. — *Astrophys. J.*, 1979, v. 233, p. 831.
- Simon R.* Etude de la Propagation des Ondes dans le modele de Roche generalise. — *Ann. Astrophys.*, 1955, v. 18, p. 92.
- Skalafuris A.J.* Radiation-driven waves and the solar temperature reversal. — *Astrophys. Lett.*, 1968, v. 2, p. 27.

- Slutz S.* On the acceleration of shock waves in the atmosphere of cool Mira variable giants. — *Astrophys. J.*, 1976, v. 210, p. 750.
- Souffrin P.* Hydrodynamique d'une atmosphere perturbee par une zone convective turbulente saisis-jacente. — *Ann. Astrophys.*, 1966, v. 29, p. 55.
- Sparks W.M.* Dynamical models of novae. — *Astrophys. J.*, 1969, v. 156, p. 569.
- Taub A.H.* Relativistic Rankine-Hugoniot equations. — *Phys. Rev.*, 1948, v. 74, p. 328.
- Teuber D.L., Wilson R.M., Henze W.Jr.* Time-varying oscillations in the solar soft X-ray flux as observed from Skylab. — *Astron. Astrophys.*, 1978, v. 65, p. 229.
- Ulmshneider P.* Short period acoustic heating theory and its application to the construction of model chromospheres. — *Mem. S.A. It.*, 1977, p. 439.
- Vernazza J.E., Avrett E.H., Loeser R.* Structure of the solar chromosphere. — *Astrophys. J.*, 1973, v. 184, p. 605.
- Weaver T.A.* The structure of supernova shock waves. — *Astrophys. J.*, 1976, v. 32, p. 233.
- Wentzel D.G., Solinger A.B.* On the motion of shock through the solar chromosphere. — *Astrophys. J.*, 1967, v. 158, p. 877.
- Weymann R.* Heating of stellar chromosphere by shock waves. — *Astrophys. J.*, 1967, v. 158, p. 877.
- Weymann H.D.* Precursors ahead of shock waves. I. Electron diffusion. — *Phys. Fluids*, 1969, v. 12, p. 1193.
- Whitham G.B.* The propagation of weak spherical shock in stars. — *Comm. Pure Appl. Mathem.*, 1953, v. 6, p. 397.
- Whitham G.B.* On the propagation of shock waves through regions of non-uniform area or flow. — *J. Fluid Mech.*, 1958, v. 4, p. 337.
- Whitney Ch.* Stellar pulsation. — *Ann. Astrophys.*, 1956, v. 19, p. 34.
- Whitney C.* Granulation and oscillations of the solar atmosphere. — *Smiths contr. to Astrophys.*, 1958, v. 2, p. 365.
- Whitney C., Skalafuris A.J.* The structure of a shock front in atomic hydrogen - *Astrophys. J.*, 1963, v. 138, p. 201.
- Willson L.A.* Shock-wave interpretation of emission lines in long-period variable stars. — *Astrophys. J.*, 1976, v. 205, p. 172; 1979, v. 228, p. 854.
- Wood P.R.* Pulsation and mass loss in Mira variables. — *Astrophys. J.*, 1979, v. 227 p. 220.

