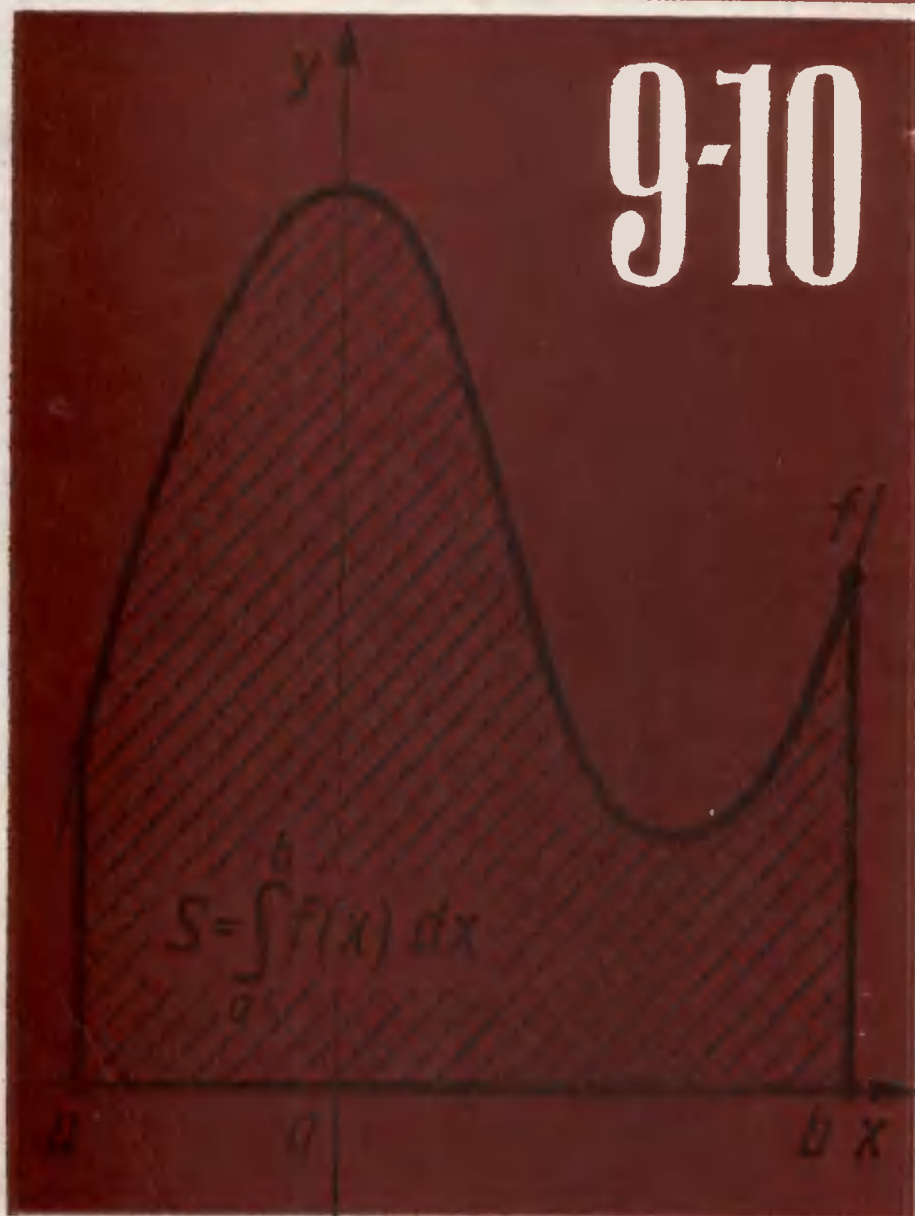
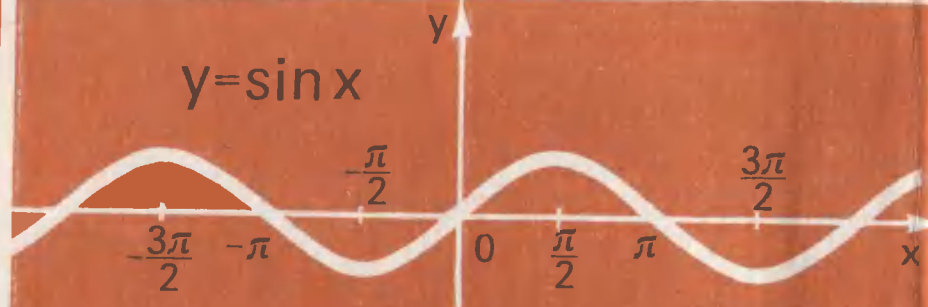


# АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

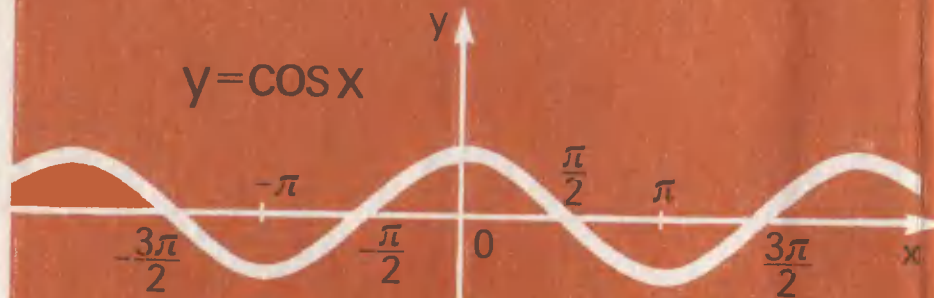
9-10



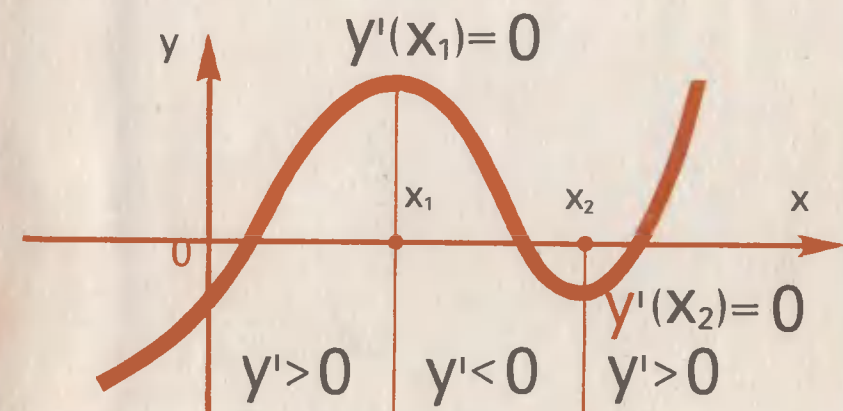
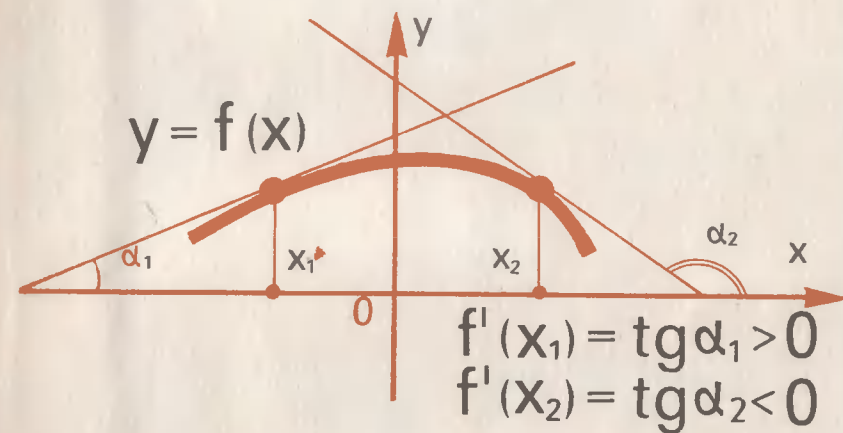
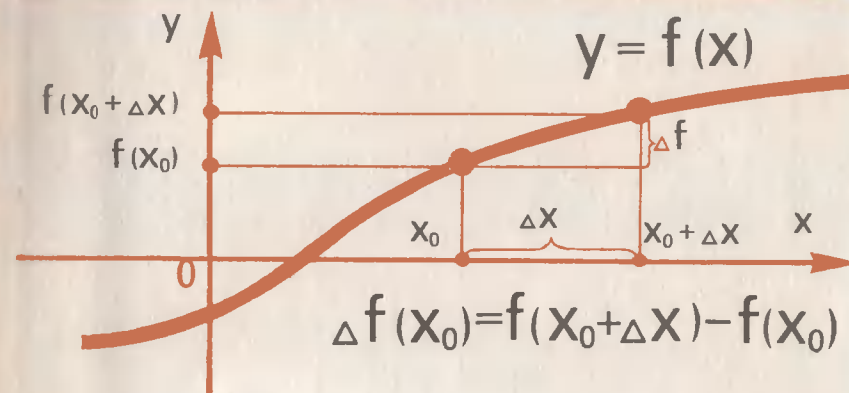
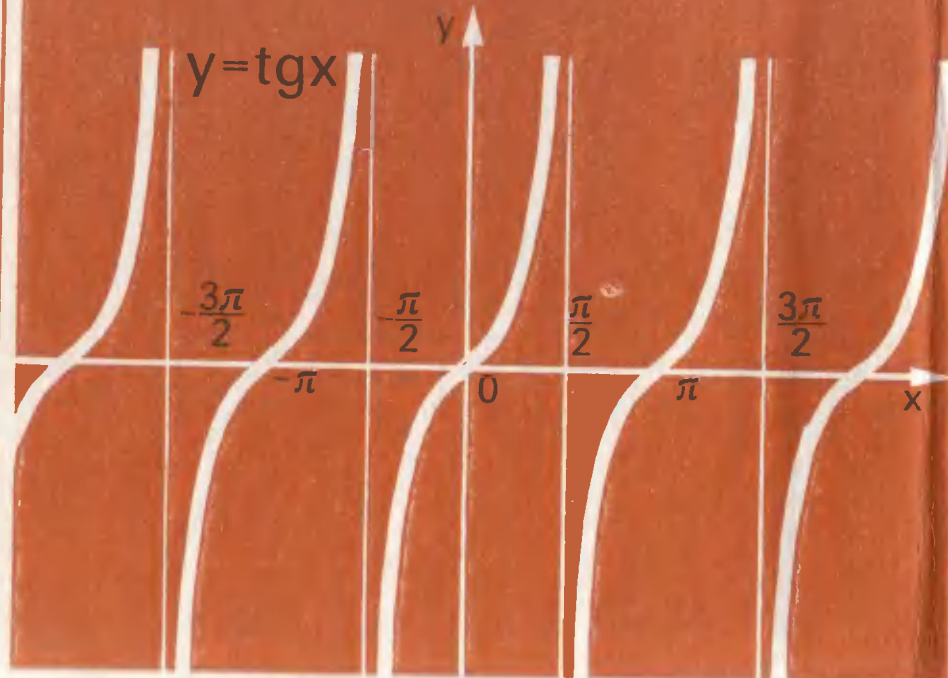
$$y = \sin x$$



$$y = \cos x$$



$$y = \operatorname{tg} x$$



# АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА

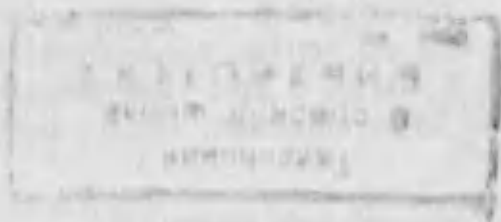
УЧЕБНОЕ  
ПОСОБИЕ  
для 9—10 классов  
СРЕДНЕЙ  
ШКОЛЫ



*Под редакцией  
А. Н. Колмогорова*

*Допущено  
Министерством просвещения СССР*

Издание седьмое



А. Н. КОЛМОГОРОВ,  
А. М. АБРАМОВ,  
Б. Е. ВЕЙЦ,  
О. С. ИВАШЕВ-МУСАТОВ,  
Б. М. ИВЛЕВ,  
С. И. ШВАРЦБУРД

Алгебра и начала анализа: Учеб. пособие для  
А45 9—10 кл. сред. шк./ А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов,  
Б. Е. Вейц и др.; Под ред. А. Н. Колмогорова.—7-е изд.—  
М.: Просвещение, 1987.—335 с.: ил.

А 4306020400—133 инф. письмо —87  
103(03)—87

ББК 22.14я72 + 22.16я72

© Издательство «Просвещение», 1980

© Издательство «Просвещение», 1986, с изменениями

## ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

### 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

#### 1. Тригонометрические функции числового аргумента

1. Вы уже знакомы с радианной мерой углов. Каждый угол плоскости является центральным углом окружности с центром в его вершине. Угол в 1 *радиан* — это такой центральный угол, длина дуги которого равна радиусу окружности (рис. 1). Радианная и градусная меры связаны зависимостью  $180^\circ = \pi$  радиан; угол в  $n^\circ$  равен  $\frac{\pi}{180} n$  радиан.

При радианном измерении углов упрощается ряд формул. Так, для окружности радиуса  $r$  длина  $l$  ее дуги в  $\alpha$  радиан находится по формуле

$$l = \alpha r; \quad (1)$$

площадь  $S$  сектора круга радиуса  $r$ , дуга которого содержит  $\alpha$  радиан, такова:

$$S = \alpha \frac{r^2}{2}. \quad (2)$$

Формулы (1) и (2) проще аналогичных формул  $l = \frac{\pi r n}{180}$

и  $S = \frac{\pi r^2 n}{360}$  для вычисления длины дуги окружности и площади сектора, дуги которых (величиной  $n^\circ$ ) измерены с помощью градусной меры. Наличие у радианной меры ряда преимуществ (см. также п. 20) привело к тому, что в тригонометрии предпочитают пользоваться радианной, а не градусной мерой.

Из курса алгебры VIII класса вы знаете, как определяется поворот на угол в  $\alpha$  радиан, где  $\alpha$  — произвольное действительное число. Знакомы нам и определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса числового аргумента. Напомним их.

Проведем окружность произвольного радиуса  $R$  с центром в начале координат. Пусть при повороте с центром  $O$  на угол  $\alpha$  начальный радиус

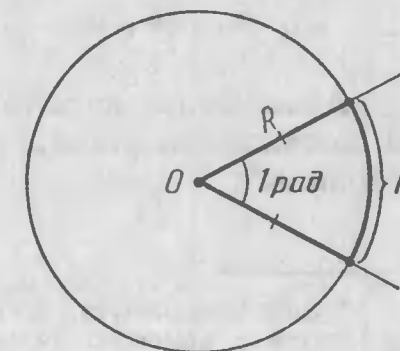


Рис. 1.



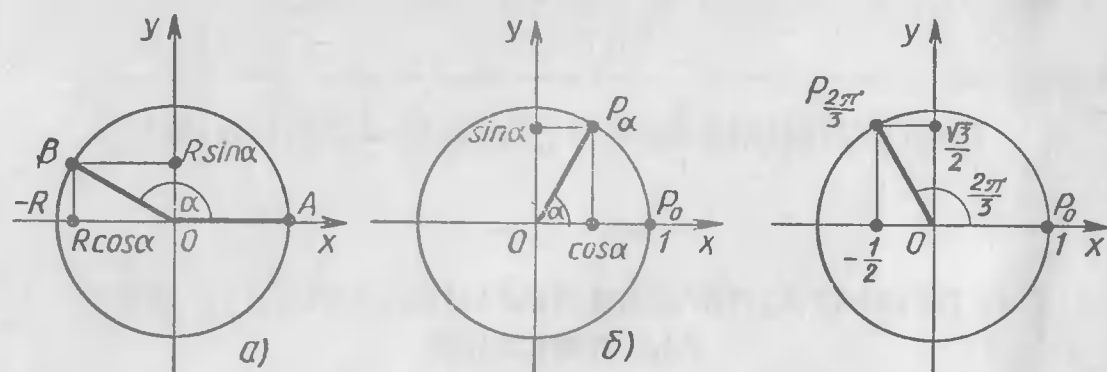


Рис. 2.

Рис. 3.

ОА переходит в радиус ОВ (рис. 2, а), а  $x$  и  $y$  — абсцисса и ордината точки В. По определению

$$\sin \alpha = \frac{y}{R}; \cos \alpha = \frac{x}{R}; \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}; \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}. \quad (3)$$

В курсе алгебры отмечалось, что значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса зависят только от  $\alpha$  и не зависят от  $R$ . Поэтому можно считать, что  $R=1$ . Это позволяет несколько упростить определения.

Окружность радиуса 1 с центром в начале координат будем называть *единичной* окружностью. Ордината точки  $P_\alpha$  единичной окружности, полученной при повороте точки  $P_0(1; 0)$  на угол  $\alpha$  радиан, называется *синусом* угла  $\alpha$ , а абсцисса этой точки — *косинусом* угла  $\alpha$  (рис. 2, б). *Тангенсом* угла  $\alpha$  называется отношение  $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ , а *котангенсом*  $\alpha$  — отношение  $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ ,

$$\text{т. е. } \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

**Пример.** Найдем значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла  $\frac{2\pi}{3}$ . Координаты точки  $P_{\frac{2\pi}{3}}$  (рис. 3) нетрудно найти, воспользовавшись свойством прямоугольного треугольника с углом  $30^\circ$ :  $x = -\frac{1}{2}$ ,  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Поэтому

$$\sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}; \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}; \operatorname{ctg} \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Аналогично находятся значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса углов, указанных в верхней строке следующей таблицы\*:

\* Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса произвольного угла находятся с помощью калькулятора или таблиц. (Здесь и далее имеются в виду «Четырехзначные математические таблицы» В. М. Брадиса.)

$\alpha$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—

Далее мы считаем, что все углы измерены в радианной мере и поэтому обозначение *рад*, как правило, опускается. Договорившись считать единицу измерения углов (1 радиан) фиксированной, мы получаем, в частности, возможность рассматривать тригонометрические функции *числового* аргумента. Например, синус числа  $x$  — это синус угла в  $x$  радиан; косинус числа  $x$  — косинус угла в  $x$  радиан и т. д.

Для решения ряда задач полезно иметь представление о *линии тангенсов*. Проведем касательную  $l$  к единичной окружности в точке  $P_0$  (рис. 4). Пусть  $\alpha$  — произвольное число, для которого  $\cos \alpha \neq 0$ . Тогда точка  $P_\alpha(\cos \alpha; \sin \alpha)$  не лежит на оси ординат и, следовательно, прямая  $OP_\alpha$  пересекает  $l$  в некоторой точке  $T_\alpha$  с абсциссой 1. Найдем ординату этой точки.

Для этого заметим, что прямая  $OP_\alpha$  проходит через точки  $O(0; 0)$  и  $P_\alpha(\cos \alpha; \sin \alpha)$  и, значит, имеет уравнение  $y = x \operatorname{tg} \alpha$ . Абсцисса точки  $T_\alpha$ , лежащей на этой прямой, равна 1. Из уравнения прямой  $OP_\alpha$  находим, что ордината точки  $T_\alpha$  равна  $\operatorname{tg} \alpha$ . Итак, ордината точки пересечения прямых  $OP_\alpha$  и  $l$  равна тангенсу угла  $\alpha$ . Поэтому прямую  $l$  и называют *линией тангенсов*.

2. Сопоставив каждому действительному числу  $x$  его синус (или косинус), получим *функцию*  $y = \sin x$  (соответственно  $y = \cos x$ ). Каждая из них определена на всей числовой прямой. Областью значений функций синус и косинус является отрезок  $[-1; 1]$ , поскольку и ординаты, и абсциссы точек единичной окружности принимают *все* значения от  $-1$  до  $1$ .

Числовые функции, заданные равенствами  $y = \operatorname{tg} x$  и  $y = \operatorname{ctg} x$ , называют соответственно *тангенсом* и *котангенсом*. Областью определения функции тангенс является множество всех чисел  $x$ , для которых  $\cos x \neq 0$ , т. е. все числа  $x$ , не равные

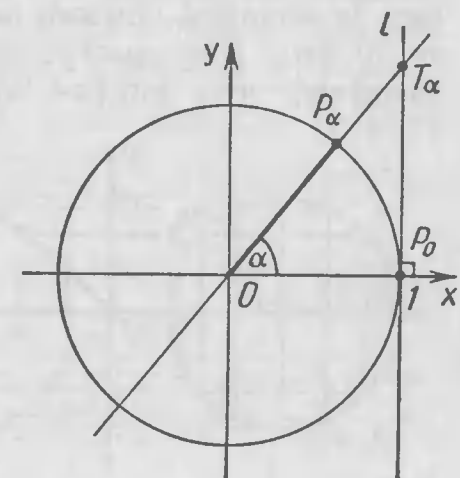


Рис. 4.

$\frac{\pi}{2} + \pi n$  ( $n$  пробегает множество  $Z$  всех целых чисел). Область определения котангенса состоит из всех чисел  $x$ , при которых  $\sin x \neq 0$ , т. е. из всех чисел, не равных  $\pi n$ , где  $n \in Z$ .

Область значений тангенса и котангенса — вся числовая прямая. Докажем это для функции  $\operatorname{tg} x$ . Пусть  $y_0$  — произвольное действительное число. Рассмотрим точку  $T(1; y_0)$ . Как было показано выше,  $\operatorname{tg} \angle TOx = y_0$ . Следовательно, функция  $\operatorname{tg} x$  принимает любое действительное значение  $y_0$ , что и требовалось доказать.

Свойства тригонометрических функций, известные вам из курса VIII класса, приведены в разделе «Материал для повторения». Здесь выделим два из них.

Для любого  $x$  из области определения соответствующей тригонометрической функции справедливы равенства:

- 1)  $\sin(-x) = -\sin x$ ;  $\cos(-x) = \cos x$ ;  
 $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ ;  $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$ .
- 2)  $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$ ;  $\cos(x + 2\pi n) = \cos x$ ;  
 $\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x$ ;  $\operatorname{ctg}(x + \pi n) = \operatorname{ctg} x$

( $n$  — произвольное целое число).

3. Построим график функции синус на отрезке  $[0; 2\pi]$ . Для этого отметим на оси ординат точки  $(0; -1)$  и  $(0; 1)$ , а на оси абсцисс — точку с абсциссой  $2\pi$  (обратите внимание: длина отрезка  $[0; 2\pi]$  приближенно равна 6,28). Разделим отрезок  $[0; 2\pi]$  на 16 равных частей и построим окружность радиуса 1 с центром в произвольной точке оси абсцисс (рис. 5). Для построения точки графика с абсциссой  $\alpha$  воспользуемся определением синуса: найдем точку  $P_\alpha$  на построенной окружности и проведем через  $P_\alpha$  прямую, параллельную оси абсцисс (рис. 5). Точка пересечения этой прямой и прямой  $x = \alpha$  искомая, так как ее ордината совпадает с ординатой точки  $P_\alpha$ , а по определению  $\sin \alpha$  равен ординате  $P_\alpha$ .

На рисунке 5 показано построение 16 точек графика. Соединяя их плавной кривой, получаем эскиз графика синуса на отрезке  $[0; 2\pi]$ . Для построения графика синуса вне этого отрезка заметим, что  $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$ . Поэтому во всех точках,

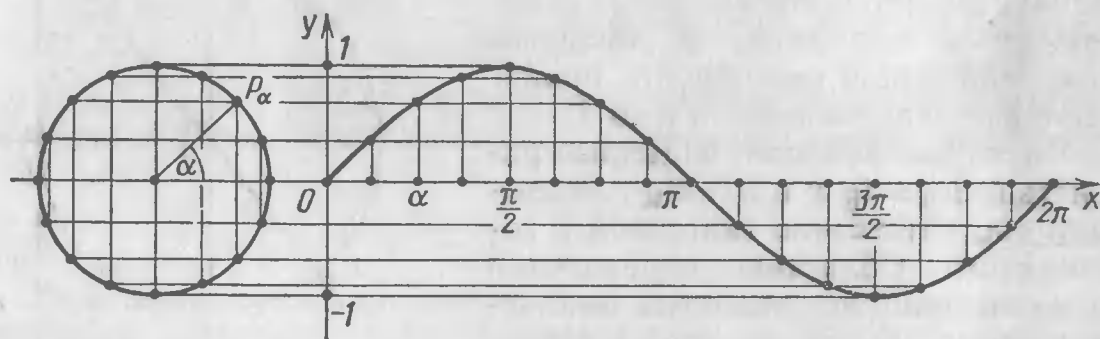


Рис. 5.

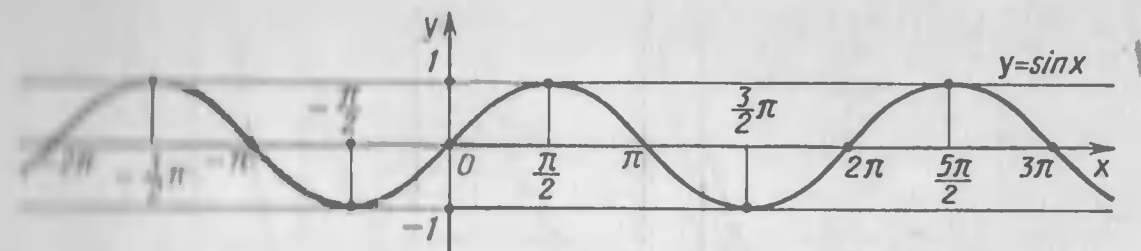


Рис. 6.

отличающихся на  $2\pi n$  от произвольного значения  $x_0$  из отрезка  $[0; 2\pi]$ , значения синуса совпадают и, следовательно, график синуса на всей прямой получается из графика на отрезке  $[0; 2\pi]$  с помощью параллельных переносов вдоль оси  $Ox$  (вправо и влево) на  $2\pi, 4\pi, 6\pi$  и т. д. (рис. 6). График синуса называется *синусоидой*.

Для построения графика функции  $y = \cos x$  вспомним, что  $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$  и, следовательно, значение косинуса в произвольной точке  $x_0$  равно значению синуса в точке  $x_0 + \frac{\pi}{2}$ .

Это означает, что точка графика косинуса, имеющая произвольную абсциссу  $x_0$ , получается из точки с абсциссой  $x_0 + \frac{\pi}{2}$  графика синуса с помощью параллельного переноса на расстояние  $\frac{\pi}{2}$  в отрицательном направлении оси  $Ox$ . Поэтому график функции  $y = \cos x$  — это синусоида, сдвинутая вдоль оси  $Ox$  на  $\frac{\pi}{2}$  влево (рис. 7).

Построение графика тангенса на интервале  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$  (рис. 8) аналогично построению, описанному в случае синуса. (Значение функции  $y = \operatorname{tg} x$  находится с помощью линии тангенсов.) Вследствие тождества  $\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x$  график тангенса на всей прямой (рис. 9) получается из графика на интервале  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$  параллельными переносами вдоль оси  $Ox$  (вправо и влево) на  $\pi, 2\pi$  и т. д. График функции  $\operatorname{tg} x$  называют *тангенс-гойдой*.

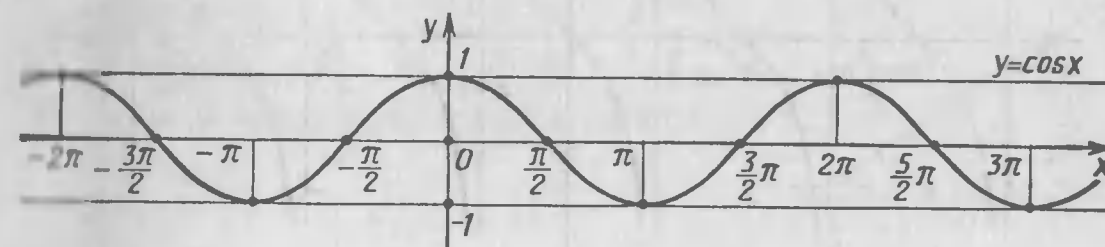


Рис. 7.

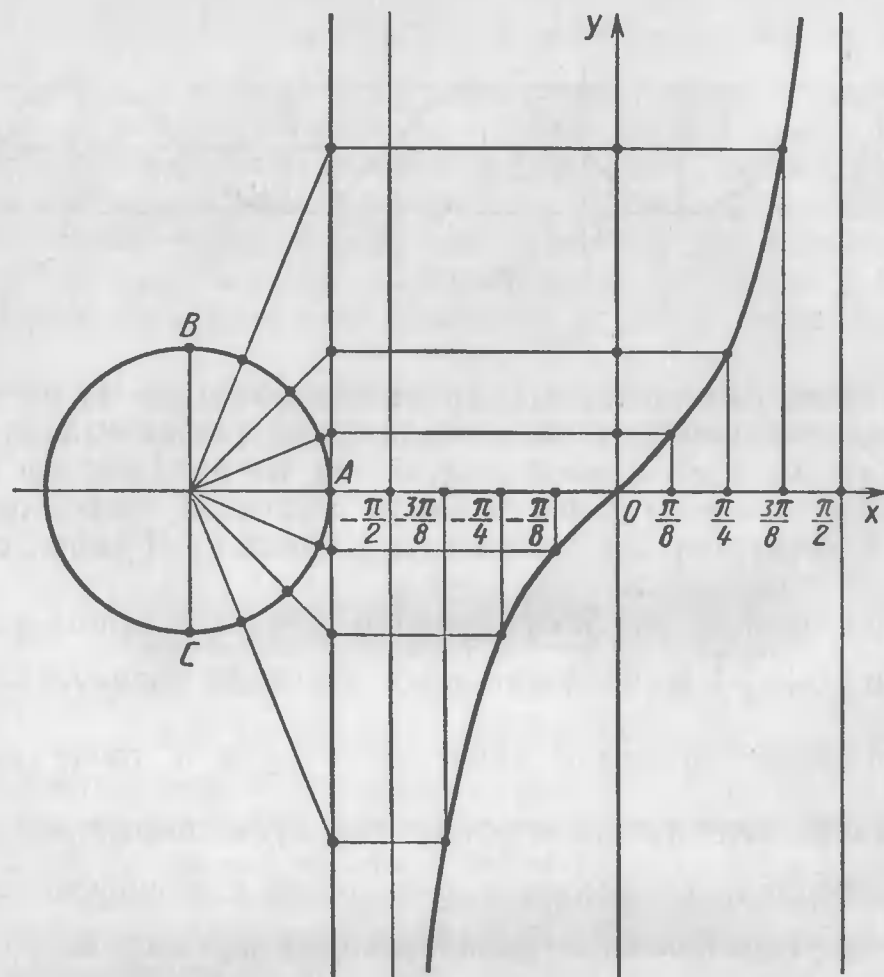


Рис. 8.

График котангенса приведен на рисунке 10.

▼\* Синус, косинус, тангенс и котангенс называют часто основными тригонометрическими функциями. Иногда рассматривают

\* Значками ▼ выделен необязательный материал.

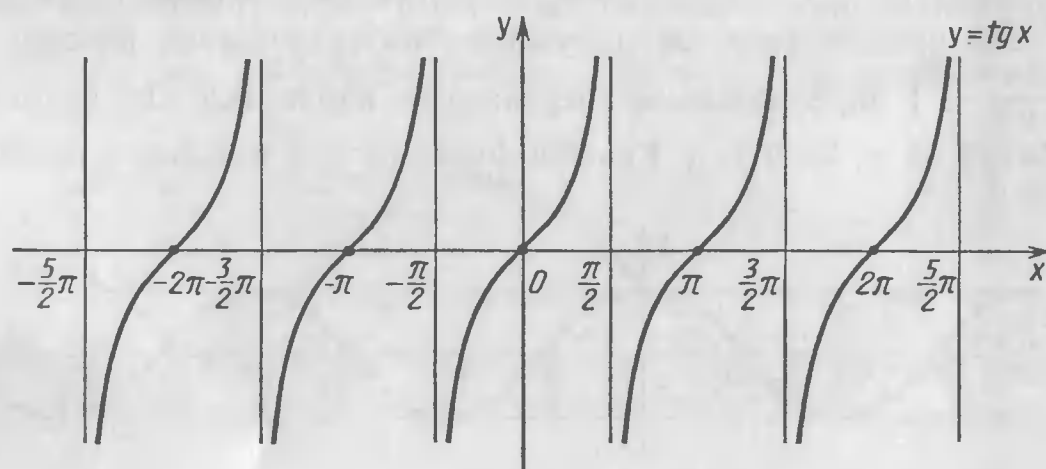


Рис. 9.

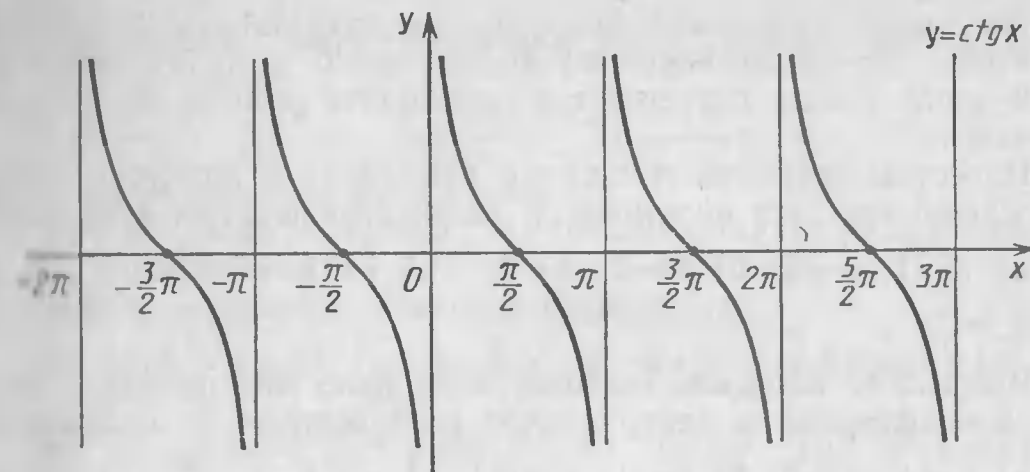


Рис. 10.

еще две основные тригонометрические функции — *секанс* и *косеканс* (обозначаются соответственно  $\sec$  и  $\operatorname{cosec}$ ):

$$\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}.$$

Для того чтобы понять, почему основных тригонометрических функций именно 6, заметим, что тригонометрические функции острого угла  $\alpha$  можно определить как отношения сторон прямоугольного треугольника с острым углом  $\alpha$  (рис. 11). Таких отношений 6:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}; \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a};$$

$$\sec \alpha = \frac{c}{b}; \quad \operatorname{cosec} \alpha = \frac{c}{a}. \quad \blacktriangledown$$

### Упражнения

- Выразите в радианной мере величины углов:  
а)  $135^\circ$ ; б)  $36^\circ$ ; в)  $250^\circ$ ; г)  $330^\circ$ .
- Выразите в градусной мере величины углов:  
а)  $\frac{2}{3}\pi$ ; б)  $-\frac{3}{4}\pi$ ; в) 1; г) 5.
- С помощью калькулятора (или таблиц) найдите радианные меры углов: а)  $17^\circ$ ; б)  $43^\circ 24'$ ; в)  $139^\circ$ ; г)  $158^\circ 36'$ .
- С помощью калькулятора (или таблиц) найдите градусные меры углов:  
а) 0,5585; б) 0,8098; в) 3,1416; г) 4,4454.
- В какой четверти находится точка  $P_\alpha$ , если:  
а)  $\alpha = \frac{7\pi}{6}$ ; б)  $\alpha = -\frac{2\pi}{3}$ ;  
в)  $\alpha = 5,2\pi$ ; г)  $\alpha = -3,1\pi$ ?

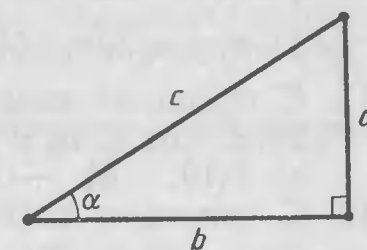


Рис. 11.

- 6\*. На какой угол надо повернуть минутную стрелку часов, чтобы перевести часы: а) вперед на 6 мин; б) назад на 6 мин? (Часы разрешается переводить только по часовой стрелке.)
7. Известны величина  $\alpha$  дуги (в радианах) и радиус  $r$  содержащей эту дугу окружности. Вычислите длину  $l$  дуги, если:  
а)  $r=1, \alpha=2$ ; б)  $r=1, \alpha=0,1$ ; в)  $r=4, \alpha=\frac{2\pi}{3}$ ; г)  $r=10, \alpha=\frac{\pi}{10}$ .
8. Вычислите площадь сектора, если известны радиус  $r$  круга и величина  $\alpha$  центрального угла сектора (в радианах):  
а)  $r=1, \alpha=2$ ; б)  $r=1, \alpha=0,1$ ; в)  $r=4, \alpha=\frac{2\pi}{3}$ ; г)  $r=10, \alpha=\frac{\pi}{10}$ .
9. а) Точка движется по окружности радиуса 30 см со скоростью 600 м/мин. Выразите ее угловую скорость в радианах в секунду.  
б) Найдите угловую скорость часовой, минутной и секундной стрелок (в радианах в минуту).
10. Постройте точки  $P_\alpha$  единичной окружности для углов  $\alpha$ , указанных в первой строке таблицы на с. 5, и проверьте правильность заполнения этой таблицы.
11. Может ли косинус быть равным:  
а) 0,67; б)  $-\frac{12}{11}$ ; в)  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; г)  $\frac{\sqrt{15}}{4}$ ?
12. Может ли синус быть равным: а)  $-2,5$ ; б)  $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ ; в)  $-\frac{\sqrt{29}}{6}$ ?
13. Укажите все значения  $x$ , для которых:  
а)  $\sin x=0$ ; б)  $\cos x=0$ ; в)  $\sin x=1$ ; г)  $\cos x=1$ ;  
д)  $\sin x=-1$ ; е)  $\cos x=-1$ .
14. Укажите все значения  $x$ , для которых:  
а)  $\operatorname{tg} x=0$ ; б)  $\operatorname{ctg} x=0$ ; в)  $\operatorname{tg} x=1$ ; г)  $\operatorname{tg} x=-1$ ;  
д)  $\operatorname{ctg} x=1$ ; е)  $\operatorname{ctg} x=-1$ .
15. На миллиметровой бумаге постройте единичную окружность, а затем углы  $\alpha$ , такие, что:  
а)  $\sin \alpha=0$ ; б)  $\cos \alpha=0,2$ ; в)  $\sin \alpha=-0,7$ ;  
г)  $\cos \alpha=-0,4$ ; д)  $\operatorname{tg} \alpha=0,5$ ; е)  $\operatorname{tg} \alpha=1,4$ ;  
ж)  $\operatorname{tg} \alpha=-0,6$ ; з)  $\operatorname{tg} \alpha=-2$ .
16. Найдите значения  $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha$  и  $\operatorname{ctg} \alpha$ , если:  
а)  $\alpha=-20\pi$ ; б)  $\alpha=\frac{11}{3}\pi$ ; в)  $\alpha=\frac{21\pi}{4}$ ; г)  $\alpha=-\frac{19\pi}{6}$ .
17. С помощью калькулятора (или таблиц) найдите значения  $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha$  и  $\operatorname{ctg} \alpha$ , если  $\alpha$  равно:  
а) 0,19; б)  $-0,9$ ; в) 1,37; г)  $-2,7$ .
18. С помощью калькулятора (или таблиц) найдите значения  $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha$  и  $\operatorname{ctg} \alpha$ , если  $\alpha$  равно:  
а)  $19^\circ$ ; б)  $111^\circ$ ; в)  $12^\circ 24'$ ; г)  $100^\circ 25'$ .

19. Определите знаки значений  $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha$  и  $\operatorname{ctg} \alpha$ , если  $\alpha$  равно:  
а)  $\frac{3}{7}\pi$ ; б)  $\frac{8}{9}\pi$ ; в)  $\frac{12}{7}\pi$ ; г)  $-\frac{7}{9}\pi$ .
20. Определите знак выражения:  
а)  $\sin 70^\circ \cos 70^\circ \operatorname{tg} 100^\circ$ ; б)  $\sin 130^\circ \cos (-15^\circ) \operatorname{tg} (-100^\circ)$ ;  
в)  $\sin 1 \cos 3 \operatorname{tg} 7$ ; г)  $\sin 8 \cos 0,2 \operatorname{tg} (-6,2)$ .
21. Найдите числовое значение выражения:  
а)  $\sin 0 + 3 \cos \frac{\pi}{2} + \sin^2 \frac{\pi}{4}$ ; б)  $3 \sin \frac{\pi}{6} - 2 \cos 0 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3}$ ;  
в)  $\sin^2 \frac{3\pi}{4} + \operatorname{ctg} \frac{5\pi}{4} + 2 \cos^3 \pi$ ; г)  $\sin^2 \frac{5\pi}{3} - \cos^2 \frac{7\pi}{4} + \sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3}$ .
22. Найдите числовое значение выражения:  
а)  $3 \sin \left(2\alpha + \frac{\pi}{4}\right) - 2 \cos \left(3\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$  при  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ;  
б)  $4 \cos \left(3\alpha - \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$  при  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ ;  
в)  $\sin^2 \left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) + 3 \operatorname{tg} \left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$  при  $\alpha = \frac{5\pi}{4}$ ;  
г)  $\cos \left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \operatorname{tg} \left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$  при  $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ .
23. Пользуясь калькулятором (или таблицей), найдите значения функции, выбирая значения аргумента с шагом 0,3, и постройте на миллиметровой бумаге график функции  $y$  на отрезке  $[0; 2\pi]$ :  
а)  $y = \sin x$ ; б)  $y = \cos x$ ; в)  $y = \operatorname{tg} x$ ; г)\*  $y = \operatorname{ctg} x$ .
24. Найдите приближенно, пользуясь соответствующим графиком:  
а)  $\sin 0,6$ ; б)  $\cos 0,9$ ; в)  $\operatorname{tg} 1,2$ ; г)\*  $\operatorname{ctg} 0,3$ .
- 25\*. Докажите, что: а) точки  $P_\alpha$  и  $P_\beta$  симметричны относительно оси  $Ox$  тогда и только тогда, когда  $\alpha = 2\pi n - \beta, n \in \mathbb{Z}$ ;  
б) точки  $P_\alpha$  и  $P_\beta$  симметричны относительно оси  $Oy$  тогда и только тогда, когда  $\alpha = (2n+1)\pi - \beta, n \in \mathbb{Z}$ ; в) точки  $P_\alpha$  и  $P_\beta$  симметричны относительно начала координат тогда и только тогда, когда  $\alpha = (2n+1)\pi + \beta, n \in \mathbb{Z}$ .

## 2. Основные формулы тригонометрии

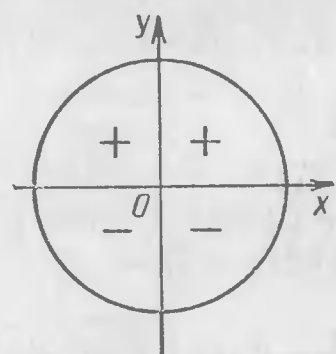
Из курса алгебры VIII класса вам известны многие формулы тригонометрии. Для того чтобы повторить их, выполните упражнения, приведенные в этом пункте (формулы см. в разделе «Материал для повторения»).

▼ Новыми для вас являются *формулы половинного аргумента*:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad (1)$$

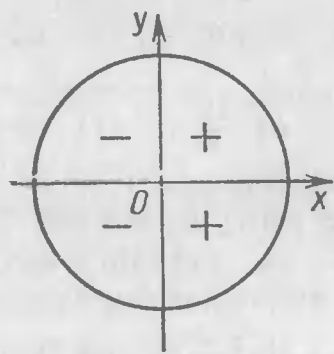
$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad (2)$$





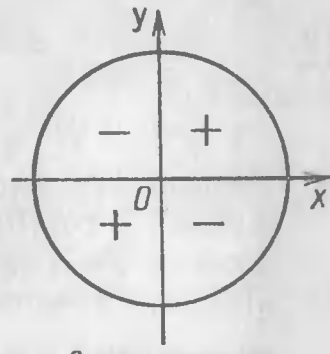
Знаки синуса

Рис. 12.



Знаки косинуса

Рис. 13.



Знаки тангенса  
и котангенса

Рис. 14.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}. \quad (3)$$

Применяя эти формулы, мы ставим знак плюс или минус перед корнем в зависимости от того, какой знак имеет левая часть. Если известно, в какой четверти расположен угол  $\alpha$ , то сделать это нетрудно — см. примеры в конце пункта. Известные из VIII класса правила определения знаков тригонометрических функций вы можете вспомнить, рассмотрев рисунки 12—14.

Для вывода формул (1) и (2) запишем формулу двойного аргумента  $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$ , подставив вместо  $t$  значение  $\frac{\alpha}{2}$ :

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Выражая правую часть этого равенства только через синус или только через косинус с помощью формулы  $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1$ , находим:

$$\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{или} \quad \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1.$$

Отсюда

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}, \quad (4)$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}. \quad (5)$$

Из формулы (4) следует формула (1), а из (5) — формула (2). Разделив почленно равенство (4) на (5), получаем, что

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad (6)$$

откуда следует формула (3).

Умножая числитель и знаменатель правой части равенства

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}, \quad (7)$$

на  $2 \cos \frac{\alpha}{2}$ , находим:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha},$$

т. е.

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}. \quad (8)$$

Аналогично, умножая числитель и знаменатель правой части равенства (7) на  $2 \sin \frac{\alpha}{2}$ , приходим к формуле

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}. \quad (9)$$

Формулы (8) и (9) менее удобны при вычислении  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ , чем формула (3), поскольку их правые части содержат и  $\sin \alpha$ , и  $\cos \alpha$ , а правая часть формулы (3) — только  $\cos \alpha$ . С другой стороны, формулы (8) и (9) не содержат знаки  $\pm$  и корня и в некоторых случаях имеют преимущество перед формулой (3).

**Пример 1.** Найдем  $\sin \frac{\pi}{12}$  без помощи таблиц:

$$\sin \frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1 - \cos \frac{\pi}{6}}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

(перед корнем стоит знак плюс, поскольку  $\frac{\pi}{12}$  — угол I четверти и, следовательно,  $\sin \frac{\pi}{12} > 0$ ).

**Пример 2.** Найдем значение  $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{8}$  без помощи таблиц.

Заметим, что  $\frac{5\pi}{8}$  — угол II четверти. Поэтому  $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{8} < 0$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{5\pi}{8} &= -\sqrt{\frac{1 - \cos \frac{5\pi}{4}}{1 + \cos \frac{5\pi}{4}}} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{4}}{1 - \cos \frac{\pi}{4}}} = -\sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}} = \\ &= -\sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}} = -\sqrt{\frac{(2 + \sqrt{2})^2}{4 - 2}} = -\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2} = -(\sqrt{2} + 1). \end{aligned}$$

**Пример 3.** Найдем  $\sin \frac{\alpha}{2}$ ,  $\cos \frac{\alpha}{2}$  и  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ , если известно, что  $\cos \alpha = 0,8$  и  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .



Угол  $\frac{\alpha}{2}$  находится в первой четверти, и, значит,  $\sin \frac{\alpha}{2} > 0$ ,  $\cos \frac{\alpha}{2} > 0$ ,  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} > 0$ . Поэтому

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-0,8}{2}} = \sqrt{0,1} \approx 0,3162,$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+0,8}{2}} = \sqrt{0,9} \approx 0,9486,$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-0,8}{1+0,8}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \approx 0,3333. \blacktriangledown$$

### Упражнения

*Формулы, связывающие тригонометрические функции одного аргумента*

26. Могут ли синус и косинус одного и того же аргумента быть равными соответственно: а) 0,6 и  $-0,8$ ; б)  $-0,4$  и  $0,7$ ; в)  $\frac{7}{25}$  и  $\frac{24}{25}$ ; г) 0 и 0; д) 1 и  $-1$ ; е)  $\frac{5}{13}$  и  $-\frac{12}{13}$ ?

27. По данному значению одной из тригонометрических функций и интервалу, в котором находится  $\alpha$ , найдите значения других трех основных тригонометрических функций:

а)  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ;      б)  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ;

в)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{5}$ ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ;      г)  $\operatorname{ctg} \alpha = -7$ ,  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ;

д)  $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$ ,  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 3\pi$ ;      е)  $\operatorname{tg} \alpha = -2$ ,  $0 < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ .

28. Вычислите:

а)  $\frac{1+\operatorname{tg} \alpha}{1+\operatorname{ctg} \alpha}$ , если  $\cos \alpha = \frac{12}{13}$  и  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ;

б)  $\frac{\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{ctg} \alpha}$ , если  $\cos \alpha = -\frac{1}{3}$  и  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ .

29. Докажите, что при  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  справедливы равенства:

а)  $\frac{\sqrt{1-\sin^2 \alpha}}{\sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1-\cos^2 \alpha}}$ ; б)  $\sqrt{\frac{1+\cos \alpha}{1-\cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1-\cos \alpha}{1+\cos \alpha}} = 2 \operatorname{ctg} \alpha$ .

Упростите выражение\* (30—32).

30. а)  $\cos \alpha \operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha$ ;      б)  $\cos \alpha - \sin \alpha \operatorname{ctg} \alpha$ ;

в)  $\cos^4 \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \sin^2 \alpha$ ;      г)  $\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha}$ .

\* Формулировка «упростите выражение» предполагает выполнение чисто формальных преобразований. Полученное выражение может быть определено на множестве, включающем в себя область определения исходного выражения. Однако находить эти области не требуется, если это не оговорено особо.

11. а)  $\frac{2 \sin^2 \beta - 1}{\sin \beta + \cos \beta}$ ;      б)  $\frac{1 - 2 \cos^2 \varphi}{\cos \varphi - \sin \varphi}$ ;

в)  $\frac{2 \cos^2 x - 1}{2 \sin^2 x - 1}$ ;      г)  $\frac{1}{1 + \sin \gamma} + \frac{1}{1 - \sin \gamma}$ .

12. а)  $\sin^2 t - \sin^4 t + \cos^4 t$ ;

б)  $\cos^2 x - \cos^4 x + \sin^4 x$ ;

в)  $\sin^2 \alpha - \sin^2 \beta - \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha$ ;

г)  $\sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha \sin^2 \beta$ .

### Формулы приведения

13. Приведите к значению тригонометрической функции аргумента, принадлежащего отрезку  $[0; \frac{\pi}{4}]$ :

а)  $\sin \frac{28\pi}{3}$ ; б)  $\cos \frac{31\pi}{4}$ ;      в)  $\operatorname{tg} \left(-\frac{58\pi}{3}\right)$ ;      г)  $\sin \left(-\frac{29\pi}{6}\right)$ ;

д)  $\operatorname{tg} 800^\circ$ ; е)  $\sin (-405^\circ)$ ; ж)  $\cos (-600^\circ)$ ; з)  $\operatorname{ctg} (-945^\circ)$ .

14. Докажите тождество:

а)  $\sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ ; б)  $\operatorname{tg} (\pi - \alpha) = \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ .

15. Упростите выражение:

а)  $2 \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} (y - \pi) + \operatorname{ctg} \left(\frac{3\pi}{2} - y\right)$ ;

б)  $\frac{\sin (-\alpha)}{\sin (180^\circ - \alpha)} - \frac{\operatorname{tg} (90^\circ - \alpha)}{\operatorname{ctg} \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin (90^\circ + \alpha)}$ ;

в)  $\frac{\operatorname{tg} (180^\circ - \alpha) \cos (180^\circ - \alpha) \operatorname{tg} (90^\circ - \alpha)}{\sin (90^\circ + \alpha) \operatorname{ctg} (90^\circ + \alpha) \operatorname{tg} (90^\circ + \alpha)}$ ;

г)  $\frac{\operatorname{tg} (270^\circ - \alpha) \sin 130^\circ \cos 320^\circ \sin 270^\circ}{\operatorname{ctg} (180^\circ - \alpha) \cos 50^\circ \sin 220^\circ \cos 360^\circ}$ .

16. Вычислите без помощи таблиц и калькулятора:

а)  $10 \operatorname{ctg} 135^\circ \sin 225^\circ \cos 315^\circ$ ;

б)  $8 \sin \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{3} \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} \operatorname{ctg} \frac{7\pi}{6}$ .

### Формулы сложения и их следствия

Вычислите (37—38).

17. а)  $\cos 0,3\pi \sin 0,2\pi + \sin 0,3\pi \cos 0,2\pi$ ;

б)  $\cos \frac{\pi}{15} \cos \frac{3\pi}{5} - \sin \frac{\pi}{15} \sin \frac{3\pi}{5}$ ;

в)  $\cos 35^\circ \sin 65^\circ - \sin 35^\circ \cos 65^\circ$ ;

г)  $\cos 79^\circ \cos 34^\circ + \sin 79^\circ \sin 34^\circ$ .

18. а)  $\frac{\operatorname{tg} \frac{\pi}{15} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{15}}{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{15} \operatorname{tg} \frac{4\pi}{15}}$ ;      б)  $\frac{\operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}}{1 + \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} \operatorname{tg} \frac{5\pi}{12}}$ ;

$$в) \frac{\operatorname{tg} 22^\circ + \operatorname{tg} 23^\circ}{1 - \operatorname{tg} 22^\circ \operatorname{tg} 23^\circ}; \quad г) \frac{\operatorname{tg} 72^\circ - \operatorname{tg} 42^\circ}{1 + \operatorname{tg} 72^\circ \operatorname{tg} 42^\circ}.$$

39. Вычислите  $\cos(\alpha + \beta)$ , если:

а)  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\cos \beta = -\frac{3}{5}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ,  $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ ;

б)  $\sin \alpha = \sin \beta = \frac{5}{13}$ ;  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ .

40. Вычислите  $\sin(\alpha + \beta)$ , если:

а)  $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ ,  $\sin \beta = -\frac{4}{5}$  и  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ ;

б)  $\cos \alpha = \cos \beta = -\frac{4}{5}$  и  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ,  $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ .

41. Вычислите  $\operatorname{tg}(x + y)$  и  $\operatorname{tg}(x - y)$ , если:

а)  $\operatorname{tg} x = 1,2$  и  $\operatorname{tg} y = 0,7$ ; б)  $\operatorname{tg} x = -0,2$  и  $\operatorname{tg} y = 1,5$ .

42. Упростите выражение:

а)  $\sin \alpha \cos 3\alpha - \cos \alpha \sin 3\alpha$ ; б)  $\cos 4\alpha \cos \alpha + \sin 4\alpha \sin \alpha$ ;

в)  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ ; г)  $\sin\left(\beta + \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\beta - \frac{\pi}{3}\right)$ .

43. Докажите тождество:

а)  $\frac{1 + \operatorname{tg} \varphi}{1 - \operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)$ ; б)  $\frac{\cos t + \sin t}{\cos t - \sin t} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + t\right)$ ;

в)  $\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta$ ;

г)  $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta) = \cos 2\alpha$ .

44. Известно, что  $\sin \alpha = 0,6$  и  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Вычислите:

а)  $\sin 2\alpha$ ; б)  $\cos 2\alpha$ ; в)  $\operatorname{tg} 2\alpha$ ; г)  $\operatorname{ctg} 2\alpha$ .

45. Известно, что  $\cos \beta = -\frac{5}{13}$  и  $\sin \beta > 0$ . Вычислите:

а)  $\sin 2\beta$ ; б)  $\cos 2\beta$ ; в)  $\operatorname{tg} 2\beta$ ; г)  $\operatorname{ctg} 2\beta$ .

46. Докажите равенство:

а)  $\sin \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}$ ; б)  $1 - 4 \sin^2 \beta \cos^2 \beta = \cos^2 2\beta$ .

47. Упростите выражение:

а)  $\frac{2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{12}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{12}}$ ; б)  $1 - 2 \sin^2 \varphi + \cos 2\varphi$ ; в)  $\cos 4x + 2 \sin^2 2x$ ;

г)  $(\cos^2 t + 2 \sin t \cos t - \sin^2 t)^2$ .

48. Преобразуйте в произведение выражение:

а)  $\sin 50^\circ + \sin 70^\circ$ ; б)  $\cos 27^\circ + \cos 63^\circ$ ;

в)  $\sin \frac{7\pi}{18} - \sin \frac{\pi}{9}$ ; г)  $\cos \frac{2\pi}{5} - \cos \frac{3\pi}{5}$ .

49. Вычислите, не пользуясь калькулятором или таблицами:

а)  $\cos 105^\circ + \cos 75^\circ$ ; б)  $\cos 15^\circ - \cos 75^\circ$ ;

в)  $\sin \frac{\pi}{12} - \sin \frac{5\pi}{12}$ ; г)  $\cos \frac{\pi}{12} + \cos \frac{11\pi}{12}$ .

40. Упростите выражение:

а)  $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \varphi\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3} - \varphi\right)$ ;

б)  $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \varphi\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6} - \varphi\right)$ ;

в)  $\frac{\sin 50^\circ - \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ}$ ;

г)  $\sin^2\left(\alpha - \frac{\pi}{8}\right) - \cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{8}\right)$ .

51. Докажите тождество:

а)  $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$ ;

б)  $\frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)} = \operatorname{ctg} \alpha$ ;

в)  $\frac{\sin \alpha + 2 \sin 2\alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 2 \cos 2\alpha + \cos 3\alpha} = \operatorname{tg} 2\alpha$ ; г)  $\frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(\alpha + \beta)} = \operatorname{tg} \beta$ .

### Формулы половинного аргумента

52\*. Найдите  $\sin \frac{\alpha}{2}$ ,  $\cos \frac{\alpha}{2}$  и  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ , если:

а)  $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ; б)  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ .

53\*. Вычислите, не пользуясь калькулятором или таблицами:

а)  $\sin \frac{\pi}{8}$ ; б)  $\cos \frac{\pi}{8}$ ; в)  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$ ; г)  $\sin \frac{17\pi}{12}$ ; д)  $\cos \frac{\pi}{12}$ ;

е)  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$ .

54\*. Докажите тождество:

а)  $1 + \sin \beta = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{2}\right)$ ; б)  $1 - \sin \varphi = 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ ;

в)  $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ ; г)  $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ .

55\*. Упростите выражение:

а)  $\frac{1 + \cos \gamma}{1 - \cos \gamma} \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2} - \cos^2 \gamma$ ; б)  $\frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} \operatorname{ctg}^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \varphi$ ;

в)  $\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x} - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$ ; г)  $1 + \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$ .

56\*. Преобразуйте в произведение выражение:

а)  $1 + \sin \varphi + \cos \varphi$ ; б)  $1 - \sin \varphi + \cos \varphi$ ;

в)  $1 + \sin \varphi - \cos \varphi$ ; г)  $1 - \sin \varphi - \cos \varphi$ .

Известно, что  $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ , причем  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  положительны. Докажите тождество (57—59).

57\*. а)  $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$ ;

$$б) \sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma = 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2};$$

$$в) \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1 + 4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2};$$

$$г) \cos \alpha + \cos \beta - \cos \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} - 1.$$

$$58*. а) \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma;$$

$$б) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}.$$

$$59*. а) \sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma;$$

$$б) \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = -1 - 4 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma;$$

$$в) \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 - 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma;$$

$$г) \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = 2 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma.$$

## § 2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ

### 3. Функция

1. С понятием функции вы познакомились в курсе алгебры VI—VIII классов. При изучении начал анализа удобно принять следующее определение.

Функцией с областью определения  $D$  называется соответствие, при котором каждому числу  $x$  из множества  $D$  сопоставляется некоторое вполне определенное число  $y$ .

Функции обозначаются обычно латинскими (а иногда греческими) буквами. Рассмотрим произвольную функцию  $f$ . Число  $y$ , соответствующее числу  $x$ , называют значением функции  $f$  в точке  $x$  и обозначают  $f(x)$ . Область определения функции  $f$  обозначают  $D(f)$ . Множество, состоящее из всех чисел  $f(x)$ , где  $x$  принадлежит области определения функции  $f$ , называют областью значений функции  $f$  и обозначают  $E(f)$ .

Пример 1. С помощью формулы

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (1)$$

каждому  $x$  из отрезка  $[-1; 1]$  сопоставляется (ставится в соответствие) значение  $f(x)$ . Например:

$$f(0) = \sqrt{1-0^2} = 1; \quad f(1) = 0; \\ f(-1) = 0.$$

Поэтому естественно считать, что эта формула задает функцию, область определения которой — отрезок  $[-1; 1]$ . Область значений этой функции — отрезок  $[0; 1]$  (рис. 15). Коротко можно записать:

$$D(f) = [-1; 1], \quad E(f) = [0; 1].$$

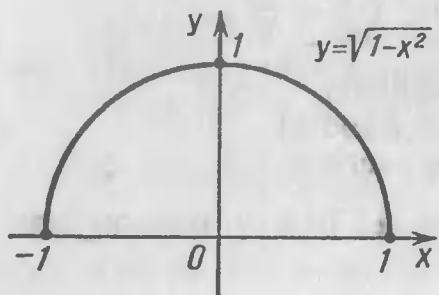


Рис. 15.

Чаще всего функцию задают с помощью какой-либо формулы. При этом если не дано дополнительных ограничений, то областью определения функции, заданной формулой, считают множество всех значений переменной, при которых эта формула имеет смысл.

Пример 2. Формула

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

имеет смысл при всех  $x \neq 0$ , поэтому областью определения функции  $f(x) = \frac{1}{x}$  считают множество всех не равных нулю действительных чисел. Область ее значений совпадает с областью определения и является объединением интервалов  $(-\infty; 0)$  и  $(0; \infty)$ .

Объединением двух множеств  $A$  и  $B$  называется множество, каждый элемент которого принадлежит хотя бы одному из множеств  $A$  и  $B$ . Объединение  $A$  и  $B$  обозначается так:  $A \cup B$ . Например, объединением отрезков  $[0; 2]$  и  $[1; 3]$  является отрезок  $[0; 3]$ .

Символом  $\cup$  удобно пользоваться для обозначения числовых множеств, которые можно представить в виде объединения числовых промежутков. Так, ответ в примере 2 можно записать так:

$$D(f) = E(f) = (-\infty; 0) \cup (0; \infty).$$

Пример 3. Область определения функций  $f(x) = \sin x$  и  $f(x) = \cos x$  — вся числовая прямая:

$$D(\sin) = (-\infty; \infty); \quad D(\cos) = (-\infty; \infty).$$

Область значений этих функций — отрезок  $[-1; 1]$ :

$$E(\sin) = [-1; 1]; \quad E(\cos) = [-1; 1].$$

Область определения функции  $y = \operatorname{tg} x$  — объединение всех интервалов вида

$$\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right),$$

где  $n \in \mathbb{Z}$ , а область ее значений — вся числовая прямая:  $E(\operatorname{tg}) = (-\infty; \infty)$ .

Пример 4. Целой частью числа  $x$  (обозначается  $[x]$ ) называется наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ . Поставив в соответствие каждому действительному числу  $x$  его целую часть, получим функцию  $f(x) = [x]$ , область определения кото-

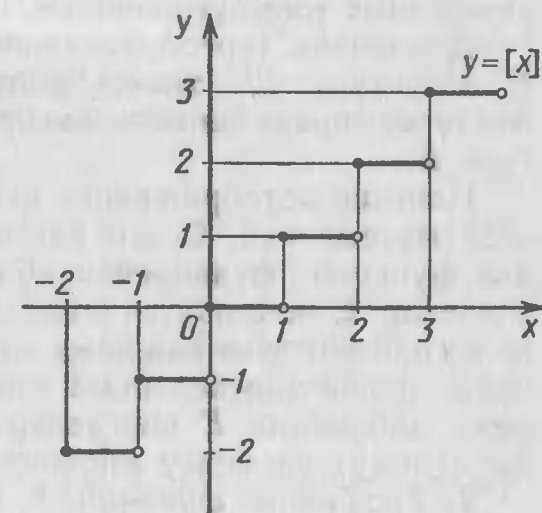


Рис. 16.

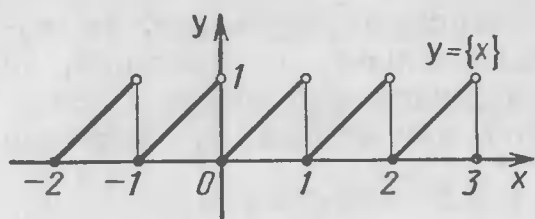


Рис. 17.

Обычно для обозначения чисел из области определения функции  $f$  выбирают определенную букву, называемую *независимой переменной* или *аргументом*; чаще всего это буква  $x$ . Условившись об этом, вместо оборота «функция  $f$ , заданная формулой  $f(x)=x^2$ » для краткости говорят «функция  $f(x)=x^2$ » или просто «функция  $x^2$ ». Для обозначения соответствующих значений функции чаще всего выбирают букву  $y$ . Сделав этот выбор, можно, например, говорить «функция  $y=x^2$ ». Однако следует понимать, что равенства  $f(x)=x^2$ ,  $f(y)=y^2$ ,  $u=z^2$  определяют одну и ту же функцию.

▼ Функцию  $f$  с областью определения  $D$  и областью значений  $E$  называют также *отображением* множества  $D$  на множество  $E$ . Можно сказать, например, что формула (1) задает отображение  $f$  отрезка  $[-1; 1]$  на отрезок  $[0; 1]$ . Тем самым слова «функция» и «отображение» являются синонимами.

Нередко рассматривают функции (отображения), область определения или область значений которых не являются числовыми множествами. С такими примерами, по существу, вы уже встречались на уроках геометрии. Например, площадь многоугольника при фиксированной единице измерения площадей — это функция, область определения которой — множество многоугольников плоскости, а область значений — множество неотрицательных действительных чисел (площадь 0 имеют «вырожденные многоугольники», например отрезок).

Движение (преобразование подобия), переводящее фигуру  $F$  в фигуру  $F'$ , также является отображением (функцией): область определения — фигура  $F$ , а область значений — фигура  $F'$ .

Понятие «отображение» относится к числу основных понятий всей математики. С его помощью можно дать такое определение функции: функцией с областью определения  $D$  и областью значений  $E$  называется отображение множества  $D$  на множество  $E$ , при котором каждому элементу множества  $D$  соответствует один вполне определенный элемент множества  $E$ , а каждый элемент множества  $E$  поставлен в соответствие некоторому (хотя бы одному) элементу множества  $D$ . ▼

2. *Графиком функции  $f$*  называют множество точек  $(x; y)$  координатной плоскости, где  $y=f(x)$ , а  $x$  «пробегают» всю область определения функции  $f$ . Для того чтобы подмножество

рой — множество  $R$  действительных чисел, а область значений — множество  $Z$  целых чисел (рис. 16).

Разность  $x - [x]$  называют *дробной частью* числа  $x$  и обозначают  $\{x\}$ . График функции  $f(x)=\{x\}$  изображен на рисунке 17.

координатной плоскости являлось графиком какой-либо функции, необходимо, чтобы это подмножество имело не более одной общей точки с любой прямой, параллельной оси  $Oy$ . Например, множество, изображенное на рисунке 18, не является графиком функции, так как оно содержит две точки с одной и той же абсциссой  $a$ , но разными ординатами  $b_1$  и  $b_2$ . Если бы мы сочли это множество графиком функции, то пришлось бы считать, что эта функция имеет при  $x=a$  сразу два значения  $b_1$  и  $b_2$ , что противоречит определению функции.

Часто функцию задают графически — предъявляют ее график. При этом для любого  $x_0$  из области определения легко найти соответствующее значение  $y_0$  функции (рис. 19).

3. Функцию  $f$  называют *возрастающей на множестве  $P$* , если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции. Другими словами, *функция  $f$  возрастает на множестве  $P$ , если для любых  $x_1$  и  $x_2$  из множества  $P$ , таких, что  $x_1 > x_2$ , выполнено неравенство  $f(x_1) > f(x_2)$ .*

Функцию  $f$  называют *убывающей на множестве  $P$* , если большему значению аргумента из этого множества соответствует меньшее значение функции, т. е. для любых  $x_1$  и  $x_2$ , принадлежащих множеству  $P$  и таких, что  $x_1 > x_2$ , выполнено неравенство  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Пример 5. Функция  $y=x^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) возрастает при нечетном  $n$  на всей числовой прямой. При четном  $n$  функция  $y=x^n$  возрастает на промежутке  $[0; \infty)$  и убывает на промежутке  $(-\infty; 0]$ .

Докажем сначала, что функция  $y=x^n$  возрастает на промежутке  $[0; \infty)$  при любом натуральном  $n$ . Пусть  $x_1 > x_2 \geq 0$ . Тогда по свойству степени  $x_1^n > x_2^n$ . Теперь рассмотрим случай четного  $n$ . Пусть  $x_2 < x_1 \leq 0$ , тогда  $-x_2 > -x_1 \geq 0$ , и потому  $(-x_2)^n > (-x_1)^n$ , т. е.  $x_2^n > x_1^n$ . Этим доказано убывание на  $(-\infty; 0]$  функции  $y=x^n$  при четном  $n$ .

Осталось рассмотреть случай нечетного  $n$ . Если  $x_2 < 0 < x_1$ , то  $x_2^n < 0 < x_1^n$ . Если  $x_2 < x_1 \leq 0$ , то  $-x_2 > -x_1 \geq 0$ , и потому  $(-x_2)^n > (-x_1)^n$  т. е.  $-x_2^n > -x_1^n$ , откуда следует, что  $x_2^n < x_1^n$ . Мы видим, что для нечетного  $n$  из неравенства  $x_2 < x_1$  следует не-

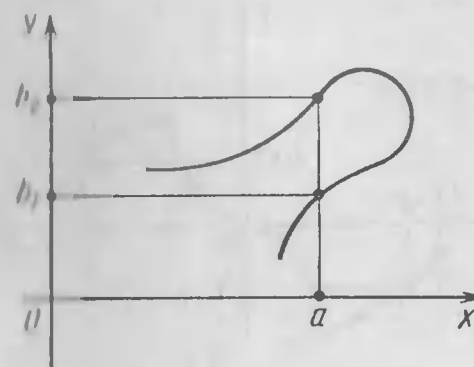


Рис. 18.

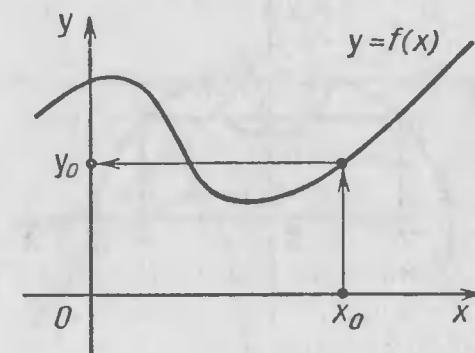


Рис. 19.



равенство  $x_2^n < x_1^n$ . Итак, функция  $y = x^n$  при нечетном  $n$  возрастает на всей числовой прямой.

**Пример 6.** Докажем, что если функция  $f$  возрастает на всей числовой прямой, то функция  $y = -f(x)$  убывает на всей числовой прямой.

Пусть  $x_1 > x_2$ , тогда в силу возрастания функции  $f$  выполнено неравенство  $f(x_1) > f(x_2)$ , откуда  $-f(x_1) < -f(x_2)$ . Итак, для любых действительных  $x_1$  и  $x_2$ , таких, что  $x_1 > x_2$ , выполнено неравенство  $-f(x_1) < -f(x_2)$ , а это и означает, что функция  $y = -f(x)$  убывает.

**Пример 7.** Функция  $f(x) = \{x\}$  (дробная часть  $x$ ) возрастает на каждом промежутке  $[n; n+1)$ , где  $n$  — любое целое число (см. рис. 17).

При исследовании функций на возрастание и убывание надо указывать промежутки возрастания и убывания максимальной длины. Так, можно было бы сказать, что функция  $f(x) = \{x\}$  возрастает на промежутках  $[n; n+0,5]$ . Это верно, но такой ответ неполон.

**4.** Рассмотрим функции, области определения которых симметричны относительно начала координат, т. е. вместе с произвольным числом  $x$  область определения содержит и число  $(-x)$ . Для таких функций определены понятия четности и нечетности.

Функция  $f$  называется *четной*, если для любого  $x$  из ее области определения  $f(-x) = f(x)$  (рис. 20). Функция  $f$  *нечетна*, если для любого  $x$  из области определения  $f(-x) = -f(x)$  (рис. 21).

**Пример 8.** Функция  $f(x) = x^4$  четная, а функция  $g(x) = x^3$  нечетная. Действительно, область определения каждой из них (это вся числовая прямая) симметрична относительно точки  $O$  и для любого  $x$  выполнены равенства

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^4 = x^4 = f(x), \\ g(-x) &= (-x)^3 = -x^3 = -g(x). \end{aligned}$$

Графики функций  $x^4$  и  $x^3$  изображены на рисунках 22 и 23. При построении графиков четных и нечетных функций будем пользоваться следующими известными вам свойствами.

*График четной функции симметричен относительно оси орди-*

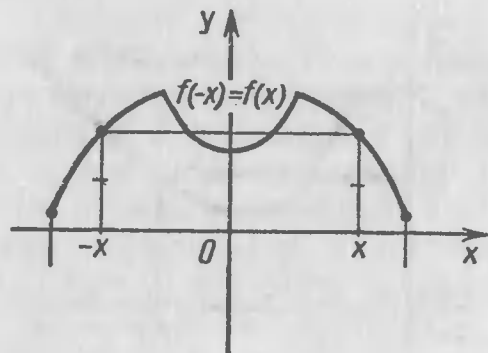


Рис. 20.

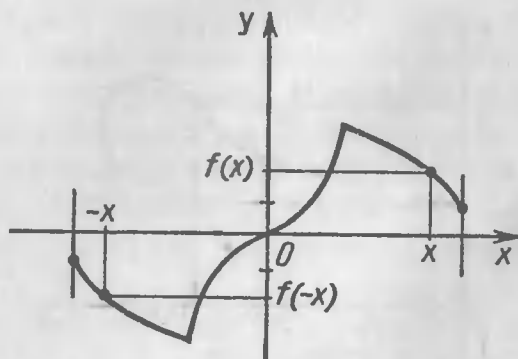


Рис. 21.

*нат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.*

**Пример 9.** Функция  $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^3 - x}$  четная, так как ее область определения симметрична относительно начала координат (она состоит из всех чисел, отличных от  $-1, 0$  и  $1$ ) и для всех  $x \in D(f)$  выполнено равенство

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + (-x)}{(-x)^3 - (-x)} = \frac{-x^3 - x}{-x^3 + x} = \frac{x^3 + x}{x^3 - x} = f(x).$$

График этой функции симметричен относительно оси  $Oy$  (рис. 24).

**Пример 10.** Функция  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  нечетная (докажите это самостоятельно). Ее график симметричен относительно начала координат (рис. 25).

**Пример 11.** Основные тригонометрические функции синус, тангенс и котангенс являются нечетными, а косинус — четной функцией. Поэтому графики синуса, тангенса и котангенса (см. рис. 6, 9, 10) симметричны относительно начала координат, а график косинуса (см. рис. 7) — относительно оси ординат.

**Пример 12.** Функция  $f(x) = \frac{x^2 + x}{x + 1}$  при всех  $x \neq -1$  совпадает с нечетной функцией  $g(x) = x$ . Однако  $f$  не является ни четной, ни нечетной функцией, так как ее область определения

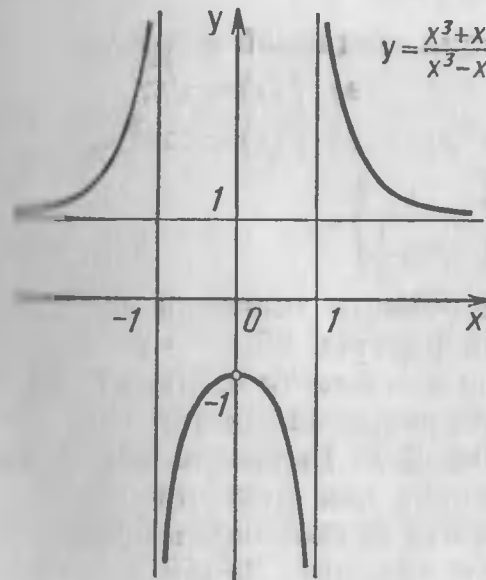


Рис. 24.

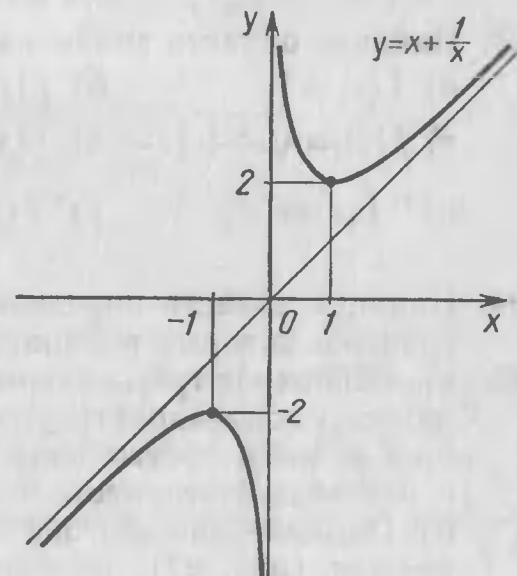


Рис. 25.

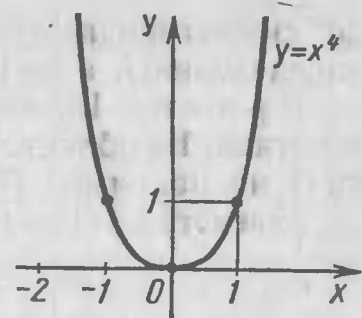


Рис. 22.

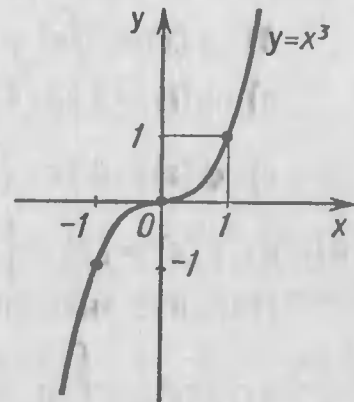


Рис. 23.



не симметрична относительно точки  $O$ :  $1$  входит в область определения  $f$ , а  $-1$  нет.

**Пример 13.** Функция  $f(x) = x^2 + x$  не является ни четной, ни нечетной. Ее область определения симметрична относительно точки  $O$ , но, например,  $f(1) = 2$ ,  $f(-1) = 0$ , т. е. при  $x = 1$  не выполнено ни равенство  $f(1) = f(-1)$ , ни равенство  $f(1) = -f(-1)$ .

### Упражнения

60. Найдите значения функции в указанных точках:

а)  $f(x) = x + \frac{1}{x}$  в точках  $1, -1, 10, 2t$ ;

б)  $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  в точках  $0, 1, -1, 3t$ ;

в)  $\varphi(t) = 2 \sin 4t$  в точках  $\frac{\pi}{2}, \pi, 1, -x$ ;

г)  $\varphi(z) = 3 \cos(z - \frac{\pi}{4})$  в точках  $\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, 1, t + \frac{3}{4}\pi$ .

61. а)  $f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

Найдите значения  $f(0), f(-3), f(2), f(t^2)$ ;

б)  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

Найдите значения  $f(2), f(-3), f(t^2)$ .

62. Найдите область определения функции, заданной формулой:

а)  $f(x) = ax + b$ ; б)  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ;

в)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ; г)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ ;

д)  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}$ ; е)  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$ ;

ж)  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ ; з)  $f(x) = \frac{1}{\cos x - 1}$ .

63. Найдите область значений функции, заданной формулой:

а)  $f(x) = 1$ ; б)  $f(x) = x$ ; в)  $f(x) = \sqrt{x}$ ;

г)  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ; д)  $f(x) = \sin^2 x$ ; е)  $f(x) = \cos^2 x$ ;

ж)\*  $f(x) = [x^2]$ ; з)\*  $f(x) = \left\{ \frac{1}{x^2 + \frac{1}{2}} \right\}$ .

64. Найдите область определения и область значений функций, графики которых изображены на рисунке 26, а — в.

65. а) Основание треугольника равно  $a$ , а высота  $h$ . Параллельно данному основанию треугольника проведена прямая, отсекающая от него треугольник с высотой  $x$ . Выразите основание и площадь отсеченного треугольника как функции от  $x$ .  
б) Параллельно диагонали квадрата со стороной  $a$  проведена прямая (рис. 27), пересекающая квадрат. Задайте зависимость между площадью  $S$  отсекаемой фигуры и расстоянием  $x$

от этой прямой до вершины  $A$  квадрата. Найдите область определения функции  $S(x)$ . Начертите ее график.

66. Является ли графиком функции фигура, изображенная: а) на рисунке 28; б) на рисунке 29?

67. Постройте график функции:

а)  $y = x^2 + 2x - 3$ ;

б)  $y = x^2 - 5x + 6$ ;

в)  $y = \frac{1}{x-2}$ ; г)  $y = \frac{2}{x+3}$ ;

д)  $y = x^3 + 1$ ; е)  $y = (x-1)^3$ ;

ж)  $y = \sqrt{x}$ ; з)  $y = \sqrt{x-1}$ .

68. Нарисуйте эскиз графика какой-либо функции:

а) возрастающей на промежутке  $(-\infty; 2]$  и убывающей на промежутке  $[2; \infty)$ ;

б) возрастающей на промежутках  $(-\infty; -2]$  и  $[0; 1]$  и убывающей на промежутках  $[-2; 0]$  и  $[1; \infty)$ .

Найдите промежутки возрастания и убывания функции (69—70).

69. а)  $f(x) = -3x + 2$ ;

б)  $f(x) = x - 2$ ;

в)  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ ;

г)  $f(x) = -2x^2 + 6x - 7$ .

70. а)  $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ ;

б)  $f(x) = -\frac{1}{x}$ ;

в)  $f(x) = \sqrt{x}$ ;

г)  $f(x) = -\sqrt{x}$ .

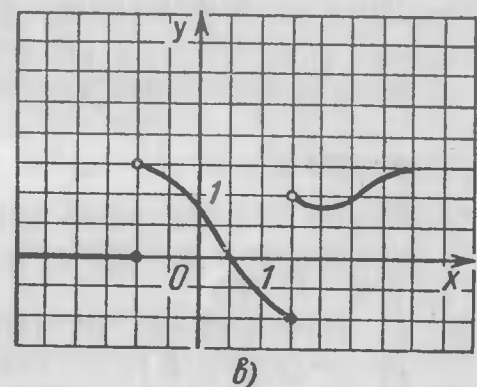
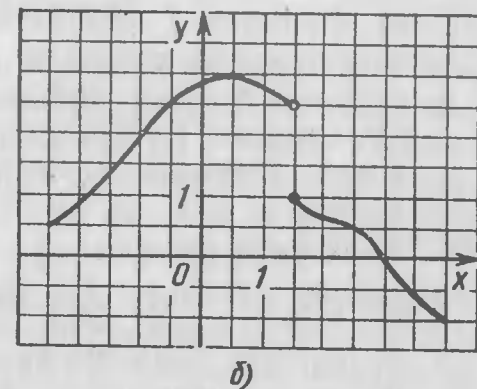
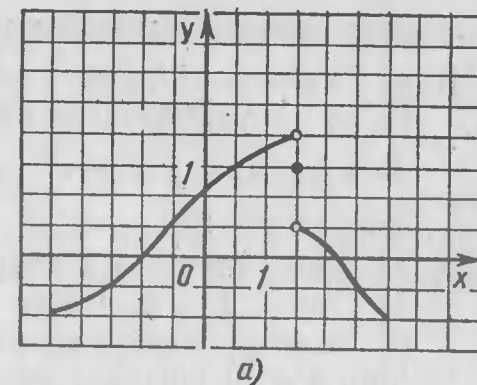


Рис. 26.

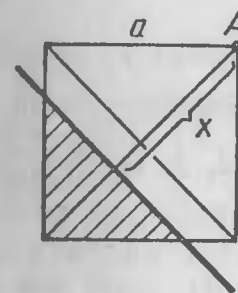


Рис. 27

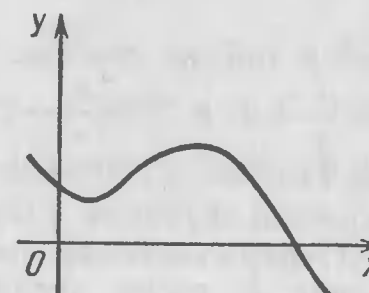


Рис. 28.

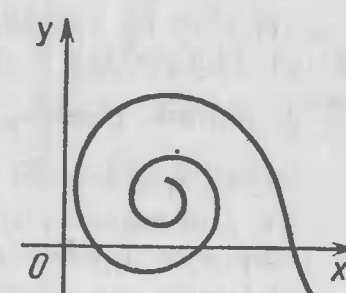


Рис. 29.

Докажите следующие утверждения (71—73).

71. а) Функция  $f(x) = x^2$  является возрастающей на промежутке  $[0; \infty)$  и убывающей на промежутке  $(-\infty; 0]$ ;  
 б) функция  $f(x) = \frac{1}{x}$  является убывающей на каждом из промежутков  $(-\infty; 0)$  и  $(0; \infty)$ , но не на их объединении.
72. а) Если функция  $f$  возрастает на промежутке  $I$ , то функция  $kf$  (при  $k > 0$ ) тоже возрастает на этом промежутке;  
 б) если функция  $f$  возрастает на промежутке  $I$ , то функция  $kf$  (при  $k < 0$ ) убывает на этом промежутке.
73. а) Функция  $f$  возрастает на множестве  $P$  тогда и только тогда, когда разности  $x_1 - x_2$  и  $f(x_1) - f(x_2)$  имеют одинаковые знаки для любых  $x_1$  и  $x_2$  из множества  $P$  ( $x_1 \neq x_2$ );  
 б) функция  $f$  убывает на множестве  $P$  тогда и только тогда, когда разности  $x_1 - x_2$  и  $f(x_1) - f(x_2)$  имеют разные знаки для любых  $x_1$  и  $x_2$  из множества  $P$  ( $x_1 \neq x_2$ ).
74. Докажите четность функции:  
 а)  $x^2 + x^4$ ; б)  $\frac{1}{x^2} + 2$ ; в)  $\sqrt{x^2 + 1}$ ; г)  $|x^3|$ ;  
 д)  $\sin x^2$ ; е)  $\sin |x|$ ; ж)  $\cos 2x$ ; з)  $|x| + \cos x$ .
75. Докажите нечетность функции:  
 а)  $x^3 + x$ ; б)  $\frac{1}{x^5}$ ; в)  $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ ; г)  $x^5 - x$ ;  
 д)  $\sin x^3$ ; е)  $\operatorname{tg} 5x$ ; ж)  $\frac{1 - \cos 2x}{x^7}$ ; з)  $\frac{(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)^2}{\sin x \cos x}$ .
- Какие из указанных ниже функций являются четными, какие нечетными, а какие не являются ни четными, ни нечетными (76—77)?
76. а)  $\sin x + \operatorname{ctg} x$ ; б)  $|\sin x|$ ; в)  $x^4 + \operatorname{tg}^2 x + 1$ ;  
 г)  $x^3 + \operatorname{tg}^2 x + 1$ .
77. а)  $\cos x - \operatorname{tg} x$ ; б)  $\frac{x + \sin x}{x - \sin x}$ ; в)  $\sin x \cos x \operatorname{tg} x + 1$ ;  
 г)  $(x^2 + 1) \sin x$ .
78. а) Докажите, что функция  $y = \frac{1}{x^2}$  является четной, и постройте ее график.  
 б) Докажите, что функция  $y = \frac{1}{x^3}$  является нечетной, и постройте ее график.
79. а) Постройте в одной и той же системе координат графики функций  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = \frac{1}{x} + 2$  и  $y = \frac{1}{x} - 2$ . (Предварительно найдите значения этих функций в точках  $\pm 3, \pm 2, \pm 1, \pm \frac{1}{2}$ .)  
 б) Докажите, что график функции  $f(x) + b$  получается из графика функции  $f(x)$  параллельным переносом вдоль оси ординат на расстояние  $b$  вверх (если  $b > 0$ ) или вниз (если  $b < 0$ ).

80. а) Постройте в одной и той же системе координат графики функций  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = \frac{1}{x-2}$  и  $y = \frac{1}{x+2}$  (предварительно найдите значения этих функций в точках  $\pm 1; \pm 3; \pm 4; \pm \frac{1}{2}$ ).

б) Докажите, что график функции  $f(x-a)$  получается из графика функции  $f(x)$  параллельным переносом вдоль оси абсцисс на расстояние  $a$  вправо (если  $a > 0$ ) или влево (если  $a < 0$ ).

#### 4. Исследование функций

1. Начиная с VI класса вы строили графики функций «по точкам». Во многих случаях этот метод дает хорошие результаты, если, конечно, отметить достаточно большое число точек. Однако при этом приходится составлять большие таблицы значений функций, а главное, можно не заметить существенных особенностей функции и в итоге ошибиться при построении графика.

Предположим, например, что, вычислив значения функции в 15 точках и отметив соответствующие точки графика на координатной плоскости, мы пришли к рисунку 30. Естественно предположить, что эскиз графика близок к непрерывной кривой, проходящей через все эти точки (рис. 31). Однако «настоящий» график (естественно, также проходящий через эти точки) может быть совершенно не похож на этот эскиз (рис. 32, 33).

Для того чтобы избежать ошибок, надо научиться выявлять характерные особенности функции, т. е. предварительно провести ее исследование. Посмотрим на примере функции  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ , какие вопросы полезно включить в такое исследование.

1) Найдем область определения функции. В данном случае  $D(f)$  — вся числовая прямая, поскольку знаменатель  $x^2 + 1$  не об-

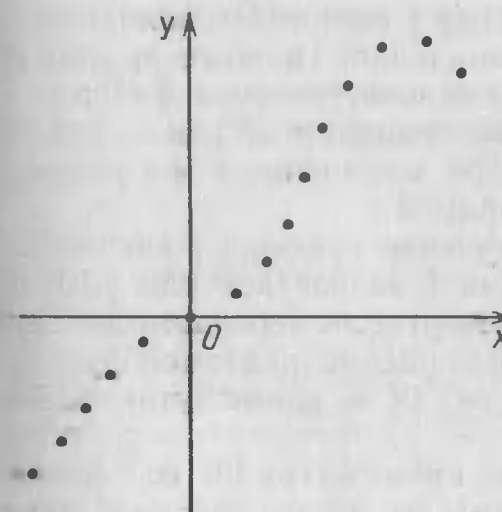


Рис. 30.

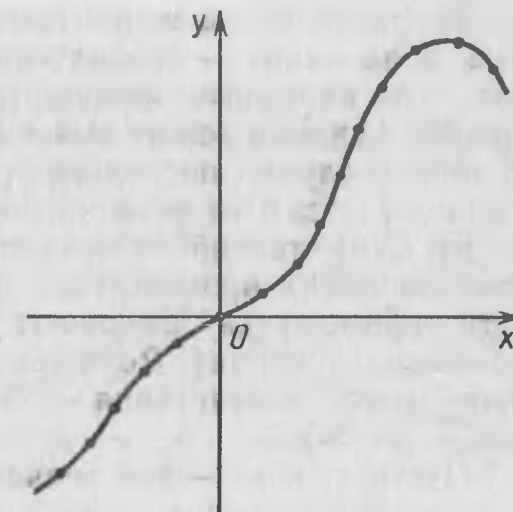


Рис. 31.

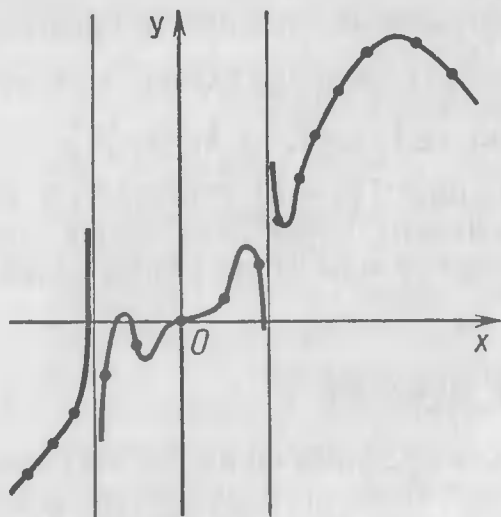


Рис. 32.

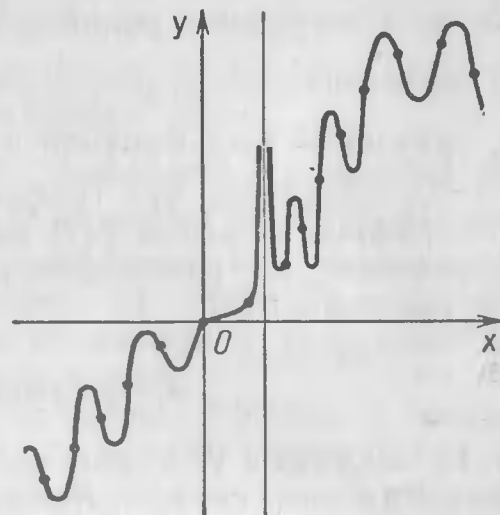


Рис. 33.

ращается в нуль. Следовательно, каждой точке оси абсцисс соответствует некоторая точка графика.

2) Заметим, что функция  $f(x)$  четная: для любого  $x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1} = f(x).$$

Поэтому достаточно исследовать функцию и построить ее график при  $x \geq 0$  — после этого остается отразить построенный график относительно оси ординат.

3) Найдем точки пересечения графика  $f$  с осями координат. Ось ординат график  $f$  пересекает в точке  $(0; f(0))$ . Значение  $f(0)$  равно 1. Поэтому график проходит через точку  $(0; 1)$ .

Для того чтобы найти точки пересечения графика функции  $f$  с осью абсцисс, надо решить уравнение  $f(x) = 0$ . В данном случае уравнение  $\frac{1}{x^2 + 1} = 0$  не имеет корней и, значит, график  $f$  не пересекает ось абсцисс.

4) Выясним, на каких промежутках  $f$  принимает положительные, а на каких — отрицательные значения. На этих промежутках — их называют *промежутками знакопостоянства* функции — график функции лежит выше (соответственно ниже) оси абсцисс. В данном случае, поскольку при любом  $x$  значение  $x^2 + 1$  положительно,  $f(x) > 0$  на всей числовой прямой.

5) Существенно облегчают построение графика  $f$  сведения о том, на каких промежутках функция  $f$  возрастает или убывает (эти промежутки называют *промежутками возрастания* или *убывания* функции). Докажем, что для рассматриваемой функции промежутки возрастания — это  $(-\infty; 0]$ , а промежутки убывания —  $[0; \infty)$ .

Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — два значения из промежутка  $[0; \infty)$ , причем  $x_1 > x_2$ . Поскольку  $x_1$  и  $x_2$  положительны, то из условия  $x_1 > x_2$  следует:  $x_1^2 > x_2^2$ ,  $x_1^2 + 1 > x_2^2 + 1$  и, наконец,

$$\frac{1}{x_1^2 + 1} < \frac{1}{x_2^2 + 1}.$$

Итак,  $f(x_1) < f(x_2)$ , т. е.  $f$  убывает на промежутке  $[0; \infty)$ .

На промежутке  $(-\infty; 0]$  функция  $f$  возрастает. Доказательство проводится аналогично (можно также воспользоваться четностью  $f$ ).

6) Найдем значения функции в точках, в которых возрастание сменяется убыванием или наоборот. В нашем случае имеется лишь одна точка, принадлежащая одновременно и промежутку возрастания, и промежутку убывания, — это точка с абсциссой 0 и ординатой  $f(0) = 1$ .

7) Заметим, наконец, что при неограниченном увеличении  $x$  значение  $x^2 + 1$  неограниченно возрастает, а поэтому значение  $\frac{1}{x^2 + 1}$ , напротив, приближается к нулю.

Полученных в ходе исследования сведений о функции  $\frac{1}{x^2 + 1}$  достаточно для построения ее графика.

Построим точку графика  $(0; 1)$ . Мы установили, что  $[0; \infty)$  — промежуток убывания функции  $f$ . Поэтому правее точки с абсциссой 0 график  $f$  рисуем в виде кривой, которая «идет вниз» (рис. 34). Так как  $f(x) > 0$  при любом  $x$ , эта кривая не может спуститься ниже оси абсцисс, причем (см. п. 7 исследования) при продолжении вправо график неограниченно приближается к оси абсцисс. Остается воспользоваться четностью функции  $f$ : график  $f$  получаем, симметрично отразив построенную для  $x \geq 0$  кривую относительно оси ординат (рис. 35).

2. На рисунке 36 изображен график функции  $f(x) = x^3 - 3x$ , построение которого основано на следующих результатах исследования этой функции. (Исследование проведите самостоятельно; воспользуйтесь решением задачи 84, г.)

1) Функция  $f(x) = x^3 - 3x$  определена на всей числовой прямой.

2)  $f(x) = x^3 - 3x$  — нечетная функция, поэтому достаточно построить ее график при  $x \geq 0$ , а затем отразить его относительно начала координат.

3) Точка пересечения графика  $f$  с осью ординат — это точка  $(0; 0)$ . График  $f$  пересекает ось абсцисс в точках  $(0; 0)$ ,  $(-\sqrt{3}; 0)$  и

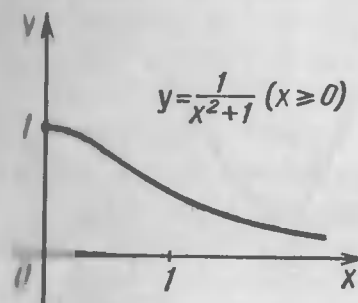


Рис. 34.

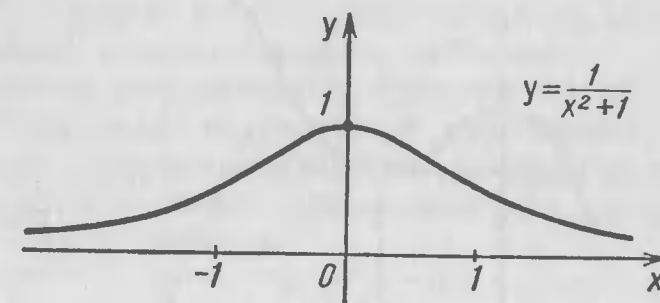


Рис. 35.

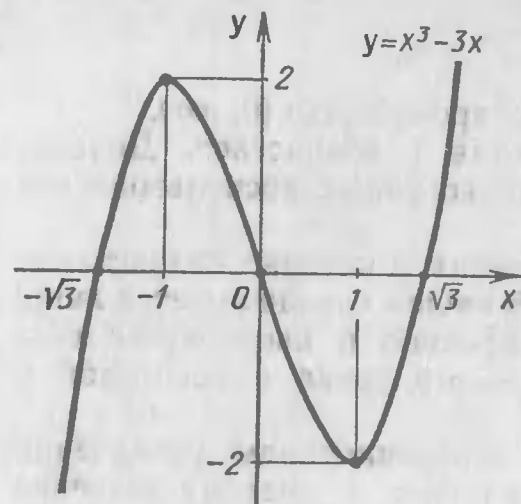


Рис. 36.

$(\sqrt{3}; 0)$ . Строя график  $f$ , мы должны провести искомую кривую через эти точки.

4) Значения  $f$  положительны, если  $x > \sqrt{3}$  или  $-\sqrt{3} < x < 0$ , — на промежутках  $(\sqrt{3}; \infty)$  и  $(-\sqrt{3}; 0)$  график  $f$  лежит выше оси абсцисс.  $f(x)$  отрицательна на промежутках  $(-\infty; \sqrt{3})$  и  $(0; \sqrt{3})$  — здесь график лежит ниже оси абсцисс.

5) Промежутками возрастания функции  $f$  являются промежутки  $[1; \infty)$  и  $(-\infty; -1]$ . Промежутков убывания — отрезок  $[-1; 1]$ .

6) Точками, в которых возрастание функции сменяется убыва-

нием (или наоборот), являются точки с абсциссами  $-1$  и  $1$ :  $f(1) = -2$ ,  $f(-1) = 2$ .

7) При неограниченном увеличении  $|x|$  значения  $|f|$  неограниченно возрастают (см. рис. 36).

Как видно из рассмотренных примеров, при построении графиков важно найти точки, в которых возрастание функции сменяется убыванием и наоборот (в случае функции  $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$  такой точкой является точка  $0$ ; для функции  $f(x) = x^3 - 3x$  мы нашли две точки:  $-1$  и  $1$ ). Такие точки называют точками максимума и минимума.

**Определение.** Точка  $x_0$  называется **точкой минимума** функции  $f$ , если для всех  $x$  из некоторой окрестности точки  $x_0$  выполнено неравенство  $f(x) \geq f(x_0)$  (рис. 37).

**Определение.** Точка  $x_0$  называется **точкой максимума** функции  $f$ , если для всех  $x$  из некоторой окрестности точки  $x_0$  выполнено неравенство  $f(x) \leq f(x_0)$  (рис. 38).

В окрестности точек максимума (точки  $x_1, x_2, x_3$  — рис. 39)

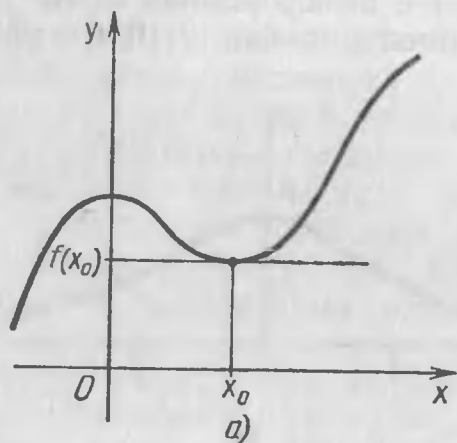


Рис. 37.

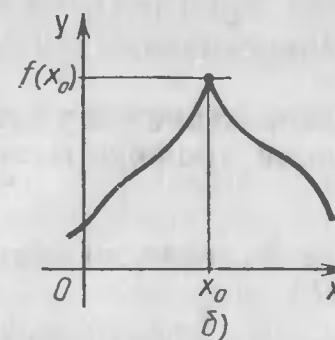
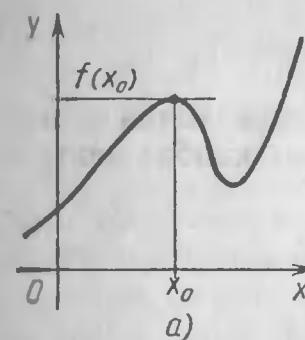
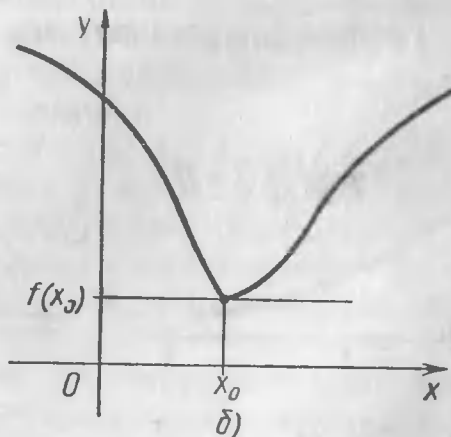


Рис. 38.

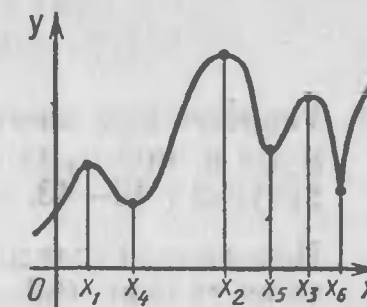


Рис. 39.

график функции, как правило, имеет вид «холма», а в окрестности точек минимума график функции изображается в виде «впадины» (см. рис. 39, точки  $x_4, x_5$  и  $x_6$  — точки минимума).

Для точек максимума и минимума принято общее название — их называют **точками экстремума\***, а значения функции в этих точках — **экстремумами функции**.

3. Далее при исследовании функций мы будем придерживаться описанной схемы. В общем случае схема исследования предусматривает решение следующих задач.

1) Найти область определения данной функции  $f$ .

2) Выяснить, обладает ли функция особенностями, облегчающими исследование (является ли функция  $f$ : а) четной или нечетной; б) периодической\*\*).

3) Вычислить координаты точек пересечения графика  $f$  с осями координат.

4) Найти промежутки знакопостоянства функции  $f$ .

5) Выяснить, на каких промежутках функция  $f$  возрастает, а на каких убывает.

6) Найти точки экстремума функции и вычислить значения  $f$  в этих точках.

7) Исследовать поведение функции  $f$  при больших (по модулю) значениях аргумента.

Необходимо заметить, что этот план имеет примерный характер. Например, функция  $f(x) = \frac{1}{x}$  не определена в точке  $0$  и при построении ее графика надо исследовать поведение  $f$  при значениях  $x$ , близких к нулю. Часто тот или иной этап исследования приходится опускать. Однако по возможности в ходе исследования функций желательно придерживаться этой схемы.

Наиболее трудным этапом исследования функций является, как правило, поиск промежутков возрастания (убывания), а также точек экстремума. В следующей главе вы познакомитесь с общим методом решения этих задач, основанным на применении понятий математического анализа.

\* Латинское слово *extremum* в переводе на русский язык означает «крайний».

\*\* Определение периодической функции см. в п. 5.



81. Укажите промежутки возрастания и убывания, точки максимума и минимума функций, графики которых изображены на рисунках 40—43.

Проведите исследование функции по общей схеме и постройте ее график (82—84).

82. а)  $f(x) = 2x + 3$ ; б)  $f(x) = -3x + 2$ ;  
в)  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ; г)  $f(x) = 3 - x - 2x^2$ .
83. а)  $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ ; б)  $f(x) = \frac{1}{x-3}$ ;  
в)  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ; г)  $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ ;  
д)  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ ; е)  $f(x) = \frac{2x-1}{2x+1}$ .
84. а)  $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ ; б)  $f(x) = x^4 - 2x^2$ ;  
в)  $f(x) = x^3 + 3x$ ; г)  $f(x) = x^3 - 3x$ .

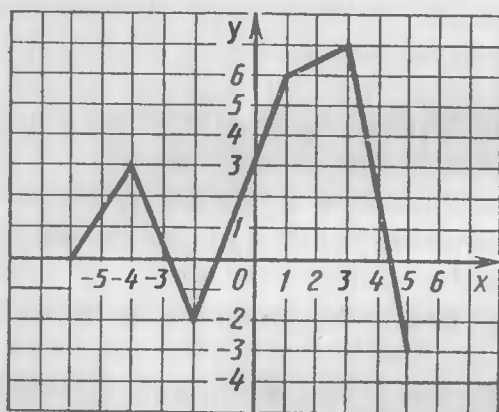


Рис. 40.

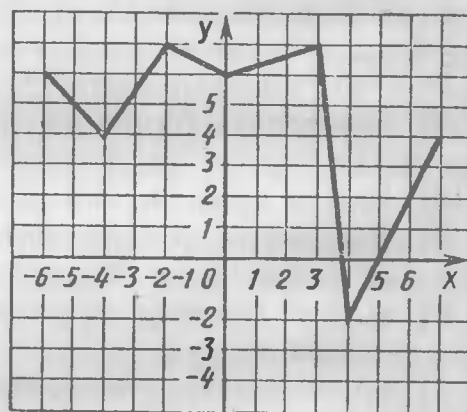


Рис. 41

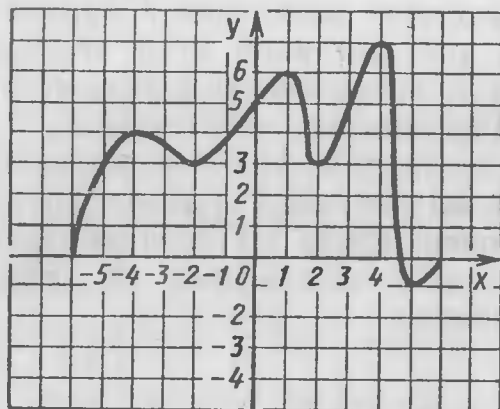


Рис. 42.

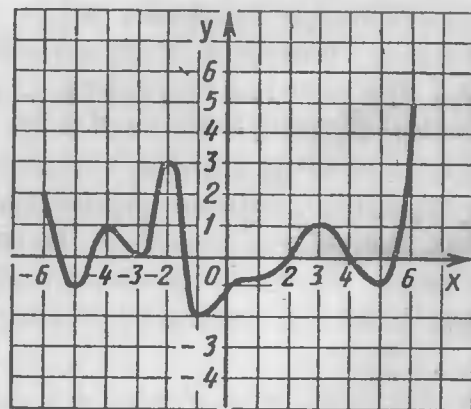


Рис. 43.

### § 3. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

#### 5. Периодичность тригонометрических функций

Вы уже знаете, что для любого числа  $x$  выполнено равенство  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ . Отсюда следует, что значения синуса совпадают во всех точках, отличающихся на  $2\pi$ , где  $n$  — произвольное целое число. Это свойство функции синус называется периодичностью, а число  $2\pi$  — периодом синуса.

Вообще, говоря о периодичности функции  $f$  с периодом  $T$ , предполагают, что  $T \neq 0$ , а область определения  $f$  вместе с каждой точкой  $x$  содержит и все точки, получающиеся из  $x$  параллельными переносами вдоль оси  $Ox$  (вправо и влево) на расстояние  $nT$  ( $n$  — любое натуральное число). При этом допущении определение периодической функции формулируется так.

**Определение.** Функцию  $f$  называют **периодической** с периодом  $T \neq 0$ , если для любого  $x$  из области определения  $f$  значения этой функции в точках  $x$  и  $x + T$  равны, т. е.

$$f(x + T) = f(x).$$

С примерами периодических функций вы уже знакомы. Поскольку  $\sin(x + 2\pi) = \sin x$  и  $\cos(x + 2\pi) = \cos x$  для любого действительного  $x$ , синус и косинус — периодические функции с периодом  $2\pi$ . Тангенс и котангенс — периодические функции с периодом  $\pi$ , так как  $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$ .

Очевидно, что если функция  $f$  — периодическая с периодом  $T$ , то при любом целом  $n \neq 0$  число  $nT$  тоже период этой функции. Например, при  $n = 3$ , воспользовавшись несколько раз определением периодической функции, находим:

$$f(x + 3T) = f((x + 2T) + T) = f(x + 2T) = f((x + T) + T) = f(x + T) = f(x).$$

Докажем, что **наименьший положительный период функций  $\sin x$  и  $\cos x$  равен  $2\pi$ .**

Как уже отмечалось,  $2\pi$  является периодом этих функций. Поэтому остается доказать, что положительное число, меньшее  $2\pi$ , не может быть их периодом.

а) Если  $T$  — произвольный период косинуса, то  $\cos(\alpha + T) = \cos \alpha$  при любом  $\alpha$ . Полагая  $\alpha = 0$ , находим  $\cos T = \cos 0 = 1$ . Наименьшее положительное число  $T$ , для которого  $\cos T = 1$ , есть  $2\pi$  (рис. 44).

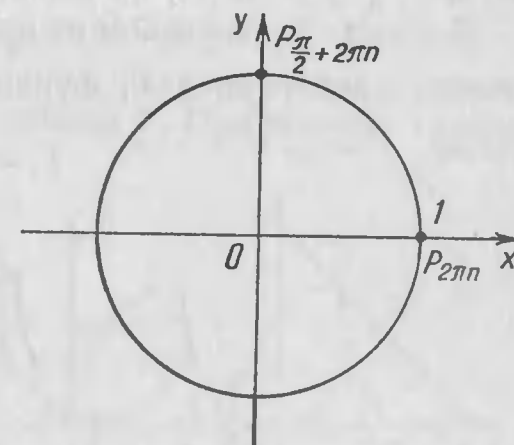


Рис. 44.



б) Пусть  $T$  — произвольный положительный период синуса. Тогда  $\sin(\alpha + T) = \sin \alpha$  при любом  $\alpha$ . Полагая  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , получаем  $\sin\left(T + \frac{\pi}{2}\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$ . Но  $\sin x = 1$  только при  $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ). Поэтому  $T = 2\pi n$ . Наименьшее положительное число вида  $2\pi n$  есть  $2\pi$ .

Для функций  $\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{ctg} x$  наименьшим положительным периодом является число  $\pi$ .

Если  $T$  — положительный период тангенса, то  $\operatorname{tg} T = \operatorname{tg}(0 + T) = \operatorname{tg} 0 = 0$ . Так как на интервале  $(0; \pi)$  тангенс нулей не имеет,  $T \geq \pi$ . Ранее доказано, что  $\pi$  — период функции  $\operatorname{tg} x$  и, значит, это есть наименьший положительный период тангенса. Для функции  $\operatorname{ctg} x$  доказательство аналогично.

Периодичностью основных тригонометрических функций мы уже фактически пользовались при построении их графиков. Справедливо следующее общее утверждение: для построения графика периодической функции с периодом  $T$  достаточно провести построение на отрезке  $[0; T]$  и затем полученную кривую параллельно перенести на расстояния  $nT$  вправо и влево вдоль оси  $Ox$  (рис. 45), где  $n$  — любое натуральное число.

Действительно, пусть  $(x_0; y_0)$  — точка графика периодической функции  $f$ . Тогда точка  $x_0 + nT$  при любом целом  $n$  принадлежит области определения  $f$  (см. замечание в начале пункта) и вследствие периодичности  $f$  справедливо равенство  $f(x_0 + nT) = f(x_0) = y_0$ . Значит, точка  $(x_0 + nT; y_0)$ , полученная при параллельном переносе точки  $(x_0; y_0)$  вдоль оси  $Ox$  на расстояние  $nT$ , тоже принадлежит графику  $f$ .

▼ Справедливо следующее утверждение.

Если  $T_0$  — наименьший положительный период функции  $f$ , то все периоды этой функции кратны  $T_0$ , т. е. если  $T$  — любой период  $f$ , то

$$T = nT_0,$$

где  $n$  — целое число, не равное нулю.

Докажем это методом от противного. Предположим, что существует такой период  $T_1$  функции  $f$ , что  $\frac{T_1}{T_0}$  не есть целое число. Тогда

$$T_1 = nT_0 + l,$$

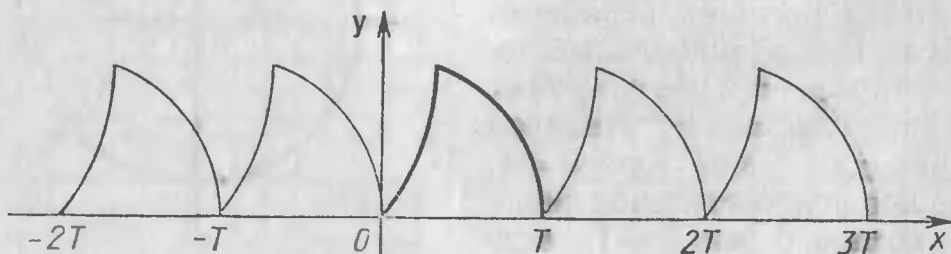


Рис. 45.

где  $0 < l < T_0$ , а  $n$  — целое число. Но  $T_0$  и  $T_1$  — периоды функции  $f$ , и потому для любого  $x$  из области определения  $f$  числа  $x + T_1$  и  $x + l = (x + T_1) - nT_0$  принадлежат области определения  $f$  и  $f(x + l) = f(x + T_1 - nT_0) = f(x + T_1) = f(x)$ .

Мы получили, что положительное число  $l$ , меньшее  $T_0$ , есть период функции  $f$ . Это противоречит предположению, что  $T_0$  — наименьший положительный период функции  $f$ . Следовательно, наше допущение неверно и  $\frac{T_1}{T_0}$  — целое число. ▼

### Упражнения

85. Является ли периодической функция:

а)  $f(x) = 1$ ; б)  $f(x) = x^2$ ; в)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ; г)  $f(x) = \{x\}$ ?

86. Пользуясь периодичностью, четностью и нечетностью тригонометрических функций и другими свойствами, представьте в виде значений тригонометрических функций от аргумента, выраженного наименьшим возможным положительным числом градусов или радиан:

а)  $\sin 405^\circ$ ; б)  $\cos \frac{17\pi}{5}$ ; в)  $\operatorname{tg} 3333^\circ$ ; г)  $\operatorname{ctg} \left(-\frac{122}{7}\pi\right)$ ;

д)  $\cos(-1985^\circ)$ ; е)  $\sin\left(-\frac{35\pi}{9}\right)$ ; ж)  $\operatorname{tg} \frac{2021}{8}\pi$ ; з)  $\cos \frac{20\pi}{7}$ .

87. Даны функции:

а)  $y = \sin 2x$ ; б)  $y = x \cos x$ ; в)  $y = \operatorname{tg} 2x$ ; г)  $y = \cos \frac{x}{5}$ ; д)  $y = 4$ .

Укажите среди них периодические и найдите наименьший положительный период каждой из них.

Найдите наименьший положительный период функции (88—89).

88. а)  $\cos 2x$ ; б)  $\sin \frac{x}{3}$ ; в)  $\operatorname{tg} 4x$ ; г)  $\cos x + \sin x$ .

89. а)  $\cos(3x - 2)$ ; б)  $\sin\left(\frac{x}{2} + 1\right)$ ; в)  $\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ ; г)  $\operatorname{ctg}(3x - 2)$ .

90. На каждом из рисунков 46—49 приведена часть графика некоторой функции, имеющей период  $T$ . Продолжите график на отрезок  $[-2T; 3T]$ .

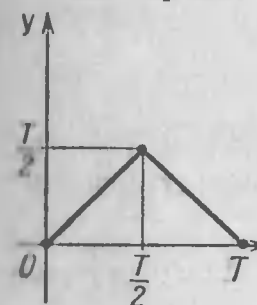


Рис. 46.

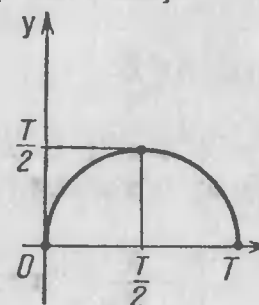


Рис. 47.

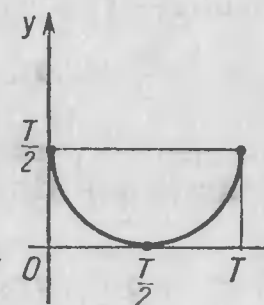


Рис. 48.

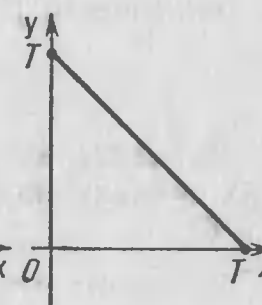


Рис. 49.

91. Может ли периодическая функция возрасть на всей числовой прямой?

## 6. Исследование функции $y = \sin x$

Исследование синуса (так же, как и других основных тригонометрических функций) проведем по схеме, описанной в п. 4.

1. Область определения синуса — вся числовая прямая, а область значений — отрезок  $[-1; 1]$ :

$$D(\sin) = \mathbb{R}, E(\sin) = [-1; 1].$$

2. а) Синус — нечетная функция:

$$\sin(-x) = -\sin x \text{ для всех } x \in \mathbb{R}.$$

б) Синус — периодическая функция с периодом  $2\pi$ :

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x \text{ для всех } x \in \mathbb{R}$$

(как показано в п. 5,  $2\pi$  — наименьший положительный период синуса).

3. Нулями синуса являются точки

$$x = \pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

4. Укажем промежутки знакопостоянства синуса: это интервалы  $(2\pi n; \pi + 2\pi n)$ , на которых значения синуса положительны, и интервалы  $(\pi + 2\pi n; 2\pi + 2\pi n)$  — здесь синус принимает отрицательные значения,  $n \in \mathbb{Z}$ .

5. Промежутки возрастания синуса — отрезки

$$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right], \text{ где } n \in \mathbb{Z};$$

промежутки убывания — отрезки

$$\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right], \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

6. Синус имеет максимумы, равные 1, в точках

$$\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z};$$

минимумы, равные -1, в точках

$$\frac{3\pi}{2} + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

Доказательства первых четырех свойств даны в предыдущих пунктах (повторите их). Поэтому остается доказать свойства 5 и 6.

Докажем, что на промежутках  $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right]$  синус возрастает. В силу периодичности синуса доказательство доста-

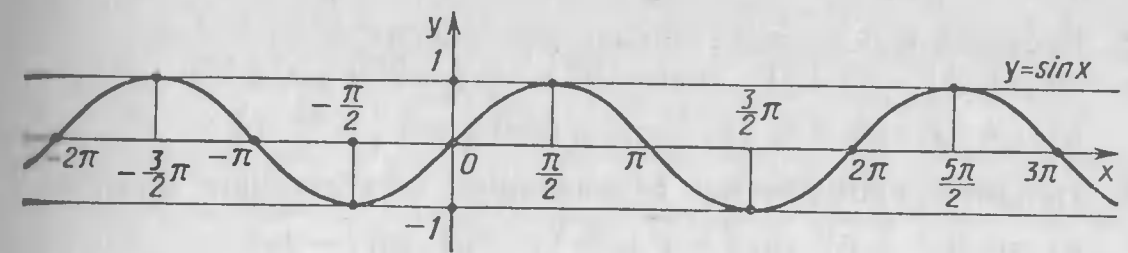


Рис. 50.

точно провести для отрезка  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ . Для любых двух чисел  $x_1$  и  $x_2$  из этого отрезка, таких, что  $x_1 < x_2$ , применяя формулу разности синусов, находим:

$$\sin x_2 - \sin x_1 = 2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \sin \frac{x_2 - x_1}{2}. \quad (1)$$

Из неравенства  $-\frac{\pi}{2} \leq x_1 < x_2 \leq \frac{\pi}{2}$  следует, что

$$0 < \frac{x_2 - x_1}{2} \leq \frac{\pi}{2} \text{ и } -\frac{\pi}{2} < \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Поэтому  $\cos \frac{x_1 + x_2}{2} > 0$ ,  $\sin \frac{x_2 - x_1}{2} > 0$  и, следовательно, правая часть равенства (1) положительна, т. е.  $\sin x_1 < \sin x_2$ . Тем самым доказано, что синус возрастает на указанных промежутках.

Аналогично доказывается, что промежутки  $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right]$  являются промежутками убывания синуса (проведите это рассуждение самостоятельно).

Свойство 6 — очевидное следствие свойства 5. Достаточно заметить, например, что точки  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$  являются общими концами промежутков возрастания и убывания синуса, причем в этих точках возрастание сменяется убыванием. Значение синуса в этих точках равно 1.

Проведенное исследование функции  $y = \sin x$  позволяет построить график этой функции (рис. 50), который ранее мы строили по точкам.

## Упражнения

92. Найдите область определения функции:

а)  $\frac{1}{\sin x - 1}$ ; б)  $\frac{1}{\sin x}$ ; в)  $\sin x^2$ ; г)  $\sin \frac{1}{x}$ .

93. Найдите область значений функции:

а)  $\sin 2x$ ; б)  $2 \sin x$ ; в)  $\sin^2 3x$ ; г)  $\frac{1}{2} \sin^2 x$ .

94. Найдите промежутки знакопостоянства и нули функции:

а)  $\sin 2x$ ; б)  $-\sin \frac{x}{2}$ ; в)  $\frac{1}{\sin x}$ ; г)  $\sin^2 x$ .

95. Расставьте в порядке возрастания числа:  
 а)  $\sin 20^\circ$ ,  $\sin 100^\circ$ ,  $\sin (-30^\circ)$ ,  $\sin (-250^\circ)$ ,  $\sin 170^\circ$ ;  
 б)  $\sin 1,8$ ;  $\sin 2,3$ ;  $\sin \frac{7\pi}{3}$ ;  $\sin (-1)$ ;  $\sin (-\frac{13}{4}\pi)$ .
96. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:  
 а)  $\sin 3x$ ; б)  $\sin (-x + \frac{\pi}{4})$ ; в)  $\sin (-2x)$ ;  
 г)  $\sin (2x - \frac{\pi}{3})$ .
97. Найдите множество чисел, удовлетворяющих данному уравнению или неравенству. Отметьте на единичной окружности точки  $P_i$ , для которых соответствующие значения удовлетворяют данному соотношению:  
 а)  $\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; б)  $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; в)  $\sin t < \frac{1}{2}$ ; г)  $\sin t \geq -\frac{1}{2}$ .
98. Найдите множество чисел, удовлетворяющих данному уравнению или неравенству. Постройте график синуса и на оси абсцисс покажите множество точек  $x$ , являющихся решениями соответствующего уравнения или неравенства:  
 а)  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; б)  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; в)  $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; г)  $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .
99. Исследуйте функцию и постройте ее график:  
 а)  $\sin 2x$ ; б)  $\sin (x - \frac{\pi}{4})$ ; в)  $\sin (x + \frac{\pi}{6})$ ; г)  $\sin \frac{x}{3}$ .

## 7. Исследование функции $y = \cos x$

Сформулируем основные свойства косинуса.

1. Область определения функции  $y = \cos x$  — вся числовая прямая, а область значений — отрезок  $[-1; 1]$ :

$$D(\cos) = \mathbb{R}, E(\cos) = [-1; 1].$$

2. а) Косинус — четная функция:

$$\cos(-x) = \cos x \text{ для всех } x \in \mathbb{R}.$$

б) Косинус — периодическая функция с периодом  $2\pi$ :

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x \text{ для всех } x \in \mathbb{R}$$

( $2\pi$  — наименьший положительный период косинуса).

3. Нулями косинуса являются точки

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

4. Промежутками знакопостоянства косинуса являются интервалы  $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$ , на которых значения косинуса положительны, и интервалы  $(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n)$  — здесь косинус принимает отрицательные значения,  $n \in \mathbb{Z}$ .

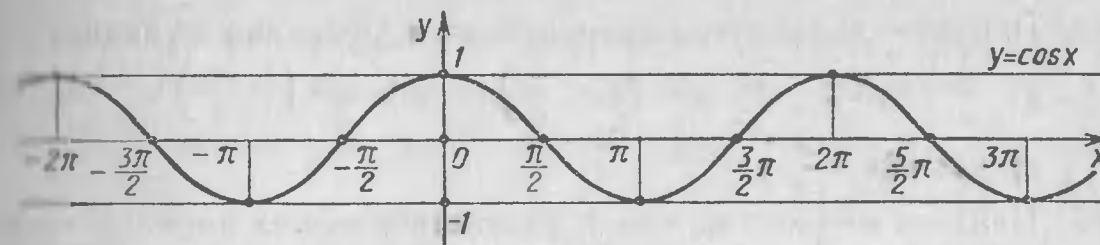


Рис. 51.

5. Промежутки возрастания косинуса — отрезки

$$[-\pi + 2\pi n; 2\pi n], \text{ где } n \in \mathbb{Z};$$

промежутки убывания — отрезки

$$[2\pi n; \pi + 2\pi n], \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

6. Косинус имеет максимумы, равные 1, в точках

$$x = 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z};$$

точками минимума косинуса являются точки

$$x = \pi + 2\pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z},$$

в которых значения косинуса равны  $-1$ .

Доказательство свойств 5 и 6 можно провести примерно так же, как и в предыдущем пункте (надо применить формулу разности косинусов). Проще воспользоваться формулой приведения  $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ . Из нее сразу следует, например, что промежутками возрастания косинуса являются промежутки, полученные из промежутков возрастания синуса сдвигом на  $\frac{\pi}{2}$  влево. Как уже отмечалось в п. 1, из этой формулы вытекает, что график косинуса (рис. 51) есть синусоида, сдвинутая влево на  $\frac{\pi}{2}$ .

## Упражнения

100. Найдите область определения функции:

$$\text{а) } \frac{1}{\cos x}; \text{ б) } \frac{1}{\cos x + 1}; \text{ в) } \cos x^2; \text{ г) } \cos \frac{1}{x}.$$

101. Найдите область значений функции:

$$\text{а) } -\cos 2x; \text{ б) } 2 \cos x; \text{ в) } \cos^2 x + 1; \\ \text{г) } \frac{1}{2} \cos^2 x + 1.$$

102. Найдите промежутки знакопостоянства и нули функции:

$$\text{а) } \cos 3x; \text{ б) } \cos \frac{x}{2}; \text{ в) } \frac{1}{\cos x}; \text{ г) } \cos^2 x.$$

103. Расставьте в порядке возрастания числа:

$$\text{а) } \cos 20^\circ, \cos (-30^\circ), \cos 70^\circ, \cos 170^\circ, \cos 135^\circ, \\ \cos (-100^\circ); \\ \text{б) } \cos 1,2, \cos (-0,1), \cos \frac{8}{3}\pi, \cos (-1), \cos \frac{5\pi}{4}, \cos 3.$$

104. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а)  $-\cos 3x$ ; б)  $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ ; в)  $\cos\left(-\frac{x}{3}\right)$ ;

г)  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ .

105. Найдите множество чисел, удовлетворяющих данному уравнению или неравенству. Отметьте на единичной окружности точки  $P_t$ , для которых соответствующие значения  $t$  удовлетворяют данному соотношению:

а)  $\cos t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; б)  $\cos t = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; в)  $\cos t < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

г)  $\cos t \geq -\frac{1}{2}$ .

