Научное издание

КУДРЯВЦЕВ Валерий Борисович
АНДРЕЕВ Александр Егорович
ГАСАНОВ Эльяр Эльдарович

ТЕОРИЯ ТЕСТОВОГО РАСПОЗНАВАНИЯ

Редактор *И.Л. Легостаева*
Оригинал-макет: *И.В. Шутов*
Оформление переплета: *Н.В. Гришина*

Подписано в печать 02.08.07. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 20. Уч.-изд. л. 25,4. Тираж 100 экз.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Ивановская областная типография»
153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6
E-mail: 091-018@adminet.ivanovo.ru

ISBN 978-5-9221-0872-0

9 000000 000000

УДК 519.71
ББК 22.18
К 88

Кудрявцев В.Б., Андреев А.Е., Гасанов Э.Э. **Теория тестового распознавания.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 320 с. — ISBN 978-5-9221-0872-0.

Описывается логический подход к распознаванию образов. Его основным понятием выступает тест. Анализ совокупности тестов позволяет строить функционалы, характеризующие образ и процедуры вычисления их значений. Указываются качественные и метрические свойства тестов, функционалов и процедур распознавания. Приводятся результаты решения конкретных задач.

Книга может быть рекомендована математикам, кибернетикам, информатикам и инженерам как научная монография и как новый технологический аппарат, а также как учебное пособие для студентов и аспирантов, специализирующихся в области математической кибернетики, дискретной математики и математической информатики.

ISBN 978-5-9221-0872-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть III. Т-алгоритмы распознавания, использующие короткие тесты

Предисловие

В предлагаемой монографии излагаются научные результаты, полученные по сравнительно новому направлению в теории распознавания образов, которое основывается на использовании аппарата логических тестов.

Это направление возникло в середине прошлого столетия и по праву связывается с именами С. В. Яблонского и И. А. Чегис, которые в своих работах [67, 69] впервые ввели понятие теста и выявили ряд его важных свойств, что в итоге позволило с успехом применить тестовый подход к решению задач распознавания образов.

Многие задачи распознавания могут быть описаны с помощью следующей схемы. Имеется некоторый объект A, который может находиться в каких-то состояниях q_i, $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Последние характеризуются параметрами-признаками x_j, $j \in \in \{1, 2, ..., n\}$. Известно, что некоторые наборы значений этих признаков $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_n)$ описывают состояние q_i. Эти наборы как строки составляют матрицу T_i. Совокупность T как матрица, образованная подматрицами T_i, описывает все состояния объекта A. Для того чтобы понять, какое состояние описывает конкретный набор значений признаков, нужно проверить, в какую подматрицу T_i он входит. Если он не содержится в них, то набор не соответствует состояниям. Если входит в подматрицу T_i, то в предположении, что подматрицы не пересекаются, этот набор описывает состояние q_i.

В реальной ситуации и признаки, и сами подматрицы T_i, как правило, описываются не полностью, а потому решение вопроса о том, какое состояние описывает данный набор, становится нетривиальным. Этот вопрос и называют задачей распознавания.

Тем самым задачу распознавания можно сформулировать так: даны матрица T' и ее подматрицы T'_i, требуется указать оператор φ, который по этим подматрицам и заданному набору признаков вычисляет состояние объекта A, представленное предъявленным набором. Ясно, что нахождение φ в общем случае требует различных допущений относительно свойств A.

К числу исторически первых таких допущений относятся алгебраические, геометрические и вероятностные свойства A. Каждое из них породило соответствующее направление в теории распознавания. В них накоплен большой опыт, включающий как перечень решенных и потенциально решаемых задач, так и методов их решения.

Особый класс составляют задачи, в которых характеризация объекта A является опосредованной или абстрактной, без подходящей интерпретации.

Типичным примером такого объекта является техническое устройство, характеризуемое некоторыми своими параметрами-признаками. Это устройство может иметь неисправности — состояния, каждое из которых описывается соответствующей подматрицей T_i. Тогда, зная T, по текущему набору признаков $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_n)$, можно как отмечалось, решить задачу распознавания состояния q объекта A.

С. В. Яблонский и И. А. Чегис [67, 69] заметили, что вообще говоря, такое распознавания можно осуществлять, не используя всю матрицу T, а только ее часть. Ими было введено понятие теста для T следующим образом.

Пусть σ — набор признаков, $T_{i,\sigma}$ — часть таблицы T_i, образованная столбцами, соответствующими σ, а T_σ — все $T_{i,\sigma}$. Набор σ образует тест для T, если $T_{i,\sigma}$ и $T_{i',\sigma}$ не имеют общих строк при $i \neq i'$. Таким образом, тест σ уже сам может решать задачу распознавания после анализа множества T_σ и набора α_σ. Тест выступает в роли эксперта, принимающего решение что части набора α и по T.

С. В. Яблонский и И. А. Чегис предложили логическое решение задачи описания множества $\Im(T)$ всех тестов для T. Этот подход нашел применение в технической диагностике.

Позже он был распространен и на другие объекты. В качестве A были рассмотрены рудные образования и в предположении, что T доступно лишь фрагментарно в виде T', а множество тестов для T и T' видимо «мало» отличаются друг от друга.

Ю. И. Журавлев, Ф. П. Кренделев и А. Н. Дмитриев [34] предложили оценивать роли признаков в решении задачи распознавания как долю вхождения их в $\Im(T)$. Эта величина p_j для признака x_j, называемая информационным весом, позволила им рассмотреть при специальной кодировке значений признаков линейный функционал $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j$, ввести некоторые пороги d_i для T_i и по значению $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j$ и d_i определять близость набора значений признаков $\alpha = (a_1, a_2, ..., a_n)$ к некоторой из матриц T_i. На этом пути они предложили решение ряда задач по оценке месторождений полезных ископаемых.

Позже В. И. Переяславский [50, 51] исследовал вопрос, когда линейный функционал $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j$ доставляет верное решение задачи распознавания.

Сюда примыкают рассмотрения А. Шайеба [68], посвященные выяснению возможностей линейных функционалов в решении задачи распознавания в общем случае.

Другое развитие идеи использования тестов было осуществлено В.Б.Кудрявцевым [36]. Как отмечалось, тест σ может выступать в качестве «эксперта» для определения по набору α состояния q объекта A. В случае, когда $\sigma \in \Im(T')$, он по α из T уже, вообще говоря, не решает задачи принадлежности α некоторому T_i, поскольку $\Im(T')$ может не совпадать с $\Im(T)$. Более того, он может отнести α к другой матрице T_j, или вообще отказаться от принятия решения, когда α_σ не входит ни в одну из матриц $T'_{i,\sigma}$. Таким образом, возникает необходимость подвергнуть анализу набор α с помощью всего доступного нам множества $\Im(T')$. Используя каждый тест σ из $\Im(T')$ для α, получаем вектор «голосов» $\chi(\alpha) = (k_1, ..., k_m, k_{m+1})$, где k_i $(i \leqslant m)$ — число остальных тестов, проголосовавших за принадлежность T_i, k_{m+1} — число, «воздержавшихся» голосов.

Можно считать, что в векторе χ координаты пронормированы, т. е. поделены на число тестов в $\Im(T')$. Тогда k_l интерпретируем как меру выраженности свойства α принадлежать T_l при $l \leqslant m$, а k_{m+1} — не принадлежать T'; здесь следует полагать, что $\Im(T')$ и $\Im(T)$ отличаются достаточно «мало».

Функционал χ был успешно опробован в решении ряда прикладных задач, но вместе с тем обнаружились и определенные трудности в его использовании. Главными из них являлись сложностные факторы и слабое согласование численных результатов с реальностью для отдельных задач распознавания. Это привело к необходимости отхода от голосования по всему множеству тестов и к замене его специальными семействами. К их числу относятся тупиковые, короткие, минимальные тесты и их ограничения.

Тупиковый тест представляет собой тест, у которого любое собственное подмножество признаков не образует тест.

Короткий тест по числу признаков близок к логарифму числа признаков в T.

Минимальный тест имеет наименьшее число признаков из всех возможных.

Возникающие функционалы распознавания, соответствующие голосованию по этим семействам, обозначаем через χ_{TT}, χ_{KT} и χ_{MT}, а сами семейства называем основными.

Выяснились огромные преимущества функционала χ_{KT} в решении задач распознавания. С его помощью было решено большое число задач геологии, экономики, военного дела и других областей.

Были, например, установлены новые месторождения нефти, газа и олова в Сибири [29], оценены перспективы развития конкретных экономических районов, проводился анализ текущей военно-политической ситуации, устанавливался диагноз заболевания и, соответственно, оптимальный режим лечения для него [42].

Приблизительно в то же время идею голосования использовали Ю. И. Журавлев и его ученики при голосовании по подмножествам признаков, состоящих из заданного числа элементов. В частности, они предложили оптимизацию выбора конкретного значения r, при котором распознавание оказывается наилучшим [23].

Особая значимость функционалов χ, χ_{TT}, χ_{KT} и χ_{MT}, в решении задач распознавания, подтвержденная практикой, создала предпосылки для разработки тестовой теории распознавания. Ее создание предполагало решение следующих задач.

1. Получение оценок для числа основных видов тестов матрицы T, имеющей заданные параметры ее подматриц T_i.
2. Нахождение точных и приближенных алгоритмов построения основных семейств тестов.
3. Выяснение того, когда для T и T' заданные виды их основных семейств отличаются на заданную долю.
4. Решение обратной задачи для 3.
5. Выделение того семейства из основных, которое для T' лучше остальных решает задачу распознавания.
6. Нахождение быстрых алгоритмов вычисления функционалов распознавания для T, соответствующих основным семействам.
7. Выяснение роли отдельных признаков в решении задачи распознавания и определение корреляции между ними для T'.
8. Решение задач 1–7 при заданном графе сравнения для T_i' в T' с соответствующим уточнением понятий видов тестов.
9. Решение задач 1–8 для почти всех матриц T'.

В решении задач 1 и 2 в случае, когда в T' каждая подматрица T_i' состояла из одной строки, первые результаты получили В. А. Слепян [60] и В. Н. Носков [43, 44], оценивших сверху и снизу число тестов и тупиковых тестов в таких матрицах.

Затем в предложении, что в T признаков много больше, чем строк, Е. В. Дюковой [21] была разработана специальная комбинаторная техника, с помощью которой ею были найдены асимптотики тестов и тупиковых тестов для почти всех таблиц T' с заданными соотношениями параметров ее размерностей; эта техника ей позволила синтезировать оптимальные детерминированные и стохастические алгоритмы построения тестов и тупиковых тестов, а также решить задачу поведения весов признаков и значений их корреляций. Таким образом, Е. В. Дюковой удалось частично решить задачи 1, 2, 6, 7, 9.

Работа Е. В. Дюковой была важной по своему значению в создании теории тестового распознавания.

Продвижения Е. В. Дюковой затем были развиты и существенно усилены А. Е. Андреевым [5]. Им была разработана новая специальная техника, позволившая:

- найти асимптотические поведения для числа тестов для произвольных размерностных характеристик матриц;
- построить соответствующие оптимальные алгоритмы детерминированного и стохастического типа для нахождения указанных тестов;
- частично решить задачу 4, указав возможные доопределения матриц T_i' таким образом, чтобы множества $\Im(T')$ и $\Im(T)$ совпадали;
- найти длины минимальных тестов и их число;
- выявить веса признаков и корреляции между ними;
- распространить результаты в решении задач 1, 2, 6, 7 на случай произвольного графа сравнимости в таблице T для почти всех таблиц.

Таким образом, А. Е. Андрееву удалось решив в определенной мере задачи 1, 2, 3, 6, 7, 8 и 9, кардинально расширить базу знаний в теории тестов. В то же время из его результатов и частично из результатов Е. В. Дюковой вытекало, что эффективность распознавания процедур, основанных на тестах, существенно зависит от вида семейств тестов из основных, по которым идет распознавание.

Этому вопросу были посвящены исследования А. А. Кибкало [27]. Оказалось, что в качестве оптимального множества «голосующих» тестов следует выбирать так называемые «короткие» тесты. Если таблица T имеет m строк, то под коротким тестом для T' понимается величина «близкая» к $\ln m - \ln\ln m$, А. А. Кибкало для случая, когда T' состоит из двух подматриц, установлено, что:

- вес признака по тупиковым тестам уменьшается с увеличением доли различаемых строк из T_1' и T_2';
- вес признака по тестам не зависит от доли различаемых строк из T_1' и T_2' и почти всегда равен $^1/_2$;
- вес признака по коротким тестам растет с увеличением доли различаемых строк из T_1' и T_2';
- вес признака, различающего больше половины пар строк по тестам, длина которых близка к минимальной, почти всегда равен единице;

Таким образом, содержательно становится ясным преимущество коротких тестов и «очень» коротких тестов, т. е. близких к минимальным тестам перед остальными в выявлении признаков, лучше других отличающих подматрицы T_1' и T_2'. Он существенно продвинулся в решении задачи 7.

Далее была изучена ситуация, близкая к задачам 3 и 5. А. А. Кибкало установил, что в случае, когда в матрице T' возможны искажения: множество почти всех тупиковых тестов перестает быть таковым после искажения:

- множество очень коротких тестов почти полностью меняется;
- множество коротких тестов практически не меняется.

Он же построил асимптотически оптимальный алгоритм перечисления коротких тестов, т. е. решил для рассматриваемого случая задачи 2 и 9.

Все задачи 1–9 в общем случае относятся к числу переборных и потому возникающие для них алгоритмы при больших размерах матриц T' мало применимы. Возникает необходимость перехода к более простым, но менее точным алгоритмам их решения.

Исторически первый приближенный алгоритм решения задач 6 и 7 был предложен В. Е. Кузнецовым [38]. Этот алгоритм типа Монте-Карло использовался в процедурах решения практических задач распознавания. Затем возникли приближенные алгоритмы для этих задач у Е. В. Дюковой, А. Е. Андреева и А. А. Кибкало.

Позже М. В. Носовым [49] был предложен алгоритм вычисления χ, основанный на экспоненциально сложном анализе множества T' с последующим полиномиальным по сложности вычислении χ по набору α.

Восстанавливая хронологию, необходимо подчеркнуть, что первые задачи, которые удалось решить Ю. И. Журавлеву и его коллегам, имели матрицу T' с числом строк и столбцов соответственно до 20.

Работа В. Е. Кузнецова позволила решать подобные задачи с уже до ста строк и столбцов в T'.

Е. В. Дюкова расширила класс таких матриц до имеющих 200 столбцов и 50 строк.

А. Е. Андреев распространил эти возможности до матриц размерами в 200 строк и 200 столбцов.

А. А. Кибкало смог использовать уже матрицы размерами 500 строк и 500 столбцов.

Современные компьютеры позволяют еще на порядок и более увеличить размеры реально обрабатываемых матриц.

В рассмотренной ситуации в общем случае не предполагалось, что имеется некоторая связь между подматрицами T_i' матрицы T'. Специальный случай возникает при допущении такой связи. Здесь следует выделить рассмотрение такой модели.

Пусть A является техническим устройством с r входами и одним выходом. На входы Q поступают значения a из $E_k = \{0, 1, ..., k-1\}$, а на выходе снимается значение $f\,(a_1, ..., a_r)$ — некоторой функции k-значной логики. Считается, что на входах могут возникать ошибки определенного типа γ, меняющие набор $(a_1, ..., a_r)$ на $(a_1', ..., a_r')$. Тогда в общем случае на подаваемом наборе $(a_1, ..., a_r)$ значение f меняется. Требуется указать некоторое число наборов, вычисляя f на которых, можно установить, была ли ошибка на входах A.

Эти наборы образуют тест и обычно требуется, чтобы он имел наименьшее число элементов. Далее допускается, что функция f может быть любой от фиксированного числа r переменных и ставится вопрос о том, каково минимально достаточное число $L_k(r, \gamma)$, такое что для любых из указанных функций f и ошибки типа γ найдется тест из $L_k(r, \gamma)$ элементов, который по f определяет, была ли на входах A, реализующего f, допущена ошибка γ.

Отметим здесь две группы основных результатов. Первую составляют результаты Г. Р. Погосяна [54], который установил поведение $L_k(r, \gamma)$ для γ, соответствующим коротким замыканиям, слипаниям, инверсиям и др. Ранее в этом направлении интересные продвижения были получены В. Н. Носковым [46]. Вторую составляют результаты О. А. Долотовой [16], которая для тех же типов ошибок нашла поведение функции для $L_2^C(r, \gamma)$, аналогичной функции $L_2(r, \gamma)$, но соотнесенной с заданным классом Поста C функций алгебры логики. К этим группам результатов примыкают подобные рассмотрения для почти всех функций.

В целом же тестирование технических устройств привлекает большое число исследователей, которыми накоплен большой опыт, заслуживающий отдельного обсуждения. Упомянем здесь лишь итоговые изложения в [66].

Все излагаемые в книге результаты выполнены на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова в научной школе кафедры математической теории интеллектуальных систем. Они докладывались на научных форумах в стране и за рубежом, библиография приведена в конце книги.

Книга может быть полезна для специалистов по распознаванию образов, для исследований и учебного процесса в этой области.

Авторы выражают свою признательность коллегам по кафедре математической теории интеллектуальных систем, интерес которых к тематике книги стимулировал ее создание, а также Е. С. Быченковой, Ю. Г. Гераськиной, Г. А. Майлыбаевой, Е. Н. Остроуховой, А. П. Соколову, Е. Е. Титовой, Т. Д. Уваровой и А. А. Хариной, помогавшим авторам в ее оформлении.

Авторы благодарны Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку издания этой книги (грант РФФИ № 07-01-07034-д).

Часть I

ТЕСТОВОЕ РАСПОЗНАВАНИЕ

Глава 1

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1.1. Тесты для матриц с малым числом строк

Здесь мы изложим основные результаты Е. В. Дюковой по задачам 6 и 7.

Пусть матрица T имеет m строк и n столбцов, а ее элементы a_{ij} входят в $E_k = \{0, 1, ..., k-1\}$, $k \geqslant 2$. Пусть $m = \sum_{i=1}^{s} m_i$, где m_i — натуральные и $m_i \leqslant 1$; $\widetilde{m}$ есть последовательность $m_1, m_2, ..., m_s$. Пусть $M^{(k)}_{\widetilde{m},n,s}$ — класс всех таких матриц T', состоящих из s подматриц T'_i с m_i строками, следующими в T друг за другом с ростом номеров этих подматриц.

При $l \in \{1, 2, ..., s\}$ полагаем $m''(l) = \sum_{i=1}^{l} m_i$, $m'(l) = m''(l) - m_l + 1$. Считаем, что в матрице из $M^{(k)}_{\widetilde{m},n,s}$ подматрица T'_l содержит строки с номерами $m'(l), m'(l+1), ..., m''(l)$. Пусть $\Im_t(T')$ — множество всех тупиковых тестов для T'. Для строк $\alpha = (a_{j_1}, a_{j_2}, ..., a_{j_n})$ и $\alpha' = \left(a_{j'_1}, a_{j'_2}, ..., a_{j'_n}\right)$ из T' вводим сложение по модулю два $\oplus$, полагая

$$\alpha \oplus \alpha' = \left(a_{j_1} \oplus a_{j'_1}, a_{j_2} \oplus a_{j'_2}, ..., a_{j_n} \oplus a_{j'_n}\right).$$

Пусть $h = \sum_{l=1}^{s-1} \sum_{t=1}^{s-l} m_l m_{l+t}$, составим матрицу $L_{T'}$ с элементами b_{uv}, $u \in \{1, 2, ..., h\}$, $v \in \{1, 2, ..., n\}$ из всех строк $\alpha \oplus \alpha'$ таких, что строки α и α' входят в разные подматрицы T'_i и $T'_{i'}$, соответственно, причем $i < i'$. Полагаем строки в $L_{T'}$ упорядоченными так, что если $\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ имеют номера в T суть j_1, j_2, l_1, l_2, соответственно, то если номер строки $\alpha \oplus \alpha'$ меньше номера строки $\alpha'' \oplus \alpha'''$, то либо $j_1 < l_1$, либо $j_2 < l_2$.

Матрица $L_{T'}$ называется матрицей сравнения для T'. Каждому элементу b_{uv} из $L_{t'}$ присваивается номер $N(u, v) = (v - 1) \cdot h + u$.

Рассмотрим класс А алгоритмов, строящих все тупиковые тесты для T'. Алгоритм a из А сводит эту задачу к некоторой задаче следующего вида.

Имеется множество $\Re = \{R_1, R_2, ..., R_g\}$, где R_w — некоторый набор элементов из $L_{T'}$, $w \in \{1, 2, ..., g\}$. Требуется построить все такие подмножества $\Re$, для каждого из которых выполнен ряд свойств $B_1, B_2, ..., B_p$ и $p \geqslant 2$.

Искомую совокупность обозначим через $Q_{\Re}$. Предполагаем, что между $Q_{\Re}$ и $\Im_t(T')$ существует взаимно-однозначное соответствие, так что построение $Q_{\Re}$ приводит к построению $\Im_t(T')$.

Пусть $Q^{(t)}$, $t \in \{1, 2, ..., p\}$ — совокупность всех таких подмножеств множества $\Re$, для каждого из которых выполнены свойства $B_1, B_2, ..., B_{t-1}, B_{t+1}, ..., B_p$. На систему свойств $\{B_1, B_2, ..., B_p\}$ наложим условие: всегда $Q^{(t)} \supset Q_{\Re}$.

Пример 1. Пусть $g = u$ и элемент $R_w \in \Re$ является столбцом матрицы $L_{T'}$ под номером w. Для наборов столбцов матрицы L_T рассмотрим такие свойства B_1 и B_2:

- набор столбцов H матрицы $L_{T'}$ обладает свойством B_1, если для любой строки из $L_{T'}$ в H найдется столбец, пересечение которого с этой строкой дает 1;
- набор столбцов H матрицы $L_{T'}$ обладает свойством B_2, если из условия $H' \subset H$ следует, что H' не обладает свойством B_1.

Требуется построить все такие наборы столбцов из $L_{T'}$, каждый из которых обладает свойствами B_1 и B_2.

Решение этой задачи приводит к построению $\Im_t(T')$. В самом деле набор σ номеров столбцов $j_1, j_2, ..., j_r$ матрицы T' является тупиковым тестом точно тогда, когда набор столбцов матрицы $L_{T'}$, с указанными номерами обладает свойствами B_1 и B_2.

Пример 2. Два различных единичных элемента b_{uv} и $b_{u'v'}$ матрицы $L_{T'}$ считаются совместимыми, если $b_{uv} = b_{u'v'} = 0$. Множество D из r единичных элементов матрицы $L_{T'}$ называем совместимыми, если выполнено хотя бы одно из условий:

1. $r = 1$;
2. $r > 1$ и любые два элемента в D совместимы.

Множество всех совместимых множеств в L_T обозначим через $S(L_{T'})$.

Пусть $g = h \cdot n$, элемент R_w множества $\Re$ является элементом матрицы $L_{T'}$ с номером $w \in \{1, 2, ..., g\}$ и $\Omega(D)$ — набор тех столбцов из $L_{T'}$, в которых расположены элементы множества $D \subseteq R$. Говорят, что D обладает свойством B'_1, если $D \in S(L_{T'})$. Если $D = \{b_{u_1v_1}, b_{u_2v_2}, ..., b_{u_rv_r}\}$, D обладает свойством B'_2, если выполнены условия:

1. $\Omega(D)$ обладает свойством B_1;

2. $\{b_{u_1v_1}, b_{u_2v_2}, ..., b_{u_rv_r}\} \in S(L_{T'})$, то $u_t \leqslant p_t$ при $t \in \in \{1, 2, ..., r\}$.

Множество $D \subseteq \Re$ называется *правильным* в $L_{T'}$, если D обладает свойствами B_1' и B_2'. Пусть $\mathrm{B}(L_{T'})$ — множество всех правильных множеств в $L_{T'}$. Построим $\mathrm{B}(L_{T'})$.

Тупиковый тест $\sigma = (j_1, j_2, ..., j_r)$ таблицы T' и множество $D \in \mathrm{B}(L_{T'})$ считаем эквивалентными, если $\Omega(D)$ состоит из столбцов матрицы $L_{T'}$ с номерами $j_1, j_2, ..., j_r$.

Можно показать, что между $\mathrm{B}(L_{T'})$ и $\Im_t(T')$ имеется взаимно-однозначное соответствие, при котором соответствующие элементы эквиваленты. Следовательно, построение $\mathrm{B}(L_{T'})$ приводит к построению $\Im_t(T')$.

При построении множества $Q_{\Re}$ алгоритм A поступает так. Из системы свойств $\mathrm{B} = \{B_1, B_2, ..., B_p\}$ выделяется некоторая подсистема $\mathrm{B}' = \left\{B_{i_1}, B_{i_2}, ..., B_{i_j}\right\}$ такая, что $\mathrm{B}' \subset \mathrm{B}$. Пусть $Q_{i_1,i_2,...,i_l}$ — множество всех таких подмножеств из $\Re$, для каждого из которых выполнены свойства $B_{i_1}, B_{i_2}, ..., B_{i_l}$. Работа алгоритма A состоит в построении множества $Q_{i_1,i,...,i_l}$ и выделению из него подмножества $Q_{\Re}$, при этом на каждом его шаге строится некоторый элемент из $Q_{i_1,i_2,...,i_l}$ и для него проверяется выполнение свойств B_t, где $t \in \{1, 2, ..., p\} \setminus \{i_1, i_2, ..., i_l\}$.

Множество $Q_{i_1,i_2,...,i_l}$ назовем *погружением* для алгоритма A.

Пусть $|M|$ — мощность множества M, $M(a, T') = |Q_{i_1,i_2,...,i_l}|$, $N_{m,n} \subseteq M^{(k)}_{\tilde{m},n,s}$.

Алгоритм A называется асимптотически оптимальным в $N_{m,n}$, если для почти всех подматриц T' из $N_{m,n}$ выполнено

$$\mu(\mathrm{A}, T') \sim |\Im_t(T')|$$

при $m, n \to \infty$.

Здесь будет предполагаться, что число столбцов в матрице T' «много» больше числа строк.

Нетрудно убедиться, что примером алгоритма для построения $\Im_t(T')$, не являющимся асимптотически оптимальным, является процедура из [21], которую обозначаем через A_1.

Алгоритм A_1 сводит задачу построения $\Im_t(T')$ к задаче, описанной в примере 1, и для построения соответствующего ему погружения использует свойство B_1. Величина $\mu(\mathrm{A}, T')$, равная числу тестов в T', почти всегда по порядку больше величины $|\Im_t(T')|$.

Сведение задачи построения $\Im_t(T')$ к задаче из примера 1 позволяет построить асимптотически оптимальный по сложности алгоритм. Этот алгоритм A_1 для построения погружения использует свойство B_1' и для него $\mu(\mathrm{A}, T') = |S(T')|$. Следовательно, вопрос об асимптотической оптимальности A_1 сводится к оценке величины $|S(T')|$ и $|\Im_t(T')|$.

Справедливо утверждение.

Теорема 1.1.1. *Если $\alpha > 1$, $\beta < {}^1\!/_2$, $(m_1, m_2)^\alpha \leqslant n \leqslant k^{(m_1,m_2)^\beta}$, $\varphi_k = (a, b)$, где*

$$a = {}^1\!/_2 \ln_k(m_1 m_2 n) - {}^1\!/_2 \ln_k \ln_k(m_1 m_2 n) - \ln_k \ln_k \ln_k n,$$

$$b = {}^1\!/_2 \ln_k(m_1 m_2 n) - {}^1\!/_2 \ln_k \ln_k(m_1 m_2 n) + \ln_k \ln_k \ln_k n,$$

то при $m, n \to \infty$ выполнено для почти всех T из M_m

$$|S(L_{T'})| \sim |\Im_t(T')| \sim \sum_{r \in \varphi_k} \frac{[m_1 m_2 n\,(k-1)]^r}{r!\, k^{k^2}}.$$

Отсюда следует, что при $(m_1 m_2)^\alpha \leqslant n \leqslant k^{(m_1 m_2)^\beta}$, $\alpha > 1$, $\beta < < 1/2$, алгоритм A_1 является асимптотически оптимальным в $F^{(k)}_{m_1,m_2,n}$.

При доказательстве теоремы 1 множество матриц $F^{(k)}_{m_1,m_2,n}$ рассматривается как пространство элементарных событий, в котором каждое событие $T' \in F^{(k)}_{m_1,m_2,n}$ происходит с вероятностью $1/\left|F^{(k)}_{m_1,m_2,n}\right|$. Оцениваются вероятностные характеристики распределения случайных величин $|S(L_{T'})|$ и $|\Im_t(T')|$. Показывается, что в условиях теоремы 1 математические ожидания величин $|S(L_{T'})|$ и $|\Im_t(T')|$ асимптотически совпадают, а, с другой стороны, каждая из величин $|S(L_{T'})|$ и $|\Im_t(T')|$ почти всегда асимптотически совпадает со своим математическим ожиданием.

Следует отметить, что асимптотики величины $|\Im_t(T')|$ для почти всех матриц T' из $M^{(2)}_{\widetilde{m},n,s}$ в случае, когда $s = m$, найдены в работе В. А. Слепян и В. Н. Носкова [46, 60], где при получении оценки для $|\Im_t(T')|$ так же, как и в доказательстве теоремы 1, используется то, что почти всегда величина $|\Im_t(T')|$ асимптотически совпадает со своим средним значением.

Наряду с детерминированной процедурой построения множества $\Im_t(T')$ Е. В. Дюковой построены стохастические алгоритмы, основанные на алгоритме a_1.

При стохастическом подходе используется не все множество тупиковых тестов матрицы T', а лишь случайная выборка из него, анализ которой дает возможность приближенно решать задачи быстрого распознавания, выявления роли отдельных признаков в задаче распознавания и корреляции между ними, т. е., соответственно, задачи 6 и 7, а также оценивать при этом возможную ошибку.

Так как объем выборки существенно меньше множества всех тупиковых тестов, то при этом удается значительно увеличить размеры обрабатываемых таблиц.

В упомянутом ранее алгоритме В. Е. Кузнецова [38] построение тупиковых тестов для T' из $M^{(k)}_{\widetilde{m},n,s}$ осуществляется по следующей схеме.

Задаются целые числа q, $1 \leqslant q < n$ (число q выбирается особым образом и в сравнении с n достаточно мало). Пусть W_q — множество всех наборов вида $\{j_1, j_2, ..., j_q\}$, где $j_t \in \{1, 2, ..., n\}$ при $t \in \{1, 2, ..., q\}$ и $j_1 < j_2 < ... < j_q$. Случайным образом выбираются наборы из W_q. Каждый такой набор $W = \{j_1, j_2, ..., j_q\}$ определяет подматрицу T'_W в T', образованную столбцами с номерами $j_1, j_2, ..., j_q$.

К матрице T'_W применяется алгоритм A_2, который строит все тупиковые тесты для T_W. Выбор некоторой совокупности случайных наборов из W_q и приводит к построению случайной выборки из $\Im_t(T')$.

Пусть $i \in \{1, 2, ..., h\}$, где h — число строк в матрице сравнения $L_{T'}$ для T'_u, U_i — совокупность всех наборов вида $\{l_1, l_2, ..., l_i\}$, $l_t \in \{1, 2, ..., h\}$ при $t \in \{1, 2, ..., i\}$ и $l_1 < l_2 < ... < l_i$.

Пусть $u \in U_i$. Тупиковый тест для T' такой, что $\sigma = \{j_1, j_2, ..., j_r\}$, называется *$u$-тестом*, если в u можно указать числа $l_1, l_2, ..., l_r$ такие, что элементы с номерами $N[l_1, j_1], N[l_2, j_2], ..., N[l_r, j_r]$ образуют совместимое множество в $L_{T'}$. Совокупность всех u-тестов матрицы T' обозначаем через $\Im(T', u)$.

Алгоритм A_1 быстро работает на таких таблицах, у которых число строк много меньше числа столбцов. Поэтому предлагаемый стохастический алгоритм построения тупиковых тестов для T' использует не случайные наборы из W_q, а случайные наборы из U_i. Каждый такой набор $u = \{l_1, l_2, ..., l_i\}$ определяет подматрицу $L_{T'}(u)$ матрицы $L_{T'}$, образованную строками с номерами $l_1, l_2, ..., l_i$. Матрица $L_{T'}(u)$ обрабатывается при помощи алгоритма A_1, который строит $\Im(T', u)$. Обработка некоторой совокупности случайных наборов из U_i приводит к построению случайной выборки из $\Im_t(T')$.

Эта схема в деталях отличается от схемы В. Е. Кузнецова, в то время как при нахождении меры важности признака оказывается, что при определенных условиях оба подхода почти всегда эквивалентны детерминированному подходу.

Точнее. Пусть $\Im_{t,j}(T')$ — множество всех тупиковых тестов, содержащих признак x_j, а $\Im_j(T',u)$ — множество тупиковых тестов в $\Im(T',u)$, содержащих признак x_j, тогда наряду с информационным весом $p(x_j) = \dfrac{|\Im_{t,j}(T')|}{|\Im(T')|}$.

Введем величины:

$$p(x_j) = \frac{|\Im_{t,j}(T')|}{|\Im(T')|},$$

$$p^i(x_j) = \frac{1}{C_n^i} \sum_{u \in U_i} \frac{|\Im_i(T',u)|}{|\Im(T',u)|},$$

$$\overline{p}^i(x_j) = \frac{\sum\limits_{u \in U_i} |\Im_i(T',u)|}{\sum\limits_{u \in U_i} |\Im(T',u)|},$$

$$\overline{p}^i(x_j,u) = \frac{|\Im_i(T',u)|}{|\Im(T',u)|},$$

где $u \in U_i$.

Теорема 1.1.2. *Если $u \in U_i$, $n \leqslant k^{(m_1 m_2)^\beta}$, $\beta < 1/3$, и при $m, n \to \to \infty$ имеет место*:

$$\frac{\ln_k(m_1 m_2)}{\ln_k n} \to 0, \qquad \frac{\ln^3 n}{i} \to 0,$$

то почти для всех матриц T' из $M^{(k)}_{\widetilde{m},n,s}$ при $n \to \infty$ справедливо

$$p(x_j) \sim p^i(x_j) \sim \overline{p}^i(x_j) \sim \frac{\ln_k n}{2n}.$$

Эта теорема устанавливает асимптотическую эквивалентность стохастического и детерминированного подходов в тестовых алгоритмах распознавания, использующих в функционалах принятия решений веса признаков.

1.2. Тесты для матриц с заданным графом сравнения

Здесь мы изложим основные результаты А. Е. Андреева по задачам 1, 2, 6, 8, 9, которые существенно усиливают результаты Е. В. Дюковой.

Введенные ранее понятия теста, тупикового теста и другие в более общей ситуации, которая рассматривается здесь, нуждаются в уточнениях. С этой целью введем необходимый формализм.

Для множеств A и B полагаем $A^B = \{f : f : B \to A\}$. Если $f \in A^B$ и $C \subseteq B$, то $f(C) = \{b : b = f(a), a \in C\}$; а если $a \in A$ и $C \subseteq A$, то $f^{-1}(a) = \{b : b = f(a)\}$ и $f^{-1}(C) = \bigcup_{a \in C} f^{-1}(a)$. Пусть $\langle A^B \rangle = \{f : f \in A^B, f(B) = A\}$, т.е. имеем множество сюръективных отображений из B на A. Для $f \in A^B$ и $g \in B^C$ полагаем $f \circ g \in A^C$ и $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Пусть $A \otimes B$ — множество упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$; а $A \times B$ — соответствующее множество неупорядоченных пар $\{a, b\}$, причем таких, что $a \neq b$. Полагаем $A^{(2)} = A \times A$, а $|A|$ означает мощность конечного множества A.

Пусть $E = \{0, 1\}$. Если A некоторое конечное множество, то через 1^A и 0^A обозначаем, соответственно, тождественные 1 и 0 из E^A; если $x, y \in A$, то полагаем $1_x^A(y) = 1$, если $x \neq y$, и $1_x^A(y) = 0$, если $x = y$; считаем, что $0_x^A = 1_x^A \oplus 1^A$, $x \in A$, где $\oplus$ — сложение по $\operatorname{mod} 2$. Положим $\widetilde{\mathcal{E}}^A = \{1_x^A : x \in A\}$, $\mathcal{E}^A = \widetilde{\mathcal{E}}^A \cup \{1^A\}$.

Знаки $\leqslant$ и $<$, связывающие функции из E^A, относятся к стандартной по-элементной упорядоченности на этом множестве.

Если $a, b \in E^A$, то положим: $a \leftrightarrow b = a \oplus b \oplus 1^A$; $|a| = |a^{-1}(1)|$; $\rho(a, b) = |a \oplus b| = |A| - |a \leftrightarrow b|$.

Напомним, что через N_m обозначается множество $\{1, 2, \ldots \ldots, m\}$ для $m \geqslant 1$. Будем отождествлять наборы из E^n, n-мерного бинарного куба, с отображениями из E^{N_n}. То есть i-я координата набора a есть значение отображения $a(i)$, и вообще в дальнейшем, когда это удобно, мы будем рассматривать упорядоченные наборы длины n элементов какого-либо множества A как отображения из A^{N_n}. Положим $E^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} E^n$, $E_r^n = \{x : x \in E^n, |x| = r\}$ — r-й слой n-мерного бинарного куба, $E^{n,r} = \{(a, b) : a, b \in E^n, a|_{N_r} = b|_{N_r}\}$. Полагаем, что: $1^n = 1^{N_n}$ — единичный набор, $0^n = 0^{N_n}$ — нулевой набор; $1_i^n = 1_i^{N_n}$ — набор единичный во всех компонентах, кроме i-й; $0_i^n = 0_i^{N_n}$ — набор с одной единицей на i-м месте, $i \in N_n$; $\widetilde{\mathcal{E}}^n = \widetilde{\mathcal{E}}^{N_n}$ — предпоследний слой бинарного куба, $\mathcal{E}^n = \mathcal{E}^{N_n}$ — два последних слоя бинарного куба. Если $S \subseteq E^n$, то положим $\operatorname{diam} S = \max\limits_{a,b \in S} |a \oplus b|$

Пусть $a \in E^n$, определим отображение η_a из $N_n^{N_{|a|}}$, положив $\eta_a(i) = k$, если $i = \sum_{j=1}^{k} a(j)$ и $\sum_{j=1}^{k-1} a(j) < i$. Функция η_a говорит, на каких местах в наборе a стоят единицы. Для a из E^n определим также отображение π_a из $(E^{|a|})^{E^n}$, положив $\pi_a(b) = b \circ \eta_a$. Эта функция имеет следующую интерпретацию. Пусть $a, b \in E^n$, если выписать набор b и вычеркнуть координаты, соответствующие нулям набора a, то получим запись набора

$b \circ \eta_a$, т. е. функция $\pi_a(b)$ говорит, какие значения в наборе b стоят в тех местах, где в наборе a стоят единицы.

Теперь введем ряд обозначений, связанных с графами.

Через $\mathcal{P}(G)$ и $X(G)$ обозначим множество вершин и, соответственно, ребер графа G; считаем, что $X(G) \subseteq \mathcal{P}(G)^{(2)}$, т. е. рассматриваем графы без петель и кратных ребер.

Пусть далее $\gamma_G(x)$ — степень вершины x, $\Delta(G)$ — максимальная степень вершины, $\chi(G)$ — хроматическое число, т. е. минимальное число красок, в которые можно раскрасить вершины графа G таким образом, чтобы каждое ребро соединяло вершины с разной окраской.

Под m-раскраской графа G мы будем понимать отображение из $\langle (N_m)^{\mathcal{P}(G)} \rangle$, т. е. вершины графа окрашиваются m красками, причем каждая из красок используется.

Через $k(G)$ обозначим число нетривиальных компонент, считая нетривиальной компоненту, содержащую не менее двух вершин.

Полагаем $p(G) = |\mathcal{P}(G)|$, $q(G) = |X(G)|$, $p^*(G) = p(G) - k(G) + 1$.

Если $U \subseteq \mathcal{P}(G)$, то, когда не оговорено противное, G_U — подграф, порожденный множеством вершин U, т. е. $\mathcal{P}(G_U) = U$, $X(G_U) = X(G) \cap U^{(2)}$.

Если $Q \subseteq X(G)$, то, когда не оговорено противное, G^Q — подграф такой, что $\mathcal{P}(G^Q) = \mathcal{P}(G)$, $X(G^Q) = Q$, т. е. граф G^Q получается из графа G выбрасыванием ребер, не принадлежащих Q.

Через $S_G(a)$ обозначим множество вершин, смежных с вершиной a.

Если $f \in \langle A^{\mathcal{P}(G)} \rangle$, то через $f \circ G$ обозначим такой граф, что $\mathcal{P}(f \circ G) = A$ и $\{a_1, a_2\} \in X(f \circ G)$ тогда и только тогда, когда существует b_1 из $f^{-1}(a_1)$ и b_2 из $f^{-1}(a_2)$, смежные в графе G.

Мы будем говорить, что граф G' получен из графа G отождествлением множества вершин U, если имеется f из $\mathcal{P}(G')^{\mathcal{P}(G)}$ такая, что $G' = f \circ G$ и существует a из $\mathcal{P}(G')$ такая, что $f^{-1}(a) = U$ и для любой b из $\mathcal{P}(G') \backslash \{a\}$ выполнено $|f^{-1}(b)| = 1$.

Мы говорим, что граф G' получен из графа G, удалением множества вершин U, и множества ребер Q, если $\mathcal{P}(G') = \mathcal{P}(G) \backslash U$ и $X(G') = X(G) \backslash U^{(2)} \backslash Q$. Если $Q = \varnothing$ или $U = \varnothing$, то говорим, что G' получен удалением множества вершин или соответственно множества ребер.

Пусть $d(r, G)$ — число остовных r-реберных лесов графа G. Напомним, что остовный лес графа G — это лес, составленный из ребер графа G и покрывающий все вершины графа G.

Пусть имеется конечное множество U и система его подмножеств $\mathfrak{M} = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$, являющаяся покрытием U, т.е. $\bigcup_{i=1}^{k} V_i = U$. Через $G(\mathfrak{M})$ обозначим граф с множеством вершин U и множеством ребер $U^{(2)} \setminus (\bigcup_{i=1}^{k} V_i^{(2)})$, т.е. ребра соединяют две вершины, если они принадлежат разным подмножествам покрытия.

Если U — конечное множество, то бинарными U-таблицами, имеющими n столбцов, мы будем называть отображения из $(E^n)^U$, т.е. каждому элементу U соответствует некоторая строка из 0 и 1 длины n.

Если $T \in (E^n)^U$, то через T^* обозначим такое отображение из $E^{U \otimes N_n}$, что $T^*(a, i) = (T(a))(i)$, $(a, i) \in U \otimes N_n$, т.е. $T^*(a, i)$ — это значение, стоящее в таблице на пересечении i-го столбца и строки, соответствующей a. Положим также $\mathfrak{T}_{m,n} = (E^n)^{Nm}$ и $\mathfrak{T}_{m_1,m_2,n} = \mathfrak{T}_{m_1,n} \otimes \mathfrak{T}_{m_2,n}$.

Через T^{**} обозначим такое отображение из $(E^U)^{N_n}$, что $T^*(a, i) = (T^{**}(i))(a)$, $(a, i) \in U \otimes N_n$, т.е. T^{**} — отображение, соответствующее таблице, полученной транспонированием таблицы T.

Если $\mathfrak{M}$ — покрытие U, то через $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M},n}$ обозначим множество пар $(T, \mathfrak{M})$, где $T \in (E^n)^U$; если $\mathcal{P}(G) = U$, то через $\mathfrak{T}_{G,n}$ обозначим множество пар (T, G), где $T \in (E^n)^U$.

Обобщим ранее введенное понятие теста до понятия G-теста, но для краткости сохраним за ним термин тест.

Определение 1.2.1. Пусть имеется конечное множество U, его покрытие $\mathfrak{M} = \{V_1, V_2, \ldots V_k\}$, граф G с множеством вершин U. Набор a из E^n назовем:

1) *тестом пары* $(T, \mathfrak{M})$ из $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M},n}$, если для любых a_1, a_2 из U таких, что $T(a_1) \leftrightarrow T(a_2) \geqslant a$, найдется i из N_k такое, что $a_1, a_2 \in V_i$;
2) *тестом пары* (T, G) из $\mathfrak{T}_{G,n}$, если ни для каких смежных вершин a_1, a_2 графа G не выполнено $T(a_1) \leftrightarrow T(a_2) \geqslant a$;
3) *тестом таблицы* T из $(E^n)^U$, если ни для какого b из U не выполнено $T(b) \geqslant a$.

Поясним это определение. Пусть дана U-таблица T с n столбцами и $a \in E^n$. Будем считать, что вектор a задает множество столбцов, соответствующих единицам вектора a. Если вспомнить, что $a \leftrightarrow b$, где $a, b \in E^n$, есть вектор из E^n, у которого 1 стоят на тех и только тех местах, где вектора a и b совпадают, то условие $T(a_1) \leftrightarrow T(a_2) \geqslant a$ означает, что строки таблицы, соответствующие a_1 и a_2 на столбцах, задаваемых вектором a, совпадают. Тогда множество столбцов, задаваемое вектором a, является

1) тестом пары $(T, \mathfrak{M})$ из $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M},n}$, если из того, что строки a_1, a_2 таблицы T совпадают на этом множестве столбцов, следует, что a_1, a_2 принадлежат одному элементу покрытия;
2) тестом пары (T, G) из $\mathfrak{T}_{G,n}$, если для любых смежных вершин a_1, a_2 графа G строки a_1, a_2 различаются на этом множестве столбцов;
3) тестом таблицы T из $(E^n)^U$, если в таблице T нет строки, у которой во всех позициях из данного множества столбцов стоят 1.

Определение 1.2.2. Тест a пары $(T, \mathfrak{M})$ (пары (T, G), таблицы T) назовем *тупиковым*, если никакой набор b из E^n такой, что $b < a$, не является тестом пары $(T, \mathfrak{M})$ (пары (T, G), таблицы T).

Пусть имеется таблица T из $(E^n)^U$. Определим $U^{(2)}$-таблицу $T^{(2)}$, положив $T^{(2)}(\{a_1, a_2\}) = T(a_1) \leftrightarrow T(a_2)$. Для пары (T, G) из $\mathfrak{T}_{G,n}$ положим $T_G = T^{(2)}|_{X(G)}$ и назовем ее *таблицей сравнения* этой пары; для пары $(T, \mathfrak{M})$ из $\mathfrak{T}_{\mathfrak{M},n}$, где T — U-таблица, а $\mathfrak{M}$ — покрытие множества U, положим $T_{\mathfrak{M}} = T_{G(\mathfrak{M})}$ и назовем ее таблицей сравнения пары $(T, \mathfrak{M})$.

Непосредственно из определения следует предложение.

Утверждение 1.2.3. *Следующие условия эквивалентны*:

1) *набор a является тестом (тупиковым тестом) пары $(T, \mathfrak{M})$ где T — U-таблица, а $\mathfrak{M}$ — покрытие U*;
2) *набор a является тестом (тупиковым тестом) пары $(T, G(\mathfrak{M}))$*;
3) *набор a является тестом (тупиковым тестом) таблицы $T_{\mathfrak{M}}$*.

Определение 1.2.4. Набор $x \in E^n$ назовем *тестом пары таблиц* $(T_1, T_2) \in (E^n)^A \otimes (E^n)^B$, если ни для каких $a \in A$ и $b \in B$ не выполнено неравенство $T_1(a) \leftrightarrow T_2(b) \geqslant x$. Тест x назовем *тупиковым*, если никакой $y \in E^n$ такой, что $y < x$, не является тестом.

Для пары $\tau = (T_1, T_2) \in (E^n)^A \otimes (E^n)^B$ через F_τ обозначим функцию из E^{E^n}, равную 1 на наборах, являющихся тестами пары τ, и 0 — в противном случае. Через $\theta(f)$ будем обозначать множество единиц булевской функции f.

Пару $\tau = (T_1, T_2) \in \mathcal{T}_{m_1,m_2,n}$ назовем *a-продолжаемой* в сторону T_1, если $a \in E^n \setminus T_1(N_{m_1})$ и $F_\tau = F_{\tau'}$, где $\tau' = (T_1', T_2) \in \mathcal{T}_{m_1+1,m_2,n}$, $T_1|N_{m_1} = T_1, T_1(m_1+1) = a$. Если для некоторого a

пара τ *продолжаема в сторону* T_1, то назовем ее продолжаемой в сторону T_1. Через $\mathcal{T}^{n_1,a}_{m_1,m_2,n}$ и $\mathcal{T}^{n_1}_{m_1,m_2,n}$ обозначим множества a-продолжаемых и соответственно продолжаемых в сторону T_1 пар из $\mathcal{T}_{m_1,m_2,n}$. Число a таких, что пара τ a-продолжаема в сторону T_1, назовем *длиной продолжения*.

Определим F из $(0,1)^{(0,1/2)}$ и G из $(1/2,1)^{(0,1)}$, положив $F(x) = (1R)(1+2x)\ln(1+2x) + (1-2x)\ln(1-2x)$, $G(x) = 1/2 + F^{-1}(x)$, где $\ln$ обозначает логарифм по основанию 2.

Пусть имеются f_1 из $|R|^{|R|2}$ и f_2 из $|R|^{|R|3}$.

Будем говорить, что для почти всех таблиц из $(E^n)^v$ выполнено некоторое свойство, если:

1) $f_1(|v|,n) \geqslant 0$;

2) предел максимума доли таблиц из $(E^n)^v$ по $n \to \infty$, для которых не выполнено это свойство по всем v, для которых $f_1(|v|,n) \geqslant 0$, равен 0.

Аналогично определяется выполнение свойства для почти всех пар таблиц из $(E^n)^A \otimes (E^n)^B$ при условии $f_2(|A|,|B|,n) \geqslant 0$, а также когда условие $f_1(|A|,n) \geqslant 0$ или $f(|A|,|B|,n) \geqslant 0$ заменяется на условие выполнения нескольких неравенств.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2.5. *Имеется* $\varepsilon \in (0,1/16)$.

(1) *Если* $m_2 \geqslant 2^{\varepsilon n}$ *и* $G((\ln m_2)/n) - (\ln m_1 m_2)/n - \varepsilon \geqslant 0$, *то почти все пары* (T_1,T_2) *из* $\mathcal{T}_{m_1,m_2,n}$ *не продолжаемы в сторону* T_1.

(2) *Если* $m_2 > 2^{\varepsilon n}$, $m_1 \leqslant 2^{(1-\varepsilon)n}$ *и* $G((\ln m_2)/n) - (\ln m_1 m_2)/n \leqslant 0$, *то почти все пары* (T_1,T_2) *из* $\mathcal{T}_{m_1,m_2,n}$ *продолжаемы в сторону* T_1 *и длина продолжения* $\sim 2^n$.

Из формулы Стирлинга легко получить

Утверждение 1.2.6. *Имеется* $\varepsilon \in (0,1/4)$. *Если* $n/2 \leqslant r \leqslant (1-\varepsilon)n$, *то*

$$\binom{n}{r} \asymp \frac{1}{\sqrt{n}} 2^{F(r/n-1/2)n} 2^n.$$

Если $(1/2+\varepsilon)n \leqslant r \leqslant (1-\varepsilon)n$, *то*

$$\sum_{k=r}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{r}.$$

Таблицу X из $(E^n)^A$ будем называть *разбиением*, если $0^n \notin X(A)$ и для любых различных a_1, a_2 из A выполнено $X(a_1) \& X(a_2) = 0^n$.

Разбиение X называем разбиением набора y, если $y = \bigvee_{a \in A} X(a)$. Набор S из E^n называется (X,λ)-*регулярным*, где X — разбиение из $(E^n)^A$, а $\lambda \in (0,1)$, если для любого a из A выполнено $|S\&X(a)| =]\lambda|X(a)|[$ и, кроме того, $S\bigvee_{a\in A}(\bigvee X(a)) = 1^n$.

Пусть имеется таблица B из $\mathcal{T}_{N,n}$ и набор y из E^n. Положим $X_0 \in \mathcal{T}_{1,n}$, $X_0(1) = y_k$; для k из N_N построим X_k из $\mathcal{T}_{k,n}$, положив $X_k(a) = y\&(\bigwedge_{i=1} B(i)^{a(i)})$, где $B^\sigma = B$, если $\sigma = 1$, и $B^\sigma = B \oplus 1^n$, если $\sigma = 0$.

Таблицу B назовем (λ, y)-*регулярной*, если $X_0, X_1, \ldots X_N$ являются разбиениями, и для k из N_N набор $B(k)$ является (X_{k-1}, λ)-регулярным.

Таблицу T из $(E^n)^A$ назовем (λ, ρ, n)-регулярной, где $n \in \mathbb{N}$, а $\lambda, \rho \in (0,1)$, если для любого X из E^n и любого y из E^n такого, что $|y| > \rho_n$, существует отображение f из A^{N_N} такое, что таблица $X \leftrightarrow (T \circ f)$ является (λ, y)-регулярной, где $\circ$ обозначает композицию функций.

Легко видеть, что верно

Утверждение 1.2.7. *Пусть таблица B из $\mathcal{T}_{N,n}$ является (λ, y)-регулярной. Тогда если для некоторого c из E^n выполнено $y\&B(k) \leqslant B(m) \leftrightarrow c$ и $y\&B(c) \leqslant B(t) \leftrightarrow c$, причем $k \neq l$, $t \neq m$, $k \neq m$, то верно, что $k = t$, $l = m$.*

Отсюда вытекает

Утверждение 1.2.8. *Пусть таблица B из $\mathcal{T}_{N,n}$ является (λ, y)-регулярной. Тогда если для некоторого c из E^n выполнено*

$$y\&B(k_i) \leqslant B(m_i) \leftrightarrow c, \quad i = 1, 2, 3,$$

причем k_1, k_2, k_3 попарно различны и $k_1 \neq m_1$, то верно, что $m_1 = m_2 = m_3$.

Отсюда следует

Утверждение 1.2.9. *Пусть таблица B из $(E^n)^{N_n}$ является (λ, y)-регулярной, $N \geqslant 3$. Тогда если для некоторого c из E^n выполнено*

$$y\&B(k_i) \leqslant B(m_i) \leftrightarrow c, \quad i \in N_s, \quad s \geqslant 3,$$

причем $k_1, \ldots, k_s$ попарно различны, то либо $m_1 = m_2 = \ldots = m_s$, либо $k_i = m_i$, $i \in N_s$.

Пусть имеется таблица T из $(E^n)^A$ и $m \in \mathbb{N}$, тогда положим

$$l_1(T, m) = \min_{m \subseteq A, |M| \geqslant m} |\bigvee_{a\in M} T(a)|,$$

$$l_2(T, m) = \max_{m \subseteq A, |M| \leqslant m} |\bigvee_{a\in M} T(a)|.$$

Непосредственно из определения (λ, y)-регулярности вытекает

Утверждение 1.2.10. *Пусть таблица B из $\mathcal{T}_{N,n}$ является (λ, y)-регулярной. Если $m \in N_N$, то*

$$l_1(y\&T, m) \geqslant (1-(1-\lambda)^m)|y|,$$
$$l_2(y\&T, m) \leqslant (1-(1-\lambda)^m)|y| + N.$$

Если $0 < a < |y|$ и $N \geqslant (\ln(1-\frac{a}{|y|}))/\ln(1-\lambda)$, то

$$l_1\left(y\&B, \left]\left(\ln\left(1-\frac{a}{|y|}\right)\right)/\ln(1-\lambda)\right[\right) \geqslant a.$$

Отсюда вытекает

Утверждение 1.2.11. *Пусть таблица B из $\mathcal{T}_{N,n}$ является (λ, y)-регулярной. Имеется c из E^n, $0 < |c| < |y|$. Если для попарно различных $k_1, \ldots, k_s$ из N_N выполнено либо $y\&B(k_i) \leqslant c$, $y\&B(k_i) \leqslant B(k_i) \leftrightarrow c$, $i \in N_s$, либо $y\&B(k_i) \leqslant c$, $i \in N_s$, то*

$$s \leqslant](\ln(1-|c|/|y|)/\ln(1-\lambda))[.$$

Из утверждений 1.2.9 и 1.2.11 вытекает

Утверждение 1.2.12. *Пусть таблица B из $\mathcal{T}_{N,n}$ является (λ, y)-регулярной. Пусть $k_1, \ldots, k_s$ из N_N попарно различны. Имеется a, $0 < a < |y|$, и $](\ln(1-a/|y|))/\ln(1-\ \lambda)[\geqslant\ \alpha$. Имеются $m_1, \ldots, m_s$ из N_N. Пусть для некоторых $c_1, \ldots, c_s$ из E^n выполнено либо $|c_i| \leqslant a$, $y\&B(k_i) \leqslant c_i$, $i \in N_s$, либо $|c_i| \leqslant a$, $|c_i \leftrightarrow B(m_i)| \leqslant a$, $y\&B(k_i) \leqslant B$, $(m_i) \leftrightarrow c_i$, тогда среди наборов $c_1, \ldots, c_s$ имеется не менее, чем $(](\ln(1-a)/|y|))/\ln(1-\lambda)[)^{-1}s$ попарно различных.*

Легко видеть, что верно

Утверждение 1.2.13. *Пусть таблица B из $\mathcal{T}_{N,n}$ является (λ, y)-регулярной и $B(k_1) \leqslant B(k_2) \leftrightarrow B(k_3)$, то обязательно выполнено $k_2 = k_3$.*

Пусть имеется δ из $(0, 1/16)$. Полагаем $d = (1/2)(1 - G(1 - \delta))$ и

$$æ = [F(1/2-d)/(F(1/2-d)(1-\delta/2))] + 1.$$

Считаем, что $N > 1/d$. Если $m \geqslant 2^{\delta n}$ и $m_1 m_2 \leqslant 2^{(1-\delta)n}$, то через $\mathcal{T}^N_{m_1,m_2,n}$ обозначим множество пар (T_1, T_2) из $\mathcal{T}_{m_1,m_2,n}$ таких, что:

1) таблица T_2 является $(G((\ln m_2)/N - 1/N, 1 - 1/2N, N)$-регулярной;
2) $l_2(T_1 \leftrightarrow T_2, 1) \leqslant G((\ln m_1 m_2)/n)n$, где $T_1 \leftrightarrow T_2 \in (E^n)^{N_{m_1} \otimes N_{m_2}}$, $(T_1 \leftrightarrow T_2)(k_1, k_2) = T_1(k_1) \leftrightarrow T_2(k_2)$;
3) если $A \subseteq N_{m_1}$ и $|A| \geqslant æ$, то $\mathrm{diam} T_1(A) \geqslant dn$.

Пользуясь ранее доказанным, можно показать, что

Утверждение 1.2.14. *Если* $m_2 \geqslant 2^{\delta n}$ *и* $m_1 m_2 \leqslant 2^{(1-\delta)n}$, *то для почти всех пар* (T_1, T_2) *из* $\mathcal{T}_{m_1,m_2,n}$ *верно, что* $(T_1, T_2) \in \in \mathcal{T}^N_{m_1,m_2,n}$.

Положим $\mathcal{T}^{N,a}_{m_1,m_2,n} = \mathcal{T}^N_{m_1,m_2,n} \cap \mathcal{T}^{n,a}_{m_1,m_2,n}$. Пусть $\gamma(æ, N) =]æ + 1 + \ln((æ-1)!) + \ln N[$.