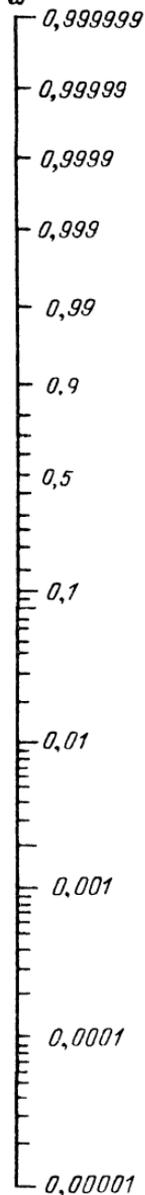
$\lg N \text{ (cm}^{-3}\text{)}$



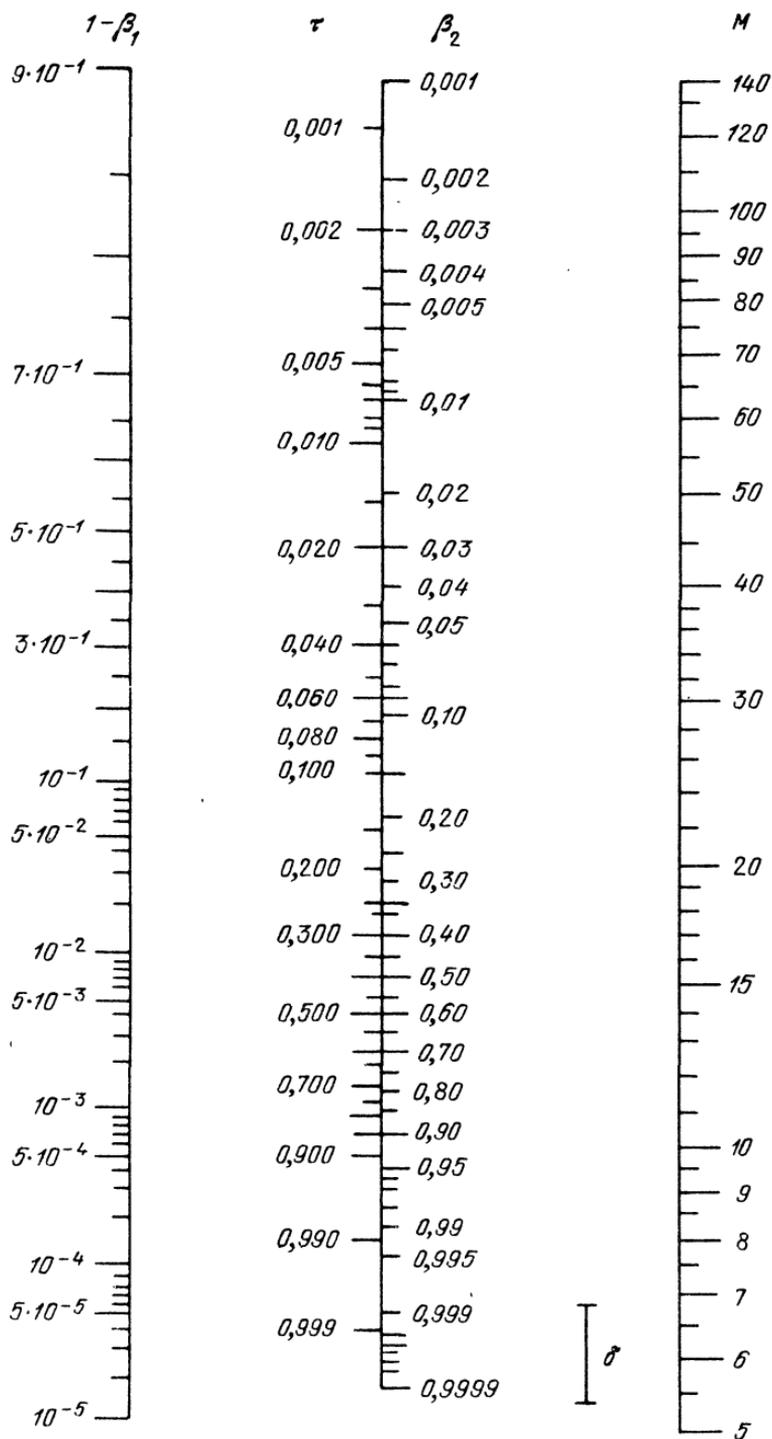
$T, 10^3 \text{ K}$



α



грамма для расчета степени ионизации водорода в атмосфере



омограмма для расчета параметров β и τ за фронтом сильной ударной волн

Иван Антонович Климишин

**УДАРНЫЕ ВОЛНЫ
В ОБОЛОЧКАХ ЗВЕЗД**

Редактор Г.С. Куликов

Технический редактор О.Б. Черняк

Корректоры Т.В. Обод, Т.А. Печко

Набор осуществлен в издательстве
на наборно-печатающих автоматах

ИБ № 11317

Сдано в набор 09.01.84. Подписано к печати 27.03.84
Т – 07960. Формат 60 × 90¹/16. Бумага офсетная № 2

Гарнитура Универс. Печать офсетная

Усл.печл. 13,5. Усл.кр.-отт. 13,5. Уч.-изд.л. 16,75

Тираж 1400 экз. Тип. зак. 120

Цена 2 р. 80 к.

Издательство "Наука"

Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства "Наука"

630077, Новосибирск, 77, ул. Станиславского, 25