106. Найдите множество чисел, удовлетворяющих данному уравнению или неравенству. Постройте график косинуса и на оси абсцисс покажите множество точек  $x$ , являющихся решениями соответствующего уравнения или неравенства:

а)  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; б)  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; в)  $\cos x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

г)  $\cos x < -\frac{1}{2}$ .

107. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а)  $\cos 2x + 2$ ; б)  $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ; в)  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ;

г)  $\cos \frac{x}{3}$ .

## 8. Исследование функции $y = \operatorname{tg} x$

Сформулируем основные свойства тангенса.

1. *Область определения* тангенса — множество всех действительных чисел, кроме чисел вида  $\frac{\pi}{2} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ; *область значений* — вся числовая прямая.

2. а) Тангенс — *нечетная* функция:

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \text{ для всех } x \in D(\operatorname{tg}).$$

б) Функция  $\operatorname{tg} x$  *периодическая*, ее период равен  $\pi$ :

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x \text{ для всех } x \in D(\operatorname{tg})$$

( $\pi$  — наименьший положительный период тангенса).

3. *Нули* тангенса — точки

$$x = \pi n, \text{ где } n \in \mathbb{Z}.$$

4. *Промежутками знакопостоянства* тангенса являются интервалы  $(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$ , на которых тангенс положителен, и интервалы  $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n)$ , на которых тангенс принимает отрицательные значения,  $n \in \mathbb{Z}$ .

5. Тангенс *возрастает* на промежутках  $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

6. Функция  $y = \operatorname{tg} x$  не имеет экстремумов.

Новым является только свойство 5. Докажем его. В силу периодичности тангенса доказательство достаточно провести для интервала  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ .

Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — произвольные числа из этого интервала, такие, что  $x_2 > x_1$ . Надо доказать, что  $\operatorname{tg} x_2 > \operatorname{tg} x_1$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 &= \frac{\sin x_2}{\cos x_2} - \frac{\sin x_1}{\cos x_1} = \\ &= \frac{\sin x_2 \cos x_1 - \sin x_1 \cos x_2}{\cos x_1 \cos x_2} = \frac{\sin(x_2 - x_1)}{\cos x_1 \cos x_2}. \end{aligned}$$

По предположению  $-\frac{\pi}{2} < x_1 < x_2 < \frac{\pi}{2}$ . Поэтому  $\cos x_1 > 0$ ,  $\cos x_2 > 0$ . А так как  $0 < x_2 - x_1 < \pi$ , то и  $\sin(x_2 - x_1) > 0$ . Следовательно,  $\operatorname{tg} x_2 - \operatorname{tg} x_1 > 0$ , т. е.  $\operatorname{tg} x_2 > \operatorname{tg} x_1$ , что и требовалось доказать.

График тангенса изображен на рисунках 52 ( $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ) и 53.

Рассмотрим подробнее поведение функции  $\operatorname{tg} x$  в окрестности точки  $\frac{\pi}{2}$ . Если  $x < \frac{\pi}{2}$  и  $x$  приближается к  $\frac{\pi}{2}$ , то соответствующие значения  $\operatorname{tg} x$  положительны и неограниченно возрастают (как говорят, «стремятся к бесконечности»). Действительно, при этом  $\sin x$  приближается к 1, а  $\cos x$  к 0 и поэтому тангенс ( $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ) будет принимать положительные неограниченно возрастающие значения.

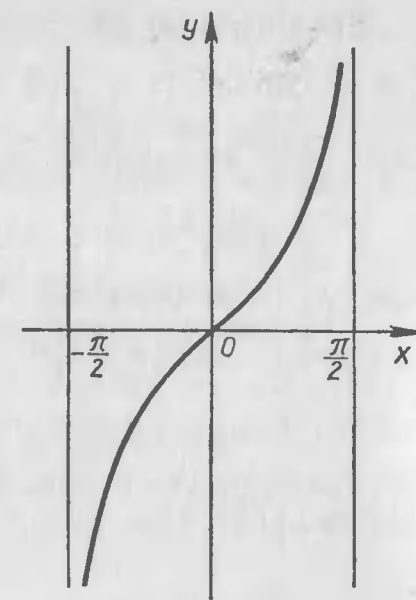


Рис. 52.

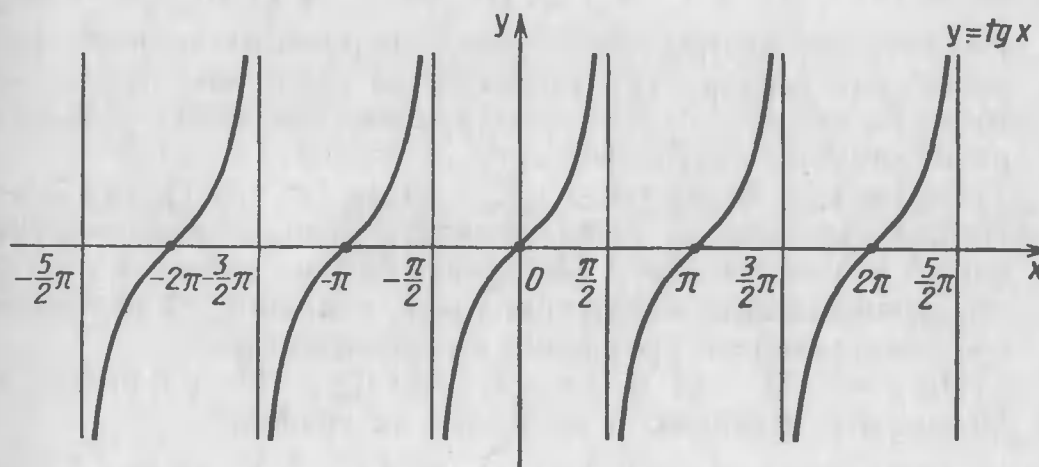


Рис. 53.



Аналогичные рассуждения показывают, что при приближении  $x$  к  $\frac{\pi}{2}$  справа (т. е. при  $x > \frac{\pi}{2}$ ) значения тангенса неограниченно возрастают по модулю, но отрицательны (говорят, что тангенс «стремится к минус бесконечности»).

В соответствии с этим замечанием график функции тангенс при  $x$ , стремящемся к  $\frac{\pi}{2} + \pi n$ , приближается к прямой  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ , причем при  $x < \frac{\pi}{2} + \pi n$  график «неограниченно поднимается вверх», а при  $x > \frac{\pi}{2} + \pi n$  «неограниченно опускается вниз». Эту особенность поведения тангенса можно понять из рассмотрения графика (см. рис. 53).

### Упражнения

108. Найдите область определения функции:

а)  $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ; б)  $2\operatorname{tg}(-2x)$ ; в)  $\frac{1}{\operatorname{tg} 3x}$ ; г)  $\frac{1}{\operatorname{tg} x + 1}$ .

109. Найдите область значений функции:

а)  $\operatorname{tg} 2x$ ; б)  $4\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ; в)  $-\operatorname{tg}^2 x$ ; г)  $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + 1$ .

110. Найдите промежутки знакопостоянства и нули функции:

а)  $\operatorname{tg} 3x$ ; б)  $-\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ; в)  $\operatorname{tg}^2 x$ ; г)  $-\operatorname{tg}^2 x + 1$ .

111. Расставьте в порядке возрастания числа:

а)  $\operatorname{tg} 10^\circ$ ,  $\operatorname{tg} 100^\circ$ ,  $\operatorname{tg}(-20^\circ)$ ,  $\operatorname{tg}(-110^\circ)$ ,  $\operatorname{tg} 200^\circ$ ;

б)  $\operatorname{tg} 2$ ,  $\operatorname{tg} 4$ ,  $\operatorname{tg} 6$ ,  $\operatorname{tg}(-8)$ ,  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{13}{4}\pi$ .

112. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а)  $\operatorname{tg} 2x$ ; б)  $\operatorname{tg}\left(-x + \frac{\pi}{4}\right)$ ; в)  $-\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ; г)  $\operatorname{tg} \frac{x}{3}$ .

113. Найдите множество точек, удовлетворяющих данному уравнению или неравенству. Отметьте на единичной окружности точки  $P_t$ , для которых соответствующие значения  $t$  удовлетворяют данному соотношению:

а)  $\operatorname{tg} t = 1$ ; б)  $\operatorname{tg} t = -\sqrt{3}$ ; в)  $\operatorname{tg} t < \sqrt{3}$ ; г)  $\operatorname{tg} t \geq -1$ .

114. Найдите множество чисел, удовлетворяющих данному уравнению или неравенству. Постройте график тангенса и на оси абсцисс покажите множество точек, являющихся решениями соответствующего уравнения или неравенства:

а)  $\operatorname{tg} x = -1$ ; б)  $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ ; в)  $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$ ; г)  $\operatorname{tg} x \geq 1$ .

115. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а)  $\operatorname{tg} 2x$ ; б)  $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ ; в)  $-\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ ; г)  $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \pi\right)$ .

## 9▼. Исследование функции $y = \operatorname{ctg} x$

Основные свойства котангенса таковы.

1. Область определения котангенса — множество всех действительных чисел, кроме точек  $\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ ; область значений котангенса — вся числовая прямая.

2. а) Котангенс — нечетная функция:

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x \text{ для всех } x \in D(\operatorname{ctg}).$$

б) Функция  $y = \operatorname{ctg} x$  периодическая, ее период равен  $\pi$ :

$$\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x \text{ для всех } x \in D(\operatorname{ctg}).$$

( $\pi$  — наименьший положительный период котангенса).

3. Нулями котангенса являются точки

$$\frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

4. Промежутки знакопостоянства — интервалы  $(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n)$ ,

на которых котангенс положителен, и интервалы  $(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi n)$ , на которых котангенс отрицателен,  $n \in \mathbb{Z}$ .

5. Котангенс убывает на промежутках  $(\pi n, \pi + \pi n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

6. Функция  $y = \operatorname{ctg} x$  не имеет экстремумов.

График котангенса изображен на рисунке 54.

### Упражнения

116\*. Найдите область определения функции:

а)  $\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ; б)  $\operatorname{ctg}(-2x)$ ; в)  $\frac{1}{\operatorname{ctg} x}$ ; г)  $\frac{1}{\operatorname{ctg} x - 1}$ .

117\*. Найдите область значений функции:

а)  $\operatorname{ctg} 2x$ ; б)  $3\operatorname{ctg} \frac{x}{2}$ ; в)  $\operatorname{ctg}^2 x$ ; г)  $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + 1$ .

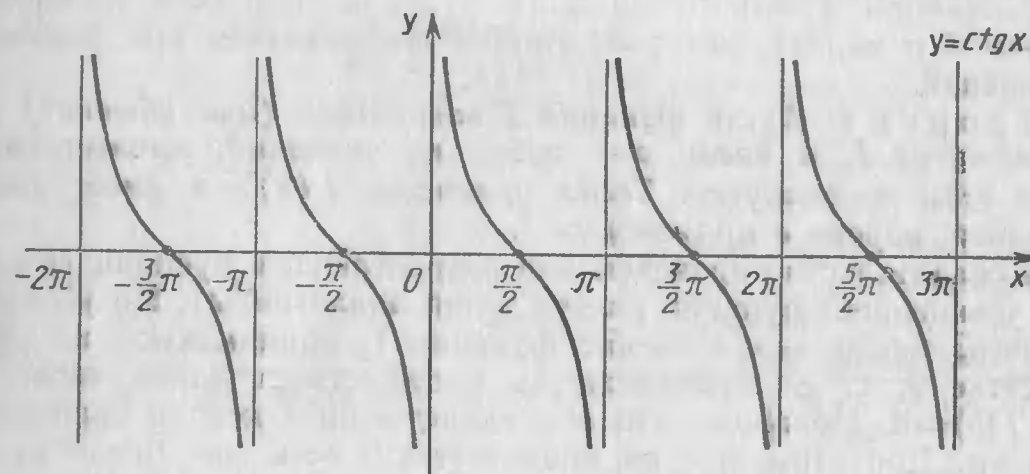


Рис. 54.



118\*. Найдите промежутки знакопостоянства и нули функции:

а)  $\operatorname{ctg} 2x$ ; б)  $-\operatorname{ctg} \frac{x}{3}$ ; в)  $\operatorname{ctg}^2 x$ ; г)  $\operatorname{ctg}^2 x + 1$ .

119\*. Расставьте в порядке возрастания числа:

а)  $\operatorname{ctg} 10^\circ$ ,  $\operatorname{ctg} 100^\circ$ ,  $\operatorname{ctg} (-20^\circ)$ ,  $\operatorname{ctg} (-110^\circ)$ ,  $\operatorname{ctg} 315^\circ$ ;

б)  $\operatorname{ctg} 2$ ,  $\operatorname{ctg} 4$ ,  $\operatorname{ctg} 6$ ,  $\operatorname{ctg} 8$ ,  $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$ ,  $\operatorname{ctg} (-\frac{13}{4}\pi)$ .

120\*. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а)  $\operatorname{ctg} 2x$ ; б)  $\operatorname{ctg} (-x + \frac{\pi}{4})$ ; в)  $-\operatorname{ctg} (\frac{x}{3} - \frac{\pi}{4})$ ; г)  $\operatorname{ctg}^2 x$ .

121\*. Найдите множество точек, удовлетворяющих данному уравнению или неравенству. Отметьте на единичной окружности точки  $P_i$ , для которых соответствующие значения  $t$  удовлетворяют данному соотношению:

а)  $\operatorname{ctg} t = -1$ ; б)  $\operatorname{ctg} t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ; в)  $\operatorname{ctg} t < \sqrt{3}$ ; г)  $\operatorname{ctg} t \geq 1$ .

122\*. Найдите множество чисел, удовлетворяющих данному уравнению или неравенству. Постройте график котангенса и на оси абсцисс покажите множество точек, являющихся решениями соответствующего уравнения или неравенства:

а)  $\operatorname{ctg} x = 1$ ; б)  $\operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$ ; в)  $\operatorname{ctg} x < -\sqrt{3}$ ; г)  $\operatorname{ctg} x \geq 1$ .

123\*. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а)  $\operatorname{ctg} 2x$ ; б)  $\operatorname{ctg} (x - \frac{\pi}{4})$ ; в)  $-\operatorname{ctg} (x + \frac{\pi}{6})$ ; г)  $\operatorname{ctg}^2 2x$ .

## § 4. РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

### 10. Арксинус, арккосинус и арктангенс

1. Начнем с одного важного утверждения (его называют *теоремой о корне*), которым удобно пользоваться при решении уравнений.

**Теорема.** Пусть функция  $f$  возрастает (или убывает) на промежутке  $I$ , а число  $a$  — любое из значений, принимаемых  $f$  на этом промежутке. Тогда уравнение  $f(x) = a$  имеет единственный корень в промежутке  $I$ .

Доказательство проведем для возрастающей функции (в случае убывающей функции рассуждения аналогичны). По условию теоремы число  $a$  — значение функции  $f$ , принимаемое на промежутке  $I$ , т. е. в промежутке  $I$  существует такое число  $b$ , что  $f(b) = a$ . Покажем, что  $b$  — единственный корень уравнения  $f(x) = a$ . Допустим, что на промежутке  $I$  есть еще число  $c \neq b$ , такое, что  $f(c) = a = f(b)$ . Тогда или  $c < b$ , или  $c > b$ . Но функция  $f$  возрастает на промежутке  $I$ , поэтому либо  $f(c) < f(b)$ ,

либо  $f(c) > f(b)$ . Это противоречит равенству  $f(c) = f(b)$ . Следовательно, сделанное предположение неверно и в промежутке  $I$ , кроме числа  $b$ , других корней уравнения  $f(x) = a$  нет.

2. Как вы знаете, функция синус возрастает на отрезке  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  и принимает все значения от  $-1$  до  $1$ . Следовательно, по теореме о корне для любого числа  $a$ , такого, что  $|a| \leq 1$ , в промежутке  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  существует единственный корень  $b$  уравнения  $\sin x = a$ . Это число  $b$  называют арксинусом числа  $a$  и обозначают  $\arcsin a$  (рис. 55). Итак, *арксинусом числа  $a$  называется такое число из отрезка  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ , что его синус равен  $a$ .*

**Пример 1.** Найдем  $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \text{ так как } \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } \frac{\pi}{4} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}].$$

**Пример 2.** Найдем  $\arcsin (-\frac{1}{2})$ .

Угол (из промежутка  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ ), синус которого есть  $-\frac{1}{2}$ , равен  $-\frac{\pi}{6}$ . Поэтому  $\arcsin (-\frac{1}{2}) = -\frac{\pi}{6}$ .

Значение арксинуса можно находить по таблицам (или пользуясь калькулятором). Чтобы найти  $\arcsin a$ , находят с помощью таблицы значений синуса угол в  $^\circ$ , лежащий в пределах  $-90^\circ \leq \alpha^\circ \leq 90^\circ$ , для которого  $\sin \alpha = a$ . Затем выражают  $\alpha^\circ$  в радианах (при этом пользуются таблицей перевода градусной меры углов в радианную).

**Пример 3.** Найдем  $\arcsin 0,9063$ . Согласно таблицам

$$\begin{aligned} 0,9063 &\approx \sin 65^\circ, \\ 65^\circ &\approx 1,1345 \text{ (рад)}, \\ \arcsin 0,9063 &\approx 1,1345. \end{aligned}$$

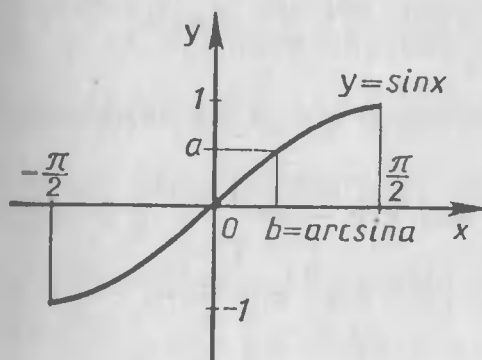


Рис. 55.

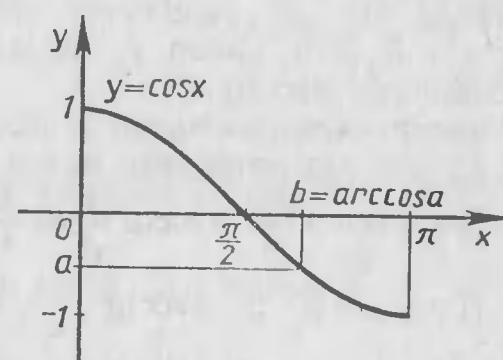


Рис. 56.

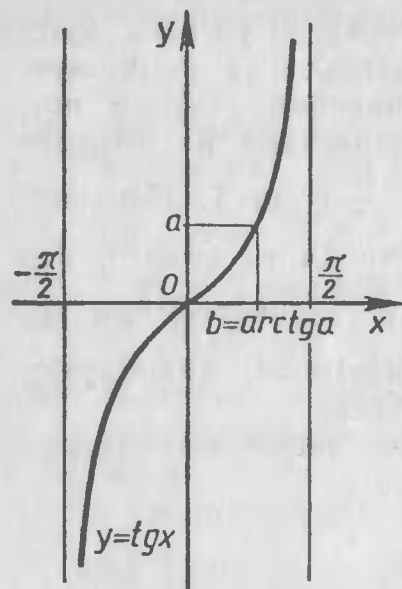


Рис. 57.

3. Функция косинус убывает на отрезке  $[0; \pi]$  и принимает все значения от  $-1$  до  $1$ . Поэтому для любого числа  $a$ , такого, что  $|a| \leq 1$ , в отрезке  $[0; \pi]$  существует единственный корень  $b$  уравнения  $\cos x = a$ . Это число  $b$  называют арккосинусом числа  $a$  и обозначают  $\arccos a$  (рис. 56).

Арккосинусом числа  $a$  называется такое число из отрезка  $[0; \pi]$ , что его косинус равен  $a$ .

Пример 4.  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$ , так как  $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  и  $\frac{\pi}{6} \in [0; \pi]$ .

Пример 5.  $\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$ ,

так как  $\cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  и  $\frac{3\pi}{4} \in [0; \pi]$ .

4. На интервале  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  функция тангенс возрастает и принимает все значения из  $\mathbf{R}$ . Поэтому для любого числа  $a$  в интервале  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  существует единственный корень  $b$  уравнения  $\operatorname{tg} x = a$ . Это число  $b$  называют арктангенсом числа  $a$  и обозначают  $\operatorname{arctg} a$  (рис. 57). Итак,

арктангенсом числа  $a$  называется такое число из интервала  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ , что его тангенс равен  $a$ .

Пример 6.  $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$ , так как  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$  и  $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

Пример 7.  $\operatorname{arctg} (-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$ , так как  $\operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$  и  $-\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

▼ 5. Функция котангенс на интервале  $(0; \pi)$  убывает и принимает все значения из  $\mathbf{R}$ . Поэтому для любого числа  $a$  в интервале  $(0; \pi)$  существует единственный корень  $b$  уравнения  $\operatorname{ctg} x = a$ . Это число  $b$  называют арккотангенсом числа  $a$  и обозначают  $\operatorname{arcctg} a$ :

арккотангенсом числа  $a$  называется такое число из интервала  $(0; \pi)$ , что его котангенс равен  $a$ .

Пример 8.  $\operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$ , так как  $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$  и  $\frac{\pi}{3} \in (0; \pi)$ .

Пример 9.  $\operatorname{arcctg} (-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$ , так как  $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$  и  $\frac{5\pi}{6} \in (0; \pi)$ .

## Упражнения

Вычислите (124—131).

124. а)  $\arcsin 0$ ; б)  $\arcsin 1$ ; в)  $\arcsin (-1)$ ; г)  $\arcsin \frac{1}{2}$ .  
д)  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; е)  $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ; ж)  $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .

125. а)  $\arcsin 0,3024$ ; б)  $\arcsin 0,4305$ ;  
в)  $\arcsin 0,3033$ ; г)  $\arcsin 0,7801$ .

126. а)  $\arccos 0$ ; б)  $\arccos 1$ ; в)  $\arccos (-1)$ ; г)  $\arccos \frac{1}{2}$ .  
д)  $\arccos \left(-\frac{1}{2}\right)$ ; е)  $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; ж)  $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

127. а)  $\arccos 0,2164$ ; б)  $\arccos 0,8771$ ;  
в)  $\arccos 0,6081$ ; г)  $\arccos 0,5666$ .

128. а)  $\operatorname{arctg} 0$ ; б)  $\operatorname{arctg} (-1)$ ; в)  $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$ ; г)  $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$ .  
д)  $\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .

129. а)  $\operatorname{arctg} 0,3541$ ; б)  $\operatorname{arctg} 2,300$ ; в)  $\operatorname{arctg} (-5)$ ; г)  $\operatorname{arctg} 10$ .

- 130\*. а)  $\operatorname{arcctg} 0$ ; б)  $\operatorname{arcctg} 1$ ; в)  $\operatorname{arcctg} (-1)$ ;  
г)  $\operatorname{arcctg} \sqrt{3}$ ; д)  $\operatorname{arcctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .

- 131\*. а)  $\operatorname{arcctg} 0,7080$ ; б)  $\operatorname{arcctg} 6,386$ ;  
в)  $\operatorname{arcctg} 5$ ; г)  $\operatorname{arcctg} (-10)$ .

132. Вместо звездочки поставьте знак равенства или неравенства, чтобы получилось верное соотношение:

- а)  $\arcsin \frac{1}{2} * \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; б)  $\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right) * \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;  
в)  $\operatorname{arctg} 1 * \arccos \frac{1}{2}$ ; г)  $\operatorname{arctg} (-\sqrt{3}) * \arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$ .

Вычислите (133—135).

133. а)  $\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{2}$ ;

- б)  $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ;

- в)  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ;

- г)  $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

134. а)  $\operatorname{arctg} \sqrt{3} + \operatorname{arctg} (-1)$ ; б)  $\operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} 1$ ;

- в)  $\operatorname{arctg} (-1) + \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; г)  $\operatorname{arctg} \sqrt{3} + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

- д)  $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

135\*. а)  $\operatorname{arccotg} \sqrt{3} + \operatorname{arctg} \sqrt{3}$ ;

б)  $\operatorname{arctg} (-\sqrt{3}) + \operatorname{arccotg} (-\sqrt{3})$ ;

в)  $\operatorname{arccotg} \sqrt{3} + \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ;

г)  $\operatorname{arccotg} (-\sqrt{3}) + \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ .

136. Докажите, что для любых чисел  $x_1$  и  $x_2$  из отрезка  $[-1; 1]$  из неравенства  $x_1 < x_2$  следует неравенство:

а)  $\arcsin x_1 < \arcsin x_2$ ; б)  $\arccos x_1 > \arccos x_2$ .

137. Докажите, что для любых чисел  $x_1$  и  $x_2$  из неравенства  $x_1 < x_2$  следует неравенство:

а)  $\operatorname{arctg} x_1 < \operatorname{arctg} x_2$ ; б)  $\operatorname{arcctg} x_1 > \operatorname{arcctg} x_2$ .

Расставьте в порядке возрастания числа (138—139).

138. а)  $\arcsin 0,8$ ;  $\arcsin (-0,3)$ ;  $\arcsin 0,9$ ;

б)  $\arcsin (-0,5)$ ;  $\arcsin (-0,7)$ ;  $\arcsin 0,2$ ;

в)  $\arccos 0,4$ ;  $\arccos (-0,2)$ ;  $\arccos (-0,8)$ ;

г)  $\arccos 0,9$ ;  $\arccos (-0,7)$ ;  $\arccos 0,6$ .

139. а)  $\operatorname{arctg} 100$ ;  $\operatorname{arctg} 1$ ;  $\operatorname{arctg} 0,3$ ;

б)  $\operatorname{arctg} (-100)$ ;  $\operatorname{arctg} (-2)$ ;  $\operatorname{arctg} (-1)$ ;

в)\*  $\operatorname{arcctg} 12$ ;  $\operatorname{arcctg} 1$ ;  $\operatorname{arcctg} 0,2$ ;

г)\*  $\operatorname{arcctg} (-20)$ ;  $\operatorname{arcctg} (-10)$ ;  $\operatorname{arcctg} (-1)$ .

140\*. Докажите равенства:

а)  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$  для любого  $x \in [-1; 1]$ ;

б)  $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$  для любого  $x$ .

141\*. Найдите значение:

а)  $\arcsin (\sin 10)$ ; б)  $\arccos (\cos 12)$ ;

в)  $\operatorname{arctg} (\operatorname{tg} 2)$ ; г)  $\operatorname{arcctg} (\operatorname{ctg} (-3))$ .

## 11. Решение простейших тригонометрических уравнений

### 1. Начнем с уравнения

$$\cos t = a, \quad (1)$$

где  $a$  — произвольное действительное число. Исследуем, сколько решений имеет это уравнение в зависимости от значения  $a$  и каковы они.

Очевидно, что если  $|a| > 1$ , то уравнение (1) не имеет решений, поскольку  $|\cos t| \leq 1$  для любого  $t$ .

Пусть  $|a| \leq 1$ . Надо найти все такие числа  $t$ , что  $\cos t = a$ . На отрезке  $[0; \pi]$  существует в точности одно решение уравнения (1) — это число  $\arccos a$ .

Косинус — четная функция, и, значит, на отрезке  $[-\pi; 0]$  уравнение (1) также имеет в точности одно решение — число  $-\arccos a$ . Итак, уравнение  $\cos t = a$  на отрезке  $[-\pi; \pi]$  длины  $2\pi$  имеет два решения:  $t = \pm \arccos a$  (совпадающие при  $a = 1$ ).

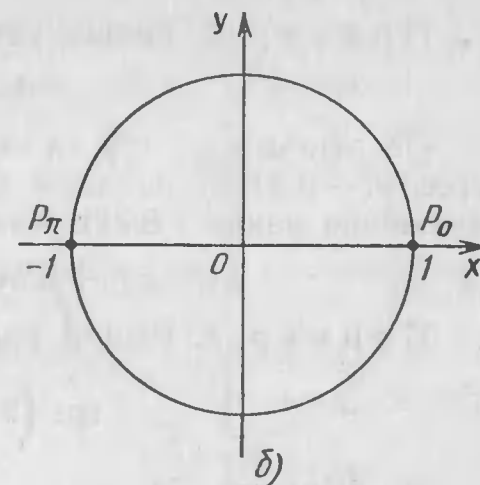
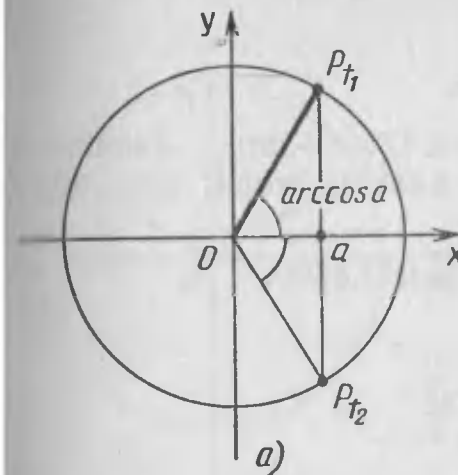


Рис. 58.

Вследствие периодичности функции  $y = \cos t$  все остальные решения отличаются от этих на  $2\pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), т. е. формула корней уравнения (1) такова:

$$t = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

(Обратите внимание: этой формулой можно пользоваться только при  $|a| \leq 1$ .)

Решение уравнения (1) можно проиллюстрировать на единичной окружности. По определению  $\cos t$  — это абсцисса точки  $P_t$  единичной окружности. Если  $|a| < 1$ , то таких точек две (рис. 58, а); если же  $a = 1$  или  $a = -1$ , то одна (рис. 58, б).

При  $a = 1$  числа  $\arccos a$  и  $-\arccos a$  совпадают (они равны нулю), поэтому решения уравнения

$$\cos t = 1$$

принято записывать в виде

$$t = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

«Особая» форма записи решений уравнения (1) принята для  $a = -1$  и  $a = 0$ :

$$\cos t = -1 \text{ при } t = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos t = 0 \text{ при } t = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 1. Решим уравнение

$$\cos x = \frac{1}{2}.$$

По формуле (2)

$$x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Поскольку  $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$ , приходим к ответу

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 2. Решим уравнение

$$\cos x = -0,2756.$$

По формуле (2)  $x = \pm \arccos(-0,2756) + 2\pi n$ . Значение  $\arccos(-0,2756)$  находим с помощью калькулятора: оно приближенно равно 1,8500. Итак,

$$x = \pm x_0 + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}), \text{ где } x_0 \approx 1,8500.$$

Пример 3. Решим уравнение

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

По формуле (2)

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pm \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

т. е.

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pm \frac{5}{6}\pi + 2\pi n,$$

откуда

$$x = \frac{\pi}{8} \pm \frac{5\pi}{12} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

2. Уравнение

$$\sin t = a \quad (3)$$

не имеет решений при  $|a| > 1$ , так как  $|\sin t| \leq 1$  для любого  $t$ . При  $|a| \leq 1$  на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  уравнение (3) имеет в точности одно решение  $t_1 = \arcsin a$ . На промежутке  $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$  функция  $\sin x$  убывает и принимает все значения от  $-1$  до  $1$ , поэтому уравнение (3) имеет и на этом отрезке один корень. Из рисунка 59, а видно, что этот корень есть число  $t_2$ , равное  $\pi - \arcsin a$ . Действительно,

$$\sin t_2 = \sin(\pi - t_1) = \sin t_1 = a.$$

Кроме того, поскольку  $-\frac{\pi}{2} \leq t_1 \leq \frac{\pi}{2}$ , имеем:  $-\frac{\pi}{2} \leq -t_1 \leq \frac{\pi}{2}$  и  $\pi - \frac{\pi}{2} \leq \pi - t_1 \leq \pi + \frac{\pi}{2}$ , т. е. число  $t_2$  принадлежит отрезку  $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ .

Итак, уравнение (3) на отрезке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$  имеет два решения:  $t_1 = \arcsin a$  и  $t_2 = \pi - \arcsin a$  (совпадающие при  $a = 1$ ). Учитывая периодичность синуса (с периодом  $2\pi$ ), получаем такие формулы для записи всех решений уравнения:

$$t = \arcsin a + 2\pi n, \quad (4)$$

$$t = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

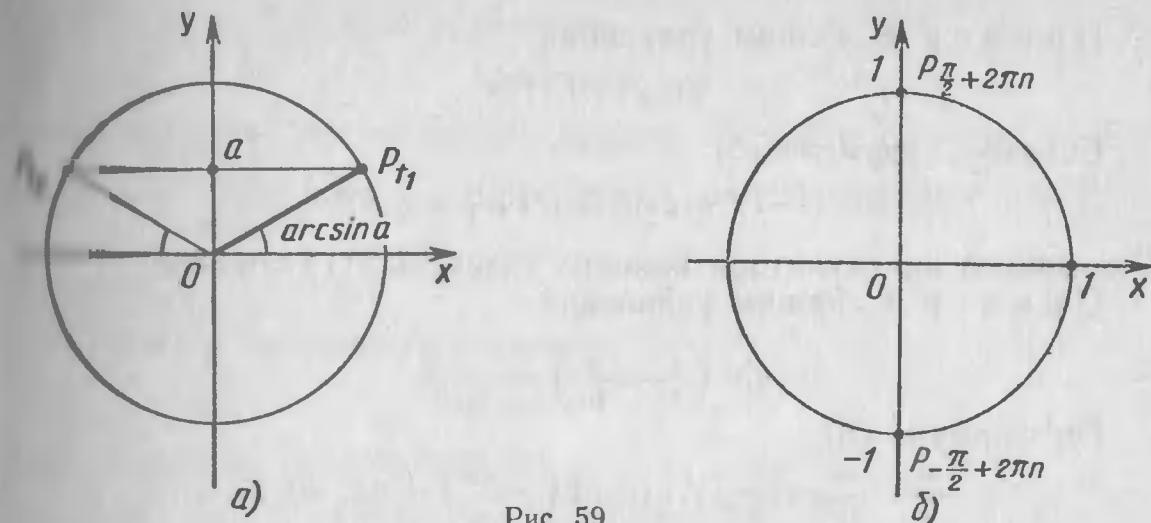


Рис. 59.

Удобно решения уравнения (3) записывать не двумя, а одной формулой:

$$t = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Как нетрудно убедиться, при четных  $k = 2n$  из формулы (6) находим все решения, записанные формулой (4); при нечетных  $k = 2n + 1$  — решения, записываемые формулой (5).

Решение уравнения (3) удобно иллюстрировать на единичной окружности (рис. 59). По определению  $\sin t$  есть ордината точки  $P_t$  единичной окружности. Если  $|a| < 1$ , то таких точек две (рис. 59, а); при  $a = \pm 1$  одна (рис. 59, б).

Если  $a = 1$ , то числа  $\arcsin a$  и  $\pi - \arcsin a$  совпадают (они равны  $\frac{\pi}{2}$ ), поэтому решение уравнения

$$\sin t = 1$$

принято записывать так:

$$t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

При  $a = -1$  и  $a = 0$  принята следующая запись решений:

$$\sin t = -1, \text{ если } t = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$\sin t = 0, \text{ если } t = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 4. Решим уравнение

$$\sin t = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

По формуле (6)  $x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$ , т. е.

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$



Пример 5. Решим уравнение

$$\sin x = 0,3714.$$

Согласно формуле (6)

$$x = (-1)^n \arcsin 0,3714 + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

С помощью калькулятора находим:  $\arcsin 0,3714 \approx 0,3805$ .

Пример 6. Решим уравнение

$$\sin \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{10} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

По формуле (6)

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10} = (-1)^k \arcsin \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Так как  $\arcsin \left( -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = -\frac{\pi}{4}$ , имеем:

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{10} = (-1)^k \left( -\frac{\pi}{4} \right) + \pi k,$$

$$x = \frac{\pi}{5} - (-1)^k \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

3. При любом  $t$  в интервале  $\left( -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$  имеется в точности одно такое число  $t$ , что  $\operatorname{tg} t = a$ , — это  $\operatorname{arctg} a$ .

Поэтому уравнение

$$\operatorname{tg} t = a \quad (7)$$

имеет на интервале  $\left( -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$  длины  $\pi$  в точности один корень. Так как тангенс — периодическая функция с периодом  $\pi$ , остальные корни уравнения (7) отличаются от найденного на  $\pi n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ), т. е.

$$t = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}. \quad (8)$$

Решение уравнения  $\operatorname{tg} t = a$  удобно иллюстрировать, рассматривая линию тангенсов (рис. 60). Напомним, что  $\operatorname{tg} t$  — это ордината точки  $T_t$  пересечения прямой  $OP_t$  с линией тангенсов (см. п. 1). Для любого числа  $a$  на линии тангенсов есть лишь одна точка с ординатой  $a$  (точка  $T(1; a)$ ). Прямая  $OT$  пересекается с единичной окружностью в двух точках; при этом интервалу  $\left( -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$  соответствует точка  $P_{t_1}$  правой полу-

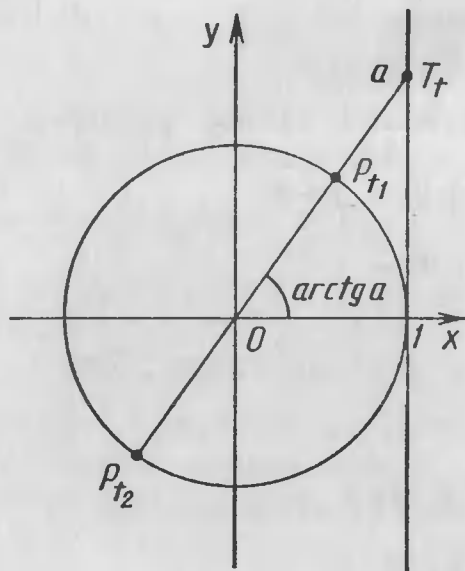


Рис. 60.

Пример 7. Решим уравнение

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}.$$

По формуле (8) находим решение  $x = \operatorname{arctg} \sqrt{3} + \pi n$   $n \in \mathbb{Z}$ , так как  $\operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$ , приходим к окончательному ответу:

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 8. Решим уравнение

$$\operatorname{tg} x = 5,177.$$

Из формулы (8) следует, что

$$x = \operatorname{arctg} 5,177 + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

С помощью калькулятора находим:  $\operatorname{arctg} 5,177 \approx 1,3800$ .

Пример 9. Решим уравнение

$$\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}.$$

Это уравнение равносильно уравнению

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

которое решаем с помощью формулы (8):

$$x = \operatorname{arctg} \left( -\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \pi n = -\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

### Упражнения

Решите уравнения (142—150).

142. а)  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; б)  $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; в)  $\cos x = -\frac{1}{2}$ ; г)  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

143. а)  $\sin x = \frac{1}{2}$ ; б)  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; в)  $\sin x = -\frac{1}{2}$ ; г)  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

144. а)  $\operatorname{tg} x = 1$ ; б)  $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ; в)  $\operatorname{tg} x = -1$ ; г)  $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

145. а)  $\operatorname{ctg} x = 1$ ; б)  $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ; в)  $\operatorname{ctg} x = -1$ ; г)  $\operatorname{ctg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

146. а)  $\sin x = -0,6$ ; б)  $\cos x = 0,3$ ; в)  $\operatorname{tg} x = -3,5$ ; г)  $\operatorname{ctg} x = 2,5$ .

147. а)  $\cos 2x = \frac{1}{2}$ ; б)  $\sin 4x = 0$ ; в)  $\operatorname{tg} 3x = 1$ ; г)  $\operatorname{tg} 4x = 3$ .

148. а)  $\sin \left( -\frac{t}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; б)  $\cos \frac{t}{5} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;

в)  $\operatorname{tg} \left( -\frac{x}{3} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ;

г)  $\operatorname{ctg} \frac{x}{7} = 1$ .

$$149. \text{ а) } \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \text{ б) } \cos(1-x) = 0;$$

$$\text{ в) } \operatorname{tg}\left(-x + \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}; \quad \text{ г) } \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{8}\right) = -\sqrt{3}.$$

$$150. \text{ а) } \sin\left(-4x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}; \quad \text{ б) } \cos\left(-\frac{\pi}{3} - 5x\right) = \frac{1}{2};$$

$$\text{ в) } \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}; \quad \text{ г) } \sin\left(\frac{x}{2} - 1\right) = 0.$$

151\*. Докажите, что все решения уравнения  $\operatorname{ctg} t = a$  находятся по формуле  $t = \operatorname{arccotg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

## 12. Решение простейших тригонометрических неравенств

Решение неравенств, содержащих тригонометрические функции, сводится, как правило, к решению простейших неравенств вида

$$\sin x < a, \cos x \geq a, \operatorname{tg} x > a \text{ и т. п.}$$

Рассмотрим на примерах способы их решения.

Пример 1. Решим неравенство

$$\sin t < \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Это неравенство означает, что все точки  $P_t$  единичной окружности при значениях  $t$ , удовлетворяющих данному неравенству, имеют ординату, меньшую  $\frac{1}{2}$ . Множество всех таких точек — дуга  $l$ , выделенная на рисунке 61 (причем концы дуги  $l$ , имеющие ординату  $\frac{1}{2}$ , не входят в рассматриваемое множество, поскольку они не удовлетворяют условию: ординаты их не меньше, а равны  $\frac{1}{2}$ ). Запишем условие принадлежности точки  $P_t$  выделенной дуге. Концы дуги  $l$  — точки  $P_{\frac{\pi}{6}}$  и  $P_{\frac{5\pi}{6}}$ .

Замечая, что  $P_{\frac{5\pi}{6}} = P_{-\frac{7\pi}{6}}$ , получаем, что решения неравенства (1), принадлежащие промежутку  $\left[-\frac{3}{2}\pi; \frac{\pi}{2}\right]$  длины  $2\pi$ , таковы:

$$-\frac{7\pi}{6} < t < \frac{\pi}{6}.$$

(Обратите внимание: неравенства строгие, поскольку строгим является исходное неравенство.) Вследствие периодичности синуса остальные решения получаются добавлением к найденным чисел вида  $2\pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ , т. е. окончательный ответ таков:

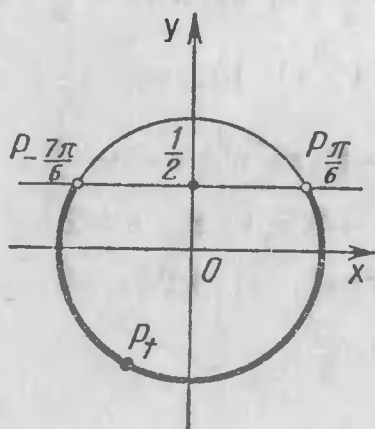


Рис. 61.

$$-\frac{7\pi}{6} + 2\pi n < t < \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 2. Решим неравенство

$$\cos 2t \geq -\frac{1}{2}. \quad (2)$$

Обозначив  $2t$  через  $\alpha$ , немного упростим исходное неравенство:

$$\cos \alpha \geq -\frac{1}{2}. \quad (3)$$

Это неравенство означает, что все точки  $P_\alpha$  единичной окружности при значениях  $\alpha$ , удовлетворяющих условию (3), имеют абсциссы, большие или равные  $-\frac{1}{2}$  (рис. 62). Все эти точки лежат правее прямой  $x = -\frac{1}{2}$  или на самой этой прямой. Значит, множество всех таких точек есть дуга, выделенная на рисунке 62. В отличие от предыдущего примера концы этой дуги входят в искомое множество: абсциссы этих концов равны  $-\frac{1}{2}$  и, значит, удовлетворяют неравенству (3).

Заметим, что концы дуги  $l$  — точки  $P_{\frac{2\pi}{3}}$  и  $P_{-\frac{2\pi}{3}}$ . Ограничиваясь пока рассмотрением углов  $\alpha$ , лежащих в пределах от  $-\pi$  до  $\pi$ , условие принадлежности  $P_\alpha$  дуге  $l$  можно записать так:

$$-\frac{2\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3}. \quad (4)$$

Вследствие периодичности косинуса любое другое решение неравенства (3) отличается от значений, удовлетворяющих соотношению (4), на  $2\pi n$ , т. е. множество решений неравенства (3) состоит из чисел  $\alpha$ , таких, что

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq \alpha \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Переходя снова к переменной  $t$ , получаем ответ:

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \leq 2t \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi n,$$

$$-\frac{\pi}{3} + \pi n \leq t \leq \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Пример 3. Решим неравенство

$$\operatorname{tg} t \geq 1. \quad (5)$$

Вследствие периодичности тангенса

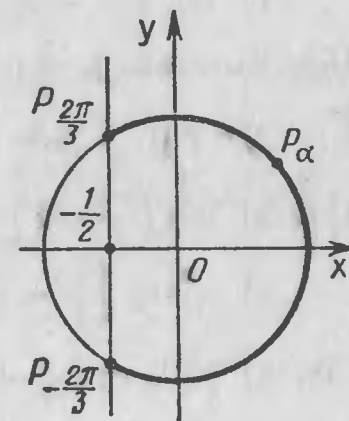


Рис. 62.

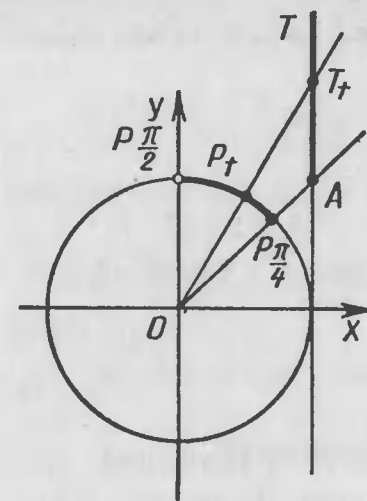


Рис. 63

неравенство достаточно решить для  $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ . Если  $t$  — решение неравенства (5), то ордината точки  $T_t$  линии тангенсов (см. п.1), равная  $\operatorname{tg} t$ , должна быть больше или равна 1. Все такие точки лежат на луче  $AT$  (рис. 63). Соответствующие точкам  $T_t$  этого луча точки  $P_t$  единичной окружности заполняют дугу, выделенную на рисунке 63. Для точек  $P_t$  этой дуги выполняется неравенство

$$\frac{\pi}{4} \leq t < \frac{\pi}{2}.$$

Чтобы выписать ответ, остается учесть периодичность тангенса:

$$\frac{\pi}{4} + \pi n \leq t < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

### Упражнения

Решите неравенство (152—158).

152. а)  $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; б)  $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; в)  $\sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; г)  $\sin x \geq 0,055$ .
153. а)  $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; б)  $\cos x \leq \frac{1}{2}$ ; в)  $\cos x > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ; г)  $\cos x \geq 0,7900$ .
154. а)  $\operatorname{tg} x < \sqrt{3}$ ; б)  $\operatorname{tg} x \geq \frac{1}{\sqrt{3}}$ ; в)  $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$ ; г)  $\operatorname{tg} x > 10$ .
155. а)  $\operatorname{ctg} x > -\frac{1}{\sqrt{3}}$ ; б)  $\operatorname{ctg} x \geq 1$ ; в)  $\operatorname{ctg} x \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ ; г)  $\operatorname{ctg} x < -5$ .
156. а)  $\sin 2x > \frac{1}{2}$ ; б)  $\cos \frac{3x}{4} \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; в)  $\operatorname{tg}\left(-\frac{x}{2}\right) < 1$ ; г)\*  $\operatorname{ctg} \frac{2x}{3} \geq -100$ .
157. а)  $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; б)  $2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) < \sqrt{3}$ ; в)  $\sqrt{3} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \geq 1$ ; г)\*  $\operatorname{ctg}\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$ .
158. а)  $\sin x \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos x \leq \frac{1}{2}$ ; б)  $2 \sin x \cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; в)  $\sin \frac{\pi}{6} \cos x + \cos \frac{\pi}{6} \sin x \leq 1$ ; г)  $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} \geq 1$ .

### 13. Примеры решения тригонометрических уравнений и систем уравнений

В п. 11 было показано, как решать простейшие тригонометрические уравнения. Решение более сложных тригонометрических уравнений требует знания формул, выражающих свойства тригонометрических функций. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Решим уравнение

$$6 \sin^2 x - 5 \sin x + 1 = 0. \quad (1)$$

Введем новую переменную  $y = \sin x$ . Тогда уравнение (1) можно будет записать в виде

$$6y^2 - 5y + 1 = 0.$$

Мы получили квадратное уравнение. Его корнями служат  $y = \frac{1}{2}$  и  $y = \frac{1}{3}$ . Следовательно,  $\sin x = \frac{1}{2}$  или  $\sin x = \frac{1}{3}$ . В первом случае получим решение

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{2} + \pi k, \text{ т. е. } x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Во втором случае имеем:

$$x = (-1)^m \arcsin \frac{1}{3} + \pi m, \text{ т. е. } x = (-1)^m x_0 + \pi m, m \in \mathbb{Z},$$

где  $x_0 = \arcsin \frac{1}{3} \approx 0,34$ .

Пример 2. Решим уравнение

$$6 \cos^2 x - 5 \sin x + 5 = 0.$$

Заменяя  $\cos^2 x$  на  $1 - \sin^2 x$ , приходим к квадратному уравнению относительно  $\sin x$ :

$$6(1 - \sin^2 x) - 5 \sin x + 5 = 0,$$

откуда  $-6 \sin^2 x - 5 \sin x + 11 = 0$ , т. е.

$$6 \sin^2 x + 5 \sin x - 11 = 0.$$

Как и в примере 1, введем новую переменную, обозначив  $\sin x = y$ . Тогда  $6y^2 + 5y - 11 = 0$ , откуда  $y = 1$  или  $y = -\frac{11}{6}$ .

Уравнение  $\sin x = -\frac{11}{6}$  не имеет решений, так как  $\left|-\frac{11}{6}\right| > 1$ . Решая уравнение  $\sin x = 1$ , находим

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 3. Уравнение

$$\cos 2x + \sin x = 0$$

также сводится к квадратному уравнению, если  $\cos 2x$  заменить выражением  $1 - 2 \sin^2 x$ , а потом  $\sin x$  обозначить через  $y$  (доведите решение до конца).

**Пример 4.** Решим уравнение

$$\operatorname{tg} x + 2 \operatorname{ctg} x = 3.$$

Обозначим  $\operatorname{tg} x$  через  $y$ . Поскольку  $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ , получаем уравнение

$$y + \frac{2}{y} = 3.$$

Оно приводится к квадратному уравнению  $y^2 - 3y + 2 = 0$  (при условии  $y \neq 0$ ). Его корни:  $y = 2$  и  $y = 1$ .

1)  $\operatorname{tg} x = 2$ ,  $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$ , т. е.  $x = x_0 + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , где  $x_0 = \operatorname{arctg} 2 \approx 1,11$ .

2)  $\operatorname{tg} x = 1$ ,  $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Пример 5.** Решим уравнение

$$3 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0. \quad (2)$$

Значения аргумента, при которых  $\cos x = 0$ , не являются решениями этого уравнения, так как если  $\cos x = 0$ , то должно выполняться равенство  $3 \sin^2 x = 0$ , а косинус и синус не могут быть одновременно равными нулю. Поэтому можно обе части уравнения разделить на  $\cos^2 x$  (или на  $\sin^2 x$ ) и при этом получить уравнение, равносильное уравнению (2):

$$3 \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 1 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} x = 1 \text{ или } \operatorname{tg} x = \frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ или } x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

**Пример 6.** Уравнение

$$\sin^2 x - \sin 2x = 0$$

после замены  $\sin 2x$  на  $2 \sin x \cos x$  приводится к уравнению

$$\sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 0.$$

Разложим левую часть на множители:

$$\sin x (\sin x - 2 \cos x) = 0,$$

откуда  $\sin x = 0$ , т. е.  $x = \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , или

$$\sin x - 2 \cos x = 0, \operatorname{tg} x = 2, \text{ т. е. } x = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = x_0 + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \text{ где } x_0 = \operatorname{arctg} 2 \approx 1,11.$$

Как и в примере 5, можно было разделить обе части уравнения на  $\cos^2 x$  и получить уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x = 0.$$

Если же делить на  $\sin^2 x$ , то нужно учесть, что те  $x$ , при которых  $\sin x = 0$ , — решения данного уравнения. Поэтому к корням полученного после деления на  $\sin^2 x$  уравнения

$$\operatorname{ctg} x - \frac{1}{2} = 0$$

надо добавить корни уравнения  $\sin x = 0$ .

Многие другие уравнения, например уравнение  $\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$  или уравнение  $\sin^3 x + 2 \sin^2 x \cos x - 3 \sin x \cos^2 x + 2 \cos^3 x = 0$  и т. п., также решаются делением левой и правой частей уравнения на косинус (или синус) в степени, равной степени уравнения. Предварительно надо проверить, являются ли значения  $x$ , для которых  $\cos x = 0$  ( $\sin x = 0$  при делении на  $\sin^n x$ ), решениями данного уравнения. Так, уравнения второй степени делят на  $\cos^2 x$  (или  $\sin^2 x$ ), а третьей — на  $\cos^3 x$  (или  $\sin^3 x$ ). Потом заменой  $\operatorname{tg} x$  (или  $\operatorname{ctg} x$ ) на  $y$  получают алгебраическое уравнение.

**Пример 7.** Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x - y = \frac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2 \sin y. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим:  $y = x - \frac{5\pi}{3}$ . Тогда  $2 \sin y = 2 \sin \left(x - \frac{5\pi}{3}\right) = 2 \left(\sin x \cos \frac{5\pi}{3} - \cos x \sin \frac{5\pi}{3}\right) = 2 \left(\sin x \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x\right) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ , второе уравнение системы примет вид:  $\sin x = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ , откуда  $\cos x = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ .

Далее находим:

$$y = x - \frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + \pi n - \frac{5\pi}{3} = \pi n - \frac{7\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $y = \pi n - \frac{7\pi}{6}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

### Упражнения

Решите уравнения (159—166).

159. а)  $1 + \cos x + \cos 2x = 0$ ; б)  $3 - \cos^2 x - 3 \sin x = 0$ ;  
в)  $4 \sin x = 4 - \cos^2 x$ ; г)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2\frac{1}{2}$ .



160. а)  $\cos \frac{x}{2} = 1 + \cos x$ ; б)  $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \left( \frac{7\pi}{2} - x \right) = 1$ ,  
 в)  $5 \cos x + 12 \sin x = 13$ ; г)  $3 \cos x - 2 \sin 2x = 0$ .
161. а)  $1 - \cos x = 2 \sin \frac{x}{2}$ ; б)  $1 + \cos x = 2 \cos \frac{x}{2}$ ;  
 в)  $\cos 2x = 2\frac{1}{3} \sin x$ ; г)  $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0$ .
162. а)  $\cos x + \sin x = 0$ ; б)  $\cos^2 x - 3 \sin x \cos x = -1$ ;  
 в)  $3 \cos^2 x = 4 \sin x \cos x - \sin^2 x$ ; г)  $4 \cos^2 x - 7 \sin 2x = 2$ .
163. а)  $\frac{5}{3 \cos x + 4} = 2$ ; б)  $\frac{5}{3 \sin x + 4} = 2$ ;  
 в)  $\frac{2}{3\sqrt{2} \sin x - 1} = 1$ ; г)  $\frac{2}{3\sqrt{2} \cos x - 1} = 1$ .
164. а)  $\frac{3}{5 \operatorname{tg} x + 8} = 1$ ; б)  $\frac{3}{5 \operatorname{ctg} x + 8} = 1$ ;  
 в)  $\frac{4}{\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 5} = \frac{1}{2}$ ; г)  $\frac{2}{\sqrt{3} \operatorname{ctg} x + 5} = \frac{1}{4}$ .
165. а)  $\frac{2 \sin x + 7}{1,5 \sin x + 3} = 2$ ; б)  $\frac{2 \cos x + 7}{1,5 \cos x + 3} = 2$ ;  
 в)  $\frac{6}{\operatorname{tg} x + 2} = 3 - \operatorname{tg} x$ ; г)  $\frac{6}{\operatorname{ctg} x + 2} = 3 - \operatorname{ctg} x$ .
166. а)  $\frac{15}{\sin x + 1} = 11 - 2 \sin x$ ; б)  $\frac{15}{\cos x + 1} = 11 - 2 \cos x$ ;  
 в)  $\frac{1}{\operatorname{tg} x + 1} = 2 \operatorname{ctg} x - 1$ ; г)  $\frac{10}{\operatorname{tg} x + 2} = 3 - \operatorname{ctg} x$ .
167. Решите систему уравнений:  
 а)  $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} \sin x \cos y = 0,25, \\ \sin y \cos x = 0,75; \end{cases}$   
 в)  $\begin{cases} x - y = -\frac{1}{3}, \\ \cos^2 \pi x - \cos^2 \pi y = 0; \end{cases}$  г)  $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \frac{1}{6}. \end{cases}$

### Сведения из истории

Задачи, которые теперь решаются при помощи тригонометрических функций, возникли давно. Особенно серьезные требования к умению решать такие задачи в древности предъявляла астрономия. Астрономов интересовали соотношения между сторонами и углами сферических треугольников, составленных из лежащих на сфере дуг больших кругов. Они неплохо справлялись с более сложными задачами, чем задачи на «решение» плоских треугольников, которыми вы занимались в VIII классе.

Вместо наших таблиц тригонометрических функций древние математики составляли таблицы длин хорд, стягивающих дуги заданной длины. Самые ранние такие таблицы, составленные

греческими математиками еще в III—II вв. до н. э., не дошли до нас. Наиболее древние сохранившиеся таблицы длин хорд были составлены в Александрии астрономом Птолемеем (II в. н. э.). Они содержат длины хорд окружности с шагом 30'. Длины хорд записаны в виде трехзначных шестидесятеричных дробей, т. е. в виде

$$\frac{a}{60} + \frac{b}{60^2} + \frac{c}{60^3},$$

где  $a, b, c$  — целые числа от 0 до 59.

Тригонометрические функции  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $\operatorname{tg}$ ,  $\operatorname{ctg}$ ,  $\sec$ ,  $\operatorname{cosec}$  как отношения длин отрезков, проведенных в окружности, встречаются у индийских и арабских математиков в V—X вв. Индийский математик Ариабхата (конец V в.) знал формулу  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  и даже формулу для синуса, косинуса и тангенса половинного угла, которые служили ему для составления таблиц этих функций.

В Западной Европе тригонометрия активно развивалась в XV—XVI вв. Ряд результатов принадлежит французскому математику Ф. Виету (1540—1603). С возникновением дифференциального исчисления были найдены формулы для производных тригонометрических функций. Они по существу были известны уже И. Ньютону. Их геометрический вывод можно найти у Котеса (1682—1716). Достаточно ясные представления о поведении тригонометрических функций при изменении аргумента от  $-\infty$  до  $+\infty$  встречаются у Д. Валлиса (1616—1703). Но, вообще говоря, математики до Л. Эйлера (1707—1783) не проявляли в этом отношении большой последовательности и в связи с отдельными задачами ограничивали область определения тригонометрических функций различным образом. Не было ясности и в отношении того, что имеется в виду: числовые функции числового аргумента или зависимость длин отрезков от величин углов или длин дуг.

Современный вид теория тригонометрических функций приобрела только у Л. Эйлера, в частности в его книге «Введение в анализ бесконечно малых» (1748).

### Вопросы и задачи на повторение

- 1) Что такое угол в 1 радиан? Запишите формулы, связывающие радианную и градусную меры.  
 2) Переведите в радианную меру угол: а)  $360^\circ$ ; б)  $-180^\circ$ ; в)  $18^\circ$ ; г)  $1^\circ$ .  
 3) Переведите в градусную меру угол:  
 а)  $\pi$  рад; б)  $\frac{\pi}{2}$  рад; в)  $-\frac{\pi}{3}$  рад; г) 1 рад.
- 2) 1) Что такое единичная окружность? Дайте определения синуса и косинуса угла  $\alpha$ .

2) Найдите (не пользуясь калькулятором или таблицами) значения  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$ , если  $\alpha$  равно:

а)  $\frac{\pi}{3}$ ; б)  $\frac{9}{4}\pi$ ; в)  $-\frac{2}{3}\pi$ ; г)  $30^\circ$ ; д)  $570^\circ$ ; е)  $-240^\circ$ .

(Предварительно постройте на единичной окружности точку  $P_\alpha$ .)

3) Найдите значения  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$  с помощью калькулятора или таблиц, если  $\alpha$  равно:

а)  $23^\circ 24'$ ; б)  $102^\circ 8'$ ; в)  $1,2$ ; г)  $-0,7$ .

3. 1) Дайте определения тангенса и котангенса угла  $\alpha$ . При каких значениях  $\alpha$  определены  $\operatorname{tg} \alpha$  и  $\operatorname{ctg} \alpha$ ? Что такое линия тангенсов?

2) Найдите (не пользуясь таблицами и калькулятором) значения  $\operatorname{tg} \alpha$  и  $\operatorname{ctg} \alpha$ , если  $\alpha$  равно:

а)  $30^\circ$ ; б)  $45^\circ$ ; в)  $\frac{3}{4}\pi$ ; г)  $\frac{7}{3}\pi$ ; д)  $-\frac{11}{4}\pi$ .

3) Найдите значения  $\operatorname{tg} \alpha$  и  $\operatorname{ctg} \alpha$  с помощью калькулятора или таблиц, если  $\alpha$  равно:

а)  $39^\circ 12'$ ; б)  $146^\circ 7'$ ; в)  $1,7$ ; г)  $-0,4$ .

4. 1) Запишите формулы, связывающие значения тригонометрических функций одного аргумента.

2) Упростите выражение:

а)  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha$ ; б)  $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha$ ; в)  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2$ ; г)  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2$ .

3) Докажите тождество:

а)  $\frac{\cos \alpha}{1 - \sin \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha}$ ; б)  $\frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}$ .

5. 1) Укажите знаки  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  и  $\operatorname{ctg} \alpha$  в зависимости от того, в какой координатной четверти лежит  $\alpha$ .

2) Определите знак:

а)  $\sin 11^\circ$ ; б)  $\sin \frac{3}{4}\pi$ ; в)  $\cos 112^\circ$ ; г)  $\cos \left(-\frac{\pi}{10}\right)$ ;

д)  $\operatorname{tg} 100^\circ$ ; е)  $\operatorname{tg} \left(-\frac{7}{10}\pi\right)$ ; ж)  $\operatorname{ctg} (-100^\circ)$ ; з)  $\operatorname{ctg} 8$ .

3) По данному значению одной из тригонометрических функций и интервалу, в котором находится  $\alpha$ , найдите значения других трех основных тригонометрических функций:

а)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ ; б)  $\cos \alpha = \frac{1}{7}$ ,  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ;

в)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ; г)  $\operatorname{ctg} \alpha = -3$ ,  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ .

6. 1) Сформулируйте мнемоническое правило для запоминания формул приведения. Запишите несколько формул приведения.

2) Приведите к значению тригонометрической функции острого угла:

а)  $\sin 231^\circ$ ; б)  $\cos (-500^\circ)$ ; в)  $\operatorname{tg} \left(-\frac{33}{5}\pi\right)$ ; г)  $\cos \frac{172}{7}\pi$ .

3) Упростите выражение:

а)  $\sin \frac{7\pi}{8} + \cos \frac{5\pi}{8} + \operatorname{tg} \frac{7\pi}{4}$ ;

б)  $\frac{\sin (180^\circ - \alpha) \cos (180^\circ + \alpha) \operatorname{tg} (-\alpha)}{\sin (\alpha - 270^\circ) \operatorname{ctg} \left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) \cos \left(-\alpha - \frac{\pi}{2}\right)}$ .

7. 1) Запишите формулы косинуса, синуса, тангенса суммы (и разности).

2) Вычислите (не пользуясь таблицами) значение синуса, косинуса и тангенса:

а)  $\frac{\pi}{12}$ ; б)  $75^\circ$  (воспользуйтесь тем, что  $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ ;  $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$ ).

3) Докажите тождество:

а)  $\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) + \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} \sin \alpha$ ;

б)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} (60^\circ - \alpha)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} (60^\circ - \alpha)} = \sqrt{3}$ ;

в)  $\frac{\sin (\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta$ ;

г)  $\cos 2\alpha \cos 3\alpha - \sin 2\alpha \sin 3\alpha = \cos 5\alpha$ .

8. 1) Запишите формулы двойного аргумента.

2) Вычислите  $\sin 2\alpha$ ,  $\cos 2\alpha$ ,  $\operatorname{tg} 2\alpha$  и  $\operatorname{ctg} 2\alpha$ , если известно, что:

а)  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$  и  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ; б)  $\sin \alpha = \frac{12}{13}$  и  $\cos \alpha < 0$ .

3) Упростите выражение:

а)  $\frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} (2 \cos^2 \alpha - 1)$ ; б)  $1 - (\cos \alpha - \sin \alpha)^2$ .

9. 1) Запишите формулы суммы и разности косинусов (синусов).

2) Вычислите, не пользуясь таблицами:

а)  $\cos 117^\circ + \cos 63^\circ$ ; б)  $\sin 225^\circ - \sin 75^\circ$ ;

в)  $\sin \frac{\pi}{12} + \sin \frac{5\pi}{12}$ ; г)  $\cos \frac{19\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}$ .

3) Упростите выражение:

а)  $\frac{\sin 70^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 40^\circ}$ ; б)  $\sin \left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) + \sin \left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$ .

Докажите тождество:

в)  $\frac{\cos \alpha + \cos 3\alpha}{\sin \alpha + \sin 3\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha$ ;

г)  $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha = 4 \sin 3\alpha \cos 2\alpha \cos \alpha$ .

10\*. 1) Запишите формулы половинного аргумента.

2) Найдите  $\sin \frac{\alpha}{2}$ ,  $\cos \frac{\alpha}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  и  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ , если известно, что:

а)  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$  и  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ; б)  $\sin \alpha = -\frac{2}{3}$  и  $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ .

3) Упростите выражение:

а)  $\frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \alpha$ ; б)  $\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha} \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} - \cos^2 \alpha$ .

11. 1) Что такое функция, ее область определения и область значений?

2) Найдите область определения функции:

а)  $y = \sqrt{3-x}$ ; б)  $y = \frac{1}{2x-3}$ ; в)  $y = \frac{1}{\cos x}$ ;

г)  $y = \frac{1}{\operatorname{tg} x - 1}$ ; д)  $y = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$ .

3) Найдите область значений функции:

а)  $y = \frac{1}{x}$ ; б)  $y = \frac{1}{x^2} + 1$ ; в)  $y = x^2 - 1$ ;

г)  $y = 2 \sin x + 1$ ; д)  $y = \operatorname{tg}^2 x$ ; е)  $y = \cos^2 x$ .

12. 1) Что такое график функции?

2) Является ли множество точек, изображенное на рисунке 64, графиком какой-либо функции?

3) Постройте график функции:

а)  $y = -2x + 3$ ; б)  $y = \frac{2}{x+1}$ ; в)  $y = x^2 - 2x$ ; г)  $y = \sqrt{x+1}$ .

13. 1) Дайте определения возрастающей и убывающей функции.

2) Найдите промежутки возрастания и промежутки убывания функции, график которой изображен на рисунке 65.

3) Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а)  $y = -3x + 1$ ; б)  $y = -\frac{1}{x+2}$ ; в)  $y = 2x^2 + 4x$ ; г)  $y = x^4$ .

14. 1) Дайте определения точек экстремума (точек максимума и точек минимума) функции. Что такое экстремум функции?

2) Укажите точки максимума и минимума функции, график которой изображен на рисунке 65.

3) Найдите точки максимума и минимума функции:

а)  $y = (x-3)^2 + 2$ ; б)  $y = 1 - (x-2)^2$ ;

в)  $y = \sin x$ ; г)  $y = \operatorname{tg} x$ .

15. 1) Какие задачи решаются в ходе исследования функции?

2) Проведите исследование функции:

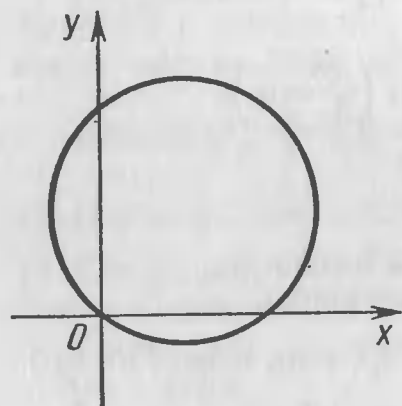


Рис. 64

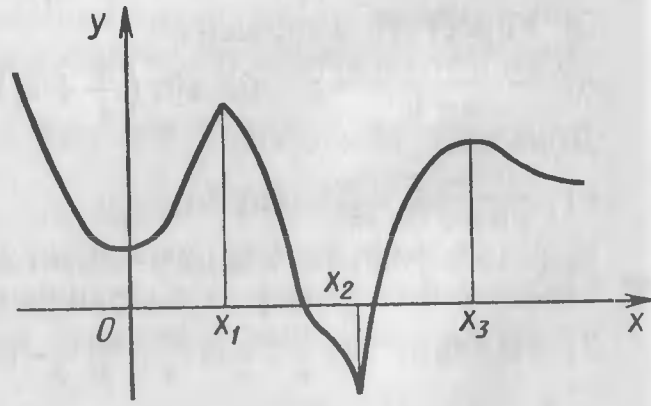


Рис. 65

а)  $y = x^2 - 4x + 3$ ; б)  $y = \cos x - 2$ ;

в)  $y = 2 \sin x + 1$ ; г)  $y = -\frac{12}{x}$ .

3) Постройте графики этих функций.

16. 1) Дайте определения четной и нечетной функции. Каким свойством обладают графики четной и нечетной функции?

2) Выясните, какая из указанных ниже функций является четной, а какая нечетной:

а)  $y = x^2$ ; б)  $y = x^5$ ; в)  $y = \frac{3}{x}$ ;

г)  $y = x + x^3$ ; д)  $y = \frac{5}{x^4 + 2}$ ; е)  $y = |x|$ .

3) Какие из функций являются четными, какие нечетными, какие не являются ни четными, ни нечетными:

а)  $f(x) = \sin 3x$ ; б)  $g(x) = x \sin x$ ;

в)  $h(x) = \frac{\cos x}{x}$ ; г)  $u(x) = x + \cos x$ ;

17. 1) Дайте определение периодической функции. Что такое период функции? Каким свойством обладает график периодической функции?

2) Какой наименьший положительный период имеет функция:

а)  $y = \sin x$ ; б)  $y = \cos x$ ; в)  $y = \operatorname{tg} x$ ; г)  $y = \operatorname{ctg} x$ ?

3) Найдите наименьший положительный период функции:

а)  $f(x) = \sin 2x$ ; б)  $g(x) = \cos \frac{x}{3}$ ;

в)  $h(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1$ ; г)  $u(x) = \cos (4x + 1)$ .

18. 1) Перечислите основные свойства синуса, косинуса и тангенса.

2) Пользуясь свойством соответствующей функции, докажите неравенства:

а)  $\sin 290^\circ < \sin 310^\circ < \sin 370^\circ < \sin 400^\circ < \sin 430^\circ$ ;

б)  $\cos (-317^\circ) > \cos (-280^\circ) > \cos (-213^\circ) > \cos (-193^\circ)$ ;

в)  $\operatorname{tg} (-253^\circ) < \operatorname{tg} (-200^\circ) < \operatorname{tg} (-175^\circ) < \operatorname{tg} (-147^\circ) < \operatorname{tg} (-112^\circ)$ ;

г)  $\sin 4,7 < \sin 5,1 < \sin 5,6 < \sin 6,2 < \sin 7 < \sin 7,8$ .

3) Постройте график функции (сделав параллельный перенос синусоиды вдоль оси абсцисс):

а)  $y = \sin \left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ ; б)  $y = \cos \left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ .

19. 1) Сформулируйте теорему о корне.

2) Дайте определение арксинуса числа. Для каких чисел определен арксинус?

3) Вычислите:

а)  $\arcsin 0$ ; б)  $\arcsin 1$ ; в)  $\arcsin \frac{1}{2}$ ; г)  $\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

20. 1) Дайте определение арккосинуса числа.

2) Для каких чисел определен арккосинус?

3) Вычислите:

- а)  $\arccos 0$ ; б)  $\arccos 1$ ; в)  $\arccos \frac{1}{2}$ ; г)  $\arccos \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .
21. 1) Дайте определение арктангенса числа.  
2) Для каких чисел определен арктангенс?  
3) Вычислите:  
а)  $\operatorname{arctg} 0$ ; б)  $\operatorname{arctg} 1$ ; в)  $\operatorname{arctg} (-1)$ ; г)  $\operatorname{arctg} \sqrt{3}$ .
22. 1) Запишите формулы для решения простейших тригонометрических уравнений:  $\sin x = a$ ,  $\cos x = a$ ,  $\operatorname{tg} x = a$ .  
2) При каких  $a$  простейшие тригонометрические уравнения имеют решения?  
3) С помощью единичной окружности укажите углы  $\alpha$ , являющиеся решениями уравнения:  
а)  $\sin \alpha = 0,7$ ; б)  $\cos \alpha = -0,3$ ;  
в)  $\operatorname{tg} \alpha = -2$ ; г)  $\sin \alpha = -0,4$ .
23. Решите уравнение:  
а)  $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$ ; б)  $4 \sin x \cos x = \sqrt{2}$ ;  
в)  $2 \sin^2 x + 3 \sin x = 2$ ; г)  $2 \cos^2 x - 5 \cos x = 3$ ;  
д)  $\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 3 = 0$ ; е)  $6 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x = 1$ .
24. Укажите с помощью единичной окружности углы  $\alpha$ , являющиеся решениями неравенства:  
а)  $\sin \alpha > -\frac{1}{2}$ ; б)  $\cos \alpha \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  
в)  $\operatorname{tg} \alpha < 3$ ; г)  $\sin \alpha \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

### Дополнительные упражнения к главе I

168. Может ли синус (косинус) быть равным:  
а)  $\frac{\sqrt{10}}{\pi}$ ; б)  $a + \frac{1}{a}$ ; в)  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ; г)  $\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$  ( $a > 0$ ,  $b > 0$ )?
- Упростите выражение (169—172).
169. а)  $\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha}$ ; б)  $\frac{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}$ ;  
в)  $\frac{\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \alpha}$ ; г)  $\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \operatorname{ctg} \alpha$ .
170. а)  $1 + \operatorname{tg}^2 \varphi - \operatorname{tg}^2 \varphi (\cos^2 \varphi + 1)$ ;  
б)  $(1 + \sin^2 \varphi) \operatorname{ctg}^2 \varphi - 1 - \operatorname{ctg}^2 \varphi$ ;  
в)  $\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta} - \operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{ctg}^2 \beta$ ;  
г)  $\frac{\cos \beta \operatorname{tg} \beta}{\sin^2 \beta} - \operatorname{ctg} \beta \cos \beta$ .
171. а)  $(3 \sin x + 2 \cos x)^2 + (2 \sin x - 3 \cos x)^2$ ;  
б)  $\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x \sin^2 x$ ;  
в)  $(\operatorname{tg} \varphi + 1)^2 + (\operatorname{tg} \varphi - 1)^2 + (\operatorname{ctg} \varphi + 1)^2 + (\operatorname{ctg} \varphi - 1)^2$ ;  
г)  $\sqrt{\sin^2 \beta (1 + \operatorname{ctg} \beta) + \cos^2 \beta (1 + \operatorname{tg} \beta)}$ .

172. а)  $\frac{\cos \alpha + \sin \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$ ; б)  $\frac{\sin \beta - \cos \beta}{\sin \beta + \cos \beta}$ .
173. Вычислите значение выражения  $\frac{3 \cos \alpha + 2 \sin \alpha}{2 \cos \alpha - 3 \sin \alpha}$ , если:  
а)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$ ; б)  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3}$ ;  
в)  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$ ; г)  $\operatorname{tg} \alpha = -2$ .
174. Дано:  $\sin t + \cos t = m$ . Выразите через  $m$ :  
а)  $\sin t \cos t$ ; б)  $\sin^3 t + \cos^3 t$ .
175. Дано:  $\operatorname{tg} \varphi + \operatorname{ctg} \varphi = m$ . Выразите через  $m$ :  
а)  $\operatorname{tg}^2 \varphi + \operatorname{ctg}^2 \varphi$ ; б)  $\operatorname{tg}^3 \varphi + \operatorname{ctg}^3 \varphi$ .
176. а) Дано:  $\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta = 0,5$ . Найдите  $\sin^2 \alpha - \cos^2 \beta$ .  
б) Дано:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \beta > 1$ . Докажите, что  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \beta < 1$ .
- Докажите тождества (177—184).
177.  $\sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha = 1$ .
178.  $(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha)^2 - (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha)^2 = 4$ .
179. а)  $\frac{\sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha} - \sin^2 \alpha = 1$ ;  
б)  $\frac{1 - 4 \sin^2 t \cos^2 t}{(\sin t + \cos t)^2} = 1 - 2 \sin t \cos t$ .
180. а)  $\frac{\cos^3 t - \sin^3 t}{1 + \sin t \cos t} = \cos t - \sin t$ ; б)  $\frac{\cos^3 t + \sin^3 t}{1 - \sin t \cos t} = \cos t + \sin t$ .
181. а)  $\sqrt{\frac{1 - \cos t}{1 + \cos t}} = \frac{|\sin t|}{1 + \cos t}$ ; б)  $\sqrt{\frac{1 - \sin t}{1 + \sin t}} = \frac{|\cos t|}{1 + \sin t}$ .
182.  $(\sin \alpha + \operatorname{tg} \alpha)(\cos \alpha + \operatorname{ctg} \alpha) = (1 + \sin \alpha)(1 + \cos \alpha)$ .
183.  $\sin^3 \alpha (1 + \operatorname{ctg} \alpha) + \cos^3 \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha) = \sin \alpha + \cos \alpha$ .
184.  $\frac{\sqrt{1 - 2 \sin t \cos t}}{\sin^2 t - \cos^2 t} + \frac{2 \sin t \cos t}{\sin t + \cos t} = \sin t + \cos t$ , если  $\sin t > \cos t$ .
185. С помощью формул приведения замените значением тригонометрической функции острого угла:  
а)  $\cos 108^\circ$ ; б)  $\sin 250^\circ$ ; в)  $\operatorname{tg} 165^\circ$ ; г)  $\cos 317^\circ$ ;  
д)  $\sin (-157^\circ)$ ; е)  $\operatorname{tg} (-144^\circ)$ .
186. Приведите к значению тригонометрической функции угла первой четверти:  
а)  $\sin \frac{3\pi}{4}$ ; б)  $\cos \frac{9\pi}{10}$ ; в)  $\operatorname{ctg} \frac{5\pi}{9}$ ; г)  $\sin \frac{2\pi}{3}$ .
187. Приведите к значению тригонометрической функции положительного угла, меньшего  $45^\circ$ :  
а)  $\cos 89^\circ$ ; б)  $\operatorname{tg} 68^\circ$ ; в)  $\sin 71^\circ$ ; г)  $\operatorname{ctg} 47^\circ$ .
188. Приведите к значению тригонометрической функции наименьшего положительного аргумента:  
а)  $\sin \frac{29\pi}{12}$ ; б)  $\cos 2\frac{1}{7}\pi$ ; в)  $\operatorname{tg} \left(-\frac{5\pi}{6}\right)$ ; г)  $\cos \left(-\frac{7\pi}{3}\right)$ .



189. Вычислите без таблиц и калькулятора:

- а)  $\sin 75^\circ \cos 75^\circ$ ;  
 б)  $10 \operatorname{ctg} 135^\circ \sin 210^\circ \cos 225^\circ$ ;  
 в)  $2 \sin^2 225^\circ - \operatorname{ctg} 330^\circ \operatorname{tg} 405^\circ$ ;  
 г)  $\sin 167^\circ \sin 107^\circ + \sin 257^\circ \sin 197^\circ$ .

190. Упростите выражение:

- а)  $\cos(\pi - \alpha) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ; б)  $\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin\left(\beta - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos(\pi - \beta) \operatorname{tg}(-\alpha)}$ ;  
 в)  $\frac{1 - \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right)}{1 - \sin^2(\pi + x)}$ ; г)  $\frac{\cos^2(\pi - \alpha)}{1 - \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$ .

191. Докажите тождество:

а)  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 2 \operatorname{tg} x$ ;

б)  $\frac{\sin \alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha} = -\operatorname{ctg} 2\alpha$ ;

в)  $\frac{\sin(x - \pi) \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \operatorname{ctg}(\pi - x)} = -1$ ;

г)  $\frac{\sin^2(\alpha - 630^\circ)}{1 + \sin(-\alpha)} = 1 + \cos(\alpha - 90^\circ)$ .

192. Докажите, что следующие функции являются четными:

а)  $\operatorname{tg}^2 x$ ; б)  $|x| + \cos x$ ; в)  $\frac{x - \operatorname{tg} x}{x - \sin x}$ ; г)  $\frac{\sin x \cos x}{2 \operatorname{tg} x + x}$ .

193. Докажите, что следующие функции являются нечетными:

а)  $\sin \frac{x}{3}$ ; б)  $\operatorname{tg}^5 x$ ; в)  $x^3 + \sin x$ ; г)  $\frac{\sin x + x}{2 + \cos x}$ .

194. Объясните, почему указанные ниже функции не являются ни четными, ни нечетными. Периодические ли они?

а)  $\sqrt{x}$ ; б)  $\frac{1}{x-1}$ ; в)  $x+1$ ; г)  $x^2 + x + 1$ ; д)  $\sin x + \cos x$ .

195. а) Вычислите  $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$ , если  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  и  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

б) Вычислите  $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)$ , если  $\operatorname{tg} \alpha = 2$  и  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ .

196. Вычислите  $\cos(\alpha + \beta)$ , если:

а)  $\cos \alpha = -\frac{9}{41}$ ,  $\sin \beta = \frac{40}{41}$ ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ ;

б)  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ,  $\sin \beta = \frac{5}{13}$ ,  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ,  $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ .

197. Вычислите  $\sin(\alpha - \beta)$ , если:

а)  $\sin \alpha = -\frac{3}{4}$ ,  $\cos \beta = -\frac{1}{4}$ ,  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ,  $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$ ;

б)  $\cos \alpha = \sin \beta = \frac{1}{3}$ ,  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ ,  $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ .

198. Дано:  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{7}{4}$ ,  $\operatorname{tg} \beta = \frac{9}{5}$ . Найдите:

а)  $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ ; б)  $\operatorname{tg}(\alpha - \beta)$ ; в)  $\operatorname{ctg}(\alpha + \beta)$ ; г)  $\operatorname{ctg}(\alpha - \beta)$ .

199. Докажите равенство:

$\sin 32^\circ \cos 15^\circ + \cos 32^\circ \sin 15^\circ = \sin 26^\circ \cos 21^\circ + \cos 26^\circ \sin 21^\circ$ .

200. Упростите выражение:

а)  $\frac{\sin 35^\circ \cos 20^\circ - \cos 35^\circ \sin 20^\circ}{\cos 44^\circ \cos 29^\circ + \sin 44^\circ \sin 29^\circ}$ ; б)  $\frac{\sin \frac{\pi}{7} \cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7}}{\cos \frac{3\pi}{14} \cos \frac{\pi}{14} + \sin \frac{3\pi}{14} \sin \frac{\pi}{14}}$ ;  
 в)  $\frac{\cos \alpha \cos \beta - \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \sin \alpha \sin \beta}$ ; г)  $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}$ .

Докажите тождества (201—207).

201. а)  $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin x + \cos x)$ ;

б)  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos x - \sin x)$ .

202. а)  $\sin(\alpha - \beta) \sin(\alpha + \beta) = \cos^2 \beta - \cos^2 \alpha$ ,

б)  $\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta) = \cos^2 \beta - \sin^2 \alpha$ ;

в)  $\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} = \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1$ ;

г)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = 1$ .

203. а)  $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right)} = \operatorname{tg} x$ ; б)  $\frac{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - 1}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) + 1} = \sin 2\alpha$ .

204. а)  $\frac{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg} 3\alpha}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg} 3\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$ ; б)  $\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos 2\alpha}$ .

205. а)  $\frac{\cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos \alpha + \sin \alpha}$ ; б)  $\frac{1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg} \alpha$ .

206. а)  $(\sin x \cos y + \cos x \sin y)^2 + (\cos x \cos y - \sin x \sin y)^2 = 1$ ;

б)  $\sin^3 x (1 - \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x (\operatorname{tg} x - 1) = \sin x - \cos x$ .

207. а)  $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = 2 \operatorname{tg} x$ ;

б)  $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$ .

208\*. Найдите  $\sin \frac{\alpha}{2}$ ,  $\cos \frac{\alpha}{2}$ ,  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  и  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ , если:

а)  $\sin \alpha = 0,8$  и  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,

б)  $\operatorname{tg} \alpha = 3\frac{3}{7}$  и  $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ .

Представьте в виде произведения (209—210).

209. а)  $\sin^2 x - \sin^2 y$ ; б)  $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta$ .
210. а)  $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$ ;  
б)  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x$ .
211. Следующие выражения преобразуйте в произведение введением вспомогательного аргумента (например,  $1 = \sin \frac{\pi}{2}$ ):  
а)  $1 + \sin \alpha$ ; б)  $\frac{\sqrt{3}}{2} - \sin \alpha$ ; в)  $\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin \alpha$ ;  
г)  $\frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 35^\circ$ ; д)  $\frac{3}{4} - \sin^2 \alpha$ ; е)  $\frac{3}{4} - \cos^2 \alpha$ .
- 212\*. Пользуясь формулами, выражающими  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{ctg} \alpha$  через  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$  (см. № 240), найдите:  
а)  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha$  и  $\operatorname{ctg} \alpha$ , если  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 3$ ;  
б)  $\sin 2\alpha$ ,  $\operatorname{tg} 2\alpha$ ,  $\cos 2\alpha$  и  $\operatorname{ctg} 2\alpha$ , если  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{7}$ .  
Решите уравнение (213—217).
213. а)  $3 \cos 2x = 7 \sin x$ ; б)  $2 \cos 2x = 7 \cos x$ .
214. а)  $\sin^4 \frac{x}{2} - \cos^4 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ ; б)  $\cos^4 x - \sin^4 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .
215. а)  $\cos^2 x + 4 \sin^2 x = 2 \sin 2x$ ; б)  $\sin^2 x - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin 2x = \cos^2 x$ .
216. а)  $4(1 + \cos x) = 3 \sin^2 \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ ;  
б)  $4(1 - \cos x) = 3 \sin \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}$ .
217. а)  $\sin x + \sin 3x = 0$ ; б)  $\sin 5x - \sin x = 0$ ;  
в)  $\cos 2x - \cos 6x = 0$ ; г)  $\cos 4x + \cos 2x = 0$ .
- Решите неравенство (218—223).
218. а)  $\frac{5}{4} \sin^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 2x < \cos 2x$ ;  
б)  $\sin x (\cos x - \sin x) < 2$ .
219. а)  $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x \geq 2$ ;  
б)  $\cos 2x \leq \cos 3x - \cos 4x$ .
220. а)  $\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + \sqrt{3} > 0$ ;  
б)  $\sqrt{3} \operatorname{ctg}^2 x - 4 \operatorname{ctg} x + \sqrt{3} > 0$ ;  
в)  $4 \sin^2 x - 2(\sqrt{2} - 1) \sin x - \sqrt{2} < 0$ ;  
г)  $4 \cos^2 x + 2(\sqrt{2} - 1) \cos x - \sqrt{2} < 0$ .
221. а)  $\frac{4 \sin x + 3}{3 \cos x + 1} < 2$ ; б)  $\frac{4 \cos x + 3}{3 \cos x + 1} > 2$ .
222. а)  $\frac{15}{\sin x + 1} < 11 - 2 \sin x$ ; б)  $\frac{15}{\cos x + 1} < 11 - 2 \cos x$ .
223. а)  $\frac{2}{\operatorname{tg} x + 1} < 2 - \operatorname{tg} x$ ; б)  $\frac{2}{\operatorname{ctg} x + 1} > 2 - \operatorname{ctg} x$ .

224. Проверьте равенство:

- а)  $\arccos 0 + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\pi}{4}$ ; б)  $\arccos(-1) + \arccos 1 = \pi$ ;  
в)  $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$ ; г)  $\arcsin \frac{1}{2} + \arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$ .
225. Вычислите без таблиц и калькулятора:  
а)  $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin \frac{1}{2}$ ; б)  $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  
в)  $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ; г)  $\operatorname{arctg}(-1) + \operatorname{arctg} \sqrt{3}$ .
- Докажите тождество (226—227).
226. а)  $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$ ; б)  $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$ ;  
в)  $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$ ; г)  $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}$ .
227. а)  $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ ; б)  $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ ;  
в)  $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ ; г)  $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ .
228. Докажите, что при всех допустимых значениях выполнено неравенство  
$$\frac{\sin x + \operatorname{tg} x}{\cos x + \operatorname{ctg} x} \geq 0.$$
- Докажите тождество (229—234).
229. а)  $\cos^6 \beta + \sin^6 \beta = 1 - 3 \sin^2 \beta \cos^2 \beta$ ;  
б)  $3(\sin^4 \beta + \cos^4 \beta) - 2(\sin^6 \beta + \cos^6 \beta) = 1$ .
230. а)  $\frac{1}{1 + \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ ;  
б)  $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos^3 \alpha} = 1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{tg}^3 \alpha$ .
231. а)  $\frac{\sin^2 \varphi \cos \varphi - \sin \varphi \cos \varphi + \sin \varphi}{\cos \varphi (1 - \cos \varphi)} = 1 + \cos \varphi + \operatorname{tg} \varphi$ ;  
б)  $\frac{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi + \sin^2 \varphi + \sin^2 \varphi \operatorname{ctg}^2 \varphi}{2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi - 1} = \frac{1}{\cos^2 \varphi} + \frac{1}{\cos^2 \varphi \sin^2 \varphi}$ .
232.  $\frac{\sin(\beta - \gamma)}{\cos \beta \cos \gamma} + \frac{\sin(\gamma - \alpha)}{\cos \gamma \cos \alpha} + \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta} = 0$ .
233. а)  $\frac{\operatorname{tg}(45^\circ + x) - \operatorname{tg}(45^\circ - x)}{\operatorname{tg}(45^\circ + x) + \operatorname{tg}(45^\circ - x)} = \sin 2x$ ; б)  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2 \operatorname{ctg} \alpha$ .
234.  $\frac{\sin \alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha - \cos 3\alpha} = -\operatorname{ctg} 2\alpha$ .
- Упростите выражение (235—237).
235. а)  $\frac{1 + \sin 2x}{(\sin x + \cos x)^2}$ ; б)  $\frac{1 - \sin 2x}{(\sin x - \cos x)^2}$ .

236. а)  $1 - 8 \sin^2 t \cos^2 t$ ; б)  $2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1$ .

237. а)  $\frac{1 + \cos 4x + \sin 4x}{1 - \cos 4x + \sin 4x}$ ; б)  $\sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}} + \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi}{1 - \cos \varphi}}$ .

238. Найдите значения  $\sin 4\alpha$  и  $\cos 4\alpha$ , если  $\operatorname{tg} 2\alpha = 8$ .

239. Найдите значение  $\sin 4\alpha$ , если  $\operatorname{tg} \alpha = 3$ .

240. Докажите формулы:

а)  $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin (\alpha + \beta) + \sin (\alpha - \beta))$ ;

б)  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha - \beta) + \cos (\alpha + \beta))$ ;

в)  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos (\alpha - \beta) - \cos (\alpha + \beta))$ ;

г)  $\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$ ; д)  $\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$ ;

е)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$ ; ж)  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$ .

При решении упражнений 241—249 используйте формулы из упражнения 240.

Преобразуйте выражение (241—243).

241. а)  $\cos 40^\circ \cos 50^\circ$ ; б)  $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{5\pi}{12}$ ;

в)  $\sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{\pi}{24} + \frac{\sqrt{2}}{4}$ ; г)  $\sin 105^\circ \sin 15^\circ - \frac{1}{4}$ .

242. а)  $\sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ; б)  $\sin \left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \sin \left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ ;

в)  $\cos (x + \beta) \cos (x - \beta)$ ; г)  $\sin (x + \alpha) \sin (x - \alpha)$ .

243. а)  $4 \sin 30^\circ \sin 20^\circ \sin 10^\circ$ ; б)  $4 \cos 60^\circ \cos 20^\circ \cos 10^\circ$ ;

в)  $4 \sin 25^\circ \cos 15^\circ \sin 5^\circ$ ; г)  $8 \cos 1^\circ \cos 2^\circ \cos 4^\circ \cos 8^\circ$ .

Представьте в виде, удобном для вычисления без таблиц, и вычислите (244—246).

244. а)  $2 \sin 22^\circ 30' \cos 7^\circ 30'$ ; б)  $\cos 45^\circ \cos 15^\circ$ .

245. а)  $\sin 52^\circ 30' \sin 7^\circ 30'$ ; б)  $\sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12}$ .

246. а)  $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{4}$ ; б)  $8 \cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ$ .

247. Понизьте степень тригонометрической функции в выражении:

а)  $2 \cos^2 x$ ; б)  $2 \sin^2 x$ ; в)  $2 \cos^2 x \cos 2x$ ; г)  $\cos^2 x \sin^2 x$ ;

д)  $\sin^2 6x$ ; е)  $\cos^2 4x$ .

248. Докажите тождество:

а)  $2 \sin 4x \sin 2x + \cos 6x = \cos 2x$ ;

б)  $\sin^3 x \cos^2 x = \frac{1}{8} \sin x - \frac{1}{16} \sin 5x + \frac{1}{16} \sin 3x$ ;

в)  $\sin 5x \cos 3x \cos 6x = \frac{1}{4} (\sin 14x + \sin 2x + \sin 8x - \sin 4x)$ .

249. Верно ли равенство  $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{3}{16}$ ?

Решите уравнение (250—251).

250. а)  $\sin \left(\frac{\pi}{6} + x\right) - \sin \left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 1$ ;

б)  $\cos \left(\frac{\pi}{4} + x\right) + \cos \left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$ .

251. а)  $3 \sin x + 4 \cos x = 2$ ;

б)  $5 \sin x + 12 \cos x = 13$ ;

в)  $\sin x - 2 \cos x = 1$ ;

г)  $2 \sin x + \cos x = 2$ .

252. Решите неравенство:

а)  $|\sin x| + |\cos x| \geq 1$ ; б)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geq \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

253. Докажите формулы:

а)  $\arcsin (-a) = -\arcsin a$  при любом  $a \in [-1; 1]$ ;

б)  $\operatorname{arctg} (-a) = -\operatorname{arctg} a$  при любом  $a$ ;

в)  $\arccos (-a) = \pi - \arccos a$  при любом  $a \in [-1; 1]$ ;

г)  $\arccos a = \frac{\pi}{2} - \arcsin a$  при любом  $a \in [-1; 1]$ .

## ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

## § 5. ПРОИЗВОДНАЯ

## 14. Приближенное вычисление значений функций

Напомним сначала определения, известные из курса алгебры.

*Абсолютной погрешностью* приближенного значения  $x$  числа  $a$  называется модуль разности между числом и его приближенным значением. Таким образом, абсолютная погрешность приближенного равенства  $x \approx a$  есть число  $|x - a|$ .

Если абсолютная погрешность приближенного значения  $x$  числа  $a$  не превосходит  $h$ , т. е.  $|x - a| \leq h$ , то  $x$  называют *приближенным значением числа  $a$  с точностью до  $h$* .

**Пример 1.**  $\frac{1}{3} \approx 0,33$  с точностью до 0,01;

$\sqrt{2} \approx 1,4142$  с точностью до 0,0001;

$\pi \approx 3,14159265$  с точностью до 0,00000001.

Вообще, десятичные приближения действительного числа  $x$  с точностью до  $10^{-n}$  являются приближенными значениями числа  $x$  с точностью до  $10^{-n}$ , т. е.

$$x_n \approx x \text{ и } x'_n \approx x \text{ с точностью до } 10^{-n}.$$

Часто при вычислении значения функции  $f$  в точке  $a$  приходится находить значение функции  $f$  не в самой точке  $a$ , а в близкой к ней точке  $x$ . Например, если  $a = \pi$ , то для вычислений берем  $x \approx 3,14$  или  $x \approx 3,1416$  и т. д. При решении подобных задач необходимо уметь оценивать точность проводимых вычислений. Приведем два примера.

**Пример 2.** Рассмотрим такую задачу: измерить длину стороны данного квадрата и вычислить его площадь, используя результаты измерения.

Пусть точное значение длины стороны квадрата равно  $a$ . Тогда точное значение площади  $S$  есть  $a^2$ . В результате измерения получим некоторое приближенное значение  $x$  длины стороны:  $x = a + \Delta x^*$ , где  $|\Delta x|$  — абсолютная погрешность изме-

\* Символ  $\Delta x$  читается «дельта икс»;  $\Delta$  — греческая буква, которая употребляется для обозначения разностей и погрешностей. В данном случае  $\Delta x = x - a$ .

рения. Поэтому площадь будет вычислена с абсолютной погрешностью:

$$|\Delta S| = |x^2 - a^2| = |(a + \Delta x)^2 - a^2| = |2a\Delta x + (\Delta x)^2|.$$

Из этого равенства видно, что при повышении точности измерения, т. е. при всех очень маленьких  $|\Delta x|$ , слагаемые  $2a\Delta x$  и  $(\Delta x)^2$  малы и поэтому соответствующее значение площади будет мало отличаться от  $a^2$ . Например, если  $a = \sqrt{8}$ , то, проводя измерения с точностью до 1 м, 1 дм, 1 см, 1 мм и т. д., мы получим следующие значения длины стороны и точности измерения длины стороны (в метрах), площади и абсолютной погрешности ее вычисления (в квадратных метрах):

Длина стороны	Точность измерения длины стороны	Площадь*	Абсолютная погрешность при вычислении площади
3	1	9	1
2,8	0,1	7,84	0,16
2,83	0,01	8,009	0,009
2,828	0,001	7,9976	0,0024
2,8284	0,0001	7,99985	0,00015
2,82843	0,00001	8,000016	0,000016

Попробуем установить, с какой точностью должна быть измерена длина стороны квадрата, для того чтобы добиться наперед заданной точности  $h$  при вычислении площади  $S$  квадрата.

Договоримся сразу считать, что измерения проведены с точностью не менее 1 м, т. е.  $|\Delta x| \leq 1$ . Тогда

$$|\Delta S| = |(2a + \Delta x) \Delta x| = |2a + \Delta x| |\Delta x| \leq (2a + 1) |\Delta x|.$$

Допустим, что мы хотим добиться точности  $h$  при вычислении площади квадрата. Для этого достаточно провести измерения с такой точностью, что  $(2a + 1) |\Delta x| \leq h$ , т. е.  $|\Delta x| \leq \frac{h}{2a + 1}$  (и, конечно,  $|\Delta x| \leq 1$ ). Так, в рассмотренном примере  $a = \sqrt{8}$  и точность  $h = 0,001$  будет заведомо достигнута, если взять  $|\Delta x| \leq \frac{1}{7000}$ , так как в этом случае

$$|\Delta x| \leq \frac{1}{7000} = \frac{0,001}{2 \cdot 3 + 1} < \frac{0,001}{2\sqrt{8} + 1}.$$

**Пример 3.** Пусть координата материальной точки, движущейся по прямой, в момент времени  $t$  равна  $s(t) = 2t^2$ . Найдем мгновенную скорость точки в момент  $t = 1$  с.

\* Приближенное значение площади приведено с одной запасной цифрой.



Перемещение точки за промежуток времени  $[1; 1 + \Delta t]$  длительности  $\Delta t$  (при  $\Delta t > 0$ ) равно

$$s(1 + \Delta t) - s(1) = 2(1 + \Delta t)^2 - 2 = 4\Delta t + 2(\Delta t)^2,$$

а ее средняя скорость на этом промежутке есть

$$v_{\text{ср}}(\Delta t) = \frac{4\Delta t + 2(\Delta t)^2}{\Delta t} = 4 + 2\Delta t. \quad (1)$$

Формула (1) верна и при отрицательных  $\Delta t$ : перемещение точки за промежуток  $[1 + \Delta t; 1]$  равно  $s(1) - s(1 + \Delta t) = -4\Delta t - 2(\Delta t)^2$ , а длительность этого промежутка равна  $-\Delta t$ .

В качестве значения мгновенной скорости хотелось бы взять  $v_{\text{ср}}(0)$ , но это значение не определено (на 0 делить нельзя!). Однако ясно, что при всех малых  $|\Delta t|$  значения  $v_{\text{ср}}(\Delta t)$  с наперед заданной точностью приближаются числом 4, так как тогда мало и слагаемое  $2\Delta t$ . Действительно, чтобы обеспечить (наперед заданную) точность  $h$  в приближенном равенстве  $v_{\text{ср}}(\Delta t) \approx 4$ , достаточно взять  $|2\Delta t| < h$ , т. е. выбрать промежуток времени длительности, не превосходящей  $\frac{h}{2}$ .

Принято говорить, что *функция  $f(x)$  стремится к пределу  $L$  при  $x$ , стремящемся к  $a^*$ , если можно обеспечить любую наперед заданную точность  $h$  приближенного равенства  $f(x) \approx L$  за счет уменьшения погрешности  $|\Delta x| = |x - a|$  в значении аргумента*. Короче: приближенное равенство  $f(x) \approx L$  при  $x \approx a$  может выполняться с любой точностью. Вместо слова «стремится» в записи принято ставить стрелку:

$$f(x) \rightarrow L \text{ при } x \rightarrow a.$$

Это же записывают иначе:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Значок  $\lim$  — сокращенная запись латинского *limes*, которое в переводе означает «предел». Запись  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  читается: «предел  $f(x)$  при  $x$ , стремящемся к  $a$ , равен  $L$ ».

В рассмотренных выше примерах 2 и 3 было показано, что

$$S(x) \rightarrow 8 \quad \text{при } x \rightarrow \sqrt{8} \quad (\text{т. е. } \lim_{x \rightarrow \sqrt{8}} S(x) = 8);$$

$$v_{\text{ср}}(\Delta t) \rightarrow 4 \quad \text{при } \Delta t \rightarrow 0 \quad (\text{т. е. } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{ср}}(\Delta t) = 4).$$

**Пример 4.** Пусть  $f(x) = kx + b$  ( $k$  и  $b$  — постоянные). Докажем, что

$$f(x) \rightarrow ka + b \text{ при } x \rightarrow a.$$

\* Значение  $x = a$  не рассматривается, и соответственно  $\Delta x \neq 0$ .

Найдем абсолютную погрешность приближенного равенства  $f(x) \approx ka + b$ . Она равна

$$|f(x) - ka - b| = |k(a + \Delta x) + b - ka - b| = |k| |\Delta x|.$$

При  $k = 0$  имеем даже точное равенство. Если же  $k \neq 0$ , то равенство  $f(x) \approx ka + b$  выполнено с любой наперед заданной точностью  $h$ , если взять  $|\Delta x| < \frac{h}{|k|}$ .

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  при  $x \rightarrow a$  имеют пределы  $A$  и  $B$  соответственно. Это означает, что приближенные равенства  $f(x) \approx A$  и  $g(x) \approx B$  выполняются с любой точностью при всех  $x$ , достаточно близких к  $a$ . Но если мы умеем находить приближенные значения чисел  $A$  и  $B$  с любой точностью, то с любой точностью можно вычислить и значения  $A + B$ ,  $AB$  и  $\frac{A}{B}$  (при  $B \neq 0$ ). Например, для вычисления суммы  $A + B$  с точностью  $h$  достаточно вычислить каждое из слагаемых с точностью до  $\frac{h}{2}$  и сложить их. Поэтому справедливы следующие *правила вычисления пределов* (их доказательство не входит в курс средней школы).

Пусть  $f(x) \rightarrow A$  и  $g(x) \rightarrow B$  при  $x \rightarrow a$ . Тогда при  $x \rightarrow a$ :

- 1)  $f(x) + g(x) \rightarrow A + B$ ;
- 2)  $f(x) g(x) \rightarrow AB$ ;
- 3)  $\frac{f(x)}{g(x)} \rightarrow \frac{A}{B}$  (при  $B \neq 0$ ).

### Упражнения

254. Найдите десятичные приближения по недостатку и по избытку с точностью до 0,1; 0,01 и 0,001 для числа:
  - а) 0,2664; б)  $-1,27$ ; в)  $\frac{5}{6}$ ; г)  $-\frac{2}{7}$ .
255. а) Проверьте, что числа 2,6 и 2,7 являются десятичными приближениями числа  $\sqrt{7}$  с точностью до 0,1 по недостатку и избытку соответственно.  
 б) Проверьте, что числа 2,23 и 2,24 являются десятичными приближениями числа  $\sqrt{5}$  с точностью до 0,01 по недостатку и избытку соответственно.
256. а) Известно, что  $x = 0,5638413...$ ,  $y = 1,3411825...$ . Найдите пять первых десятичных знаков суммы  $x + y$ .  
 б) Известно, что  $x = 2,5475781...$ ,  $y = 1,3292160...$ . Найдите пять первых десятичных знаков разности  $x - y$ .
257. Найдите с точностью до 0,001:
  - а)  $\frac{1}{3} + \frac{4}{7}$ ; б)  $\frac{2}{5} + \sqrt{7}$ ; в)  $\sqrt{3} + \sqrt{5}$ ; г)  $\sqrt{10} - \sqrt{2}$ .
258. Свободно падающее тело за время  $t$  проходит расстояние  $S = \frac{gt^2}{2}$  ( $t$  измеряется в секундах,  $S$  — в метрах). Найдите

мгновенную скорость тела в момент времени: а)  $t=2c$ ; б)  $t$ ; в) в момент, когда тело пройдет расстояние 1 м; г) в момент, когда тело пройдет расстояние  $S$  ( $g=9,8$  м/с<sup>2</sup>).

259. Участок земли имеет форму прямоугольника со сторонами 15 и  $a$ . С какой точностью надо измерить сторону  $a$  прямоугольника, чтобы вычислить с точностью до  $10^{-2}$  его: а) периметр; б) площадь?

260. Укажите наибольшее  $\delta$ , при котором для всех точек  $x \neq -2$  из  $\delta$  — окрестности точки  $(-2)$  с точностью до  $h$  выполняется приближенное равенство  $f(x) \approx -4$  для  $h=0,1; 0,01; 0,001$ , если: а)  $f(x)=3x+2$ ; б)  $f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$ .

261. В момент  $t$  после начала движения тело, брошенное вверх с начальной скоростью  $v_0$ , находится на высоте  $h(t)=v_0t-\frac{gt^2}{2}$  ( $v_0$  измеряется в метрах в секунду,  $t$  — в секундах). Найдите мгновенную скорость тела в момент времени: а)  $t=1$  с; б)  $t$ ; в) в момент, когда тело достигнет наибольшей высоты; г) в момент падения тела на землю.

262. Известно, что  $f(x) \rightarrow 1$ , а  $g(x) \rightarrow -3$  при  $x \rightarrow 2$ . Найдите предел, к которому при  $x \rightarrow 2$  стремится функция: а)  $f(x)+g(x)$ ; б)  $f(x) \cdot g(x)$ ; в)  $-f(x)$ ; г)  $2f(x)-3g(x)$ .

263. Известно, что  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)=3$ ;  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)=-2$ . Найдите предел, к которому при  $x \rightarrow -1$  стремится функция:

а)  $\frac{f(x)}{g(x)}$ ; б)  $f^2(x)$ ; в)  $\frac{2f(x)+3g(x)}{3f(x)-g(x)}$ ; г)  $\frac{2f^2(x)-5g(x)}{f(x)+2g(x)}$ .

264. Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)=A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)=B$ . Докажите, пользуясь правилами вычисления пределов, что:

а)  $\lim_{x \rightarrow a} Cf(x)=CA$ , где  $C$  — постоянная;

б)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)-g(x))=A-B$ .

265. Дана функция  $f(x)=\frac{x^3-3x^2}{x^2-2x+7}$ . Докажите, что при  $x \rightarrow 2$  справедливы утверждения:

а)  $x^3 \rightarrow 2^3$ ;  $3x^2 \rightarrow 3 \cdot 2^2$ ; б)  $x^3-3x^2 \rightarrow 2^3-3 \cdot 2^2$ ;

в)  $x^2-2x+7 \rightarrow 2^2-2 \cdot 2+7$ ; г)  $f(x) \rightarrow f(2)$ .

266\*. Дана дробно-рациональная функция  $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ , где  $p(x)$  и  $q(x)$  — многочлены, причем  $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$ ;  $q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\dots+b_{m-1}x+b_m$ . Докажите, что при  $x \rightarrow a$  справедливы утверждения:

а)  $x^t \rightarrow a^t$  для любого натурального  $t$ ; б)  $Cx^t \rightarrow Ca^t$ , где  $C$  — постоянная;  $t \in \mathbb{N}$ ; в)  $p(x) \rightarrow p(a)$ ; г)  $f(x) \rightarrow f(a)$ , если  $q(a) \neq 0$ .

## 15. Приращение функции

Часто нас интересует не значение какой-либо величины, а ее изменение. Например, согласно закону Гука сила упругости пружины пропорциональна *удлинению* пружины; работа есть *изменение* энергии; средняя скорость — это отношение *перемещения* к *промежутку* времени, за который было совершено это перемещение, и т. д.

При сравнении значения функции  $f$  в некоторой фиксированной точке  $x_0$  со значениями этой функции в различных точках  $x$ , лежащих в окрестности  $x_0$ , удобно выражать разность  $f(x)-f(x_0)$  через разность  $x-x_0$ , пользуясь понятиями «приращение аргумента» и «приращение функции». Объясним их смысл.

Пусть  $x$  — произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности фиксированной точки  $x_0$ . Разность  $x-x_0$  называется *приращением независимой переменной* (или *аргумента*) в точке  $x_0$  и обозначается  $\Delta x$ . Таким образом,

$$\Delta x = x - x_0,$$

откуда следует, что  $x = x_0 + \Delta x$ .

Говорят также, что первоначальное значение  $x_0$  «получило приращение  $\Delta x$ ». Вследствие этого значение функции  $f$  изменится на величину

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Эта разность называется *приращением функции  $f$  в точке  $x_0$* , соответствующим приращению  $\Delta x$ , и обозначается символом  $\Delta f$  (читается «дельта эф»), т. е. по определению

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

откуда

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f.$$

Обратите внимание на то, что при фиксированном  $x_0$  приращение  $\Delta f$  есть функция от  $\Delta x$ .

$\Delta f$  называют также приращением зависимой переменной и обозначают через  $\Delta y$  для функции  $y=f(x)$ .

**Пример 1.** Найдём приращения  $\Delta x$  и  $\Delta f$  в точке  $x_0$ , если  $f(x)=x^2$ ,  $x_0=2$  и: а)  $x=1,9$ ; б)  $x=2,1$ .

а)  $\Delta x = x - x_0 = 1,9 - 2 = -0,1$ .

$$\Delta f = f(1,9) - f(2) = 1,9^2 - 2^2 = -0,39.$$

б)  $\Delta x = x - x_0 = 2,1 - 2 = 0,1$ .

$$\Delta f = f(2,1) - f(2) = 2,1^2 - 2^2 = 0,41.$$

**Пример 2.** Дан куб с ребром  $a$ . Найдём погрешность  $\Delta V$  в вычислении объема этого куба, если при измерении длины ребра была допущена погрешность  $\Delta x$ .

По определению приращения  $x = a + \Delta x$ , тогда

$$\Delta V = V(x) - V(a) = (a + \Delta x)^3 - a^3 = 3a^2\Delta x + 3a(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$

мгновенную скорость тела в момент времени: а)  $t=2c$ ; б)  $t$ ; в) в момент, когда тело пройдет расстояние 1 м; г) в момент, когда тело пройдет расстояние  $S$  ( $g=9,8$  м/с<sup>2</sup>).

259. Участок земли имеет форму прямоугольника со сторонами 15 и  $a$ . С какой точностью надо измерить сторону  $a$  прямоугольника, чтобы вычислить с точностью до  $10^{-2}$  его: а) периметр; б) площадь?

260. Укажите наибольшее  $\delta$ , при котором для всех точек  $x \neq -2$  из  $\delta$  — окрестности точки  $(-2)$  с точностью до  $h$  выполняется приближенное равенство  $f(x) \approx -4$  для  $h=0,1; 0,01; 0,001$ , если: а)  $f(x)=3x+2$ ; б)  $f(x)=\frac{x^2-4}{x+2}$ .

261. В момент  $t$  после начала движения тело, брошенное вверх с начальной скоростью  $v_0$ , находится на высоте  $h(t)=v_0t-\frac{gt^2}{2}$  ( $v_0$  измеряется в метрах в секунду,  $t$  — в секундах). Найдите мгновенную скорость тела в момент времени: а)  $t=1$  с; б)  $t$ ; в) в момент, когда тело достигнет наибольшей высоты; г) в момент падения тела на землю.

262. Известно, что  $f(x) \rightarrow 1$ , а  $g(x) \rightarrow -3$  при  $x \rightarrow 2$ . Найдите предел, к которому при  $x \rightarrow 2$  стремится функция: а)  $f(x)+g(x)$ ; б)  $f(x) \cdot g(x)$ ; в)  $-f(x)$ ; г)  $2f(x)-3g(x)$ .

263. Известно, что  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)=3$ ;  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)=-2$ . Найдите предел, к которому при  $x \rightarrow -1$  стремится функция:

а)  $\frac{f(x)}{g(x)}$ ; б)  $f^2(x)$ ; в)  $\frac{2f(x)+3g(x)}{3f(x)-g(x)}$ ; г)  $\frac{2f^2(x)-5g(x)}{f(x)+2g(x)}$ .

264. Пусть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)=A$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)=B$ . Докажите, пользуясь правилами вычисления пределов, что:

а)  $\lim_{x \rightarrow a} Cf(x)=CA$ , где  $C$  — постоянная;

б)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)-g(x))=A-B$ .

265. Дана функция  $f(x)=\frac{x^3-3x^2}{x^2-2x+7}$ . Докажите, что при  $x \rightarrow 2$  справедливы утверждения:

а)  $x^3 \rightarrow 2^3$ ;  $3x^2 \rightarrow 3 \cdot 2^2$ ; б)  $x^3-3x^2 \rightarrow 2^3-3 \cdot 2^2$ ;

в)  $x^2-2x+7 \rightarrow 2^2-2 \cdot 2+7$ ; г)  $f(x) \rightarrow f(2)$ .

266\*. Дана дробно-рациональная функция  $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ , где  $p(x)$  и  $q(x)$  — многочлены, причем  $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x+a_n$ ;  $q(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+\dots+b_{m-1}x+b_m$ . Докажите, что при  $x \rightarrow a$  справедливы утверждения:

а)  $x^t \rightarrow a^t$  для любого натурального  $t$ ; б)  $Cx^t \rightarrow Ca^t$ , где  $C$  — постоянная;  $t \in \mathbb{N}$ ; в)  $p(x) \rightarrow p(a)$ ; г)  $f(x) \rightarrow f(a)$ , если  $q(a) \neq 0$ .

## 15. Приращение функции

Часто нас интересует не значение какой-либо величины, а ее изменение. Например, согласно закону Гука сила упругости пружины пропорциональна *удлинению* пружины; работа есть *изменение* энергии; средняя скорость — это отношение *перемещения* к *промежутку* времени, за который было совершено это перемещение, и т. д.

При сравнении значения функции  $f$  в некоторой фиксированной точке  $x_0$  со значениями этой функции в различных точках  $x$ , лежащих в окрестности  $x_0$ , удобно выражать разность  $f(x)-f(x_0)$  через разность  $x-x_0$ , пользуясь понятиями «приращение аргумента» и «приращение функции». Объясним их смысл.

Пусть  $x$  — произвольная точка, лежащая в некоторой окрестности фиксированной точки  $x_0$ . Разность  $x-x_0$  называется *приращением независимой переменной* (или *аргумента*) в точке  $x_0$  и обозначается  $\Delta x$ . Таким образом,

$$\Delta x = x - x_0,$$

откуда следует, что  $x = x_0 + \Delta x$ .

Говорят также, что первоначальное значение  $x_0$  «получило приращение  $\Delta x$ ». Вследствие этого значение функции  $f$  изменится на величину

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Эта разность называется *приращением функции  $f$  в точке  $x_0$* , соответствующим приращению  $\Delta x$ , и обозначается символом  $\Delta f$  (читается «дельта эф»), т. е. по определению

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

откуда

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f.$$

Обратите внимание на то, что при фиксированном  $x_0$  приращение  $\Delta f$  есть функция от  $\Delta x$ .

$\Delta f$  называют также приращением зависимой переменной и обозначают через  $\Delta y$  для функции  $y=f(x)$ .

**Пример 1.** Найдём приращения  $\Delta x$  и  $\Delta f$  в точке  $x_0$ , если  $f(x)=x^2$ ,  $x_0=2$  и: а)  $x=1,9$ ; б)  $x=2,1$ .

а)  $\Delta x = x - x_0 = 1,9 - 2 = -0,1$ .

$$\Delta f = f(1,9) - f(2) = 1,9^2 - 2^2 = -0,39.$$

б)  $\Delta x = x - x_0 = 2,1 - 2 = 0,1$ .

$$\Delta f = f(2,1) - f(2) = 2,1^2 - 2^2 = 0,41.$$

**Пример 2.** Дан куб с ребром  $a$ . Найдём погрешность  $\Delta V$  в вычислении объема этого куба, если при измерении длины ребра была допущена погрешность  $\Delta x$ .

По определению приращения  $x = a + \Delta x$ , тогда

$$\Delta V = V(x) - V(a) = (a + \Delta x)^3 - a^3 = 3a^2\Delta x + 3a(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3.$$



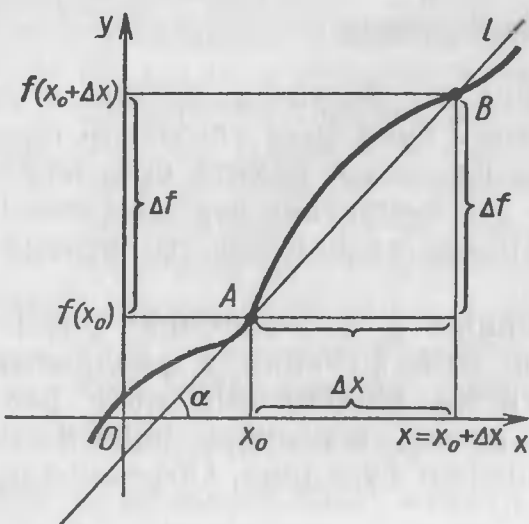


Рис. 66.

Геометрический смысл приращений  $\Delta x$  и  $\Delta y$  можно понять, рассмотрев рисунок 66. Прямую  $l$ , проходящую через любые две точки графика функции  $f$ , называют *секущей* к графику  $f$ . Угловым коэффициентом  $k$  секущей, проходящей через точки  $(x_0; y_0)$  и  $(x; y)$ , равен  $\frac{y - y_0}{x - x_0}$ . Его удобно выразить через приращения  $\Delta x$  и  $\Delta y$  (см. рис. 66):

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Напомним, что угловой коэффициент прямой  $y = kx + b$  равен тангенсу угла  $\alpha$ , который эта прямая образует с осью абсцисс.

### Упражнения

267. Для функции  $y = 2x + 5$  найдите: а)  $x$  и  $\Delta y$ , если  $x_0 = 3$  и  $\Delta x = 0,2$ ; б)  $x$  и  $\Delta y$ , если  $x_0 = 4$  и  $\Delta x = 0,06$ ; в)  $\Delta y$ , если  $x_0 = 4$  и  $\Delta x = 0,1$ ; г)  $\Delta y$ , если  $x_0 = 7$  и  $\Delta x = 0,01$ .
268. Для функции  $y = x^2$  найдите приращения  $\Delta x$  и  $\Delta y$ , если: а)  $x = 2,5$  и  $x_0 = 2$ ; б)  $x = 3,9$  и  $x_0 = 3,75$ ; в)  $x = -1,2$  и  $x_0 = -1$ ; г)  $x = -2,7$  и  $x_0 = -2,5$ .
269. Для функции  $y = \frac{1}{x}$  найдите  $\Delta y$ , если: а)  $x_0 = 9$ ,  $\Delta x = 0,06$ ; б)  $x_0 = 4,02$ ,  $\Delta x = 0,02$ ; в)  $x_0 = 5,06$ ,  $\Delta x = -0,3$ ; г)  $x_0 = 6$ ,  $\Delta x = -0,02$ .
270. Выразите приращение функции в точке  $x_0$  через  $x_0$  и  $\Delta x$ , если: а)  $y = 5 - 3x$ ; б)  $y = 2\sqrt{x}$ ; в)  $f(x) = 3x^2$ ; г)  $f(x) = 2x - x^2$ .
271. Найдите  $f(x_0 + \Delta x)$ ,  $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ,  $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ , если: а)  $f(x) = x^2$ ; б)  $f(x) = ax + b$ ; в)  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ; г)  $f(x) = x^3$ .
272. Найдите угловой коэффициент секущей к графику функции  $y = x^2$ , проходящей через точки  $(x_0; y_0)$  и  $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ , если: а)  $x_0 = 1$ ,  $\Delta x = 0,1$ ; б)  $x_0 = 1$ ,  $\Delta x = -0,1$ ; в)  $x_0 = 1$ ,  $\Delta x = 0,001$ ; г)  $x_0 = 1$ ,  $\Delta x = -0,0001$ .
273. Найдите угловой коэффициент секущей к графику функции  $y = x^3$  проходящей через точки  $(x_0; y_0)$  и  $(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ , если: а)  $x_0 = 2$ ,  $\Delta x = 0,1$ ; б)  $x_0 = 2$ ,  $\Delta x = 0,01$ ; в)  $x_0 = 2$ ,  $\Delta x = 0,001$ ; г)  $x_0 = 2$ ,  $\Delta x = 0,0001$ .

274. а) Докажите признак возрастания: функция  $f$  возрастает на промежутке  $I$  тогда и только тогда, когда для любых двух значений  $x$  и  $x + \Delta x$  ( $\Delta x \neq 0$ ) из промежутка  $I$  выполнено условие  $\frac{\Delta f}{\Delta x} > 0$ .

б) Сформулируйте и докажите аналогичный признак убывания функции на промежутке  $I$ .

275\*. Пользуясь признаками возрастания (убывания) функции (см. предыдущее упражнение), найдите промежутки возрастания (убывания) функции:

- а)  $f(x) = 2x + 3$ ; б)  $g(x) = 7 - 5x$ ;  
в)  $p(x) = x^2$ ; г)  $g(x) = 3 - x^2$ .

### 16. Понятие о производной. Касательная к графику функции

Графики практически всех известных вам функций изображались в виде «гладких» кривых (см., например, график функции  $y = x^2$  — рис. 67, а). С другой стороны, график функции  $y = |x|$  (рис. 68) не является «гладкой» кривой в окрестности точки  $(0; 0)$ . Проанализируем, как геометрически устроена «гладкая» кривая, на примере графика функции  $y = x^2$  при значениях, близких к 1. Для этого составим таблицу ее значений с шагом 0,1 на промежутке  $[0,5; 1,5]$ .

$x$	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$x^2$	0,25	0,36	0,49	0,64	0,81	1,00	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25

а затем с шагом 0,01 на промежутке  $[0,95; 1,05]$ :

$x$	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99	1,00	1,01	1,02	1,03	1,04	1,05
$x^2$	0,9025	0,9216	0,9409	0,9604	0,9801	1,00	1,0201	1,0404	1,0609	1,0816	1,1025
$2x - 1$	0,9000	0,9200	0,9400	0,9600	0,9800	1,00	1,0200	1,0400	1,0600	1,0800	1,1000
$\Delta$	0,0025	0,0016	0,0009	0,0004	0,0001	0,00	0,0001	0,0004	0,0009	0,0016	0,0025

Увеличим единицу масштаба, принятую при построении графика  $y = x^2$  (см. рис. 67, а), сначала в 10, а затем в 100 раз и, воспользовавшись таблицами, построим на миллиметровой бумаге график этой функции на отрезках  $[0,5; 1,5]$  (рис. 67, б) и  $[0,95; 1,05]$  (рис. 67, в). Мы видим, что при значениях аргумента, близких к 1, график практически не отличается от отрезка прямой



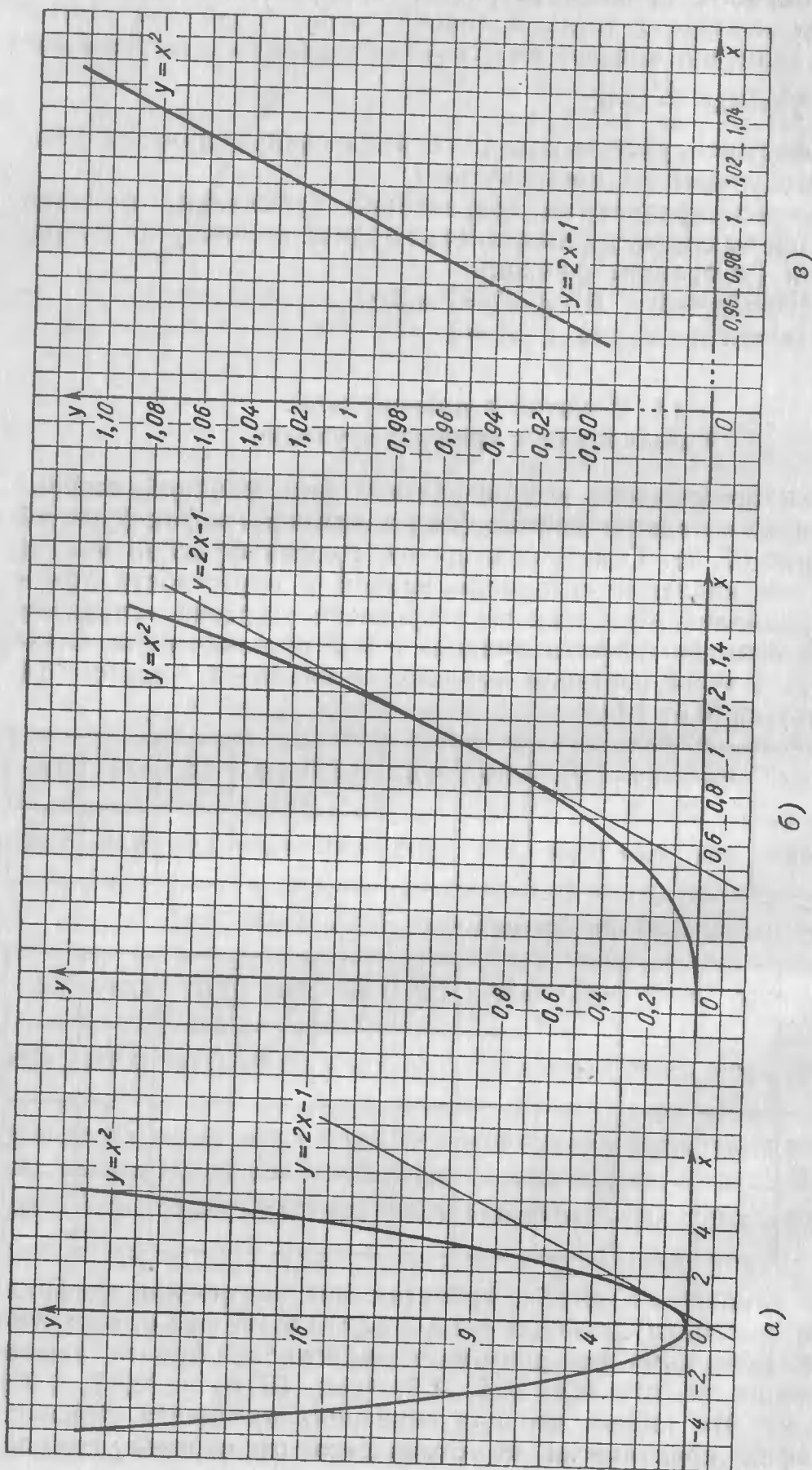


Рис. 67.

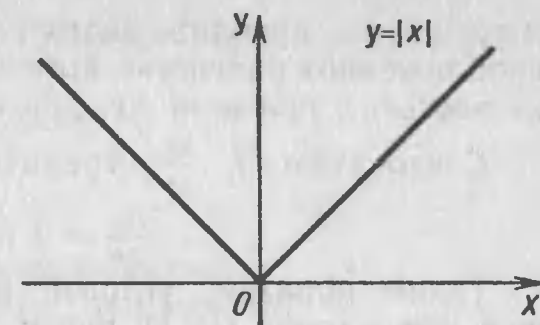


Рис. 68.