Существенно используя результаты утверждений 1.2.6–1.2.13, можно показать, что выполняется

Утверждение 1.2.15. *Если* $m_2 \geqslant 2^{\delta n}$ *и* $m_1 m_2 \leqslant 2^{(1-\delta)n}$, *то*

$$|\mathcal{T}^{N,a}_{m_1,m_2,n}| \leqslant 2^{n(m_1+m_2)} 2^{æn} 2^n \sum_{k=]\Omega_1(N)[}^{N} \left(m_1 m_2 2^{-G(\frac{\ln m_2}{n} - \frac{1}{N})n} \right)^k .$$

Пусть также имеется ε из $(0, 1/16)$. Существует N_0 такое, что для $N \geqslant N_0$ верно, что $G((\ln m_2)/n - 1/N) \geqslant G(\ln m_2/n) - \varepsilon/2$. Таким образом, если $G((\ln m_2)/n) - (\ln m_1 m_2)/n - \varepsilon \geqslant 0$, то

$$|\mathcal{T}^{N,a}_{m_1,m_2,n}| \lesssim 2^{n(m_1+m_2)} 2^{æn} 2^n \sum_{k=]\Omega_1(N)[}^{N} (2^{-(\varepsilon/2)n})^k \lesssim$$
$$\lesssim 2^{n(m_1+m_2)} 2^{æn} 2^n 2^{-(\varepsilon/2)]\Omega_1(N)[n}.$$

Так как $\lim\limits_{N\to\infty} \Omega_1(N) = \infty$, то для некоторого N выполнено $|\mathcal{T}^{N,a}_{m_1,m_2,n}| \lesssim 2^{n(m_1+m_2)} 2^{-2n}$. Учитывая результат утверждения 1.2.14, получаем, что

$$|\mathcal{T}^n_{m_1,m_2,n}| \leqslant |\mathcal{T}_{m_1,m_2,n} \backslash \mathcal{T}^N_{m_1,m_2,n}| + 2^n |\mathcal{T}^{N,1^n}_{m_1,m_2,n}| \ll 2^{n(m_1+m_2)}.$$

Таким образом, доказан пункт (1) теоремы.

Легко видеть, что выполняется

Утверждение 1.2.16. *Имеется пара* $\tau = (T_1, T_2)$ *из* $\mathcal{T}_{m_1,m_2,n}$. *Длина продолжения пары* τ *в сторону* T_1 *не менее, чем*

$$2^n - m_1 - m_2 |\theta(F_\tau)|.$$

Посредством не очень сложных выкладок можно получить, что если $2^{\delta n} \leqslant m_2 \leqslant 2^{(1-\delta)n}$ и $G((\ln m_2)/n) - (\ln m_1 m_2)/n \leqslant 0$, то для почти всех пар τ из $\mathcal{T}_{m_1,m_2,n}$ верно, что $|\theta(F_\tau)| \ll 2^n/m_2$. Откуда, пользуясь утверждением 1.2.16, получаем пункт (2) теоремы 1.2.5.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}_+$, соответственно, — множества натуральных, действительных и положительных действительных чисел. Если $f, g \in \mathbb{R}^A$, где A конечно, то полагаем $\mathtt{M}f = |A|^{-1} \sum_{a\in A} f(a)$, $cov(f, g) = \mathtt{M}((f - \mathtt{M}f)(g - \mathtt{M}g))$, $\mathtt{D}f = \mathtt{M}(f - \mathtt{M}f)^2$. Полагаем, что

$\mathcal{M}$ суть множество таких непрерывных отображений α из $\mathbb{R}_+^{\mathbb{R}_+}$, что $\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x)=0$. Тогда пусть $\mathcal{B}=\{D:\ D=1/\alpha,\ \alpha\in\mathcal{M}\}$.

Пусть имеются функции $f_1,\ f_2$ из $\mathbb{R}^B$ и f_3 из $\mathbb{R}_+{}^B$ и $A\subseteq B$.

Если $a\in A$, то пишем $f_1(a)\lessgtr_{f_3(a)} f_2(a)$ в том случае, если существует C из $\mathbb{R}_+$ такое, что для всех a из A, для которых верно $f_3(a)\geqslant C$, выполнено $f_1(a)\leqslant f_2(a)$.

Если для a из A верно $f_1(a)\lessgtr_{f_3(a)} f_2(a)$ и $f_2(a)\lessgtr_{f_3(a)} f_1(a)$, то пишем $f_1(a)\ominus_{f_3(a)}f_2(a)$.

Если существует такое α из $\mathcal{M}$, что для a из A верно $f_1(a)\lessgtr_{f_3(a)} f_2(a)+\alpha(f_3(a))|f_2(a)|$, то говорим, что для a из A верно $f_1(a)\lesssim_{f_3(a)}f_2(a)$ ($f_1(a)$ не превосходит $f_2(a)$ асимптотически при $f_3(a)\to\infty$).

Если для a из A верно $f_1(a)\lesssim_{f_3(a)}f_2(a)$ и $f_1(a)\gtrsim_{f_3(a)}f_2(a)$, то $f_1(a)\sim_{f_3(a)}f_2(a)$ (асимптотически равны при $f_3(a)\to\infty$).

Если для некоторого α из $\mathcal{M}$ выполнено $f_1(a)\lessgtr_{f_3(a)}\alpha(f_3(a))\times$ $\times f_2(a)$, то пишем $f_1(a)\ll_{f_3(a)}f_2(a)$ (считаем, что $f_1(a)\gtrless_{f_3(a)}0$).

Полагаем $f_1(a)=o_{f_3(a)}(f_2(a))$, если $f_1(a)\ll_{f_3(a)}f_2(a)$.

Если существует положительное C, что для a из A верно $f_1(a)\leqslant C\cdot f_2(a)$, то пишем $f_1(a)\prec f_2(a)$.

Если же верно лишь $f_1(a)\lessgtr_{f_3(a)}C\cdot f_2(a)$, то пишем $f_1(a)\prec_{f_3(a)} f_2(a)$.

Полагаем $f_1(a)\asymp f_2(a)$, если $f_1(a)\prec f_2(a)$ и $f_1(a)\succ f_2(a)$; $f_1(a)\asymp_{f_3(a)} f_2(a)$, если $f_1(a)\prec_{f_3(a)}f_2(a)$ и $f_1(a)\succ_{f_3(a)}f_2(a)$.

Пишем $f_1(a)=O(f_2(a))$, если $f_1(a)\prec f_2(a)$ и $f_1(a)=$ $=O_{f_3(a)}(f_2(a))$, если $f_1(a)\prec_{f_3(a)}f_2(a)$ (считаем,что $f_1(a)\gtrless_{f_3(a)}0$).

В дальнейшем часто будет встречаться фраза: если $f_1(a)\lesssim$ $\lesssim_{f_3(a)}f_2(a)$, то … . Она означает следующее: пусть имеется множество A, $A\subseteq B$, такое, что, если $a\in A$, то $f_1(a)\lesssim_{f_3(a)}f_2(a)$; тогда, если $a\in A$, то … . Аналогичный смысл имеют в таких случаях и другие значки и их комбинации. Отметим, что множество A обычно будет задаваться неявно — наложением каких-либо условий на элементы B. Например так: если $f_4(a)\leqslant f_5(a)$, то $f_1(a)\lessgtr_{f_3(a)} f_2(a)$; где $f_4(a), f_5(a)\in\mathbb{R}^B$. Условие $f_4(a)\leqslant f_5(a)$ в этом случае понимается, как $a\in\{b: b\in B, f_4(b)\leqslant f_5(b)\}$.

Пусть каждому элементу a множества B поставлено в соответствие множество K_a, имеется функция f из $\mathbb{R}_+^B$ и на элементах множества $K^*=\cup_{a\in A}K_a$ задано некоторое свойство. Мы будем говорить: если $a\in A$, то для почти всех при $f\to\infty$ объектах из K_a выполнено это свойство в том случае, когда существует α из $\mathcal{M}$ такое, что для любого a из A доля объектов из K_a, для которых оно не выполнено, не превосходит $\alpha(f(a))$.

Пусть каждому a из B поставлены в соответствие еще и функции f_a^1 и f_a^2 из $\mathbb{R}^{K_a}$. Будем говорить: если $a \in A$, то $f_a^1 \overset{\text{п.в.}}{\leqslant}_{f(a)} f_a^2$ (для почти всех не превосходит), в том случае, если для почти всех при $f \to \infty$ объектов b из K_a верно $f_a^1(b) \leqslant f_a^2(b)$. Говорим: если $a \in A$, то $f_a^1 \overset{\text{п.в.}}{\lesssim}_{f(a)} f_a^2$ (асимптотически для почти всех не превосходит) в том случае, если для некоторой α из $\mathcal{M}$ верно, что для a из A выполнено $f_a^1 \overset{\text{п.в.}}{\leqslant}_{f(a)} f_a^2(1+\alpha(f(a)))$. Значки $\overset{\text{п.в.}}{=}_{f(a)}$, $\overset{\text{п.в.}}{\sim}_{f(a)}$ вводятся на основе уже определенных аналогично $\circleddash_{f(a)}$ и $\sim_{f(a)}$. Полагаем $\ln x = \ln_2 x$.

Будем считать функцию $\binom{n}{r}$ (число сочетаний) определенной для любой пары (n, r) из $\mathbb{R}_+ \otimes \mathbb{R}$. Если $r < 0$ или $r > n$, то полагаем $\binom{n}{r} = 0$, в противном случае считаем, что $\binom{n}{r} = \Gamma(n+ +1)/(\Gamma(r+1)\Gamma(n-r+1))$, где Γ— гамма-функция.

Пусть $\omega(x) = (\ln x - \ln\ln x)/2$, $\theta(x) = \ln x - \ln\ln\ln x$ и

$$H(m,\, r) = \exp(-m \cdot 2^{-r})(1 - \exp(-m \cdot 2^{-r}))^r.$$

Положим $\widehat{H}(n,\, m,\, x) = \binom{n}{x} H(m,\, x)$ для действительного x, натуральных m и n таких, что $0 \leqslant x \leqslant n-1$.

Если существует, и притом единственное, относительно x решение уравнения $\widehat{H}(n, m, x+1) = \widehat{H}(n, m, x-1)$ из интервала $(1, n-1)$, то полагаем $r(n, m)$ равным этому решению, иначе полагаем $r(n, m) = 1$.

Пусть $\varepsilon \in (1, 1/16)$, $D \in \mathcal{B}$ и $D(n) \lessgtr_n \ln\ln\ln n$. Положим функцию $\Phi_D^1(G,\, n)$ равной:

а) $\binom{n}{p^*(G)-1} d(p^*(G)\;-\;1,\, G)(p^*(G)\;-\;1)!\;\cdot\;2^{(p^*(G)-1)^2}$, если $q(G) < D(n)\ln^2 n$, $p^*(G) - 1 \leqslant \omega(n) - D(n)$;

б) $\displaystyle\sum_{r=[\omega(n)-D(n)]}^{]\min(p^*(G)-1,\,\omega(n\,q(G))+D(n))[} \binom{n}{r} d(r,\, G)\, r!\, 2^{-r^2}$, если $q(G) <$ $< D(n)\ln^2 n$, $p^*(G) - 1 > \omega(n) - D(n)$;

в) $\displaystyle\sum_{r=[\omega(n\cdot q(G))-D(n)]}^{]\omega(n\,q(G))+D(n)[} \binom{n}{r} (q(G)\, 2^{-r})^r$, если $q(G) \geqslant D(n)\ln^2 n$.

Положим:

а) $\widehat{r}_D^1(G,\, n) = \widehat{r}_D^2(G,\, n) = p^*(G) - 1$, если $q(G) < D(n)\ln^2 n$, $p^*(G) - 1 \leqslant \omega(n) - D(n)$;

б) $\widehat{r}_D^1(G,\, n) = [\omega(n) - D(n)],\quad \widehat{r}_D^2(G,\, n) =]\min(p^*(G) - 1,\, \omega(n\,q(G)) + D(n))[,$ если $q(G) < D(n)\ln^2 n$, $p^*(G) - 1 > \omega(n) - D(n)$;

в) $\widehat{r}_D^1(G,\, n) = [\omega(n\,q(G)) - D(n)],\quad \widehat{r}_D^2(G,\, n) =]\omega(n\,q(G)) + D(n)[$, если $q(G) \geqslant D(n)\ln^2 n$.

Положим:

а) $r_{D,\,\varepsilon}^1(n,\, m) = [r(n,\, m) - D(n)],\quad r_{D,\,\varepsilon}^2(n,\, m) =]r(n,\, m) + D(n)[$, если $m < n^{1+\varepsilon}$;

б) $r_{D,\,\varepsilon}^1(n,\, m) = r_{D,\,\varepsilon}^2(n,\, m) - 1 = [r(n,\, m)]$, если $n^{1+\varepsilon} \leqslant m < 2^{4\ln^2 n}$;

в) $r_{D,\,\varepsilon}^1(n,\, m) = r_{D,\,\varepsilon}^2(n,\, m) - 1 = [\theta(m)]$, если $m \geqslant 2^{4\ln^2 n}$.

Пусть, далее,

$$\Phi_{D,\,\varepsilon}^2(n,\, m) = \sum_{r=r_{D,\,\varepsilon}^1(n,\, m)}^{r_{D,\,\varepsilon}^2(n,\, m)} \binom{n}{r} \cdot H(m,\, r).$$

Положим

а) $\widetilde{r}_{D,\,\varepsilon}^1(G,\, n) = \widehat{r}_D^1(G,\, n),\ \widetilde{r}_{D,\,\varepsilon}^2(G,\, n) = \widehat{r}_D^2(G,\, n)$, если $q(G) \leqslant n^{1-\varepsilon}$;

б) $\widetilde{r}_{D,\,\varepsilon}^1(G,\, n) = r_{D,\,\varepsilon}^1(n,\, q(G)),\ \widetilde{r}_{D,\,\varepsilon}^2(G,\, n) = r_{D,\,\varepsilon}^2(n,\, q(G))$, если $q(G) > n^{1-\varepsilon}$.

Пусть

$$\Phi_{D,\,\varepsilon}(G,\, n) = \begin{cases} \Phi_D^1(G,\, n), & \text{если } q(G) \leqslant n^{1-\varepsilon}, \\ \Phi_{D,\,\varepsilon}^2(n,\, q(G)), & \text{если } q(G) > n^{1-\varepsilon}. \end{cases}$$

Значения функций $\varphi_{G,\,n}^{\text{тт}}$, $\varphi_{G,\,n,\,r}^{\text{тт}}$ и $\varphi_{G,n,r}^{\text{т}}$ на матрице T равны, соответственно, числу тупиковых тестов, числу тупиковых тестов длины r и числу тестов длины r пары (T, G).

Следующее утверждение дает описание асимптотического поведения числа тупиковых тестов для почти всех таблиц.

Теорема 1.2.17. *Если* $\varepsilon \in (0,\, 1/16)$, $0 < c_1 < c_2$, $D \in \mathcal{B}$ *и* $D(n) \lesseqgtr_n \ln\ln\ln n$, *то*:

1) *при* $1 \leqslant q(G) \leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}$ *выполнено*

$$\varphi_{G,\,n}^{\text{тт}} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \sum_{r=\widetilde{r}_{D,\,\varepsilon}^1(G,\, n)}^{\widetilde{r}_{D,\,\varepsilon}^2(G,\, n)} \varphi_{G,\,n,\,r}^{\text{тт}} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \Phi_{D,\,\varepsilon}(G,\, n);$$

2) *при* $q(G) \geqslant 2^n D(n)$ *выполнено* $\varphi^{\text{TT}}_{G,\,n} \overset{\text{п.в.}}{=}_n 0$;
3) *не существует такой действительной функции* f, *определенной на множестве пар* $(G,\, n)$, G*— граф,* $n \in \mathbb{N}$, *что при* $c_1\, 2^n \leqslant q(G) \leqslant c_2\, 2^n$ *выполнено* $\varphi^{\text{TT}}_{G,\,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n f(G,\, n)$ (*либо* $\varphi^{\text{TT}}_{G,\,n} \overset{\text{п.в.}}{=}_n f(G,\, n)$).

Определим на $(E^n)^{\mathcal{P}(G)}$ функцию $L^{\min}_{G,n}$, положив $L^{\min}_{G,n}(T)$ равной $n+1$, если пара (T, G) не имеет тестов, и равной $\min\{r : \varphi^{\text{T}}_{G,n,r}(T) \neq 0\}$ в остальных случаях. Пусть $\widehat{L}^{\min}_{G,n}$ — ограничение $L^{\min}_{G,n}$ на множество таких таблиц T, что пара (T, G) имеет тесты. Полагаем

$$S(b,a) = \ln b - \ln\ln\binom{a}{\ln b},$$

$$S_1(b,a) = \ln b - \ln\ln\binom{a}{S(b,a)}.$$

Пусть имеются ε из $(0, 1/16)$; λ_ε из $(1/2, 1)$ — решение уравнения

$$(1-\varepsilon)\cdot\lambda + \lambda\cdot\ln\lambda + (1-\lambda)\cdot\ln(1-\lambda) = 0;$$

D из $\mathcal{B}$, $D(n) \lesseqgtr_n \ln\ln n$.

Положим функцию $L^1_{D,\varepsilon}(G,n)$ равной:

- $]\ln\chi(G)[$, если $p^*(G) \leqslant (\ln n)\ln\ln n$ или $(\ln n)\ln\ln n < p^*(G) \leqslant (\ln n)^{D(n)}$ и $\chi(G) < 2((\ln n)\cdot\ln\ln n)^{3/4}$;
- $\left[S_1\left(\binom{\chi(G)}{2}, n\right) + \varepsilon\right]$, если $(\ln n)\ln\ln n < p^*(G) \leqslant (\ln n)^{D(n)}$ и $\chi(G) \geqslant 2((\ln n)\cdot\ln\ln n)^{3/4}$;
- $[S(\Delta(G), n) + \varepsilon]$, если $(\ln n)^{D(n)} < p^*(G)$, $q(G) < 2^{n\cdot\lambda_\varepsilon}$ и
$$\Delta(G) > (1-\varepsilon)q(G)(\ln q(G))/\ln\binom{n}{\ln q(G)};$$
- $[S(q(G), n) + \varepsilon]$, если $(\ln n)^{D(n)} < p^*(G)$, $q(G) < 2^{n\cdot\lambda_\varepsilon}$ и
$$\Delta(G) \leqslant (1-\varepsilon)q(G)(\ln q(G))/\ln\binom{n}{\ln q(G)}$$
или, если $(\ln n)^{D(n)} < p^*(G)$ и $2^{n\cdot\lambda_\varepsilon} \leqslant q(G) < 2^n/(\ln n)^{D(n)}$.

Положим функцию $L^2_{D,\varepsilon}(G,n)$ равной:

- $]\ln\chi(G)[$, если $p^*(G) \leqslant \ln n - D(n)$;
- $]\ln\max(\chi(G), 2D(n))[$, если $\ln n - D(n) < p^*(G) \leqslant \ln n + D(n)$;

- $]\ln p^*(G)[$, если $\ln n + D(n) < p^*(G) \leqslant (\ln n)\ln\ln n$;
- $\left[S_1\left(2\cdot\binom{p^*(G)}{2}, n\right) + \varepsilon\right] + 1$, если $(\ln n)\ln\ln n < p^*(G) \leqslant \leqslant (\ln n)^{D(n)}$;
- $[S(q(G), n) + \varepsilon] + 1$, если $p^*(G) > (\ln n)^{D(n)}$, $q(G) \leqslant \leqslant 2^n/(\ln n)^{D(n)}$.

Пусть x, $1 \leqslant x \leqslant 2\ln n$, таково, что $q(G) = \left(2^n \cdot \ln\binom{n}{x}\right)/(2^x - 1)$. Тогда положим функцию $\widehat{L}^1_{D,\varepsilon}(G, n)$ равной:

- $[n - x + \varepsilon]$, если $2^n/(\ln n)^{D(n)} \leqslant q(G) < 2^n \ln n$;
- $n - 1$, если $2^n \cdot \ln n \leqslant q(G) < 2^n \cdot (\ln n + D(n))$;
- n, если $q(G) \geqslant 2^n \cdot (\ln n + D(n))$;

и функцию $\widehat{L}^2_{D,\varepsilon}(G, n)$ равной:

- $\widehat{L}^1_{D,\varepsilon}(G, n) + 1$, если $2^n/(\ln n)^{D(n)} \leqslant q(G) < 2^n(\ln n + D(n))$;
- $\widehat{L}^1_{D,\varepsilon}(G, n)$, если $q(G) \geqslant 2^n(\ln n + D(n))$.

Следующее утверждение описывает поведение длин минимальных тестов.

Теорема 1.2.18. *Если* $\varepsilon \in (0, 1/16)$, $D \in \mathcal{B}$ *и* $D(n) \lessgtr_n \ln\ln n$, *то*:

1) *при* $1 \leqslant q(G) \leqslant 2^n/(\ln n)^{D(n)}$ *выполнено*

$$L^1_{D,\varepsilon}(G, n) \overset{\text{п.в.}}{\leqslant_n} L^{\min}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{\leqslant_n} L^2_{D,\varepsilon}(G, n);$$

2) *при* $(\ln n)^{D(n)} \leqslant q(G) \leqslant 2^n/(\ln n)^{D(n)}$ *и* $q(G) \geqslant p^*(G)^{1+\varepsilon}$ *выполнено*

$$[S(q(G), n) + \varepsilon] \overset{\text{п.в.}}{\leqslant_n} L^{\min}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{\leqslant_n} [S(q(G), n) + \varepsilon] + 1;$$

3) *при* $q(G) \geqslant 2^n/(\ln n)^{D(n)}$ *выполнено*

$$\widehat{L}^1_{D,\varepsilon}(G, n) \overset{\text{п.в.}}{\leqslant_n} \widehat{L}^{\min}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{\leqslant_n} \widehat{L}^2_{D,\varepsilon}(G, n).$$

Опишем процедуру построения тупиковых тестов.

Назовем *прямоугольной* $m \times n$*-решеткой* декартово произведение $N_{m,n} = N_m \otimes N_n$. Под *таблицей* T, *имеющей* m *строк и* n *столбцов*, наряду с ранее введенными понятиями, понимаем также отображение $T : N_{m,n} \to E$. Полагаем

$$\mathfrak{T}_{m,n} = E^{N_{m,n}}, \qquad \mathfrak{T}^* = \bigcup_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \mathfrak{T}_{m,n}.$$

Если $T \in \mathfrak{T}_{m,n}$, то через $\widehat{T}$ обозначим таблицу из $\mathfrak{T}_{N_m,n}$ такую, что $(\widehat{T}(k))(l) = T(k, l)$ для любой пары (k, l) из $N_{m,n}$. Набор x назовем *тестом* или *тупиковым тестом таблицы* T из $\mathfrak{T}_{m,n}$, если он является тестом или, соответственно, тупиковым тестом таблицы $\widehat{T}$. Полагаем $\mathcal{L}_{m,n} = (E^m \setminus \{0^m\}) \otimes (E^n \setminus \{0^n\})$. Каждой паре (a, b) из $\mathcal{L}_{m,n}$ соответствует подрешетка $a^{-1}(1) \otimes b^{-1}(1)$ решетки $N_{m,n}$.

Если имеется графическое изображение таблицы T из $\mathfrak{T}_{m,n}$ и пара (a, b) из $\mathcal{L}_{m,n}$, то, удалив строки, соответствующие нулям набора a, и столбцы, соответствующие нулям набора b, получим график таблицы $T \circ (\eta_a, \eta_b)$ из $\mathfrak{T}_{|a|,|b|}$, где

$$(T \circ (\eta_a, \eta_b))(i, j) = T(\eta_a(i), \eta_b(j)).$$

Считаем, что $T^{(a,b)} = T \circ (\eta_a, \eta_b)$, $T_{(a,b)} = T|_{a^{-1}(1)\otimes b^{-1}(1)}$.

Набор x из E^n, $x \leqslant b$, называется *тестом* или *тупиковым тестом подтаблицы* $T_{(a,b)}$, если набор $x \circ \eta_b$ является тестом или, соответственно, тупиковым тестом таблицы $T^{(a,b)}$. Это определение соответствует графической интерпретации композиций $x \circ \eta_b$ и $T \circ (\eta_a, \eta_b)$.

Под схемой работы алгоритма понимается оператор, ставящий в соответствие каждой матрице набор ее фрагментов, просматриваемых алгоритмом в процессе работы.

Пара $A = (\Sigma, F)$, где Σ каждой паре (m, n) натуральных чисел ставит в соответствие множество $\Sigma(m, n)$, $\Sigma(m, n) \subseteq \mathcal{L}_{m,n}$, а F— функция из $E^{\mathfrak{T}^*}$, называется *схемой алгоритма*, если выполнено:

1) $\{1^m\} \otimes (E^n \setminus \{0^n\}) \subseteq \Sigma(m, n)$, $(m, n) \in \mathbb{N}^2$;
2) если $F(T) = 1$, то T — тупиковая тестовая таблица, т.е. набор из всех единиц является ее единственным тупиковым тестом;
3) если $(a, b) \in \Sigma(m, n)$ и x — тупиковый тест подтаблицы $T_{(a,b)}$, то существует c, $c \leqslant a$, такое что $(c, x) \in \Sigma(m, n)$ и $F(T^{(c,x)}) = 1$.

Схема $A = (\Sigma, F)$ называется *локальной*, если для любой пары (a, b) из $\Sigma(m, n)$ верно: если $c \leqslant a$, $x \leqslant b$, то $(c, x) \in \Sigma(m, n)$ тогда и только тогда, когда

$$(c \circ \eta_a, x \circ \eta_b) \in \Sigma(|a|, |b|).$$

Для таблицы T из $\mathfrak{T}_{m,n}$ и схемы алгоритма $A = (\Sigma, F)$ определим граф $G_A(T)$ с множеством вершин

$$\mathcal{P}_A(T) = \{(a, b) : (a, b) \in \Sigma(m, n), F(T^{(a,b)}) = 1\} \cup \{(0^m, 0^n)\}$$

и множеством ребер $X_A(T)$, состоящим из таких пар вершин $\{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$, что $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, $|b_2| = |b_1| + 1$; и, если

$a_1 < a < a_2$, $(a, b_1) \in \Sigma(m,n)$, то набор b_1 является тупиковым тестом подтаблицы $T(a, b_1)$.

Схема $A = (\Sigma, F)$ называется *связной*, если для любой таблицы T из $\mathfrak{T}^*$ граф $G_A(T)$ является связным.

Введем два функционала сложности. Если A — схема алгоритма, а $T \in \mathfrak{T}^*$, то $\mu(A,T) = |\mathcal{P}_A(T)|$, а $\mu^*(A,T)$ равно числу таких наборов x, что для некоторого c верно, что $(c, x) \in \mathcal{P}_A(T)$.

Если A и B — схемы алгоритмов, то $A \leqslant B$, если для любой таблицы T из $\mathfrak{T}^*$ выполнено $\mu(A,T) \leqslant \mu(B,T)$. Аналогично определяется и неравенство $A \leqslant {}^*B$.

Класс связных локальных схем алгоритмов не пуст, поскольку этому классу принадлежит алгоритм Е. В. Дюковой, указанный в разделе 1.1. Приведем его схему: $A^* = (\Sigma^*, F^*)$, $\Sigma^*(m,n) = \mathcal{L}_{m,n}$, и $F^*(T) = 1$ тогда и только тогда, когда T — квадратная тупиковая тестовая таблица. Ясно, что схема A^* — связная и локальная.

Пусть $f \in \mathcal{H} = \{g : g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}, g(n) \leqslant n\}$. Определим систему наборов $C_f^{k,p} \in E^k$, $k \in \mathbb{N}$, $p \in N_k$, соотношениями

$$1^k = C_f^{k,k} > C_f^{k,k-1} > \dots > C_f^{k,1} > C_f^{k,0} = 0^k,$$

$$(C_f^{k,p} - C_f^{k,p-1})(\eta_{C_f^{k,p}}(f(p))) = 1.$$

Определим схему алгоритма $\mathbf{Д}(f) = (\Sigma_{\mathbf{Д}(f)}, F_{\mathbf{Д}(f)})$, где

$$\Sigma_{\mathbf{Д}(f)}(k,n) = \{(C_f^{k,p}, x) : p \in N_k, x \in E^n \setminus \{0^n\}\}$$

и, если $T \in \mathfrak{T}_{k,n}$, то $F_{\mathbf{Д}(f)}(T) = 1$ тогда, когда T — тупиковая тестовая, а $T^{(C_f^{k,k-1}, 1^n)}$ — не тупиковая.

Схема $\mathbf{Д}(f)$ — связная и локальная.

Теорема 1.2.19. *Для любой связной локальной схемы алгоритма A существует функция f из $\mathcal{H}$ такая, что $\mathbf{Д}(f) \leqslant A$ и $\mathbf{Д}(f) \leqslant {}^*A$.*

Для всех f из $\mathcal{H}$ схема $\mathbf{Д}(f)$ с точностью до перестановки строк таблицы эквивалентна схеме $\mathbf{Д} = \mathbf{Д}(f_0)$, где f_0 — тождественная функция.

Для любой T из $\mathfrak{T}^*$ граф $G_{\mathbf{Д}(f)}(T)$ — дерево.

Если $S \in N_n^{N_l}$, то $\widetilde{S}$ — такой набор из E^n, что $\widetilde{S}^{-1}(1) = S(N_l)$. Текущими параметрами работы алгоритма построения тупиковых тестов, соответствующих схеме $\mathbf{Д}$ в «момент времени» t, $t \in \mathbb{N}$, является пятерка (t, K_t, S_t, l_t, A_t), где $l_t \in \mathbb{N}$, $K_t \in N_m^{N_{l_t}}$,

$S_t \in N_n^{N_{l_t}}$, $A_t \in \mathfrak{T}_{l_t,n}$. Приведем описание работы **Д**-алгоритма на таблице T из $\mathfrak{T}_{m,n}$.

1) Если $\widehat{T}(1) = 1^n$, то T не имеет тестов, перейти к 6). В противном случае перейти к 2).

2) Положить $t = 1$, $l_t = 1$, $K_t(1) = 1$, $\widehat{A}(1) = \widehat{T}(1) \oplus 1^n$, $S_t(1) = \min(\widehat{T}(1))^{-1}(0)$. Перейти к 3).

3) Пусть $\mathcal{E} = (\widehat{T}^{(1^m, \widetilde{S_t})})^{-1}(1^{l_t})$. Проверить условие $\mathcal{E} = 0$. Если оно выполнено, то $\widetilde{S_t}$ — тупиковый тест, перейти к 5). В противном случае перейти к 4).

4) Положить $k = \min \mathcal{E}$; для $i \in N_{l_t}$ положить

$$\mathcal{E}_i = (\widehat{T}^{(C_{f_0}^{m,k}, \widetilde{S_t})})^{-1}(1_i^{l_t}),$$

$$y = \Bigl(\bigwedge_{i=1}^{l_t} \Bigl(\bigvee_{r \in \mathcal{E}_i} \widehat{T}(r)\Bigr)\Bigr) \bigwedge \Bigl(\widehat{T}(k) \oplus 1^n\Bigr).$$

Если $y = 0^n$, перейти к 5). В противном случае увеличить t на 1 и положить $l_t = l_{t-1} + 1$, $\widehat{A}_t(l_t) = y$, $(K_t, S_t, A_t)|_{N_{l_{t-1}}} = (K_{t-1}, S_{t-1}, A_{t-1})$, $S_t(l_t) = \min y^{-1}(1)$, $K_t(l_t) = k$. Перейти к 3).

5) Если не существует r такого, что

$$C_r = (\widehat{A}_t(r))^{-1}(1) \cap (N_n \setminus N_{S_t(r)}) \neq \varnothing,$$

то перейти к 6). В противном случае положить $j_0 = \min C_{r_0}$, где $r_0 = \min\{r : C_r \neq \varnothing\}$. Увеличить t на 1 и положить $S_t|_{N_{r_0-1}} = S_{t-1}|_{N_{r_0-1}}$, $S_t(r_0) = j_0$, $l_t = r_0$, $(K_t, A_t) = (K_{t-1}, A_{t-1})|_{N_{r_0}}$. Перейти к 3).

6) Закончить работу.

Если π — нумерация ребер графа G (биекция $X(G)$ на $N_{q(G)}$), то под работой пары (A, π), где A — схема алгоритма, на паре $T, G)$ из $\mathfrak{T}_{G,n}$ понимаем работу схемы A на таблице $T_G \circ \pi^{-1}$. Полагаем $\mu((A, \pi), (T, G)) = \mu(A, T_G \circ \pi^{-1})$, и аналогично для μ^*. Здесь мы не отличаем алгоритм от его схемы и T от $\widehat{T}$.

Теорема 1.2.20. *Если каждому графу G поставить в соответствие нумерацию его ребер π_G, $D \in \mathcal{B}$, $D(n) \lessgtr_n \ln\ln n$ и $1 \leqslant q(G) \lessgtr_n 2^{(\ln^2 n)/D(n)}$, то*

$$\mu((\text{Д}, \pi_G), (T, G)) = \mu^*((\text{Д}, \pi_G), (T, G)) \overset{\text{п.в.}}{\lesssim_n} \varphi_{G,n}^{\text{тт}}.$$

Примечание. Изложенные в этом разделе результаты раскрыты и доказаны во второй части данной книги.

1.3. Короткие тесты

В этом параграфе излагаются результаты А. А. Кибкало по задачам нахождения информационных весов признаков и процедур эффективного распознавания, а также быстрого построения основных семейств тестов.

В отличие от А. Е. Андреева здесь рассматривается случай, когда матрица T' состоит только из двух подматриц, T'_1 и T'_2, хотя в принципе получаемые результаты распространяемы и на общую ситуацию.

В качестве главных семейств тестов для T, называемых опорными, выбираются:

а) множество всех тестов;
б) множество всех тупиковых тестов;
в) множество тестов длины не более r;
г) множество тупиковых тестов длины не более r.

Для этих опорных множеств найдена асимптотика веса признака для почти всех таблиц с заданной долей различаемых этим признаком пар объектов, не лежащих в одной подтаблице T'_i. В частности, установлено, что вес признака по всем тестам не зависит от доли различаемых им пар и почти всегда асимптотически равен $\frac{1}{2}$.

Вес по всем тупиковым тестам убывает с ростом доли пар строк, различаемых признаком. Если же r таково, что длину не более r имеет лишь асимптотически небольшое число тестов, и в типичной ситуации почти все такие тесты являются тупиковыми, то веса признака по тестам длины не более r и тупиковым тестам длины не более r асимптотически совпадают, и, в отличие от веса по всем тупиковым тестам, растут с ростом доли пар строк из разных подматриц, различаемых признаком. Такие тесты считаются короткими.

Пусть Ω — оператор, сопоставляющий таблице T' опорное множество тестов $\Omega\,(T')$. Оператор Ω, а также алгоритм распознавания, основанный на $\Omega\,(T')$, считается устойчивым, если отношение $|\Omega(T') \cap \Omega(T^*)|/|\Omega(T') \cup \Omega(T^*)|$ близко к единице при небольших отличиях таблиц T' и T^*.

Для оператора Ω типа а) почти все наборы признаков являются тестами и, как отмечалось выше, он, тем самым, не представляет интереса.

Для типов б), в) и г) установлено следующее. Оказалось, что при малых искажениях обучающей таблицы T' множество всех тупиковых тестов почти полностью меняется, в то время как множество коротких тестов почти полностью сохраняется. Кроме того, множество «очень коротких» тестов, длина которых близка к минимальной, также изменяется почти полностью.

Указанные свойства весов признаков и устойчивости опорного множества тестов означают, что основную информацию о различиях между подматрицами T'_1 и T'_2 несет множество коротких тестов, а тесты большой длины и близкие к минимальным представляют собой случайный фон.

А. А. Кибкало построил алгоритмы $\mathbf{Д}_1$ и $\mathbf{Д}_2$ отыскания коротких тестов, являющихся асимптотически оптимальными при существенно более общих предположениях, чем все остальные.

Алгоритм $\mathbf{Д}_1$ отыскания всех коротких тестов является модификацией алгоритма А. Е. Андреева, а алгоритм $\mathbf{Д}_2$ предназначен для построения всех тестов длины не более, чем r.

Пусть $\widetilde{x} \in E^n \setminus \{\widetilde{0^n}\}$ и $|\widetilde{x}|$ равно числу единиц в наборе $\widetilde{x}$. Определим отображения $\eta_{\widetilde{x}}$, $\eta_{\widetilde{x}} : N_{|\widetilde{x}|} \to N_n$, положив $\eta_{\widetilde{x}}(i) = k_i$, $i \in N_{|\widetilde{x}|}$, где k_i — номер i-й единицы набора $\widetilde{x}$.

Если в наборе $\widetilde{y} \in E^n$ вычеркнуть координаты, соответствующие нулям набора $\widetilde{x}$, то полученный набор обозначим через $\widetilde{y} \circ \eta_{\widetilde{x}}$.

Для $\widetilde{x}$ из E^n определим отображение $\pi_{\widetilde{x}}$, $\pi_{\widetilde{x}} : E^n \to E^{|\widetilde{x}|}$ так, что $\pi_{\widetilde{x}}(\widetilde{y}) = \widetilde{y} \circ \eta_{\widetilde{x}}$. Если первые l, $l \in N_n$, координат набора $\widetilde{x}$ из E^n равны 1, а остальные — 0, то отображение $\pi_{\widetilde{x}}$ записываем $\pi_{n,l}$.

Если G — граф, то через $\mathcal{P}(G)$, $X(G)$ обозначаются, соответственно, множества вершин и ребер графа G. Если A и B — конечные множества, $A \cap B = \varnothing$, то через $G_{A,B}$ обозначим полный двудольный граф такой, что $\mathcal{P}(G) = A \cup B$, $X(G) = A \otimes B$.

Если U — конечное множество, то бинарными U-таблицами, имеющими n столбцов, называются отображения T, $T : U \to E^n$. Множество таких таблиц обозначим через $\mathfrak{T}_{U,n}$. Если V_1, V_2 — конечные множества, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, то полагаем $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n} = \mathfrak{T}_{V_1,n} \otimes \mathfrak{T}_{V_2,n}$. В данном разделе символы T, V_1, V_2 будут использоваться только в указанном выше смысле; будем также обозначать $m_1 = |V_1|$, $m_2 = |V_2|$, $m = m_1 m_2$.

Набор $\widetilde{x}$ из E^n называется *тестом пары таблиц* $T = (T_1, T_2)$ из $\mathfrak{T}_{A,B,n}$, если ни для каких a_1 из A и a_2 из B не выполнено

$$T_1(a_1) \circ \eta_{\widetilde{x}} = T_2(a_2) \circ \eta_{\widetilde{x}}.$$

Если $T = (T_1, T_2)$ — пара таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$, то таблицей сравнения для T назовем таблицу $\widehat{T}$ из $\mathfrak{T}_{V_1 \otimes V_2,n}$, такую, что для любых $a_1 \in V_1$, $a_2 \in V_2$ выполнено $\widehat{T}((a_1, a_2)) = T_1(a_1) \leftrightarrow T_2(a_2)$.

Если T — пара таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$, то так как $X(G_{V_1,V_2}) = V_1 \oplus V_2$, можно считать, что $\widehat{T} \in \mathfrak{T}_{X(G_{V_1,V_2}),n}$.

Обозначим через $\varphi^{\text{т}}_{V_1,V_2,n,\widetilde{x}}$, где $\widetilde{x} \in E^n \setminus \{\widetilde{0^n}\}$, функцию, определенную на множестве $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$ и принимающую значение 1 на таких парах таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$, что $\widetilde{x}$ — тест пары T, и принимающую значение 0 на остальных парах таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$. Для r из N_n через $\varphi^{\text{т}}_{V_1,V_2,n,r}$ обозначим функцию, равную числу тестов длины r пары таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$, а через $\varphi^{\text{т}}_{V_1,V_2,n}$ — функцию, равную числу всех тестов пары таблиц T, тогда если E^n_r — множество всех наборов из E^n, содержащих ровно r единиц, то

$$\varphi^{\text{т}}_{V_1,V_2,n,r} = \sum_{\widetilde{x} \in E^n_r} \varphi^{\text{т}}_{V_1,V_2,n,\widetilde{x}} \quad \text{и} \quad \varphi^{\text{т}}_{V_1,V_2,n} = \sum_{r=1}^{n} \varphi^{\text{т}}_{V_1,V_2,n,r}.$$

Аналогично определяется функция $\varphi^{\text{тт}}_{V_1,V_2,n,\widetilde{x}}$, которая равна 1, если $\widetilde{x}$ — тупиковый тест пары таблиц T, и 0 — в остальных случаях. Определим также функции $\varphi^{\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r}$ — число тупиковых тестов длины r, $\varphi^{\text{тт}}_{V_1,V_2,n}$ — число всех тупиковых тестов, $\varphi^{\text{кт}}_{V_1,V_2,n,r}$ — число тестов длины не более r, $\varphi^{\text{ктт}}_{V_1,V_2,n,r}$ — число тупиковых тестов длины не более r. Для этих функций выполнено

$$\varphi^{\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r} = \sum_{\widetilde{x} \in E^n_r} \varphi^{\text{тт}}_{V_1,V_2,n,\widetilde{x}}, \quad \varphi^{\text{тт}}_{V_1,V_2,n} = \sum_{r=1}^{n} \varphi^{\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r},$$

$$\varphi^{\text{кт}}_{V_1,V_2,n,r} = \sum_{j=1}^{r} \varphi^{\text{т}}_{V_1,V_2,n,j}, \quad \varphi^{\text{ктт}}_{V_1,V_2,n,r} = \sum_{j=1}^{r} \varphi^{\text{тт}}_{V_1,V_2,n,j}.$$

Пусть ∇ — один из значков «т», «тт», а Δ — один из значков «т», «тт», «кт», «ктт». Для $i \in N_n$ и $r \in N_n$ определим функции

$$\varphi^{\nabla,i}_{V_1,V_2,n,r} = \sum_{\widetilde{x} \in E^n_r,\ \widetilde{x}(i)=1} \varphi^{\nabla}_{V_1,V_2,n,\widetilde{x}}, \quad \varphi^{\nabla,i}_{V_1,V_2,n} = \sum_{r=1}^{n} \varphi^{\nabla,i}_{V_1,V_2,n,r},$$

$$\varphi^{\text{к}\nabla,i}_{V_1,V_2,n,r} = \sum_{j=1}^{r} \varphi^{\nabla,i}_{V_1,V_2,n,j}.$$

Определим на $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$ функции $\psi^{\Delta,i}_{V_1,V_2,n,r}$, $\psi^{\nabla,i}_{V_1,V_2,n}$, равные доле тестов соответствующего вида, содержащих i-й признак:

$$\psi^{\Delta,i}_{V_1,V_2,n,r} = \frac{\varphi^{\Delta,i}_{V_1,V_2,n,r}}{\varphi^{\Delta}_{V_1,V_2,n,r}} \quad \text{и} \quad \psi^{\nabla,i}_{V_1,V_2,n} = \frac{\varphi^{\nabla,i}_{V_1,V_2,n}}{\varphi^{\nabla}_{V_1,V_2,n}}.$$

Функции $\psi^{\nabla,i}_{V_1,V_2,n}$, $\psi^{\Delta,i}_{V_1,V_2,n,r}$ называются весами i-го признака в паре таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$, а именно:

$\psi^{T,i}_{V_1,V_2,n}$ — вес по всем тестам,
$\psi^{\text{ТТ},i}_{V_1,V_2,n}$ — вес по всем тупиковым тестам,
$\psi^{T,i}_{V_1,V_2,n,r}$ — вес по всем тестам длины r,
$\psi^{\text{ТТ},i}_{V_1,V_2,n,r}$ — вес по всем тупиковым тестам длины r,
$\psi^{\text{КТ},i}_{V_1,V_2,n,r}$ — вес по всем тестам длины не более r,
$\psi^{\text{КТТ},i}_{V_1,V_2,n,r}$ — вес по всем тупиковым тестам длины не более r.

Можно считать, что $i = 1$ и индекс i далее можно опускать.

При $\alpha \in (0,1)$, $\varepsilon \in (0, 1/2)$ обозначим через $\mathfrak{T}^{\alpha,\varepsilon}_{V_1,V_2,n}$ множество таких пар таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$, что $\varepsilon m_i \leqslant |(\pi_{n,1} \circ T_i)^{-1}(1)| \leqslant (1-\varepsilon)m_i$, $i \in N_2$, и $|(\pi_{n,1} \circ \widehat{T})^{-1}(1)| = \alpha m_1 m_2$. Рассматриваются такие α, что $\mathfrak{T}^{\alpha,\varepsilon}_{V_1,V_2,n}$ непусто. Ясно, что для каждого ε из $(0, 1/2)$ такие α лежат на отрезке $[2\varepsilon - 2\varepsilon^2, 1 - 2\varepsilon + 2\varepsilon^2]$, который обозначаем I^ε.

Через $\psi^{\alpha,T}_{V_1,V_2,n}$, $\psi^{\alpha,\text{ТТ}}_{V_1,V_2,n}$, $\psi^{\alpha,T}_{V_1,V_2,n,r}$, $\psi^{\alpha,\text{ТТ}}_{V_1,V_2,n,r}$, $\psi^{\alpha,\text{КТ}}_{V_1,V_2,n,r}$, $\psi^{\alpha,\text{КТТ}}_{V_1,V_2,n,r}$ обозначим сужение соответствующих весовых функций на множество $\mathfrak{T}^{\alpha,\varepsilon}_{V_1,V_2,n}$.

Положим

$$\begin{aligned} r^\varepsilon_{1,k}(m) &= \left]\ln m - (1-\varepsilon)\ln\ln m\right[, \\ r^\varepsilon_{2,k}(m) &= \left]\ln m - (1+\varepsilon)\ln\ln\ln m\right[, \\ \widetilde{r}^\varepsilon_{1,k}(m) &= \left]\ln m - (2-\varepsilon)\ln\ln m\right[, \\ \widetilde{r}^\varepsilon_{2,k}(m) &= \left]\ln m - (1+\varepsilon)\ln\ln m\right[. \end{aligned}$$

Понятно, что $\widetilde{r}^\varepsilon_{1,k}(m) < \widetilde{r}^\varepsilon_{2,k}(m) < r^\varepsilon_{1,k}(m) < r^\varepsilon_{2,k}(m)$.

Теорема 1.3.1. *Пусть* c_1, c_2, ε — *константы,* $0 < c_1 < 1 < c_2$, $\varepsilon \in (0, \min(1/32, c_1/(20c_2)))$. *Тогда если* $n^{c_1} \leqslant m_1 m_2 \leqslant n^{c_2}$, $m_1 \asymp_n m_2$, α, α_1, $\alpha_2 \in I^\varepsilon$, *то*

1. *Существует такая функция* $\Psi^\alpha(n, m_1 m_2)$, *что*

$$\psi^{\alpha,\text{ТТ}}_{V_1,V_2,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \Psi^\alpha(n, m_1 m_2)$$

и при $\alpha_1 < \alpha_2$

$$\Psi^{\alpha_1}(n, m_1 m_2) \ll_n \Psi^{\alpha_2}(n, m_1 m_2).$$

2. $\psi^{\alpha,T}_{V_1,V_2,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \frac{1}{2}$.
3. *Существует такая функция* $\Psi^{\alpha}_k(n, m_1 m_2, r)$, *что при* $r \in [\widetilde{r}^{\varepsilon}_{1,k}(m_1 m_2), r^{\varepsilon}_{2,k}(m_1 m_2)]$

$$\psi^{\alpha,\text{КТ}}_{V_1,V_2,n,r} \sim \psi^{\alpha,\text{КТТ}}_{V_1,V_2,n,r} \sim \psi^{\alpha,T}_{V_1,V_2,n,r} \sim \psi^{\alpha,\text{ТТ}}_{V_1,V_2,n,r} \sim \Psi^{\alpha}_k(n, m_1 m_2, r).$$

Если $\alpha_1 < \alpha_2$ *и* $r \in [r^{\varepsilon}_{1,k}(m_1 m_2), r^{\varepsilon}_{2,k}(m_1 m_2)]$, *то*

$$\Psi^{\alpha_1}_k(n, m_1 m_2, r) \gg_n \Psi^{\alpha_2}_k(n, m_1 m_2, r).$$

Если $\alpha < \frac{1}{2}$ *и* $r \in [\widetilde{r}^{\varepsilon}_{1,k}(m_1 m_2), \widetilde{r}^{\varepsilon}_{2,k}(m_1 m_2)]$, *то*

$$\Psi^{\alpha}_k(n, m_1 m_2, r) \sim_n 1.$$

Теорема 1.3.1 описывает асимптотическое поведение весов признаков по различным множествам тестов в зависимости от доли различаемых признаком пар объектов, не лежащих в одном классе. Из нее вытекает следующее:

а) вес признака по всем тупиковым тестам имеет тенденцию к уменьшению с увеличением доли различаемых признаком пар объектов;

б) вес признака по всем тестам не зависит от доли различаемых признаком пар объектов и почти всегда равен $1/2$;

в) вес признака по всем коротким тестам (коротким тупиковым тестам) растет с увеличением доли различаемых признаков пар объектов;

г) вес признака, различающего больше половины пар объектов, по множеству тестов, длина которых близка к минимальной, почти всегда равна единице.

Поэтому в качестве опорного множества тестового алгоритма распознавания целесообразно использовать множество всех коротких тестов, т. е. тестов, длина которых не превосходит некоторого числа из интервала $(\ln m - \ln\ln m, \ln m - \ln\ln\ln m)$, а в качестве меры информативности признака — его вес по множеству коротких тестов.

Рассмотрим вопрос устойчивости опорных множеств тестов различного вида при малых искажениях обучающей таблицы.

С этой целью определяется множество $\mathfrak{T}^2_{V_1,V_2,n} = \mathfrak{T}_{V_1,V_2,n} \otimes \mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$ и рассматривается конечное вероятностное пространство со следующим распределением:

$$\mathrm{P}\{T,T^*\} = p^{\widetilde{\rho}(T,T^*)} \cdot (1-p)^{(|V_1|+|V_2|)n-\widetilde{\rho}(T,T^*)} \cdot 2^{-(|V_1|+|V_2|)n},$$

где $\widetilde{\rho}(T,T^*)$ — число отличий пар таблиц T и T^* из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$, т. е.

$$\widetilde{\rho}(T,T^*) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{a\in V_i} \rho(T_i(a), T_i^*(a)).$$

Это распределение моделирует ситуацию, когда каждая компонента пары таблиц T независимо от других с вероятностью p меняет свой значение на противоположное, и в результате изменений возникает пара таблиц T^*.

Определим на $\mathfrak{T}^2_{V_1,V_2,n}$ функции $\varphi^{\text{тт},\&}_{V_1,V_2,n}$, $\varphi^{\text{тт},\vee}_{V_1,V_2,n}$, $\varphi^{\text{тт},\&}_{V_1,V_2,n,r}$, $\varphi^{\text{тт},\vee}_{V_1,V_2,n,r}$, $\varphi^{\text{тт},\vee}_{V_1,V_2,n,r}$, $\varphi^{\text{ктт},\&}_{V_1,V_2,n,r}$, $\varphi^{\text{ктт},\vee}_{V_1,V_2,n,r}$, $\varphi^{T,\&}_{V_1,V_2,n,r}$, $\varphi^{T,\vee}_{V_1,V_2,n,r}$, $\varphi^{\text{кт},\&}_{V_1,V_2,n,r}$, $\varphi^{\text{кт},\vee}_{V_1,V_2,n,r}$ так, что функции со значком & задают число наборов из E^n, являющихся тестами соответствующего вида как для правильно заданной, так и для искаженной матрицы, а функции со значком $\vee$ — число наборов, являющихся тестами хотя бы одной из этих таблиц.

Множество тестов любого из указанных видов называется *устойчивым к искажениям*, если $\varphi^{*,\&} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{*,\vee}$, где φ^* — функция, задающая число тестов соответствующего вида.

Теорема 1.3.2. *Если* $\varepsilon \in (0, \min(1/32, c_1/(20c_2)))$, $0 < c_1 < 1 < c_2$, $n^{c_1} \leqslant m_1m_2 \leqslant n^{c_2}$, $(\ln m_1m_2)^{-2} \ll_n p \ll_n (\ln m_1m_2)^{-(1+\varepsilon)}$, $\nabla \in \{\text{т}, \text{тт}, \text{кт}, \text{ктт}\}$, *то*

1. *при* $r = \,]\ln m_1m_2 - \varepsilon \ln\ln m_1m_2[$ *или* $r = \,]\ln m_1m_2 - b\ln\ln\ln m_1m_2[$, $b > 1+\varepsilon$ *выполнено*
$$\varphi^{\nabla,\&}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{\nabla,\vee}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \binom{n}{r}\exp\left\{-\frac{m_1m_2}{2^r}\right\};$$
2. $\varphi^{\text{тт},\&}_{V_1,V_2,n} \ll_n \varphi^{\text{тт},\vee}_{V_1,V_2,n}$;
3. *при* $r = \,]\ln m_1m_2 - a\ln\ln m_1m_2[$, $a \in (1+\varepsilon, 2-\varepsilon)$ *выполнено*
$$\varphi^{\nabla,\&}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\ll}_n \varphi^{\nabla,\vee}_{V_1,V_2,n,r}.$$

Эта теорема описывает асимптотическое поведение множества тупиковых тестов пар таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$ при искажениях таблиц, задаваемых распределением вероятностей P. При таких искажениях почти все тупиковые тесты правильно заданной пары таблиц являются тупиковыми тестами искаженной пары таблиц, и наоборот, в то время как множество коротких тестов практически не изменяется. Кроме того, множество тестов (тупиковых тестов), длина которых близка к минимальной, также изменяется почти полностью. Поэтому распознающие алгоритмы, использующие в качестве опорного множества множество всех коротких тестов пар таблиц, будут устойчивыми к малым искажениям обучающей информации.

А. А. Кибкало предложил алгоритмы построения коротких тестов.

Если T — пара таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$, то назовем нумерацией строк таблицы сравнения $\widehat{T}$ (или ребер графа G_{V_1,V_2}) взаимно-однозначное отображение $\pi : X(G_{V_1,V_2}) \to N_{m_1m_2}$.

Пусть $\widehat{T}_\pi = \widehat{T} \circ \pi^{-1}$ и $\mathfrak{T}^*_{m,n}$ — множество таблиц S, $S : N_m \to$ $\to E^n$, положим $\mathfrak{T}^* = \cup_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}\mathfrak{T}^*_{m,n}$. Пусть $S \in \mathfrak{T}^*$, A — алгоритм построения тестов (тупиковых тестов). Под сложностью работы алгоритма $\mu^{\text{т}}(A,S)$ $(\mu^{\text{тт}}(A,S))$ понимается, как и ранее при описании результатов А. Е. Андрееева, число наборов из E^n, проверяемых в алгоритме на принадлежность к множеству тестов (тупиковых тестов) таблицы S.

Предлагаются два алгоритма построения коротких тестов.

Алгоритм $\mathbf{Д}_1$ строит все тупиковые тесты длины не более r и является модификацией алгоритма А. Е. Андреева.

Алгоритм $\mathbf{Д}_2$ строит все тупиковые тесты длины не более r.

Набор S, состоящий из l чисел из N_n, отождествим с отображением $S : N_l \to N_n$. Пусть $\widetilde{S}$ — такой набор из E^n, что $\widetilde{S}^{-1}(1) = S(N_l)$, $\widetilde{T}^{\widetilde{S}}_\pi = \widehat{T}_\pi \circ \pi_{\widetilde{S}}$.

Доопределим таблицу $\widehat{T}_\pi$ на N_{m+1} так, что $\widehat{T}_\pi(m+1) = \widetilde{0}^n$.

Текущими параметрами алгоритма $\mathbf{Д}_2(r)$ будут t, K_t, S_t, l_t, A_t, M_t, где t — номер проверяемого алгоритмом набора из E^n, l_t — длина этого набора. На шаге номер t алгоритм проверяет, будет ли набор $\widetilde{S}_t$ из E^n, где $S_t : N_{l_t} \to N_n$, тестом таблицы $\widehat{T}_\pi$. Набор K_t, $K_t : N_{l_t} \to N_{m+1}$, и таблицы A_t, M_t из $\mathfrak{T}^*_{l_t,n}$ служат для организации работы алгоритма.

Работа алгоритма $\mathbf{Д}_2(r)$ на таблице $\widehat{T}_\pi$, $r > 1$, осуществляется следующим образом.

1. Если $\widehat{T}_\pi(1) = \widetilde{1}^n$, то $\widehat{T}_\pi$ не имеет тестов, перейти к 7. В противном случае перейти к 2.
2. Положить $t = 1$, $l_t = 1$, $K_t(1) = 1$, $A_t(1) = \widehat{T}_\pi(1) \oplus \widetilde{1}^n$, $M_t(1) = \widetilde{0}^n$, $S_t(1) = \min A_t(1)^{-1}(0)$. Перейти к 3.
3. Положить $\mathcal{E}$ равным $(\widehat{T}^{\widetilde{S}_t}_\pi)^{-1}(\widetilde{1}^{l_t})$, если $K_t(l_t) < m+1$ и $\{m+1\}$ — в противном случае. Если $\mathcal{E} \cap N_m \neq \varnothing$, то

$\widetilde{S}_t$ — тест. Если $l_t = r-1$, то перейти к 5. В противном случае перейти к 4.

4. Положить $k = \min \mathcal{E}$ и $\widetilde{y} = (\widehat{T}_\pi(k) \vee M_t(l_t)) \oplus \widetilde{1}^n$. Если $\widetilde{y} = \widetilde{0}^n$, то перейти к 6. В противном случае положить $t = t+1$, $l_t = l_{t-1}+1$, $A_t(l_t) = \widetilde{y}$, $S_t(l_t) = \min \widetilde{y}^{-1}(1)$, $K_t(l_t) = k$, $M_t(l_t) = M_{t-1}(l_{t-1})$, $(K_t, S_t, A_t, M_t)|_{N_{l_t-1}} = (K_{t-1}, S_{t-1}, A_{t-1}, M_{t-1})$, перейти к 3.
5. Положить $\widetilde{y} = ((\bigvee\limits_{j \in \mathcal{E}} \widehat{T}(i)) \vee M_t(l_t)) \oplus \widetilde{1}^n$. $\widetilde{S}_t \oplus \widetilde{0}^n_j$ — тест для любого $j \in \widetilde{y}^{-1}(1)$. Положить $t = t + |\widetilde{y}|$,
$$(l_t, S_t, K_t, A_t, M_t) = (l_{t-|\widetilde{y}|}, S_{t-|\widetilde{y}|}, K_{t-|\widetilde{y}|}, A_{t-|\widetilde{y}|}, M_{t-|\widetilde{y}|}).$$
Перейти к 6.
6. Положить для $j \in N_{l_t}$
$$C_j = (A_t(j))^{-1}(1) \cap (N_n \setminus N_{S_t(j)}).$$
Если $C_j \neq \varnothing$ для всех j из N_{l_t}, то перейти к 7. В противном случае положить $t = t+1$, $l_t = \max\{j : C_j \neq \varnothing\}$, $M_t(l_t) = M_{t-1}(l_t) \vee \widetilde{0}^n_{S_{t-1}(l_t)}$, $S_t(l_t) = \min C_{l_t}$, $(S_t, M_t)|_{N_{l_t-1}} = (S_{t-1}, M_{t-1})|_{N_{l_t-1}}$, $(K_t, A_t) = (K_{t-1}, A_{t-1})|_{N_{l_t}}$. Перейти к 3.
7. Закончить работу.