$y = 2x - 1$  (см. две нижние строки второй таблицы, где  $\Delta$  — абсолютная погрешность приближенного равенства  $x^2 \approx 2x - 1$ ). Так, на отрезке  $[0,95; 1,05]$  абсолютная погрешность приближенного равенства  $x^2 \approx 2x - 1$  не превосходит 0,0025, а на отрезке  $[0,995; 1,005]$  — не превосходит 0,000025, т. е. точки графика как бы «выстраиваются» вдоль прямой  $y = 2x - 1$ . Действительно,  $\Delta = |x^2 - (2x - 1)| = (x - 1)^2$ , при этом  $|x - 1| \leq 0,05$  для всех  $x$  из отрезка  $[0,95; 1,05]$  и  $|x - 1| \leq 0,005$  для всех  $x$  из отрезка  $[0,995; 1,005]$ .

К аналогичным выводам можно прийти, рассматривая другие точки параболы  $y = x^2$ . Представим себе, например, что график этой функции в окрестности начала координат изображен на большом листе бумаги, причем отрезок  $[-0,001; 0,001]$  изображается отрезком длиной 2 м. Значение  $y$  в точках  $-0,001$  и  $0,001$  равно 0,000001. В принятом масштабе длина отрезка  $[0; 0,000001]$  равна 1 мм. Поэтому график функции  $y = x^2$ , рассмотренный на этом промежутке, лежит в очень вытянутом прямоугольнике с основанием 2 м и высотой 1 мм, т. е. практически не отличается от отрезка оси абсцисс.

Иначе дело обстоит с графиком функции  $y = |x|$  в окрестности точки 0: не существует прямой, приближающей график функции  $y = |x|$  в окрестности точки 0 (и слева, и справа).

Возникает естественная задача. Допустим, что график функции  $f(x)$  — гладкая кривая в точке  $x_0$ , т. е. неограниченно приближается к отрезку некоторой прямой  $l$  при уменьшении окрестности точки  $x_0$ , в которой рассматривается график. Определим точное положение  $l$ .

Координаты одной точки прямой  $l$  известны — это точка  $(x_0; f(x_0))$ . Поэтому остается найти угловой коэффициент прямой  $l$ . Способ его вычисления основан на следующих соображениях.

Рассмотрим в качестве примера функцию  $y = x^2$ . Ее график в малой окрестности точки  $x_0$  близок к отрезку некоторой прямой  $l$ . Поэтому угловые коэффициенты секущих, проходящих через точки  $(x_0; x_0^2)$  и  $(x; x^2)$ , близки к угловому коэффициенту  $l$ , если  $x$  мало отличается от  $x_0$ .

Угловым коэффициентом  $k(\Delta x)$  секущей (см. п. 15) равен  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , где  $\Delta y$  — приращение функции  $y = x^2$  в точке  $x_0$ , соответствующее приращению  $\Delta x$ . Например, при  $x_0 = 1$  справедливо равенство

$$k(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = \frac{2\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2 + \Delta x \quad (\Delta x \neq 0).$$

Но  $2 + \Delta x \rightarrow 2$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  (действительно, абсолютная

погрешность приближенного равенства  $2 + \Delta x \approx 2$  равна  $|\Delta x|$  и приближенное равенство выполняется с любой наперед заданной точностью  $h$  при всех  $\Delta x$ , для которых  $|\Delta x| < h$ .

Следовательно,  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  стремится к числу 2 при  $\Delta x \rightarrow 0$ , т. е.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow 2 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0.$$

Таким образом, угловой коэффициент прямой  $l$ , проходящей через точку  $(1; 1)$ , равен 2. Уравнение этой прямой, как и предполагалось выше, таково:  $y = 2x - 1$ .

Прямую, с которой практически сливается график функции  $f$  в некоторой окрестности точки  $x_0$ , называют *касательной* к графику функции  $f$  в точке  $(x_0; f(x_0))$ . А угловой коэффициент этой касательной называют *производной* функции  $f$  в точке  $x_0$ .

Мы показали таким образом, что производная функции  $f(x) = x^2$  в точке 1 равна 2, а уравнение касательной к графику  $f$  в этой точке есть  $y = 2x - 1$ .

Найдем теперь производную функции  $y = x^2$  в произвольной точке  $x_0$ :

$$k(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x.$$

Но  $2x_0 + \Delta x \rightarrow 2x_0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Поэтому  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow 2x_0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , т. е. производная функции  $y = x^2$  в произвольной точке  $x_0$  равна  $2x_0$ . Коротко это записывают так:

$$(x^2)' = 2x.$$

### Упражнения

276. Составьте таблицу значений функции  $y = x^2 - x$  на отрезке  $[0,5; 1,5]$  с шагом 0,1, а затем с шагом 0,01 на отрезке  $[0,95; 1,05]$ . Пользуясь этими таблицами, постройте график функции  $y = x^2 - x$  на миллиметровой бумаге. Постройте на этом же чертеже график функции  $y = 2x - 1$ .
277. Найдите значение производной функции  $y = 2x - 3$  в точке:  
а) 1; б) 3; в)  $a$ ; г)  $x_0$ .
278. Найдите значение производной функции  $y = x^2 - x$  в точке:  
а)  $\frac{1}{2}$ ; б) 1; в)  $-\frac{1}{2}$ ; г)  $x_0$ .
279. Докажите, что значение производной линейной функции  $y = kx + b$  в любой точке  $x$  равно угловому коэффициенту прямой, являющейся графиком этой функции. Каково уравнение касательной к графику функции  $y = kx + b$ , проходящей через точку графика с абсциссой  $x_0$ ?
280. Для функции  $y = \frac{1}{2}x^2$  вычислите значения  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  в точке  $x_0 = \frac{1}{2}$  при  $\Delta x$ , равном  $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$ .

281. К какому числу стремится отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  для функции  $y = \frac{1}{x}$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  в точке:

- а)  $x_0 = 1$ ; б)  $x_0 = \frac{1}{2}$ ; в)  $x_0 = -\frac{1}{2}$ ; г)  $x_0 = x$ ?

### 17. Определение производной.

#### Примеры вычисления производной

В предыдущем пункте вы познакомились с понятием производной и нашли производную функции  $y = x^2$ . Дадим общее определение.

**Определение.** *Производной функции  $f$  в точке  $x_0$  называется число, к которому стремится отношение*

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

при  $\Delta x$ , стремящемся к нулю.

Производная функции  $f$  в точке  $x_0$  обозначается  $f'(x_0)$  (читается: «эф штрих от  $x_0$ »), т. е. по определению

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Функцию, имеющую производную в точке  $x_0$ , называют *дифференцируемой* в этой точке. Пусть  $D_1$  — множество точек, в которых функция  $f$  дифференцируема. Сопоставляя каждому числу  $x \in D_1$  число  $f'(x)$ , получим функцию с областью определения  $D_1$ . Эта функция называется *производной* функции  $y = f(x)$  и обозначается  $f'(x)$  (или просто  $f', y'$ ).

Нахождение производной данной функции  $f$  называется *дифференцированием*.

Основной результат предыдущего пункта можно теперь сформулировать так:

функция  $x^2$  дифференцируема в любой точке  $x$ , и ее производная равна  $2x$ , т. е.

$$(x^2)' = 2x.$$

Приведем примеры вычисления производных некоторых функций.

**Пример 1.** Найдем производную функции  $y = kx + C$  ( $k$  и  $C$  — постоянные).

Пусть  $x_0$  — произвольная точка. Найдем отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(k(x_0 + \Delta x) + C) - (kx_0 + C)}{\Delta x} = \frac{k\Delta x}{\Delta x} = k.$$

Следовательно,  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow k$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  (см. пример 4 из п. 14)

и поэтому  $y' = k$  для любой точки  $x_0$ . Итак,

$$(kx + C)' = k.$$

Из этой формулы, полагая  $k=0$ , а затем  $k=1$  и  $C=0$ , получаем следствия.

1. Производная постоянной функции равна нулю:

$$C' = 0.$$

2. Производная функции  $y=x$  равна 1:

$$x' = 1.$$

Пример 2. Докажем, что  $(x^3)' = 3x^2$ .

Выразим отношение приращения функции  $x^3$  в произвольной точке  $x_0$  к соответствующему приращению  $\Delta x$ :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = \frac{3x_0^2 \Delta x + 3x_0 (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2.$$

При  $\Delta x \rightarrow 0$  слагаемые  $(\Delta x)^2$  и  $3x_0 \Delta x$  также стремятся к нулю. Поэтому сумма  $3x_0 \Delta x + (\Delta x)^2$  стремится к нулю при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Итак,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow 3x_0^2 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0, \text{ т. е. } (x^3)' = 3x^2.$$

Пример 3. Докажем, что  $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} (x \neq 0)$ .

При любом  $x_0 \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left( \frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} \right) \cdot \frac{1}{\Delta x} = \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{\Delta x \cdot x_0 (x_0 + \Delta x)} = -\frac{1}{x_0 (x_0 + \Delta x)}.$$

Если  $\Delta x \rightarrow 0$ , то  $x_0 + \Delta x \rightarrow x_0$ ,  $\frac{1}{x_0 + \Delta x} \rightarrow \frac{1}{x_0}$ . Поэтому  $-\frac{1}{x_0 (x_0 + \Delta x)} \rightarrow -\frac{1}{x_0 \cdot x_0} = -\frac{1}{x_0^2}$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Итак,  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  стремится к пределу  $-\frac{1}{x_0^2}$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Это означает, что  $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ .

Во всех приведенных примерах функции имели производную в каждой точке области определения. Далее мы увидим, что многочлены, как и любые рациональные функции, а также тригонометрические функции, дифференцируемы во всех точках своей области определения. Не следует, однако, думать, что вообще любая функция имеет производную в каждой внутренней точке области определения. Приведем пример.

Пример 4. Найдем производную функции  $f(x) = |x|$ :

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Рассмотрим график этой функции (см. рис. 68). Для любого  $x > 0$  в некоторой окрестности точки  $x_0 > 0$  функция  $|x|$  равна  $x$ , поэтому производная  $|x|$  в таких точках равна  $x'$ , т. е.  $|x|' = 1$  при положительных значениях  $x$ . Так как  $|x| = -x$  при  $x < 0$ , то  $|x|' = -1$  при отрицательных  $x$ . Как отмечалось в предыдущем

пункте, эта функция не имеет производной в точке 0. Итак,

$$|x|' = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ \text{не существует} & \text{при } x = 0, \\ -1 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

▼ Докажем (методом от противного), что функция  $|x|$  не имеет производной в нуле.

Допустим, что эта функция имеет производную в точке 0, т. е.  $\frac{\Delta f(0)}{\Delta x}$  стремится к некоторому пределу  $A$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Тогда приближенное равенство  $\frac{\Delta f(0)}{\Delta x} \approx A$  верно с любой наперед заданной точностью  $h$  при всех  $\Delta x$ , достаточно близких к 0. Выбирая  $h < 1$ , находим, что для таких  $\Delta x$  верно неравенство

$$\left| \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} - A \right| < 1.$$

В частности, при  $\Delta x > 0$

$$|1 - A| < 1, \text{ т. е. } -1 < 1 - A < 1 \text{ или}$$

$$0 < A < 2. \quad (1)$$

Для  $\Delta x < 0$

$$|-1 - A| < 1, \text{ т. е. } -1 < -1 - A < 1 \text{ или}$$

$$-2 < A < 0. \quad (2)$$

Неравенства (1) и (2) противоречивы. Следовательно, наше допущение о существовании производной функции  $|x|$  в нуле неверно. ▼

### Упражнения

282. Пользуясь определением производной, найдите значения производной функции:

а)  $h(x) = ax + b$  в точках 2 и 4; б)  $f(x) = \frac{1}{x}$  в точках 1 и 4.

283. Для функции  $f(x) = \sqrt{x}$  найдите:

а)  $f'(1)$ ; б)  $f'(4)$ ; в)  $f'(25)$ ; г)  $f'(x)$ .

284\*. Для функции  $g(x) = \frac{1}{x^2}$  найдите:

а)  $g'(1)$ ; б)  $g'(-1)$ ; в)  $g'(2)$ ; г)  $g'(x)$ .

Пользуясь определением, найдите производную функции (285—286).

285. а)  $3 - 2x$ ; б)  $\frac{1}{3}x - 7$ ; в)  $x^2 + 2x$ ; г)  $3 - 2x - x^2$ .

286. а)  $ax^2 + bx + c$ ; б)  $x^3$ ; в)  $x^3 - x$ ; г)  $\frac{1}{x^2}$ .

287\*. Докажите, что:

$$\text{а) } (x^4)' = 4x^3;$$

$$\text{б) } \left(-\frac{1}{2}x^4\right)' = -2x^3;$$

$$\text{в) } (\sqrt{x^3})' = \frac{3}{2}\sqrt{x};$$

$$\text{г) } \left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)' = -\frac{3}{2\sqrt{x^5}}.$$

## 18. Правила вычисления производных

Существует несколько правил вычисления производных.

1) Если функции  $u$  и  $v$  дифференцируемы в точке  $x_0$ , то их сумма дифференцируема в этой точке и

$$(u+v)' = u' + v'. *$$

Коротко говорят: производная суммы равна сумме производных.

Для доказательства вычислим сначала приращение суммы функций в рассматриваемой точке  $x_0$ :

$$\begin{aligned} \Delta(u+v) &= (u(x_0 + \Delta x) + v(x_0 + \Delta x)) - (u(x_0) + v(x_0)) = \\ &= (u(x_0 + \Delta x) - u(x_0)) + (v(x_0 + \Delta x) - v(x_0)) = \Delta u + \Delta v. \end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } \frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Функции  $u$  и  $v$  дифференцируемы в точке  $x_0$ , т. е. при  $\Delta x \rightarrow 0$

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} \rightarrow u', \quad \frac{\Delta v}{\Delta x} \rightarrow v'.$$

Тогда  $\frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} \rightarrow u' + v'$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  (см. правила вычисления пределов, п. 14), т. е.  $(u+v)' = u' + v'$ .

Л е м м а. Если функция  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ , то  $\Delta f \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , т. е.  $f(x_0 + \Delta x) \rightarrow f(x_0)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Действительно,  $\Delta f = \frac{\Delta f}{\Delta x} \cdot \Delta x \rightarrow f'(x_0) \cdot 0 = 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , так как

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0), \text{ а } \Delta x \rightarrow 0.$$

Итак,  $\Delta f \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , т. е. для дифференцируемых функций  $f(x_0 + \Delta x) \rightarrow f(x_0)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

2) Если функции  $u$  и  $v$  дифференцируемы в точке  $x_0$ , то их произведение дифференцируемо в этой точке и

$$(uv)' = u'v + uv'$$

(значения функций и их производных вычисляются в точке  $x_0$ ).

▼ Для доказательства найдем сначала приращение произведения:

$$\begin{aligned} \Delta(uv) &= u(x_0 + \Delta x)v(x_0 + \Delta x) - u(x_0)v(x_0) = \\ &= (u(x_0) + \Delta u)(v(x_0) + \Delta v) - u(x_0)v(x_0) = \\ &= u(x_0)v(x_0) + \Delta u v(x_0) + u(x_0)\Delta v + \Delta u \Delta v - u(x_0)v(x_0) = \\ &= \Delta u v(x_0) + u(x_0)\Delta v + \Delta u \Delta v. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v(x_0) + u(x_0) \frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

\* В этом пункте значения производных функций  $u$  и  $v$  в точке  $x_0$  обозначаются для краткости через  $u'$  и  $v'$  соответственно.

В силу дифференцируемости функций  $u$  и  $v$  в точке  $x_0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  имеем:

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} \rightarrow u', \quad \frac{\Delta v}{\Delta x} \rightarrow v', \quad \Delta u \rightarrow 0.$$

Поэтому

$$\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} \rightarrow u'v(x_0) + u(x_0)v' + 0 \cdot v' = u'v(x_0) + u(x_0)v',$$

т. е.  $(uv)' = u'v + uv'$ , что и требовалось доказать. ▼

С л е д с т в и е. Если функция  $u(x)$  дифференцируема в  $x_0$ , а  $C$  — постоянная, то функция  $Cu$  дифференцируема в этой точке и

$$(Cu)' = Cu'.$$

Коротко говорят: постоянный множитель можно выносить за знак производной.

Для доказательства воспользуемся правилом 2 и известным из п. 17 фактом:  $C' = 0$ .

$$(Cu)' = C'u + Cu' = 0 \cdot u + Cu' = Cu'.$$

3) Если функции  $u$  и  $v$  дифференцируемы в точке  $x_0$  и функция  $v$  не равна нулю в этой точке, то частное  $\frac{u}{v}$  также дифференцируемо в  $x_0$  и

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

(значения функций и их производных вычисляются в точке  $x_0$ ).

▼ Выведем сначала формулу

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}.$$

Для этого найдем приращение функции  $\frac{1}{v}$ :

$$\Delta\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v(x_0 + \Delta x)} - \frac{1}{v(x_0)} = \frac{v(x_0) - v(x_0 + \Delta x)}{v(x_0)v(x_0 + \Delta x)} = \frac{-\Delta v}{v(x_0)(v(x_0) + \Delta v)}.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta\left(\frac{1}{v}\right)}{\Delta x} = \frac{-\frac{\Delta v}{v(x_0)(v(x_0) + \Delta v)}}{\Delta x}.$$

При  $\Delta x \rightarrow 0$  имеем:  $\frac{\Delta v}{\Delta x} \rightarrow v'$  (в силу дифференцируемости  $v$  в точке  $x_0$ ),  $\Delta v \rightarrow 0$  (по доказанной лемме).

Поэтому

$$\frac{\Delta\left(\frac{1}{v}\right)}{\Delta x} \rightarrow \frac{-v'}{v \cdot v} = -\frac{v'}{v^2}, \text{ т. е. } \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2},$$

где для краткости положено  $v(x_0) = v$  в правых частях равенств.



Теперь, пользуясь правилом нахождения производной произведения функций, находим производную частного:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \left(u \cdot \frac{1}{v}\right)' = u' \cdot \frac{1}{v} + u \cdot \left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{u'}{v} + u \cdot \frac{-v'}{v^2} = \frac{u'v - uv'}{v^2}. \quad \blacktriangledown$$

Пример 1. Применяя доказанные правила, а также формулы п. 17, найдем производные функций:

а)  $x^2 - \frac{1}{x}$ ; б)  $\frac{x^2}{x^3 + 1}$ .

Решение.

а)  $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)' = (x^2)' - \left(\frac{1}{x}\right)' = 2x - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x + \frac{1}{x^2}$ ;

б)  $\left(\frac{x^2}{x^3 + 1}\right)' = \frac{(x^2)'(x^3 + 1) - x^2(x^3 + 1)'}{(x^3 + 1)^2} = \frac{2x(x^3 + 1) - x^2(3x^2 + 1)'}{(x^3 + 1)^2} =$   
 $= \frac{2x(x^3 + 1) - x^2(3x^2 + 0)}{(x^3 + 1)^2} = \frac{2x^4 + 2x - 3x^4}{(x^3 + 1)^2} = \frac{2x - x^4}{(x^3 + 1)^2}.$

Формула для вычисления производной степенной функции  $x^n$ , где  $n$  — произвольное натуральное число, большее 1, такова:

$$(x^n)' = nx^{n-1}. \quad (1)$$

Формула производной функции  $x^2$  уже известна:

$$(x^2)' = 2x.$$

Пользуясь формулой дифференцирования произведения, получаем:

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + x^2 (x)' = 2x \cdot x + x^2 \cdot 1 = 3x^2,$$

$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + x^3 (x)' = 3x^2 \cdot x + x^3 \cdot 1 = 4x^3.$$

Заметим теперь, что

$$(x^2)' = 2x^{2-1}; (x^3)' = 3x^{3-1}; (x^4)' = 4x^{4-1}, \text{ т. е.}$$

для  $n=2, 3$  и  $4$  формула (1) доказана. Продолжая аналогичные вычисления, убеждаемся в справедливости формулы (1) для  $n=5, 6$  и т. д.

Докажем, что формула (1) верна для любого натурального  $n > 4$ .

Допустим, что формула (1) верна при  $n=k$ , т. е. что

$$(x^k)' = kx^{k-1}.$$

Покажем, что тогда формула (1) верна при  $n=k+1$ . Действительно,

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k (x)' = kx^{k-1} \cdot x + x^k = kx^k + x^k = (k+1)x^k.$$

Поэтому из того, что формула (1) верна при  $n=4$ , следует, что она верна и при  $n=5$ , но тогда она верна и при  $n=6$ , а следовательно, и при  $n=7$  и т. д. до любого натурального  $n$  (строгое

доказательство основано на методе математической индукции — см. упр. 678).  $\blacktriangledown$

Если  $n=1$  или  $n=0$ , то при  $x \neq 0$  эта формула также справедлива. Действительно, по формуле (1) при  $x \neq 0$

$$(x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1.$$

$$(x^0)' = 0 \cdot x^{0-1} = 0,$$

что совпадает со значениями производных функций  $x$  и  $1$ , уже известными из предыдущего пункта.

Пусть, наконец,  $n$  — целое отрицательное число, тогда  $n = -m$ , где  $m$  — число натуральное. Применяя правило дифференцирования частного и пользуясь уже доказанной для натуральных  $m$  формулой (1), получаем при  $x \neq 0$ :

$$(x^n)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = \frac{-(x^m)'}{(x^m)^2} = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = -m \cdot \frac{1}{x^{m+1}} =$$

$$= -mx^{-m-1} = nx^{n-1}.$$

Таким образом,

для любого целого  $n$  и любого  $x$  ( $x \neq 0$  при  $n \leq 1$ )

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Пример 2. Найдем производные функции: а)  $x^{-5}$ ; б)  $3x^7 - \frac{5}{x^3}$ .

Решение.

а)  $(x^{-5})' = -5x^{-5-1} = -5x^{-6}$ ;

б)  $\left(3x^7 - \frac{5}{x^3}\right)' = 3(x^7)' - 5(x^{-3})' = 3 \cdot 7 \cdot x^6 - 5(-3)x^{-4} =$   
 $= 21x^6 + \frac{15}{x^4}.$

### Упражнения

Найдите производную функции (288—295).

288. а)  $x^{10}$ ; б)  $2x^7$ ; в)  $x^{-5}$ ; г)  $3x^{-3}$ .

289. а)  $\frac{1}{x^4}$ ; б)  $\frac{5}{x^{11}}$ ; в)  $\frac{1}{3x^{-3}}$ ; г)  $\frac{6}{x^7}$ .

290. а)  $8\sqrt{x}$ ; б)  $3\sqrt{x^{-3}}$ ; в)  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ; г)  $\frac{3}{\sqrt{x}}$ .

291. а)  $x^7 - 3x^2 - x + 5$ ; б)  $2x^{10} - x^8 + 3x^3$ ;

в)  $2x^6 - \frac{1}{x}$ ; г)  $\frac{1}{x^2} - 3x^4$ .

292. а)  $7x^5 + 2\sqrt{x}$ ; б)  $\frac{x}{3} - \frac{7}{2x^2} - x\sqrt{x}$ ;

в)\*  $\frac{1}{x\sqrt{x}} + \sqrt{x^3}$ ; г)\*  $x\sqrt{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^2}$ .

293. а)  $\frac{1+2x}{3-5x}$ ; б)  $\frac{3x-2}{5x+8}$ ; в)  $\frac{3x-2}{4-6x}$ ; г)  $\frac{1-7x}{1-9x}$ .

294. а)  $(x+1)\sqrt{x}$ ; б)  $(2x-1)\sqrt{x}$ ; в)  $\frac{x-1}{\sqrt{x}}$ ; г)  $\frac{\sqrt{x}}{2x+1}$ .

295. а)  $\frac{2x}{1+x^2}$ ; б)  $\frac{\sqrt{x}}{4+x}$ ; в)  $*(3+x^2)(2-\sqrt{x})$ ;

г)  $*(2-\frac{x}{3}+\sqrt{x^3})(7-x^2)$ .

Вычислите производные функции  $f$  в указанных точках (296—297).

296.  $f(x)=x^2-3x$  в точках:

а) 0; б) -1; в)  $x$ ; г)  $x+1$ .

297.  $f(x)=\frac{3-x}{2+x}$  в точках:

а) 0; б) -3; в)  $x$ ; г)  $2t$ .

298. Для функции  $f(x)=x-4\sqrt{x}$  найдите:

а)  $f'(4)$ ; б)  $f'(0,01)$ ; в)  $f'(x)$ ; г)  $f'(2-x)$ .

## 19. Производная сложной функции

1. Начнем с примера.

Пример 1. Пусть требуется вычислить по заданному значению  $x$  соответствующее значение  $z$  функции  $h$ , заданной формулой

$$z=h(x)=\sqrt{1-x^2}.$$

Для этого надо сначала вычислить по заданному  $x$  значение

$$y=f(x)=1-x^2,$$

а затем уже по этому  $y$  вычислить

$$z=g(y)=\sqrt{y}.$$

Итак, функция  $f$  переводит  $x$  в  $y$ , а функция  $g$  переводит  $y$  в  $z$ . Говорят, что  $h$  есть *сложная функция*, составленная из функций  $g$  и  $f$ , и пишут:

$$h(x)=g(f(x)).$$

Чтобы вычислить значение сложной функции  $h(x)=g(f(x))$  в произвольной точке  $x$ , сначала вычисляют значение  $y$  «внутренней» функции  $f$  в этой точке, а затем  $g(y)$ .

Какова область определения сложной функции  $g(f(x))$ ? Это — множество всех тех  $x$  из области определения функции  $f$ , для которых  $f(x)$  входит в область определения функции  $g$ .

В рассматриваемом примере областью определения функции  $f$  является вся числовая прямая. Значение  $h(x)$  определено, если значение  $f(x)$  принадлежит области определения функции  $g(y)=\sqrt{y}$ . Поэтому требуется, чтобы выполнялось неравенство  $y \geq 0$ , т. е.  $1-x^2 \geq 0$ , и, значит, область определения функции  $g(f(x))$  — это отрезок  $[-1; 1]$ .

2. В предыдущих пунктах вы научились находить производные рациональных функций, в частности многочленов. Однако задача вычисления производной функции  $f(x)=(2x+3)^{100}$ , хотя и сводится к нахождению производной многочлена, требует очень

большого объема работы: надо представить  $(2x+3)^{100}$  в виде многочлена и продифференцировать 101 слагаемое полученной суммы. Можно заметно упростить решение этой и других задач, доказав правило вычисления производной сложной функции.

Если функция  $f$  имеет производную в точке  $x_0$ , а функция  $g$  имеет производную в точке  $y_0=f(x_0)$ , то сложная функция  $h(x)=g(f(x))$  также имеет производную в точке  $x_0$ , причем

$$h'(x_0)=g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0). \quad (1)$$

Для доказательства формулы (1) надо (как и раньше) при  $\Delta x \neq 0$  рассмотреть дробь  $\frac{\Delta h}{\Delta x}$  и установить, что  $\frac{\Delta h}{\Delta x} \rightarrow g'(y_0) f'(x_0)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Введем обозначения  $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta f$ . Тогда  $\Delta h=h(x_0+\Delta x)-h(x_0)=g(f(x_0+\Delta x))-g(f(x_0))=g(y_0+\Delta y)-g(y_0)=\Delta g$  и  $\Delta y \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , так как  $f$  дифференцируема в точке  $x_0$ . Далее доказательство мы проведем только для таких функций  $f$ , у которых  $\Delta f \neq 0$  в некоторой окрестности точки  $x_0$ . Тогда  $\frac{\Delta h}{\Delta x}=\frac{\Delta g}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta g}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow g'(y_0) \cdot f'(x_0)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , так как  $\frac{\Delta f}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , а  $\frac{\Delta g}{\Delta y} \rightarrow g'(y_0)$  при  $\Delta y \rightarrow 0$ , что выполнено при  $\Delta x \rightarrow 0$  (как это отмечалось выше). ▽

Пример 2. Вернемся к поставленной выше задаче и найдем производную функции  $h(x)=(2x+3)^{100}$ .

Функцию  $h$  можно представить в виде сложной функции  $h(x)=g(f(x))$ , где  $g(y)=y^{100}$ ,  $y=f(x)=2x+3$ .

Так как  $f'(x)=2$ ,  $g'(y)=100y^{99}$ ,

$$h'(x)=2 \cdot 100y^{99}=200(2x+3)^{99}.$$

Пример 3. Найдем производную функции  $h(x)=\sqrt{3x^2+1}$ .

Так как  $h(x)=g(f(x))$ , где  $y=f(x)=3x^2+1$ ,  $g(y)=\sqrt{y}$ ,

$$g'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}} \text{ и } y'=f'(x)=6x, \text{ получаем}$$

$$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot y'=\frac{6x}{2\sqrt{3x^2+1}}=\frac{3x}{\sqrt{3x^2+1}}.$$

## Упражнения

Найдите область определения функции (299—300).

299. а)  $y=\sqrt{9-x^2}$ ; б)  $y=\sqrt{x^2-0,25}$ ;

в)  $y=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$ ; г)  $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-7}}$ .

300. а)  $y=\sqrt{2-\sqrt{x}}$ ; б)  $y=\sqrt{\frac{1}{x}+1}$ ;

в)  $y=\frac{1}{\sqrt{3-x-1}}$ ; г)  $y=\frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{1-x}}}$ .

301. Заданы функции  $f(x) = 2 - x - x^2$ ;  $g(x) = \sqrt{x}$ ;  $p(x) = \frac{x}{x-3}$ .

Задайте с помощью формул функции:

- а)  $f(g(x))$ ; б)  $g(f(x))$ ; в)  $f(p(x))$ ;  
г)  $p(f(x))$ ; д)  $g(p(x))$ ; е)  $p(g(x))$ .

302. Представьте функции, заданные в упражнениях 299, 300, как сложные функции, составленные из более простых функций.

303. Найдите такую функцию  $f$ , что  $f(g(x)) = x$ , если:

- а)  $g(x) = x^2$ ,  $x \geq 0$ ; б)  $g(x) = \sqrt{x}$ ; в)  $g(x) = \frac{1}{x}$ ;  
г)  $g(x) = 2x$ ; д)  $g(x) = 3x + 2$ ; е)  $g(x) = x^2 + 1$ ,  $x \leq 0$ .

Найдите производную функции (304—307).

304. а)  $(2x - 7)^{14}$ ; б)  $(3 + 5x)^{10}$ ; в)  $(7x - 1)^{-3}$ ; г)  $(\frac{1}{3}x + 2)^{-5}$ .

305. а)  $\sqrt{2x + 3}$ ; б)  $\sqrt{3 - \frac{1}{4}x}$ ;  
в)  $\sqrt{5x - 8}$ ; г)  $\sqrt{7 - 4x}$ .

306. а)  $\sqrt{4x^2 - 1}$ ; б)  $\sqrt{\frac{1}{3}x^2 + 7}$ ;  
в)  $\sqrt{9x^2 - 16}$ ; г)  $\sqrt{7 - 3x^3}$ .

307. а)  $(5x - 2)^{13} - (3x + 7)^{20}$ ; б)  $(3x - 1)^{15} + (2x + 3)^4$ ;  
в)  $\sqrt{6x - 8} - \sqrt{4x^2 - 3}$ ; г)  $\sqrt{9 + 2x} - \sqrt{0,5x^2 - 2}$ .

## 20. Производные тригонометрических функций

1. Докажем, что функция синус имеет производную в любой точке и

$$(\sin x)' = \cos x. \quad (1)$$

Применяя формулу  $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ , находим:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \sin x}{\Delta x} &= \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0}{\Delta x} = \frac{2 \cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \\ &= \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}). \end{aligned}$$

Для вывода формулы (1) достаточно показать, что:

а)  $\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \rightarrow 1$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ ;

б)  $\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \rightarrow \cos x_0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Опираясь на эти утверждения, получим формулу (1). Действительно, при  $\Delta x \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \sin x}{\Delta x} &= \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \rightarrow 1 \cdot \cos x_0 = \\ &= \cos x_0. \end{aligned}$$

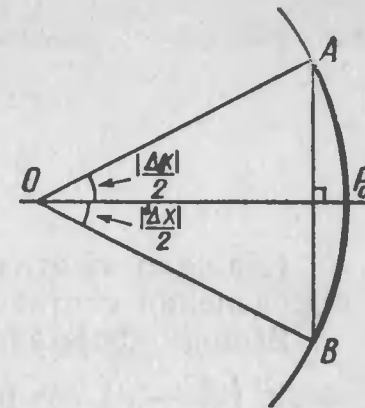


Рис. 69.

▼ Утверждения а) и б), на которые мы опирались выше, имеют наглядный геометрический смысл.

а) Отложим на единичной окружности от точки  $P_0$  в обе стороны дуги  $P_0A$  и  $P_0B$  длины  $\frac{|\Delta x|}{2}$  (рис. 69). Тогда длина дуги  $AB$  равна  $|\Delta x|$ , а длина хорды  $AB$  равна  $2 \left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right|$ . При малых  $|\Delta x|$  длина хорды  $AB$  практически не отличается от длины стягиваемой ею дуги  $AB$ . (Этим фактом мы уже пользовались в курсе геометрии при выводе формулы длины окружности. Действительно, при больших  $n$  верно, как известно, приближенное равенство  $P_n \approx C$ , где  $P_n$  — периметр правильного вписанного  $n$ -угольника, а  $C$  — длина окружности. Значит, длина стороны такого многоугольника приближенно равна длине дуги, которую эта сторона стягивает.) Следовательно,

$$\frac{AB}{\Delta x} = \frac{\left| \sin \frac{\Delta x}{2} \right|}{\frac{|\Delta x|}{2}} = \left| \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right| \rightarrow 1 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0.$$

б) Рассматривая рисунок 69, замечаем, что длина хорды  $AB$  меньше длины дуги  $AB$ , т. е.

$$2 \sin \frac{|\Delta x|}{2} < 2 \cdot \frac{|\Delta x|}{2}.$$

Воспользовавшись формулой разности косинусов и этим неравенством, находим:

$$\begin{aligned} \left| \cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) - \cos x_0 \right| &= \left| -2 \sin \frac{\Delta x}{4} \sin(x_0 + \frac{\Delta x}{4}) \right| \leq \\ &\leq \left| 2 \sin \frac{\Delta x}{4} \right| \leq \frac{|\Delta x|}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что приближенное равенство  $\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \approx \cos x_0$  выполняется с любой заданной точностью  $h$  при всех  $|\Delta x| < 2h$ , а это и означает, что  $\cos(x_0 + \frac{\Delta x}{2}) \rightarrow \cos x_0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . ▼

Пример. По формуле дифференцирования сложной функции

$$(\sin(ax + b))' = a \cos(ax + b).$$

2. Выведем формулы дифференцирования косинуса, тангенса и котангенса:



$$(\cos x)' = -\sin x, \quad (2)$$

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (3)$$

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}. \quad (4)$$

(Каждая из этих формул справедлива в любой точке области определения соответствующей функции.)

Вывод формулы (2) основан на равенствах  $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ,  $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$  и правиле дифференцирования сложной функции:

$$(\cos x)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x.$$

Чтобы доказать формулы (3) и (4), применим формулу для нахождения производной частного и выведенные формулы производной синуса и косинуса:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cos x - \cos' x \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{ctg} x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\cos' x \sin x - \sin' x \cos x}{\sin^2 x} = \\ &= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

### Упражнения

Найдите производную функции (308—314).

308. а)  $\frac{1}{3}\sin x$ ; б)  $4\cos x$ ; в)  $\sin x + \cos x$ ; г)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ .

309. а)  $\sin 3x$ ; б)  $\sin(-2x)$ ; в)  $5\sin 2x$ ; г)  $-\frac{1}{3}\sin 3x$ .

310. а)  $\cos 2x$ ; б)  $\cos(-3x)$ ; в)  $-\frac{1}{2}\cos 4x$ ; г)  $3\cos\left(-\frac{1}{3}x\right)$ .

311. а)  $\operatorname{tg} 2x$ ; б)  $\operatorname{tg}(-3x)$ ; в)  $3\operatorname{tg}\frac{x}{3}$ ; г)  $-\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x$ .

312. а)  $\operatorname{ctg} 5x$ ; б)  $-\operatorname{ctg}(-2x)$ ; в)  $4\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$ ; г)  $-7\operatorname{ctg}\frac{x}{5}$ .

313. а)  $\sin\left(\frac{1}{2}x + \pi\right)$ ; б)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ;

в)  $\cos\left(\frac{1}{2}x - \pi\right)$ ; г)  $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ .

314. а)  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ; б)  $\cos\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$ ;

в)  $\operatorname{tg}(3x - 7)$ ; г)  $\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{6}\right)$ .

315. Найдите, в каких точках обращается в нуль производная функции:

а)  $f(x) = 2\sin x - x$ ; б)  $g(x) = \cos x + \frac{1}{2}x$ ;

в)  $f(x) = \sin x + \cos x$ ; г)  $g(x) = \operatorname{tg} x - 2x$ .

Найдите производную функции (316—317).

316. а)  $x\sin x$ ; б)  $x^2\cos x$ ; в)  $\sin^2 x$ ;

г)  $\operatorname{tg}^2 x$ ; д)  $\sin^2 x + \cos^2 x$ ; е)  $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$ .

317. а)  $\cos 2x \sin x + \sin 2x \cos x$ ; б)  $\sin 2t \cos t - \sin t \cos 2t$ ;

в)  $\cos 3t \cos 2t + \sin 3t \sin 2t$ ; г)  $\cos t \cos 2t - \sin t \sin 2t$ .

## § 6. ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ, ГЕОМЕТРИИ И ФИЗИКЕ

### 21. Метод интервалов

1. В п. 14 отмечалось, что при вычислении значения функции  $f$  в точке  $a$  часто приходится вычислять значение  $f$  не в самой точке  $a$ , а в близкой к ней точке  $x$ . Именно с такой ситуацией мы, как правило, сталкиваемся при проведении приближенных вычислений.

Существуют, однако, функции, при вычислении значений которых в точках  $x$ , близких к  $x_0$ , мы получим значения, заметно отличающиеся от  $f(x_0)$ . Рассмотрим, например, значения функции  $f(x) = \{x\}$  ( $\{x\}$  — дробная часть числа  $x$ ; график  $\{x\}$  изображен на рис. 70) в точках, близких к точкам  $x_0 = n$ , где  $n$  — натуральное число. Так, для точки  $x_0 = 2$  справедливо равенство

$$f(2) = \{2\} = 0.$$

Мы не можем вычислить значение этой функции, например с точностью до 0,5, вычисляя значение  $f$  в точках, близких к  $x_0 = 2$ : при отрицательных значениях  $\Delta x$ , близких к нулю,  $\{x\}$  будет близка к 1 и абсолютная погрешность  $|\{x\} - \{2\}|$  будет больше 0,5.

Этот пример показывает, что не всегда приближенное равенство  $f(x) \approx f(a)$  выполняется с большой точностью, если  $x$  выбрано близко к  $a$ .

Функцию  $f$ , для которой приближенное равенство  $f(x) \approx f(a)$  выполняется с любой, наперед заданной точностью для всех  $x$ , достаточно близких к  $a$ , называют *непрерывной в точке  $a$* . Иными словами, функция  $f$  непрерывна в точке  $a$ , если малым изменениям аргумента в этой точке отвечают малые изменения функции. Это же можно выразить иначе: функция  $f$

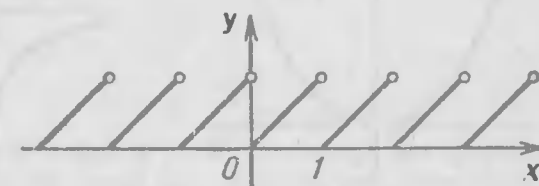


Рис. 70.



непрерывна в точке  $a$ , если  $\Delta f \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , или

$$f(x) \rightarrow f(a) \text{ при } x \rightarrow a.$$

(1)

Функцию, непрерывную в каждой точке некоторого промежутка  $J$ , называют *непрерывной на этом промежутке* (промежуток  $J$  называют *промежутком непрерывности* функции  $f$ ). При переходе от одной точки этого промежутка к близкой ей точке значение функции меняется мало, и график  $f$  на этом промежутке представляет собой непрерывную линию, которую можно\* «нарисовать, не отрывая карандаша от бумаги».

Как было показано в п. 18, функция, дифференцируемая в точке  $a$ , непрерывна в этой точке. Все рациональные и тригонометрические функции дифференцируемы во всех точках своих областей определения. Следовательно, эти функции непрерывны в каждой из этих точек и поэтому приближенные равенства  $f(x) \approx f(a)$  выполняются с любой точностью для всех  $x$ , достаточно близких к  $a$ .

Например, из дифференцируемости функции  $f(x) = x^2$  на всей прямой, а функции  $f(x) = \frac{1}{x}$  на промежутках  $(-\infty; 0)$  и  $(0; \infty)$  вытекает непрерывность этих функций на соответствующих промежутках (рис. 71, 72).

**З а м е ч а н и е.** Обратное утверждение, однако, неверно. Примером функции, непрерывной в точке нуль, но не дифференцируемой в этой точке, является функция  $|x|$ . Непрерывность этой функции в точке 0 очевидна:  $\Delta|x| < h$  для любого  $h > 0$ , если  $|x| < h$ . В п. 17 было показано, что функция  $|x|$  не дифференцируема в точке 0.

2. Во многих случаях удобно пользоваться следующим свойством непрерывных функций.

Если на интервале  $(a; b)$  функция  $f$  непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак.

\* Так, во всяком случае, обстоит дело для непрерывных функций, изучаемых в школьном курсе.

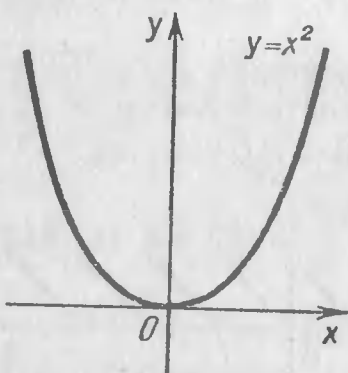


Рис. 71.

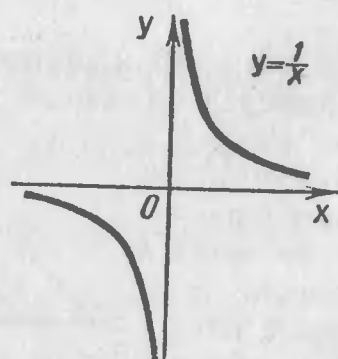


Рис. 72.

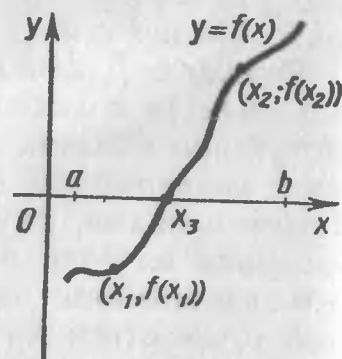


Рис. 73.

Действительно, допустим, что найдутся такие точки  $x_1$  и  $x_2$  интервала  $(a; b)$ , что

$$f(x_1) < 0, \text{ а } f(x_2) > 0.$$

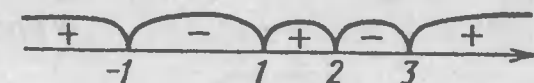


Рис. 74.

Тогда непрерывная кривая, соединяющая точки  $A(x_1; f(x_1))$  и  $B(x_2; f(x_2))$ , разделенные прямой  $y=0$ , пересекает эту прямую в некоторой точке  $x_3$  данного интервала (рис. 73)\*, т. е.  $f(x_3) = 0$ . Это противоречит условию: функция  $f$  не обращается на интервале  $(a; b)$  в нуль.

На этом факте (его полное доказательство приводится в курсах математического анализа) основан метод решения неравенства с одной переменной, называемый *методом интервалов*. Опишем его.

Пусть функция  $f$  непрерывна на интервале  $J$  и обращается в нуль в конечном числе точек этого интервала. Этими точками  $J$  разбивается на интервалы, в каждом из которых  $f$  сохраняет постоянный знак. Чтобы определить этот знак, достаточно вычислить значение функции в какой-либо одной точке для каждого такого интервала. Этот знак удобно отмечать на координатной прямой.

**П р и м е р.** Решим неравенство

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6} \geq 0. \quad (2)$$

Функция

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$$

непрерывна в каждой точке своей области определения (это дробно-рациональная функция) и обращается в нуль в точках  $-1$  и  $1$ . Область определения этой функции — вся числовая прямая, за исключением нулей знаменателя, т. е. точек  $2$  и  $3$ . Эти точки и точки  $-1$  и  $1$  разбивают область определения  $f$  на 5 промежутков (рис. 74). На рисунке отмечен знак  $f$  в каждом из соответствующих интервалов. Неравенство (2) нестрогое, поэтому точки  $-1$  и  $1$  (нули функции  $f$ ) включаются в соответствующие промежутки. Рассматривая рисунок 74, можно выписать ответ: решение неравенства — объединение промежутков  $(-\infty; -1]$ ;  $[1; 2)$  и  $(3; \infty)$ .

\* Действительно, представим себе, что точки  $A$  и  $B$  находятся на разных берегах реки, изображаемой интервалом  $(a; b)$ . Ясно, что туристу, для того чтобы попасть из  $A$  в  $B$ , надо где-то перейти реку.

318. Укажите промежутки непрерывности функции:

а)  $x^3 - 2x$ ; б)  $\frac{x^4 - 2x + 5}{x^2 + 1}$ ;

в)  $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 - 8}$ ; г)  $\frac{x^3 + 8}{x^2 + 2x}$ .

Решите методом интервалов неравенство (319—321).

319. а)  $(x-1)(x-2)(x-3) < 0$ ; б)  $(x+1)(x-4)(x+8) \geq 0$ ;

в)  $\frac{(x-2)(x-4)}{(x+3)(x-1)} > 0$ ; г)  $\frac{(x-3)(x+1)}{(x+3)(x-4)} \leq 0$ .

320. а)  $x^2 - 5x + 4 \geq 0$ ; б)  $x^2 - 3x - 4 < 0$ ;

в)  $x^4 - 10x^2 + 9 \leq 0$ ; г)  $x^4 - 5x^2 - 6 > 0$ .

321\*. а)  $(x^2 - 1)(x^3 - 1)(x^4 - 1) \geq 0$ ; б)  $\frac{(x-3)^3(x+4)^4(x-7)}{(x-2)^2(x+1)} \leq 0$ ;

в)  $\frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1}$ ; г)  $\sqrt{x^2 - 4}(x-3) < 0$ .

## 22. Касательная к графику функции

1. С понятием касательной к графику вы уже знакомы (п. 16). Дадим точное определение этого понятия.

Касательной к графику функции  $f$ , дифференцируемой в точке  $x_0$ , называется прямая, проходящая через точку  $(x_0; f(x_0))$  и имеющая угловой коэффициент  $f'(x_0)$ .

Как и в случае параболы, график функции  $f$ , дифференцируемой в точке  $x_0$ , в малой окрестности точки  $x_0$  практически не отличается от отрезка касательной. Действительно, существование производной  $f'(x_0)$  означает, что для малых  $\Delta x$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \approx f'(x_0),$$

т. е. угловой коэффициент  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  секущей, проходящей через точки  $(x_0; f(x_0))$  и  $(x_0 + \Delta x; f(x_0 + \Delta x))$ , практически равен угловому коэффициенту касательной (рис. 75). Это и означает, что точки  $(x; f(x))$  при малых  $\Delta x$  очень близки к касательной.

Условие  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  позволяет дать геометрическое определение касательной. И касательная  $l$ , и любая из секущих проходят через точку  $A(x_0; f(x_0))$  графика. Для того чтобы однозначно задать прямую, проходящую через данную точку  $A$ , достаточно указать ее угловой коэффициент. Угловой коэффициент  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  секущей при  $\Delta x \rightarrow 0$  стремится к угловому коэффициенту касательной  $f'(x_0)$ . Поэтому говорят, что касательная есть предельное положение секущей при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Имея в виду геометрическое определение касательной, мы получим, что существование производной функции  $f$  в точке  $x_0$

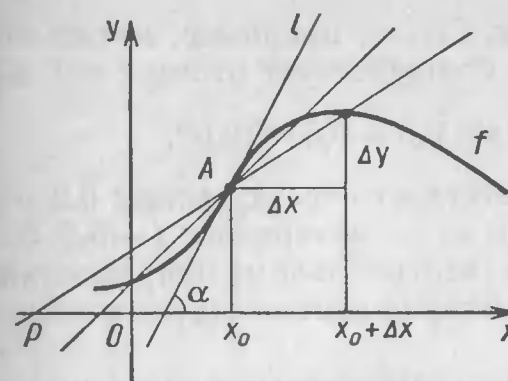


Рис. 75.

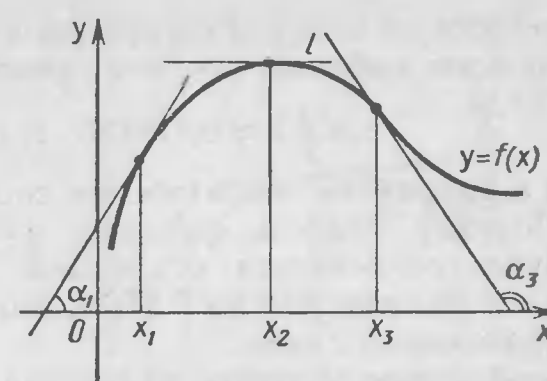


Рис. 76.

эквивалентно существованию не вертикальной касательной в точке  $(x_0; f(x_0))$  графика, причем угловой коэффициент этой касательной равен  $f'(x_0)$ . В этом состоит геометрический смысл производной.

Пусть нам задан график дифференцируемой функции. Для практического построения касательной к графику  $f$  в точке  $A(x_0; f(x_0))$  надо, поворачивая линейку вокруг точки  $A$ , найти такое ее положение, при котором график возможно теснее примыкает к краю линейки. Зафиксировав линейку в этом положении, проводим касательную.

Построим приблизительно касательные к графику функции  $f$  в точках  $x_1, x_2, x_3$  (рис. 76) и отметим углы, которые образуют эти касательные с осью абсцисс. По определению касательной производная функции  $f$  в точке  $x_0$  равна тангенсу угла наклона касательной к оси абсцисс. Мы видим, что угол  $\alpha_1$  острый, угол  $\alpha_3$  тупой, а прямая  $l$  параллельна оси  $Ox$ , т. е. угол между  $l$  и осью абсцисс равен нулю. Тангенс острого угла положителен, а тупого отрицателен, поэтому

$$f'(x_1) > 0, f'(x_2) = 0; f'(x_3) < 0.$$

Построение касательных в отдельных точках позволяет более точно строить эскизы графиков функций. Так, например, для построения графика функции синус предварительно находим, что в точках  $0, \frac{\pi}{2}$  и  $\pi$  производная синуса равна 1, 0 и  $-1$  соответ-

ственно. Построим прямые, проходящие через точки  $(0; 0)$ ,  $(\frac{\pi}{2}; 1)$  и  $(\pi; 0)$  с угловыми коэффициентами 1, 0 и  $-1$  соответственно (рис. 77). Остается вписать в полученную трапецию, образованную этими прямыми и осью  $Ox$ , график синуса так, чтобы при  $x$ , равном  $0, \frac{\pi}{2}$  и  $\pi$ , он касался соответствующих прямых.

Отметим, что график синуса в достаточно большой окрестности нуля прак-

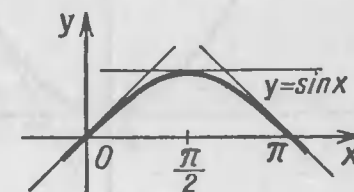


Рис. 77.

тически не отличим от прямой  $y=x$ . Пусть, например, масштабы по осям выбраны так, что единице соответствует отрезок в 1 см. Тогда

$$\sin 0,5 \approx 0,479425, \text{ т. е. } |\sin 0,5 - 0,5| \approx 0,02,$$

и в выбранном масштабе это соответствует отрезку длины 0,2 мм. Поэтому график функции  $y=\sin x$  в интервале  $(-0,5; 0,5)$  будет отклоняться от прямой (в вертикальном направлении)  $y=x$  не более чем на 0,2 мм, что примерно соответствует толщине проводимой линии.

2. Выведем теперь уравнение касательной к графику функции  $f$  в точке  $A(x_0; f(x_0))$ .

Уравнение прямой с угловым коэффициентом  $f'(x_0)$  имеет вид:

$$y = f'(x_0) \cdot x + b.$$

Для вычисления  $b$  воспользуемся тем, что касательная проходит через точку  $A$ :

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b, \text{ откуда } b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

и, значит, уравнение касательной таково:

$$\begin{aligned} \text{или} \quad y &= f'(x_0)x - f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0) \\ y &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \end{aligned} \quad (1)$$

**Пример 1.** Найдем уравнение касательной к графику функции  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$  в точке с абсциссой 2.

В этом примере  $x_0 = 2$ ,  $f(x_0) = f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 1 = 1$ ,  $f'(x) = 3x^2 - 4x$ ,  $f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 4$ . Подставляя эти числа в уравнение (1), получаем уравнение касательной:

$$y = 1 + 4(x - 2), \text{ т. е. } y = 4x - 7.$$

**Пример 2.** Выведем уравнение касательной к параболе  $y = x^2$  в точке с абсциссой  $x_0$ .

**Решение.** Имеем:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= x_0^2, \\ y'(x_0) &= 2x_0. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в уравнение (1) касательной, получаем:

$$\begin{aligned} y &= x_0^2 + 2x_0(x - x_0), \\ \text{т. е. } y &= 2x_0x - x_0^2. \end{aligned}$$

Например, при  $x_0 = 1$  получаем касательную, имеющую уравнение  $y = 2x - 1$ .

Найдем координаты точки  $T$  пересечения касательной к параболе в точке  $A(x_0; x_0^2)$  с осью  $Ox$  (рис. 78). Если  $(x_1; 0)$  — координаты точки  $T$ , то, поскольку  $T$  принадлежит касательной

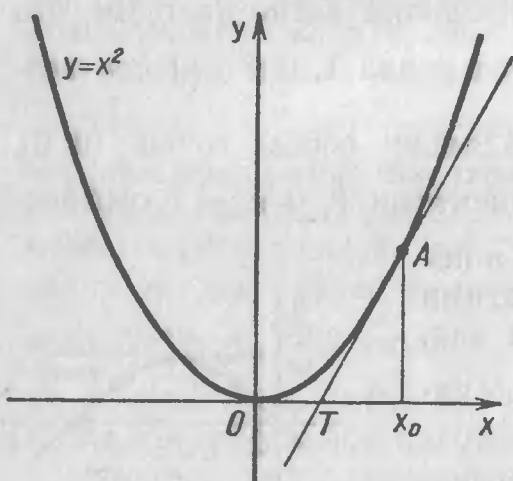


Рис. 78.

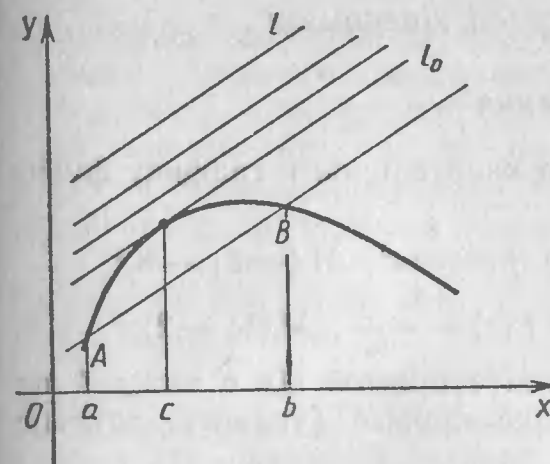


Рис. 79.

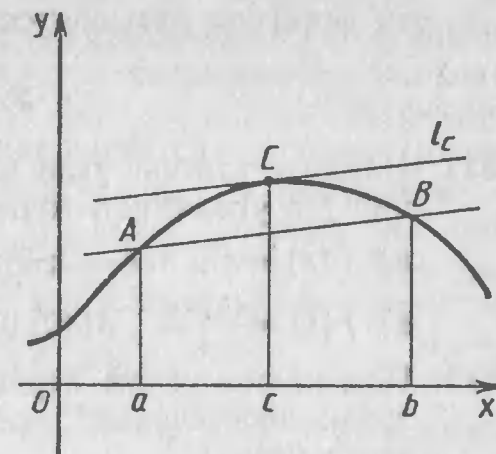


Рис. 80.

тельной (и, значит, ее координаты удовлетворяют уравнению касательной), имеем:

$$0 = 2x_0x_1 - x_0^2.$$

$$\text{Если } x_0 \neq 0, \text{ то } x_1 = \frac{x_0}{2}.$$

Полученный результат дает простой способ построения касательной к параболе в любой ее точке  $A$  (кроме вершины): достаточно соединить точку  $A$  с точкой  $T$ , делящей отрезок оси  $Ox$  с концами  $0$  и  $x_0$  пополам: прямая  $AT$  — искомая касательная.

3. Геометрический смысл производной позволяет дать наглядную иллюстрацию многих фактов математического анализа. Приведем пример.

Рассмотрим функцию  $f$ , дифференцируемую в каждой точке некоторого промежутка;  $a$  и  $b$  — произвольные точки из этого промежутка. Проведем через точки  $A(a; f(a))$  и  $B(b; f(b))$  прямую  $AB$  и рассмотрим прямую  $l$ , не имеющую общих точек с графиком  $f$  и параллельную прямой  $AB$ . Будем перемещать эту прямую  $l$  по направлению к графику  $f$  так, чтобы она оставалась параллельной  $AB$ . Зафиксируем положение  $l_0$  этой прямой в момент, когда у нее появятся общие точки с графиком  $f$ . Из рисунка 79 видно, что любая из таких «первых» общих точек — точка касания прямой  $l_0$  с графиком  $f$ . Обозначим абсциссу этой точки через  $c$ . Тогда

$$f'(c) = \operatorname{tg} \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между прямой  $l_0$  и осью абсцисс. Но  $l \parallel AB$ , поэтому угол  $\alpha$  равен углу наклона секущей  $AB$ , т. е.

$$f'(c) = \operatorname{tg} \alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Мы показали, что на интервале  $(a; b)$  найдется такая точка  $c$ , что (рис. 80)

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Эта формула называется *формулой Лагранжа\**.

### Упражнения

322. Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции  $f$  в указанной точке:  
 а)  $f(x) = x^2$ ,  $M(-3; 9)$ ; б)  $f(x) = x^3$ ,  $M(-2; -8)$ ;  
 в)  $f(x) = \frac{4x - x^2}{4}$ ,  $M(0; 0)$ ; г)  $f(x) = -\frac{2}{x}$ ,  $M(1; -2)$ .
323. Под каким углом пересекаются с прямой  $Ox$  в каждой из точек пересечения\*\* следующие кривые (укажите тангенс этого угла):  
 а)  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ ; б)  $f(x) = x^3 - 3x$ ?
324. Под каким углом пересекается с прямой  $Oy$  кривая:  
 а)  $y = \frac{1}{2}(x - 1)^2$ ; б)  $y = \frac{1}{x - 1}$ ?
325. Напишите уравнение касательной к графику функции  $f$  в точках с указанной абсциссой:  
 а)  $f(x) = x^2$ ,  $x = -1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ ; б)  $y = x^3$ ,  $x = 2$ ;  
 в)  $y = \frac{3}{x}$ ,  $x = -1$ ,  $x = 1$ ; г)  $y = \sqrt{x}$ ,  $x = 4$ .

### 23. Формулы для приближенных вычислений

Рассмотрим такую задачу: вычислить приближенное значение  $\sin 1^\circ$ , не пользуясь таблицами или калькулятором.

В курсе геометрии с помощью свойств прямоугольных треугольников были найдены значения синусов углов в  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  и т. д. Однако общего способа вычисления синусов углов, который можно было бы применить в данном случае, мы пока не знаем. Можно, правда, заметить, что угол в  $1^\circ$  близок к нулю, и, воспользовавшись непрерывностью синуса (это вытекает из доказанной в п. 20 дифференцируемости синуса в любой точке), взять в качестве приближенного значение синуса в нуле:

$$\sin 1^\circ \approx \sin 0^\circ = 0.$$

Найдя теперь значение  $\sin 1^\circ$ , получаем приближенное равенство:

$$\sin 1^\circ \approx 0,0174524.$$

Следовательно, полученное со ссылкой на непрерывность функции синус приближение довольно грубо — оно отличается от истинного значения почти на 0,02.

\* Лагранж Жозеф Луи (1736—1813) — французский математик и механик.

\*\* Углом между линиями  $L_1$  и  $L_2$  в точке  $P$  их пересечения называется угол между касательными к ним в точке  $P$ .

Существенно большую точность дает применение в этом случае общей формулы для приближенного вычисления значения функции  $f$ , дифференцируемой в  $x_0$ . Для вывода такой формулы заметим, что при  $\Delta x$ , мало отличающихся от нуля, график  $f(x)$  на малом отрезке  $[x_0 - h; x_0 + h]$  примыкает к касательной к графику  $f$ , проходящей через точку  $(x_0; f(x_0))$ . Поэтому значения  $f(x)$  на этом отрезке мало отличаются от значений линейной функции, графиком которой служит эта касательная. Уравнение касательной известно:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Следовательно, при малых  $\Delta x$  значения  $f(x)$  приближенно могут быть найдены по формуле

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x. \quad (1)$$

Если точка  $x_0$  такова, что значения  $f(x_0)$  и  $f'(x_0)$  нетрудно вычислить, то формула (1) позволяет находить значения  $f(x)$  при  $x$ , достаточно близких к  $x_0$ . Так, в рассматриваемой выше задаче естественно взять в качестве точки  $x_0$  значение 0, поскольку углы в  $0^\circ$  и  $1^\circ$  мало отличаются. Значения  $f(x_0)$  и  $f'(x_0)$  известны:  $f(0) = 0$ ;  $f'(x) = \cos x$ , и поэтому  $f'(0) = 1$ . Переведя  $1^\circ$  в радианную меру, находим, что  $1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0,0174533$ . По формуле (1) получаем:

$$\sin 1^\circ \approx 0 + 1 \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,0174533.$$

Это значение отличается от найденного менее, чем на 0,000001, т. е. абсолютная погрешность приближения  $\sin 1^\circ \approx 0,0174533$  меньше 0,000001.

Выведем приближенные формулы

$$\sqrt{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2} \Delta x \quad (2)$$

и

$$(1 + \Delta x)^n \approx 1 + n \Delta x, \quad n — \text{целое число.} \quad (3)$$

Для вывода формулы (2) возьмем функцию  $f(x) = \sqrt{x}$  и воспользуемся приближенной формулой (1) при  $x_0 = 1$  и  $x = x_0 + \Delta x = 1 + \Delta x$ . Имеем:  $f(x_0) = \sqrt{1} = 1$  и  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , откуда

$$f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}. \quad \text{В силу формулы (1)}$$

$$f(x) = \sqrt{1 + \Delta x} \approx 1 + \frac{1}{2} \Delta x.$$

Пример 1. Вычислим приближенные значения: а)  $\sqrt{1,06}$ ; б)  $\sqrt{4,08}$ . Воспользуемся формулой (2):

$$\text{а) } \sqrt{1,06} = \sqrt{1 + 0,06} \approx 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,06 = 1,03;$$

$$\text{б) } \sqrt{4,08} = 2 \sqrt{1,02} \approx 2 \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot 0,02 \right) = 2,02.$$



Для вывода формулы (3) рассмотрим функцию  $f(x)=x^n$  и воспользуемся приближенной формулой (1) при  $x_0=1$  и  $x=x_0+\Delta x=1+\Delta x$ . Имеем:  $f(x_0)=1^n=1$  и  $f'(x)=nx^{n-1}$ , откуда  $f'(x_0)=f'(1)=n \cdot 1^{n-1}=n$ . В силу формулы (1)

$$f(x)=(1+\Delta x)^n \approx 1+n\Delta x.$$

**Пример 2.** Вычислим приближенное значение  $(1,001)^{100}$ .

Понятно, что непосредственное возведение числа 1,001 в степень 100 потребует очень больших вычислений. Существенно упрощает дело применение формулы (3). Полагая в этой формуле  $\Delta x=0,001$  и  $n=100$ , находим:

$$1,001^{100}=(1+0,001)^{100} \approx 1+100 \cdot 0,001=1,10.$$

Значение  $1,001^{100}$ , вычисленное с помощью калькулятора, равно 1,10512.

**Пример 3.** Вычислим приближенное значение  $\frac{1}{(0,997)^{30}}$ .

Воспользуемся формулой (3) при  $n=-30$ :

$$\frac{1}{(0,997)^{30}}=(1-0,003)^{-30} \approx 1+(-30)(-0,003)=1+0,09=1,09.$$

### Упражнения

326. Вычислите с помощью формулы (1) приближенные значения:  
а)  $\sin 0,02$ ; б)  $\lg 0,02$ ; в)  $\sin\left(\frac{\pi}{4}-0,04\right)$ ; г)  $\cos\left(\frac{\pi}{6}+0,02\right)$ .
327. Вычислите с помощью формулы (2) приближенные значения:  
а)  $\sqrt{1,004}$ ; б)  $\sqrt{0,994}$ ; в)  $\sqrt{26}$ ; г)  $\sqrt{15,84}$ .
328. Вычислите, пользуясь формулой (3), приближенные значения:  
а)  $1,002^{100}$ ; б)  $0,998^{20}$ ; в)  $1,0003^{200}$ ; г)  $2,997^{50}$ .  
Найдите приближенные значения (329—331).
329. а)  $\frac{1}{(1,003)^{20}}$ ; б)  $\frac{1}{(0,998)^{40}}$ ; в)  $\frac{1}{0,9994}$ ; г)  $\frac{1}{\sqrt{1,04}}$ .
330. а)  $\sin 31^\circ$ ; б)  $\sin 29^\circ$ ; в)  $\cos 61^\circ$ ; г)  $\cos 59^\circ$ .
331. а)  $\lg 31^\circ$ ; б)  $\lg 29^\circ$ ; в)  $\lg 44^\circ$ ; г)  $\lg 46^\circ$ .

## 24. Производная в физике и технике

1. Напомним, как определялась скорость движения в курсе физики. Рассмотрим самый простой случай: материальная точка движется по координатной прямой, причем задан закон движения, т. е. координата  $x$  этой точки есть известная функция  $x(t)$  времени  $t$ . За промежуток времени от  $t_0$  до  $t_0+\Delta t$  перемещение точки равно  $x(t_0+\Delta t)-x(t_0)=\Delta x$ , а ее средняя скорость

$$v_{\text{ср}}(\Delta t)=\frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1)$$

При  $\Delta t < 0$  формула (1) также верна: перемещение равно  $x(t_0)-x(t_0+\Delta t)=-\Delta x$ , а продолжительность промежутка времени равна  $-\Delta t$ .

Обычно характер движения бывает таким, что при малых  $\Delta t$  средняя скорость практически не меняется, т. е. движение с большой степенью точности можно считать равномерным (см. пример 3 п. 14). Другими словами, значение средней скорости при  $\Delta t \rightarrow 0$  стремится к некоторому вполне определенному значению, которое и называют *мгновенной скоростью*  $v(t_0)$  этой точки в момент времени  $t_0$ . Итак,

$$v_{\text{ср}}(\Delta t)=\frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow v(t_0) \text{ при } \Delta t \rightarrow 0.$$

Но по определению производной

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \rightarrow x'(t_0) \text{ при } \Delta t \rightarrow 0.$$

Поэтому считают, что мгновенная скорость  $v(t)$  определена (только) для любой дифференцируемой функции  $x(t)$ , при этом

$$v(t)=x'(t). \quad (2)$$

Коротко говорят: *производная от координаты по времени есть скорость*. В этом состоит механический смысл производной.

Мгновенная скорость может принимать как положительные, так и отрицательные значения и, конечно, значение 0. Если скорость на каком-либо промежутке времени  $(t_1; t_2)$  положительна, то точка движется в положительном направлении, т. е. координата  $x(t)$  растет с течением времени, а если  $v(t)$  отрицательна, то координата  $x(t)$  убывает.

▼ В более сложных случаях точка движется на плоскости или в пространстве. Тогда скорость — векторная величина и с помощью формулы (2) определяют каждую из координат вектора  $v(t)$ . ▼

Аналогичное положение и с ускорением движения. Скорость  $v$  движения точки есть функция от времени  $t$ , т. е.  $v=v(t)$ . А производная этой функции называется ускорением движения:

$$a=v'(t).$$

Коротко говорят: *производная от скорости по времени есть ускорение*.

**Пример 1.** Рассмотрим падение материальной точки. Если координатную прямую направить вертикально вниз, а начальное положение материальной точки совпадает с 0, то, как известно из физики,

$$x(t)=\frac{gt^2}{2}.$$

Тогда скорость падения точки в момент времени  $t$  равна

$$v=\left(\frac{gt^2}{2}\right)'=gt,$$

а ускорение

$$a = (gt)' = g$$

есть величина постоянная.

Рассмотрим более общий случай.

**Пример 2.** Пусть зависимость от времени координаты точки, движущейся по прямой, выражается формулой

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + x_0,$$

где  $a \neq 0$ ,  $v_0$  и  $x_0$  — постоянные. Найдем скорость и ускорение движения.

**Решение.** Найдем скорость этого движения:

$$v = x'(t) = \left(\frac{a}{2}t^2 + v_0t + x_0\right)' = 2 \cdot \frac{a}{2}t + v_0 = at + v_0.$$

Так как нам известна скорость движения как функция времени, мы можем найти ускорение этого движения:

$$v'(t) = (at + v_0)' = a.$$

Мы видим, что ускорение при движении по квадратичному закону постоянно и равно  $a$ . Если  $a > 0$ , то это равноускоренное движение, если же  $a < 0$ , то равнозамедленное. Отметим также, что  $v_0 = v(0)$ , а  $x_0 = x(0)$ .

В главе III мы докажем, что если при движении по прямой ускорение  $a$  постоянно, то движение происходит по квадратичному закону:

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0t + x_0,$$

где  $v_0$  — начальная скорость точки, а  $x_0$  — начальная координата.

**2.** Пусть  $y = f(x)$  — произвольная дифференцируемая функция. Тогда мы можем рассмотреть движение материальной точки по координатной прямой, совершаемое согласно закону  $x = f(t)$ . Механический смысл производной позволяет дать наглядную интерпретацию теорем дифференциального исчисления.

**Пример 3.** Пусть  $f$  и  $g$  — две дифференцируемые функции. Рассмотрим следующее (относительное) движение по прямой. Дана подвижная система координат, связанная с поездом, начало которой (кабина машиниста) движется относительно начала неподвижной системы координат (станции) по закону  $x_1 = f(t)$ . В подвижной системе координат (поезде) материальная точка совершает движение по закону  $x_2(t) = g(t)$ . Тогда координата  $x$  этой точки относительно неподвижной системы координат равна  $x = x_1 + x_2$ , а ее скорость равна  $v(t) = x'(t)$ . С другой стороны, по закону сложения скоростей

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t) = x'_1(t) + x'_2(t).$$

Итак, мы получили с помощью механического смысла производной известную формулу:

$$(f + g)' = f' + g'.$$

**Пример 4.** Пусть материальная точка движется по координатной прямой согласно закону

$$x = f(t).$$

Тогда ее средняя скорость на промежутке  $a \leq t \leq b$  равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Мгновенная скорость  $v(t)$  в точках промежутка  $[a; b]$  не может быть все время меньше (больше) средней. Значит, в какой-то момент  $t_0 \in [a; b]$  мгновенная скорость равна средней, т. е. найдется такое  $t_0 \in [a; b]$ , что

$$v(t_0) = f'(t_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \quad (3)$$

Итак, мы получили механическую интерпретацию формулы Лагранжа.

С помощью производных функций, характеризующих физические явления, задаются и другие физические величины. Например, мощность (по определению) есть производная работы по времени. Рассмотрим еще один пример.

**Пример 5.** Пусть дан неоднородный стержень, причем известна масса  $m(l)$  любого его куска длины  $l$  ( $l$  отсчитывается от фиксированного конца стержня). Хотя стержень неоднороден, естественно полагать, что плотность его небольшой части (на участке от  $l$  до  $l + \Delta l$ ) примерно одна и та же, причем, чем меньше  $\Delta l$ , тем в меньших пределах на этом участке изменяется плотность. Поэтому за характеристику распределения плотности стержня в зависимости от  $l$  принимают линейную плотность  $d(l) = m'(l)$ .

С другими примерами применения производной в физике и механике вы познакомитесь в ходе решения задач.

▼ **Пример 6.** Выведем свойство параболы, имеющее применения в оптике и технике.

Поверхность, получающаяся при вращении параболы  $y = ax^2$  вокруг оси  $Oy$ , называется *параболоидом вращения*. Представим себе, что внутренняя поверхность параболоида — зеркальная поверхность и это параболическое зеркало освещается пучком лучей света, параллельных оси  $Oy$ .

Рассмотрим сечение этого зеркала плоскостью  $\alpha$ , проходящей через ось  $Oy$ . Это сечение представляет собой такую же параболу  $y = x^2$  (ось  $Ox$  выбираем в плоскости сечения,  $a = 1$ ). Согласно законам оптики отраженный луч света будет лежать в плоскости  $\alpha$ , причем этот луч образует с касательной к параболе такой же угол, как и падающий луч  $MA$  (рис. 81).

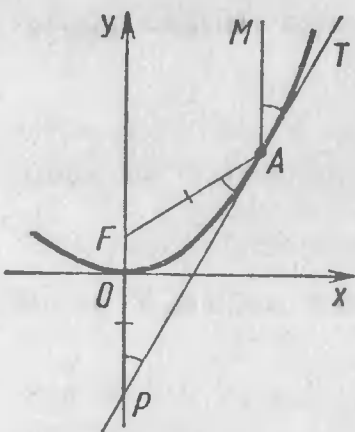


Рис. 81.

Мы докажем, что все лучи, параллельные оси  $Oy$ , после отражения пересекутся в одной точке оси  $Oy$ .

Обозначим через  $F$  точку пересечения произвольного отраженного луча с осью  $Oy$ . Прямая  $AT$  — касательная к параболе в точке  $A$ . Из законов отражения света (см. рис. 81) сразу следует, что  $\angle TAM = \angle FAP$ . Но луч  $MA$  параллелен оси  $Oy$ , поэтому  $\angle FPA = \angle TAM$  (как углы с соответственно параллельными сторонами). Следовательно,  $\angle FPA = \angle FAP$ , т. е. треугольник  $FPA$  равнобедренный и  $FA = FP$ . Точка  $A(x_0; y_0)$  ле-

жит на параболе, поэтому  $y_0 = x_0^2$ . Уравнение касательной  $AT$  имеет вид:  $y = 2x_0x - x_0^2$ , из него найдем ординату  $y_P$  точки  $P$ :  $y_P = 2x_0 \cdot 0 - x_0^2$ , т. е.  $y_P = -y_0$ . Если ординату точки  $F$  обозначим  $y$ , то  $FP = y + y_0$ . Длина  $FA = \sqrt{x_0^2 + (y_0 - y)^2}$ , и поэтому (вспомним, что  $FA = FP$ ) верно равенство  $(y + y_0)^2 = x_0^2 + (y_0 - y)^2$ , т. е.  $y^2 + 2yy_0 + y_0^2 = y_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y^2$ , откуда  $4yy_0 = y_0$  и (поскольку  $y_0 \neq 0$ )  $y = \frac{1}{4}$ .

Это и означает, что все лучи, параллельные оси параболического зеркала, после отражения сходятся в одной точке, которую называют фокусом параболического зеркала (точку  $F$  называют также фокусом параболы  $y = x^2$ ).

На этом свойстве основано устройство параболических телескопов. Лучи от далеких звезд приходят к нам в виде параллельного пучка. Изготовив параболический телескоп и поместив в его фокус фотопластинку, мы получаем возможность усилить световой сигнал, идущий от звезды. Этот же принцип лежит в основе создания параболических антенн, позволяющих усилить радиосигналы.

Если же поместить в фокусе параболического зеркала источник света, то после отражения от поверхности зеркала лучи, идущие от этого источника, не будут рассеиваться, а соберутся в узкий пучок, параллельный оси зеркала. Этот факт находит применение при изготовлении прожекторов и фонарей, различных проекторов, зеркала которых изготавливают в форме параболоидов. ▼

### Упражнения

332. Человек удаляется со скоростью 8 км/ч от подножия башни высотой 60 м. Какова скорость его удаления от вершины башни, когда он находится на расстоянии 80 м от ее основания?
333. Вращение тела вокруг оси совершается по закону

$$\varphi(t) = 3t^2 - 4t + 2.$$

Найдите угловую скорость  $\omega(t)$  в произвольный момент времени  $t$  и при  $t=4$  ( $\varphi$  — угол вращения в радианах,  $\omega$  — скорость в радианах в секунду,  $t$  — время в секундах).

334. Маховик, задерживаемый тормозом, за время  $t$  поворачивается на угол  $\varphi(t) = 4t - 0,3t^2$ . Найдите: 1) угловую скорость  $\omega(t)$  вращения маховика в момент времени  $t = 2$  с; 2) в какой момент времени маховик остановится ( $\varphi(t)$  — угол в радианах,  $t$  — время в секундах).
335. Пусть точка движется прямолинейно по закону

$$x(t) = 2t^3 + t - 1.$$

Найдите ускорение в момент времени  $t$ . В какой момент времени ускорение будет равно: а) 1 см/с<sup>2</sup>; б) 2 см/с<sup>2</sup> ( $x(t)$  — перемещение в сантиметрах,  $t$  — время в секундах)?

336. Тело массой 2 кг движется прямолинейно по закону  $x(t) = t^2 + t + 1$ . Координата  $x$  измеряется в сантиметрах, время  $t$  — в секундах. Найдите: а) действующую силу; б) кинетическую энергию  $E$  тела через 2 с после начала движения.
337. Пусть известно, что для любой точки  $C$  стержня  $AB$  длиной 20 см, отстоящей от точки  $A$  на расстоянии  $l$  см, масса куска стержня  $AC$  в граммах определяется по формуле  $m(l) = 3l^2 + 5l$ . Найдите линейную плотность стержня: а) в середине отрезка  $AB$ ; б) в конце  $B$  стержня.
338. Найдите силу  $F$ , действующую на материальную точку с массой  $m$ , движущуюся прямолинейно по закону

$$x(t) = 2t^3 - t^2 \text{ при } t = 2.$$

339. Точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = \sqrt{t}$ . Покажите, что ее ускорение пропорционально кубу скорости.
340. Пусть точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = -\frac{t^3}{6} + 3t^2 - 5$  (время измеряется в секундах, координата — в метрах). Найдите: а) момент времени  $t$ , когда ускорение точки равно нулю; б) с какой скоростью движется в этот момент точка.
341. По прямой движутся две материальные точки по законам  $x_1(t) = 4t^2 - 3$  и  $x_2(t) = t^3$ . В каком промежутке времени скорость первой точки больше скорости второй точки?

## § 7. ПРИМЕНЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

### 25. Признак возрастания (убывания) функции

В п. 4 вы видели, что одна из основных задач исследования функции — это нахождение промежутков ее возрастания и убывания. Такое исследование легко провести с помощью производной. Сформулируем соответствующие утверждения.



Достаточный признак возрастания функции. Если  $f'(x) > 0$  в каждой точке интервала  $I$ , то функция  $f$  возрастает на  $I$ .

Достаточный признак убывания функции. Если  $f'(x) < 0$  в каждой точке интервала  $I$ , то функция  $f$  убывает на  $I$ .

Доказательство этих признаков проводится на основании формулы Лагранжа (см. п. 22). Возьмем два любых числа  $x_1$  и  $x_2$  из интервала  $I$ . Пусть  $x_1 < x_2$ . По формуле Лагранжа существует число  $c \in (x_1; x_2)$ , такое, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c). \quad (1)$$

Число  $c$  принадлежит интервалу  $I$ , так как точки  $x_1$  и  $x_2$  принадлежат  $I$ . Если  $f' > 0$  на  $I$ , то  $f'(c) > 0$  и потому  $f(x_1) < f(x_2)$  — это следует из формулы (1), так как  $x_2 - x_1 > 0$ . Этим доказано возрастание функции  $f$  на  $I$ . Если же  $f' < 0$  на  $I$ , то  $f'(c) < 0$  и потому  $f(x_1) > f(x_2)$  — следует из формулы (1), так как  $x_2 - x_1 > 0$ . Этим доказано убывание функции  $f$  на  $I$ .

▼ Наглядный смысл признаков ясен из таких физических рассуждений (рассмотрим для определенности признак возрастания). Пусть движущаяся по оси ординат точка в момент времени  $t$  имеет координату  $y = f(t)$ . Тогда скорость этой точки в момент времени  $t$  равна  $f'(t)$  (см. п. 24). Если  $f'(t) > 0$  в каждый момент времени  $t$  промежутка  $I$ , то точка движется в положительном направлении оси ординат, т. е.

$$\text{если } t_1 < t_2, \text{ то } f(t_1) < f(t_2).$$

Это означает, что функция  $f$  возрастает на промежутке  $I$ . ▼

Пример 1. Найдем промежутки возрастания (убывания) и построим график функции

$$f(x) = x - x^3.$$

Решение. Данная функция определена на множестве всех действительных чисел. Из равенства

$$f'(x) = 1 - 3x^2$$

следует, что  $f'(x) > 0$ , если  $1 - 3x^2 > 0$ . Решая это неравенство методом интервалов (рис. 82), получим, что  $f'(x) > 0$  на интервале  $(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}})$  и, значит, на этом интервале  $f$  возрастает.

Аналогично  $f'(x) < 0$  на интервалах  $(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}})$  и  $(\frac{1}{\sqrt{3}}; \infty)$ , поэтому на этих интервалах  $f$  убывает.

Далее вычислим значения  $f$  в точках  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$  и  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ :

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}} - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 =$$

$$= -\frac{2}{3\sqrt{3}}; f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

На координатной плоскости отметим точки  $M\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; -\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$

и  $M\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$  и нарисуем график функции, возрастающей на интервале  $(-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}})$  и убывающей на интервалах  $(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}})$  и  $(\frac{1}{\sqrt{3}}; \infty)$  (рис. 83).

Из рисунка 83 видно, что функция  $f$  примера 1, непрерывная в точках  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$  и  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ , возрастает на отрезке  $[-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}]$  и убывает на промежутках  $(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}]$  и  $[\frac{1}{\sqrt{3}}; \infty)$ .

З а м е ч а н и е 1. Если функция  $f$  непрерывна в каком-либо из концов промежутка возрастания (убывания), то его можно присоединить к этому промежутку (как точки  $-\frac{1}{\sqrt{3}}$  и  $\frac{1}{\sqrt{3}}$  в примере 1).

Мы примем этот факт без доказательства.

З а м е ч а н и е 2. Для решения неравенств  $f' > 0$  и  $f' < 0$  удобно пользоваться следующим приемом: точки, в которых производная равна 0 или не существует, разбивают область определения функции  $f$  на промежутки, в каждом из которых  $f'$  сохраняет постоянный знак. Его можно определить, вычислив значение  $f'$  в какой-нибудь точке промежутка. В случае, когда  $f'$  непрерывна на этих промежутках, законность применения такого приема следует из п. 21.

Пример 2. Найдем промежутки возрастания (убывания) и построим график функции

$$f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}.$$

Решение. Область определения данной функции — объединение промежутков  $(-\infty; 0)$  и  $(0; \infty)$ ;

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{x^3},$$

и  $f'(x) = 0$  при  $x = 1$ . Точки 0 и 1 разбивают область определения функции  $f$  на три интервала  $(-\infty; 0)$ ,  $(0; 1)$  и  $(1; \infty)$ . Согласно замечанию 2 в каждом из них  $f'$  сохраняет постоянный знак. Знак производной в каждом из этих интервалов отмечен на рисунке 84.

Следовательно, данная функция возрастает на интервалах

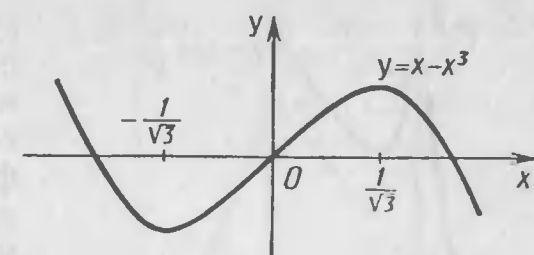


Рис. 83.



Рис. 84.

Рис. 82.



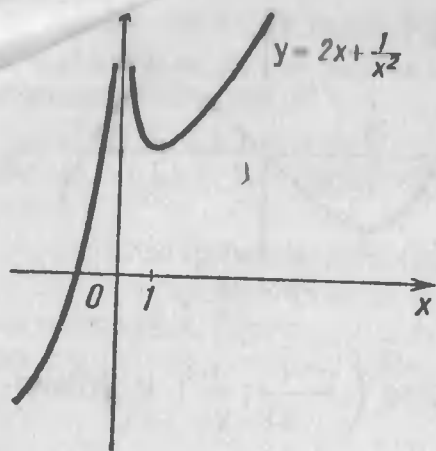


Рис. 85.

$(-\infty; 0)$  и  $(1; \infty)$ . Поскольку  $f$  непрерывна в точке 1, то эту точку можно (в силу замечания 1) присоединить к промежутку, на котором функция  $f$  возрастает. Окончательно получаем, что  $f$  возрастает на промежутках  $(-\infty; 0)$  и  $[1; \infty)$ . Далее,  $f'(x) < 0$  на интервале  $(0; 1)$  и поэтому (с учетом замечания 1)  $f$  убывает на промежутке  $(0; 1]$ .

Точка 0 не входит в  $D(f)$ , однако при стремлении  $x$  к 0 слагаемое  $\frac{1}{x^2}$  неограниченно возрастает.

Поэтому и значения  $f$  неограниченно возрастают. В точке 1 функция принимает значение 3.

Отметим теперь на координатной плоскости точку  $M(1; 3)$  и нарисуем график функции, возрастающей на промежутках  $(-\infty; 0)$  и  $[1; \infty)$  и убывающей на промежутке  $(0; 1]$  (рис. 85).

### Упражнения

Определите промежутки возрастания и убывания функции (342—345).

342. а)  $f(x) = 3x + 1$ ; б)  $g(x) = -4x + 2$ ;  
в)  $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$ ; г)  $g(x) = -\frac{1}{4}x - 2$ .
343. а)  $f(x) = \frac{2}{x}$ ; б)  $q(x) = -\frac{1}{3x}$ ; в)  $f(x) = \frac{2}{3-x}$ ;  
г)  $q(x) = 2 - \frac{4}{0,5x-1}$ .
344. а)  $v(x) = x^2$ ; б)  $f(x) = (x-1)^2$ ;  
в)  $y(x) = 5x^2 - 3x + 1$ ; г)  $f(x) = x^2 - 2x + 5$ .
345. а)  $h(x) = x^3 - 27x$ ; б)  $u(x) = x^2(x-3)$ ;  
в)  $h(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$ ; г)  $g(x) = 2 - 9x + 3x^2 - x^3$ .

### 26. Критические точки функции, ее максимумы и минимумы

Внутренние точки области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует, называются *критическими точками* этой функции. Эти точки играют важную роль при построении графика функции, поскольку только они могут быть точками экстремума функции (рис. 86 и 87). Сформулируем соответствующее утверждение — его называют *теоремой Ферма\**.

\* Эта теорема была открыта французским математиком Пьером Ферма (1601—1665).

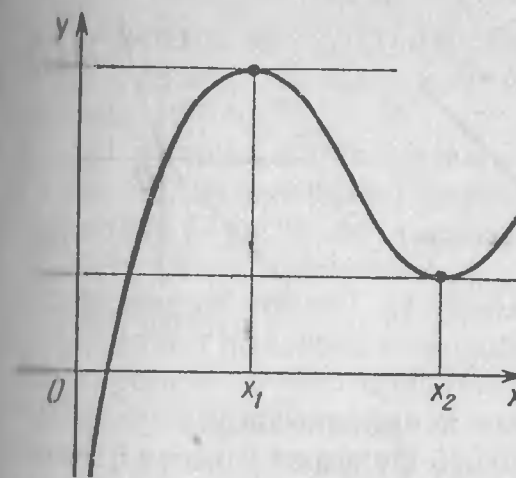


Рис. 86.

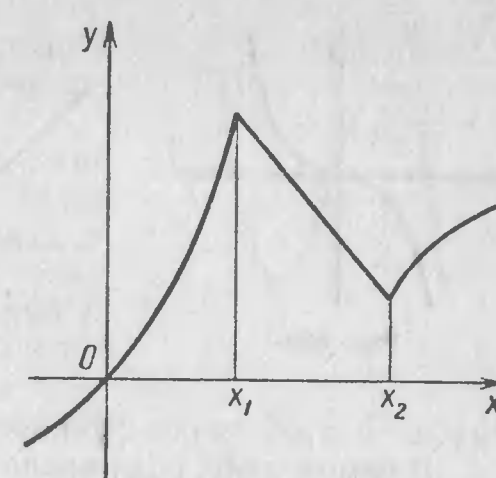


Рис. 87.

**Необходимый признак экстремума.** Если точка  $x_0$  является точкой экстремума функции  $f$  и в этой точке существует производная  $f'$ , то она равна нулю:  $f'(x_0) = 0$ .

Достаточно доказать, что если  $f'(x_0) \neq 0$ , то точка  $x_0$  не может быть точкой экстремума. По определению производной

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \approx f'(x_0)$$

с любой наперед заданной точностью  $h$  для всех  $x$ , достаточно близких к  $x_0$ . Если  $f'(x_0) > 0$ , то, взяв  $h < f'(x_0)$ , получим, что

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

для всех  $x$ , достаточно близких к  $x_0$ . Теперь заметим, что если  $x > x_0$ , то  $f(x) > f(x_0)$  и, значит,  $x_0$  не является точкой максимума. Взяв точку  $x$  такую, что  $x < x_0$ , получим  $f(x) < f(x_0)$ , и, следовательно,  $x_0$  не может быть и точкой минимума  $f$ . Случай  $f'(x_0) < 0$  разбирается аналогично.

Важно отметить, что теорема Ферма есть лишь необходимое условие экстремума: из того, что производная в точке  $x_0$  обращается в нуль, не обязательно следует, что в этой точке функция имеет экстремум. Например, производная функции  $x^3$  обращается в нуль в точке 0, но экстремума в этой точке функция не имеет (рис. 88).

До сих пор мы рассматривали критические точки, в которых производная равна нулю. Рассмотрим теперь критические точки, в которых производная не существует. В этих точках функция также может иметь или не иметь экстремум.

**Пример 1.** Рассмотрим функцию  $f(x) = |x|$  (рис. 89). Эта функция не имеет производной в 0. Значит, это критическая точка. Очевидно, что в точке 0 функция имеет минимум.

**Пример 2.** Рассмотрим функцию  $f(x) = 2x + |x|$  (рис. 90). По графику видно, что в точке 0 эта функция не имеет экстре-

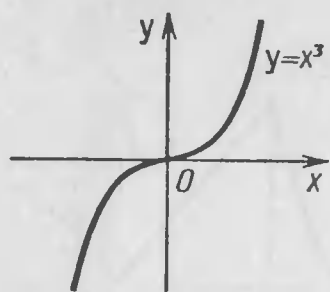


Рис. 88.

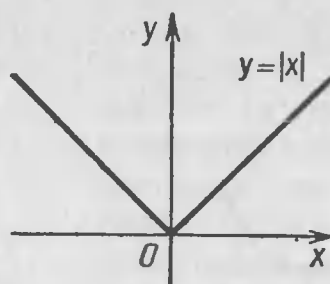


Рис. 89.

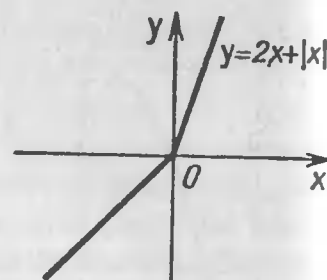


Рис. 90.

ма. В этой точке функция не имеет и производной.

В самом деле, если предположить, что функция  $f$  имеет в точке 0 производную, то  $f(x) - 2x$  также имеет производную в 0. Но  $f(x) - 2x = |x|$ , а функция  $|x|$  в точке 0 не дифференцируема (см. п. 17), т. е. мы пришли к противоречию. Значит, функция  $f$  в точке 0 производной не имеет.

Из теоремы Ферма следует, что при нахождении точек экстремумов функции требуется в первую очередь найти ее критические точки. Но, как видно из рассмотренных примеров, вопрос о том, действительно ли данная критическая точка есть точка экстремума, требует дополнительного исследования. При этом часто помогают такие достаточные условия существования экстремума в точке.

**Признак максимума функции.** Если функция  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ , а  $f'(x) > 0$  на интервале  $(a; x_0)$  и  $f'(x) < 0$  на интервале  $(x_0; b)$ , то точка  $x_0$  является точкой максимума функции  $f$ .

Удобно пользоваться упрощенной формулировкой этого признака: если в точке  $x_0$  производная меняет знак с плюса на минус, то  $x_0$  есть точка максимума.

**Доказательство.** Производная  $f' > 0$  на интервале  $(a; x_0)$ , а функция  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ , следовательно (см. п. 25), функция  $f$  возрастает на промежутке  $(a; x_0]$  и потому  $f(x) < f(x_0)$  для всех  $x$  из интервала  $(a; x_0)$ .

На промежутке  $[x_0; b)$  функция  $f$  убывает (доказательство аналогично) и потому  $f(x) < f(x_0)$  для всех  $x$  из интервала  $(x_0; b)$ .

Итак,  $f(x) < f(x_0)$  для всех  $x \neq x_0$  из интервала  $(a; b)$ , т. е.  $x_0$  есть точка максимума функции  $f$ .

▼ **Признак максимума имеет простой механический смысл.** Мы можем считать, что  $f(x)$  — это координата точки, движущейся по оси  $Oy$ , в момент времени  $x$ , а  $f'(x)$  — скорость точки в этот момент. По условию скорость точки за промежуток времени, предшествующий  $x_0$ , положительна. Поэтому в течение этого времени точка движется в положительном направлении, она поднимается по оси  $Oy$  до точки  $f(x_0)$ , т. е.  $f(x) < f(x_0)$  при  $x < x_0$ . В момент  $x_0$  точка на мгновение останавливается (ее скорость в этот момент равна нулю или не определена), а затем начинает опускаться по оси (по условию скорость  $f'(x)$  меньше нуля при  $x > x_0$ ), т. е.

$f(x) < f(x_0)$ . Итак, в окрестности  $x_0$  имеем  $f(x) < f(x_0)$ . Точка  $x_0$  — точка максимума. ▼

**Признак минимума функции.** Если функция  $f$  непрерывна в точке  $x_0$ , а  $f'(x) < 0$  на интервале  $(a; x_0)$  и  $f'(x) > 0$  на интервале  $(x_0; b)$ , то точка  $x_0$  является точкой минимума функции  $f$ .

Удобно пользоваться упрощенной формулировкой этого признака: если в точке  $x_0$  производная меняет знак с минуса на плюс, то  $x_0$  есть точка минимума.

Доказательство этого признака аналогично доказательству признака максимума (полезно провести его самостоятельно).

**Пример 3.** Найдем точки экстремума функции  $f(x) = 3x - x^3$ .

Производная этой функции, равная  $3 - 3x^2$ , определена во всех точках и обращается в нуль в точках  $-1$  и  $+1$ . В точке  $-1$  производная меняет знак с минуса на плюс ( $f' < 0$  при  $x < -1$  и  $f' > 0$  при  $-1 < x < 1$ ). В точке  $+1$  производная меняет знак с плюса на минус. Пользуясь признаками максимума и минимума, получаем, что точка  $-1$  является точкой минимума, а точка  $+1$  — точкой максимума функции  $f$ . График функции изображен на рисунке 91.

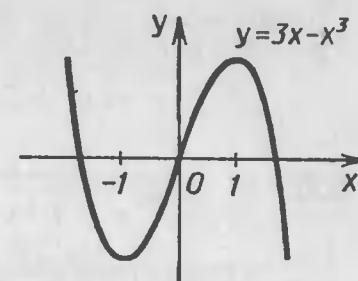


Рис. 91.

### Упражнения

Найдите критические точки приведенных ниже функций, выяснив, какие из них являются точками максимума, а какие — точками минимума (346—348).

346. а)  $f(x) = 2x - 7$ ; б)  $f(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}x$ ;

в)  $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$ ; г)  $g(x) = 4 - 2x + 7x^2$ .

347. а)  $f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$ ; б)  $f(x) = \frac{x}{8} + \frac{2}{x}$ ;

в)  $g(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^4$ ; г)  $g(x) = 2x^3 + 6x^2 - 18x + 120$ .

348. а)  $v(x) = \sqrt{x}$ ; б)  $v(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ;

в)\* 
$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x \leq -1, \\ x & \text{при } -1 < x < 1, \\ 1 & \text{при } x \geq 1; \end{cases}$$

г)\* 
$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{при } x \leq -2, \\ x^2 & \text{при } -2 < x < 2, \\ 6 - x & \text{при } x \geq 2. \end{cases}$$

Исследуйте функцию на возрастание (убывание) и экстремумы (349—350).

349. а)  $f(x) = 4x^2 - 6x$ ; б)  $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x$ ;  
в)  $f(x) = x^3 + 3x^2$ ; г)  $g(x) = 1 + x - x^3$ .

350. а)  $u(x) = \frac{3x-1}{1-4x}$ ; б)  $v(x) = \frac{x-3}{2x+4}$ ;  
в)  $u(x) = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$ ; г)  $v(x) = \frac{16}{x(4-x^2)}$ .

351. Исследуйте функцию на возрастание (убывание) и экстремумы и постройте ее график:

а)  $f(x) = 6x^5 + 15x^4 + 10x^3$ ; б)  $g(x) = x^4(x-12)^2$ ;

в)  $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$ ; г)  $g(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$ .

## 27. Примеры применения производной к исследованию функций

Вы уже знаете (п. 4), что построение графика функции лучше начинать с ее исследования, которое состоит в том, что для данной функции  $f$ : 1) находят ее область определения; 2) выясняют, является ли функция  $f$  четной или нечетной, периодической. Далее находят: 3) точки пересечения графика  $f$  с осями координат; 4) промежутки знакопостоянства; 5) промежутки возрастания и убывания; 6) точки экстремума и значения  $f$  в этих точках. На основании такого исследования строится график функции.

Исследование функций на возрастание (убывание) и на экстремум удобно проводить с помощью производной. Для этого сначала находят производную функции  $f$  и ее критические точки, а затем выясняют, какие из них являются точками экстремума.

**Пример 1.** Исследуем функцию

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$$

и построим ее график.

Проведем исследование по указанной схеме.

1)  $D(f) = \mathbb{R}$ , так как  $f$  — многочлен.

2) Функция  $f$  не является ни четной, ни нечетной (докажите это самостоятельно).

3), 4) График  $f$  пересекается с осью ординат в точке  $(0; f(0))$ , т. е. в точке  $(0; 2)$ . Чтобы найти точки пересечения графика  $f$  с осью абсцисс, надо решить уравнение  $3x^5 - 5x^3 + 2 = 0$ , один из корней которого ( $x=1$ ) легко находится. Другие корни (если они есть) могут быть найдены только приближенно. Поэтому для данной функции остальные точки пересечения графика с осью абсцисс и промежутки знакопостоянства мы находить не будем (как уже отмечалось в п. 4, приведенная схема имеет примерный характер).

5), 6) Найдем производную функции  $f$ :

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1).$$

Заметим, что  $f'(x) = 0$ , если  $x^2(x^2 - 1) = 0$ , т. е. при значениях аргумента, равных 0,  $-1$  и  $1$ . Рассматриваемая функция имеет три критические точки.

Составляем таблицу:

$x$	$(-\infty; -1)$	$-1$	$(-1; 0)$	$0$	$(0; 1)$	$1$	$(1; \infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	-	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	2	↘	0	↗
		max				min	

В первой строке этой таблицы указаны в порядке возрастания критические точки функции и ограниченные ими промежутки. Во второй строке отмечены знаки производной на этих промежутках. (На каждом таком интервале знак производной не меняется, его можно найти, определив знак производной в какой-либо точке рассматриваемого интервала.) В третьей строке записаны выводы о ходе изменения данной функции: «↗» — возрастает, «↘» — убывает, а в четвертой — о виде критических точек (пп. 5 и 6 приведенной выше схемы). Критическая точка 0 функции  $f$  не является точкой экстремума, поэтому в четвертой строке таблицы она не отмечена. Заметим, что вывод о ходе изменения функции на промежутке между критическими точками часто можно сделать, сравнив значения функции на концах этого промежутка (вместо определения знака производной). Например,  $f(0) < f(-1)$  ( $2 < 4$ ), поэтому на промежутке  $(-1; 0)$  функция убывает (и, следовательно,  $f' \leq 0$  на этом промежутке).

Строим график функции (рис. 92). Это построение удобно вести по промежуткам, которые указаны в таблице. Например, в таблице указано, что  $f$  убывает на интервале  $(0; 1)$ . Функция  $f$  непрерывна в точках 0 и 1 (так как она непрерывна всюду), следовательно, она убывает на отрезке  $[0; 1]$ . Поэтому рисуем график убывающим на отрезке  $[0; 1]$  от значения  $f(0) = 2$  до значения  $f(1) = 0$ . При этом касательные к графику в точках 0,  $\pm 1$  должны быть горизонтальными — во второй строке таблицы сказано, что в этих точках производная равна нулю. Аналогично строится график и на остальных промежутках.

**Пример 2.** Исследуем функцию синус и построим ее график. Эта функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Но так как она периодическая с периодом  $2\pi$  и нечетная, доста-

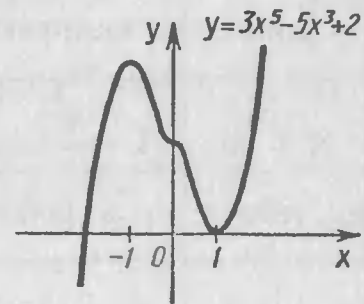


Рис. 92.



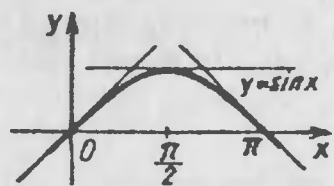


Рис. 93.

точно провести ее исследование на отрезке  $[0; \pi]$ .

Производная этой функции ( $\sin' x = \cos x$ ) определена всюду и обращается в нуль на отрезке  $[0; \pi]$  в точке  $\frac{\pi}{2}$ . Эта точка является критической. Заполняем таблицу:

$x$	0	$(0; \frac{\pi}{2})$	$\frac{\pi}{2}$	$(\frac{\pi}{2}, \pi)$	$\pi$
$\sin' x$	1	+	0	—	—1
$\sin x$	0	↗	1	↘	0
			max		

Пользуясь проведенным исследованием, строим график функции  $y = \sin x$  на отрезке  $[0; \pi]$ . На рисунке 93 в точках с абсциссами 0,  $\frac{\pi}{2}$  и  $\pi$  проведены касательные с угловыми коэффициентами 1, 0 и —1 соответственно (см. табл.) для более точного построения графика. Ввиду того что функция синус нечетна и имеет период  $2\pi$ , ее график симметричен относительно точки 0 и переходит в себя при параллельных переносах вдоль оси  $Ox$  на расстояние  $2\pi$ . График функции  $y = \sin x$  на всей области определения  $\mathbb{R}$  приведен на рисунке 50.

**Пример 3.** Найдем число корней уравнения

$$2x^3 - 3x^2 - 12x - 11 = 0.$$

Рассмотрим функцию  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 11$ . Ее область определения  $D(f) = (-\infty; \infty)$ . Для отыскания критических точек функции  $f$  найдем ее производную:  $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$ . Эта производная обращается в нуль в точках  $x = -1$  и  $x = 2$ .

Заполним таблицу:

$x$	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 2)$	2	$(2; \infty)$
$f'(x)$	+	0	—	0	+
$f(x)$	↗	-4	↘	-31	↗
		max		min	

На промежутке  $(-\infty; -1]$  функция возрастает от  $-\infty$  до -4, поэтому на этом промежутке уравнение  $f(x) = 0$  корней не имеет; на промежутке  $[-1; 2]$  уравнение также не имеет корней, так как на этом промежутке  $f$  убывает от -4 до -31; наконец, на промежутке  $[2; \infty)$  функция  $f$  возрастает от -31 до бесконечности, поэтому на этом промежутке уравнение  $f(x) = 0$  имеет в точности один корень. Итак, уравнение

$$2x^3 - 3x^2 - 12x - 11 = 0$$

имеет один корень (и этот корень принадлежит интервалу  $(2; \infty)$ ).

### Упражнения

Исследуйте квадратичную функцию и постройте ее график (352—353).

352. а)  $f(x) = x^2 - 2x + 8$ ; б)  $f(x) = -x^2 + 5x - 4$ ;  
в)  $g(x) = x^2 + x + 1$ ; г)  $g(x) = x^2 - 6x + 9$ .  
353. а)  $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4,5$ ; б)  $f(x) = -\frac{2}{3}x^2 + x + \frac{2}{3}$ ;

- в)  $g(x) = -\frac{x^2}{3} - \frac{x}{6} - \frac{1}{2}$ ; г)  $g(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{16} + \frac{1}{4}$ .

Исследуйте функцию и постройте ее график (354—356).

354. а)  $f(x) = -x^3 + 3x - 2$ ; б)  $f(x) = 3x^2 - x^3$ ;  
в)  $g(x) = x^3 + 3x + 2$ ; г)  $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$ .  
355. а)  $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3$ ; б)  $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ ;  
в)  $g(x) = 3x^5 - 5x^3$ ; г)  $g(x) = 9x^5 + 3x^3$ .  
356. а)  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$ ; б)  $f(x) = \frac{6(x-1)}{x^2+3}$ ;  
в)  $g(x) = x\sqrt{2-x}$ ; г)  $g(x) = x^2\sqrt{1+x}$ .

Решите квадратичное неравенство (357—358).

357. а)  $2 + x - x^2 > 0$ ; б)  $x^2 - 2x + 3 \geq 0$ ;  
в)  $x^2 + 8x + 16 < 0$ ; г)  $-x^2 + 6x - 9 \geq 0$ .  
358. а)  $2x^2 + 6x + 5 \geq 0$ ; б)  $6x^2 + x - 2 < 0$ ;  
в)  $0,3x^2 + x + 0,3 \leq 0$ ; г)  $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x - 1 > 0$ .

359. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

- а)  $f(x) = 1 - 1,5x - 3x^2 - 2,5x^3$ ; б)  $g(x) = x^3 - 6x^2 + 15x - 2$ ;  
в)  $h(x) = x^5 - \frac{4}{3}x^3 - x - 2$ ; г)  $g(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 6x + 1$ .

Исследуйте тригонометрическую функцию и постройте ее график (360—361).

360. а)  $f(x) = \frac{1}{3}\sin 3x$ ; б)  $g(x) = 2\cos \frac{x}{2}$ ;



- в)  $h(x) = -\operatorname{tg}(4x + \pi)$ ;      г)  $z(x) = \frac{1}{3} \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ .
361. а)  $f(x) = \sin x + \cos x$ ;      б)  $g(x) = \sin x - \operatorname{tg} x$ ;  
 в)  $f(x) = \sin^2 x + \sin x$ ;      г)  $g(x) = \cos^2 x - \cos x$ .
362. а) Докажите, что функция  $f(x) = 3 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 4x$  возрастает на всей числовой прямой.  
 б) Докажите, что функция  $f(x) = \sin x - 2x + \frac{1}{3}$  убывает на всей числовой прямой.

## 28. Наибольшее и наименьшее значения функции

Решение многих практических задач часто сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений непрерывной на отрезке функции. В курсах анализа доказывается теорема Вейерштрасса, утверждающая, что *непрерывная на отрезке  $[a; b]$  функция  $f$  принимает на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения*, т. е. существуют точки отрезка  $[a; b]$ , в которых  $f$  принимает наибольшее и наименьшее на  $[a; b]$  значения.

Для случая, когда функция  $f$  не только непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , но имеет на этом отрезке лишь конечное число критических точек, укажем правило отыскания наибольшего и наименьшего значений  $f$ .

Предположим сначала, что  $f$  не имеет на отрезке  $[a; b]$  критических точек. Тогда (см. п. 25) она возрастает или убывает на этом отрезке (рис. 94, 95) и, значит, наибольшее и наименьшее значения функции  $f$  на отрезке  $[a; b]$  — это значения  $f$  в концах  $a$  и  $b$ .

Пусть теперь функция  $f$  имеет на отрезке  $[a; b]$  конечное число критических точек. Эти точки разбивают отрезок  $[a; b]$  на конечное число отрезков, внутри которых критических точек нет. Поэтому (см. предыдущий абзац) наибольшее и наименьшее значения функции  $f$  на таких отрезках принимаются в их концах, т. е. в критических точках функции или в точках  $a$  и  $b$ .

Таким образом, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции, имеющей на отрезке конечное число критических точек, нужно вычислить значения функции во всех критических точках и на концах отрезка, а затем из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

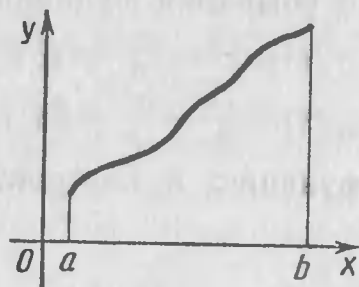


Рис. 94.

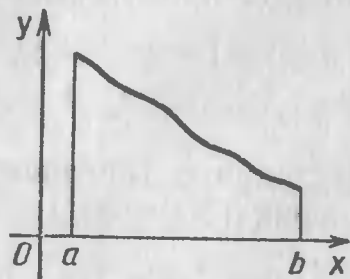


Рис. 95.

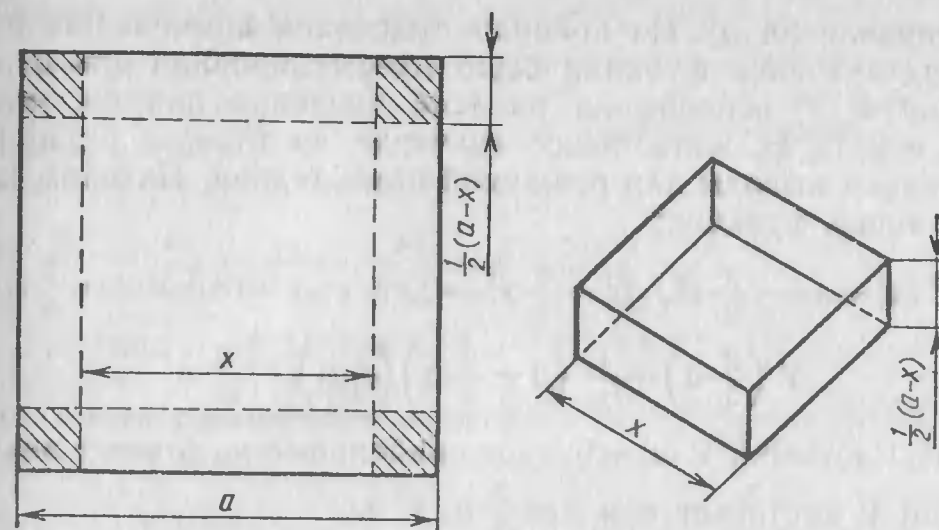


Рис. 96.

**Пример 1.** Найдём наибольшее и наименьшее значения функции  $y(x) = x^3 - 1,5x^2 - 6x + 1$  на отрезке  $[-2; 0]$ .

**Решение.** Сначала найдём критические точки. Так как производная  $y' = 3x^2 - 3x - 6$  определена для любого  $x$ , остается решить уравнение  $y' = 0$ . Решая его, находим:  $y' = 0$  при  $x = -1$  и  $x = 2$ .

Теперь нужно выбрать наибольшее и наименьшее из чисел  $y(-2) = -1$ ,  $y(-1) = 4,5$  и  $y(0) = 1$  (критическая точка  $x = 2$  не принадлежит рассматриваемому отрезку). Ясно, что наименьшее значение достигается в точке  $-2$  и равно  $-1$ , а наибольшее — в точке  $-1$  и равно  $4,5$ . Коротко это записывается так:

$$\max_{[-2; 0]} y(x) = y(-1) = 4,5; \quad \min_{[-2; 0]} y(x) = y(-2) = -1.$$

**Пример 2.** Из квадратного листа жести со стороной  $a$  надо приготовить открытую сверху коробку, вырезав по углам (рис. 96) квадратики и загнув образовавшиеся кромки. Какой должна быть сторона основания коробки, чтобы ее объем был максимальным?

**Решение.** Обозначим через  $x$  длину стороны основания коробки. Тогда длины сторон вырезанных квадратиков равны  $\frac{1}{2}(a-x)$ , а объем коробки равен

$$\frac{1}{2}(a-x)x^2.$$

По смыслу задачи число  $x$  удовлетворяет неравенству  $0 < x < a$ , т. е. принадлежит интервалу  $(0; a)$ . Таким образом, нам надо найти наибольшее значение функции

$$V(x) = \frac{1}{2}(a-x)x^2$$

на интервале  $(0; a)$ . Но правило отыскания наименьших и наибольших значений функции было сформулировано для отрезка. Функция  $V(x)$  непрерывна на всей числовой прямой, поэтому будем искать ее наибольшее значение на отрезке  $[0; a]$  и потом сделаем выводы для решаемой нами задачи. Находим критические точки функции:

$$V'(x) = ax - \frac{3}{2}x^2, \quad ax - \frac{3}{2}x^2 = 0, \quad \text{т. е. } x = 0 \text{ или } x = \frac{2}{3}a,$$

$$V\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{1}{2}\left(a - \frac{2}{3}a\right)\left(\frac{2}{3}a\right)^2 = \frac{2}{27}a^3.$$

Так как  $V(0) = 0$  и  $V(a) = 0$ , свое наибольшее на отрезке значение функция  $V$  достигает при  $x = \frac{2}{3}a$ , т. е.

$$\max_{[0; a]} V(x) = V\left(\frac{2}{3}a\right) = \frac{2}{27}a^3.$$

Наибольшее значение функции достигается внутри отрезка  $[0; a]$ , следовательно, и внутри интервала  $(0; a)$ . Итак, сторона основания коробки должна быть  $\frac{2}{3}a$ .

▼ **Пример 3.** Пусть материальная точка движется из точки  $M$  нижней полуплоскости в точку  $N$  верхней полуплоскости (рис. 97) так, что в нижней полуплоскости ее скорость постоянна и равна  $v_1$ , а в верхней —  $v_2$ . По какому пути должна двигаться точка, чтобы на весь путь затратить минимум времени?

**Решение.** Если  $v_1 = v_2$ , то искомый путь есть отрезок  $MN$ . Если же  $v_1 \neq v_2$ , то точка должна двигаться по ломаной  $MON$ , причем положение точки  $O$  следует определить так, чтобы на путь  $MON$  было затрачено наименьшее время. Пусть отрезок  $MO$  точка проходит за время  $t_1$ , а  $ON$  — за время  $t_2$ . Проведем отрезки  $MM' \perp M'N'$ ,  $NN' \perp M'N'$  и положим

$$x = M'O, \quad h_1 = MM', \quad h_2 = NN', \quad l = M'N'.$$

Тогда путь  $MON$  будет пройден за время

$$t(x) = t_1 + t_2 = \frac{MO}{v_1} + \frac{NO}{v_2} = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}}{v_2}.$$

По смыслу задачи число  $x$  удовлетворяет неравенству  $0 \leq x \leq l$ , т. е. принадлежит отрезку  $[0; l]$ . На этом отрезке надо найти наименьшее значение функции  $t(x)$ . Ищем критические точки функции:

$$t'(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{h_1^2 + x^2}} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{l-x}{\sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}} = \frac{x}{v_1 \cdot MO} - \frac{l-x}{v_2 \cdot ON};$$

$t'(x) = 0$ , если  $\frac{x}{MO} : \frac{l-x}{ON} = \frac{v_1}{v_2}$ , т. е. путь точки должен быть таким, что (см. рис. 97)

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}. \quad (1)$$

Покажем, что критическая точка только одна. Для этого вычислим производную функции  $t'(x)$ :

$$(t'(x))' = \frac{h_1^2}{v_1(\sqrt{h_1^2 + x^2})^3} + \frac{h_2^2}{v_2(\sqrt{h_2^2 + (l-x)^2})^3}.$$

Она положительна, следовательно, функция  $t'(x)$  возрастает и может иметь только один нуль в точке  $x_0$ . Так как

$$t'(0) = \frac{-l}{v_2 \cdot \sqrt{h_2^2 + l^2}} < 0, \quad \text{а } t'(l) = \frac{l}{v_1 \cdot \sqrt{h_1^2 + l^2}} > 0,$$

то  $t' < 0$  на  $(0; x_0)$  и  $t' > 0$  на  $(x_0; l)$ , т. е. производная в точке  $x_0$  меняет знак с минуса на плюс — это точка минимума.

Фактически найти точку  $x_0$  можно только приближенно.

В курсе физики вы узнаете, что именно по закону (1) преломляются лучи света при переходе из одной среды в другую (угол  $\alpha$  называется углом падения, а угол  $\beta$  — углом преломления). Таким образом, луч света распространяется по такому пути, при котором время его распространения будет наименьшим. В этом состоит известный из физики принцип Ферма. ▼

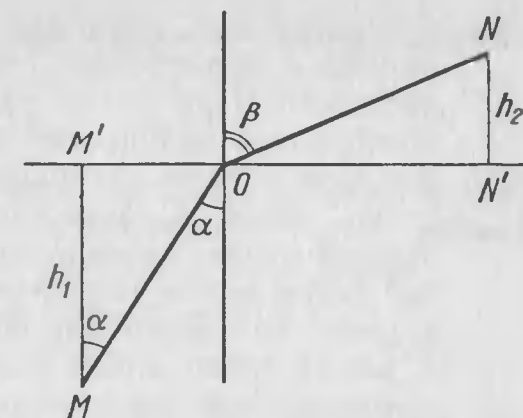


Рис. 97.

### Упражнения

363. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции

$$f(x) = x^4 - 8x^2 - 9$$

на отрезке: а)  $[-1; 1]$ ; б)  $[0; 3]$ .

364. Материальная точка совершает прямолинейное движение по закону  $s(t) = 5t + 2t^2 - \frac{2}{3}t^3$ , где  $s(t)$  — путь в метрах и  $t$  — время в секундах. В какой момент времени скорость движения точки будет наибольшей и какова величина этой наибольшей скорости?

365. Покажите, что из всех равнобедренных треугольников, вписанных в данный круг, наибольшую площадь имеет равносторонний треугольник.

366. Докажите, что из всех прямоугольных треугольников с заданной гипотенузой наибольшую площадь имеет равнобедренный треугольник.

367. Данное положительное число разложите на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

368. Открытый бак, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, должен вмещать 13,5 л жидкости. При каких размерах на его изготовление уйдет наименьшее количество материала?

369. Буровая вышка расположена в поле в 9 км от ближайшей точки шоссе. С буровой надо направить курьера в населенный пункт, расположенный по шоссе в 15 км от упомянутой точки шоссе (считаем шоссе прямолинейным). Скорость курьера на велосипеде по полю 8 км/ч, а по шоссе 10 км/ч. К какой точке шоссе ему надо ехать, чтобы в кратчайшее время достичь населенного пункта?

## 29. Гармонические колебания

Производную от производной  $f'$  функции  $f$  называют *второй производной* функции  $f$  и обозначают  $f''$  (читается: «эф два штриха»). Например,

$$\begin{aligned} \sin' x &= \cos x; \sin'' x = \cos' x = -\sin x, \\ \cos' x &= -\sin x; \cos'' x = -\sin' x = -\cos x. \end{aligned} \quad (1)$$

Вторая производная помогает более подробно исследовать поведение функции. Первая производная есть скорость изменения функции, а вторая производная есть скорость изменения этой скорости.

Анализируя формулы (1), можно заметить, что вторые производные функций  $\sin$  и  $\cos$  отличаются от самих функций только знаком. Иначе говоря, обе эти функции удовлетворяют при всех значениях аргумента  $t$  уравнению

$$f''(t) = -f(t).$$

В физике, в частности в механике, большую роль играют функции  $f$ , которые удовлетворяют уравнению

$$f''(t) = -\omega^2 f(t), \quad (2)$$

где  $\omega$  — положительная постоянная.

Разберем задачу из механики, приводящую к уравнению такого вида. Пусть к шарiku массы  $m$  прикреплен расположенная горизонтально пружина, другой конец которой закреплен (рис. 98, а), и пусть в состоянии равновесия координата  $x$  центра шарика равна нулю. При перемещении центра в точку с координатой  $x \neq 0$  возникает сила, стремящаяся вернуть шарик в по-

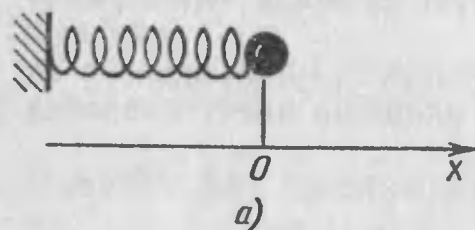
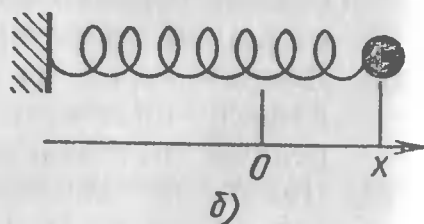


Рис. 98.



б)

ложение равновесия. Согласно закону Гука эта сила пропорциональна перемещению  $x$ , т. е.

$$F = -kx,$$

где  $k$  — положительная константа (рис. 98, б). По второму закону Ньютона  $F = ma$ , поэтому, учитывая, что при движении по прямой ускорение есть вторая производная от координаты, имеем:

$$\begin{aligned} ma(t) &= mx''(t) = F = -kx(t), \text{ т. е.} \\ x''(t) &= -\frac{k}{m}x(t). \end{aligned}$$

Иначе говоря, движение центра шарика под действием сил упругости подчинено уравнению (2) при  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

Говорят, что физическая величина, изменяющаяся во времени в соответствии с уравнением (2), совершает *гармоническое колебание*. Само уравнение (2) называют *дифференциальным уравнением гармонических колебаний*.

Проверим, что при любых постоянных  $A$ ,  $\omega$  и  $\varphi$  функция

$$f(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

есть решение уравнения (2). В самом деле, пользуясь формулой для производной сложной функции, получаем:

$$\begin{aligned} f'(t) &= -A\omega \sin(\omega t + \varphi), \\ f''(t) &= -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 f(t). \end{aligned}$$

Верно и обратное: любое решение уравнения (2) есть функция вида (3), причем обычно выбирают  $A \geq 0$ ,  $\varphi \in [0; 2\pi]$ . Доказательство этого выходит за рамки школьного курса.

Ясно, что максимальное значение модуля функции  $f$ , задаваемой формулой (3), равно  $A$ . Константу  $A$  называют *амплитудой* колебания, константу  $\omega$  — *угловой частотой* колебания, а константу  $\varphi$  — *начальной фазой* колебания.

Графики гармонических колебаний — синусоиды. Например, на рисунках 99, 100 изображены графики гармонических колебаний  $y = 1,5 \cos\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{9}\right)$  и  $y = 3 \cos(2x + 4)$ .

Подробнее с гармоническими колебаниями вы познакомитесь в курсе физики X класса.

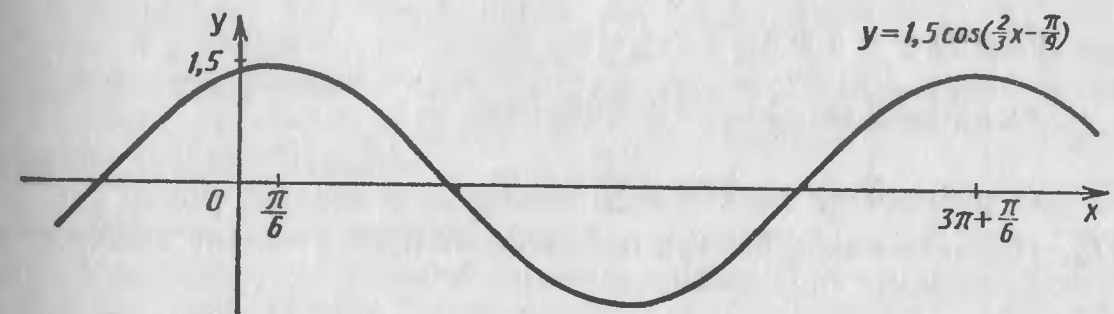


Рис. 99.

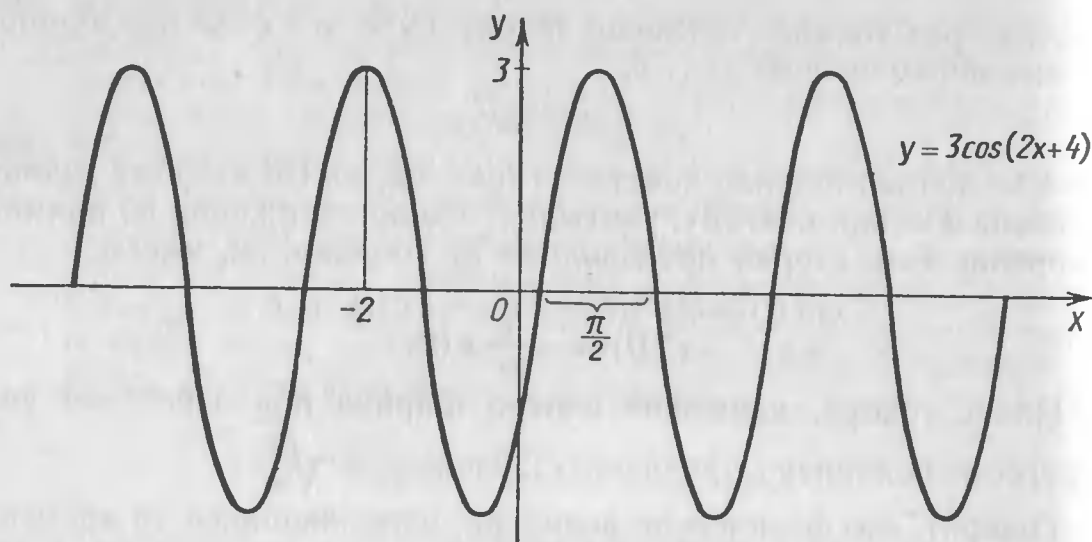


Рис. 100.

### Упражнения

370. Проверьте, что функция  $y(t)$  является решением данного дифференциального уравнения:

- а)  $y(t) = 3 \cos(2t + \pi)$ ;  $y'' = -4y$ ;
- б)  $y(t) = 4 \sin\left(\frac{1}{2}t - \frac{\pi}{3}\right)$ ;  $y'' = -\frac{1}{4}y$ ;
- в)  $y(t) = 2 \cos 4t$ ;  $y'' + 16y = 0$ ;
- г)  $y(t) = \frac{1}{3} \sin(0,1t + 1)$ ;  $y'' + 0,01y = 0$ .

371. Напишите дифференциальное уравнение гармонического колебания:

- а)  $x = 2 \cos(2t - 1)$ ; б)  $x = 6,4 \cos\left(0,1t + \frac{\pi}{7}\right)$ ;
- в)  $x = 4 \sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right)$ ; г)  $x = 0,71 \sin(0,3t - 0,7)$ .

372. Укажите амплитуду, начальную фазу и угловую частоту колебания, преобразовав правую часть к виду  $A \cos(\omega t + \varphi)$ :

- а)  $y(t) = 0,8 \sin\left(\frac{1}{3}t + \pi\right)$ ;
- б)  $y(t) = -4 \cos\left(2t - \frac{\pi}{6}\right)$ ;
- в)  $y(t) = 2 \sin \frac{\pi}{6} \cos t + 2 \sin t \cos \frac{\pi}{6}$ ;
- г)  $y(t) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cos 2t + 3 \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2t$ .

373. Найдите какое-нибудь отличное от нуля решение дифференциального уравнения:

- а)  $y'' = -25y$ ; б)  $y'' = -\frac{1}{4}y$ ; в)  $4y'' + y = 0$ ; г)  $\frac{1}{9}y'' + 4y = 0$ .

### Сведения из истории

Переломным в истории математики явился XVII в. Декарт ввел в употребление метод координат для изучения расположенных в плоскости кривых. Развитие естествознания привело к необходимости исследования изменения функций, в особенности функций, выражающих зависимость координат движущихся тел и других физических величин от времени. Производная применялась при нахождении экстремумов функций, касательных к разнообразным линиям и т. п. Первые работы Декарта, Паскаля и Ферма уже содержали в себе по существу правила нахождения производных от любых многочленов.

В настоящее время математическим анализом называют часть математики, которая изучает дифференциальное и интегральное исчисление (с элементами интегрального исчисления вы познакомитесь в X классе). Систематическое учение о производных — дифференциальное исчисление — было развито немецким математиком и философом Г. Лейбницем (1646—1716) и английским математиком и основателем современного математического естествознания И. Ньютоном (1643—1727).