Теорема 1.3.3. *Если π — произвольная нумерация ребер графа G_{V_1,V_2}, T — пара таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$, то имеет место*:

1. *при $c > 1$, $\ln m \leqslant (\ln n)^c$, $a \in (0, 1/c)$ и $r =]\ln m - a \ln\ln m[$ выполнено*
$$\mu^{\text{тт}}(\mathbf{Д}_1(r), \widehat{T}_\pi) \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \mu^{\text{т}}(\mathbf{Д}_2(r), \widehat{T}_\pi) \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{\text{КТТ}}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{\text{КТ}}_{V_1,V_2,n,r};$$
2. *при $\varepsilon \in (0,1)$, $\ln m \leqslant 2^{(\ln n)^{1-\varepsilon}}$, $b \in (1, \dfrac{1}{1-\varepsilon})$ и $r =]\ln m - b \ln\ln\ln m[$ выполнено*
$$\mu^{\text{тт}}(\mathbf{Д}_1(r), \widehat{T}_\pi) \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \mu^{\text{т}}(\mathbf{Д}_2(r), \widehat{T}_\pi) \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{\text{КТТ}}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{\text{КТ}}_{V_1,V_2,n,r}.$$

Изложенные в этом разделе результаты раскрыты и доказаны в третьей части данной книги.

1.4. Тесты для функций k-значной логики

Вычислительные системы строятся из элементов, в которых соответствие между входными и выходными сигналами описывается некоторой логической функцией.

При сборке вычислительных систем и их эксплуатации могут возникать ошибки типа неверных соединений элементов и др. В этом случае вся система начинает работать не так, как проектировалось. Возникает задача проверки того, верно ли функционирует система. В общем случае нет другого пути, кроме как проверить все соответствия выходных значений системы ее входным воздействиям, что, конечно, весьма громоздко и требует больших усилий.

Реально же ошибок в системе происходит не очень много и, следовательно, установление верности функционирования системы не обязательно связано с большим перебором возможностей.

Основным видом внешнего воздействия для проверки правильности работы системы является подача входных сигналов на систему и проверка выходных реакций на нее.

Иногда удается за счет анализа небольшого числа таких соответствий установить, верно ли работает система. Такие соответствия называют тестовыми. Таким образом, задача проверки правильности работы системы отождествляется с нахождением небольшого числа тестовых соответствий, по которым и определяется исправность системы.

Здесь мы изложим результаты Г. Р. Погосяна по этому направлению.

Формализуем сказанное.

Пусть $n, k \in \mathbb{N}$, $E_k = \{1, 2, \ldots, k\}$, $X^n = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ и $N_n = \{1, 2, ..., n\}$.

Отождествляем элемент с функцией $f : E_k^n \to E_k$, которую называем *функцией k-значной логики*. Такие функции обычно записываются в виде $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, где переменные x_i, как и сама функция, принимают значения из E_k. Класс всех таких функций обозначают через P_k^n, полагая, что $P_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_k^n$.

Пусть $\varphi : E_k^n \to E_k^n$. Это отображение называем φ-ошибкой. Пусть Φ_k^n — класс всех φ-ошибок от n переменных и $\Phi_k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Phi_k^n$. С каждой φ-ошибкой и f связываем функцию $f_\varphi(x_1, x_2, ..., x_n) = f(\varphi(x_1, x_2, ..., x_n))$, которую называем *$\varphi$-искажением функции f*.

Пусть $\Phi \subseteq \Phi_k^n$ и $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_s\}$.

Для нас важно установление того, когда $f \neq f_{\varphi_i}$ при любых $i = 1, 2, ..., s$. Это осуществляется с помощью понятия теста, введенного ранее.

Подмножество $T \subseteq E_k^n$ называем *проверяющим тестом для функции $f \in P_k^n$* по отношению к классу ошибок Φ, если для любой ошибки $\varphi \in \Phi$ выполнено либо $f(\alpha) = f(\varphi(\alpha))$ для всех наборов α из E_k^n, либо для некоторого набора β из T выполнено $f(\beta) = f(\varphi(\beta))$.

Пусть $M(f,\Phi)$ — множество всех проверяющих тестов для f относительно Φ, тогда функция

$$L(f,\Phi) = \min_{T \in M(f,\Phi)} |T|$$

называется *тестовой сложностью функции* f относительно Φ.

Тест $T \in M(f,\Phi)$ называется *минимальным*, если $|T| = L(f,\Phi)$.

Вводим *функцию Шеннона для длины проверяющего теста*, полагая

$$L(n,\Phi) = \max_{f \in P_k^n} L(f,\Phi).$$

Введем класс неисправностей F_c^k, называемый классом констант, следующим образом:

$$F_c^k = \{\varphi_\gamma : \gamma \in E_{k+1}^n \setminus (k,k,...,k),\quad \forall\ \alpha \in E_k^n \left(\varphi_\gamma(\alpha) = (c_1 * \alpha_1, ..., c_n * \alpha_n)\right)\},$$

где $\gamma = (c_1, ..., c_n)$, $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, $c_i * \alpha_i = c_i$, если $c_i \in E_k^n$ и $c_i * \alpha_i = \alpha_i$, если $c_i = k$.

Теорема 1.4.1. *Для любых $n \leqslant 1$ и $k \leqslant 2$ имеет место*

$$L\left(n, F_c^k\right) = \begin{cases} 2n - 2t, & \textit{если} \quad k^{t-1} + t < n \leqslant k^t + t; \\ 2n - 2t + 1, & \textit{если} \quad n = k^{t-1} + t. \end{cases}$$

Кратностью ошибки $\varphi_\gamma \in F_c^k$ называем число координат набора $\gamma = (c_1, ..., c_n)$, отличных от k. Множество всех ошибок из F_c^k, имеющих кратность не более, чем p, обозначим через $F_c^k(p)$.

Пусть $M \subseteq E_k$. Положим

$$F_M^k = \left\{\varphi_\gamma \in F_c^k : \forall i \in N_n \left(\gamma_i \in M \cup \{k\}\right)\right\},$$

где $\gamma = (\gamma_1, ..., \gamma_n)$. Если $|M| = 1$ и $M = \{\mu\}$, то вместо F_M^k пишем F_μ^k.

Теорема 1.4.2. *Для любых $n \geqslant 1$, $k \geqslant 2$, $p \in N_n$ имеет место*

$$L\left(n, F_c^k(p)\right) = L\left(n, F_c^k\right).$$

Теорема 1.4.3. *Для любых $n \geqslant 1$, $k \geqslant 2$, $\mu \in N_n$ имеет место*

$$L\left(n, F_\mu^k\right) = n.$$

Теорема 1.4.4. *Для любых $n \geqslant 1$, $k \geqslant 2$ и любого подмножества $M \subseteq E_k$ такого, что $|M| \geqslant 2$, имеет место*

$$L\left(n, F_{\mu}^{k}\right) = L\left(n, F_{c}^{k}\right).$$

Введем класс ошибок F_{st}^{k}, называемых *слипаниями*. С каждой ошибкой $\varphi \in F_{st}^{k}$ однозначно связываем разбиение $S(\varphi)$ множества переменных X^n на непересекающиеся непустые подмножества $Z_1(\varphi), ..., Z_{q_\varphi}(\varphi)$, где $q_\varphi \in N_{n-1}$. При этом для любого набора α из E_k^n полагаем $\varphi(\alpha) = \beta = (b_1, ..., b_n)$, где для каждого i из N_n выполнено $b_i = \max\{a_j : x_j \in Z_l(\varphi)\}$, если $x_i \in Z_l(\varphi)$, $l \in N_{q_\varphi}$.

Теорема 1.4.5. *Для любых $n \geqslant 2$, $k \geqslant 2$, $\mu \in N_n$ имеет место*

$$L\left(n, F_{st}^{k}\right) = n - 1.$$

Кратностью ошибки $\varphi \in F_{st}^{k}$ называем величину $p(\varphi) = n - q_\varphi$, где q_φ — количество подмножеств множества x^n в разбиении $S(\varphi)$. Пусть $F_{st}^{k}(p)$ — множество всех ошибок из F_{st}^{k}, имеющих кратность не более, чем p.

Теорема 1.4.6. *Для любых $n \geqslant 2$, $k \geqslant 2$ и $p \in N_{n-1}$ имеет место*

$$L\left(n, F_{st}^{k}(p)\right) = L\left(n, F_{st}^{k}\right).$$

В случае, когда $k = 2$, полагаем

$$In = \left\{\varphi_\sigma : \sigma \in E_2^n, \forall \alpha \in E_2^n \left(\varphi_\sigma(\alpha) = \alpha + \sigma\right)\right\},$$

где $\alpha + \sigma$ обозначает набор, получающийся из α и σ их покоординатным сложением по модулю 2. Помимо этого сложения введем покоординатное умножение набора α на число a из E_2.

Множество In с операциями $+$, $\cdot$ образует линейное пространство над полем вычетов по модулю 2.

Пусть $\widetilde{0}$ — набор из E_2^n, каждая координата которого равна нулю.

Класс инверсий F_{in}^{2} определяем так:

$$F_{in}^{2} = In \setminus \left\{\varphi_{\widetilde{0}}\right\}.$$

Теорема 1.4.7. *Для любого $n \geqslant 1$ имеет место $2 \cdot \left[\dfrac{n-1}{2}\right] + 1 \leqslant L\left(n, F_{in}^{2}\right) \leqslant n$.*

Пусть $\widetilde{e}_i$ — такой набор из E_2^n, у которого i-я координата равна единице, а все остальные равны нулю. Пусть $F_{in}^{2}(1) = \left\{\varphi_{\widetilde{e}_1}, \cdots, \varphi_{\widetilde{e}_n}\right\}$.

Теорема 1.4.8. *Для любого* $n \geqslant 1$ *имеет место* $L\left(n, F_{in}^2(1)\right) = n - t$, *где* t *определяется из соотношения* $2^{t-1} + t \leqslant n \leqslant 2^t + t$.

Интерес представляет рассмотрение классов разнотипных ошибок, в отдельности уже исследованных выше.

Оказывается, что для любой функции $f \in P_2^n$ и любого теста $T \in M\left(f, F_c^2\right)$ имеет место $T \in M\left(f, F_{in}^2(1)\right)$, отсюда вытекает что

$$L\left(n, F_c^2 \cup F_{in}^2(1)\right) = L\left(n, F_c^2\right).$$

Функция $f \in P_k^n$ называется *инвариантной относительно некоторой ошибки* φ, если для любого $\alpha \in E_k^n$ имеет место $f(\alpha) = f(\varphi(\alpha))$, в противном случае f называется *чувствительной к ошибке* φ.

Функция f *инвариантна* (*чувствительна*) *относительно множества ошибок* Φ, если она инвариантна (чувствительна) относительно каждой ошибки из Φ.

Показано, что для каждого Φ из $\left\{F_c^k, F_{st}^k, F_{in}^2\right\}$ почти все функции из P_k^n являются чувствительными относительно класса Φ.

Изложенные в этом разделе результаты раскрыты и доказаны в книге [37].

1.5. Тесты для классов Поста

Тестирование неисправностей для булевских функций особо важно в связи с их прикладной значимостью.

Здесь мы остановимся на тестировании одиночных константных неисправностей для этих функций, но не только во всем классе P_2, как мы это делали в разделе 1.4, а для подклассов функций из P_2. В качестве классификации булевских функций берется классификация Э. Поста.

В 1921 г. Э. Пост решил проблему описания всех итеративно замкнутых классов булевских функций с явным указанием этих классов.

Здесь будет описано решение задачи указания значений функции Шеннона $L\left(n, F_c^2\right)$ для каждого из указанных классов Поста K в случае одиночных константных неисправностей, а также описано поведение функций сложности $L(f, F_c^2)$ для почти всех функций из этих классов. Эти функции будем обозначать для краткости $L_K(n)$ и $L(f)$.

Описываемые результаты принадлежат О. А. Долотовой [16].

Опишем классы Поста. Следуя обозначениям Поста [70, 75], обозначим класс всех булевских функций через C_1.

Функция $f^*(x_1, ..., x_n) = f(\overline{x}_1, ..., \overline{x}_n)$ называется *двойственной* к $f(x_1, ..., x_n)$ из C_1 и называется *самодвойственной*, если $f^*(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n)$.

Функция $f(x_1, ..., x_n)$ называется *монотонной*, если для любых двух наборов $\alpha = (a_1, ..., a_n)$ и $\beta = (b_1, ..., b_n)$ из того, что для всех $i = 1, 2, ..., n$ выполнено $a_i \leqslant b_i$, т. е. $\alpha \leqslant \beta$, следует, что $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$.

Функция $f(x_1, ..., x_n)$ называется *линейной*, если $f(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + d \,(\mathrm{mod} 2)$.

Говорят, что функция из C_1 удовлетворяет условию $\langle a^\mu \rangle$, $\mu \geqslant 2$, если любые μ наборов, на которых она равна нулю, имеют общую нулевую компоненту; функция удовлетворяет условию $\langle a^\infty \rangle$, если все наборы, на которых она равна нулю, имеют общую нулевую компоненту.

Выражения $\bigvee\limits_{j=1}^{n} x_j$ и $\bigwedge\limits_{j=1}^{m} x_j$ называются, соответственно, *логическими суммами и произведениями*. Функция $f(x_1, ..., x_n)$ называется α*-функцией*, если $f(x, ..., x) = x$ и β*-функцией*, если $f(x, ..., x) = 1$.

Опишем классы Поста.

Класс A_1 состоит из всех монотонных функций; D_3 — всех самодвойственных функций; F_4^μ — всех функций со свойством $\langle a^\mu \rangle$; F_4^∞ — всех функций со свойством $\langle a^\infty \rangle$; L_1 — всех линейных функций; C_2, A_2, L_2 — из всех α- и β-функций, соответственно, из классов C_1, A_1, L_1; D_2, F_3^∞, F_3^μ — из всех монотонных функций, соответственно, из классов D_3, F_4^∞, F_4^μ; C_4, A_4, D_1, L_4, F_1^μ, F_2^μ, F_1^∞, F_2^∞ — из всех α-функций, соответственно из классов C_1, A_1, D_3, L_3, F_4^μ, F_3^μ, F_4^∞, F_3^∞; L_5 — из всех линейных самодвойственных функций; C_3, A_3, L_3, F_5^∞, F_5^μ, F_6^∞, F_6^μ, F_7^∞, F_7^μ, F_8^∞, F_8^μ — из всех функций, двойственных ко всем функциям, соответственно, из классов C_2, A_2, L_2, F_1^∞, F_1^μ, F_2^∞, F_2^μ, F_3^∞, F_3^μ, F_4^∞, F_4^μ, $\mu = 2, 3, ...$. Класс S_1 состоит из всех логических сумм: $S_3 = S_1 \cup \{1\}$, $S_5 = S_1 \cup \{0\}$, $S_6 = S_1 \cup \{0, 1\}$.

Класс P_1 состоит из всех логических произведений, $P_3 = P_1 \cup \cup \{1\}$, $P_5 = P_1 \cup \{0\}$, $P_6 = P_1 \cup \{0, 1\}$.

Классы S_i, P_i при $i = 1, 3, 5, 6$, L_j при $j = 1, 2, 3, 4, 5$, D_l при $l = 1, 2, 3$, A_m, C_m при $m = 1, 2, 3, 4$, F_s^∞, F_s^μ $s = 1, 2, ..., 8$, $\mu = = 2, 3, ...$, называем, соответственно, классами типов S, P, L, D, A, C и F.

Теорема 1.5.1. *Имеют место соотношения:*

1) $L_K(n) = 2$ *для каждого класса* K *типа* L;
2) $L_K(n) = n + 1$ *для каждого класса* K *типа* S *или* P;
3) $L_K(n) \sim 2n$ *при* $n \to \infty$ *для каждого класса* K *типа* D, A, C *или* F.

Теорема 1.5.2. *Для почти всех функций* f *из следующих классов* K *имеют место соотношения*:
1) $L(f) = 2$ *для каждого класса* K *типа* L;
2) $L(f) = n + 1$ *для каждого класса* K *типа* S *или* P;
3) $L(f) = 4$ *при* n *— четном,* $L(f) \in \{4, 6\}$ *при* n *— нечетном для класса* D_2;
4) $L(f) \in \{2, 3, 4\}$ *для классов* $K \in \{D_1, D_3\}$;
5) $L(f) = 4$ *для каждого класса* K *типа* A;
6) $L(f) = 3$ *для каждого класса* K *типа* C [46];
7) $L(f) \in \{4, 5\}$ *для классов*
$$K \in \{F_1^\infty, F_4^\infty, F_5^\infty, F_8^\infty, F_1^\mu, F_4^\mu, F_5^\mu, F_8^\mu,\ \mu = 3, 4, \ldots\};$$
8) $3 \leqslant L(f) \leqslant 8$ *для классов* $K \in \{F_1^2, F_4^2, F_5^2, F_8^2\}$;
9) $L(f) = 5$ *для классов*
$$K \in \{F_2^\infty, F_3^\infty, F_6^\infty, F_7^\infty, F_2^\mu, F_3^\mu, F_6^\mu, F_7^\mu,\ \mu = 3, 4, \ldots\};$$
10) $L(f) = 4$ *при* n *— нечетном,* $L(f) = 5$ *при* n *— четном для классов* $K \in \{F_2^2, F_3^2, F_6^2, F_7^2\}$.

Особый интерес вызывает вопрос о возможных значениях величины $L(f)$ для функций f из различных классов Поста.

Теорема 1.5.3. *Справедливы утверждения:*
1) $L(f) = 2$ *для любой функции* f, *существенно зависящей от* n *переменных, из классов типа* L;
2) $L(f) = n + 1$ *для любой функции* f, *существенно зависящей от* n *переменных, из классов типа* S *или* P;
3) *пусть*
   - $t(n) = 2n - 4(p + 1)$ *при* $2^p + 2p < n \leqslant 2^{p+1} + 2(p + 1)$, $p \in \mathbb{N}$;
   - $c_K = 2$ *для каждого класса* K *типа* C *и классов* D_1, D_3;
   - $c_K = 3$ *для каждого класса*
   $$K \in \{F_1^\infty, F_4^\infty, F_5^\infty, F_8^\infty, F_1^\mu, F_4^\mu, F_5^\mu, F_8^\mu, \quad \mu = 2, 3, \ldots\};$$
   - $c_K = 4$ *для каждого класса* K *типа* A, D_2 *и классов*
   $$K \in \{F_2^2, F_3^2, F_6^2, F_7^2, F_2^3, F_3^3, F_6^3, F_7^3\};$$

- $c_K = 5$ *для каждого класса*

$$K \in \{F_2^{\infty}, F_3^{\infty}, F_6^{\infty}, F_7^{\infty}, F_2^{\mu}, F_3^{\mu}, F_6^{\mu}, F_7^{\mu}, \quad \mu = 4, 5, \ldots\},$$

тогда для любых натуральных n и r таких, что $c_K \leqslant r \leqslant t(n)$, существует функция $f \in K$, существенно зависящая от n переменных, для которой $L(f) = r$, причем значение r для класса D_2 может быть только четным числом.

Изложенные факты можно изобразить в виде обобщающей таблицы 1, в которой представлено распределение величины $L(f)$ для функций, существенно зависящих от n переменных, из классов Поста.

Использованы следующие обозначения.
Если в r-м столбце напротив соответствующих классов стоит знак:

- $+$ — то существуют функции f, у которых $L(f) = r$, но они составляют бесконечно малую долю в классах;
- $-$ — то в классах не существует функции f, у которой $L(f) = r$.

Если знаки $+$ или $-$ из столбцов $r_i, r_{i+1}, \ldots, r_{i+k}$ обведены:
- $\boxed{+\cdots+}$ — сплошной линией, то все или почти все функции f из классов имеют $r_i \leqslant L(f) \leqslant r_{i+k}$;
- $\boxed{+\cdots+}$ — пунктиром, то существенные доли функций f из классов имеют $r_i \leqslant L(f) \leqslant r_{i+k}$.

Эти результаты позволяют осуществить сравнительный анализ сложности контроля управляющих систем, соответствующих различным классам Поста: проблема контроля управляющих систем в рассматриваемой постановке для различных классов Поста имеет количественно и качественно различные решения. В то же время просматриваются общие закономерности. Для счетного множества классов Поста почти все функции из этих классов имеют минимальные проверяющие тесты, состоящие из конечного числа наборов, но в каждом из них хотя и не существует функций, зависящих от n переменных, сложность минимальных тестов которых была бы равна в точности $2n$, имеются функции, сложность минимальных тестов которых равна любому из промежуточных значений, начиная от некоторой определенной для каждого класса константы, до величины, асимптотически равной $2n$, т. е. числу возможных неисправностей рассматриваемого типа. Таким образом, в каждом из этих классов имеются функции, у которых почти все из числа $2n$ неисправностей проверяются отдельным набором из минимальных тестов каждая.

Только конечное число классов не имеет подобной структуры по сложностям минимальных тестов классов функций: в классах линейных функций типа L все функции имеют минимальные тесты сложности 2, в классах логических сумм и произведений типа S или P сложность минимальных тестов всех функций f равна $n+1$, где n — число существенных переменных этих функций. И, наконец, для класса D_2 — монотонных самодвойственных функций, характеристика сложности минимальных тестов отличается от описанной выше закономерности только тем, что функции из этого класса не могут иметь минимальных тестов, состоящих из нечетного числа наборов.

Изложенные в этом разделе результаты раскрыты и доказаны в книге [37].

Таблица 1.1.

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\cdots$	$n+1$	$n+2$	$\cdots$	$\sim 2n$
$C_i(n),\ i=1,2,3,4$	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	$\cdots$	+	+	$\cdots$	+
$L_i(n),\ i=1,2,3,4,5$	−	+	−	−	−	−	−	−	−	−	$\cdots$	−	−	$\cdots$	−
$S_i(n),\ P_i(n),\ i=1,3,5,6$	−	−	−	−	−	−	−	−	−	−	$\cdots$	+	−	$\cdots$	−
$A_i(n),\ i=1,2,3,4$	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	$\cdots$	+	+	$\cdots$	+
$D_2(n),\ n=2p$	−	−	−	+	−	+	−	+	−	+	$\cdots$	+	−	$\cdots$	+
$n=2p+1$	−	−	−	+	−	+	−	+	−	+	$\cdots$	+	−	$\cdots$	+
$D_1(n),\ D_3(n)$	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	$\cdots$	+	+	$\cdots$	+
$F_i^{\infty}(n),\ F_i^{\mu}(n),$ $i=2,3,6,7,\ \ \mu=4,5,\ldots$	−	−	−	−	+	+	+	+	+	+	$\cdots$	+	+	$\cdots$	+
$F_i^3(n),\ i=2,3,6,7$	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	$\cdots$	+	+	$\cdots$	+
$F_i^2(n),\ n=2p$	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	$\cdots$	+	+	$\cdots$	+
$n=2p+1,\ \ i=2,3,6,7$	−	−	−	+	+	+	+	+	+	+	$\cdots$	+	+	$\cdots$	+
$F_i^{\infty}(n),\ F_i^{\mu}(n),$ $i=1,4,5,8,\ \ \mu=3,4,\ldots$	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	$\cdots$	+	+	$\cdots$	+
$F_i^2(n),\ i=1,4,5,8$	−	−	+	+	+	+	+	+	+	+	$\cdots$	+	+	$\cdots$	+

Часть II

КАЧЕСТВЕННЫЕ И МЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТЕСТОВЫХ АЛГОРИТМОВ

Введение

В данной части мы будем придерживаться обозначений и определений, введенных в разделе 1.2.

В главе 2 доказан ряд утверждений технического характера, на которые опирается дальнейшее изложение.

В главе 3 найдена асимптотика числа тупиковых тестов для почти всех пар (T, G) из $\mathfrak{T}_{G,n}$ при $q(G) \leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}$; показано, что при $q(G) \asymp 2^n$ асимптотика не существует, а при $q(G) \gg_n 2^n$ число тупиковых тестов для почти всех пар (T, G) из $\mathfrak{T}_{G,n}$ равно 0. То есть, можно считать, что в определенном смысле задача решена окончательно. Кроме того, в этой главе найдены оценки длины почти всех тупиковых тестов, которые, по-видимому, не улучшаемы. Основные результаты главы сформулированы в теореме 3.0.1.

В главе 4 найдены, также в определенном смысле, окончательные оценки длины минимального теста для почти всех пар (T, G) из $\mathfrak{T}_{G,n}$. Причем если ограничиться рассмотрением лишь полных графов, то сужение полученных оценок является существенным усилением результатов А. Д. Коршунова и В. Н. Носкова. Основные результаты главы сформулированы в теореме 4.0.11.

Глава 5 посвящена алгоритмам построения тупиковых тестов. В параграфе 5.1 приводятся соображения по поводу того, какими свойствами должен обладать «хороший» алгоритм построения тупиковых тестов. В качестве реализации этих свойств описан класс связных локальных алгоритмов. В параграфе 5.2 решена задача минимизации сложности в классе связных локальных алгоритмов. Построен **Д**-алгоритм — в определенном смысле наилучший. В параграфе 5.3 доказывается асимптотическая эффективность **Д**-алгоритма для почти всех пар (T, G) из $\mathfrak{T}_{G,n}$ при $\ln q(G) \ll_n \ln^2 n$. Основные результаты приведены в теоремах 5.0.4 и 5.0.5.

Глава 2

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ

В этой главе получен ряд вспомогательных результатов технического характера. На них, в значительной степени, основано изложение последующих глав.

2.1. Оценки, связанные с числом сочетаний

Будем считать функцию $\binom{n}{r}$ (число сочетаний), определенной для любой пары (n, r) из $\mathbb{R}_+ \otimes \mathbb{R}$. Если $r < 0$ или $r > n$, то полагаем $\binom{n}{r} = 0$, в противном случае считаем, что $\binom{n}{r} = \Gamma(n+1)/(\Gamma(r+1)\Gamma(n-r+1))$, где Γ — гамма-функция. Мы будем пользоваться асимптотическим разложением Γ, формулой Стирлинга:

$$\Gamma(x+1) = e^{-x} x^x \sqrt{2\pi x}\,(1 + O_x(1/x)),$$

а также представлением Вейерштрасса:

$$\frac{1}{\Gamma(x+1)} = e^{C_{\text{э.м.}} x} \cdot \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{k}\right) e^{-\frac{x}{k}}, \tag{2.1}$$

где $C_{\text{э.м.}} = \lim\limits_{n\to\infty} (\sum_{k=1}^{n} 1/k - \ln n)$ — постоянная Эйлера–Маскерони. Непосредственным следствием указанного представления является формула

$$\binom{n}{r} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{r(n-r)}{k(k+n)}\right). \tag{2.2}$$

Определим ряд функций, необходимых в дальнейшем:

- $\psi \in (0,1)^{(0,1)}$, $\psi(x) = -x\ln x - (1-x)\ln(1-x)$;
- $\psi_1 \in (0,1)^{(0,1)}$, $\psi_1(x) = 1 - \psi(x)$;
- $\widetilde{\psi} \in (0,1/2)^{(0,1)}$, $\psi(\widetilde{\psi}(x)) = x$;
- $\psi_2 \in (0,1)^{(-1/2,1/2)}$, $\psi_2(x) = \psi_1(1/2 + x)$;
- $\widetilde{\psi_2} \in (1/2,1)^{(0,1)}$, $\psi_2(\widetilde{\psi_2}(x) - 1/2) = x$.

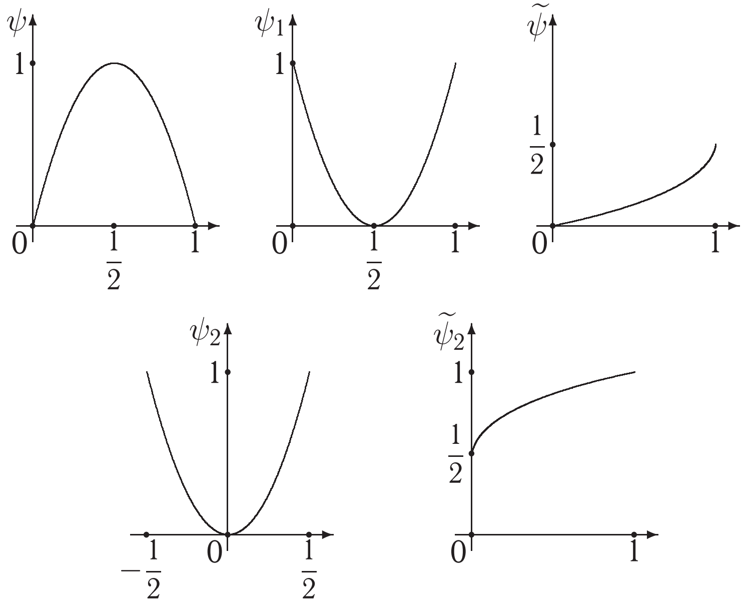

Рис. 2.1. Функции ψ, ψ_1, $\widetilde{\psi}$, ψ_2, $\widetilde{\psi}_2$

Схематично, т. е. очень приблизительно, эти функции изображены на рис. 2.1.

Утверждение 2.1.1. *Если $r \gg_n 1$ и $n - r \gg_n 1$, то*

$$\binom{n}{r} \sim_n \sqrt{n/(2\pi r(n-r))}\ 2^{\psi(r/n)n}.$$

Доказательство. Действительно, в этом случае

$$\binom{n}{r} \sim_n \frac{\sqrt{2\pi n}\ n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi r}\ r^r e^{-r} \sqrt{2\pi(n-r)}\ (n-r)^{n-r} e^{-(n-r)}} =$$
$$= \sqrt{n/(2\pi r(n-r))}\ 2^{\psi(r/n)n}.$$

Утверждение 2.1.1 доказано. □

Непосредственно из этого вытекает

Следствие 2.1.2. *Пусть имеется ε из интервала $(0, 1/2)$. Тогда, если $\varepsilon n \leqslant r \leqslant (1-\varepsilon)n$, то*

$$\binom{n}{r} \asymp \frac{1}{\sqrt{n}} 2^{\psi(r/n)n} = 2^n \frac{1}{\sqrt{n}} 2^{-\psi_1(r/n)n} = 2^n \frac{1}{\sqrt{n}} 2^{-\psi_2(r/n-1/2)n}.$$

Утверждение 2.1.3. *Пусть имеется* ε *из* $(0, 1/2)$ *и положительная константа* C. *Тогда, если* $\varepsilon n \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant (1-\varepsilon)n$ *и* $r_2 - r_1 \leqslant C$, *то* $\binom{n}{r_2} \asymp \binom{n}{r_1}$.

Доказательство. Модуль производной функции ψ на отрезке $[\varepsilon, 1-\varepsilon]$ ограничен некоторой константой C_ε. Поэтому $|\psi(r_2/n) - \psi(r_1/n)| \leqslant C_\varepsilon(r_2/n - r_1/n) \leqslant C \cdot C_\varepsilon/n$. Легко видеть, что $r_1(n-r_1) \sim_n r_2(n-r_2)$. Следовательно

$$\binom{n}{r_2} \Big/ \binom{n}{r_1} \lesssim_n 2^{(C \cdot C_\varepsilon/n)n} = 2^{C \cdot C_\varepsilon}.$$

Аналогично, $\binom{n}{r_1}/\binom{n}{r_2} \lesssim_n 2^{C \cdot C_\varepsilon}$.

Утверждение 2.1.3 доказано. □

Утверждение 2.1.4. *Если* $\varepsilon \in (0, 1/2)$ *и* $r \leqslant \varepsilon n$, *то*

$$\sum_{k=0}^{[r]} \binom{n}{r-k} \asymp \binom{n}{r}.$$

Доказательство. Легко видеть, что $\binom{n}{l-1}/\binom{n}{l} = l/(n-l+1)$. Следовательно, если $l \leqslant \varepsilon n$, то $\binom{n}{l-1}/\binom{n}{l} \leqslant \varepsilon/(1-\varepsilon) < 1$. Тогда $\sum_{k=0}^{[r]} \binom{n}{r-k} \leqslant \binom{n}{r}\alpha(1-\alpha)$, где $\alpha = \varepsilon(1-\varepsilon)$.

Утверждение 2.1.4 доказано. □

Утверждение 2.1.5. *Если* $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$ *и* $x \geqslant 1$, *то* $\Gamma(x+\varepsilon) \asymp \Gamma(x)x^\varepsilon$.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $x \geqslant 3$. Обозначаем через $[x]$ целую часть x, а через $\{x\}$ — дробную, т. е. $x = [x] + \{x\}$. Так как

$$\Gamma(x+\varepsilon) = \Gamma(1 + \{x\} + \varepsilon) \prod_{k=1}^{[x]-1} (x + \varepsilon - k),$$

$$\Gamma(x) = \Gamma(1 + \{x\}) \cdot \prod_{k=1}^{[x]-1} (x - k),$$

то

$$\frac{\Gamma(x+\varepsilon)}{\Gamma(x)} \asymp \prod_{k=1}^{[x]-1}\left(1+\frac{\varepsilon}{x-k}\right) = \prod_{k=1}^{[x]-1}\left(1+\frac{\varepsilon}{k+\{x\}}\right) =$$
$$= \prod_{k=1}^{[x]-1}\left(1+\frac{\varepsilon}{k}-\frac{\varepsilon\{x\}}{k\,(k+\{x\})}\right) \asymp \prod_{k=1}^{[x]-1}\left(1+\frac{\varepsilon}{k}\right) \asymp$$
$$\asymp \prod_{k=1}^{[x]}\left(1+\frac{\varepsilon}{k}) \leqslant \exp(\varepsilon\sum_{k=1}^{[x]}\frac{1}{k}\right).$$

Далее, поскольку $\exp(\varepsilon/k) \leqslant 1+\varepsilon/k+c/k^2$ для некоторой константы C, имеем

$$\exp\left(\varepsilon\sum_{k=1}^{[x]}\frac{1}{k}\right) \leqslant \prod_{k=1}^{[x]}\left(1+\frac{\varepsilon}{k}+\frac{C}{k^2}\right) \asymp \prod_{k=1}^{[x]}\left(1+\frac{\varepsilon}{k}\right).$$

Таким образом, $\Gamma(x+\varepsilon)/\Gamma(x) \asymp \exp\left(\varepsilon\sum_{k=1}^{[x]}\frac{1}{k}\right) \asymp \exp(\varepsilon\ln x) = = x^{\varepsilon}$.

Утверждение 2.1.5 доказано. □

Следствие 2.1.6. *Если* $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$ *и* $1 \leqslant r \leqslant n-1$, *то*

$$\binom{n}{r+\varepsilon} \asymp \binom{n}{r}\left(\frac{n-r}{r}\right)^{\varepsilon}.$$

Из доказанных ранее утверждений и определения вытекает предложение.

Утверждение 2.1.7. *Если* $\varepsilon \in (0,1/2)$ *и* $\varepsilon n \leqslant x \leqslant (1-\varepsilon)n$, *то*

$$\binom{n}{\widetilde{\psi}(x)n} \lesssim_n 2^{xn}, \qquad \sum_{k=0}^{]\widetilde{\psi}(x)n[+3}\binom{n}{k} \lesssim_n 2^{xn}.$$

Утверждение 2.1.8. *Выполнены следующие положения*:

1) *если* $1 \leqslant r \leqslant n$, *то* $\binom{n}{r} \leqslant n^r$,
2) *если* $0 < r_1 \leqslant r_2 \leqslant n$, *то* $\binom{n}{r_2} \leqslant \binom{n}{r_1}^{r_2/r_1}$, *и, если еще* $r_2 < n$, *то*
$$\binom{n}{r_1} \leqslant \binom{n}{r_2}^{(n-r_1)/(n-r_2)};$$
3) *если* $0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant n/2$, *то* $\binom{n}{r_1} \leqslant \binom{n}{r_2}$.

Доказательство. Покажем, что, если $y \geqslant 1$ и $x \geqslant 0$, то

$$(1+yx) \leqslant (1+x)^y. \tag{2.3}$$

Если $x=0$, то $1+yx = 1 = (1+x)^y$. Но тогда $1+yx = 1+\int\limits_0^x y\,dt$, $(1+x)^y = 1+\int\limits_0^x y(1+t)^{y-1}\,dt$. Так как $y \leqslant y(1+t)^{y-1}$, получаем (2.3).

Докажем п. 1).

Так как, в силу (2.2), $\binom{n}{r} = \prod_{k=1}^{\infty}(1+r(n-r)/(k(k+n)))$, то для $1 \leqslant r \leqslant n$ имеем

$$\binom{n}{r} \leqslant \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{n-r}{k(k+n)}\right)^r \leqslant \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{n-1}{k(k+n)}\right)^r = \binom{n}{1}^r = n^r.$$

Пусть $0 < r_1 \leqslant r_2 \leqslant n$, тогда

$$\binom{n}{r_2} = \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{r_2(n-r_2)}{k(k+n)}\right) \leqslant \prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{r_1(n-r_2)}{k(k+n)}\right)^{\frac{r_2}{r_1}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{r_1(n-r_1)}{k(k+n)}\right)\right)^{\frac{r_2}{r_1}} = \binom{n}{r_1}^{\frac{r_2}{r_1}}.$$

Вторая часть п. 2) доказывается аналогично. Пункт 3) вытекает непосредственно из (2.2) и того факта, что, если $0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant$ $\leqslant n/2$, то $r_1(n-r_1) \leqslant r_2(n-r_2)$.

Утверждение 2.1.8 доказано. □

Утверждение 2.1.9. *Если $\alpha \geqslant 1$ и $0 < y \leqslant x \leqslant \alpha x \leqslant 1/2$, то*

$$\psi(dy)/\psi(y) \geqslant \psi(dx)/\psi(x).$$

Доказательство. Так как

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi(\alpha x)}{\psi(x)}\right) = (\alpha\psi'(\alpha x)\psi(x) - \psi(\alpha x)\psi'(x))/\psi(x)^2$$

и $\psi'(a) = \ln(1-a) - \ln a$, то имеем

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi(\alpha x)}{\psi(x)}\right) = \Big(\alpha(\ln(1-x))\ln \alpha x - (\ln x)\ln(1-\alpha x) +$$
$$+ (1-\alpha)(\ln(1-x)\ln(1-\alpha x))\Big)/\psi(x)^2 =$$
$$= -\Big((\alpha - 1) + (\ln x)/\ln(1-x) - \alpha(\ln \alpha x)/\ln(1-\alpha x)\Big)\times$$
$$\times\Big((\ln(1-x))\ln(1-\alpha x)\Big)/\psi(x)^2.$$

Покажем, что

$$(\alpha - 1) + \ln x/\ln(1-x) \ \geqslant\ \alpha(\ln \alpha x)/\ln(1-\alpha x) \tag{2.4}$$

Если $\alpha = 1$, то (2.4) выполняется. Имеем

$$\frac{d}{d\alpha}\big(\alpha - 1 + \ln x/\ln(1-x)\big) = 1; \tag{2.5}$$

$$\frac{d}{d\alpha}\big(\alpha(\ln \alpha x)/\ln(1-\alpha x)\big) = \frac{d}{d\alpha}\big(\alpha(\ln \alpha x)/\ln(1-\alpha x)\big) =$$
$$= (\ln \alpha x/\ln(1-\alpha x) + \alpha(\ln(1-\alpha x)/\alpha +$$
$$+ x\ln \alpha x/(1-\alpha x))/(\ln(1-\alpha x))^2 =$$
$$= (\ln \alpha x \ln(1-\alpha x) + \ln(1-\alpha x) +$$
$$+ \alpha x \ln \alpha x/(1-\alpha x))/(\ln(1-\alpha x))^2 =$$
$$= ((\ln(1-\alpha x) + \alpha x/(1-\alpha x))\ln \alpha x + \ln(1-\alpha x))/(\ln(1-\alpha x))^2.$$

Так как

$$\ln(1-\alpha x) + \frac{\alpha x}{1-\alpha x} = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\alpha x)^k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha x)^k =$$
$$= \sum_{k=2}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{k}\right)(\alpha x)^k > 0,$$

$\ln \alpha x < 0$ и $\ln(1-\alpha x) < 0$, то получаем

$$\frac{d}{d\alpha}\big(\alpha(\ln \alpha x)/\ln(1-\alpha x)\big) < 0. \tag{2.6}$$

Так как при $\alpha = 1$ неравенство (2.4) выполняется, то в силу (2.5) и (2.6) оно выполняется для любого допустимого $\alpha \geqslant 1$. Следовательно, в силу (2.4) имеем $\dfrac{d}{d\alpha}(\psi(\alpha x)/\psi(x)) < 0$. Непосредственно из этого неравенства вытекает интересующий нас результат. $\square$

Утверждение 2.1.10. *Если* $0 < x < 1/2$, $a > 1$, $b > 1$ *и* $b\,\psi(x/a) \leqslant \psi(x)$, *то для* y *такого, что* $0 < y \leqslant x$ *выполнено* $b\,\psi(y/a) \leqslant \psi(y)$.

Доказательство. В силу предыдущего утверждения,

$$\psi(y)/\psi(y/a) \geqslant \psi(x)/\psi(x/a) \geqslant b,$$

и, следовательно, $\psi(y) \geqslant b\,\psi(y/a)$.

Утверждение 2.1.10 доказано. □

Утверждение 2.1.11. *Если* $1 \ll_n r \leqslant n/2$, *то для любого* $a \geqslant 1$ *существует такое* $b \geqslant 1$, *что* $\binom{n}{r/b} \lesseqgtr_n \binom{n}{r}^{1/a}$.

Доказательство. Согласно утверждению 2.1.1,

$$\binom{n}{r} \sim_n \sqrt{n/(2\pi r(n-r))}\, 2^{\psi(r/n)n},$$

а следовательно, в силу $r \gg_n 1$ имеем $\ln\binom{n}{r} \sim_n \psi(r/n)n$. Так как $\psi(1/2) = 1$, функция ψ непрерывна, $\lim\limits_{s\to 0}\psi(s) = 0$, то для любого $a \geqslant 1$ существует y, $0 < y \leqslant 1/2$, такое, что $\psi(y) = 1/2\,a$. Положим $b = 1/2\,y$ и покажем, что $\binom{n}{r/b} \lesseqgtr_n \binom{n}{r}^{1/a}$. Пусть $0 < x \leqslant 1/2$. Так как $2a\,\psi((1/2)/(1/2y)) = 1 \leqslant \psi(1/2)$, то, в силу предыдущего утверждения, $2a\,\psi(x/b) \leqslant \psi(x)$, и далее $2a\,\psi((r/b)/n) \leqslant \psi(r/n)$, а следовательно, $2a\ln\binom{n}{r/b} \lesssim_n \ln\binom{n}{r}$, и тогда $a\ln\binom{n}{r/b} \lesseqgtr_n \ln\binom{n}{r}$, т. е. $\binom{n}{r/b} \lesseqgtr_n \binom{n}{r}^{1/a}$.

Утверждение 2.1.11 доказано. □

2.2. Верхние оценки числа тестовых и тупиковых тестовых таблиц

Через $\mathfrak{T}^{\text{Т}}_{G,r}$ обозначим множество тестовых пар из $\mathfrak{T}_{G,r}$ (G — граф), т. е. таких пар (T, G), для которых набор 1^r является тестом, т. е. множество таблиц T, в которых вообще есть тест, например, если G — полный граф, то таблиц, у которых все строки различны.

Через $\mathfrak{T}^{\text{ТТ}}_{G,r}$ обозначим множество тупиковых тестовых пар, т. е. множество таблиц T, у которых только множество всех столбцов является тестом.

Через $\mathfrak{T}^{\text{ТУ}}_{G,r}$ обозначим множество таких пар (T, G) из $\mathfrak{T}_{G,r}$, что $\widetilde{\mathcal{E}}^r \subseteq T_G(X(G))$. Напомним, что $\widetilde{\mathcal{E}}^r = \{1^r_i, i = 1, \ldots, r\}$ — это предпоследний слой r-мерного бинарного куба, а $T_G(X(G))$ — таблица сравнения графа G.

Положим $X_0(T,G) = T_G^{-1}(1^r)$, т. е. это такое множество ребер графа, которые инцидентны вершинам, которым соответствуют совпадающие строки таблицы T.

Положим $X_i(T,G) = T_G^{-1}(1_i^r)$, $i = 1,\ldots,r$; $X(T,G) = T_G^{-1}(\widetilde{\mathcal{E}}^r)$, т. е. это множество ребер графа, которые инцидентны вершинам, которым соответствуют строки таблицы T, отличающиеся в одной позиции.

Положим $\mathcal{G}(T,G) = G^{X(T,G)}$, т. е. это подграф графа G, содержащий только ребра из $X(T,G)$.

Легко видеть, что верно следующее предложение.

Утверждение 2.2.1. *Имеют место положения*:

а) $(T,G) \in \mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{G,r}$ *точно тогда, когда* $X_0(T,G) = \varnothing$;

б) $(T,G) \in \mathfrak{T}^{\mathrm{TT}}_{G,r}$ *точно тогда, когда* $X_0(T,G) = \varnothing$ *и* $X_i(T,G) \neq \varnothing$ *при всех* $i = 1,\ldots,r$.

Первое предложение утверждения следует из следующего факта: чтобы все столбцы таблицы сравнения образовывали тест, в ней не должно быть единичной строки. А наличие в таблице сравнения всех наборов из предпоследнего слоя гарантирует, что других тестов нет, т. е. множество всех столбцов — единственный тупиковый тест.

Через $W_1(G,m)$ обозначим подмножество вершин графа G, имеющих степень не менее, чем m. Полагаем $W_2(G,m) = \mathcal{P}(G) \setminus W_1(G,m)$. Будем предполагать, что каждому графу G и подмножеству его вершин U поставлена в соответствие нумерация вершин G, т. е. биекция $\pi_{G,U}$ из $\mathcal{P}(G)^{N_{p(G)}}$, обладающая следующими свойствами:

1) $\pi_{G,U}(U) = N_{|U|}$;
2) если $a,\, b \in U$ и $\gamma(a) < \gamma(b)$, то $\pi_{G,U}(a) > \pi_{G,U}(b)$ (напомним, что $\gamma(a)$ — степень вершины a);
3) если $a \in \mathcal{P}(G) \setminus U$, то a имеет максимальную степень в графе G' среди вершин из $\mathcal{P}(G') \setminus U$, где G' — граф, полученный из G удалением всех вершин, имеющих номера большие, чем номер a.

Данная нумерация отображает множество U на начальный отрезок натурального ряда, вершины из U нумеруются в порядке убывания степени вершины, а вершины из $\mathcal{P}(G) \setminus U$ — в порядке возрастания степени смежности с вершинами с меньшими номерами. Ясно, что такие нумерации существуют.

Через $S_{G,U}(k)$ обозначим множество вершин G, смежных с $\pi_{G,U}^{-1}(k)$ и имеющих номера, меньшие, чем k.

Положим $S^*_{G,U}(k) = S_{G,U}(k) \setminus U$.

Пусть далее $N_{G,U,k} = |S_{G,U}(k+1)|$, $N^*_{G,U,k} = |S^*_{G,U}(k+1)|$. Из определения нумерации следует, что $N_{G,U,k} > N_{G,U,s}$ для $k > s > |U|$.

Пусть имеется некоторое множество $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \subseteq E^r$. Через $\mathfrak{T}^{\mathcal{F}}_{G,r}$ обозначим множество таких пар (T, G) из $\mathfrak{T}_{G,r}$, что $T_G(X(G)) \bigcap \mathcal{F} = \varnothing$, т.е. таблица сравнения графа не содержит строк из $\mathcal{F}$.

Если a из E^r, то положим $\mathcal{F}_a = \{x : \ x \in E^r, \ x \leftrightarrow a \in \mathcal{F}\}$. Например, если $\mathcal{F} = \varepsilon^r$, то $\mathcal{F}_a$ есть шар радиуса 1 с центром в a.

Пусть $U \subseteq \mathcal{P}(G)$ и $f \in (E^r)^U$, через $\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f}_{G,r}$ обозначим множество таких пар (T, G) из $\mathfrak{T}^{\mathcal{F}}_{G,r}$, что $T|_U = f$, т.е. $\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f}_{G,r}$ — это множество пар таких, что строки матрицы сравнения не принадлежат $\mathcal{F}$, а матрица T на U — фиксированная.

Утверждение 2.2.2. *Если $\varepsilon \in (0, 1/8)$, $\ln q(G) \lesssim_r r$ и U, $U \subseteq \mathcal{P}(G)$, $\mathcal{F}$, $\{1^r\} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}^r$, $f \in (E^r)^U$ таковы, что для любых a, b из U выполнено $\mathcal{F}_{f(a)} \cap \mathcal{F}_{f(b)} = \varnothing$ и для любой вершины u из $\mathcal{P}(G) \backslash U$ верно $\gamma(u) \leqslant 2^{(1-\varepsilon)r}$, то*

$$|\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f}_{G,r}| \lesssim_r \ \exp(-|\mathcal{F}|(q(G) - q(G_U))2^{-r})2^{-|U|r}|\mathfrak{T}_{G,r}|.$$

Доказательство. Если $\mathcal{F} = \varepsilon^r$, то условие $\mathcal{F}_{f(a)} \cap \mathcal{F}_{f(b)} = \varnothing$ означает, что $f(a)$ и $f(b)$ отличаются в более, чем в двух компонентах.

Мы имеем нумерацию $\pi_{G,U}$ вершин G. Пусть $G_{k,U}$ подграф G, порожденный вершинами с номерами не превосходящими k, а $G'_{k,U}$ — подграф, порожденный множеством $\mathcal{P}(G_{k,U}) \backslash S^*_{G,U}(k+1)$.

Через $\widetilde{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f}_{G_{k,U},r}$, $k \geqslant |U|$, обозначим множество таких пар $(T, G_{k,U})$ из $\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f}_{G_{k,U},r}$, что для любой вершины a из $S^*_{G,U}(k+1)$ и любой вершины b, отличной от a из $S_{G,U}(k+1)$ верно $\mathcal{F}_{T(a)} \cap \mathcal{F}_{T(b)} = \varnothing$.

Положим $\widehat{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f}_{G_{k,U},r} = \mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f}_{G_{k,U},r} \backslash \widetilde{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f}_{G_{k,U},r}$.

Ясно, что

$$|\widehat{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f}_{G_{k,U},r}| \leqslant |\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f}_{G'_{k,U},r}| \cdot N^*_{G,U,k} \cdot N_{G,U,k} \cdot 2^{r(N^*_{G,U,k}-1)};$$

$$|\widetilde{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f}_{G_{k,U},r}| \geqslant |\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f}_{G'_{k,U},r}| \prod_{i=1}^{N^*_{G,U,k}} (2^r - |\mathcal{F}|(\gamma_{G_{k,U}}(a_i) + \\ + |\mathcal{F}|(N_{G,U,k} - N^*_{G,U,k}) + |\mathcal{F}|(i-1))),$$

где $\{a_1, a_2, \ldots, a_{N^*_{G,U,k}}\} = S^*_{G,U}(k+1)$.

Пусть k_ε таково, что для $k > k_\varepsilon$ верно $N_{G,U,k} \geqslant 2^{\varepsilon r}$, и $N_{G,U,k} < 2^{\varepsilon r}$ для $k \leqslant k_\varepsilon$. Тогда, если $k \leqslant k_\varepsilon$ и $a \in \mathcal{P}(G_{k,U})$, то $\gamma_{G_{k,U}}(a) < 2^{\varepsilon r}$.

Таким образом имеем для $k \leqslant k_\varepsilon$ выполнено

$$|\widehat{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f}_{G_{k,U},r}|/|\widetilde{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f}_{G_{k,U},r}| \leqslant \\ \leqslant \left(2^{\varepsilon r} \cdot 2^{\varepsilon r} \cdot 2^{r(N^*_{G,U,k}-1)}\right) / \left(2^r - 2\,r\,(2^{\varepsilon r} + 2\,r\,2^{\varepsilon r})\right)^{N^*_{G,U,k}} \leqslant \\ \leqslant 2^{(2\varepsilon-1)\,r} \left(1 - 6\,r^2 2^{(\varepsilon-1)\,r}\right)^{-2^{\varepsilon r}} \lesssim_r 2^{(2\varepsilon-1)r}.$$

Так как

$$|\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f}_{G_{k+1,U},r}| \leqslant |\widetilde{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f}_{G_{k,U},r}| \cdot (2^r - |\mathcal{F}| \cdot N_{G,U,k}) + |\widehat{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f}_{G_{k,U},r}| \cdot 2^r = \\ = |\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f}_{G_{k,U},r}| \cdot (2^r - |\mathcal{F}| \cdot N_{G,U,k}) + |\widehat{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f}_{G_{k,U},r}| \cdot |\mathcal{F}| \cdot N_{G,U,k}$$

и для некоторой константы c верно $|\widehat{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f}_{G_{k,U},r}| \leqslant c \cdot 2^{(2\varepsilon-1)r} \cdot |\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f}_{G_{k,U},r}|$, то имеем

$$|\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f}_{G_{k+1,U},r}| \leqslant |\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f}_{G_{k,U},r}| \cdot \left(2^r - (1 - c \cdot 2^{(2\varepsilon-1)\,r}) \cdot |\mathcal{F}| \cdot N_{G,U,k}\right).$$

Таким образом получаем, что

$$|\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f}_{G_{k_\varepsilon,U},r}| \leqslant \prod_{k=|U|+1}^{k_\varepsilon} \left(2^r - (1 - c \cdot 2^{(2\varepsilon-1)r}) \cdot |\mathcal{F}| \cdot N_{G,U,k}\right) \leqslant \\ \leqslant 2^{r(k_\varepsilon-|U|)} \cdot \exp\left(-2^{-r}(1 - c \cdot 2^{(2\varepsilon-1)r}) \cdot |\mathcal{F}| \cdot (q(G_{k_\varepsilon,U}) - q(G_U))\right) \lesssim_r \\ \lesssim_r 2^{r(k_\varepsilon-|U|)} \exp\left(- |\mathcal{F}| \cdot 2^{-r} \cdot (q(G_{k_\varepsilon,U}) - q(G_U))\right).$$

Ясно, что число пар (T, G) из $\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f}_{G,r}$ таких, что для любого $k > k_\varepsilon$ существует подмножество M_k множества $T^{(S_{G,U}(k))}$ такое, что, если $a, b \in M_k$ и $a \neq b$, то $\mathcal{F}_a \cap \mathcal{F}_b = \varnothing$ и $|M_k| > (1 - 2^{-\varepsilon r/2})N_{G,U,k-1}$, не превосходит

$$|\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f}_{G_{k_\varepsilon,U},r}| \cdot \prod_{k=k_\varepsilon+1}^{p(G)} \left(2^r - (1 - 2^{-\varepsilon r/2}) \cdot |\mathcal{F}| \cdot N_{G,U,k-1}\right) \lesssim_r \\ \lesssim_r 2^{r(p(G)-|U|)} \times \\ \times \exp\left(- |\mathcal{F}| \cdot 2^{-r} \cdot (q(G) - q(G_U)) + 2^{-\varepsilon r/2}(q(G) - q(G_{k_\varepsilon,U}))\right) \lesssim_r$$

$$\lesssim_r 2^{r(p(G)-|U|)} \cdot \exp\Big(- |\mathcal{F}| \cdot 2^{-r} \cdot (q(G) - q(G_U))\Big). \quad (2.7)$$

Число пар (T,G) из $\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f}_{G,r}$ таких, что для данного k, $k > k_\varepsilon$, не существует множества M_k с указанными выше свойствами не превосходит

$$\binom{N^*_{G,U,k-1}}{]2^{-\varepsilon r/2} N_{G,U,k-1}[} (2^{-r}|\mathcal{F}|^2 N_{G,U,k-1})^{]2^{-\varepsilon r/2} N_{G,U,k-1}[} 2^{r(p(G)-|U|)},$$

и для некоторой константы c последняя величина не превосходит

$$\left(\frac{cN_{G,U,k-1}}{2^{-\varepsilon r/2} N_{G,U,k-1}}\right)^{]2^{-\varepsilon r/2} N_{G,U,k-1}[} \times$$
$$\times \left(4\, r^2\, 2^{-r} N_{G,U,k-1}\right)^{]2^{-\varepsilon r/2} N_{G,U,k-1}[} \cdot 2^{r(p(G)-|U|)} =$$
$$= \Big(4\, c\, r^2\, 2^{-r} 2^{\varepsilon r/2} N_{G,U,k-1}\Big)^{]2^{-\varepsilon r/2} N_{G,U,k-1}[} \cdot 2^{r(p(G)-|U|)} \lesssim_r$$
$$\lesssim_r \Big(4\, c\, 2^{(1-\varepsilon) r}\, 2^{-r}\, 2^{\varepsilon r/2}\, r^2\Big)^{2^{(\varepsilon-\varepsilon/2)r}} \cdot 2^{r(p(G)-|U|)} \lesssim_r$$
$$\lesssim_r 2^{-(\varepsilon r/3) 2^{(\varepsilon r/2)}} \cdot 2^{r(p(G)-|U|)}.$$

Поскольку $\ln q(G) \lesssim_r r$, то имеем

$$p(G) 2^{-(\varepsilon r/3) 2^{(\varepsilon r/2)}} \lesssim_r \exp(-|\mathcal{F}| \cdot 2^{-r} \cdot (q(G) - q(G_U))).$$

Следовательно, учитывая (2.7), можно заключить, что

$$|\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f}_{G,r}| \lesssim_r 2^{r(p(G)-|U|)} \exp\big(- |\mathcal{F}| \cdot 2^{-r} \cdot (q(G) - q(G_U))\big)$$

Утверждение 2.2.2 доказано. □

Утверждение 2.2.3. *Если* $\varepsilon \in (0,1)$ *и* $\Delta(G) \lesssim_r (1-\varepsilon) 2^r r \ln 2$ *и* $\ln q(G) \lesssim_r r$, *то* $|\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{G,r}| \lesssim_r \exp(-q(G) 2^{-r}) |\mathfrak{T}_{G,r}|$.

Доказательство. Напомним, что $\Delta(G)$ — максимальная степень вершин графа G.

Возьмем $\delta = \varepsilon/16$ и положим $U = W_1(G, 2^{(1-\delta)r})$. Согласно утверждению 2.2.2 $|\mathfrak{T}^{\{1^r\},U,f}_{G,r}| \lesssim_r 2^{r(p(G)-|U|)} \exp\Big(- 2^{-r}(q(G') - - |U|^2)\Big)$, где G' любой из подграфов G, полученных удалением некоторого множества вершин U', $U' \subseteq U$, так, что выполнено $|f(U \backslash U')| = |U \backslash U'|$. Поскольку $|\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{G,r}| = \sum_{f \in (E^r)^U} |\mathfrak{T}^{\{1^r\},U,f}_{G,r}|$; число функций f таких, что из U необходимо удалить U', $|U'| = l$, чтобы выполнялось $|f(U \backslash U')| = |U \backslash U'|$, т. е. таких, что $|f(U)| = |U| - l$, не более, чем $2^{r^{|U|}}\binom{|U|}{l}(|U|2^{-r})^l$; граф G', полученный из G удалением l вершин, имеет не менее, чем $q(G) - l\Delta(G)$ ребер; также выполнено $2^{|U|^2 2^{-r}} \lesssim_r 1$; то имеем:

$$
\begin{aligned}
|\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{G,r}| \lesssim_r \sum_{l=0}^{|U|-1} \binom{|U|}{l}(|U|2^{-r})^l e^{-2^{-r}(q(G)-l\Delta(G)} \cdot 2^{rp(G)} \leqslant \\
\leqslant 2^{rp(G)} e^{-q(G)2^{-r}} \sum_{l=0}^{|U|} \binom{|U|}{l}\Big(|U|2^{-r}e^{2^{-r}\Delta(G)}\Big)^l = \\
= 2^{rp(G)}\exp(-q(G)2^{-r})\Big(1 + |U|2^{-r}\exp(\Delta(G)2^{-r})\Big)^{|U|}.
\end{aligned}
$$

Так как $|U|^2 \leqslant \Big(q(G)2^{(\delta-1)r}\Big)^2 \lesssim_r 2^{2\delta r}$, $\exp(\Delta(G)2^{-r}) \lesssim$ $\lesssim_r \exp(2^r r(1-\varepsilon/2)(\ln 2)2^{-r}\Big)$, то получаем

$$
\begin{aligned}
|\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{G,r}| \lesssim_r 2^{rp(G)}\exp(-q(G)2^{-r})\Big(1 + 2^{2\delta r}\cdot 2^{-r}\cdot 2^r \cdot 2^{-(\varepsilon/2)r}\Big)2^{2\delta r} = \\
= 2^{rp(G)}\exp(-q(G)2^{-r})\Big(1 + 2^{(2\delta-\varepsilon/2)r}\Big)2^{2\delta r} \lesssim_r \\
\lesssim_r 2^{rp(G)}\exp(-q(G)2^{-r}).
\end{aligned}
$$

Обозначим через $\mathrm{Tes}(G, A)$ множество таких отображений T из $A^{\mathcal{P}(G)}$, что $T(a_1) \neq T(a_2)$, если a_1 и a_2 смежны. Положим $\mathrm{Tes}^m(G) = |\mathrm{Tes}(G, A)|$, где $|A| = m$. Нетрудно показать, что если $m_1 \leqslant m_2$, то $\mathrm{Tes}^{m_1}(G)m_1^{-p(G)} \leqslant \mathrm{Tes}^{m_2}(G)m_2^{-p(G)}$.

Если внимательно проследить доказательство утверждений 2.2.2 и 2.2.3, то можно заключить, что фактически доказан следующий факт. Имеется ε из $(0, 1)$. Если $\Delta(G) \lesssim_m (1-\varepsilon)m\ln m$ и $\ln q(G) \lesssim_m \ln m$, то $\mathrm{Tes}^m(G) \lesssim_m \exp(-q(G)m^{-1})m^{p(G)}$.

Утверждение 2.2.3 доказано. □

Пусть $Q \subseteq X(G)$ и $f \in (E^r)^Q$, через $\mathfrak{T}^{Q,f}_{G,r}$ обозначим множество таких пар (T, G) из $\mathfrak{T}_{G,r}$, что $T_G|_Q = f$.

Утверждение 2.2.4. *Верны положения*:

а) $\mathfrak{T}^{Q,f}_{G,r} \neq \varnothing$ *точно тогда, когда для любого простого цикла графа* G^Q *выполнено* $f(x_1) \leftrightarrow f(x_2) \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow f(x_s) = 1^r$, *где* $x_1, x_2, \ldots, x_s$ — *ребра этого цикла*;

б) *если* $\mathfrak{T}^{Q,f}_{G,r} \neq \varnothing$, *то* $|\mathfrak{T}^{Q,f}_{G,r}| = 2^{rk(G^Q)}$.

Доказательство. Напомним, что $k(G^Q)$ — число компонент связности графа G^Q.

Пусть $(T,G) \in \mathfrak{T}_{G,r}$ и $a_1, \{a_1,a_2\}, a_2, \{a_2,a_3\}, \ldots, a_s, \{a_s,a_1\}$ — простой цикл графа G; $x_1 = \{a_1,a_2\}, \ldots, x_{s-1} = \{a_{s-1},a_s\}$, $x_s = \{a_s,a_1\}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&T_G(x_1) \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow T_G(x_s) = \\
&\quad = (T(a_1)\leftrightarrow T(a_2))\leftrightarrow\ldots\leftrightarrow(T(a_{s-1})\leftrightarrow T(a_s))\leftrightarrow(T(a_s)\leftrightarrow T(a_1)) = \\
&\qquad = (T(a_1) \leftrightarrow T(a_1)) \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow (T(a_s) \leftrightarrow T(a_s)) = 1^r.
\end{aligned}$$

Следовательно, если $\{x_1,x_2,\ldots,x_s\} \subseteq Q$ и $\mathfrak{T}^{Q,f}_{G,r} \neq \varnothing$, то $f(x_1) \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow f(x_s) = 1^r$. Если для любых $x_1,x_2,\ldots,x_s$, являющихся ребрами простого цикла графа G^Q, выполнено $f(x_1) \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow f(x_s) = 1^r$, то верно, что $f(z_1) \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow f(z_{s_1}) = f(y_1) \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow f(y_{s_2})$, где $z_1,z_2,\ldots,z_{s_1}$ и $y_1,y_2,\ldots,y_{s_2}$— ребра двух простых циклов графа G^Q, соединяющих одни и те же вершины. Выделим в каждой компоненте связности G^Q графа по одной вершине $u_1,\ldots,u_{k(G^Q)}$. В силу предыдущего замечания две пары (T_1,G) и (T_2,G) из $\mathfrak{T}^{Q,f}_{G,r}$ различны тогда и только тогда, когда существует i из $N_{k(G^Q)}$ такое, что $T_1(u_i) \neq T_2(u_i)$. С другой стороны, каждому набору a из $(E^r)^{N_{k(G^Q)}}$ можно поставить в соответствие пару (T,G) из $\mathfrak{T}^{Q,f}_{G,r}$ следующим образом: $T(u_i) = a(i)$, $i \in N_{k(G^Q)}$; если $x_1,x_2,\ldots,x_s$ — ребра некоторой простой цепи, соединяющей вершину u с u_i, где $i \in N_{k(G^Q)}$, то полагаем $T(u) = a(i) \leftrightarrow f(x_1) \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow f(x_s)$. Следовательно, $|\mathfrak{T}^{Q,f}_{G,r}| = 2^{rk(G^Q)}$.

Утверждение 2.2.4 доказано. □

Утверждение 2.2.5. *Для графа G при $Q \subseteq X(G)$ следующие условия эквивалентны:*

1) *для любых r и f из $(E^r)^Q$ верно $\mathfrak{T}^{Q,f}_{G,r} \neq \varnothing$;*
2) *существует g из $\langle(\widetilde{\mathcal{E}}^{|Q|})^Q\rangle$такое, что $\mathfrak{T}^{Q,g}_{G,|Q|} \neq \varnothing$;*
3) *граф G^Q является лесом.*

Доказательство. Ясно, что 1 влечет 2 и из 3, в силу предыдущего утверждения, так как лес не имеет циклов, следует 1. Докажем, что 2 влечет 3. Допустим, что G^Q — не лес и $x_1,x_2,\ldots$ $\ldots,x_s$ — ребра одного из его простых циклов. Так как $s \geqslant 2$ и $g(Q) = \widetilde{\mathcal{E}}^{|Q|}$, имеем $|g(x_1) \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow g(x_s)| = |Q| - s \leqslant |Q| - 2$.

Следовательно, $g(x_1) \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow g(x_s) \neq 1^r$ и, в силу утверждения 2.1.4, имеем $\mathfrak{T}^{Q,g}_{G,|Q|} = \varnothing$. Получили противоречие.

Утверждение 2.2.5 доказано. □

Утверждение 2.2.6. *Если $(T,G) \in \mathfrak{T}_{G,r}$ и граф G^Λ является максимальным подлесом графа $\mathcal{G}(T,G)$, то при $X_i(T,G) \neq \varnothing$ для всех $i = 1,\ldots,r$ выполнено $\Lambda \cap X_i(T,G) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Допустим, что $X_j(T,G) \neq \varnothing$, а $\Lambda \cap X_j(T,G) = \varnothing$. Поскольку G^Λ — максимальный подлес графа, найдутся некоторые x_1, x_2, …, x_s из Λ такие, что $x, x_1, x_2, \ldots, x_s$ являются ребрами некоторого простого цикла графа $\mathcal{G}(T,G)$, $x \in X_j(T,G)$. Следовательно $T_G(x) \leftrightarrow T_G(x_1) \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow T_G(x_s) = 1^r$ и $T_G(x) = T_G(x_1) \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow T_G(x_s)$. Так как $T_G(x_i) \in \widetilde{\mathcal{E}}^r \backslash \{1^r_j\}$, $i = 1,\ldots,s$, то $(T_G(x_i))(j) = 1$, $i \in N_s$ и следовательно $(T_G(x))(j) = 1$, но $(T_G(x)) = 1^r_j$. Получили противоречие.

Утверждение 2.2.6 доказано. □

Введем функцию $H(m,r)$, положив $H(m,r) = \exp(-m \cdot 2^{-r})(1 - \exp(-m2^{-r}))^r$. Определим константы C_H, C^1_H, C^2_H следующим образом: $1 - \exp(-C^1_H) = 2^{-1/2}$; $\exp(-C^2_H) = 2^{-1/2}$; $C_H = C^1_H / C^2_H$.

Утверждение 2.2.7. *Если $2^r/r^2 \leqslant q(G) \leqslant C^1_H 2^r$, то $|\mathfrak{T}^{\text{ТТ}}_{G,r}| \lesssim \lesssim_r H(q(G),r)|\mathfrak{T}_{G,r}|$.*

Доказательство. Возьмем δ из $(0, 1/16)$ и разделим $\mathcal{P}(G)$ на три множества: $U_1(G,r) = W_1(G, C^2_H 2^r)$ (множество вершин, степень которых не меньше $C^2_H 2^r$), $U_2(G,r) = W_1(G, 2^{(1-\delta)r}) \backslash U_1(G,r)$ (множество вершин, степень которых не меньше $2^{(1-\delta)r}$ и меньше $C^2_H 2^r$), $U_3(G,r) = W_2(G, 2^{(1-\delta)r})$ (множество вершин, степень которых меньше $2^{(1-\delta)r}$).

Пусть имеется Λ, $\Lambda \subseteq X(G)$, такое, что G^Λ — лес. Построим множество $A_{G,r}(\Lambda)$ следующим образом:

1) если $a \in U_2(G,r)$ и существует вершина b из $U_1(G,r)$ такая, что a и b лежат в одной компоненте связности графа G^Λ, то $a \in A_{G,r}(\Lambda)$;
2) если некоторая компонента связности графа G^Λ содержит более одной вершины из $U_2(G,r)$ и не содержит вершин из $U_1(G,r)$, то все вершины, лежащие одновременно в этой компоненте и множестве $U_2(G,r)$, за исключением вер-

шины, имеющей наименьший номер, согласно нумерации $\pi_{G,W_1(G,2^{(1-\delta)r})}$ принадлежат множеству $A_{G,r}(\Lambda)$.

Через Λ^*, $\Lambda^* \subseteq X(G)$, обозначим множество таких ребер графа G, что оба их конца лежат в одной компоненте связности графа G^Λ.

Через $\mathcal{F}(g)$, где $g \in (E^r)^{U_1(G,r)}$, обозначим такое наибольшее подмножество $\mathcal{E}^r$, что, если $a \neq b$, и $a, b \in g(U_1(G,r))$, то $\mathcal{F}_a \cap \cap \mathcal{F}_b = \varnothing$. Оно определяется по g однозначно.

Через $\widetilde{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda)$ обозначим множество вершин из $U_3(G,r)$, имеющих ненулевую степень в графе G^Λ.

Построим множество $\widehat{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda)$ следующим образом: если вершина имеет наименьший, согласно нумерации $\pi_{G,W_1(G,2^{(1-\delta)r})}$, номер среди вершин какой-либо нетривиальной компоненты связности графа G^Λ, причем компонента содержится в $U_3(G,r)$, то она принадлежит множеству $\widehat{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda)$.

Через $U_1'(g)$, $U_1'(g) \subseteq U_1(G,r)$, $|U_1'(g)| = |g(U_1(G,r))|$, обозначим множество, построенное следующим образом: $a \in U_1'(g)$ тогда и только тогда, когда для некоторого b из E^r вершина a имеет наименьший, согласно нумерации $\pi_{G,W_1(G,2^{(1-\delta)r})}$, номер среди элементов $g^{-1}(b)$.

Если G^Λ — лес, то через $\mathfrak{T}_{G,r}^{\Lambda,f,g}$ обозначим множество таких пар (T,G) из $\mathfrak{T}_{G,r}$, что $T_G|_\Lambda = f$, $T|_{U_1(G,r)} = g$ и для любого x из $X(G) \setminus \Lambda^*$ выполнено $T_G(x) \notin \mathcal{E}^r$.

Лемма 2.2.8. *Если* $|\Lambda| \leqslant r^4$ *и* $U_1(G,r) = U_1'(g)$, *то*

$$|\mathfrak{T}_{G,r}^{\Lambda,f,g}| \lesssim_r \exp\Big(- |\mathcal{F}(g)| 2^{-r} (q(G) - C_H^2 2^r |A_{G,r}(\Lambda)|)\Big) \times$$
$$\times \exp_2 \bigg(r \Big(|U_2(G,r)| - |A_{G,r}(\Lambda)| + |U_3(G,r)| - |\widetilde{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda)| + |\widehat{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda)| \Big)\bigg).$$

Доказательство. Пусть задана функция h из

$$(E^r)^{U_2(G,r) \setminus A_{G,r}(\Lambda)}.$$

Определим множество $B(h)$, $B(h) \subseteq U_2(G,r) \setminus A_{G,r}(\Lambda)$, следующим образом:

1) $B_0(h) = \varnothing$;
2) если для a из $U_2(G,r) \setminus A_{G,r}(\Lambda) \setminus B_i(h)$ существует b из $U_1(G,r) \cup U_2(G,r) \setminus A_{G,r}(\Lambda) \setminus B_i(h)$, отличная от a, такая, что $|h(a) \leftrightarrow h(b)| > r-3$, ($|h(a) \leftrightarrow g(b)| > r-3$, если b из $U_1(G,r)$), и a имеет наименьший согласно нумерации $\pi_{G,W_1(G,2^{(1-\delta)r})}$ номер среди вершин, обладающих этим свойством, то полагаем $B_{i+1}(h) = B_i(h) \cup \{a\}$;

3) если для любой a из $U_2(G,r)\backslash A_{G,r}(\Lambda)\backslash B_i(h)$ и любых, отличных от a, b_1 из $U_1(G,r)$ и b_2 из $U_2(G,r)\backslash A_{G,r}(\Lambda)\backslash B_i(h)$ выполнено $|h(a)\leftrightarrow h(b_2)|\leqslant r-3$ и $|h(a)\leftrightarrow g(b_1)|\leqslant r-3$, то полагаем $B(h)=B_i(h)$.

Заметим, что в силу того, что для любой T из $\mathfrak{T}_{G,r}^{\Lambda,f,g}$ верно $T(a_2)=T(a_1)\leftrightarrow f(x_1)\leftrightarrow\ldots\leftrightarrow f(x_s)$, где вершины a_1,a_2 лежат в одной компоненте связности G^Λ, а $x_1,x_2,\ldots,x_s$ — ребра цепи в G^Λ, соединяющей их, если значения T заданы на $U_1(G,r)\cup \cup\Big(U_2(G,r)\backslash A_{G,r}(\Lambda)\Big)\cup\widehat{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda)$, то автоматически они заданы и на $\widetilde{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda)\backslash\widehat{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda)$.

Через $\mathfrak{T}_{G,r}^{\Lambda,f,g,h}$ обозначим множество таких пар (T,G) из $\mathfrak{T}_{G,r}^{\Lambda,f,g}$, что $T|_{U_2(G,r)\backslash A_{G,r}(\Lambda)}=h$.

Через $G_{\Lambda,g,h}$ обозначим граф, полученный из G удалением множества вершин $A_{G,r}(\Lambda)\cup B(h)\cup\Big(\widetilde{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda)\backslash\widehat{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda)\Big)$.

Определим $\widetilde{g}$, положив

$$\widetilde{g}|_{U_2(G,r)\backslash A_{G,r}(\Lambda)\backslash B(h)}=h|_{U_2(G,r)\backslash A_{G,r}(\Lambda)\backslash B(h)}$$

и $\widetilde{g}|_{U_1(G,r)}=g|_{U_1(G,r)}$. Ясно, что $|\mathfrak{T}_{G,r}^{\Lambda,f,g,h}|\leqslant|\mathfrak{T}_{G_{\Lambda,g,h},r}^{\mathcal{F}(g),U(\Lambda,g,h),\widetilde{g}}|$, где $U(\Lambda,g,h)=U_1(G,r)\cup\Big(U_2(G,r)\backslash A_{G,r}(\Lambda)\backslash B(h)\Big)$. Согласно утверждению 2.2.2

$$\left|\mathfrak{T}_{G_{\Lambda,g,h},r}^{\mathcal{F}(g),U(\Lambda,g,h),\widetilde{g}}\right|\lesssim_r$$
$$\lesssim_r 2^{r(p(G_{\Lambda,g,h})-|U(\Lambda,g,h)|)}\cdot e^{-|\mathcal{F}(g)|2^{-r}(q(G_{\Lambda,g,h})-q(G_{U(\Lambda,g,h)}))}.$$

Ясно, что $p(G_{\Lambda,g,h})-|U(\Lambda,g,h)|=|U_3(G,r)|-|\widetilde{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda)|+ +|\widehat{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda)|$
и

$$q(G_{\Lambda,g,h})-q(G_{U(\Lambda,g,h)})\geqslant$$
$$\geqslant q(G)-C_H^2 2^r\cdot|A_{G,r}(\Lambda)|-C_H^2 2^r|B(h)|-|\Lambda|-(C_H^1 2^{\delta r})^2.$$

Так как $|\Lambda|\leqslant r^4$, то имеем

$$|\mathfrak{T}_{G,r}^{\Lambda,f,g,h}|\lesssim_r \exp_2\Big((|U_3(G,r)|-|\widetilde{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda)|+|\widehat{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda)|)r\Big)\times$$
$$\times\exp\Big(-|\mathcal{F}(g)|\cdot 2^{-r}(q(G)-2^r\cdot C_H^2\cdot|A_{G,r}(\Lambda)|)\Big)\times$$
$$\times\exp\Big(|\mathcal{F}(g)|\,C_H^2\,|B(h)|\Big).$$

Так как $|\mathfrak{T}^{\Lambda,f,g}_{G,r}| = \sum_h |\mathfrak{T}^{\Lambda,f,g,h}_{G,r}|$, где сумма берется по всем h из $(E^r)^{U_2(G,r)\setminus A_{G,r}(\Lambda)}$, то

$$|\mathfrak{T}^{\Lambda,f,g,h}_{G,r}| \lesssim_r 2^{r(|U_3(G,r)|-|\widetilde{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda)|+|\widehat{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda)|)}\times$$
$$\times\, e^{-|\mathcal{F}(g)|2^{-r}(q(G)-2^r C^2_H|A_{G,r}(\Lambda)|)}\cdot\Bigl(\sum_h e^{|\mathcal{F}(g)|\,C^2_H\,|B(h)|}\Bigr),$$

где сумма берется по всем h из $(E^r)^{U_2(G,r)\setminus A_{G,r}(\Lambda)}$. Число функций h таких, что $|B(h)| = k$, не превосходит

$$\exp_2(r(|U_2(G,r)| - |A_{G,r}(\Lambda)|))\cdot\binom{|U_2(G,r)| - |A_{G,r}(\Lambda)|}{k}\times$$
$$\times\Bigl(C^1_H 2^{\delta r}\Bigl(\binom{r}{3}+\binom{r}{2}+\binom{r}{1}+\binom{r}{0}\Bigr)2^{-r}\Bigr)^k.$$

Так как $|\mathcal{F}(g)| \leqslant r+1$, $\exp(C^2_H) = 2^{1/2}$, то имеем

$$\sum_h \exp(|\mathcal{F}(g)|\,C^2_H\,|B(h)|) \leqslant \exp_2(r(|U_2(G,r)| - |A_{G,r}(\Lambda)|))\times$$
$$\times\sum_{k=0}^{|U_2(G,r)|-|A_{G,r}(\Lambda)|}\binom{|U_2(G,r)| - |A_{G,r}(\Lambda)|}{k}\times$$
$$\times\Bigl(C^1_H 2^{\delta r}\,3r^3\,2^{-r}\,2^{(1/2)(r+1)}\Bigr)^k \leqslant$$
$$\leqslant\Bigl(1 + C^1_H 2^{\delta r}\,3r^3\,2^{-r}\,2^{(1/2)(r+1)}\Bigr)^{C^1_H 2^{\delta r}}\times$$
$$\times\exp_2(r(|U_2(G,r)| - |A_{G,r}(\Lambda)|)).$$

Таким образом мы получили искомую оценку для $|\mathfrak{T}^{\Lambda,f,g}_{G,r}|$.

Лемма 2.2.8 доказана. □

Через $\widetilde{\mathfrak{T}}^{\text{тт}}_{G,r}$ обозначим множество таких пар (T,G) из $\mathfrak{T}^{\text{тт}}_{G,r}$, что $|X_i(T,G)| \leqslant r^3$, $i \in N_r$, и $U'_1(T|_{U_1(G,r)}) = U_1(G,r)$.

Пусть $\widetilde{A}_{G,r}(\Lambda)$, $\widetilde{A}_{G,r}(\Lambda) \subseteq U_1(G,r)$, множество, определенное следующим образом: если некоторая компонента графа G^Λ содержит более одной вершины из $U_1(G,r)$, то все они за исключением, имеющей минимальный, согласно нумерации $\pi_{G,W_1(G,2^{(1-\delta)r})}$, номер, принадлежат $\widetilde{A}_{G,r}(\Lambda)$.

Пусть $N(l,r)$, $l \leqslant r^4$, число отображений f из $\langle(\widetilde{\mathcal{E}}^r)^X\rangle$, где $|X| = l$, таких, что $1 \leqslant |f^{-1}(1^r_i)| \leqslant r^3$, $i \in N_r$. Множество таких функций обозначим через $M_r(X)$.

Если $f \in M_r(\Lambda)$ и $g \in (E^r)^{U_1(G,r)\setminus\widetilde{A}_{G,r}(\Lambda)}$, то положим $\mathfrak{T}_{G,r}^{\Lambda,f,g} = \mathfrak{T}_{G,r}^{\Lambda,f,g'_f}$, где g'_f — такая единственная функция из $(E^r)^{U_1(G,r)}$, что существует T, для которой выполнено:

$$T|_{U_1(G,r)} = g'_f\,, \quad T_G|_\Lambda = f\,, \quad T|_{U_1(G,r)\setminus\widetilde{A}_{G,r}(\Lambda)} = g.$$

Таким образом, в соответствии с утверждением 2.2.6 имеем

$$|\widetilde{\mathfrak{T}}_{G,r}^{\text{TT}}| = \sum_\Lambda \sum_f \sum_g |\mathfrak{T}_{G,r}^{\Lambda,f,g}| \lesssim_r$$

$$\lesssim_r \sum_\Lambda \sum_f \sum_g \exp\Big(-|\mathcal{F}(g'_f)| \cdot 2^{-r} \cdot (q(G) - C_H^2\, 2^r \cdot |A_{G,r}(\Lambda)|)\Big)\times$$

$$\times \exp_2\Big(r(|U_2(G,r)| - |A_{G,r}(\Lambda)| + |U_3(G,r)| - |\widetilde{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda)| + |\widehat{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda)|)\Big) =$$

$$= \exp_2(rp(G)) \cdot \sum_\Lambda 2^{-|\Lambda|\cdot r} \sum_f \sum_g \exp_2\Big(-r(|U_1(G,r)| - |\widetilde{A}_{G,r}(\Lambda)|)\Big)\times$$

$$\times \exp\Big(-|\mathcal{F}(g'_f)| \cdot 2^{-r} \cdot (q(G) - C_H^2\, 2^r\, |A_{G,r}(\Lambda)|)\Big),$$

где внешняя сумма берется по таким Λ, что G^Λ — лес, $|\Lambda| \leqslant r^4$; средняя — по f из $M_r(\Lambda)$; внутренняя — по g из $(E^r)^{U_1(G,r)\setminus\widetilde{A}_{G,r}(\Lambda)}$.

Через $d(l,G)$ мы ранее обозначили число остовных подлесов графа G, имеющих l ребер. Через $d_{r,k_1,k_2}(l,G)$ обозначим число таких Λ, что G^Λ — лес и $|\widetilde{A}_{G,r}(\Lambda)| = k_1$, $|A_{G,r}(\Lambda)| = k_2$.

Лемма 2.2.9. *Если $l \leqslant r^4$, то $d(l,g) \gtrsim_r \binom{q(G)}{l}$ и $d_{r,k_1,k_2}(l,G) \lesssim_r \binom{q(G)}{l}(2^{-(2/3)r})^{k_1+k_2}$.*

Доказательство. В любом простом цикле, состоящем из k ребер, можно выделить $]k/2[$ ребер так, что все концы остальных $[k/2]$ ребер будут и концами выделенных. Следовательно, число простых циклов длины k не превосходит $\binom{q(G)}{]k/2[} \cdot \binom{]k/2[^2}{[k/2]}$. Таким образом, число множеств Q, $Q \subseteq X(G)$, таких, что $|Q| = l$ и G^Q не является лесом, не превосходит при возможности дополнить цикл из k ребер до Q величины

$$\sum_{k=3}^{l} \binom{q(G)}{]k/2[} \binom{]k/2[^2}{[k/2]} \binom{q(G)-k}{l-k} \leqslant$$

$$\leqslant \binom{q(G)}{l} \sum_{k=3}^{l} \left(\frac{l}{q(G)-l}\right)^k q(G)^{]k/2[} k^{[k/2]} \leqslant$$

$$\leqslant \binom{q(G)}{l} \sum_{k=3}^{l} \left(\frac{k \cdot l^3}{q(G)-l}\right)^{[k/2]} \big(q(G)/(q(G)-l)\big)^{]k/2[} \ll_r \binom{q(G)}{l}$$

Следовательно, $d(l,G) \gtrsim_r \binom{q(G)}{l}$.

Для любой вершины a из $\widetilde{A}_{G,r}(\Lambda) \cup A_{G,r}(\Lambda)$ существует и причем единственная, вершина b_a из $(U_1(G,r)\backslash\widetilde{A}_{G,r}(\Lambda)) \cup$ $\cup\, (U_2(G,r)\backslash A_{G,r}(\Lambda))$, лежащая в той же компоненте графа. Поставим в соответствие вершине a ребро x_a, инцидентное ей и являющееся началом кратчайшей цепи, соединяющей a с b_a. Ясно, что для разных a ребра x_a различны.

Таким образом, в любом множестве Λ, таком, что для некоторого фиксированного A, $A \subseteq U_1(G,r) \cup U_2(G,r)$, верно $\widetilde{A}_{G,r}(\Lambda) \cup A_{G,r}(\Lambda) = A$, можно выделить $|A|$ ребер, обладающих указанными выше свойствами. Если все остальные ребра зафиксированы, то выделенные можно выбрать не более, чем $(2\,l)^{|A|}$ способами. Следовательно, число множеств Λ таких, что $|\Lambda| = l$ и $\widetilde{A}_{G,r}(\Lambda) \cup A_{G,r}(\Lambda) = A$ не превосходит $\binom{q(G)}{l-|A|}(2\,l)^{|A|}$. Таким образом имеем

$$d_{r,k_1,k_2}(l,G) \leqslant \binom{C_H^1\, 2^{\delta r}}{k_1+k_2}\binom{q(G)}{l-k_1-k_2}(2l)^{k_1+k_2} \leqslant$$

$$\leqslant \binom{q(G)}{l}(C_H^1\, 2^{\delta r} \cdot 2l \cdot l/(q(G)-l))^{k_1+k_2} \lesssim_r \binom{q(G)}{l} 2^{-(2/3)\, r\, (k_1+k_2)}.$$

Лемма 2.2.9 доказана. $\square$

Через $\mathcal{Y}(\Lambda, f)$ обозначим следующую величину:

$$\mathcal{Y}(\Lambda, f) = \sum_g \exp_2\Big(-r(|U_1(G,r)| - |\widetilde{A}_{G,r}(\Lambda)|)\Big) \times$$

$$\times \exp\Big(-|\mathcal{F}(g'_f)| \cdot 2^{-r}(q(G) - C_H^2\, 2^r |A_{G,r}(\Lambda)|)\Big),$$

где $g \in (E^r)^{U_1(g,r)\backslash\widetilde{A}_{G,r}(\Lambda)}$. Положим $\mathcal{Y}(\Lambda) = \sum_{f \in M_r(\Lambda)} \mathcal{Y}(\Lambda, f)$. Ясно, что $r+1-(C_H)^2 \leqslant |\mathcal{F}(g'_f)| \leqslant r+1$. Следовательно,

$$\exp\Big(-(r+1)\, 2^{-r}(q(G) - C_H^2\, 2^r |A_{G,r}(\Lambda)|)\Big) \leqslant \mathcal{Y}(\Lambda, f) \leqslant$$

$$\leqslant \exp\Big(-(r+1)\,2^{-r}(q(G)-C_H^2\,2^r|A_{G,r}(\Lambda)|)\Big)\cdot\exp\Big((C_H)^2 2^{-r}q(G)\Big)\leqslant$$
$$\leqslant \exp\Big(-(r+1)\,2^{-r}(q(G)-C_H^2\,2^r|A_{G,r}(\Lambda)|)\Big)\cdot\exp\Big(C_H^1(C_H)^2\Big).$$

Таким образом для $l \leqslant r^4$ имеем

$$\sum_\Lambda \mathcal{Y}(\Lambda) \geqslant N(l,r)\exp\Big(-(r+1)\,2^{-r}q(G)\Big)\binom{q(G)}{l},$$

где сумма берется по таким Λ, что $|\Lambda| = l$, G^Λ — лес.

Исходя из леммы 2.2.9 имеем для $l \leqslant r^4$ выполнено

$$\sum_\Lambda \mathcal{Y}(\Lambda) \leqslant N(l,r)\exp\Big(-(r+1)\,2^{-r}q(G)\Big)\binom{q(G)}{l}\times$$
$$\times\exp\Big(C_H^1(C_H)^2\Big)\cdot\sum_{k_1=1}^{[C_H]}(2^{-(2/3)r})^{k_1}\sum_{k_2=1}^{[C_H^1 2^{\delta r}]}(2^{-(2/3)r})^{k_2}\mathrm{e}^{C_H^2(r+1)k_2}\leqslant$$
$$\leqslant\binom{q(G)}{l}N(l,r)\exp\Big(-(r+1)\,2^{-r}q(G)\Big)\times$$
$$\times\exp\Big(C_H^1(C_H)^2\Big)\cdot(2^{-(2/3)r}/(1-2^{-(2/3)r}))\times$$
$$\times\, 2^{-(2/3)r}2^{(1/2)(r+1)}/(1-2^{-(2/3)r}2^{(1/2)(r+1)}) \ll_r$$
$$\ll_r \binom{q(G)}{l}N(l,r)\exp\Big(-(r+1)2^{-r}q(G)\Big),$$

где первая сумма берется по таким Λ, что $|\Lambda| = l$, G^Λ — лес, $\widetilde{A}_{G,r}(\Lambda) \cup A_{G,r}(\Lambda) \neq \varnothing$.

Если $\widetilde{A}_{G,r}(\Lambda) = \varnothing$, то $g'_f = g$ и число функций g из $(E^r)^{U_1(G,r)}$ таких, что $\mathcal{F}(g) \neq \mathcal{E}^r$, не превосходит

$$2^{r|U_1(G,r)|}\binom{|U_1(G,r)|}{2}\left(\binom{r}{3}+\binom{r}{2}+\binom{r}{1}+\binom{r}{0}\right)2^{-r}\lesssim_r$$
$$\lesssim_r 2^{-\frac{r}{2}}\cdot 2^{r|U_1(G,r)|}.$$

Следовательно, для $l \leqslant r^4$ выполнено

$$\sum_\Lambda \mathcal{Y}(\Lambda) \lesssim_r \binom{q(G)}{l}N(l,r)\exp\Big(-(r+1)2^{-r}q(G)\Big)\times$$
$$\times\Big(1+\exp(C_H^1(C_H)^2)2^{-r/2}\Big)\lesssim_r\binom{q(G)}{l}N(l,r)\exp\Big(-(r+1)2^{-r}q(G)\Big),$$

где сумма берется по таким Λ, что $|\Lambda| = l$, G^Λ — лес, $\widetilde{A}_{G,r}(\Lambda) \cup \cup A_{G,r}(\Lambda) \neq \varnothing$.

Таким образом выполнено

$$|\widetilde{\mathfrak{T}}^{\text{ТТ}}_{G,r}| \lesssim_r \sum_{l=r}^{r^4} 2^{rp(G)} 2^{-lr} \binom{q(G)}{l} N(l,r) \mathrm{e}^{-(r+1)2^{-r}q(G)} =$$
$$= \left(\sum_{l=r}^{r^4} \binom{q(G)}{l} 2^{-lr} N(l,r) \right) \cdot 2^{rp(G)} \exp\Big(-(r+1)2^{-r} q(G) \Big).$$

Ясно, что $N(l,r) = \sum_{l_1,\ldots,l_r} \binom{l}{l_1}\binom{l-l_1}{l_2}\cdots\binom{l-l_1-\ldots-l_{r-1}}{l_r}$, где сумма берется по таким $l_1,\ldots,l_r$ из N_{r^3}, что $l_1+\ldots+l_r = l$; а также верно

$$\binom{q(G)}{l}\binom{l}{l_1}\binom{l-l_1}{l_2}\cdots\binom{l-l_1-\ldots-l_{r-1}}{l_r} =$$
$$= \binom{q(G)}{l_1}\binom{q(G)-l_1}{l_2}\binom{q(G)-l_1-\ldots-l_{r-1}}{l_r}.$$

Следовательно,

$$\sum_{l=r}^{r^4} \binom{q(G)}{l} 2^{-l\,r} N(l,r) =$$
$$= \sum_{l_1=1}^{r^3}\cdots\sum_{l_r=1}^{r^3} \binom{q(G)}{l_1}\binom{q(G)-l_1}{l_2}\cdots\binom{q(G)-l_1-\ldots-l_{r-1}}{l_r} \times$$
$$\times 2^{-(l_1+\ldots+l_r)r} \leqslant \left(\sum_{l_1=1}^{r^3} \binom{q(G)}{l_1} 2^{-l_1 r} \right)^r \leqslant \Big((1+2^{-r})^{q(G)} - 1 \Big)^r \leqslant$$
$$\leqslant \Big(\exp(q(G)\,2^{-r}) - 1 \Big)^r.$$

Следовательно,

$$|\widetilde{\mathfrak{T}}^{\text{ТТ}}_{G,r}| \lesssim_r 2^{rp(G)} \exp(-(r+1)\,2^{-r}\,q(G)) \cdot \big(\exp(q(G)2^{-r}) - 1\big)^r =$$
$$= 2^{rp(G)} H(q(G),r).$$

Теперь рассмотрим случай, когда $|\Lambda| \leqslant r^4$ и $U_1(G,r) \neq \neq U_1'(T|_{U_1(G,r)})$. Это возможно лишь, если $\Delta(G) \geqslant C_H^2\, 2^r$.

Пусть g — некоторая функция из $(E^r)^{U_1(G,r)}$. Поставим ей в соответствие функцию $\widetilde{g}$ из $((\mathcal{P}(G) \setminus U_1(G,r)) \cup U_1'(g))^{\mathcal{P}(G)}$, определенную следующим образом: если $a \in \mathcal{P}(G) \setminus U_1(G,r)$, то $\widetilde{g}(a) = a$; если $a \in U_1(G,r)$, то существует единственная вершина b из $U_1'(g)$ такая, что $b \in g^{-1}(g(a))$, полагаем $\widetilde{g}(a) = b$.

Определим граф G_g, положив $G_g = \widetilde{g} \circ G$. Ясно, что граф G_g полностью определяется отношением эквивалентности R_g на $U_1(G,r)$, где R_g таково, что $a\, R_g\, b$ тогда и только тогда, когда $g(a) = g(b)$. Положим $G_R = G_g$, если $R = R_g$.

Через $\widetilde{\mathfrak{T}}^{\text{TT},R}_{G,r}$ обозначим множество пар (T,G) из $\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{G,r}$ таких, что $|X_i(T,G)| \leqslant r^3$, $i \in N_r$, и $R(T|_{U_1(G,r)}) = R$.

Легко видеть, что, если $(T,G) \in \widetilde{\mathfrak{T}}^{\text{TT},R}_{G,r}$, то $(T|_{\mathcal{P}(G_R)}, G_R) \in \in \widetilde{\mathfrak{T}}^{\text{TT}}_{G_R,r}$, и если $(T_1,G),(T_2,G) \in \widetilde{\mathfrak{T}}^{\text{TT},R}_{G,r}$, и $T_1 \neq T_2$, то $T_1|_{\mathcal{P}(G_R)} \neq \neq T_2|_{\mathcal{P}(G_R)}$. Следовательно,

$$|\widetilde{\mathfrak{T}}^{\text{TT},R}_{G,r}| \leqslant |\widetilde{\mathfrak{T}}^{\text{TT}}_{G_R,r}| \lesssim_r 2^{r\,p(G_R)} H(q(G_R),r).$$

Заметим, что $q(G_R) \geqslant \Delta(G) \geqslant C_H^2 2^r$, а также, если $C_H^2 \leqslant m_1 \leqslant \leqslant m_2 \leqslant C_H^1 2^r$, то $H(m_1,r) \lesssim_r H(m_2,r)$. Таким образом,

$$|\widetilde{\mathfrak{T}}^{\text{TT},R}_{G,r}| \lesssim_r 2^{r\,p(G_R)} H(q(G),r).$$

Так как для любой (T,G) из $\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{G,r}$ такой, что $|X_i(T,G)| \leqslant \leqslant r^3$, $i \in N_r$, и $U_1(G,r) \neq U_1'(T|_{U_1(G,r)})$ найдется R, а именно $R(T|_{U_1(G,r)})$ такое, что $p(G_R) < p(G)$ и $(T,G) \in \widetilde{\mathfrak{T}}^{\text{TT},R}_{G,r}$, а также, поскольку число возможных R не более, чем

$$\sum_{k=1}^{|U_1(G,r)|-1} \binom{|U_1(G,r)|}{k} |U_1(G,r)|^k \lesssim_r 2^{(1/2)r},$$

то получим, что число пар (T,G) с указанными выше свойствами не превосходит $2^{(1/2)r}\left(2^{r\,p(G)}2^{-r}\right)H(q(G),r) \ll \ll_r 2^{r\,p(G)} H(q(G),r)$.

Через $\widehat{\mathfrak{T}}^{\text{TT}}_{G,r}$ обозначим множество пар (T,G) из $\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{G,r}$ таких, что $|X_i(T,G)| \leqslant r^3$, $i \in N_r$. Мы доказали, что $|\widehat{\mathfrak{T}}^{\text{TT}}_{G,r}| \lesssim \lesssim_r 2^{r\,p(G)} H(q(G),r)$.

Согласно утверждению 2.2.4 число пар (T,G) из $\mathfrak{T}_{G,r}$ таких, что для некоторого Λ, где G^Λ — лес, выполнено $T_G|_\Lambda = f$, равно $2^{r\,p(G)}2^{-r|\Lambda|}$. Следовательно, в силу того, что $\left|\left(\widetilde{\mathcal{E}}^r\right)^\Lambda\right| = r^{|\Lambda|}$, число пар (T,G) из $\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{G,r}$ таких, что G^Λ — максимальный остовный подлес графа $\mathcal{G}(T,G)$ и $|\Lambda| = l$б не превосходит

$\binom{q(G)}{l}(r\,2^{-r})^l 2^{r\,p(G)}$. Так как для некоторой константы C верно $\binom{q(G)}{l} \leqslant (C\,q(G)/l)^l$, то имеем

$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{TT}}_{G,r} \setminus \widehat{\mathfrak{T}}^{\mathrm{TT}}_{G,r}| 2^{-r\,p(G)} \leqslant \sum_{l=r^3}^{q(G)} (C\,q(G)/l)^l (r\,2^{-r})^l \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{l=r^3}^{q(G)} (C\,q(G) r\,2^{-r}/r^3)^l \leqslant \sum_{l=r^3}^{q(G)} (C\,C^1_H/r^2)^l \leqslant$$
$$\leqslant (C\,C^1_H\,r^{-2})^{r^3}/(1 - C\,C^1_H\,r^{-2}) \ll_r H(q(G), r).$$

Таким образом получаем, что $|\mathfrak{T}^{\mathrm{TT}}_{G,r}| \lesssim_r 2^{r\,p(G)} H(q(G), r)$.
Утверждение 2.2.9 доказано. □

Утверждение 2.2.10. *Если* $C^1_H\,2^r < q(G) \leqslant 2^r \ln r^2$, *то*

$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{TT}}_{G,r}| \lesssim_r H(q(G), r)|\mathfrak{T}_{G,r}|.$$

Доказательство. Заметим, что в силу определения C^1_H, если $C^1_H 2^r \leqslant m \leqslant 2^r \ln r^3$, то $H(m, r) \gtrsim_r 2^{-(2/3)r}$.

Возьмем δ из $(0, 1/16)$ и положим $U_1(G, r) = W_1\left(G, 2^{(1-\delta)r}\right)$, $U_2(G, r) = W_2\left(G, 2^{(1-\delta)r}\right)$.

Через $\widetilde{\mathfrak{T}}^{\mathrm{TT}}_{G,r}$ обозначим множество таких пар (T, G) из $\mathfrak{T}_{G,r}$, что $|X_i(T, G)| \leqslant r^3$, $i \in N_r$, и для любых различных вершин a_1, a_2 из $U_1(G, r)$ выполнено $|T(a_1) \leftrightarrow T(a_2)| \leqslant r - 3$, т. е. $(\mathcal{E}^r)_{T(a_1)} \cap \cap (\mathcal{E}^r)_{T(a_2)} = \varnothing$.

Пусть G^Λ — лес, через $A_{G,r}$, $A_{G,r}(\Lambda) \subseteq U_1(G, r)$, обозначим множество, построенное следующим образом: если некоторая компонента графа G^Λ содержит более одной вершины из $U_1(G, r)$, то все они, за исключением имеющей минимальный, согласно нумерации $\pi_{G,U_1(G,r)}$, номер, принадлежат $A_{G,r}(\Lambda)$. Λ^*определяем так же, как и в предыдущем утверждении.

Если $g \in (E^r)^{U_1(G,r)\setminus A_{G,r}(\Lambda)}$ и $f \in (E^r)^\Lambda$, то через g'_f обозначим такую единственную функцию из $\left(E^r\right)^{U_1(G,r)}$, что существует (T, G) из $\mathfrak{T}_{G,r}$ такая, что $T|_{U_1(G,r)} = g'_f$, $T|_{U_1(G,r)\setminus A_{G,r}} = g$, $T_G|_\Lambda = f$.

Через $\widetilde{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda)$ обозначим множество вершин из $U_2(G, r)$ имеющих ненулевую степень в графе G^Λ, а через $\widehat{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda)$, $\widehat{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda) \subseteq \widetilde{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda)$, — множество, построенное следующим образом: если нетривиальная компонента G^Λ состоит только из вершин множества $U_2(G,r)$, то вершина, имеющая минимальный, согласно нумерации $\pi_{G,U_1(G,r)}$, номер, принадлежит $\widehat{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda)$.

Через $G_{\Lambda,r}$ обозначим граф, полученный из G удалением множества вершин $\widetilde{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda) \setminus \widehat{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda)$ и множества ребер Λ^*.

Через $\widetilde{\mathfrak{T}}^{\text{тт},\Lambda}_{G,r}$ обозначим множество таких пар (T,G) из $\widetilde{\mathfrak{T}}^{\text{тт}}_{G,r}$, что G^Λ — максимальный остовный лес графа $\mathcal{G}(T,G)$.

Через $\widetilde{\mathfrak{T}}^{\text{тт},\Lambda,f,g}_{G,r}$ обозначим множество таких пар (T,G) из $\widetilde{\mathfrak{T}}^{\text{тт},\Lambda}_{G,r}$, что $T_G|_\Lambda = f$, $T|_{U_1(G,r)\setminus A_{G,r}(\Lambda)} = g$. Ясно, что $|\widetilde{\mathfrak{T}}^{\text{тт},\Lambda,f,g}_{G,r}| \leqslant$ $\leqslant |\mathfrak{T}^{\mathcal{E}^r,U_1(G,r),g'_f}_{G_{\Lambda,r},r}|$. Следовательно, в соответствии с утверждением 2.2.2 имеем

$$|\widetilde{\mathfrak{T}}^{\text{тт},\Lambda,f,g}_{G,r}| \lesssim_r \exp_2\Big(r(p(G) - |\widetilde{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda) \setminus \widehat{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda)| - |U_1(G,r)|)\Big) \times \\ \times \exp\left(-(r+1)(q(G_{\Lambda,r}) - |U_1(G,r)|^2\, 2^{-r}\right).$$

Так как

$$q(G_{\Lambda,r}) \geqslant q(G) - |\widetilde{V}_{G,r}(\Lambda) \setminus \widehat{\mathcal{P}}_{G,r}(\Lambda)| 2^{(1-\delta)r} - |\Lambda|^2 \geqslant \\ \geqslant q(G) - r^4\, 2^{(1-\delta)r} - r^8,$$

то имеем

$$|\widetilde{\mathfrak{T}}^{\text{тт},\Lambda,f,g}_{G,r}| \lesssim_r 2^{r\,p(G)} 2^{-r|\Lambda|} \exp_2\left(-r(|U_1(G,r)| - |A_{G,r}(\Lambda)|)\right) \times \\ \times \exp\left(-(r+1)2^{-r} q(G)\right).$$

Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{T}}^{\text{тт},\Lambda,f}_{G,r}$ множество таких пар (T,G) из $\widetilde{\mathfrak{T}}^{\text{тт},\Lambda}_{G,r}$, что $T_G|_\Lambda = f$, тогда имеем

$$|\widetilde{\mathfrak{T}}^{\text{тт},\Lambda,f}_{G,r} \lesssim_r 2^{r\,p(G)} 2^{-r|\Lambda|} \exp(-(r+1)2^{-r} q(G)).$$

Пусть $N(l,r)$ обозначает то же, что и в предыдущем утверждении, тогда имеем

$$|\widetilde{\mathfrak{T}}^{\text{тт},\Lambda}_{G,r}| \lesssim_r N(l,r)\, 2^{r\,p(G)} \cdot 2^{-r|\Lambda|} \exp\left(-(r+1)2^{-r} q(G)\right)$$

и, следовательно,

$$|\widetilde{\mathfrak{T}}^{\text{тт}}_{G,r}| \lesssim_r 2^{r\,p(G)} e^{-(r+1)2^{-r} q(G)} \sum_{l=r}^{r^4} \binom{q(G)}{l} N(l,r) 2^{-r\,l}.$$

В предыдущем утверждении было доказано, что

$$\sum_{l=r}^{r^4} \binom{q(G)}{l} N(l,r) 2^{-r\,l} \leqslant \left(\exp(q(G)2^{-r}) - 1\right)^r.$$

Следовательно, $|\widetilde{\mathfrak{T}}^{\text{ТТ}}_{G,r}| \lesssim_r 2^{r\,p(G)} H(q(G),r)$.

Число пар (T,G) из $\mathfrak{T}_{G,r}$ таких, что существуют различные вершины a_1, a_2 из $U_1(G,r)$, для которых $|T(a_1) \leftrightarrow T(a_2)| > r-3$, не превосходит

$$2^{r\,p(G)} |U_1(G,r)|^2 \left(\binom{r}{3} + \binom{r}{2} + \binom{r}{1} + \binom{r}{0}\right) 2^{-r} \ll_r$$
$$\ll_r 2^{r\,p(G)} 2^{-(2/3)r} \lesssim_r 2^{r\,p(G)} H(q(G),r).$$

В предыдущем утверждении было показано, что число пар (T,G) из $\mathfrak{T}^{\text{ТТ}}_{G,r}$ для которых максимальный остовный лес графа $\mathcal{G}(T,G)$ имеет более r^3 ребер, не превосходит для некоторой константы C величины

$$2^{r\,p(G)} \sum_{l=r^3}^{q(G)} \left(\frac{C\,q(G) r\, 2^{-r}}{r^3}\right)^l \leqslant 2^{r\,p(G)} \sum_{l=r^3}^{q(G)} (2C\,r^{-2} \ln r)^l \leqslant$$
$$\leqslant 2^{r\,p(G)} (2C\,r^{-2} \ln r)^{r^3} / (1 - 2C\,r^{-2} \ln r) \ll_r 2^{r\,p(G)} H(q(G),r).$$

Подводя итог, имеем $|\mathfrak{T}^{\text{ТТ}}_{G,r}| \lesssim_r 2^{r\,p(G)} H(q(G),r)$.

Утверждение 2.2.10 доказано. □

Утверждение 2.2.11. *Имеет место* $|\mathfrak{T}^{\text{ТУ}}_{G,r}| \leqslant d(r,G) r! 2^{-r^2} |\mathfrak{T}_{G,r}|$.

Доказательство. Для любой пары (T,G) из $\mathfrak{T}^{\text{ТУ}}_{G,r}$ найдется лес G^Λ, $|\Lambda| = r$, такой, что $T_G(\Lambda) = \widetilde{\mathcal{E}}^r$. Согласно утверждению 2.1.4 число пар (T,G) из $\mathfrak{T}_{G,r}$ таких, что для данного Λ, где G^Λ — лес, выполнено $T_G(\Lambda) = \widetilde{\mathcal{E}}^r$, равно $r! 2^{-r^2} |\mathfrak{T}_{G,r}|$. Следовательно, $|\mathfrak{T}^{\text{ТУ}}_{G,r}| \leqslant d(r,G) r! 2^{-r^2} |\mathfrak{T}_{G,r}|$

Утверждение 2.2.11 доказано. □

Следствие 2.2.12. *Справедливо* $|\mathfrak{T}^{\text{ТУ}}_{G,r}| \leqslant (q(G)\, 2^{-r})^r\, |\mathfrak{T}_{G,r}|$.
Утверждение 2.2.13. *Имеет место*

$$|\mathfrak{T}^{\text{Т}}_{G,r}| \leqslant \exp\left(-\Delta(G)\, 2^{-r}\right) |\mathfrak{T}_{G,r}|.$$

Доказательство. Пусть вершина a из $\mathcal{P}(G)$ такова, что $\gamma_G(a) = \Delta(G)$. Понятно, что для любого набора b из E^r число пар (T,G) из $\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{G,r}$ таких, что $T(a)=b$, не превосходит $\exp_2(r(p(G)-1-\Delta(G)))(2^r-1)^{\Delta(G)}$. Таким образом имеем $|\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{G,r}| \leqslant 2^{r\,p(G)}(1-2^{-r})^{\Delta(G)} \leqslant 2^{r\,p(G)}\exp(-\Delta(G)2^{-r})$.

Утверждение 2.2.13 доказано. □

Утверждение 2.2.14. *Если* $q(G) \leqslant 2^r r\,(\ln 2)/2$, *то* $|\mathfrak{T}^{\mathrm{TT}}_{G,r}| \lesssim_r H(q(G),r)|\mathfrak{T}_{G,r}|$.

Доказательство. Если $2^r/r^2 \leqslant q(G) \leqslant 2^r \ln r^2$, то искомая оценка следует из утверждений 2.2.7 и 2.2.10.

Рассмотрим случай, когда $2^r \ln r^2 < q(G) \leqslant 2^r r(\ln 2)/2$. Согласно утверждению 2.1.3 имеем,

$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{TT}}_{G,r}| \leqslant |\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{G,r}| \lesssim_r \exp(-q(G)2^{-r})|\mathfrak{T}_{G,r}|.$$

Покажем, что, если $2^r \ln r^2 < m \leqslant 2^r r(\ln 2)/2$, то $\exp(-m2^{-r}) \lesssim_r H(m,r)$. Действительно, в этом случае

$$\bigl(1-\exp(-m2^{-r})\bigr)^r \geqslant \bigl(1-\exp(-(2^r \ln r^2)2^{-r})\bigr)^r = (1-r^{-2})^r \gtrsim_r 1.$$

Следовательно,

$$\exp(-m2^{-r}) \lesssim_r \exp(-m2^{-r})(1-\exp(-m2^{-r}))^r = H(m,r).$$

Таким образом имеем $|\mathfrak{T}^{\mathrm{TT}}_{G,r}| \lesssim_r H(q(G),r)|\mathfrak{T}_{G,r}|$.

Теперь рассмотрим случай, когда $q(G) < 2^r/r^2$. Из следствия 2.2.12 имеем $|\mathfrak{T}^{\mathrm{TT}}_{G,r}| \leqslant |\mathfrak{T}^{\mathrm{TУ}}_{G,r}| \leqslant (q(G)2^{-r})^r|\mathfrak{T}_{G,r}|$.

Покажем, что если $m < 2^r/r^2$, то $(m2^{-r})^r \lesssim_r H(m,r)$. В этом случае $H(m,r) \gtrsim_r (1-\exp(-m2^{-r}))^r$. Так как $m\,2^{-r} < r^{-2} < 1$, то для некоторой положительной константы C выполнено неравенство $\exp(-m\,2^{-r}) \leqslant 1-m\,2^{-r}+C(m\,2^{-r})^2$. Следовательно,

$$(1-\exp(-m\,2^{-r}))^r \geqslant (m\,2^{-r})^r(1-C\,r^{-2})^r \gtrsim_r (m\,2^{-r})^r.$$

Таким образом $H(m,r) \gtrsim_r (m\,2^{-r})^r$ и следовательно $|\mathfrak{T}^{\mathrm{TT}}_{G,r}| \lesssim_r H(m,r)|\mathfrak{T}_{G,r}|$.

Утверждение 2.2.14 доказано. □

2.3. Нижние оценки числа тестовых и тупиковых тестовых таблиц

На протяжении данного параграфа мы будем полагать, что $\varepsilon_0 \in (0,1/16)$ и $(1-\varepsilon_0)r \lesssim_r \ln q(G) \lesssim_r r$.

Напомним, что $W_1(G,m)$ — множество вершин графа G со степенью не меньшей, чем m; $W_2(G,m)$ — множество вершин графа G со степенью меньшей, чем m.

Возьмем δ из $(0, 1/16)$ и положим

$$U_1(G,r) = W_1\left(G, 2^{(1-\delta)r}\right),$$
$$U_2(G,r) = W_2\left(G, 2^{(1-\delta)r}\right),$$
$$U_3(G,r) = \{a:\ a \in U_2(G,r), |S_{G,U_1(G,r)}(\pi_{G,U_1(G,r)}(a))| \leqslant 2^{\delta\, r,}\}$$

(т. е. $U_3(G,r)$ — множество вершин из U_2 со степенью смежности с вершинами с меньшими номерами не более $2^{\delta\, r,}$), $U_4(G,r) = U_2(G,r) \setminus U_3(G,r)$.

Положим $\mathrm{st}(m,r) =]m\,2^{-r} r \ln r[$.

Пусть $K^1_{G,r} = |U_1(G,r)|$, $K^2_{G,r} = |U_1(G,r) \cup U_3(G,r)|$.

Пару (T,G) из $\mathfrak{T}_{G,r}$ назовем δ-почти регулярной (их множество обозначим через $\mathfrak{T}^{\text{п.р.}\delta}_{G,r}$), если для любого k, $K^2_{G,r} < k \leqslant p(G)$, существует M_k, $M_k \subseteq S_{G,U_1(G,r)}(k)$, $|M_k| \geqslant \left(1 - 2^{-(\delta/2)r}\right) \cdot |S_{G,U_1(G,r)}(k)|$, такое, что для любых различных a, b из M_k верно $\rho(T(a),T(b)) \geqslant \widetilde{\psi}(\delta/4)r$. Напомним, что схематически функция $\widetilde{\psi}(x)$ изображена на рис. 2.1.

Утверждение 2.3.1. *Если* $(1-\varepsilon_0)r \lesssim_r \ln q(G) \lesssim_r r$, *то*

$$|\mathfrak{T}_{G,r} \setminus \mathfrak{T}^{\text{п.р.}\delta}_{G,r}| \lesssim_r \mathrm{e}^{-(\delta/8)r\, 2^{(\delta/2)r}} 2^{r\, p(G)}.$$

Доказательство. Аналогично выкладкам, проведенным в утверждении 2.2.2, имеем

$$|\mathfrak{T}_{G,r} \setminus \mathfrak{T}^{\text{п.р.}\delta}_{G,r}| \lesssim_r 2^{r\, p(G)} \sum_{k=K^2_{G,r}+1}^{p(G)} \binom{|S_{G,U_1(G,r)}(k)|}{]2^{-(\delta/2)r}|S_{G,U_1(G,r)}(k)|[} \times$$
$$\times \left(|S_{G,U_1(G,r)}(k)| \sum_{l=0}^{]\widetilde{\psi}(\delta/4)r[} \binom{r}{l} 2^{-r}\right)^{]2^{-(\delta/2)r}|S_{G,U_1(G,r)}(k)|[}$$

и для некоторой константы C верно

$$|\mathfrak{T}_{G,r} \setminus \mathfrak{T}^{\text{п.р.}\delta}_{G,r}| \lesssim_r$$
$$\lesssim_r 2^{r\, p(G)} \sum_{k=K^2_{G,r}+1}^{p(G)} \left(\frac{C|S_{G,U_1(G,r)}(k)|^2 2^{(\delta/4)r} 2^{-r}}{2^{-(\delta/2)r}|S_{G,U_1(G,r)}(k)|}\right)^{]2^{-(\delta/2)r}|S_{G,U_1(G,r)}(k)|[} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=K^2_{G,r}+1}^{p(G)} \left(\frac{C\,2^{(1-\delta)r}2^{(\delta/4)r}2^{-r}}{2^{-(\delta/2)r}}\right)^{]2^{-(\delta/2)r}|S_{G,U_1(G,r)}(k)|[} \cdot 2^{r\,p(G)} \lesssim_r$$

$$\lesssim_r \exp_2\left(-(\delta/8)r\,2^{(\delta/2)r}\right)2^{r\,p(G)}$$

Утверждение 2.3.1 доказано. □

Пару (T,G) из $\mathfrak{T}_{G,r}$ будем называть *δ-регулярной* (их множество обозначим через $\mathfrak{T}^{\text{р}.\delta}_{G,r}$), если она является δ-почти регулярной и, кроме этого, для любых различных вершин a, b из $U_1(G,r)$ выполнено $\rho(T(a),T(b)) \geqslant \widetilde{\psi}(1-5\delta)r$.

Пару (T,G) из $\mathfrak{T}^{\text{T}}_{G,r}$ назовем *δ-тестовой* (их множество обозначим через $\mathfrak{T}^{\text{T},\delta}_{G,r}$), если она является δ-регулярной.