Современное определение числовой функции, в котором это понятие освобождалось от способа задания, было дано независимо друг от друга русским математиком Н. И. Лобачевским в 1834 г. и немецким математиком Л. Дирихле в 1837 г. Основная идея этих определений заключалась в следующем: не существенно, каким образом каждому  $x$  поставлено в соответствие определенное значение  $f(x)$ , важно только, что это соответствие установлено.

Современное же понятие функции с произвольными областями определения и значений (не обязательно числовыми), а также современная терминология и обозначения сформировались по существу совсем недавно — в первой половине текущего столетия.

Наглядный смысл понятия предела функции был ясен математикам XVII в. Они умели фактически правильно находить пределы. Но строгие определения понятий предела последовательно и предела функции, сохранившиеся до наших дней, были даны лишь в 1821 г. французским математиком О. Коши (1789—1857) и далеко не сразу были всеми поняты.

Определение предела функции, по Коши, формулируется так: «Число  $A$  называется пределом функции  $f(x)$  при  $x$ , стремящемся к  $a$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  можно подобрать такое число  $\delta > 0$ , что  $|f(x) - A| < \varepsilon$  для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $0 < |x - a| < \delta$ ».

Эта формулировка есть точное содержание высказывания, помещенного в п. 14: приближенное равенство  $f(x) \approx A$  при  $x \approx a$  может выполняться с любой наперед заданной точностью. Действительно, абсолютная погрешность приближенного равенства  $f(x) \approx A$  есть выражение  $|f(x) - A|$ . То, что приближенное ра-



венство  $f(x) \approx A$  при  $x \approx a$  может выполняться с любой, наперед заданной точностью означает следующее: какую бы точность вычислений мы ни задали (она задается положительным числом  $\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — греческая буква «эпсилон», ее принято употреблять по традиции), можно подобрать такую границу для абсолютных погрешностей приближенных равенств  $x \approx a$  — ее обозначают положительным числом  $\delta$  ( $\delta$  — греческая буква «дельта»), что при  $0 < |x - a| < \delta$  погрешность приближенного равенства  $f(x) \approx A$  не выйдет за пределы заданной точности вычислений, т. е.  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

Приведем, например, доказательство правила (см. п. 14): если  $f(x) \rightarrow A$  и  $g(x) \rightarrow B$  при  $x \rightarrow a$ , то  $f(x) + g(x) \rightarrow A + B$  при  $x \rightarrow a$ .

Возьмем любое положительное число  $\varepsilon$ . Тогда число  $\frac{\varepsilon}{2} > 0$  и потому (по определению Коши):

1) из условия  $f(x) \rightarrow A$  при  $x \rightarrow a$  следует, что можно подобрать число  $\delta_1 > 0$ , такое, что

$$|f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (1)$$

для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $0 < |x - a| < \delta_1$ ;

2) из условия  $g(x) \rightarrow B$  при  $x \rightarrow a$  следует, что можно подобрать число  $\delta_2 > 0$ , такое, что

$$|g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (2)$$

для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $0 < |x - a| < \delta_2$ .

Обозначим через  $\delta$  наименьшее из чисел  $\delta_1$  и  $\delta_2$ . Тогда для любого  $x$ , удовлетворяющего неравенству  $0 < |x - a| < \delta$ , выполнены неравенства (1) и (2); для этих  $x$  имеем:

$$\begin{aligned} |(f(x) + g(x)) - (A + B)| &= |(f(x) - A) + (g(x) - B)| \leq \\ &\leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Этим доказано, что  $f(x) + g(x) \rightarrow A + B$  при  $x \rightarrow a$ .

Остальные правила (для произведения и частного) доказываются аналогично.

Яркие характеристики глубины переворота в математике, происшедшего в XVII в., дали Карл Маркс и Фридрих Энгельс. Энгельс писал: «Поворотным пунктом в математике была декартова переменная величина. Благодаря этому в математику вошли движение и диалектика». Но начальный период развития новых ветвей математики, связанных с понятиями функции, бесконечно малых величин, пределов и производных, был охарактеризован Марксом как «мистический».

Лозунгом многих математиков XVII в. был: «Двигайтесь вперед, и вера в правильность результатов к вам придет».

Только после работ Коши в течение XIX в. начала математического анализа получили логическое обоснование. Для этого, в частности, была необходима строгая теория действительных чисел. А она была развита только во второй половине XIX в. Вейерштрассом, Дедекиндом и Кантором.

1) Приближенное равенство  $x \approx a$  выполнено с абсолютной погрешностью  $h$ . Что это означает?

2) Найдите с точностью до 0,001:

а)  $\frac{5}{11} - \frac{2}{3}$ ; б)  $\sqrt{3} + 2$ ; в)  $\sqrt{7} - \sqrt{5}$ ; г)  $\sqrt{\frac{7}{3}}$ .

3) Выпишите десятичные приближения с недостатком и с избытком для числа 4,2537481... с точностью до:

а) 1; б) 0,1; в) 0,01; г) 0,00001.

1) Что означает запись  $f(x) \rightarrow L$  при  $x \rightarrow a$ ?

2) Сформулируйте правила вычисления пределов.

3) К какому числу стремится функция  $f(\Delta x)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , если:

а)  $f(\Delta x) = (2 + \Delta x)^2 - 4$ ; б)  $f(\Delta x) = \frac{1}{1 + \Delta x} - 1$ ;

в)  $f(\Delta x) = \frac{3 + \Delta x}{4 - \Delta x}$ ; г)  $f(\Delta x) = \frac{1}{\Delta x} \left( \frac{1}{2 + \Delta x} - \frac{1}{2} \right)$ ?

1) Что такое приращение аргумента и приращение функции?

2) В чем состоит геометрический смысл приращений  $\Delta x$  и  $\Delta f$ ? отношения  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ ?

3) Найдите  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  (в точке  $x_0$ ), если:

а)  $f(x) = \frac{2}{x}$ ; б)  $f(x) = x^2 - x$ ; в)  $f(x) = x^3 + x$ .

1) Дайте определение производной функции в точке.

2) Пользуясь определением, найдите производную функции  $f$  в точке  $x_0$ , если:

а)  $f(x) = 2x - 1$ ,  $x_0 = -4$ ; б)  $f(x) = x^2$ ,  $x_0 = -3$ ;

в)  $f(x) = \frac{2}{x}$ ,  $x_0 = 3$ ; г)  $f(x) = \frac{2}{x+1}$ ,  $x_0 = 2$ .

3) Найдите производную функции:

а)  $f(x) = x^2$ ; б)  $f(x) = 3x + x^2$ ; в)  $f(x) = \frac{1}{x} + 1$ .

1) Сформулируйте правила вычисления производных.

2) Чему равна производная функции  $x^n$  ( $n$  — целое число)?

3) Найдите производную функции:

а)  $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$ ; б)  $f(x) = (x + 2) \sin x$ ;

в)  $f(x) = \frac{x^2}{x+3}$ ; г)  $f(x) = x \sqrt{x} + \cos x$ ;

д)  $f(x) = (8 - 5x)^{20}$ ; е)  $f(x) = \frac{1}{(9 + 7x)^5}$ ;

ж)  $f(x) = \sin 3x$ ; з)  $f(x) = 4 \operatorname{tg} 5x$ .

1) Дайте определение функции, непрерывной в точке, на промежутке.

2) Опишите метод интервалов.

3) Решите неравенство:

а)  $(x - 1)(x + 2)(x + 3) \geq 0$ ; б)  $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2}$ ;

$$в) \frac{\sqrt{16} \cdot x(4-x)(x+2)}{x^2+7x+10} \geq 0; \quad г) (2 \sin x - 1)(2 \cos^2 x - 1) < 0$$

7. 1) Какая прямая называется касательной к графику функции  $f$  в точке  $(x_0; f(x_0))$ ? В чем состоит геометрический смысл производной?

2) Запишите уравнение касательной к графику функции  $f$ , проходящей через точку  $(x_0; f(x_0))$ .

3) Напишите уравнение касательной к графику функции  $f$  при  $x = x_0$ , если:

а)  $f(x) = x^2$ ,  $x_0 = -\frac{1}{2}$ ; б)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x_0 = 2$ ;

в)  $f(x) = \sin x$ ,  $x_0 = \pi$ ; г)  $f(x) = \cos x$ ,  $x_0 = \frac{2\pi}{3}$ .

8. 1) Запишите общую формулу для приближенного вычисления значения функции, дифференцируемой в точке  $x_0$ .

2) Выпишите формулы для приближенного вычисления значений функции: а)  $f(x) = x^n$ ; б)  $f(x) = \cos x$ ; в)  $f(x) = \sqrt{1+x}$ .

3) Вычислите приближенные значения:

а)  $\sqrt{9,009}$ ; б)  $\frac{1}{(1,0001)^{10}}$ ; в)  $(0,999)^{15}$ ; г)  $\cos 29^\circ$ .

9. 1) В чем состоит механический смысл производной?

2) Тело движется по прямой согласно закону  $x(t)$ . Каковы его мгновенная скорость и ускорение в момент времени  $t$ ?

3) Найдите скорость и ускорение точки, если:

а)  $x(t) = 5t - t^2$ ; б)  $x(t) = \cos \omega t$  ( $\omega$  — постоянная).

10. 1) Запишите формулу Лагранжа.

2) Сформулируйте признак возрастания (убывания) функции.

3) Исследуйте на возрастание (убывание) функцию:

а)  $y = x^4 - 4x$ ; б)  $\frac{x}{x^2+9}$ ;

в)  $y = x^2 + \frac{16}{x}$ ; г)  $y = 2 \sin x + \cos 2x$ .

11. 1) Что называют критической точкой функции?

2) Сформулируйте признаки максимума (минимума) функции.

3) Исследуйте на максимум и минимум функцию:

а)  $y = x^4 - 2x^2$ ; б)  $y = \frac{x}{x^2+9}$ ;

в)  $y = x^2 + \frac{16}{x}$ ; г)  $y = 2 \sin x + \cos 2x$ .

12. 1) Опишите схему исследования функции.

2) Исследуйте с помощью производной функцию:

а)  $f(x) = 2x - x^2 - 8$ ; б)  $f(x) = 2x^2 + 3x - 1$ .

3) Исследуйте по общей схеме функцию  $f$  и постройте ее график: а)  $f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$ ; б)  $f(x) = \sin^2 x - \sin x$ .

13. 1) Сформулируйте правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

2) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке:

а)  $f(x) = 3x^2 - x^3$  на  $[-1; 4]$ ; б)  $f(x) = x - \sin 2x$  на  $[0; \frac{\pi}{2}]$ .

14. 1) Дайте определение второй производной функции. Что такое дифференциальное уравнение гармонического колебания?

2) Проверьте, что функция  $y(t)$  является решением данного дифференциального уравнения:

а)  $y(t) = 2 \cos(t - \frac{\pi}{2})$ ,  $y'' = -y$ ;

б)  $y(t) = 3 \sin(0,3t + 1)$ ,  $y'' + 0,09y = 0$ .

3) Напишите дифференциальное уравнение гармонического колебания:

а)  $x = 2 \cos(t - 1)$ ; б)  $x = 2 \sin(0,4t - 7)$ .

### Дополнительные упражнения к главе II

374.  $f(y) = 2y^3 + 3y^2 - 2y + 1$ . Найдите:

а)  $f'(x)$ ; б)  $f'(0)$ ; в)  $f'(-1)$ ; г)  $f'(2x - 1)$ .

375.  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x$ . Найдите:

а)  $f'(x)$ ; б)  $f'(0)$ ; в)  $f'(1)$ ; г)  $f'(t^2)$ .

376.\* Докажите правило нахождения производной суммы конечного числа функций.

377. Докажите правило нахождения производной для произведения трех функций  $u, v, w$ :

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'.$$

378.  $u(z) = \frac{z+5}{1-3z}$ . Найдите:

а)  $u'(z)$ ; б)  $u'(x-3)$ ; в)  $u'(0)$ ; г)  $u'(z^2)$ .

379.  $f(t) = \frac{5t - \sqrt{t}}{2t + 2}$ . Найдите:

а)  $f'(t)$ ; б)  $f'(4)$ ; в)  $f'(1)$ ; г)  $f'(z^2)$ .

380.  $g(x) = \frac{5x+3}{\sqrt{x}+2}$ . Найдите:

а)  $g'(x)$ ; б)  $g'(4)$ ; в)  $g'(1)$ ; г)  $g'(x^2)$ .

381. а)  $h(u) = \frac{u^3 - 2u^2 + 3u - 4}{u^5}$ . Найдите  $h'(u)$ .

б)  $v(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{4}{x^4} + \frac{5}{x^5}$ . Найдите  $v'(x)$ .

в) Найдите  $u'(\alpha)$ , если  $u(\alpha) = \frac{2}{\alpha^4} + \frac{3}{\alpha^5}$ .

г) Найдите  $\Phi'(v)$ , если  $\Phi(v) = \frac{5}{v^4} + 3v^{-5}$ .

382. Постройте график функции  $y = \sqrt{|x|}(x-3)$ . Найдите производную функции (383—384).

383. а)  $v(x) = (x^2 - 2x + 3)(3x^2 + 2x + 1)$ ;

б)  $f(x) = (ax + b)(cx^2 + dx + e)$ ;

в)  $f(y) = (3y + 1)(y - 3)$ . Найдите  $f'(x)$ ,  $f'(0)$ ;  $f'(2)$ ;

г)  $g(u) = 6u^2(5u^3 + 1)$ . Найдите  $g'(y)$ ,  $g'(0)$ ,  $g'(-1)$ .

384. а)  $y = \frac{x}{\sqrt{2+x^2}}$ ;

б)  $y = \sqrt{3-2x}$ ;

в)  $f(t) = \sqrt{t^4 - t^3 + t^2 - 1}$ . Найдите  $f'(t)$ ,  $f'(2)$ ;

г)  $g(y) = \sqrt{\frac{y^2-1}{y^2+1}}$ . Найдите  $g'(x)$ ,  $g'(2)$ .

385. В какой точке графика функции  $y = \sqrt{x}$  касательная наклонена к оси абсцисс: а) под углом в  $45^\circ$ ; б) под углом в  $60^\circ$ ?

386. Постройте график какой-нибудь функции, у которой в заданной точке  $x_0$ :

а)  $f(x_0) = 0$  и  $f'(x_0) = 0$ ;

б)  $f(x_0) = 0$  и  $f'(x_0) < 0$ ;

в)  $f(x_0) = 0$  и  $f'(x_0) > 0$ .

Найдите промежутки возрастания (убывания) функции (387—392).

387.  $u(x) = \frac{x}{x+1}$ .

388.  $f(x) = 2x^2 + 3x + 4$ .

389.  $g(x) = 3x^2 + 2x + 1$ .

390.  $g(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x - 2$ .

391.  $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$ .

392.  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ .

Исследуйте на возрастание (убывание) и экстремумы функцию (393—395).

393.  $s(t) = \frac{4}{\sqrt{t^2+1}}$ . 394.  $u(t) = \sqrt{t^2-1}$ . 395.  $f(x) = \sqrt{r^2-x^2}$ .

При помощи производной постройте график функции (396—404).

396.  $y = x^2(x-2)^2$ . 397.  $y = x^4 - 4x^2$ . 398.  $y = x^3 - 3x^2 - 9x$ .

399.  $y = x^3 + 3x^2 + 1$ . 400.  $y = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x^2$ .

401.  $y = \left(\frac{x}{6}\right)^2(x-5)^3$ . 402.  $y = 8 \cdot \frac{2x-1}{x^2-6}$ .

403.  $y = x\sqrt{2-x^2}$ . 404.  $y = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$ .

405. Исследуйте квадратичную функцию и постройте ее график:

а)  $\varphi(x) = 3x^2 + 4x + 2$ ; б)  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$ ;

в)  $g(x) = -3x^2 + 5x - 4$ ; г)  $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 5$ .

406. По виду графика квадратичной функции (рис. 101, а, б, в) определите знаки коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и дискриминанта.

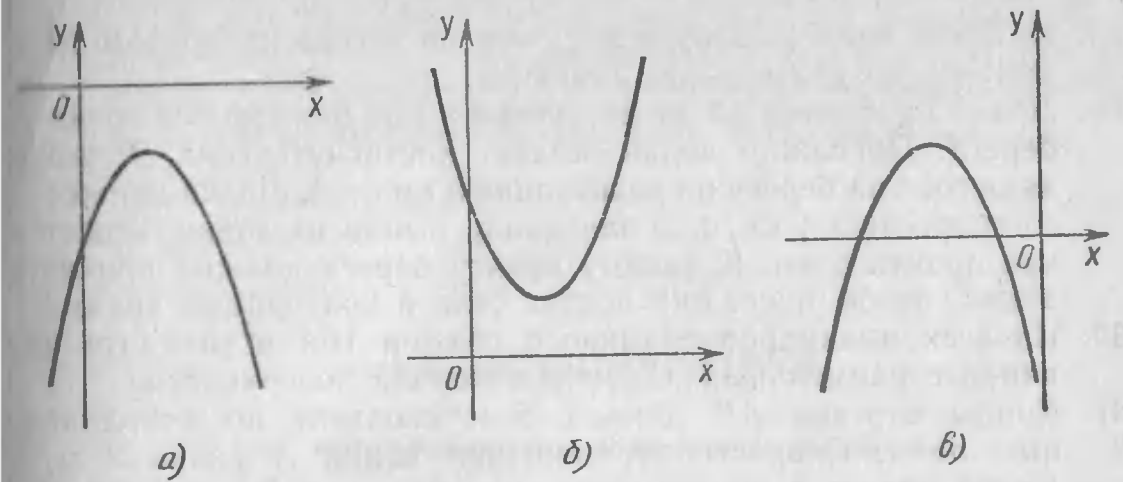


Рис. 101.

Решите неравенство (407—408).

407. а)  $3x^2 - 2x - 1 \leq 0$ ;

б)  $6x^2 + x - 2 \leq 0$ ;

в)  $x^2 - 2x + 1 \leq 0$ ;

г)  $-\frac{1}{4}x^2 - 2x + 5 > 0$ .

408. а)  $4x^2 + 4x + 1 > 0$ ;

б)  $3x^2 + 7x - 7 > 0$ ;

в)  $9x^4 - 10x^2 + 1 \leq 0$ ;

г)  $4x^4 + 10x^2 - 66 \geq 0$ .

409. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а)  $g(x) = 3x^3 - 2x^2 + 4$ ;

б)  $h(x) = 3x^4 - 3x^2 + 5$ ;

в)  $u(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ ;

г)  $w(x) = x^3 + x$ .

410. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3$  на отрезке: а)  $[-1; 1]$ ; б)  $[1; 3]$ .

411. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции  $h(x) = 2x^3 - 9x^2 + 2$  на отрезке: а)  $[-1; 1]$ ; б)  $[1; 3]$ .

412. Из всех прямоугольников, вписанных в полукруг (одна сторона прямоугольника лежит на диаметре полукруга), найдите прямоугольник наибольшей площади.

413. Найдите отношение высоты к диаметру конуса, который при заданном объеме имеет наименьшую боковую поверхность.

414. Как согнуть кусок проволоки данной длины  $l$ , чтобы площадь ограниченного ею прямоугольника была наибольшей?

415. Какой из равнобедренных треугольников с заданным периметром  $2p$  имеет наибольшую площадь?

416. а) Представьте число 10 в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

б) Число 8 представьте в виде суммы двух положительных слагаемых так, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

417. В равнобедренный треугольник с основанием 20 см и высотой 8 см вписан прямоугольник, одна из сторон которого лежит на основании треугольника. Какова должна быть высота прямоугольника, чтобы он имел наибольшую площадь?

418. Найдите число, которое в сумме со своим квадратом дает этой сумме наименьшее значение.
419. Лодка находится на расстоянии 3 км от ближайшей точки  $A$  берега. Пассажир лодки желает достигнуть села  $B$ , находящегося на берегу на расстоянии 5 км от  $A$ . Лодка движется со скоростью 4 км/ч, а пассажир, выйдя из лодки, может в час пройти 5 км. К какому пункту берега должна пристать лодка, чтобы пассажир достиг села в кратчайшее время?
420. Из всех цилиндров заданного объема  $16\pi \text{ м}^3$  найдите цилиндр с наименьшей площадью полной поверхности.
421. Концы отрезка  $AB$  длиной 5 м скользят по координатным осям. Скорость перемещения конца  $A$  равна 2 м/с. Каков модуль скорости перемещения конца  $B$  в тот момент, когда конец  $A$  находится от начала координат на расстоянии 3 м?
422. Длина вертикально стоящей лестницы равна 5 м. Нижний конец лестницы начинает скользить с постоянной скоростью 2 м/с. С какой скоростью опускается в момент времени  $t$  верхний конец лестницы, с каким ускорением?
423. Неоднородный стержень  $AB$  имеет длину 12 см. Масса его части  $AM$  растет пропорционально квадрату расстояния точки  $M$  от конца  $A$  и равна 10 г при  $AM=2$  см. Найдите: 1) массу всего стержня  $AB$  и линейную плотность в любой его точке; 2) линейную плотность стержня в точках  $A$  и  $B$ .
424. Тело, масса которого  $m$ , движется прямолинейно по закону  $s(t)=\alpha t^2+\beta t+\gamma$  ( $\alpha, \beta, \gamma$  — постоянные). Докажите, что сила, действующая на точку, постоянна.
425. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан колесом за 8 с. Определите угловую скорость колеса через 48 с после начала вращения.
426. Тело с высоты 10 м брошено вертикально вверх с начальной скоростью 40 м/с. Определите: а) на какой высоте от поверхности земли оно будет через 1 с; б) через сколько секунд тело достигнет наивысшей точки и на каком расстоянии от земли? (Считать  $g=10 \text{ м/с}^2$ .)
427. Круглый металлический диск расширяется при нагревании так, что его радиус равномерно увеличивается на 0,01 см/с. С какой скоростью увеличивается его площадь в тот момент, когда его радиус равен 2 см?
428. Лампа подвешена на высоте 12 м над прямой горизонтальной дорожкой, по которой идет человек, рост которого равен 1,8 м. С какой скоростью удлиняется его тень, если он удаляется со скоростью 50 м/мин?
429. Из всех прямоугольников, вписанных в окружность, найдите прямоугольник наибольшей площади.

## ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

## § 8. ПЕРВООБРАЗНАЯ

## 30. Определение первообразной

Вспомним пример применения дифференцирования в механике. Если в начальный момент времени  $t=0$  скорость тела равна 0, т. е.  $v(0)=0$ , то при свободном падении тело к моменту времени  $t$  пройдет путь

$$s(t) = \frac{g}{2} t^2. \quad (1)$$

Дифференцированием находим скорость:

$$s'(t) = v(t) = gt. \quad (2)$$

Второе дифференцирование дает ускорение:

$$v'(t) = a(t) = g, \quad (3)$$

т. е. ускорение постоянно.

Формула (1) была найдена Галилеем экспериментально. Но более типично для механики другое положение: задан закон, которому подчиняется ускорение  $a(t)$  (в нашем случае оно постоянно); требуется найти закон изменения скорости  $v(t)$  и найти координату  $s(t)$ . Иными словами, по заданной производной функции  $v'(t)$ , равной  $a(t)$ , надо найти  $v(t)$ , а затем по производной  $s'(t)$ , равной  $v(t)$ , найти  $s(t)$ .

Для решения таких задач служит операция *интегрирования*, обратная операции дифференцирования. С ней мы познакомимся в этой главе.

**Определение.** Функция  $F$  называется *первообразной* для функции  $f$  на заданном промежутке, если для всех  $x$  из этого промежутка

$$F'(x) = f(x). \quad (4)$$

**Пример 1.** Функция  $F(x) = \frac{x^3}{3}$  есть первообразная для функции  $f(x) = x^2$  на интервале  $(-\infty; \infty)$ , так как

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3}(x^3)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$$

для всех  $x \in (-\infty; \infty)$ .



Легко заметить, что  $\frac{x^3}{3} + 7$  имеет ту же самую производную  $x^2$ . Поэтому и функция  $\frac{x^3}{3} + 7$  есть первообразная для  $x^2$  на  $\mathbb{R}$ . Ясно, что вместо 7 можно поставить любую постоянную. Таким образом, мы видим, что задача нахождения первообразной имеет бесконечно много решений. В следующем пункте вы увидите, как найти все эти решения.

**Пример 2.** Для функции  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  на интервале  $(0; \infty)$  первообразной является функция  $F(x) = 2\sqrt{x}$ , так как

$$F'(x) = (2\sqrt{x})' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = f(x)$$

для всех  $x$  из этого интервала. Так же как и в примере 1, функция  $2\sqrt{x} + C$  при любой постоянной  $C$  есть первообразная для функции  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  на том же интервале  $(0; \infty)$ .

▼ **Пример 3.** Функция  $F(x) = \frac{1}{x}$  не является первообразной для функции  $f(x) = -\frac{1}{x^2}$  на промежутке  $(-\infty; \infty)$ , так как равенство  $F'(x) = f(x)$  не выполнено в точке 0.

Однако в каждом из промежутков  $(-\infty; 0)$  и  $(0; \infty)$  функция  $F$  является первообразной для  $f$ .

При решении многих задач приходится иметь дело с несколько более общим случаем. Например, для функции  $f(x) = 3\sqrt{x}$  на интервале  $(0; \infty)$  первообразной будет функция  $F(x) = 2x\sqrt{x}$ . Эта функция  $F$  не определена при  $x < 0$ , и потому нельзя говорить о производной  $F$  в нуле. Однако  $\Delta F(0) = 2\Delta x\sqrt{\Delta x}$  при  $\Delta x > 0$  и  $\Delta F(0) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta x > 0$ . Поэтому говорят, что функция  $F$  есть первообразная для функции  $f$  на промежутке  $[0; \infty)$ , в который точка  $x = 0$  уже включается. В общем случае положение аналогично: функцию  $F$  называют первообразной для функции  $f$  на промежутке  $[a, b)$ , если  $F' = f$  в интервале  $(a, b)$  и  $\Delta F(a) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta x > 0$ . Функцию  $F$  называют первообразной для функции  $f$  на промежутке  $(a; b]$ , если  $F' = f$  на интервале  $(a, b)$  и  $\Delta F(b) \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0$  и  $\Delta x < 0$ . Аналогично определяется первообразная в общем случае и для других промежутков. ▼

### Упражнения

Докажите, что функция  $F$  есть первообразная для функции  $f$  на указанном промежутке (430—433).

430. а)  $F(x) = x^5$ ;  $f(x) = 5x^4$ ;  $x \in (-\infty; \infty)$ ;  
 б)  $F(x) = \sin x + 3$ ;  $f(x) = \cos x$ ;  $x \in (-\infty; \infty)$ ;  
 в)  $F(x) = \frac{1}{3}x^{-3}$ ;  $f(x) = -x^{-4}$ ;  $x \in (0; \infty)$ ;  
 г)  $F(x) = 4 - \cos x$ ;  $f(x) = \sin x$ ;  $x \in (-\infty; \infty)$ .

431. а)  $F(x) = 4x\sqrt{x}$ ;  $f(x) = 6\sqrt{x}$ ;  $x \in (0; \infty)$ ;  
 б)  $F(x) = \operatorname{tg} x - \sqrt{2}$ ;  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ ;  $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ ;  
 в)  $F(x) = 0,4\sqrt{x^5} - 5$ ;  $f(x) = \sqrt{x^3}$ ;  $x \in (0; \infty)$ ;  
 г)  $F(x) = 3 - \operatorname{ctg} x$ ;  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ ;  $x \in (0; \pi)$ .

432. а)  $F(x) = -\frac{2}{\sqrt{x}}$ ;  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$ ;  $x \in (0; \infty)$ ;  
 б)  $F(x) = \frac{2}{\sqrt{-x}}$ ;  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|^3}}$ ;  $x \in (-\infty; 0)$ ;  
 в)  $F(x) = 14 - \frac{1}{x}$ ;  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ;  $x \in (0; \infty)$ ;  
 г)  $F(x) = 9 - \frac{1}{x}$ ;  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ;  $x \in (-\infty; 0)$ .

433. а)  $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ ;  $f(x) = x$ ;  $x \in \mathbb{R}$ ;  
 б)  $F(x) = \frac{1}{7}x^7$ ;  $f(x) = x^6$ ;  $x \in \mathbb{R}$ ;  
 в)  $F(x) = \sin^2 x$ ;  $f(x) = \sin 2x$ ;  $x \in \mathbb{R}$ ;  
 г)  $F(x) = \sin 3x$ ;  $f(x) = 3 \cos 3x$ ;  $x \in \mathbb{R}$ .

Найдите первообразную для функции  $f$  на  $\mathbb{R}$  (434—435).

434. а)  $f(x) = 2\frac{1}{x}$ ; б)  $f(x) = x$ ; в)  $f(x) = x^3$ ; г)  $f(x) = x^4$ .  
 435. а)  $f(x) = \sin x$ ; б)  $f(x) = \cos x$ ; в)  $f(x) = \sin 5x$ ;  
 г)  $f(x) = \cos 7x$ .

### 31. Основное свойство первообразной

Задача интегрирования состоит в том, чтобы для заданной функции найти все ее первообразные. При решении этой задачи важную роль играет *признак постоянства функции*.

Если  $F'(x) = 0$  на некотором промежутке  $I$ , то функция  $F$  — постоянная на этом промежутке.

**Доказательство.** Зафиксируем некоторое  $x_0$  из промежутка  $I$ . Тогда для любого числа  $x$  из этого промежутка в силу формулы Лагранжа можно указать такое число  $c$ , заключенное между  $x$  и  $x_0$ , что

$$F(x) - F(x_0) = F'(c)(x - x_0).$$

Так как  $c \in I$  ( $c$  лежит между числами  $x$  и  $x_0$  из этого промежутка),  $F'(c) = 0$  (по условию) и, значит,

$$F(x) - F(x_0) = 0.$$

Итак, для всех  $x$  из промежутка  $I$

$$F(x) = F(x_0),$$

т. е. функция  $F$  сохраняет постоянное значение.

Докажем теперь *основное свойство первообразных*.

**Общий вид первообразных для функции  $f(x)$  на промежутке  $I$  есть**

$$F(x) + C, \quad (1)$$

где  $C$  — произвольная постоянная, а  $F(x)$  — одна из первообразных для функции  $f(x)$  на промежутке  $I$ .

Поясним это утверждение, в котором кратко сформулированы два свойства первообразной: 1) какое бы число ни поставить в выражение (1) вместо  $C$ , получится первообразная для  $f(x)$  на промежутке  $I$ ; 2) какую бы первообразную  $\Phi(x)$  для  $f$  на промежутке  $I$  ни взять, можно подобрать такое число  $C$ , что для всех  $x$  из промежутка  $I$  будет выполнено равенство

$$\Phi(x) = F(x) + C.$$

**Доказательство.** 1) По условию функция  $F$  — первообразная для функции  $f$  на промежутке  $I$ . Следовательно,

$$F'(x) = f(x)$$

для любого  $x \in I$ , поэтому

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x),$$

т. е.  $F(x) + C$  — первообразная для функции  $f(x)$ .

2) Пусть  $\Phi(x)$  — одна из первообразных для функции  $f$  на том же промежутке  $I$ , т. е.

$$\Phi'(x) = f(x)$$

для всех  $x \in I$ . Тогда

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Отсюда следует в силу признака постоянства функции, что разность  $\Phi(x) - F(x)$  есть функция, постоянная на промежутке  $I$ .

Таким образом, для всех  $x$  из промежутка  $I$

$$\Phi(x) - F(x) = C, \text{ т. е. } \Phi(x) = F(x) + C,$$

что и требовалось доказать.

Основному свойству первообразных можно придать геометрический смысл: *графики любых двух первообразных для функции  $f$  получают друг из друга параллельным переносом вдоль оси  $Oy$*  (рис. 102).

**Пример 1.** Точка движется по прямой с постоянным ускорением  $a$ . В начальный момент  $t_0 = 0$  точка имеет начальную координату  $x_0$  и начальную скорость  $v_0$ . Найдем координату  $x(t)$  точки как функцию от времени.

Так как  $x'(t) = v(t)$  и  $v'(t) = a(t)$ , из условия  $a(t) = a$  получаем:

$$v'(t) = a.$$

Отсюда следует, что

$$v(t) = at + C_1. \quad (2)$$

Подставляя  $t_0 = 0$  в (2), находим:  $C_1 = v_0$  и, значит,

$$x'(t) = v(t) = at + v_0.$$

Следовательно,

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0t + C_2. \quad (3)$$

Чтобы найти  $C_2$ , подставим в (3) значение  $t_0 = 0$ . Получим  $C_2 = x_0$ . Итак,

$$x(t) = \frac{at^2}{2} + v_0t + x_0.$$

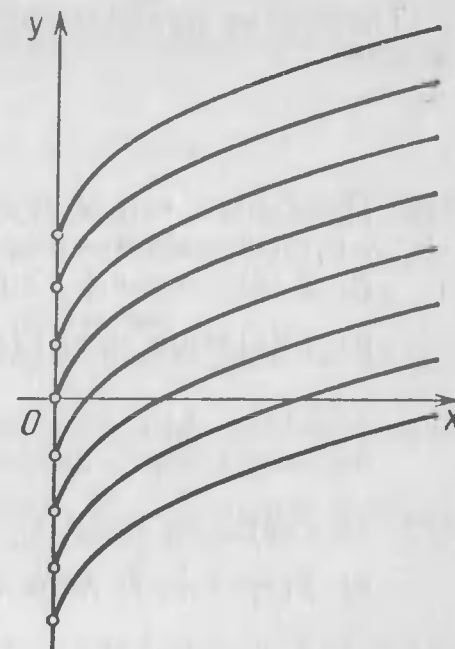


Рис. 103.

**Пример 2.** Найдем для функции  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  первообразную\*, график которой проходит через точку  $M(9; -2)$ .

Любая первообразная функции  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  записывается в виде  $2\sqrt{x} + C$ .

Графики этих первообразных изображены на рисунке 103.

Координаты точки  $M(9; -2)$  графика искомой первообразной должны удовлетворять уравнению  $2\sqrt{9} + C = -2$ .

Отсюда находим, что  $C = -8$ . Следовательно, искомая первообразная такова:  $F(x) = 2\sqrt{x} - 8$ .

Ниже приводится таблица первообразных для некоторых функций:

Функция	$k$ (постоянная)	$\frac{x^n}{n+1}$ ( $n \in \mathbb{Z}$ , $n \neq -1$ )	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$
Общий вид первообразной	$kx + C$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$2\sqrt{x} + C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\operatorname{tg} x + C$	$-\operatorname{ctg} x + C$

\* Для краткости при нахождении первообразной функции  $f$  промежутков, на котором задана  $f$ , обычно не указывают. Имеются в виду промежутки возможно большей длины. Так, в рассматриваемом случае естественно считать, что функция  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$  задана на интервале  $(0; \infty)$ .

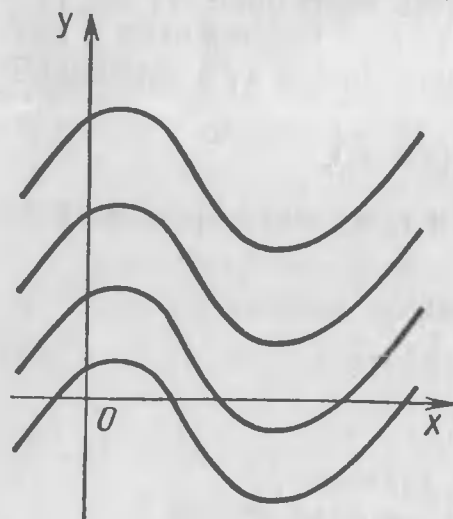


Рис. 102.

Проверьте правильность заполнения этой таблицы самостоятельно.

### Упражнения

436. Проверьте, что функция  $F$  есть первообразная для функции  $f$ :

а)  $F(x) = \sin x - x \cos x$ ;  $f(x) = x \sin x$ ;

б)  $F(x) = \cos x + x \sin x$ ;  $f(x) = x \cos x$ ;

в)  $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ ;  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ .

Найдите для функции  $f$  первообразную, график которой проходит через заданную точку  $M$  (437—438).

437. а)  $f(x) = x^3$ ;  $M(2; 1)$ ; б)  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ ;  $M(\frac{\pi}{4}; 0)$ ;

в)  $f(x) = \sin x$ ;  $M(0; 3)$ ; г)  $f(x) = -2$ ;  $M(3; 5)$ .

438. а)  $f(x) = \frac{1}{x^3}$ ;  $M(-\frac{1}{2}; 3)$ ; б)  $f(x) = \cos x$ ;  $M(\frac{\pi}{2}; 0)$ ;

в)  $f(x) = \sqrt{x}$ ;  $M(9; 10)$ ; г)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ ;  $M(4; 4)$ .

439. Для функции  $f$  найдите первообразную  $F$ , принимающую заданное значение в указанной точке:

а)  $f(x) = x^2$ ;  $F(3) = 0$ ; б)  $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ ;  $F(1) = -1$ ;

в)  $f(x) = \sin x$ ;  $F(\pi) = 7$ ; г)  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ ;  $F(\frac{\pi}{4}) = -1$ .

### 32. Три правила нахождения первообразных

Правила отыскания первообразных похожи на соответствующие правила дифференцирования.

1. Если  $F$  есть первообразная для  $f$ , а  $G$  — первообразная для  $g$ , то  $F + G$  есть первообразная для  $f + g$ .

Действительно, так как  $F' = f$  и  $G' = g$ , по правилу вычисления производной суммы имеем:

$$(F + G)' = F' + G' = f + g.$$

2. Если  $F$  есть первообразная для  $f$ , а  $k$  — постоянная, то  $kF$  есть первообразная для  $kf$ .

Действительно, постоянный множитель можно выносить за знак производной, поэтому

$$(kF)' = kF' = kf.$$

3. Если  $F(x)$  есть первообразная для функции  $f(x)$ , а  $k$  и  $b$  — постоянные, причем  $k \neq 0$ , то  $\frac{1}{k}F(kx + b)$  есть первообразная для функции  $f(kx + b)$ .

Действительно, по правилу вычисления производной сложной функции имеем:

$$\left(\frac{1}{k}F(kx + b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx + b) \cdot k = f(kx + b).$$

Приведем примеры применения этих правил.

Пример 1. Найдём общий вид первообразных для функции  $x^3 + \frac{1}{x^2}$ .

Так как для функции  $x^3$  одна из первообразных есть  $\frac{x^4}{4}$ , а для функции  $\frac{1}{x^2}$  одной из первообразных является функция  $-\frac{1}{x}$ , по правилу 1 находим: для функции  $x^3 + \frac{1}{x^2}$  одной из первообразных будет функция  $\frac{x^4}{4} - \frac{1}{x}$ . Ответ:  $\frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} + C$ .

Пример 2. Найдём одну из первообразных для  $f(x) = 5\cos x$ .

Так как для функции  $\cos x$  одна из первообразных есть  $\sin x$ , применяя правило 2, получаем ответ:  $5\sin x$ .

Пример 3. Найдём одну из первообразных для функции  $\sin(3x - 2)$ .

Для функции  $\sin x$  одной из первообразных является  $-\cos x$ , поэтому по правилу 3 искомая первообразная равна

$$-\frac{1}{3}\cos(3x - 2).$$

Пример 4. Найдём одну из первообразных для функции

$$\frac{1}{(7 - 3x)^5}.$$

Так как для функции  $\frac{1}{x^5}$  первообразной является функция  $-\frac{1}{4x^4}$ , по правилу 3 искомая первообразная равна

$$\frac{1}{-3} \cdot \frac{-1}{4(7 - 3x)^4} = \frac{1}{12(7 - 3x)^4}.$$

Пример 5. Материальная точка массы 2 кг движется по оси  $Ox$  под действием силы, направленной вдоль оси. В момент времени  $t$  эта сила равна  $F(t) = 3t - 2$ . Найдите закон  $x(t)$  движения точки, если известно, что при  $t = 2$  с скорость точки равна 3 м/с, а координата  $x = 1$  ( $F$  — сила в ньютонах,  $t$  — время в секундах,  $x$  — путь в метрах).

Решение. Согласно второму закону Ньютона

$$F = ma.$$

Поэтому ускорение  $a = \frac{F}{m}$  и

$$a(t) = \frac{F}{m} = \frac{3}{2}t - 1.$$

Скорость точки  $v(t)$  есть первообразная для ее ускорения  $a(t)$ , поэтому

$$v(t) = \frac{3}{4}t^2 - t + C_1.$$

Постоянную  $C_1$  находим из условия  $v(2) = 3$ :

$$\frac{3}{4} \cdot 4 - 2 + C_1 = 3, \text{ т. е. } C_1 = 2 \text{ и}$$

$$v(t) = \frac{3}{4}t^2 - t + 2.$$

Координата  $x(t)$  есть первообразная для скорости  $v(t)$ , поэтому

$$x(t) = \frac{1}{4}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2t + C_2.$$

Постоянную  $C_2$  находим из условия  $x(2) = 1$ :

$$\frac{1}{4} \cdot 8 - \frac{1}{2} \cdot 4 + 4 + C_2 = 1, C_2 = -3.$$

Итак, закон движения точки

$$x(t) = \frac{1}{4}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + 2t - 3.$$

### Упражнения

Найдите общий вид первообразных для функции (440—442).

440. а)  $5x^2 - 1$ ; б)  $\frac{1}{x^2} - 4 \sin x$ ; в)  $kx + b$ ; г)  $ax^2 + bx + c$ .

441. а)  $1 - \cos 3x$ ; б)  $\frac{2}{\sin^2 3x}$ ; в)  $\frac{3}{\cos^2 5x}$ ; г)  $7 \sin \frac{x}{3} + \frac{2}{\cos^2 4x}$ .

442. а)  $\frac{1}{\sqrt{3x-2}}$ ; б)  $\frac{5}{\sqrt{2x+7}}$ ; в)  $\frac{6}{(5x-7)^3}$ ; г)  $8(11-3x)^5$ .

443. Камень брошен вверх с поверхности земли. Пренебрегая сопротивлением воздуха и считая ускорение силы свободного падения  $g \approx 9,8 \text{ м/с}^2$ , найдите: 1) наибольшую высоту подъема камня в зависимости от начальной скорости  $v_0$ ; 2) скорость камня в самом верхнем положении; 3) время, через которое камень упадет на землю, если скорость измеряется в метрах в секунду.

444\*. Найдите путь, пройденный точкой за промежуток времени от  $t=0$  до  $t=5$  с, если скорость точки меняется по закону  $v = 9,8t - 0,003t^2$ . Найдите ускорение этой точки в конце пути (скорость измеряется в метрах в секунду).

445\*. Скорость движущейся точки меняется по закону  $v = Rt + a\sqrt{t}$ . Найдите путь, пройденный этой точкой за промежуток времени от  $t=0$  до  $t=4$ , и ее ускорение в конце пути.

446. Материальная точка массы  $m$  движется по оси  $Ox$  под действием силы, направление которой параллельно этой оси. В момент времени  $t$  эта сила равна  $F(t)$ . Найдите закон  $x(t)$  движения точки, если известно, что при  $t=t_0$  скорость точки равна  $v_0$ , а ее координата равна  $x_0$  ( $F(t)$  измеряется в ньютонах,  $t$  — в секундах,  $v$  — в метрах в секунду,  $m$  — в килограммах). Решение проведите при следующих числовых данных:

а)  $F(t) = 6 - 9t$ ,  $t_0 = 1$ ,  $v_0 = 4$ ,  $x_0 = -5$ ,  $m = 3$ ;

б)  $F(t) = \frac{10}{t^3}$ ,  $t_0 = \frac{1}{2}$ ,  $v_0 = 1$ ,  $x_0 = 2,5$ ,  $m = 5$ ;

в)  $F(t) = 14 \sin t$ ,  $t_0 = \pi$ ,  $v_0 = 2$ ,  $x_0 = 3$ ,  $m = 7$ ;

г)  $F(t) = 18 \cos t$ ,  $t_0 = 0$ ,  $v_0 = -5$ ,  $x_0 = 9$ ,  $m = 6$ .

## § 9. ИНТЕГРАЛ

### 33. Площадь криволинейной трапеции

Пусть на отрезке  $[a; b]$  оси  $Ox$  задана непрерывная функция  $f$ , не меняющая на нем знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, отрезком  $[a; b]$  и прямыми  $x=a$  и  $x=b$  (рис. 104), называют *криволинейной трапецией*. Различные примеры криволинейных трапеций приведены на рисунках 105—108.

При вычислении площадей криволинейных трапеций пользуются следующей теоремой.

**Теорема.** Пусть  $f$  — непрерывная и неотрицательная на отрезке  $[a; b]$  функция,  $S$  — площадь соответствующей криволинейной трапеции (см. рис. 104). Если  $F$  есть первообразная для  $f$  на отрезке  $[a; b]$ , то

$$S = F(b) - F(a). \quad (1)$$

**Доказательство.** Рассмотрим функцию  $S(x)$ , определенную на отрезке  $[a; b]$ . Если  $x=a$ , то  $S(a)=0$ . Если  $a < x \leq b$ , то  $S(x)$  — площадь той части криволинейной трапеции, которая расположена левее вертикальной прямой, проходящей через точку  $M(x; 0)$  (рис. 109). Отметим, что  $S(b) = S$  ( $S$  — площадь криволинейной трапеции).

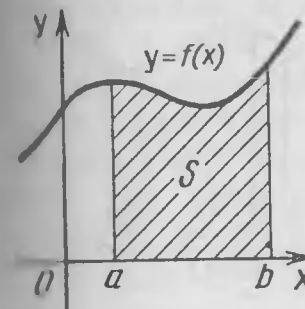


Рис. 104.

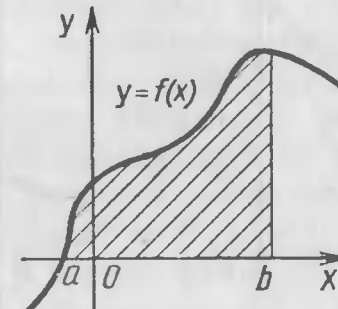


Рис. 105.

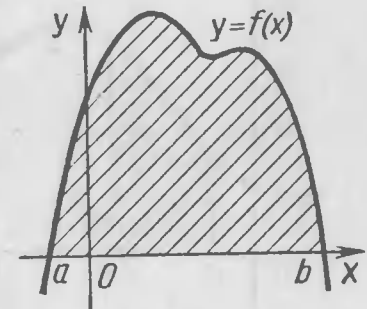


Рис. 106.



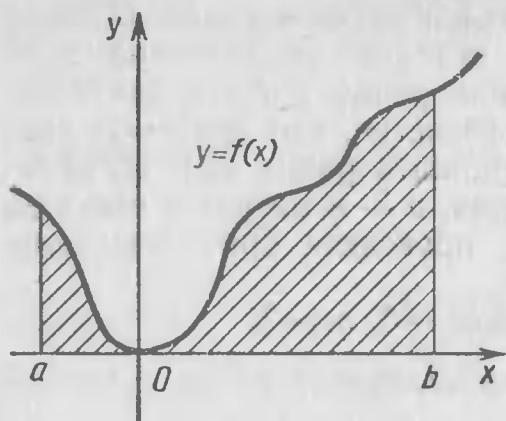


Рис. 107.

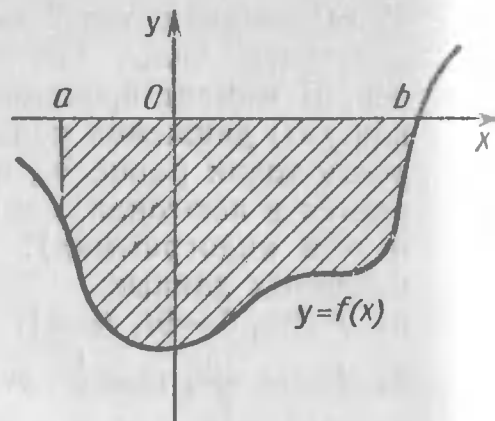


Рис. 108.

Докажем, что

$$S'(x) = f(x). \quad (2)$$

Действительно, по определению производной надо доказать, что

$$\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \rightarrow f(x) \text{ при } \Delta x \rightarrow 0. \quad (3)$$

Выясним геометрический смысл числителя  $\Delta S(x)$ . Для простоты рассмотрим случай  $\Delta x > 0$ . Поскольку  $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$ , то  $\Delta S(x)$  — площадь фигуры, заштрихованной на рисунке 110. Возьмем теперь прямоугольник той же площади  $\Delta S(x)$ , опирающийся на отрезок  $[x; x + \Delta x]$  (рис. 111). Верхняя сторона прямоугольника пересекает график функции (в силу ее непрерывности) в некоторой точке с абсциссой  $c \in [x; x + \Delta x]$  (иначе его площадь будет или больше  $\Delta S(x)$ , или меньше). Следовательно, высота прямоугольника равна  $f(c)$ . По формуле площади прямоугольника имеем:  $\Delta S(x) = f(c) \cdot \Delta x$ , откуда  $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(c)$ . Эта формула верна и при  $\Delta x < 0$ . Поскольку точка  $c$

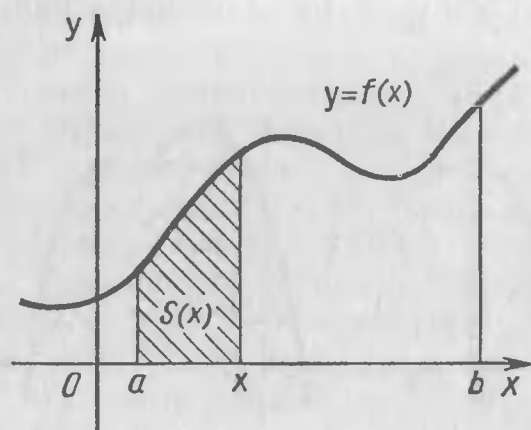


Рис. 109.

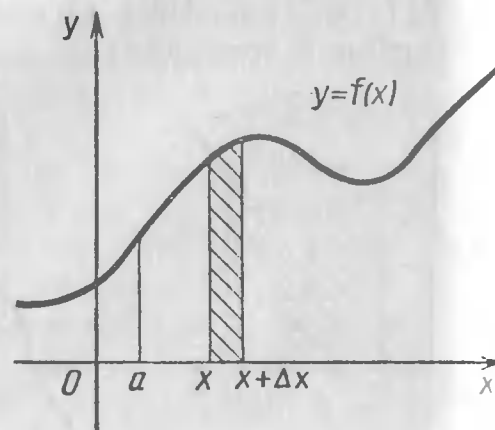


Рис. 110.

находится между  $x$  и  $x + \Delta x$ , то  $c$  стремится к  $x$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Так как функция  $f$  непрерывна,  $f(c) \rightarrow f(x)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ . Итак,  $\frac{\Delta S(x)}{\Delta x} \rightarrow f(x)$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Формула (2) доказана.

Мы получили, что функция  $S(x)$  есть первообразная для функции  $f(x)$ . Поэтому в силу основного свойства первообразных для всех  $x \in [a; b]$  имеем:

$$S(x) = F(x) + C,$$

где  $C$  — некоторая постоянная, а  $F(x)$  — одна из первообразных для функции  $f$ . Для нахождения  $C$  подставим  $x = a$ :

$$F(a) + C = S(a) = 0,$$

откуда  $C = -F(a)$ . Следовательно,

$$S(x) = F(x) - F(a). \quad (4)$$

Поскольку площадь криволинейной трапеции равна  $S(b)$ , подставляя в формулу (4)  $x = b$ , получим:

$$S = S(b) = F(b) - F(a).$$

**Пример.** Вычислим площадь  $S$  криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции  $f(x) = x^2$  и опирающейся на отрезок  $[1; 2]$  (рис. 112).

**Решение.** Для функции  $f(x) = x^2$  первообразной является функция  $F(x) = \frac{x^3}{3}$ .

Следовательно,

$$S = F(2) - F(1) = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

Вы видели, что вычисление производной функции в большинстве случаев связано лишь с трудностями вычислительного характера. Сложнее обстоит дело с нахождением первообразных. Так, не сразу ясно, имеет ли данная функция первообразную или не имеет. В связи с этим отметим, что любая непрерывная на промежутке  $I$  функция имеет на этом промежутке первообразную. Некоторое разъяснение этого факта дает доказательство формулы (2), приведенное выше. Однако первообразные некоторых функций нельзя записать с помощью изучаемых в школе функций. Так обстоит дело, например, с функцией  $\sqrt{x^3 + 1}$ . ▼

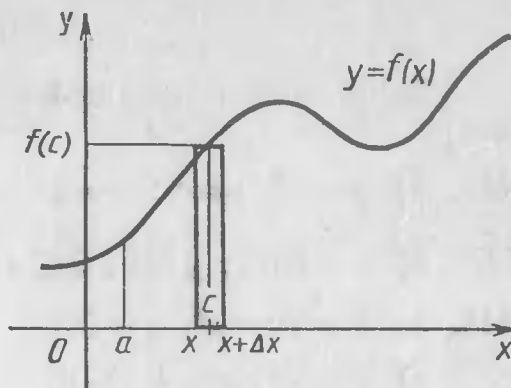


Рис. 111.

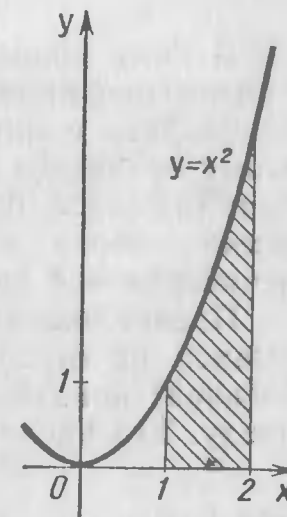


Рис. 112.

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями (447 448)

447. а)  $y=x^2$ ;  $y=0$ ;  $x=3$ ; б)  $y=\cos x$ ;  $y=0$ ;  $x=0$ ;  $x=\frac{\pi}{2}$ ;

в)  $y=\sin x$ ;  $y=0$ ;  $0 \leq x \leq \pi$ ; г)  $y=\frac{1}{x^2}$ ;  $y=0$ ;  $x=1$ ;  $x=2$

448. а)  $y=2x-x^2$ ;  $y=0$ ; б)  $y=(x+2)^2$ ;  $y=0$ ;  $x=0$ ;

в)  $y=\frac{1}{x^2}$ ;  $y=4$ ;  $x=8$ ; г)  $y=x^3$ ;  $y=0$ ;  $x=1$ .

### 34. Интеграл. Формула Ньютона — Лейбница

Существует другой подход к задаче вычисления площади криволинейной трапеции.

Для простоты будем считать функцию  $f$  неотрицательной и непрерывной на отрезке  $[a; b]$ ; тогда площадь  $S$  соответствующей криволинейной трапеции можно приближенно подсчитать следующим образом.

Разобьем отрезок  $[a; b]$  на  $n$  отрезков одинаковой длины точками  $x_0=a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n=b$ , и пусть

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}, \text{ где } k=1, 2, \dots, n-1, n.$$

На каждом из отрезков  $[x_{k-1}; x_k]$  как на основании построим прямоугольник высоты  $f(x_{k-1})$ . Площадь этого прямоугольника равна

$$f(x_{k-1}) \cdot \Delta x = \frac{b-a}{n} f(x_{k-1}),$$

а сумма площадей всех таких прямоугольников (рис. 113) равна

$$S_n = \frac{b-a}{n} (f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})).$$

В силу непрерывности функции  $f$  объединение построенных прямоугольников при большом  $n$ , т. е. при малом  $\Delta x$ , «почти совпадает» с интересующей нас криволинейной трапецией. Поэтому возникает предположение, что  $S_n \approx S$  при больших  $n$  и это приближенное равенство выполняется с любой точностью. Коротко говорят: « $S_n$  стремится к  $S$  при  $n$ , стремящемся к бесконечности» — и пишут  $S_n \rightarrow S$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Предположение это правильно. Более того, для любой непрерывной на отрезке  $[a; b]$  функции  $f$  (не обязательно неотрицательной) доказано, что  $S_n$  стремится (при  $n \rightarrow \infty$ ) к некоторому числу. Это число называют (по определению) *интегралом* функции  $f$  от  $a$  до  $b$  и обозначают  $\int_a^b f(x) dx$ , т. е.

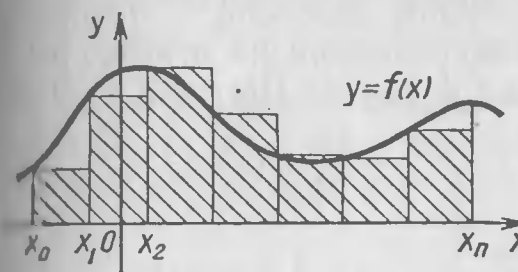


Рис. 113.

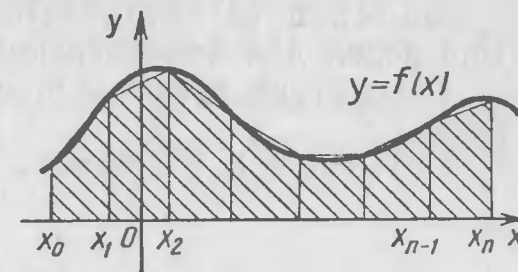


Рис. 114.

$$S_n \rightarrow \int_a^b f(x) dx \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

(читается: «интеграл от  $a$  до  $b$  эф от икс дэ икс»). Числа  $a$  и  $b$  называются *пределами интегрирования*:  $a$  — нижним пределом,  $b$  — верхним. Знак  $\int$  называется *знаком интеграла*. Функция  $f$  называется *подынтегральной функцией*, а переменная  $x$  — *переменной интегрирования*.

Итак, если  $f(x) \geq 0$  на отрезке  $[a; b]$ , то площадь  $S$  соответствующей криволинейной трапеции выражается формулой

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (2)$$

Для приближенного вычисления интеграла можно рассматривать суммы  $S_n$ . Лучше, однако, воспользоваться суммами

$$S_n = \frac{b-a}{n} \left( \frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{1}{2} f(x_n) \right),$$

слагаемые которых равны в случае положительной функции  $f$  площадям трапеций, «вписанных» в криволинейную трапецию и ограниченных ломаными, как это изображено на рисунке 114.

Действительно, применяя формулу площади трапеции, получим:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \cdot \frac{b-a}{n} + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot \frac{b-a}{n} + \dots = \\ &= \frac{b-a}{n} \left( \frac{1}{2} f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + \frac{1}{2} f(x_n) \right). \quad \blacktriangledown \end{aligned}$$

Сравнивая формулы площади криволинейной трапеции

$$S = F(b) - F(a) \text{ и } S = \int_a^b f(x) dx,$$

делаем вывод: если  $F$  — первообразная для  $f$  на  $[a; b]$ , то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad (3)$$

Формула (3) называется *формулой Ньютона — Лейбница*. Она верна для любой функции  $f$ , непрерывной на отрезке  $[a; b]$ . Рассмотрим примеры применения формулы Ньютона — Лейбница.

**Пример 1.** Вычислим

$$\int_{-1}^2 x^2 dx.$$

Поскольку для функции  $x^2$  первообразной является функция  $\frac{x^3}{3}$ ,

$$\int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3.$$

Для удобства записи приращение функции  $F$  принято сокращенно обозначать  $F(x) \Big|_a^b$ , т. е.

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b.$$

Пользуясь этим обозначением, формулу Ньютона — Лейбница обычно записывают в виде

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b. \quad (4)$$

**Пример 2.** Пользуясь введенными обозначениями, получим

$$\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x \Big|_0^\pi = -\cos \pi - (-\cos 0) = 2.$$

**Замечание.** Данное нами определение интеграла не позволяет говорить, например, об интеграле от  $-1$  до  $2$  функции  $\frac{1}{x^2}$ , так как эта функция не является непрерывной на отрезке  $[-1; 2]$ . Заметим также, что функция  $-\frac{1}{x}$  не является первообразной для функции  $\frac{1}{x^2}$  на этом отрезке, поскольку точка  $(0)$ , принадлежащая отрезку, не входит в область определения функции  $\frac{1}{x^2}$ .

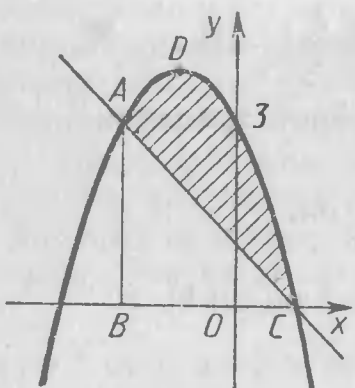


Рис. 115.

**Пример 3.** Вычислим площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = 1 - x$  и  $y = 3 - 2x - x^2$ .

Нарисуем эти линии (рис. 115) и най-

дем абсциссы точек их пересечения из уравнения

$$1 - x = 3 - 2x - x^2.$$

Решая это уравнение, находим:  $x = 1$  и  $x = -2$ . Искомая площадь может быть получена как разность площадей криволинейной трапеции  $BADC$  и треугольника  $BAC$ . По формуле (2)

$$\begin{aligned} S_{BADC} &= \int_{-2}^1 (3 - 2x - x^2) dx = \left( 3x - x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-2}^1 = \\ &= 3 - 1 - \frac{1}{3} - 3 \cdot (-2) + (-2)^2 + \frac{(-2)^3}{3} = 9; \end{aligned}$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 = \frac{9}{2}.$$

Следовательно, площадь заштрихованной фигуры равна  $\frac{9}{2}$ :

$$S = S_{BADC} - S_{\triangle ABC} = \frac{9}{2}.$$

**Замечание.** Удобно расширить понятие интеграла, полагая по определению при  $a \geq b$

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

При таком соглашении формула Ньютона — Лейбница оказывается верной при произвольных  $a$  и  $b$  (в частности,  $\int_a^a f(x) dx = 0$ ).

### Упражнения

Вычислите интеграл (449—451).

449. а)  $\int_{-1}^1 x^4 dx$ ; б)  $\int_{\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ ; в)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$ ; г)  $\int_{-2}^2 x^3 dx$ .
450. а)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$ ; б)  $\int_2^{\frac{1}{3}} \frac{dx}{x^2}$ ; в)  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^3}$ ; г)  $\int_{-\pi}^0 \sin x dx$ .
451. а)  $\int_1^{10} \frac{dx}{x^2}$ ; б)  $\int_1^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ; в)  $\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$ ; г)  $\int_{-1}^2 \frac{dx}{(2x+1)^2}$ .

Вычислите (предварительно сделав рисунок) площадь фигуры, ограниченной линиями (452—453).

452. а)  $y = x^3$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$ ,  $y = 0$ ; б)  $y = x^4$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ;

в)  $y = 2 + x - x^2, y = 0$ ; г)  $y = \cos x, y = 0, |x| \leq \frac{\pi}{2}$ .

453. а)  $y = x^2, y = 2x$ ; б)  $y = x^2, y = x^3$ ;  
в)  $y = \frac{1}{x^2}, y = x, x = 2$ ; г)  $y = \sqrt{x}, y = x$ .

454. Докажите, что если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и  $f(x) \leq 0$ , то  $\int_a^b f(x) dx = -S$ , где  $S$  — площадь соответствующей криволинейной трапеции.

455. Докажите, что  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ .

456. Покажите, что интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

функции, график которой изображен на рисунке 116, равен  $S_1 - S_2 + S_3$  (криволинейные трапеции, имеющие площади  $S_1, S_2, S_3$ , заштрихованы).

457. Докажите формулу вычисления производной от интеграла с переменным верхним пределом интегрирования:

$$\left( \int_a^x f(t) dt \right)' = f(x),$$

где  $f(x)$  — функция, непрерывная на интервале, содержащем точки  $a$  и  $x$ .

458. Пусть материальная точка движется по прямой со скоростью  $v(t)$ . Докажите, что ее координату  $x(t)$  можно найти по формуле  $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt$ ,

где  $x_0 = x(t_0)$  — начальная координата точки.

459. Пусть материальная точка движется по прямой с ускорением  $a(t)$ . Докажите, что ее скорость  $v(t)$  можно найти по формуле

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt,$$

где  $v_0 = v(t_0)$  — начальная скорость точки.

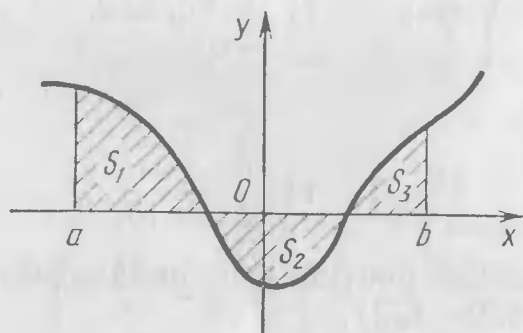


Рис. 116.

Пусть задано тело объемом  $V$ , причем известно следующее: имеется такая прямая (рис. 117), что, какую бы плоскость, перпендикулярную этой прямой, мы ни взяли, нам известна площадь  $S$  сечения тела этой плоскостью. Но плоскость, перпендикулярная оси  $Ox$ , пересекает ее в некоторой точке  $x$ . Следовательно, каждому числу  $x$  (из отрезка  $[a; b]$ , см. рис. 117) поставлено в соответствие единственное число  $S(x)$  — площадь сечения тела этой плоскостью. Тем самым на отрезке  $[a; b]$  задана функция  $S(x)$ . Если функция  $S(x)$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , то справедлива формула

$$V = \int_a^b S(x) dx. \quad (1)$$

Полное доказательство этой формулы дается в курсах математического анализа, а здесь остановимся на наглядных соображениях, приводящих к ней.

Разобьем отрезок  $[a; b]$  на  $n$  отрезков равной длины точками  $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < b = x_n$ , и пусть

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

(см. п. 34). Через каждую точку  $x_k$  проведем плоскость  $\alpha_k$ , перпендикулярную оси  $Ox$ . Эти плоскости разрезают заданное тело на слои (рис. 118, 119). Объем слоя, заключенного между плоскостями  $\alpha_{k-1}$  и  $\alpha_k$ , при достаточно больших  $n$  приближенно равен площади  $S(x_{k-1})$  сечения, умноженной на «толщину слоя»  $\Delta x$ , и потому

$$V \approx S(x_0) \Delta x + S(x_1) \Delta x + \dots + S(x_{n-1}) \Delta x = V_n.$$

Точность этого приближенного равенства тем выше, чем тоньше слои, на которые разрезано тело, т. е. чем больше  $n$ . Поэтому  $V_n \rightarrow V$  при  $n \rightarrow \infty$ . Но по определению интеграла

$$V_n \rightarrow \int_a^b S(x) dx \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

Пример 1. Докажем, что объем шара радиуса  $R$  равен

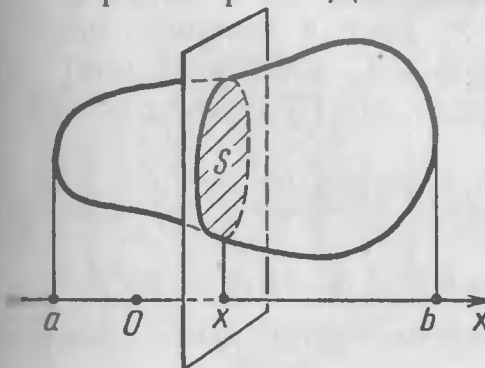


Рис. 117.

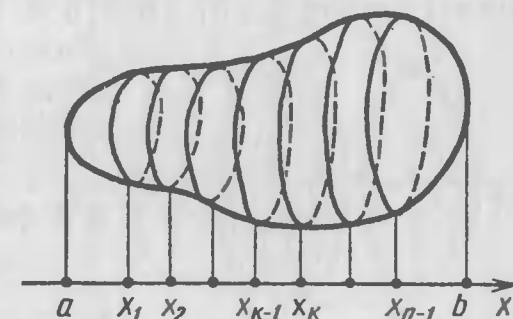


Рис. 118.



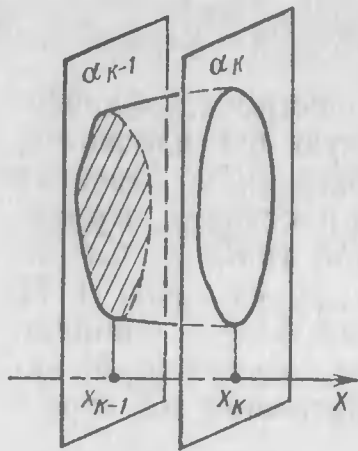


Рис. 119.

$\frac{4}{3}\pi R^3$ . Проведем ось  $Ox$  через центр шара  $O$  (рис. 120). Каждая плоскость, перпендикулярная оси  $Ox$  и пересекающая отрезок  $[-R; R]$  этой оси в точке  $x$ , дает в сечении с шаром круг радиуса  $\sqrt{R^2 - x^2}$ . Площадь этого круга

$$S(x) = \pi (\sqrt{R^2 - x^2})^2 = \pi (R^2 - x^2).$$

Следовательно, по формуле (1)

$$V = \int_{-R}^R \pi (R^2 - x^2) dx = \pi \left( R^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{-R}^R = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

**Пример 2.** Докажем, что объем конуса высоты  $H$  и радиуса основания  $R$  равен  $\frac{1}{3}\pi R^2 H$ .

Проведем ось  $Ox$  через вершину конуса  $O$  перпендикулярно его основанию (рис. 121). Каждая плоскость, перпендикулярная оси  $Ox$  и пересекающая отрезок  $[0; H]$  этой оси в точке  $x$  дает в сечении с конусом круг радиуса  $\frac{R}{H}x$ . Площадь этого круга

$$S(x) = \pi \left( \frac{R}{H} x \right)^2 = \pi \left( \frac{R}{H} \right)^2 x^2.$$

Следовательно, по формуле (1)

$$V = \int_0^H \pi \left( \frac{R}{H} \right)^2 x^2 dx = \pi \frac{R^2}{H^2} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^H = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

**Пример 3.** Докажем, что объем пирамиды с высотой  $H$  и площадью основания  $S$  равен  $\frac{1}{3}HS$ , а объем усеченной пирамиды высоты  $H$  с площадями оснований  $S$  и  $s$  равен  $\frac{1}{3}H(S + s + \sqrt{Ss})$ .

Пусть точка  $O$  — вершина пирамиды (рис. 122). Проведем через точку  $O$  ось  $Ox$  перпендикулярно основанию пирамиды. Основания усеченной пирамиды пересекают ось  $Ox$  в точках  $a$  и  $b$ . Каждая плоскость, перпендикулярная оси  $Ox$  и пересекающая отрезок  $[a; b]$  этой оси в точке  $x$ , дает в сечении многоугольник, подобный многоугольнику — основанию пирамиды. Поэтому площадь сечения

$$S(x) \text{ равна } kx^2,$$

и в частности,

$$s = S(a) = ka^2 \text{ и } S = S(b) = kb^2.$$

Объем усеченной пирамиды вычисляем по формуле (1):

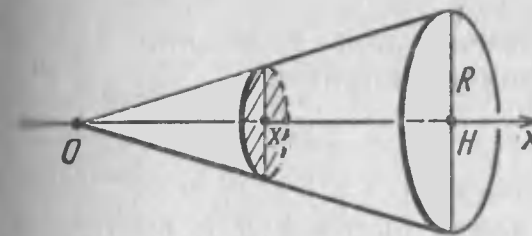


Рис. 121.

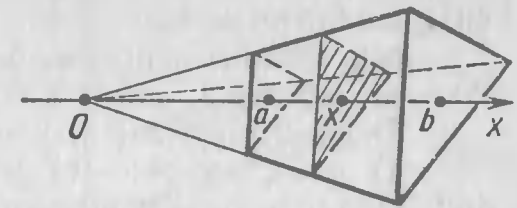


Рис. 122.

$$V = \int_a^b kx^2 dx = \frac{k}{3} x^3 \Big|_a^b = \frac{k}{3} (b^3 - a^3) = \frac{b-a}{3} (kb^2 + kab + ka^2) = \frac{H}{3} (S + \sqrt{Ss} + s).$$

В случае пирамиды  $s=0$  и мы приходим к формуле  $V = \frac{1}{3}HS$ .

**Пример 4.** Пусть криволинейная трапеция опирается на отрезок  $[a; b]$  оси  $Ox$  и ограничена сверху графиком функции  $f$ , неотрицательной и непрерывной на отрезке  $[a; b]$ . При вращении этой криволинейной трапеции вокруг оси  $Ox$  получаем тело (рис. 123), объем которого находится по формуле:

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx. \quad (2)$$

Действительно, каждая плоскость, перпендикулярная оси  $Ox$  и пересекающая отрезок  $[a; b]$  этой оси в точке  $x$ , дает в сечении с телом круг радиуса  $f(x)$  и площади  $S(x) = \pi f^2(x)$  (рис. 124). Отсюда по формуле (1) получается формула (2).

### Упражнения

460. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями:
- а)  $y = x^2 + 1$ ,  $x=0$ ,  $x=1$ ,  $y=0$ ; б)  $y = 1 - x^2$ ,  $y=0$ ;  
 в)  $y = \sqrt{x}$ ,  $x=1$ ,  $y=0$ ; г)  $y = \sqrt{x}$ ,  $x=1$ ,  $x=4$ ,  $y=0$ .

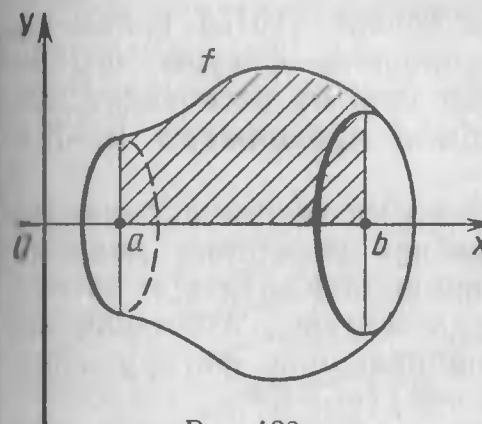


Рис. 123.

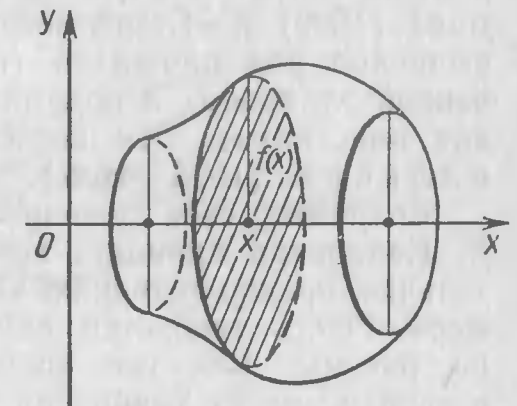


Рис. 124.

461. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:  
 а)  $y = x + 2$ ,  $y = 1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ ;  
 б)  $y = 2x$ ,  $y = x + 3$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ ;  
 в)  $y = x^2$ ,  $y = x$ ; г)  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x$ .
462. Найдите объем шарового сегмента радиуса  $R$  и высоты  $H$ .
463. Выведите формулу для объема шарового сектора, радиус которого  $R$ , а угол в осевом сечении  $\alpha$ .
464. Выведите формулу для объема усеченного конуса высоты  $H$  с радиусами оснований  $R$  и  $r$ .

### Сведения из истории

В п. 34 мы определили интеграл  $\int_a^b f(x) dx$  как число, к которому стремятся суммы  $S_n = \sum f(x_k) \Delta x$  при  $n \rightarrow \infty$  (т. е.  $\Delta x \rightarrow 0$ ,  $\sum$  — знак суммы).

Такое определение интеграла не требует предварительного знакомства с понятием производной и опирающимся на него понятием первообразной. Математики XVII и XVIII вв. не пользовались понятием предела. Они говорили вместо этого о «сумме бесконечно большого числа бесконечно малых слагаемых». Например, площадь криволинейной трапеции (рис. 125) они представляли себе составленной из вертикальных отрезков длины  $f(x)$ , которым тем не менее приписывали площадь, равную бесконечно малой величине  $f(x) dx$ . В соответствии с таким пониманием искомая площадь считалась равной сумме

$$S = \sum_{a < x < b} f(x) dx$$

бесконечно большого числа бесконечно малых площадей. Иногда даже подчеркивалось, что отдельные слагаемые в этой сумме — нули, но нули особого рода, которые, сложенные в бесконечном числе, дают вполне определенную положительную сумму.

На такой (кажущейся теперь по меньшей мере сомнительной) основе И. Кеплер в своих сочинениях «Новая астрономия» (1609) и «Стереометрия винных бочек» (1615) правильно вычислил ряд площадей (например, площадь фигуры, ограниченной эллипсом) и объемов (разрезая тело на бесконечно тонкие пластинки). Эти исследования были продолжены Б. Кавальери (1598—1647).

Сохраняет свое значение и в наше время сформулированный Б. Кавальери принцип, введенный им при некоторых дополнительных предположениях. Объясним принцип Кавальери на примере. Пусть требуется найти площадь фигуры, изображенной на рисунке 126, где кривые, ограничивающие фигуру снизу и сверху, имеют уравнения  $y = f(x)$  и  $y = f(x) + C$ .

Представляя себе нашу фигуру состоящей из «неделимых»,

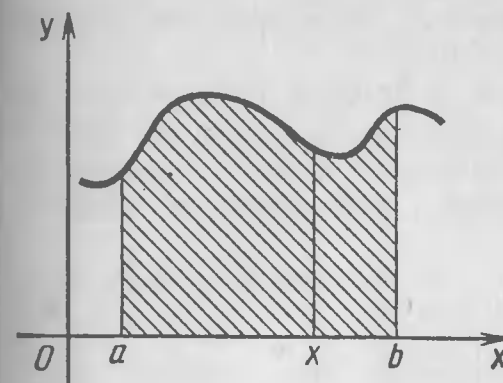


Рис. 125

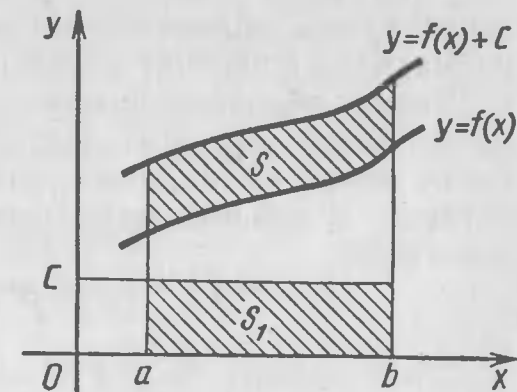


Рис. 126.

по терминологии Кавальери, бесконечно тонких столбиков, замечаем, что все они имеют общую длину  $C$ . Передвигая их в вертикальном направлении, мы можем составить из них прямоугольник с основанием  $b - a$  и высотой  $C$ . Поэтому искомая площадь равна площади полученного прямоугольника, т. е.

$$S = S_1 = C(b - a).$$

Общий принцип Кавальери для площадей плоских фигур формулируется так. Пусть прямые некоторого пучка параллельных пересекают фигуры  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  по отрезкам равной длины (рис. 127). Тогда площади фигур  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  равны\*. Аналогичный принцип действует в стереометрии и оказывается полезным при нахождении объемов.

В абстрактном виде интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

был определен Лейбницем как «сумма всех ординат» точек графика функции (имеется, конечно, в виду, что ординаты умножены на «бесконечно малое» приращение  $dx$  абсциссы). Современное обозначение интеграла по существу восходит к Лейбницу, ко-

\* В духе рассуждений математиков XVIII в. мы опускаем оговорки, без которых утверждение не совсем точно.

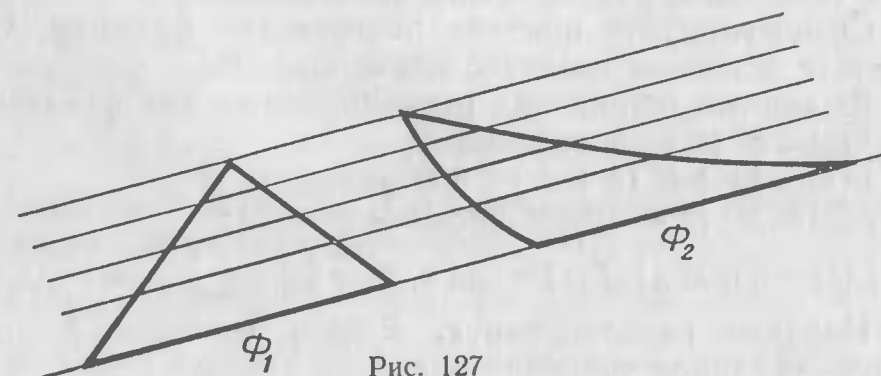


Рис. 127

торый суммы обозначал большой буквой  $S$ . Название «интеграл» принадлежит ученику Лейбница Я. Бернулли.

Таким образом, интеграл сначала появился независимо от производной. Поэтому было большим открытием установление связи между операциями дифференцирования и интегрирования, которая в общем виде была найдена Лейбницем и Ньютоном: если

$$F'(x) = f(x), \quad (1)$$

то

$$F(x) = \int_a^x f(z) dz + C. \quad (2)$$

Обратно, из (2) вытекает (1).

Систематическое исследование интегрирования элементарных функций было завершено Эйлером в его книге «Интегральное исчисление». Вскоре выяснилось, что далеко не все интегралы от элементарных функций выражаются через элементарные функции. Великий русский математик П. Л. Чебышев (1821—1894) полностью исследовал этот вопрос для некоторых классов иррациональных функций (так называемых дифференциальных биномов).

Современное понятие определенного интеграла как предела интегральных сумм принадлежит О. Коши.

### Вопросы и задачи на повторение

- 1) Дайте определение первообразной.
- 2) Является ли функция  $F(x) = \frac{1}{x}$  первообразной для функции  $f(x) = -\frac{1}{x^2}$  на промежутке:
  - а)  $(-5; -1)$ ; б)  $[2; 10]$ ; в)  $[-17; -3]$ ; г)  $(-7; 5)$ ?
- 3) Является ли функция  $F$  первообразной для функции  $f$  на заданном промежутке:
  - а)  $F(x) = x^2 - x$ ,  $f(x) = 2x - 1$  на  $\mathbb{R}$ ;
  - б)  $F(x) = x^3$ ,  $f(x) = 3x^2$  на  $\mathbb{R}$ ;
  - в)  $F(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$  на  $(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2})$ ;
  - г)  $F(x) = \cos x$ ,  $f(x) = -\sin x$  на  $\mathbb{R}$ ?
- 2) 1) Сформулируйте признак постоянства функции. Сформулируйте основное свойство первообразной.
- 2) Выпишите общий вид первообразных для функции:
  - а)  $f(x) = k$  ( $k$  — постоянная);
  - б)  $f(x) = kx + b$  ( $k$  и  $b$  — постоянные);
  - в)  $f(x) = x^a$  ( $a$  — целое число,  $a \neq -1$ );
  - г)  $f(x) = \sin x$ ; д)  $f(x) = \cos x$ ; е)  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ ; ж)  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ .
- 3) Найдите первообразную  $F$  для функции  $f$ , принимающую заданное значение в данной точке:

$$\text{а) } f(x) = 2x - 3, F(1) = 5; \quad \text{б) } f(x) = \sin x; F\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2.$$

3. 1) Сформулируйте три правила нахождения первообразных.
- 2) Найдите общий вид первообразных для функции:

$$\text{а) } f(x) = 1 - x - x^2; \quad \text{б) } f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\text{в) } f(x) = \sin 3x - \frac{2}{\cos^2 \frac{x}{5}}; \quad \text{г) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{7x-1}} - 10 \cos 2x.$$

- 3) Найдите для функции  $f$  первообразную, график которой проходит через точку  $A$ :

$$\text{а) } f(x) = -\sqrt{x+1}, A(0; -3); \quad \text{б) } f(x) = \sqrt{2} \cos x, A\left(\frac{\pi}{4}; -2\right).$$

4. 1) Какую фигуру называют криволинейной трапецией? Сформулируйте теорему о вычислении площади криволинейной трапеции.

- 2) Приведите примеры криволинейных трапеций.

- 3) Изобразите криволинейную трапецию и найдите ее площадь:

$$\text{а) } y = \sin x, y = 0, x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{\pi}{3}; \quad \text{б) } y = x^3, y = 0, x = 1, x = 2;$$

$$\text{в) } y = (x-1)^2, y = 0, x = 3; \quad \text{г) } y = 4x - x^3, y = 0, x \geq 0.$$

5. 1) Что называется интегралом?

- 2) Запишите формулу Ньютона — Лейбница. Вычислите интеграл:

$$\text{а) } \int_0^3 x^2 dx; \quad \text{б) } \int_{-\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{2}} \sin x dx; \quad \text{в) } \int_{-3}^3 \frac{dx}{(x+10)^2}; \quad \text{г) } \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

- 3) Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$\text{а) } y = x^2, y = 3x; \quad \text{б) } y = 6 - x - x^2, y = 0.$$

### Дополнительные упражнения к главе III

Найдите общий вид первообразных для функции (465—466).

465. а)  $7 - 4x$ ; б)  $x^2 + 4x - 7$ ;  
в)  $ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c$  и  $d$  — постоянные);  
г)  $2 \sin \frac{x}{5} + 3 \cos 6x$ .

466. а)  $\frac{1}{(3+2x)^4}$ ; б)  $\frac{5}{\sqrt{7-3x}}$ ;  
в)  $3x - \frac{2}{\cos^2 8x}$ ; г)  $\frac{4}{(x+3)^2} + \frac{7}{\sin^2 3x}$ .

467. Найдите для функции  $f$  первообразную, график которой проходит через заданную точку:

$$\text{а) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, M(9; 1); \quad \text{б) } f(x) = \frac{1}{x^2}, M(1; -3);$$

$$\text{в) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{3-x}}, M(-1; 5); \quad \text{г) } f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, M\left(\frac{\pi}{4}; -2\right).$$

468. График одной из первообразных для функции  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  проходит через точку (9; 15), а второй — через точку (1; 1). График какой из первообразных расположен выше?

Вычислите интеграл (469—471).

469. а)  $\int_{-\pi}^{2\pi} \sin \frac{x}{3} dx$ ; б)  $\int_0^{\pi} \sin \left( 3x - \frac{\pi}{6} \right) dx$ ;  
в)  $\int_0^{3\pi} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{9}}$ ; г)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{3}}$ .

470. а)  $\int_0^3 (1+2x)^9 dx$ ; б)  $\int_3^6 \left( 2 - \frac{x}{3} \right)^5 dx$ ;  
в)  $\int_{-2}^3 \frac{dx}{\sqrt{3x+7}}$ ; г)\*  $\int_1^2 \frac{x+1}{(2x-1)^3} dx$ .

471\*. а)  $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx$ ; б)  $\int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx, n \in \mathbb{N}$ ;  
в)  $\int_0^{2\pi} \sin 3x \cos 5x dx$ ; г)  $\int_0^{2\pi} \sin kx \sin mx dx, m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}$ .

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями (472—473).

472. а)  $y = -\frac{1}{\sqrt{x}}, y=0, x=1, x=4$ ; б)  $y = \frac{1}{x^2}, y=0, x=1, x=5$ ;  
в)  $y = \frac{4}{x^2}, y=7-3x$ ; г)  $y = 2-x-x^2, y=0$ .

473. а)  $y = x^2, y = 2x - x^2$ ; б)  $y = x^{2n}, y = 1$ ;  
в)  $y = x^2 - 2x + 2, y = 2 + 4x - x^2$ .

474\*. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

а)  $y = x^2, x=0, x=1, y=0$ ; в)  $y = x^3, x=0, x=1, y=0$ ;  
б)  $y = x^2, x=1, x=3, y=0$ ; г)  $y = x^4, x=0, x=1, y=0$ .

475. Докажите равенство:

а)  $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ ;  
б)  $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$  ( $k$  — постоянная);

в)  $\int_a^b f(kx+c) dx = \frac{1}{k} \int_{ka+c}^{kb+c} f(x) dx$ , где  $k$  и  $c$  — постоянные,  $k \neq 0$ .

476. Пользуясь формулой Ньютона — Лейбница, покажите, что интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования, т. е.

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz = \dots$$

477\*. Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

а)  $y = \sin x, x=0, x=\pi, y=0$ ; в)  $y = x^2, y=x$ ;  
б)  $y = \cos x, x=0, x=\frac{\pi}{2}, y=0$ ; г)  $x^2 + (y-b)^2 = a^2, b > a$ .

478\*. Докажите, что функция  $F$  есть первообразная для функции  $f$  на указанном промежутке:

а)  $F(x) = |x|, f(x) = 1, x \in (0, \infty)$ ;  
б)  $F(x) = |x|, f(x) = -1, x \in (-\infty; 0)$ ;  
в)  $F(x) = x \cdot \frac{|x|}{2}, f(x) = |x|, x \in \mathbb{R}$ .

479\*. Докажите:

а)  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ , если  $f(x) \geq 0$  на отрезке  $[a, b]$ ;  
б)  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ , если  $f(x) \leq g(x)$  на отрезке  $[a, b]$ ;  
в)  $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$  при любом  $a$ , если  $f(x+T) = f(x)$  для всех  $x \in \mathbb{R}$ .

480\*. Докажите:

а)  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ , если  $f(-x) = -f(x)$  для всех  $x$  из отрезка  $[-a, a]$ ;

б)  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ , если  $f(-x) = f(x)$  для всех  $x$  из отрезка  $[-a, a]$ ;

в)  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$  при  $a < b$ .



# ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

## § 10. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ СТЕПЕНИ

### 36. Корень $n$ -й степени и его свойства

1. С понятием квадратного корня из числа  $a$  вы уже знакомы: это такое число, квадрат которого равен  $a$ . Аналогично определяется корень  $n$ -й степени из числа  $a$ , где  $n$  — произвольное натуральное число, большее 1.

**О п р е д е л е н и е.** *Корнем  $n$ -й степени из числа  $a$  называется такое число,  $n$ -я степень которого равна  $a$ .*

**П р и м е р 1.** Корень третьей степени из числа 27 равен 3, так как  $3^3=27$ . Числа 2 и  $-2$  являются корнями шестой степени из числа 64, поскольку  $2^6=64$  и  $(-2)^6=64$ .

Согласно данному определению корень  $n$ -й степени из числа  $a$  — это произвольное решение уравнения  $x^n=a$ . Число корней этого уравнения зависит от  $n$  и  $a$ . Рассмотрим функцию  $f(x)=x^n$ . Как известно, на промежутке  $[0, \infty)$  эта функция при любом  $n$  возрастает и принимает все значения из промежутка  $[0; \infty)$ . По теореме о корне (п. 10) уравнение  $x^n=a$  для любого  $a \in [0; \infty)$  имеет неотрицательный корень и притом только один. Его называют *арифметическим корнем  $n$ -й степени из числа  $a$*  и обозначают  $\sqrt[n]{a}$ ; число  $n$  называют *показателем корня*, а само число  $a$  — *подкоренным выражением*.

**О п р е д е л е н и е.** *Арифметическим корнем  $n$ -й степени из числа  $a$  называют неотрицательное число,  $n$ -я степень которого равна  $a$ .*

**П р и м е р 2.** Найдем значения: а)  $\sqrt[3]{8}$ ; б)  $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}$ .

а)  $\sqrt[3]{8}=2$ , так как  $2^3=8$  и  $2>0$ ;

б)  $\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\frac{3}{2}$ , так как  $(\frac{3}{2})^4=\frac{81}{16}$  и  $\frac{3}{2}>0$ .

При четных  $n$  функция  $f(x)=x^n$  четна. Отсюда следует, что если  $a>0$ , то уравнение  $x^n=a$ , кроме корня  $x_1=\sqrt[n]{a}$ , имеет также корень  $x_2=-\sqrt[n]{a}$ . Если  $a=0$ , то корень один:  $x=0$ ; если  $a<0$ , то это уравнение корней не имеет, поскольку четная степень любого числа неотрицательна.

Итак, при четном  $n$  существуют два корня  $n$ -й степени из любого положительного числа  $a$ ; корень  $n$ -й степени из числа 0 равен нулю; корней четной степени из отрицательных чисел не существует.

**П р и м е р 3.** Уравнение  $x^4=81$  имеет два корня: это числа 3 и  $-3$ . Таким образом, существуют два корня четвертой степени из 81. При этом  $\sqrt[4]{81}$  — это неотрицательное число, т. е.  $\sqrt[4]{81}=3$ , а  $-3=-\sqrt[4]{81}$ .

**П р и м е р 4.** Положительным корнем уравнения  $x^4=3$  является число  $\sqrt[4]{3}$ . Это число (так же, впрочем, как и число  $-\sqrt[4]{3}$ ) иррационально. Его десятичные знаки можно вычислять последовательно:

$$1 < \sqrt[4]{3} < 2, \text{ так как } 1^4 < 3 < 2^4;$$

$$1,3 < \sqrt[4]{3} < 1,4, \text{ так как } 1,3^4 < 3 < 1,4^4, \text{ и т. д.}$$

(Убедитесь, что  $\sqrt[4]{3}=1,31607\dots$ )

При нечетных значениях  $n$  функция  $f(x)=x^n$  возрастает на всей числовой прямой; ее область значений — множество всех действительных чисел. Применяя теорему о корне, находим, что уравнение  $x^n=a$  имеет в точности один корень при любом  $a$  и, в частности, при  $a<0$ . Этот корень для любого значения  $a$  (в том числе и  $a$  отрицательного) обозначают  $\sqrt[n]{a}$ .

Итак, при нечетном  $n$  существует корень  $n$ -й степени из любого числа  $a$  и притом только один.

Для корней нечетной степени справедливо равенство

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}.$$

В самом деле,

$$(-\sqrt[n]{a})^n = (-1)^n \cdot (\sqrt[n]{a})^n = -1 \cdot a = -a,$$

т. е. число  $-\sqrt[n]{a}$  есть корень  $n$ -й степени из  $-a$ . Но такой корень при нечетном  $n$  единствен. Следовательно,  $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$ .

Равенство  $\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$  (при нечетном  $n$ ) позволяет выразить корень нечетной степени из отрицательного числа через арифметический корень той же степени. Например,  $\sqrt[5]{-71} = -\sqrt[5]{71}$ ,  $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$ .

**З а м е ч а н и е 1.** Для любого  $x$

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x|, & \text{если } n \text{ четно;} \\ x, & \text{если } n \text{ нечетно} \end{cases}$$

(докажите это свойство самостоятельно).

**З а м е ч а н и е 2.** Как вы уже знаете, корень второй степени из числа называют *квадратным корнем*, а показатель 2 корня при записи опускают (например, корень квадратный из 7 обозначают просто  $\sqrt{7}$ ). Корень третьей степени называют *кубическим корнем*.

**П р и м е р 5.** Решим уравнения: а)  $x^5=-11$ ; б)  $x^8=7$ .

а) По определению корня  $n$ -й степени число  $x$  — корень  $n$ -й степени из  $-11$ . Показатель корня — нечетное число 5, поэтому такой корень существует и притом только один: это  $\sqrt[5]{-11}$ . Ответ записывают так:  $x = -\sqrt[5]{11}$ .

б) По определению корня  $n$ -й степени решением уравнения  $x^8=7$  является число  $\sqrt[8]{7}$ . Так как 8 — число четное,  $-\sqrt[8]{7}$  также является решением данного уравнения. Итак,  $x_1=\sqrt[8]{7}$ ,  $x_2=-\sqrt[8]{7}$ . Ответ можно записать так:  $x=\pm\sqrt[8]{7}$ .

2. Сформулируем и докажем основные свойства арифметических корней  $n$ -й степени.

Для любых натуральных чисел  $n$  и  $k$ , больших 1, и любых неотрицательных чисел  $a$  и  $b$  выполнены равенства:

$$1^0. \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}.$$

$$2^0. \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0).$$

$$3^0. \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

$$4^0. \sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}.$$

$$5^0. \sqrt[n]{a^k} = (\sqrt[n]{a})^k.$$

Докажем свойство  $1^0$ . По определению  $\sqrt[n]{ab}$  — это такое неотрицательное число,  $n$ -я степень которого равна  $ab$ . Число  $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$  неотрицательно. Поэтому достаточно проверить справедливость равенства  $(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = ab$ , которое вытекает из свойств степени с натуральным показателем и определения корня  $n$ -й степени:

$$(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a})^n \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab.$$

Аналогично доказываются следующие три свойства:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \geq 0 \text{ и } \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b};$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} \geq 0 \text{ и } (\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^{nk} = ((\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}})^n)^k = (\sqrt[k]{a})^k = a;$$

$$\sqrt[n]{a^k} \geq 0 \text{ и } (\sqrt[n]{a^k})^{nk} = ((\sqrt[n]{a^k})^n)^k = (a^k)^k = a^k.$$

Докажем теперь свойство  $5^0$ . Заметим, что  $n$ -я степень числа  $(\sqrt[n]{a})^k$  равна  $a^k$ :

$$((\sqrt[n]{a})^k)^n = (\sqrt[n]{a})^{kn} = ((\sqrt[n]{a})^n)^k = a^k.$$

По определению арифметического корня  $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$  (так как  $(\sqrt[n]{a})^k \geq 0$ ).

Приведем примеры применения свойств  $1^0-5^0$  к решению задач на преобразование числовых выражений, содержащих корни.

Пример 6. Преобразуем выражения: а)  $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4}$ ; б)  $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}$ ; в)  $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}$ ; г)  $\sqrt[2]{\sqrt[4]{128}}$ ; д)  $\sqrt[3]{\sqrt[4]{128^3}}$ .

а) По свойству  $1^0$   $\sqrt[5]{8} \cdot \sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{32} = 2$ ;

$$\text{б) } \sqrt[4]{5\frac{1}{16}} = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{3}{2} \text{ (свойство } 2^0);$$

$$\text{в) } \sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[15]{7} \text{ (свойство } 3^0);$$

$$\text{г) по свойству } 4^0 \quad \sqrt[2]{\sqrt[4]{128}} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{2^7}} = \sqrt[3]{2};$$

$$\text{д) применяя свойство } 5^0, \text{ находим: } \sqrt[3]{\sqrt[4]{128^3}} = (\sqrt[4]{128})^3 = 2^3 = 8.$$

Докажем следующее свойство арифметического корня.

$6^0$ . Для любых чисел  $a$  и  $b$ , таких, что  $0 \leq a < b$ , выполняется неравенство

$$\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}.$$

Проведем доказательство методом от противного. Допустим, что  $\sqrt[n]{a} \geq \sqrt[n]{b}$ . Тогда по свойству степеней с натуральным показателем  $(\sqrt[n]{a})^n \geq (\sqrt[n]{b})^n$ , т. е.  $a \geq b$ . Это противоречит условию  $a < b$ .

Пример 7. Сравним числа  $\sqrt[3]{2}$  и  $\sqrt[5]{3}$ .

Представим  $\sqrt[3]{2}$  и  $\sqrt[5]{3}$  в виде корней с одним и тем же показателем:  $\sqrt[3]{2} = \sqrt[15]{2^5} = \sqrt[15]{32}$ , а  $\sqrt[5]{3} = \sqrt[15]{3^3} = \sqrt[15]{27}$  (при этом мы воспользовались свойством  $4^0$ ). Из неравенства  $32 > 27$  и свойства  $6^0$  следует, что  $\sqrt[15]{32} > \sqrt[15]{27}$ , и, значит,  $\sqrt[3]{2} > \sqrt[5]{3}$ .

Пример 8. Решим неравенство  $x^6 > 20$ .

Это неравенство равносильно неравенству  $x^6 - 20 > 0$ . Так как функция  $x^6 - 20$  непрерывна, можно воспользоваться методом интервалов. Уравнение  $x^6 - 20 = 0$  имеет два корня:  $\sqrt[6]{20}$  и  $-\sqrt[6]{20}$ . Эти числа разбивают прямую на три промежутка. Решение данного неравенства — объединение двух из них:  $(-\infty; -\sqrt[6]{20})$  и  $(\sqrt[6]{20}; \infty)$ .

### Упражнения

481. Проверьте справедливость равенства:

$$\text{а) } \sqrt[4]{16} = 2; \quad \text{б) } \sqrt[3]{-1} = -1; \quad \text{в) } \sqrt[4]{625} = 5; \quad \text{г) } \sqrt[12]{1} = 1,$$

$$\text{д) } \sqrt[12]{0} = 0; \quad \text{е) } \sqrt[12]{1024} = 2; \quad \text{ж) } \sqrt[3]{343} = 7;$$

$$\text{з) } \sqrt[5]{-243} = -3.$$

482. Верно ли равенство:

$$\text{а) } \sqrt{11-6\sqrt{2}} = 3-\sqrt{2}; \quad \text{б) } \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 1-\sqrt{3};$$

$$\text{в) } \sqrt[3]{19\sqrt{7}-50} = \sqrt{7}-2; \quad \text{г) } \sqrt[3]{7-5\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1?$$

483. Вычислите:

$$\text{а) } \sqrt[3]{27}; \quad \text{б) } \sqrt[5]{-32}; \quad \text{в) } \sqrt[4]{81}; \quad \text{г) } \sqrt[3]{64};$$

$$\text{д) } \sqrt[3]{-\frac{27}{8}}; \quad \text{е) } \sqrt[4]{\frac{81}{256}}; \quad \text{ж) } \sqrt[5]{\frac{1}{32}}; \quad \text{з) } \sqrt[4]{\frac{81}{625}}$$

484. Упростите:

- а)  $(-\sqrt[4]{11})^4$ ; б)  $(\sqrt[3]{7})^3$ ; в)  $(3\sqrt{-3})^5$ ;  
г)  $\sqrt[7]{-3^7}$ ; д)  $7\sqrt[8]{(-3)^8}$ ; е)  $\sqrt[6]{64^2}$ .

Найдите значение числового выражения (485—487).

485. а)  $\sqrt[4]{16 \cdot 625}$ ; б)  $\sqrt[3]{8 \cdot 343}$ ; в)  $\sqrt[5]{32 \cdot 243}$ ; г)  $\sqrt[5]{0,00001 \cdot 32}$ ;  
д)  $\sqrt[3]{24 \cdot 9}$ ; е)  $\sqrt[4]{48 \cdot 27}$ ; ж)  $\sqrt[5]{160 \cdot 625}$ ; з)  $\sqrt[3]{75 \cdot 45}$ .

486. а)  $\sqrt[5]{27 \cdot 5^9}$ ; б)  $\sqrt[7]{16 \cdot \sqrt{-8}}$ ; в)  $\sqrt[3]{9 \cdot \sqrt[6]{9}}$ ; г)  $\sqrt[3]{-25 \cdot \sqrt[6]{25}}$ ;  
д)  $\frac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$ ; е)  $\frac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{-9}}$ ; ж)  $\frac{\sqrt[4]{128}}{\sqrt[4]{8}}$ ; з)  $\frac{\sqrt[3]{-625}}{\sqrt[3]{-5}}$ .

487. а)  $\sqrt[4]{3\frac{3}{8} \cdot 1\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt[4]{80}}$ ; б)  $\sqrt[5]{1\frac{11}{16} \cdot 4,5} - \frac{\sqrt[5]{9}}{\sqrt[5]{288}}$ ;  
в)  $\sqrt[5]{-\frac{243}{1024}} \cdot \sqrt[3]{-4\frac{17}{27}}$ ; г)  $\sqrt[6]{\frac{64}{100\,000\,000}} \cdot \sqrt[4]{39\frac{1}{16}} : \sqrt[3]{-3\frac{19}{27}}$ .

488. Пользуясь таблицами или калькулятором, найдите приближенное значение корня:

- а)  $\sqrt{71}$ ; б)  $\sqrt{13,21}$ ; в)  $\sqrt[3]{11}$ ; г)  $\sqrt[3]{10,17}$ ;  
д)  $\sqrt[4]{2,8}$ ; е)  $\sqrt[8]{13}$ ; ж)  $\sqrt[6]{10}$ ; з)  $\sqrt[9]{13,7}$ .

489. Какое из чисел больше:

- а)  $\sqrt[5]{2}$  или  $\sqrt[5]{3}$ ; б)  $\sqrt[8]{0,2}$  или  $\sqrt[2]{0,3}$ ;  
в)  $\sqrt[7]{1,8}$  или 1; г)  $\sqrt[10]{0,8}$  или 1;  
д)  $\sqrt[12]{\frac{5}{11}}$  или  $\sqrt[12]{0,4}$ ; е)  $\sqrt[18]{\frac{3}{7}}$  или  $\sqrt[18]{0,43}$ ;  
ж)  $\sqrt[5]{-0,2}$  или 0; з)  $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2}$  или  $(\sqrt[6]{\frac{1}{2}})^2$ ?

490. Сравните числа:

- а)  $\sqrt[3]{7}$  и  $\sqrt[6]{40}$ ; б)  $\sqrt{5}$  и  $\sqrt[8]{500}$ ;  
в)  $\sqrt[3]{4}$  и  $\sqrt[10]{87}$ ; г)  $\sqrt{0,3}$  и  $\sqrt[5]{0,05}$ ;  
д)  $\sqrt[3]{-2}$  и  $\sqrt[3]{-4}$ ; е)  $\sqrt[5]{-5}$  и  $\sqrt[3]{-3}$ ;  
ж)  $\sqrt[3]{-5}$  и  $\sqrt[5]{-3}$ ; з)  $\sqrt[3]{-0,4}$  и  $\sqrt[5]{-0,3}$ .

491. Найдите первые два десятичных знака (после запятой) числа:

- а)  $\sqrt{7}$ ; б)  $\sqrt[3]{3}$ ; в)  $\sqrt[3]{5}$ ; г)  $\sqrt[4]{2}$ .

492. Вынесите множители за знак корня ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ):

- а)  $\sqrt{4a}$ ; б)  $\sqrt{18b}$ ; в)  $\sqrt[3]{64c}$ ; г)  $\sqrt[5]{a^6}$ ;  
д)  $\sqrt[4]{32b^5}$ ; е)  $\sqrt[6]{64a^8b^{11}}$ ; ж)  $\sqrt[5]{-128a^7}$ ; з)  $\sqrt[4]{6a^{12}b^2c^4}$ .

493. Внесите множитель под знак корня ( $a > 0$ ,  $b > 0$ ):

- а)  $2\sqrt{3}$ ; б)  $3\sqrt[3]{5}$ ; в)  $2\sqrt[5]{\frac{1}{16}}$ ; г)  $a\sqrt[4]{7}$ ;  
д)  $b\sqrt[6]{2}$ ; е)  $-b\sqrt[4]{3}$ ; ж)  $-ab\sqrt[3]{-4}$ ; з)  $ab^2\sqrt[8]{\frac{5b^3}{a^7}}$ .

494. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе (приведите к виду  $a\sqrt[n]{b}$ , где  $a$  — рациональное число, а  $b$  — натуральное):

- а)  $\frac{5}{\sqrt{3}}$ ; б)  $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$ ; в)  $\frac{7}{\sqrt[3]{49}}$ ; г)  $\frac{15}{\sqrt[3]{25}}$ ;  
д)  $\frac{3}{\sqrt[4]{12}}$ ; е)  $\frac{10}{\sqrt[5]{8}}$ ; ж)  $\frac{20}{\sqrt[4]{40}}$ ; з)  $\frac{6}{\sqrt[5]{27 \cdot 25}}$ .

495. Представьте в виде  $\sqrt[n]{b}$  число:

- а)  $\sqrt[3]{5\sqrt{7}}$ ; б)  $\sqrt[3]{a^4\sqrt{a}}$ ; в)  $\sqrt[5]{a^2\sqrt[4]{a}}$ ;  
г)  $\sqrt[18]{36^3}$ ; д)  $\sqrt[12]{25^3}$ ; е)  $\sqrt[8]{16^5b^4}$ .

Решите уравнение (496—498).

496. а)  $x^3=4$ ; б)  $x^3+4=0$ ; в)  $x^4=10$ ; г)  $x^6=5$ ;  
д)  $x^5=3$ ; е)  $x^{10}-15=0$ ; ж)  $x^6-64=0$ ; з)  $x^7+128=0$ .

497. а)  $16x^4-1=0$ ; б)  $0,01x^3+10=0$ ;  
в)  $0,02x^6-1,28=0$ ; г)  $12\frac{3}{4}-\frac{3}{4}x^2=0$ .

498. а)  $\sqrt{x}=5$ ; б)  $\sqrt[3]{x}=-0,7$ ; в)  $\sqrt[7]{x}=0$ ; г)  $\sqrt[4]{x}=2$ .

499. Решите уравнение с помощью подстановки  $t=\sqrt[4]{x}$  или  $t=\sqrt[6]{x}$ :

- а)  $\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x}+2=0$ ; б)  $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=2$ ;  
в)  $\sqrt[3]{x}-5\sqrt[6]{x}+6=0$ ; г)  $\sqrt[3]{x}-5\sqrt[6]{x}=6$ .

500. Решите неравенство:

- а)  $x^3 < 5$ ; б)  $x^4 < 3$ ; в)  $x^7 \geq 11$ ; г)  $x^{10} > 2$ ;  
д)  $\sqrt[3]{x} > 2$ ; е)  $\sqrt[3]{x} < -7$ ; ж)  $\sqrt[4]{x} \leq 3$ ; з)  $\sqrt[6]{x} \geq -2$ .

501. При каких значениях  $a$  верно равенство:

- а)  $\sqrt{a^2} = -a$ ; б)  $\sqrt[4]{a^4} = a$ ; в)  $\sqrt[3]{a^3} = a$ ;  
г)  $\sqrt[4]{a^4} = |a|$ ; д)  $\sqrt[5]{a^5} = |a|$ ; е)  $\sqrt[3]{a^3} = -a$ ?

502. Упростите выражение:

- а)  $\sqrt{a^2}$ , где  $a > 0$ ; б)  $\sqrt[4]{a^2}$ , где  $a < 0$ ;  
в)  $\sqrt[6]{a^6}$ , где  $a \geq 0$ ; г)  $\sqrt[6]{a^6}$ , где  $a \leq 0$ ;  
д)  $\sqrt[5]{a^5}$ ; е)  $\sqrt[4]{a^4}$ ;  
ж)  $\sqrt[5]{a^5} - \sqrt[4]{a^4}$ ,  $a > 0$ ; з)  $\sqrt[3]{a^3} - \sqrt{a^2}$ ,  $a \leq 0$ .

503. Найдите значение выражения:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \sqrt{3-\sqrt{5}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{5}}; & \text{б) } \sqrt[4]{9-\sqrt{65}} \cdot \sqrt[4]{9+\sqrt{65}}; \\ \text{в) } \sqrt[3]{10+\sqrt{73}} \cdot \sqrt[3]{10-\sqrt{73}}; & \text{г) } \frac{\sqrt[3]{(4+\sqrt{17})^2}}{\sqrt[3]{4-\sqrt{17}}} + \sqrt{17}. \end{array}$$

504. Представьте в виде дроби, знаменатель которой не содержит знака корня:

$$\begin{array}{llll} \text{а) } \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}; & \text{б) } \frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}; & \text{в) } \frac{a-\sqrt{2}}{a+\sqrt{2}}; & \text{г) } \frac{b-\sqrt{7}}{2b-\sqrt{5}}; \\ \text{д) } \frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{3}}; & \text{е) } \frac{2}{\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{7}}; & \text{ж) } \frac{2}{a-\sqrt[3]{b}}; & \text{з) } \frac{3a}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}. \end{array}$$

### 37. Иррациональные уравнения

Уравнения, в которых переменная содержится под знаком корня, называют *иррациональными*. Таково, например, уравнение

$$\sqrt[3]{x}-2=0.$$

Приведем примеры решения иррациональных уравнений.

Пример 1. Решим уравнение

$$\sqrt{x^2-5}=2. \quad (1)$$

Возведем обе части этого уравнения в квадрат:

$$x^2-5=4.$$

Отсюда следует, что

$$x^2=9, \text{ т. е. } x=3 \text{ и } x=-3.$$

Проверим, что полученные числа являются решением уравнения (1). Действительно, при подстановке их в это уравнение получаются верные равенства

$$\sqrt{3^2-5}=2 \text{ и } \sqrt{(-3)^2-5}=2.$$

Следовательно,  $x=3$  и  $x=-3$  — решения уравнения (1).

Пример 2. Решим уравнение

$$\sqrt{x}=x-2. \quad (2)$$

Возведем в квадрат обе части уравнения (2):

$$x=x^2-4x+4.$$

После упрощений получаем квадратное уравнение

$$x^2-5x+4=0,$$

корни которого суть  $x=1$  и  $x=4$ . Проверим, являются ли

полученные числа решениями заданного уравнения (2). При подстановке числа 4 в уравнение (2) получаем верное равенство  $\sqrt{4}=4-2$ . При подстановке же числа 1 получаем в правой части  $-1$ , а в левой части — число 1. Следовательно, число 1 не является решением уравнения (2) — говорят, что это *посторонний корень* (полученный в результате принятого способа решения этого уравнения). Решением уравнения (2) является только число 4.

Пример 3. Решим уравнение

$$\sqrt{x^2-2}=\sqrt{x}. \quad (3)$$

Возведем обе части этого уравнения в квадрат:

$$x^2-2=x.$$

Получаем квадратное уравнение

$$x^2-x-2=0,$$

корни которого суть  $x=-1$  и  $x=2$ . Сразу ясно, что число  $-1$  не является корнем уравнения (3), так как обе части этого уравнения не определены при  $x=-1$ . При подстановке в уравнение (3) числа 2 получаем верное равенство  $\sqrt{2^2-2}=\sqrt{2}$ . Следовательно, решением уравнения (3) является только число 2. Число  $-1$  есть посторонний корень.

Пример 4. Решим уравнение

$$\sqrt{x-6}=\sqrt{4-x}. \quad (4)$$

Возводя в квадрат обе части этого уравнения, получаем:  $x-6=4-x$ ,  $2x=10$  и  $x=5$ . Подстановкой убеждаемся, что число 5 не является корнем уравнения (4). Поэтому уравнение не имеет решений.

Мы видим, что при решении иррациональных уравнений полученные решения требуют проверки, потому, например, что неверное равенство при возведении в квадрат может дать верное равенство. В самом деле, неверное равенство  $1=-1$  при возведении в квадрат дает верное равенство  $1^2=(-1)^2$ .

Иногда гораздо удобнее решать иррациональные уравнения, используя равносильные переходы. Например, по определению корнем  $2n$ -й степени из  $f$  называется такое неотрицательное число  $g$ , что  $g^{2n}=f$ . Другими словами, уравнение  $\sqrt[2n]{f}=g$  равносильно системе

$$\begin{cases} g^{2n}=f, \\ g \geq 0, \end{cases} \quad (5) \quad (6)$$

т. е. чтобы решить уравнение  $\sqrt[2n]{f}=g$ , надо решить уравнение (5) и проверить для его корней выполнение условия (6).



Пример 5. Решим уравнение

$$\sqrt{x-2}=x-8. \quad (7)$$

По определению квадратного корня уравнение

$\sqrt{x-2}=x-8$  равносильно системе

$$\begin{cases} x-2=(x-8)^2, \\ x-8 \geq 0. \end{cases} \quad (8)$$

(9)

Решаем уравнение (8), равносильное уравнению

$$x^2-17x+66=0.$$

Его корни суть 11 и 6, но условие (9) выполняется только для  $x=11$ . Поэтому уравнение (7) имеет один корень  $x=11$ .

Пример 6. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4, \\ x+y=28. \end{cases}$$

Положив  $u=\sqrt[3]{x}$  и  $v=\sqrt[3]{y}$ , приходим к системе

$$\begin{cases} u+v=4, \\ u^3+v^3=28. \end{cases} \quad (10)$$

Разложим левую часть второго уравнения на множители:

$$u^3+v^3=(u+v)(u^2-uv+v^2).$$

Из первого уравнения следует, что  $u+v=4$ . Поэтому система (10) равносильна системе

$$\begin{cases} u+v=4, \\ u^2-uv+v^2=7. \end{cases}$$

Подставляя во второе уравнение значение  $v$ , найденное из первого ( $v=4-u$ ), приходим к уравнению

$$u^2-u(4-u)+(4-u)^2=7, \text{ т. е. } u^2-4u+3=0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет два корня:  $u_1=1$  и  $u_2=3$ . Соответствующие значения  $v$  таковы:  $v_1=3$  и  $v_2=1$ . Переходя к переменным  $x$  и  $y$ , получаем:

$$\sqrt[3]{x}=u_1, \text{ т. е. } x_1=u_1^3=1; y_1=v_1^3=27; x_2=u_2^3=27; y_2=v_2^3=1.$$

Ответ: (1; 27); (27; 1).

### Упражнения

Решите уравнение (505—507).

505. а)  $\sqrt{13-x^2}=3$ ; б)  $\sqrt{x^2-4x-1}=2$ ;  
в)  $x-\sqrt{x+1}=5$ ; г)  $4+\sqrt{2x+3}=x-2$ .

506. а)  $\sqrt{x+1}\sqrt{x+6}=6$ ; б)  $\sqrt{x}\sqrt{2-x}=2x$ ;

в)  $\frac{x+6}{\sqrt{x-2}}=\sqrt{3x+2}$ ; г)  $\frac{x+1}{\sqrt{2x-1}}=\sqrt{x-1}$ .

507. а)  $\sqrt{x^2+2x+10}=2x-1$ ; б)  $\sqrt{x^2+x+1}=x-4$ ;  
в)  $\sqrt{2x^2+5x+1}=x-1$ ; г)  $\sqrt{17+2x-3x^2}=x+1$ .

Решите систему уравнений (508—509).

508. а)  $\begin{cases} x+y=1, \\ x^3+y^3=7; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} x^2+xy=-2, \\ y^2+xy=3; \end{cases}$

в)  $\begin{cases} x+y+\frac{x}{y}=9, \\ \frac{(x+y)x}{y}=20; \end{cases}$  г)  $\begin{cases} x^4+y^4=82, \\ xy=3. \end{cases}$

509. а)  $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=\frac{4}{3}, \\ xy=9; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} \sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt{x}\sqrt[3]{y}=12, \\ xy=64; \end{cases}$

в)  $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6, \\ \sqrt[5]{(x+y)^3(x-y)^2}=8, \\ x>y; \end{cases}$  г)  $\begin{cases} \frac{y}{x}-\frac{2x}{y}=1, \\ x^2+3y^2=16. \end{cases}$

### 38. Степень с рациональным показателем

Вам уже знакомо понятие степени числа с целым показателем. Напомним свойства таких степеней.

Для любых чисел  $a$ ,  $b$  и любых целых чисел  $m$  и  $n$  справедливы равенства:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0);$$

$$(a^m)^n = a^{mn};$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0);$$

$$a^1 = a; \quad a^0 = 1 \quad (a \neq 0).$$

Отметим также следующее свойство:

если  $m > n$ , то  $a^m > a^n$  при  $a > 1$  и  $a^m < a^n$  при  $0 < a < 1$ .

В этом пункте мы обобщим понятие степени числа, придав смысл выражениям типа  $2^{0.3}$ ,  $8^{\frac{5}{7}}$ ,  $4^{-\frac{1}{2}}$  и т. д. Естественно при этом дать определение так, чтобы степени с рациональными показателями обладали теми же свойствами (или хотя бы их частью), что и степени с целым показателем. Тогда, в частности,  $n$ -я

степень числа  $a^{\frac{m}{n}}$  должна быть равна  $a^m$ . Действительно, если свойство

$$(a^p)^q = a^{pq}$$

выполняется, то

$$(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n} \cdot n} = a^m.$$

Последнее равенство означает (по определению корня  $n$ -й степени), что число  $a^{\frac{m}{n}}$  есть корень  $n$ -й степени из числа  $a^m$ . Таким образом, приходим к следующему определению.

**О п р е д е л е н и е.** *Степенью числа  $a > 0$  с рациональным показателем  $r = \frac{m}{n}$ , где  $m$  — целое число, а  $n$  — натуральное ( $n > 1$ ), называется число  $\sqrt[n]{a^m}$ .*

Итак, по определению

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \quad (1)$$

Степень числа 0 определена только для положительных показателей; по определению  $0^r = 0$  для любого  $r > 0$ .

**П р и м е р 1.** По определению степени с дробным показателем

$$7^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{7}; \quad 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5} = \sqrt[6]{32}; \quad a^{-\frac{7}{15}} = \sqrt[15]{a^{-7}}.$$

**П р и м е р 2.** Найдем значения числовых выражений  $8^{\frac{1}{3}}$ ;  $81^{\frac{3}{4}}$  и  $128^{-\frac{2}{7}}$ .

Воспользовавшись определением степени с дробными показателем и свойствами корней, имеем:

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2; \quad 81^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{81^3} = (\sqrt[4]{81})^3 = 3^3 = 27;$$

$$128^{-\frac{2}{7}} = \sqrt[7]{128^{-2}} = (\sqrt[7]{128})^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}.$$

**З а м е ч а н и е 1.** Из определения степени с дробным показателем сразу следует, что для любого положительного  $a$  и любого рационального  $r$  число  $a^r$  положительно.

**З а м е ч а н и е 2.** Любое рациональное число допускает различные записи его в виде дроби, поскольку  $\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}$  для любого натурального  $k$ . Значение  $a^r$  также не зависит от формы записи рационального числа  $r$ . В самом деле, из свойств корней следует, что

$$a^{\frac{mk}{nk}} = \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$$

При  $a < 0$  рациональная степень числа  $a$  не определяется, и это не случайно. Если бы мы сочли верной формулу (1) и для  $a < 0$ , то, например, значение  $(-8)^{\frac{1}{3}}$  равнялось бы  $\sqrt[3]{-8}$ , т. е.  $-2$ . Но, с другой стороны,  $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ , и поэтому должно выполняться равенство

$$-2 = (-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{(-8)^2} = \sqrt[6]{8^2} = 2.$$

Покажем теперь, что при сформулированном выше определении степени с рациональным показателем сохраняются основные свойства степеней, верные для целых показателей (разница заключается в том, что приводимые далее свойства верны только для положительных оснований).

Для любых рациональных чисел  $r$  и  $s$  и любых положительных  $a$  и  $b$  справедливы равенства:

$$1^0. \quad a^r \cdot a^s = a^{r+s}.$$

$$2^0. \quad a^r : a^s = a^{r-s}.$$

$$3^0. \quad (a^r)^s = a^{rs}.$$

$$4^0. \quad (ab)^r = a^r \cdot b^r.$$

$$5^0. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}.$$

Для доказательства этих свойств надо воспользоваться определением степени с рациональным показателем и доказанными в п. 36 свойствами корней. Докажем, например, свойства  $1^0$ ,  $3^0$  и  $4^0$ . Пусть  $r = \frac{m}{n}$  и  $s = \frac{p}{q}$ , где  $n$  и  $q$  — натуральные числа, а  $m$  и  $p$  — целые. Тогда

$$a^r \cdot a^s = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \cdot \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{r+s};$$

$$(a^r)^s = \sqrt[q]{(a^r)^p} = \sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{rs};$$

$$(ab)^r = \sqrt[n]{(ab)^m} = \sqrt[n]{a^m b^m} = \sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{b^m} = a^r \cdot b^r.$$

Свойства  $2^0$  и  $5^0$  доказываются аналогично (проведите соответствующие рассуждения самостоятельно).

**П р и м е р 3.** Найдем значение выражения  $(\sqrt[4]{40} \cdot 2^{\frac{1}{4}}) : 5^{-\frac{3}{4}}$ .  
Имеем:

$$\sqrt[4]{40} \cdot 2^{\frac{1}{4}} : 5^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{2^3 \cdot 5} \cdot 2^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{3}{4}} = 2^{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 2^1 \cdot 5^1 = 10.$$

Пример 4. Преобразуем выражения:

$$\text{а) } \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}}; \quad \text{б) } \frac{a^{1,2} - b^{2,1}}{a^{0,8} + a^{0,4}b^{0,7} + b^{1,4}}.$$

Имеем:

$$\text{а) } \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = \frac{(a^{\frac{1}{4}})^2 - (b^{\frac{1}{4}})^2}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = \frac{(a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}})(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}})}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}};$$

$$\text{б) } \frac{a^{1,2} - b^{2,1}}{a^{0,8} + a^{0,4}b^{0,7} + b^{1,4}} = \frac{(a^{0,4})^3 - (b^{0,7})^3}{(a^{0,4})^2 + a^{0,4}b^{0,7} + (b^{0,7})^2} = a^{0,4} - b^{0,7}.$$

Отметим следующие два свойства степеней с рациональными показателями.

6°. Пусть  $r$  — рациональное число и  $0 < a < b$ . Тогда

$$a^r < b^r \text{ при } r > 0, \\ a^r > b^r \text{ при } r < 0.$$

7°. Для любых рациональных чисел  $r$  и  $s$  из неравенства  $r > s$  следует, что

$$a^r > a^s \text{ при } a > 1, \\ a^r < a^s \text{ при } 0 < a < 1.$$

Докажем свойство 6°. Если  $r > 0$ , то  $r$  можно записать в виде  $r = \frac{m}{n}$ , где  $m$  и  $n$  — натуральные числа. Из неравенства  $0 < a < b$  и свойств степени с целым показателем следует, что  $a^m < b^m$ . По свойству корней (свойство 6°, п. 36) из этого неравенства получаем

$$\sqrt[n]{a^m} < \sqrt[n]{b^m}, \text{ т. е. } a^r < b^r.$$

В случае  $r < 0$  проводится аналогичное рассуждение.

Для доказательства свойства 7° приведем сначала рациональные числа  $r$  и  $s$  к общему знаменателю:  $r = \frac{m}{n}$  и  $s = \frac{p}{n}$ , где  $n$  — натуральное число, а  $m$  и  $p$  — целые. Из неравенства  $r > s$  следует, что  $m > p$ . Если  $a > 1$ , то  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} > 1$ , и по свойству степени с целым показателем

$$(a^{\frac{1}{n}})^m > (a^{\frac{1}{n}})^p.$$

Остается заметить, что  $(a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}} = a^r$  и  $(a^{\frac{1}{n}})^p = a^{\frac{p}{n}} = a^s$ .

Случай  $0 < a < 1$  разбирается аналогично.

Пример 5. Сравним числа  $\sqrt[5]{8}$  и  $2^{\frac{2}{3}}$ .

Запишем  $\sqrt[5]{8}$  в виде степени с рациональным показателем:  $\sqrt[5]{8} = 2^{\frac{3}{5}}$ . По свойству 7° получаем  $2^{\frac{2}{3}} > 2^{\frac{3}{5}}$ , так как  $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$ .

Пример 6. Сравним числа  $2^{300}$  и  $3^{200}$ .

Запишем эти числа в виде степеней с одинаковым показателем:

$$2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}; \quad 3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}.$$

Так как  $8 < 9$ , по свойству 6° получаем:

$$8^{100} < 9^{100}, \text{ т. е. } 2^{300} < 3^{200}.$$

### Упражнения

Представьте выражение в виде степени с рациональным показателем (510—511).

510. а)  $\sqrt{11}$ ; б)  $\sqrt[3]{5^5}$ ; в)  $\sqrt[4]{3^{17}}$ ; г)  $\sqrt[3]{a^{21}}$ ;  
д)  $\sqrt[3]{5^2}$ ; е)  $\sqrt[3]{7^{-11}}$ ; ж)  $\sqrt[5]{2^{-15}}$ ; з)  $\sqrt[13]{b^{-7}}$ .
511. а)  $2\sqrt{8a}$ ; б)  $3\sqrt[5]{3^4c^2}$ ; в)  $\frac{1}{8}\sqrt[7]{2^5ax^3}$ ; г)  $\frac{1}{9}\sqrt[11]{(3^5):(b^5c)}$ ;  
д)  $\sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt{a^3}}$ ; е)  $\sqrt[7]{a^3 \cdot \sqrt[4]{a}}$ ; ж)  $\sqrt[3]{a^2 \sqrt[4]{a}}$ ; з)  $\sqrt[5]{a^3 \sqrt[7]{a^4}}$ .

512. Представьте выражение в виде корня из числа:

- а)  $7^{\frac{4}{7}}$ ; б)  $4^{1,25}$ ; в)  $3 \cdot 2^{-\frac{3}{5}}$ ; г)  $2 \cdot 8^{\frac{2}{11}}$ ;  
д)  $a^{\frac{3}{8}}$ ; е)  $2b^{-\frac{2}{3}}$ ; ж)  $b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{7}}$ ; з)  $a^{\frac{3}{4}}:b^{\frac{2}{5}}$ .

Найдите значение числового выражения (513—514).

513. а)  $16^{\frac{5}{4}}$ ; б)  $243^{0,4}$ ; в)  $8^{\frac{1}{3}} \cdot 81^{0,25}$ ;  
г)  $8^{\frac{1}{2}}:(8^{\frac{1}{6}} \cdot 9^{\frac{3}{2}})$ ; д)  $\left(\frac{27^3}{125^6}\right)^{\frac{2}{9}}$ ; е)  $\left(\frac{64^4}{3^8}\right)^{-\frac{1}{8}}$ ;  
ж)  $(100\,000)^{0,3} \cdot (0,000\,001)^{\frac{1}{3}}$ ; з)  $\left(1\frac{11}{25}\right)^{-0,5} \cdot \left(4\frac{17}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$ .

514. а)  $\sqrt[3]{36} \cdot 2^{\frac{4}{3}}:3^{\frac{1}{6}}$ ; б)  $(\sqrt{5^3})^3 \sqrt[3]{25^{0,75}}:(5^8 \sqrt{5^5})$ ;  
в)  $\sqrt[3]{100} \cdot (\sqrt{2})^{\frac{8}{3}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{7}{6}}$ ; г)  $\sqrt[7]{\frac{1}{9}}:243^{\frac{1}{7}} \cdot (7\sqrt{7})^{\frac{2}{3}}$ .

515. Какое из чисел больше:

- а)  $\sqrt[7]{3^3}$  или  $3^{\frac{19}{43}}$ ; б)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{3}}$  или  $\sqrt[7]{\frac{1}{32}}$ ;  
 в)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{5}{7}}$  или  $\sqrt{2} \cdot 2^{\frac{3}{14}}$ ; г)  $(\sqrt{3})^{-\frac{5}{6}}$  или  $\sqrt[3]{3^{-1} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{3}}}$ ;  
 д)  $3^{600}$  или  $5^{400}$ ; е)  $4^{-\frac{1}{4}}$  или  $5^{-\frac{1}{5}}$ ?

516. Какое из выражений имеет смысл:

- а)  $5^{\frac{2}{3}}$ ; б)  $5^{-\frac{2}{3}}$ ; в)  $0^{\frac{4}{7}}$ ;  
 г)  $0^{-\frac{4}{7}}$ ; д)  $(-3)^4$ ; е)  $(-3)^{-\frac{1}{7}}$ ?

517. Найдите область определения выражения:

- а)  $x^{\frac{1}{3}}$ ; б)  $x^{-\frac{3}{4}}$ ; в)  $(x-1)^{\frac{2}{5}}$ ; г)  $(x+1)^{-\frac{1}{7}}$ .

518. При каких значениях переменной  $a$  верно равенство:

- а)  $(a^{\frac{1}{3}})^3 = a$ ; б)  $(a^3)^{\frac{1}{3}} = a$ ; в)  $(a^{\frac{1}{3}})^3 = -a$ ;  
 г)  $(a^4)^{\frac{1}{4}} = -a$ ; д)  $(a^{0,7})^{\frac{10}{7}} = a$ ; е)  $(a^8)^{-\frac{1}{8}} = \frac{1}{|a|}$ ?

Упростите выражение и вычислите его значение (519—520).

519. а)  $27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - 25^{0,5}$ ; б)  $81^{0,75} + \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$ ;  
 в)  $(2,5^{1,5} + 0,4^{1,5}) : (\sqrt{2,5} + \sqrt{0,4})$ ; г)  $3^{-\frac{1}{3}} \sqrt[4]{1,5} : (0,25^4 \sqrt{216^3 \sqrt{9}})$ .

520. а)  $\frac{\sqrt[4]{7^3 \sqrt{54}} + 15 \sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{4^4 \sqrt{32}} + \sqrt[3]{9^4 \sqrt{162}}}$ ; б)  $\sqrt[4]{32^3 \sqrt{4}} + \sqrt[4]{64^3 \sqrt{\frac{1}{2}}} - 3 \sqrt[3]{2^4 \sqrt{2}}$ ;  
 в)  $\frac{5^3 \sqrt[4]{4^3 \sqrt{192}} + 7^3 \sqrt[3]{18^3 \sqrt{81}}}{\sqrt[3]{12^3 \sqrt{24}} + 6 \sqrt[3]{375}}$ ;  
 г)  $5 \sqrt{48^3 \sqrt{\frac{2}{3}}} + \sqrt{32^3 \sqrt{\frac{9}{4}}} - 11 \sqrt[3]{12 \sqrt{8}}$ .

Упростите выражение (521—522).

521. а)  $\frac{a-b}{a^{0,5} + b^{0,5}}$ ; б)  $\frac{x^{\frac{1}{2}} - 4}{x - 16}$ ;  
 в)  $\frac{a+b}{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}}$ ; г)  $\frac{z-8}{z^{\frac{2}{3}} + 2z^{\frac{1}{3}} + 4}$ .

522. а)  $\frac{(\sqrt{x}+1)(x^2-\sqrt{x})^{-1}}{(x+\sqrt{x}+x\sqrt{x})^{-1}}$ ; б)  $(x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}})^2 - (4xy)^{\frac{1}{2}}$ ;  
 в)  $\frac{(\sqrt[5]{x^4})^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt[5]{x^4})^3} : \frac{(\sqrt[4]{x\sqrt{y}})^6}{(\sqrt{x^3 \sqrt{x^2 y}})^4}$ ; г)  $\frac{a-1}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{a}}{\sqrt{a} + 1} \cdot a^{\frac{1}{4}} + 1$ .

523. Разложите на множители:

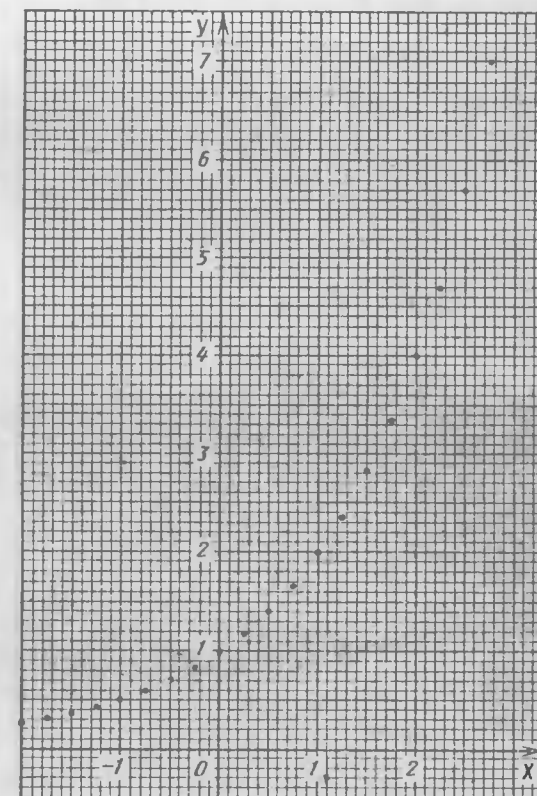
- а)  $3 + 3^{\frac{1}{2}}$ ; б)  $4 - 4^{\frac{1}{3}}$ ; в)  $a - a^{\frac{1}{2}}$ ; г)  $(ax)^{\frac{1}{3}} + (ay)^{\frac{1}{3}}$ ;  
 д)  $(3x)^{\frac{1}{2}} - (5x)^{\frac{1}{2}}$ ; е)  $c^{\frac{1}{2}} + c^{\frac{1}{4}}$ ; ж)  $a + a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}} a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}$ ;  
 з)  $x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} + 1$ .

## § 11. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

### 39. Показательная функция

Зафиксируем положительное число  $a$  и поставим в соответствие каждому числу  $\frac{m}{n}$  число  $a^{\frac{m}{n}}$ . Тем самым получим числовую функцию  $f(x) = a^x$ , определенную на множестве  $\mathbb{Q}$  рациональных чисел и обладающую перечисленными в п. 38 свойствами. При  $a=1$  функция  $a^x$  постоянна, так как  $1^x = 1$  для любого рационального  $x$ .

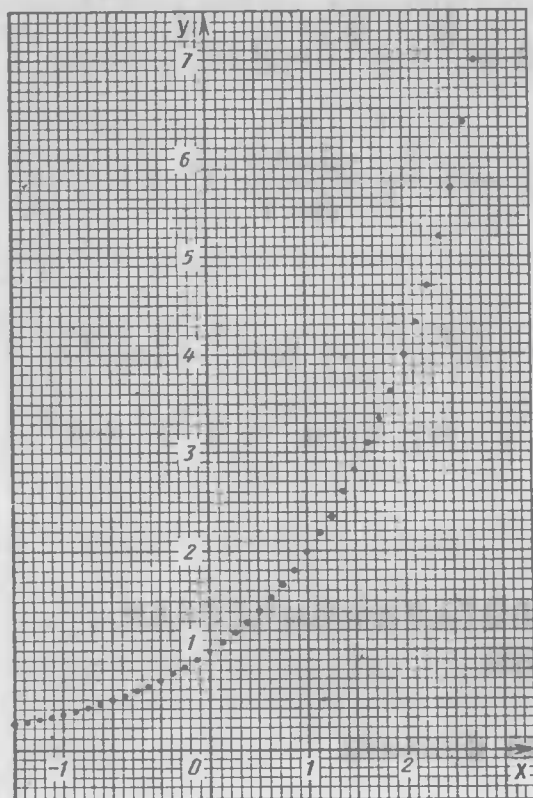
Нанесем несколько точек графика функции  $2^x$ , предварительно вычислив с помощью калькулятора значения  $2^x$  на отрезке  $[-2; 3]$  с шагом  $\frac{1}{4}$  (рис. 128, а), а затем с шагом  $\frac{1}{8}$  (рис. 128, б). Продолжая мысленно такие же построения с шагом  $\frac{1}{16}$ ,  $\frac{1}{32}$  и т. д., мы видим, что получающиеся точки можно соединить плавной кривой, которую естественно считать графиком некоторой



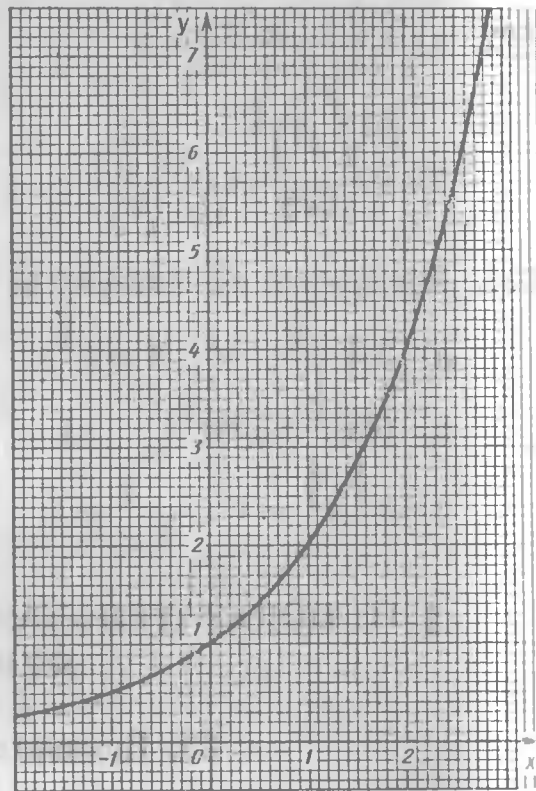
а)

Рис. 128.



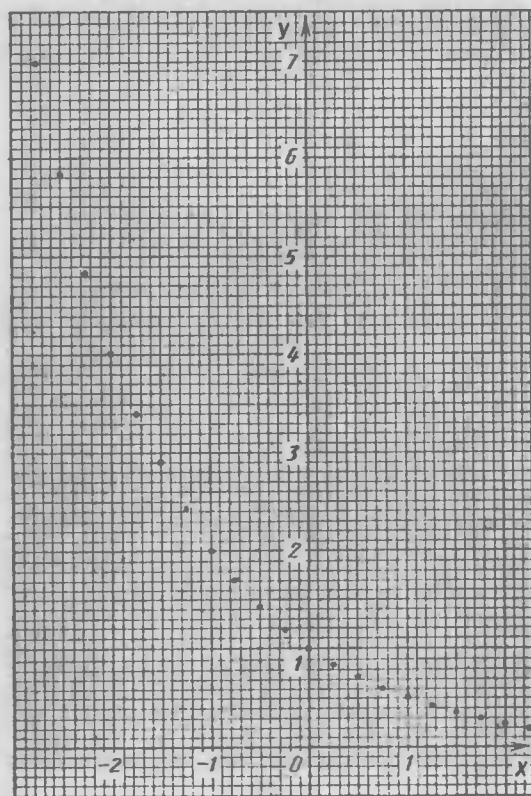


б)

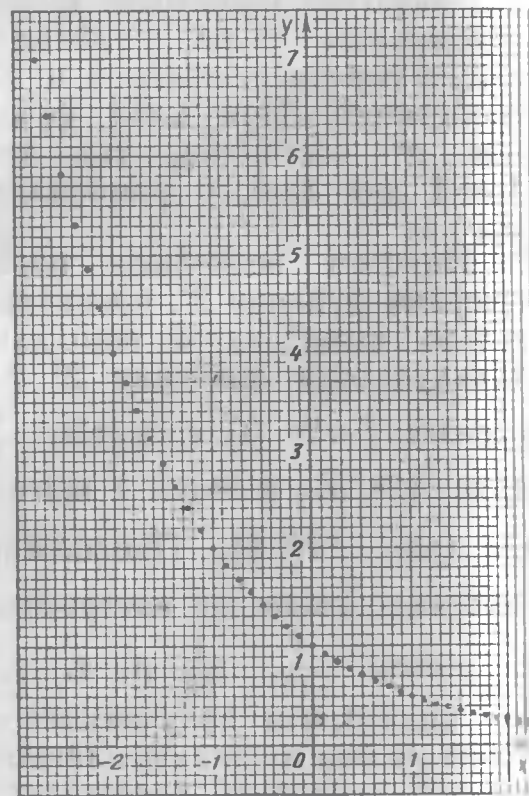


в)

Рис. 128.



а)



б)

Рис. 129.

функции, определенной и возрастающей уже на всей числовой прямой и принимающей значения  $2^{\frac{m}{n}}$  в рациональных точках  $x = \frac{m}{n}$  (рис. 128, в). Построив достаточно большое число точек графика функции  $\left(\frac{1}{2}\right)^x$  (рис. 129, а, б), мы увидим, что аналогичными свойствами обладает и эта функция (отличие состоит в том, что функция  $\left(\frac{1}{2}\right)^x$  убывает на  $R$ , рис. 129, в).

Эти наблюдения подсказывают, что справедливо следующее предложение.

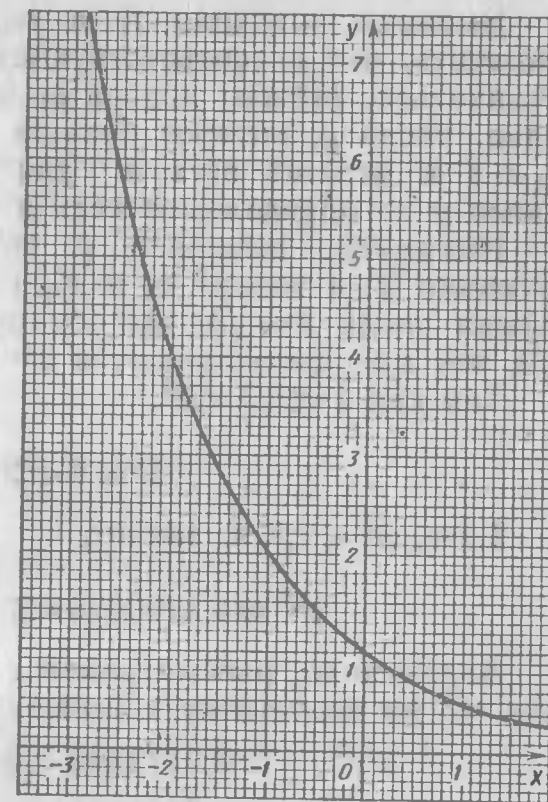
Для любого положительного числа  $a$  существует, и притом только одна, функция, определенная на всей числовой прямой, возрастающая при  $a > 1$  (убывающая при  $0 < a < 1$ ) и

принимающая значения  $a^{\frac{m}{n}}$  при рациональных значениях  $x = \frac{m}{n}$  аргумента. Эту функцию называют *показательной функцией с основанием  $a$*  (обозначают  $a^x$ ). Графики функции  $a^x$  для некоторых значений  $a$  изображены на рисунке 130.

▼ Наметим схему доказательства сформулированного предложения в случае  $a > 1$ .

Функция  $a^x$  должна быть возрастающей. Поэтому при любых рациональных  $r_1$  и  $r_2$ , таких, что  $r_1 < x < r_2$ , значение  $a^x$  должно удовлетворять неравенствам

$$a^{r_1} < a^x < a^{r_2}.$$



б)

Рис. 129.

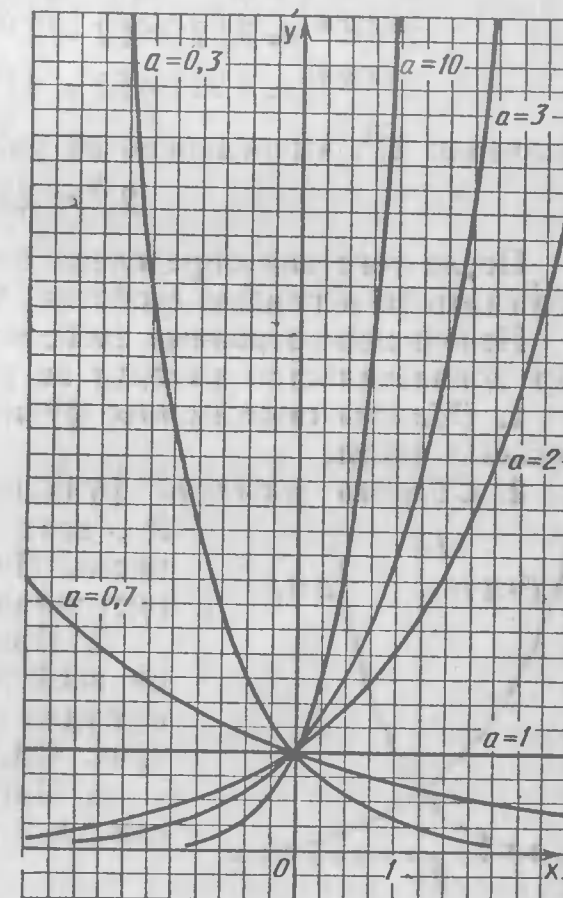


Рис. 130.

Выбирая значения  $r_1$  и  $r_2$ , приближающиеся к  $x$ , можно заметить, что и соответствующие значения  $a^{r_1}$  и  $a^{r_2}$  будут мало отличаться. Можно доказать, что существует, и притом только одно, число  $y$ , которое больше всех  $a^{r_1}$  для всех рациональных  $r_1 < x$  и меньше всех  $a^{r_2}$  для всех рациональных  $r_2 > x$ . Это число  $y$  по определению есть  $a^x$ .

Например, вычислив с помощью калькулятора значения функции  $2^x$  в точках  $x_n$  и  $x'_n$ , где  $x_n$  и  $x'_n$  — десятичные приближения числа  $x = \sqrt{3}$ , мы обнаружим, что, чем ближе  $x_n$  и  $x'_n$  к  $\sqrt{3}$ , тем меньше отличаются  $2^{x_n}$  и  $2^{x'_n}$ .

Так как  $1 < \sqrt{3} < 2^1$ ,

$$2^1 = 2 < 2^{\sqrt{3}} < 2^2 = 4.$$

$1,7 < \sqrt{3} < 1,8$  и, значит,

$$2^{1,7} \approx 3,2490096 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,8} \approx 3,4822022.$$

Аналогично, рассматривая следующие десятичные приближения  $\sqrt{3}$  по недостатку и избытку, приходим к неравенствам:

$$2^{1,73} \approx 3,3172782 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,74} \approx 3,3403517;$$

$$2^{1,732} \approx 3,3218801 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,733} \approx 3,3241834;$$

$$2^{1,7320} \approx 3,3218801 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,7321} \approx 3,3221104;$$

$$2^{1,73205} \approx 3,3219952 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,73206} \approx 3,3220182;$$

$$2^{1,732050} \approx 3,3219952 < 2^{\sqrt{3}} < 2^{1,732051} \approx 3,3219975.$$

Значение  $2^{\sqrt{3}}$ , вычисленное на калькуляторе, таково:

$$2^{\sqrt{3}} \approx 3,321997.$$

После того как определена показательная функция, надо доказывать ее основные свойства. ▼

Перечислим основные свойства показательной функции  $y = a^x$  (их доказательство выходит за рамки школьного курса).

1. Область определения функции  $a^x$  — множество  $R$  действительных чисел.

2. Область значений функции  $a^x$  (при  $a \neq 1$ ) — множество  $R_+$  всех положительных действительных чисел. При  $a = 1$  функция  $a^x$  при всех  $x$  постоянна: она равна 1.

3. При  $a > 1$  функция  $a^x$  возрастает на всей числовой прямой; при  $0 < a < 1$  функция  $a^x$  убывает на множестве  $R$  (рис. 131).

4. При любых действительных значениях  $x$  и  $y$  справедливы равенства

$$a^x a^y = a^{x+y}; \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y};$$

$$(ab)^x = a^x b^x; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}; \\ (a^x)^y = a^{xy}.$$

Эти формулы называют основными свойствами степеней.

Свойства 3) и 4) означают, что для функции  $a^x$ , определенной на всей числовой прямой, остаются верными свойства функции  $a^x$ , которая сначала была определена только для рациональных  $x$  (см. свойства  $1^0$ — $7^0$ , п. 38).

### Упражнения

624. Изобразите схематически график функции:

а)  $y = 5^x$ ; б)  $y = 0,3^x$ ; в)  $y = 1^x$ ; г)  $y = 0^x$ .

625. Вычислите:

а)  $8^{\sqrt{2}} \cdot 2^{3\sqrt{2}}$ ;

б)  $3^{(\sqrt{3}-1)^2} \cdot 9^{\sqrt{3}}$ ;

в)  $24^{\sqrt{3}} \cdot 2^{\sqrt{27}} \cdot 3^{1-\sqrt{3}}$ ;

г)  $18^{\sqrt{2}} \cdot 3^{(\sqrt{2}-1)^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}-1}$ ;

д)  $((\sqrt{2})^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ ;

е)  $\left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}}$ ;

ж)  $(5^{\sqrt[4]{27}})^{\sqrt{3}}$ ;

з)  $(3^{\sqrt[5]{8}})^{-\sqrt[4]{4}}$ .

626. Какое из чисел больше:

а)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$  или  $2^{-1,5}$ ;

б)  $3^{\sqrt{5}}$  или  $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2,25}$ ;

в)  $5 \cdot 0,4^{\sqrt{2}}$  или  $2 \cdot 2,5^{-0,5}$ ;

г)  $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}}$  или  $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{\sqrt{7}+1}$ ?

627. Упростите выражение:

а)  $a^{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$ ;

б)  $b^{-\sqrt{3}} : (b)^{(\sqrt{3}-1)^2}$ ;

в)  $a^{\sqrt{2}} \cdot a^{1,3} : \sqrt[3]{a^3 \sqrt{2}}$ ;

г)  $x^{\pi} \cdot \sqrt[4]{x^2 : x^{4\pi}}$ ;

д)  $(a^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ ;

е)  $(a^{\sqrt[25]{5}})^{\sqrt[5]{5}}$ ;

ж)  $\frac{(a^{2\sqrt{3}}-1)(a^{4\sqrt{3}}-a^{\sqrt{3}})^{-1}}{(a^{2\sqrt{3}}+a^{\sqrt{3}}+a^{3\sqrt{3}})^{-1}}$ ;

з)  $\sqrt{(x^{\pi}+y^{\pi})^2 - (4^{\frac{1}{\pi}}xy)^{\pi}}$ .

628. Укажите область значений функции:

а)  $3^x$ ; б)  $0,7^x$ ; в)  $1^x$ ; г)  $0^x$ ;

д)  $2^{|x|}$ ; е)  $0,7^{|x|}$ ; ж)  $3^x - 1$ ; з)  $2 - 0,7^x$ .

629. Вычислите с точностью до 0,0001 (пользуясь таблицами или калькулятором) значения:

а)  $10^{1,7}$  и  $10^{1,8}$ ; б)  $10^{1,73}$  и  $10^{1,74}$ ; в)  $10^{1,732}$  и  $10^{1,733}$ ; г)  $10^{1,7320}$  и  $10^{1,7321}$ .

Найдите, пользуясь полученными результатами, значение  $10^{\sqrt{3}}$  с точностью до 0,01.

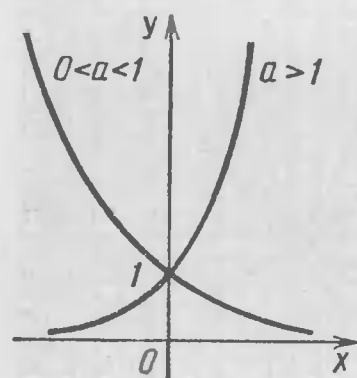


Рис. 131.



#### 40. Решение показательных уравнений и неравенств

##### 1. Рассмотрим простейшее показательное уравнение

$$a^x = a^c, \quad (1)$$

где  $a > 0$  и  $a \neq 1$ . Функция  $a^x$  на промежутке  $(-\infty; \infty)$  возрастает при  $a > 1$  (убывает при  $0 < a < 1$ ) и принимает все положительные значения. Применяя теорему о корне (п. 10), получаем, что уравнение (1) при любом положительном  $a$ , отличном от 1, имеет единственный корень. Очевидно, что этим корнем является число  $c$  (рис. 132).

Пример 1. Решим уравнение

$$7^{x-2} = \sqrt[3]{49}.$$

Заметим, что  $49 = 7^2$ , а  $\sqrt[3]{49} = 7^{\frac{2}{3}}$ . Поэтому данное уравнение можно записать в виде

$$7^{x-2} = 7^{\frac{2}{3}}.$$

Следовательно, корнями данного уравнения являются только такие числа  $x$ , для которых  $x-2 = \frac{2}{3}$ , т. е.  $x = 2\frac{2}{3}$ . Ответ:  $x = 2\frac{2}{3}$ .

Пример 2. Решим уравнение

$$5^{x^2-2x-1} = 25.$$

Перепишем его в виде

$$5^{x^2-2x-1} = 5^2.$$

Корнями этого уравнения являются только такие числа  $x$ , для которых  $x^2 - 2x - 1 = 2$ . Приходим к квадратному уравнению, корни которого — числа 3 и  $-1$ . Ответ: 3;  $-1$ .

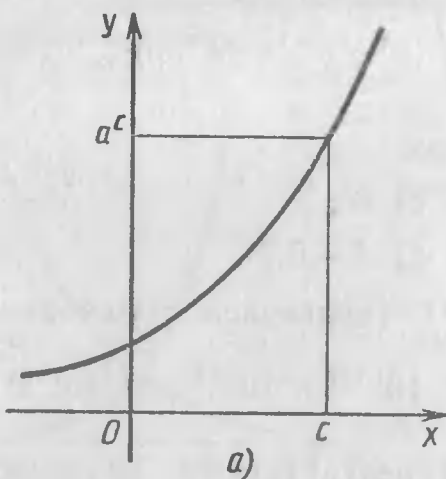
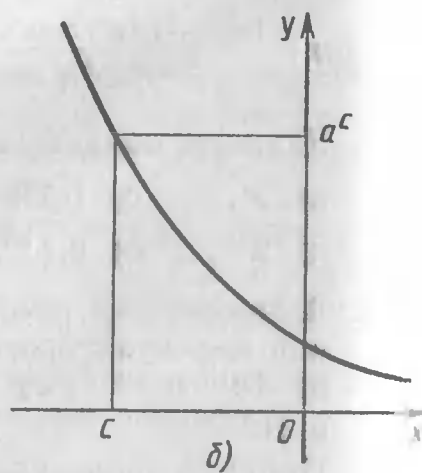


Рис. 132.



Пример 3. Решим уравнение

$$6^{x+1} + 35 \cdot 6^{x-1} = 71.$$

Заметим, что  $6^{x+1} = 36 \cdot 6^{x-1}$ . Поэтому данное уравнение можно записать в виде  $36 \cdot 6^{x-1} + 35 \cdot 6^{x-1} = 71$ , т. е.  $71 \cdot 6^{x-1} = 71$ , откуда  $6^{x-1} = 1$ ,  $x-1 = 0$  и  $x = 1$ . Ответ: 1.

Пример 4. Решим уравнение

$$4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0.$$

Сделаем замену переменной  $t = 2^x$ . Заметим, что  $4^x = (2^x)^2 = t^2$ . Поэтому данное уравнение принимает вид

$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$

Найдем решения этого квадратного уравнения:  $t_1 = 1$  и  $t_2 = 4$ . Решая уравнения замены  $2^x = 1$  и  $2^x = 4$ , получаем:  $x = 0$  и  $x = 2$ . Ответ: 0; 2.

2. Решение простейших показательных неравенств основано на известном свойстве функции  $a^x$ : эта функция возрастает при  $a > 1$  и убывает при  $0 < a < 1$ .

Пример 5. Решим неравенство

$$0,5^{7-3x} < 4.$$

Пользуясь тем, что  $0,5^{-2} = 4$ , перепишем заданное неравенство в виде

$$0,5^{7-3x} < 0,5^{-2}.$$

Показательная функция  $0,5^t$  убывает, так как  $0,5 < 1$ . Поэтому данное неравенство равносильно неравенству  $7-3x > -2$ , откуда  $x < 3$ . Ответ:  $(-\infty; 3)$ .

Пример 6. Решим неравенство

$$6^{x^2+2x} > 6^3.$$

Показательная функция  $6^t$  возрастает, так как  $6 > 1$ . Поэтому данное неравенство равносильно неравенству  $x^2 + 2x > 3$ . Решением этого неравенства, а, следовательно, и исходного, служит объединение интервалов  $(-\infty; -3)$  и  $(1; \infty)$ .

Пример 7. Решим неравенство

$$\left(\frac{1}{9}\right)^x - \frac{28}{3^{x+1}} + 3 < 0.$$

Сделаем замену  $t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ , тогда  $\left(\frac{1}{9}\right)^x = t^2$  и неравенство перепишется в виде

$$t^2 - \frac{28}{3}t + 3 < 0.$$

Решением этого квадратичного неравенства служит интервал  $(\frac{1}{3}; 9)$ , т. е. все числа  $t$ , удовлетворяющие неравенству  $\frac{1}{3} < t < 9$ . Следовательно, решением данного неравенства являются числа  $x$ , удовлетворяющие неравенству  $\frac{1}{3} < (\frac{1}{3})^x < 9$ , и только такие числа. Но  $\frac{1}{3} = (\frac{1}{3})^1$ ,  $9 = (\frac{1}{3})^{-2}$ , а функция  $(\frac{1}{3})^x$  убывает, поскольку  $\frac{1}{3} < 1$ . Поэтому решением неравенства  $\frac{1}{3} < (\frac{1}{3})^x < 9$  будут числа  $x$ , удовлетворяющие неравенству  $1 > x > -2$ . Ответ:  $(-2; 1)$ .

### Упражнения

Решите уравнение (530—534).

530. а)  $4^x = 64$ ; б)  $3^x = 81$ ; в)  $25^x = \frac{1}{5}$ ; г)  $8^x = 16$ ;  
 д)  $(\frac{1}{2})^x = \frac{1}{64}$ ; е)  $(\frac{1}{3})^x = 27$ ; ж)  $(\frac{1}{49})^x = 7$ ; з)  $(\frac{1}{9})^x = \frac{1}{27}$ .  
 531. а)  $2^x = 1$ ; б)  $\pi^x = 1$ ; в)  $3^{x^2-5x-10} = 1$ ;  
 г)  $(\frac{1}{\sqrt{2}})^{x^3-9x} = 1$ ; д)  $\sqrt{3^x} = 9$ ; е)  $\sqrt{2^x} \sqrt{3^x} = 36$ ;  
 ж)  $(\frac{2}{5})^x = (\frac{5}{2})^4$ ; з)  $(\frac{2}{3})^x \cdot (\frac{9}{8})^x = \frac{27}{64}$ .  
 532. а)  $3^{6-x} = 3^{3x-2}$ ; б)  $(\frac{3}{7})^{3x+1} = (\frac{7}{3})^{5x-9}$ ;  
 в)  $\sqrt{8^{x-1}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$ ; г)  $2^x 5^x = 0,1 \cdot (10^{x-1})^5$ ;  
 д)  $3^{x^2-x-2} = 81$ ; е)  $(\frac{1}{5})^{x^2+2x-5} = 25$ ;  
 ж)  $2^{x^2+x-0,5} = 4\sqrt{2}$ ; з)  $(\frac{1}{7})^{2x^2+x-0,5} = \frac{\sqrt{7}}{7}$ .  
 533. а)  $4^{x+1} + 4^x = 320$ ; б)  $2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 150$ ;  
 в)  $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$ ; г)  $(\frac{1}{5})^{x-1} - (\frac{1}{5})^{x+1} = 4,8$ .  
 534. а)  $3^x + 3^{3-x} = 12$ ; б)  $2 \cdot 3^{x+1} + 2 \cdot 3^{2-x} = 56$ ;  
 в)  $(\frac{1}{5})^{1-x} - (\frac{1}{5})^x = 4,96$ ; г)  $4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}$ .

Решите неравенство (535—539).

535. а)  $2^x > \frac{1}{2}$ ; б)  $(\frac{3}{7})^x < 1$ ; в)  $(0,3)^x > 0,09$ ; г)  $(\sqrt{3})^x \leq \frac{1}{9}$ ;  
 д)  $(0,2)^x > \frac{1}{25}$ ; е)  $\frac{1}{3^x} \geq 27$ ; ж)  $0,5^{2x} < 1$ ; з)  $\frac{1}{7^{3x}} < 49$ .

536. а)  $2^{3-5x} \leq 8$ ; б)  $0,4^{2x+1} > 0,16$ ;  
 в)  $3^{2-x} > 27$ ; г)  $0,7^{5-2x} \leq 0,49$ ;  
 д)  $10^{3x+2} > 100$ ; е)  $4^{5-2x} \leq 0,25$ ;  
 ж)  $(0,3)^{7+4x} > 0,027$ ; з)  $0,6^{5-2x} < 0,36$ .  
 537. а)  $3^{x^2} < 3^{x+6}$ ; б)  $0,7^{8-x^2} > 0,7^{2x}$ ;  
 в)  $(\frac{5}{6})^{x^2-x} \leq (\frac{5}{6})^6$ ; г)  $10^{x^2-12} > 10^x$ ;  
 д)  $2^x > (\frac{1}{2})^{x+1}$ ; е)  $(\frac{1}{4})^{2x-3} > 4^{1-2x}$ ;  
 ж)  $3 \cdot 9^{2x-2} > (\frac{1}{27})^{3x-1}$ ; з)  $2 \cdot 8^{4-5x} < (\frac{1}{16})^{x+2}$ .

538. а)  $4^x - 10 \cdot 2^x + 16 < 0$ ; б)  $0,04^x - 26 \cdot (0,2)^x + 25 \leq 0$ ;  
 в)  $9^x - \frac{28}{3^{2x-1}} + \frac{1}{3} > 0$ ; г)  $25^x - 4 \cdot 5^x - 5 \geq 0$ .  
 539. а)  $2^{x^2} > (\frac{1}{2})^{2x-3}$ ; б)  $3^{4x+3} \leq (\frac{1}{9})^{x^2}$ ;  
 в)  $(\frac{1}{25})^{2x} < (\sqrt{5})^{x^2+3,75}$ ; г)  $(\frac{1}{16})^{x^2} < 8 \cdot (\sqrt{2})^{16-2x}$ .

### 41. Понятие об обратной функции

В ходе исследования различных функций вы неоднократно решали такую задачу: вычислить значение функции  $f$  по данному значению  $x_0$  аргумента. Часто приходится рассматривать и обратную задачу: найти значения аргумента, при которых функция  $f$  принимает данное значение  $y_0$ .

Рассмотрим два примера.

1) Пусть  $f(x) = kx + b$  ( $k \neq 0$ ). Чтобы найти значения аргумента  $x$ , при которых  $f(x) = y_0$ , надо решить уравнение  $f(x) = y_0$ , т. е. уравнение

$$kx + b = y_0.$$

Решая его, находим, что при любом  $y_0$  оно имеет решение и притом только одно:

$$x = \frac{y_0 - b}{k}.$$

2) Для функции  $f(x) = x^2$  уравнение  $f(x) = y_0$  при  $y_0 > 0$  имеет два решения:  $x_1 = \sqrt{y_0}$ ,  $x_2 = -\sqrt{y_0}$  (если  $y_0 = 0$ , решение одно:  $x_0 = 0$ ).

Функцию, принимающую каждое свое значение в единственной точке области определения, называют *обратимой*. Таким образом, при  $k \neq 0$  функция  $f(x) = kx + b$  обратима, а функция  $f(x) = x^2$  (определенная на всей числовой прямой) не является обратимой.



**З а м е ч а н и е.** Из определения обратимой функции сразу следует, что если функция  $f$  обратима, а число  $a$  принадлежит области значений  $E(f)$ , то уравнение  $f(x)=a$  имеет решение и притом только одно.

Пусть  $f$  — произвольная обратимая функция. Для любого числа  $y_0$  из ее области значений  $E(f)$  имеется в точности одно значение  $x_0$ , принадлежащее области определения  $D(f)$ , такое, что  $f(x_0)=y_0$ . Поставив в соответствие каждому  $y_0$  это значение  $x_0$ , получим новую функцию  $g$  с областью определения  $E(f)$  и областью значений  $D(f)$ . Например, для обратимой функции  $f(x)=kx+b$  ( $k \neq 0$ ) значение новой функции  $g$  в произвольной точке  $y_0$  задается формулой

$$g(y_0) = \frac{y_0 - b}{k}.$$

Выбирая для аргумента функции  $g$  привычное обозначение  $x$ , находим, что

$$g(x) = \frac{x - b}{k}.$$

**О п р е д е л е н и е.** Функцию  $g$ , которая в каждой точке  $x$  области значений обратимой функции  $f$  принимает такое значение  $y$ , что  $f(y)=x$ , называют **обратной** к функции  $f$ .

Как показано выше, функцией, обратной к функции  $f(x)=kx+b$  ( $k \neq 0$ ), является функция  $g(x)=\frac{x-b}{k}$ . Рассмотрим другой пример.

**П р и м е р 1.** Докажем, что функция  $f(x)=x^3$  обратима, и выведем формулу, задающую функцию  $y=g(x)$ , обратную к  $f$ .

По определению обратной функции сначала надо доказать,

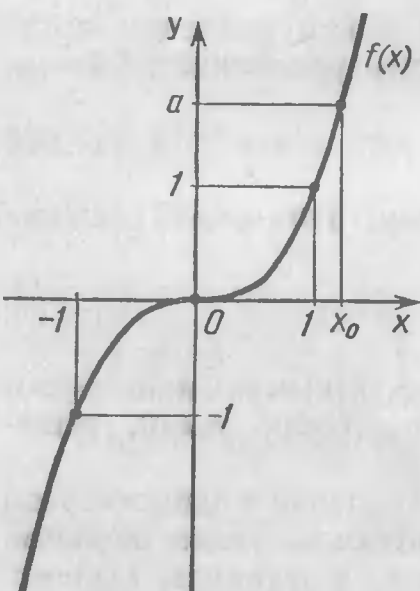


Рис. 133.

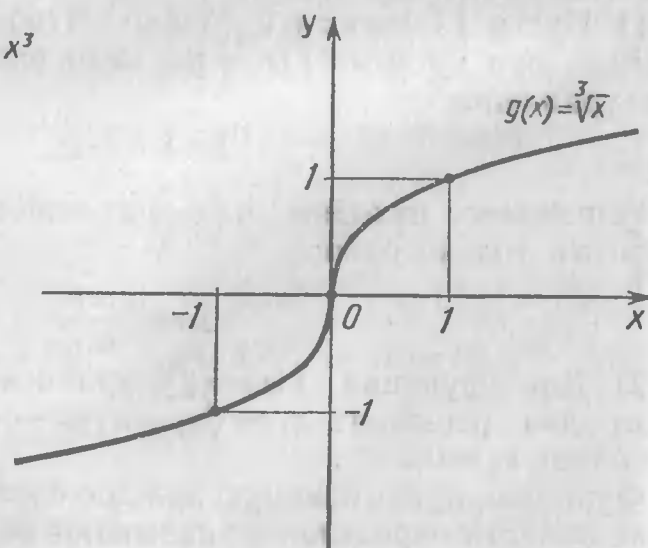


Рис. 134.

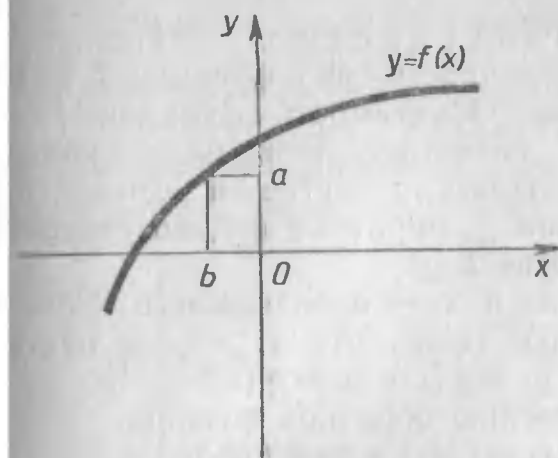


Рис. 135.

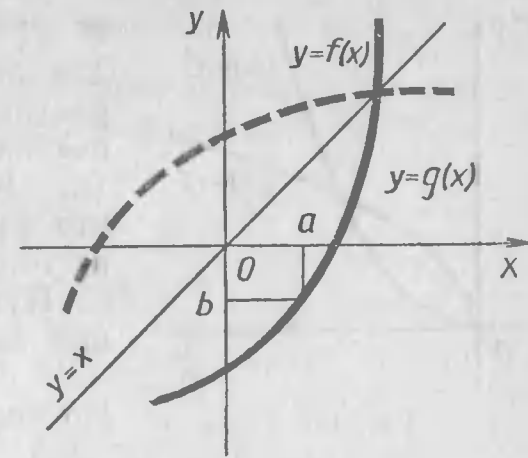


Рис. 136.

что уравнение  $f(y)=x$  при любом значении  $x$  имеет единственное решение  $y$ . В данном случае это уравнение таково:

$$y^3 = x.$$

Оно имеет единственное решение  $y=\sqrt[3]{x}$  при любом  $x$  (см. п. 36). Поэтому функция  $f(x)=x^3$  обратима и обратной к ней является функция

$$g(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Графики этих функций изображены на рисунках 133 и 134.

Если задан график обратимой функции  $f$ , то график функции  $g$ , обратной к  $f$ , нетрудно построить, пользуясь следующим утверждением.

**График функции  $g$ , обратной к функции  $f$ , симметричен графику  $f$  относительно прямой  $y=x$ .**

Докажем это свойство. Заметим, что по графику функции  $f$  можно найти графически значение обратной к  $f$  функции  $g$  в произвольной точке  $a$ . Для этого нужно взять точку с координатой  $a$  не на горизонтальной оси (как это обычно делается), а на вертикальной (рис. 135).

Из определения обратной функции следует, что значение  $g(a)$  равно  $b$  (см. рис. 135).

Таким образом, если считать, что выбрана несколько необычная система координат (аргумент откладывается на вертикальной оси, а значения функции — на горизонтальной), то можно сказать, что график обратной к  $f$  функции  $g$  — это график функции  $f$  (построенный в обычной системе координат). Для того чтобы изобразить график  $g$  в привычной системе координат, надо отразить график  $f$  относительно прямой  $y=x$  (рис. 136).

**Т е о р е м а (об обратной функции).** Если функция  $f$  возрастает (или убывает) на промежутке  $I$ , то она обратима. Обратная к  $f$  функция  $g$ , определенная в области значений  $f$ , также является возрастающей (соответственно убывающей).

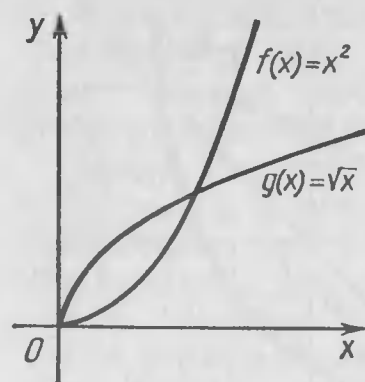


Рис. 137

▼ Доказательство. Положим для определенности, что функция  $f$  возрастающая. Обратимость функции  $f$  — очевидное следствие теоремы о корне (п. 10). Поэтому остается доказать, что функция  $g$ , обратная к  $f$ , возрастает на множестве  $E(f)$ .

Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — произвольные значения из  $E(f)$ , такие, что  $x_1 > x_2$ , и пусть  $y_1 = g(x_1)$ ,  $y_2 = g(x_2)$ .

По определению обратной функции  $x_1 = f(y_1)$  и  $x_2 = f(y_2)$ .

Воспользовавшись условием ( $f$  — возрастающая функция), находим, что допущение  $y_1 \leq y_2$  приводит к выводу  $f(y_1) \leq f(y_2)$ , т. е.  $x_1 \leq x_2$ . Это противоречит предположению  $x_1 > x_2$ . Поэтому  $y_1 > y_2$ , т. е. из условия  $x_1 > x_2$  следует, что  $g(x_1) > g(x_2)$ .

Именно это и требовалось доказать. ▼

Пример 2. Как отмечалось выше, функция  $f(x) = x^2$  не является обратимой. Однако функция  $f^*$ , определенная на промежутке  $[0; \infty)$  формулой  $f^*(x) = x^2$ , возрастает на этом промежутке и, значит, имеет обратную. Обратной к функции  $f^*$  является функция  $\sqrt{x}$ . Графики этих функций изображены на рисунке 137.

Вообще функция  $x^n$  при любом натуральном  $n$  возрастает на промежутке  $[0; \infty)$  и поэтому имеет обратную. Обратной к функции  $x^n$  является функция  $\sqrt[n]{x}$ . Графики функций  $x^n$  при некоторых значениях  $n$  и обратных к ним функций  $\sqrt[n]{x}$  изображены на рисунках 138, 139.

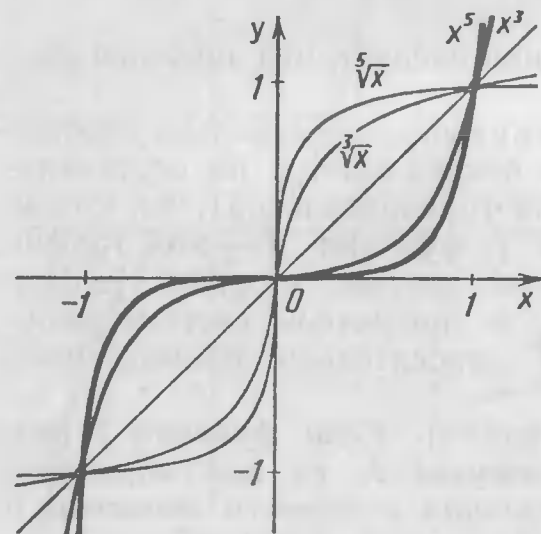


Рис. 138.

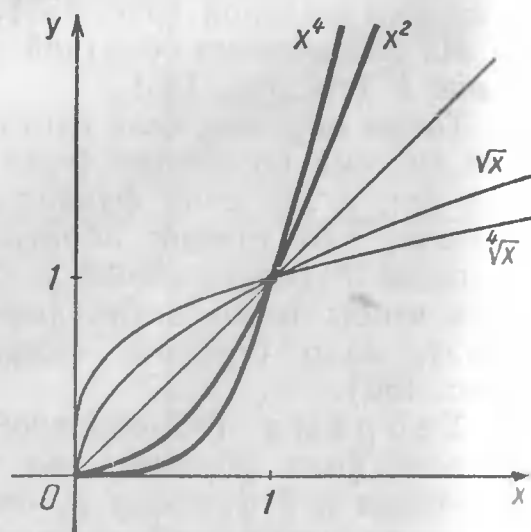


Рис. 139.

## Упражнения

540. Выведите формулу, задающую функцию  $g$ , обратную к данной функции  $f$ . Укажите область определения и область значений функции  $g$ :

а)  $f(x) = 2x + 1$ ;

б)  $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$ ;

в)  $f(x) = -2x + 1$ ;

г)  $f(x) = -\frac{1}{2}x - 1$ ;

д)  $f(x) = -\frac{1}{x}$ ;

е)  $f(x) = \frac{x}{x+2}$ ;

ж)  $f(x) = 2x^2 (x \geq 0)$ ;

з)  $f(x) = \sqrt{x+1}$ .

541. Составьте таблицу значений функции  $f(x)$  на отрезке  $[-1; 1]$  с шагом 0,1 и затем постройте на миллиметровой бумаге график этой функции на отрезке  $[-1; 1]$ . Постройте график функции, обратной к  $f(x)$ :

а)  $f(x) = 2x^3 + 1$ ;

б)  $f(x) = -2x^3 + 1$ .

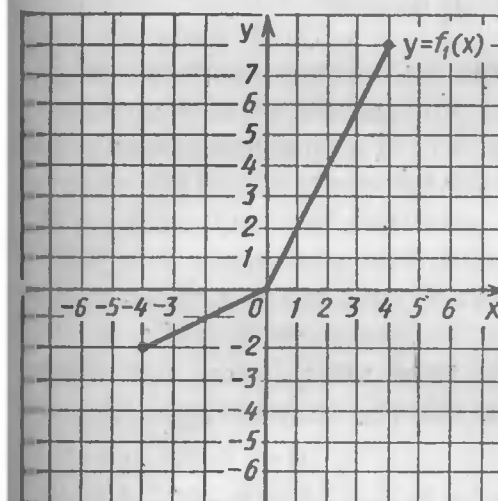


Рис. 140.

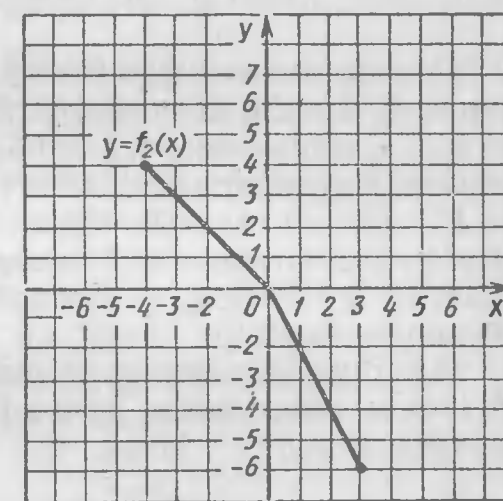


Рис. 141.

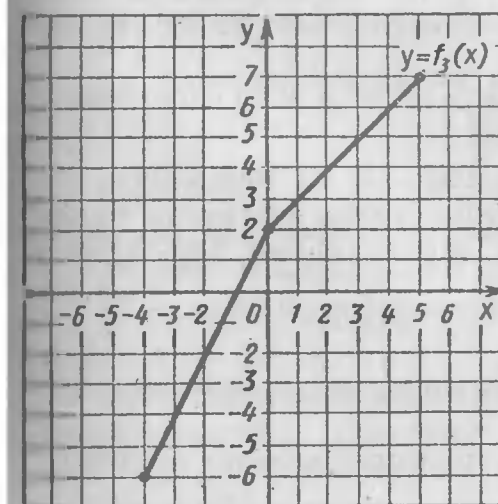


Рис. 142.

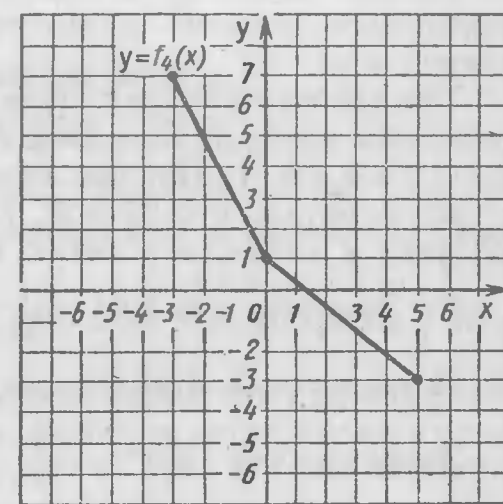


Рис. 143.

542. По заданному графику функции  $f$  найдите значения обратной к  $f$  функции  $g$  в точках  $-2$ ,  $1$  и  $3$ . Постройте график функции  $g$ , укажите ее область определения и область значений:

- а)  $f(x)=f_1(x)$  (рис. 140); б)  $f(x)=f_2(x)$  (рис. 141);  
в)  $f(x)=f_3(x)$  (рис. 142); г)  $f(x)=f_4(x)$  (рис. 143).

543. Докажите, что функция  $f$  имеет обратную на указанном промежутке. Постройте график функции, обратной к  $f$ :

- а)  $f(x)=x^2+1, x \geq 0$ ; б)  $f(x)=x, x \in (-\infty; \infty)$ ;  
в)  $f(x)=\sqrt[n]{x}, x \geq 0$ ; г)  $f(x)=x^3+1, x \in (-\infty; \infty)$ ;  
д)  $f(x)=\sin x, x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ ; е)  $f(x)=\cos x, x \in [0; \pi]$ ;  
ж)  $f(x)=\operatorname{tg} x, x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ ; з)  $f(x)=\operatorname{ctg} x, x \in (0; \pi)$ .

## 42. Логарифмическая функция

Показательная функция  $f(x)=a^x$  при  $a>1$  возрастает на  $\mathbf{R}$ , а при  $0<a<1$  убывает на  $\mathbf{R}$ ; область ее значений — множество  $\mathbf{R}_+$ . Следовательно, она обратима (п. 41) и для нее определена обратная функция  $g(x)$ , область определения которой — множество  $\mathbf{R}_+$  положительных чисел, а область значений — множество  $\mathbf{R}$ . Эту функцию называют *логарифмической с основанием  $a$*  и обозначают  $g(x)=\log_a x$ . Логарифмическую функцию с основанием 10 обозначают  $\lg$ .

По определению функции  $g$ , обратной к  $f$ , ее значение  $g(x)$  есть такое число  $y$ , что  $f(y)=x$ . В данном случае  $y=\log_a x$ , а  $f(y)=a^y=a^{\log_a x}$ . Итак,

$$a^{\log_a x}=x \text{ для любого } x>0. \quad (1)$$

Иными словами, *логарифм числа  $x$  по основанию  $a$  есть показатель степени, в которую надо возвести число  $a$ , чтобы получить  $x$* .

Тождество  $a^{\log_a x}=x$  (где  $x>0$ ,  $a>0$  и  $a \neq 1$ ) называют *основным логарифмическим тождеством*.

**Пример 1.** Найдём значение: а)  $\log_2 32$ ; б)  $\log_5 0,04$ .

а) Заметим, что  $32=2^5$ , т. е., для того чтобы получить число 32, надо 2 возвести в пятую степень. Следовательно,  $\log_2 32=5$ .

б) Заметим, что  $0,04=\frac{1}{25}=5^{-2}$ , поэтому  $\log_5 0,04=-2$ .

**Пример 2.** Найдём логарифм числа  $\frac{1}{9}$  по основанию  $\sqrt{3}$ .

Заметим, что  $(\sqrt{3})^{-4}=\frac{1}{9}$ . Поэтому по определению логарифма  $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{9}=-4$ .

**Пример 3.** Найдём число  $x$  такое, что: а)  $\log_8 x=\frac{1}{3}$ ; б)  $\log_x 8=-\frac{3}{4}$ .

Воспользуемся основным логарифмическим тождеством:

$$\text{а) } x=8^{\log_8 x}=8^{\frac{1}{3}}=2;$$

$$\text{б) } x^{\log_x 8}=8, \text{ т. е. } x^{-\frac{3}{4}}=8,$$

$$\text{откуда } x=8^{-\frac{4}{3}}=\frac{1}{16}.$$

Функция  $g(x)=\log_a x$  как обратная к функции  $f(x)=a^x$  (возрастающей при  $a>1$  и убывающей при  $0<a<1$ ) возрастает при  $a>1$  и убывает при  $0<a<1$  на всей области определения. График функции  $y=\log_a x$  симметричен графику функции  $y=a^x$  относительно прямой  $y=x$ , поскольку эти функции взаимно обратны. Графики логарифмической функции при разных основаниях приведены на рисунке 144.

Основные свойства логарифмической функции вытекают из свойств показательной функции и теоремы об обратной функции. Перечислим их.

1. *Область определения* логарифмической функции — множество всех положительных чисел:  $D(\log_a)=\mathbf{R}_+$ .

2. *Область значений* логарифмической функции — множество всех действительных чисел:  $E(\log_a)=\mathbf{R}$ .

3. Логарифмическая функция на всей области определения  $\mathbf{R}_+$  *возрастает* при  $a>1$  и *убывает* при  $0<a<1$ .

4. При любом  $a>0$  ( $a \neq 1$ ) *выполнены равенства*:

$$\text{а) } \log_a 1=0;$$

$$\text{б) } \log_a a=1;$$

$$\text{в) } \log_a (xy)=\log_a x+\log_a y \text{ при } x>0, y>0;$$

$$\text{г) } \log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y \text{ при } x>0, y>0;$$

д) для любого числа  $x>0$  и любого  $p \in \mathbf{R}$

$$\log_a x^p=p \log_a x.$$

Свойства 1—3 доказаны выше. Доказательство свойств 4 (а—д) (их называют *основными свойствами логарифмов*) будут приведены в следующем пункте.

**Пример 4.** Найдём область определения функции  $f(x)=\log_8 (4-5x)$ .

Область определения логарифмической функции  $f(t)=\log_8 t$  — множество  $\mathbf{R}_+$ . Поэтому заданная функция определена только для тех  $x$ , при которых  $4-5x>0$ , т. е. при  $x<0,8$ . Следовательно, областью определения заданной функции является интервал  $(-\infty; 0,8)$ .

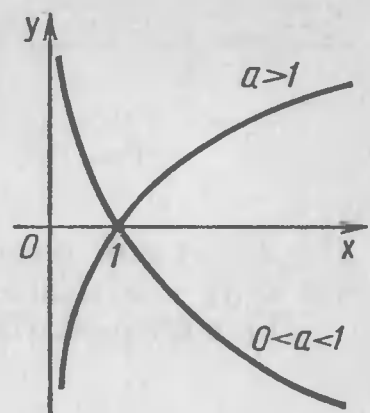


Рис. 144.

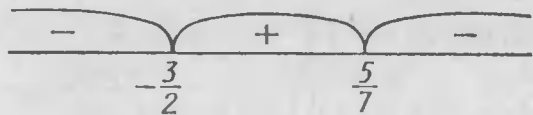


Рис. 145.

Пример 5. Найдем область определения функции  $f(x) = \log_2(x^2 - 3x - 4)$ .

Как и в предыдущем примере, функция  $f$  определена для всех тех  $x$ , при которых

$x^2 - 3x - 4 > 0$ . Решая это квадратное неравенство, получаем, что  $D(f)$  — объединение интервалов  $(-\infty; -1)$  и  $(4; \infty)$ .

Пример 6. Найдем область определения функции

$$f(x) = \log_7 \frac{2x+3}{5-7x}.$$

Решая методом интервалов неравенство

$$\frac{2x+3}{5-7x} > 0,$$

находим (рис. 145), что  $D(f) = \left(-\frac{3}{2}; \frac{5}{7}\right)$ .

### Упражнения

Найдите логарифм по основанию  $a$  числа, представленного в виде степени с основанием  $a$  (544—545).

544. а)  $3^2 = 9$ ; б)  $3^3 = 27$ ; в)  $3^4 = 81$ ;  
 г)  $3^{-1} = \frac{1}{3}$ ; д)  $2^{-3} = \frac{1}{8}$ ; е)  $5^{-2} = 0,04$ ;  
 ж)  $5^0 = 1$ ; з)  $9^{\frac{1}{2}} = 3$ .

545. а)  $\sqrt[4]{16} = 2$ ; б)  $\sqrt[3]{125} = 5$ ; в)  $\sqrt{49} = 7$ ;  
 г)  $\sqrt[4]{81} = 3$ ; д)  $27^{\frac{2}{3}} = 9$ ; е)  $32^{\frac{3}{5}} = 8$ ;  
 ж)  $81^{\frac{3}{4}} = 27$ ; з)  $125^{\frac{2}{3}} = 25$ .

Проверьте справедливость равенства (546—547).

546. а)  $\log_2 16 = 4$ ; б)  $\log_5 125 = 3$ ; в)  $\log_3 \frac{1}{81} = -4$ ; г)  $\log_3 \frac{1}{243} = -5$ ; д)  $\log_7 343 = 3$ ; е)  $\log_5 0,04 = -2$ ; ж)  $\log_{16} 1 = 0$ ;  
 з)  $\lg 0,01 = -2$ .

547. а)  $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$ ; б)  $\log_{0,5} 4 = -2$ ; в)  $\log_{\sqrt{2}} 8 = 6$ ;  
 г)  $\log_{2\sqrt{2}} 128 = \frac{14}{3}$ ; д)  $\log_{0,2} 0,008 = 3$ ; е)  $\log_{0,2} 125 = -3$ ;  
 ж)  $\log_{\sqrt{\frac{1}{3}}} 27 = -6$ ; з)  $\log_{\sqrt{5}} 0,2 = -2$ .

548. Упростите выражение, пользуясь основным логарифмическим тождеством:

- а)  $2^{\log_2 7}$ ; б)  $1,7^{\log_{1,7} 2}$ ; в)  $3,8^{\log_{3,8} 11}$ ; г)  $\pi^{\log_{\pi} 5,2}$ .

Найдите число  $x$  (549—552).

549. а)  $\log_5 x = 2$ ; б)  $\log_3 x = -1$ ; в)  $\log_7 x = -2$ ;  
 г)  $\log_4 x = -3$ ; д)  $\log_{\frac{1}{2}} x = -3$ ; е)  $\log_{\sqrt{5}} x = 0$ ;  
 ж)  $\log_{\frac{1}{6}} x = -3$ ; з)  $\log_{\frac{1}{7}} x = 2$ .

550. а)  $\log_x 81 = 4$ ; б)  $\log_x 27 = 3$ ;  
 в)  $\log_x 0,25 = -2$ ; г)  $\log_{\sqrt{8}} x = \frac{2}{3}$ .

551. а)  $\log_x \sqrt{2} = -4$ ; б)  $\log_x 16 = -0,8$ ;  
 в)  $\log_x \frac{1}{9} = -1$ ; г)  $\log_x 0,64 = -2$ .

552. а)  $\log_x \sqrt{2} = \frac{1}{4}$ ; б)  $\log_x 16 = 0,8$ ;  
 в)  $\log_x \frac{1}{9} = -\frac{1}{3}$ ; г)  $\log_x 16 = \frac{4}{3}$ .

Найдите область определения функции (553—555).

553. а)  $\log_3 (x-5)$ ; б)  $\log_{0,3} (7-3x)$ ; в)  $\log_7 (2x+3)$ ;  
 г)  $\log_{\pi} (10-5x)$ ; д)  $\log_5 (9-x^2)$ ; е)  $\log_{0,1} (x^2-4)$ ;  
 ж)  $\log_{\sqrt{10}} (6+x-x^2)$ ; з)  $\log_{\sqrt{2}} (x^2-2x-3)$ .

554. а)  $\log_8 \frac{2-x}{x+1}$ ; б)  $\log_7 \frac{2x+5}{x-1}$ ;  
 в)  $\log_{0,9} \frac{2+3x}{5-2x}$ ; г)  $\log_{3,1} \frac{7-2x}{2-3x}$ .

555. Изобразите схематически график функции:

- а)  $y = \log_2 x$ ; б)  $y = \log_{\sqrt{5}} x$ ;  
 в)  $y = \log_{0,3} x$ ; г)  $y = \log_{\sqrt{0,7}} x$ .

### 43. Основные свойства логарифмов

Докажем свойства 4 (а—д) логарифмической функции, сформулированные в предыдущем пункте (напомним, что  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ):

а)  $\log_a 1 = 0$ , так как  $a^0 = 1$  для любого  $a$ .

б)  $\log_a a = 1$ , так как  $a^1 = a$ .

в) Докажем, что для любых положительных чисел  $x$  и  $y$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y.$$



Короче говорят так: «логарифм произведения равен сумме логарифмов».

Для доказательства воспользуемся основным логарифмическим тождеством:

$$x = a^{\log_a x}, y = a^{\log_a y}. \quad (1)$$

Перемножая почленно эти равенства, получаем:

$$xy = a^{\log_a x} \cdot a^{\log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y},$$

т. е.  $xy = a^{\log_a x + \log_a y}$ . Следовательно, по определению логарифма

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y.$$

г) Докажем, что для любых положительных чисел  $x$  и  $y$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

Короче говорят так: «логарифм частного равен разности логарифмов».

Для доказательства воспользуемся равенствами (1)

$$\frac{x}{y} = \frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}} = a^{\log_a x - \log_a y}.$$

Следовательно, по определению логарифма

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

д) Для любого числа  $x > 0$  и любого действительного  $p$

$$\log_a x^p = p \log_a x,$$

т. е. логарифм степени равен произведению показателя этой степени на логарифм основания этой степени.

Воспользуемся основным логарифмическим тождеством:

$$x = a^{\log_a x}, \text{ поэтому } x^p = (a^{\log_a x})^p = a^{p \log_a x}.$$

Следовательно, по определению логарифма  $\log_a x^p = p \log_a x$ .

Основные свойства логарифмов широко применяются в ходе преобразований выражений, содержащих логарифмы. Докажем, например, формулу перехода от одного основания логарифма к другому основанию:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}. \quad (2)$$

Эта формула верна, если обе ее части имеют смысл, т. е. при  $x > 0$ ,  $a > 0$  и  $a \neq 1$ ,  $b > 0$  и  $b \neq 1$ .

По правилу логарифмирования степени и основному логарифмическому тождеству получаем:

$$\log_b x = \log_b (a^{\log_a x}) = \log_a x \cdot \log_b a,$$

т. е.

$$\log_b x = \log_a x \cdot \log_b a.$$

Разделив обе части этого равенства на  $\log_b a$ , приходим к формуле (2).

С помощью формулы перехода можно найти значение логарифма с произвольным основанием  $a$ , имея таблицы логарифмов, составленные для какого-нибудь одного основания  $b$ . Наиболее употребительны таблицы десятичных и натуральных логарифмов (десятичными называют логарифмы по основанию 10, с натуральными логарифмами вы познакомитесь в п. 45).

Пример 1. Найдем  $\log_{0,3} 7$ .

Пользуясь калькулятором (или таблицами), находим:

$$\lg 7 \approx 0,8451 \text{ и } \lg 0,3 \approx 0,4771 - 1 = -0,5229.$$

Следовательно, по формуле (2)

$$\log_{0,3} 7 \approx \frac{0,8451}{-0,5229} \approx -1,6162.$$

Пример 2. Известно, что  $\log_2 5 = a$  и  $\log_2 3 = b$ . Выразим  $\log_2 300$  через  $a$  и  $b$ .

Пользуясь основными свойствами логарифмов, получаем:

$$\log_2 300 = \log_2 (3 \cdot 5^2 \cdot 2^2) = \log_2 3 + 2 \log_2 5 + 2 \log_2 2 = b + 2a + 2.$$

Пример 3. Выразим логарифм по основанию 2 выражения  $8a^3 \sqrt[4]{b^4}$  через логарифмы по основанию 2 чисел  $a$  и  $b$ . (Коротко говорят: прологарифмируем данное выражение по основанию 2.)

Пользуясь основными свойствами логарифмов, получаем:

$$\begin{aligned} \log_2 (8a^3 \sqrt[4]{b^4}) &= \log_2 (2^3 \cdot a^3 \cdot b^{\frac{4}{7}}) = 3 \log_2 2 + 3 \log_2 a + \frac{4}{7} \log_2 b = \\ &= 3 + 3 \log_2 a + \frac{4}{7} \log_2 b. \end{aligned}$$

Пример 4. Найдем  $x$ , если

$$\log_5 x = \log_5 7 + 2 \log_5 3 - 3 \log_5 2.$$

Сначала преобразуем правую часть данного равенства, пользуясь основными свойствами логарифмов:

$$\log_5 x = \log_5 7 + \log_5 3^2 - \log_5 2^3 = \log_5 \frac{7 \cdot 9}{8} = \log_5 \frac{63}{8},$$

т. е.  $\log_5 x = \log_5 \frac{63}{8}$  и потому  $x = \frac{63}{8}$ .

Пример 5. Найдём значение выражения  $\frac{\lg 72 - \lg 9}{\lg 28 - \lg 7}$ .

Пользуясь основными свойствами логарифмов, преобразуем числитель и знаменатель этой дроби:

$$\lg 72 - \lg 9 = \lg \frac{72}{9} = \lg 8 = 3 \lg 2;$$

$$\lg 28 - \lg 7 = \lg \frac{28}{7} = \lg 4 = 2 \lg 2.$$

Следовательно,

$$\frac{\lg 72 - \lg 9}{\lg 28 - \lg 7} = \frac{3 \lg 2}{2 \lg 2} = \frac{3}{2}.$$

Пример 6. Что больше:  $\log_2 3 + \log_2 7$  или  $\log_2 (3 + 7)$ ? По основному свойству логарифмов

$$\log_2 3 + \log_2 7 = \log_2 21.$$

А так как

$$\log_2 (3 + 7) = \log_2 10 \text{ и } 10 < 21,$$

а основание логарифма 2 ( $2 > 1$ ), то

$$\log_2 10 < \log_2 21,$$

следовательно,

$$\log_2 3 + \log_2 7 > \log_2 (3 + 7).$$

### Упражнения

556. Известно, что  $\log_5 2 = a$  и  $\log_5 3 = b$ . Выразите через  $a$  и  $b$ :

а)  $\log_5 12$ ; б)  $\log_5 1,5$ ; в)  $\log_5 72$ ; г)  $\log_5 30$ .

557. Прологарифмируйте по основанию 3:

а)  $9a^4 \sqrt[5]{b}$ ; б)  $\frac{b^2}{27a^7}$ ; в)  $(\sqrt[5]{a^3 b})^{\frac{2}{3}}$ ; г)  $\left(\frac{a^{10}}{\sqrt[5]{b^5}}\right)^{-0,2}$ .

558. Прологарифмируйте по основанию 10:

а)  $(100c^{\frac{1}{3}} d^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{3}}$ ; б)  $\frac{0,1a}{\sqrt{a^3 \sqrt{ab}}}$ ;  
в)  $\frac{10p^{\frac{1}{3}} q^{-\frac{1}{5}}}{p^{-\frac{1}{6}} q^{\frac{4}{5}}}$ ; г)  $\frac{r^2 s^6 t^{-1,7}}{r^{\frac{1}{3}} t^{0,3}}$ .

559. Вычислите без таблиц и вычислительных инструментов:

а)  $\log_{12} 4 + \log_{12} 3$ ; б)  $\log_3 2 + \log_3 4,5$ ; в)  $\log_2 7 - \log_2 \frac{7}{16}$ ;  
г)  $\lg 8 + \lg 125$ ; д)  $\lg 13 - \lg 130$ ; е)  $\log_6 3 + \log_6 12$ ;  
ж)  $\log_{\sqrt{5}} 2 + \log_5 6,25$ ; з)  $\log_{\sqrt{3}} 25 - \log_3 7 \frac{58}{81}$ .

560. Докажите, что:

а)  $\log_3 7 + \log_7 3 > 2$ ; б)  $\log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_3 \frac{1}{2} < -2$ ;

в)  $4^{\log_5 7} = 7^{\log_5 4}$ ; г)  $3^{\log_2 5} = 5^{\log_2 3}$ .

561. Найдите  $x$ , если:

а)  $\log_3 x = \log_3 1,5 + \log_3 8$ ;

б)  $\log_7 x = \log_7 12 - \log_7 4$ ;

в)  $\log_{0,3} x = 2 \log_{0,3} 6 - \log_{0,3} 12$ ;

г)  $\log_{\pi} x = 3 \log_{\pi} 4 - 2 \log_{\pi} 6$ .

562. Найдите значение выражения:

а)  $\frac{\log_3 16}{\log_3 4}$ ; б)  $\log_2 11 - \log_2 44$ ; в)  $\log_{0,3} 9 - 2 \log_{0,3} 10$ ;

г)  $\frac{\lg 8 + \lg 18}{2 \lg 2 + \lg 3}$ .

563. Что больше:

а)  $\log_3 4 + \log_3 7$  или  $\log (4 + 7)$ ;

б)  $\log_5 2 + \log_5 1,5$  или  $\log_5 (2 + 1,5)$ ;

в)  $\log_{0,7} 3 + \log_{0,7} 4$  или  $\log_{0,7} (3 + 4)$ ;

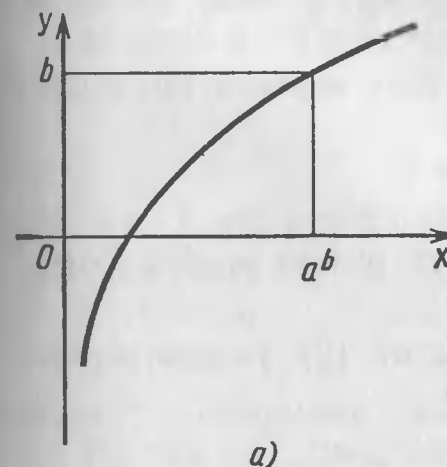
г)  $\log_{0,6} 1,3 + \log_{0,6} 1,2$  или  $\log_{0,6} (1,3 + 1,2)$ ?

### 44. Решение логарифмических уравнений и неравенств

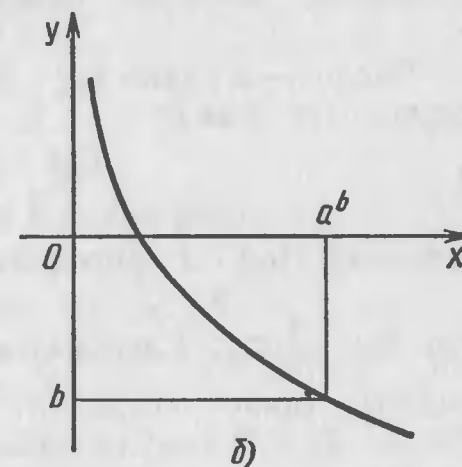
Рассмотрим простейшее логарифмическое уравнение

$$\log_a x = b.$$

Функция  $\log_a x$  возрастает (или убывает) на промежутке  $(0; \infty)$  и принимает на этом промежутке все действительные значения (рис. 146). По теореме о корне (п. 10) отсюда следует, что для любого  $b$  данное уравнение имеет и притом только одно решение. Из определения логарифма числа сразу следует, что  $a^b$  является таким решением.



а)



б)

Рис. 146.

Пример 1. Решим уравнение

$$\log_2(x^2 + 4x + 3) = 3.$$

Данному уравнению удовлетворяют только те значения  $x$ , для которых выполнено равенство

$$x^2 + 4x + 3 = 2^3.$$

Мы получили квадратное уравнение  $x^2 + 4x - 5 = 0$ . Его корни — числа 1 и  $-5$ . Следовательно, решением данного уравнения являются два числа 1 и  $-5$ .

Пример 2. Решим уравнение

$$\log_5(2x + 3) = \log_5(x + 1).$$

Это уравнение определено только для тех значений  $x$ , при которых выполнены неравенства  $2x + 3 > 0$  и  $x + 1 > 0$ . Для этих  $x$  данное уравнение равносильно уравнению  $2x + 3 = x + 1$ . Отсюда находим  $x = -2$ . Число  $x = -2$  не удовлетворяет, однако, неравенству  $x + 1 > 0$ . Следовательно, данное уравнение корней не имеет.

Пример 3. Решим уравнение

$$\log_x(x^2 - 2x + 2) = 1.$$

Этому уравнению удовлетворяют только такие числа  $x$ , для которых выполнены два неравенства  $x > 0$  и  $x \neq 1$  ( $x$  — основание логарифмической функции) и одно равенство

$$x^2 - 2x + 2 = x^1,$$

т. е.

$$x^2 - 3x + 2 = 0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет корни 1 и 2. Но  $x = 1$  не может быть решением данного уравнения. Следовательно, решением данного уравнения является только число 2.

Пример 4. Решим неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(5 - 2x) > -2. \quad (1)$$

Число  $-2$  равно  $\log_{\frac{1}{3}} 9$ . Поэтому данное неравенство можно переписать в виде

$$\log_{\frac{1}{3}}(5 - 2x) > \log_{\frac{1}{3}} 9. \quad (2)$$

Функция  $\log_{\frac{1}{3}} t$  определена при  $t > 0$  и убывает на  $R_+$ ,

так как  $\frac{1}{3} < 1$ . Следовательно, неравенству (2) удовлетворяют только такие числа  $x$ , для которых выполнено условие  $0 < 5 - 2x < 9$ , откуда  $-2 < x < 2,5$ .

Итак, решение данного неравенства есть интервал  $(-2; 2,5)$ .

Пример 5. Решите уравнение

$$\log_5^2 x - \log_{\sqrt{5}} x - 3 = 0.$$

Перейдем во втором слагаемом к основанию 5 и сделаем замену переменной  $t = \log_5 x$ , тогда

$$\log_{\sqrt{5}} x = \frac{\log_5 x}{\log_5 \sqrt{5}} = \frac{t}{\frac{1}{2}} = 2t.$$

Теперь данное уравнение переписывается в виде  $t^2 - 2t - 3 = 0$ . Корни этого квадратного уравнения 3 и  $-1$ . Решая уравнения замены  $\log_5 x = 3$  и  $\log_5 x = -1$ , находим:  $x = 5^3 = 125$  и  $x = 5^{-1} = 0,2$ .

Пример 6. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} \lg(x^2 + y^2) = 2, \\ \log_2 x - 4 = \log_2 3 - \log_2 y. \end{cases}$$

Первое уравнение системы равносильно уравнению  $x^2 + y^2 = 100$ , а второе — уравнению  $\frac{x}{16} = \frac{3}{y}$ , причем  $x > 0$  и  $y > 0$ . Таким образом, мы приходим к системе, состоящей из двух уравнений  $x^2 + y^2 = 100$ ,  $xy = 48$ , и двух неравенств  $x > 0$  и  $y > 0$ . Вычитая почленно из первого уравнения удвоенное второе уравнение, получаем:

$$x^2 + y^2 - 2xy = 4,$$

т. е.

$$(x - y)^2 = 4,$$

откуда

$$x - y = 2$$

или

$$x - y = -2.$$

Следовательно,  $y = x - 2$  или  $y = x + 2$ . Подставляя эти выражения для  $y$  во второе уравнение системы, получаем:

а) если  $y = x - 2$ , то

$$\begin{aligned} x(x - 2) &= 48, \\ x^2 - 2x - 48 &= 0, \\ x &= 8 \text{ или } x = -6. \end{aligned}$$

Так как  $x > 0$ , оставляем корень  $x = 8$  и тогда  $y = 6$ ;

б) если  $y = x + 2$ , то

$$\begin{aligned} x(x + 2) &= 48; \\ x^2 + 2x - 48 &= 0, \\ x &= -8 \text{ или } x = 6. \end{aligned}$$

Но так как  $x > 0$ ,  $x = 6$  и тогда  $y = 8$ .

Итак, данная система уравнений имеет два решения:  
а)  $x=8, y=6$ ; б)  $x=6, y=8$ .

Заметим еще, что с помощью логарифмов можно записать корень любого показательного уравнения вида  $a^x=b$ , где  $b>0$  (чего мы не могли еще сделать, решая примеры в п. 40). Этот корень имеет вид:  $x=\log_a b$ .

Пример 7. Решим уравнение  $5^{1-3x}=7$ .

По основному логарифмическому тождеству  $7=5^{\log_5 7}$  и уравнение записывается в виде

$$5^{1-3x}=5^{\log_5 7},$$

откуда  $1-3x=\log_5 7$  и  $x=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\log_5 7$ .

### Упражнения

Решите уравнение (564—566).

564. а)  $2^x=10$ ; б)  $(0,3)^x=7$ ;  
в)  $9^x=0,7$ ; г)  $10^x=\pi$ ;  
д)  $\log_3 x=2$ ; е)  $\log_{0,4} x=-1$ ;  
ж)  $\lg x=-2$ ; з)  $\log_9 x=-\frac{1}{2}$ .

565. а)  $\log_2 (3-x)=0$ ; б)  $\log_{0,3} (5+2x)=1$ ;  
в)  $\log_{\frac{1}{3}} (2x-4)=-2$ ; г)  $\log_{\pi} (x^2+2x+3)=\log_{\pi} 6$ .

566. а)  $3^{2-5x}=7$ ; б)  $0,2^{4-x}=3$ ;  
в)  $5^{x^2}=7$ ; г)  $3^{x^2+4x}=9$ .

Решите неравенство (567—570).

567. а)  $\log_3 x>2$ ; б)  $\log_7 x<0,1$ ;  
в)  $\log_{0,7} x>5$ ; г)  $\log_{0,2} x<-2$ .
568. а)  $3^x<5$ ; б)  $0,8^x<11$ ;  
в)  $1,7^{2x-1}\geq 7$ ; г)  $0,3^{2-x}>12$ .
569. а)  $\log_2 (x^2-x-4)<3$ ; б)  $\log_3 (12-2x-x^2)>2$ ;  
в)  $\lg (x^2-x+8)\geq 1$ ; г)  $\log_{\pi} (x+1)+\log_{\pi} x<\log_{\pi} 2$
570. а)  $\lg^2 x+2\lg x>3$ ; б)  $\log_2^2 x-\log_2 x\leq 6$ ;  
в)  $4^x-2^x\leq 2$ ; г)  $\left(\frac{1}{9}\right)^x-2\left(\frac{1}{3}\right)^x>3$ .
571. Что больше:  
а)  $\log_3 5$  или  $\log_7 4$ ; б)  $\log_{0,3} 2$  или  $\log_5 3$ ;  
в)  $\log_2 10$  или  $\log_5 30$ ; г)  $\log_3 10$  или  $\log_8 57$ ?

572. Выразите  $\lg x$  через  $\lg a$  и  $\lg b$ , где  $a>0, b>0, x>0$ :

- а)  $x=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b^2}}$ ; б)  $x^2=a^{2,5}\sqrt[4]{b^3}$ ;  
в)  $\sqrt[3]{x}=a^{\sqrt{2}}\sqrt[5]{b^2}$ ; г)  $\sqrt[3]{x^2a}=(\sqrt{a})^{\sqrt{10}}b^{\frac{1}{3}\lg a}$ .

Решите уравнение (573—575).

573. а)  $\log_a x=\log_a 3+\log_a 5$ ; б)  $\log_a x=\log_a 12-2\log_a 2$ ;  
в)  $\log_a x=\log_{\sqrt{a}} 2+\log_{\frac{1}{a}} 3$ ; г)  $\log_a x+\frac{1}{3}\log_a 2=\log_{a^2} 3$ ;  
д)  $\lg^2 x=1$ ; е)  $\log_3^2 x-\log_3 x-2=0$ ;  
ж)  $\log_5^2 x+\log_{0,2} x=2$ ; з)  $\log_2^2 (x+1)-\log_{\frac{1}{4}} (x+1)=5$ .

574. а)  $x^{\lg x}=10\,000$ ; б)  $x^{\log_5 x}=125x^2$ ;  
в)  $x^{\log_2 x-2}=8$ ; г)  $x^{\log_3 x-3}=\frac{1}{9}$ .

575. а)  $\frac{1}{\lg x-6}+\frac{5}{\lg x+2}=1$ ; б)  $\frac{1}{\lg x+1}+\frac{6}{\lg x+5}=1$ ;  
в)  $\log_2 x+\frac{4}{\log_x 2}=5$ ; г)  $2\log_{\sqrt{3}} x+\log_x \frac{1}{3}=3$ .

Решите систему уравнений (576—579).

576. а)  $\begin{cases} x+y=7, \\ \lg x+\lg y=1; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} \log_4 x+\log_4 y=1+\log_4 9, \\ x+y-20=0; \end{cases}$
- в)  $\begin{cases} \lg (x^2+y^2)=2, \\ \log_{48} x+\log_{48} y=1; \end{cases}$  г)  $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} (x+y)=2, \\ \log_5 (x-y)=2. \end{cases}$

577. а)  $\begin{cases} 3^x+3^y=12, \\ 3^{x+y}=27; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} y=2, \\ \log_{\frac{1}{3}} x-\log_{\frac{1}{3}} y=4; \end{cases}$
- в)  $\begin{cases} 10^{1+\lg (x+y)}=50, \\ \lg (x-y)+\lg (x+y)=2-\lg 5; \end{cases}$  г)  $\begin{cases} 3^{2x}-2^y=725, \\ 3^x-2^{\frac{y}{2}}=25. \end{cases}$

578. а)  $\begin{cases} y-\log_3 x=1, \\ x^y=3^{12}; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} 3^y\cdot 9^x=81, \\ \lg (x+y)^2-\lg x=2\lg 3; \end{cases}$
- в)  $\begin{cases} 3^{1+2\log_3 (y-x)}=48, \\ 2\log_5 (2y-x-12)=\log_5 (y-x)+\log_5 (y+x); \end{cases}$
- г)  $\begin{cases} \frac{1}{\lg y-1}+\frac{1}{\lg y+1}=2^{-x}, \\ \lg^2 y-2^x=5. \end{cases}$



579. а)  $\begin{cases} 2^{\cos x} + 2^{\frac{1}{\cos y}} = 5, \\ 2^{\cos x} + \frac{1}{\cos y} = 4; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} 9^2 \operatorname{tg} x + \cos y = 3, \\ 9^{\cos y} - 81^{\operatorname{tg} x} = 2; \end{cases}$

в)  $\begin{cases} \log_2 \sin x + \log_2 \sin y = -2, \\ \log_3 \cos x + \log_3 \cos y = 1 - \log_3 4; \end{cases}$

г)  $\begin{cases} 3^{\cos x} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\cos y}, \\ \log_2 (\sin x - \cos y) + \log_2 (\sin x + \cos y) = -1. \end{cases}$

## § 12. ПРОИЗВОДНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ И ЛОГАРИФИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЙ

### 45. Производная и первообразная показательной функции

В предыдущих пунктах графики показательной функции изображались в виде гладких линий (без изломов), к которым в каждой точке можно провести касательную. Но существование касательной к графику функции в точке равносильно ее дифференцируемости в этой точке. Поэтому естественно предположить, что показательная функция дифференцируема во всех точках.

Нарисуем несколько графиков функции  $a^x$  для  $a$ , равного 2; 2,3; 3; 3,4 (рис. 147), и проведем (мысленно) к ним касательные в точке с абсциссой 0. Углы наклона этих касательных к оси абсцисс приблизительно равны 35, 40, 48 и 51° соответственно, т. е. с возрастанием  $a$  угловой коэффициент касательной к графику функции  $a^x$  в точке  $M(0; 1)$  постепенно увеличивается от  $\operatorname{tg} 35^\circ$  до  $\operatorname{tg} 51^\circ$ . Представляется очевидным, что, увеличивая  $a$  от 2 до 3, мы найдем такое значение  $a$ , при котором угловой коэффициент соответствующей касательной равен 1 (т. е. угол наклона равен  $45^\circ$ ). Вот точная формулировка этого предложения (мы принимаем его без доказательства):

*Существует такое число, большее 2 и меньшее 3 (это число обозначают буквой  $e$ ), что показательная функция  $y = e^x$  в точке 0 имеет производную, равную 1, т. е.*

$$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \rightarrow 1 \text{ при } \Delta x \rightarrow 0. \quad (1)$$

**Теорема 1.** Показательная функция  $e^x$  дифференцируема в каждой точке и

$$(e^x)' = e^x.$$

**Доказательство.** Найдем сначала приращение функции  $y = e^x$  в точке  $x_0$ :

$$\Delta y = e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0} = e^{x_0} e^{\Delta x} - e^{x_0} = e^{x_0} (e^{\Delta x} - 1).$$

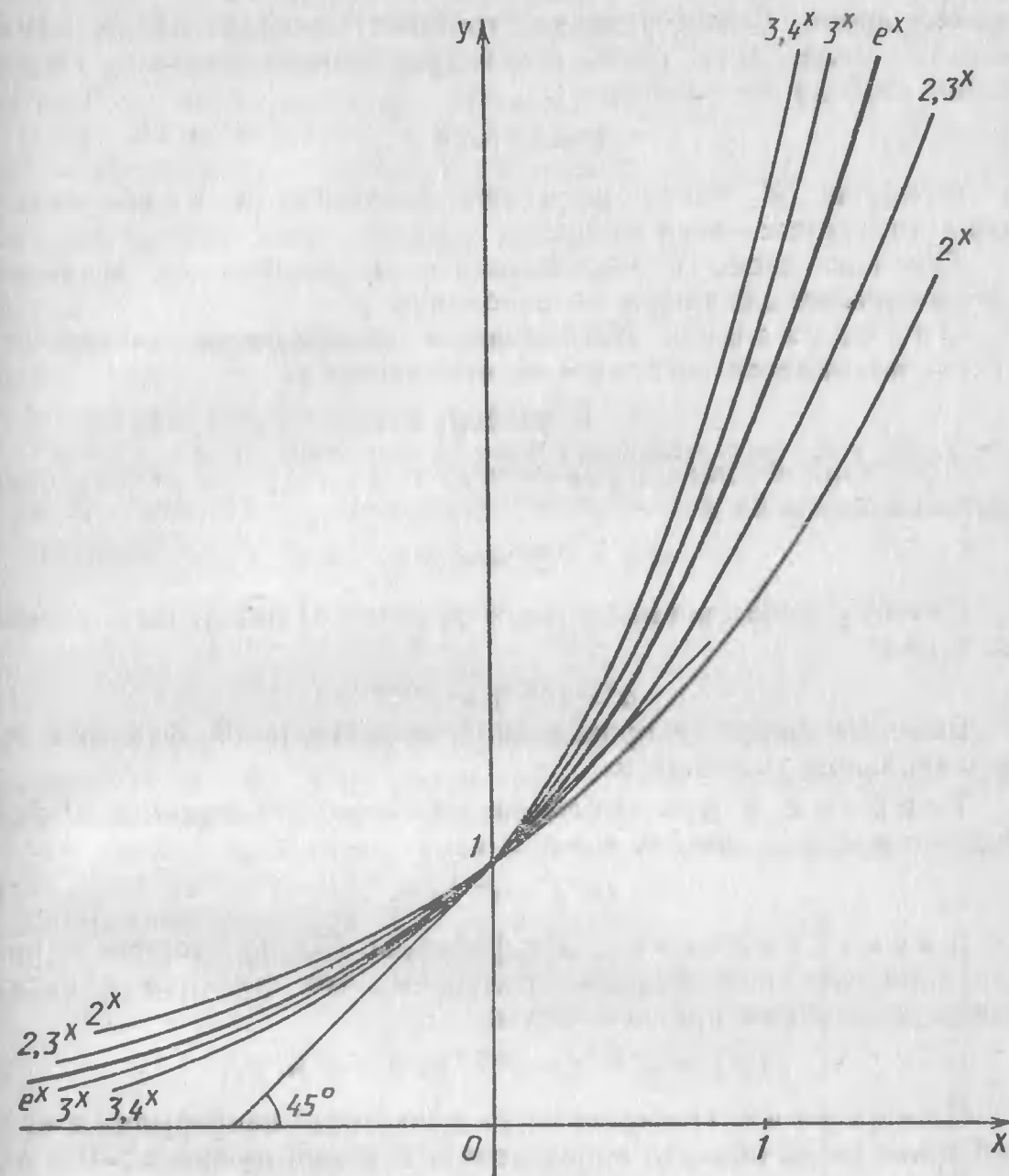


Рис. 147.

Пользуясь условием (1), находим:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{e^{x_0} (e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^{x_0} \cdot \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \rightarrow e^{x_0} \text{ при } \Delta x \rightarrow 0.$$

По определению производной отсюда следует, что  $y' = e^x$ , т. е.  $(e^x)' = e^x$  при любом  $x$ .

**Пример 1.** Найдем производную функции  $e^{5x}$ :

$$(e^{5x})' = e^{5x} (5x)' = 5e^{5x}.$$

**Замечание.** Доказано, что число  $e$  иррационально и поэтому записывается в виде бесконечной десятичной непериодической дроби:

ческой дроби. С помощью электронных вычислительных машин найдено более двух тысяч десятичных знаков числа  $e$ . Первые знаки этой дроби таковы:

$$e = 2,71828\ldots$$

Функцию  $e^x$  часто называют экспонентой и обозначают  $\exp x$  (читается: «эксп от икс»).

Так как число  $e$  положительно и отлично от 1, можно рассматривать логарифм по основанию  $e$ .

**Определение.** *Натуральным логарифмом* (обозначается  $\ln$ ) называется логарифм по основанию  $e$ :

$$\ln x = \log_e x. \quad (2)$$

По основному логарифмическому тождеству для любого положительного числа  $a$

$$e^{\ln a} = a.$$

Поэтому любая показательная функция  $a^x$  может быть записана в виде

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}. \quad (3)$$

Выведем формулу производной показательной функции при произвольном значении  $a$ .

**Теорема 2.** *При любом положительном  $a$  функция  $a^x$  дифференцируема в каждой точке  $x$  и*

$$(a^x)' = a^x \ln a. \quad (4)$$

**Доказательство.** Из формулы (3) по теореме о производной сложной функции получаем, что функция  $a^x$  ( $a > 0$ ) дифференцируема при любом  $x$  и

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} \ln a = a^x \ln a. \quad (5)$$

**Следствие.** Показательная функция  $a^x$  непрерывна в каждой точке своей области определения, т. е. при любом  $a > 0$  и любом  $x_0$  имеем:

$$a^x \rightarrow a^{x_0} \text{ при } x \rightarrow x_0.$$

Это вытекает из дифференцируемости показательной функции и леммы о непрерывности дифференцируемой функции (см. с. 88).

**Пример 2.** Найдем производные функций  $2^x$  и  $5^{-3x}$ .

По формуле (4) имеем:

$$(2^x)' = 2^x \ln 2, \\ (5^{-3x})' = (-3) \cdot 5^{-3x} \ln 5.$$

**Пример 3.** Исследуем функцию  $y = xe^x$  на возрастание (убывание) и экстремум.

Найдем производную этой функции:

$$y' = (xe^x)' = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = e^x(1+x).$$

Так как  $e^x > 0$  для любого  $x$ , то знак  $y'$  совпадает со знаком  $(1+x)$ . Следовательно,  $y' > 0$  на промежутке  $(-1; \infty)$ , поэтому  $y$  возрастает на промежутке  $[-1; \infty)$ . На промежутке  $(-\infty; -1)$  имеем  $y' < 0$ , поэтому  $y$  убывает на промежутке  $(-\infty; -1]$ . В точке  $x_0 = -1$  производная меняет знак с минуса на плюс, и, значит,  $x_0 = -1$  является точкой минимума.

Эскиз графика функции приведен на рисунке 148.

Из теорем 1 и 2 следует теорема 3.

**Теорема 3.** *Функция  $e^x$  есть первообразная для функции  $e^x$  на  $\mathbb{R}$ . Функция  $\frac{a^x}{\ln a}$  есть первообразная для функции  $a^x$  на  $\mathbb{R}$ .*

Действительно,  $\ln a$  — постоянная и поэтому

$$\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} (a^x)' = \frac{1}{\ln a} a^x \ln a = a^x$$

при любом  $x$ . Этим доказано, что  $\frac{a^x}{\ln a}$  есть первообразная для функции  $a^x$  на  $\mathbb{R}$ . А из равенства  $(e^x)' = e^x$  для всех  $x$  следует, что  $e^x$  есть первообразная для функции  $e^x$  на  $\mathbb{R}$ .

**Пример 4.** Найдем первообразные для функций: а)  $5^x$ ; б)  $4 \cdot 2^x$ ; в)  $4e^{3x} - 10 \cdot 0,6^x$ .

Пользуясь теоремой 3 и правилами нахождения первообразных, выписываем ответы:

$$\text{а) } \frac{5^x}{\ln 5}; \quad \text{б) } \frac{4 \cdot 2^x}{\ln 2}; \\ \text{в) } \frac{4}{3} e^{3x} - 10 \cdot \frac{0,6^x}{\ln 0,6}.$$

**Пример 5.** Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 3^x, \quad y = 0, \quad x = -1, \quad x = 2.$$

Указанная фигура есть криволинейная трапеция (рис. 149). Поэтому ее площадь  $S$  находим по формуле площади криволинейной трапеции:

$$S = \int_{-1}^2 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} \Big|_{-1}^2 = \\ = \frac{9}{\ln 3} - \frac{3^{-1}}{\ln 3} = \frac{26}{3 \ln 3}.$$

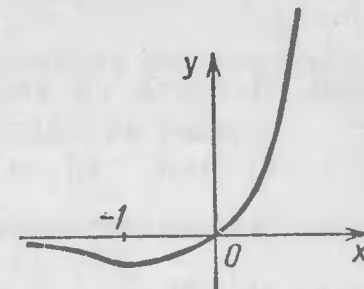


Рис. 148.

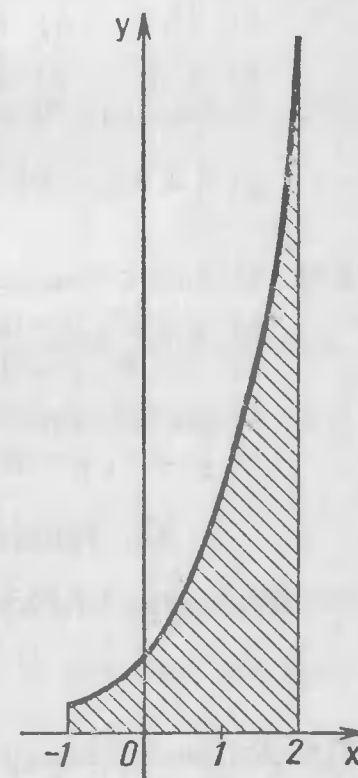


Рис. 149.

## Упражнения

580. Найдите по таблице натуральных логарифмов (или с помощью калькулятора):

а)  $\ln 3$ ; б)  $\ln 56$ ; в)  $\ln 47$ ; г)  $\ln 1,7$ .

Найдите производную функции (581—582).

581. а)  $e^{3x}$ ; б)  $e^{-2x}$ ; в)  $e^{x^2}$ ; г)  $e^{3-5x}$ ;  
д)  $e^{\frac{x}{2}} - 3e^{91x}$ ; е)  $e^{5x} + 4e^{\frac{x}{3}}$ ; ж)  $1,7^{\frac{x}{4}} + 1$ ; з)  $3^{5x} - 7 \cdot 2^{5-7x}$ .

582. а)  $2^x \cos x$ ; б)  $7^{\frac{x}{2}} \operatorname{tg} 3x$ ; в)  $x^3 e^{-x}$ ; г)  $\sqrt{x} \operatorname{ctg} 5x$ ;  
д)  $\frac{e^x}{x^2 + 1}$ ; е)  $\frac{3^x}{2^x + 5^x}$ ; ж)  $\frac{x^8}{4^x + 5}$ ; з)  $\frac{0,3^{-x}}{\sqrt{x} + 0,5}$ .

583. Исследуйте на возрастание (убывание) и экстремум функцию:

а)  $x e^{-x}$ ; б)  $x e^{5x}$ ; в)  $x^2 2^{-x}$ ; г)  $x^4 0,7^x$ .

584. Напишите уравнение касательной к графику функции  $f$  в точке с абсциссой  $x_0$ , если:

а)  $f(x) = e^x$ ,  $x_0 = 0$ ; б)  $f(x) = 3^x$ ,  $x_0 = 1$ .

585. Найдите первообразную для функции:

а)  $4^x$ ; б)  $7 \cdot e^x$ ; в)  $5 \cdot 3^x$ ; г)  $2 \cdot 0,9^x - 5,6^x$ ;  
д)  $e^{2x}$ ; е)  $2^{-10x}$ ; ж)  $12^{5-7x}$ ; з)  $2,3^{4+5x}$ .

586. Вычислите интеграл:

а)  $\int_{-2}^1 2^x dx$ ; б)  $\int_0^1 0,5^x dx$ ; в)  $\int_{-1}^1 4^x dx$ ; г)  $\int_{-\frac{1}{2}}^2 9^x dx$ .

587. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а)  $y = e^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ ;  
б)  $y = 2^x$ ,  $y = 0$ ,  $x = -1$ ,  $x = 2$ ;  
в)  $y = e^x$ ,  $y = e^{2x}$ ,  $x = 1$ ;  
г)  $y = 3^x$ ,  $y = 9^x$ ,  $x = 1$ .

### 46. Производная логарифмической функции

Докажем, что при любом  $x > 0$  выполнено равенство

$$\ln' x = \frac{1}{x}. \quad (1)$$

По основному логарифмическому тождеству  $x = e^{\ln x}$  при всех положительных  $x$ , т. е. в этом равенстве справа и слева стоит одна

и та же функция (определенная на  $R_+$ ). Поэтому производные функций  $x$  и  $e^{\ln x}$  равны, т. е.

$$x' = (e^{\ln x})'. \quad (2)$$

Производную правой части вычисляем по правилу нахождения производной сложной функции и теореме 1 (п. 45):

$$(e^{\ln x})' = e^{\ln x} \cdot \ln' x = x \ln' x,$$

а  $x' = 1$ .

Подставляем найденные производные в равенство (2):

$$1 = x \ln' x, \text{ откуда } \ln' x = \frac{1}{x}.$$

▼ Остается только объяснить, почему можно пользоваться правилом нахождения производной сложной функции. Для этого надо показать, что логарифмическая функция дифференцируема в каждой точке. Графики функций  $y = \log_a x$  и  $y = a^x$  симметричны относительно прямой  $y = x$ . Так как показательная функция дифференцируема в любой точке, а ее производная не обращается в нуль, график показательной функции имеет негоризонтальную касательную в каждой точке. Поэтому и график логарифмической функции имеет невертикальную касательную в любой точке. А это равносильно дифференцируемости логарифмической функции на ее области определения. ▼

Пример 1. Найдём производные функций: а)  $\ln(5+2x)$ , б)  $\log_3 x$ ; в)  $\log_7(2x)$ .

$$\text{а) } (\ln(5+2x))' = \frac{1}{5+2x} \cdot 2 = \frac{2}{5+2x};$$

$$\text{б) } (\log_3 x)' = \left( \frac{\ln x}{\ln 3} \right)' = \frac{1}{x \ln 3};$$

$$\text{в) } (\log_7 2x)' = \left( \frac{\ln 2x}{\ln 7} \right)' = \frac{2}{2x \ln 7} = \frac{1}{x \ln 7}.$$

Пример 2. Исследуем функцию  $y = x^2 \ln x$  на возрастание, убывание, экстремум и построим ее график.

Функция определена при  $x > 0$ . Найдём производную этой функции:

$$y' = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = 2x \left( \ln x + \frac{1}{2} \right).$$

Так как  $x > 0$ , знак  $y'$  совпадает со знаком  $\left( \ln x + \frac{1}{2} \right)$ . Отсюда следует, что  $y' > 0$  на промежутке  $\left( \frac{1}{\sqrt{e}}; \infty \right)$  и поэтому на промежутке  $\left[ \frac{1}{\sqrt{e}}; \infty \right)$  функция возрастает; на промежутке  $\left( 0; \frac{1}{\sqrt{e}} \right)$  производная  $y'$  отрицательна, поэтому  $y$  убывает на промежутке

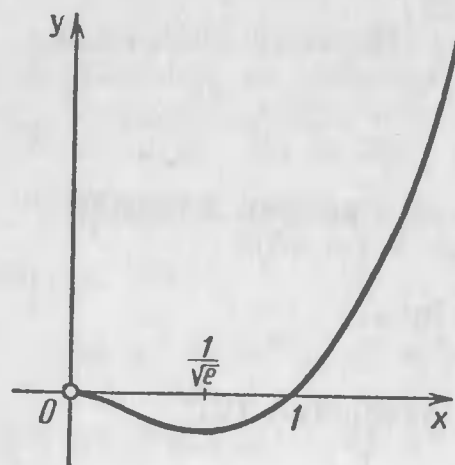


Рис. 150.

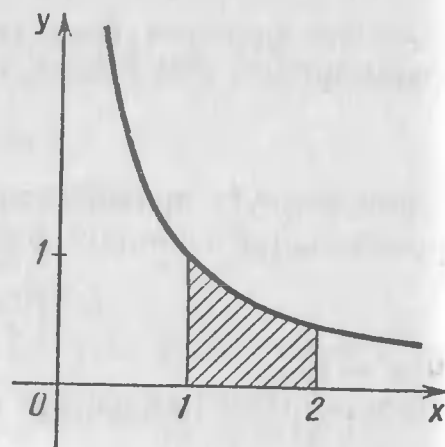


Рис. 151.

$(0; \frac{1}{\sqrt{e}}]$ . В точке  $\frac{1}{\sqrt{e}}$  производная меняет знак с минуса на плюс, значит, это точка минимума.

Эскиз графика функции приведен на рисунке 150.

Формула (1) показывает, что для функции  $\frac{1}{x}$  на промежутке  $(0; \infty)$  любая первообразная может быть записана в виде

$$\ln x + C. \quad (3)$$

Функция  $\frac{1}{x}$  имеет первообразную и на промежутке  $(-\infty; 0)$ , это функция  $\ln(-x)$ . Действительно,

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}. \quad (4)$$

Так как  $|x| = x$  при  $x > 0$  и  $|x| = -x$  при  $x < 0$ , мы доказали, что на любом промежутке, не содержащем точку 0, первообразной для функции  $\frac{1}{x}$  является функция  $\ln|x|$ .

**Пример 3.** Для функции  $\frac{1}{x+3}$  первообразные равны  $\ln|x+3| + C$  (на любом промежутке, не содержащем точку  $-3$ ).

Для функции  $\frac{1}{5x+7}$  общий вид первообразных  $\frac{1}{5} \ln|5x+7| + C$  (на любом промежутке, не содержащем точку  $-\frac{7}{5}$ ).

**Пример 4.** Найдем площадь фигуры, ограниченной линиями  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$  (рис. 151).

Поскольку  $\ln x$  при  $x > 0$  есть первообразная для  $\frac{1}{x}$ , площадь интересующей нас криволинейной трапеции равна

$$S = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$$

## Упражнения

Найдите производную функции (588—589).

588. а)  $\ln 2x$ ; б)  $\log_{0,3} x$ ; в)  $\log_7 (2+3x)$ ; г)  $\log_{0,2} (9+5x)$ ;  
д)  $\log_2 7x$ ; е)  $\ln(1+3x)$ ; ж)  $\ln 6x$ ; з)  $x^3 \ln x$ .

589. а)  $\frac{\ln x}{x}$ ; б)  $\frac{\ln(5+3x)}{x^2+1}$ ; в)  $\lg 3x$ ; г)  $\sqrt{x} \lg x$ .

590\*. Напишите уравнение касательной к графику функции  $f$  в точке с абсциссой  $x_0$ , если:

- а)  $f(x) = \ln x$ ,  $x_0 = 1$ ; б)  $f(x) = \ln x$ ,  $x_0 = 3$ ;  
в)  $f(x) = \lg x$ ,  $x_0 = 1$ ; г)  $f(x) = \log_3 x$ ,  $x_0 = 9$ .

591. Исследуйте на возрастание (убывание) и на экстремум функцию:

- а)  $x \ln x$ ; б)  $x \ln^2 x$ ; в)  $\frac{\ln x}{x}$ ; г)  $\frac{x}{\ln x}$ .

592. Найдите одну из первообразных для функции:

- а)  $\frac{1}{x+5}$ ; б)  $\frac{1}{3+2x}$ ; в)  $\frac{3}{7x+1}$ ; г)  $\frac{2}{x} - \frac{3}{x+5}$ .

593. Вычислите интеграл:

- а)  $\int_1^7 \frac{dx}{x}$ ; б)  $\int_1^a \frac{dx}{x}$  ( $a > 1$ ); в)  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{3-2x}$ ; г)  $\int_{-4}^0 \frac{dx}{0,5x+3}$ .

594. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

- а)  $y = 0$ ,  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x = 1$ ,  $x = 3$ ;  
б)  $y = 0$ ,  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x = 2$ ,  $x = 5$ ;  
в)  $y = 0$ ,  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x = 4$ ,  $x = 10$ ;  
г)  $y = 0$ ,  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x = 0,3$ ,  $x = 1$ .

## 47. Степенная функция и ее производная

1. Вы уже знаете, что для любого действительного числа  $p$  и каждого положительного  $x$  определено число  $x^p$ . Тем самым на промежутке  $(0; \infty)$  при фиксированном  $p$  определена функция  $f$ , заданная формулой

$$f(x) = x^p.$$

Эта функция называется *степенной* (с показателем степени  $p$ ). Если  $p > 0$ , то степенная функция определена и при  $x = 0$ , поскольку  $0^p = 0$ . При целых  $p$  степенная функция определена и для  $x < 0$ . При четных  $p$  это функция четная, а при нечетных  $p$  — нечетная. Поэтому исследование степенной функции достаточно проводить только на промежутке  $(0; \infty)$ .



В предыдущих разделах курса были получены формулы для производной функции  $x^p$  лишь при целых показателях степени, а также  $p = \frac{1}{2}$ . Теперь нам остается вывести формулу для производной степенной функции при произвольном действительном показателе степени  $p$ :

$$(x^p)' = px^{p-1}. \quad (1)$$

Действительно, так как  $x = e^{\ln x}$ , то  $x^p = e^{p \ln x}$ . Отсюда по правилу вычисления производной сложной функции получаем:

$$(x^p)' = (e^{p \ln x})' = e^{p \ln x} (p \ln x)' = x^p \cdot p \cdot \frac{1}{x} = px^{p-1}.$$

Формула (1) доказана.

При  $p < 0$  степенная функция убывает на промежутке  $(0; \infty)$ , поскольку  $(x^p)' = px^{p-1} < 0$  при  $x > 0$ . Кроме того, надо учесть, что при  $x = 0$  степенная функция равна 0 и  $x^p \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$  и  $x > 0$ . Поэтому точка 0 присоединяется к промежутку возрастания, т. е. при  $p > 0$  степенная функция возрастает на промежутке  $[0; \infty)$ . Примеры графиков степенной функции при различных  $p$  приведены на рисунках 152—154.

2. Выведем приближенную формулу

$$(1 + \Delta x)^\alpha \approx 1 + \alpha \Delta x \quad (2)$$

(приближение тем точнее, чем меньше  $\Delta x$ ).

Рассмотрим функцию  $f(x) = x^\alpha$  и воспользуемся приближенной формулой

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x, \quad (3)$$

известной из п. 23, при  $x_0 = 1$  и  $x = 1 + \Delta x$ . Имеем:  $f(x_0) = f(1) = 1$  и  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ , откуда  $f'(x_0) = f'(1) = \alpha \cdot 1^{\alpha-1} = \alpha$ . По формуле (3)

$$f(x) = (1 + \Delta x)^\alpha \approx 1 + \alpha \Delta x.$$

Чаще всего эту формулу применяют для вычисления корней. Полагая  $\alpha = \frac{1}{n}$ , находим:

$$\sqrt[n]{1 + \Delta x} = (1 + \Delta x)^{\frac{1}{n}} \approx 1 + \frac{\Delta x}{n}. \quad (4)$$

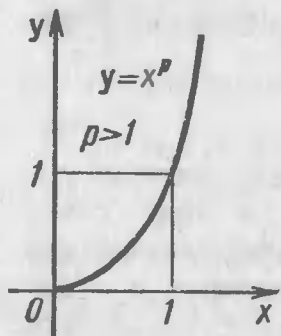


Рис. 152.

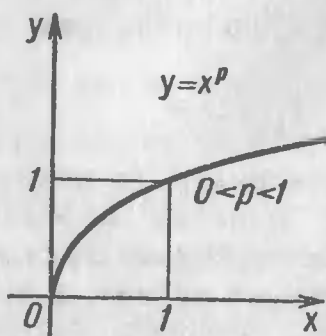


Рис. 153.

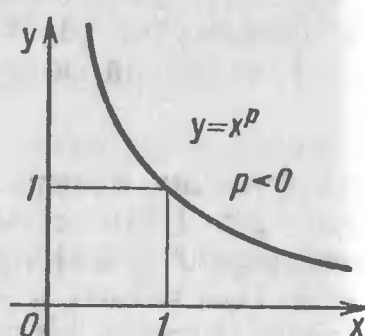


Рис. 154.

Пример. Вычислим приближенные значения: а)  $\sqrt[4]{1,08}$ ; б)  $\sqrt[3]{27,03}$ ; в)  $\sqrt[10]{1000}$ .

Воспользуемся формулой (4):

$$\text{а) } \sqrt[4]{1,08} = (1 + 0,08)^{\frac{1}{4}} \approx 1 + \frac{1}{4} \cdot 0,08 = 1,02;$$

$$\text{б) } \sqrt[3]{27,03} = \sqrt[3]{27 \left(1 + \frac{0,03}{27}\right)} = 3 \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{0,03}{27}} \approx 3 \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{0,03}{27}\right) \approx 3,0011.$$

Значение  $\sqrt[3]{27,03}$  с восемью знаками после запятой таково:  $\sqrt[3]{27,03} \approx 3,0011107$ .

в) Заметим, что  $2^{10} = 1024$ . Имеем:

$$\sqrt[10]{1000} = \sqrt[10]{2^{10} - 24} = 2 \cdot \sqrt[10]{1 - \frac{24}{1024}} \approx 2 \cdot \left(1 - \frac{24}{10 \cdot 2^{10}}\right) \approx 1,995.$$

Из формулы (1) следует, что производной степенной функции  $f(x) = x^p$  является степенная функция  $(f'(x) = px^{p-1})$ . Иначе обстоит дело с первообразной степенной функции.

При  $p \neq -1$  общий вид первообразной степенной функции  $f(x) = x^p$ , как легко проверить, таков:  $F(x) = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$ . При  $p = -1$ , как известно, первообразной функции  $f$  является функция вида  $\ln |x| + C$ .

### Упражнения

595. Изобразите схематически график функции и найдите ее производную:

$$\text{а) } f(x) = x^{\sqrt{3}}; \quad \text{б) } g(x) = x^{\frac{1}{\pi}}; \quad \text{в) } u(x) = x^{-e}; \quad \text{г) } v(x) = x^{0,1}.$$

596. На рисунке 155 построены графики функций  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = \sqrt[3]{x}$ ;  $y = \sqrt[4]{x}$  ( $x \geq 0$ ).

а) Найдите по графику значения  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{3}$ ,  $\sqrt[4]{3}$ .

б) Найдите значения  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{3}$ ,  $\sqrt[4]{3}$ , пользуясь таблицами или калькулятором.

в) Вычислите приближенные значения  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{3}$  и  $\sqrt[4]{3}$ , пользуясь формулой (4).

У к а з а н и е:  $2 = 1,4^2 + 0,04$ ;  $3 = 1,4^3 + 0,256$ ;  $3 = 1,3^4 + 0,1439$ .

г) Сравните полученные результаты.

597. Вычислите с помощью формулы (4) приближенные значения:

$$\text{а) } (8 \cdot 3)^{\frac{1}{3}}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{81}; \quad \text{в) } \sqrt[4]{625 \cdot 3}; \quad \text{г) } 48^{\frac{1}{4}}.$$

598. Найдите приближенные значения:

$$\text{а) } \sqrt{9,02}; \quad \text{б) } \sqrt[3]{30}; \quad \text{в) } \sqrt[4]{90}; \quad \text{г) } \sqrt[5]{33}.$$

599. Найдите общий вид первообразных функции:

$$\text{а) } y = x^{2,7}; \quad \text{б) } y = x^{\sqrt{3}}; \quad \text{в) } y = -\frac{1}{2}x^{-\sqrt{2}}; \quad \text{г) } 3x^{-1}.$$

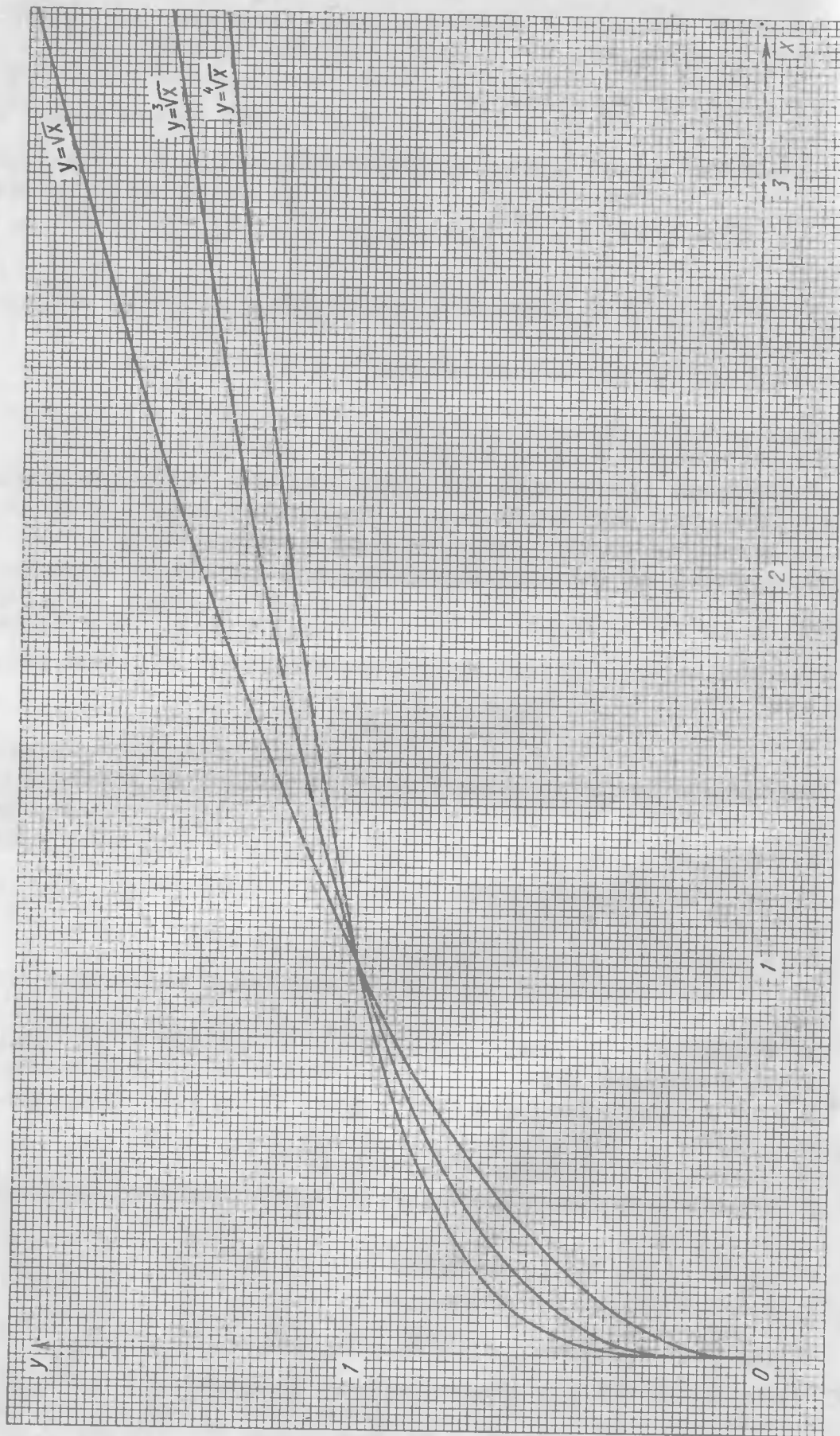


Рис. 152

600. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

- а)  $y=0$ ,  $y=x^{\sqrt{2}}$ ,  $x=0$ ,  $x=1$ ;
- б)  $y=0$ ,  $y=\frac{1}{x}$ ,  $x=3$ ,  $x=5$ ;
- в)  $y=0$ ,  $y=x^{-0,8}$ ,  $x=1$ ,  $x=32$ ;
- г)  $y=x^{\sqrt{3}}$ ;  $y=\frac{1}{x}$ ,  $x=\frac{1}{2}$ .

#### 48. Дифференциальное уравнение показательного роста и показательного убывания

Решение многих задач физики, техники, биологии и социальных наук сводится к математической задаче нахождения функций  $f$ , удовлетворяющих дифференциальному уравнению

$$f'(x) = kf(x), \quad (1)$$

где  $k$  — некоторая константа.

Зная формулу производной показательной функции, легко догадаться, что решением уравнения (1) является любая функция вида

$$f(x) = Ce^{kx}, \quad (2)$$

где  $C$  — постоянная. Так как  $C$  произвольно, у дифференциального уравнения (1) бесконечно много решений.

Докажем, что других решений, кроме функций вида (2), уравнение (1) не имеет. Для этого рассмотрим произвольную функцию  $f$ , удовлетворяющую уравнению (1), и вспомогательную функцию

$$F(x) = f(x)e^{-kx}. \quad (3)$$

Найдем производную функции  $F$ :

$$F'(x) = f'(x)e^{-kx} + f(x)(e^{-kx})' = f'(x)e^{-kx} - kf(x)e^{-kx}.$$

Подставляя  $kf(x)$  вместо  $f'(x)$  из уравнения (1), получим:

$$F'(x) = kf(x)e^{-kx} - kf(x)e^{-kx} = 0.$$

Из равенства производной функции  $F$  нулю следует, что  $F(x) = C$  при всех  $x$ . Из (3) получаем:

$$f(x)e^{-kx} = C, \text{ откуда } f(x) = Ce^{kx},$$

что и требовалось доказать.

**З а м е ч а н и е.** В приведенных выше рассуждениях мы предполагали, что функция  $f$  определена и удовлетворяет уравнению (1) на всей числовой прямой. В конкретных задачах часто приходится рассматривать функции, удовлетворяющие уравнению (1) только на некотором промежутке. Естественно, что в таком случае формула (2) будет давать общее решение задачи только на промежутке, на котором выполняется уравнение (1).

Смысл дифференциального уравнения (1) заключается в том, что скорость изменения функции в точке  $x$  пропорциональна значению самой функции в этой точке. Это уравнение часто встречается при решении практических задач.

**Пример 1.** (Радиоактивный распад.) Пусть в начальный момент времени масса радиоактивного вещества равна

$$m(0) = m_0. \quad (4)$$

Известно, что скорость уменьшения массы вещества  $m(t)$  со временем  $t$  пропорциональна его количеству, т. е. что выполнено уравнение

$$m'(t) = -km(t),$$

где  $k > 0$ . По установленному выше

$$m(t) = Ce^{-kt}.$$

Константа  $C$  находится из условия (4). А именно при  $t = 0$

$$m_0 = m(0) = Ce^{-k \cdot 0} = C, \text{ т. е. } C = m_0.$$

Окончательно получаем:

$$m(t) = m_0 e^{-kt}. \quad (5)$$

Рассмотренный пример типичен: чтобы выделить из бесконечного числа решений дифференциального уравнения одно, обычно требуется еще ввести «начальные условия» (в нашем случае это условие (4)).

Промежуток времени  $T$ , через который масса радиоактивного вещества уменьшается в два раза, называют «периодом полураспада» этого вещества. Зная  $T$ , можно найти  $k$ . Так как

$$m(T) = \frac{1}{2} m_0, \text{ т. е. } m_0 e^{-kT} = \frac{1}{2} m_0,$$

имеем:

$$e^{-kT} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно,  $e^{kT} = 2$ ,  $kT = \ln 2$ , откуда

$$k = \frac{\ln 2}{T}.$$

Например, для радия  $T \approx 1550$  лет. Поэтому (если время измеряется в годах)

$$k = \frac{\ln 2}{1550} \approx 0,000447.$$

Через миллион лет от начальной массы радия  $m_0$  останется только

$$m(10^6) \approx m_0 e^{-447} \approx 0,6 \cdot 10^{-194} m_0.$$

**Пример 2.** Пусть население страны возрастает на 2% в год. С неплохим приближением можно считать, что зависимость численности населения страны  $S = S(t)$  от времени (исчисляемого в годах) подчинена уравнению

$$S'(t) = 0,02S(t)$$

следовательно, задается формулой

$$S(t) = S_0 e^{0,02t},$$

где  $S_0 = S(0)$  — численность населения в начальной дате наших расчетов.

**Пример 3.** Пусть тело, имеющее в начальный момент времени температуру  $T_0$ , помещено в среду температуры  $T_1$ . Естественно, что при  $T_0 < T_1$  тело будет постепенно нагреваться, а при  $T_0 > T_1$  — охлаждаться.

Предположим (хотя это и довольно грубое приближение к действительности), что скорость изменения температуры тела  $T(t)$  пропорциональна разности температур. Это значит, что\*

$$T'(t) = -k(T - T_1). \quad (6)$$

Чтобы найти решение уравнения (6), рассмотрим функцию

$$f(t) = T(t) - T_1.$$

Из (6) следует:

$$f'(t) = -kf(t).$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$f(t) = Ce^{-kt}.$$

Следовательно,

$$T(t) = Ce^{-kt} + T_1. \quad (7)$$

При  $t = 0$  имеем:

$$T_0 = T(0) = Ce^{-k \cdot 0} + T_1 = C + T_1,$$

откуда

$$C = T_0 - T_1.$$

Окончательно получаем, что решение уравнения (6), удовлетворяющее начальному условию

$$T(0) = T_0, \quad (8)$$

имеет вид:

$$T(t) = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-kt}. \quad (9)$$

\* Поставив в правой части уравнения (6) знак минус, мы считаем коэффициент  $k$  положительным в соответствии со сказанным о направлении изменения температуры  $T$  при  $T > T_1$  и при  $T < T_1$ .



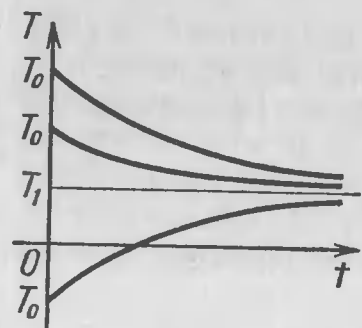


Рис. 156.

На рисунке 156 изображены схематически графики функций

$$T = T(t),$$

соответствующие различным начальным значениям  $T_0$ . Все они при  $t$ , стремящемся к бесконечности, приближаются к стационарному решению

$$T(t) = T_1, \quad (10)$$

которое получается при  $T_0 = T_1$ , т. е. при условии, что в начальный момент тело имеет температуру окружающей среды. ▼

Вы встречаетесь с дифференциальными уравнениями третий раз. Напомним два предыдущих случая.

1. При вертикальном движении под действием силы тяжести координата точки  $z$  единичной массы удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$z''(t) = g. \quad (11)$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$z(t) = z_0 + v_0 t + \frac{g}{2} t^2, \quad (12)$$

где

$$z_0 = z(0), \quad v_0 = z'(0). \quad (13)$$

Задав  $z_0$  и  $v_0$ , мы получим уже единственное решение.

2. При гармонических колебаниях в соответствии с дифференциальным уравнением

$$y''(t) = -\omega^2 y(t) \quad (14)$$

общее решение имеет вид:

$$y(t) = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (15)$$

где  $A$  и  $\varphi$  — произвольные константы. Но эти константы можно определить, если заданы начальные условия

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = v_0.$$

Эти примеры позволяют понять, насколько мощным аппаратом исследования являются дифференциальные уравнения. Очень часто элементарные законы, управляющие каким-либо процессом, записываются в виде дифференциальных уравнений, а для того чтобы выяснить, как процесс разворачивается во времени, приходится эти дифференциальные уравнения решать.

## Упражнения

601. Докажите, что функция  $y = 5e^{3x}$  удовлетворяет уравнению  $y' = 3y$ .
602. Докажите, что функция  $y = 7e^{-2x}$  удовлетворяет уравнению  $y' = -2y$ .
603. Докажите, что функция  $y = 3e^{-7x}$  удовлетворяет уравнению  $y' = -7y$ .
- 604\*. От  $m$  мг радия  $C$  через  $t$  мин радиоактивного распада осталось  $n$  мг. Найдите период полураспада радия  $C$ .
- 605\*. К началу радиоактивного распада имели 1 г радия  $A$ . Через сколько минут его останется 0,125 г, если его период полураспада равен 3 мин?
- 606\*. Период полураспада радиоактивного вещества равен 1 ч. Через сколько часов его количество уменьшится в 10 раз?
- 607\*. Вычислите, какая доля радия останется через 1000 лет, если период его полураспада равен 1550 лет.
- 608\*. Докажите, что если функция  $f$  имеет производную на  $R$  и для любых двух значений  $x_1$  и  $x_2$  выполняется равенство  $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$ , то  $f(x) = e^{ax}$  или  $f(x) = 0$  для  $x \in R$ .
- 609\*. Одно тело имеет температуру  $200^\circ$ , а другое  $100^\circ$ . Через 10 мин остывания этих тел на воздухе с температурой  $0^\circ$  первое тело остыло до температуры  $100^\circ$ , а второе — до  $80^\circ$ . Через сколько минут температуры тел сравняются?
- 610\*. Два тела имеют одинаковую температуру  $100^\circ$ . Они вынесены на воздух (его температура  $0^\circ$ ). Через 10 мин температура одного тела стала  $80^\circ$ , а второго  $64^\circ$ . Через сколько минут после начала остывания разность их температур будет равна  $25^\circ$ ?
- 611\*. Моторная лодка движется со скоростью 30 км/ч. Какова скорость лодки через 3 мин после выключения мотора? (Воспользуйтесь тем, что скорость лодки  $v(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению  $v'(t) = -kv(t)$  (где  $k = \frac{5}{3}$ ,  $v$  — скорость в метрах в минуту).