Утверждение 2.3.2. *Если* $(1-\varepsilon_0)r \lesssim_r q(G) \lesssim_r r$, *то* $|\mathfrak{T}^{\text{T},\delta}_{G,r}| \gtrsim_r \exp(-q(G)2^{-r})|\mathfrak{T}_{G,r}|$.

Доказательство. Пусть $f \in (E^r)^{U_1(G,r)}$ и $\mathfrak{T}^{f}_{G,r}$ — множество пар (T,G) из $\mathfrak{T}^{\text{T},\delta}_{G,r}$ таких, что $T|_{U_1(G,r)} = f$. Так как если таблица T определена для вершин с номерами больше, чем $K^1_{G,r}$, но не больше k, $k < p(G)$, то в вершине a с номером $k+1$ ее значение можно выбрать не менее, чем $\left(2^r - |S_{G,U_1(G,r)}(k)|\right)$ способами. Следовательно,

$$|\mathfrak{T}^{f}_{G,r}| \geqslant \prod_{k=K^1_{G,r}+1}^{p(G)} \left(2^r - |S_{G,U_1(G,r)}(k)|\right) = \\ = 2^{r(p(G)-K^1_{G,r})} \prod_{k=K^1_{G,r}+1}^{p(G)} \left(1 - |S_{G,U_1(G,r)}(k)|2^{-r}\right).$$

Покажем, что

$$\prod_{k=K^1_{G,r}+1}^{p(G)} \left(1 - |S_{G,U_1(G,r)}(k)|2^{-r}\right) \gtrsim_r \exp\left(-\sum_{k=K^1_{G,r}+1}^{p(G)} |S_{G,U_1(G,r)}(k)|2^{-r}\right).$$

Действительно, так как $|S_{G,U_1(G,r)}(k)|2^{-r} \leqslant 2^{-\delta r}$, то для некоторой константы C имеем

$$\exp(-|S_{G,U_1(G,r)}(k)|2^{-r}) \leqslant \\ \leqslant 1 - |S_{G,U_1(G,r)}(k)|2^{-r} + C(|S_{G,U_1(G,r)}(k)|2^{-r})^2 \leqslant$$

$$\leqslant (1 - |S_{G,U_1(G,r)}(k)|2^{-r})(1 + (C/(1 - 2^{-\delta}))(|S_{G,U_1(G,r)}(k)|2^{-r})^2).$$

Но

$$\prod_{k=K^1_{G,r}+1}^{p(G)} (1 + (C/(1 - 2^{-\delta}))(|S_{G,U_1(G,r)}(k)|2^{-r})^2) \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left(\frac{C}{1-2^{-\delta}} \sum_{k=K^1_{G,r}+1}^{p(G)} |S_{G,U_1(G,r)}(k)|2^{-r}2^{-\delta r}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left(\frac{C}{1-2^{-\delta}} q(G) 2^{-r}2^{-\delta r}\right) \lesssim_r 1.$$

Таким образом,

$$|\mathfrak{T}^f_{G,r}| \gtrsim_r \exp(-(q(G) - q(G_{U_1(G,r)}))2^{-r}) \exp_2(r(p(G) - K^1_{G,r})) \geqslant$$
$$\geqslant \exp(-q(G)2^{-r}) \exp_2(r(p(G) - K^1_{G,r})).$$

Число функций f из $(E^r)^{U_1(G,r)}$ таких, что найдутся различные вершины a и b из $U_1(G,r)$, для которых выполнено $\rho(f(a), f(b)) < \widetilde{\psi}(1 - 5\delta)r$, не превосходит

$$2^{rK^1_{G,r}}(K^1_{G,r})^2\left(2^{-r}\sum_{l=0}^{[\widetilde{\psi}(1-5\delta)r]}\binom{r}{l}\right) \lesssim_r$$
$$\lesssim_r 2^{rK^1_{G,r}}2^{2\delta r}2^{-r}2^{(1-5\delta)r} \leqslant 2^{-\delta r}2^{rK^1_{G,r}}.$$

Следовательно, учитывая результат предыдущего утверждения, имеем

$$|\mathfrak{T}^{\text{T},\delta}_{G,r}| \gtrsim_r \exp_2(rK^1_{G,r})(1 - 2^{-\delta r}) \exp(-q(G)2^{-r})\times$$
$$\times \exp_2(r(p(G) - K^1_{G,r})) - \exp_2(-(\delta/8)r2^{(\delta/2)r})2^{rp(G)} \gtrsim_r$$
$$\gtrsim_r 2^{rp(G)} \exp(-q(G)2^{-r}).$$

Утверждение 2.3.2 доказано. □

Пару (T, G) из $\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{G,r}$ назовем *δ-тупиковой тестовой*, если она является δ-регулярной и, кроме этого, выполнено:

1) $|X_i(T, G)| \leqslant \mathrm{st}(q(G), r)$, $i \in N_r$;
2) если вершины a и b принадлежат разным компонентам графа $\mathcal{G}(T, G)$ и имеют в $\mathcal{G}(T, G)$ ненулевую степень, то верно $\rho(T(a), T(b)) \geqslant \widetilde{\psi}(1 - 5\delta)r$;
3) граф $\mathcal{G}(T, G)$ является δ-регулярным.

Граф G^Q мы назовем *δ-регулярным*, если выполнены условия:
1) G^Q — лес;
2) никакая компонента G^Q не содержит более одной вершины из $U_1(G, r)$;
3) если какая-либо компонента графа G^Q содержит вершину из $U_1(G, r)$, то все ребра компоненты инцидентны этой вершине и ее вершины из $U_2(G, r)$ не смежны между собой в графе G;
4) если компонента графа G^Q не содержит вершин из $U_1(G, r)$, то она содержит не более двух вершин.

Множество δ-тупиковых тестовых пар (T, G) из $\mathfrak{T}^{\text{ТТ}}_{G,r}$ обозначим через $\mathfrak{T}^{\text{ТТ},\delta}_{G,r}$.

Утверждение 2.3.3. *Если* $(1-\varepsilon_0)r \lesssim_r \ln q(G) \lesssim_r r$, *то*

$$|\mathfrak{T}^{\text{ТТ},\delta}_{G,r}| \gtrsim_r H(q(G), r)|\mathfrak{T}_{G,r}|.$$

Доказательство. Пусть граф G^Λ является δ-регулярным.

Пусть $U_{G,r}(\Lambda)$ содержит множество $U_1(G, r)$ и все вершины G^Λ, имеющие ненулевую степень.

Пусть $\widehat{U}_{G,r}(\Lambda)$ содержит по вершине, имеющей меньший, согласно нумерации $\pi_{G,U_{G,r}(\Lambda)}$, номер из каждой компоненты G^Λ, состоящей из двух вершин из $U_2(G, r)$.

Через $\mathfrak{T}^{\Lambda,f,h,g}_{G,r}$ обозначим множество пар (T, G) из $\mathfrak{T}_{G,r}$ таких, что $T_G|_\Lambda = f$, $T|_{\widehat{U}_{G,r}(\Lambda)} = h$, $T|_{U_1(G,r)} = g$ и для любого ребра x из $X(G) \setminus X(G_{U_{G,r}(\Lambda)})$ выполнено $T_G(x) \notin \mathcal{E}^r$. Аналогично выкладкам предыдущего утверждения имеем

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{T}^{\Lambda,f,h,g}_{G,r}| \geqslant \prod_{k=|U_{G,r}(\Lambda)|+1}^{p(G)} (2^r - |S_{G,U_{G,r}(\Lambda)}(k)|(r+1)) \gtrsim_r \\
\gtrsim_r \exp_2(r(p(G) - |U_{G,r}(\Lambda)|))\times \\
\times \exp(-(q(G) - q(G_{U_{G,r}(\Lambda)}))(r+1)2^{-r}) \geqslant \\
\geqslant \exp_2(r(p(G) - |U_{G,r}(\Lambda)|) \exp(-q(G)(r+1)2^{-r}).
\end{aligned}$$

Через $\mathfrak{T}^{\Lambda,f,\delta}_{G,r}$ обозначим множество пар (T, G) из $\mathfrak{T}_{G,r}$ таких, что $(T, G) \in \mathfrak{T}^{\Lambda,f,T|_{\widehat{U}_{G,r}(\Lambda)},T|_{U_1(G,r)}}_{G,r}$ и для любых различных a_1, a_2 из $U_1(G, r) \cup \widehat{U}_{G,r}(\Lambda)$ выполнено

$$\rho(T(a), T(b)) \geqslant \widetilde{\psi}(1-5\delta)r + 2.$$

Число функций g из $(E^r)^{U_1(G,r)\cup\widehat{U}_{G,r}(\Lambda)}$ таких, что существуют различные a и b, для которых выполнено $\rho(g(a),g(b))<\widetilde{\psi}(1-5\delta)r+2$, не превосходит

$$\exp_2(r|U_1(G,r)|+|\widehat{U}_{G,r}(\Lambda)|)\times$$
$$\times\,|U_1(G,r)\cup\widehat{U}_{G,r}(\Lambda)|^2\cdot 2^{-r}\cdot\sum_{l=0}^{]\widetilde{\psi}(1-5\delta)r[+2}\binom{r}{l}\lesssim_r$$
$$\lesssim_r 2^{r(|U_1(G,r)|+|\widehat{U}_{G,r}(\Lambda)|)}\cdot(2^{(5\delta r/4)})^2\cdot(2^{-r}2^{(1-5\delta)r})\leqslant$$
$$\leqslant\exp_2(r(|U_1(G,r)|+|\widehat{U}_{G,r}(\Lambda)|))2^{-(\delta/2)r}.$$

Следовательно, $|\mathfrak{T}_{G,r}^{\Lambda,f,\delta}|\gtrsim_r 2^{rp(G)}2^{-r|\Lambda|}\exp(-q(G)(r+1)2^{-r})$.

Заметим, что если $f\in(\widetilde{\mathcal{E}}^r)^\Lambda$ и $(T,G)\in\mathfrak{T}_{G,r}^{\Lambda,f,\delta}$, то в силу свойств δ-регулярного графа для любых вершин a и b из различных нетривиальных компонент графа G^Λ выполнено $\rho(T(a),T(b))\geqslant\widetilde{\psi}(1-5\delta)r$, и если $x\in\Lambda^*\setminus\Lambda$ (определение Λ^* в утверждении 2.2.7), то $T(x)\notin\mathcal{E}^r$.

Через $M_{\delta,G,r}(l)$, $l\leqslant r\cdot\mathrm{st}(q(G),r)$, обозначим семейство таких множеств Λ, $|\Lambda|=l$, что граф G^Λ является δ-регулярным.

Пусть $\Lambda\in M_{\delta,G,r}(l)$, оценим число ребер x из $X(G)$ таких, что $\Lambda\cup\{x\}\in M_{\delta,G,r}(l+1)$. Для данного Λ в качестве такого x мы не можем выбирать ребра:

- из Λ;
- смежные ребрам из $X(G_{U_2(G,r)})\cap\Lambda$, их не более, чем $l2^{(1-\delta)r}\cdot 2$;
- из $X(G_{U_1(G,r)})$, их для некоторой константы C не более, чем $C\,2^{3\delta r}$;
- из $(U_1(G,r)\cap\Lambda)\times U_2(G,r)$, причем такие, что если $x=\{a,b\}$, $b\in U_2(G,r)$, то найдется вершина b_1 из $U_2(G,r)$ такая, что $\{a,b_1\}\in\Lambda$, $\{b,b_1\}\in X(G)$.

Таким образом мы можем добавить к Λ не менее, чем $\big(q(G)-l-2l\cdot 2^{(1-\delta)r}-C\,2^{3\delta r}-l2^{(1-\delta)r}\big)$ ребер. Следовательно,

$$|M_{\delta,G,r}(l+1)|\geqslant|M_{\delta,G,r}(l)|\cdot(1/(l+1))\times$$
$$\times\Big(q(G)-l-2l\cdot 2^{(1-\delta)r}-C\,2^{3\delta r}-l2^{(1-\delta)r}\Big).$$

Но тогда

$$|M_{\delta,G,r}(l)|\geqslant(1/l!)\Big(q(G)-3l\cdot 2^{(1-\delta)r}-C\cdot 2^{3\delta r}-l\Big)^l\gtrsim_r\binom{q(G)}{l}.$$

Положим $N^\delta(G,r) = \sum_{l=r}^{r\cdot \mathrm{st}(q(G),r)} |M_{\delta,G,r}(l)| N(l,r) 2^{-lr}$, где $N(l,r)$ — число функций f из $< (\widetilde{\mathcal{E}}^r)^\Lambda >$, $|\Lambda| = l$, таких, что $|f^{-1}(1_i^r)| \leqslant \mathrm{st}(q(G),r)$, $i \in N_r$. Число функций f из $< (\widetilde{\mathcal{E}}^r)^\Lambda|$, $|\Lambda| = l$, таких, что $|f^{-1}(1_i^r)| = l_i$, $i \in N_r$, равно $\binom{l}{l_1}\binom{l-l_1}{l_2}\cdots\binom{l-l_1-\ldots-l_{r-1}}{l_r}$. Через $\mathbb{N}_l^r$ обозначим множество наборов натуральных чисел $(l_1,\ldots,l_r)$ таких, что $l_1+\ldots+l_r = l$. Таким образом,

$$N^\delta(G,r) \gtrsim_r \sum_{l=r}^{r\cdot\mathrm{st}(q(G),r)} \binom{q(G)}{l} 2^{-lr} \times$$
$$\times \sum_{(l_1,\ldots,l_r)\in\mathbb{N}_l^r} \binom{l}{l_1}\binom{l-l_1}{l_2} \times\cdots\times \binom{l-l_1-\ldots-l_{r-1}}{l_r} =$$
$$= \sum_{l_1=1}^{\mathrm{st}(q(G),r)} \binom{q(G)}{l_1} \sum_{l_2=1}^{\mathrm{st}(q(G),r)} \binom{q(G)-l_1}{l_2} \times\cdots$$
$$\cdots\times \sum_{l_r=1}^{\mathrm{st}(q(G),r)} \binom{q(G)-l_1-\ldots-l_{r-1}}{l_r} \cdot 2^{-(l_1+\ldots+l_r)r} \geqslant$$
$$\geqslant \left(\sum_{k=1}^{\mathrm{st}(q(G),r)} \binom{q(G)-r\cdot\mathrm{st}(q(G),r)}{k} \cdot 2^{-kr}\right)^r \gtrsim_r$$
$$\gtrsim_r \left(\sum_{k=1}^{\mathrm{st}(q(G),r)} \binom{q(G)}{k} 2^{-kr}\right)^r.$$

Так как

$$\binom{q(G)}{k+1} 2^{-(k+1)r} \Big/ \left(\binom{q(G)}{k} 2^{-kr}\right) = 2^{-r}(q(G)-k)/(k+1)$$

и, если $k \geqslant \mathrm{st}(q(G),r)$, то $2^{-r}(q(G)-k)/(k+1) \leqslant$ $\leqslant q(G)2^{-r}/(q(G)2^{-r} r\ln r) \leqslant 1/(r\ln r)$, получаем

$$\sum_{k=\mathrm{st}(q(G),r)+1}^{q(G)} \binom{q(G)}{k} 2^{-kr} \leqslant \frac{(r\ln r)^{-1}}{1-(r\ln r)^{-1}} \cdot \sum_{k=1}^{\mathrm{st}(q(G),r)} \binom{q(G)}{k} 2^{-kr}.$$

Таким образом,

$$N^\delta(G,r) \gtrsim_r \left(\left(\sum_{k=1}^{q(G)} \binom{q(G)}{k} 2^{-rk}\right)\left(1 - \frac{(r\ln r)^{-1}}{1-(r\ln r)^{-1}}\right)\right)^r \gtrsim_r$$
$$\gtrsim_r \left(\sum_{k=1}^{q(G)} \binom{q(G)}{k} 2^{-rk}\right)^r = \left((1+2^{-r})^{q(G)} - 1\right)^r.$$

Так как для некоторой константы C верно $\exp(2^{-r}) \leqslant 1 + 2^{-r} + C2^{-2r}$, то

$$\exp(q(G)2^{-r}) \leqslant (1+2^{-r})^{q(G)}(1+C2^{-2r})^{q(G)}.$$

То есть для некоторой константы C_1 имеем

$$\exp(q(G)2^{-r}) \leqslant (1+2^{-r})^{q(G)}(1+C_1 2^{-r/2})$$

и, далее,

$$(\exp(q(G)2^{-r})-1)^r \leqslant \left((1+2^{-r})^{q(G)}-1+C_1 2^{-r/2}(1+2^{-r})^{q(G)}\right)^r \leqslant$$
$$\leqslant \left((1+2^{-r})^{q(G)}-1\right)^r \left(1+C_1 2^{-r/2}(1+2^{-r})^{q(G)}/((1+2^{-r})^{q(G)}-1)\right)^r.$$

Если $q(G)2^{-r} \leqslant 10$, то

$$(1+C_1 2^{-r/2}(1+2^{-r})^{q(G)}/\left((1+2^{-r})^{q(G)}-1)\right)^r \leqslant$$
$$\leqslant (1+C_1 2^{-r/2}e^{10})/10 \lesssim_r 1.$$

Если $q(G)2^{-r} > 10$, то $(1+2^{-r})^{q(G)} \geqslant 10$ и

$$(1+2^{-r})^{q(G)} - 1 \geqslant (9/10)(1+2^{-r})^{q(G)},$$

а значит,

$$(1+C_1 2^{-r/2}(1+2^{-r})^{q(G)}/((1+2^{-r})^{q(G)}-1))^r \leqslant$$
$$\leqslant (1+C_1 2^{-r/2}/(9/10))^r \lesssim_r 1.$$

Таким образом имеем $N^\delta(G,r) \gtrsim_r (\exp(q(G)2^{-r})-1)^r$ и, следовательно,

$$|\mathfrak{T}^{\text{ТТ},\delta}_{G,r}| \gtrsim_r (\exp(q(G)2^{-r})-1)^r \exp(-(r+1)2^{-r}q(G))|\mathfrak{T}_{G,r}| -$$
$$- \exp_2(-(\delta/8)2^{(\delta/2)r})|\mathfrak{T}_{G,r}| \gtrsim_r H(q(G),r)|\mathfrak{T}_{G,r}|.$$

Утверждение 2.3.3 доказано. □

2.4. Оценки совместных вероятностей

Через $\mathfrak{T}_{G,r,t}$, $1 \leqslant t < r$, мы будем обозначать множество троек (T_1, T_2, G) (G — граф) таких, что (T_1, G), $(T_2, G) \in \mathfrak{T}_{G,r}$ и для любого a из $\mathcal{P}(G)$ выполнено $(T_1(a), T_2(a)) \in E^{r,t}$. Напомним, что $E^{r,t}$ — это множество пар векторов длины r, совпадающих в первых t компонентах.

Через $< T >^{t}$, где $T \in (E^r)^U$, обозначим таблицу из $(E^t)^U$ такую, что для любого a из U выполнено $< T >^{t}(a) = T(a)|_{N_t}$, т. е. $< T >^{t}$ — это первые t столбцов матрицы T.

Если $(T_1, T_2, G) \in \mathfrak{T}_{G,r,t}$, то положим $< T_1, T_2 >^{t} = < T_1 >^{t} = < T_2 >^{t}$.

Через $\mathfrak{T}^{\text{т}}_{G,r,t}$, $\mathfrak{T}^{\text{ту}}_{G,r,t}$, $\mathfrak{T}^{\text{тт}}_{G,r,t}$, $\mathfrak{T}^{\text{т},\delta}_{G,r,t}$ и $\mathfrak{T}^{\text{тт},\delta}_{G,r,t}$ обозначим множество таких троек (T_1, T_2, G) из $\mathfrak{T}_{G,r,t}$, что пары (T_1, G) и (T_2, G) принадлежат соответственно множествам $\mathfrak{T}^{\text{т}}_{G,r}$, $\mathfrak{T}^{\text{ту}}_{G,r}$, $\mathfrak{T}^{\text{тт}}_{G,r}$, $\mathfrak{T}^{\text{т},\delta}_{G,r}$ и $\mathfrak{T}^{\text{тт},\delta}_{G,r}$.

Целью данного параграфа является получение верхних оценок для $|\mathfrak{T}^{\text{т},\delta}_{G,r,t}|$ и $|\mathfrak{T}^{\text{тт},\delta}_{G,r,t}|$.

Мы полагаем, что имеется δ из $(0, \min(\delta_1, 1/16))$, где $5\delta_1 = \widetilde{\psi}(1 - 5\delta_1)$, и $U_1(G, r)$.

Пусть $U_2(G, r)$, $U_3(G, r)$ имеют тот же смысл, что и в предыдущем параграфе.

Положим $\mathcal{E}^r_{t,1} = \{1^r, 1^r_1, \ldots, 1^r_t\}$, $\mathcal{E}^r_{t,2} = \mathcal{E}^r \setminus \mathcal{E}^r_{t,1}$.

Если $\{1^r\} \subseteq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{E}^r$, то полагаем $\mathcal{F}_{t,1} = \mathcal{F} \cap \mathcal{E}^r_{t,1}$, $\mathcal{F}_{t,2} = \mathcal{F} \cap \mathcal{E}^r_{t,2}$.

Пусть $U \subseteq \mathcal{P}(G)$, тогда пусть $\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G,r,t}$ — множество таких (T_1, T_2, G) из $\mathfrak{T}_{G,r,t}$, что $T_1|_U = f_1$, $T_2|_U = f_2$ и для любого x из $X(G) \setminus X(G_U)$ верно $T_G(x) \notin \mathcal{F}$ и для любого k, $|U| < k \leqslant p(G)$, такого, что $|S_{G,U}(k)| \geqslant 2^{\delta r}$, в множестве $S_{G,U}(k)$ можно выбрать не менее $|S_{G,U}(k)|(1 - 2 \cdot 2^{-(\delta/2)r})$ вершин таких, что для любых двух различных a_1 и a_2 из них выполнено $\rho(T_i(a_1), T_i(a_2)) \geqslant \widetilde{\psi}(\delta/4)r$, $i = 1, 2$.

Утверждение 2.4.1. *Пусть имеется ε из $(0, 1)$. Если для любых различных a_1, a_2 из U выполнено $\rho(f_i(a_1), f_i(a_2)) \geqslant \widetilde{\psi}(1 - 5\delta)r$, $i = 1, 2$; если также $\ln q(G) \lesssim_r r$, $\ln|U| \lesssim_r \delta r$ и для любого a из $\mathcal{P}(G) \setminus U$ выполнено $\gamma(a) \leqslant 2^{(1-\delta)r}$, то верно*

$$|\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G,r,t}| \lesssim_r \exp\left(-2|\mathcal{F}|2^{-r}(q(G) - q(G_U))\right) \times \\ \times \exp\left((|\mathcal{F}_{t,1}| + |\mathcal{F}_{t,2}|^2)2^{t-2r}(q(G) - q(G_U))\right) \times \\ \times \exp_2\left((p(G) - |U|)(2r - t)\right).$$

Если, кроме того, $t \leqslant (1-\varepsilon)r$, то

$$|\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G,r,t}| \lesssim_r \exp\bigl(-2|\mathcal{F}|2^{-r}(q(G)-q(G_U))\bigr)\cdot 2^{(p(G)-|U|)(2r-t)}.$$

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $2\varepsilon \leqslant \widetilde{\psi}(\delta/4)$.

Пусть $K_{G,r}$ таково, что для $k > K_{G,r}$ выполнено $|S_{G,U}(k)| \geqslant 2^{2\delta r}$, а для $k \leqslant K_{G,r}$ выполнено $|S_{G,U}(k)| < 2^{2\delta r}$.

Через $G_{k,U}$ обозначим подграф G, порожденный вершинами с номерами, не превосходящими k, а через $G'_{k,U}$ — подграф, порожденный множеством вершин $\mathcal{P}(G_{k,U})\backslash S^*_{G,U}(k+1)$.

Через $\widetilde{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G_{k,U},r,t}$, $|U| \leqslant k < K_{G,r}$, обозначим множество таких троек $(T_1, T_2, G_{k,U})$ из $\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G_{k,U},r,t}$, что для любых различных a из $S^*_{G,U}(k+1)$ и b из $S_{G,U}(k+1)$ выполнено $\rho(T_i(a),T_i(b)) \geqslant \widetilde{\psi}(1-5\delta)r$, $i = 1, 2$.

Положим $\widehat{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G_{k,U},r,t} = \mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G_{k,U},r,t}\backslash\widetilde{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G_{k,U},r,t}$.

Ясно, что

$$|\widehat{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G_{k,U},r,t}| \leqslant |\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G'_{k,U},r,t}|\cdot|S^*_{G,U}(k+1)|\cdot|S_{G,U}(k+1)|\times \\ \times\left(2\sum_{l=0}^{]\widetilde{\psi}(1-5\delta)r[}\binom{r}{l}2^{r-t}\right)\cdot 2^{(2r-t)\left(|S^*_{G,U}(k+1)|-1\right)},$$

и для некоторой константы C_1 имеем

$$|\widehat{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G_{k,U},r,t}| \leqslant |\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G'_{k,U},r,t}|\times \\ \times 2^{4\delta r}\left(C_1 2^{(1-5\delta)r}2^{r-t}\right)\cdot 2^{(2r-t)\left(|S^*_{G,U}(k+1)|-1\right)} = \\ = |\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G'_{k,U},r,t}|\cdot 2^{(2r-t)|S^*_{G,U}(k+1)|}\cdot C_1\cdot 2^{-\delta r}.$$

Далее имеем

$$|\widetilde{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G_{k,U},r,t}| \geqslant |\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G'_{k,U},r,t}|\prod_{i=1}^{|S^*_{G,U}(k+1)|}\Bigl(2^{2r-t}-2|\mathcal{F}|\gamma_{G_{k,U}}(a_i)2^{r-t}- \\ -2\left(|S_{G,U}(k+1)|-|S^*_{G,U}(k+1)|+i-1\right)\sum_{l=0}^{]\widetilde{\psi}(1-5\delta)r[}\binom{r}{l}2^{r-t}\Bigr),$$

где $S^*_{G,U}(k+1)=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, $n=|S^*_{G,U}(k+1)|$. Следовательно, для некоторых констант C_2 и C_3 верно, что

$$|\widetilde{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G_{k,U},r,t}|\geqslant|\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G'_{k,U},r,t}|2^{|S^*_{G,U}(k+1)|(2r-t)}\times$$
$$\times\left(1-2(r+1)2^{(\delta-1)r}-2\cdot2^{\delta r}C_2\cdot2^{(1-5\delta)r}\right)^{2^{2\delta r}}\geqslant$$
$$\geqslant|\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G'_{k,U},r,t}|\cdot\exp_2\left(|S^*_{G,U}(k+1)|(2r-t)\right)\left(1-C_32^{-2\delta r}\right).$$

Таким образом, для некоторой константы C_4 верно, что

$$|\widehat{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G'_{k,U},r,t}|/|\widetilde{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G'_{k,U},r,t}|\leqslant\frac{C_12^{-\delta r}}{1-C_32^{-2\delta r}}\leqslant C_42^{-\delta r}.$$

Через $W_{r,t,\mathcal{F},M}(g_1,g_2)$, где $\{1^r\}\subseteq\mathcal{F}\subseteq\mathcal{E}^r$, $(g_1,g_2)\in(E^{r,t})^M$, M — конечно, обозначим множество таких пар (x_1,x_2) из $E^{r,t}$, что для любого a из M верно $x_1\notin\mathcal{F}_{g_1(a)}$, $x_2\notin\mathcal{F}_{g_2(a)}$.

В дальнейшем считаем, что $r>3/\widetilde{\psi}(1-5\delta)$, $r>3/\widetilde{\psi}(\delta/4)$, $r>3/\delta$.

Лемма 2.4.2. *Если для любых различных a_1, a_2 из M выполнено*
$$\rho(g_i(a_1),g_i(a_2))\geqslant\widetilde{\psi}(1-5\delta)r,\quad i=1,\,2,$$
то для $t\leqslant(1-\widetilde{\psi}(1-5\delta))r+4$ имеем
$$|W_{r,t,\mathcal{F},M}(g_1,g_2)|\leqslant2^{2r-t}-2|M||\mathcal{F}|2^{r-t}+\binom{|M|}{2}(|\mathcal{F}_{t,1}|+|\mathcal{F}_{t,2}|^2),$$
а для $t>(1-\widetilde{\psi}(1-5\delta))r+4$ верно, что
$$|W_{r,t,\mathcal{F},M}(g_1,g_2)|\leqslant2^{2r-t}-2|M||\mathcal{F}|2^{r-t}+|M|(|\mathcal{F}_{t,1}|+|\mathcal{F}_{t,2}|^2).$$

Доказательство. Рассмотрим множество
$$\overline{W}_{r,t,\mathcal{F},M}(g_1,g_2)=E^{r,t}\setminus W_{r,t,\mathcal{F},M}(g_1,g_2).$$

Через $\mathcal{F}_{a,i}$, где $i=1,2$, обозначим множество пар (x_1,x_2) из $E^{r,t}_2$ таких, что $x_i\in\mathcal{F}_a$. Понятно, что $\overline{W}_{r,t,\mathcal{F},M}(g_1,g_2)=$ $=\bigcup_{i=1}^2\bigcup_{a\in M}\mathcal{F}_{g_i(a),i}$. В силу того, что для различных a_1, a_2 из M выполнено $\rho(g_i(a_1),g_i(a_2))\geqslant\widetilde{\psi}(1-5\delta)r$, $i=1,2$, имеем $\mathcal{F}_{g_i(a_1),i}\cap\mathcal{F}_{g_i(a_2),i}=\varnothing$, $i=1,2$. Понятно, что $|\mathcal{F}_{g_i(a),i}|=|\mathcal{F}|2^{r-t}$, а также, что для любых a_1, a_2 из M верно $|\mathcal{F}_{g_1(a_1),1}\cap\mathcal{F}_{g_2(a_2),2}|\leqslant$ $\leqslant|\mathcal{F}_{t,1}|+|\mathcal{F}_{t,2}|^2$.

Таким образом, искомая оценка для $t\leqslant(1-\widetilde{\psi}(1-5\delta))r+4$ получена.

Пусть $t > (1 - \widetilde{\psi}(1-5\delta))r + 4$. Тогда для любых различных a_1, a_2 из M выполнено

$$\rho(< g_1, g_2 >^t (a_1), < g_1, g_2 >^t (a_2)) \geqslant \widetilde{\psi}(1-5\delta)r - (r-t) \geqslant 4.$$

Следовательно, $\mathcal{F}_{g_1(a_1),1} \cap \mathcal{F}_{g_2(a_2),2} = \varnothing$, если $a_1 \neq a_2$, и получим искомую оценку.

Лемма 2.4.2 доказана. $\square$

Для $|U| + 1 \leqslant k \leqslant K_{G,r}$ положим $m(G,k) = 0$, если $|S_{G,U}(k)| \leqslant 1$, и $m(G,k) = 2^{4\delta r}$, в противном. Ясно, что $\binom{|S_{G,U}(k)|}{2} \leqslant m(G,k)$. Пользуясь доказанной леммой для $t \leqslant (1 - \widetilde{\psi}(1-5\delta))r + 4$ имеем

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G_{k+1,U},r,t}| &\leqslant |\widehat{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G_{k,U},r,t}| \cdot 2^{2r-t} + |\widetilde{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G_{k,U},r,t}| \cdot \Big(2^{2r-t} - \\
&\quad - 2|S_{G,U}(k+1)||\mathcal{F}|2^{r-t} + \binom{|S_{G,U}(k+1)|}{2}(|\mathcal{F}_{t,1}| + |\mathcal{F}_{t,2}|^2)\Big) \leqslant \\
&\leqslant |\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G_{k,U},r,t}|(1 - C_4 2^{-\delta r})\Big(2^{2r-t} - 2|S_{G,U}(k+1)||\mathcal{F}|2^{r-t} + \\
&\quad + m(G,K)(r+1)^2\Big) + |\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G_{k,U},r,t}|2^{2r-t}C_4 2^{-\delta r} = \\
&= |\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G_{k,U},r,t}|\Big(2^{2r-t} - (2|S_{G,U}(k+1)||\mathcal{F}|2^{2r-t} - \\
&\quad - m(G,k)(r+1)^2)(1 - C_4 2^{-\delta r})\Big).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
&|\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G_{K_{G,r},U},r,t}| \leqslant \\
&\leqslant \prod_{k=|U|+1}^{K_{G,r}} \Big(2^{2r-t} - \Big(2|S_{G,U}(k)||\mathcal{F}|2^{r-t} - m(G,k)(r+1)^2\Big)(1 + C_4 2^{-\delta r})\Big) \leqslant \\
&\leqslant 2^{(K_{G,r}-|U|)(2r-t)} \exp(-2|\mathcal{F}|2^{-r}(q(G_{K_{G,r},U}) - q(G_U))(1 - C_4 2^{-\delta r})) \times \\
&\times \exp\Big(\sum_{k=|U|+1}^{K_{G,r}} m(G,k)(r+1)^2 2^{t-2r}\Big) \lesssim_r \exp_2\Big((K_{G,r} - |U|)(2r-t)\Big) \times \\
&\times \exp\Big(-2|\mathcal{F}|2^{-r}(q(G_{K_{G,r},U}) - q(G_U)\Big) \exp\Big(q(G)2^{4\delta r}(r+1)^2 2^{t-2r}\Big).
\end{aligned}$$

Так как $t < (1-\widetilde{\psi}(1-5\delta))r+4$, то

$$q(G)2^{4\delta r}(r+1)^2 2^{t-2r} \leqslant 8q(G)(r+1)^2 2^{-\widetilde{\psi}(1-5\delta)r}2^{-r}\cdot 2^{4\delta r} \leqslant \\ \leqslant 8q(G)(r+1)^2 2^{4\delta r}2^{-5\delta r}2^{-r} \lesssim_r 2^{-(\delta/2)r}.$$

Следовательно,

$$|\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G_{K_{G,r},U},r,t}| \lesssim_r 2^{(K_{G,r}-|U|)(2r-t)}\exp(-2|\mathcal{F}|2^{-r}(q(G_{K_{G,r},U})-q(G_U)).$$

Теперь рассмотрим случай $t > (1-\widetilde{\psi}(1-5\delta))r+4$. Имеем, что

$$|\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G_{k+1,U},r,t}| \leqslant |\widehat{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G_{k,U},r,t}|2^{2r-t}+|\widetilde{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G_{k,U},r,t}|\Big(2^{2r-t}- \\ -|S_{G,U}(k+1)|\Big(2|\mathcal{F}|2^{r-t}-(|\mathcal{F}_{t,1}|+|\mathcal{F}_{t,2}|^2)\Big)\Big) \leqslant \\ \leqslant |\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G_{k,U},r,t}|\Big(2^{2r-t}- \\ -|S_{G,U}(k+1)|\Big(2|\mathcal{F}|2^{r-t}-|\mathcal{F}_{t,1}|-|\mathcal{F}_{t,2}|^2\Big)(1-C_4 2^{-\delta r})\Big).$$

И так же, как и в предыдущем случае, получаем, что

$$|\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G_{K_{G,r},U},r,t}| \leqslant 2^{(K_{G,r}-|U|)(2r-t)}\exp\Big(-(q(G_{K_{G,r},U})-q(G_U))\times \\ \times\Big(2|\mathcal{F}|2^{-r}-(|\mathcal{F}_{t,1}|+|\mathcal{F}_{t,2}|^2)2^{t-2r}\Big)(1-C_4 2^{-\delta r})\Big) \lesssim_r \\ \lesssim_r \exp_2\Big((2r-t)(K_{G,r}-|U|)\Big)\times \\ \times\exp\Big(-(q(G_{K_{G,r},U})-q(G_U))\Big(2|\mathcal{F}|2^{-r}-(|\mathcal{F}_{t,1}|+|\mathcal{F}_{t,2}|^2)2^{t-2r}\Big)\Big).$$

Таким образом, для $1 \leqslant t < r$ имеем

$$|\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G_{K_{G,r},U},r,t}| \lesssim_r 2^{(K_{G,r}-|U|)(2r-t)}\times \\ \times\exp\Big(-\Big(q(G_{K_{G,r},U})-q(G_U)\Big)\Big(2|\mathcal{F}|2^{-r}-(|\mathcal{F}_{t,1}|+|\mathcal{F}_{t,2}|^2)2^{t-2r}\Big)\Big).$$

Теперь полагаем $t \leqslant (1-\varepsilon)r$.

Пусть $K^1_{G,r}$ таково, что если $2\delta r \geqslant t+(\varepsilon/3)r$, то $K^1_{G,r}=K_{G,r}$, а если $2\delta r < t+(\varepsilon/3)r$, то для $k > K^1_{G,r}$ выполнено $|S_{G,U}(k)| \geqslant \geqslant 2^{t+(\varepsilon/3)r}$, а для $k \leqslant K^1_{G,r}$ верно $|S_{G,U}(k)| < 2^{t+(\varepsilon/3)r}$.

Через $\widetilde{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G,r,t}$ теперь будем обозначать множество таких троек (T_1,T_2,G) из $\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G,r,t}$, что для любого k, $k > K_{G,r}$, выполнено: для любой вершины a из $S^*_{G,U}(k)$ найдется отличных от нее вершин b из $S^*_{G,U}(k)$ таких, что $\rho(<T_1,T_2>^t(a),<T_1,T_2>

$> {}^t(b)) < 3$, не более, чем $2^{(\varepsilon/2)r}$, если $k \leqslant K^1_{G,r}$, и не более, чем $|S^*_{G,U}(k)|2^{-t}2^{(\delta/2)r}$, если $k > K^1_{G,r}$.

Положим $\widehat{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G,r,t} = \mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G,r,t} \setminus \widetilde{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G,r,t}$.

Лемма 2.4.3. *Для некоторой константы C_1, если $(T_1, T_2, G) \in \widetilde{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G,r,t}$ и $K_{G,r} < k \leqslant p(G)$, то*

$$|W_{r,t,\mathcal{F},S_{G,U}(k)}(T_1|_{S_{G,U}(k)}, T_2|_{S_{G,U}(k)})| \leqslant \leqslant 2^{2r-t} - 2|\mathcal{F}|2^{r-t}|S_{G,U}(k)|(1 - C_1(2^{-(\delta/3)r} + 2^{-(\varepsilon/3)r})).$$

Доказательство. Согласно ограничениям, наложенным на (T_1, T_2, G), существует M_k, $M_k \subseteq S^*_{G,U}(k)$, такое, что для любых различных a_1, a_2 из M_k выполнено $\rho(T_i(a_1), T_i(a_2)) \geqslant \widetilde{\psi}(\delta/4)r$, $i = 1, 2$, и, кроме того, $|M_k| \geqslant |S^*_{G,U}(k)| - 2 \cdot 2^{-(\delta/2)r}|S_{G,U}(k)|$. Так как $|S_{G,U}(k)| \geqslant 2^{2\delta r}$ и $\ln|U| \lesssim_r \delta r$, то для некоторой константы C_2 имеем

$$|M_k| \geqslant |S_{G,U}(k)|(1 - |U|2^{-2\delta r} - 2 \cdot 2^{-(\delta/2)r}) \geqslant |S_{G,U}(k)|(1 - C_2 2^{-(\delta/2)r}).$$

Понятно, что для различных a_1, a_2 из M_k выполнено $\mathcal{F}_{T_i(a_1),i} \cap \cap \mathcal{F}_{T_i(a_2),i} = \varnothing$, $i = 1, 2$. Для любой вершины a из M_k существует вершин b из M_k таких, что $\mathcal{F}_{T_i(a),i} \cap \mathcal{F}_{T_j(b),j} \neq \varnothing$ для $i, j \in N_2$, $i \neq j$, не более, чем $2^{(\varepsilon/2)r}$, если $k \leqslant K^1_{G,r}$, и не более, чем $|S^*_{G,U}(k)|2^{-t}2^{(\delta/2)r}$, если $k > K^1_{G,r}$. Таким образом, для $k \leqslant K^1_{G,r}$ имеем

$$\begin{aligned}|W_{r,t,\mathcal{F},M_k}(T_1|_{M_k}, T_2|_{M_k})| &\leqslant \\ &\leqslant 2^{2r-t} - 2|M_k||\mathcal{F}|2^{r-t} + 2^{(\varepsilon/2)r}(r+1)^2 2|M_k| \leqslant \\ &\leqslant 2^{2r-t} - 2|\mathcal{F}|2^{r-t}|S_{G,U}(k)|\Big(1 - C_2 2^{-(\delta/2)r} - 2^{-(\varepsilon/2)r}2(r+1)^2\Big),\end{aligned}$$

а для $k > K^1_{G,r}$

$$\begin{aligned}|W_{r,t,\mathcal{F},M_k}(T_1|_{M_k}, T_2|_{M_k})| &\leqslant 2^{2r-t} - 2|M_k||\mathcal{F}|2^{r-t} + \\ &+ |S^*_{G,U}(k)|2^{-t}2^{(\delta/2)r}(r+1)^2 2|M_k| \leqslant 2^{2r-t} - 2|\mathcal{F}|2^{r-t}|S_{G,U}(k)| \times \\ &\times \Big(1 - C_2 2^{-(\delta/2)r} - 2^{-r}2^{-(\delta/2)r}2(r+1)^2\Big).\end{aligned}$$

Следовательно, для некоторой константы C_1 имеем

$$|W_{r,t,\mathcal{F},M_k}(T_1|_{M_k}, T_2|_{M_k})| \leqslant \leqslant 2^{2r-t} - 2|\mathcal{F}|2^{r-t}|S_{G,U}(k)|\Big(1 - C_1(2^{-(\varepsilon/3)r} + 2^{-(\delta/2)r})\Big),$$

если $K_{G,r} < k \leqslant p(G)$.

Лемма 2.4.3 доказана. $\square$

Исходя из доказанной леммы, мы можем заключить, что

$$|\widetilde{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G,r,t}| \leqslant |\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G_{K_{G,r}},r,t}| \times$$
$$\times \prod_{k=K_{G,r}+1}^{p(G)} \Big(2^{2r-t} - 2|\mathcal{F}||S_{G,U}(k)| \cdot 2^{r-t}\Big(1 - C_1(2^{-(\varepsilon/3)r} + 2^{-(\delta/3)r})\Big)\Big) \leqslant$$
$$\leqslant |\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G_{K_{G,r}},r,t}| \exp_2\Big((2r-t)(p(G) - K_{G,r})\Big)\times$$
$$\times \exp\Big(-2|\mathcal{F}|2^{-r}(q(G) - q(G_{K_{G,r},U}))\Big(1 - C_1(2^{-(\varepsilon/3)r} + 2^{-(\delta/3)r})\Big)\Big) \lesssim_r$$
$$\lesssim_r \exp_2\Big((p(G) - |U|)(2r-t)\Big) \exp\Big(-2|\mathcal{F}|2^{-r}(q(G) - q(G_U))\Big)\times$$
$$\times \exp\Big(q(G_{K_{G,r},U})(r+1)^2 2^{t-2r}\Big)\times$$
$$\times \exp\Big(2|\mathcal{F}|2^{-r} q(G) C_1(2^{-(\varepsilon/3)r} + 2^{-(\delta/3)r})\Big) \lesssim_r$$
$$\lesssim_r \exp_2\Big((2r-t)(p(G) - |U|)\Big) \exp\Big(-2|\mathcal{F}|2^{-r}(q(G) - q(G_U))\Big).$$

Нетрудно заметить, что

$$|\widehat{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G,r,t}| \leqslant 2^{(p(G)-|U|)(2r-t)}\times$$
$$\times \Bigg(\sum_{k=K_{G,r}+1}^{K^1_{G,r}} |S^*_{G,U}(k)| \binom{|S^*_{G,U}(k)|}{]2^{(\varepsilon/2)r}[} \left(\left(1 + t + \binom{t}{2}\right) 2^{-t}\right)^{]2^{(\varepsilon/2)r}[} +$$
$$+ \sum_{k=K^1_{G,r}+1}^{p(G)} |S^*_{G,U}(k)| \binom{|S^*_{G,U}(k)|}{]|S^*_{G,U}(k)|2^{-t}2^{(\delta/2)r}[}\times$$
$$\times \left(\left(1 + t + \binom{t}{2}\right) 2^{-t}\right)^{]|S^*_{G,U}(k)|2^{-t}2^{(\delta/2)r}[}\Bigg).$$

Следовательно, для некоторой константы C имеем

$$|\widehat{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G,r,t}| \leqslant 2^{(p(G)-|U|)(2r-t)}\times$$
$$\times \Bigg(\sum_{k=K_{G,r}+1}^{K^1_{G,r}} |S^*_{G,U}(k)| \left(\frac{C|S^*_{G,U}(k)|(2t^2 2^{-t})}{2^{(\varepsilon/2)r}}\right)^{]2^{(\varepsilon/2)r}[} +$$

$$+\sum_{k=K^1_{G,r}+1}^{p(G)} |S^*_{G,U}(k)| \left(\frac{C|S^*_{G,U}(k)|(2t^2 2^{-t})}{|S^*_{G,U}(k)|2^{-t}2^{(\delta/2)r}}\right)^{]|S^*_{G,U}(k)|2^{-t}2^{(\delta/2)r}[}\Bigg) \lesssim_r$$

$$\lesssim_r 2^{(p(G)-|U|)(2r-t)}\Big((K^1_{G,r}-K_{G,r})2^{t+(\varepsilon/3)r}\times$$

$$\times (C2^{t+(\varepsilon/3)r}2t^2 2^{-t})/2^{(\varepsilon/2)r}\Big)^{2^{(\varepsilon/2)r}}+$$

$$+(p(G)-K^1_{G,r})2^{(1-\delta)r}\left(\frac{2Ct^2}{2^{(\delta/2)r}}\right)2^{t+(\varepsilon/3)r}2^{-t}2^{(\delta/2)r} \lesssim_r$$

$$\lesssim_r 2^{(p(G)-|U|)(2r-t)}\Big(q(G)2^{t+(\varepsilon/6)r}\Big(2^{-(\varepsilon/6)r}\Big)^{2^{(\varepsilon/2)r}}+$$

$$+q(G)2^{(1-\delta)r}\Big(2^{-(\delta/3)r}\Big)^{2^{(\varepsilon/3)r+(\delta/2)r}}\Big) \lesssim_r$$

$$\lesssim_r 2^{(p(G)-|U|)(2r-t)}\Big(2^{-(\varepsilon/8)r2^{(\varepsilon/2)r}}+2^{-(\delta/8)r2^{(\delta/2)r}}\Big) \ll_r |\widetilde{\mathfrak{T}}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G,r,t}|.$$

Таким образом, имеем

$$|\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G,r,t}| \lesssim_r \exp_2\Big((p(G)-|U|)(2r-t)\Big)\times$$
$$\times \exp\Big(-2|\mathcal{F}|2^{-r}(q(G)-q(G_U))\Big).$$

Теперь рассмотрим случай $t>(1-\varepsilon)r$. Так как $\varepsilon r<(1/2)\widetilde{\psi}(\delta/4)r$, то для (T_1,T_2,G) из $\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G,r,t}$ выполнено: для любого k, $K_{G,r}<k\leqslant p(G)$, существует M_k, $M_k\subseteq S_{G,U}(k)$, такое, что $|M_k|\geqslant |S_{G,U}(k)|(1-2\cdot 2^{-(\delta/2)r})$ и для любых различных a_1, a_2 из M_k верно $\rho(<T_1,T_2>^t(a_1),<T_1,T_2>^t(a_2))\geqslant (1/2)\widetilde{\psi}(\delta/4)r$.

Далее считаем, что $r\geqslant 3/((1/2)\widetilde{\psi}(\delta/4))$.

Таким образом, если a_1, $a_2\in M_k$, то $\mathcal{F}_{T_i(a_1),i}\cap\mathcal{F}_{T_j(a_2),j}\neq\varnothing$ лишь в том случае, когда $a_1=a_2$. Следовательно,

$$|W_{r,t,\mathcal{F},S_{G,U}(k)}(T_1|_{S_{G,U}(k)},T_2|_{S_{G,U}(k)})|\leqslant |W_{r,t,\mathcal{F},M_k}(T_1|_{M_k},T_2|_{M_k})|\leqslant$$
$$\leqslant 2^{2r-t}-2|\mathcal{F}||M_k|2^{r-t}+|M_k|(|\mathcal{F}_{t,1}|+|\mathcal{F}_{t,2}|^2)\leqslant$$
$$\leqslant 2^{2r-t}-2|\mathcal{F}||S_{G,U}(k)|2^{r-t}(1-2\cdot 2^{-(\delta/2)r})+|S_{G,U}(k)|(|\mathcal{F}_{t,1}|+|\mathcal{F}_{t,2}|^2).$$

В лемме 2.4.3 мы оценили W для $T_1,T_2,G)$ из $\widetilde{\mathfrak{T}}$. Здесь мы оцениваем W для (T_1,T_2,G) из $\mathfrak{T}$ и поэтому сумму взаимосвязи $\widehat{\mathfrak{T}}$ и $\widetilde{\mathfrak{T}}$ проверять не надо.

Таким образом:

$$|\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G,r,t}| \leqslant |\mathfrak{T}^{\mathcal{F},U,f_1,f_2,\delta}_{G_{K_{G,r},U},r,t}| \times$$
$$\times \prod_{k=K_{G,r}+1}^{p(G)} \Big(2^{2r-t} - |S_{G,U}(k)| \Big(2|\mathcal{F}|2^{r-t}(1-2\cdot 2^{-(\delta/2)r}) - |\mathcal{F}_{t,1}| - |\mathcal{F}_{t,2}|^2\Big)\Big) \lesssim_r$$
$$\lesssim_r \exp_2\Big((2r-t)(p(G)-|U|)\Big)\exp\Big(q(G)\cdot 2\cdot|\mathcal{F}|2^{-r}\cdot 2\cdot 2^{-(\delta/2)r}\Big)\times$$
$$\times \exp\Big(-(q(G)-q(G_U))\Big(2|\mathcal{F}|2^{-r} - (|\mathcal{F}_{t,1}|+|\mathcal{F}_{t,2}|^2)2^{t-2r}\Big)\Big) \lesssim_r$$
$$\lesssim_r \exp_2\Big((p(G)-|U|)(2r-t)\Big)\exp\Big(-2|\mathcal{F}|2^{-r}(q(G)-q(G_U))\Big)\times$$
$$\times \exp\Big((|\mathcal{F}_{t,1}|+|\mathcal{F}_{t,2}|^2)2^{t-2r}(q(G)-q(G_U))\Big).$$

Утверждение 2.4.3 доказано. □

Утверждение 2.4.4. *Если* $\ln q(G) \lesssim_r r$, *то*

$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{T},\delta}_{G,r,t}| \lesssim_r 2^{p(G)(2r-t)}\exp\Big(-2q(G)2^{-r}\Big)\exp\Big(q(G)2^{t-2r}\Big).$$

Доказательство. Действительно,

$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{T},\delta}_{G,r,t}| \leqslant \sum_{(f_1,f_2)} |\mathfrak{T}^{\{1^r\},U_1(G,r),f_1,f_2,\delta}_{G,r,t}|,$$

где сумма берется по таким (f_1, f_2), что для любых различных a и b из $U_1(G,r)$ выполнено $\rho(f_i(a), f_i(b)) \geqslant \widetilde{\psi}(1-5\delta)r$, $i=1,2$. Так как $|\{1^r\}_{t,1}| = 1$, $|\{1^r\}_{t,2}| = 0$, то в силу предыдущего утверждения имеем

$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{T},\delta}_{G,r,t}| \lesssim_r 2^{|U_1(G,r)|(2r-t)}2^{(p(G)-|U_1(G,r)|)(2r-t)}\times$$
$$\times \exp(-2q(G)2^{-r})\exp(q(G)2^{t-2r}).$$

Утверждение 2.4.4 доказано. □

Утверждение 2.4.5. *Если* $\varepsilon \in (0, 1/16)$ *и* $2^{(1-\varepsilon)r} \lesssim_r q(G) \lesssim_r 2^r \ln r^8$, $t \leqslant (1-2\varepsilon)r$, *то*

$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{TT},\delta}_{G,r,t}| \lesssim_r H(q(G),r)^2 \exp_2(p(G)(2r-t)).$$

Доказательство. Через $\mathfrak{T}^{\Lambda_1,f_1,\Lambda_2,f_2}_{G,r,t}$ обозначим множество таких троек (T_1,T_2,G) из $\mathfrak{T}^{\mathrm{TT},\delta}_{G,r,t}$, что $X(T_1,G)=\Lambda_1$, $X(T_2,G)=\Lambda_2$, $T_1|_{\Lambda_1}=f_1$, $T_2|_{\Lambda_2}=f_2$.

Через $A(\Lambda_1,\Lambda_2)$ обозначим множество вершин, имеющих ненулевую степень в графе $G^{\Lambda_1\cup\Lambda_2}$.

Через $l^*(\Lambda_1, \Lambda_2)$ обозначим наименьшее число ребер, которое надо удалить из графа $G^{\Lambda_1 \cup \Lambda_2}$, чтобы получить лес. Ясно, что

$$|A(\Lambda_1, \Lambda_2)| = |\Lambda_1| + |\Lambda_2| - |\Lambda_1 \cap \Lambda_2| - l^*(\Lambda_1, \Lambda_2) + k^*(G^{\Lambda_1 \cup \Lambda_2}).$$

Напомним, что $k^*(G^{\Lambda_1 \cup \Lambda_2})$ — число нетривиальных компонент связности графа $G^{\Lambda_1 \cup \Lambda_2}$.

Через $\mathfrak{T}_{G,r,t}^{\Lambda_1, \Lambda_2, (\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2)}$ обозначим множество таких троек (T_1, T_2, G) из $\mathfrak{T}_{G,r,t}^{\text{TT},\delta}$, что $X(T_1, G) = \Lambda_1$, $X(T_2, G) = \Lambda_2$, $T_1|_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2} = \widetilde{f}_1$, $T_2|_{\Lambda_1 \cup \Lambda_2} = \widetilde{f}_2$. Понятно, что

$$|\mathfrak{T}_{G,r,t}^{\Lambda_1, f_1, \Lambda_2, f_2}| = \sum_{(\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2)} |\mathfrak{T}_{G,r,t}^{\Lambda_1, \Lambda_2, (\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2)}|,$$

где сумма берется по таким парам $(\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2)$, что $\widetilde{f}_1|_{\Lambda_1} = f_1$, $\widetilde{f}_2|_{\Lambda_2} = f_2$.

Через $k_{G,r}^*(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)$ обозначим число нетривиальных компонент графа $G^{\Lambda_1 \cup \Lambda_2}$, не содержащих вершин из $U_1(G, r)$.

Через $\mathfrak{T}_{G,r,t}^{\Lambda_1, \Lambda_2, (\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2), (g_1, g_2)}$ обозначим множество таких троек (T_1, T_2, G) из $\mathfrak{T}_{G,r,t}^{\Lambda_1, \Lambda_2, (\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2)}$, что $T_1|_{U_1(G,r)} = g_1$, $T_2|_{U_1(G,r)} = g_2$.

Пусть $G'(\Lambda_1, \Lambda_2)$ — граф, полученный из G удалением множества вершин $A(\Lambda_1, \Lambda_2) \setminus U_1(G, r)$. Понятно, что

$$|\mathfrak{T}_{G,r,t}^{\Lambda_1, \Lambda_2, (\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2), (g_1, g_2)}| \leqslant \\ \leqslant |\mathfrak{T}_{G'(\Lambda_1, \Lambda_2), r, t}^{\mathcal{E}^r, U_1(G,r), g_1, g_2, \delta}| \cdot \exp_2\Big((2r - t) \cdot k_{G,r}^*(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)\Big)$$

и в силу утверждения 2.4.1 имеем

$$|\mathfrak{T}_{G,r,t}^{\Lambda_1, \Lambda_2, (\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2), (g_1, g_2)}| \lesssim_r 2^{(2r-t)\cdot k_{G,r}^*(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)} \times \\ \times \exp\Big(-2 \cdot (r+1)\, q(G'(\Lambda_1, \Lambda_2))\, 2^{-r}\Big) \times \\ \times \exp_2\Big((2r - t) \cdot (p(G) - |U_1(G, r) \cup A(\Lambda_1, \Lambda_2)|)\Big) \lesssim_r \\ \lesssim_r \exp\Big(-2 \cdot (r+1)\, q(G)\, 2^{-r}\Big) \times \\ \times \exp_2\Big((2r - t) \cdot (p(G) - |U_1(G, r) \cup A(\Lambda_1, \Lambda_2)|)\Big) \times \\ \times \exp_2\Big((2r - t) \cdot k_{G,r}^*(\Lambda_1 \cup \Lambda_2)\Big).$$

Число различных $(g_1,\, g_2)$ таких, что $\mathfrak{T}_{G,\,r,\,t}^{\Lambda_1,\,\Lambda_2,\,(\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2),\,(g_1,g_2)} \neq \varnothing$, не превосходит

$$\exp_2\Big((2\,r-t)\times \\ \times(|U_1(G,\,r)\setminus A(\Lambda_1,\,\Lambda_2)| + k^*(G^{\Lambda_1\cup\Lambda_2}) - k^*_{G,\,r}(\Lambda_1\cup\Lambda_2))\Big).$$

Следовательно,

$$|\mathfrak{T}_{G,\,r,\,t}^{\Lambda_1,\,\Lambda_2,\,(\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2)}| \lesssim_r\ 2^{(2\,r-t)\cdot(p(G)-|A(\Lambda_1,\,\Lambda_2)|+k^*(G^{\Lambda_1\cup\Lambda_2}))}\times \\ \times\exp\Big(-2\cdot(r+1)\,q(G)\,2^{-r}\Big) = \\ = \exp_2\Big((2\,r-t)\cdot(p(G)-|\Lambda_1|-|\Lambda_2|+|\Lambda_1\cap\Lambda_2|+l^*(\Lambda_1,\,\Lambda_2))\Big)\times \\ \times\exp\Big(-2\cdot(r+1)\,q(G)\,2^{-r}\Big).$$

Подсчитаем число различных пар $(\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2)$ таких, что $\widetilde{f}_1|_{\Lambda_1} = f_1$, $\widetilde{f}_2|_{\Lambda_2} = f_2$ и $\mathfrak{T}_{G,\,r,\,t}^{\Lambda_1,\,\Lambda_2,\,(\widetilde{f}_1,\widetilde{f}_2)} \neq \varnothing$. Так как для любых $x_1,\,\ldots,x_s$, являющихся ребрами простого цикла графа $G^{\Lambda_1\cup\Lambda_2}$, должно быть выполнено $\widetilde{f}_1(x_1) \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow \widetilde{f}_1(x_s) = 1^r$, для любого x из $\Lambda_2\setminus\Lambda_1$ выполнено $\widetilde{f}_1(x)|_{N_t} = f_2(x)|_{N_t}$, $\widetilde{f}_1|_{\Lambda_1} = f_1$, то различных $\widetilde{f}_1$ существует $\exp_2\Big((r-t)(|\Lambda_2\setminus\Lambda_1| - l^*(\Lambda_1,\,\Lambda_2))\Big)$. Аналогично, различных $\widetilde{f}_2$ существует $\exp_2\Big((r-t)(|\Lambda_1\setminus\Lambda_2| - l^*(\Lambda_1,\,\Lambda_2))\Big)$. Таким образом, искомое число пар $(\widetilde{f}_1, \widetilde{f}_2)$ равно $\exp_2\Big((r-t)(|\Lambda_1| + |\Lambda_2| - 2\,|\Lambda_1\cap\Lambda_2| - 2\,l^*(\Lambda_1,\,\Lambda_2))\Big)$. Следовательно,

$$|\mathfrak{T}_{G,r,t}^{\Lambda_1,f_1,\Lambda_2,f_2}| \lesssim_r\ \exp\Big(-2\cdot(r+1)\,q(G)\,2^{-r}\Big)\,2^{(2\,r-t)\cdot p(G)}\times \\ \times\exp_2\Big(-r\,|\Lambda_1| - r\,|\Lambda_2| + t\,|\Lambda_1\cap\Lambda_2| + l^*(\Lambda_1,\,\Lambda_2))\Big).$$

Пусть $\mathfrak{T}_{G,\,r,\,t}^{\Lambda_1,\,\Lambda_2}$, — множество троек $(T_1,\,T_2,\,G)$ из $\mathfrak{T}_{G,\,r,\,t}^{\text{TT},\delta}$ таких, что

$$X(T_1,\,G) = \Lambda_1, X(T_2,\,G) = \Lambda_2.$$

Через $N(l, r)$ обозначим число функций g из $\langle(\widetilde{\mathcal{E}}^r)^A\rangle$, $|A| = l$, таких, что $|g^{-1}(1_i^r)| \leqslant \mathrm{st}(q(G), r)$, $i = 1, \ldots, r$. Тогда имеем

$$|\mathfrak{T}_{G,r,t}^{\Lambda_1,\Lambda_2}| \lesssim_r \exp\Big(-2\cdot(r+1)q(G)2^{-r}\Big)2^{(2r-t)\cdot p(G)} \cdot N(|\Lambda_1|, r)2^{-r\,|\Lambda_1|}\times$$

$$\times N(|\Lambda_2|, r)2^{-r\,|\Lambda_2|} \cdot \exp\Big(t\,(|\Lambda_1 \cap \Lambda_2| + l^*(\Lambda_1,\, \Lambda_2))\Big).$$

Число пар (Λ_1, Λ_2) таких, что $|\Lambda_1| = l_1$, $|\Lambda_2| = l_2$, $|\Lambda_1 \cap \Lambda_2| + l^*(\Lambda_1, \Lambda_2) = k$, не превосходит

$$\binom{q(G)}{l_1} \cdot \binom{q(G) - (l_1)^2}{l_2 - k} \cdot \binom{(2\,(l_1 + l_2 - k))^2}{k} \leqslant$$

$$\leqslant \binom{q(G)}{l_1} \cdot \binom{q(G)}{l_2} \cdot \Big(\frac{l_2}{q(G) - l_2} \cdot 4 \cdot (l_1 + l_2)^2\Big)^k \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\frac{]2^r(\ln r^8)2^{-r} r\ln r[}{q(G) -]2^r(\ln r^8)2^{-r} r\ln r[} \cdot 16\cdot]2^r(\ln r^8)2^{-r} r\ln r[^2\Big)^k \times$$

$$\times \binom{q(G)}{l_1}\cdot\binom{q(G)}{l_2} = \binom{q(G)}{l_1}\cdot\binom{q(G)}{l_2} \cdot \Big(\frac{16\cdot]8r\ln^2 r[^3}{q(G) -]8r\ln^2 r[}\Big)^k \lesssim_r$$

$$\lesssim_r \binom{q(G)}{l_1}\binom{q(G)}{l_2} \cdot \Big(\frac{r^4}{q(G)}\Big)^k$$

Следовательно, имеем

$$|\mathfrak{T}_{G,\,r,\,t}^{\text{ТТ},\delta}| \lesssim_r \exp\Big(-2\cdot(r+1)\,q(G)\,2^{-r}\Big)\,2^{(2\,r-t)\cdot(G)}\times$$

$$\times \sum_{l_1=r}^{r\cdot\mathrm{st}(q(G),\,r)} \binom{q(G)}{l_1} 2^{-r\,l_1} N(l_1,\, r) \cdot \sum_{l_2=r}^{r\cdot\mathrm{st}(q(G),\,r)} \binom{q(G)}{l_2} 2^{-r\,l_2} N(l_2,\, r)\times$$

$$\times \sum_{k=0}^{\min(l_1,\, l_2)} 2^{t\,k}\Big(\frac{r^4}{q(G)}\Big)^k \lesssim_r \Big(\sum_{l=r}^{r\cdot\mathrm{st}(q(G),\,r)} \binom{q(G)}{l} 2^{-r\,l} N(l,\, r)\Big)^2 \times$$

$$\times \exp\Big(-2\cdot(r+1)\,q(G)\,2^{-r}\Big)\,2^{(2\,r-t)\cdot p(G)} =$$

$$= \exp\Bigl(-2\cdot(r+1)\,q(G)\,2^{-r}\Bigr)\,2^{(2\,r-t)\cdot p(G)}\cdot\Biggl(\sum_{l_1=1}^{\mathrm{st}(q(G),\,r)}\binom{q(G)}{l_1}2^{-r\,l_1}\times$$

$$\times\sum_{l_2=1}^{\mathrm{st}(q(G),\,r)}\binom{q(G)-l_1}{l_2}2^{-r\,l_2}\cdot\ldots\cdot\sum_{l_r=1}^{\mathrm{st}(q(G),r)}\binom{q(G)-l_1-\ldots\ -l_{r-1}}{l_r}2^{-rl_r}\Biggr)^2\leqslant$$

$$\leqslant\Bigl(\sum_{l=1}^{q(G)}\binom{q(G)}{l}2^{-rl}\Bigr)^{2r}\cdot\exp\Bigl(-2\cdot(r+1)q(G)2^{-r}\Bigr)2^{(2r-t)\cdot p(G)}=$$

$$=\exp\Bigl(-2\cdot(r+1)q(G)2^{-r}\Bigr)2^{(2r-t)\cdot p(G)}\cdot\Bigl((1+2^{-r})^{q(G)}-1\Bigr)^{2r}\leqslant$$

$$\leqslant\exp\Bigl(-2\cdot(r+1)q(G)2^{-r}\Bigr)2^{(2r-t)\cdot p(G)}\Bigl(\exp(q(G)2^{-r})-1\Bigr)^{2r}=$$

$$=2^{(2\,r-t)\cdot p(G)}\cdot H(q(G)\,r)^2$$

Утверждение 2.4.5 доказано. □

Глава 3

АСИМПТОТИКА ЧИСЛА ТУПИКОВЫХ ТЕСТОВ

Прежде, чем сформулировать основной результат главы, введем ряд обозначений.

Пусть ∇— один из значков: «т», «ту», «т, δ», «тт», «тт, δ». Определим на множестве таблиц $(E^n)^U$ функцию $\varphi^{\nabla}_{G,n,x}$, где $\mathcal{P}(G) = U$ и $x \in E^n \backslash \{0^n\}$, принимающую значение 1 на таблице T, если пара $(\pi_x \circ T, G)$ принадлежит множеству $\mathfrak{T}^{\nabla}_{G,|x|}$, определенным в параграфах 2.2, 2.3 главы 2. Напомним, что $\pi_x \circ T$ — таблица из столбцов T, соответствующих единицам x.

Пусть

$$\varphi^{\nabla}_{G,\,n,\,r} = \sum_{x \in E^n_r} \varphi^{\nabla}_{G,n,x}$$

Далее полагаем

$$\varphi^{\nabla}_{G,\,n} = \sum_{r=1}^{n} \varphi^{\nabla}_{G,n,r}$$

Пусть $\omega(x) = (\ln x - \ln\ln x)/2$ и $\theta(x) = \ln x - \ln\ln\ln x$. В предыдущей главе была определена функция

$$H(m,\, r) = \exp(-m \cdot 2^{-r})(1 - \exp(-m \cdot 2^{-r}))^r.$$

Положим для действительного x, натуральных m и n таких, что $0 \leqslant x \leqslant n-1$, $\widehat{H}(n,\, m,\, x) = \binom{n}{x} H(m,\, x)$. Для $1 \leqslant x \leqslant n$ полагаем

$$\widehat{H}^*(n,\, m,\, x) = \widehat{H}(n,\, m,\, x)/\widehat{H}(n,\, m,\, x-1) = \\ = ((n-x+1)/x)(\exp(m \cdot 2^{-x}) - 1)/(1 + \exp(-m \cdot 2^{-x}))^{x-1},$$

для $1 \leqslant x \leqslant n-1$ полагаем

$$\widehat{H}^{**}(n,\, m,\, x) = \widehat{H}^*(n,\, m,\, x+1)/\widehat{H}^*(n,\, m,\, x) = \\ = ((n-x)x/((n-x+1)(x+1)))\times \\ \times (1/(\exp(m \cdot 2^{-x-1}) + \exp(-m \cdot 2^{-x-1}) + 2))\times \\ \times (((\exp(m \cdot 2^{-x}) + 1)/(\exp(m \cdot 2^{-x}) + \exp(m \cdot 2^{-x-1})))^{x-1},$$

для $1 \leqslant x \leqslant n$ полагаем

$$\widehat{H}^{***}(n, m, x) = \widehat{H}^{*}(n, m, x) \cdot \widehat{H}^{*}(n, m, x+1) = \\ = \widehat{H}(n, m, x+1)/\widehat{H}(n, m, x-1) = \\ = ((n-x+1)(n-x)/(x(x+1))) \cdot (\exp(m \cdot 2^{-x-1}) - 1)^2 \times \\ \times \exp(m \cdot 2^{-x-1})/((\exp(-m \cdot 2^{-x-1}) + 1)(\exp(-m \cdot 2^{-x}) + 1))^{x-1}.$$

Если существует и притом единственное, относительно x, решение уравнения $\widehat{H}^{***}(n, m, x) = 1$ из интервала $(1, n-1)$, то полагаем $r(n, m)$ равным этому решению, в противном случае полагаем $r(n, m) = 1$.

Пусть $\varepsilon \in (1, 1/16)$, $D \in \mathcal{B}$ и $D(n) \lessgtr_n \ln\ln\ln n$. Напомним, что $p^*(G) = p(G) - k(G) + 1$, $d(r, G)$ — число остовных r-реберных лесов графа G. Положим функцию $\Phi_D^1(G, n)$ равной:

а) $\binom{n}{p^*(G)-1} d(p^*(G) - 1, G)(p^*(G) - 1)! \cdot 2^{(p^*(G)-1)^2}$, если $q(G) < D(n)\ln^2 n$, $p^*(G) - 1 \leqslant \omega(n) - D(n)$;

б) $\displaystyle\sum_{r=[\omega(n)-D(n)]}^{]\min(p^*(G)-1,\, \omega(n\,q(G))+D(n))[} \binom{n}{r} d(r, G)\, r! 2^{-r^2}$, если $q(G) < D(n)\ln^2 n$, $p^*(G) - 1 > \omega(n) - D(n)$;

в) $\displaystyle\sum_{r=[\omega(n\cdot q(G))-D(n)]}^{]\omega(n\,q(G))+D(n)[} \binom{n}{r} (q(G)\, 2^{-r})^r$, если $q(G) \geqslant D(n)\ln^2 n$.

Положим:

а) $\widehat{r}_D^1(G, n) = \widehat{r}_D^2(G, n) = p^*(G) - 1$, если $q(G) < D(n)\ln^2 n$, $p^*(G) - 1 \leqslant \omega(n) - D(n)$;

б) $\widehat{r}_D^1(G, n) = [\omega(n) - D(n)]$, $\widehat{r}_D^2(G, n) =]\min(p^*(G) - 1, \omega(n\,q(G)) + D(n))[$, если $q(G) < D(n)\ln^2 n$, $p^*(G) - 1 > \omega(n) - D(n)$;

в) $\widehat{r}_D^1(G, n) = [\omega(n\,q(G)) - D(n)]$, $\widehat{r}_D^2(G, n) =]\omega(n\,q(G)) + D(n)[$, если $q(G) \geqslant D(n)\ln^2 n$.

Положим:

а) $r_{D,\varepsilon}^1(n, m) = [r(n, m) - D(n)]$, $r_{D,\varepsilon}^2(n, m) =]r(n, m) + D(n)[$, если $m < n^{1+\varepsilon}$;

б) $r_{D,\varepsilon}^1(n, m) = r_{D,\varepsilon}^2(n, m) - 1 = [r(n, m)]$, если $n^{1+\varepsilon} \leqslant m < 2^{4\ln^2 n}$;

в) $r_{D,\varepsilon}^1(n, m) = r_{D,\varepsilon}^2(n, m) - 1 = [\theta(m)]$, если $m \geqslant 2^{4\ln^2 n}$.

Пусть, далее,

$$\Phi^2_{D,\varepsilon}(n,\,m) = \sum_{r=r^1_{D,\,\varepsilon}(n,m)}^{r^2_{D,\,\varepsilon}(n,m)} \binom{n}{r} \cdot H(m,\,r).$$

Положим:

а) $\widetilde{r}^1_{D,\varepsilon}(G,\,n) = \widehat{r}^1_D(G,\,n)$, $\widetilde{r}^2_{D,\varepsilon}(G,\,n) = \widehat{r}^2_D(G,\,n)$, если $q(G) \leqslant \leqslant n^{1-\varepsilon}$;

б) $\widetilde{r}^1_{D,\varepsilon}(G,\,n) = r^1_{D,\varepsilon}(n,\,q(G))$, $\widetilde{r}^2_{D,\varepsilon}(G,\,n) = r^2_{D,\varepsilon}(n,\,q(G))$, если $q(G) > n^{1-\varepsilon}$.

Пусть

$$\Phi_{D,\varepsilon}(G,\,n) = \begin{cases} \Phi^1_D(G,\,n), & \text{если } q(G) \leqslant n^{1-\varepsilon}, \\ \Phi^2_{D,\varepsilon}(n,\,q(G)), & \text{если } q(G) > n^{1-\varepsilon}. \end{cases}$$

Основным результатом главы является утверждение.

Теорема 3.0.1. *Если* $\varepsilon \in (0,\,1/16)$, $0 < c_1 < c_2$, $D \in \mathcal{B}$ *и* $D(n) \lessgtr_n \ln\ln\ln n$, *то:*

1) *при* $1 \leqslant q(G) \leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}$ *выполнено*

$$\varphi^{\text{тт}}_{G,\,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \sum_{r=\widetilde{r}^1_{D,\,\varepsilon}(G,n)}^{\widetilde{r}^2_{D,\,\varepsilon}(G,n)} \varphi^{\text{тт}}_{G,\,n,\,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \Phi_{D,\varepsilon}(G,\,n);$$

2) *при* $q(G) \geqslant 2^n D(n)$ *выполнено* $\varphi^{\text{тт}}_{G,\,n} \overset{\text{п.в.}}{=}_n 0$;

3) *не существует такой действительной функции* f, *определенной на множестве пар* $(G,\,n)$, G— *граф,* $n \in \mathbb{N}$, *что при* $c_1\,2^n \leqslant q(G) \leqslant c_2\,2^n$ *выполнено* $\varphi^{\text{тт}}_{G,\,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n f(G,\,n)$ *(либо* $\varphi^{\text{тт}}_{G,\,n} \overset{\text{п.в.}}{=}_n f(G,\,n)$*).*

Эти факты вытекают непосредственно из утверждений 3.1.19, 3.3.9 и 3.3.10. В утверждениях 3.2.10 и 3.2.11 получены оценки величины $r(n,\,m)$.

3.1. Случай «низких» таблиц

На протяжении этого параграфа будем предполагать, что $\varepsilon \in \in (0,\,1/16)$. Будем искать асимптотику числа тупиковых тестов для почти всех пар $(T,\,G)$ из $\mathfrak{T}_{G,\,n}$, если выполнено $q(G) \leqslant n^{1-\varepsilon}$.

Если $Q \subseteq X(G)$, $x \in E^n \setminus \{0^n\}$, то положим $\varphi^{\text{ту}}_{G,\,n,\,Q,\,x}(T) = = 1$, где $T \in (E^n)^{\mathcal{P}(G)}$, если $(\pi_x \circ T_G)(Q) = \widetilde{\mathcal{E}}^{|x|} = \widetilde{\mathcal{E}}^{|Q|}$, и 0 в противном случае. Ясно, что $\varphi^{\text{ту}}_{G,\,n,\,Q,\,x} \not\equiv 0$ тогда и только тогда, когда $|Q| = |x|$ и G^Q — лес. Кроме того,$\varphi^{\text{ту}}_{G,\,n,\,Q,\,x}(T) = 1$ тогда и только тогда, когда $(T_G|_Q)^{**}(x^{-1}(1)) = \widetilde{\mathcal{E}}^Q$.

Через $\mathcal{L}_G$ обозначим множество таких Q, $Q \subseteq X(G)$, что G^Q — лес, а через $\mathcal{L}_{G,\,r}$ множество таких Q из $\mathcal{L}_G$, что $|Q| = r$. Понятно, что

$$\varphi^{\text{тт}}_{G,\,n,\,x} \leqslant \varphi^{\text{ту}}_{G,\,n,} \leqslant \sum_{Q\in\mathcal{L}_{G,\,|x|}} \varphi^{\text{ту}}_{G,\,n,\,Q,\,x}.$$

Если $\mathcal{F} \subseteq E^{|x|}$, то положим $\varphi^{\mathcal{F}}_{G,\,n,\,Q,\,x}(T) = 1$, если $(\pi_x \circ T_G)(X(G) \setminus Q) \cap \mathcal{F} = \varnothing$, и 0 в противном случае. Тогда имеем

$$\varphi^{\text{тт}}_{G,\,n,\,x} \geqslant \sum_{Q\in\mathcal{L}_{G,\,|x|}} \varphi^{\text{ту}}_{G,\,n,\,Q,\,x} \cdot \varphi^{\mathcal{E}^{|x|}}_{G,\,n,\,Q,\,x}.$$

Утверждение 3.1.1. *Если* $\varepsilon \in (0,\,1/16)$, $D \in \mathcal{B}$, $D(n) \lesseqgtr_n \ln\ln\ln n$ *и* $q(G) \leqslant n^{(1-\varepsilon)}$, *то*

$$\sum_{r=1}^{p^*(G)-1} \binom{n}{r} d(r,\,G) r!\, 2^{-r^2} \sim_n$$

$$\sim_n \sum_{r=[min(p^*(G)-1,\,\omega(n)-D(n))]}^{]min(p^*(G)-1,\,\omega(n\,q(G))+D(n))[} \binom{n}{r} d(r,\,G)\, r! 2^{-r^2}$$

Доказательство. Ясно, что при $r \leqslant p^*(G) - 1$ справедливы следующие неравенства:

$$d(r+1,\,G) \leqslant ((q(G) - r)/(r+1) d(r,\,G), \tag{3.1}$$

$$d(r-1,\,G) \leqslant r \cdot d(r,\,G). \tag{3.2}$$

Тогда, в силу (3.1), имеем

$$\frac{\binom{n}{r+1} d(r+1,\,G)(r+1)! 2^{-(r+1)^2}}{\binom{n}{r} d(r,\,G)\, r! 2^{-r^2}} \leqslant (n \cdot q(G)/r) \cdot 2^{-2\,r-1}.$$

Если $r \geqslant \omega(n \cdot q(G)) + D(n)$, то

$$\frac{n \cdot q(G)}{r} \cdot 2^{-2\,r-1} \leqslant \frac{2^{-2\,D(n)} \cdot \ln n \cdot q(G)}{\omega(n \cdot q(G))} \ll_n 1. \tag{3.3}$$

Далее, в силу (3.2), имеем

$$\frac{\binom{n}{r-1} d(r-1,\, G)(r-1)!2^{-(r-1)^2}}{\binom{n}{r} d(r,\, G)\, r!2^{-r^2}} \leqslant \frac{r}{n-r+1} \cdot 2^{2\,r-1}.$$

Если $r \leqslant \omega(n) - D(n)$, то

$$\frac{r \cdot 2^{2\,r-1}}{n-r+1} \leqslant \frac{((1/2)\ln n)(n/\ln n) \cdot 2^{-2\,D(n)}}{n-(1/2)\ln n} \ll_n 1. \qquad (3.4)$$

Исходя из (3.3) и (3.4), получаем

$$\sum_{r=[\min(p^*(G)-1,\, \omega(n)-D(n))]}^{]\min(p^*(G)-1,\, \omega(n\,q(G))+D(n))[} \binom{n}{r} d(r,\, G)\, r!2^{-r^2} \gtrsim_r$$

$$\gtrsim_r \sum_{r=1}^{p^*(G)-1} \binom{n}{r} d(r,\, G) r!\, 2^{-r^2}$$

Утверждение 3.1.1 доказано. □

Легко видеть, что верно следующее утверждение.

Следствие 3.1.2. *Если* $\varepsilon \in (0,\, 1/16)$, $D \in \mathcal{B}$, $D(n) \lesseqgtr_n \ln\ln\ln n$, *то*

1) *при* $p^*(G) - 1 \leqslant \omega(n) - D(n)$ *выполнено*

$$\sum_{r=1}^{p^*(G)-1} \binom{n}{r} d(r,\, G) r!\, 2^{-r^2} \sim_n$$

$$\sim_n \binom{n}{p^*(G)-1} d(p^*(G)-1,\, G)(p^*(G)-1)!\, 2^{-(p^*(G)-1)^2};$$

2) *при* $p^*(G) - 1 \geqslant \omega(n) - D(n)$, $q(G) \leqslant n^{1-\varepsilon}$ *выполнено*

$$\sum_{r=1}^{p^*(G)-1} \binom{n}{r} d(r,\, G) r!\, 2^{-r^2} \sim_n$$

$$\sim_n \sum_{r=[\omega(n)-D(n)]}^{]\min(p^*(G)-1,\, \omega(n\,q(G))+D(n))[} \binom{n}{r} d(r,\, G)\, r!2^{-r^2}.$$

Утверждение 3.1.3. *Число простых циклов длины* k, $k \geqslant 3$, *в графе* G *не превосходит* $(4\sqrt{q(G)}\,)^k$.

Доказательство. Пусть $a_1, \{a_1, a_2\}, a_2, \{a_2, a_3\}, \ldots$ $\ldots, a_k, \{a_k, a_1\}$ — простой цикл графа G. Разделим $\mathcal{P}(G)$ на $\mathcal{P}_1(G)$ и $\mathcal{P}_2(G)$ так, что для любой вершины a из $\mathcal{P}_1(G)$ выполнено $\gamma_G(a) \geqslant \sqrt{q(G)}$, а $\mathcal{P}_2(G) = \mathcal{P}(G) \setminus \mathcal{P}_1(G)$. Ясно, что $|\mathcal{P}_1(G)| \leqslant 2\, q(G)/\sqrt{q(G)} = 2\sqrt{q(G)}$. Число циклов таких, что $a_1, \ldots, a_k \in \mathcal{P}_1(G)$ не превосходит $(2\sqrt{q(G)}\,)^k$.

Пусть k четно, тогда, если ребра $\{a_1, a_2\}, \{a_3, a_4\}, \ldots$ $\ldots, \{a_{k-1}, a_k\}$ зафиксировать, то оставшиеся можно выбрать не более, чем $4^{k/2}$ способами, так как, например, ребро $\{a_1, a_3\}$, смежно с ребрами $\{a_1, a_2\}$ и $\{a_3, a_4\}$. Следовательно, всего циклов не более, чем $q(G)^{k/2} \cdot 4^{k/2} = (2\sqrt{q(G)}\,)^k$.

Пусть теперь k нечетно и какая либо вершина, например a_2, принадлежит $\mathcal{P}_2(G)$. При таком условии, если уже выбрано ребро $\{a_1, a_2\}$, то ребро $\{a_2, a_3\}$ можно выбрать не более, чем $2\sqrt{q(G)}$ способами. Если выбрать ребра $\{a_1, a_2\}, \{a_2, a_3\}, \{a_4, a_5\}, \ldots$ $\ldots, \{a_{k-1}, a_k\}$, то оставшиеся, как и в случае четного k, можно выбрать $4^{(k-1)/2}$ способами. Следовательно, таких циклов не более, чем $q(G)^{(k-1)/2} \cdot 2 \cdot \sqrt{q(G)} \cdot 4^{(k-1)/2} = (2\sqrt{q(G)}\,)^k$. Поскольку вершины и ребра цикла, содержащего вершину из $\mathcal{P}_2(G)$ всегда можно выписать так, что $a_2 \in \mathcal{P}_2(G)$, и число циклов, не содержащих вершин из $\mathcal{P}_2(G)$, не превосходит $(2\sqrt{q(G)}\,)^k$, получаем, что для нечетного k искомое число не более, чем

$$(2\sqrt{q(G)}\,)^k + (2\sqrt{q(G)}\,)^k \leqslant (4\sqrt{q(G)}\,)^k$$

Утверждение 3.1.3 доказано. □

Утверждение 3.1.4. *Если* $r \ll_{q(G)} \sqrt{q(G)}$, *то* $|\mathcal{Л}_{(G,r)}| \sim$ $\sim_{q(G)} \binom{q(G)}{r}$.

Доказательство. В силу предыдущего утверждения число множеств Q, $Q \subseteq X(G)$, $|Q| = r$ таких, что граф G^Q содержит простой цикл длины k, не превосходит $(4\sqrt{q(G)}\,)^k \binom{q(G)}{r-k} \leqslant$ $\leqslant \binom{q(G)}{r} \left(\dfrac{4\sqrt{q(G)}\cdot r}{q(G)-r}\right)^k$. Следовательно,

$$|\mathcal{Л}_{G,r}| \geqslant \binom{q(G)}{r} - \sum_{k=3}^{r} \binom{q(G)}{r} \left(\frac{4\sqrt{q(G)}\cdot r}{q(G)-r}\right)^k =$$

$$= \binom{q(G)}{r}\left(1 - \left(\frac{4\sqrt{q(G)}\cdot r}{q(G)-r}\right)^3 \cdot \left(1 - \left(\frac{4\sqrt{q(G)}\cdot r}{q(G)-r}\right)^{r-2}\right) \Big/\right.$$

$$\Big/ \left(1 - \frac{4\sqrt{q(G)}\cdot r}{q(G)-r}\right)\Bigg) \gtrsim_{q(G)} \cdot \binom{q(G)}{r}.$$

Утверждение 3.1.4 доказано. □

Утверждение 3.1.5. *Если* $\varepsilon \in (0,\ 1/16)$*,* $D \in \mathcal{B}$*,* $D(n) \lesseqgtr_n \ln\ln\ln n$ *и* $D(n)\cdot \ln^2 n \leqslant q(G) \leqslant n^{1-\varepsilon}$*, то*

$$\sum_{r=1}^{p^*(G)-1} \binom{n}{r} d(r,\ G) r!\, 2^{-r^2} \sim_n \sum_{r=[\omega(n\cdot q(G))-D(n)]}^{]\omega(n\cdot q(G))+D(n)[} \binom{n}{r} d(r,\ G)\, r! 2^{-r^2} \sim_n$$

$$\sim_n \sum_{r=[\omega(n\cdot q(G))-D(n)]}^{]\omega(n\cdot q(G))+D(n)[} \binom{n}{r}\binom{q(G)}{r} r! 2^{-r^2} \sim_n$$

$$\sim_n \sum_{r=[\omega(n\cdot q(G))-D(n)]}^{]\omega(n\cdot q(G))+D(n)[} \binom{n}{r}\left(q(G) 2^{-r}\right)^r \sim_n \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r}\left(q(G) 2^{-r}\right)^r.$$

Доказательство. Заметим, что в этом случае $p^*(G) - 1 - \omega(n\cdot q(G)) - D(n) \gg_n 1$ и, следовательно, в силу утверждения 3.1.1 имеем

$$\sum_{r=1}^{p^*(G)-1} \binom{n}{r} d(r,\ G) r!\, 2^{-r^2} \sim_n \sum_{r=[\omega(n)-D(n)]}^{]\omega(n\cdot q(G))+D(n)[} \binom{n}{r} d(r,\ G)\, r! 2^{-r^2}.$$

Так как $\omega(n\cdot q(G)) + D(n) \ll_n \sqrt{q(G)}$, а, следовательно, и $\omega(n\cdot q(G)) + D(n) \ll_{q(G)} \sqrt{q(G)}$, то получаем из утверждения 3.1.4, что $d(r\, G) \sim_{q(G)} \binom{q(G)}{r}$, а, значит, $d(r\, G) \sim_n \binom{q(G)}{r}$. Из того же неравенства для $r \leqslant \omega(n\cdot q(G)) + D(n)$ имеем $\binom{q(G)}{r} \sim_n q(G)^r/r!$. Следовательно, для $r \leqslant \omega(n\cdot q(G)) - D(n)$ выполнено

$$\frac{\binom{n}{r-1} d(r-1,\ G)(r-1)!\, 2^{-(r-1)^2}}{\binom{n}{r} d(r,\ G) r!\, 2^{-r^2}} \lesssim_n \frac{r\, 2^{2\, r-1}}{(n-r+1) q(G)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\omega(n\cdot q(G))}{(n-r+1) q(G)} \cdot \frac{n\cdot q(G)}{\ln n\cdot q(G)} \cdot 2^{-2D(n)} \leqslant (n/(n-r+1))\, 2^{-2\, D(n)} \ll_n 1.$$

Таким образом,

$$\sum_{r=[\omega(n)-D(n)]}^{]\omega(n\cdot q(G))+D(n)[} \binom{n}{r} d(r,\, G)\, r! 2^{-r^2} \sim_n$$

$$\sim_n \sum_{r=[\omega(n\cdot q(G))-D(n)]}^{]\omega(n\cdot q(G))+D(n)[} \binom{n}{r} d(r,\, G)\, r! 2^{-r^2} \sim_n$$

$$\sim_n \sum_{r=[\omega(n\cdot q(G))-D(n)]}^{]\omega(n\cdot q(G))+D(n)[} \binom{n}{r} \binom{q(G)}{r} r! 2^{-r^2} \sim_n$$

$$\sim_n \sum_{r=[\omega(n\cdot q(G))-D(n)]}^{]\omega(n\cdot q(G))+D(n)[} \binom{n}{r} \left(q(G) 2^{-r}\right)^r .$$

Аналогично показывается, что

$$\sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} \left(q(G) 2^{-r}\right)^r \sim_n \sum_{r=[\omega(n\cdot q(G))-D(n)]}^{]\omega(n\cdot q(G))+D(n)[} \binom{n}{r} \left(q(G) 2^{-r}\right)^r .$$

Утверждение 3.1.5 доказано. □

Утверждение 3.1.6. *Если* $q(G) \ll_n 2^{|x|}(|x|+1)$, *то*

$$\mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ}}_{G,\,n,\,x} \sim_n \mathtt{M} \sum_{Q \in \mathcal{Л}_{G,\,|x|}} \varphi^{\text{ТУ}}_{G,\,n,\,Q,\,x} = d(|x|,\, G)|x|!\, 2^{-|x|^2}.$$

Доказательство. Ранее было замечено, что

$$\sum_{Q \in \mathcal{Л}_{G,\,|x|}} \varphi^{\text{ТУ}}_{G,\,n,\,Q,\,x} \cdot \varphi^{\mathcal{E}^{|x|}}_{G,\,n,\,Q,\,x} \leqslant \varphi^{\text{ТТ}}_{G,\,n,\,x} \leqslant \sum_{Q \in \mathcal{Л}_{G,\,|x|}} \varphi^{\text{ТУ}}_{G,\,n,\,Q,\,x}$$

Пусть $Q \in \mathcal{Л}_{G,\,r}$, $f \in \langle(\widetilde{\mathcal{E}}^r)^Q\rangle$. В силу утверждения 2.2.4 и 2.2.5 получаем $|\mathfrak{T}^{Q,\,f}_{G,\,r}| = 2^{-r^2} \cdot |\mathfrak{T}_{G,\,r}|$, где $\mathfrak{T}^{Q,\,f}_{G,\,r}$ — множество пар $(T,\, G)$ из $\mathfrak{T}_{G,\,r}$ таких, что $T_G|_Q = f$.

Пусть $a \in X(G) \setminus Q$. Если $G^{Q\cup\{a\}}$ — не лес, то для любой $(T,\, G)$ из $\mathfrak{T}^{Q,\,f}_{G,\,r}$ выполнено $|T_G(a)| \leqslant r-2$, так как любой цикл содержит не менее 3 ребер и, следовательно, $T_G(a) = f(a_1) \leftrightarrow \ldots$ $\ldots \leftrightarrow f(a_k)$, $a_i \in Q$, $i \in N_k$, $k \geqslant 2$, где $a_1, \ldots, a_k$ — попарно различные ребра цикла. Если $G^{Q\cup\{a\}}$ — лес, то для любой f_1 из $(E^r)^{Q\cup\{a\}}$ выполнено $|\mathfrak{T}^{Q\cup\{a\},\,f_1}_{G,\,r}| = 2^{-r(r+1)} \cdot |\mathfrak{T}_{G,\,r}|$. Следовательно, число пар (T, G) таких, что $T_G|_Q = f$, $T_G(a) \in \mathcal{E}^r$, равно $(r+1)2^{-r(r+1)} \cdot |\mathfrak{T}_{G,r}|$. Таким образом, число пар (T, G) из $\mathfrak{T}_{G,r}^{Q,f}$ таких, что $T_G(X(G) \setminus Q) \cap \mathcal{E}^r \neq \varnothing$, не более $q(G) \cdot (r + 1)2^{-r(r+1)} \cdot |\mathfrak{T}_{G,r}|$. Следовательно,

$$\mathtt{M}(\varphi_{G,n,Q,x}^{\text{ТУ}} \cdot \varphi_{G,n,Q,x}^{\mathcal{E}^{|x|}}) \geqslant |x|!\, 2^{-|x|^2} \cdot (1 - q(G)(|x|+1) \cdot 2^{-|x|}),$$

где $|x|!$ — число различных f.

Так как $q(G) \ll_n 2^{|x|}/(|x|+1)$, то

$$\mathtt{M}(\varphi_{G,n,Q,x}^{\text{ТУ}} \cdot \varphi_{G,n,Q,x}^{\mathcal{E}^{|x|}}) \sim_n |x|!\, 2^{-|x|^2} = \mathtt{M}\varphi_{G,n,Q,x}^{\text{ТУ}}.$$

Следовательно,

$$\mathtt{M}\varphi_{G,n,x}^{\text{ТТ}} \sim_n \mathtt{M} \sum_{Q \in \mathcal{N}_{G,|x|}} \varphi_{G,n,Q,x}^{\text{ТУ}} = d(|x|, G)|x|!\, 2^{-|x|^2}.$$

Утверждение 3.1.6 доказано. □

Утверждение 3.1.7. *Если $x \in E_{p^*-1}^n$, то*

$$\varphi_{G,n,x}^{\text{ТТ}} = \sum_{Q \in \mathcal{N}_{G,p^*(G)-1}} \varphi_{G,n,Q,x}^{\text{ТУ}}.$$

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $n = p^*(G) - 1$ и $x = 1^n$. Пусть имеется Q из $\mathcal{N}_{G,n}$ и f из $\langle(\widetilde{\mathcal{E}}^n)^Q\rangle$. Тогда для любой (T, G) из $\mathfrak{T}_{G,r}^{Q,f}$ выполнено $T_G(X(G) \setminus Q) \cap \mathcal{E}^r \neq \varnothing$. Действительно, пусть $a \in X(G) \setminus Q$. Тогда, поскольку G^Q — минимальный остовный лес графа G, найдутся $a_1, \ldots, a_k$ из Q, $k \geqslant 2$, такие, что $a, a_1, \ldots, a_k$ суть ребра простого цикла в G. Тогда $T_G(a) = T_G(a_1) \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow T_G(a_k) = f(a_1) \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow f(a_k)$. В силу того, что $f(a_1), \ldots, f(a_k) \in \widetilde{\mathcal{E}}^n$ и они попарно различны имеем $|T_G(a)| \leqslant n - 2$. Следовательно, $T_G(a) \notin \mathcal{E}^n$. Таким образом, $\mathfrak{T}_{G,r}^{Q,f} \subseteq \mathfrak{T}_{G,r}^{\text{ТТ}}$, а также, если $Q_1 \neq Q_2$, то $\mathfrak{T}_{G,r}^{Q_1,f_1} \cap \mathfrak{T}_{G,r}^{Q_2,f_2} = \varnothing$, где $Q_1, Q_2 \in \mathcal{N}_{G,n}$, $f_1(Q_1) = f_2(Q_2) = \widetilde{\mathcal{E}}^n$. Непосредственно из этого факта вытекает интересующее нас равенство.

Утверждение 3.1.7 доказано. □

Положим

$$\varphi_{G,n,r}^{\text{ТУ},*} = \sum_{x \in E_r^n} \sum_{Q \in \mathcal{N}_{G,r}} \varphi_{G,n,Q,x}^{\text{ТУ}}$$

Утверждение 3.1.8. *Имеют место соотношения*

$$\varphi^{\text{ТТ}}_{G,\,n} \leqslant \sum_{r=1}^{p^*(G)-1} \varphi^{\text{ТУ},*}_{G,\,n,\,r},$$

$$\mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ}}_{G,\,n} \leqslant \mathtt{M} \sum_{r=1}^{p^*(G)-1} \varphi^{\text{ТУ},*}_{G,\,n,\,r} = \sum_{r=1}^{p^*(G)-1} \binom{n}{r} d(r,\,G)\,r!2^{-r^2}.$$

Доказательство. Так как $\varphi^{\text{ТТ}}_{G,\,n,\,x} \leqslant \sum_{Q\in\mathcal{N}_{G,\,|x|}} \varphi^{\text{ТУ}}_{G,\,n,\,Q,\,x}$, то $\varphi^{\text{ТТ}}_{G,\,n} \leqslant \sum_{r=1}^{p^*(G)-1} \varphi^{\text{ТУ},*}_{G,\,n,\,r}$. Следовательно,

$$\mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ}}_{G,\,n} \leqslant \mathtt{M} \sum_{r=1}^{p^*(G)-1} \varphi^{\text{ТУ},*}_{G,\,n,\,r} = \sum_{r=1}^{p^*(G)-1} \binom{n}{r} d(r,\,G)\,r!2^{-r^2}.$$

Утверждение 3.1.8 доказано. □

Утверждение 3.1.9. *Если $D \in \mathcal{B}$, $D(n) \lessgtr_n \ln\ln\ln n$, $q(G) \leqslant \leqslant D(n)\ln^2 n$ и $p^*(G) - 1 \leqslant \omega(n) - D(n)$, то*

$$\mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ}}_{G,\,n} \sim_n \mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ}}_{G,\,n,\,p^*(G)-1} = \mathtt{M}\varphi^{\text{ТУ},*}_{G,\,n,\,p^*(G)-1} = \\ = \binom{n}{p^*(G)-1} \cdot d(p^*(G)-1,\,G)(p^*(G)-1)!\,2^{-(p^*(G)-1)^2}.$$

Доказательство. Согласно утверждению 3.1.8 и следствию 3.1.2 имеем

$$\mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ}}_{G,\,n} \leqslant \sum_{r=1}^{p^*(G)-1} \binom{n}{r} d(r,\,G)\,r!2^{-r^2} \sim_n \\ \sim_n \binom{n}{p^*(G)-1} d(p^*(G)-1,\,G)(p^*(G)-1)!\,2^{-(p^*(G)-1)^2} = \\ = \mathtt{M}\varphi^{\text{ТУ},*}_{G,\,n,\,p^*(G)-1}.$$

Но по утверждению 3.1.7 выполнено $\mathtt{M}\varphi^{\text{ТУ},*}_{G,\,n,\,p^*(G)-1} = = \mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ}}_{G,\,n,\,p^*(G)-1}$. Таким образом, $\mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ}}_{G,\,n} \lesssim_n \mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ}}_{G,\,n,\,p^*(G)-1}$ и, следовательно, $\mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ}}_{G,\,n} \sim_n \mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ}}_{G,\,n,\,p^*(G)-1}$.

Утверждение 3.1.9 доказано. □

Утверждение 3.1.10. *Если $D \in \mathcal{B}$, $D(n) \lessgtr_n \ln\ln\ln n$, $q(G) \leqslant \leqslant D(n)\ln^2 n$ и $p^*(G) - 1 \geqslant \omega(n) - D(n)$, то*

$$\mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ}}_{G,n} \sim_n \mathtt{M} \sum_{r=[\omega(n)-D(n)]}^{]\min(p^*(G)-1,\,\omega(n\,q(G))+D(n))[} \varphi^{\text{ТТ}}_{G,n,r} \sim_n$$
$$\sim_n \mathtt{M} \sum_{r=[\omega(n)-D(n)]}^{]\min(p^*(G)-1,\,\omega(n\,q(G))+D(n))[} \varphi^{\text{ТУ},*}_{G,n,r} =$$
$$= \sum_{r=[\omega(n)-D(n)]}^{]\min(p^*(G)-1,\,\omega(n\,q(G))+D(n))[} \binom{n}{r} d(r,\,G)\,r!\,2^{-r^2}.$$

Доказательство. Согласно утверждениям 3.1.8 и 3.1.1 имеем

$$\mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ}}_{G,n} \leqslant \sum_{r=1}^{p^*(G)-1} \binom{n}{r} d(r,\,G)\,r!\,2^{-r^2} \sim_n$$
$$\sim_n \sum_{r=[\omega(n)-D(n)]}^{]\min(p^*(G)-1,\,\omega(n\,q(G))+D(n))[} \binom{n}{r} d(r,\,G)\,r!\,2^{-r^2} =$$
$$= \mathtt{M} \sum_{r=[\omega(n)-D(n)]}^{]\min(p^*(G)-1,\,\omega(n\,q(G))+D(n))[} \varphi^{\text{ТУ},*}_{G,n,r}.$$

Так как $2^{[\omega(n)-D(n)]}/[\omega(n) - D(n)] \gg_n q(G)$, то в силу утверждения 3.1.6 для $|x| \geqslant [\omega(n) - D(n)]$ имеем $\mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ}}_{G,n,x} \sim \sim_n \mathtt{M}\sum \varphi^{\text{ТУ}}_{G,n,Q,x}$, где сумма берется по всем Q из $\mathcal{Л}_{G,|x|}$, и, следовательно, для $r \geqslant [\omega(n) - D(n)]$ верно $\mathtt{M}\varphi^{\text{ТУ},*}_{G,n,r} \sim_n \mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ}}_{G,n,r}$. Но тогда имеем

$$\mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ}}_{G,n} \lesssim_n \mathtt{M} \sum_{r=[\omega(n)-D(n)]}^{]min(p^*(G)-1,\,\omega(n\,q(G))+D(n))[} \varphi^{\text{ТТ}}_{G,n,r},$$

откуда вытекает интересующий нас результат.

Утверждение 3.1.10 доказано. □

Аналогично двум предыдущим доказывается предложение.

Утверждение 3.1.11. *Если* $\varepsilon\in(0,1/16)$, $D\in\mathcal{B}$, $D(n)\lessgtr_n \ln\ln\ln n$ *и* $D(n)\ln^2 n\leqslant q(G)\leqslant n^{1-\varepsilon}$, *то*

$$\mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ}}_{G,\,n}\sim_n \sum_{r=[\omega(n\,q(G))-D(n)]}^{]\omega(n\,q(G))+D(n)[}\mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ}}_{G,\,n,\,r}\sim_n \sum_{r=[\omega(n\,q(G))-D(n)]}^{]\omega(n\,q(G))+D(n)[}\mathtt{M}\varphi^{\text{ТУ},*}_{G,\,n,\,r}=$$

$$=\sum_{r=[\omega(n\,q(G))-D(n)]}^{]\omega(n\,q(G))+D(n)[}\binom{n}{r}d(r,\,G)\,r!\,2^{-r^2}.$$

Положим для Q из $\mathcal{I}_{G,\,r}$ при $r\geqslant 1$, что $\varphi^{\text{ТУ},*}_{G,\,n,\,Q}=$ $=\sum_{x\in E^n_r}\varphi^{\text{ТУ},*}_{G,\,n,\,Q,\,x}$.

Утверждение 3.1.12. *Если* $\varepsilon\in(0,\,1/16)$ *и* $1\leqslant r\leqslant(1-\varepsilon/2)\ln n$, *то для некоторой константы* c_1 *при* $Q\in\mathcal{I}_{G,\,r}$ *и* $a\in E^Q$ *число пар* $(T,\,G)$ *из* $\mathfrak{T}_{G,\,n}$, *для которых* $||((T_G|_Q)^{**})^{-1}(a)|-n\,2^{-r}|\geqslant$ $\geqslant(n\cdot 2^{-r})^{3/4}$, *не превосходит* $c_1\cdot n\cdot\exp(-(1/4)n^{\varepsilon/4})|\mathfrak{T}_{G,\,n}|$.

Доказательство. Напомним, что $|((T_G|_Q)^{**})^{-1}(a)|$ — число столбцов матрицы $T_G|_Q$, равных a. Согласно утверждениям 2.2.4 и 2.2.5 для любой f из $(E^n)^Q$ верно $|\mathfrak{T}^{Q,\,f}_{G,\,n}|=$ $=2^{-r\,n}|\mathfrak{T}_{G,\,n}|$. Следовательно, число пар $(T,\,G)$ из $\mathfrak{T}_{G,\,n}$, для которых $|((T_G|_Q)^{**})^{-1}(a)|=k$, равно

$$\binom{n}{k}2^{-rk}(1-2^{-r})^{n-k}\cdot 2^{nr}(2^{-nr}|\mathfrak{T}_{G,n}|)=\binom{n}{k}2^{-rk}(1-2^{-r})^{n-k}|\mathfrak{T}_{G,n}|.$$

Обозначим это число через $A(k)$. Так как

$$A(k+1)/A(k)=((n-k)/(k+1))\,2^{-r}/(1-2^{-r}),$$

то при $k=]n\,2^{-r}[+s$, $s\geqslant 0$, имеем

$$A(k+1)/A(k)\leqslant((n(1-2^{-r})-s)/(n\,2^{-r}+s))\cdot 2^{-r}/(1-2^{-r})=$$
$$=1-s/(n\,2^{-r}(1-2^{-r})+s(1-2^{-r})).$$

Таким образом,

$$A(]n\,2^{-r}[+l)\leqslant A(]n\,2^{-r}[)\prod_{s=0}^{l-1}\left(1-\frac{s}{n\,2^{-r}(1-2^{-r})+s(1-2^{-r})}\right)\leqslant$$

$$\leqslant A(]n\,2^{-r}[)\cdot\exp\left(-\frac{l(l-1)}{2}/((n\,2^{-r}+l)(1-2^{-r}))\right). \qquad (3.5)$$

Так как

$$A(k-1)/A(k) = (k/(n-k+1))\,(1-2^{-r})/2^{-r},$$

то при $k = [n\,2^{-r}] - s$, $s \geqslant 0$, имеем

$$A(k-1)/A(k) \leqslant ((n\,2^{-r} - s)/(n(1-2^{-r}) + s))(1-2^{-r})/2^{-r} = \\ = 1 - s/\left((n(1-2^{-r}) + s)\cdot 2^{-r}\right).$$

Аналогично (3.5) получаем

$$A([n\,2^{-r} - l]) \leqslant A([n\,2^{-r}])\cdot \exp\left(-\frac{l(l-1)}{2}/((n(1-2^{-r}) + l)2^{-r}\right). \tag{3.6}$$

В силу 3.5 и 3.6 для некоторой константы c_1 имеем

$$\sum_{k \geqslant]n\,2^{-r}[+(n\,2^{-r})^{3/4}-1} A(k) \leqslant \\ \leqslant c_1(n - n\,2^{-r})\exp\left(-\frac{1}{4}\frac{((n\,2^{-r})^{3/4})^2}{n\,2^{-r}}\right) A(]n\,2^{-r}[) \leqslant \\ \leqslant c_1(n - n\,2^{-r})\exp\left(-\frac{1}{4}n^{\varepsilon/4}\right) A(]n\,2^{-r}[),$$

$$\sum_{k \leqslant [n\,2^{-r}]-(n\,2^{-r})^{3/4}} A(k) \leqslant c_1\,n\,2^{-r}\exp\left(-\frac{1}{4}n^{\varepsilon/4}\right) A(]n\,2^{-r}[).$$

Следовательно, $\sum_k A(k) \leqslant c_1 \cdot n \cdot \exp\left(-\frac{1}{4}n^{\varepsilon/4}\right)|\mathfrak{T}_{G,\,n}|$, где сумма берется по k, не входящим в интервал $([n\,2^{-r}] - (n\,2^{-r})^{3/4},\ ]n\,2^{-r}[+(n\,2^{-r})^{3/4} - 1)$.

Утверждение 3.1.12 доказано. □

Утверждение 3.1.13. *Если* $\varepsilon \in (0,\,1/16)$, *то для некоторого* δ *из* $\mathcal{M}$ *для почти всех при* $n \to \infty$ *пар* $(T,\,G)$ *из* $\mathfrak{T}_{G,\,n}$ *при* $1 \leqslant |Q| \leqslant (1-\varepsilon/2)\ln n$ *и* G^Q *— лес, выполнены соотношения*

а) $|(n\,2^{-|Q|})^{|Q|} - \varphi^{\text{ТУ},*}_{G,\,n,\,Q}(T)| \leqslant \delta(n)\cdot(n\,2^{-|Q|})^{|Q|}$,

б) $(n\,2^{-|Q|})^{|Q|} \sim_n \binom{n}{|Q|}|Q|!\,2^{-|Q|^2}$.

Доказательство. Так как $|E^Q| \leqslant n^{1-\varepsilon/2} \leqslant n$ и

$$\sum_{r=1}^{[(1-\varepsilon/2)\cdot\ln n]} |\mathcal{A}_{G,\,r}| \leqslant (\ln n)\cdot n^{\ln n},$$

то число пар $(T,\,G)$ из $\mathfrak{T}_{G,\,n}$ таких, что существует Q, $Q \in \mathcal{A}_{G,\,|Q|}$, $1 \leqslant |Q| \leqslant (1-\varepsilon/2)\ln n$ и $a \in E^Q$, для которых выполнено

$||((T_G|_Q)^{**})^{-1}(a)| - n\,2^{-|Q|}| \geqslant (n\,2^{-|Q|})^{3/4}$, не превосходит, согласно утверждению 3.1.11, величины

$$c_1(\ln n)n^{\ln n}n^2 \exp\left(-\frac{1}{4}n^{\varepsilon/4}\right)|\mathfrak{T}_{G,\,n}|.$$

Следовательно, для почти всех пар $(T,\,G)$ из $\mathfrak{T}_{G,\,n}$ при $1 \leqslant |Q| \leqslant (1-\varepsilon/2)\ln n$, $Q \in \mathcal{L}_{G,\,|Q|}$, $a \in E^Q$ выполнено

$$||((T_G|_Q)^{**})^{-1}(a)| - n\,2^{-|Q|}| < (n\,2^{-|Q|})^{3/4}.$$

Но так как

$$\varphi^{\text{ту},*}_{G,\,n,\,Q}(T) = \prod_{b\in Q}|((T_G|_Q)^{**})^{-1}(1^Q_b)|,$$

то для почти всех пар $(T,\,G)$ из $\mathfrak{T}_{G,\,n}$ при $1 \leqslant |Q| \leqslant (1-\varepsilon/2)\ln n$, $Q \in \mathcal{L}_{G,\,|Q|}$ выполнено

$$\left(n\,2^{-|Q|} - (n\,2^{-|Q|})^{3/4}\right)^{|Q|} \leqslant \varphi^{\text{ту},*}_{G,\,n,\,Q}(T) \leqslant \left(n\,2^{-|Q|} + (n\,2^{-|Q|})^{3/4}\right)^{|Q|}.$$

Так как $|Q| \leqslant (1-\varepsilon/2)\ln n$, то

$$\left(n\,2^{-|Q|} - (n\,2^{-|Q|})^{3/4}\right)^{|Q|} \sim_n (n\,2^{-|Q|})^{|Q|} \sim_n \left(n\,2^{-|Q|} + (n\,2^{-|Q|})^{3/4}\right)^{|Q|}$$

и $n^{|Q|} \sim_n \binom{n}{|Q|}|Q|!$.

Утверждение 3.1.13 доказано. □

Непосредственно из доказанного вытекает утверждение.

Следствие 3.1.14. *Если* $\varepsilon \in (0,\,1/16)$, *то для некоторого* δ *из* $\mathcal{M}$ *для почти всех пар* $(T,\,G)$ *из* $\mathfrak{T}_{G,\,n}$ *при* $1 \leqslant r \leqslant (1-\varepsilon/2)\ln n$ *выполнено*

$$\left|\binom{n}{r}d(r,\,G)r!\,2^{-r^2} - \varphi^{\text{ту},*}_{G,\,n,\,r}(T)\right| \leqslant \delta(n)\binom{n}{r}d(r,\,G)r!\,2^{-r^2}.$$

Непосредственно отсюда и того факта, что при $\varepsilon \in (0,\,1/16)$, $D \in \mathcal{B}$ и $D(n) \lessgtr_n \ln\ln\ln n$ выполнено $\omega(n \cdot n^{1-\varepsilon}) + D(n) \lessgtr_n (1 - \varepsilon/2)\ln n$, вытекают следующие три утверждения.

Утверждение 3.1.15. *Если* $D \in \mathcal{B}$, $D(n) \lessgtr_n \ln\ln\ln n$, $q(G) \leqslant D(n)\ln^2 n$ *и* $p^*(G) - 1 \leqslant \omega(n) - D(n)$, *то*

$$\varphi^{\text{ту},*}_{G,n,p^*(G)-1} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \binom{n}{p^*(G)-1} d(p^*(G)-1,\,G)(p^*(G)-1)!2^{-(p^*(G)-1)^2}.$$

Утверждение 3.1.16. *Если $D \in \mathcal{B}$, $D(n) \lesseqgtr_n \ln\ln\ln n$ и $p^*(G) - 1 \geqslant \omega(n) - D(n)$, то*

$$\sum_{r=[\omega(n)-D(n)]}^{]\min(p^*(G)-1,\,\omega(n\,q(G))+D(n))[} \varphi^{\text{ту},*}_{G,\,n,\,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \sum_{r=[\omega(n)-D(n)]}^{]\min(p^*(G)-1,\,\omega(n\,q(G))+D(n))[} \binom{n}{r} d(r,\,G) r!\, 2^{-r^2}.$$

Утверждение 3.1.17. *Если $\varepsilon \in (0, 1/16)$, $D \in \mathcal{B}$, $D(n) \lesseqgtr_n \ln\ln\ln n$ и $D(n)\ln^2 n \leqslant q(G) \leqslant n^{1-\varepsilon}$, то*

$$\sum_{r=[\omega(n\,q(G))-D(n)]}^{]\omega(n\,q(G))+D(n)[} \varphi^{\text{ту},*}_{G,\,n,\,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \sum_{r=[\omega(n\,q(G))-D(n)]}^{]\omega(n\,q(G))+D(n)[} \binom{n}{r} d(r,\,G) r!\, 2^{-r^2} \sim_n \sim_n \sum_{r=[\omega(n\,q(G))-D(n)]}^{]\omega(n\,q(G))+D(n)[} \binom{n}{r} (q(G)\, 2^{-r})^r.$$

Утверждение 3.1.18. *Если каждой паре $(G,\, n)$ из некоторого множества $\mathcal{R}$ поставлены в соответствие случайные величины $\varphi^1_{G,\,n}$, $\varphi^2_{G,\,n}$, $\varphi^{1.*}_{G,\,n}$, $\varphi^{2.*}_{G,\,n}$, определенные на $(E^n)^{\mathcal{P}(G)}$, такие что при $(G,\, n) \in \mathcal{R}$ выполнено $\varphi^1_{G,\,n} \leqslant \varphi^2_{G,\,n}$, $\varphi^{1.*}_{G,\,n} \leqslant \leqslant \varphi^{2.*}_{G,\,n}$, $\varphi^1_{G,\,n} \leqslant \varphi^{1.*}_{G,\,n}$, $\varphi^2_{G,\,n} \leqslant \varphi^{2.*}_{G,\,n}$, $\mathsf{M}\varphi^1_{G,\,n} \sim_n \mathsf{M}\varphi^2_{G,\,n} \sim_n \mathsf{M}\varphi^{1.*}_{G,\,n} \sim \sim_n \mathsf{M}\varphi^{2.*}_{G,\,n}$ и $\varphi^{1.*}_{G,\,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \mathsf{M}\varphi^{1.*}_{G,\,n}$, то при $(G,\, n) \in \mathcal{R}$ имеет место $\varphi^1_{G,\,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^2_{G,\,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{2.*}_{G,\,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{1.*}_{G,\,n}$.*

Доказательство. Докажем, что $\varphi^1_{G,\,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{1.*}_{G,\,n}$. Так как $\varphi^{1.*}_{G,\,n} - \varphi^1_{G,\,n} \geqslant 0$, то, поскольку $\mathsf{M}\varphi^1_{G,\,n} \sim_n \mathsf{M}\varphi^{1.*}_{G,\,n}$, получаем $0 \leqslant \mathsf{M}(\varphi^{1.*}_{G,\,n} - \varphi^1_{G,\,n}) \ll_n \mathsf{M}\varphi^1_{G,\,n}$. Следовательно, $(\varphi^{1.*}_{G,\,n} - \varphi^1_{G,\,n}) \overset{\text{п.в.}}{\ll}_n \mathsf{M}\varphi^1_{G,\,n}$ и получаем $\varphi^1_{G,\,n} \overset{\text{п.в.}}{\geqslant}_n \varphi^{1.*}_{G,\,n} - o_n(\mathsf{M}\varphi^{1.*}_{G,\,n})$. Но, с другой стороны, $\varphi^1_{G,\,n} \leqslant \varphi^{1.*}_{G,\,n} \overset{\text{п.в.}}{\lesssim}_n \mathsf{M}\varphi^1_{G,\,n}$. Следовательно, $\varphi^1_{G,\,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \mathsf{M}\varphi^1_{G,\,n} \sim_n \mathsf{M}\varphi^{1.*}_{G,\,n} \sim_n \varphi^{1.*}_{G,\,n}$. Аналогично устанавливается, что $\varphi^1_{G,\,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^2_{G,\,n}$, $\varphi^{1.*}_{G,\,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{2.*}_{G,\,n}$.

Утверждение 3.1.18 доказано. □

Из утверждений 3.1.9, 3.1.10, 3.1.11, 3.1.15, 3.1.16, 3.1.17 и 3.1.18 вытекает предложение.

Утверждение 3.1.19. *Если* $\varepsilon\in(0,1/16)$, $D\in\mathcal{B}$, $D(n)\lesseqgtr_n \ln\ln\ln n$ *и* $1\leqslant q(G)\leqslant n^{1-\varepsilon}$, *то*

$$\varphi^{\text{тт}}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \sum_{r=1}^{p^*(G)-1} \varphi^{\text{ту},*}_{G,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \Phi_{D,\varepsilon}(G,n),$$

$$\varphi^{\text{тт}}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \sum_{r=\widehat{r}^1_D(G,n)}^{\widehat{r}^1_D(G,n)} \varphi^{\text{тт}}_{G,n,r}.$$

3.2. Случай «высоких» таблиц. Математическое ожидание числа тупиковых тестов

Непосредственно из определения функций $\widehat{H}^*$, $\widehat{H}^{**}$, $\widehat{H}^{***}$ следует предложение.