## Сведения из истории

Дробные показатели степени и наиболее простые правила действий над степенями с дробными показателями встречались в XIV в. у французского математика Н. О р е с м а (1323—1382). Франц Н. Ш ю к е (XV в.) рассматривал степени с отрицательными и нулевыми показателями.

Немецкий математик М. Ш т и ф е л ь (1486—1567) ввел название «показатели» (exponenten) и дал определение  $a^0 = 1$  при  $a \neq 0$ . Сопоставляя натуральные числа с натуральными степенями одного и того же основания, он для этого частного случая пришел к соотношениям  $\log(ab) = \log a + \log b$ ,  $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$ .



Логарифмы были введены (независимо друг от друга) английским математиком Д. Ж. Непером (1550—1617) и швейцарским математиком И. Бюрги (1552—1632). Теорию логарифмов развил Непер. Он разработал способы вычисления арифметических выражений с помощью логарифмов и составил подробные таблицы логарифмов. Таблицы Непера мало отличались от современных таблиц натуральных логарифмов. Десятичные логарифмы были введены английским математиком Г. Бриггсом (1556—1630). Лейбниц еще в конце XVII в. с помощью правил логарифмирования решал показательные уравнения. Использование таблиц логарифмов, а позже логарифмической линейки значительно упростило вычисления, и они долго были одним из основных средств вычислений. Французский математик Лаплас говорил, что изобретение логарифмов удлинило жизнь вычислителей.

### Вопросы и задачи на повторение

- 1) Дайте определение корня  $n$ -й степени из числа. Что такое арифметический корень  $n$ -й степени?  
2) Найдите значение:  
а)  $\sqrt[3]{-27}$ ; б)  $\sqrt[4]{625}$ ; в)  $\sqrt[7]{-128}$ ; г)  $\sqrt[6]{\frac{1}{64}}$ ; д)  $(\sqrt[n]{x})^n$ .  
3) Решите уравнение:  
а)  $x^3 = 125$ ; б)  $x^4 = 64$ ; в)  $x^5 = -\frac{1}{243}$ ; г)  $x^4 = -16$ .
- 1) Сформулируйте основные свойства арифметических корней.  
2) Преобразуйте выражение:  
а)  $\sqrt[4]{8 \cdot \sqrt[3]{4}}$ ; б)  $\sqrt[5]{\frac{125}{320}}$ ; в)  $(\sqrt[6]{\frac{27}{8}})^2$ ; г)  $\sqrt{\frac{a^4 b^2}{c^8}}$ .  
3) Какое из чисел больше:  
а)  $\sqrt[5]{6}$  или  $\sqrt[5]{5}$ ; б)  $\sqrt[5]{5}$  или  $\sqrt[3]{3}$ ;  
в)  $\sqrt[7]{128}$  или  $\sqrt[5]{4}$ ; г)  $2^{100}$  или  $100^{20}$ ?
- 1) Дайте определение степени с рациональным показателем и сформулируйте основные свойства таких степеней.  
2) Найдите значение:  
а)  $16^{-\frac{1}{4}}$ ; б)  $(\frac{81}{625})^{\frac{1}{4}}$ ; в)  $((\frac{125}{8})^{\frac{2}{3}})^{-\frac{1}{6}}$ ; г)  $\sqrt[5]{64} \cdot 2^{-\frac{1}{5}} (2^{\frac{1}{10}})^6$ .  
3) Какое из чисел больше:  
а)  $\sqrt[3]{16}$  или  $2^{\frac{5}{4}}$ ; б)  $3^{-\frac{2}{3}}$  или  $9^{-\frac{3}{4}}$ ;  
в)  $0,3^{\frac{4}{7}}$  или  $0,3^{-\frac{4}{7}}$ ; г)  $5^{-\frac{2}{3}}$  или  $5^{-0,6}$ ?

- 1) Сформулируйте основные свойства показательной функции.  
2) Постройте график функции:  
а)  $y = 4^x$ ; б)  $y = (\frac{1}{4})^x$ ; в)  $y = 6^x$ ; г)  $y = (\frac{1}{6})^x$ .  
3) Какое из чисел больше:  
а)  $2^{0,4}$  или  $2^{\frac{\sqrt{2}}{3}}$ ; б)  $1,2^{-\sqrt{3}}$  или  $1,2^{\sqrt{5}}$ ;  
в)  $(\frac{1}{2})^{\sqrt{5}}$  или  $(\frac{1}{2})^{\sqrt{3}}$ ; г)  $0,3^\pi$  или  $0,3^{-3}$ ?
- 1) а) Найдите корни уравнения  $a^x = a^c$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ).  
б) Решите неравенство  $a^x > a^c$  (рассмотрите два случая:  $0 < a < 1$  и  $a > 1$ ).  
2) Решите уравнение:  
а)  $27^x = 9^{\frac{1}{5}}$ ; б)  $3^{x+2} - 3^x = 72$ ;  
в)  $0,5^{x^2+x-2,5} = \sqrt{2}$ ; г)  $9^{x+3} + 3^{x+2} = 18$ .  
3) Решите неравенство:  
а)  $3^x < \frac{1}{9}$ ; б)  $(\frac{1}{2})^{x+1} > 4$ ; в)  $5^{x^2+1} > \frac{1}{5}$ ; г)  $0,2^{x^2+1} > 5$ .
- 1) Что такое обратная функция? Приведите примеры функции и ей обратной. Сформулируйте теорему об обратной функции.  
2) Сформулируйте свойство графика обратной функции. Постройте график функции  $f$  и обратной к ней функции, если:  
а)  $f(x) = 2x + 3$ ; б)  $f(x) = x^3$ ;  
в)  $f(x) = x^2$ ,  $x \geq 0$ ; г)  $f(x) = x^2$ ,  $x \leq 0$ .  
3) Задайте формулой функцию, обратную к функции  $f$ , если:  
а)  $f(x) = -3x + 2$ ; б)  $f(x) = x^3 + 1$ ;  
в)  $f(x) = \frac{1}{x+3}$ ; г)  $f(x) = x^2$ ,  $x \leq 0$ .
- 1) Дайте определение логарифмической функции и сформулируйте ее основные свойства.  
2) Постройте график функции:  
а)  $y = \log_4 x$ ; б)  $y = \log_5 x$ ; в)  $y = \log_{\frac{1}{5}} x$ ; г)  $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ .  
3) Какое из чисел больше:  
а)  $\log_3 5$  или  $\log_3 6$ ; б)  $\log_{\frac{1}{3}} 5$  или  $\log_{\frac{1}{3}} 6$ ;  
в)  $\lg 7$  или  $3 \lg 2$ ; г)  $\log_2 3$  или  $\log_3 2$ ?
- 1) Сформулируйте основные свойства логарифмов.  
2) Прологарифмируйте по основанию  $a$  выражение:  
а)  $16b^7 \sqrt[5]{c^2}$ ,  $a = 2$ ; б)  $\frac{c^4}{\sqrt[3]{100b^a}}$ ,  $a = 10$ ;  
в)  $27 \frac{\sqrt{b^7}}{c^4}$ ,  $a = 3$ ; г)  $\frac{0,49b^3}{c^5 \sqrt{c}}$ ,  $a = 0,7$ .

3) Найдите  $x$ , если:

а)  $\log_5 x = \log_5 1,5 + \frac{1}{3} \log_5 8$ ;

б)  $\lg x = 1 + 2 \lg 3 - \frac{2}{3} \lg 125$ ;

в)  $\log_2 x = 2 \log_2 5 - \frac{1}{3} \log_2 8 + \log_2 0,2$ ;

г)  $\log_3 x = 5 \log_3 7 + \frac{2}{3} \log_3 27 - \frac{3}{2} \log_3 16$ .

9. 1) а) Укажите все корни уравнения  $\log_a x = b$  ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ).

б) Решите неравенство

$$\log_a x > \log_a c$$

(рассмотрите два случая:  $0 < a < 1$  и  $a > 1$ ).

2) Решите уравнение:

а)  $\log_2 (x - 15) = 4$ ; б)  $\lg (x^2 - 2x - 4) = \lg 11$ ;

в)  $\ln^2 (x - 2) = 4$ ; г)  $\lg^2 x + 2 \lg x = 8$ .

3) Решите неравенство:

а)  $\log_{0,6} x > 2$ ; б)  $\log_7 x < 1$ ;

в)  $\ln x \geq -3$ ; г)  $\lg x \leq -2$ .

10. 1) Что такое число  $e$ ? Какую производную имеет функция  $y = e^x$ ?  $y = a^x$ ?

2) Найдите производную функции:

а)  $f(x) = e^{2x}$ ; б)  $g(x) = e^{-3x}$ ; в)  $u(x) = 3e^{7x-1}$ ;

г)  $v(x) = 5 - 2e^{4-3x}$ .

3) Найдите общий вид первообразных для функции:

а)  $f(x) = e^{2x}$ ; б)  $g(x) = e^{-3x}$ ; в)  $u(x) = 5e^{0,7x}$ ;

г)  $v(x) = e^{5x} - 7e^{-4x}$ .

11. 1) Какую производную имеет функция  $\ln x$ ? Найдите общий вид первообразных для функции  $\frac{1}{x}$ .

2) Найдите производную функции:

а)  $\ln 3x$ ; б)  $\ln (7 - 2x)$ .

3) Найдите общий вид первообразных для функции:

а)  $f(x) = \frac{1}{5x}$ ; б)  $g(x) = \frac{1}{x-3}$ .

12. 1) Какую производную имеет степенная функция  $x^p$ ?

2) Постройте график функции:

а)  $y = x^7$ ; б)  $y = x^{-4}$ ; в)  $y = x^{0,3}$ ; г)  $y = x^{\sqrt{2}}$ .

(Найдите производную данной функции.)

3) Найдите приближенное значение:

а)  $\sqrt[5]{32,02}$ ; б)  $\sqrt[4]{127,9}$ .

## Дополнительные упражнения к главе IV

Изобразите схематически график функции (612—613)

612. а)  $y = 0,7^x$ ; б)  $y = \left(\frac{1}{\pi}\right)^x$ ; в)  $y = \log_{0,6} x$ ; г)  $y = \log_{\pi} x$ .

613. а)  $y = \lg(-x)$ ; б)  $y = \lg(x-3)$ ;

в)  $y = \lg(x+3)$ ; г)  $y = \lg x + 3$ .

Решите уравнение (614—619).

614. а)  $3^x = 7$ ; б)  $2^x \cdot 7^x = 10$ ;

в)  $5^{3-2x} = 4$ ; г)  $0,3^{1-\frac{x}{2}} = 5^{3x}$ .

615. а)  $\ln(4 + 2x - x^2) = 0$ ; б)  $\ln(2x + 3e) = 1$ ;

в)  $\ln(x^2 - x + 2) = \ln 4$ ; г)  $\ln(x^2 + 3x + 1) = \ln 11$ .

616. а)  $e^{1-x} = e^x$ ; б)  $e^x - 1 = \frac{6}{e^x}$ ; в)  $2^{1-x} = 5$ ; г)  $2^{5-3x} = 7^4$ .

617. а)  $\log_3 x = -1$ ;

б)  $\log_5 x = \log_5 7$ ;

в)  $\log_5 x = -\log_5 7$ ;

г)  $\log_2 x = 3 - \log_2 7$ .

618. а)  $\log_{\frac{1}{2}} x = 3$ ;

б)  $\log_{0,3} x = 2$ ;

в)  $\log_3 (\log_5 x) = 0$ ;

г)  $\log_4 (\log_2 x) = -\frac{1}{2}$ .

619. а)  $\log_2 \sin x + 1 = 0$ ;

б)  $\log_3 (2^x + 1) = 2$ ;

в)  $\ln(0,5 + x) = \ln 0,5 - \ln x$ ;

г)  $\log_x 2 + \log_2 x = \frac{5}{2}$ .

620. а)  $2^{\sin x} = 1$ ; б)  $4^{\cos x} = 2$ ; в)  $8^x + 18^x = 2 \cdot 27^x$ ;

г)  $25^x - 10^x = 2 \cdot 4^x$ .

621. Вычислите:

а)  $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot \dots \cdot \log_{11} 10$ ; б)  $\log_6 16$ , если  $\log_{12} 27 = a$ .

Решите неравенство (622—625).

622. а)  $\lg x + \lg(x-1) < \lg 6$ ; б)  $\log_{0,5} x > \log_2 (3-2x)$ ;

в)  $\log_x 2 > 0$ ;

г)  $\log_{2-x} 3 < 0$ .

623. а)  $\ln x > 2$ ; б)  $\ln x < 5$ ; в)  $\ln x < -3$ ; г)  $\log_3 x \leq -2$ .

624. а)  $\left(\frac{2}{5}\right)^x \geq 1$ ;

б)  $0,7^x < 0,49$ ;

в)  $0,2^x > \frac{1}{25}$ ;

г)  $\frac{1}{3^x} < 27$ .

625. а)  $1,7^{2-3x} < 7$ ;

б)  $2^x < \frac{1}{3}$ ;

в)  $3^{x^2+x} < 10^{\lg 9}$ ;

г)  $e^x + 2 > \frac{3}{e^x}$ .

626. Докажите формулу:

а)  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ ; б)  $\log_a b = \log_a b^r$ .

Решите уравнение (627—630).

627. а)  $\log_x 3 - \log_x 5 = 2$ ; б)  $\log_{x-2} (x^2 - 6x + 10) = 1$ ;  
в)  $2 \log_7 \sqrt{x} = \log_7 (9 - 2x)$ ; г)  $\lg (4,5 - x) = \lg 4,5 - \lg x$ .

628. а)  $\frac{1}{2} \lg (2x - 1) = 1 - \lg \sqrt{x - 9}$ ;  
б)  $\log_3^2 x = 4 - 3 \log_3 x$ ;  
в)  $\log_3 \sqrt{x - 5} + \log_3 \sqrt{2x - 3} = 1$ ;  
г)  $\frac{1}{5 + \lg x} + \frac{2}{1 - \lg x} = 1$ .

629. а)  $x^{\log_2 x} = 16$ ; б)  $x^{\log_3 x - 2} = 27$ ;  
в)  $x^{\lg x} = 100x$ ; г)  $x^{\log_5 x} = 125x^2$ .

630. а)  $\log_4 x + \log_{x^2} 2 = 1$ ; б)  $\log_5 x \cdot \log_7 x = \log_5 7$ ;  
в)  $\log_5 x + \log_7 x = \log_5 35$ ; г)  $\lg x + \log_x 10 = 2,5$ .

Решите неравенство (631—634).

631. а)  $\log_{0,3} (2,3 - 2x) < 1$ ; б)  $\log_{0,7} (3x - 2) > 1$ ;  
в)  $\log_9 (2 + x) > 0,5$ ; г)  $\log_9 (2 + x) < 0,5$ .

632. а)  $\log_5 (3 - x) < -1$ ; б)  $\log_{0,7} (1 + 2x) > 2$ ;  
в)  $\log_{0,3} (2 - 5x) > 2$ ; г)  $\lg (4 - 3x) > 2$ .

633. а)  $\log_x 17 > \log_x 11$ ; б)  $\log_x 2 > \log_x 5$ ;  
в)  $\log_x 0,5 < \log_x 7$ ; г)  $\log_x 0,8 > \log_x 3$ .

634. а)  $\ln (3 + 2x - x^2 + e^2) > 2$ ; б)  $\ln^2 x - 2 < \ln x$ ;  
в)  $\lg x - 1 < 2 \log_x 10$ ; г)  $\log_{0,2} \log_2 \frac{x^2}{x+2} > 0$ .

Найдите область определения функции (635—637).

635. а)  $\log_a (x - 1)$ ; б)  $\log_{0,2} (x + 2)$ ;  
в)  $\log_\pi (4 - x)$ ; г)  $\lg \frac{5}{3 - x}$ .

636. а)  $\log_2 (x^2 - 2x - 3)$ ; б)  $\log_7 (6 + x - x^2)$ ;  
в)  $\log_{\frac{1}{4}} (x^2 - 4x + 6)$ ; г)  $\log_{2,5} (x^2 + 6x + 9)$ .

637. а)  $\ln \frac{2-x}{3x+5}$ ; б)  $\ln \sin x$ ; в)  $\lg \cos x$ ; г)  $\log_a |x|$ .

Пользуясь таблицами десятичных логарифмов, найдите (638—639).

638. а)  $\log_{0,7} 5,3$ ; б)  $\log_{3,1} 0,17$ ; в)  $\log_\pi e$ ; г)  $\log_{19} 23$ .

639. а)  $\sqrt[5]{1,7}$ ; б)  $\sqrt[3]{\pi}$ ; в)  $2,3^{\sqrt{2}}$ ; г)  $e^\pi$ .

640. Какое из чисел больше:

а)  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{3}$  или  $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$ ; б)  $\log_2 3$  или  $\log_3 2$ ;  
в)  $\log_7 3$  или  $\log_5 9$ ; г)  $\log_2 10$  или  $\log_5 90$ ?

Вычислите производную функции (641—647).

641. а)  $e^{9x}$ ; б)  $3e^{-2x}$ ; в)  $\frac{7}{e^{5x}}$ ; г)  $3^x$ .

642. а)  $5^{-4x}$ ; б)  $\frac{3}{7^{2x}}$ ; в)  $9^{2-5x}$ ; г)  $5^x \sin 2x$ .

643. а)  $\frac{2^x}{\cos x}$ ; б)  $\sqrt[3]{x} \operatorname{tg} x$ ; в)  $\frac{\operatorname{ctg} x}{\sqrt{x}}$ ; г)  $\frac{2^{\frac{x}{3}}}{x^4 + 3}$ .

644. а)  $e^{\sin x}$ ; б)  $e^{\cos x}$ ; в)  $3^{5 \operatorname{tg} x}$ ; г)  $7^{2 \operatorname{ctg} x}$ .

645. а)  $\log_3 x$ ; б)  $\lg 5x$ ; в)  $\lg (3 + 4x)$ ; г)  $\log_9 (3 - 2x)$ .

646. а)  $x^3 \ln x$ ; б)  $3^x \ln (5x)$ ; в)  $\frac{\sin x}{\ln (7x)}$ ; г)  $\frac{\ln (2x)}{\sqrt{x+3}}$ .

647. а)  $\ln (\sin x)$ ; б)  $\ln (\operatorname{tg} x)$ ; в)  $\log_{11} (x^3 + 4 \sqrt{x} + 5)$ ;  
г)  $\lg (\sin 3x + 2^x)$ .

648. Напишите уравнение касательной к графику функции  $f$  в точке с абсциссой  $x_0$ :

а)  $f(x) = e^{2x}$ ,  $x_0 = 0$ ; б)  $f(x) = 10^x$ ,  $x_0 = 1$ ;  
в)  $f(x) = \ln (2x)$ ,  $x_0 = \frac{1}{2}$ ; г)  $f(x) = \lg (3x)$ ,  $x_0 = \frac{1}{3}$ .

Постройте график функции (649—651).

649\*. а)  $f(x) = \ln^2 x$ ; б)  $g(x) = e^x \sin x$ ;  
в)  $f(x) = x^2 e^x$ ; г)  $p(x) = x \log_2^2 x$ .

650\*. а)  $u(x) = \frac{\ln x^2}{1 + \ln^2 x}$ ; б)  $v(x) = \operatorname{tg}^3 x - 3 \operatorname{tg} x$ ;  
в)  $h(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ ; г)  $w(x) = \ln^3 x - 3 \ln x$ .

651\*. а)  $p(x) = 3 \log_2^2 x - \log_3^3 x$ ; б)  $g(x) = \frac{x}{\ln x - 1}$ ;  
в)  $f(x) = \frac{x^3}{e^x}$ ; г)  $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^2}}$ .

Найдите первообразную для функции (652—653).

652. а)  $\frac{1}{x+7}$ ; б)  $\frac{3}{5x+1}$ ; в)  $\frac{5}{3-2x}$ ; г)  $\frac{4}{7-5x}$ .

653. а)  $\frac{1}{8x}$ ; б)  $\sqrt[3]{x^3}$ ; в)  $\frac{2}{\sqrt[5]{x^4}}$ ; г)  $x^\pi$ .

654. Вычислите интеграл:

$$\text{а) } \int_1^2 \frac{dx}{x}; \quad \text{б) } \int_{-2}^0 \frac{dx}{3x+7}; \quad \text{в) } \int_{-3}^{-2} \frac{dx}{x}; \quad \text{г) } \int_{-2}^{-4} \frac{dx}{2x+3}.$$

655. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$\text{а) } y = \frac{1}{x}, y = 0, x = 2, x = 10;$$

$$\text{б) } y = \frac{3}{x}, y = 3, x = 2;$$

$$\text{в) } y = \frac{2}{x}, y = x + 1, x = 3;$$

$$\text{г) } y = \frac{3}{x}, x + y = 4.$$

## ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

656. Докажите, что любое рациональное число может быть представлено в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

657. Докажите, что при обращении рационального числа в бесконечную десятичную дробь (при помощи деления) не может получиться период (9).

658. Докажите, что любая бесконечная периодическая десятичная дробь есть запись некоторого рационального числа.

659. Докажите иррациональность числа  $3,27277277727772\dots$  (после первой двойки стоит одна семерка, после второй — две, после третьей — три и т. д., после  $n$ -й двойки стоит  $n$  семерок и т. д.).

Докажите иррациональность числа (660—661).

$$660. \text{ а) } \sqrt{2}; \quad \text{б) } \sqrt{\frac{2}{3}}; \quad \text{в) } \sqrt[3]{3}; \quad \text{г) } \lg 5; \quad \text{д) } \lg 43.$$

$$661. \text{ а) } \sqrt{3} + \sqrt{5}; \quad \text{б) } \sqrt{2} + \sqrt{3}; \quad \text{в) } \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}.$$

662. Докажите, что если натуральное число  $a$  не является полным квадратом, то  $\sqrt{a}$  — иррациональное число.

663. Разложите на множители:

$$\text{а) } x^4 + 4; \quad \text{б) } (x^2 + y^2)^3 + (z^2 - x^2)^3 - (y^2 + z^2)^3;$$

$$\text{в) } (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3; \quad \text{г) } x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

664. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

$$\text{а) } \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}}; \quad \text{б) } \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}}; \quad \text{в) } \frac{1}{\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5} + \sqrt[3]{7}}.$$

665. Докажите, что никакое рациональное число  $r$  нельзя представить в виде

$$r = k\sqrt{2} + p\sqrt{3},$$

где  $k$  и  $p$  — целые числа, отличные от нуля.

666. Докажите, что числа  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  и  $\sqrt{5}$  не могут быть никакими (не обязательно соседними) членами одной арифметической или геометрической прогрессии.



667. Докажите формулу:

$$a) \sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} + \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}};$$

$$б) \sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} - \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}.$$

668. Упростите выражение:

$$a) \sqrt{67-42\sqrt{2}} + \sqrt{19-6\sqrt{2}};$$

$$б) \sqrt{51-4\sqrt{77}} - \sqrt{47-4\sqrt{33}};$$

$$в) \sqrt{94-42\sqrt{5}} + \sqrt{129-56\sqrt{5}}.$$

При решении № 669 и 670 воспользуйтесь определением предела последовательности:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A,$$

если для любого числа  $\varepsilon > 0$  можно подобрать такой номер  $N$ , что

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

при всех  $n > N$ .

669. Докажите теорему: если для любого  $n$

$$a_n \leq b_n \leq c_n \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A,$$

то существует и  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ , также равный  $A$ .

670. Последовательность называют бесконечно малой, если ее предел равен нулю. Докажите, что: а) сумма двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой; б) произведение ограниченной последовательности (т. е. такой, что  $|a_n| < M$  для любого  $n$ , где  $M$  — некоторое число) на бесконечно малую является бесконечно малой; в) равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$$

выполняется тогда и только тогда, когда последовательность  $b_n = a_n - A$  бесконечно мала.

671. Докажите теоремы о пределе суммы, произведения и частного последовательностей, пользуясь результатом задачи 670.

672. Функцию  $f$  называют бесконечно малой в точке  $a$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

Сформулируйте и докажите теоремы, аналогичные теоремам задачи 670 для бесконечно малых функций.

673. Докажите теоремы о пределе суммы, произведения и частного двух функций, пользуясь результатом задачи 672.

674. Вычислите предел последовательности:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} \right); \quad б) \lim_{n \rightarrow \infty} (2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \dots \sqrt[2^n]{2}).$$

675. На основании определения предела докажите равенство:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0; \quad б) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \ (a > 0); \quad в) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

676. Вычислите предел функции:

$$a) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{3x+85}-10}; \quad б) \lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{\sqrt{x+9}-4}.$$

677. Докажите, что если существует  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , то существует и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \text{ равный } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Решение задач 678—682 основано на *принципе математической индукции*, который часто принимают за одну из аксиом арифметики. Этот принцип формулируется так.

Если предложение, зависящее от натурального числа  $n$ :

а) верно для некоторого начального значения  $n = n_0$  и

б) из допущения, что оно верно для  $n = k$ , где  $k \geq n_0$  — произвольное натуральное число, вытекает, что предложение верно и для  $n = k + 1$ ,

то предложение верно для любого натурального  $n \geq n_0$ .

678. Докажите методом математической индукции равенство:

$$a) 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6};$$

$$б) 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3};$$

$$в) 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1);$$

$$г) 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1,$$

$$\text{где } n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n;$$

$$д) \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \frac{n}{4(n+4)};$$

$$е) 2^2 + 6^2 + \dots + (4n-2)^2 = \frac{4n(2n-1)(2n+1)}{3};$$

$$ж) \frac{7}{1 \cdot 8} + \frac{7}{8 \cdot 15} + \frac{7}{15 \cdot 22} + \dots + \frac{7}{(7n-6)(7n+1)} + \frac{1}{7n+1} = 1;$$

$$з) \frac{1}{4 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 16} + \dots + \frac{1}{4n(4n+4)} + \frac{1}{16(n+1)} = \frac{1}{16}.$$

679. Докажите неравенство (методом математической индукции):

$$a) |\sin nx| \leq n |\sin x|;$$

$$б) \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n+1} > 1;$$

$$в) (1+h)^n > 1 + nh \text{ для любого натурального } n \geq 2, h > -1 \text{ и } h \neq 0 \text{ (неравенство Бернулли);}$$

$$г) (1+h)^n > 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2} h^2 \text{ для любого натурального } n \geq 3 \text{ и } h > 0.$$

680. Докажите методом математической индукции, что для любого натурального числа  $n$ :

- а)  $6^{2n-1} + 1$  кратно 7; б)  $3^{3n+2} + 2^{4n+1}$  кратно 11;  
в)  $4^n + 15n - 1$  кратно 9; г)  $7^{2n} - 1$  кратно 48.

681. Докажите методом математической индукции, что  $n$  прямых плоскости делят плоскость не более чем на  $1 + \frac{n(n+1)}{2}$  частей.

682. Докажите методом математической индукции, что  $n$  плоскостей делят пространство не более чем на  $\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$  частей.

683. Докажите, что для любого числа  $M$  найдется такое натуральное  $n$ , что сумма

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

будет больше  $M$ .

684. Для функции  $f(x) = x|x|$  найдите  $f'(0)$ .

685. Докажите, что функция  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$  не имеет производной в точке 0.

686. Найдите способ построения касательной к графику функции  $y = x^3$ , аналогичный примеру 2 из п. 22.

687. По эскизу графика квадратичной функции  $y = ax^2 + bx + c$  определите знаки коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$  и дискриминанта  $D$  (рис. 157). Опишите способ нахождения знаков  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $D$  в общем виде.

688. Найдите  $n$ -ю производную функции  $\frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ .

689. Среди функций вида  $f(x) = ax + b$  найдите все такие, что:

- а)  $f(f(x)) = f(x)$  для любого  $x$ ;  
б)  $f(f(x)) = x$  для любого  $x$ .

690. Найдите функции  $f_2(x) = f(f(x))$ ,  $f_3(x) = f(f(f(x)))$  и т. д.,  $f_n(x) = \underbrace{f(f(f \dots (f(x))))}_{n \text{ раз}}$  и укажите область

определения  $f_n(x)$ , если:

- а)  $f(x) = 3 - x$ ;  
б)  $f(x) = \frac{1}{x}$ ;  
в)  $f(x) = \frac{1}{1-x}$ .

691. Обратима ли функция  $x - 2\{x\}$ ?

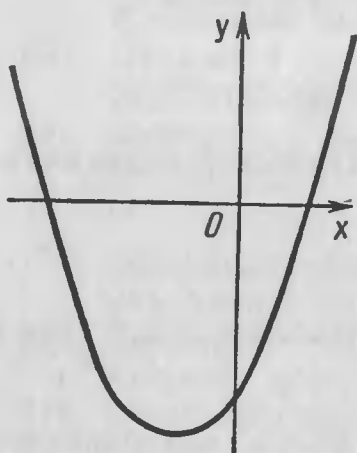


Рис. 157

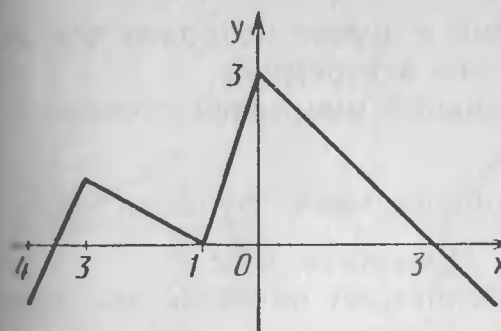


Рис. 158.

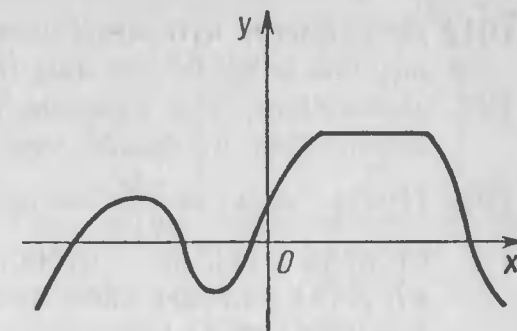


Рис. 159.

692. Среди функций вида: а)  $y = \frac{1}{ax+b}$ ; б)  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ , найдите все, совпадающие с обратными к самим себе.

693. Докажите, что график любой дробно-линейной функции  $y = \frac{ax+b}{cx+d}$  (при  $c \neq 0$  и  $ad - bc \neq 0$ ) может быть получен из графика  $y = \frac{k}{x}$  параллельным переносом. Укажите коэффициент  $k$ .

694. Дан график функции  $f$  (рис. 158—159). Постройте эскиз графика функции:

- а)  $y = f(-2x)$ ; б)  $y = f(|x|)$ ; в)  $y = |f(x)|$ ;  
г)  $y = f(1-x)$ ; д)  $y = -f(-|x|)$ ; е)  $y = \frac{1}{f(x)}$

(для функции, заданной на рисунке 159,  $f(0) = 1$ ).

695. Приведите пример обратимой функции, определенной на отрезке  $[0; 1]$  и имеющей две точки экстремума.

696. Докажите, что любое кубическое уравнение  $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  имеет хотя бы один действительный корень.

697. Докажите, что существует в точности одна не вертикальная прямая  $l$ , проходящая через заданную точку  $M$  параболы  $y = ax^2 + bx + c$  и не имеющая с параболой других общих точек. Докажите, что прямая  $l$  есть касательная к параболе в точке  $M$ .

698. Докажите, что треугольник, образованный касательной к гиперболы  $xy = a^2$  и осями координат, имеет постоянную площадь, равную  $2a^2$ , а точка касания является центром описанной около этого треугольника окружности.

699. Изобразите на координатной плоскости множества точек  $M_k$ , где  $M_k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) — множество точек  $M(x; y)$ , таких, что из точки  $M(x; y)$  можно провести в точности  $k$  касательных к параболы  $y = x^2$ .

700. Докажите, что если функция  $f$  дифференцируема в каждой точке числовой прямой и для любых значений  $x_1$  и  $x_2$  выполнено равенство  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ , то  $f'(x)$  — постоянная.

701. Докажите, что многочлен степени  $n$  имеет не более чем  $n$  корней и не более чем  $(n-1)$  точек экстремума.

702. Докажите, что каждое свое значение многочлен степени  $n$  принимает не более чем  $n$  раз.

703. Пусть  $R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$  — дробно-рациональная функция ( $n$  — степень  $p(x)$ ,  $m$  — степень  $q(x)$ ). Докажите, что:

- а)  $R(x)$  каждое свое значение принимает не более чем при  $k = \max(m, n)$  значениях  $x$ ;  
 б)  $R(x)$  имеет не более чем  $(m+n-1)$  точку экстремума, если  $m \neq n$ , и не более чем  $(m+n-2)$  точек экстремума, если  $m = n$ .

704. Выведите формулы производных обратных тригонометрических функций:

- а)  $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ; б)  $\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ;  
 в)  $\arctg' x = \frac{1}{1+x^2}$ ; г)  $\text{arcctg}' x = -\frac{1}{1+x^2}$ .

705. Докажите тождество:

- а)  $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ ;  
 б)  $\arctg x + \text{arcctg} x = \frac{\pi}{2}$ .

706. Докажите, что любая функция с симметричной относительно точки 0 областью определения представляется, притом единственным образом, в виде суммы четной и нечетной функций.

707. На рисунках 160—162 изображена часть графика периодической функции, определенной на всей числовой прямой. Каким может быть период функции  $f$ ? (Укажите все возможные значения периода.)

708. Дополните (если это возможно) графики функций, изображенных на рисунках 163—165, до графиков периодических функций с наименьшим положительным периодом  $T$ , являющихся при этом:

- а) четными;  
 б) нечетными.

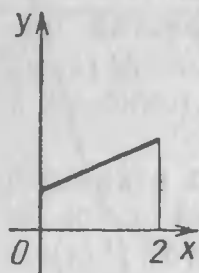


Рис. 160.

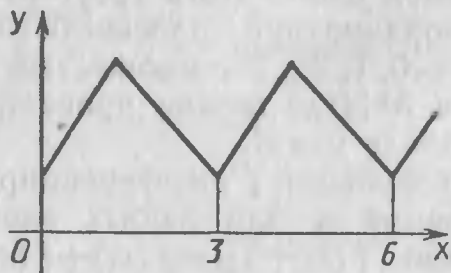


Рис. 161

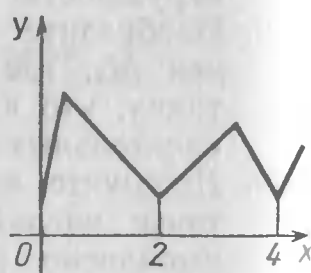


Рис. 162.

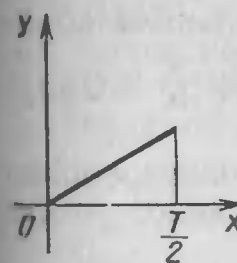


Рис. 163.

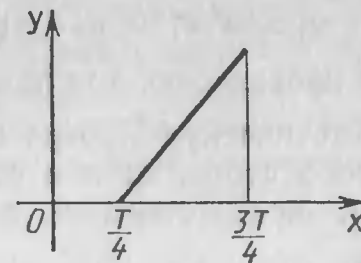


Рис. 164.

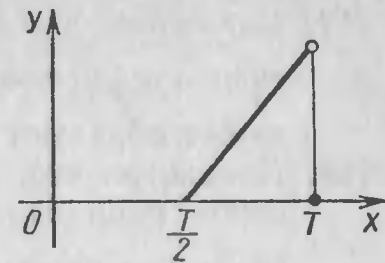


Рис. 165.

709. Существуют ли периодические функции, у которых: а) все рациональные числа являются периодами, а все иррациональные — нет; б) все иррациональные числа являются периодами, а все рациональные — нет?

710. При каких  $n$  функция  $f$  может иметь в точности  $n$  точек экстремума, если известно, что  $f$ :

- а) четная;  
 б) нечетная;  
 в) периодическая функция?

711. Докажите, что функция  $f$  не является периодической:

- а)  $f(x) = \cos x \cdot \cos(x\sqrt{2})$ ; б)  $f(x) = \cos x + \cos(x\sqrt{2})$ ;  
 в)  $f(x) = \sin x^2$ ; г)  $f(x) = \sin \sqrt{x}$ .

712. Докажите, что сумма двух непрерывных периодических функций, не имеющих общих периодов, не является периодической (считайте, что обе функции определены на всей числовой прямой).

713. Докажите, что  $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ = \cos 7^\circ$ .

714. Упростите:

- а)  $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx$ ;  
 б)  $\cos x + \cos 5x + \cos 9x + \dots + \cos(4n-3)x$ .

715. Известно, что

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ, \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Докажите, что

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

( $\angle A$ ,  $\angle B$  и  $\angle C$  не обязательно положительные).

716. Докажите, что выражение

$$a \sin x + b \cos x$$

можно представить в виде

$$A \cos(x + \varphi),$$

где  $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

717. Докажите, что если стороны  $a$ ,  $b$  и  $c$  треугольника образуют арифметическую прогрессию, то  $\operatorname{ctg} \frac{A}{2}$ ,  $\operatorname{ctg} \frac{B}{2}$  и  $\operatorname{ctg} \frac{C}{2}$  также образуют арифметическую прогрессию.

718. Докажите, что, для того чтобы  $\sin x$  и  $\cos x$  одновременно были рациональными, необходимо и достаточно, чтобы  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$  был рационален.

719. Докажите, что:

а)  $16 \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ = 1$ ;

б)  $\cos^2 3 + \cos^2 1 - \cos 4 \cos 2 = 1$ .

720. Пусть при движении по прямой тело массы  $m$  в точке с координатой  $x$  обладает потенциальной энергией  $u(x)$ . Докажите, что:

а) координата  $x(t)$  тела при движении по прямой удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$mx''(t) = -u'(x);$$

б) потенциальная энергия  $u$  материальной точки массы  $m$ , совершающей гармоническое колебание  $x'' = -\omega^2 x$ , равна  $\frac{kx^2}{2}$ , где  $k = m\omega^2$  (положите  $u(0) = 0$ ).

721. Докажите, что полная энергия

$$E = \frac{mv^2}{2} + u(x)$$

материальной точки массы  $m$ , движущейся по прямой согласно второму закону Ньютона, сохраняется ( $u(x)$  — потенциальная энергия).

722. Пусть  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  — два решения уравнения

$$x''(t) = -\omega^2 x(t).$$

Докажите, что функции  $x_1(t) - x_2(t)$  и  $kx_1(t)$ , где  $k$  — произвольное число, также являются решениями этого уравнения.

723. Докажите, что существует решение уравнения

$$x''(t) = -\omega^2 x(t),$$

имеющее вид:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi),$$

удовлетворяющее начальным условиям  $x(0) = x_0$ ,  $x'(0) = v_0$

724. Пользуясь результатами задач 722—723, докажите, что любое решение дифференциального уравнения

$$x''(t) = -\omega^2 x(t)$$

может быть записано в виде

$$x = A \cos(\omega t + \varphi).$$

725. Пусть точка  $P(t)$  равномерно движется по окружности числовой плоскости радиуса  $A$  с центром в начале координат против часовой стрелки, проходя  $\omega$  радиан за единицу времени. Пусть вектор  $\overline{OP}$  в начальном положении  $\overline{OP}_0$  образует угол  $\varphi$  с положительным направлением оси  $Ox$  (рис. 166). Покажите, что координата проекции точки  $P(t)$  на ось  $Ox$  совершает гармоническое колебание, и определите соответствующие константы  $A$ ,  $\omega$  и  $\varphi$ .

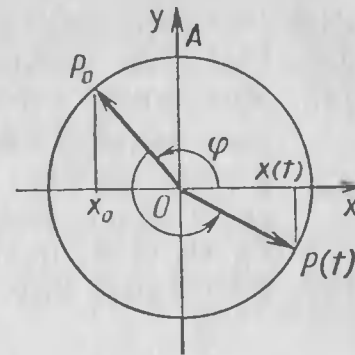


Рис. 166.

726. Используя результат задачи 725, покажите, что сумма двух гармонических колебаний с общей частотой является гармоническим колебанием той же частоты.

727. Докажите, что сумма двух гармонических колебаний с общей частотой является гармоническим колебанием той же частоты, пользуясь результатом задачи 722.

728. Докажите, что сумма двух гармонических колебаний  $x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$  и  $x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

будет периодической функцией тогда и только тогда, когда отношение частот есть рациональное число  $r$ , т. е.

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = r.$$

729. Пусть  $f(x)$  — многочлен степени не выше 3. Докажите, что

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6} (y_1 + 4y_2 + y_3),$$

$$\text{где } y_1 = f(a), y_2 = f\left(\frac{a+b}{2}\right), y_3 = f(b).$$

730. Капля воды с начальной массой  $M$  падает под действием силы тяжести и равномерно испаряется, теряя каждую секунду массу  $m$ . Какова работа сил тяжести за время от начала падения капли до ее полного испарения?

731. Какую минимальную работу по преодолению силы тяжести надо произвести, чтобы насыпать кучу песка в форме конуса высоты  $H$  и радиуса основания  $R$ ? Плотность песка равна  $\rho$ , и его поднимают с плоскости основания конуса.

732. Однородная треугольная пластинка с основанием  $a = 40$  см и высотой  $h = 30$  см вращается вокруг основания с постоянной угловой скоростью  $\omega = 5\pi \text{ с}^{-1}$ . Найдите кинетическую энергию пластинки, если ее толщина  $d = 0,2$  см, а плотность материала, из которого изготовлена пластинка, равна  $\rho = 2,2 \text{ г/см}^3$  (толщиной пластинки пренебречь).



733. Найдите центр масс однородного полукруга радиуса  $R$ .  
 734. Найдите центр масс однородного полушара радиуса  $R$ .  
 735. Докажите, что работа, которая производится против силы выталкивания воды при погружении однородного тела в воду, равна  $\rho g V h$ , где  $\rho$  — плотность воды,  $g$  — ускорение свободного падения,  $h$  — глубина погружения центра масс части тела, находящейся в воде,  $V$  — ее объем.

736. Вычислите интеграл:

а)  $\int_0^{28} \frac{5-x}{\sqrt[3]{1+\frac{x}{4}}} dx$ ;      б)  $\int_2^0 x \sqrt[3]{1-\frac{x}{2}} dx$ ;

в)  $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + \cos^4 x) \sin x dx$ .

737. Найдите производную функции  $f(x) = x^x$ .

738. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а)  $y = \frac{e^x}{x}$ ;    б)  $y = x^2 e^{-x}$ ;    в)  $y = \sqrt{x} \ln x$ ;    г)  $y = \left| \{x\} - \frac{1}{2} \right|$ .

739. Найдите область значений функции:

а)  $\cos^2 x - \cos x$ ;    б)  $3 \cos x - 4 \sin x - 2$ ;  
 в)  $4^x + 2^x$ ;    г)  $x^x (x > 0)$ .

740. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию:

а)  $\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 1} \leq 0$ ;    б)  $|x + y| + |x - y| = 4$ ;

в)  $\sqrt{x + y} \geq |x|$ ;    г)  $\frac{xy + 1}{xy - 1} \geq \frac{y + 1}{y - 1}$ ;

д)  $[x] \leq [y]$ ;    е)  $\{x\} \geq \{y\}$ .

741. С помощью интегралов найдите предел:

а)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left( \sin \frac{\pi}{n} + \sin \frac{2\pi}{n} + \dots + \sin \frac{(n-1)\pi}{n} \right)$ ;

б)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$ ;

в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} (p > 0)$ ;

г)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^{p-1}}{(n+1)^p} + \frac{n^{p-1}}{(n+2)^p} + \dots + \frac{n^{p-1}}{(n+n)^p} \right), (p > 1)$ .

742. Сколько действительных корней имеет уравнение:

а)  $x^3 - 4x^2 - 3x + 5 = 0$ ;    б)  $x^3 - 9x = a$  ( $a$  — параметр)?

743. Докажите, что число

$$\sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}}$$

рационально.

744. При каких основаниях  $a$  существуют числа  $x$ , равные своему логарифму (т. е. выполняется условие  $x = \log_a x$ )?

745. При каких значениях параметров ( $a$ ,  $b$  и  $C$ ) определен интеграл:

а)  $\int_a^b \frac{dx}{x-2}$ ;    б)  $\int_0^3 \frac{dx}{x-C}$ ;    в)  $\int_a^b \frac{dx}{x+C}$ ?

## 1. Действительные числа

1°. С натуральными числами 1, 2, 3, ... и целыми (0,  $\pm 1$ ,  $\pm 2$ ,  $\pm 3$ , ...) вы знакомы из курса начальной школы. Числа, которые можно представить в виде  $r = \frac{m}{n}$ , где  $n$  — натуральное число, а  $m$  — целое, называют *рациональными*. Арифметические действия над рациональными числами (в том числе и целыми) осуществляются по известным правилам.

Любое рациональное число  $r = \frac{m}{n}$  можно представить в виде бесконечной десятичной дроби:

$$r = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots,$$

где  $a_0$  — целое неотрицательное число;  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$  — цифры. Для этого надо разделить числитель дроби на ее знаменатель.

Например, при обращении числа  $\frac{110}{101}$  в бесконечную десятичную дробь находим:

$$\begin{array}{r} \frac{110}{101} \Big| 1,089108 \\ \underline{-900} \phantom{00} \\ \phantom{1}808 \phantom{00} \\ \underline{-920} \phantom{00} \\ \phantom{1}909 \phantom{00} \\ \underline{-110} \phantom{00} \\ \phantom{1}101 \phantom{00} \\ \underline{-900} \phantom{00} \\ \phantom{1}808 \phantom{00} \\ \underline{-92} \phantom{00} \end{array}$$

Полученная дробь 1,08910891... — *периодическая*, так как остатки от деления (это 9, 90, 92, 11, 9...), а, следовательно, и цифры частного (1, 0, 8, 9...) периодически повторяются. Повторяющуюся группу цифр называют *периодом дроби*; при записи период заключают в круглые скобки. В данном случае дробь  $\frac{110}{101} = 1,08910891\dots$  записывается в виде  $\frac{110}{101} = 1, (0891)$ . В общем

случае при делении также получается периодическая десятичная дробь. (В самом деле, остаток от деления целого числа на натуральное  $n$  может быть равен 0, 1, ...,  $n-1$ , т. е. существуют в точности  $n-1$  различных ненулевых остатков от деления на  $n$ . Следовательно, в процессе деления на  $n$  «столбиком» когда-то встретится остаток, уже встречающийся ранее. Затем остатки, и значит, и цифры в частном будут периодически повторяться; при этом длина периода не больше  $n-1$ .) Если при делении встретится остаток 0, то получим конечную десятичную дробь, которую также можно записать в виде бесконечной периодической дроби, дописывая справа бесконечную последовательность нулей. Например,

$$\frac{5}{16} = 0,3125 = 0,3125000\dots = 0,3125 (0).$$

В процессе деления не могут получиться бесконечные десятичные дроби с периодом (9). Такие дроби исключают из рассмотрения, т. е. не считают их записью действительного числа.

Таким образом, любое рациональное число можно представить в виде бесконечной периодической десятичной дроби, не имеющей периода (9). Верно и обратное: любая бесконечная периодическая десятичная дробь есть представление некоторого рационального числа. Один из способов обращения бесконечных периодических дробей в обыкновенные описан далее.

2°. Как известно из курса геометрии, длина диагонали квадрата со стороной 1 должна выражаться положительным числом, квадрат которого равен 2 (это число обозначают  $\sqrt{2}$ ). Докажем методом от противного, что такого рационального числа не существует.

Пусть  $r = \frac{m}{n}$ , где  $\frac{m}{n}$  — несократимая дробь и  $\frac{m^2}{n^2} = r^2 = 2$  ( $r > 0$ , поэтому  $m$  и  $n$  — натуральные числа). Из равенства  $m^2 = 2n^2$  получаем, что  $m$  — четное число, т. е.  $m = 2k$ . Подставляя в равенство  $m^2 = 2n^2$  вместо  $m$  число  $2k$ , находим:  $4k^2 = 2n^2$ , т. е.  $n^2 = 2k^2$ . Отсюда следует, что  $n$  — также четное число. Получили противоречие: дробь  $\frac{m}{n}$  сократима (на 2).

Действительные числа, не являющиеся рациональными, называют *иррациональными*. Любое иррациональное число  $\alpha$  можно представить в виде бесконечной десятичной дроби. Эта дробь не может быть периодической (в противном случае  $\alpha$  — рациональное число). Верно и обратное: любая бесконечная десятичная непериодическая дробь есть представление некоторого иррационального числа.

Рациональные и иррациональные числа образуют множество действительных чисел. С арифметическими операциями над действительными числами вы знакомы (см. также с. 238). В ходе проведения вычислений, встречающихся на практике, действи-

тельные числа округляют с требуемой точностью и оперируют конечными десятичными дробями.

3°. Для обозначения числовых множеств приняты следующие символы:

- $N$  — множество натуральных чисел;
- $Z$  — множество целых чисел;
- $Z_0$  — множество целых неотрицательных чисел;
- $Q$  — множество рациональных чисел;
- $Q_0$  — множество неотрицательных рациональных чисел;
- $R$  — множество действительных чисел;
- $R_+$  — множество положительных действительных чисел.

Как легко проверить, эти числовые множества удовлетворяют следующим соотношениям\*:

$$N \subset Z \subset Q \subset R.$$

## 2. Основные законы арифметических действий и свойства неравенств. Формулы сокращенного умножения

1°. Для любых действительных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$  справедливы следующие равенства:

- а)  $a + b = b + a$  (переместительный закон сложения);
- б)  $(a + b) + c = a + (b + c)$  (сочетательный закон сложения);
- в)  $ab = ba$  (переместительный закон умножения);
- г)  $(ab)c = a(bc)$  (сочетательный закон умножения);
- д)  $(a + b)c = ac + bc$  (распределительный закон).

Из этих законов следуют аналогичные свойства для вычитания и деления, например:

$$(a - b)c = ac - bc, (a + b):c = a:c + b:c.$$

Из любых двух разных действительных чисел одно больше другого (правила сравнения приведены на с. 296). Если число  $a$  больше числа  $b$  (обозначается  $a > b$ ), то говорят также, что  $b$  меньше  $a$  ( $b < a$ ).

2°. Перечислим основные свойства неравенств:

а) если  $a > b$  и  $b > c$ , то  $a > c$ , где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — любые действительные числа.

Если  $a > b$  ( $a$  и  $b$  — любые действительные числа), то:

- б)  $a + c > b + c$ , где  $c$  — любое действительное число;
- в)  $ac > bc$ , где  $c$  — любое положительное действительное число;
- г)  $ac < bc$ , где  $c$  — любое отрицательное действительное число.

\* Говорят, что множество  $A$  содержится в множестве  $B$  (пишут:  $A \subset B$ ), если каждый элемент множества  $A$  является и элементом множества  $B$ .

Из приведенных выше свойств числовых неравенств можно получить такие следствия:

д) если  $a > b$  и  $c > d$ , то  $a + c > b + d$  и  $a - d > b - c$  (теоремы о почленном сложении и вычитании числовых неравенств);

е) пусть  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  — произвольные положительные числа,  $a > b$ ,  $c > d$ , тогда  $ac > bd$  и  $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$  (теоремы о почленном умножении и делении числовых неравенств с положительными членами).

3°. С помощью свойств арифметических действий легко доказываются следующие известные «формулы сокращенного умножения», которые часто применяются при выполнении тождественных преобразований:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b), \\ a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2), \\ a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2), \\ (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, \\ (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2, \\ (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \\ (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3. \end{aligned}$$

## 3. Числовая прямая и числовая плоскость

Из курса алгебры вы знаете, что действительные числа удобно изображать точками координатной прямой. На уроках геометрии в VII классе вы изучали, как вводятся координаты на плоскости и как по координатам двух точек прямой (плоскости) можно найти расстояние между этими точками. Напомним соответствующие формулы.

**Теорема 1.** Для любых двух точек  $A(x_A)$  и  $B(x_B)$  координатной прямой расстояние

$$AB = |x_B - x_A|.$$

**Пример 1.** Найдем расстояние между точками  $A(-7,1)$  и  $B(4,3)$ .

По теореме 1 расстояние

$$AB = |x_B - x_A|.$$

По условию

$$x_A = -7,1, \quad x_B = 4,3,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} AB &= |4,3 - (-7,1)|, \\ AB &= 11,4. \end{aligned}$$

Ответ: 11,4.

**Теорема 2.** Для любых двух точек  $A(x_1; y_1)$  и  $B(x_2; y_2)$  координатной плоскости расстояние

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

**Пример 2.** Найдем расстояние между точками  $A(-0,2; 2,6)$  и  $B(0,3; 1,4)$ .

По теореме 2 расстояние

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

По условию

$$\begin{aligned} x_1 &= -0,2, & y_1 &= 2,6, \\ x_2 &= 0,3, & y_2 &= 1,4, \end{aligned}$$

следовательно,

$$AB = \sqrt{(0,3 - (-0,2))^2 + (1,4 - 2,6)^2},$$

$$AB = \sqrt{0,5^2 + (-1,2)^2},$$

$$AB = \sqrt{1,69},$$

$$AB = 1,3.$$

**Ответ:** 1,3.

Установленное взаимно однозначное соответствие между действительными числами  $x$  и изображающими их точками  $M(x)$  координатной прямой позволяет, говоря о числах, пользоваться геометрической терминологией.

Будем считать координатную прямую расположенной горизонтально, а за положительное направление на ней выберем направление слева направо. Тогда неравенство  $x < y$  означает, что точка  $M(x)$  лежит слева от точки  $M(y)$ . Удобно говорить, что само число  $x$  лежит левее числа  $y$ . Если  $x < z < y$  или  $y < z < x$ , то говорят (в обоих случаях), что число  $z$  лежит между числами  $x$  и  $y$ . Число

$$|y - x|,$$

выражающее расстояние между точками  $M(x)$  и  $M(y)$ , удобно называть просто расстоянием между числами  $x$  и  $y$ .

Само множество  $\mathbf{R}$  всех действительных чисел называют *числовой прямой\**, а его элементы (т. е. числа) — *точками* числовой прямой.

Простейшие множества в  $\mathbf{R}$  называются *промежутками*. Перечислим их.

**Отрезок** с концами  $a$  и  $b$  (обозначается  $[a; b]$ ) есть множество всех чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $a \leq x \leq b$ .

**Интервал** с концами  $a$  и  $b$  (обозначается  $(a; b)$ ) есть множество всех чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $a < x < b$ .

\* Заметьте, что координатных прямых много, а числовая прямая одна — множество действительных чисел.

Полуоткрытые промежутки с концами  $a$  и  $b$ :

$[a; b)$  — множество всех чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $a \leq x < b$ ;

$(a; b]$  — множество всех чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $a < x \leq b$ .

Число  $b - a$  называют длиной промежутка с концами  $a$  и  $b$ .

**Бесконечные интервалы:**

$(a; \infty)$  — множество всех чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $x > a$ ;

$(-\infty; b)$  — множество всех чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $x < b$ .

**Бесконечные промежутки (замкнутые):**

$[a; \infty)$  — множество всех чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $x \geq a$ ;

$(-\infty; b]$  — множество всех чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $x \leq b$ .

Интервал вида  $(a - \delta; a + \delta)$ , где  $\delta > 0$ , называют также  $\delta$ -окрестностью точки  $a$  (рис. 167). Можно сказать, например, что все десятичные приближения по недостатку и по избытку к числу  $\sqrt{2}$ , начиная с третьего (т. е. приближения  $\sqrt{2}$  с точностью до  $10^{-n}$  при  $n \geq 3$ ), попадают в  $\delta$ -окрестность точки  $\sqrt{2}$  при  $\delta = 0,001$ .

Точку  $a$  называют *внутренней точкой* области определения функции  $D(f)$ , если можно подобрать  $\delta$ -окрестность точки  $a$ , целиком входящую в  $D(f)$ .

**Пример 3.** Пусть промежуток  $I = [3; \infty)$  есть область определения некоторой функции. Тогда точка 7 — внутренняя точка промежутка  $I$ , так как интервал  $(5; 9)$  есть 2-окрестность точки 7 и целиком входит в  $I$ .

По аналогии с числовой прямой множество упорядоченных пар действительных чисел называют *числовой плоскостью*, а любую упорядоченную пару действительных чисел — *точкой* числовой плоскости. Числовую плоскость принято обозначать символом  $\mathbf{R}^2$  (читается: «эр два»). На одной и той же плоскости можно многими способами изображать точки числовой плоскости, которая сама по себе при этом не меняется — она остается просто множеством пар действительных чисел.

К точкам числовой плоскости также можно применять геометрическую терминологию. Например, множество точек  $(x; y) \in \mathbf{R}^2$ , координаты которых удовлетворяют уравнению

$$ax + by + c = 0$$

(хотя бы одно из чисел  $a$  или  $b$  отлично от нуля), естественно назвать прямой, так как изображением этого множества на координатной плоскости является прямая.

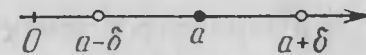


Рис. 167.



Множество точек  $(x; y) \in R^2$ , координаты которых удовлетворяют неравенству

$$x^2 + y^2 \leq r^2 \quad (r > 0),$$

изображается на координатной плоскости кругом радиуса  $r$  с центром в начале координат. Поэтому такое подмножество числовой плоскости также называется *кругом* радиуса  $r$  с центром в точке  $O(0; 0)$ .

#### 4. Приближенные вычисления

1°. *Абсолютной погрешностью* приближенного значения  $x$  числа  $a$  называется модуль разности числа и его приближенного значения, т. е.

$$|x - a|.$$

Если известно, что абсолютная погрешность приближенного значения  $x$  числа  $a$  не превосходит  $h$ , то говорят, что  $a$  равно  $x$  с точностью до  $h$ . Коротко записывают это так:

$$a = x \pm h.$$

Пример 1. При взвешивании на рычажных весах при наличии гирь 1 г, 2 г, 5 г, 10 г, 20 г и т. д. (указаны самые маленькие гири) мы находим массу предметов с точностью до 0,001 (массу измеряем в килограммах).

*Относительной погрешностью* приближенного значения  $x$  числа  $a$  называется отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения, т. е.

$$\frac{|x - a|}{|x|}.$$

Пример 2. Абсолютная погрешность приближенного значения 0,3 числа  $\frac{1}{3}$  равна

$$\left| \frac{1}{3} - 0,3 \right| = \frac{1}{30},$$

а относительная погрешность равна

$$\frac{1}{30} : 0,3 = \frac{1}{9}.$$

Обычно точное значение абсолютной погрешности неизвестно, а известна точность приближения  $h$ . В этом случае мы можем оценить (сверху) относительную погрешность: она не превосходит  $\frac{h}{|x|}$ . При оценке относительной погрешности полученный результат округляют в большую сторону (т. е. заменяют приближенным значением по избытку), оставляя одну значащую цифру.

Пример 3. Расстояние от Земли до Луны равно  $l = 384\,000 \pm 500$  км.

Оценим относительную погрешность данного измерения.

Относительная погрешность не превосходит

$$\frac{500}{384\,000} = 0,00130208... \approx 0,002 = 0,2\%.$$

Относительная погрешность, как правило, достаточно малая величина, ее обычно выражают, как в примере 3, в процентах.

2°. *Значащими* цифрами числа называют все его цифры, кроме нулей, стоящих вначале.

Пример 4. В числе 0,00634 — три значащие цифры: 6, 3, 4, а в числе 40,10 — четыре значащие цифры: 4, 0, 1, 0.

*Стандартным видом* числа  $a$  называют его запись в виде произведения  $b \cdot 10^n$ , где  $1 \leq b < 10$  и  $n$  — целое число.

Пример 5. Запишем в стандартном виде числа 23 100 000; 0,07635;  $0,03 \cdot 10^{-4}$ . Имеем:  $23\,100\,000 = 2,31 \cdot 10^7$ ;  $0,07635 = 7,635 \cdot 10^{-2}$ ;  $0,03 \cdot 10^{-4} = 3 \cdot 10^{-6}$ .

Цифру  $m$  в записи приближенного значения называют *верной*, если абсолютная погрешность приближения не превосходит единицы того разряда, в котором стоит цифра  $m$ .

Пример 6. Известно, что  $a = 2,35 \pm 0,25$ . В записи приближенного значения 2,35 верной является только цифра 2.

Обычно в записи приближенных значений чисел стараются оставить только верные цифры. При этом в математических таблицах и справочниках границу абсолютной погрешности не указывают.

Пример 7. По четырехзначным математическим таблицам В. М. Брадиса находим:

$$\sin 23^\circ = 0,3907.$$

Подразумевается, что абсолютная погрешность выписанного значения синуса не превосходит 0,0001.

Пример 8. Согласно одному из справочников масса Солнца равна  $1,990 \cdot 10^{30}$  кг. Подразумевается, что приведенное значение имеет точность  $0,001 \cdot 10^{30} = 10^{27}$ .

3°. Абсолютная погрешность суммы и разности не превосходит суммы абсолютных погрешностей исходных данных. Относительная погрешность произведения и частного не превосходит суммы относительных погрешностей исходных данных.

Например, если  $a = 2,35 \pm 0,01$  и  $b = 5,61 \pm 0,01$ , то  $a + b = 7,96 \pm 0,02$ ,  $b - a = 3,26 \pm 0,02$ ,  $\frac{|ab - 2,35 \cdot 5,61|}{2,35 \cdot 5,61} \leq \frac{0,01}{2,35} + \frac{0,01}{5,61}$ , откуда  $|ab - 2,35 \cdot 5,61| \leq 0,01 \cdot 5,61 + 0,01 \cdot 2,35 < 0,08$ , т. е.

$$ab = 13,2 \pm 0,1.$$

## 5. Проценты

*Процентом* называют одну сотую часть целого (принятого за единицу). Для нахождения числа  $A$ , составляющего  $p\%$  от числа  $M$ , пользуются «формулой процентов»:

$$A = \frac{Mp}{100}. \quad (1)$$

Эту же формулу используют для решения еще двух задач: а) заданы числа  $A$  и  $M$ , требуется узнать, сколько процентов от  $M$  составляет  $A$  (т. е. найти  $p$ ); б) известно, что число  $A$  составляет  $p\%$  от числа  $M$ , требуется найти число  $M$  ( $A$  и  $p$  заданы).

**Пример 1.** Рабочий за смену изготовил 96 деталей вместо положенных по плану 80 деталей. На сколько процентов он перевыполнил план?

Требуется определить, сколько процентов число  $96 - 80 = 16$  составляет от числа 80. По формуле (1) получаем, что искомое число  $p$  равно:

$$p = \frac{100 \cdot 16}{80} = 20.$$

**Пример 2.** Известно, что число учащихся, посещающих факультатив по литературе, равно  $80\%$  от числа учащихся, посещающих факультатив по математике. Сколько процентов составляет число посещающих факультатив по математике от числа посещающих факультатив по литературе?

Пусть число учащихся, посещающих факультатив по математике, равно  $m$ , а факультатив по литературе —  $l$ . По условию (см. формулу (1))

$$l = \frac{m \cdot 80}{100} = 0,8m.$$

Требуется определить, сколько процентов число  $m$  составляет от числа  $l = 0,8m$ . По формуле (1) получаем:

$$p\% = \frac{m \cdot 100\%}{l} = \frac{m \cdot 100\%}{0,8m} = 125\%.$$

## 6. Пропорции

*Пропорцией* называют равенство вида

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

где  $a, b, c, d$  — некоторые числа, причем  $b \neq 0, d \neq 0$ .

Числа  $a$  и  $d$  называют *крайними* членами пропорции, а числа  $b$  и  $c$  — *средними* членами пропорции.

Основное свойство (верной) пропорции: *произведение средних членов пропорции равно произведению ее крайних членов.*

**Пример.** В треугольнике  $ABC$  со сторонами  $AB = 10, BC = 14$  биссектриса угла  $ABC$  делит сторону  $AC$  на две части, одна из которых на 2 больше другой. Найдем сторону  $AC$  треугольника.

Обозначим меньшую из двух частей через  $x$ . Пользуясь тем, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположающую сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам, найдем  $x$  из пропорции

$$\frac{x+2}{x} = \frac{14}{10}.$$

В силу основного свойства пропорции

$$10(x+2) = 14x,$$

откуда

$$x = 5 \text{ и } AC = x + (x+2) = 12.$$

## 7. Последовательности

Числовую функцию  $f$ , область определения которой — множество натуральных чисел, называют *бесконечной числовой последовательностью* (или просто *последовательностью*). Значение этой функции в точке  $n$  обозначают  $f_n$ , а саму последовательность —  $(f_n)$ . (Для обозначения последовательностей чаще всего выбирают первые буквы латинского алфавита:  $(a_n), (b_n), (c_n)$  и т. д.)

Существуют два основных способа задания числовых последовательностей: 1) с помощью формулы  $n$ -го члена; 2) рекуррентно, при этом задают  $k$  первых членов последовательности и формулу, выражающую (при всех  $n \geq 1$ )  $a_{n+k}$  через  $k$  предыдущих членов (чаще всего  $k = 1$  или  $k = 2$ ).

**Пример 1.** Формула  $a_n = 2n$  задает последовательность четных натуральных чисел.

**Пример 2.** Рекуррентная формула  $a_1 = 1, a_2 = 1$ , и  $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$  при  $n \geq 1$  задает бесконечную числовую последовательность:

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8, a_7 = 13, \dots$$

Эту последовательность называют последовательностью Фибоначчи.

Иногда рассматривают конечные числовые последовательности — числовые функции, заданные на множестве  $n$  первых натуральных чисел.

Числовую последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предшествующему члену, сложенному с одним и тем же числом  $d$ , называют *арифметической прогрессией*. Это число  $d$  называют *разностью* арифметической прогрессии.

Арифметическую прогрессию с первым членом  $a_1$  и разностью  $d$  можно задать рекуррентно:  $a_1$  задано и  $a_{n+1} = a_n + d$  при  $n \geq 1$ .

Последовательность  $(a_n)$  является арифметической прогрессией тогда и только тогда, когда для любого  $n > 1$  выполнено равенство

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Для арифметической прогрессии  $(a_n)$

$$a_n = a_1 + (n-1)d, \quad (1)$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \quad (2)$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n, \quad (2')$$

где  $d$  — разность прогрессии, а  $S_n$  — сумма ее первых  $n$  членов.

**Пример 3.** Найдем формулу  $n$ -го члена и сумму первых 100 членов арифметической прогрессии с первым членом  $a_1 = 3$  и разностью  $d = -1$ .

По формуле (1) получаем:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + (n-1) \cdot (-1) = 4 - n.$$

Итак,  $a_n = 4 - n$ .

По формуле (2)

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{3 + 4 - n}{2} \cdot n,$$

откуда

$$S_{100} = \frac{7 - 100}{2} \cdot 100 = -93 \cdot 50 = -4650.$$

**Пример 4.** Известно, что сумма первых  $n$  членов арифметической прогрессии с первым членом 24 и разностью  $-2$  равна 100. Найдем  $n$ .

По формуле (2') получаем:

$$100 = \frac{2 \cdot 24 + (-2) \cdot (n-1)}{2} n,$$

т. е.

$$n^2 - 25n + 100 = 0,$$

откуда  $n = 5$  или  $n = 20$ .

Числовую последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предшествующему члену, умноженному на одно и то же отличное от нуля число  $q$ , называют *геометрической прогрессией*. Это число  $q$  называют *знаменателем* прогрессии.

Геометрическую прогрессию с первым членом  $b_1$  и знаменателем  $q$  можно задать рекуррентно:  $b_1 \neq 0$  задано и  $b_{n+1} = b_n q$  при  $n \geq 1$ .

Последовательность  $(b_n)$  является геометрической прогрессией тогда и только тогда, когда для любого  $n > 1$  выполнено равенство

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}.$$

Для геометрической прогрессии  $(b_n)$

$$b_n = b_1 q^{n-1}; \quad (3)$$

при  $q \neq 1$

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}; \quad (4)$$

при  $q = 1$

$$S_n = n b_1, \quad (4')$$

где  $q$  — знаменатель прогрессии, а  $S_n$  — сумма ее первых  $n$  членов.

**Пример 5.** В геометрической прогрессии  $b_3 = 8$ ,  $b_5 = 2$ . Требуется найти сумму ее первых 7 членов.

По формуле (3) имеем:

$$\begin{cases} b_1 q^2 = 8, \\ b_1 q^4 = 2. \end{cases}$$

Разделив второе из полученных уравнений почленно на первое, получим  $q^2 = 0,25$ , откуда  $q = 0,5$  или  $q = -0,5$ , а  $b_1 = 8 : q^2 = 32$ . По формуле (4) при  $q = 0,5$  получаем:

$$S_7 = \frac{32 \left( \left( \frac{1}{2} \right)^7 - 1 \right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{32 \cdot \left( -\frac{127}{128} \right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{127}{2},$$

а при  $q = -0,5$

$$S_7 = \frac{32 \left( \left( -\frac{1}{2} \right)^7 - 1 \right)}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{32 \cdot \left( -\frac{129}{128} \right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{43}{2}.$$

Суммой  $S$  бесконечной геометрической прогрессии при  $|q| < 1$  называют число  $S$ , к которому стремится  $S_n$  при  $n \rightarrow \infty$ , при этом

$$S = \frac{b_1}{1 - q}. \quad (5)$$

**Пример 6.** Обратим бесконечную периодическую дробь  $a = 0,31212121212... = 0,3(12)$  в обыкновенную.

Запишем  $a$  в виде

$$a = \frac{3}{10} + \frac{12}{1000} + \frac{12}{100000} + \dots$$

По формуле (5) при  $b_1 = \frac{12}{1000}$ ,  $q = \frac{1}{100}$  получаем:

$$\frac{12}{1000} + \frac{12}{100000} + \dots = \frac{\frac{12}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{12}{990} = \frac{2}{165}.$$

Следовательно,  $a = \frac{3}{10} + \frac{2}{165} = \frac{99+4}{330} = \frac{103}{330}$ .

## 8. Степени и корни

*Степенью числа  $a$  с натуральным показателем  $n$ , большим 1, называется произведение  $n$  множителей, каждый из которых равен  $a$ :*

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$$

Степенью числа  $a$  с показателем 1 называется само число  $a$ :

$$a^1 = a.$$

Степенью числа  $a \neq 0$  с показателем 0 называется число 1:

$$a^0 = 1.$$

Степенью числа  $a \neq 0$  с целым отрицательным показателем  $n$  называется число  $\frac{1}{a^{-n}}$ :

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}}.$$

Основные свойства степеней с целым показателем ( $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ):

- а)  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ ;
- б)  $a^m : a^n = a^{m-n}$ ;
- в)  $(a^m)^n = a^{mn}$ ;
- г)  $(ab)^n = a^n b^n$ ;
- д)  $(a:b)^n = a^n : b^n$ .

При  $a=0$  (и  $b=0$ ) все эти свойства также верны в случае, когда определены обе части выписанных равенств.

**Пример 1.** Требуется упростить выражение

$$(27x^{-2}y^6)^8 \cdot (32x^3)^5 : (6y^2)^{24}$$

и вычислить его значение при  $x=2$ ,  $y=\sqrt{3}$ .

Пользуясь свойствами степеней с целыми показателями, получаем:

$$\begin{aligned} & (27x^{-2}y^6)^8 \cdot (32x^3)^5 : (6y^2)^{24} = \\ & = (3^3)^8 \cdot (x^{-2})^8 \cdot (y^6)^8 \cdot (2^5)^5 \cdot (x^3)^5 : (2 \cdot 3)^{24} : (y^2)^{24} = \\ & = 3^{24} \cdot x^{-16} \cdot y^{48} \cdot 2^{25} \cdot x^{15} : 2^{24} \cdot 3^{24} : y^{48} = \\ & = 3^{24-24} \cdot x^{-16+15} \cdot y^{48-48} \cdot 2^{25-24} = 2^1 \cdot x^{-1} = \frac{2}{x}. \end{aligned}$$

Итак, данное выражение не зависит от  $y$  (важно только, что  $y \neq 0$ ), его значение при  $x=2$  равно 1.

*Арифметическим квадратным корнем* из числа  $a$  называется такое неотрицательное число  $b$ , квадрат которого равен  $a$ . Для арифметического квадратного корня из  $a$  принято обозначение  $\sqrt{a}$ . Таким образом,  $b = \sqrt{a}$ , если  $b^2 = a$  и  $b \geq 0$ . Легко видеть, что  $\sqrt{a}$  существует только для неотрицательных  $a$ .

Свойства арифметического квадратного корня:

- а)  $\sqrt{a^2} = |a|$ ;
- б)  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ , где  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ;
- в)  $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ , где  $a \geq 0$ ,  $b > 0$ .

**Пример 2.** Вынесем  $a$  и  $b$  из-под знака корня:  $\sqrt{2a^6b^3}$ .

Если  $a=0$ , то указанное выражение равно 0. Если же  $a \neq 0$ , то  $b \geq 0$  (так как подкоренное выражение должно быть неотрицательным). Имеем:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^6} &= \sqrt{(a^3)^2} = |a^3|; \\ \sqrt{b^3} &= \sqrt{b^2 \cdot b} = \sqrt{b^2} \cdot \sqrt{b} = b \sqrt{b} \end{aligned}$$

(так как  $b \geq 0$ ), поэтому

$$\sqrt{2a^6b^3} = \begin{cases} 0 & \text{при } a=0, \\ |a^3| b \sqrt{2b} & \text{при } a \neq 0. \end{cases}$$

**Пример 3.** Внесем  $a$  под знак корня:  $a \sqrt{3b}$ .

Если  $a \geq 0$ , то  $a = |a| = \sqrt{a^2}$ ; если же  $a < 0$ , то  $a = -|a| = -\sqrt{a^2}$ . Итак,

$$a \sqrt{3b} = \begin{cases} \sqrt{3a^2b} & \text{при } a \geq 0 \text{ (если } a=0, \text{ то } b \geq 0), \\ -\sqrt{3a^2b} & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

**Пример 4.** Представим  $\sqrt{ab}$  в виде произведения.

Под знаком корня должно стоять неотрицательное число, поэтому  $ab \geq 0$ . Рассмотрим два случая: 1)  $a \geq 0$  и  $b \geq 0$ ;

2)  $a \leq 0$  и  $b \leq 0$ .

В первом случае по свойству б) имеем  $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ .



Во втором случае сначала представим  $ab$  в виде произведения неотрицательных чисел:  $ab = (-a) \cdot (-b)$  — и только потом воспользуемся свойством б):

$$\sqrt{ab} = \sqrt{(-a) \cdot (-b)} = \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b}.$$

Итак,

$$\sqrt{ab} = \begin{cases} \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} & \text{при } a \geq 0, b \geq 0, \\ \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} & \text{при } a \leq 0, b \leq 0. \end{cases}$$

## 9. Прямая пропорциональность

*Прямой пропорциональностью* называют функцию вида  $y = kx$ , где  $k$  — некоторое действительное число, отличное от нуля ( $k$  называют *коэффициентом пропорциональности*).

Для любых двух пар соответственных значений переменных  $(x_1; y_1)$  и  $(x_2; y_2)$ , где  $x_1, x_2, y_1, y_2$  отличны от нуля, верно равенство

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = k.$$

**Пример 1.** Путь, пройденный телом при движении по прямой с постоянной скоростью, прямо пропорционален времени движения.

**Пример 2.** Пусть переменная  $y$  пропорциональна переменной  $x$  с коэффициентом  $k_1$ , а переменная  $z$  пропорциональна переменной  $y$  с коэффициентом  $k_2$ . Тогда переменная  $z$  пропорциональна переменной  $x$  с коэффициентом  $k_1 k_2$ .

В самом деле,  $z = k_2 y = k_2 k_1 x$ .

Графиком функции  $y = kx$  является прямая, проходящая через начало координат, с угловым коэффициентом  $k$  (тангенс угла наклона прямой к оси  $Ox$  равен  $k$ ).

Докажем это. Проведем прямую через начало координат  $O$  и точку  $A(1; k)$ . Для любой точки  $M(x; y)$ , принадлежащей прямой  $OA$  (рис. 168), векторы  $\overline{OA}$  и  $\overline{OM}$  параллельны. Поэтому вектор  $\overline{OM}$  получается из вектора  $\overline{OA}$  умножением на число  $x$ , т. е.  $\overline{OM} = x\overline{OA}$ . Координаты вектора  $\overline{OM}$  есть  $x$  и  $y$ . Координаты вектора  $\overline{OA}$  есть  $1$  и  $k$ , поэтому координаты вектора  $x\overline{OA}$  есть  $x$  и  $kx$ . Сравнивая координаты векторов  $\overline{OM}$  и  $x\overline{OA}$ , получаем:  $y = kx$ . Итак, доказано, что координаты  $x$  и  $y$  любой точки прямой  $OA$  удовлетворяют равенству  $y = kx$ . Теперь надо доказать, что любая точка графика функции  $y = kx$  лежит на

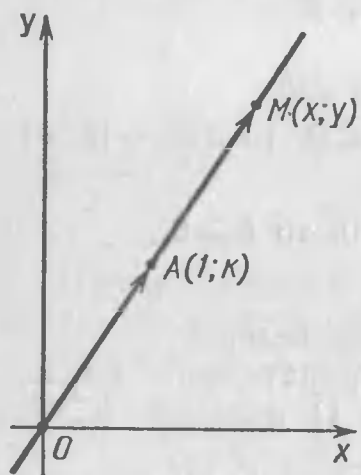


Рис. 168.

любой точкой  $M(x; y)$  (рис. 168), векторы  $\overline{OA}$  и  $\overline{OM}$  параллельны. Поэтому вектор  $\overline{OM}$  получается из вектора  $\overline{OA}$  умножением на число  $x$ , т. е.  $\overline{OM} = x\overline{OA}$ . Координаты вектора  $\overline{OM}$  есть  $x$  и  $y$ . Координаты вектора  $\overline{OA}$  есть  $1$  и  $k$ , поэтому координаты вектора  $x\overline{OA}$  есть  $x$  и  $kx$ . Сравнивая координаты векторов  $\overline{OM}$  и  $x\overline{OA}$ , получаем:  $y = kx$ . Итак, доказано, что координаты  $x$  и  $y$  любой точки прямой  $OA$  удовлетворяют равенству  $y = kx$ . Теперь надо доказать, что любая точка графика функции  $y = kx$  лежит на

прямой  $OA$ . Для этого проведем через точку  $(x; 0)$  прямую, параллельную оси  $Oy$ . Эта прямая пересекает прямую  $OA$  в точке  $M(x; y)$ . Но выше было доказано, что для точек прямой  $OA$  выполнено равенство  $y = kx$ . Следовательно, точка  $M$  принадлежит графику функции  $y = kx$ . Точка  $A$  лежит на линии тангенсов, поэтому  $k = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  — величина угла между прямой  $OA$  и осью абсцисс.

**Пример 3.** На рисунке 169 изображены графики функций  $y = kx$  при разных  $k$  ( $k = \pm 0,5; \pm 3; \pm 1$ ).

**Пример 4.** Площадь треугольника равна  $0,5 ah$ , поэтому для треугольников, у которых две вершины лежат на одной из параллельных прямых, а третья — на другой из этих прямых (рис. 170), площадь прямо пропорциональна длине основания с коэффициентом пропорциональности  $k = 0,5h$  ( $h$  — расстояние между этими прямыми). Это следует из приведенной выше формулы  $S = 0,5ah$ . Длина основания треугольника — положительная величина, поэтому график данной зависимости — открытый луч (рис. 171).

**Пример 5.** Площадь сектора ( $S = \frac{1}{2} R^2 \alpha$ ) круга радиуса  $R$  прямо пропорциональна радианной мере дуги сектора с коэффициентом пропорциональности  $k = \frac{1}{2} R^2$  (где  $R$  — радиус сектора). Графиком данной зависимости служит отрезок с концами  $O(0; 0)$  и  $M(2\pi; \pi R^2)$  (рис. 172).

**Пример 6.** Кинетическая энергия  $\frac{mv^2}{2}$  материальной точки массы  $m$  прямо пропорциональна  $v^2$  (квадрату скорости точки) с коэффициентом пропорциональности  $k = \frac{1}{2} m$ .

Если переменная  $y$  пропорциональна переменной  $x$  с коэффициентом пропорциональности  $k$ , то переменная  $x$  (при  $k \neq 0$ ) пропорциональна переменной  $y$  с коэффициентом пропорциональности  $\frac{1}{k}$ .

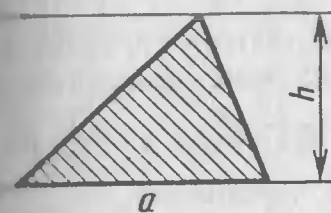


Рис. 170.

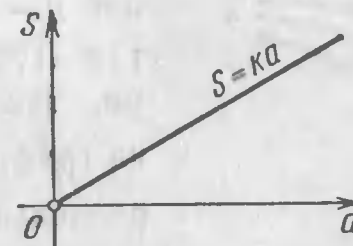


Рис. 171.

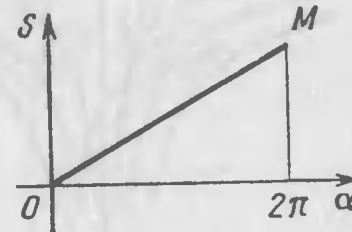


Рис. 172

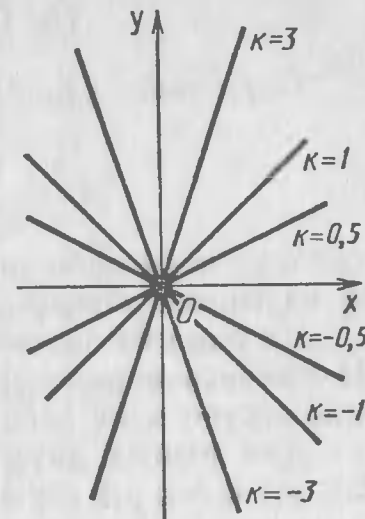


Рис. 169.

## 10. Обратная пропорциональность

Обратной пропорциональностью называют функцию вида

$$y = \frac{k}{x},$$

где  $k$  — некоторое действительное число, отличное от нуля. Число  $k$  называют коэффициентом обратной пропорциональности.

Ни одна из переменных  $x$  и  $y$  не может принимать значения 0. И область определения, и область значений этой функции есть множество всех действительных чисел, отличных от нуля.

Для любых двух пар соответственных значений переменных  $(x_1; y_1)$  и  $(x_2; y_2)$  верно равенство

$$\frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_1},$$

так как  $y_1 x_1 = y_2 x_2 = k$ .

**Пример 1.** При равномерном движении по прямой время, затрачиваемое телом на прохождение заданного пути, обратно пропорционально скорости движения.

Если переменная  $y$  обратно пропорциональна переменной  $x$  с коэффициентом пропорциональности  $k$ , то переменная  $x$  обратно пропорциональна переменной  $y$  с тем же коэффициентом обратной пропорциональности.

Графиком функции  $y = \frac{k}{x}$  является кривая, состоящая из двух ветвей. График функции  $y = \frac{k}{x}$  называется *гиперболой*.

**Пример 2.** На рисунке 173 изображены графики функций, заданных формулой  $y = \frac{k}{x}$  при разных  $k$  ( $k = \pm 1; \pm 2; \pm \frac{1}{3}$ ).

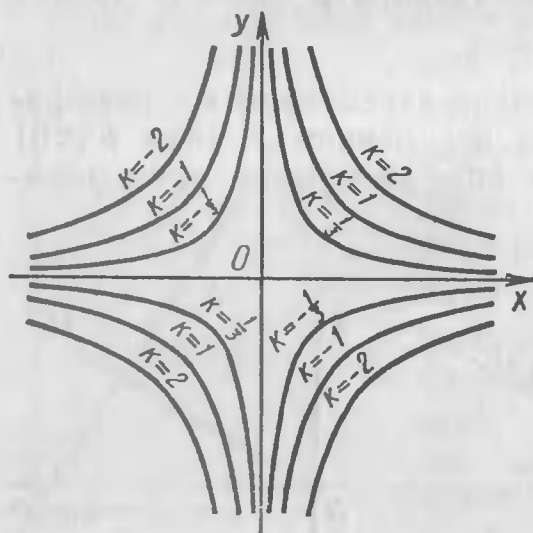


Рис. 173

Отметим, что гиперболой называют также любую кривую, получающуюся из графика функции  $y = \frac{k}{x}$  при помощи движений.

**Пример 3.** Графики функций  $y = \frac{1}{x} + 2$  и  $y = \frac{1}{x-1}$  (рис. 174—175) являются гиперболами, так как они получаются из графика функции  $y = \frac{1}{x}$  параллельным переносом.

График функции  $y = \frac{k}{x}$  при

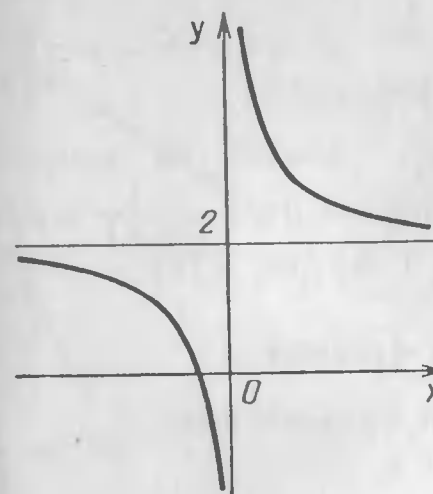


Рис. 174.

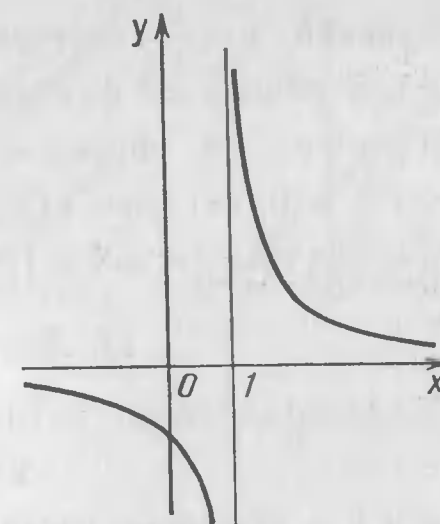


Рис. 175.

$k > 0$  расположен в I и III координатных углах (рис. 176), а при  $k < 0$  — во II и IV координатных углах (рис. 177).

Так как функция  $y = \frac{k}{x}$  нечетная, то ее график симметричен относительно начала координат.

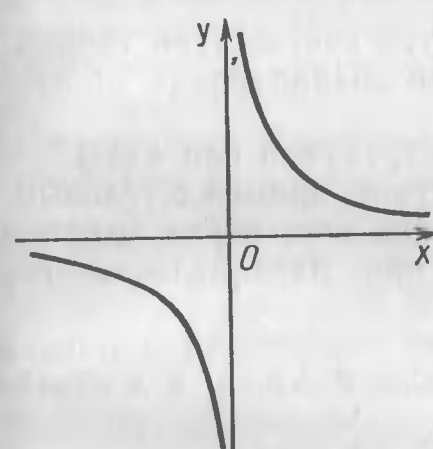


Рис. 176.

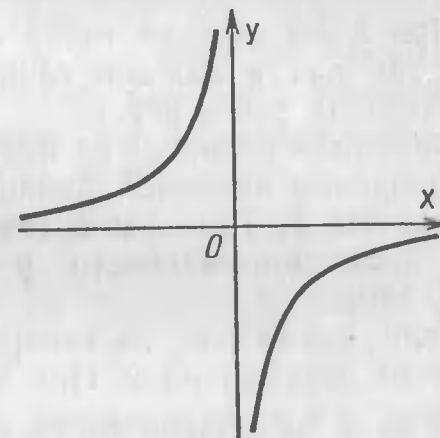


Рис. 177

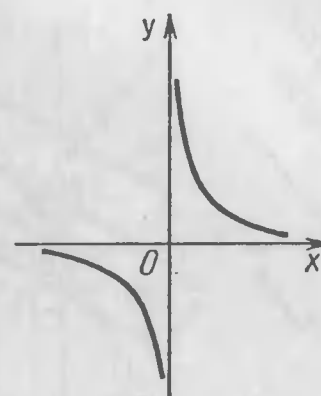


Рис. 178.

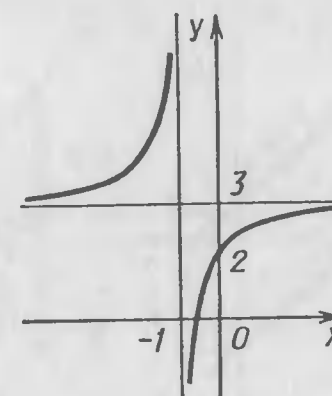


Рис. 179

Функция  $y = \frac{k}{x}$  непрерывна на полупрямых  $(-\infty; 0)$  и  $(0; \infty)$ . В точке  $x=0$  функция не определена.

Пример 4. Функция  $y = \frac{2}{x}$  убывает на промежутках  $(-\infty; 0)$  и  $(0; \infty)$  (рис. 178), а функция  $y = 3 - \frac{1}{x+1}$  возрастает на промежутках  $(-\infty; -1)$  и  $(-1; \infty)$  (рис. 179).

## 11. Линейная функция

Линейной функцией называется функция вида

$$y = kx + b,$$

где  $k$  и  $b$  — некоторые числа.

Область определения линейной функции — вся числовая прямая  $R$ . Область значений при  $k \neq 0$  — также вся числовая прямая  $R$ . При  $k=0$  область значений состоит из одной точки  $b$ .

Линейная функция  $f(x) = kx + b$  дифференцируема на всей числовой прямой. Так как ее производная в каждой точке равна  $k$ , то при  $k > 0$  функция  $f$  возрастает на  $(-\infty; \infty)$ , при  $k < 0$  функция  $f$  убывает на  $(-\infty; \infty)$ , а при  $k=0$  функция постоянная.

При  $k=0$  каждая точка является критической точкой функции, так как в каждой точке производная равна 0; при  $k \neq 0$  критических точек нет.

Линейная функция не имеет экстремумов при  $k \neq 0$ .

Графиком линейной функции служит прямая с угловым коэффициентом  $k$ . При  $k \neq 0$  эта прямая есть образ графика прямой пропорциональности  $y = kx$  при параллельном переносе (рис. 180).

Если  $y = kx + b$ , то говорят, что переменная  $y$  линейно зависит от переменной  $x$ . При этом если  $k \neq 0$ , то и  $x$  линейно зависит от  $y$ , поскольку тогда  $x = \frac{1}{k}y - \frac{b}{k}$ .

На рисунках 181—183 изображены графики линейных функций

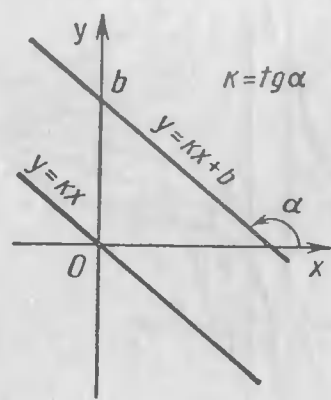


Рис. 180.

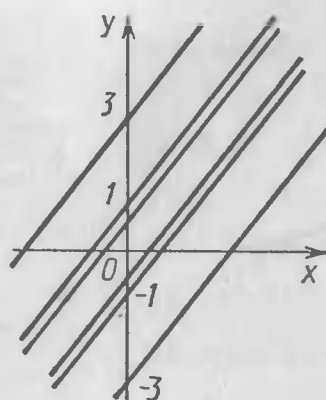


Рис. 181

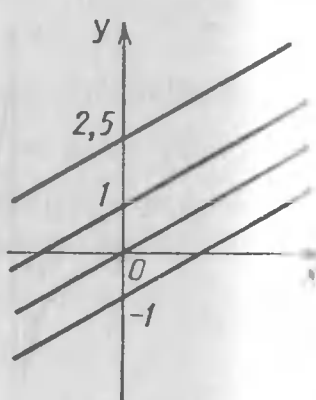


Рис. 182.

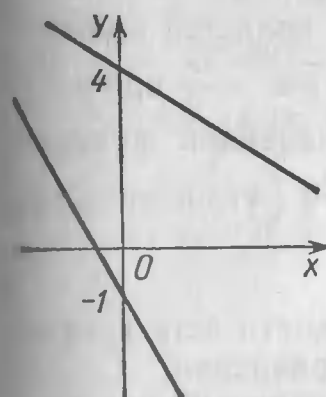


Рис. 183.

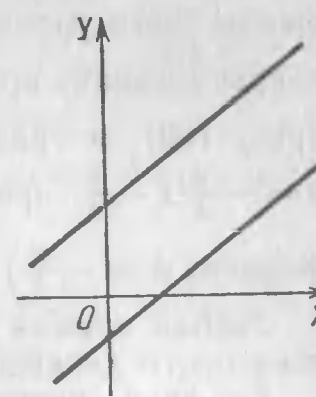


Рис. 184.

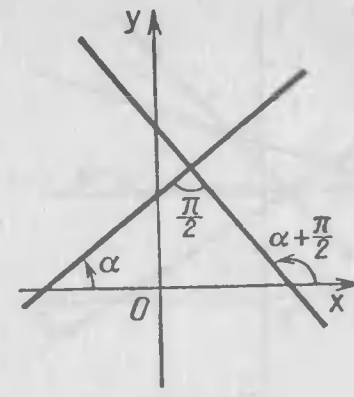


Рис. 185.

при различных  $k$  и  $b$  (рис. 181 при  $k=1$  и  $b=\pm 1; \pm 0,6; \pm 3$ ; рис. 182 при  $k=0,6$  и  $b=-1; 0; 1; 2,5$ ; рис. 183 при  $k=-2$  и  $b=-1, k=-0,5$  и  $b=4$ ).

Прямые  $y = k_1x + b_1$  и  $y = k_2x + b_2$  параллельны тогда и только тогда, когда  $k_1 = k_2$  (рис. 184).

Эти прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда  $k_1k_2 = -1$  (объясните почему, рис. 185).

Прямые с одним и тем же коэффициентом  $b$  проходят через одну точку — точку  $M(0; b)$  (рис. 186).

Любая прямая, не параллельная оси ординат, служит графиком некоторой линейной функции (см. рис. 180). Коэффициент  $b$  равен ординате точки пересечения этой прямой с осью ординат, коэффициент  $k$  — тангенсу угла между прямой и осью  $Ox$ .

Если  $M_1(x_1; y_1)$  и  $M_2(x_2; y_2)$  — две точки прямой, то

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(рис. 187).

Линейным уравнением с двумя переменными  $x$  и  $y$  называют уравнение вида  $ax + by + c = 0$ , где  $a$ ,  $b$  и  $c$  — действительные числа. Если  $a$  и  $b$  одновременно не обращаются в нуль, то гра-

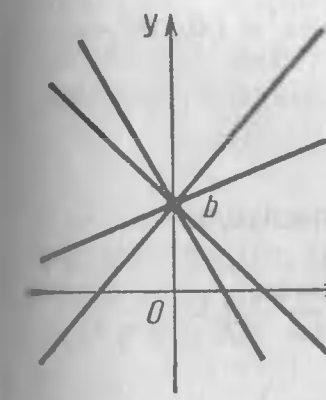


Рис. 186.

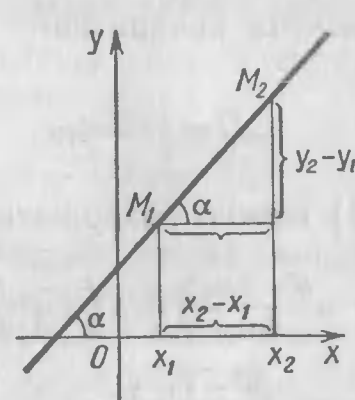


Рис. 187.

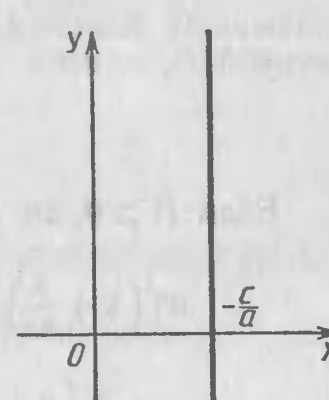


Рис. 188.

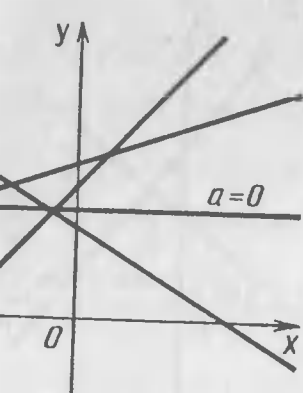


Рис. 189.

фиком этого уравнения является прямая «вертикальная» прямая  $x = -\frac{c}{a}$  при  $b = 0$  (рис. 188), и график линейной функции  $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$  при  $b \neq 0$  (угловой коэффициент  $k = -\frac{a}{b}$ ).

Любая прямая плоскости есть график некоторого линейного уравнения.

Графики линейных уравнений при различных  $a$ ,  $b$  и  $c$  изображены на рисунке 189.

## 12. Квадратный трехчлен

1°. Разложение квадратного трехчлена на множители. Функцию

$$y = ax^2 + bx + c,$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — некоторые действительные числа, причем  $a \neq 0$ , называют *квадратичной*, а выражение

$$ax^2 + bx + c$$

называют *квадратным трехчленом*.

Преобразуем квадратный трехчлен:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left( x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left( \frac{b}{2a} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \left( \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) = a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = \\ &= a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Выражение

$$b^2 - 4ac$$

называют *дискриминантом* квадратного трехчлена и обозначают буквой  $D$ , т. е.

$$D = b^2 - 4ac.$$

Если  $D \geq 0$ , то (1) можно разложить на множители:

$$\begin{aligned} a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) &= a \left( x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \times \\ &\times \left( x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = a(x - x_1)(x - x_2), \end{aligned}$$

$$\text{где } x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Окончательно получаем:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \quad (2)$$

Если же  $D < 0$ , то

$$\left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$$

при всех действительных значениях  $x$ , поэтому  $ax^2 + bx + c \neq 0$  ни при каком действительном  $x$ . Отсюда следует, что выражение  $ax^2 + bx + c$  нельзя разложить на линейные множители, т. е. нельзя представить в виде

$$(px + q)(ex + f),$$

так как это произведение обращается в нуль при  $x = -\frac{q}{p}$  и  $x = -\frac{f}{e}$ .

2°. Корни квадратного уравнения. *Квадратным уравнением* называют уравнение вида

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (3)$$

при  $a \neq 0$ .

При  $b^2 - 4ac \geq 0$  уравнение (1) равносильно уравнению

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0, \quad (4)$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — выражения, полученные в п. 1°. Так как произведение равно нулю тогда и только тогда, когда один из сомножителей равен нулю, то полученное уравнение имеет корни  $x = x_1$  и  $x = x_2$ . Эти корни совпадают при  $b^2 - 4ac = 0$ .

При  $b^2 - 4ac < 0$  уравнение (3) не имеет действительных корней, так как в этом случае выражение  $ax^2 + bx + c$  не обращается в нуль (см. п. 1°).

Итак, при  $D < 0$  уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  не имеет действительных корней, при  $D = 0$  имеет один корень  $x = -\frac{b}{2a}$ , при  $D > 0$  имеет два действительных корня, которые принято записывать одной формулой:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (5)$$

Таким образом, число действительных корней квадратного уравнения зависит от знака дискриминанта  $D$ .

Пример 1. Дискриминант квадратного уравнения

$$6x^2 - x - 1 = 0$$

равен  $1^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1) = 25 > 0$ , поэтому данное уравнение имеет



два корня

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{1 \pm 5}{2 \cdot 6},$$

т. е.

$$x_1 = -\frac{1}{3} \text{ и } x_2 = \frac{1}{2}.$$

Кроме того, квадратный трехчлен  $6x^2 - x - 1$  можно разложить на множители:

$$6x^2 - x - 1 = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) = (3x + 1)(2x - 1).$$

**Пример 2.** Дискриминант квадратного уравнения  $2x^2 - 3x + 2 = 0$  отрицателен, так как  $D = 3^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -7 < 0$ . Поэтому данное уравнение не имеет действительных корней и трехчлен  $2x^2 - 3x + 2$  нельзя разложить на линейные множители.

**Пример 3.** Уравнение  $9x^2 + 12x + 4 = 0$  имеет один корень,  $x = -\frac{2}{3}$ , так как его дискриминант равен нулю:

$$D = 12^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 0.$$

Разложение трехчлена  $9x^2 + 12x + 4$  на множители имеет вид

$$9x^2 + 12x + 4 = (3x + 2)^2.$$

Формулу корней квадратного уравнения с «четным» вторым коэффициентом  $b = 2k$  удобнее записывать в таком виде:

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}. \quad (5')$$

Для приведенного квадратного уравнения, т. е. при  $a = 1$ , получаем формулу

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}. \quad (6)$$

**Пример 4.** Для решения уравнения  $3x^2 - 2x - 1 = 0$  удобно воспользоваться формулой (5'):

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 3 \cdot (-1)}}{3} = \frac{1 \pm 2}{3},$$

т. е.

$$x_1 = 1; \quad x_2 = -\frac{1}{3}.$$

**3°. Теорема Виета.** Найдем сумму и произведение корней уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ ;

$$x_1 + x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - b}{2a} = -\frac{b}{a};$$

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= \left( \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left( \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) = \\ &= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Итак, справедлива теорема: *сумма корней квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  равна  $-\frac{b}{a}$ , а их произведение равно  $\frac{c}{a}$ .*

**Пример 5.** Уравнение  $5x^2 - 11x + 4 = 0$  имеет два корня, так как его дискриминант положителен ( $D = 41 > 0$ ). Сумма этих корней равна  $-\frac{-11}{5} = \frac{11}{5}$ , а произведение равно  $\frac{4}{5}$ .

Для составления квадратного уравнения с заданными корнями и в некоторых случаях для решения уравнений применяют теорему, обратную теореме Виета:

*Произвольные числа  $x_1$  и  $x_2$  служат корнями квадратного уравнения*

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0.$$

Для доказательства достаточно подставить значения  $x = x_1$  и  $x = x_2$  в это уравнение.

**Пример 6.** Числа 0,2 и 4,5 служат корнями уравнения

$$x^2 - (0,2 + 4,5)x + 0,2 \cdot 4,5 = 0,$$

т. е. уравнения  $x^2 - 4,7x + 0,9 = 0$ .

Заметим, что уравнение  $x^2 - 4,7x + 0,9 = 0$  равносильно уравнению  $a(x^2 - 4,7x + 0,9) = 0$ , где  $a$  — любое отличное от нуля действительное число; например, при  $a = 10$  получаем уравнение

$$10x^2 - 47x + 9 = 0.$$

**4°. График квадратичной функции.** График квадратичной функции имеет вид, изображенный на рисунке 190, и называется *параболой*.

Приравняв к нулю производную  $y' = 2ax + b$  квадратичной функции, получаем, что эта функция имеет одну критическую точку  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ . Точка графика с такой абсциссой называется вершиной параболы, ордината этой точки равна

$$y_0 = a \left( -\frac{b}{2a} \right)^2 + b \left( -\frac{b}{2a} \right) + c = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}.$$

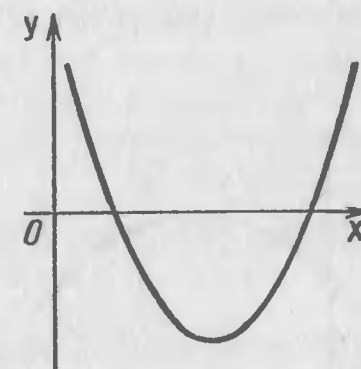


Рис. 190.

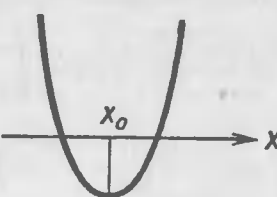
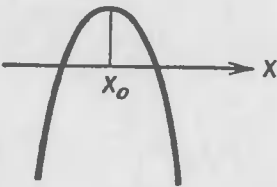
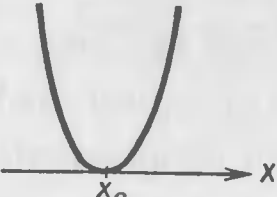
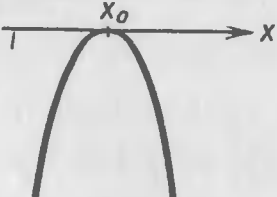
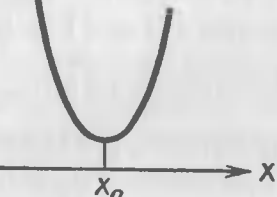
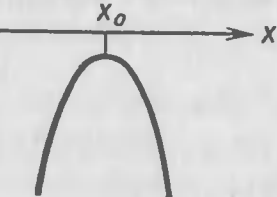
	$a > 0$	$a < 0$
$D > 0$	 $I_1$	 $II_1$
$D = 0$	 $I_2$	 $II_2$
$D < 0$	 $I_3$	 $II_3$

Рис. 191.

При  $a > 0$  «ветви» параболы направлены вверх, а при  $a < 0$  — вниз. Каждый из этих двух случаев разбивается на три подслучая в зависимости от числа корней уравнения.

Расположение графика по отношению к оси абсцисс во всех шести подслучаях изображено на рисунке 191.

Пример 7. По виду графика квадратного трехчлена определим знаки коэффициентов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и дискриминанта  $D$  (рис. 192).

Ветви параболы направлены вниз, поэтому  $a < 0$ . Абсцисса вершины параболы  $x_0$  положительна, так как вершина параболы находится в правой полуплоскости. Из формулы  $x_0 = -\frac{b}{2a}$  получаем, что числа  $a$  и  $b$  разных знаков, т. е.  $b > 0$ . Ордината точки пересечения графика с осью  $Oy$  равна  $c = f(0)$ ; она отрицательна, поэтому  $c < 0$ . Наконец, график имеет одну общую точку с осью абсцисс (касается этой оси), т. е. уравнение  $ax^2 + bx + c = 0$  имеет один корень и, следовательно,  $D = 0$ .  
Итак,

$$a < 0, b > 0, c < 0, D = 0.$$

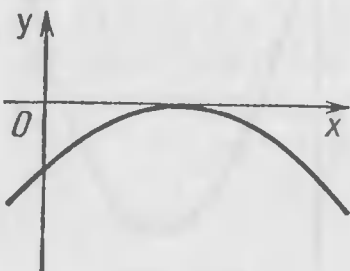


Рис. 192.

5°. Решение квадратичных неравенств. Проще всего квадратичные неравенства решать при помощи метода интервалов (см. п. 21).

Полезно, однако, помнить, что знак квадратного трехчлена совпадает со зна

ком коэффициента при  $x^2$  на всей числовой прямой, кроме промежутка между корнями (если действительные корни существуют).

Пример 8. Корнями квадратного трехчлена

$$2x^2 - 3x - 5$$

являются числа  $-1$  и  $2,5$ . Так как коэффициент при  $x^2$  положителен (он равен 2), то  $2x^2 - 3x - 5 > 0$  на промежутках  $(-\infty; -1)$  и  $(2,5; \infty)$  и  $2x^2 - 3x - 5 < 0$  на промежутке  $(-1; 2,5)$ .

Пример 9. Неравенство  $-x^2 + 3x - 11 > 0$  не имеет решений, так как трехчлен  $-x^2 + 3x - 11$  не имеет действительных корней (его дискриминант  $D = -35$  отрицателен и коэффициент при  $x^2$  отрицателен).

Пример 10. Множество решений неравенства

$$-x^2 + 3x - 11 < 0$$

есть вся числовая прямая.

Пример 11. Множество решений неравенства

$$16x^2 - 24x + 9 \leq 0$$

состоит из одной точки  $x = \frac{3}{4}$  (так как  $D = 24^2 - 16 \cdot 9 \cdot 4 = 0$  и корни уравнения  $16x^2 - 24x + 9 = 0$  совпадают:  $x_1 = x_2 = \frac{3}{4}$ ).

### 13. Выражения с переменными

1°. Выражения, содержащие переменные, могут принимать разные значения в зависимости от значений переменных. Значения двух выражений с переменными при одних и тех же значениях переменных называют соответственными значениями выражений, например соответственными значениями выражений  $\cos x$  и  $2x$  при  $x = 0$  будут значения 1 и 0.

Значения переменных, при которых выражение имеет смысл, называют допустимыми значениями переменных.

Равенство, верное при всех допустимых значениях входящих в него переменных, называется тождеством.

Два выражения, принимающие равные соответственные значения при всех допустимых для них значениях переменных, называют тождественно равными, а замену одного выражения другим, ему тождественно равным, — тождественным преобразованием выражения.

Например,  $\ln |x| = \frac{1}{2} \ln (x^2)$  есть тождество при всех отличных от нуля действительных числах.

Пример 1. Выражения  $\frac{xy}{x^2}$  и  $\frac{y}{x}$  тождественно равны при всех  $x \neq 0$  и любых  $y$ .

**2°. Многочлены.** Произведение числовых множителей и натуральных степеней переменных называют *одночленом*.

Для приведения одночлена к стандартному виду перемножают все входящие в одночлен числовые множители, а произведения одинаковых переменных (или их степеней) заменяют степенью этой переменной. Числовой множитель называют *коэффициентом* одночлена. Сумму показателей степеней переменных называют *степенью одночлена*.

**Пример 2.**  $7xy^2x^3y \cdot 21 \cdot (-a)$  — одночлен от переменных  $x, y, a$  с коэффициентом  $-147$  степени  $8$  ( $1+2+3+1+1=8$ ). Стандартный вид его:  $-147x^4y^3a$ .

*Многочленом* называют сумму одночленов. Для приведения многочлена к стандартному виду каждый из входящих в него одночленов заменяют одночленом стандартного вида и приводят подобные члены. *Степенью многочлена* называют наибольшую из степеней одночленов, составляющих многочлен после приведения его к стандартному виду.

**Пример 3.** Стандартный вид многочлена

$$xy^2xy^3 + 3xy^2x - 4yx^2y^4 + 3x^2y^5 - 2x^2y$$

это  $3x^2y^2 - 2x^2y$ , а его степень равна 4.

Произведение одночлена на многочлен равно сумме произведений одночлена на каждый член многочлена.

**Пример 4.**  $2by(x^3 + 2xy + b^2y) = 2bx^3y + 4bxy^2 + 2b^3y^2$ .

Произведение двух многочленов равно сумме произведений каждого члена первого многочлена на каждый член второго многочлена.

**Пример 5.**  $(x^2 - 3x + 1)(x - 2) =$   
 $= x^2 \cdot x + x^2 \cdot (-2) + (-3x) \cdot x + (-3x) \cdot (-2) + 1 \cdot x + 1 \cdot (-2) =$   
 $= x^3 - 2x^2 - 3x^2 + 6x + x - 2 = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ .

Многочлены называют также целыми алгебраическими выражениями.

*Разложить многочлен на множители* означает представить его в виде произведения многочленов или одночлена на многочлен. При этом используются следующие приемы.

а) *Вынесение общего множителя за скобки.*

**Пример 6.**  $9ax^2 - 6a^2x = 3ax(3x - 2a)$ .

б) *Группировка.*

**Пример 7.**  $x^3 - 3x^2 + x + 1 = x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x - x + 1 =$   
 $= x^2(x - 1) - 2x(x - 1) - (x - 1) = (x - 1)(x^2 - 2x - 1)$ .

в) *Разложение квадратного трехчлена на множители* (см. п. 12).

г) *Тождества сокращенного умножения.*

*Корнем многочлена* с одной переменной называется значение переменной, при котором многочлен обращается в нуль.

**3°. Дроби.** *Дробью* называют выражение, имеющее вид  $\frac{a}{b}$ , где  $a$  и  $b$  — некоторые выражения (числовые или выражения с переменными). Областью определения дроби служит множество

значений переменных, при которых определено каждое из выражений  $a$  и  $b$  и  $b \neq 0$ .

**Основное свойство дроби.** Равенство  $\frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$  является тождеством на множестве значений переменных, при которых определены обе части этого тождества.

**Пример 8.** Равенство  $\frac{2x(x+1)}{x^2-1} = \frac{2x}{x-1}$  является тождеством при всех  $x \neq \pm 1$ .

**Преобразование рациональных выражений.** На множестве значений переменных, при которых определены левые и правые части написанных ниже равенств, эти равенства являются тождествами:

$$\text{а) } \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd};$$

$$\text{б) } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc};$$

$$\text{в) } \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n};$$

$$\text{г) } \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}.$$

## 14. Уравнения, неравенства, системы

**1°. Уравнения и неравенства с одной переменной.** *Уравнением (неравенством)* с одной переменной называется равенство (неравенство), содержащее эту переменную. Переменную в уравнении (неравенстве) часто называют *неизвестным*.

*Корнем (или решением) уравнения* с одной переменной называется значение переменной, при подстановке которого в уравнение получается верное равенство.

**Пример 1.** Число 5 — корень уравнения  $x^2 = 25$ , а число 1 не является корнем этого уравнения.

*Решением неравенства* с одной переменной называется значение переменной, которое обращает его в верное числовое неравенство.

**Пример 2.** Число 4 — решение неравенства  $x^2 < 25$ , а число  $-8$  не является решением этого неравенства.

*Решить уравнение (неравенство)* — значит найти все его решения (или доказать, что их нет).

Два уравнения (неравенства) с одной переменной называются *равносильными*, если множества их решений совпадают (другими словами, если они имеют одни и те же решения). При краткой записи решения вместо слова «равносильно» часто ставят знак  $\Leftrightarrow$ .

**Пример 3.** Уравнения  $3x - 6 = 0$  и  $(x - 2)^2 = 0$  равносильны, так как каждое из них имеет один корень  $x = 2$ ; можно записать:  $3x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 0$ . Уравнение  $x = 0$  равносильно неравенству  $x^2 \leq 0$ , т. е.  $x = 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 0$ .

При решении уравнений и неравенств с одной переменной пользуются основными правилами и приемами, сформулированными ниже. Пусть выражение  $C(x)$  определено на всей числовой прямой. Тогда верны следующие утверждения.

1) Если к обеим частям уравнения (неравенства) прибавить одно и то же выражение  $C(x)$ , то получится уравнение (неравенство), равносильное данному.

1а) Следствие. Любое слагаемое можно переносить из одной части уравнения (неравенства) в другую с противоположным знаком, после этого получается уравнение (неравенство), равносильное данному.

Пример 4. Неравенства  $x-1 > 0$  и  $x-1+1 > 0+1$  равносильны. Уравнения  $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$  и  $x = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}$  равносильны. Однако если выполнить вычитание в правой части последнего уравнения, то получим уравнение  $x=0$ , не равносильное этим уравнениям (оно имеет корень  $x=0$ , а уравнения  $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$  и  $x = \frac{1}{x} - \frac{1}{x}$  не имеют корней). Дело в том, что при вычитании мы расширили область определения уравнения.

2а) Если обе части уравнения умножить (или разделить) на одно и то же выражение  $C(x)$ , не обращающееся в нуль ни при каком  $x$ , то получится уравнение, равносильное данному.

2б) Если обе части неравенства умножить (или разделить) на одно и то же выражение  $C(x)$ , положительное при всех  $x$ , то получится неравенство, равносильное данному.

2в) Если обе части неравенства умножить (или разделить) на одно и то же выражение  $C(x)$ , отрицательное при всех  $x$ , и знак неравенства изменить на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному.

Пример 5. Решим неравенство  $9-5x > 0$ . Имеем:  
 $9-5x > 0 \Leftrightarrow -5x > -9 \Leftrightarrow x < 1,8$ . Ответ:  $(-\infty; 1,8)$ .

Пример 6. Обе части уравнения  $(x-2)(x+2)=2(x-2)$  нельзя разделить на выражение  $(x-2)$ , так как это выражение обращается в нуль при  $x=2$ . При делении будет потерян корень  $x=2$ . Исходное уравнение имеет два корня 0 и 2, а полученное после деления на  $(x-2)$  уравнение  $x+2=2$  имеет один корень 0.

Если выражение  $C(x)$  определено не всюду или в некоторых точках не выполнены условия, наложенные на  $C(x)$  в правилах 1 и 2, то аналогичные правила формулируются сложнее. Например, уравнение

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0. \end{cases}$$

Пример 7. Решим уравнение  $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = \frac{3x^2-1}{x^2-1}$ . Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} &= \frac{3x^2-1}{x^2-1} \Leftrightarrow \frac{x-1+x+1-3x^2+1}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{-3x^2+2x+1}{x^2-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-2x-1=0, \\ x^2-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1, \\ x=1 \text{ или } x=-\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Ответ:  $x = -\frac{1}{3}$ .

2°. Уравнения и неравенства с несколькими переменными. Так называются уравнения и неравенства, содержащие две или большее число переменных. Чаще всего встречаются уравнения и неравенства, содержащие две или три переменных. Решением уравнения (неравенства) с двумя переменными называется упорядоченная пара\* значений этих переменных, обращающая это уравнение (неравенство) в верное числовое равенство (неравенство). Если в уравнение (неравенство) входят переменные  $x$  и  $y$ , то принято на первом месте писать значение переменной  $x$ , а на втором — значение  $y$ .

Пример 8. Пара  $(2; 1)$  является решением уравнения  $x^2+y=5$ , а пара  $(1; 2)$  — нет.

В общем случае необходимо указывать, значение какой из переменных стоит на первом месте, а какой — на втором.

Пример 9. Уравнение  $(u+2)^2 + (t-3)^2 = 0$  имеет единственное решение  $(t; u) = (3; -2)$ . Или можно записать так:  $u = -2$ ,  $t = 3$ .

Аналогично определяется решение уравнения (неравенства) с тремя и более переменными. Например, решением уравнения с тремя переменными называют упорядоченную тройку чисел, при подстановке которых вместо соответствующих переменных уравнение обращается в верное равенство. Если это переменные  $x$ ,  $y$  и  $z$ , то принято на первом месте записывать значение  $x$ , на втором — значение  $y$ , а на третьем — значение  $z$ . В остальных случаях, как правило, нужно указывать порядок, в котором записываются значения переменных.

Два уравнения (неравенства) с несколькими переменными называются *равносильными*, если они содержат одни и те же переменные и имеют одинаковые решения (т. е. множества соответствующих пар, троек и т. п. совпадают).

Правила преобразования уравнений (неравенств) с несколькими переменными совершенно аналогичны правилам 1 и 2 для уравнений (неравенств) с одной переменной.

\* Слово «упорядоченная» часто опускают.



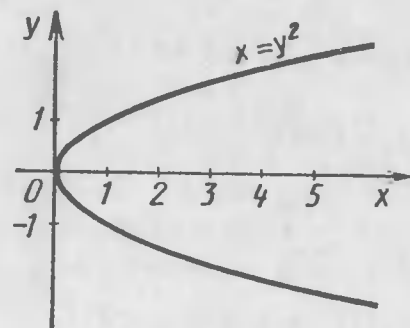


Рис. 193.

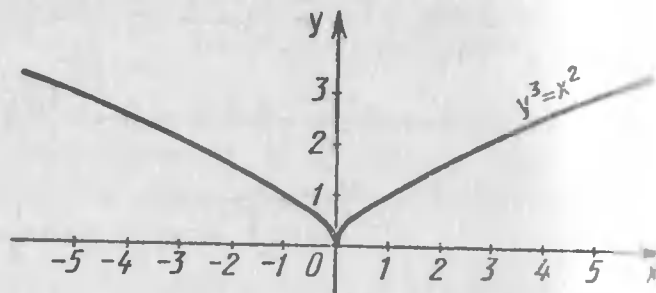


Рис. 194.

**Пример 10.** Уравнения  $x^2 - y = 1$  и  $x^2 = y + 1$  равносильны (по правилу, аналогичному правилу 1а)). Неравенства  $\frac{x-y}{y^2+1} < 3$  и  $x - y < 3(y^2 + 1)$  равносильны (см. правило 2б)).

Уравнения (неравенства) с двумя и более переменными, как правило, имеют бесконечно много решений (хотя уравнение примера 9 имеет всего одно решение, а неравенство  $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + a^2 < 0$  с пятью переменными вовсе не имеет решений). Поэтому принято каждое решение  $(x_0; y_0)$  уравнения (неравенства) с двумя переменными  $x$  и  $y$  изображать точкой с координатами  $(x_0; y_0)$  на координатной плоскости. Множество всех таких точек называют *графиком* этого уравнения (соответственно множеством решений неравенства).

**Пример 11.** На рисунках 193 и 194 изображены графики уравнений  $x = y^2$  и  $x^2 = y^3$ , а на рисунках 195 и 196 — множества решений неравенств  $x^2 + y^2 \leq 9$  и  $x > y^2$ .

**Пример 12.** Графиком линейного уравнения  $2x + 3y = -5$  является прямая (рис. 197). Построить ее проще всего по двум точкам: при  $x = 0$   $y = -\frac{5}{3}$ , т. е. одна точка  $(0; -\frac{5}{3})$ , а при  $y = 0$   $x = -\frac{5}{2}$ , т. е. вторая точка  $(-\frac{5}{2}; 0)$ . Можно брать и

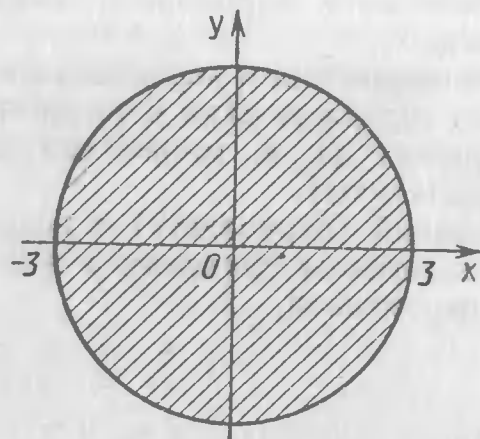


Рис. 195.

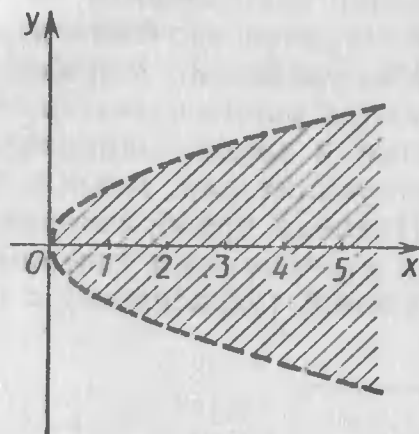


Рис. 196.

другие значения переменных: при  $y = 1$   $x = -4$ , т. е. одна точка  $(-4; 1)$ , при  $y = -1$   $x = -1$ , т. е. вторая точка  $(-1; -1)$ .

**3°. Системы уравнений и неравенств.** Пусть задано несколько уравнений (или неравенств, или уравнений и неравенств) с одними и теми же переменными и пусть при этом требуется найти решения, общие для всех уравнений (неравенств). В этом случае говорят, что задана *система уравнений* (соответственно неравенств, уравнений и неравенств). *Решением системы*, например, с двумя переменными называется упорядоченная пара значений переменных, обращающая каждое из уравнений (неравенств), входящих в систему, в верное равенство (неравенство). *Решить систему* — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет. Аналогично определяются системы с одной переменной, с тремя и более переменными.

**Пример 13.** Решим систему неравенств с одной переменной:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{2} > 2x, \\ 0 > \frac{4x-1}{3}. \end{cases} \quad \text{Имеем: } \begin{cases} \frac{x-3}{2} > 2x, \\ 0 > \frac{4x-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 > 4x, \\ 4x-1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x > 3, \\ x < \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1, \\ x < \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x < -1.$$

**Ответ:**  $(-\infty; -1)$ .

При решении систем уравнений пользуются следующими правилами преобразования систем в равносильные (для определенности считаем, что переменных две, для систем с тремя и более переменными правила аналогичны).

1) **Правило подстановки:** если одна из переменных системы выражена через остальные (т. е. одно из уравнений системы имеет вид:  $y = f(x)$ ), то при подстановке выражения  $f(x)$  вместо  $y$  во все остальные уравнения системы получается равносильная данной система.

2) **Правило замены:** если одно из уравнений системы заменить на равносильное, то получится система, равносильная исходной.

3) **Правило сложения:** если к одному из уравнений системы добавить почленно другое уравнение, умноженное на некоторое число, то получится система, равносильная исходной.

Пример 14. Решим систему  $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}, \\ x + y = 5. \end{cases}$

Пользуясь правилом замены, получаем:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}, \\ x + y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}, \\ y = 5 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{5-x} + \frac{5-x}{x} = \frac{13}{6}, \\ y = 5 - x. \end{cases}$$

Решим первое уравнение:

$$\frac{x^2 + (5-x)^2}{x(5-x)} = \frac{13}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 6(x^2 + (5-x)^2) = 13x(5-x), \\ x(5-x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5x + 6 = 0, \\ x(5-x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \text{ или } x = 2.$$

Пользуясь тем, что  $y = 5 - x$ , находим:  $y = 5 - 3 = 2$  и  $y = 5 - 2 = 3$ .  
 Ответ: (2; 3), (3; 2).

4°. Системы линейных уравнений. Будем считать, что в каждом из уравнений системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad (1)$$

с двумя переменными хотя бы один из коэффициентов при переменных отличен от нуля. Графиками таких уравнений являются две прямые на плоскости. Возможны три случая взаимного расположения двух прямых на плоскости: 1) прямые пересекаются (система имеет одно решение, рис. 198); 2) прямые параллельны и не имеют общих точек (система не имеет решений, рис. 199); 3) прямые совпадают (система имеет бесконечно много решений, рис. 200).

Пример 15. При каком значении параметра  $a$  система

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ ax - 4y = 3 \end{cases}$$

имеет решение?

При решении этой задачи воспользуемся геометрическим смыслом системы линейных уравнений. Угловым коэффициентом прямой,

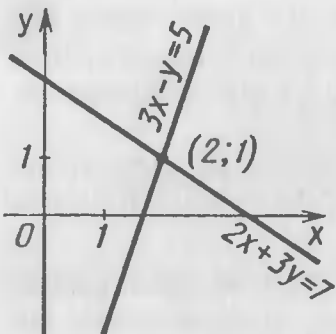


Рис. 198.

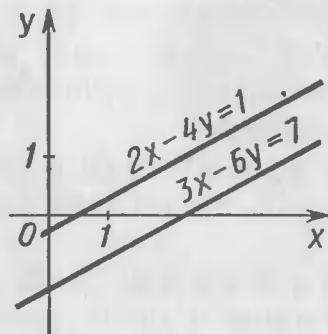


Рис. 199.

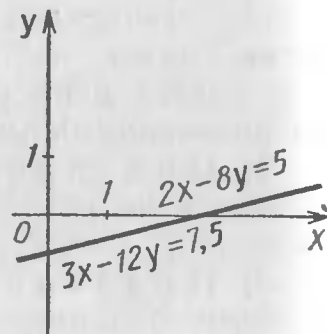


Рис. 200.

задаваемой первым уравнением, равен  $-1$ , а угловым коэффициентом прямой, задаваемой вторым уравнением системы, равен  $\frac{a}{4}$ . Поэтому при  $\frac{a}{4} \neq -1$ , т. е. при  $a \neq -4$ , эти прямые пересекаются и, следовательно, система имеет единственное решение. При  $a = -4$  эти прямые параллельны (так как имеют равные угловые коэффициенты) и не совпадают (рис. 201) и, следовательно, система не имеет решений. Ответ: При  $a \neq -4$ .

Для решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными чаще всего пользуются правилом сложения или правилом подстановки.

Пример 16. Решим систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = 3, \\ 3x - y = 10. \end{cases}$$

Прибавив к первому уравнению системы второе, умноженное на 3, получим систему, равносильную заданной:

$$\begin{cases} 11x = 33, \\ 3x - y = 10. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы находим, что  $x = 3$ , а затем находим из второго уравнения  $y = 3x - 10$ , откуда  $y = -1$ .  
 Ответ: (3; -1).

Другой способ решения основан на правиле подстановки. Из второго уравнения системы находим:  $y = 3x - 10$ . Подставляя вместо  $y$  в первое уравнение системы  $3x - 10$ , получаем систему, равносильную заданной:

$$\begin{cases} 2x + 3(3x - 10) = 3, \\ y = 3x - 10. \end{cases}$$

Из первого уравнения находим, что  $x = 3$ , а затем из второго, что  $y = 3 \cdot 3 - 10 = -1$ .