Утверждение 3.2.1. *Если* $1\leqslant x_1<x_2\leqslant n$, *то* $\widehat{H}^*(n,m,x_1)>\widehat{H}^*(n,m,x_2)$; *если* $1\leqslant x_1<x_2\leqslant n-1$, *то* $\widehat{H}^{***}(n,m,x_1)>\widehat{H}^{***}(n,m,x_2)$; *если* $1\leqslant x\leqslant n-1$, *то* $\widehat{H}^{**}(n,m,x)\leqslant 1/4$.

Утверждение 3.2.2. *Если* $\varepsilon\in(0,1/16)$ *и* $n^{1-\varepsilon}\leqslant m\leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}$, *то* $r(n,m)\not\ominus_n 1$ *и* $\widehat{H}^{***}(n,m,r(n,m))\ominus_n 1$.

Доказательство. Действительно,

$$\widehat{H}^{***}(n,m,1)=\frac{n(n-1)}{2}(e^{m/4}-1)^2e^{m/4}\gg_n 1,$$

$$\widehat{H}^{***}(n,m,n-1)=\frac{2}{n(n-1)}(\exp(m2^{-n})-1)^2\exp(m2^{-n})/ \\ /\left(((1+\exp(-m2^{-n}))(1+\exp(-m2^{-n-1}))^{n-2}\right)\ll_n 1.$$

Но $\widehat{H}^{***}(n,m,x)$ — непрерывная и монотонная по x функция.

Утверждение 3.2.2 доказано. □

Утверждение 3.2.3. *Если* $\varepsilon\in(0,1/16)$, $D\in\mathcal{B}$, $D(n)\lesseqgtr_n \ln\ln n$ *и* $n^{1-\varepsilon}\leqslant m\leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}$, *то*

$$\sum_{r=1}^{n}\widehat{H}(n,m,r)\sim_n \sum_{r=[r(n,m)-D(n)]}^{]r(n,m)+D(n)[}\widehat{H}(n,m,r).$$

Доказательство. Так как

$$\widehat{H}^{**}(n,m,r(n,m))=\widehat{H}^*(n,m,r(n,m)+1)/\widehat{H}^*(n,m,r(n,m))\leqslant 1/4$$

и

$$\widehat{H}^{***}(n,m,r(n,m)) = \widehat{H}^*(n,m,r(n,m)+1)\cdot\widehat{H}^*(n,m,r(n,m))\circeq_n 1,$$

то $\widehat{H}^*(n,\, m,\, r(n,\, m)+1)\lessgtr_n 1/2$ и $1/\widehat{H}^*(n,\, m,\, r(n,\, m))\lessgtr_n 1/2$. Следовательно, если $k\in\mathbb{N}$, $k\leqslant[r(n,\, m)-1]$, $k\leqslant n-]r(n,\, m)[$, то

$$\widehat{H}(n,\, m,\,]r(n,\, m)[+k)\lessgtr_n\widehat{H}(n,\, m,\,]r(n,\, m)[)\cdot 2^{-k},$$
$$\widehat{H}(n,\, m,\, [r(n,\, m)]-k)\lessgtr_n\widehat{H}(n,\, m,\, [r(n,\, m)])\cdot 2^{-k}.$$

Таким образом,

$$\sum_{r=]r(n,m)+D(n)[+1}^{n}\widehat{H}(n,\, m,\, r)\lessgtr_n\widehat{H}(n,\, m,\,]r(n,\, m)[)\frac{2^{-D(n)}}{1-1/2},$$
$$\sum_{r=1}^{[r(n,m)-D(n)]-1}\widehat{H}(n,\, m,\, r)\lessgtr_n\widehat{H}(n,\, m,\, [r(n,\, m)])\frac{2^{-D(n)}}{1-1/2}.$$

Следовательно,

$$\sum_{r=1}^{n}\widehat{H}(n,\, m,\, r)\lesssim_n\sum_{[r(n,m)-D(n)]}^{]r(n,m)+D(n)[}\widehat{H}(n,\, m,\, r).$$

Утверждение 3.2.3 доказано. $\square$

Утверждение 3.2.4. *Если $\varepsilon\in(0,\, 1/16)$, $n^{1-\varepsilon}\leqslant m\leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}$ и $\widehat{H}^{**}(n,\, m,\, r(n,\, m))\ll_n 1$, то*

$$\sum_{r=1}^{n}\widehat{H}(n,\, m,\, r)\sim_n\sum_{r=[r(n,m)]}^{[r(n,m)]+1}\widehat{H}(n,\, m,\, r).$$

Доказательство. Так как для некоторого α из $\mathcal{M}$ выполнено

$$\widehat{H}^{**}(n,m,r(n,m))=\widehat{H}^*(n,m,r(n,m)+1)/\widehat{H}^*(n,m,r(n,m))\lessgtr_n\alpha(n)$$

и $\widehat{H}^{***}(n,\, m,\, r(n,\, m))\circeq_n 1$, то $\widehat{H}^*(n,\, m,\, r(n,\, m)+1)\lessgtr_n\sqrt{\alpha(n)}$ и

$$1/\widehat{H}^*(n,\, m,\, r(n,\, m))\lessgtr_n\sqrt{\alpha(n)}\,.$$

Тогда аналогично предыдущему утверждению получаем

$$\sum_{r=[r(n,m)]+2}^{n}\widehat{H}(n,\, m,\, r)\lessgtr_n\widehat{H}(n,\, m,\, [r(n,\, m)]+1)\frac{\sqrt{\alpha(n)}}{1-\sqrt{\alpha(n)}},$$

$$\sum_{r=1}^{[r(n,m)]-1} \widehat{H}(n,\, m,\, r) \lessgtr_n \widehat{H}(n,\, m,\, [r(n,\, m)]) \frac{\sqrt{\alpha(n)}}{1-\sqrt{\alpha(n)}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{r=[r(n,m)]}^{[r(n,m)]+1} \widehat{H}(n,\, m,\, r) \gtrsim_n \sum_{r=1}^{n} \widehat{H}(n,\, m,\, r)$$

Утверждение 3.2.4 доказано. □

Утверждение 3.2.5. *Если* $\varepsilon \in (0,\, 1/16)$ *и* $2^{4\ln^2 n} \leqslant m \leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}$, *то*

$$\sum_{r=1}^{n} \widehat{H}(n,\, m,\, r) \sim_n \sum_{r=[\theta(n)]}^{[\theta(n)]+1} \widehat{H}(n,\, m,\, r).$$

Доказательство. Имеем

$$\widehat{H}^*(n,\, m,\, \theta(m)) = \frac{n-\theta(m)+1}{\theta(m)} \cdot \frac{\exp(m2^{-\theta(m)}-1)}{(1+\exp(-m2^{-\theta(m)}))^{\theta(m)-1}} =$$

$$= \frac{n-\theta(m)+1}{\theta(m)} \cdot \frac{\ln m - 1}{(1+1/\ln m)^{\ln m - \ln\ln\ln m - 1}} \sim_n$$

$$\sim_n \frac{n-\theta(m)}{\theta(m)} \cdot (\ln m)e^{-1} \sim_n e^{-1}(n-\theta(m)) \gg_n 1.$$

Таким образом,

$$\sum_{r=1}^{[\theta(m)]-1} \widehat{H}(n,\, m,\, r) \lesssim_n \widehat{H}(n,\, m,\, [\theta(m)]) \frac{e/(n-\theta(m))}{1-e/(n-\theta(m))} \qquad (3.7)$$

Далее, получаем

$$\widehat{H}^*(n,\, m,\, \theta(m)+1) = \frac{n-\theta(m)}{\theta(m)+1} \cdot \frac{\exp(m2^{-\theta(m)-1}-1)}{(1+\exp(-m2^{-\theta(m)-1}))^{\theta(m)}} =$$

$$= \frac{n-\theta(m)}{\theta(m)+1} \cdot \frac{\sqrt{\ln m}-1}{(1+1/\sqrt{\ln m})^{\ln m - \ln\ln\ln m}} \sim_n$$

$$\sim_n \frac{n-\theta(m)}{\theta(m)} \cdot e^{\frac{\sqrt{\ln m)}}{\sqrt{\ln m}}} \sim_n \frac{n-\theta(m)}{\sqrt{\ln m}} \cdot e^{-\sqrt{\ln m}} \lessgtr_n n \cdot e^{\sqrt{4\ln^2 n}} = \frac{1}{n}.$$

Следовательно,

$$\sum_{r=[\theta(n)]+2}^{n} \widehat{H}(n,\, m,\, r) \lesssim_n \widehat{H}(n,\, m,\, [\theta(m)]+1)\frac{1/n}{1-1/n}. \qquad (3.8)$$

Исходя из (3.7) и (3.8), имеем

$$\sum_{r=1}^{n} \widehat{H}(n,\, m,\, r) \lesssim_n \sum_{r=[\theta(n)]}^{[\theta(n)]+1} \widehat{H}(n,\, m,\, r).$$

Утверждение 3.2.5 доказано. □

Утверждение 3.2.6. *Если* $\varepsilon \in (0,\, 1/16)$, $c > 0$, $n^{1-\varepsilon} \leqslant m \leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}$ *и* $x \leqslant \ln m + c$, *то* $\widehat{H}^{**}(n,\, m,\, x) \ll_n 1$.

Доказательство. Так как

$$\widehat{H}^{**}(n,\, m,\, x) \leqslant \exp(-m\,2^{-x-1})((\exp(m\,2^{-x})+1)/ /(\exp(m\,2^{-x})) + \exp(m\,2^{-x-1}))^{x-1},$$

то если $x \leqslant \theta(m)$, имеем $\widehat{H}^{**}(n,\, m,\, x) \leqslant 1/\sqrt{\ln m} \ll_n 1$. Заметим, что функция $y = (x^2+1)/(x^2+x)$ при $x > 1$ имеет единственную экстремальную точку — минимум, т. е. наибольшее значение на отрезке она принимает на одном из его концов. Если $\theta(m) \leqslant x \leqslant \ln m + c$, то

$$\widehat{H}^{**}(n, m, x) \leqslant \left(\max\left(\frac{\ln m + 1}{\ln m + \sqrt{\ln m}},\, \frac{\exp(2^{-c})+1}{\exp(2^{-c}) + \exp(2^{-c-1})}\right)\right)^{\theta(m)-1}.$$

Так как $(\exp(2^{-c})+1)/(\exp(2^{-c})+\exp(2^{-c-1})) \leqslant 1$, то

$$\widehat{H}^{**}(n,\, m,\, x) \lessgtr_n \left(\frac{\ln m + 1}{\ln m + \sqrt{\ln m}}\right)^{\theta(m)-1} = \left(1 - \frac{\sqrt{\ln m}-1}{\ln m + \sqrt{\ln m}}\right)^{\theta(m)-1} \leqslant \leqslant \exp\left(-\frac{(\sqrt{\ln m}-1)(\theta(m)-1)}{\ln m + \sqrt{\ln m}}\right) \ll_n 1.$$

Утверждение 3.2.6 доказано. □

Утверждение 3.2.7. *Если* $\varepsilon \in (0,\, 1/16)$ *и* $n^{1+\varepsilon} \leqslant m \leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}$, *то найдется константа* c_1 *для которой верно, что* $r(n,\, m) \leqslant \leqslant \ln m + c_1$.

Доказательство. Пусть имеется константа c, $c > 1$. Ясно, что

$$\widehat{H}^{***}(n, m, \ln m + c) \leqslant \\ \leqslant \frac{n^2}{\ln^2 m} \cdot \frac{(\exp(2^{-c-1}) - 1)^2 \exp(2^{-c-1})}{((1 + \exp(-2^{-c-1}))(\exp(-2^{-c}) + 1))^{\ln m + c - 1}} \leqslant \\ \leqslant \frac{n^2}{\ln^2 m} \cdot \frac{(\exp(2^{-c-1}) - 1)^2 \exp(2^{-c-1})}{((1 + \exp(-2^{-c-1}))(\exp(-2^{-c}) + 1))^{(1+\varepsilon)\ln n}}.$$

Поскольку

$$\lim_{x\to\infty}((1 + \exp(-2^{-x-1}))(1 + \exp(-2^{-x})))^{(1+\varepsilon)} = 4^{(1+\varepsilon)},$$

то найдется такая константа c_2, что

$$((1 + \exp(-2^{-c_2-1}))(1 + \exp(-2^{-c_2})))^{(1+\varepsilon)} \geqslant 4^{(1+\varepsilon/2)}.$$

Следовательно,

$$\widehat{H}^{***}(n, m, \ln m + c_2) \leqslant \frac{n^2}{\ln^2 m} \cdot \frac{\exp(3 \cdot 2^{-c_2})}{4^{(1+\varepsilon/2)\ln n}} = \\ = \frac{1}{\ln^2 m} \cdot 2^{-\varepsilon \ln n} e^{3\cdot 2^{-c_2}} \ll_n 1.$$

Но тогда $r(n, m) \lesseqgtr_n \ln m + c_2$, а, значит, существует c_1 такая, что $r(n, m) \leqslant \ln m + c_1$.

Утверждение 3.2.7 доказано. □

Непосредственно из утверждений 3.2.7, 3.2.6 и 3.2.4 вытекает предложение.

Утверждение 3.2.8. *Если* $\varepsilon \in (0,\, 1/16)$ *и* $n^{1+\varepsilon} \leqslant m \leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}$*,то*

$$\sum_{r=1}^{n} \widehat{H}(n, m, r) \sim_n \sum_{r=[r(n,m)]}^{[r(n,m)]+1} \widehat{H}(n, m, r).$$

Непосредственно из утверждений 3.2.8, 3.2.5 и 3.2.3 вытекает предложение

Утверждение 3.2.9. *Если* $\varepsilon \in (0,\, 1/16)$*,* $D \in \mathcal{B}$*,* $D(n) \lesseqgtr_n \ln\ln n$ *и* $n^{1-\varepsilon} \leqslant m \leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}$*, то*

$$\sum_{r=1}^{n} \widehat{H}(n, m, r) \sim_n \Phi^2_{D,\varepsilon}(n, m).$$

Утверждение 3.2.10. *Если* $\varepsilon \in (0,\ 1/16)$ *и* $n^{1+\varepsilon} \leqslant m \leqslant 2^{4\ln n}$, *то*

$$\ln\frac{4}{3} \lesseqgtr_n \ln\left(-m/\ln\left(\left(\frac{n}{\ln m}\right)^{\frac{1}{\ln m}} - 1\right)\right) - r(n,\ m) \lesseqgtr_n 1.$$

Доказательство. Положим для x, $0 \leqslant x \leqslant 1$,

$$l(n,\ m,\ x) = x + \ln\left(-m/\ln\left(\left(\frac{n}{\ln m}\right)^{\frac{1}{\ln m}} - 1\right)\right).$$

Ясно, что

$$\widehat{H}^{***}(n,\ m,\ l(n,\ m,\ x)) = \frac{(n - l(n,\ m,\ x) + 1)\cdot(n - l(n,\ m,\ x))}{l(n,\ m,\ x)(l(n,\ m,\ x) + 1)}\cdot$$

$$\cdot\frac{(\exp(m\,2^{-l(n,\,m,\,x)-1}) - 1)^2\exp(m\,2^{-l(n,\,m,\,x)-1})}{((\exp(-m\,2^{-l(n,\,m,\,x)-1}) + 1)(\exp(-m\,2^{-l(n,\,m,\,x)}) + 1))^{l(n,\,m,\,x)-1}}.$$

Имеем

$$\begin{aligned}l(n,\ m,\ x) = \ln m - \ln(-\ln(\exp((\ln n - \ln\ln m)/\ln m) - 1)) + x \geqslant\\ \geqslant \ln m - \ln(-\ln((\ln n - \ln\ln m)/\ln m)) + x \geqslant\\ \geqslant \ln m - \ln(-\ln((\ln n - \ln(4\ln^2 n))/(4\ln^2 n))) + x \gtreqless_n\\ \gtreqless_n \ln m - \ln\ln(4\ln^2 n) + x \gtrsim_n \ln m.\end{aligned} \quad (3.9)$$

Далее,

$$\begin{aligned}&l(n,\ m,\ x) \lesseqgtr_n\\ &\lesseqgtr_n \ln m - \ln(-\ln(\exp((\ln n - \ln((1+\varepsilon)\ln n))/((1+\varepsilon)\ln n)) - 1)) + x =\\ &= \ln m - \ln(-\ln(\exp_2((\ln n - \ln((1+\varepsilon)\ln n))/((1+\varepsilon)\ln n)) - 1)) + x \leqslant\\ &\leqslant \ln m - \ln(-\ln(2^{1/(1+\varepsilon)} - 1)) + x \lesssim_n \ln m.\end{aligned} \quad (3.10)$$

Положим $a(n,\ m) = (n/\ln m)^{1/\ln m} - 1$, тогда

$$\begin{aligned}&\widehat{H}^{***}(n,\ m,\ l(n,\ m,\ x)) \sim_n\\ &\sim_n \frac{n^2}{\ln^2 m}\cdot\frac{(a(n,\ m)^{-2^{-x-1}} - 1)^2 a(n,\ m)^{-2^{-x-1}}}{((1 + a(n,\ m)^{2^{-x-1}})(1 + a(n,\ m)^{2^{-x}}))^{l(n,\,m,\,x)-1}}.\end{aligned}$$

Далее имеем

$$\widehat{H}^{***}(n,\, m,\, l(n,\, m,\, -1)) \gtrsim_n \frac{n^2(1/a(n,\, m)-1)^2/a(n,\, m)}{\ln^2 m(1+a(n,\, m))^{2\,l(n,\, m,\, -1)-2}} \times \\ \times \left(\frac{1+a(n,\, m)}{1+a(n,\, m)^2}\right)^{l(n,\, m,\, -1)-1}.$$

Так как

$$a(n,\, m) = \exp_2((\ln n - \ln\ln m)/\ln m) - 1 \leqslant 2^{1/(1+\varepsilon)} - 1$$

и $a(n,m) = \exp((\ln n - \ln\ln m)/\ln m) - 1 \gtrsim_n (\ln n - \ln\ln m)/\ln m$, то

$$\widehat{H}^{***}(n,m,l(n,m,-1)) \gtrsim_n ((2^{1/(1+\varepsilon)}-1)^{-1}-1)^2(2^{1/(1+\varepsilon)}-1)^{-1} \times \\ \times \left(\frac{n}{\ln m}\right)^{(-2l(n,m,-1)+2+2\ln m)/\ln m} \times \\ \times \left(\frac{1+(\ln n - \ln\ln m)/\ln m}{1+((\ln n - \ln\ln m)/\ln m)^2}\right)^{l(n,m,-1)-1} \succ_n \\ \succ_n \left(\frac{n}{\ln m}\right)^{(-2\,l(n,\, m,\, -1)+2+2\ln m)/\ln m} \times \\ \times \left(1+\frac{b(n,\, m)(1-b(n,\, m))}{1+b(n,\, m)^2}\right)^{l(n,\, m,\, -1)-1},$$

где $b(n,\, m) = (\ln n - \ln\ln m)/\ln m$.

Согласно (3.9) и (3.10) имеем

$$\ln m - \ln\ln((\ln m)/(\ln n - \ln\ln m)) - 1 \leqslant \\ \leqslant l(n,\, m,\, -1) \lesssim_n \ln m \ln\ln(1/(2^{1/(1+\varepsilon)}-1)).$$

Следовательно, для некоторой константы c_1 выполнено

$$(n/\ln m)^{(-2\,l(n,\, m,\, -1)+2+2\ln m)/\ln m} \geqslant (n/\ln m)^{-c_1/\ln m} = \\ = 2^{-c_1(\ln n - \ln\ln m)/\ln m} \geqslant 2^{-c_1(\ln n)/((1+\varepsilon)\ln n} = 2^{-c_1(1+\varepsilon)}.$$

Таким образом,

$$\widehat{H}^{***}(n,\, m,\, l(n,\, m,\, -1)) \succ_n 1 + b(n,\, m)\cdot(l(n,\, m,\, -1)-1) \times \\ \times (1-b(n,\, m))/(1+b(n,\, m)^2) \succ_n \ln n \gg_n 1. \quad (3.11)$$

Далее,

$$\widehat{H}^{***}(n,\, m,\, l(n,\, m,\, -\ln(4/3))) \lesssim_n$$
$$\lesssim_n \left(\frac{n}{\ln m}\right)^2 \cdot \frac{(b(n,\, m)^{-(1/2)\cdot(4/3)} - 1)^2 b(n,m)^{-(1/2)\cdot(4/3)}}{((1+a(n,\, m)^{(1/2)\cdot(4/3)})(1+a(n,m)^{4/3}))^{l(n,m,-\ln(4/3))-1}} =$$
$$= \left(\frac{n}{\ln m}\right)^2 \cdot (b(n,\, m)^{-2/3} - 1)^2 b(n,\, m)^{-2/3} \times$$
$$\times \left(\frac{n}{\ln m}\right)^{2(1-l(n,m,-\ln(4/3)))/\ln m} \times$$
$$\times \left(\frac{(1+a(n,\, m))^2}{(1+a(n,\, m)^{2/3})(1+a(n,\, m)^{4/3})}\right)^{l(n,m,-\ln(4/3))-1}.$$

Так как для y из $(0,\, 1)$ верно

$$\frac{(1+y)^2}{(1+y^{2/3})(1+y^{4/3})} = 1 - \frac{y^{2/3}+y^{4/3}-2y}{(1+y^{2/3})(1+y^{4/3})} \leqslant$$
$$\leqslant 1 - \frac{y^{2/3}+y^{4/3}-2y}{2} = 1 - \frac{(y^{1/3}+y^{2/3})^2}{2},$$

а также в силу того, что $a(n,\, m) \geqslant b(n,\, m) \gtrless_n (1/2)(\ln n)/\ln m$, имеем

$$\left(\frac{(1+a(n,\, m))^2}{(1+a(n,\, m)^{2/3})(1+a(n,\, m)^{4/3})}\right)^{l(n,m,-\ln(4/3))-1} \lesseqgtr_n$$
$$\lesseqgtr_n \left(1 - \left(\left(\frac{1}{2}\frac{\ln n}{\ln m}\right)^{1/3} - \left(\frac{1}{2}\frac{\ln n}{\ln m}\right)^{2/3}\right)/2\right)^{l(n,m,-\ln(4/3))-1} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\frac{\ln n}{\ln m}\right)^{1/3} - \left(\frac{1}{2}\frac{\ln n}{\ln m}\right)^{2/3}\right)(l(n,\, m,\, -\ln\frac{4}{3}) - 1)\right) \lesseqgtr_n$$
$$\lesseqgtr_n \exp\left(-\frac{1}{4}(\ln m)\left(\frac{1}{2}\frac{\ln n}{\ln m}\right)^{1/3}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\frac{\ln n}{(1+\varepsilon)\ln n}\right)^{1/3}\right)\right) \lesseqgtr_n$$
$$\lesseqgtr_n \exp\left(-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}\right)(\ln n)^{1/3}(\ln m)^{2/3}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left(-\left(\frac{1}{24}\right)(\ln n)^{1/3}(\ln m)^{2/3}\right).$$

Далее,

$$\left(\frac{n}{\ln m}\right)^{2-2(l(n,m,-\ln\frac{4}{3})-1)/\ln m} \leqslant \left(\frac{n}{\ln m}\right)^{(2\ln\ln(1/b(n,m))+2\ln\frac{4}{3}+2)/\ln m} \lesseqgtr_n$$
$$\lesseqgtr_n e^{b(n,\, m)\cdot 4\ln\ln\ln m} \lesseqgtr_n e^{((4\ln 2)/(1+\varepsilon)\ln\ln\ln m} = (\ln\ln m)^{4/(1+\varepsilon)}.$$

Таким образом,

$$\widehat{H}^{***}(n,m,l(n,m,-\ln(4/3))) \lesssim_n (\ln\ln m)^{4/(1+\varepsilon)} \cdot ((4\ln^2 n)^{2/3}-1)^2\cdot$$
$$\cdot (4\ln^2 n)^{2/3} \cdot \exp(-\frac{1}{24}(\ln n)^{1/3} \cdot (\ln m)^{2/3}) \ll_n 1. \quad (3.12)$$

Из (3.11) и (3.12) заключаем, что

$$l(n,\, m,\, -1) \lesseqgtr_n r(n,\, m) \lesseqgtr_n l(n,\, m,\, -\ln(4/3)).$$

Утверждение 3.2.10 доказано. □

Утверждение 3.2.11. *Если $\varepsilon \in (0,\, 1/16)$ и $n^{1-\varepsilon} \leqslant m \leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}$, то*

$$\theta(m) - 1 \lessgtr_n r(n,\, m) \lessgtr_n (1 + (2/3)\varepsilon)\ln m.$$

Доказательство. Ясно, что

$$\widehat{H}^{***}(n,\, m,\, (1+(2/3)\varepsilon)\ln m) \prec_n \left(\frac{n}{\ln m}\right)^2 \times$$
$$\times \frac{\left(\exp\left(\frac{1}{2}m^{-(2/3)\varepsilon}\right)-1\right)^2 \exp\left(\frac{1}{2}m^{-(2/3)\varepsilon}\right)}{\left(\left(\exp\left(-\frac{1}{2}m^{-(2/3)\varepsilon}\right)+1\right)\left(\exp\left(-m^{-(2/3)\varepsilon}\right)+1\right)\right)^{(1+(2/3)\varepsilon)\ln m-1}} \prec_n$$
$$\prec_n \left(\frac{n}{\ln m}\right)^2 \frac{m^{-(4/3)\varepsilon}}{(2\cdot 2)^{(1+(2/3)\varepsilon)\ln m}} = \left(\frac{n}{\ln m}\right)^2 m^{-2(1+(4/3)\varepsilon)} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{n}{\ln m}\right)^2 n^{-2(1-\varepsilon)(1+\frac{4}{3}\varepsilon)} = \left(\frac{1}{\ln m}\right)^2 n^{-\frac{2}{3}\varepsilon(1-4\varepsilon)} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{1}{\ln m}\right)^2 \cdot n^{-\frac{2}{3}\cdot\varepsilon\cdot\frac{3}{4}} \ll_n 1. \quad (3.13)$$

Далее, имеем

$$\widehat{H}^{***}(n,\, m,\, \theta(m)-1) \succ_n \left(\frac{n}{\ln m}\right)^2 \times$$
$$\times \frac{(\ln m - 1)^2 \ln m}{((1+1/\ln m)(1+1/\ln^2 m))^{\ln m}} \succ_n n^2 \ln m \gg_n 1. \quad (3.14)$$

Из (3.13) и (3.14) вытекает искомое неравенство.

Утверждение 3.2.11 доказано. □

Утверждение 3.2.12. *Если $\varepsilon \in (0,\, 1/16)$ и $n^{1-\varepsilon} \leqslant m \leqslant n^{1+\varepsilon}$, то найдется константа c_1 такая, что $r(n,\, m) \geqslant \ln m - c_1$.*

Доказательство. Пусть c — некоторая константа, тогда

$$\widehat{H}^{***}(n, m, \ln m - c) \succ_n$$
$$\succ_n \frac{n^2}{\ln^2 m} \cdot \frac{(\exp(2^{c-1}) - 1)^2 \exp(2^{c-1})}{((\exp(-2^{c-1}) + 1)(\exp(-2^c) + 1))^{\ln m}} \succ_n$$
$$\succ_n \frac{n^2}{\ln^2 m} \cdot ((\exp(-2^{c-1}) + 1)(\exp(-2^c) + 1))^{-\ln m}.$$

Выберем c_2 так, что $(\exp(-2^{c_2-1}) + 1)(\exp(-2^{c_2}) + 1) \leqslant 2^{1/(1+\varepsilon)}$,

$$\widehat{H}^{***}(n, m, \ln m - c_2) \succ_n \frac{n^2}{\ln^2 m} \cdot 2^{-((1+\varepsilon)\ln n)/(1+\varepsilon)} = \frac{n}{\ln^2 m} \gg_n 1.$$

Следовательно, существует искомая константа.

Утверждение 3.2.12 доказано. □

Утверждение 3.2.13. *Если* $\varepsilon \in (0, 1/16)$, $\delta \in (0, \min(\delta_1, 1/16))$, *где* $5\,\delta_1 = \widetilde{\psi}(1 - 5\,\delta_1)$, $D \in \mathcal{B}$, $D(n) \otimes_n \ln\ln\ln\ln n$, $n^{1-\varepsilon} \leqslant q(G) \leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}$ *и* $r^1_{D,\varepsilon}(n, q(G)) \leqslant r \leqslant r^2_{D,\varepsilon}(n, q(G))$, *то*

$$\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{TT}}_{G,n,r} \sim_n \mathtt{M}\varphi^{\mathtt{TT},\delta}_{G,n,r} \sim_n \widehat{H}(n, q(G), r),$$

$$\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{TT}}_{G,n} \sim_n \mathtt{M} \sum_{r=r^1_{D,\varepsilon}(n,q(G))}^{r^2_{D,\varepsilon}(n,q(G))} \varphi^{\mathtt{TT}}_{G,n,r} \sim_n$$
$$\sim_n \mathtt{M} \sum_{r=r^1_{D,\varepsilon}(n,q(G))}^{r^2_{D,\varepsilon}(n,q(G))} \varphi^{\mathtt{TT},\delta}_{G,n,r} \sim_n \Phi^2_{D,\varepsilon}(n, q(G)).$$

Доказательство. Согласно утверждениям 3.2.12 и 3.2.11 имеем

$$\theta(q(G)) - 2 \otimes_n r^1_{D,\varepsilon}(n, q(G)) < r^2_{D,\varepsilon}(n, q(G)) \lesssim_n (1+\varepsilon)\ln q(G).$$

Следовательно, если $r^1_{D,\varepsilon}(n, q(G)) \leqslant r \leqslant r^2_{D,\varepsilon}(n, q(G))$, то $\ln q(G) \gtrsim_n (1-\varepsilon) r$ и $\ln q(G) \lesssim_n 4 \cdot 2^r \cdot \ln r$, а, значит, $q(G) \otimes_n 5 \cdot 2^r \cdot \ln r$. Так как $n \gg_r 1$ и $r \gg_n 1$, то, согласно утверждениям 2.2.14 и 2.3.3, получаем, что для x из E^n_r верно $\mathtt{P}\left(\varphi^{\mathtt{TT}}_{G,n,x} = 1\right) \sim_n \mathtt{P}\left(\varphi^{\mathtt{TT},\delta}_{G,n,x} = 1\right) \sim_n H(q(G), r)$. Следовательно, $\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{TT}}_{G,n,r} \sim_n \mathtt{M}\varphi^{\mathtt{TT},\delta}_{G,n,r} \sim_n \widehat{H}(n, q(G), r)$, а, значит, и

$$\mathtt{M}\sum_{r=r^1_{D,\,\varepsilon}(n,\,q(G))}^{r^2_{D,\,\varepsilon}(n,\,q(G))}\varphi^{\mathtt{TT}}_{G,\,n,\,r}\sim_n \mathtt{M}\sum_{r=r^1_{D,\,\varepsilon}(n,\,q(G))}^{r^2_{D,\,\varepsilon}(n,\,q(G))}\varphi^{\mathtt{TT},\delta}_{G,\,n,\,r}\sim_n \Phi^2_{D,\,\varepsilon}(n,\,q(G)). \tag{3.15}$$

Согласно утверждению 2.2.14 при $q(G)\leqslant 2^{|x|}|x|(\ln 2)/2$ получаем

$$\mathtt{P}\left(\varphi^{\mathtt{TT}}_{G,\,n,\,x}=1\right)\lesssim_n H(q(G),|x|).$$

Следовательно, для $k\geqslant \ln q(G)-\ln\ln q(G)-\ln((\ln 2)/2)+1$ верно $\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{TT}}_{G,\,n,\,k}\lesssim_n \widehat{H}(n,\,q(G),k)$. Рассмотрим случай $n^{1-\varepsilon}\leqslant q(G)\leqslant \leqslant 2^{n/4}$. В утверждении 2.2.14 было показано, что для k, такого, что $m\leqslant 2^k\ln k^2$, верно $H(m,\,k)\sim{}_k\exp\left(-m2^{-k}\right)$. Следовательно, согласно утверждению 2.2.3, для x из $E^n_{[\theta(q(G))-3]}$ верно $\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{T}}_{G,\,n,\,x}\lesssim_n H(q(G),\,|x|)$. Ясно, что при $|x_1|\leqslant|x_2|$ выполнено $\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{T}}_{G,\,n,\,x_1}\leqslant \mathtt{M}\varphi^{\mathtt{T}}_{G,\,n,\,x_2}$. Так как $[\theta(q(G))-3]\lessgtr_n n/4$, то

$$\sum_{k=1}^{[\theta(q(G))-3]}\binom{n}{k}\prec{}_n\binom{n}{[\theta(q(G))]-3}.$$

Следовательно,

$$\mathtt{M}\sum_{k=1}^{[\theta(q(G))-3]}\varphi^{\mathtt{T}}_{G,\,n,\,k}\prec{}_n\widehat{H}(n,\,q(G),\,[\theta(q(G))]-3).$$

Таким образом, для некоторой константы c верно

$$\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{TT}}_{G,\,n}\lesssim_n c\cdot\widehat{H}(n,\,q(G),\,[\theta(q(G))]-3)+\sum_{k=[\theta(q(G))]-2}^{n}\widehat{H}(n,\,q(G),\,k).$$

Но, поскольку $[\theta(q(G))]-3\otimes_n r^1_{D,\,\varepsilon}(n,\,q(G))$, то, согласно утверждению 3.2.9, имеем $\widehat{H}(n,\,q(G),\,[\theta(q(G))]-3)\ll_n\Phi^2_{D,\,\varepsilon}(n,\,q(G))$, и тогда, вследствие того же утверждения получаем

$$\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{TT}}_{G,\,n}\lesssim_n\sum_{k=[\theta(q(G))]-2}^{n}\widehat{H}(n,\,q(G),\,k)\lesssim_n\Phi^2_{D,\,\varepsilon}(n,\,q(G)).$$

Таким образом, в силу (3.15), имеем

$$\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{TT}}_{G,\,n}\lesssim_n \mathtt{M}\sum_{r=r^1_{D,\,\varepsilon}(n,\,q(G))}^{r^2_{D,\,\varepsilon}(n,\,q(G))}\varphi^{\mathtt{TT}}_{G,\,n,\,r}. \tag{3.16}$$

Теперь рассмотрим случай, когда $2^{n/4} \leqslant q(G) \leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}$. Пусть c — некоторая константа такая, что

$$\binom{n}{\ln m - \ln\ln m - c} e^{-m\cdot 2^{-(\ln m - \ln\ln m - c)}} \lessgtr_n \frac{1}{n}.$$

Такая константа существует, так как

$$\widehat{H}(n, m, \ln m - \ln\ln m - c) \lessgtr_n 2^n \exp\left(-2^c \ln m\right) = \\ = 2^n m^{-2^c \ln 2} \leqslant 2^n 2^{-\frac{n}{4} 2^c \ln 2}.$$

Константа c может быть любым числом, большим, чем $1 + \ln(4/\ln 2)$. Теперь покажем, что существует константа c_1 такая, что

$$\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{TT}}_{G,\,n,\,]\ln q(G) - \ln\ln q(G) - c_1[} \lessgtr_n \frac{1}{n}.$$

Если

$$\Delta(G) \leqslant ((\ln 2)/2) \exp_2(\ln q(G) - \ln\ln q(G) - c) \times \\ \times (\ln q(G) - \ln\ln q(G) - c),$$

то согласно утверждению 2.2.3 можно положить $c_1 = c + 1$. Если же

$$\Delta(G) \geqslant ((\ln 2)/2) \exp_2(\ln q(G) - \ln\ln q(G) - c) \times \\ \times (\ln q(G) - \ln\ln q(G) - c),$$

т. е. $\Delta(G) \geqslant q(G) \cdot 2^{-c-3}$, то положим, в соответствии с утверждением 2.2.13, $c_1 = 2c + 4$. Так как $\ln q(G) - \ln\ln q(G) - \ln((\ln 2)/2) + 1 \leqslant \ln q(G) - \ln\ln q(G) + 3$, то, как было показано в утверждении 2.2.14, для x из E^n_r, $r =]\ln q(G) - \ln\ln q(G) + 3[$, верно

$$\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{TT}}_{G,\,n,\,r} \sim_n \mathtt{M}\varphi^{\mathtt{T}}_{G,\,n,\,r} \sim_n \exp\left(-q(G)\cdot 2^{-r}\right) \sim_n H(q(G),\, r).$$

Поскольку

$$\sum_{k=[\ln q(G) - \ln\ln q(G) - c_1]}^{]\ln q(G) - \ln\ln q(G) + 3[} \binom{n}{k} \prec_k \binom{n}{]\ln q(G) - \ln\ln q(G) + 3[},$$

то для некоторой константы c_2 верно

$$\mathtt{M} \sum_{k=1}^{]\ln q(G) - \ln\ln q(G) + 3[} \lessgtr_n n \cdot \frac{1}{n} + c_2 \widehat{H}(n,\, q(G),\,]\ln q(G) - \ln\ln q(G) + 3[).$$

Следовательно,

$$\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{TT}}_{G,\,n} \lesssim_n \left(\sum_{k=]\ln q(G)-\ln\ln q(G)[+4}^{n} \widehat{H}(n,\, q(G),\, k) \right) + n \cdot \frac{1}{n} + \\ + c_2 \cdot \widehat{H}(n,\, q(G),\,]\ln q(G) - \ln\ln q(G)[+3).$$

Тогда, согласно утверждению 3.2.9 и (3.15), имеем

$$\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{TT}}_{G,\,n} \lesssim_n \Phi^2_{D,\,\varepsilon}(n,\, q(G)) \sim_n \mathtt{M} \sum_{r=r^1_{D,\,\varepsilon}(n,\,q(G))}^{r^2_{D,\,\varepsilon}(n,\,q(G))} \varphi^{\mathtt{TT}}_{G,\,n,\,r}. \tag{3.17}$$

Из (3.15), (3.16) и (3.17) для $n^{1-\varepsilon} \leqslant q(G) \leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}$ получаем

$$\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{TT}}_{G,\,n,\,r} \sim_n \mathtt{M} \sum_{r=r^1_{D,\,\varepsilon}(n,\,q(G))}^{r^2_{D,\,\varepsilon}(n,\,q(G))} \varphi^{\mathtt{TT}}_{G,\,n,\,r} \sim_n \\ \sim_n \mathtt{M} \sum_{r=r^1_{D,\,\varepsilon}(n,\,q(G))}^{r^2_{D,\,\varepsilon}(n,\,q(G))} \varphi^{\mathtt{TT},\delta}_{G,\,n,\,r} \sim_n \Phi^2_{D,\,\varepsilon}(n,\, q(G)).$$

Утверждение 3.2.13 доказано. □

3.3. Случай «высоких» таблиц. Асимптотика числа тупиковых тестов

Утверждение 3.3.1. *Если* $\varepsilon \in (0,\, 1/16)$,

$$D \in \mathcal{B} \text{ и } D(n) \lesseqgtr_n \ln\ln\ln\ln n,$$

то:

1) *при* $n^{1-\varepsilon} \leqslant m \leqslant 2^{4\ln^2 n}$ *выполнено*

$$\theta(m) - 2 \lesseqgtr_n r^1_{D,\varepsilon}(n,\, m) < r^2_{D,\varepsilon}(n,\, m) \lesseqgtr_n (1+\varepsilon)\ln m,$$

а при $r^1_{D,\varepsilon}(n,\, m) \leqslant r \leqslant r^2_{D,\varepsilon}(n,\, m)$ *выполнено* $H(m,\, r) \gtrsim_n n^{-2\varepsilon r}$;

2) *при* $2^{4\ln^2 n} \leqslant m \leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}$ *выполнено*

$$\theta(m) - 1 \lessgtr_n r^1_{D,\varepsilon}(n,\, m) < r^2_{D,\varepsilon}(n,\, m) \lesseqgtr_n \theta(m) + 1,$$

а при $r^1_{D,\varepsilon}(n,\, m) \leqslant r \leqslant r^2_{D,\varepsilon}(n,\, m)$ *выполнено* $H(m,\, r) \gtrsim_n 2^{-r^{2/3}}$.

Доказательство. Ограничения на $r^1_{D,\,\varepsilon}$ и $r^2_{D,\,\varepsilon}$ получаются непосредственно из их определений и утверждений 3.2.11 и 3.2.12. Положим

$$\overset{\vee}{H}(m,\,k,\,x) = \exp\left(-m2^{-x}\right)\left(1-\exp\left(-m2^{-x}\right)\right)^k.$$

Понятно, что, если $0 < a \leqslant k \leqslant b$, то $H(m,\,k) \geqslant \geqslant \min\left(\overset{\vee}{H}(m,\,k,\,a),\,\overset{\vee}{H}(m,\,k,\,b)\right)$. Кроме упомянутых ограничений на $r^1_{D,\,\varepsilon}$ и $r^2_{D,\,\varepsilon}$, согласно утверждению 3.2.7, при $n^{1+\varepsilon} \leqslant m \leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}$ для некоторой константы c верно $r^2_{D,\,\varepsilon}(n,m) \leqslant \ln m + c$. Понятно, что если $n^{1-\varepsilon} \leqslant m \leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}$ и $r^1_{D,\,\varepsilon}(n,m) \leqslant r \leqslant r^2_{D,\,\varepsilon}(n,\,m)$, то

$$\overset{\vee}{H}(m,\,k,\,\theta(m)-2) = \frac{1}{\ln^4 m}\left(1-\frac{1}{\ln^4 m}\right)^r \gtrless_n \frac{1}{2\ln^4 m};$$

$$\overset{\vee}{H}(m,k,\theta(m)+1) = \frac{1}{\sqrt{\ln m}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\ln m}}\right)^r \gtrless_n$$

$$\gtrless_n \frac{1}{2\sqrt{\ln m}}\exp\left(\frac{-r}{\sqrt{\ln m}}\right) \gtrless_n$$

$$\gtrless_n \frac{1}{\sqrt{\ln m}}\exp\left(\frac{-r}{\sqrt{r/(1+\varepsilon)}}\right) \gtrless_n \exp_2(-r^{2/3});$$

$$\overset{\vee}{H}(m,k,\ln m + c) = \exp(-2^{-c})(1-\exp(-2^{-c}))^r \gtrless_n \left(\frac{1}{2}m^{-\varepsilon}\right)^r.$$

Если, кроме того, верно $n^{1-\varepsilon} \leqslant m \leqslant n^{1+\varepsilon}$, то

$$\overset{\vee}{H}(m,r,(1+\varepsilon)\ln m) \gtrless_n ((1/2)\cdot(n^{1+\varepsilon})^{-\varepsilon})^r =$$
$$= ((1/2)n^{-\varepsilon(1+\varepsilon)})^r \gtrless_n n^{-2\varepsilon r}.$$

Таким образом, для $r^1_{D,\varepsilon}(n,m) \leqslant r \leqslant r^2_{D,\varepsilon}(n,m)$ при $n^{1-\varepsilon} \leqslant m \leqslant \leqslant n^{1+\varepsilon}$ выполнено

$$H(m,r) \gtrless_n \min(1/(2\ln^4 m), n^{-2\varepsilon r}) \gtrless_n n^{-2\varepsilon r};$$

при $n^{1+\varepsilon} \leqslant m \leqslant 2^{4\ln^2 n}$ выполнено

$$H(m,r) \gtrless_n \min(1/(2\ln^4 m), n^{-2\varepsilon r}) \gtrless_n n^{-2\varepsilon r};$$

при $2^{4\ln^2 n} \leqslant m \leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}$ выполнено

$$H(m,r) \gtrless_n \min(1/(2\ln^4 m), \exp_2(-r^{2/3})) \gtrless_n \exp_2(-r^{2/3}).$$

Утверждение 3.3.1 доказано. □

Утверждение 3.3.2. *Если* $r \leqslant 8 \cdot \ln^2 r$, *то*

$$\sum_{t=[15\cdot r/16]}^{r-1} \binom{r}{t}\binom{n-r}{r-t} \lessdot_n n^{-3r/16}\binom{n}{r}.$$

Доказательство. Так как

$$\binom{n-r}{r-t} = \binom{n}{r}\left(\prod_{k=0}^{t}\frac{r-k}{n-k}\right)\cdot\left(\binom{n-r}{r-t}\Big/\binom{n-t}{r-t}\right),$$

то $\binom{n-r}{r-t} \lessdot_n \binom{n}{r}(r/n)^t$, и, следовательно, $\binom{r}{t}\cdot\binom{n-r}{r-t} \lessdot_n \binom{n}{r}(r^2/n)^t$. Таким образом,

$$\sum_{t=[15r/16]}^{r-1} \binom{r}{t}\binom{n-r}{r-t} \lessdot_n r\cdot\binom{n}{r}(r^2/n)^{15r/16-1} \lessdot_n$$

$$\lessdot_n \binom{n}{r}\cdot\frac{n}{r}\cdot(r^2/n)^{15r/16} = \binom{n}{r} n^{-3r/16}\left(\frac{n}{r}\cdot((r^2/n)^{15/16}n^{3/16})^r\right) \lessdot_n$$

$$\lessdot_n \binom{n}{r} n^{-3r/16}(n(r^2 n^{-3/4})^r) \lessdot_n$$

$$\lessdot_n \binom{n}{r} n^{-3r/16}(n\cdot(n^{-3/4}\cdot 64\ln^4 n)^r) \lessdot_n \binom{n}{r} n^{-3r/16}.$$

Утверждение 3.3.2 доказано. □

Утверждение 3.3.3. *Если* $\varepsilon \in (0, 1/16)$ *и* $r \leqslant (1-\varepsilon)n$, *то*

$$\sum_{t=[(1-\varepsilon/4)r]}^{r-1} \binom{r}{t}\binom{n-r}{r-t} \lessdot_n \binom{n}{r} 2^{-\varepsilon r/2}.$$

Доказательство. Положим $\varepsilon_1 = \varepsilon/4$. Понятно, что для $t \geqslant$ $\geqslant [(1-2\varepsilon_1)r]$ верно, что

$$\frac{\binom{r}{t+1}\binom{n-r}{r-t-1}}{\binom{r}{t}\binom{n-r}{r-t}} = \frac{(r-t)\cdot(r-t)}{(t+1)((n-r)-(r-t)+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(2\varepsilon_1 r+1)^2}{(1-2\varepsilon_1)r\cdot(\varepsilon n - 2\varepsilon_1 r)} \lessdot_n$$

$$\lessdot_n 8\cdot\varepsilon_1^2/((1-2\varepsilon_1)\cdot 2\varepsilon_1) = 4\varepsilon_1/(1-2\varepsilon_1) < 1/8. \quad (3.18)$$

Ясно, что $\binom{r}{t}\binom{n-r}{r-t} \leqslant \binom{n}{r}$, следовательно, в силу (3.18),

$$\binom{r}{[(1-2\varepsilon_1)r]+k}\binom{n-r}{r-([(1-2\varepsilon_1)r]+k)} \lessgtr_n \binom{n}{r} 8^{-k}.$$

Но тогда

$$\sum_{t=[(1-\varepsilon_1)r]}^{r-1} \binom{r}{t}\binom{n-r}{r-t} \lessgtr_n \binom{n}{r} \cdot \frac{8}{7} \cdot 8^{-([(1-\varepsilon_1)r]-[(1-2\varepsilon_1)r])} \lessgtr_n$$

$$\lessgtr_n \binom{n}{r} \cdot \frac{8}{7} \cdot 8^{-(\varepsilon_1 r-1)} \lessgtr_n \binom{n}{r} 2^{-\varepsilon r/2}.$$

Утверждение 3.3.3 доказано. □

Утверждение 3.3.4. *Если* $\varepsilon \in (0, 1/16)$,

$$D \in \mathcal{B}, \quad D(n) \lessgtr_n \ln\ln\ln\ln n, \quad 2^{4\ln^2 n} \leqslant m \leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}$$

и $r^1_{D,\varepsilon}(n,m) \leqslant r \leqslant r^2_{D,\varepsilon}(n,m)$, *то*

$$\sum_{t=[(1-\varepsilon/4)r]}^{r-1} \binom{n}{r}\binom{r}{t}\binom{n-r}{r-t} H(m,r) \ll_n \left(\binom{n}{r} H(m,r)\right)^2.$$

Доказательство. Согласно утверждениям 3.3.3 и 3.3.1 имеем

$$\sum_{t=[(1-\varepsilon/4)r]}^{r-1} \binom{n}{r}\binom{r}{t}\binom{n-r}{r-t} H(m,r) \lessgtr_n \binom{n}{r}^2 H(m,r) 2^{-\varepsilon r/2} =$$

$$= \left(\binom{n}{r} \cdot H(m,r)\right)^2 \cdot 2^{-\varepsilon r/2} / H(m,r) \lessgtr_n$$

$$\lessgtr_n \left(\binom{n}{r} H(m,r)\right)^2 \cdot 2^{-\varepsilon r/2} 2^{r^{2/3}} \ll_n \left(\binom{n}{r} H(m,r)\right)^2.$$

Утверждение 3.3.4 доказано. □

Утверждение 3.3.5. *Если* $\varepsilon \in (0, 1/16)$, $D \in \mathcal{B}$, $D(n) \lessgtr_n \ln\ln\ln\ln n$, $n^{1-\varepsilon} \leqslant m \leqslant 2^{4\ln^2 n}$ *и* $r^1_{D,\varepsilon}(n,m) \leqslant r \leqslant r^2_{D,\varepsilon}(n,m)$, *то*

$$\sum_{t=[15r/16]}^{r-1} \binom{n}{r}\binom{r}{t}\binom{n-r}{r-t} H(m,r) \ll_n \left(\binom{n}{r} H(m,r)\right)^2.$$

Доказательство. Если $n^{1-\varepsilon} \leqslant m \leqslant 2^{4\ln^2 n}$, то согласно утверждениям 3.3.2 и 3.3.1 имеем

$$\sum_{t=[15r/16]}^{r-1} \binom{n}{r}\binom{r}{t}\binom{n-r}{r-t} H(m,r) \lessgtr_n \binom{n}{r}^2 H(m,r) n^{-3r/16} =$$

$$= \left(\binom{n}{r} H(m,r)\right)^2 n^{-3r/16} / H(m,r) \lessgtr_n$$

$$\lessgtr_n \left(\binom{n}{r} H(m,r)\right)^2 \cdot n^{2\varepsilon r} \cdot n^{-3r/16} \ll_n$$

$$\ll_n \left(\binom{n}{r} H(m,r)\right)^2$$

Утверждение 3.3.5 доказано. □

Утверждение 3.3.6. *Если* $\varepsilon \in (0, 1/32)$, $\delta \in (0, \min(\delta_1, 1/16))$, *где* $5\delta_1 = \widetilde{\psi}(1 - 5\delta_1)$, $n^{1-\varepsilon} \leqslant q(G) \leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}$ *и* $r^1_{D,\varepsilon}(n, q(G)) \leqslant r \leqslant$ $\leqslant r^2_{D,\varepsilon}(n, q(G))$, *то*

$$\mathtt{D}\varphi^{\mathrm{TT},\delta}_{G,n,r} \ll_n (\mathtt{M}\varphi^{\mathrm{TT},\delta}_{G,n,r})^2.$$

Доказательство. Понятно, что

$$\mathtt{D}\varphi^{\mathrm{TT},\delta}_{G,n,r} = \sum_{x \in E^n_r} \mathtt{D}\varphi^{\mathrm{TT},\delta}_{G,n,x} + \sum_{x_1 \in E^n_r} \sum_{x_2 \in E^n_r \setminus \{x_1\}} \operatorname{cov}(\varphi^{\mathrm{TT},\delta}_{G,n,x_1}, \varphi^{\mathrm{TT},\delta}_{G,n,x_2}) =$$

$$= \binom{n}{r} \cdot \frac{|\mathfrak{T}^{\mathrm{TT},\delta}_{G,r}|}{|\mathfrak{T}_{G,r}|} \left(1 - \frac{|\mathfrak{T}^{\mathrm{TT},\delta}_{G,r}|}{|\mathfrak{T}_{G,r}|}\right) +$$

$$+ \binom{n}{r} \sum_{t=1}^{r-1} \binom{r}{t} \cdot \binom{n-r}{r-t} \cdot \left(\frac{|\mathfrak{T}^{\mathrm{TT},\delta}_{G,r,t}|}{|\mathfrak{T}_{G,r,t}|} - \left(\frac{|\mathfrak{T}^{\mathrm{TT},\delta}_{G,r}|}{|\mathfrak{T}_{G,r}|}\right)^2 \right) \leqslant$$

$$\leqslant \mathtt{M}\varphi^{\mathrm{TT},\delta}_{G,n,r} + \binom{n}{r} \sum_{t=1}^{r-1} \binom{r}{t} \cdot \binom{n-r}{r-t} \cdot \left(\frac{|\mathfrak{T}^{\mathrm{TT},\delta}_{G,r,t}|}{|\mathfrak{T}_{G,r,t}|} - \left(\frac{|\mathfrak{T}^{\mathrm{TT},\delta}_{G,r}|}{|\mathfrak{T}_{G,r}|}\right)^2 \right).$$

Рассмотрим случай, когда $n^{1-\varepsilon} \leqslant q(G) \leqslant 2^{4\ln^2 n}$. Так как, согласно утверждению 3.3.1, в этом случае $\theta(q(G)) - 2 \lessgtr_n r \lessgtr_n (1 +$ $+ \varepsilon) \ln q(G)$. И, следовательно,

$$2^{r(1-\varepsilon)} \lessgtr_n q(G) \lessgtr_n 2^r \ln r^8.$$

Тогда, в силу утверждения 2.3.3, $|\mathfrak{T}^{\mathrm{TT},\delta}_{G,r}|/|\mathfrak{T}_{G,r}| \gtrsim_n H(q(G),r)$, и если $t \leqslant (1-2\varepsilon)r$, то, в силу утверждения 2.4.5, $|\mathfrak{T}^{\mathrm{TT},\delta}_{G,r,t}|/|\mathfrak{T}_{G,r,t}| \lesssim_n H(q(G),r)^2$. Следовательно, для $t \leqslant (1-2\varepsilon)r$ имеем

$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{TT},\delta}_{G,r,t}|/|\mathfrak{T}_{G,r,t}| - (|\mathfrak{T}^{\mathrm{TT},\delta}_{G,r}|/|\mathfrak{T}_{G,r}|)^2 \ll_n H(q(G),r).$$

Ясно, что $|\mathfrak{T}^{\mathrm{TT},\delta}_{G,r,t}|/|\mathfrak{T}_{G,r,t}| \leqslant |\mathfrak{T}^{\mathrm{TT},\delta}_{G,r}|/|\mathfrak{T}_{G,r}|$. Таким образом, в силу утверждения 3.3.5,

$$\mathtt{D}\varphi^{\mathrm{TT},\delta}_{G,n,r} \lesssim_n \binom{n}{r} H(q(G),r) + \binom{n}{r} \sum_{t=1}^{[(1-2\varepsilon)r]} \binom{r}{t}\binom{n-r}{r-t} o_n(H(q(G),r)^2) +$$
$$+ \sum_{t=[(1-2\varepsilon)r]+1}^{r-1} \binom{n}{r} \cdot \binom{r}{t} \cdot \binom{n-r}{r-t} H(q(G),r) =$$
$$= o_n\left(\left(\binom{n}{r}H(q(G),r)\right)^2\right) + \binom{n}{r}^2 \cdot o_n(H(q(G),r)^2) +$$
$$+ o_n\left(\left(\binom{n}{r}H(q(G),r)\right)^2\right) = o_n\left(\left(\binom{n}{r}H(q(G),r)\right)^2\right) \ll_n (\mathtt{M}\varphi^{\mathrm{TT},\delta}_{G,n,r})^2.$$

Теперь рассмотрим случай, когда $2^{4\ln^2 n} \leqslant q(G) \leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}$. Так как, согласно утверждению 3.3.1, в этом случае $\theta(q(G)) - 1 \lesseqgtr_n r \lesseqgtr_n \theta(q(G)) + 1$, и, следовательно,

$$2^r \lesseqgtr_n q(G) \lesseqgtr_n 2^r \ln r^4.$$

Тогда, в силу утверждения 2.3.3, имеем

$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{TT},\delta}_{G,r}|/|\mathfrak{T}_{G,r}| \gtrsim_n H(q(G),r),$$

а если $t \leqslant (1-\varepsilon/8)r$, то, в силу утверждения 2.4.5,

$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{TT},\delta}_{G,r,t}|/|\mathfrak{T}_{G,r,t}| \lesssim_n H(q(G),r).$$

Далее, используя утверждение 3.3.4, получаем, что

$$\mathtt{D}\varphi^{\mathrm{TT},\delta}_{G,n,r} \lesssim_n \binom{n}{r} H(q(G),r) +$$
$$+ \binom{n}{r} \sum_{t=1}^{[(1-\varepsilon/8)r]} \binom{r}{t}\binom{n-r}{r-t} o_n(H(q(G),r)^2) +$$
$$+ \sum_{t=[(1-\varepsilon/8)r]+1}^{r-1} \binom{n}{r}\binom{r}{t}\binom{n-r}{r-t} H(q(G),r) \ll_n$$

$$\ll_n \left(\binom{n}{r}\cdot H(q(G),r)\right)^2 \sim_n (\mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ},\delta}_{G,n,r})^2.$$

Утверждение 3.3.6 доказано. □

По доказанному утверждению существует α_1 из $\mathcal{M}$ такое, что, если $n^{1-\varepsilon} \leqslant q(G) \leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}$ и $r^1_{D,\varepsilon}(n,q(G)) \leqslant r \leqslant r^2_{D,\varepsilon}(n,q(G))$, то $\mathtt{D}\varphi^{\text{ТТ},\delta}_{G,n,r} \lessgtr_n \alpha_1(n)(\mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ},\delta}_{G,n,r})^2$.

Утверждение 3.3.7. *Если* $\varepsilon \in (0,1/32)$, $\delta \in (0,\min(\delta_1,1/16))$, *где* $5\delta_1 = \widetilde{\psi}(1-5\delta_1)$, $D \in \mathcal{B}$, $D(n) \lessgtr_n \min(\ln\ln\ln\ln n, 1/\alpha_1(n)^{1/5})$, $n^{1-\varepsilon} \leqslant q(G) \leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}$ *и* $r^1_{D,\varepsilon}(n,q(G)) \leqslant r \leqslant r^2_{D,\varepsilon}(n,q(G))$, *то*

$$\varphi^{\text{ТТ},\delta}_{G,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ},\delta}_{G,n,r} \sim_n \widehat{H}(n,q(G),r),$$

$$\sum_{r=r^1_{D,\varepsilon}(n,q(G))}^{r^2_{D,\varepsilon}(n,q(G))} \varphi^{\text{ТТ},\delta}_{G,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \mathtt{M} \sum_{r=r^1_{D,\varepsilon}(n,q(G))}^{r^2_{D,\varepsilon}(n,q(G))} \varphi^{\text{ТТ},\delta}_{G,n,r} \sim_n \Phi^2_{D,\varepsilon}(n,q(G)).$$

Доказательство. Действительно, если $r^1_{D,\varepsilon}(n,q(G)) \leqslant r \leqslant r^2_{D,\varepsilon}(n,q(G))$, то

$$\mathtt{P}(|\varphi^{\text{ТТ},\delta}_{G,n,r} - \mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ},\delta}_{G,n,r}| \geqslant \alpha_1(n)^{1/5}\cdot \mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ},\delta}_{G,n,r}) \leqslant \mathtt{D}\varphi^{\text{ТТ},\delta}_{G,n,r}/(\alpha_1(n)^{1/5}\mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ},\delta}_{G,n,r})^2 \lessgtr_n \alpha_1(n)^{3/5}.$$

Так как

$$r^2_{D,\varepsilon}(n,q(G)) - r^1_{D,\varepsilon}(n,q(G)) \leqslant 2\cdot D(n) + 2 \lessgtr_n 4\alpha_1(n)^{-1/5}, \text{ то}$$

$$\mathtt{P}\left(\Bigl|\sum_{r=r^1_{D,\varepsilon}(n,q(G))}^{r^2_{D,\varepsilon}(n,q(G))} (\varphi^{\text{ТТ},\delta}_{G,n,r} - \mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ},\delta}_{G,n,r})\Bigr| \geqslant \alpha_1(n)^{1/5}\mathtt{M}\sum_{r=r^1_{D,\varepsilon}(n,q(G))}^{r^2_{D,\varepsilon}(n,q(G))} \varphi^{\text{ТТ},\delta}_{G,n,r}\right) \lessgtr_n \lessgtr_n (4\cdot\alpha_1(n)^{-1/5})\alpha_1(n)^{3/5} = 4\alpha_1(n)^{2/5} \ll_n 1,$$

откуда и следует искомый результат.