Иногда рассматривают геометрическую иллюстрацию систем трех линейных уравнений с тремя переменными. (В каждом из уравнений хотя бы один из коэффициентов при переменных считается отличным от нуля — в этом случае уравнение определяет плоскость в пространстве.) Из-за трудностей исследования взаимного расположения трех плоскостей в пространстве, заданных своими уравнениями, эта иллюстрация большого практического значения не имеет. ▼

## 15. Преобразование графиков функций

Часто график одной функции можно получить из графика другой с помощью геометрических преобразований. Такими геометрическими преобразованиями являются параллельные переносы вдоль осей координат, сжатия и растяжения к осям.

Рассмотрим в отдельности каждое преобразование.

**1<sup>0</sup>. Параллельный перенос графика вдоль оси ординат.** График функции  $g$ , где

$$g(x) = f(x) + a,$$

получается из графика функции  $f$  с помощью параллельного переноса на вектор  $\vec{r}(0; a)$  (рис. 202). Если число  $a$  положительно, то график параллельно переносится вдоль оси ординат вверх, а если  $a$  отрицательно, то вниз.

**Пример 1.** График квадратного трехчлена  $y = x^2 + 3$  получается из графика функции  $y = x^2$  параллельным переносом на 3 единицы вверх вдоль оси ординат (рис. 203), а график функции  $y = x^2 - 5$  — на 5 единиц вниз.

**2<sup>0</sup>. Параллельный перенос графика вдоль оси абсцисс.** На рисунке 204 изображены три графика — графики функций  $f$ ,  $g$  и  $h$ . При этом  $g(x) = f(x + a)$  и  $h(x) = f(x + b)$ . График функции  $g$  получается из графика функции  $f$  параллельным переносом на вектор  $\vec{r}(-a; 0)$ . На рисунке 204 для функции  $g(x)$  число  $a$  равно 2, а для функции  $h(x)$  число  $b$  равно  $-3$ .

**Пример 2.** График квадратного трехчлена  $y = (x + a)^2$  получается из графика  $y = x^2$  параллельным переносом на вектор  $\vec{r}(-a; 0)$  (рис. 205,  $a = 2,5$  и  $a = -3,5$ ).

Возьмем любую точку  $(x; y)$  на графике функции  $f$ . Координаты этой точки удовлетворяют равенству  $y = f(x)$ . При параллельном переносе на вектор  $\vec{r}(-a; 0)$  точка  $(x; y)$  перейдет в точку  $(x - a; y)$ . Координаты полученной точки удовлетворяют равенству  $y = f(x - a + a)$ , т. е.  $y = g(x - a)$ . Следовательно, после параллельного переноса точка  $(x; y)$  оказывается на графике функции  $g$ . Аналогично проверяется, что каждая точка графика функции  $g$  получается после этого переноса из некоторой точки графика функции  $f$ .

**Пример 3.** На рисунке 206 график квадратного трехчлена  $g(x) = (x - 3)^2 - 2$

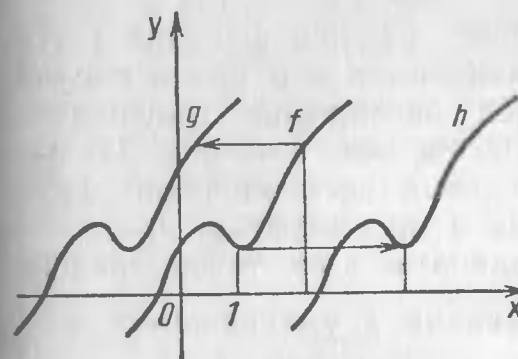


Рис. 204.

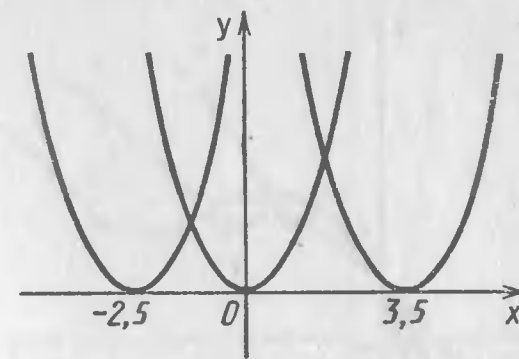


Рис. 205.

смещен параллельно оси ординат на 2 вниз и параллельно оси абсцисс на 3 вправо по отношению к графику  $f(x) = x^2$ . Таким образом, график функции  $g$  получен из графика функции  $f$  параллельным переносом на вектор  $\vec{r}(3; -2)$ .

**Пример 4.** Преобразовав квадратный трехчлен к виду

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a},$$

получим, что график функции  $y = ax^2 + bx + c$  получается из графика функции  $y = ax^2$  с помощью параллельного переноса на вектор  $\vec{r}\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ . График функции  $y = ax^2$  симметричен относительно оси ординат (так как это четная функция). Следовательно, график функции  $y = ax^2 + bx + c$  симметричен относительно образа оси ординат при этом переносе, т. е. прямой  $x = -\frac{b}{2a}$ .

**3<sup>0</sup>. Растяжение и сжатие графика к оси абсцисс.** На рисунке 207 изображены графики трех функций  $f$ ,  $g$  и  $h$ . При этом  $g(x) = af(x)$ , где  $a > 1$ , и  $h(x) = bf(x)$ , где  $0 < b < 1$ . От умножения всех значений функции  $f$  на число  $a > 1$  ординаты всех

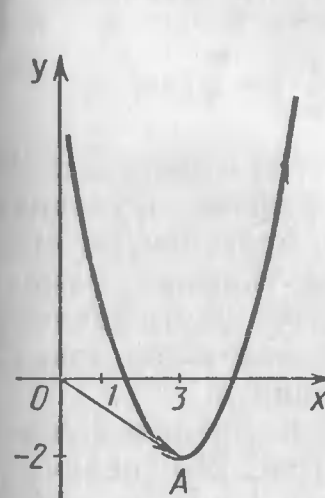


Рис. 206.

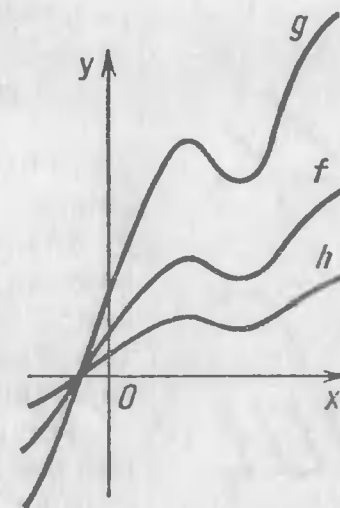


Рис. 207.

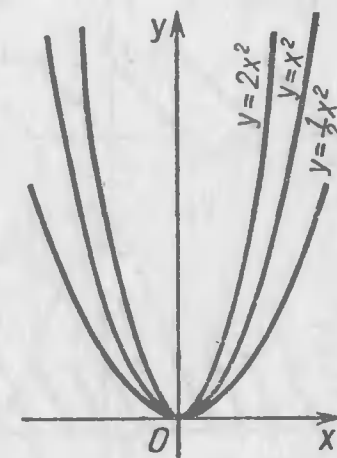


Рис. 208.

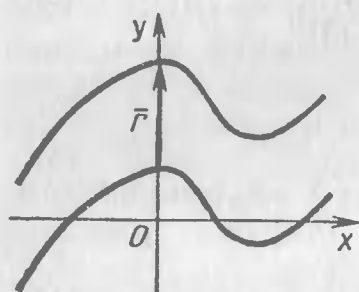


Рис. 202.

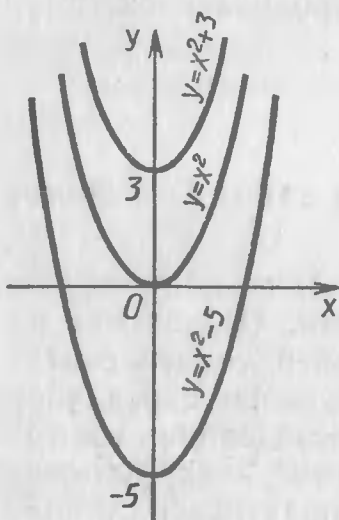


Рис. 203.

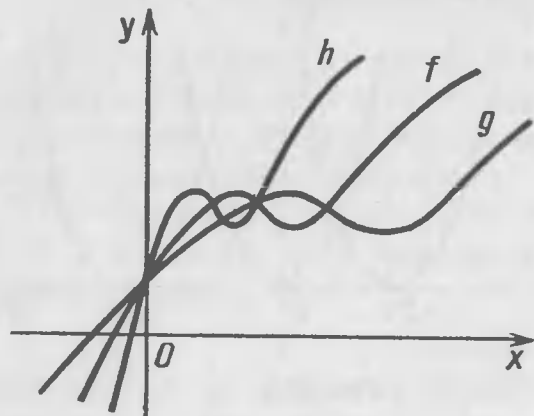


Рис. 209.

точек графика функции  $f$  увеличиваются в  $a$  раз и получается растяжение графика от оси абсцисс в  $a$  раз. От умножения всех значений функции  $f$  на число  $b$ ,  $0 < b < 1$ , ординаты всех точек графика функции  $f$  уменьшаются в  $\frac{1}{b}$  раз и получается сжатие графика к оси абсцисс в  $\frac{1}{b}$  раз.

Пример 5. График функции  $y = 2x^2$  (рис. 208) получается

из графика функции  $y = x^2$  растяжением графика от оси абсцисс в 2 раза, а график функции  $y = 0,5x^2$  — сжатием к оси абсцисс в 2 раза.

4°. Растяжение и сжатие графика к оси ординат. График функции

$$y = f\left(\frac{x}{a}\right)$$

получается из графика функции  $f$  растяжением в  $a$  раз при  $a > 1$  от оси ординат и сжатием в  $\frac{1}{a}$  раз к оси ординат при  $0 < a < 1$  (рис. 209).

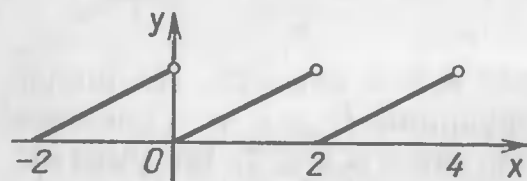


Рис. 210.

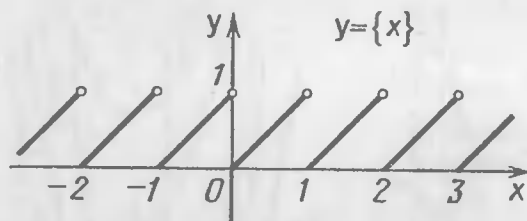


Рис. 211.

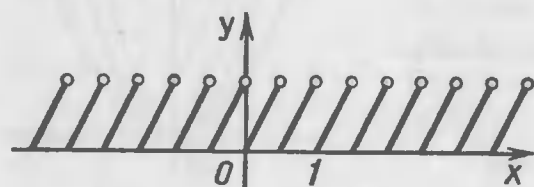


Рис. 212.

Действительно, после указанного растяжения (сжатия) точка с координатами  $(x; y)$  переходит в точку с координатами  $(ax; y)$ . Если точка  $(x; y)$  принадлежит графику функции  $f$ , то  $y = f(x)$ , т. е.

$$y = f\left(\frac{ax}{a}\right) = g(ax),$$

а это означает, что точка  $(ax; y)$  лежит на графике функции  $g$ . Аналогично проверяется, что каждая точка графика функции  $g$  получается растяжением (сжатием) из некоторой точки графика функции  $f$ .

Пример 6. График функции  $y = \{0,5x\}$  (рис. 210) получается из графика функции  $y = \{x\}$  (рис. 211) растяжением в 2 раза

от оси ординат, а график функции  $y = \{2x\}$  (рис. 212) сжатием в 2 раза к оси ординат.

Пример 7. График квадратного трехчлена

$$y = 2x^2 + 2x + 1,5$$

(рис. 213), т. е.

$$y = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 1,$$

получается из графика функции  $y = x^2$  следующими преобразованиями:

а) растяжением в 2 раза от оси абсцисс;

б) параллельным переносом на вектор  $\vec{r}(0; 1)$ ;

в) параллельным переносом

на вектор  $\vec{r}\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$  (вместо б) и в) можно сразу сделать параллельный перенос на вектор  $\vec{r}\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ .

Пример 8. График гармонического колебания  $y = 3 \cos(2x + 4)$ , т. е.  $y = 3 \cos(2(x + 2))$ , получается из графика косинуса следующей последовательностью преобразований:

1) сжатием в 2 раза к оси ординат (рис. 214);

2) параллельным переносом на вектор  $\vec{r}(-2; 0)$  (рис. 215);



Рис. 213.

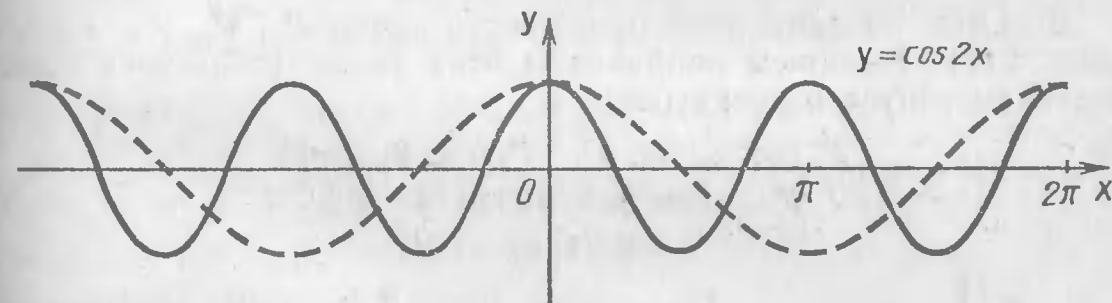


Рис. 214.

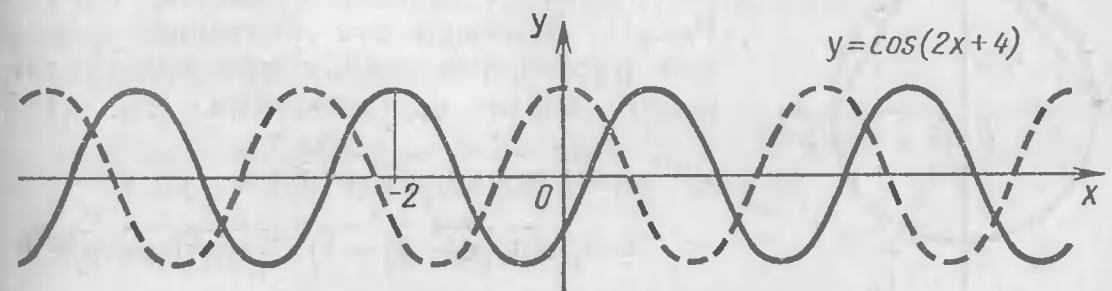


Рис. 215.



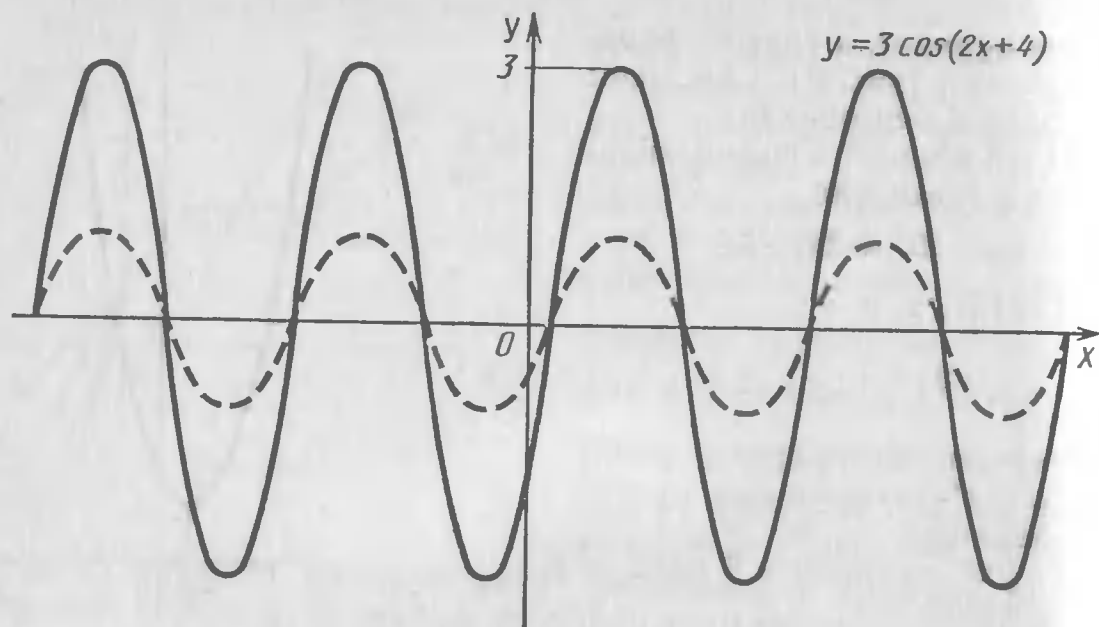


Рис. 216.

3) растяжением в 3 раза от оси абсцисс (рис. 216).

Вообще графики гармонического колебания  $y = A \cos(\omega x + \varphi)$  получаются из графика косинуса такой последовательностью преобразований: 1) сжатием в  $\omega$  раз к оси  $Oy$ ; 2) параллельным переносом на вектор  $\vec{r}(-\frac{\varphi}{\omega}; 0)$ ; 3) растяжением в  $A$  раз от оси  $Ox$ . ▼

## 16. Формулы сложения для тригонометрических функций

Возьмем на единичной окружности точки  $P_\alpha$ ,  $P_\beta$ ,  $P_{\alpha-\beta}$  и  $P_0$  (рис. 217). Выпишем координаты этих точек (пользуясь определением синуса и косинуса):

$$\begin{aligned} P_\alpha &(\cos \alpha; \sin \alpha), & P_\beta &(\cos \beta; \sin \beta), \\ P_{\alpha-\beta} &(\cos(\alpha - \beta); \sin(\alpha - \beta)), \\ P_0 &(1; 0). \end{aligned} \quad (1)$$

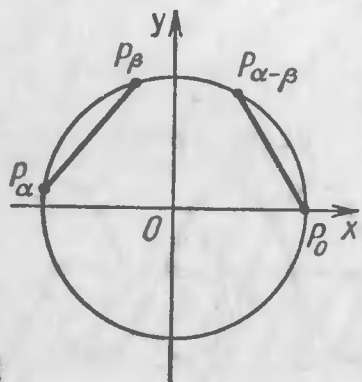


Рис. 217.

Поскольку дуги  $P_\alpha P_\beta$  и  $P_{\alpha-\beta} P_0$  равны, то равны и длины отрезков  $P_\alpha P_\beta$  и  $P_{\alpha-\beta} P_0$ . Запишем это, пользуясь формулой расстояния между точками, заданными своими координатами (см. (1)):

$$\begin{aligned} \sqrt{(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2} &= \\ &= \sqrt{(\cos(\alpha - \beta) - 1)^2 + \sin^2(\alpha - \beta)}. \end{aligned}$$

Возведем обе части этого равенства

в квадрат и выполним преобразования, учитывая тождество  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ :

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha - 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta + \sin^2 \alpha - 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta &= \\ = \cos^2(\alpha - \beta) - 2 \cos(\alpha - \beta) + 1 + \sin^2(\alpha - \beta); \\ (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) &= \\ = (\cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)) - 2 \cos(\alpha - \beta) + 1; \\ 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) &= 2 - 2 \cos(\alpha - \beta), \end{aligned}$$

откуда получаем формулу косинуса разности:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta. \quad (2)$$

Из равенств

$$\cos(-\beta) = \cos \beta \text{ и } \sin(-\beta) = -\sin \beta$$

и формулы (2) следует:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) = \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Итак, формула косинуса суммы имеет вид:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \quad (3)$$

Пользуясь формулами

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha,$$

которые следуют из формул (2) и (3), получаем:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \beta\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cos \beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \sin \beta = \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \quad (4)$$

Из формулы (4) получаем:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \sin(-\beta) = \\ &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad (5)$$

Из формул (3) и (4):

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta}.$$

Поделив в этом равенстве числитель и знаменатель правой части на  $\cos \alpha \cos \beta$ , получим:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (6)$$

Наконец,

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \operatorname{tg}(\alpha + (-\beta)) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}(-\beta)}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}(-\beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (7)$$

## СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1°. Длина дуги и площадь сектора. Длина  $S$  окружности радиуса  $R$  равна  $2\pi R$ . Длина дуги в  $\alpha$  радиан равна  $\alpha R$ , где  $R$  — радиус соответствующей окружности.

Площадь  $S$  круга радиуса  $R$  равна  $\pi R^2$ . Площадь сектора, дуга которого содержит  $\alpha$  радианов, равна  $\frac{\alpha R^2}{2}$  ( $R$  — радиус дуги).

2°. Знаки значений тригонометрических функций (рис. 218).



Рис. 218.

3°. Формулы, связывающие тригонометрические функции одного аргумента.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}; \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha};$$

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1;$$

$$\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad \operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$

#### 4°. Тригонометрические функции двойного аргумента.

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha; \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1; \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.\end{aligned}$$

#### 5°. Тригонометрические функции половинного аргумента.

$$\begin{aligned}\sin \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}; \\ \cos \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}; \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}; \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}.\end{aligned}$$

#### 6°. Формулы суммы и разности косинусов и синусов.

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}; \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}; \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.\end{aligned}$$

#### 7°. Формулы приведения.

$u$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$-\alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\pi - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$
$\sin u$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
$\cos u$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\operatorname{tg} u$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\operatorname{ctg} u$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$

8°. Основные свойства степеней с действительными показателями. Для любых положительных  $a$  и  $b$  и действительных  $x$  и  $y$  справедливы равенства:

$$\begin{aligned}\text{а) } a^0 &= 1; \\ \text{б) } a^x \cdot a^y &= a^{x+y}; \\ \text{в) } a^x : a^y &= a^{x-y}; \\ \text{г) } (a^x)^y &= a^{xy}; \\ \text{д) } (ab)^x &= a^x b^x; \\ \text{е) } \left(\frac{a}{b}\right)^x &= \frac{a^x}{b^x}.\end{aligned}$$

9°. Основные свойства логарифмов. Для любого  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , справедливы равенства:

$$\begin{aligned}\text{а) } \log_a 1 &= 0; \\ \text{б) } \log_a a &= 1; \\ \text{в) } \log_a (xy) &= \log_a x + \log_a y \text{ при } x > 0, y > 0; \\ \text{г) } \log_a \frac{x}{y} &= \log_a x - \log_a y \text{ при } x > 0, y > 0; \\ \text{д) } \log_a x^p &= p \log_a x \text{ при } x > 0, p \in \mathbb{R}; \\ \text{е) } \log_a x &= \frac{\log_b x}{\log_b a} \text{ при } x > 0, b > 0, b \neq 1; \\ \text{ж) } a^{\log_a x} &= x \text{ при } x > 0 \text{ (основное логарифмическое тождество)}.\end{aligned}$$

#### 10°. Формулы дифференцирования.

$$\begin{aligned}C' &= 0; (x)' = 1; (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \text{ при } \alpha \neq 1; \sin' x = \cos x; \\ \cos' x &= -\sin x; \operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}; \operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}; \\ (e^x)' &= e^x; (a^x)' = a^x \ln a; \ln' x = \frac{1}{x};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f+g)' &= f' + g'; (f \cdot g)' = f'g + fg'; (cf)' = cf'; \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f'g - fg'}{g^2}; (f(kx+b))' = kf'(kx+b); \\ (f(g(x)))' &= f'(g(x)) \cdot g'(x).\end{aligned}$$

#### 11°. Первообразные.

$f(x)$	$\frac{x^a}{a+1}$ ( $a \neq -1$ )	$\sin x$	$\cos x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{x}$	$e^x$	$a^x$
$F(x) + C$	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$	$\operatorname{tg} x + C$	$-\operatorname{ctg} x + C$	$\ln  x  + C$	$e^x + C$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$

746. Упростите:

$$a) \frac{x-1}{x+x^{\frac{1}{2}}+1} : \frac{x^{0.5}+1}{x^{1.5}-1} + \frac{2}{x^{-0.5}};$$

$$б) \frac{1+\frac{2}{\sqrt{t+4}}}{2-\sqrt{t+4}} \cdot t + \sqrt{t+4} + \frac{4}{\sqrt{t+4}};$$

$$в) \frac{1-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}} - \frac{2}{a^{\frac{3}{2}}} + \frac{a^{-2}-a}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}};$$

$$г) \left( \frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right)^2 \cdot \left( \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} - \frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} \right).$$

747. Докажите, что  $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$  делится на 24 при  $n \in \mathbb{N}$ .

748. Два куска латуни имеют массу 30 кг. Первый кусок содержит 5 кг чистой меди, а второй кусок 4 кг. Сколько процентов меди содержит первый кусок латуни, если второй содержит меди на 15% больше первого?

749. Время, затрачиваемое автобусом на прохождение расстояния 325 км, в новом расписании движения автобусов сокращено на 40 мин. Найдите среднюю скорость движения автобуса по новому расписанию, если она на 10 км/ч больше средней скорости, предусмотренной старым расписанием.

750. Моторная лодка, скорость которой в стоячей воде равна 15 км/ч, прошла вниз по течению реки  $139\frac{1}{3}$  км и вернулась обратно. Найдите скорость течения реки, если на весь путь затрачено 20 ч.

751. Поезд должен был пройти 220 км за определенное время. Через 2 ч после начала движения он был задержан на 10 мин, и, чтобы прийти вовремя в пункт назначения, он увеличил скорость на 5 км/ч. Найдите первоначальную скорость поезда.

752. Две бригады комсомольцев, работая совместно, закончили посадку деревьев на учебно-опытном участке за 4 дня. Сколько дней потребовалось бы на выполнение этой работы каждой бригаде отдельно, если одна из бригад могла бы закончить посадку деревьев на 6 дней раньше другой?

753. Огородный участок, имеющий форму прямоугольника, одна сторона которого на 10 м больше другой, требуется обнести изгородью. Найдите длину изгороди, если известно, что площадь участка равна  $1200 \text{ м}^2$ .

754. К раствору, содержащему 40 г соли, добавили 200 г воды, после чего его концентрация уменьшилась на 10%. Сколько воды содержал раствор и какова была его концентрация?

755. Водонапорный бак наполняется двумя трубами за 2 ч 55 мин. Первая труба может его наполнить на 2 ч скорее, чем вторая. За сколько времени каждая труба, действуя отдельно, может наполнить бак?

756. По окружности, длина которой 60 м, равномерно и в одном направлении движутся две точки. Одна делает полный оборот на 5 с скорее другой и при этом догоняет вторую точку каждую минуту. Определите скорости точек.

757. На строительстве Байкало-Амурской магистрали (БАМ) бригада строителей за несколько дней должна была по плану переместить  $2160 \text{ м}^3$  грунта. Первые три дня бригада выполняла ежедневно установленную норму, а затем каждый день перевыполняла норму на  $80 \text{ м}^3$ , поэтому уже за день до срока бригада переместила  $2320 \text{ м}^3$  грунта. Какова по плану дневная норма бригады?

758. В двузначном числе цифра единиц на 2 больше цифры десятков. Само число больше 30 и меньше 40. Найдите это число.

759. Из двух жидкостей, плотность которых соответственно  $1,2 \text{ г/см}^3$  и  $1,6 \text{ г/см}^3$ , составлена смесь массой 60 г. Сколько граммов взято каждой жидкости и какова плотность смеси, если ее  $8 \text{ см}^3$  имеют массу такую же, как масса всей менее тяжелой из смешанных жидкостей?

760. Укажите верные цифры в записи приближенного значения числа:

$$\begin{array}{ll} a) 3,83 \pm 0,01; & б) 1,380 \cdot 10^4 \pm 0,001 \cdot 10^4; \\ в) 7,441 \pm 0,1; & г) 2,3 \cdot 10^{-5} \pm 0,2 \cdot 10^{-5}. \end{array}$$

761. Вычислите  $a+bc$ , если  $a \approx 3,71$ ;  $b \approx 0,017$ ;  $c \approx 2,3199$ .

762. Пользуясь формулой

$$(1+x)^n \approx 1+nx,$$

вычислите приближенно:

$$a) 1,002^5; \quad б) 2,006^3; \quad в) 3,001^4.$$



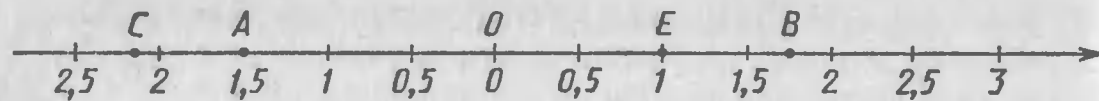


Рис. 219.

763. Докажите, что  $\sqrt{7}$  не является рациональным числом.
764. Найдите сумму чисел  $\sqrt{2}$  и  $\frac{19}{17}$  с точностью до 0,01.
765. Докажите, что  $\lg 3$  не является рациональным числом.
766. Вычислите без таблиц  $\lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2$ .
767. Что больше:
- а)  $\frac{4}{\lg \frac{1}{2}}$  или  $\frac{7}{\lg \frac{1}{2}}$ ;
- б)  $15^{\log_3 10}$  или  $10^{\log_3 15}$ ?
768. Найдите координаты точек  $A, B, C$  (рис. 219).
769. Найдите расстояние между точками координатной прямой:
- а)  $A(1,5)$  и  $B(-2)$ ; б)  $A(-10,3)$  и  $B(6,2)$ ;
- в)  $A(-3,6)$  и  $B(0)$ ; г)  $A(-5,7)$  и  $B(-7,1)$ .
770. Запишите в виде уравнения (или неравенства) условие, которому удовлетворяет координата точки  $A(x)$  координатной прямой, и решите его, если известно, что:
- а)  $|AB|=5$ , где  $B(5)$ ; б)  $|AB|<3,5$ , где  $B(-1)$ ;
- в)  $|AB|\leq 0,2$ , где  $B(-4,5)$ ; г)  $|AB|<\frac{1}{48}$ , где  $B(-12)$ .
771. Найдите расстояние между точками координатной плоскости:
- а)  $A(2; 5)$  и  $B(-1; 1)$ ;
- б)  $A(-1; 0)$  и  $B(1; 0)$ ;
- в)  $C(7; 9)$  и  $D(-5; 4)$ ;
- г)  $C(0,44; 2,54)$  и  $D(-0,56; 1,54)$ .
772. Запишите в виде уравнения (или неравенства) условие, которому удовлетворяют координаты точки  $A(x; y)$  координатной плоскости, если известно, что:
- а)  $|AB|=5$ , где  $B(0; 0)$ ; б)  $|AB|\leq 5$ , где  $B(0; 0)$ ;
- в)  $|AB|=1$ , где  $B(2; 3)$ ; г)  $|AB|>1$ , где  $B(2; 3)$ .
- Найдите множество решений (773—775).
773. а)  $|x|=5$ ; б)  $|x|<5$ ;
- в)  $|x|\geq 5$ ; г)  $|x-10|=4$ .
774. а)  $|x-10|\leq 4$ ; б)  $|x-10|>4$ ; в)  $x^2>4$ .
775. а)  $x^2\leq 5$ ; б)  $(x-1)^2<9$ ; в)  $(x+2)^2\leq 1$ .

Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют условию (776—779).

776. а)  $x(y-1)=0$ ; б)  $(x-2)(y+3)=0$ ;
- в)  $xy\geq 0$ ; г)  $xy<0$ .
777. а)  $(x-2)y>0$ ; б)  $x>0, y\geq -1$ ;
- в)  $\frac{y-x}{x-1}=0$ ; г)  $(2x+3y)(x-4y)=0$ .
778. а)  $|x-3|<1$ ; б)  $|x|<1, |y|<1$ ;
- в)  $|x|>1, |y|>1$ ; г)  $|x-2|\leq 1, |y+3|\leq 1$ .
779. а)  $x^2+y^2=4$ ; б)  $x^2+y^2<4$ ;
- в)  $x^2+y^2>4$ ; г)  $(x-1)^2+(y-1)^2\leq 9$ .
780. Дано:  $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$ . Найдите  $f\left(\frac{\sqrt{a^2-1}}{a-1}\right)$ .
781. Найдите сумму членов бесконечной геометрической прогрессии:
- а)  $b_n=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2}$ ; б)  $b_n=\left(\frac{1}{2}\sin x\right)^n$ ;
- в)  $b_n=\left(\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}\right)^n$  при  $a\neq b$ ; г)  $b_n=\operatorname{tg}^n x$ , где  $0<x<\frac{\pi}{4}$ .
782. Запишите в виде обыкновенной дроби:
- а)  $1,2(27)$ ; б)  $2,(41)$ ; в)  $0,(428571)$ ; г)  $0,3(148)$ .
783. Какой четверти принадлежит угол:
- а)  $1200^\circ$ ; б)  $-1000^\circ$ ; в)  $3,5\pi$ ;
- г)  $\alpha+\frac{2}{3}\pi$ , где  $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ;
- д)  $\alpha-\pi$ , если  $\alpha$  — угол III четверти;
- е)  $\alpha-3\pi$ , если  $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ ?
784. Какой четверти принадлежит число  $x$ , если:
- а)  $\sin x=4\cos x$ ; б)  $\sin x-\cos x=1,2$ ?
785. Вычислите  $\frac{\sin 110^\circ \sin 250^\circ + \cos 540^\circ \cos 290^\circ \cos 430^\circ}{\cos^2 1260^\circ}$ .
786. Найдите  $\sin x$ , если  $\cos x=\frac{1-m}{1+m}$  и  $m>0$ .
787. Вычислите  $\cos x$ , если  $\sin x=-\frac{3}{\sqrt{10}}$  и  $\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$ .
788. Вычислите  $\cos x$ , если  $\sin x \operatorname{tg} x=\frac{1}{2}$ .
789. Вычислите  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ , если  $\cos \alpha=-\frac{3}{5}$ .

790. Вычислите  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}$ .

791. Вычислите без таблиц значений тригонометрических функций значение  $\sin 46^\circ$  с точностью до 0,001, если  $\cos 32^\circ \approx 0,848$ .  
У к а з а н и е.  $\sin 46^\circ = \sin (30^\circ + 16^\circ)$ .

792. Дано:  $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $\cos \alpha > 0$ .

Найдите  $\operatorname{tg} \alpha$ .

793. Докажите следующие формулы приведения:

а)  $\sin (2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$ ; б)  $\sin \left( \frac{3\pi}{2} - \alpha \right) = -\cos \alpha$ ;

в)  $\cos (\pi + \alpha) = -\cos \alpha$ ; г)  $\sin (\pi - \alpha) = \sin \alpha$ ;

д)  $\cos \left( \frac{3\pi}{2} + \alpha \right) = \sin \alpha$ ; е)  $\cos \left( \frac{\pi}{2} + \alpha \right) = -\sin \alpha$ .

794. Докажите, что  $\sin (\alpha + \pi k) = (-1)^k \sin \alpha$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

795. Докажите тождество:

$$\sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} - \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = 2 \operatorname{ctg} \alpha, \text{ если } \pi < \alpha < 2\pi.$$

796. Решите неравенство:

а)  $x^2 - 14x + 15 > 0$ ; в)  $3x^2 - 5x - 2 \leq 0$ ;

б)  $x^2 - 3x + 5 \geq 0$ ; г)  $2x^2 - 9x - 3 < 0$ .

797. Найдите область определения функции:

а)  $y = \lg (3x^2 - 4x + 5)$ , б)  $y = \lg (5x^2 - 8x - 4)$ ;

в)  $f(x) = \sqrt{3x^2 - 4x + 5}$ ; г)  $f(x) = \sqrt{6 + 7x - 3x^2}$ .

798. Заданы корни квадратного уравнения:  $x_1 = 1 - \sqrt{3}$  и  $x_2 = 1 + \sqrt{3}$ . Напишите уравнение.

799. Найдите сумму кубов корней уравнения  $x^2 + 2x - 2 = 0$ .

800. Какой вектор переводит параболу  $y = 2x^2$  в параболу  $y = 2(x - 3)^2$ ?

801. Найдите с помощью производной координаты вершины параболы:

а)  $y = 3x^2 + 6x + 20$ ; б)  $y = 2x^2 - 8x + 5$ .

802. Напишите уравнение параболы, получающейся из параболы  $y = -2x^2$  с помощью следующих двух преобразований:  
а) растяжение в 2 раза от оси  $Oy$ ; б) параллельный перенос  $\vec{r}(0; 2)$ .

803. Напишите уравнение параболы, которая получается из параболы  $y = \frac{1}{2}x^2$  параллельным переносом  $\vec{r}(-2; 3)$ .

804. По графику функций, изображенных на рисунках 220—223, ответьте на вопросы:

1. Каковы промежутки возрастания функции?

2. Каковы промежутки убывания функции?

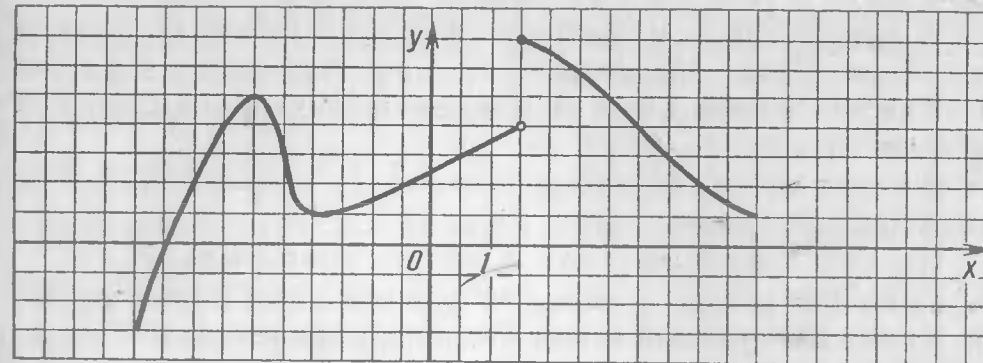


Рис. 220.

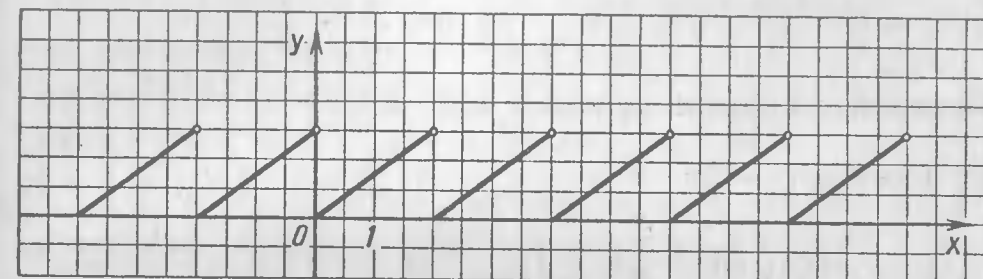


Рис. 221.

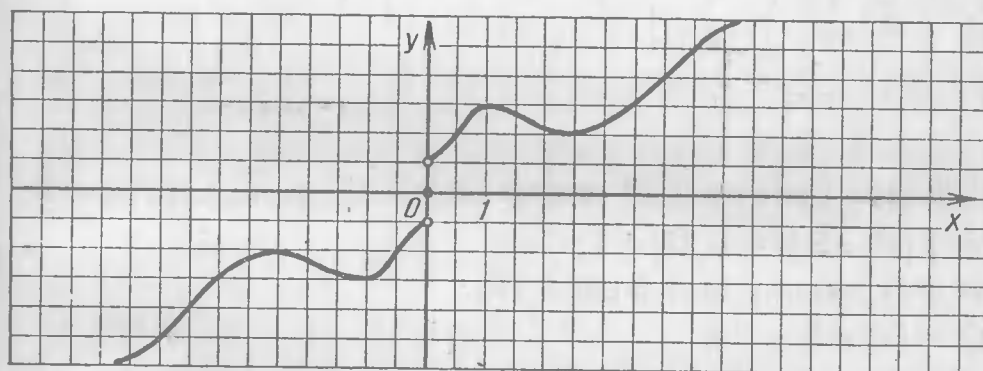


Рис. 222.

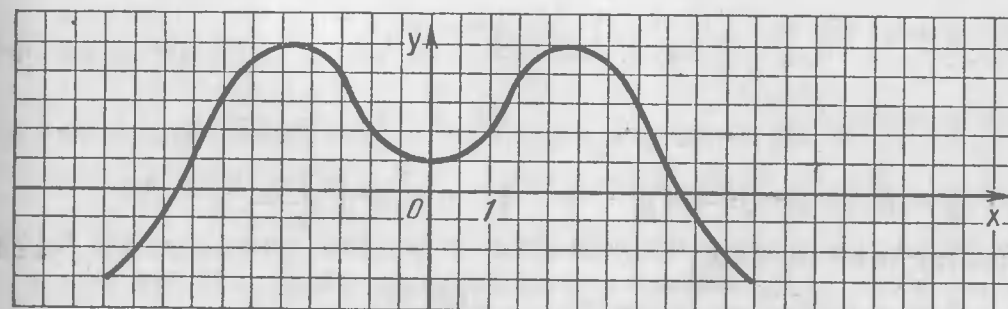


Рис. 223.

3. Укажите точки, в которых функция имеет максимум или минимум. Какие значения принимает функция в этих точках?
4. Каковы наибольшее и наименьшее значения этих функций на отрезке  $[-2; 2]$ ?
5. В каких точках функция не является непрерывной и каковы значения функции в этих точках?
6. На каких промежутках функция непрерывна?
7. Укажите точки, в которых производная равна нулю.
8. Какие из функций могут быть периодическими с периодом, меньшим 3, чему равен их наименьший положительный период?
9. Какие из этих функций четные и какие нечетные?

805. Исследуйте функцию и постройте ее график:

а)  $y = (x-1)^3 - 3(x-1)$ ; б)  $y = \frac{8}{x} + \frac{x}{2}$ .

Постройте график функции (806—807).

806. а)  $y = 2 \lg(x-2)$ ; б)  $y = 3 \ln\left(x + \frac{1}{2}\right) + 1$ ;

в)  $y = \frac{3}{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$ ; г)  $y = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\sin x \cdot \cos x}$ ;

д)  $y = 2 \cdot \frac{5-x}{x-3}$ .

807. а)  $y = \{1,5x - 1\}$ ; б)  $y = \{1,5(x-1)\}$ ;

в)  $y = |\sin x \cdot \operatorname{ctg} x|$ ;

г)  $y = \left| \frac{\operatorname{ctg} x}{\frac{1}{\sin x}} \right|$ .

808. Найдите наименьший положительный период функции:

а)  $f(x) = 3\{x + 0,25\} + 1$ ;

б)  $p(x) = \sin 1,5x + 5 \cos 0,75x$ ;

в)  $q(x) = \{1 - 2x\}$ .

Исследуйте на четность (нечетность) функцию (809—810).

809. а)  $y = \cos \frac{x^2 - x}{x-1}$ ; б)  $y = \sin \frac{x^3 - x}{x^2 - 1}$ ;

в)  $y = x^3 \sin x$ ; г)  $y = x^3 - x^2$ .

810. а)  $y = \sin \frac{x^3 - x^2}{x-1}$ ; б)  $y = \operatorname{tg} \frac{3x^3 - x^2}{3x-1}$ ;

в)  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ ; г)  $y = \lg \left| \frac{3+x}{3-x} \right|$ .

811\*. Вычислите предел:

а)  $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}$ ; б)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{8}} \frac{\cos 4x}{\sin 2x - \cos 2x}$ .

812\*. Докажите, что функция  $y = \sin x$  непрерывна в любой точке.

813. Найдите производную функции:

а)  $y = 2x^6 - 3,8x^5 + x - \sqrt{2}$ ; б)  $y = \frac{3-2x}{x+1}$ ;

в)  $y = (x+1) \sin x - x \cos^2 x$ ; г)  $y = 2 \operatorname{tg} x \cdot \lg x$ ;

д)  $y = \frac{45x^4 - 30x^2}{(8x^2 - 3)^2}$ .

814. Путь  $s$  точки  $M$  в зависимости от времени  $t$  выражается формулой  $s = 2t^3 + 6t - 1$  (где  $s$  измеряется в метрах,  $t$  — в минутах). Найдите скорость и ускорение точки  $M$  в момент времени  $t = 3$  мин.

815. Докажите возрастание (или убывание) функции на  $R$ :

а)  $y = -0,2x^5 + 0,5x^4 - x^3 + x^2 - x$ ;

б)  $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 21$ ;

в)  $y = 0,8x^5 - x^4 + 3x^3 + 2x^2 + 4x$ .

816. Напишите уравнение касательной к графику функции  $y = x^2 + 2x$  в точках пересечения этого графика с осью абсцисс и в точке с абсциссой  $x = 1,5$ .

817. Задайте формулой функцию, обратную функции  $f(x)$ . Для обратной функции укажите область определения и область значений. Выясните, возрастает она или убывает:

а)  $f(x) = \frac{2x-3}{3}$ ; б)  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ; в)  $f(x) = \frac{2x+1}{3-x}$ ;

г)  $f(x) = 2^x + 1$ ; д)  $f(x) = \log_3(x+2)$ ; е)  $f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x}$ .

Найдите промежутки возрастания (убывания) и точки максимума и минимума (818—820).

818. а)  $y = \frac{2x+1}{1-3x}$ ; б)  $y = \frac{2x-1}{2-4x}$ ;

в)  $y = xe^x$ ; г)  $y = 2^{x^2-4x}$ .

819. а)  $y = \frac{6 \ln x}{x}$ ; б)  $y = x - \ln x$ ;

в)  $y = \frac{e^x}{x+1}$ ; г)  $y = 2 \sin x + 3 \cos x$ .

820. а)  $y = x \ln x$ ; б)  $y = \cos 2x - 2 \cos x$ .

821. Найдите наибольшее значение функции на  $R$ :

а)  $y = 18x^2 + 8x^3 - 3x^4$ ; б)  $y = -2x^4 + 3x^2 - 6$ .

822. Какое положительное число, будучи сложением с обратным ему числом, дает наименьшую сумму?

823. Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен  $72 \text{ см}^3$ , причем стороны основания относились бы

- как 1:2. Каковы должны быть размеры всех ребер, чтобы полная поверхность была наименьшей?
824. На окружности дана точка  $A$ . Провести хорду  $BC$  параллельно касательной в точке  $A$  так, чтобы площадь треугольника  $ABC$  была наибольшей.
825. Каков должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника заданной площади, чтобы радиус вписанного в этот треугольник круга был наибольшим?
826. Объем правильной треугольной призмы равен  $V$ . Какова должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?
827. Требуется изготовить коническую воронку с образующей  $l=20$  см. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?
828. Найдите высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса  $R$ .
829. В конус, радиус основания которого  $R$  и высота  $H$ , требуется вписать цилиндр, имеющий наибольшую полную поверхность. Найдите радиус цилиндра.
830. Около данного цилиндра описать конус наименьшего объема (плоскости оснований цилиндра и конуса совпадают).
831. Найдите высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса  $R$ .
832. Найдите высоту конуса наименьшего объема, описанного около полушара радиуса  $R$ , так, чтобы центр основания конуса лежал в центре шара.
833. Из круглого бревна диаметром 40 см требуется вырезать балку прямоугольного сечения с основанием  $b$  и высотой  $h$ . Прочность балки пропорциональна  $bh^2$ . При каких значениях  $b$  и  $h$  прочность балки будет наибольшей?
834. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Определите размеры окна, имеющего наибольшую площадь при заданном периметре.
835. По двум улицам движутся к перекрестку две машины с постоянными скоростями 40 км/ч и 50 км/ч. Считая, что улицы пересекаются под прямым углом, и зная, что в некоторый момент времени автомашины находятся от перекрестка на расстоянии 2 км и 3 км (соответственно), определите, через какое время расстояние между ними станет наименьшим.
836. Картина высотой 1,4 м повешена на стену так, что ее нижний край на 1,8 м выше глаз наблюдателя. На каком расстоянии от стены должен встать наблюдатель, чтобы его положение было наиболее благоприятно для осмотра картины (т. е. чтобы угол зрения по вертикали был наибольшим)?
837. Статуя высотой 4 м стоит на колонне, высота которой 5,6 м. На каком расстоянии должен встать человек ростом (до уровня глаз) 1,6 м, чтобы видеть статую под наибольшим углом?

838. Три пункта  $A$ ,  $B$ ,  $C$  не лежат на одной прямой, причем  $\angle ABC=60^\circ$ . Одновременно из точки  $A$  выходит автомобиль, а из точки  $B$  — поезд. Автомобиль движется по направлению к  $B$  со скоростью 80 км/ч, поезд — к пункту  $C$  со скоростью 50 км/ч. В какой момент времени (от начала движения) расстояние между поездом и автомобилем будет наименьшим, если  $AB=200$  км?
839. На странице текст должен занимать  $384$  см<sup>2</sup>. Верхнее и нижнее поля должны быть по 3 см, правое и левое — по 2 см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то каковы должны быть наиболее выгодные размеры страницы?
840. Расходы на топливо для парохода делятся на две части. Первая из них не зависит от скорости и равна 480 р. в час. А вторая часть расходов пропорциональна кубу скорости, причем при скорости 10 км/ч эта часть расходов равна 30 р. в час. Требуется определить, при какой скорости общая сумма расходов на 1 км пути будет наименьшей.
841. Решите неравенство:

$$а) \frac{(x-1)(x-2)}{x-3} > 0; \quad б) \frac{(x-3)(x-5)}{x-2} < 0;$$

$$в) \frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8} \geq 0; \quad г) \frac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6} < 0;$$

$$д) (x-1)(x-2)(x-3)(x-4) < 0;$$

$$е) x^4 - 3x^2 + 2 \leq 0.$$

Найдите первообразную функции (842—844).

$$842. а) f(x) = x + \frac{1}{x}; \quad б) f(x) = \sqrt{2x};$$

$$в) f(x) = 2 \sin x + \cos 3x; \quad г) f(x) = x^{-5} + x^{-2}.$$

$$843. а) f(x) = \frac{3}{x+4}; \quad б) f(x) = \frac{2}{3 \sin^2 2x};$$

$$в) f(x) = \frac{3}{\cos^2 2x}; \quad г) f(x) = 2x + 3x^2.$$

$$844. а) f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x-1}; \quad б) f(x) = x^3 + \sqrt{x}.$$

845. Найдите функцию, производная которой равна  $2x-3$  и значение которой в точке 2 равно 2.

846. Материальная точка движется по координатной прямой со скоростью  $v(t) = \sin t \cos t$ . Найдите уравнение движения точки, если при  $t = \frac{\pi}{4}$  ее координата равнялась 3.

847. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку (2; 3), если угловой коэффициент ее касательной в точке с абсциссой  $x$  равен  $3x^2$ .



848. Вычислите:

$$\text{а) } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos x dx; \quad \text{б) } \int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} (\cos 3x - \sin 2x) dx.$$

849. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$$\text{а) } y = 0,5x^2 - 3x + 2 \text{ и } y = x - 4;$$

$$\text{б) } y = x^2 - 5x + 4 \text{ и } y = 2x - 2;$$

$$\text{в) } y = 8 - \frac{1}{2}x^2 \text{ и } y = 3,5;$$

$$\text{г) } y = x^2 - 3x + 4 \text{ и } y = x + 1;$$

$$\text{д) } y = \frac{5}{x} \text{ и } y = 6 - x.$$

850. Докажите неравенство:

$$\text{а) } m + \frac{4}{m} \geq 4, m > 0; \quad \text{б) } \frac{2m}{1+m^2} \leq 1;$$

$$\text{в) } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2, a > 0, b > 0;$$

$$\text{г) } \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geq 2, 0 < x < \frac{\pi}{2};$$

$$\text{д) } \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{12} + \frac{\alpha}{4}\right) \sin\left(\frac{5\pi}{12} - \frac{\alpha}{4}\right)} + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \leq 2\sqrt{3};$$

$$\text{е) } (1 + \sin \varphi + \cos \varphi)(1 - \sin \varphi + \cos \varphi)(1 + \sin \varphi - \cos \varphi) \times \\ \times (\sin \varphi + \cos \varphi - 1) \leq 1.$$

Решите уравнение (851—854).

$$\text{851. а) } \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}} - \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} = 3; \quad \text{б) } \sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{2+x}} + \sqrt{2+x} = 0.$$

$$\text{852. а) } \operatorname{tg} 5x \cdot \cos x = 0; \quad \text{б) } \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \cos x = 0; \\ \text{в) } \sin 2x + \sin 3x = 0; \quad \text{г) } \sin x + \cos 2x = 0.$$

$$\text{853. а) } 3 \sin 3x + 4 \cos 3x = -5; \\ \text{б) } 5 \sin 2x - 12 \cos 2x = 13; \\ \text{в) } 4 \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 12 \sin^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 11; \\ \text{г) } 4 \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) + 7 \cos^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 7\frac{1}{4}.$$

$$\text{854. а) } |2x - 5| = |7 - 2x|; \quad \text{б) } |x - 2| = 2|3 - x|; \\ \text{в) } x^2 + |x| - 2 = 0; \quad \text{г) } x^2 - 3|x| + 2 = 0.$$

Решите неравенство (855—856).

$$\text{855. а) } |3x - 2,5| \geq 2; \quad \text{б) } |5 - 2x| < 1; \\ \text{в) } x^2 - 4|x| + 3 > 0; \quad \text{г) } 2x^2 - 5|x| + 3 \geq 0.$$

$$\text{856. а) } \frac{x+2}{x+3} > 3; \quad \text{б) } \frac{1-3x}{1-2x} < 1; \\ \text{в) } \frac{3x}{2+x} > 2; \quad \text{г) } \frac{3-x}{x-4} < \frac{2}{3}.$$

Решите систему уравнений (857—859).

$$\text{857. а) } \begin{cases} x - 3y = 1, \\ 2x + y = 4\frac{1}{3}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 5x + 4y = 1; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 7x - 2y = -1, \\ 3x - 5y = 12. \end{cases}$$

$$\text{858. а) } \begin{cases} 3x - 9y = 12, \\ 4x - 12y = 16; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x + 6y = 5, \\ x + 3y = 2,5; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 4x - 6y = 8, \\ x - 1,5y = 2. \end{cases}$$

$$\text{859. а) } \begin{cases} x + 2y = 7, \\ 2x + 4y = 9; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 5x - 8y = 0, \\ x - 1,6y = 1; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x + y = 7, \\ 2x + 2y = 11. \end{cases}$$

860. При каком значении параметра  $a$  система:

$$\text{а) } \begin{cases} ax - 3y = 4, \\ x - y = \frac{4}{3}; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + ay = 2, \\ 3x - 2y = 6; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x + 1,5y = 4, \\ 4x + 6y = a \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений?

861. При каком значении параметра  $a$  система:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x + ay = 8, \\ 3x - 5y = 6; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x - y = 3, \\ ax + 2y = -6; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x - y = 2, \\ 2x - 2y = a \end{cases}$$

не имеет решений?

862. Можно ли указать значение параметра  $a$ , при котором система имеет решение:

$$\text{а) } \begin{cases} x - 5y = 7, \\ ax + y = -3; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + 2y = a, \\ 2x + 4y = 5; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ ax + y = -3? \end{cases}$$

Решите систему уравнений (863—867).

$$\text{863. а) } \begin{cases} x + y + z = -2, \\ x - y + 2z = -7, \\ 2x + 3y - z = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + 2y - z = 7, \\ 2x - y + z = 2, \\ 3x - 5y + 2z = -7; \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} x - y - z = 5, \\ 2x + y + 3z = 3, \\ x - 4y - 6z = 7; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x - 3y + z = 7, \\ 3x + y - 2z = 3, \\ x + 7y - 4z = 0. \end{cases}$$

$$\text{864. а) } \begin{cases} \frac{y}{x} = 2, \\ (x-1)^2 + y^2 = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{13}{6}, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

$$\text{865. а) } \begin{cases} (x+0,2)^2 + (y+0,3)^2 = 1, \\ x + y = 0,9; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x - y = 1, \\ x^3 - y^3 = 7; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} = \frac{1}{x}, \\ y^2 - x - 5 = 0; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

# ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

$$866. \text{ а) } \begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=45, \\ x+y=5; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2y^3=16, \\ x^3y^2=2; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x^2y^3+x^3y^2=12, \\ x^2y^3-x^3y^2=4; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x^{-1}+y^{-1}=5, \\ x^{-2}+y^{-2}=13. \end{cases}$$

$$867. \text{ а) } \begin{cases} x^3+y^3=7, \\ x^3y^3=-8; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^3+y^3=9, \\ xy=2; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x^2+y^4=5, \\ xy^2=2; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x^2-xy=28, \\ y^2-xy=-12. \end{cases}$$

868. Решите систему неравенств:

$$\text{а) } \begin{cases} 2(3x-1) < 3(4x+1)+16, \\ 4(2+x) < 3x+8; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x > 3 - \frac{13x-2}{11}, \\ \frac{x}{6} + \frac{2}{3}(x-7) < \frac{3x-20}{9}; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{x}{3} \geq \frac{x-1}{4} - x - 2, \\ 0,5x < 2 - x; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} x - \frac{x+1}{2} - \frac{x+4}{3} \leq \frac{x-1}{4} - 2, \\ 1,5x - 2,5 < x. \end{cases}$$

869. Решите систему уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 14, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 4; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = -6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 3. \end{cases}$$

870. Докажите, что две любые параболы подобны.

Математический анализ возник в XVII веке. Но полное его обоснование было дано лишь в конце девятнадцатого столетия, когда вслед за теорией пределов, созданной О. Коши (см. с. 129), сразу в нескольких формах немецкими математиками Р. Дедекиндом (1831—1916), К. Вейерштрассом (1815—1897) и Г. Кантором (1845—1918) была построена теория действительного числа.

Первые представления о числах складывались постепенно под влиянием практики. С давних пор числа употреблялись при счете и измерении величин.

Ответ на вопрос «Сколько элементов содержит данное конечное множество?» всегда выражается либо натуральным числом, либо числом нуль. Следовательно, множество

$$\{0; 1; 2; 3; \dots\}$$

всех неотрицательных целых чисел обслуживает все потребности счета.

Иначе обстоит дело с измерением величин. Расстояние между двумя пунктами может равняться 3,5 километра, площадь комнаты 16,45 квадратного метра и т. д.

Величины бывают разных родов. Приведем два примера.

1. Расстояния между точками, длины отрезков, ломаных и кривых линий — это величины одного и того же рода. Их выражают в сантиметрах, метрах, километрах и т. д.

2. Длительности промежутков времени тоже величины одного и того же рода. Их выражают в секундах, минутах, часах и т. д.

Величины одного и того же рода можно *сравнивать* между собой и *складывать*:

$$\begin{array}{ll} 1 \text{ м} > 90 \text{ см}; & 350 \text{ м} + 650 \text{ м} = 1 \text{ км}; \\ 3000 \text{ с} < 1 \text{ ч}; & 2 \text{ ч} + 3 \text{ ч} = 5 \text{ ч}; \\ 1 \text{ кг} > 720 \text{ г}; & 500 \text{ г} + 500 \text{ г} = 1 \text{ кг}. \end{array}$$

Но бессмысленно спрашивать, что больше: 1 метр или 1 час, и нельзя сложить 1 метр с 30 секундами. Длительность про-

межутков времени и расстояния — величины разного рода. Складывать и сравнивать величины разного рода нельзя.

Величины можно умножать на положительные числа и нуль. В результате умножения величины  $a$  на неотрицательное число  $x$  получается величина  $b = xa$  того же рода. Приведем несколько примеров:

$$\begin{aligned} 5 \cdot 20 \text{ см} &= 100 \text{ см} = 1 \text{ м}; \\ 0,01 \cdot 20 \text{ см} &= 0,2 \text{ см} = 2 \text{ мм}; \\ 0 \cdot 20 \text{ см} &= 0 \text{ см}. \end{aligned}$$

Приняв какую-либо величину  $e$  за единицу измерения, можно с ее помощью измерить любую другую величину  $a$  того же рода. В результате измерения получим, что

$$a = xe,$$

где  $x$  — число.

Это число  $x$  называется числовым значением величины  $a$  при единице измерения  $e$ . Числовое значение величины зависит от выбора единицы измерения. Если, например, длина комнаты имеет числовое значение 5,6 при единице измерения в 1 м ( $e = 1$  м), то эта же длина имеет числовое значение 560 при единице измерения в один сантиметр ( $e = 1$  см).

Пусть числовые значения величин  $a$  и  $b$  при одной и той же единице измерения  $e$  равны  $x$  и  $y$ , т. е.

$$a = xe, \quad b = ye.$$

Если  $b \neq 0$ , то отношение  $\frac{x}{y}$  называют *отношением величины  $a$  к  $b$* .

Таковы простейшие сведения о величинах. Приведенное описание понятия величины опиралось на понятие числа. Но исторический путь был иным: положительные действительные числа появились как отношения величин (а точнее, как отношения длин отрезков).

С открытием несоизмеримости диагонали единичного квадрата с его стороной стало ясно, что отношение длин отрезков не всегда может быть выражено не только натуральным, но и рациональным числом. Для того чтобы числовое значение каждого отрезка при фиксированной единице измерения было определено, требовалось введение новых чисел — иррациональных.

Все практические измерения величин имеют лишь приближенный характер. Их результат с требуемой точностью можно выразить при помощи рациональных дробей или более специальным образом при помощи конечных десятичных дробей. Например, измеряя диагональ квадрата со стороной в 1 м с точностью до одного сантиметра, мы обнаружим, что ее длина приближенно равна 1,41 м. При измерении с точностью до одного миллиметра получим, что эта длина приближенно равна 1,414 м.

Но в математике часто отвлекаются от приближенного характера практических измерений. Последовательный теоретический подход к измерению длин отрезков приводит к необходимости рассмотрения бесконечных десятичных дробей. (Именно такими дробями представляются числа

$$\frac{2}{3} = 0,666...; \quad \sqrt{2} = 1,41421356...; \quad \pi = 3,14159265358...)$$

Отношение длины любого отрезка к длине отрезка, принятого за единицу измерения, всегда может быть выражено числом, представимым в виде бесконечной десятичной дроби.

Полная теория действительных чисел довольно сложна и не входит в программу средней школы. Но с одним из способов ее построения мы познакомимся в общих чертах.

#### 1. Принимают:

а) каждому действительному числу соответствует (в качестве его записи) бесконечная десятичная дробь:

$$x = \pm a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots;$$

б) каждая бесконечная десятичная дробь является записью действительного числа.

Но при этом естественно считать десятичную дробь, заканчивающуюся бесконечной последовательностью девяток, лишь второй записью числа, выражающегося десятичной дробью, заканчивающейся бесконечной последовательностью нулей:

$$0,9999... = 1,0000...; \quad 12,76599999... = 12,76600000...$$

Такое соглашение поясним примером:

$$0,(9) = 3 \cdot 0,(3) = 3 \cdot 1/3 = 1.$$

Только исключив из рассмотрения десятичные дроби с девяткой в периоде, получаем взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством бесконечных десятичных дробей.

Число  $a_0$  — это целая часть положительного числа  $x$ , а

$$x - a_0 = 0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$$

дробная часть числа  $x$ .

Число

$$x_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n$$

называют десятичным приближением  $x$  с точностью до  $10^{-n}$  по недостатку, а число

$$x'_n = x_n + 10^{-n}$$

называют десятичным приближением с точностью до  $10^{-n}$  по избытку для числа  $x = a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$ .

Если число  $x$  отрицательно, т. е.

$$x = -a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots,$$

то полагают

$$x'_n = -a_0, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \text{ и } x_n = x'_n - 10^{-n}.$$

2. Вводят правило сравнения двух действительных чисел. По определению число  $x$  меньше числа  $y$ , если хотя бы при одном  $n$  выполнено неравенство

$$x_n < y_n,$$

где  $x_n$  и  $y_n$  — десятичные приближения с точностью до  $10^{-n}$  по недостатку для чисел  $x$  и  $y$ . (Мы воспользовались тем, что правило сравнения конечных десятичных дробей уже известно.)

3. Определяют арифметические действия над действительными числами (при этом также пользуются тем, что эти действия уже определены для конечных десятичных дробей).

Суммой двух действительных чисел  $x$  и  $y$  (обозначается  $x+y$ ) называют такое действительное число  $z$ , что при любом  $n$  выполнены неравенства

$$x_n + y_n \leq x + y < x'_n + y'_n.$$

В курсах математического анализа доказывается, что такое число существует и определяется единственным образом.

Аналогично, произведением двух неотрицательных чисел  $x$  и  $y$  называют такое число  $z$  (обозначается  $xy$ ), что при любом  $n$  выполнены неравенства

$$x_n y_n \leq xy < x'_n y'_n.$$

Такое число существует и определяется однозначно. Для действительных чисел разных знаков, воспользовавшись тем, что произведение неотрицательных чисел  $|x|$  и  $|y|$  уже определено, полагают  $xy = -|x| |y|$ ; в остальных случаях  $xy = |x| |y|$ . (Как обычно, модулем каждого из чисел  $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$  и  $-a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$  называют число  $a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ .)

Вычитание определяется как действие, обратное сложению: разностью  $x-y$  чисел  $x$  и  $y$  называется такое число  $z$ , что  $y+z=x$ , а деление — как действие, обратное умножению: частным  $x:y$  называется такое число  $z$ , что  $yz=x$ .

4. Показывают, что неравенства и арифметические операции, определенные указанным в п. 3 образом, сохраняют основные свойства, присущие им в множестве рациональных чисел. Перечень этих свойств приведен в «Материалах для повторения».

## ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

### Глава I

1. а)  $\frac{3\pi}{4}$ ; в)  $\frac{25\pi}{18}$ . 2. а)  $120^\circ$ ; в)  $\frac{180^\circ}{\pi}$ . 3. а) 0,2967; в) 2,4260. 4. а)  $32^\circ$ ; в)  $180^\circ$ . 6. а)  $-\frac{\pi}{5}$ ; б)  $-23,8\pi$ . 7. а) 2; в)  $\frac{8\pi}{3}$ . 8. а) 1; в)  $\frac{16\pi}{3}$ . 9. б)  $\frac{\pi}{360}$  рад/мин;  $\frac{\pi}{30}$  рад/мин;  $2\pi$  рад/мин. 11. а) Да; в) нет. 12. а) Нет; в) да. 13. а)  $\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; в)  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; д)  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ . 14. а)  $\pi n, n \in \mathbb{Z}$ ; в), д)  $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ . 16. а) 0; 1; 0; не определен; в)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ;  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; 1; 1. 17. а) 0,1889; 0,9820; 0,1923; 5,2000; в) 0,9800; 0,1994; 4,9131; 0,2035. 18. а) 0,3256; 0,9455; 0,3443; 2,9044; в) 0,2147; 0,9767; 0,2199; 4,5483. 19. а) Все плюс; в) минус, плюс, минус, минус. 20. а) Минус; в) минус. 21. а) 0,5; в)  $-0,5$ . 22. а)  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ; в)  $\sqrt{3}$ . 26. а), в) Да. 27. а)  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ ;  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$ ;  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}$ ; в)  $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$ ;  $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ ;  $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{5}{12}$ ; д)  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ ;  $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ ;  $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ . 28. а)  $-\frac{5}{12}$ . 30. а) 0; в) 1. 31. а)  $\sin \beta - \cos \beta$ ; в)  $-1$ . 32. а)  $\cos^2 t$ ; в) 0. 33. а)  $-\cos \frac{\pi}{6}$ ; в)  $-\operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$ ; д)  $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{18}$ ; ж)  $-\sin \frac{\pi}{6}$ . 35. а)  $2 \operatorname{tg} y$ ; в) 1. 36. а) 5. 37. а) 1; в) 0,5. 38. а)  $\sqrt{3}$ ; в) 1. 39. а)  $-0,28$ ; б)  $-1$ . 41. а)  $11\frac{7}{8}$ ;  $\frac{25}{92}$ . 42. а)  $-\sin 2\alpha$ ; в)  $\sqrt{3} \cos \alpha$ . 44. а) 0,96; б) 0,28; в)  $\frac{24}{7}$ ; г)  $\frac{7}{24}$ . 47. а)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ; в) 1. 48. а)  $\sqrt{3} \cos 10^\circ$ ; в)  $\sqrt{2} \sin \frac{5\pi}{36}$ . 49. а) 0; в)  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ . 50. а)  $\cos \varphi$ ; в)  $\sqrt{3}$ . 52. а)  $\frac{5}{\sqrt{26}}$ ;  $-\frac{1}{\sqrt{26}}$ ;  $-5$ . 53. а)  $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$ ; в)  $\sqrt{2}-1$ ; д)  $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ . 55. а)  $\sin^2 \gamma$ ; б)  $\cos^2 \varphi$ ; в) 0; г)  $\frac{2}{1+\sin \alpha}$ . 56. а)  $2\sqrt{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ ; в)  $2\sqrt{2} \sin \frac{\varphi}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$ . 60. а) 2;  $-2$ ; 10,1;  $2t + \frac{1}{2t}$ ; в) 0; 0;  $2 \sin 4$ ;  $-2 \sin 4x$ . 61. а) 0; 3; 2;  $t^2$ . 62. а)  $\mathbb{R}$ ; в)  $\mathbb{R}$ ; д)  $\mathbb{R}$ ; ж) множество всех действительных чисел, кроме чисел вида  $\frac{\pi}{2} + \pi n$ , где  $n \in \mathbb{Z}$ . 63. а) 1; в)  $[0; \infty)$ ;



д)  $[0; 1]$ ; ж) множество  $Z_0$  (всех неотрицательных целых чисел). 65. б)  $D(S) =$

$$= [0; a\sqrt{2}], S(x) = \begin{cases} a^2 - x^2 & \text{при } 0 \leq x \leq \frac{a\sqrt{2}}{2}, \\ (a\sqrt{2} - x)^2 & \text{при } \frac{a\sqrt{2}}{2} < x \leq a\sqrt{2}. \end{cases} \quad 69. \text{ а) Убывает на } (-\infty; \infty);$$

в) возрастает на  $(-\infty; 0]$ ; убывает на  $[0; \infty)$ . 70. а) Убывает на  $(-\infty; 0)$  и на  $(0; \infty)$ ; в) возрастает на  $[0; \infty)$ . 76. а) Нечетная; в) четная. 77. а) Ни четная, ни нечетная; в) четная. 82. а) Возрастает на  $R$ ; в) убывает на  $(-\infty; 1,5]$ , возрастает на  $[1,5; \infty)$ ; минимум в точке 1,5. 83. а) Убывает на  $(-\infty; 0)$  и на  $(0; \infty)$ ; экстремумов нет; в) возрастает на  $(-\infty; 0)$ , убывает на  $(0; \infty)$ ; экстремумов нет. 84. а) Убывает на  $(-\infty; 0]$ , возрастает на  $[0; \infty)$ ; минимум в точке 0; б) убывает на  $(-\infty; -1]$  и на  $[0; 1]$ ; возрастает на  $[-1; 0]$  и на  $[1; \infty)$ . У к а з а н и е. Функция  $f$  четна, поэтому достаточно провести исследование для  $x \geq 0$ ; при таких  $x$  имеем:  $f(x_2) - f(x_1) = (x_2^2 - x_1^2)(x_2^2 + x_1^2 - 2)$ , и если  $x_2 > x_1$ , то  $x_2^2 - x_1^2 > 0$ , поэтому  $f(x_2) > f(x_1)$  при  $x_2^2 + x_1^2 - 2 > 0$ ; отсюда следует, что  $f$  возрастает на промежутке  $[1; \infty)$  (так как  $x_2^2 + x_1^2 - 2 > 0$  при  $x_2 > x_1 \geq 1$ ) и убывает на промежутке  $[0; 1]$  (так как  $x_2^2 + x_1^2 - 2 < 0$  при  $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ ); в) возрастает на промежутке  $(-\infty; \infty)$ ; г) возрастает на промежутках  $(-\infty; -1]$  и  $[1; \infty)$ , убывает на промежутке  $[-1; 1]$ . У к а з а н и е. Функция  $f$  нечетна, поэтому достаточно провести исследование для  $x \geq 0$ , при таких  $x$  имеем:  $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 3)$ , и если  $x_2 > x_1$ , то  $f(x_2) > f(x_1)$  при  $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 3 > 0$ ; отсюда следует, что  $f$  возрастает на промежутке  $[1; \infty)$  (так как  $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 3 > 0$  при  $x_2 > x_1 \geq 1$ ) и убывает на промежутке  $[0; 1]$  (так как  $x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 - 3 < 0$  при  $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$ ); учитывая нечетность  $f$ , получаем, что  $f$  возрастает на промежутке  $(-\infty; -1]$  и убывает на промежутке  $[-1; 0]$ , а следовательно, и на промежутке  $[-1; 1]$ . 85. а) Да; в) нет. 86. а)  $\sin 45^\circ$ ; в)  $-\operatorname{ctg} 3^\circ$ ; д)  $-\cos 5^\circ$ ; ж)  $-\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8}$ . 87. а)  $\pi$ ; в)  $\frac{\pi}{2}$ ; д) любое число, отличное от 0. 88. а)  $\pi$ ; в)  $\frac{\pi}{4}$ .

89. а)  $\frac{2\pi}{3}$ ; в)  $2\pi$ . 91. Нет. 92. а) Множество всех чисел, кроме вида  $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$ ;

в)  $R$ . 93. а)  $[-1; 1]$ ; в)  $[0; 1]$ . 94. а)  $\sin 2x > 0$  на промежутках  $(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in Z$ ;

$\sin 2x < 0$  на промежутках  $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \pi n), n \in Z$ ;

$\sin 2x = 0$  при  $x = \frac{\pi n}{2}, n \in Z$ ; в) нулей нет, промежутки знакопостоянства такие же, как у функции  $f(x) = \sin x$ . 95. а)  $\sin(-30^\circ)$ ;  $\sin 170^\circ$ ;  $\sin 20^\circ$ ;  $\sin(-250^\circ)$ ;  $\sin 100^\circ$ . 96. а) Возрастает на промежутках  $[-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}], n \in Z$ ;

убывает на промежутках  $[\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}], n \in Z$ ;

в) убывает на промежутках  $[-\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n], n \in Z$ ; возрастает на проме-

жутках  $[\frac{\pi}{4} + \pi n; \frac{3\pi}{4} + \pi n], n \in Z$ . 98. а)  $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$  и  $x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$ ;

в)  $[-\frac{4\pi}{3} + 2\pi n; \frac{\pi}{3} + 2\pi n], n \in Z$ . 100. а) Множество всех действительных

чисел, кроме чисел вида  $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ ; в)  $R$ . 101. а)  $[-1; 1]$ ; в)  $[1; 2]$ .

102. а)  $\cos 3x > 0$  на  $(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}), n \in Z$ ;  $\cos 3x < 0$  на

$(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi n}{3}), n \in Z$ ;  $\cos 3x = 0$  при  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$ ; в) нулей

нет, промежутки знакопостоянства такие же, как у функции  $f(x) = \cos x$ .

103. б)  $\cos 3$ ;  $\cos \frac{5\pi}{4}$ ;  $\cos \frac{8\pi}{3}$ ;  $\cos 1,2$ ;  $\cos(-1)$ ;  $\cos(-0,1)$ . 104. а) Возрастает

на  $[\frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}], n \in Z$ ; убывает на  $[-\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{2\pi n}{3}], n \in Z$ ; в) возра-

стает на  $[-3\pi + 6\pi n; 6\pi n], n \in Z$ ; убывает на  $[6\pi n; 3\pi + 6\pi n], n \in Z$ .

105. а)  $t = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$ ; в)  $\frac{\pi}{4} + 2\pi n < t < \frac{7\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$ . 106. а)  $x =$

$\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$ ; в)  $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq t \leq \frac{7\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$ . 108. а)  $x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n,$

$n \in Z$ ; в)  $x \neq \frac{\pi n}{6}, n \in Z$ . 109. а)  $R$ ; в)  $(-\infty; 0]$ . 110. а)  $\operatorname{tg} 3x > 0$  на

$(\frac{\pi n}{3}; \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}), n \in Z$ ;  $\operatorname{tg} 3x < 0$  на  $(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}; \frac{\pi n}{3}), n \in Z$ ;  $\operatorname{tg} 3x = 0$  при

$x = \frac{\pi n}{3}, n \in Z$ ; в)  $\operatorname{tg}^2 x > 0$  на  $(\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{2}(n+1)), n \in Z$ ;  $\operatorname{tg}^2 x = 0$  при  $x = \pi n, n \in Z$ .

111. а)  $\operatorname{tg} 100^\circ$ ;  $\operatorname{tg}(-20^\circ)$ ;  $\operatorname{tg} 10^\circ$ ;  $\operatorname{tg} 200^\circ$ ;  $\operatorname{tg}(-110^\circ)$ . 112. а) Возрастает на

$(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}), n \in Z$ ; в) убывает на  $(-\frac{3\pi}{4} + \pi n; \frac{\pi}{4} + \pi n), n \in Z$ .

113. а)  $t = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ ; в)  $-\frac{\pi}{2} + \pi n < t < \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$ . 114. а)  $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,$

$n \in Z$ ; в)  $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x < -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$ . 116. а)  $x \neq \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ ; в)  $x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z$ .

117. а)  $R$ ; в)  $[0; \infty)$ . 118. а)  $\operatorname{ctg} 2x > 0$  на  $(\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}), n \in Z$ ;  $\operatorname{ctg} 2x < 0$  на

$(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}), n \in Z$ ;  $\operatorname{ctg} 2x = 0$  при  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$ ; в)  $\operatorname{ctg}^2 x > 0$  на

$(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$  и  $(\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi + \pi n), n \in Z$ ;  $\operatorname{ctg}^2 x = 0$  при  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ .

119. б)  $\operatorname{ctg} 6$ ;  $\operatorname{ctg}(-\frac{13\pi}{4})$ ;  $\operatorname{ctg} 2$ ;  $\operatorname{ctg} 8$ ;  $\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3}$ ;  $\operatorname{ctg} 4$ . 120. а) Убывает на

$(\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}), n \in Z$ ; в) возрастает на  $(\frac{3\pi}{4} + 3\pi n; \frac{15\pi}{4} + 3\pi n), n \in Z$ . 121. а)  $t =$

$-\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ ; в)  $\frac{\pi}{6} + \pi n < t < \pi + \pi n, n \in Z$ . 122. а)  $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ ;

в)  $\frac{5\pi}{6} + \pi n < x < \pi + \pi n, n \in Z$ . 124. а) 0; б)  $\frac{\pi}{2}$ ; в)  $-\frac{\pi}{2}$ ; г)  $\frac{\pi}{6}$ ;

д)  $\frac{\pi}{3}$ ; ж)  $-\frac{\pi}{4}$ . 125. а) 0,3072; б) 0,4451; в) 0,3081; г) 0,8949.

126. а)  $\frac{\pi}{2}$ ; б) 0; в)  $\pi$ ; г)  $\frac{\pi}{3}$ ; д)  $\frac{2\pi}{3}$ ; е)  $\frac{\pi}{4}$ ; ж)  $\frac{5\pi}{6}$ . 127. а) 1,3526;

б) 0,5009; в) 0,6554; г) 0,9685. 128. а) 0; б)  $-\frac{\pi}{4}$ ; в)  $\frac{\pi}{3}$ ; г)  $\frac{\pi}{6}$ ;

д)  $-\frac{\pi}{6}$ . 129. а) 0,3403; б) 1,1606; в)  $-1,3734$ ; г) 1,4713. 130. а)  $\frac{\pi}{2}$ ; б)  $\frac{\pi}{4}$ ;

в)  $\frac{3\pi}{4}$ ; г)  $\frac{\pi}{6}$ ; д)  $\frac{2\pi}{3}$ . 131. а) 0,9547; б) 0,1728; в) 0,2147; г) 3,0247. 132. а) Равно;

б) меньше; в) меньше; г) меньше. 133. а)  $\frac{\pi}{2}$ ; б)  $\frac{\pi}{2}$ ; в)  $\frac{11\pi}{12}$ ; г)  $-\frac{\pi}{6}$ .

134. а)  $\frac{\pi}{12}$ ; б)  $\frac{5\pi}{12}$ ; в)  $\frac{\pi}{12}$ ; г)  $\frac{7\pi}{12}$ . 135. а)  $\frac{\pi}{2}$ ; б)  $\frac{\pi}{2}$ ; в) 0; г)  $\frac{2\pi}{3}$ .

141. а)  $3\pi - 10$ ; б)  $4\pi - 12$ ; в)  $2 - \pi$ ; г)  $\pi - 3$ . 142. а)  $\pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; в)  $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . 143. а)  $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; в)  $(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . 144. а)  $\frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; в)  $-\frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . 145. а)  $\frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; в)  $-\frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . 146. а)  $(-1)^n x_0 + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $x_0 = \arcsin(-0,6) \approx -0,6435$ ; в)  $-x_0 + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $x_0 = \arctg 3,5 \approx 1,2925$ . 147. а)  $\pm \frac{\pi}{6} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; в)  $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . 148. а)  $(-1)^n \pi + 4\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; в)  $-\frac{\pi}{2} + 3\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . 149. а)  $\frac{\pi}{4} + (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; в)  $\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . 150. а)  $\frac{\pi}{24} + (-1)^n \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ; в)  $\frac{7\pi}{6} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . 152. а)  $-\frac{4\pi}{3} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; в)  $-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < x < -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 153. а)  $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; в)  $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 154. а)  $-\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \frac{\pi}{3} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; в)  $-\frac{\pi}{2} + \pi k < x < -\frac{\pi}{3} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 155. а)  $\pi k < x < \frac{2\pi}{3} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; в)  $\frac{\pi}{3} + \pi k \leq x < \pi + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 156. а)  $\frac{\pi}{12} + \pi k < x < \frac{5\pi}{12} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; в)  $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \pi + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 157. а)  $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; в)  $-\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{12} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 158. а)  $-\frac{3\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{\pi}{8} + \pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{8} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; в)  $(-\infty; \infty)$ ; г)  $\frac{\pi}{12} + \pi k \leq x < \frac{\pi}{6} + \pi k$ ,  $\frac{5\pi}{12} + \pi k \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi k$  и  $\frac{3\pi}{4} + \pi k < x < \frac{5\pi}{6} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Решение.  $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x} = \operatorname{tg} 3x$  при  $x$ , принадлежащих области определения левой части неравенства. Таким образом, нужно решить неравенство  $\operatorname{tg} 3x \geq 1$  и исключить из полученного множества точки вида  $\frac{\pi}{2} + \pi l$ ,  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi l}{2}$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ . Отметим с помощью линии тангенсов один из промежутков, состоящих из значений  $t$  ( $t = 3x$ ), удовлетворяющих неравенству  $\operatorname{tg} t \geq 1: \left[ \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right)$ . Используя периодичность тангенса, получаем:  $\frac{\pi}{4} + \pi n \leq 3x < \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , откуда  $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3} \leq x < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Для того чтобы исключить указанные выше точки, удобно рассмотреть промежутки длины  $\pi$  (и добавить  $\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ):  $\operatorname{tg} 3x \geq 1$  при  $\frac{\pi}{12} + \pi k \leq x < \frac{\pi}{6} + \pi k$ ,  $\frac{5\pi}{12} + \pi k \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $\frac{3\pi}{4} + \pi k \leq x < \frac{5\pi}{6} + \pi k$ . Исключаем числа вида  $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $\frac{\pi}{4} + \pi k$ ,  $\frac{3\pi}{4} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . В данном случае это числа вида  $\frac{3\pi}{4} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 159. а)  $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ ,  $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; в)  $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; г)  $\alpha_1 + \pi k$ ,  $\alpha_2 + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha_1 = \arctg 2 \approx 1,11$ ;  $\alpha_2 = \arctg \frac{1}{2} \approx 0,46$ .

160. а)  $\pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi k$ ,  $\pi + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\alpha_1 + \pi k$ ,  $\alpha_2 + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha_1 = \arctg \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,55$ ;  $\alpha_2 = \arctg \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1,02$ ; в)  $\alpha + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha = 2 \arctg \frac{2}{3} \approx 1,18$ ; г)  $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $(-1)^k x_0 + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $x_0 = \arcsin 0,75 \approx 0,85$ . 161. а)  $2\pi k$ ,  $\pi + 4\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\pi + 2\pi k$ ,  $4\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; в)  $(-1)^k x_0 + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $x_0 = \arcsin \frac{1}{3} \approx 0,34$ ; г)  $\frac{\pi}{6} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 162. а)  $-\frac{\pi}{4} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{\pi}{4} + \pi k$ ,  $\alpha + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha = \arctg 2$ ; в)  $\frac{\pi}{4} + \pi k$ ,  $\alpha + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha = \arctg 3 \approx 1,25$ ; г)  $\alpha_1 + \pi k$ ,  $\alpha_2 + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha_1 = \arctg \frac{-7 - \sqrt{53}}{2} \approx -1,43$ ;  $\alpha_2 = \arctg \frac{-7 + \sqrt{53}}{2} \approx 0,11$ . 163. а)  $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; в)  $(-1)^k \cdot \frac{\pi}{4} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 164. а)  $-\frac{\pi}{4} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; в)  $\frac{\pi}{3} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 165. а)  $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; в)  $\pi k$ ,  $\frac{\pi}{4} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 166. а)  $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; в)  $\pm \alpha + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha = \arctg \sqrt{2} \approx 0,96$ . 167. а)  $((-1)^k \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k; \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n)$ ;  $((-1)^{k+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi k; \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n)$ ,  $k, n \in \mathbb{Z}$ ; в)  $(\frac{k}{2} - \frac{1}{6}; \frac{k}{2} + \frac{1}{6})$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; г)  $(x_0 + \pi k; \frac{\pi}{4} - x_0 - \pi k)$ ;  $(x_1 + \pi k; \frac{\pi}{4} - x_1 - \pi k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;  $x_0 = \arctg \frac{1}{2} \approx 0,46$ ,  $x_1 = \arctg \frac{1}{3} \approx 0,32$ . 168. а) Нет; в) да (кроме случая  $a = b = 0$ ). 169. а)  $\operatorname{tg}^2 \alpha$ ; в)  $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$ . 170. а)  $\cos^2 \varphi$ ; в)  $-1$ . 171. а) 13; б) 0; в)  $\frac{8}{\sin^2 2\varphi}$ ; г)  $|\sin \beta + \cos \beta|$ . 172. а)  $\operatorname{ctg}(\alpha - \frac{\pi}{4})$ ; б)  $\operatorname{tg}(\beta - \frac{\pi}{4})$ . 173. а) 8; в)  $\frac{7}{9}$ . 174. а)  $\frac{m^2 - 1}{2}$ ; б)  $\frac{m(3 - m^2)}{2}$ . 175. а)  $m^2 - 2$ ; б)  $m(m^2 - 3)$ . 176. а)  $-0,5$ . 185. а)  $-\sin 18^\circ$ ; в)  $-\operatorname{tg} 15^\circ$ ; д)  $-\sin 23^\circ$ . 186. а)  $\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4}$ ; в)  $-\operatorname{tg} \frac{\pi}{18}$ . 187. а)  $\sin 1^\circ$ ; в)  $\cos 19^\circ$ . 188. а)  $\cos \frac{\pi}{12}$ ; в)  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$ . 189. а)  $\frac{1}{4}$ ; б)  $-\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ; в)  $1 + \sqrt{3}$ ; г) 0,5. 190. а)  $-\sin \alpha$ ; в)  $\operatorname{tg}^2 x$ . 195.  $\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{3}}{6}$ ; б)  $\frac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$ . 196. а) 1; б)  $-\frac{16}{65}$ . 197. а)  $\frac{3 + \sqrt{105}}{16}$ ; б)  $\frac{7}{9}$ . 198. а)  $-\frac{71}{43}$ ; б)  $-\frac{1}{83}$ ; в)  $-\frac{43}{71}$ ; г)  $-83$ . 200. а)  $\operatorname{tg} 15^\circ = 2 - \sqrt{3}$ ; б)  $-\operatorname{tg} \frac{\pi}{7}$ ; в)  $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta$ ; г)  $\operatorname{tg} \alpha$ . 208. а)  $\sqrt{0,2}$ ;  $2\sqrt{0,2}$ ; 0,5; 2; б)  $\frac{4}{5}$ ;  $-\frac{3}{5}$ ;  $-\frac{4}{3}$ ;  $-\frac{3}{4}$ . 209. а)  $\sin(x + y) \sin(x - y)$ . 210. а)  $4 \cos \frac{x}{2} \cos x \cos \frac{5x}{2}$ ; б)  $4 \cos \frac{x}{2} \cos x \sin \frac{5x}{2}$ . 211. а)  $2 \sin \frac{2\alpha + \pi}{4} \cos \frac{2\alpha - \pi}{4} = 2 \cos^2 \frac{2\alpha - \pi}{4}$ ; б)  $2 \sin(30^\circ - \frac{\alpha}{2}) \cos(30^\circ + \frac{\alpha}{2})$ ; в)  $2 \sin \frac{4\alpha + \pi}{8} \cos \frac{4\alpha - \pi}{8}$ ; г)  $2 \sin 5^\circ \cos 40^\circ$ ; д)  $\sin(60^\circ + \alpha) \sin(60^\circ - \alpha)$ ; е)  $\sin(\alpha + 30^\circ) \sin(\alpha - 30^\circ)$ . 212. а)  $\frac{3}{5}$ ;  $-\frac{4}{5}$ ;  $-\frac{3}{4}$ ;  $-\frac{4}{3}$ ; б)  $\frac{7}{25}$ ;  $\frac{24}{25}$ ;  $\frac{7}{24}$ ;  $3\frac{3}{7}$ . 213. а)  $(-1)^k x_0 + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $x_0 = \arcsin \frac{1}{3} \approx 0,34$ . 214. а)  $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;

б)  $\pm \frac{\pi}{12} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 215.  $\alpha + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha = \operatorname{arctg} 0,5 \approx 0,46$ . 216. а)  $\pi + 2\pi k$ ; б)  $\pm \alpha + 4\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha = 2 \arccos \frac{1}{3} \approx 2,46$ . 217. а)  $\frac{\pi k}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\frac{\pi k}{4}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 218. а)  $-\frac{\pi}{6} + \pi k < x < \frac{\pi}{6} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $R$ . 219. а)  $-\frac{\pi}{10} + \pi k \leq x \leq \frac{\pi}{10} + \pi k$ ,  $\frac{\pi}{4} + \pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{10} + \pi k$ ,  $\frac{7\pi}{10} + \pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + \pi k$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 220. а)  $-\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \frac{\pi}{6} + \pi k$ ,  $\frac{\pi}{3} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $-\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ,  $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 221. Указание. а)  $\sin x > \frac{1}{2}$  или  $\sin x < -\frac{1}{3}$ ; б)  $-\frac{1}{3} < \cos x < \frac{1}{2}$ . 222. Указание. а)  $\sin x > \frac{1}{2}$ ; б)  $\cos x > \frac{1}{2}$ . 223. Указание. а)  $\operatorname{tg} x < -1$  или  $0 < \operatorname{tg} x < 1$ ; б)  $-1 < \operatorname{ctg} x < 0$  или  $\operatorname{ctg} x > 1$ . 225. а)  $\frac{\pi}{2}$ ; б)  $\frac{2\pi}{3}$ . 235. а), б) 1. 236. а)  $\cos 4t$ ; б)  $\cos t$ . 237. а)  $\operatorname{ctg} 2x$ ; б)  $\frac{2}{|\sin \varphi|}$ . 238.  $\frac{16}{65}$ ;  $-\frac{63}{65}$ . 239.  $-\frac{24}{25}$ . 241. а)  $\frac{1}{2} \cos 10^\circ$ ; б)  $\frac{1}{4}$ ; в)  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ; г) 0. 242. а)  $-\frac{1}{2} \cos 2x$ ; б)  $-\frac{1}{2} \cos (2\alpha + \frac{\pi}{6})$ ; в)  $\frac{1}{2} (\cos 2x + \cos 2\beta)$ ; г)  $\frac{1}{2} (\cos 2\alpha - \cos 2x)$ . 243. а)  $\cos 10^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}$ ; б)  $\frac{\sqrt{3}}{2} + \cos 10^\circ$ , в)  $\cos 35^\circ + \cos 5^\circ - \cos 15^\circ - \frac{\sqrt{2}}{2}$ ; г)  $\cos 1^\circ + \cos 3^\circ + \cos 5^\circ + \cos 7^\circ + \cos 9^\circ + \cos 11^\circ + \cos 13^\circ + \cos 15^\circ$ . 244. а)  $0,5 + \sqrt{0,5 - 0,25\sqrt{3}}$ ; б)  $\frac{1 + \sqrt{3}}{4}$ . 245. а)  $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$ ; б)  $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$ . 246. а)  $\frac{\sqrt{3}+1}{4}$ ; б)  $\sqrt{3}$ . 247. а)  $1 + \cos 2x$ ; б)  $1 - \cos 4x$ , в)  $0,5 + \cos 2x + 0,5 \cos 4x$ ; г)  $\frac{1}{8} - \frac{1}{8} \cos 4x$ ; д)  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 12x$ ; е)  $0,5 + 0,5 \cos 8x$ . 249. Да. 250. а)  $(-1)^k \alpha + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha = \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0,62$ . 251. а)  $\alpha_1 + 2\pi k$ ,  $\alpha_2 + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha_1 = 2 \operatorname{arctg} \frac{3 - \sqrt{21}}{6} \approx -0,52$ ;  $\beta = 2 \operatorname{arctg} \frac{3 + \sqrt{21}}{6} \approx 1,80$ ; б)  $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ,  $\alpha + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha = 2 \operatorname{arctg} (-3) \approx -2,50$ . 252. а)  $R$ ; б)  $\pi k < x \leq \frac{\pi}{6} + \pi k$ ,  $\frac{\pi}{3} + \pi k \leq x < \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

## Глава II

254. а) 0,2 и 0,3; 0,26 и 0,27; 0,266 и 0,267; б) -1,3 и -1,2; -1,27 и -1,26, в) 0,8 и 0,9; 0,83 и 0,84; 0,833 и 0,834. 256. а) 1,90502; б) 1,21836. 257. а) 0,905; б) 3,046; в) 3,968; г) 1,748. 258. а) 19,6; б)  $\operatorname{gt}$ ; в)  $\sqrt{2g} \approx 4,43$ , г)  $\sqrt{2Sg}$ . 259. а) 0,005; б)  $\frac{1}{1500} \approx 0,0007$ . 260. а)  $\frac{1}{30}$ ;  $\frac{1}{300}$ ;  $\frac{1}{3000}$ . 262. а) -2, в) -1. 263. а)  $-\frac{3}{2}$ ; б) 0. 264. а)  $\lim_{x \rightarrow a} Cf(x) = \lim_{x \rightarrow a} C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = C \cdot A$ , б)  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) + (-1) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} ((-1) \cdot g(x)) = A + +(-1) \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A + (-1) \cdot B = A - B$ . 266. Указание. а) Примените правило о пределе произведения; б) примените результат упражнения 264, а; в) примените правило вычисления предела суммы и результат задачи б; г) примените правило о пределе частного. 267. а) 3,2; 0,4; в) 0,2. 268. а) 0,5; 2,25; б) 0,15;

1,1475; г) -0,2; 1,04. 269. а)  $-\frac{1}{1359}$ ; б)  $-\frac{1}{804}$ ; в)  $\frac{375}{30107}$ ; г)  $\frac{1}{1806}$ . 270. а)  $-3\Delta x$ ; б)  $\frac{2\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$ ; в)  $6x_0\Delta x + 3(\Delta x)^2$ ; г)  $\Delta x(-2 - 2x_0 - \Delta x)$ . 271. а)  $x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$ ;  $2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$ ;  $2x_0 + \Delta x$ ; б)  $ax_0 + a\Delta x + b$ ;  $a\Delta x$ ; а; г)  $x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$ ;  $3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$ ;  $3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2$ . 272. а) 2,1; б) 1,9; в) 2,001; г) 1,9999. 273. а) 12,61; б) 12,0601; в) 12,006001; г) 12,00060001. 275. б) Убывает на всей числовой прямой; г) возрастает на  $(-\infty; 0]$ , убывает на  $[0; \infty)$ . 277. а) 2; в) 2. 278. б) 1; г)  $2x_0 - 1$ . 282. а)  $a$ ; а; б) -1;  $-\frac{1}{16}$ . 283. г)  $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ . 284. б) 2; г)  $-\frac{2}{x^3}$ . 285. а) -2; в)  $2x + 2$ . 286. а)  $2ax + b$ ; в)  $3x^2 - 1$ ; г)  $-\frac{2}{x^3}$ . 288. а)  $10x^9$ ; в)  $-\frac{5}{x^6}$ . 289. а)  $-\frac{4}{x^5}$ ; в)  $-\frac{1}{x^4}$ . 290. а)  $\frac{4}{\sqrt{x}}$ ; в)  $-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$ . 291. а)  $7x^6 - 6x - 1$ ; в)  $12x^5 + \frac{1}{x^2}$ . 292. а)  $35x^4 + \frac{1}{\sqrt{x}}$ ; б)  $\frac{1}{3} + \frac{7}{x^3} - \frac{3}{2}\sqrt{x}$ ; в)  $-\frac{3}{2x^2\sqrt{x}} + \frac{3}{2}\sqrt{x}$ ; г)  $\frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{1}{x\sqrt{x}} + \frac{6}{x^3}$ . 293. а)  $\frac{11}{(3-5x)^2}$ ; в) 0. 294. а)  $\sqrt{x} + \frac{x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{3x+1}{2\sqrt{x}}$ ; в)  $\frac{x+1}{2x\sqrt{x}}$ . 295. а)  $\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$ ; в)  $-\frac{3}{2\sqrt{x}} + 4x - \frac{5x\sqrt{x}}{2}$ . 296. а) -3; в)  $2x - 3$ . 297. а)  $-\frac{5}{4}$ ; б) -5; в)  $-\frac{5}{(2+x)^2}$ ; г)  $-\frac{5}{4(1+t)^2}$ . 298. б) -19; г)  $1 - \frac{2}{\sqrt{2-x}}$ . 299. а)  $[-3; 3]$ ; в)  $(-2; 2)$ . 300. а)  $[0; 4]$ ; в)  $(-\infty; 2) \cup (2; 3]$ . 301. а)  $2 - \sqrt{x-x^3}$ ; б)  $\sqrt{2-x-x^3}$ ; в)  $2 - \frac{x}{x-3} - \frac{x^2}{(x-3)^2}$ ; г)  $\frac{2-x-x^2}{-1-x-x^2}$ ; д)  $\sqrt{\frac{x}{x-3}}$ ; е)  $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-3}}$ . 303. а)  $f(x) = \sqrt{x}$ ; в)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+3}}$ ; д)  $f(x) = \frac{x-2}{3}$ . 304. а)  $28(2x-7)^{13}$ ; в)  $-21(7x-1)^{-4}$ . 305. а)  $\frac{1}{\sqrt{2x+3}}$ ; в)  $\frac{5}{2\sqrt{5x-8}}$ . 306. а)  $\frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}}$ ; в)  $\frac{9x}{\sqrt{9x^2-16}}$ . 307. а)  $65(5x-2)^{12} - 60(3x+7)^{19}$ ; в)  $\frac{3}{\sqrt{6x-8}} - \frac{4x}{\sqrt{4x^2-3}}$ ; г)  $\frac{1}{\sqrt{9+2x}} - \frac{x}{2\sqrt{0,5x^2-2}}$ . 308. а)  $\frac{1}{3} \cos x$ ; в)  $\cos x - \sin x$ . 309. а)  $3 \cos 3x$ ; в)  $10 \cos 2x$ . 310. а)  $-2 \sin 2x$ ; в)  $2 \sin 4x$ . 311. а)  $\frac{2}{\cos^2 2x}$ ; в)  $\frac{1}{\cos^2 \frac{x}{3}}$ . 312. а)  $\frac{5}{\sin^2 5x}$ ; в)  $-\frac{2}{\sin^2 \frac{x}{2}}$ . 313. а)  $-\frac{1}{2} \cos \frac{x}{2}$ ; в)  $\frac{1}{2} \sin \frac{x}{2}$ . 314. а)  $2 \cos \left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ; в)  $\frac{3}{\cos^2(3x-7)}$ . 315. а)  $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\sin x = \frac{1}{2}$ , т. е.  $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$  или  $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; в)  $\operatorname{tg} x = 1$ , т. е.  $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; г)  $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . 316. а)  $\sin x + x \cos x$ ; в)  $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ ; д) 0. 317. а)  $3 \cos 3x$ ; в)  $-\sin t$ . 318. а)  $R$ ; в)  $(-\infty; 2)$  и  $(2; \infty)$ . 319. а)  $(-\infty; 1) \cup (2; 3)$ ; в)  $(-\infty; -3) \cup (1; 2) \cup (4; \infty)$ . 320. а)  $(-\infty; 1] \cup [4; \infty)$ ; в)  $[-3; -1] \cup [1; 3]$ . 321. а)  $x = -1$ ,  $x \geq 1$ ; б)  $x < -1$ ,  $3 \leq x \leq 7$ ; в)  $(-\infty; -1) \cup [1 - \sqrt{2}; 0) \cup (1; 1 + \sqrt{2}]$ ; г)  $(-\infty; -2) \cup (2; 3)$ . 322. а) -6; в) 1. 323. а)  $-\frac{\pi}{4}$  в точке  $(1; 0)$ ,  $\frac{\pi}{4}$  в точке  $(2; 0)$ . 324. а)  $45^\circ$ . 325. в)  $y = -3x - 6$  и  $y = -3x + 6$ ; г)  $y = 0,25x + 1$ .



326. а) 0,02; б) 0,02; в)  $0,48\sqrt{2}$ ; г)  $\frac{\sqrt{3}}{2} - 0,01 \approx 0,8560$ . 327. а) 1,002; б) 0,997; в) 5,01; г) 3,98. 328. а) 1,2; в) 1,06; г)  $3^{50} \cdot 0,95$ . 329. а) 0,94; б) 1,08; в) 1,0006; г) 0,98. 330. а)  $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}\pi}{360} \approx 0,5151$ ; в)  $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}\pi}{360} \approx 0,4849$ . 331. а)  $\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{135} \approx 0,6006$ ; в)  $1 - \frac{\pi}{90} \approx 0,9651$ . 332. 6,4 км/ч. 333.  $(6t-4)$  рад/с; 20 рад/с.

334. 1) 2,8 рад/с; 2)  $6\frac{2}{3}$  с. 335.  $12t$  см/с; а)  $\frac{1}{12}$  с; б)  $\frac{1}{6}$  с. 336. а) 0,04 Н.

337. а) 65 г/см; б) 125 г/см. 340. а) 6 с; б) 18 м/с. 341.  $0 < t < \frac{8}{3}$ . 342. а) Возра-

стает на  $R$ ; в) возрастает на  $R$ . 343. а) Убывает на  $(-\infty; 0)$  и на  $(0; \infty)$ ; в) возрастает на  $(-\infty; 3)$  и на  $(3; \infty)$ . 344. а) Убывает на  $(-\infty; 0]$ , возрастает на  $[0; \infty)$ ; в) убывает на  $(-\infty; 0,3]$ , возрастает на  $[0,3; \infty)$ . 345. а) Возрастает на  $(-\infty; -3]$  и на  $[3; \infty)$ , убывает на  $[-3; 3]$ ; б) возрастает на  $(-\infty; 0]$  и на  $[2; \infty)$ , убывает на  $[0; 2]$ ; в) возрастает на  $(-\infty; -3]$  и на  $[1; \infty)$ , убывает на  $[-3; 1]$ ; г) убывает на  $(-\infty; \infty)$ . 346. а) Критических точек нет; в) минимум в точке 3. 347. а) Максимум в точке  $-3$ , минимум в точке 3; в) максимум в точках  $-1$  и  $1$ , минимум в точке 0. 348. а) Критических точек нет; в)  $x = -1$  — точка минимума;  $x = 1$  — точка максимума, любое  $x$  из объединения промежутков  $(-\infty; -1)$  и  $(1; \infty)$  — критическая точка, являющаяся одновременно и точкой минимума, и точкой максимума. 349. а) Убывает на промежутке  $(-\infty; \frac{3}{4}]$ ; возрастает на промежутке  $[\frac{3}{4}; \infty)$ ; минимум в точке  $\frac{3}{4}$ .

в) возрастает на промежутках  $(-\infty; -2]$  и  $[0; \infty)$ , убывает на промежутке  $[-2; 0]$ ; максимум в точке  $-2$ , минимум в точке 0. 350. а) Убывает на промежутках  $(-\infty; \frac{1}{4})$  и  $(\frac{1}{4}; \infty)$ ; критических точек нет; в) убывает на промежутках  $(-\infty; 0)$  и  $[3,2; \infty)$ , возрастает на промежутке  $(0; 3,2]$ ; максимум в точке 3,2. 351. а) Возрастает на  $(-\infty; \infty)$ ; б) возрастает на  $[0; 8]$  и на  $[12; \infty)$ , убывает на  $(-\infty; 0)$  и на  $[8; 12]$ ;  $x = 0$  и  $x = 12$  — точки минимума,  $x = 8$  — точка максимума; в) график функции приведен на рисунке 224; г) возрастает на  $(-\infty; 0]$  и на  $[2; \infty)$ , убывает на  $[0; 1]$  и на  $(1; 2]$ ;  $x = 0$  — точка максимума,  $x = 2$  — точка минимума. 352. б) Возрастает на  $(-\infty; 2,5]$ , убывает на  $[2,5; \infty)$ .  $x = 2,5$  — точка максимума. 353. г) Убывает на  $(-\infty; -\frac{1}{8}]$ , возрастает на  $[-\frac{1}{8}; \infty)$ .  $x = -\frac{1}{8}$  — точка минимума. 354. а) Убывает на  $(-\infty; -1]$  и на  $[1; \infty)$ , возра-

стает на  $[-1; 1]$ ;  $x = -1$  — точка минимума,  $x = 1$  — точка максимума, б) график функции изображен на рисунке 225; в) возрастает на  $(-\infty; \infty)$ . 355. а) График функции изображен на рисунке 226; г) возрастает на  $(-\infty; \infty)$ . 356. а) График функции изображен на рисунке 227; б) возрастает на  $[-1; 3]$ , убывает на  $(-\infty; -1]$  и на  $[3; \infty)$ ;  $x = -1$  — точка минимума,  $x = 3$  — точка

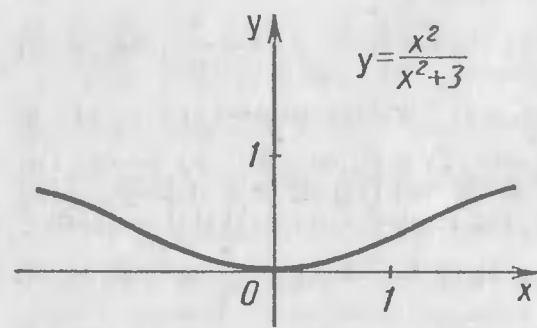


Рис. 224.

максимума, график функции изображен на рисунке 228; в) возрастает на  $(-\infty; \frac{4}{3})$ , убывает на  $[\frac{4}{3}; 2]$ .  $x = \frac{4}{3}$  — точка максимума; г) возрастает на  $[-1; -\frac{4}{5}]$  и на  $[0; \infty)$ , убывает на  $[-\frac{4}{5}; 0]$ ;  $x = -\frac{4}{5}$  — точка максимума,  $x = 0$  — точка минимума. 357. а)  $(-1; 2)$ ; в)  $\emptyset$ . 358. а)  $R$ ; в)  $[-3; -\frac{1}{3}]$ . 359. а) Убывает на

$(-\infty; \infty)$ ; б) возрастает на  $(-\infty; \infty)$ . 360. а) Возрастает на промежутках  $[-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , убывает на промежутках  $[\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi k}{3}]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , — точки максимума,  $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , — точки минимума, в) убывает на промежутках  $(-\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4})$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

361. а) Возрастает на промежутках  $[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{4} + 2\pi k]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , убывает на промежутках  $[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;  $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , — точки максимума,  $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , — точки минимума;

в) возрастает на промежутках  $[-\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k]$ ;  $[-\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , убывает на промежутках  $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; -\frac{\pi}{6} + 2\pi k]$ ,  $[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{7\pi}{6} + 2\pi k]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , — точки максимума,  $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$  и  $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , — точки минимума. 362. б) Указание.  $f'(x) = \cos x - 2 < 0$  для любого  $x \in \mathbb{R}$ . 363. а)  $\min_{[-1; 1]} f(x) = f(-1) = f(1) = -16$ ;  $\max_{[-1; 1]} f(x) = f(0) = -9$ ;

б)  $\min_{[0; 3]} f(x) = f(2) = -25$ ;  $\max_{[0; 3]} f(x) = f(3) = 0$ . 364. 1 с, 7 м/с. 365. Указание. Докажите, что  $S^2 = h^3(2R - h)$ , где  $h$  — высота треугольника, а  $R$  — радиус описанного круга. Далее можно искать максимум функции  $S(h)$ , но вычисления проще, если воспользоваться тем, что площадь максимальна, когда ее квадрат максимален, и искать максимум квадрата площади. 367. Слагаемые должны быть равными. 368. 15 см — высота, а 30 см — длина стороны основания бака. Указание. Выразите полную поверхность  $S$  бака через  $a$  и  $V$  ( $V$  — объем) и найдите

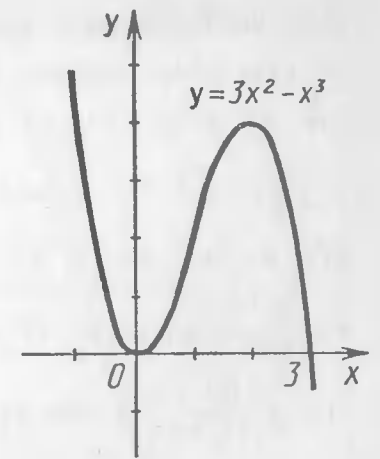


Рис. 225.

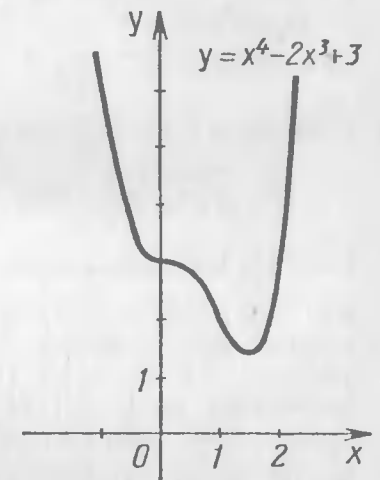


Рис. 226.

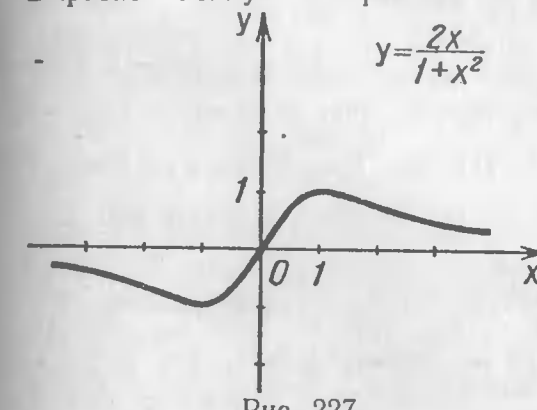


Рис. 227

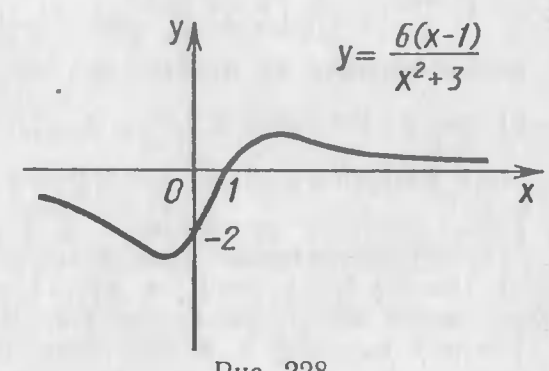


Рис. 228.



наименьшее значение функции  $S(a) = a^2 + \frac{4V}{a}$ . 369. В точку, удаленную на 3 км от населенного пункта и на 12 км от ближайшей к буровой точки шоссе.

371. а)  $x'' = -4x$ ; в)  $x'' = -9x$ . 372. а)  $A = 0,8$ ;  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ;  $\omega = \frac{1}{3}$ ; в)  $A = 2$ ;  $\varphi = \frac{5\pi}{3}$ ;  $\omega = 1$ . 373. Общий вид решений: а)  $y = A \cos(5t + \varphi)$ ; в)  $y = A \cos(0,5t + \varphi)$ .

374. а)  $6x^2 + 6x - 2$ ; в)  $-2$ . 375. б)  $-1$ ; г)  $t^6 + t^4 - t^2 - 1$ . 378. а)  $\frac{16}{(1-3z)^2}$ ; б)  $\frac{16}{(10-3x)^2}$ ; в)  $16$ ; г)  $\frac{16}{(1-3z)^2}$ . 379. а)  $\frac{t+10\sqrt{t}-1}{4\sqrt{t}(t+1)^2}$ ; б)  $\frac{23}{200}$ ; в)  $\frac{5}{8}$ ; г)  $\frac{z^2+10|z|-1}{4|z|(z^2+1)}$ . 380. б)  $\frac{57}{64}$ ; г)  $\frac{5x^2+20|x|-3}{2|x|(|x|+2)^2}$ . 381. а)  $\frac{-2u^3+6u^2-12u+20}{u^6}$ ; б)  $-\frac{9}{x^4} + \frac{16}{x^5} - \frac{25}{x^6}$ ; г)  $-\frac{20}{v^5} - \frac{15}{v^6}$ . 383. а)  $12x^3 - 12x^2 + 12x + 4$ ; б)  $3acx^2 + 2(ad+bc)x + (ae+bd)$ ; в)  $6x - 8$ ;  $-8$ ;  $4$ ; г)  $150y^4 + 12y$ ;  $0$ ;  $138$ . 384. а)  $\frac{2}{(2+x^2)\sqrt{2+x^2}}$ ; б)  $-\frac{1}{3-2x}$ ; в)  $\frac{4t^3-3t^2+2t}{2\sqrt{t^4-t^3+t^2-1}}$ ;  $\frac{12}{\sqrt{11}}$ . 385.  $(\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$ .

387. Возрастает на  $(-\infty; -1)$  и на  $(-1; \infty)$ . 388. Возрастает на  $[-0,75; \infty)$ , убывает на  $(-\infty; -0,75]$ . 389. Возрастает на  $[-\frac{1}{3}; \infty)$ , убывает на  $(-\infty; -\frac{1}{3}]$ . 390. Возрастает на  $(-\infty; -2]$  и на  $[1; \infty)$ , убывает на  $[-2; 1]$ . 391. Возрастает на  $[\frac{1}{3}; \infty)$ , убывает на  $(-\infty; \frac{1}{3}]$ . 392. Возрастает на  $(-\infty; -1]$  и на  $[1; \infty)$ , убывает на  $[-1; 0]$  и на  $(0; 1]$ . 393.  $t=0$  — точка максимума; возрастает на  $(-\infty; 0]$ , убывает на  $[0; \infty)$ . 394. Возрастает на  $[1; \infty)$ , убывает на  $(-\infty; -1]$ ; экстремумов нет. 395.  $x=0$  — точка максимума, возрастает на  $[-|r|; 0]$ , убывает на  $[0; |r|]$ . 398. График изображен на рисунке 229. 403. График изображен на рисунке 230. 406. а)  $a < 0$ ,  $b > 0$ ;  $c > 0$ ;  $D < 0$ ; в)  $a < 0$ ;  $b < 0$ ;  $c < 0$ ;  $D > 0$ . 407. а)  $[-\frac{1}{3}; 1]$ ; в)  $1$ . 408. а)  $(-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}; \infty)$ ; в)  $[-1; -\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3}; 1]$ . 409. а)  $x=0$  — точка максимума,  $x=\frac{4}{9}$  — точка минимума; возрастает на  $(-\infty; 0]$  и на  $[\frac{4}{9}; \infty)$ , убывает на  $[0; \frac{4}{9}]$ ; б)  $x=0$  — точка максимума,  $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$  — точки минимума; возрастает на  $[-\frac{1}{\sqrt{2}}; 0]$  и на  $[\frac{1}{\sqrt{2}}; \infty)$ , убывает на  $(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}]$  и на  $[0; \frac{1}{\sqrt{2}}]$ ; в) график изображен на рисунке 231; г) функция возрастает на  $R$ . 410. а)  $\max_{[-1; 1]} g(x) = g(0) = 3$ ;  $\min_{[-1; 1]} g(x) = g(-1) = -1$ ; б)  $\max_{[1; 3]} g(x) = g(3) = 3$ ;  $\min_{[1; 3]} g(x) = g(2) = -1$ . 411. а)  $\min_{[-1; 1]} h(x) = h(-1) = -9$ ;  $\max_{[-1; 1]} h(x) = h(0) = 2$ ; б)  $\min_{[1; 3]} h(x) = h(3) = -25$ ;  $\max_{[1; 3]} h(x) = h(1) = -5$ . 412. Сто- рона, лежащая на диаметре, в 2 раза больше другой стороны. 413.  $1:\sqrt{2}$ . 414. Прямоугольник должен быть квадратом. 415. Равносторонний. 416. а)  $10=5+5$ ; б)  $8=4+4$ . 417. 4 см. 418.  $-0,5$ . 419. К точке отрезка  $AB$ , удаленной от  $B$  на 1 км. 420. Решение.  $S=2\pi r^2+2\pi rh$ . Из формулы  $V=\pi r^2 h$  выразим  $h$  и подставим полученное значение в выражение для  $S$ .

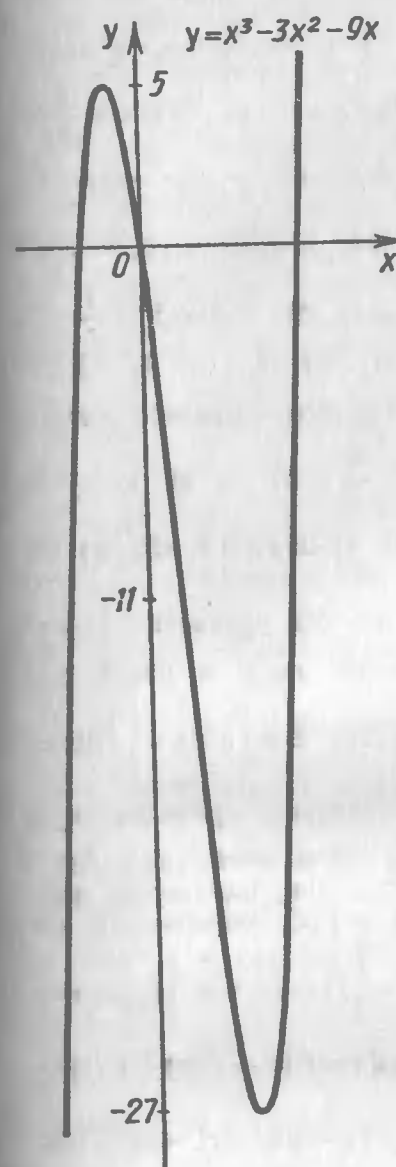


Рис. 229.

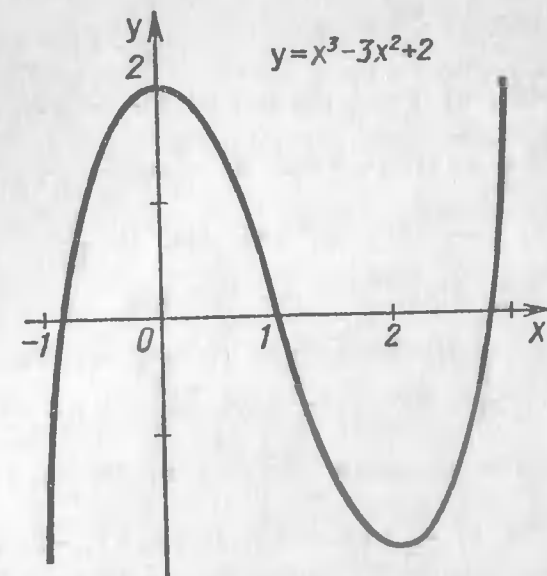


Рис. 230.

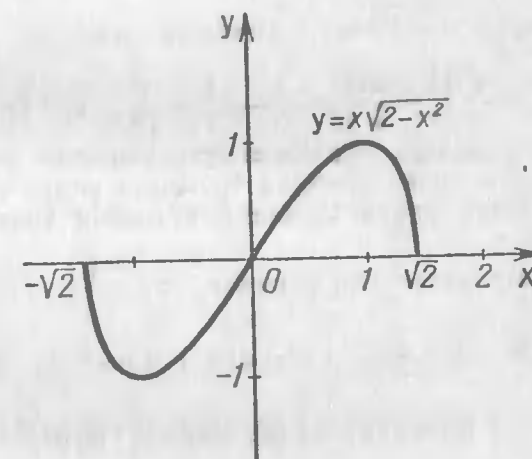


Рис. 231.

Получим:  $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$ . Приравняв  $S'(r) = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}$  нулю, получаем:  $V = 2\pi r^3$ , т. е.  $r^3 = 8$ . Убеждаемся, что точка  $r = 2$  — точка минимума функции  $S(r)$ . Далее,  $V = 2\pi r^3 = \pi r^2 h$ , откуда  $h = 2r$ . 421.  $|V| = 1,5$  м/с. 422.  $\frac{4t}{\sqrt{25-4t^2}}$  м/с;  $\frac{100}{\sqrt{(25-4t^2)^3}}$  м/с<sup>2</sup>. 423. 1) 360 г; 5х г/см; 2) 0; 60 г/см. 425.  $3\pi$  рад/с. 426. а) 45 м; б) 4 с; 90 м. 427.  $0,04 \pi$  см<sup>2</sup>/с. 428.  $\frac{150}{17}$  м/мин. 429. Квадрат.

## Глава III

434. а)  $2,5x + C$ ; в)  $\frac{x^4}{4} + C$ . 435. а)  $-\cos x + C$ ; в)  $-\frac{1}{5} \cos 5x + C$ . 437. а)  $\frac{x^4}{4} - 3$ ; б)  $\lg x - 1$ ; в)  $-\cos x + 4$ ; г)  $-2x + 11$ . 438. а)  $-\frac{1}{2x^2} + 5$ ; б)  $\sin x - 1$ ; в)  $\frac{2}{3} x\sqrt{x} - 8$ ; г)  $2\sqrt{x}$ . 439. а)  $\frac{x^3}{3} - 9$ ; б)  $\frac{1}{x} - 2$ ; в)  $-\cos x + 6$ ; г)  $\lg x - 2$ .

440. а)  $\frac{5x^3}{3} - x + C$ ; б)  $-\frac{1}{x} + 4 \cos x + C$ ; в)  $\frac{kx^2}{2} + bx + C$ ; г)  $\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^2}{2} + cx + C$ .
441. а)  $x - \frac{1}{3} \sin 3x + C$ ; б)  $-\frac{2}{3} \operatorname{ctg} 3x + C$ ; в)  $\frac{3}{5} \operatorname{tg} 5x + C$ ; г)  $-21 \cos \frac{x}{3} + \frac{1}{2} \operatorname{tg} 4x + C$ .
442. а)  $\frac{2}{3} \sqrt{3x-2} + C$ ; б)  $5\sqrt{2x+7} + C$ ; в)  $-\frac{3}{5(5x-7)^2} + C$ ; г)  $-\frac{4}{9}(11-3x)^6 + C$ .
443. 1)  $\frac{v_0^2}{19,6}$ ; 2) 0; 3)  $\frac{v_0}{4,9}$ .
444. 122,375 м; 9,77 м/с<sup>2</sup>.
445.  $8R + \frac{16a}{3}$ ;  $R + \frac{a}{4}$ .
446. а)  $x(t) = t^2 - \frac{t^3}{2} + \frac{7t}{2} + 1$ ; б)  $x(t) = 5t + \frac{1}{t} - 2$ ; в)  $x(t) = 3 - 2 \sin t$ ; г)  $x(t) = -3 \cos t - 5t + 12$ .
447. а) 9; б) 1; в) 2; г)  $\frac{1}{2}$ .
448. а)  $\frac{4}{3}$ ; б)  $2\frac{2}{3}$ . Указание. В качестве первообразной удобно взять функцию  $\frac{(x+2)^3}{3}$ ; в)  $28\frac{1}{8}$ ; г)  $\frac{1}{4}$ .
449. а)  $\frac{2}{5}$ ; б) 1; в) 1; г) 0.
450. а)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ; б) -2,5; в) 1,5; г) -2.
451. а) 0,9; б) 2; в) 2; г) 0,4.
452. а) 20; б)  $\frac{1}{5}$ ; в) 4,5; г) 2.
453. а)  $1\frac{1}{3}$ ; б)  $\frac{1}{12}$ . Решение. Из уравнения  $x^2 = x^3$  находим абсциссы точек пересечения графиков функций  $y = x^2$  и  $y = x^3$ ; это  $x = 0$  и  $x = 1$ . Искомая площадь равна (рис. 232)  $S = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x^3 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 - \left. \frac{x^4}{4} \right|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ ; в) 1; г)  $\frac{1}{6}$ .
454. Рассмотрим криволинейную трапецию, ограниченную линиями  $y = -f(x)$ ,  $y = 0$ ,  $x = a$  и  $x = b$  (рис. 233). Эта криволинейная трапеция симметрична исходной трапеции, поэтому ее площадь равна площади исходной трапеции, а так как  $-f(x)$  непрерывная неотрицательная функция, то  $S = \int_a^b (-f(x)) dx$ , откуда  $S = -\int_a^b f(x) dx$ , т. е.  $\int_a^b f(x) dx = -S$ .
455.  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$  и  $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = F(c) - F(a) + F(b) - F(c) = F(b) - F(a)$ .
457.  $\left( \int_a^x f(t) dt \right)' = (F(x) - F(a))' = F'(x) - 0 = f(x)$ .
458. Действительно,  $x'(t) = (x_0 + \int_{t_0}^t v(u) du)' = 0 + v(t)$  (см. № 457) и  $x(0) = x_0 + \int_{t_0}^0 v(u) du = x_0 + 0 = x_0$ .
460. а)  $\frac{28\pi}{15}$ ; б)  $\frac{16\pi}{15}$ ; в)  $\frac{\pi}{2}$ ; г)  $\frac{15\pi}{2}$ .
461. а)  $\frac{50\pi}{3}$ ; б)  $11\pi$ ; в)  $\frac{2\pi}{15}$ ;

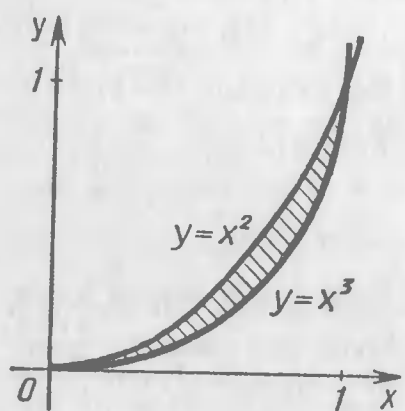


Рис. 232.

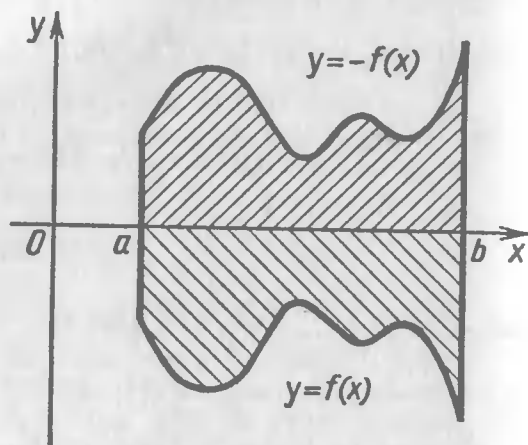


Рис. 234.

- г)  $\frac{\pi}{6}$ .
462.  $\frac{\pi H^2}{3} (3R - H)$ .
463.  $\frac{2\pi}{3} R^3 \left( 1 - \cos \frac{\alpha}{2} \right)$ .
464.  $\frac{1}{3} \pi H (R^2 + Rr + r^2)$ .
465. а)  $7x - 2x^2 + C$ ; б)  $\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 7x + C$ ; г)  $-10 \cos \frac{x}{5} + \frac{1}{2} \sin 6x + C$ .
466. а)  $-\frac{1}{6} (3+2x)^{-3} + C$ ; б)  $-\frac{10}{3} \sqrt{7-3x} + C$ ; в)  $1,5x^2 - \frac{1}{4} \operatorname{tg} 8x + C$ ; г)  $-\frac{4}{x+3} - \frac{7}{3} \operatorname{ctg} 3x + C$ .
467. а)  $2\sqrt{x} - 5$ ; б)  $-\frac{1}{x} - 2$ ; в)  $-2\sqrt{3-x} + 9$ ; г)  $\operatorname{tg} x - 3$ .
468. На 10; первый.
469. а) 3; б)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ; в)  $9\sqrt{3}$ ; г)  $2\sqrt{3}$ .
470. а)  $\frac{7^{10} - 1}{20}$ ; б)  $\frac{1}{2}$ ; в) 2; г)  $\frac{1}{2}$ .
- Решение.  $\int_1^2 \frac{x+1}{(2x-1)^3} dx = \int_1^2 \frac{x-0,5+1,5}{(2x-1)^3} dx = \int_1^2 \frac{0,5 dx}{(2x-1)^2} + \int_1^2 \frac{1,5 dx}{(2x-1)^3} = -\frac{1}{4} (2x-1)^{-1} \Big|_1^2 - 1,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (2x-1)^{-2} \Big|_1^2 = -\frac{1}{4} \left( \frac{1}{3} - 1 \right) - \frac{3}{8} \left( \frac{1}{9} - 1 \right) = \frac{1}{2}$ .
471. а)  $\pi$ ; б)  $\pi$ . Указание. Воспользуйтесь формулой  $\cos^2 nx = \frac{1 + \cos 2nx}{2}$ ; в) 0.
- Решение.  $\int_0^{2\pi} \sin 3x \cos 5x dx = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\sin 8x - \sin 2x) dx = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{8} \cos 8x + \frac{1}{2} \cos 2x \right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{8} (\cos 16\pi - \cos 0) + \frac{1}{2} (\cos 4\pi - \cos 0) \right) = \frac{1}{2} (0 - 0) = 0$ ; г)  $\pi$  при  $k = m$ , 0 при  $k \neq m$ .
- Указание.  $\sin kx \sin mx = \frac{1}{2} (\cos (k-m)x - \cos (k+m)x)$  (при  $k = m$  это выражение равно  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2kx$ ).
472. а) 2; б) 0,8; в)  $\frac{1}{2}$ . Указание. Найдите абсциссы точек пересечения графиков из уравнения  $\frac{4}{x^2} = 7 - 3x$ , откуда  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = -\frac{2}{3}$ ; г) 4,5.
473. а)  $\frac{1}{3}$ ; б)  $\frac{4n}{2n+1}$ ; в) 9.
474. а)  $\frac{\pi}{5}$ ; б)  $48,4\pi$ ; в)  $\frac{\pi}{7}$ ; г)  $\frac{\pi}{9}$ .
475. а) Пусть  $F(x)$  — первообразная для  $f(x)$ ,  $G(x)$  — первообразная для  $g(x)$ . Тогда  $F(x) + G(x)$  — первообразная для  $f(x) + g(x)$ . Поэтому  $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = (F(x) + G(x)) \Big|_a^b = F(b) + G(b) - F(a) - G(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ ; в)  $\int_a^b f(kx+c) dx = \frac{1}{k} F(kx+c) \Big|_a^b = \frac{1}{k} F(kb+c) - \frac{1}{k} F(ka+c) = \frac{1}{k} F(t) \Big|_{ka+c}^{kb+c} = \frac{1}{k} \int_{ka+c}^{kb+c} f(t) dt$ .
476. По формуле Ньютона — Лейбница все эти интегралы равны  $F(b) - F(a)$ , где  $F$  — первообразная для функции  $f$ .
477. а)  $\frac{\pi^2}{2}$ ; б)  $\frac{\pi^2}{4}$ ; в)  $\frac{2\pi}{15}$ ; г)  $2\pi^2 a^2 b$ .
478. в) При  $x \neq 0$  равенство  $F'(x) = f(x)$  проверяется легко; при  $x = 0$  имеем:  $F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = |0| = f(0)$ .
479. а) По формуле Лагранжа  $\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(c) \geq 0$ , так как  $c \in (a; b)$ , поэтому  $F(b) - F(a) \geq 0$ , т. е.  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ ; б) воспользуйтесь результатом предыдущей задачи и тем, что

$$\int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx;$$

в) так как  $(F(x+T)-F(x))'=f(x+T)-f(x)=0$ , то по признаку постоянства функции  $F(x+T)-F(x)=C$ ; для определения постоянной  $C$  подставим в это равенство  $x=0$ ; получим:  $C=F(0+T)-F(0)=\int_0^T f(y) dy$ ; таким образом, для лю-

бого  $x$  верно равенство  $F(x+T)-F(x)=\int_0^T f(y) dy$ , в частности при  $x=a$  получаем:

$$F(a+T)-F(a)=\int_a^{a+T} f(y) dy=\int_0^T f(y) dy.$$

480. а)  $(F(x)-F(-x))'=f(x)-f(-x)(-1)=f(x)+f(x)=2f(x)$ , поэтому  $F(x)-F(-x)=C$ . Подставляя  $x=0$ , находим:  $C=0$ . Итак,  $F(a)-F(-a)=0$ , т. е.

$\int_{-a}^a f(x) dx=0$ ; б) у к а з а н и е. Покажите, воспользовавшись признаком постоянства функции, что  $F(x)+F(-x)=C$ , причем  $C=F(0)+F(-0)=2F(0)$  и, следовательно,  $F(x)-F(-x)=2(F(x)-F(0))$  для любого  $x$ , в том числе и для  $x=a$ ; в) у к а з а н и е. Воспользуйтесь результатом задачи 479 б) и неравенствами  $f(x)\leq |f(x)|$  и  $-f(x)\leq |f(x)|$ .

#### Глава IV

482. а), в) Да; б), г) нет. 483. а) 3; в) 3; д)  $-\frac{3}{2}$ ; ж)  $\frac{1}{2}$ . 484. а) 11; в) -729; д) 21. 485. а) 10; в) 6; д) 6; ж) 10. 486. а) 3; в) 3; д) 3; ж) 2. 487. а) 2; б) 1; в) 1,25; г)  $-\frac{3}{20}$ . 488. а) 8,4261; б) 3,6346; в) 2,2240; г) 2,1666; д) 1,2936; е) 1,3780; ж) 1,4678; з) 1,3375. 489. а) Второе; в) первое; д) первое; ж) второе. 490. а) Первое больше; в) первое больше; д) первое больше; ж) первое меньше. 491. а) 2,64; в) 1,70. 492. а)  $2\sqrt{a}$ ; в)  $4\sqrt[3]{c}$ ; д)  $2b\sqrt{2b}$ ; ж)  $-2a\sqrt[5]{4a^2}$ ; з)  $a^3|c|\sqrt[4]{6b^2}$ . 493. а)  $\sqrt{12}$ ; в)  $\sqrt[5]{2}$ ; д)  $\sqrt[5]{2b^6}$ ; ж)  $\sqrt[3]{4a^3b^3}$ ; з)  $\sqrt[5]{5ab^{19}}$ . 494. а)  $\frac{5}{3}\sqrt{3}$ ; в)  $\sqrt[3]{7}$ ; д)  $\frac{1}{2}\sqrt[4]{108}$ ; ж)  $2\sqrt[4]{250}$ . 495. а)  $\sqrt[15]{7}$ ; в)  $\sqrt[20]{a^9}$ ; д)  $\sqrt{5}$ . 496. а)  $\sqrt[3]{4}$ ; в)  $\pm\sqrt[4]{10}$ ; д)  $\sqrt[5]{3}$ ; ж)  $\pm 2$ . 497. а)  $\pm\frac{1}{2}$ ; в)  $\pm 2$ . 498. а) 25; в) 0. 499. а) 1; 16; б) 1; в) 64; 729; г) 46 656. 500. а)  $(-\infty; \sqrt[3]{5})$ ; в)  $[\sqrt[4]{11}; \infty)$ ; д)  $(8; \infty)$ ; ж)  $[0; 81]$ . 501. а)  $a\leq 0$ ; в), г) при всех  $a$ ; е) при  $a=0$ . 502. а)  $a$ ; б)  $\sqrt{-a}$ ; г)  $-a$ ; е)  $|a|$ ; з)  $2a$ . 503. а) 2; в) 3; г) -4. 504. а)  $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ; в)  $\frac{(a-\sqrt{2})^2}{a^2-2}$ ; д)  $-(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4})$ ; ж)  $\frac{2(a^2+a\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{b^2})}{a^3-b}$ . 505. а) -2; 2; в) 8; г) 11. 506. а) 3; б) 0; 0,4; в) 10; г) 5. 507. а) 3; б)  $\emptyset$ ; в)  $\emptyset$ ; г) 2. 508. а)  $(2; -1)$ ,  $(-1; 2)$ ; б)  $(-2; 3)$ ,  $(2; -3)$ ; в)  $(4; 1)$ ,  $(\frac{10}{3}; \frac{2}{3})$ ; г)  $(3; 1)$ ,  $(1; 3)$ ,  $(-3; -1)$ ,  $(-1; -3)$ . 509. а)  $(1; 9)$ ,  $(9; 1)$ ; б)  $(1; 64)$ ,  $(64; 1)$ ; в)  $(12; 4)$ ,  $(34; -30)$ ; г)  $(\frac{4}{\sqrt{13}}; \frac{8}{\sqrt{13}})$ ,  $(-\frac{4}{\sqrt{13}}; -\frac{8}{\sqrt{13}})$ ,  $(2; -2)$ ,  $(-2; 2)$ . 510. а)  $11^{\frac{1}{2}}$ ; в)  $3^{\frac{17}{7}}$ ; д)  $5^{\frac{3}{7}}$ ; ж)  $2^{-3}$ ; з)  $b^{-\frac{1}{13}}$ . 511. а)  $(32a)^{\frac{1}{2}}$ ; в)  $(\frac{ax^3}{65536})^{\frac{1}{7}}$ ; д)  $a^{\frac{13}{6}}$ ; ж)  $a^{\frac{3}{4}}$ ; з)  $a^{\frac{5}{7}}$ . 512. а)  $\sqrt[3]{2401}$ ;

- в)  $\sqrt[5]{\frac{243}{8}}$ ; д)  $\sqrt[3]{a^3}$ ; ж)  $\sqrt[2]{b^7c^6}$ . 513. а) 32; в) 3072; д)  $\frac{9}{625}$ ; ж)  $\sqrt{\frac{1}{10}}$ ; з)  $\frac{1}{2}$ . 514. а)  $4\sqrt{3}$ ; в)  $\frac{4}{\sqrt{5}}$ ; г)  $\frac{7}{3}$ . 515. а) Второе; в) равны; д) первое; е) второе. 516. а), б), в), д) Имеют; г), е) нет. 517. а)  $[0; \infty)$ ; в)  $[1; \infty)$ ; г)  $(-1; \infty)$ . 518. а)  $a\geq 0$ ; б)  $a\geq 0$ ; в)  $a=0$ ; г)  $a\leq 0$ ; е)  $a\neq 0$ . 519. а) 12; в) 1,9. 520. а)  $\frac{3}{5}$ ; б)  $\sqrt[12]{32}$ ; в)  $\frac{31}{3}$ ; г)  $2\sqrt[6]{18}$ . 521. а)  $a^{0,5}-b^{0,5}$ ; б)  $\frac{1}{x^2+4}$ ; в)  $a^{\frac{1}{3}}+b^{\frac{1}{3}}$ ;

- г)  $z^{\frac{1}{3}}-2$ . 522. а)  $\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$ ; б)  $x+y$ ; в)  $x^{-\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{12}}$ ; г)  $\sqrt{a}$ . 523. а)  $\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)$ ; в)  $\sqrt{a}(\sqrt{a}-1)$ ; д)  $\sqrt{x}(\sqrt{3}-\sqrt{5})$ ; ж)  $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}+1)$ ; з)  $(x^{\frac{1}{3}}-1)(y^{\frac{1}{3}}-1)$ . 524. а) График изображен на рисунке 234. 525. а) 1; б) 81; г) 54; е)  $\sqrt[5]{3}$ ; з)  $\frac{1}{9}$ . 526. а) Второе; в) первое. 527. а)  $a$ ; в)  $a^{1,3}$ ; д)  $a^2$ ; ж)  $a^{\sqrt{3}}+1$ ; з)  $|x^n-y^n|$ . 528. а)  $(0; \infty)$ ; в) 1; е)  $(0; 1]$ ; з)  $(-\infty; 2)$ . 529. г) 53,9510 и 53,9634;  $10^{\sqrt{3}}\approx 53,96$ . 530. а) 3; в) -0,5; д) 6; ж) -0,5. 531. а) 0; в)  $\frac{5\pm\sqrt{65}}{2}$ ; д) 4; ж) -4. 532. а) 2; в)  $\frac{17}{13}$ ; д) -2; 3; ж)  $\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$ . 533. а) 3; в) 1. 534. а) 1; 2; в) 2. 535. а)  $(-1; \infty)$ ; в)  $(-\infty; 2)$ ; д)  $(-\infty; 2)$ ; ж)  $(0; \infty)$ . 536. а)  $[0; \infty)$ ; в)  $(-\infty; -1)$ ; д)  $(0; \infty)$ ; ж)  $(-\infty; -1)$ . 537. а)  $(-2; 3)$ ; в)  $(-\infty; -2]\cup[3; \infty)$ ; д)  $(-0,5; \infty)$ ; ж)  $(\frac{6}{13}; \infty)$ . 538. а)  $(1; 3)$ ; в)  $(1; \infty)$ . 539. а)  $(-\infty; -3)\cup(1; \infty)$ ; в)  $(-\infty; -7,5)\cup(-0,5; \infty)$ . 540. а)  $g(x)=\frac{x-1}{2}$ ;  $E(g)=D(g)=R$ ; д)  $g(x)=-\frac{1}{x}$ ;  $E(g)=D(g)=(-\infty; 0)\cup$

$\cup(0; \infty)$ ; ж)  $g(x)=\sqrt{\frac{x}{2}}$ ;  $E(g)=D(g)=[0; \infty)$ .

544. а) 2; в) 4; д) -3; ж) 0. 545. а)  $\log_{16} 2=\frac{1}{4}$ ; в)  $\log_{49} 7=\frac{1}{2}$ ; д)  $\log_{27} 9=\frac{2}{3}$ ; ж)  $\log_{81} 27=\frac{3}{4}$ .

548. а) 7; в) 11. 549. а) 25; в)  $\frac{1}{49}$ ; д) 8; ж) 216.

550. а) 3; в) 2. 551. а)  $\sqrt[8]{\frac{1}{2}}$ ; в) 9. 552. а) 4; в) 729. 553. а)  $(5; \infty)$ ; в)  $(-1,5; \infty)$ ; д)  $(-3; 3)$ ; ж)  $(-2; 3)$ . 554. а)  $(-1; 2)$ ; в)  $(-\frac{2}{3}; \frac{5}{2})$ .

555. г) График изображен на рисунке 235. 556. а)  $2a+b$ ; б)  $b-a$ ; в)  $3a+2b$ ; г)  $1+a+b$ .

557. а)  $2+4\log_3|a|+\frac{1}{5}\log_3 b$ ; в)  $\frac{2}{5}\log_3 a+\frac{2}{15}\log_3 b$ ; г)  $-2\log_3|a|+\frac{1}{6}\log_3 b$ .

558. а)  $-\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\lg c-\frac{1}{6}\lg d$ ; в)  $1+\frac{1}{2}\lg p-\lg q$ .

559. а) 1; в) 4; г) 3; д) -1; ж) 2. 561. а) 12; в) 3. 562. а) 2; в) 2. 563. а) Первое; в) второе.

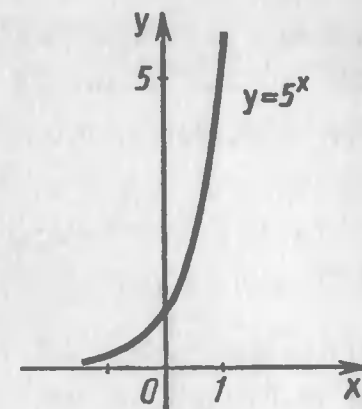


Рис. 234.

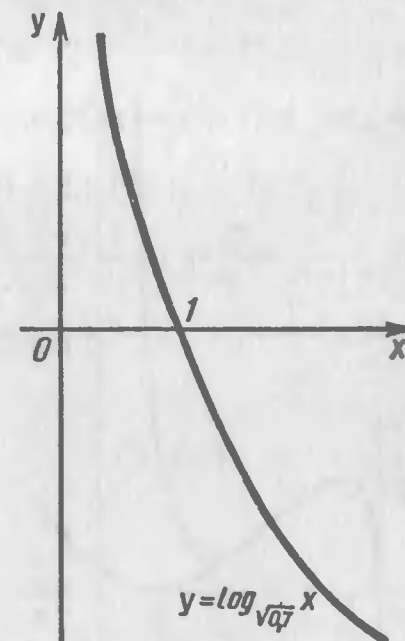


Рис. 235.

564. а)  $1 + \log_2 5 \approx 3,3219$ ; в)  $\log_9 0,7 \approx -0,1623$ ; д) 9; ж) 0,01. 565. а) 2; в) 6,5.  
 566. а)  $\frac{2 - \log_3 7}{5} \approx 0,046$ ; б)  $4 - \log_{0,2} 3 \approx 4,683$ ; в)  $\pm \sqrt{\log_5 7}$ ;  $\sqrt{\log_5 7} \approx 1,100$ .  
 567. а) (9;  $\infty$ ); в) (0; 0,16807); г) (25;  $\infty$ ). 568. а)  $(-\infty; x_0)$ ,  $x_0 = \log_3 5 \approx 1,465$ ;  
 б)  $(x_0; \infty)$ ,  $x_0 = \log_{0,8} 11 \approx -10,746$ ; в)  $(x_0; \infty)$ ,  $x_0 = \frac{\log_{1,7} 7 + 1}{2} \approx 2,334$ ;  
 г)  $(x_0; \infty)$ ,  $x_0 = 2 - \log_{0,3} 12 \approx 4,064$ . 569. б) (-3; 1); г) (0, 1). 570. а) (0;  
 0,001)  $\cup$  (10;  $\infty$ ); в)  $(-\infty; 1]$ . 571. а)  $\log_3 5$ ; в)  $\log_2 10$ . 572. а)  $\frac{1}{3} \lg a - \lg b$ ;  
 в)  $3\sqrt{2} \lg a + \frac{6}{5} \lg b$ . 573. а) 15; в)  $\frac{4}{3}$ ; д) 10; 0,1; ж) 25; 0,2. 574. а) 100; 0,01;  
 в) 8; 0,5. 575. а) 100;  $10^8$ ; в) 2. 576. а) (2; 5); (5; 2); в) (6; 8); (8; 6).  
 577. а) (1; 2); (2; 1); в) (4,5; 0,5). 578. а) (27; 4);  $(\frac{1}{81}; -3)$ ; в) (16; 20).  
 579. а)  $(\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi l)$ ;  $(\frac{\pi}{2} + \pi k; 2\pi l - \frac{\pi}{3})$ ;  $k, l \in \mathbb{Z}$ ; в)  $(\frac{\pi}{6} + \pi k + \pi l; \frac{\pi}{6} -$   
 $-\pi k + \pi l)$ ;  $(-\frac{\pi}{6} + \pi k + \pi l; -\frac{\pi}{6} - \pi k + \pi l)$ ,  $k, l \in \mathbb{Z}$ . 580. а) 1,0986; в) 3,8501.  
 581. а)  $3e^{3x}$ ; в)  $2xe^{x^2}$ ; д)  $\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} - 273e^{91x}$ ; ж)  $\frac{1}{4} \ln 1,7 \cdot 1,7^{\frac{x}{4}}$ . 582. а)  $2^x (\ln 2 \cos x -$   
 $-\sin x)$ ; в)  $(3x^2 - x^3)e^{-x}$ ; д)  $\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}$ ; е)  $\frac{6^x(\ln 3 - \ln 2) + 15^x(\ln 3 - \ln 5)}{(2^x + 5^x)^2}$ ;  
 з)  $\frac{-0,3^{-x}(2x \ln 0,3 + \sqrt{x} \ln 0,3 + 1)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x} + 0,5)^2}$ . 583. а) Возрастает на промежутке  $(-\infty; 1]$ ,  
 убывает на промежутке  $[1; \infty)$ ; б) убывает на промежутке  $(-\infty; -0,2]$ , воз-  
 растает на промежутке  $[-0,2; \infty)$ ; в) убывает на промежутках  $(-\infty; 0]$  и  
 $[\frac{2}{\ln 2}; \infty)$ , возрастает на промежутке  $[0; \frac{2}{\ln 2}]$ ; г) убывает на промежутках  
 $(-\infty; 0]$  и  $[-\frac{4}{\ln 0,7}; \infty)$ , возрастает на промежутке  $[0; -\frac{4}{\ln 0,7}]$ ; в  
 точке 0 функция имеет минимум, в точке  $-\frac{4}{\ln 0,7}$  — максимум  $(-\frac{4}{\ln 0,7} \approx 11,21)$ .  
 584. а)  $y = x + 1$ ; б)  $y = 3 + 3 \ln 3(x - 1)$ . 585. а)  $\frac{4^x}{\ln 4} + C$ ; б)  $7e^x + C$ ; г)  $\frac{2 \cdot 0,9^x}{\ln 0,9} -$   
 $-\frac{5,6^x}{\ln 5,6} + C$ ; д)  $\frac{e^{2x}}{2} + C$ ; ж)  $-\frac{12^{5-7x}}{7 \ln 12} + C$ . 586. а)  $\frac{1,75}{\ln 2} \approx 2,525$ ; в)  $\frac{3,75}{\ln 4} \approx$   
 $\approx 2,705$ . 587. а)  $e - 1 \approx 1,718$ ; в)  $\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2} \approx 1,476$ . 588. а)  $\frac{1}{x \ln 2}$ ; в)  $\frac{3}{(2+3x) \ln 7}$ ;  
 д)  $\frac{1}{x \ln 2}$ ; ж)  $\frac{1}{x}$ ; з)  $x^2(1 + 3 \ln x)$ . 589. а)  $\frac{1 - \ln x}{x^2}$ ; б)  $\frac{3(x^2 + 1) - 2x(5 + 3x) \ln(5 + 3x)}{(5 + 3x)(x^2 + 1)^2}$ ;  
 в)  $\frac{1}{x \ln 10} = \frac{\lg e}{x}$ ; г)  $\frac{2 \lg e + \lg x}{2\sqrt{x}}$ . 590. а)  $y = x - 1$ ; б)  $y = \frac{x}{3} + \ln 3 - 1$ ; в)  $y =$   
 $= \lg e(x - 1)$ ; г)  $y = 2 + \frac{1}{9 \ln 3}(x - 9)$ . 591. а) Убывает на промежутке  $(0; e^{-1}]$ ,  
 возрастает на промежутке  $[e^{-1}; \infty)$ , в точке  $e^{-1}$   
 функция имеет минимум; б) график функции  
 изображен на рисунке 236; возрастает на про-  
 межутках  $(0; e^{-2}]$  и  $[1; \infty)$ , убывает на проме-  
 жуток  $[e^{-2}; 1]$ ; г) убывает на промежутках  $(0; 1)$   
 и  $(1; e]$ , возрастает на промежутке  $[e; \infty)$ , в  
 точке  $e$  функция имеет минимум.

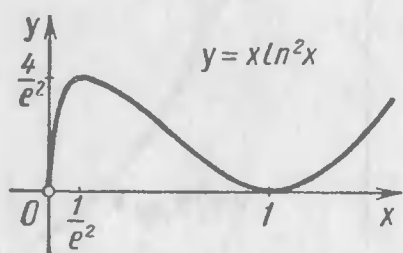


Рис. 236.

592. а)  $\ln |x + 5|$ ; в)  $\frac{3}{7} \ln |7x + 1|$ . 593. а)  $\ln 7 \approx$   
 $\approx 1,946$ ; в)  $0,5 \ln 5 \approx 0,805$ . 594. а)  $\ln 3 \approx 1,099$ ;  
 в)  $\ln 5 - \ln 2 \approx 0,916$ . 595.  $f'(x) = \sqrt{3x^{3-1}}$ ;

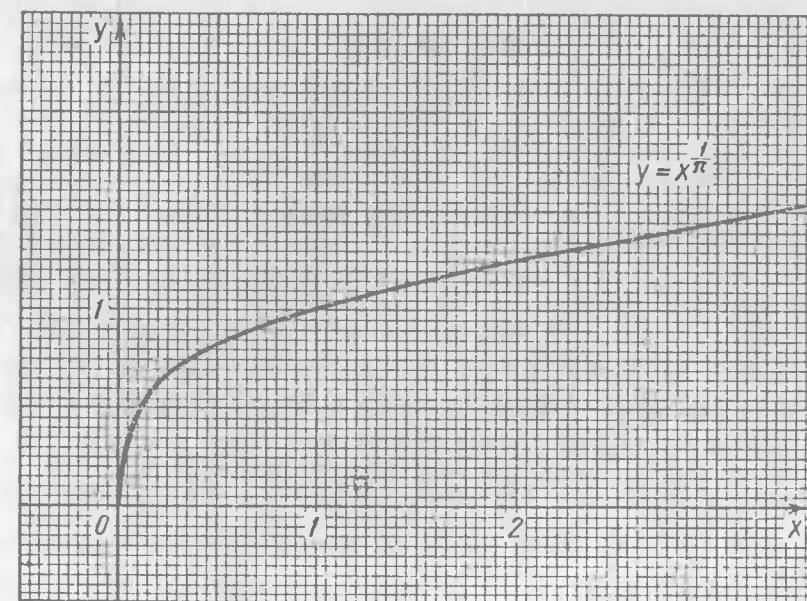


Рис. 237.

- б)  $g'(x) = \frac{1}{\pi} x^{\frac{1}{\pi}-1}$ , график изображен на рисунке 237; в)  $u'(x) = -ex^{-e-1}$ ,  
 график изображен на рисунке 238; г)  $v'(x) = 0,1x^{-0,9}$ . 599. а)  $\frac{1}{3,7} x^{3,7} + C$ ;  
 в)  $\frac{\sqrt{2}+1}{2} x^{1-\sqrt{2}} + C$ ; г)  $3 \ln |x| + C$ . 600. а)  $\frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$ ; в) 5; г)  $\ln 2 - \frac{1}{4}(\sqrt{3}-1)$ .  
 604.  $\frac{t \ln 2}{\ln x - \gamma \sqrt{n}}$ . 605. 9 мин. 606.  $t = \frac{1}{\lg 2} \approx 3,322$  ч. 607.  $\approx 0,06395$ . 608. Р е-  
 шение. Пусть  $f'(0) = a$ . Тогда  $f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$   
 $= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x)f(\Delta x) - f(x)f(0)}{\Delta x} = f(x) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = f(x)f'(0) = af(x)$ . Поэтому  
 $f(x) = Ce^{ax}$ , где  $C$  — некоторая постоянная. Далее,  $f(0) = Ce^{a \cdot 0} = C$  и, сле-  
 довательно,  $C^2 = C \cdot C = f(0) \cdot f(0) = f(0+0) = C$ , т. е.  $C^2 = C$ , откуда  $C = 0$   
 или  $C = 1$ . Итак,  $f(x) = e^{ax}$  или  $f(x) = 0$ . Проверкой убеждаемся, что для  
 функций  $y = e^{ax}$  и  $y = 0$  при любых  $x_1$  и  $x_2$  выпол-  
 няется равенство  $f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2)$ . 609.  $\frac{10 \lg 2}{\lg 1,6} \approx$   
 $\approx 14,57$  (мин). 610.  $\frac{10 \lg 2}{\lg 1,25} \approx 31,06$  (мин). 611.  
 $500e^{-5} \approx 3,37$  (м/мин). 612. График изображен  
 на рисунке 239. 614. а)  $\log_3 7 \approx 1,7712$ ;  
 г)  $\frac{2 \lg 0,3}{6 \lg 5 + \lg 0,3} \approx -0,2849$ . 615. а) -1; 3; б) -e;  
 в) -1; 2; г) -5; 2. 616. а) 0,5; б)  $\ln 3 \approx 1,0986$ ;  
 г)  $\frac{5 - 4 \log_2 7}{3} \approx -2,076$ . 617. б) 7; г)  $\frac{8}{7}$ . 618.  
 б) 0,09; в) 5; г)  $\sqrt{2}$ . 619. а)  $(-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;  
 б) 3; в) 0,5; г)  $\sqrt{2}$ ; 4. 620. а)  $\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ ,  
 $k \in \mathbb{Z}$ ; в) 0; г)  $\log_{2,5} 2 \approx 0,7565$ . 621. а)  $\log_{11} 2 \approx$   
 $\approx 0,2891$ ; б)  $\frac{4(3-a)}{3+a}$ . 622. а) (1; 3); б) (0; 0,5)  $\cup$   
 $\cup$  (1; 1,5); в) (1;  $\infty$ ); г) (1; 2). 623. а)  $(e^2; \infty)$ ;  
 в) (0;  $e^{-3}$ ). 624. а)  $(-\infty; 0]$ ; в)  $(-\infty; 2)$ .

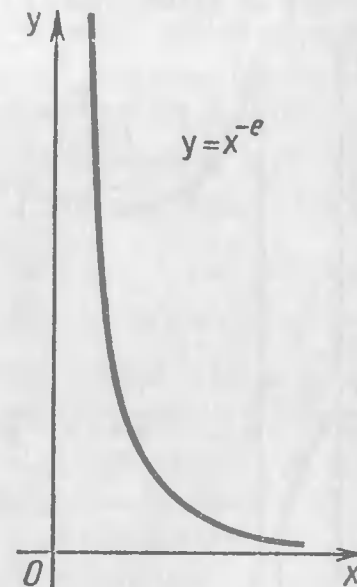


Рис. 238.



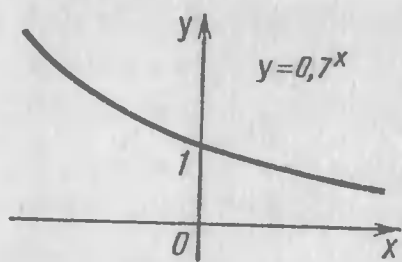


Рис. 239.

- б)  $(-0,5; -0,255)$ ; в)  $(0,382; 0,4)$ ; г)  $(-\infty; -32)$ . 633. а)  $(1; \infty)$ ; б)  $(0; 1)$ ; в)  $(1; \infty)$ ; г)  $(0; 1)$ . 634. а)  $(-1; 3)$ ; б)  $(e^{-1}; e^2)$ ; в)  $(0; 0,1) \cup (1; 100)$ ; г)  $(1 - \sqrt{5}; -1) \cup (2; 1 + \sqrt{5})$ . 635. а)  $(1; \infty)$ ; в)  $(-\infty; 4)$ . 636. а)  $(-\infty; -1) \cup (3; \infty)$ ; б)  $(-2; 3)$ ; в)  $R$ ; г)  $(-\infty; -3) \cup (-3; \infty)$ . 637. а)  $(-\frac{5}{3}; 2)$ ; б) объединение всех промежутков вида  $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$ ,  $k \in Z$ ; в) объединение всех промежутков вида  $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$ ,  $k \in Z$ ; г)  $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ . 638. а)  $-4,6757$ ; б)  $-1,5662$ ; в)  $0,8736$ ; г)  $1,0649$ . 639. а)  $1,112$ ; в)  $3,248$ ; г)  $23,14$ . 640. а), б), г) первое; в) второе. 641. а)  $9e^{9x}$ ; в)  $-35e^{-5x}$ . 642. а)  $-4 \ln 5 \cdot 5^{-4x}$ ; в)  $-10 \ln 3 \cdot 9^{2-5x}$ . 643. а)  $\frac{2^x(\ln 2 \cos x + \sin x)}{\cos^2 x}$ ; б)  $\frac{\operatorname{tg} x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{\sqrt[3]{x}}{\cos^2 x}$ ; в)  $-\frac{4x + \sin 2x}{4x\sqrt{x} \sin^2 x}$ ; г)  $\frac{2^{\frac{x}{3}}((x^4 + 3) \ln 2 - 12x^3)}{3(x^4 + 3)^2}$ . 644. а)  $\cos x e^{\sin x}$ ; б)  $-\sin x e^{\cos x}$ ; в)  $\frac{5 \ln 3 \cdot 3^{5 \operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$ ; г)  $\frac{-2 \ln 7 \cdot 7^{2 \operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}$ . 645. а)  $\frac{1}{x \ln 3}$ ; в)  $\frac{4 \lg e}{3 + 4x}$ . 646. а)  $3x^2 \ln x + x^2$ ; б)  $3^x \left( \ln 3 \ln(5x) + \frac{1}{x} \right)$ ; в)  $\frac{x \cos x \ln(7x) - \sin x}{x \ln^2 7x}$ ; г)  $\frac{2\sqrt{x} + 6 - \sqrt{x} \ln(2x)}{2x(\sqrt{x} + 3)^2}$ . 647. а)  $\operatorname{ctg} x$ ; б)  $\frac{2}{\sin 2x}$ ; в)  $\frac{3x^2\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}(x^3 + 4\sqrt{x} + 5) \ln 11}$ ; г)  $\frac{\lg e(3 \cos 3x + 2^x \ln 2)}{\sin 3x + 2^x}$ . 648. а)  $y = 2x + 1$ ; б)  $y = 10(\ln 10 \cdot x + 1 - \ln 10)$ ; в)  $y = 2x - 1$ ; г)  $y = 3x \lg e - \lg e$ . 649. а) Убывает на промежутке  $(0; 1]$ , возрастает на промежутке  $[1; \infty)$ ; б) возрастает на промежутках  $[-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k]$ ,  $k \in Z$ , убывает на промежутках  $[\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{7\pi}{4} + 2\pi k]$ ,  $k \in Z$ ; в) в точках  $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ ,  $k \in Z$ , функция имеет максимумы, в точках  $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ,  $k \in Z$ , — минимумы; г) возрастает на промежутках  $(0; 4^{-\frac{1}{\ln 2}}]$  и  $[1; \infty)$ , убывает на промежутке  $[4^{-\frac{1}{\ln 2}}; 1]$  ( $4^{-\frac{1}{\ln 2}} \approx 0,1353$ ). 650. а) Убывает на промежутках  $(0; e^{-1}]$  и  $[e; \infty)$ , возрастает на промежутке  $[e^{-1}; e]$ ; б) возрастает на промежутках  $[-\frac{3\pi}{4} + \pi k; -\frac{\pi}{2} + \pi k]$  и  $(-\frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{4} + \pi k]$ ,  $k \in Z$ , убывает на промежутках  $[-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k]$ ,  $k \in Z$ ; функция имеет мак-

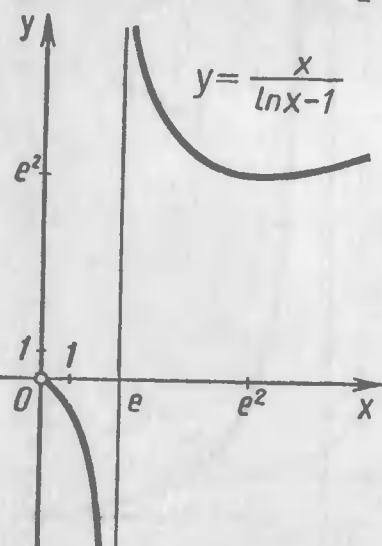


Рис. 240.

625. а)  $(x_0; \infty)$ ,  $x_0 = \frac{2 - \log_{1,7} 7}{3} \approx -0,5557$ ; г)  $(0; \infty)$ . 627. а)  $\sqrt{0,6}$ ; б) 4; в) 3; г) 1,5; 3. 628. а) 13; б)  $\frac{1}{81}$ ; 3; в) 6; г) 0,01; 0,001. 629. а) 0,25; 4; б)  $\frac{1}{3}$ ; 27; в) 0,1; 100; г) 0,2; 125. 630. а) 2; б)  $\frac{1}{7}$ ; 7; в) 7; г)  $\sqrt{10}$ ; 100. 631. а)  $(-\infty; 1)$ ; в)  $(1; \infty)$ . 632. а)  $(2,8; 3)$ ; б)  $(-0,5; -0,255)$ ; в)  $(0,382; 0,4)$ ; г)  $(-\infty; -32)$ . 633. а)  $(1; \infty)$ ; б)  $(0; 1)$ ; в)  $(1; \infty)$ ; г)  $(0; 1)$ . 634. а)  $(-1; 3)$ ; б)  $(e^{-1}; e^2)$ ; в)  $(0; 0,1) \cup (1; 100)$ ; г)  $(1 - \sqrt{5}; -1) \cup (2; 1 + \sqrt{5})$ . 635. а)  $(1; \infty)$ ; в)  $(-\infty; 4)$ . 636. а)  $(-\infty; -1) \cup (3; \infty)$ ; б)  $(-2; 3)$ ; в)  $R$ ; г)  $(-\infty; -3) \cup (-3; \infty)$ . 637. а)  $(-\frac{5}{3}; 2)$ ; б) объединение всех промежутков вида  $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$ ,  $k \in Z$ ; в) объединение всех промежутков вида  $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k)$ ,  $k \in Z$ ; г)  $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$ . 638. а)  $-4,6757$ ; б)  $-1,5662$ ; в)  $0,8736$ ; г)  $1,0649$ . 639. а)  $1,112$ ; в)  $3,248$ ; г)  $23,14$ . 640. а), б), г) первое; в) второе. 641. а)  $9e^{9x}$ ; в)  $-35e^{-5x}$ . 642. а)  $-4 \ln 5 \cdot 5^{-4x}$ ; в)  $-10 \ln 3 \cdot 9^{2-5x}$ . 643. а)  $\frac{2^x(\ln 2 \cos x + \sin x)}{\cos^2 x}$ ; б)  $\frac{\operatorname{tg} x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{\sqrt[3]{x}}{\cos^2 x}$ ; в)  $-\frac{4x + \sin 2x}{4x\sqrt{x} \sin^2 x}$ ; г)  $\frac{2^{\frac{x}{3}}((x^4 + 3) \ln 2 - 12x^3)}{3(x^4 + 3)^2}$ . 644. а)  $\cos x e^{\sin x}$ ; б)  $-\sin x e^{\cos x}$ ; в)  $\frac{5 \ln 3 \cdot 3^{5 \operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}$ ; г)  $\frac{-2 \ln 7 \cdot 7^{2 \operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}$ . 645. а)  $\frac{1}{x \ln 3}$ ; в)  $\frac{4 \lg e}{3 + 4x}$ . 646. а)  $3x^2 \ln x + x^2$ ; б)  $3^x \left( \ln 3 \ln(5x) + \frac{1}{x} \right)$ ; в)  $\frac{x \cos x \ln(7x) - \sin x}{x \ln^2 7x}$ ; г)  $\frac{2\sqrt{x} + 6 - \sqrt{x} \ln(2x)}{2x(\sqrt{x} + 3)^2}$ . 647. а)  $\operatorname{ctg} x$ ; б)  $\frac{2}{\sin 2x}$ ; в)  $\frac{3x^2\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}(x^3 + 4\sqrt{x} + 5) \ln 11}$ ; г)  $\frac{\lg e(3 \cos 3x + 2^x \ln 2)}{\sin 3x + 2^x}$ . 648. а)  $y = 2x + 1$ ; б)  $y = 10(\ln 10 \cdot x + 1 - \ln 10)$ ; в)  $y = 2x - 1$ ; г)  $y = 3x \lg e - \lg e$ . 649. а) Убывает на промежутке  $(0; 1]$ , возрастает на промежутке  $[1; \infty)$ ; б) возрастает на промежутках  $[-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k]$ ,  $k \in Z$ , убывает на промежутках  $[\frac{3\pi}{4} + 2\pi k; \frac{7\pi}{4} + 2\pi k]$ ,  $k \in Z$ ; в) в точках  $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$ ,  $k \in Z$ , функция имеет максимумы, в точках  $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$ ,  $k \in Z$ , — минимумы; г) возрастает на промежутках  $(0; 4^{-\frac{1}{\ln 2}}]$  и  $[1; \infty)$ , убывает на промежутке  $[4^{-\frac{1}{\ln 2}}; 1]$  ( $4^{-\frac{1}{\ln 2}} \approx 0,1353$ ). 650. а) Убывает на промежутках  $(0; e^{-1}]$  и  $[e; \infty)$ , возрастает на промежутке  $[e^{-1}; e]$ ; б) возрастает на промежутках  $[-\frac{3\pi}{4} + \pi k; -\frac{\pi}{2} + \pi k]$  и  $(-\frac{\pi}{2} + \pi k; -\frac{\pi}{4} + \pi k]$ ,  $k \in Z$ , убывает на промежутках  $[-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k]$ ,  $k \in Z$ ; функция имеет мак-

симумы в точках  $-\frac{\pi}{4} + \pi k$ ;  $k \in Z$ , минимумы в точках  $\frac{\pi}{4} + \pi k$ ,  $k \in Z$ ; в) убывает на промежутках  $(0; 1]$  и  $[e^2; \infty)$ , возрастает на промежутке  $[1; e^2]$ ; в точке 1 функция имеет минимум, в точке  $e^2$  — максимум; г) возрастает на промежутках  $(0; e^{-1}]$  и  $[e; \infty)$ , убывает на промежутке  $[e^{-1}; e]$ . 651. а) Убывает на промежутках  $(0; 1]$  и  $[4; \infty)$ , возрастает на промежутке  $[1; 4]$ ; б) график функции изображен на рисунке 240; в) возрастает на промежутке  $(-\infty; 3]$ , убывает на промежутке  $[3; \infty)$ ; в точке 3 функция имеет максимум, критическая точка 0 не является точкой экстремума; г) возрастает на промежутках  $(-\infty; -1]$  и  $[0; 1]$ , убывает на промежутках  $[-1; 0]$  и  $[1; \infty)$ . 652. а)  $\ln|x+7| + C$ ; б)  $0,6 \ln|5x+1| + C$ ; в)  $-2,5 \ln|3-2x| + C$ ;

г)  $-0,8 \ln|7-5x| + C$ . 653. а)  $\frac{1}{8} \ln|x| + C$ ; б)  $0,7x^{\frac{10}{7}} + C$ ; в)  $10\sqrt[5]{x} + C$ ; г)  $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ . 654. а)  $\ln 2 \approx 0,6931$ ; б)  $\frac{\ln 7}{3} \approx 0,6486$ ; в)  $\ln 2 - \ln 3 \approx -0,4055$ ; г)  $0,5 \ln 5 \approx 0,8047$ . 655. а)  $\ln 5 \approx 1,6094$ ; б)  $3 - 3 \ln 2 \approx 0,9206$ ; в)  $6 - 2 \ln 3 \approx 3,8028$ ; г)  $4 - 3 \ln 3 \approx 0,7042$ .

### Задачи повышенной трудности

656. У к а з а н и е. Воспользуемся тем, что при делении на  $q$  существует в точности  $q-1$  различных ненулевых остатков, поэтому при обращении рационального числа  $\frac{p}{q}$  в бесконечную десятичную дробь остатки, а следовательно, и цифры в частном будут повторяться с периодом не более  $q-1$ . 657. У к а з а н и е. Пусть  $p$  — остаток, начиная с которого при обращении  $\frac{m}{n}$  в бесконечную десятичную дробь в частном получаются только девятки. Тогда  $1 > \frac{p}{n} > 1 - 10^{-k}$  для любого натурального  $k$ . 658. У к а з а н и е. Бесконечная периодическая десятичная дробь есть сумма конечной десятичной дроби и суммы бесконечной геометрической прогрессии со знаменателем  $10^k$ , где  $k$  — число цифр в периоде. 659. Пусть  $k$  — длина периода этой дроби. Рассмотрим  $k$  цифр, начиная с цифры, следующей за  $k$ -й двойкой. Все эти цифры — семерки, поэтому период дроби должен быть равен  $\underbrace{(77 \dots 77)}_{k \text{ цифр}}$ , что неверно: в этом случае все следующие

цифры должны быть равны семи. 660. в) Предположим, что  $\sqrt[3]{3} = \frac{p}{q}$ , где  $p \in Z$ ,  $q \in N$ ,  $\frac{p}{q}$  — несократимая дробь. Тогда  $3 = \frac{p^3}{q^3}$ , т. е.  $p^3 = 3q^3$ , откуда следует, что  $p$  делится на 3. Подставляя  $p = 3m$  в равенство  $p^3 = 3q^3$ , получаем:  $27m^3 = 3q^3$ , т. е.  $9m^3 = q^3$ . Из последнего равенства видно, что  $q$  делится на 3. Получили противоречие: дробь  $\frac{p}{q}$  сократима на 3; д) предположим противное:  $\lg 43 = \frac{p}{q}$ , при этом так как  $\lg 43 > 0$ , то можно считать, что  $p$  и  $q$  — натуральные числа. Из равенства  $\lg 43 = \frac{p}{q}$  получаем:  $10^{\frac{p}{q}} = 43$ , откуда  $10^p = 43^q$ , а это равенство ложно: его левая часть делится на 5, а правая — нет. 661. а) Пусть  $\sqrt{3} + \sqrt{5} = r$ , где  $r$  — рациональное число. Тогда  $3 + 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{5} + 5 = r^2$ , откуда  $\sqrt{15} = \frac{r^2 - 8}{2}$ , что противоречит иррациональности  $\sqrt{15}$ ; в) пусть  $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} = r$ , где  $r$  рационально. Тогда  $\sqrt{5} = r - \sqrt{2} - \sqrt{3}$ , откуда  $5 = r^2 + 2 + 3 - 2r\sqrt{2} - 2r\sqrt{3} + 2\sqrt{6}$ . Далее,  $r^2 - 2r\sqrt{3} = 2r\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$ , поэтому  $r^4 + 12r^2 - 4r^3\sqrt{3} = 8r^2 + 24 - 16r\sqrt{3} + 4r^2 - 24 = (4r^3 - 16r)\sqrt{3}$ , что противоречит иррациональности  $\sqrt{3}$  (так как  $4r^3 - 16r \neq 0$ ). 664. У к а з а н и е. а) «Избавьтесь» сначала от  $\sqrt[3]{3}$ ; б) сначала умножьте числитель и знаменатель на  $\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}$ ; в) воспользуйтесь результатом за-

дачи 663 г). 666. Пусть  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$  и  $\sqrt{5}$  соответственно  $(m+1)$ -й,  $(n+1)$ -й и  $(p+1)$ -й члены геометрической прогрессии. Тогда  $2=b_1^2 q^{2^m}$ ,  $3=b_1^2 q^{2^n}$ ,  $5=b_1^2 q^{2^p}$ , где  $b_1 > 0$  и  $q > 0$  — первый член и знаменатель геометрической прогрессии. Отсюда получаем:  $\frac{2}{3}=q^{2(m-n)}$ ,  $\frac{3}{5}=q^{2(n-p)}$ ,  $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-p}=\left(\frac{3}{5}\right)^{m-n}=q^{2(m-n)(n-p)}$  и  $2^{n-p} \cdot 5^{m-n}=3^{(n-p)+(m-n)}$ . Если  $q < 1$ , то обе части этого равенства — натуральные числа (так как  $m > n > p$ ), причем левая часть делится на 2, а правая — нет. Получаем противоречие с теоремой о единственности разложения натурального числа на простые множители. Если же  $q > 1$ , то предварительно надо переписать последнее равенство в виде  $2^{p-n} \cdot 5^{n-m}=3^{p-m}$ . 668. а) 6; б)  $\sqrt{3}-\sqrt{7}$ ; в)  $\sqrt{5}$ . 669. При достаточно больших  $n$  будут (для заданного  $\varepsilon > 0$ ) выполнены неравенства  $A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon$ ,  $A-\varepsilon < c_n < A+\varepsilon$ ; но тогда  $b_n \leq c_n < A+\varepsilon$  и  $c_n \geq a_n > A-\varepsilon$ , т. е.  $A-\varepsilon < b_n < A+\varepsilon$ , откуда  $|b_n - A| < \varepsilon$ . 670. б) Выберем  $\varepsilon > 0$ , тогда при достаточно больших  $n$  для бесконечно малой последовательности  $(\alpha_n)$  будет выполнено неравенство  $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{M}$ , поэтому при

тех же  $n$  имеем:  $|\alpha_n a_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$ . 671. У к а з а н и е. Сначала докажете, что сходящаяся последовательность ограничена. Далее, например, для произведения имеем:  $a_n = A + \alpha_n$ ,  $b_n = B + \beta_n$ , где  $A$  и  $B$  — пределы последовательностей  $a_n$  и  $b_n$ ,  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  — бесконечно малые последовательности, поэтому  $a_n b_n = (A + \alpha_n)(B + \beta_n) = A\beta_n + B\alpha_n + AB$ ; так как последовательность  $\alpha_n \beta_n + A\beta_n + B\alpha_n$  — бесконечно малая (см. задачи 670 а) и б)), то в силу задачи 670 в)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = AB$ . 674. а) 0;

б) 4. 676. а)  $\frac{5}{3}$ ; б)  $-2$ . 677. Р е ш е н и е. Докажем, что для произвольного  $\varepsilon > 0$  найдется такой номер  $N$ , что для всех  $n > N$  будет выполнено неравенство  $\left| \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - A \right| < \varepsilon$ , где  $A = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Рассмотрим такой номер  $N_1$ , что

$|x_k - A| < \frac{\varepsilon}{2}$  при  $k > N_1$ . Тогда при  $n > N_1$  имеем:  $\left| \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - A \right| = \left| \frac{(x_1 - A) + (x_2 - A) + \dots + (x_n - A)}{n} \right| \leq \left| \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{N_1} - N_1 A}{n} \right| + \frac{n - N_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$ ;  $\frac{n - N_1}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2}$ . Далее,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{N_1} - N_1 A}{n} = 0$ , по-

этому при  $n > N$ , где  $N > N_1$  — некоторое число, выполняется неравенство  $\left| \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{N_1} - N_1 A}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Следовательно,  $\left| \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} - A \right| \leq \left| \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{N_1} - N_1 A}{n} \right| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ . 679. а) У к а з а н и е. Вос-

пользуйтесь равенством  $\sin((k+1)x) = \sin(kx) \cos x + \sin x \cos(kx)$ . 680. б) У к а з а н и е. Обозначим число  $3^{3n+2} + 2^{4n+1}$  через  $B_n$ . Тогда  $B_{n+1} = 16B_n + 11 \cdot 3^{3n+2}$  делится на 11, если  $B_n$  делится на 11. 681. Предварительно следует показать, что  $n$  точек, расположенных на прямой, делят ее на  $n+1$  частей. Далее:

а) при  $n=1$  утверждение справедливо, так как  $1 + \frac{1 \cdot 2}{2} = 2$  и одна прямая делит плоскость на две части; б) пусть утверждение верно для  $n=k$ , т. е.  $k$  прямых делят плоскость не более чем на  $1 + \frac{k(k+1)}{2}$  частей. Докажем, что утверждение верно для  $n=k+1$ . Выберем одну из  $k+1$  прямых и будем ее в дальнейшем считать  $(k+1)$ -й. В силу предположения индукции оставшиеся  $k$  прямых разделят плоскость не более чем на  $1 + \frac{k(k+1)}{2}$  частей;  $(k+1)$ -я прямая пересечет некоторые из оставшихся  $k$  прямых и потому разделится

точками пересечения не более чем на  $(k+1)$  частей. Каждая из полученных частей прямой разобьет одну из имевшихся частей плоскости на две, т. е. к имевшимся не более чем  $1 + \frac{k(k+1)}{2}$  частям плоскости добавится еще не

более чем  $k+1$ . Всего получим не более чем  $1 + \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = 1 + \frac{(k+1)(k+2)}{2}$  (частей). 682. При  $n=1$  утверждение справедливо, так как

одна плоскость делит пространство на две части и  $\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6} = 2$  при

$n=1$ . Предположим, что утверждение справедливо для  $n=k$ , и докажем его справедливость для  $n=k+1$ . Выберем одну из плоскостей и рассмотрим прямые пересечения этой плоскости с остальными  $k$  плоскостями. Этих прямых не более  $k$ , и в силу задачи 681 они делят выбранную плоскость не более чем на  $\frac{k^2+k+2}{2}$  частей. В силу предположения индукции оставшиеся  $k$  плоскостей разделят пространство не более чем на  $\frac{(k+1)(k^2-k+6)}{6}$  частей. Каж-

дая часть выбранной плоскости может разделить одну из имевшихся частей пространства на две. Всего получим не более чем  $\frac{(k+1)(k^2-k+6)}{6} + \frac{k^2+k+2}{2} =$

$\frac{(k+2)(k^2+k+6)}{6}$  (частей), что совпадает со значением выражения  $\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}$  при  $n=k+1$ . 683. У к а з а н и е. Для любого натурального

$k$  имеем:  $\frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{2^k+2} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} > \underbrace{\frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}}}_{k \text{ слагаемых}} = \frac{1}{2}$ .

684. 0. 685. У к а з а н и е.  $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x} = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ , а эта функция не

имеет предела при  $x$ , стремящемся к нулю. 686. Надо соединить точку  $(x_0; x_0^3)$  с точкой  $\left(\frac{2x_0}{3}; 0\right)$  оси абсцисс. 687.  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $c > 0$ ,  $D > 0$ . Если ветви параболы направлены вверх, то  $a > 0$ , если вниз, то  $a < 0$ . Знак  $b$  определяется из формулы  $x_0 = -\frac{b}{2a}$ , где  $x_0$  — абсцисса вершины параболы. Знак  $c$  определяется

из равенства  $c = y(0)$ . Наконец, знак дискриминанта  $D$  зависит от числа общих точек параболы и оси абсцисс: если точек пересечения две, то  $D > 0$ , если общая точка одна (т. е. парабола касается оси), то  $D = 0$ , если общих точек нет, то  $D < 0$ . 688.  $(-1)^n \cdot n! \left( \frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right)$ . У к а з а н и е.  $\frac{1}{x^2-3x+2} =$

$\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$ . 689. а)  $f(x) = b$  или  $f(x) = x$ ; б)  $f(x) = x$  или  $f(x) = b - x$ . 690. а)  $x$  при четном  $n$ ,  $3-x$  при нечетном  $n$ , область определения —  $R$ ; б)  $x$  при четном  $n$ ,  $\frac{1}{x}$  при нечетном  $n$ , область определения (для любого  $n$ ) — множество всех отличных от нуля действительных чисел; в)  $x$  при  $n$  вида  $3k$ ,  $\frac{1}{1-x}$  при  $n$  вида  $3k+1$  и  $\frac{x-1}{x}$  при  $n$  вида  $3k+2$ ;  $D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$  при  $n=1$  и  $D(f_n) =$

$= (-\infty; 0) \cup (0; 1) \cup (1; \infty)$  при  $n \geq 2$ . 691. Да. 692. а)  $\frac{1}{ax}$ ,  $a \neq 0$ ; б)  $x$  или  $\frac{ax+b}{cx-a}$  (при  $bc \neq -a^2$ ). 696. У к а з а н и е. Докажете, что при достаточно больших  $x$  левая часть этого уравнения положительна, а при достаточно больших по модулю отрицательных  $x$  — отрицательна. 697. Уравнение прямой, проходя-

шей через точку  $(x_0; y_0)$  параболы и имеющей угловой коэффициент  $k$ , следующее:  $y = y_0 + k(x - x_0)$ , где  $y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c$ . Абсциссы общих точек этой прямой и параболы находятся из уравнения  $ax^2 + bx + c = y_0 + k(x - x_0)$ . Это уравнение квадратное и имеет один корень, если его дискриминант обращается в нуль, откуда  $k = 2ax_0 + b = y'(x_0)$ . 699.  $M_0$  — «внутренность» параболы  $y = x^2$ ,  $M_1$  — сама парабола,  $M_2$  — внешняя часть параболы,  $M_k$  при  $k \geq 3$  пусто. 701. Воспользуйтесь методом математической индукции и теоремой Лагранжа (из теоремы Лагранжа следует, что между двумя корнями многочлена имеется корень производной этого многочлена). 702. Пусть  $P(x)$  принимает  $p$  раз значение  $A$ ,  $p > n$ . Тогда многочлен  $P(x) - A$  имеет степень  $n$  и имеет более  $n$  корней, что противоречит результату предыдущей задачи. 703. а) Если  $R(x) = C$ , то  $C$  — корень многочлена степени не выше  $k$ , так как тогда  $p(x) - Cq(x) = 0$ , а  $p(x) - Cq(x)$  — многочлен степени не выше  $k$ . 704. а) Обозначим через  $f$  функцию  $f(x) = \sin x$ . Тогда по формуле производной обратной функции  $\arcsin' x = \frac{1}{f'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$ . Далее, так как  $\sin(\arcsin x) = x$  и  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ , то  $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$  (на промежутке  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  косинус неотрицателен). Итак,  $\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ; б) аналогично задаче а) получаем:  $\arccos' x = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  (так как на промежутке  $[0; \pi]$  синус неотрицателен, то  $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$ ); в) аналогично задаче а) получаем:  $\operatorname{arctg}' x = \cos^2(\operatorname{arctg} x)$ . Далее, так как  $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ , то  $\cos^2(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}$ . Окончательно получаем:  $\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2}$ . 705. а) Решение. Обозначим  $\arcsin x + \arccos x$  через  $u(x)$ . Тогда  $u'(x) = \arcsin' x + \arccos' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ . Следовательно,  $u(x) = C$ , где  $C$  — постоянная. Для того чтобы найти эту постоянную, достаточно вычислить  $u(0)$ . Имеем:  $C = u(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ . Для окончания доказательства надо проверить равенство в точках  $x = \pm 1$ . 706.  $f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ , первое слагаемое — четная функция, второе — нечетная. 707. а)  $T > 2$ ; б)  $T = 3$ ,  $T > T_0$ , где  $T_0 \approx 6\frac{1}{3}$ ; в)  $T > T_0$ , где  $T_0 \approx 4,4$ . 708. Нельзя дополнить: б) до четной; а) и б) до нечетной функции. 709. а) Да (например, функция Дирихле — значение этой функции равно 1, если  $x$  рационально, и 0, если  $x$  иррационально); б) нет, так как в этом случае  $\sqrt{2}$  и  $1 - \sqrt{2}$  должны быть периодами этой функции, а их сумма 1 — нет. 710. а) При любом  $n$ ; б) при четном  $n$ ; в) таких  $n$  нет. 711. а) Указание. Значение 1 функция принимает только в одной точке — точке 0; б) указание. Значение 2 функция принимает только в одной точке — точке 0; г) указание. «Растояние» между двумя соседними нулями функции  $x_1 = \pi^2 k^2$  и  $x_2 = \pi^2 (k+1)^2$  будет больше любого положительного  $T$  при достаточно больших  $k$ :  $x_2 - x_1 = \pi^2 (2k+1) > T$  при  $k > \frac{T - \pi^2}{2\pi^2}$ . 712. Указание. Непрерывная, периодическая, определенная на всей числовой прямой функция достигает своего наибольшего (и наименьшего) значения. 713. Решение.  $(\sin 47^\circ + \sin 61^\circ) - (\sin 11^\circ + \sin 25^\circ) = 2 \sin 54^\circ \cos 7^\circ - 2 \sin 18^\circ \cos 7^\circ = 4 \cos 7^\circ \sin 18^\circ \cos 36^\circ = \cos 7^\circ \cdot \frac{4 \sin 18^\circ \cos 18^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \cos 7^\circ \cdot \frac{2 \sin 36^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \cos 7^\circ \cdot \frac{\sin 72^\circ}{\sin 72^\circ} = \cos 7^\circ$ . 714. а)  $\frac{\sin \frac{1}{2} nx \sin \frac{1}{2} (n+1)x}{\sin 0,5x}$ . Указание. Умножьте и разделите каждое

слагаемое на  $\sin 0,5x$  и примените формулу преобразования произведения синусов в разность косинусов; б)  $\frac{\sin 2nx \cos (2n-1)x}{\sin 2x}$ . Указание. Умножьте и разделите каждое слагаемое на  $\sin 2x$ . 715. Указание. Так как  $\sin A = \sin(\pi - B - C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C$ , то из соотношения  $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$  получаем:  $a = b \cos C + c \cos B$ . Аналогично  $b = a \cos C + c \cos A$  и  $c = a \cos B + b \cos A$ . Теперь осталось умножить первое из полученных соотношений на  $a$ , второе на  $-b$ , третье на  $-c$  и сложить все три равенства. 717. Указание. Воспользуйтесь теоремой синусов. 718. Указание. Воспользуйтесь формулами  $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$ ,  $\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$  и  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ . 719. а) Указание. Замените  $\cos 60^\circ$  на  $\frac{1}{2}$ , а затем умножьте и разделите полученное выражение на  $\sin 20^\circ$  и примените три раза формулу синуса двойного аргумента. 720. а) Зафиксируем какую-нибудь точку  $x_0$ . При перемещении тела из точки с координатой  $x_0$  в точку с координатой  $x$  была совершена работа, равная  $\int_{x_0}^x f(z) dz$ , где  $f(x)$  — действующая на тело сила. С другой стороны, как известно из курса физики, эта работа равна  $u(x_0) - u(x)$ . Таким образом,  $u(x_0) - u(x) = \int_{x_0}^x f(z) dz$ , поэтому  $(u(x_0) - u(x))' = \left(\int_{x_0}^x f(z) dz\right)'$ , т. е.  $-u'(x) = f(x)$ . Далее, согласно второму закону Ньютона  $f(x) = ma(x)$ , т. е.  $mx''(t) = -u'(x)$ . 721. Решение. По формуле производной сложной функции получаем:  $E'(t) = \left(\frac{mx'^2(t)}{2}\right)' + (u(x(t)))' = mx'(t)x''(t) + u'(x)x'(t) = x'(t)(mx''(t) - f(x)) = x'(t) \cdot 0 = 0$ . 724. Указание. Рассмотрите любое решение  $x(t)$  этого уравнения. Пусть  $x(0) = x_0$ ,  $x'(0) = v_0$ . Возьмем решение  $x_1(t)$  дифференциального уравнения с этими же начальными данными, имеющее вид:  $x_1(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$  (см. задачу 723). Тогда  $x_2(t) = x(t) - x_1(t)$  также решение этого уравнения (см. задачу 722) с начальными данными  $x_2(0) = 0$ ,  $x_2'(0) = 0$ . И в силу задачи 721 полная энергия при этом движении равна 0:  $\frac{mx_2'^2(t)}{2} + \frac{m\omega^2 x_2^2(t)}{2} = 0$ , откуда, в частности, следует, что  $x_2(t) = 0$ . 727. Указание. Достаточно доказать, что сумма  $x_1(t) + x_2(t)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению  $x''(t) = -\omega^2 x(t)$ , т. е. что  $(x_1(t) + x_2(t))'' = -\omega^2 (x_1(t) + x_2(t))$ . 729. Указание. Проверьте формулу для функций  $y = 1$ ,  $y = x$ ,  $y = x^2$  и  $y = x^3$ . 730.  $\frac{g^2 M^3}{6m^2}$ , где  $g$  — ускорение свободного падения. 731.  $\frac{\pi \rho R^2 H^2 g}{12}$ . Решение. Затраченная на преодоление силы тяжести работа равна приращению потенциальной энергии песка. Объем усеченного конуса высоты  $\Delta x$ , ограниченного плоскостями, проведенными параллельно основанию на расстоянии  $x$  и  $x + \Delta x$  от него, равен (с точностью до величин порядка  $\Delta x^2$ )  $S(x) \Delta x$ , где  $S(x)$  — площадь сечения конуса плоскостью, параллельной основанию, проведенной на расстоянии  $x$  от нее. Приращение потенциальной энергии песка, заключенного в этом усеченном конусе (с точностью до величин порядка  $\Delta x^2$ ), равна  $\Delta E \approx \rho x S(x) g \Delta x$ . Для определения  $S(x)$  рассмотрим осевое сечение конуса (рис. 241). Высота треугольника  $PCT$ , проведенная к стороне  $PT$ , равна  $H - x$ . Из подобия треугольников  $PCT$  и  $ABC$  получаем:  $\frac{PT}{AB} = \frac{H - x}{H}$ , откуда  $PT = \frac{AB(H - x)}{H}$ .



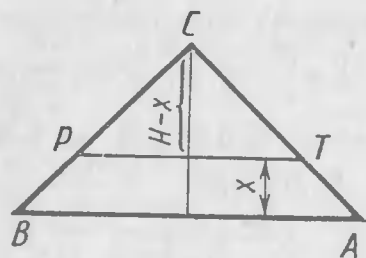


Рис. 241.

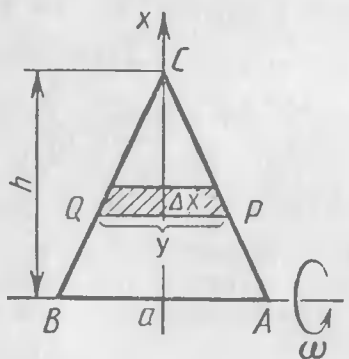


Рис. 242.

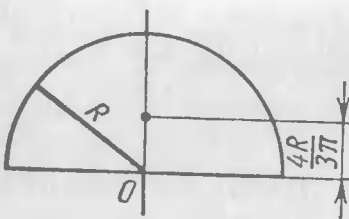


Рис. 243.

$S(x) = \pi (0,5 \text{ PT})^2 = \pi R^2 \frac{(H-x)^2}{H^2}$ . Обозначим через  $E(x)$  потенциальную энергию песка в усеченном конусе, ограниченном основанием и плоскостью (параллельной основанию), проведенной на высоте  $x$ . Тогда  $E'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{\pi R^2 x (H-x)^2}{H} g$

$$\text{и } A = E(H) - E(0) = \int_0^H E'(x) dx = \int_0^H \frac{\pi R^2}{H} g (H^2 x - 2Hx^2 + x^3) dx = \frac{\pi R^2}{H^2} g \left( \frac{H^2 x^2}{2} - \frac{2Hx^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^H = \frac{\pi R^2 H^4}{H^2} g \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi R^2 H^2 g}{12}.$$

732.

$\frac{\rho \omega^2 h^3}{24} = 495\,000 \pi^2$  (эрг). Решение. Масса части пластинки, отмеченная на рисунке 242, приближенно равна  $\rho y \Delta x$ ;  $y$  находим из подобия треугольников  $ABC$  и  $PQC$ :  $y = \frac{a(h-x)}{h}$ . Так как тол-

щиной пластинки мы пренебрегаем, то линейная скорость каждой точки этой части (с точностью до величин порядка  $\Delta x$ ) равна  $\omega x$ , а приращение  $\Delta E$  кинетической энергии за счет этой части (с точностью до величин порядка  $\Delta x^2$ ) равно  $\frac{\rho \omega^2 x^2 (h-x) \Delta x}{2h}$ . Обозначим через  $E(x)$  кинетическую энергию части  $BQPA$ . Тогда  $E'(x) =$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta E}{\Delta x} = \frac{\rho \omega^2 x^2 (h-x)}{2h}.$$

Наконец,

$$E(h) = \int_0^h E'(x) dx = \int_0^h \frac{\rho \omega^2 x^2 (h-x)}{2h} dx = \frac{\rho \omega^2}{2h} \left( \frac{x^3 h}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^h = \frac{\rho \omega^2 h^3}{24}.$$

733.

Центр масс однородного полукруга расположен на его оси симметрии на расстоянии  $\frac{4R}{3\pi}$  от центра круга (рис. 243). Решение. Пусть центр полукруга совпадает с началом координат, а ось симметрии полукруга — с осью  $Ox$ . Разобьем отрезок  $[0; R]$  оси  $Ox$  на  $n$  равных частей длины  $\Delta x$  точками  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  и проведем прямые  $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_{n-1}$ . Масса части полукруга, ограниченной прямыми  $x = x_i$  и  $x = x_{i+1}$  ( $x_0 = 0, x_n = R$ ), приблизительно равна  $2\Delta x \rho \sqrt{R^2 - x_i^2}$  ( $\rho$  — плотность полукруга). Заменим каждую такую часть материальной точкой такой же массы, расположенной на оси  $Ox$  в точке с координатой  $x_i$ . По формуле координат центра масс конечной системы материальных точек\* этот центр лежит на оси  $Ox$  в точке с координатой

$$x' = \frac{2x_0 \rho \sqrt{R^2 - x_0^2} \Delta x + 2x_1 \rho \sqrt{R^2 - x_1^2} \Delta x + \dots + 2x_{n-1} \rho \sqrt{R^2 - x_{n-1}^2} \Delta x}{2\rho \sqrt{R^2 - x_0^2} \Delta x + 2\rho \sqrt{R^2 - x_1^2} \Delta x + \dots + 2\rho \sqrt{R^2 - x_{n-1}^2} \Delta x}.$$

\* Напомним, что центр масс конечной системы  $n$  материальных точек, имеющих массы  $m_1, m_2, \dots, m_n$  и имеющих относительно оси  $Oz$  координаты  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , имеет относительно этой оси координату  $\frac{m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_n z_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$ .

Числитель этой дроби есть интегральная сумма для функции  $2x\rho\sqrt{R^2 - x^2}$ , знаменатель — интегральная сумма для функции  $2\rho\sqrt{R^2 - x^2}$ . Далее,  $2\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 0,5\pi R^2$  как площадь полукруга радиуса  $R$ .

Для вычисления  $\int_0^R 2x\sqrt{R^2 - x^2} dx$  сначала отметим, что  $((R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}})' = \frac{3}{2} \cdot (-2)x\sqrt{R^2 - x^2}$ , поэтому в качестве первообразной для функции  $2x\sqrt{R^2 - x^2}$  можно взять функцию  $F(x) = -\frac{2}{3}(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$ . Следовательно,  $\int_0^R 2x\sqrt{R^2 - x^2} dx = F(R) - F(0) = 0 - \left(-\frac{2}{3}R^3\right) = \frac{2}{3}R^3$ . Таким образом, переходя к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ , получаем:

$$X = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} x' = \frac{\frac{2}{3}R^3}{\frac{1}{2}\pi R^2} = \frac{4R}{3\pi}.$$

734. Центр масс однородного полушара радиуса  $R$  лежит на его оси симметрии на расстоянии  $\frac{3}{8}R$  от центра шара (рис. 244). Решение. Выберем систему координат так, что начало координат находится в центре шара, а ограничивающая полушар плоскость совпадает с плоскостью  $Oxy$  (рис. 245). Из теоремы Пифагора следует, что радиус круга, являющегося сечением полушара плоскостью  $z = t$ , равен  $\sqrt{R^2 - t^2}$ . Разобьем полушар на диски ширины  $\Delta t$ . Центр диска, ограниченного плоскостями  $z = t$  и  $z = t + \Delta t$ , лежит на оси  $Oz$  в точке с координатой, равной  $t$  (с точностью до величин порядка  $\Delta t$ ), так как этот диск имеет  $Oz$  осью симметрии. Масса  $\Delta m$  такого диска равна  $\rho V$  ( $\rho$  — плотность полушара,  $V$  — объем диска), т. е.  $\Delta m \approx \rho \pi (R^2 - t^2) \Delta t$ . При нахождении центра масс можно считать каждый диск материальной точкой массы, равной массе диска и расположенной в центре масс этого диска. По формуле координат центра масс конечной системы материальных точек получаем, что центр масс полушара лежит на оси  $Oz$  в точке, координата  $z$  которой приблизительно равна

$$z(\Delta t) = \frac{t_0 \rho \pi (R^2 - t_0^2) \Delta t + t_1 \rho \pi (R^2 - t_1^2) \Delta t + \dots + t_{n-1} \rho \pi (R^2 - t_{n-1}^2) \Delta t}{\rho \pi (R^2 - t_0^2) \Delta t + \rho \pi (R^2 - t_1^2) \Delta t + \dots + \rho \pi (R^2 - t_{n-1}^2) \Delta t},$$

где  $t_k = k\Delta t$ . Числитель полученной дроби представляет собой интегральную сумму для функции  $\rho \pi t (R^2 - t^2)$ , знаменатель — интегральную сумму для функции  $\rho \pi (R^2 - t^2)$ . Чем меньше  $\Delta t$ , тем точнее эта дробь выражает координату центра масс полушара, иными словами, эта координата есть  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} z(\Delta t)$ . При

$\Delta t \rightarrow 0$  числитель стремится к  $\int_0^R \rho \pi t (R^2 - t^2) dt$ , знаменатель — к  $\int_0^R \rho \pi (R^2 - t^2) dt$ .

$$z = \frac{\int_0^R \rho \pi t (R^2 - t^2) dt}{\int_0^R \rho \pi (R^2 - t^2) dt} = \frac{\rho \pi \left( \frac{R^2 t^2}{2} - \frac{t^4}{4} \right) \Big|_0^R}{\rho \pi \left( R^2 t - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^R} = \frac{\frac{1}{2}R^4 - \frac{1}{4}R^4}{R^3 - \frac{1}{3}R^3} = \frac{3}{8}R.$$

736. а) — 135,6.

Решение. Сделаем замену  $t = 1 + \frac{x}{4}$ . Тогда  $x = 4t - 4$ ,  $5 - x = 9 - 4t$ . По формуле замены найдем нижний и верхний пределы интегрирования:

$$1 + \frac{1}{4} \cdot 0 = 1 \text{ и } 1 + \frac{1}{4} \cdot 28 = 8.$$

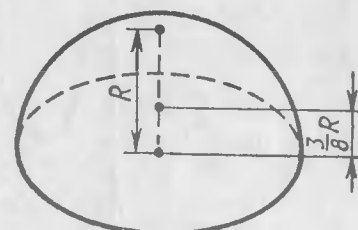


Рис. 244.

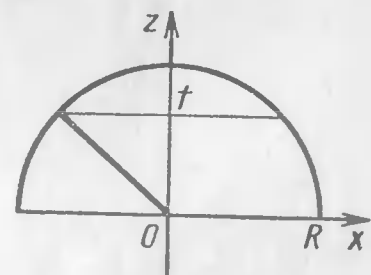
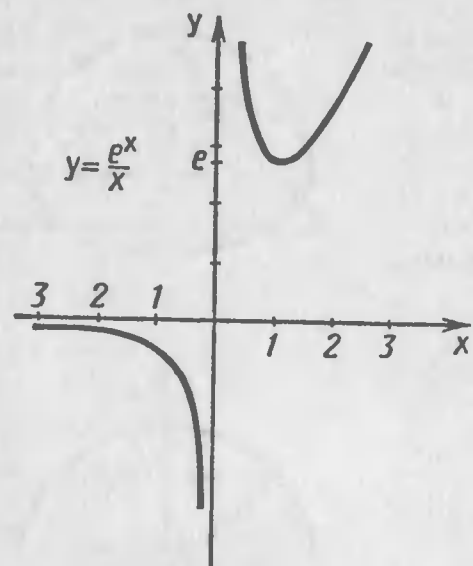
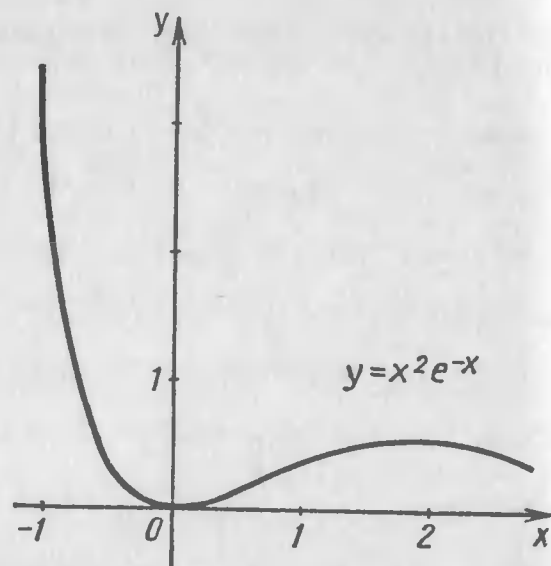


Рис. 245.

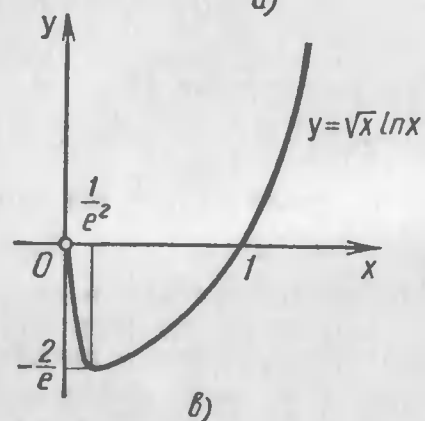




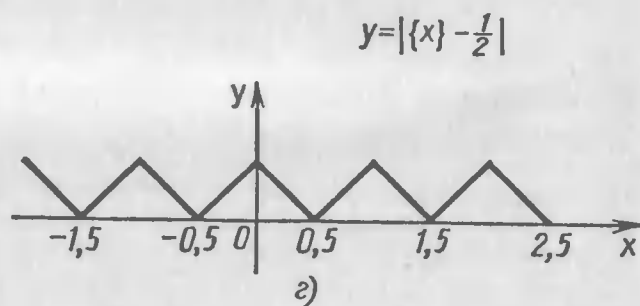
а)



б)



в)



г)

Рис. 246.

Таким образом, искомый интеграл равен

$$\frac{1}{0,25} \int_1^8 \left( \frac{9}{\sqrt[3]{t}} - 4\sqrt[3]{t^2} \right) dt = 4 \left( \frac{27}{2} \sqrt[3]{t^2} - \frac{12}{5} \sqrt[3]{t^5} \right) \Big|_1^8 = 4 \left( \frac{27}{2} (4-1) - \frac{12}{5} (32-1) \right) = 4(40,5 - 74,4) = -135,6;$$

б)  $-1\frac{2}{7}$ . Указание. Сделайте замену переменной по формуле  $y = 1 - \frac{x}{2}$ .

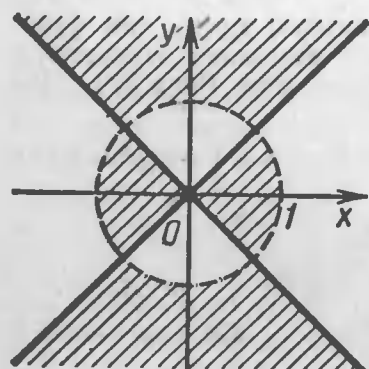


Рис. 247.

737.  $x^x(1 + \ln x)$ . Указание.  $x^x = e^{x \ln x}$ . 738. Графики функций изображены на рисунке 246, а—г. 739. а)  $[-0,25; 2]$ ; б)  $[-7; 3]$ ; в)  $(0; \infty)$ ;

г)  $[e^{-1/e}; \infty)$ . Указание. Так как  $(x^x)' = x^x(1 + \ln x)$  (см. задачу 737), то критическая точка одна:  $x = \frac{1}{e}$ . В этой точке функция имеет минимум.

740. Множества изображены на рисунках 247 (для п. а)), 248 (для п. д)) и 249 (для п. е)).

741. а)  $\frac{2}{\pi}$ ; б)  $\ln 2$ . Указание: Вынесите  $\frac{1}{n}$  за скобку; в)  $\frac{1}{p+1}$ . 742. а) 3; б) при  $-6\sqrt{3} < a < 6\sqrt{3}$  — три корня, при  $a = \pm 6\sqrt{3}$  —

два корня, при остальных  $a$  — один корень. 743. Указание. Возведением в куб докажите,

что  $x = \sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}}$  есть корень уравнения  $x^3 - 5x - 12 = 0$ , а это уравнение имеет только один действительный корень.

744. При  $0 < a < 1$  и  $1 < a < e^{\frac{1}{e}}$ . 745. а) При  $\begin{cases} a < 2, \\ b < 2 \end{cases}$  и  $\begin{cases} a > 2, \\ b > 2; \end{cases}$  б)  $C \in (-\infty; 0) \cup (3; \infty)$ ; в) при  $\begin{cases} a < -C, \\ b < -C \end{cases}$  и  $\begin{cases} a > -C, \\ b > -C. \end{cases}$

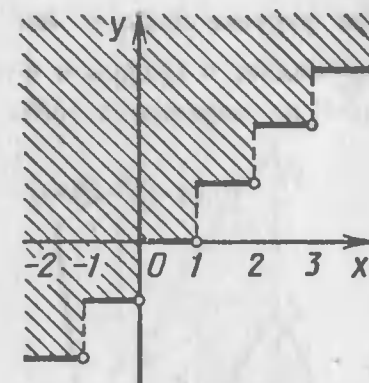


Рис. 248.

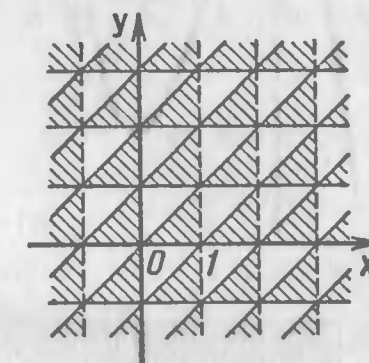


Рис. 249.

### Задачи на повторение всего курса

746. а)  $x+1$ ; б)  $-4, t \neq 0, t > -4$ ; в)  $-a^{0,5} - 2a^{-1,5}$  при  $a \neq 1$ ; г)  $\frac{1-a}{\sqrt{a}}$  при  $a \neq 1$ . 748. 25%. 749. 75 км/ч.

750. 4 км/ч. 751. 55 км/ч. 752. 6 и 12 дней. 753. 140 м. 754. 160 г, 20%. 755. 5 ч, 7 ч. 756. 4 м/с, 3 м/с. 757. 240 м<sup>3</sup>. 758. 35. 759. 12 г, 48 г, 1,5 г/см<sup>3</sup>. 760. а) 3; 8; 3; б) все; в) 7; 4. 761. 3,75. 762. а) 1,01; б) 8,072; в) 81,108. 764. 2,53. 766. 1.

767. а)  $\frac{4}{\lg \frac{1}{2}}$ ; б) равны. 769. а) 3,5, г) 1,4.

770. б)  $|x+1| < 3,5$ . 771. а) 5; г)  $\sqrt{2}$ . 772. б)  $x^2 + y^2 \leq 25$ ; г)  $(x-2)^2 + (y-3)^2 > 1$ . 773. б)  $(-5; 5)$ ; г) 6; 14. 774. б)  $(-\infty; 6) \cup (14; \infty)$ . 775.  $[-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$ . 777. б) Множество изображено на рис. 250. 778. г) Множество изображено на рис. 251. 779. г) Круг радиуса 3 с центром в точке (1; 1).

780. а при  $|a| > 1$ . 781. а)  $-2\frac{1}{4}$ ; б)  $\frac{\sin x}{2 - \sin x}$ ; в)  $\frac{2\sqrt{ab}}{a - 2\sqrt{ab} + b}$ ; г)  $\frac{\lg x}{1 - \lg x}$ . 782. а)  $1\frac{5}{22}$ ; б)  $2\frac{41}{99}$ ;

в)  $\frac{3}{7}$ ; г)  $\frac{17}{54}$ . 784. а) I или III; б) II. 785.  $-1$ .

786.  $\pm \frac{2\sqrt{m}}{1+m}$ . 787.  $\frac{1}{\sqrt{10}}$ . 788.  $\frac{\sqrt{17}-1}{4}$ . 789.  $\pm 2$ .

790.  $-2\sqrt{2}$ . 791. 0,719. 792.  $\frac{a}{|b|}$ . 796. а)  $(-\infty; 7 - \sqrt{34}) \cup (7 + \sqrt{34}; \infty)$ ; б)  $(-\infty; \infty)$ ; в)  $[-\frac{1}{3}; 2]$ ;

г)  $(\frac{9 - \sqrt{105}}{4}; \frac{9 + \sqrt{105}}{4})$ . 797. а)  $R$ ; б)  $(-\infty; -0,4) \cup (2; \infty)$ ; в)  $R$ ; г)  $(-\frac{2}{3}; 3)$ .

798.  $x^2 - 2x - 2 = 0$ . 799.  $-20$ . 800. (3; 0). 801. а)  $(-1; 17)$ ; б) (2; -3). 802.  $y = 2 - 0,5x^2$ . 803.  $y = 0,5(x+2)^2 + 3$ . 805. Графики изображены

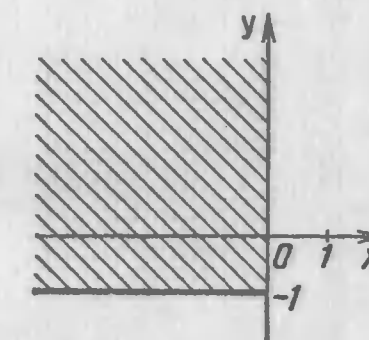


Рис. 250.

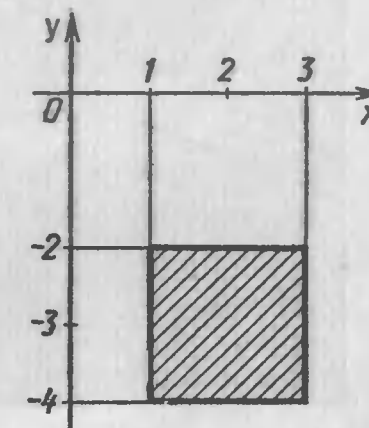
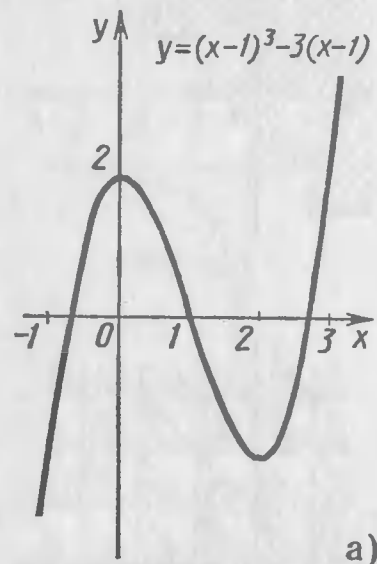


Рис. 251.

на рисунке 252 а, б. 806. б) График изображен на рисунке 253; г) график совпадает с графиком функции  $y=2$  при  $x \neq \frac{\pi k}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , при  $x = \frac{\pi k}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , функция не определена. 807. Графики изображены на рисунке 254 (в пп. в) и г) графики совпадают). 808. а) 1; б)  $\frac{8\pi}{3}$ ; в) 0,5.



809. а) Ни четная, ни нечетная; б) нечетная; в) четная; г) ни четная, ни нечетная. 810. а) б) Ни четная, ни нечетная; в), г) нечетная. 811. а)  $\sqrt{2}$ ; б)  $-\sqrt{2}$ . 813. а)  $12x^5 - 19x^4 + 1$ ; б)  $-\frac{5}{(x+1)^2}$ ; в)  $(x+1)\cos x + \sin x - \cos^2 x + \sin 2x$ ; г)  $\frac{2 \lg x \cdot \lg e}{x} + \frac{2 \lg x}{\cos^2 x}$ ; д)  $\frac{60x(3-x^2)}{(8x^2-3)^3}$ . 814. 60 м/мин; 36 м/мин<sup>2</sup>. 816.  $y = -2x - 4$ ;  $y = 2x$ ;  $y = 5x - 2,25$ . 817. а)  $y = 1,5x + 1,5$ ; в) растает на всей числовой прямой; б)  $y = 1 + \frac{1}{x}$ ; убывает на промежутках  $(-\infty; 0)$  и  $(0; \infty)$ ; в)  $y = \frac{3x-1}{x+2}$ ; г)  $y = \log_2(x-1)$ ; д)  $y = 3^x - 2$ .

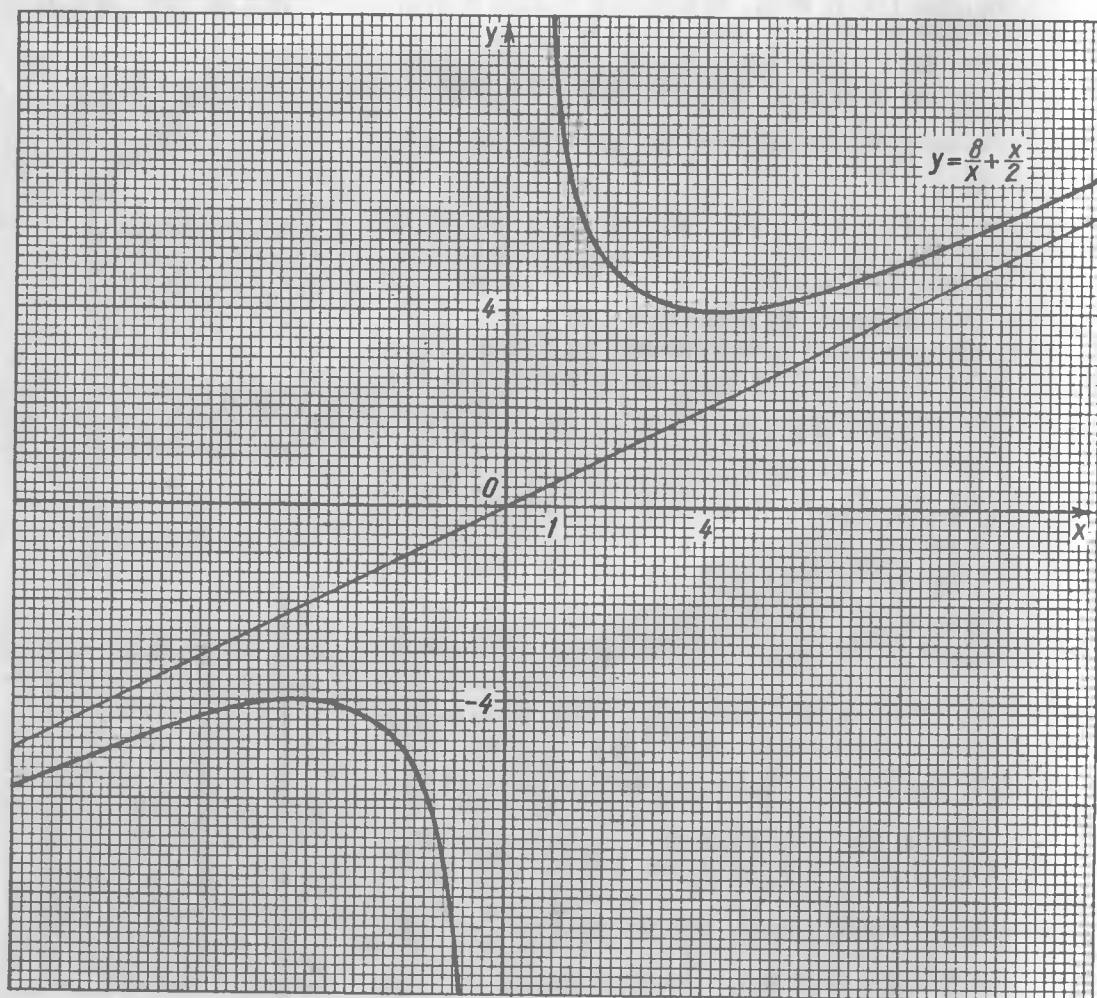


Рис. 252.

б)

е)  $y = \frac{10^x - 1}{10^x + 1}$ . 818. а) Функция возрастает на промежутках  $(-\infty; \frac{1}{3})$  и  $(\frac{1}{3}; \infty)$ ; б) функция постоянна в области определения, т. е.  $y = -0,5$  при  $x \neq 0,5$ ; в) функция убывает на промежутке  $(-\infty; -1]$ ; возрастает на промежутке  $[-1; \infty)$ . В точке  $-1$  функция имеет минимум; г) функция убывает на промежутке  $(-\infty; 2]$ ; возрастает на промежутке  $[2; \infty)$ . В точке 2 функция имеет минимум. 819. а) Функция возрастает на промежутке  $(0; e]$ , убывает на промежутке  $[e; \infty)$ . В точке  $e$  функция имеет максимум (рис. 255); б) функция убывает на промежутке  $(0; 1]$ ; возрастает на промежутке  $[1; \infty)$ . В точке 1 функция имеет минимум; б) функция убывает на промежутках  $(-\infty; -1)$  и  $(-1; 0]$ ; возрастает на промежутке  $[0; \infty)$ . В точке 0 функция имеет минимум. При  $x = -1$  функция не определена; при  $x \rightarrow -1$  неограниченно растет  $|y|$ ; г) функция возрастает на промежутках  $[x_0 - \pi + 2\pi k; x_0 + 2\pi k]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; убывает на промежутках  $[x_0 + 2\pi k; x_0 + \pi + 2\pi k]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; в точках вида  $x_0 + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , функция имеет максимумы; в точках вида  $x_0 + \pi + 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , функция имеет минимумы;  $x_0 = \arctg \frac{2}{3} \approx 0,59$ . 820. а) Функция убывает на промежутке  $(0; \frac{1}{e}]$ ; возрастает на промежутке  $[\frac{1}{e}; \infty)$ . В точке  $\frac{1}{e}$  функция имеет минимум; б) в точках  $\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , функция имеет максимумы; в точках  $2\pi k \pm \frac{\pi}{3}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , функция имеет минимумы.

821. а)  $y(3) = 135$ ; б)  $-4\frac{7}{8}$  (при  $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ ). 822. 1. 823. 3 см, 6 см, 4 см. 824. На расстоянии  $1,5R$  от точки касания. 825.  $\frac{\pi}{3}$ . Р е ш е н и е. Пусть основание треугольника имеет длину  $2b$ , а угол при основании  $2\alpha$ . Тогда (рис. 256)  $r = OH = HC \cdot \tg \alpha = b \tg \alpha$ . Выразим  $b$  через заданную площадь  $S$  треугольника:  $S = 0,5 AC \cdot BH = b \cdot b \tg 2\alpha$ , откуда  $b^2 = \frac{S}{\tg^2 \alpha}$ . Будем искать наибольшее значение

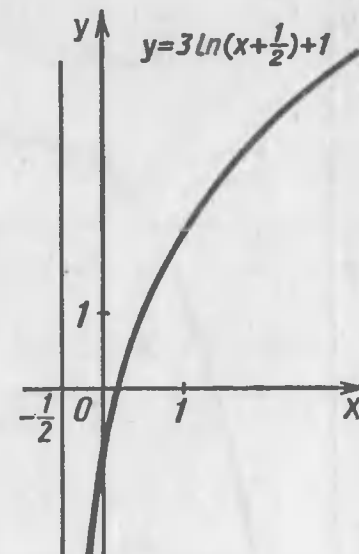


Рис. 253.

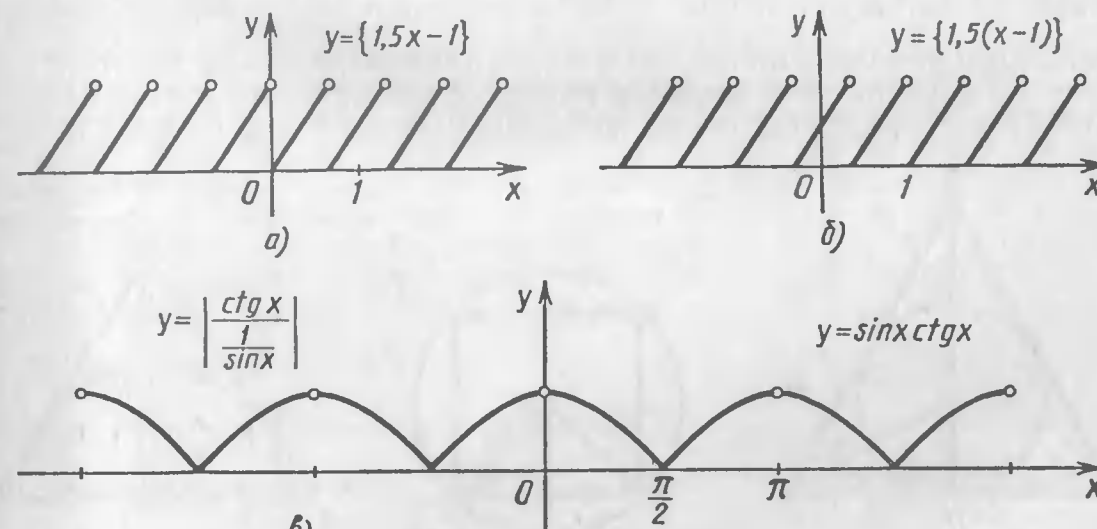


Рис. 254.

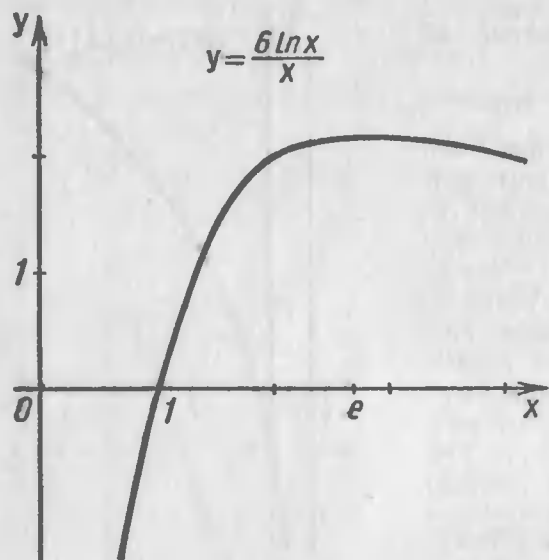


Рис. 255.

квадрата радиуса  $r^2 = b^2 \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{S \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{S(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha} = \frac{S}{2} (\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha)$ . Обозначим  $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha$  через  $u(\alpha)$ . Нужно найти наибольшее значение функции  $u(\alpha)$  на отрезке  $[0; \frac{\pi}{4}]$ ;  $u'(\alpha) = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - \frac{3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$ ;  $u'(\alpha) = 0$  при  $\operatorname{tg} \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ , т. е. при  $\alpha = \pi k \pm \frac{\pi}{6}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Из точек такого вида только одна  $x = \frac{\pi}{6}$  лежит на данном отрезке. Далее,  $u(0) = u(\frac{\pi}{4}) = 0$ ,  $u(\frac{\pi}{6}) = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ . Таким образом, наибольшее значение  $u(\alpha)$  на отрезке  $[0; \frac{\pi}{4}]$  достигается при  $\alpha = \frac{\pi}{6}$ .

Угол при вершине равен  $\pi - 4\alpha = \frac{\pi}{3}$ . 826.  $\sqrt[3]{4V}$ . 827.  $\frac{20}{\sqrt{3}}$  см. 828.  $\frac{2R}{\sqrt{3}}$ . Решение. Рассмотрим осевое сечение цилиндра, вписанного в шар радиуса  $R$  (рис. 257). По теореме Пифагора из треугольника  $AOB$  находим:  $AB^2 = AO^2 - BO^2$ , т. е.  $r^2 = R^2 - \frac{h^2}{4}$ , где  $r$  — радиус основания цилиндра,  $h$  — его высота;  $V = \pi r^2 h = \pi (R^2 h - \frac{h^3}{4})$ . Требуется определить наибольшее значение функции  $V(h) = \pi (R^2 h - \frac{h^3}{4})$  на отрезке  $[0; 2R]$ .  $V'(h) = \pi (R^2 - \frac{3}{4} h^2)$ .  $V' = 0$  при  $3h^2 = 4R^2$ , т. е. при  $h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$ . Так как  $V(0) = V(2R) = 0$ , а  $V(\frac{2R}{\sqrt{3}}) > 0$ ,

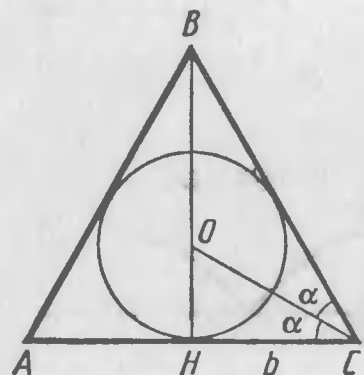


Рис. 256.

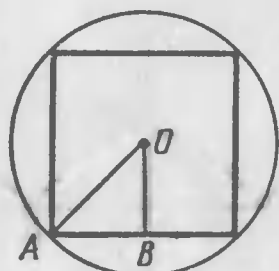


Рис. 257.

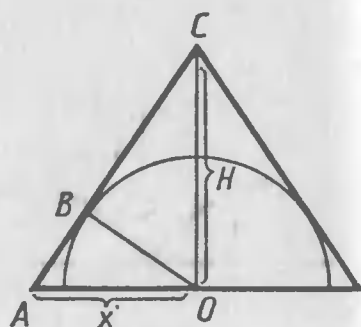


Рис. 258.

ОБС получаем:  $\frac{x}{\sqrt{H^2 + x^2}} = \frac{R}{H}$ , откуда  $x^2 = \frac{H^2 R^2}{H^2 - R^2}$ ;  $V(H) = \frac{1}{3} \pi x^2 H =$

$= \frac{1}{3} \pi R^2 \frac{H^3}{H^2 - R^2}$ ;  $V'(H) = \frac{\frac{1}{3} \pi R^2 ((H^2 - R^2) 3H^2 - H^3 \cdot 2H)}{(H^2 - R^2)^2} = \frac{\pi R^2 (H^4 - 3H^2 R^2)}{3(H^2 - R^2)^2}$ ;  $V'(H) = 0$  при  $H = R\sqrt{3}$ . Остается проверить, что при этом значении  $H$  функция  $V(H)$  достигает наименьшего значения на промежутке  $(0; \infty)$ . 833.  $b = \frac{40}{\sqrt{3}}$  см,  $h = 40\sqrt{\frac{2}{3}}$  см. 834.  $R = \frac{P}{\pi + 4}$ ;  $H = \frac{P}{\pi + 4}$ . 835.  $\frac{23}{410}$  ч. 836. 2,4 м. Решение. Пусть наблюдатель находится на расстоянии  $x$  от стены в точке  $O$  (рис. 259). Требуется узнать, при каком  $x$  будет наибольший  $\angle EOB$ ;  $\angle EOB = \angle EOA - \angle BOA$ , поэтому

$$\operatorname{tg} \angle EOB = \operatorname{tg} (\angle EOA - \angle BOA) = \frac{\frac{3,2}{x} - \frac{1,8}{x}}{1 + \frac{3,2}{x} \cdot \frac{1,8}{x}} = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}.$$

Обозначим  $\frac{1,4x}{x^2 + 5,76}$  через  $f(x)$ . Так как  $0 \leq \angle EOB < \frac{\pi}{2}$  и на промежутке  $[0; \frac{\pi}{2})$  тангенс возрастает, то достаточно найти  $x$ , при котором  $f(x)$  принимает наибольшее значение на промежутке  $[0; \infty)$ .

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 5,76) - x \cdot 2x}{(x^2 + 5,76)^2} \cdot 1,4 = -\frac{1,4(5,76 - x^2)}{(x^2 + 5,76)^2}; f'(x) = 0$$

при  $x = 2,4$ . На промежутке  $(2,4; \infty)$   $f' < 0$ , поэтому при  $x \in (2,4; \infty)$   $f(x) < f(2,4)$ . Аналогично  $f(x) < f(2,4)$  для  $x \in [0; 2,4]$ . Итак, при  $x = 2,4$  функция  $f$  достигает наибольшего значения на промежутке  $[0; \infty)$ . 837.  $4\sqrt{2}$  м. 838.  $1\frac{27}{43}$  ч. 839. Длина страницы 30 см, ширина 20 см. Решение. Пусть длина страницы равна  $x$ . Тогда текст представляет собой прямоугольник со сторонами  $x - 6$  и  $\frac{384}{x - 6}$ . Ширина страницы равна  $\frac{384}{x - 6} + 4$ , площадь равна  $\frac{384x}{x - 6} + 4x$ . Требуется определить наименьшее значение функции  $f(x) = \frac{384x}{x - 6} + 4x$  на промежутке  $(6; \infty)$ ;

$f'(x) = 384 \cdot \frac{x - 6 - x}{(x - 6)^2} + 4 = -\frac{384 \cdot 6}{(x - 6)^2} + 4$ ;  $f'(x) = 0$  при  $4(x - 6)^2 = 384 \cdot 6$ , т. е. при  $x = 30$ . При этом ширина страницы равна  $\frac{384}{30 - 6} + 4 = 20$ . 840. 20 км/ч. Решение. Вторая часть расходов равна  $kx^3$ , где через  $x$  обозначена скорость парохода,  $k$  — коэффициент пропорциональности. Для определения  $k$  подставим  $x = 10$ , тогда  $30 = 1000k$ , откуда  $k = 0,03$ . Пароход пройдет 1 км пути за  $\frac{1}{x}$  ч. За это время расходы будут равны  $480 \cdot \frac{1}{x} + 0,03x^3 \cdot \frac{1}{x}$ . Требуется определить наименьшее значение функции  $f(x) = \frac{480}{x} + 0,03x^2$  на промежутке  $(0; \infty)$ ;  $f'(x) = -\frac{480}{x^2} + 0,06x$ ;  $f'(x) = 0$

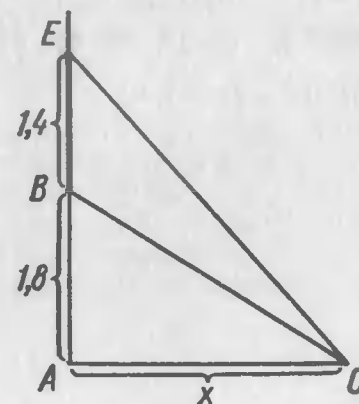


Рис. 259.



при  $x^3 = \frac{480}{0,06}$ , т. е. при  $x=20$ . Легко проверить, что в этой точке достигается наименьшее значение функции. 841. а)  $(1; 2) \cup (3; \infty)$ ; б)  $(-\infty; 2) \cup (3; 5)$ ; в)  $(-\infty; -3] \cup [1; \infty)$ ; г)  $(-4; -1) \cup (-1; 6)$ ; д)  $(1; 2) \cup (3; 4)$ ; е)  $[-\sqrt{2}; -1] \cup [1; \sqrt{2}]$ . 842. а)  $\frac{x^2}{2} + \ln |x| + C$  на любом промежутке, не содержащем 0; б)  $\frac{2}{3} \sqrt{2} x^{\frac{3}{2}} + C$ ; в)  $\frac{1}{3} \sin 3x - 2 \cos x + C$ ; г)  $-\frac{1}{4} x^{-4} - x^{-1} + C$ . 843. а)  $3 \ln |x+4| + C$  на любом промежутке, не содержащем точку  $-4$ ; б)  $-\frac{1}{3} \operatorname{ctg} 2x + C$ ; в)  $\frac{3}{2} \operatorname{tg} 2x + C$ ; г)  $x^2 + x^3 + C$ . 844. а)  $\frac{(x-1)^3}{3} + C$  при  $x \neq 1$ ; б)  $\frac{1}{4+\sqrt{2}} x^{4+\sqrt{2}} + C$ . 845.  $x^3 - 3x + 4$ . 846.  $-\frac{1}{4} \cos 2t + 3$ . 847.  $y = x^3 - 5$ . 848. а)  $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ; б)  $\frac{7-2\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{12}$ . 849. а)  $5\frac{1}{3}$ ; б)  $20\frac{5}{6}$ ; в) 18; г)  $1\frac{1}{3}$ ; д)  $12 - 5 \ln 5 \approx 3,953$ . 851. а) 15; б)  $\frac{2}{3}$ . 852. а)  $\frac{\pi k}{5}$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $2\pi k$ ;  $\frac{\pi}{2} + \pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ; в)  $\frac{2\pi k}{5}$ ;  $\pi + 2\pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ; г)  $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ ;  $(-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ . 853. а)  $\frac{\pi + \alpha}{3} + \frac{2\pi k}{3}$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha = \arccos \frac{4}{5} \approx 0,64$ ; б)  $\frac{\pi - \alpha}{2} + \pi k$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{5}{12} \approx 0,395$ ; в)  $\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2} + \pi k$ ;  $\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2} + \pi k$ ;  $\frac{7\pi}{24} + \pi k$ ;  $\pi k - \frac{\pi}{24}$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ; г)  $\frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi k}{3}$ ;  $\frac{2\pi k}{3} - \frac{\alpha}{3}$ ;  $\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$ ;  $\frac{2\pi k}{3} - \frac{2\pi}{9}$ , где  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\alpha = \arccos \left(-\frac{1}{14}\right) \approx 1,64$ . 854. а) 3; б)  $2\frac{2}{3}$ ; 4; г)  $-1$ ; 1;  $-2$ ; 2. 855. а)  $(-\infty; \frac{1}{6}] \cup [1,5; \infty)$ ; б)  $(2; 3)$ ; в)  $(-\infty; -3) \cup (-1; 1) \cup (3; \infty)$ ; г)  $(-\infty; -1,5] \cup [-1; 1] \cup [1,5; \infty)$ . 856. а)  $(-3,5; -3)$ ; б)  $(0; \frac{1}{2})$ ; в)  $(-\infty; -2) \cup (4; \infty)$ ; г)  $(-\infty; 3,4) \cup (4; \infty)$ . 857. а)  $(2; \frac{1}{3})$ ; б)  $(1; -1)$ ; в)  $(-1; -3)$ . 858. а)  $(3y+4; y)$ , где  $y \in \mathbb{R}$ ; б)  $(2,5-3y; y)$ , где  $y \in \mathbb{R}$ ; в)  $(1,5y+2; y)$ , где  $y \in \mathbb{R}$ . 859. а), б), в)  $\emptyset$ . 860. а) 3; б)  $-\frac{2}{3}$ ; в) 16. 861. а)  $-3\frac{1}{3}$ ; б) таких значений нет; в)  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 4$ . 862. Да, при: а)  $a \neq -0,2$ ; б)  $a=2,5$ ; в)  $a \in \mathbb{R}$ . 863. а)  $(-3; 2; -1)$ ; б)  $(2; 3; 1)$ ; в), г)  $\emptyset$ . 864. а)  $(0,4; 0,8)$ ; б)  $(2; 3)$ ;  $(3; 2)$ . 865. а)  $(0,4; 0,5)$ ;  $(0,6; 0,3)$ ; б)  $(2; 1)$ ;  $(-1; -2)$ ; в)  $(4; -3)$ ;  $(4; 3)$ ; г)  $(2; 3)$ ;  $(3; 2)$ . 866. а)  $(4; 1)$ ;  $(1; 4)$ ; б)  $(0,5; 4)$ ; в)  $(1; 2)$ ; г)  $(\frac{1}{2}; \frac{1}{3})$ ;  $(\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$ . 867. а)  $(2; -1)$ ;  $(-1; 2)$ ; б)  $(1; 2)$ ;  $(2; 1)$ ; в)  $(1; \sqrt{2})$ ;  $(1; -\sqrt{2})$ ;  $(2; 1)$ ;  $(2; -1)$ ; г)  $(7; 3)$ ;  $(-7; -3)$ . 868. а)  $(-3,5; 0)$ ; б)  $(1; 4\frac{8}{9})$ ; в)  $[-3; \frac{4}{3})$ ; г)  $\emptyset$ . 869. а)  $(1; 0; 2; -1)$ ; б)  $(1; -2; -1; 2)$ .

## ОБОЗНАЧЕНИЯ, ВСТРЕЧАЮЩИЕСЯ В УЧЕБНОМ ПОСОБИИ

$N$	— множество всех натуральных чисел	$f(x)$	— значение функции $f$ в точке $x$
$Z$	— множество всех целых чисел	$D(f)$	— область определения функции $f$
$Z_0$	— множество всех неотрицательных целых чисел	$E(f)$	— область значений функции $f$
$Q$	— множество всех рациональных чисел	$\Delta x$	— приращение аргумента $x$
$R$	— множество всех действительных чисел, числовая прямая	$\Delta f(x_0), \Delta f$	— приращение функции $f$ в точке $x_0$
$R_+$	— множество всех положительных действительных чисел	$f'(x_0)$	— производная функции $f$ в точке $x_0$
$R^2$	— числовая плоскость	$\sin$	— функция синус
$[a; b]$	— замкнутый промежуток (отрезок) с концами $a$ и $b$ , $a < b$	$\cos$	— функция косинус
$(a; b)$	— открытый промежуток (интервал) с концами $a$ и $b$ , $a < b$	$\operatorname{tg}$	— функция тангенс
$(a; b), [a; b)$	— полуоткрытые промежутки с концами $a$ и $b$ , $a < b$	$\operatorname{ctg}$	— функция котангенс
$(a; \infty), [a; \infty), (-\infty; b), (-\infty; b]$	— бесконечные промежутки	$e$	— число $e$ , основание показательной функции, для которой $(e^x)' = e^x$
$(-\infty; \infty)$	— бесконечный промежуток, числовая прямая	$\log_a$	— логарифм с основанием $a$
$\vec{a}$	— обозначение вектора	$\lg$	— десятичный логарифм
$(a-\delta; a+\delta)$	— $\delta$ -окрестность точки $a$	$\ln$	— натуральный логарифм (логарифм с основанием $e$ )
$[x]$	— целая часть числа $x$	$\max f$	— наибольшее значение функции $f$ на отрезке $[a; b]$
$\{x\}$	— дробная часть числа $x$	$\min f$	— наименьшее значение функции $f$ на отрезке $[a; b]$
$ x $	— модуль (абсолютная величина) числа $x$	$\int_a^b f(x) dx$	— интеграл функции $f$ в пределах от $a$ до $b$
		$\arcsin a$	— арксинус числа $a$
		$\arccos a$	— арккосинус числа $a$
		$\operatorname{arctg} a$	— арктангенс числа $a$
		$\operatorname{arccctg} a$	— арккотангенс числа $a$



## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

**Абсолютная погрешность** 74  
**аргумент функции** 20  
**арифметическая прогрессия** 245  
 — —, разность 245  
 — —, сумма  $n$  первых членов 246  
 — —, формула  $n$ -го члена 246  
**арккосинус** 46  
**арккотангенс** 46  
**арксинус** 45  
**арктангенс** 46

**Бесконечные интервалы** 241  
 — промежутки 241

**Внутренняя точка** 241  
**выражение с переменными** 261

**Гармонические колебания** 127  
 — —, амплитуда 127  
 — —, начальная фаза 127  
 — —, угловая частота 127  
**геометрическая прогрессия** 246  
 — — бесконечная, сумма 247  
 — —, знаменатель 246  
 — —, сумма  $n$  первых членов 247  
 — —, формула  $n$ -го члена 247  
**геометрический смысл производной** 101  
**гипербола** 252  
**график квадратичной функции** 259  
 — косинуса 7  
 — котангенса 8  
 — линейной функции 254  
 — логарифмической — 191  
 — показательной — 179  
 — синуса 6  
 — тангенса 7  
 — уравнения 266  
 — функции 20  
**графическое задание функции** 21

**Дискриминант квадратного трехчлена** 256  
**дифференциальное уравнение гармонических колебаний** 127  
 — — показательного роста и показательного убывания 213  
**дифференцирование функции** 85  
**длина дуги** 3  
 — промежутка 241  
**допустимые значения переменных** 261  
**достаточный признак возрастания функции** 112  
 — — убывания функции 112  
**дробь** 262  
 — десятичная 236  
 — — периодическая 236  
 —, основное свойство 263

**Единичная окружность** 4

**Законы арифметических действий** 238  
**знаки значений тригонометрических функций** 12

**Интеграл** 148  
**интегрирование** 137  
**интервал** 240

**Касательная к графику функции** 100  
**квадратный трехчлен** 256  
**концы промежутка** 241  
**корень квадратного трехчлена** 257  
 —  $n$ -й степени из числа 162  
 — — — — арифметический 162  
 — уравнения 263  
 — — посторонний 169  
**косинус** 4  
**котангенс** 4  
**коэффициент прямой пропорциональной зависимости** 250

— обратной — — 252  
**криволинейная трапеция** 145  
**критическая точка функции** 114

**Линия тангенсов** 5  
**логарифм натуральный** 204

**Мгновенная скорость** 107  
**метод интервалов** 99  
**механический смысл производной** 107  
**многочлен** 262

**Независимая переменная** 20  
**необходимый признак экстремума** 115  
**неравенства квадратичные** 260  
 — логарифмические 197  
 — показательные 182  
 — тригонометрические 54  
 — числовые 238

**Область значений функции** 18  
 —определения функции 18  
**обратная пропорциональность** 252  
**общий вид первообразных** 140  
**объединение множеств** 19  
**одночлен** 262  
**окрестность точки** 241  
**основное логарифмическое тождество** 190  
 — свойство первообразной 139  
**основные свойства логарифмов** 193  
 — — степеней с действительным показателем 181  
**относительная погрешность** 242  
**отрезок** 240

**Парабола** 259  
**первообразная** 137  
**период косинуса** 33  
 — котангенса 34  
 — синуса 33  
 — тангенса 34  
**площадь сектора** 3  
**правила вычисления производных** 88  
 — нахождения первообразных 142  
 — преобразования систем неравенств в равносильные 264  
 — — — уравнений — — 264  
**предел функции** 76  
**пределы интегрирования** 149  
**преобразование графиков функций** 270

**приближенное значение числа** 74  
**признак максимума функции** 116  
**признак минимума функции** 117  
**принцип математической индукции** 227  
**приращение аргумента** 79  
**приращение функции** 79  
**производная** 85  
 — вторая 126  
 — логарифмической функции 206  
 — показательной функции 202  
 — постоянной 86  
 — произведения 89  
 — произведения постоянной на функцию 89  
 — сложной функции 93  
 — степенной функции 210  
 — суммы 88  
 — тригонометрических функций 94  
 — частного 89  
**промежуток** 240  
 — бесконечный 241  
 — возрастания функции 28  
 — знакопостоянства функции 28  
 — полуоткрытый 241  
 — убывания функции 28  
**пропорция** 244  
**процент** 244  
**прямая пропорциональность** 250

**Равносильность неравенств** 263  
 — систем уравнений (неравенств) 267  
 — уравнений 263  
**равносильные неравенства с несколькими переменными** 265  
 — уравнения — — — 265  
**радиан** 3  
**разложение квадратного трехчлена на множители** 256  
**расстояние между точками** 239  
**решение квадратичных неравенств** 260  
 — неравенства 263  
 — уравнения 263

**Секущая** 80  
**синус** 4  
**синусоида** 7  
**система неравенств** 267  
 — уравнений 267  
 — — линейных 268

сложная функция 92	— площади криволинейной трапеции 149
степень многочлена 262	— синуса разности 275
— одночлена 262	— — суммы 275
схема исследования функции 31	— тангенса разности 276
	— — сумма 276
Тангенс 4	формулы дифференцирования 279
тангенсоида 7	— половинного аргумента 11
теорема Вейерштрасса 122	— приведения 278
— Виета 259	—, связывающие тригонометрические функции одного аргумента 277
— об обратной функции 187	— сложения для тригонометрических функций 275
—, обратная теореме Виета 259	— сокращенного умножения 239
— о корне 44	— суммы и разности косинусов и синусов 278
— Ферма 114	функция 18
тождественные преобразования выражений 261	— возрастающая 21
тождество 261	— дифференцируемая 85
точка критическая 114	— дробная часть 20
— максимума 30	— линейная 254
— минимума 30	— логарифмическая 190
— экстремума 31	— непрерывная в точке 97
тригонометрические неравенства, решение 54	— непрерывная на промежутке 98
— уравнения и системы уравнений, решение 57	— нечетная 22
Угловой коэффициент касательной 100	— обратная 186
— — прямой 80	— периодическая 33
уравнение иррациональное 168	— показательная 179
— квадратное 257	— сложная 92
— линейное 255	— степенная 209
— логарифмическое 197	— убывающая 21
— показательное 182	— целая часть 19
— с несколькими переменными 265	— четная 22
— с одной переменной 263	Числа действительные 237
— тригонометрическое 48	— иррациональные 237
Формула корней квадратного уравнения 257	— натуральные 236
— — — приведенного 258	— рациональные 236
— косинуса разности 275	— целые 236
— — суммы 275	число $e$ 202
— Лагранжа 104	числовая плоскость 241
— Ньютона — Лейбница 148	— последовательность 245
— перехода к логарифмам с другим основанием 194	— прямая 240
	Экстремум функции 31

## ОГЛАВЛЕНИЕ

### Глава I

#### ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Преобразования тригонометрических выражений . . . . .	3
1. Тригонометрические функции числового аргумента . . . . .	—
2. Основные формулы тригонометрии . . . . .	11
§ 2. Основные свойства функций . . . . .	18
3. Функция . . . . .	—
4. Исследование функций . . . . .	27
§ 3. Основные свойства тригонометрических функций . . . . .	33
5. Периодичность тригонометрических функций . . . . .	—
6. Исследование функции $y = \sin x$ . . . . .	36
7. Исследование функции $y = \cos x$ . . . . .	38
8. Исследование функции $y = \operatorname{tg} x$ . . . . .	40
9. Исследование функции $y = \operatorname{ctg} x$ . . . . .	43
§ 4. Решение тригонометрических уравнений и неравенств . . . . .	44
10. Арксинус, арккосинус и арктангенс . . . . .	—
11. Решение простейших тригонометрических уравнений . . . . .	48
12. Решение простейших тригонометрических неравенств . . . . .	54
13. Примеры решения тригонометрических уравнений и систем уравнений . . . . .	57
Сведения из истории . . . . .	60
Вопросы и задачи на повторение . . . . .	61
Дополнительные упражнения к главе I . . . . .	66

### Глава II

#### ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

§ 5. Производная . . . . .	74
14. Приближенное вычисление значений функции . . . . .	—
15. Приращение функции . . . . .	79
16. Понятие о производной. Касательная к графику функции . . . . .	81
17. Определение производной. Примеры вычисления производной . . . . .	85
18. Правила вычисления производных . . . . .	88
19. Производная сложной функции . . . . .	92
20. Производные тригонометрических функций . . . . .	94

<b>§ 6. Применения производной к приближенным вычислениям, геометрии и физике</b>	97
21. Метод интервалов	—
22. Касательная к графику функции	100
23. Формулы для приближенных вычислений	104
24. Производная в физике и технике	106
<b>§ 7. Применения производной к исследованию функций</b>	111
25. Признак возрастания (убывания) функций	—
26. Критические точки функции, ее максимумы и минимумы	114
27. Примеры применения производной к исследованию функций	118
28. Наибольшее и наименьшее значения функции	122
29. Гармонические колебания	126
<i>Сведения из истории</i>	129
<i>Вопросы и задачи на повторение</i>	131
<i>Дополнительные упражнения к главе II</i>	133

### Глава III.

#### ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

<b>§ 8. Первообразная</b>	137
30. Определение первообразной	—
31. Основное свойство первообразной	139
32. Три правила нахождения первообразных	142
<b>§ 9. Интеграл</b>	145
33. Площадь криволинейной трапеции	—
34. Интеграл. Формула Ньютона — Лейбница	148
35. Вычисление объемов тел	153
<i>Сведения из истории</i>	156
<i>Вопросы и задачи на повторение</i>	158
<i>Дополнительные упражнения к главе III</i>	159

### Глава IV

#### ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

<b>§ 10. Обобщение понятия степени</b>	162
36. Корень $n$ -й степени и его свойства	—
37. Иррациональные уравнения	168
38. Степень с рациональным показателем	171
<b>§ 11. Показательная и логарифмическая функции</b>	177
39. Показательная функция	—
40. Решение показательных уравнений и неравенств	182
41. Понятие об обратной функции	185
42. Логарифмическая функция	190
43. Основные свойства логарифмов	193
44. Решение логарифмических уравнений и неравенств	197
<b>§ 12. Производная показательной и логарифмической функций</b>	202
45. Производная и первообразная показательной функции	—
46. Производная логарифмической функции	206
47. Степенная функция и ее производная	209

#### 48. Дифференциальное уравнение показательного роста и показательного убывания

<i>Сведения из истории</i>	213
<i>Вопросы и задачи на повторение</i>	217
<i>Дополнительные упражнения к главе IV</i>	221
Задачи повышенной трудности	225
Материал для повторения	236
Задачи на повторение всего курса	280
Приложение	293
Ответы и указания к упражнениям	297
Обозначения, встречающиеся в учебном пособии	329
Предметный указатель	330

**Андрей Николаевич Колмогоров  
Александр Михайлович Абрамов  
Борис Ефимович Вейц и др.**

**АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА**

**Учебное пособие  
для 9 и 10 классов  
средней школы**

Зав. редакцией **Р. А. Хабиб**

Редактор **Л. Н. Белоновская**

Младшие редакторы **Л. И. Заседателева, Л. Е. Козырева, Е. А. Сафронова**

Переплет художника **Б. Л. Николаева**

Художественный редактор **Е. Н. Карасик**

Технические редакторы **В. Ф. Коскина, Л. М. Абрамова**

Корректоры **Л. А. Ежова, Н. В. Корсильникова**

**ИБ № 10269**

Подписано к печати с диапозитивов 26.05.86. Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага типографская № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 21+форзац 0,25. Усл. кр.-отт. 21,69. Уч.-изд. л. 18,72+форзац 0,35. Тираж 2 950 000 экз. Заказ № 355. Цена 35 коп.

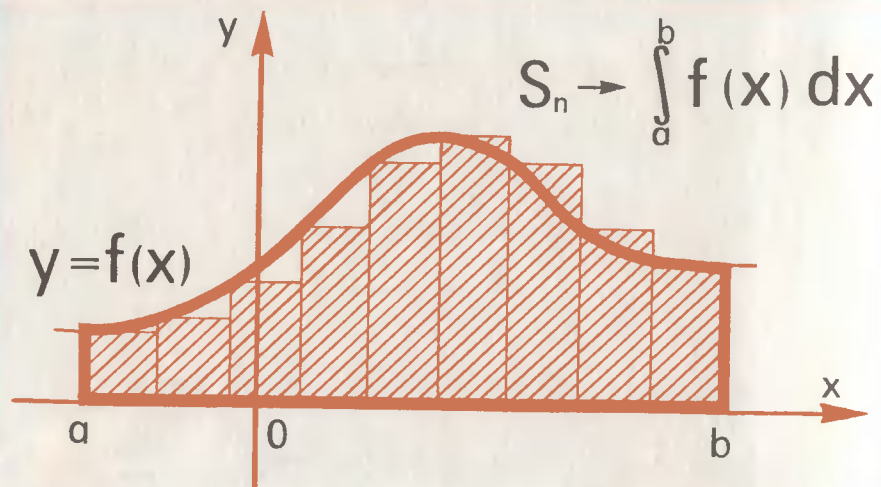
Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 129846, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

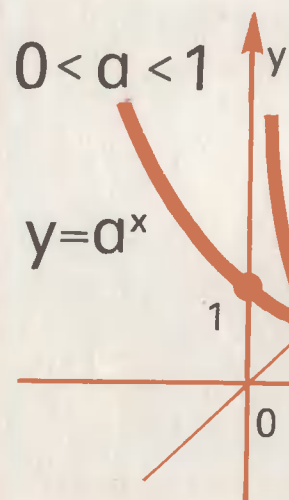
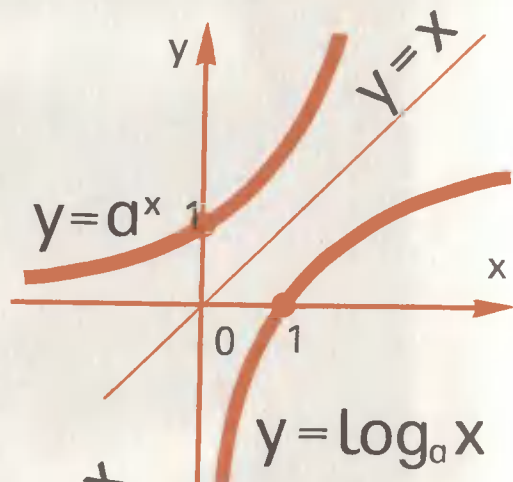
**Сведения о пользовании учебником**

№	Фамилия и имя ученика	Учебный год	Состояние учебника	
			в начале года	в конце года
1				
2				
3				
4				
5				





$$a > 1$$



$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

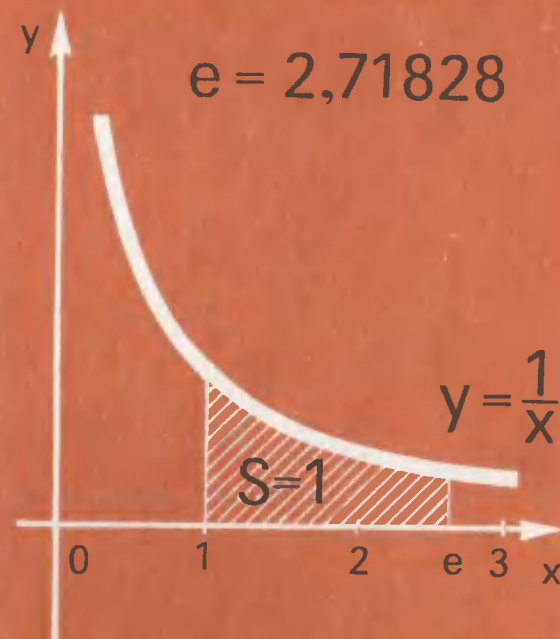
$$a^{x+y} = a^x a^y$$

$$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$$

$$(a^x)^y = a^{xy}$$

$$a^{\log_a b} = b$$

$$e = 2,71828$$



$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a x^y = y \log_a x$$