Утверждение 3.3.7 доказано. □

Из утверждений 3.2.13, 3.3.7 и 3.1.18 вытекает предложение.

Утверждение 3.3.8. *Если* $\varepsilon \in (0, 1/32)$, $\delta \in (0, \min(1/16, \delta_1))$, *где* $5\delta_1 = \widetilde{\psi}(1 - 5\delta_1)$, $D \in \mathcal{B}$, $D(n) \lessgtr_n \min(\ln\ln\ln\ln n, 1/\alpha_1(n)^{1/5})$, $n^{1-\varepsilon} \leqslant q(G) \leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}$, *то*

$$\varphi^{\text{тт}}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \sum_{r=r^1_{D,\varepsilon}(n,q(G))}^{r^2_{D,\varepsilon}(n,q(G))} \varphi^{\text{тт}}_{G,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n$$

$$\overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \sum_{r=r^1_{D,\varepsilon}(n,q(G))}^{r^2_{D,\varepsilon}(n,q(G))} \varphi^{\text{тт},\delta}_{G,n,r} \sim_n \Phi^2_{D,\varepsilon}(n, q(G)).$$

Следствие 3.3.9. *Если* $\varepsilon \in (0, 1/32)$, $D \in \mathcal{B}$, $D(n) \lessgtr_n \ln\ln\ln n$ *и* $n^{1-\varepsilon} \leqslant q(G) \leqslant 2^{n(1-\varepsilon)}$, *то*

$$\varphi^{\text{тт}}_{G,n,} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} H(q(G), r),$$

$$\varphi^{\text{тт}}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \sum_{r=r^1_{D,\varepsilon}(n,q(G))}^{r^2_{D,\varepsilon}(n,q(G))} \varphi^{\text{тт},\delta}_{G,n,r} \sim_n \Phi^2_{D,\varepsilon}(n, q(G)).$$

Из оценок числа тестовых таблиц, полученных в утверждениях 2.2.3 и 2.3.3 вытекает предложение.

Утверждение 3.3.10. *Если* $0 < c_1 < c_2$, $D \in \mathcal{B}$, $D(n) \lessgtr_n \ln n$, *то*:

1) *при* $q(G) \gtrless_n 2^n D(n)$ *выполнено* $\varphi^{\text{тт}}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{=}_n 0$;
2) *не существует такой действительной функции* f, *определенной на множестве пар* (G, n), G — *граф*, $n \in \mathbb{N}$, *что при* $c_1 2^n \leqslant q(G) \leqslant c_2 2^n$ *выполнено* $\varphi^{\text{тт}}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n f(G, n)$.

Глава 4

МИНИМАЛЬНАЯ ДЛИНА ТУПИКОВОГО ТЕСТА

Прежде чем сформулировать основной результат главы, введем ряд обозначений. Определим на $(E^n)^{\mathcal{P}(G)}$ функцию $L_{G,n}^{\min}$, положив $L_{G,n}^{\min}(T)$ равной $n+1$, если пара (T,G) не имеет тестов, и равной $\min\{r : \varphi_{G,n,r}^{\mathrm{T}}(T) \neq 0\}$ в остальных случаях. Пусть $\widehat{L}_{G,n}^{\min}$ — ограничение $L_{G,n}^{\min}$ на множество таких таблиц T, что пара (T,G) имеет тесты. Далее полагаем, что $\widehat{\varphi}_{G,n,x}^{\mathrm{T}}$, где $x \in E^n$ и $\widehat{\varphi}_{G,n,r}^{\mathrm{T}}$, где $r \in N_n$, суть ограничения, соответственно, $\varphi_{G,n,x}^{\mathrm{T}}$ и $\varphi_{G,n,r}^{\mathrm{T}}$ на то же множество таблиц. Полагаем

$$S(b,a) = \ln b - \ln\ln\binom{a}{\ln b},$$

$$S_1(b,a) = \ln b - \ln\ln\binom{a}{S(b,a)}.$$

Пусть имеются ε из $(0,1/16)$; λ_ε из $(1/2,1)$ — решение уравнения

$$(1-\varepsilon)\cdot\lambda + \lambda\cdot\ln\lambda + (1-\lambda)\cdot\ln(1-\lambda) = 0;$$

D из $\mathcal{B}$, $D(n) \lesseqgtr_n \ln\ln n$.

Положим функцию $L_{D,\varepsilon}^{1}(G,n)$ равной:

- $]\ln\chi(G)[$, если $p^*(G) \leqslant (\ln n)\ln\ln n$ или $(\ln n)\ln\ln n < p^*(G) \leqslant (\ln n)^{D(n)}$ и $\chi(G) < 2((\ln n)\cdot\ln\ln n)^{3/4}$;
- $\left[S_1\left(\binom{\chi(G)}{2}, n\right) + \varepsilon\right]$, если $(\ln n)\ln\ln n < p^*(G) \leqslant (\ln n)^{D(n)}$ и $\chi(G) \geqslant 2((\ln n)\cdot\ln\ln n)^{3/4}$;
- $[S(\Delta(G),n)+\varepsilon]$, если $(\ln n)^{D(n)} < p^*(G)$, $q(G) < 2^{n\cdot\lambda_\varepsilon}$ и
$$\Delta(G) > (1-\varepsilon)q(G)(\ln q(G))/\ln\binom{n}{\ln q(G)};$$
- $[S(q(G),n)+\varepsilon]$, если $(\ln n)^{D(n)} < p^*(G)$, $q(G) < 2^{n\cdot\lambda_\varepsilon}$ и
$$\Delta(G) \leqslant (1-\varepsilon)q(G)(\ln q(G))/\ln\binom{n}{\ln q(G)},$$
или, если $(\ln n)^{D(n)} < p^*(G)$ и $2^{n\cdot\lambda_\varepsilon} \leqslant q(G) < 2^n/(\ln n)^{D(n)}$.

Положим функцию $L^2_{D,\varepsilon}(G,n)$ равной:

- $]\ln\chi(G)[$, если $p^*(G) \leqslant \ln n - D(n)$;
- $]\ln\max(\chi(G), 2D(n))[$, если $\ln n - D(n) < p^*(G) \leqslant \ln n + D(n)$;
- $]\ln p^*(G)[$, если $\ln n + D(n) < p^*(G) \leqslant (\ln n)\ln\ln n$;
- $\left[S_1\left(2\cdot\binom{p^*(G)}{2}, n\right) + \varepsilon\right] + 1$, если $(\ln n)\ln\ln n < p^*(G) \leqslant (\ln n)^{D(n)}$;
- $[S(q(G), n) + \varepsilon] + 1$, если $p^*(G) > (\ln n)^{D(n)}$, $q(G) \leqslant 2^n/(\ln n)^{D(n)}$.

Пусть x, $1 \leqslant x \leqslant 2\ln n$, таково, что $q(G) = \left(2^n\cdot\ln\binom{n}{x}\right)/(2^x - 1)$. Тогда положим функцию $\widehat{L}^1_{D,\varepsilon}(G,n)$ равной:

- $[n - x + \varepsilon]$, если $2^n/(\ln n)^{D(n)} \leqslant q(G) < 2^n\ln n$;
- $n - 1$, если $2^n\cdot\ln n \leqslant q(G) < 2^n\cdot(\ln n + D(n))$;
- n, если $q(G) \geqslant 2^n\cdot(\ln n + D(n))$;

и функцию $\widehat{L}^2_{D,\varepsilon}(G,n)$ равной:

- $\widehat{L}^1_{D,\varepsilon}(G,n) + 1$, если $2^n/(\ln n)^{D(n)} \leqslant q(G) < 2^n(\ln n + D(n))$;
- $\widehat{L}^1_{D,\varepsilon}(G,n)$, если $q(G) \geqslant 2^n(\ln n + D(n))$.

Основным результатом главы является следующее утверждение.

Теорема 4.0.11. *Если* $\varepsilon \in (0, 1/16)$, $D \in \mathcal{B}$ *и* $D(n) \lessgtr_n \ln\ln n$, *то:*

1) *при* $1 \leqslant q(G) \leqslant 2^n/(\ln n)^{D(n)}$ *выполнено*

$$L^1_{D,\varepsilon}(G,n) \overset{\text{п.в.}}{\leqslant_n} L^{\min}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{\leqslant_n} L^2_{D,\varepsilon}(G,n);$$

2) *при* $(\ln n)^{D(n)} \leqslant q(G) \leqslant 2^n/(\ln n)^{D(n)}$ *и* $q(G) \geqslant p^*(G)^{1+\varepsilon}$ *выполнено*

$$[S(q(G),n) + \varepsilon] \overset{\text{п.в.}}{\leqslant_n} L^{\min}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{\leqslant_n} [S(q(G),n) + \varepsilon] + 1;$$

3) *при* $q(G) \geqslant 2^n/(\ln n)^{D(n)}$ *выполнено*

$$\widehat{L}^1_{D,\varepsilon}(G,n) \overset{\text{п.в.}}{\leqslant_n} \widehat{L}^{\min}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{\leqslant_n} \widehat{L}^2_{D,\varepsilon}(G,n).$$

Эти факты вытекают непосредственно из следующих утверждений и следствий: 4.2.1, 4.2.6, 4.2.7, 4.2.9, 4.2.11, 4.2.19, 4.3.1, 4.3.3, 4.3.5–4.3.9.

4.1. Вспомогательные оценки

Если $m \geqslant 0$, $n > 0$, $n \geqslant m$, то положим $A^m_n = \Gamma(n+1)/\Gamma(n - m + 1)$.

Утверждение 4.1.1. *Если* $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$, $k \geqslant 2$, *то*

$$\prod_{i=1}^{k} A_n^{m_i} \leqslant (A_n^{m/k})^k.$$

Доказательство. Известно, что

$$\frac{1}{\Gamma(z+1)} = e^{cz} \prod_{k=1}^{\infty} (1 + z/k) e^{-z/k},$$

где c — постоянная Эйлера–Маскерони. Пусть $0 \leqslant z_1 \leqslant z_2 \leqslant z_3 \leqslant \leqslant z_4$, $z_1 + z_4 = z_2 + z_3$. Тогда

$$\frac{1}{\Gamma(z_1+1)\cdot\Gamma(z_4+1)} = e^{c(z_1+z_4)} \prod_{l=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z_1}{l}\right)\left(1 + \frac{z_4}{l}\right) e^{-\frac{z_1+z_4}{l}} =$$
$$= e^{c(z_2+z_3)} \prod_{l=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z_1+z_4}{l} + \frac{z_1 z_4}{l^2}\right) e^{-\frac{z_2+z_3}{l}}$$

Так как $z_1 z_4 \leqslant z_2 z_3$, то имеем

$$1 + \frac{z_1+z_4}{l} + \frac{z_1 z_4}{l^2} \leqslant 1 + \frac{z_2+z_3}{l} + \frac{z_2 z_3}{l^2},$$

и, следовательно, $1/(\Gamma(z_1+1)\cdot\Gamma(z_4+1)) \leqslant 1/(\Gamma(z_2+1)\cdot\Gamma(z_3+ + 1))$, откуда для положительных n, $n \geqslant z_4$, получаем

$$A_n^{z_1} A_n^{z_4} \leqslant A_n^{z_2} A_n^{z_3}. \tag{4.1}$$

Доказываем утверждение индукцией по k. Для $k = 2$ доказываемое неравенство следует непосредственно из (4.1). Пусть неравенство выполнено для $k \leqslant t-1$, докажем его для $k = t$. Среди индексов $1, 2, \ldots, k$ обязательно найдутся такие различные i и j, что $m_i \leqslant m/k$, $m_j \geqslant m/k$. Без ограничения общности можно считать, что $j = k$, $i = k-1$. В силу (4.1), имеем

$$A_n^{m_{k-1}} \cdot A_n^{m_k} \leqslant A_n^{m_{k-1}+m_k-m/k} \cdot A_n^{m/k}.$$

Так как

$$m_1 + m_2 + (m_{k-1} + m_k - m/k) = m\cdot(k-1)/k,$$

то, в силу индукционного предположения, имеем

$$A_n^{m_{k-1}+m_k-m/k}\prod_{i-1}^{k-2}A_n^{m_i}\leqslant (A_n^{m/k})^{k-1},$$

откуда вытекает доказываемое неравенство.

Утверждение 4.1.1 доказано. □

Утверждение 4.1.2. *Выполнены следующие положения*:

1) *если* $0\leqslant m<n$, *то* $A_n^m\prec (n/(n-m))^{n-m+1/2}n^me^{-m}$;
2) *если* $0\leqslant m\leqslant n-1$, *то* $A_n^m\succ (n/(n-m))^{n-m+1/2}n^me^{-m}\geqslant$ $\geqslant n^me^{-m}$;
3) *если* $n\geqslant 1$, *то* $A_n^n\asymp n^{n+1/2}e^{-n}$;
4) *если* m, n *натуральные*, $2\leqslant m\leqslant n$, *то* $e^{-2\cdot\binom{m}{2}\cdot n^{-1}}\cdot n^m\leqslant$ $\leqslant A_n^m\leqslant e^{-\binom{m}{2}\cdot n^{-1}}\cdot n^m$.

Доказательство. Пункты 1, 2, 3 вытекают непосредственно из формулы Стирлинга. Остановимся на доказательстве п. 4.

Если m и n натуральные, то

$$A_n^m=\prod_{k=0}^{m-1}(n-k)=n^m\cdot\prod_{k=1}^{m-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)=\exp\left(\sum_{k=1}^{m-1}\ln\left(1-\frac{k}{n}\right)\right)\cdot n^m=$$

$$=n^m\cdot\exp\left(-\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s}\left(\frac{k}{n}\right)^s\right)=n^m\cdot\exp\left(-\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s}n^{-s}\sum_{k=1}^{m-1}k^s\right)=$$

$$=n^m\cdot\exp\left(-\binom{m}{2}\cdot n^{-1}-\sum_{s=2}^{\infty}\frac{1}{s}n^{-s}\sum_{k=1}^{m-1}k^s\right). \tag{4.2}$$

Следовательно, $A_n^m\leqslant n^m\exp\left(-\binom{m}{2}\cdot n^{-1}\right)$. Покажем, что для натуральных s и $m\geqslant 2$ верно

$$\sum_{k=1}^{m-1}k^s\leqslant (m-1)m^s/(s+1). \tag{4.3}$$

Если $m=2$, то

$$\sum_{k=1}^{m-1}k^s=1\leqslant 2^s/(s+1)=(m-1)\cdot m^s/(s+1).$$

Если (4.3) выполнено для $m = t$, то

$$\sum_{k=1}^{(t+1)-1} k^s = \sum_{k=1}^{t-1} k^s + t^s \leqslant \frac{(t-1)\cdot t^s}{s+1} + t^s = \frac{t(t^s + s\cdot t^{s-1})}{s+1} \leqslant$$
$$\leqslant t\cdot (t+1)^s/(s+1) = ((t+1)-1)\cdot (t+1)^s/(s+1).$$

Таким образом, индукцией по m мы доказали (4.3). Но тогда имеем

$$\sum_{s=2}^{\infty} \frac{n^{-s}}{s} \sum_{k=1}^{m-1} k^s \leqslant \sum_{s=2}^{\infty} \frac{n^{-s}\cdot (m-1)\cdot m^s}{(s+1)\cdot s} =$$

$$= (m-1)\cdot \sum_{s=2}^{\infty} \frac{(m/n)^s}{s(s+1)} = (m-1)\sum_{s=2}^{\infty}\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^s =$$

$$= \frac{m-1}{2}\cdot \left(\frac{m}{n}\right)^2 - \sum_{s=3}^{\infty} \frac{1}{s}\left(\left(\frac{m}{n}\right)^{s-1} - \left(\frac{m}{n}\right)^s\right) \leqslant \frac{m-1}{2}\left(\frac{m}{n}\right)^2 \leqslant \binom{m}{2}\cdot n^{-1}.$$

Следовательно, в силу (4.2) имеем

$$A_n^m \geqslant \exp\left(-2\cdot \binom{m}{2}\cdot n^{-1}\right)\cdot n^m.$$

Утверждение 4.1.2 доказано. □

Утверждение 4.1.3. *Если n, m, l — натуральные, $2 \leqslant l \leqslant n$, $m \leqslant n$, то для некоторой константы c, $c > 0$, выполнено*

$$(A_{n/l}^{m/l})^l / A_n^m \leqslant l^{-m}\cdot \left(\frac{c\cdot n}{l}\right)^{l/2}.$$

Доказательство. Имеем

$$(A_{n/l}^{m/l})^l / A_n^m = \frac{\Gamma(1+n/l)^l}{\Gamma(1+n)}\cdot \frac{\Gamma(1+n-m)}{\Gamma(1+(n-m)/l)^l}.$$

Из формулы Стирлинга получаем, что для некоторых положительных c_1, c_2 выполнено

$$\frac{\Gamma(1+n/l)^l}{\Gamma(1+n)} \leqslant c_1\cdot \frac{\left(c_2\cdot \sqrt{\frac{n}{l}}\cdot \left(\frac{n}{l}\right)^{n/l}\cdot e^{-n/l}\right)^l}{\sqrt{n}\cdot n^n\cdot e^{-n}} =$$
$$= c_1\cdot (c_2)^l\cdot n^{(l-1)/2}\cdot l^{-n-l/2} \leqslant$$
$$\leqslant ((c_1)^{2/l}\cdot (c_2)^2\cdot n)^{l/2}\cdot l^{-n-l/2} n^{-1/2}. \quad (4.4)$$

Если $n = m$, то доказываемое неравенство выполняется. Пусть $n - m \geqslant 1$. Тогда для некоторых c_3 и c_4 выполнено

$$\frac{\Gamma(1+n-m)}{\Gamma(1+(n-m)/l)^l} \leqslant c_3 \cdot \frac{(n-m)^{n-m+1/2} \cdot e^{-n+m}}{\left(c_4 \cdot \left(\frac{n-m}{l}\right)^{(n-m)/l} \cdot e^{(m-n)/l}\right)^l} =$$

$$= \frac{c_3}{(c_4)^l} \cdot \sqrt{n-m} \cdot l^{n-m} \leqslant ((c_3)^{2/l} \cdot (c_4)^{-2})^{l/2} \cdot l^{n-m} \sqrt{n-m}\,.$$

И, согласно (4.4), имеем

$$(A_{n/l}^{m/l})^l / A_n^m \leqslant \left((c_1 c_3)^{2/l} \cdot \left(\frac{c_2}{c_4}\right)^2 \cdot \left(\frac{n}{l}\right)\right)^{l/2} \cdot l^{-m}.$$

Утверждение 4.1.3 доказано. □

Легко видеть, что верно предложение.

Утверждение 4.1.4. *Справедливы соотношения*:

1) $e^{-m \cdot 2^{-S(m,n)}} = \binom{n}{\ln m}^{-1}$,
2) $e^{-m \cdot 2^{-S_1(m,n)}} = \binom{n}{S(m,n)}^{-1}$,
3) $S_1(m,n) - S(m,n) = \ln \dfrac{\ln \binom{n}{\ln m}}{\ln \binom{n}{S(m,n)}}$.

Утверждение 4.1.5. *Для натуральных m, n выполнено:*

1) *если* $((\ln n) \ln \ln n)^{3/2} \lessgtr_n m \lessgtr_n 2^{n/4}$, *то*

$$0 \lessgtr_n S_1(m,n) - S(m,n) \lessgtr_n 2;$$

2) *если* $\ln m \gg_n \ln \ln n$ *и* $n - \ln m \gg_n \ln \ln n$, *то*

$$|S_1(m,n) - S(m,n)| \ll_n 1, \; S(m,n) \sim_n \ln m$$

и

$$n - S(m,n) \sim_n n - \ln m.$$

Доказательство. Пусть

$$((\ln n) \ln \ln n)^{3/2} \lessgtr_n m \lessgtr_n 2^{(\ln \ln n)^2}. \tag{4.5}$$

Так как согласно утверждению 2.1.8 $\binom{n}{\ln m} \lessgtr_n n^{\ln m}$, то имеем

$$S(m,n) \gtrless_n \ln m - \ln \ln(n^{\ln m}) = \ln m - \ln((\ln m) \ln n) =$$
$$= \ln(m/((\ln m)\ln n)) = (\ln m)/3 + \ln(m^{2/3}/((\ln m)\ln n)).$$

Если $m_2 \geqslant m_1 \gg_n 1$, то $m_1^{2/3}/\ln m_1 \lesssim_n m_2^{2/3}/\ln m_2$. Следовательно,

$$m^{2/3}/\ln m \gtrsim_n \frac{((\ln n)\ln\ln n)^{(3/2)\cdot(2/3)}}{(3/2)(\ln\ln n + \ln\ln\ln n)} \gtrsim_n \frac{1}{4}\cdot \ln n.$$

Таким образом,

$$S(m,n) \gtrsim_n \frac{1}{3}\cdot \ln m - 2 \gtrsim_n \frac{1}{4}\ln m. \tag{4.6}$$

Пусть теперь $\ln m \gg_n \ln\ln n$, $n - \ln m \gg_n \ln\ln n$. Так как $S(m,n) \lesssim_n \ln m$, $S(m,n) \gtrsim_n \ln m - \ln\ln(n^{\ln m}) = \ln m - \ln\ln m - \ln\ln n$, то

$$S(m,n) \sim_n \ln m. \tag{4.7}$$

Аналогично:

$$n - S(m,n) = n - \ln m + \ln\ln\binom{n}{\ln m} \leqslant n - \ln m + \ln\ln(n^{n-\ln m}) = \\ = (n - \ln m) + \ln(n - \ln m) + \ln\ln n,$$

и, следовательно,

$$n - S(m,n) \sim_n n - \ln m. \tag{4.8}$$

Поскольку $S(m,n) \lesssim_n \ln m$, то, согласно утверждению 2.1.8, имеем

$$\binom{n}{\ln m} \lesssim_n \binom{n}{S(m,n)}^{(\ln m)/S(m,n)}, \tag{4.9}$$

$$\binom{n}{S(m,n)} \lesssim_n \binom{n}{\ln m}^{(n - S(m,n))/(n - \ln m)}.$$

В силу последних неравенств, учитывая (4.7) и (4.8) получаем

$$\ln\binom{n}{\ln m} \sim_n \ln\binom{n}{S(m,n)}.$$

В соответствии с утверждением 4.1.4 имеем

$$S_1(m,n) - S(m,n) = \ln\left(\left(\ln\binom{n}{\ln m}\right)\Big/\ln\binom{n}{S(m,n)}\right) \ll_n 1.$$

Пусть выполнено (4.5), тогда, в силу (4.9), имеем

$$S_1(m,n) - S(m,n) \lesssim_n \ln((\ln m)/S(m,n)),$$

и, учитывая (4.6), получаем, что $S_1(m,n) - S(m,n) \lesssim_n 2$.

Утверждение 4.1.5 доказано. $\square$

Утверждение 4.1.6. *Если* $\varepsilon \in (0, 1)$,

$$((\ln n) \ln \ln n)^{3/2} \lesseqgtr_n m \lesseqgtr_n (\ln n)^{2 \cdot \ln \ln n}, \tag{4.10}$$

$$S_1(m, n) + \varepsilon \lesseqgtr_n r \lesseqgtr_n S_1(m, n) + 2 + \varepsilon, \tag{4.11}$$

$$S_1(m, n) - 2 - \varepsilon \lesseqgtr_n r \lesseqgtr_n S_1(m, n) - \varepsilon, \tag{4.12}$$

$$\ln m \gg_n \ln \ln n, \quad n - \ln m \gg_n \ln \ln n, \tag{4.13}$$

$$S(m, n) + \varepsilon \lesseqgtr_n r \lesseqgtr_n S(m, n) + 2 + \varepsilon, \tag{4.14}$$

$$S(m, n) - 2 - \varepsilon \lesseqgtr_n r \lesseqgtr_n S(m, n) - \varepsilon, \tag{4.15}$$

то:

1) *для условий* (4.10) *и* (4.11) *выполнено*

$$\binom{n}{r} \cdot e^{-m \cdot 2^{-r}} \gtreqless_n \binom{n}{r}^{1 - 2^{-\varepsilon}} \gg_n 1,$$

а для условий (4.10) *и* (4.12) *выполнено*

$$\binom{n}{r} \cdot e^{-m \cdot 2^{-r}} \lesseqgtr_n \binom{n}{r}^{1 - 2^{\varepsilon/2}} \ll_n 1;$$

2) *для условий* (4.13) *и* (4.14) *выполнено*

$$\binom{n}{r} \cdot e^{-m \cdot 2^{-r}} \gtreqless_n \binom{n}{r}^{1 - 2^{-\varepsilon/2}} \gg_n 1,$$

а для условий (4.13) *и* (4.15) *выполнено*

$$\binom{n}{r} \cdot e^{-m \cdot 2^{-r}} \lesseqgtr_n \binom{n}{r}^{1 - 2^{\varepsilon/2}} \ll_n 1.$$

Доказательство. Согласно утверждению 4.1.4, имеем

$$e^{-m \cdot 2^{-r}} = e^{-m \cdot 2^{-S_1(m,n)} \cdot 2^{S_1(m,n) - r}} = \binom{n}{S(m, n)}^{-2^{S_1(m,n) - r}}. \tag{4.16}$$

Поскольку при ограничениях (4.10) или (4.13) выполнено $S(m, n) \gg_n 1$, $n - S(m, n) \gg_n 1$, тогда если $|r - S(m, n)| \leqslant 6$, то в силу утверждения 2.1.8, имеем

$$\ln \binom{n}{S(m, n)} \sim_n \ln \binom{n}{r}. \tag{4.17}$$

Пусть выполнено (4.10) и (4.11), тогда

$$\binom{n}{S(m, n)} \lesseqgtr_n \binom{n}{S_1(m, n)} \lesseqgtr_n \binom{n}{r}.$$

Следовательно,

$$\binom{n}{r} e^{-m\cdot 2^{-r}} \gtrapprox_n \binom{n}{r}^{1-2^{S_1(m,n)-r}} \gtrapprox_n \binom{n}{r}^{1-2^{-\varepsilon}} \gg_n 1.$$

Если выполнено (4.10) и (4.12), то в силу (4.16) и (4.17) имеем

$$\binom{n}{r} e^{-m\cdot 2^{-r}} \lessapprox_n \binom{n}{r}^{1-2^{\varepsilon}(1+o_n(1))} \lessapprox_n \binom{n}{r}^{1-2^{\varepsilon/2}} \ll_n 1.$$

Если выполнено (4.13) и (4.14), то, в силу (4.16), (4.17) и утверждения 4.1.5, имеем

$$\binom{n}{r} e^{-m\cdot 2^{-r}} \gtrapprox_n \binom{n}{r}^{1-2^{-\varepsilon+o_n(1)}\cdot(1+o_n(1))} \gtrapprox_n \binom{n}{r}^{1-2^{-\varepsilon/2}} \gg_n 1.$$

Аналогично доказывается и последнее неравенство.

Утверждение 4.1.6 доказано. □

Утверждение 4.1.7. *Если* $((\ln n)\ln\ln n)^2 \lesssim_n m \lesssim_n (\ln n)^{2\ln\ln n}$, *то* $((\ln m)/2) - o_n(1) \leqslant S_1(m,n) \lessapprox_n \ln m$ *и*

$$S_1(m,n) \sim_n S(m,n) = (\ln m)\left(1 - \frac{\ln((\ln m)\ln n)}{\ln m}\right) + o_n(1).$$

Доказательство. Если $1 \leqslant a \leqslant \ln n$, то $\binom{n}{a} = \left(O_n\left(\frac{n}{a}\right)\right)^a$. Следовательно,

$$\ln\ln\binom{n}{a} = \ln a + \ln\ln O_n\left(\frac{n}{a}\right) = \ln a + \ln\left(\ln\left(\frac{n}{a}\right) + O_n(1)\right) =$$
$$= \ln a + \ln\ln\left(\frac{n}{a}\right) + o_n(1) = \ln a + \ln(\ln n + o_n(\ln n)) + o_n(1) =$$
$$= \ln(a\cdot\ln n) + o_n(1).$$

Таким образом,

$$S(m,n) = \ln m - \ln((\ln m)\cdot\ln n) + o_n(1) =$$
$$= \left(1 - \frac{\ln((\ln m)\ln n)}{\ln m}\right)\ln m + o_n(1).$$

Так как, если $1 \ll_n m_1 \leqslant m_2$, то

$$S(m_1,n) - (\ln m_1)/2 \lessapprox_n S(m_2,n) - (\ln m_2)/2,$$

имеем

$$
\begin{gathered}
S(m,n) - (\ln m)/2 = (\ln m)/2 - \ln\ln m - \ln\ln n + o_n(1) \text{\textcircled{$\geqslant$}}_n \\
\text{\textcircled{$\geqslant$}}_n (1/2)\ln(((\ln n)\ln\ln n)^2(1-o_n(1))) - \\
- \ln\ln n - \ln\ln(((\ln n)\ln\ln n)^2(1-o_n(1))) = \\
= \ln\ln n + \ln\ln\ln n - o_n(1) - \ln(2\cdot(\ln\ln n + \ln\ln\ln n + o_n(1))) = \\
= \ln\ln\ln n - 1 - \ln\ln\ln n - o_n(1) = -1 - o_n(1).
\end{gathered}
$$

Таким образом,

$$
S(m,n) \geqslant (\ln m)/2 - 1 - o_n(1). \tag{4.18}
$$

Так как $S_1(m,n)\text{\textcircled{$\geqslant$}}_n S(m,n)$, тогда если $S(m,n) \geqslant (\ln m)/2$, то и $S_1(m,n)\text{\textcircled{$\geqslant$}}_n(\ln m)/2$. Допустим, что $S(m,n) \leqslant (\ln m)/2$, тогда

$$
\begin{aligned}
S_1(m,n) &= \ln m - \ln(S(m,n)\cdot \ln n) + o_n(1) \geqslant \\
&\geqslant \ln m - \ln((1/2)\cdot(\ln m)\cdot \ln n) + o_n(1) = \\
&= 1 + \ln m - \ln((\ln m)\cdot\ln n) + o_n(1) = \\
&= 1 + S(m,n) + o_n(1)
\end{aligned}
$$

и, в силу (4.18), имеем $S_1(m,n) \geqslant (\ln m)/2 - o_n(1)$.

Утверждение 4.1.7 доказано. □

4.2. Случай «низких» таблиц

В этом параграфе мы получим оценки для $L^{\min}_{G,n}$ при условии, что $p^*(G) \leqslant (\ln n)^{\ln\ln n}$. Из определения хроматического числа вытекает предложение.

Утверждение 4.2.1. *Если* $\chi(G) \leqslant 2^n$, *то* $L^{\min}_{G,n} \geqslant]\ln\chi(G)[$; *если* $\chi(G) > 2^n$, *то* $L^{\min}_{G,n} = n+1$; *если* $m \leqslant 2^n$, *то* $L^{\min}_{K_m,n} \geqslant]\ln m[$; *если* $m > 2^n$, *то* $L^{\min}_{K_m,n} = n+1$.

Легко видеть, что верно следующее предложение.

Утверждение 4.2.2. *Если* $2 \leqslant m \leqslant 2^r$, *то* $|\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_m,r}| = 2^{-rm}\cdot A^m_{2^r}\cdot|\mathfrak{T}_{K_m,r}|$.

Через $\mathfrak{T}^{\mathrm{T},f}_{G,r,t}$ обозначим множество таких троек (T_1,T_2,G) из $\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{G,r,t}$, что $T_1 = f$. Если $T \in (E^r)^U$, $1 \leqslant t \leqslant r$, то через $<T>^{\,t}$ обозначим таблицу из $(E^t)^U$ такую, что для всех a из U выполнено $<T>^{\,t}(a) = T(a)|_{N_t}$.

Утверждение 4.2.3. *Если* $2 \leqslant m \leqslant 2^r$, *то*

$$
|\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_m,r,t}| \leqslant 2^{(t-2r)m}\cdot A^m_{2^r}\cdot\left(A^{m\cdot 2^{-t}}_{2^{r-t}}\right)^{2^t}\cdot|\mathfrak{T}_{K_m,r,t}|.
$$

Доказательство. Если $\mathfrak{T}^{\text{т},f}_{K_m,r,t} \neq \varnothing$, то

$$|\mathfrak{T}^{\text{т},f}_{K_m,r,t}| \leqslant 2^{(t-2r)m} \cdot |\mathfrak{T}_{K_m,r,t}| \cdot \prod_{a\in E^t} A_{2^{r-t}}^{|(<f>^t)^{-1}(a)|}.$$

Следовательно, в силу утверждения 4.1.1

$$|\mathfrak{T}^{\text{т},f}_{K_m,r,t}| \leqslant 2^{(t-2r)m} \cdot |\mathfrak{T}_{K_m,r,t}| \cdot (A_{2^{r-t}}^{m\cdot 2^{-t}})^{2^t}.$$

Непосредственно отсюда получаем искомый результат.

Утверждение 4.2.3 доказано. □

Утверждение 4.2.4. *Если* $2 \leqslant m \leqslant 2^r$, *то*

$$|\mathfrak{T}^{\text{т}}_{K_m,r,t}| \leqslant (A_{2^r}^m \cdot 2^{-rm})^2 \cdot (O(2^{r-t}))^{2^{t-1}} |\mathfrak{T}_{K_m,r,t}|.$$

Доказательство. В силу утверждений 4.1.3 и 4.2.3, имеем

$$\begin{aligned}|\mathfrak{T}^{\text{т}}_{K_m,r,t}| &\leqslant (A_{2^r}^m \cdot 2^{-rm})^2 \cdot 2^{tm} \cdot ((A_{2^r}^{m\cdot 2^{-t}})^{2^t}/A_{2^r}^m) \cdot |\mathfrak{T}_{K_m,r,t}| \leqslant \\ &\leqslant (A_{2^r}^m \cdot 2^{-rm})^2 \cdot 2^{tm} \cdot (2^t)^{-m} \cdot (O(2^{r-t}))^{2^t/2} \cdot |\mathfrak{T}_{K_m,r,t}| = \\ &= (A_{2^r}^m \cdot 2^{-rm})^2 \cdot (O(2^{r-t}))^{2^{t-1}} \cdot |\mathfrak{T}_{K_m,r,t}|.\end{aligned}$$

Утверждение 4.2.4 доказано. □

Замечание 4.2.5. а) Если $G_1, \ldots, G_k$ — компоненты графа G, $a_i \in \mathcal{P}(G_i)$, $i \in N_k$, и f — функция, отождествляющая вершины $a_1, \ldots, a_k$, то $f \circ G$ является связным графом, причем $p(f\circ G) = p^*(G)$, $\chi(f\circ G) = \chi(G)$, $q(f\circ G) = q(G)$.

б) Свойство x быть тестом пары (T, G) полностью определяется таблицей T_G и, следовательно, в силу утверждения 2.2.4 выполнено

$$p\,(L^{\min}_{G,n} = a) = p(L^{\min}_{f\circ G,n} = a).$$

Пусть ц — m-раскраска графа G. Если $(T, K_m) \in \mathfrak{T}^{\text{т}}_{K_m,r}$, то $(T\circ \text{ц}, G) \in \mathfrak{T}^{\text{т}}_{G,r}$. Положим $\varphi^{\text{ц}}_{G,x}(T)$ равной 1, если для некоторой T_1 такой, что $(T_1, K_m) \in \mathfrak{T}^{\text{т}}_{K_m,|x|}$, выполнено $\pi_x \circ T = T_1 \circ \text{ц}$, и 0 в противном. Пусть

$$\varphi^{\text{ц}}_{G,n,r} = \sum_{x\in E_r^n} \varphi^{\text{ц}}_{G,x}.$$

Ясно, что $\varphi^{\text{ц}}_{G,x} \leqslant \varphi^{\text{т}}_{G,x}$ и $\varphi^{\text{ц}}_{G,n,r} \leqslant \varphi^{\text{т}}_{G,n,r}$.

Утверждение 4.2.6. *Если* $D \in \mathcal{B}$, $D(n) \mathrel{\textcircled{\scriptsize$\leqslant$}}_n \ln\ln n$, $q(G) \geqslant 1$ *и* $p^*(G) \mathrel{\textcircled{\scriptsize$\leqslant$}}_n \ln n - D(n)$, *то* $L^{\min}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{=}_n]\ln\chi(G)[$.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда граф G связный, т.е. $p(G) = p^*(G)$. Пусть $\mathfrak{c}$ — некоторая $\chi(G)$-раскраска графа G и $r =]\ln\chi(G)[$. Понятно, что

$$\mathtt{M}\varphi^{\mathfrak{c}}_{G,n,r} = |\mathfrak{T}^{\mathtt{T}}_{K_{\chi(G)},r}| \cdot 2^{-r\cdot p^*(G)} \cdot \binom{n}{r} = A^{\chi(G)}_{2^r} \cdot 2^{-r\cdot p^*(G)} \cdot \binom{n}{r} \geqslant$$
$$\geqslant A^{\chi(G)}_{2^r} \cdot 2^{-r\cdot p^*(G)} \cdot \left(\frac{n}{r}\right)^r \circledgeq_n A^{\chi(G)}_{2^r} \cdot 2^{r\cdot D(n)} \cdot r^{-r}.$$

Так как $\chi(G) > 2^{r-1}$, то $A^{\chi(G)}_{2^r} \geqslant A^{2^{r-1}}_{2^r} \geqslant (2^{r-1})^{2^{r-1}}$. Следовательно,

$$\mathtt{M}\varphi^{\mathfrak{c}}_{G,n,r} \circledgeq_n 2^{r\cdot D(n)} \cdot r^{-r}(2^{r-1})^{2^{r-1}} \gg_n 1. \tag{4.19}$$

Далее имеем

$$\mathtt{D}\varphi^{\mathfrak{c}}_{G,n,r} \leqslant \binom{n}{r} A^{\chi(G)}_{2^r} \cdot 2^{-r\cdot p^*(G)} +$$
$$+ \sum_{t=1}^{r-1} \binom{n}{r} \cdot \binom{r}{t} \cdot \binom{n-r}{r-t} \cdot |\mathfrak{T}^{\mathtt{T}}_{K_{\chi(G)},r,t}| \cdot 2^{(t-2r)\cdot p^*(G)}.$$

Согласно утверждению 4.2.4 выполнено

$$|\mathfrak{T}^{\mathtt{T}}_{K_{\chi(G)},r,t}| \leqslant (A^{\chi(G)}_{2^r})^2 \cdot 2^{-t\cdot\chi(G)} \cdot (O(2^{r-t}))^{2^{t-1}}.$$

Так как $\binom{r}{t} \cdot \binom{n-r}{r-t} \leqslant \binom{n}{r} \cdot \left(\frac{r^2}{n}\right)^t$, то для некоторой константы c_1 имеем

$$\mathtt{D}\varphi^{\mathfrak{c}}_{G,n,r} \leqslant \mathtt{M}\varphi^{\mathfrak{c}}_{G,n,r} + \left(\binom{n}{r} \cdot A^{\chi(G)}_{2^r} \cdot 2^{-r\cdot p^*(G)}\right)^2 \times$$
$$\times \sum_{t=1}^{r-1} \left(\frac{r^2}{n}\right)^t \cdot 2^{t(p^*(G)-\chi(G))} \cdot 2^{(r-t+c_1)\cdot 2^{t-1}} =$$
$$= \mathtt{M}\varphi^{\mathfrak{c}}_{G,n,r} + (\mathtt{M}\varphi^{\mathfrak{c}}_{G,n,r})^2 \cdot \sum_{t=1}^{r-1} 2^{t(2\ln r - D(n) - \chi(G))} \cdot 2^{(r-t+c_1)\cdot 2^{t-1}} \leqslant$$
$$\leqslant \mathtt{M}\varphi^{\mathfrak{c}}_{G,n,r} + (\mathtt{M}\varphi^{\mathfrak{c}}_{G,n,r})^2 \cdot 2^{-D(n)} \cdot \sum_{t=1}^{r-1} 2^{t(2\ln r - \chi(G)) + (r-t+c_1)2^{t-1}}. \tag{4.20}$$

Так как $\chi(G) > 2^{r-1}$, то

$$t(2\ln r - \chi(G)) + (r - t + c_1) \cdot 2^{t-1} \leqslant$$

$$\leqslant 2t\ln r - t\cdot 2^{r-1} + (r-t+c_1)\cdot 2^{t-1} =$$
$$= 2t\ln r - 2^{r-1}(t - ((r-t+c_1)/2)2^{t-(r-1)}).$$

Ясно, что для $1 \leqslant t \leqslant r-1$ и некоторой константы c_2 выполнено

$$(1/2)\cdot(r-t+c_1)\cdot 2^{t-(r-1)} \leqslant c_2\cdot t\cdot 2^{(t-r)/2} \ll_r t.$$

Следовательно, так как $2\cdot t\cdot \ln r \ll_r 2^{r-1}$, то для некоторой константы c_3 имеем

$$t(2\ln r - \chi(G)) + (r-t+c_1)2^{t-1} \lessgtr_r -(1/2)\cdot t\cdot 2^{r-1} \leqslant -c_3\cdot 2^r.$$

Таким образом, в силу (4.20), для некоторой константы c_4 имеем

$$\mathtt{D}\varphi^{\mathcal{U}}_{G,n,r} \leqslant \mathtt{M}\varphi^{\mathcal{U}}_{G,n,r} + (\mathtt{M}\varphi^{\mathcal{U}}_{G,n,r})^2 2^{-D(n)}r\cdot 2^{-c_3\cdot 2^r} \leqslant$$
$$\leqslant \mathtt{M}\varphi^{\mathcal{U}}_{G,n,r} + c_4\cdot 2^{-D(n)}\cdot(\mathtt{M}\varphi^{\mathcal{U}}_{G,n,r})^2.$$

В силу (4.19), получаем $\mathtt{D}\varphi^{\mathcal{U}}_{G,n,r} \ll_n (\mathtt{M}\varphi^{\mathcal{U}}_{G,n,r})^2$. Следовательно,

$$\varphi^{\mathcal{U}}_{G,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim_n} \mathtt{M}\varphi^{\mathcal{U}}_{G,n,r} \gg_n 1.$$

В силу замечания 4.2.5 полученный результат будет верным и для графов, не являющихся связными.

Утверждение 4.2.6 доказано. □

Утверждение 4.2.7. *Если* $D\in\mathcal{B}$, $D(n)\lessgtr_n \ln\ln n$ *и* $\ln n - D(n)\lessgtr_n p^*(G)\lessgtr_n \ln n + D(n)$, *то*

$$L^{\min}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{\leqslant_n}]\ln\max(\chi(G), 2\cdot D(n))[.$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда граф G связный, т. е. $p(G) = p^*(G)$. Положим $m = \max(\chi(G),]2\cdot D(n)[)$, $r =]\ln m[$. Пусть $\mathcal{U}$ — некоторая m-раскраска графа G. Как и в предыдущем утверждении имеем

$$\mathtt{M}\varphi^{\mathcal{U}}_{G,n,r} = \binom{n}{r}\cdot 2^{-r\cdot p^*(G)}A^m_{2^r} \geqslant A^m_{2^r}\cdot 2^{-r\cdot p^*(G)}(n/r)^r.$$

Согласно утверждению 4.1.2, имеем $A^m_{2^r} \geqslant 2^{rm}e^{-m^2 2^{-r}} \geqslant 2^{rm}e^{-m}$. Следовательно,

$$\mathtt{M}\varphi^{\mathcal{U}}_{G,n,r} \geqslant 2^{rm}e^{-m}2^{-r\cdot p^*(G)}\cdot(n/r)^r \geqslant 2^{rm}e^{-m}2^{-rD(n)}r^{-r} \geqslant$$
$$\geqslant 2^{rm/2}e^{-m}r^{-r} = 2^{\frac{m}{2}]\ln m[}e^{-m}2^{-]\ln m[\cdot\ln]\ln m[} \gg_n 1. \qquad (4.21)$$

Как и в предыдущем утверждении, имеем

$$\mathtt{D}\varphi^{\text{Ц}}_{G,n,r} \leqslant \mathtt{M}\varphi^{\text{Ц}}_{G,n,r} + \left(\binom{n}{2} 2^{-r\cdot p^*(G)}\right)^2 \cdot \sum_{t=1}^{r-1} \left(\frac{r^2}{n}\right)^t 2^{t\cdot p^*(G)} \cdot |\mathfrak{T}^{\mathtt{T}}_{K_m,r,t}|.$$

Так как

$$|\mathfrak{T}^{\mathtt{T}}_{K_m,r,t}| \leqslant (A^m_{2^r})^2 2^{-tm} (O(2^{r-t}))^{2^{t-1}},$$

то для некоторой константы c_1 имеем

$$\mathtt{D}\varphi^{\text{Ц}}_{G,n,r} \leqslant \mathtt{M}\varphi^{\text{Ц}}_{G,n,r} + (\mathtt{M}\varphi^{\text{Ц}}_{G,n,r})^2 \cdot \sum_{t=1}^{r-1} \left(\frac{r^2}{n}\right)^t \cdot 2^{t(p^*(G)-m)} \cdot 2^{(r-t+c_1)\cdot 2^{t-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \mathtt{M}\varphi^{\text{Ц}}_{G,n,r} + (\mathtt{M}\varphi^{\text{Ц}}_{G,n,r})^2 \cdot \sum_{t=1}^{r-1} 2^{2t\ln r} 2^{t(D(n)-m)} 2^{(r-t+c_1)2^{t-1}} \leqslant$$

$$\leqslant (\mathtt{M}\varphi^{\text{Ц}}_{G,n,r})^2 \left(o_n(1) + \sum_{t=1}^{r-1} 2^{t(2\ln r - m/2) + (r-t+c_1)2^{t-1}}\right). \quad (4.22)$$

Так как $m \geqslant 2^{r-1}$, то

$$t(2\ln r - m/2) + (r-t+c_1)\cdot^{t-1} \leqslant 2t\cdot \ln r - t\cdot 2^{r-2} + (r-t+c_1)\cdot 2^{t-1} =$$
$$= 2t\cdot\ln r - 2^{r-1}\cdot((t/2) - (1/2)(r-t+c_1)\cdot 2^{t-(r-1)}).$$

В предыдущем утверждении было показано, что для некоторой константы c_2 выполнено $(1/2)(r-t+c_1)\cdot 2^{t-(r-1)} \leqslant \leqslant c_2 \cdot t\cdot 2^{(t-r)/2} \ll_r t$. Следовательно, для некоторой c_3 верно

$$t(2\ln r - m/2) + (r-t+c_1)\cdot 2^{t-1} \lesseqqgtr_n -(1/4)\cdot t\cdot 2^{r-1} \leqslant -c_3\cdot 2^r.$$

Таким образом, учитывая (4.22), имеем

$$\mathtt{D}\varphi^{\text{Ц}}_{G,n,r} \lesseqqgtr_n (\mathtt{M}\varphi^{\text{Ц}}_{G,n,r})^2 \cdot r\cdot 2^{-c_3\cdot 2^r} \ll_n (\mathtt{M}\varphi^{\text{Ц}}_{G,n,r})^2.$$

Учитывая (4.21), получаем $\varphi^{\text{Ц}}_{G,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \mathtt{M}\varphi^{\text{Ц}}_{G,n,r} \gg_n 1$.

В силу замечания 4.2.5, полученный результат будет верным и для графов, не являющихся связными.

Утверждение 4.2.7 доказано. □

Утверждение 4.2.8. *Если* $\ln n \lesseqqgtr_n m \lesseqqgtr_n (\ln n)\ln\ln n$, *то*

$$L^{\min}_{K_m,n} \overset{\text{п.в.}}{=}_n]\ln m[.$$

Доказательство. Положим $r =]\ln m[$.

Покажем, что, если $t \geqslant \ln m - (1/2)\ln\ln m$, то

$$(r^2/n)^t e^m \ll_n 1. \tag{4.23}$$

Действительно,

$$\left(\frac{r^2}{n}\right)^t e^m = e^{m-t(\ln n - 2\ln r)} \lesseqgtr_n$$
$$\lesseqgtr_n \exp\left(m - \left(\ln m - \frac{1}{2}\ln\ln m\right)(\ln n - 4\ln\ln m)\right) =$$
$$= e^{\left(\ln m - \frac{1}{2}\ln\ln m\right)\left(\frac{m}{\ln m - \frac{1}{2}\ln\ln m} - \ln n + 4\ln\ln m\right)}.$$

Если $\ln n \lesseqgtr_n m_1 \leqslant m_2$, то

$$m_1/(\ln m_1 - (1/2)\ln\ln m_1) \lesseqgtr_n m_2/(\ln m_2 - (1/2)\ln\ln m_2).$$

Следовательно,

$$\frac{m}{\ln m - \frac{1}{2}\ln\ln m} \lesseqgtr_n \frac{(\ln n)\cdot\ln\ln n}{\ln\ln n + \ln\ln\ln n - \frac{1}{2}\ln\ln((\ln n)\ln\ln n)} \lesseqgtr_n$$
$$\lesseqgtr_n \frac{(\ln n)\ln\ln n}{\ln\ln n - \frac{1}{4}\ln\ln\ln n} \lesseqgtr_n \ln n + \frac{1}{2}\frac{(\ln n)\ln\ln\ln n}{\ln\ln n}.$$

Таким образом,

$$(r^2/n)^t \cdot e^m \lesseqgtr_n \exp\left(\left(\ln m - \frac{1}{2}\ln\ln m\right)\cdot\left(4\ln\ln m - \frac{2\ln n}{\ln\ln n}\right)\right) \lesseqgtr_n$$
$$\lesseqgtr_n e^{-\frac{\ln n}{\ln\ln n}\ln m} \ll_n 1. \tag{4.24}$$

Мы доказали неравенство (4.23). В силу утверждения 4.1.2 имеем

$$\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{T}}_{K_{m,n,r}} = \binom{n}{r}\cdot A^m_{2^r}\cdot 2^{-rm} \geqslant (n/r)^r\cdot 2^{rm}e^{-m}\cdot 2^{-rm} =$$
$$= (n/r)^r\cdot e^{-m} \geqslant ((r^2/n)^r e^m)^{-1}.$$

Так как $r \geqslant \ln m$, то в силу (4.23) получаем

$$\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{T}}_{K_{m,n,r}} \gg_n 1. \tag{4.25}$$

Как и в двух предыдущих утверждениях,

$$\mathtt{D}\varphi^{\mathtt{T}}_{K_{m,n,r}} \leqslant \mathtt{M}\varphi^{\mathtt{T}}_{K_{m,n,r}} + \left(\binom{n}{r}2^{-rm}\right)^2 \sum_{t=1}^{r-1}\left(\frac{r^2}{n}\right)^t\cdot 2^{tm}|\mathfrak{T}^{\mathtt{T}}_{K_{m,r,t}}|.$$

Так как $|\mathfrak{T}^{\mathtt{T}}_{K_m,r,t}| \leqslant A^m_{2^r} 2^{(r-t)m}$, $|\mathfrak{T}^{\mathtt{T}}_{K_m,r,t}| \leqslant (A^m_{2^r})^2 \cdot 2^{-tm}(O(2^{r-t}))^{2^t}$, то для некоторой c_1 верно

$$\mathtt{D}\varphi^{\mathtt{T}}_{K_m,n,r} \leqslant \mathtt{M}\varphi^{\mathtt{T}}_{K_m,n,r} + (\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{T}}_{K_m,n,r})^2 \times \\ \times \left(\sum_{t=1}^{[r-(1/2)\ln\ln m]} \left(\frac{r^2}{n}\right)^t 2^{(r-t+c_1)2^t} + \right. \\ \left. + \sum_{t=[r-(1/2)\ln\ln m]+1}^{r-1} \left(\frac{r^2}{n}\right)^t \cdot 2^{rm}/A^m_{2^r} \right). \quad (4.26)$$

Так как $A^m_{2^r} \geqslant 2^{rm}e^{-m}$, то, в силу (4.24), имеем

$$\sum_{t=[r-(1/2)\ln\ln m]+1}^{r-1} \left(\frac{r^2}{n}\right)^t \cdot 2^{rm}/A^m_{2^r} \leqslant \sum_{t=[r-(1/2)\ln\ln m]+1}^{r-1} \left(\frac{r^2}{n}\right)^t \cdot e^m \lessapprox_n \\ \lessapprox_n r \cdot e^{-\frac{\ln n}{\ln\ln n}\ln m} \leqslant r \cdot e^{-\frac{\ln n}{\ln\ln n} r} \ll_n 1. \quad (4.27)$$

Далее имеем

$$\sum_{t=1}^{[r-(1/2)\ln\ln m]} \left(\frac{r^2}{n}\right)^t 2^{(r-t+c_1)2^t} = \sum_{t=1}^{[r-(1/2)\ln\ln m]} 2^{t\left((r-t+c_1)\frac{2^t}{t} - \ln n + 2\ln r\right)}.$$

Положим $f(x) = (r - x + c_1)2^x/x = (r + c_1)2^x/x - 2^x$. Так как $f'(x) = (\ln 2)((r + c_1)(2^x/x)(1 - 1/x) - 2^x)$, уравнение $f'(x) = 0$ имеет лишь 2 корня:

$$x_1 = ((r + c_1) - \sqrt{(r + c_1)^2 - 4(r = c_1)}\,)/2, \\ x_2 = ((r + c_1) + \sqrt{(r + c_1)^2 - 4(r + c_1)}\,)/2$$

(считаем, что $r \geqslant 4$). Поскольку $(r + c_1 - 4)^2 \leqslant (r + c_1)^2 - 4(r + c_1)$, имеем $1 \leqslant x_1 \leqslant 2$, $x_2 \geqslant r - 2$. На интервале $(1, x_1)$ функция f убывает, а на (x_1, x_2) возрастает. Так как $r - (1/2)\ln\ln m \lessapprox_n x_2$, то

$$\max_{1\leqslant x\leqslant r-(1/2)\ln\ln m} f(x) \lessapprox_n \max(f(1), f(r - (1/2)\ln\ln m)) \lessapprox_n \\ \lessapprox_n f\left(r - \frac{1}{2}\ln\ln m\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\ln\ln m + c_1\right)\cdot 2^r}{\left(\ln m - \frac{1}{2}\ln\ln m\right)\sqrt{\ln m}} \lessapprox_n \frac{2m\cdot\ln\ln m}{(\ln m)\sqrt{\ln m}} \leqslant \\ \leqslant 2(\ln n)(\ln\ln n)(\ln\ln((\ln n)\ln\ln n))/(\ln\ln n)^{3/2} \lessapprox_n (\ln n)(\ln\ln n)^{-\frac{1}{4}}.$$

Следовательно,

$$\sum_{t=1}^{[r-(1/2)\ln\ln m]} \left(\frac{r^2}{n}\right)^t \cdot 2^{(r-t+c_1)\cdot 2^t} \lessgtr_n r \cdot 2^{-\ln n+(\ln n)(\ln\ln n)^{-\frac{1}{4}}+2\ln r} \lessgtr_n$$

$$\lessgtr_n 2^{-(1/2)\ln n} \ll_n 1. \quad (4.28)$$

Учитывая (4.26), (4.27) и (4.28), получаем

$$\mathtt{D}\varphi^{\text{т}}_{K_{m,n,r}} \ll_n (\mathtt{M}\varphi^{\text{т}}_{K_{m,n,r}})^2.$$

Следовательно, в силу (4.25), $\varphi^{\text{т}}_{K_{m,n,r}} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \mathtt{M}\varphi^{\text{т}}_{K_{m,n,r}} \gg_n 1$.

Утверждение 4.2.8 доказано. □

Из данного утверждения и замечания 4.2.5 вытекает утверждение.

Следствие 4.2.9. *Если* $\ln n \lessgtr_n p^*(G) \lessgtr_n (\ln n)\ln\ln n$, *то*

$$L^{\min}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{\leqslant}_n]\ln p^*(G)[.$$

Утверждение 4.2.10. *Если* $\chi(G) \leqslant 2^r$, *то*

$$|\mathfrak{T}^{\text{т}}_{G,r}| \leqslant e^{-\binom{\chi(G)}{2}\cdot 2^{-r}} \cdot |\mathfrak{T}_{G,r}|.$$

Доказательство. Будем доказывать индукцией по $\chi(G)$. Если $\chi(G) = 1$, то $q(G) = 0$ и $|\mathfrak{T}^{\text{т}}_{G,r}| = |\mathfrak{T}_{G,r}| = e^{-\binom{1}{2}2^{-r}}|\mathfrak{T}_{G,r}|$. Пусть неравенство выполняется для $\chi(G) \leqslant t-1$, $t \geqslant 2$. Пусть $\chi(G) = t$ и $ц$ — некоторая t-раскраска графа G. Пусть $\mathcal{P}_1$ — некоторое максимальное множество попарно не смежных вершин, содержащее $ц^{-1}(t)$. Пусть G' — подграф, полученный удалением множества вершин $\mathcal{P}_1$. Ясно, что $\chi(G') = \chi(G) - 1 = t - 1$. Через $\mathfrak{T}^{\text{т},f}_{G,r}$ обозначим множество таких пар (T, G) из $\mathfrak{T}^{\text{т}}_{G,r}$, что $T|_{\mathcal{P}(G')} = f$. Если $\mathfrak{T}^{\text{т},f}_{G,r} \neq \varnothing$, то $(f, G') \in \mathfrak{T}^{\text{т}}_{G',r}$. Для любой (f, G') из $\mathfrak{T}^{\text{т}}_{G',r}$ найдется A, $A \subseteq \mathcal{P}(G')$, такое, что $|A| = |f(A)| = \chi(G') = t - 1$. Так как $\mathcal{P}_1$ — максимальное множество попарно не смежных вершин, то для любой вершины из A найдется смежная с ней вершина из $\mathcal{P}_1$. Следовательно, существует z, $z : A \to \mathcal{P}_1$, такое, что для любой вершины a из A верно, что $\{a, z(a)\} \in X(G)$. Заметим, что если $T \in \mathfrak{T}^{\text{т},f}_{G,r}$, то для любой b из $\mathcal{P}_1$ выполнено $T(b) \notin f(z^{-1}(b))$. Следовательно,

$$|\mathfrak{T}^{\text{T},f}_{G,r}| \leqslant \prod_{b\in\mathcal{P}_1}(2^r - |f(z^{-1}(b))|) = \prod_{b\in\mathcal{P}_1}(2^r - |z^{-1}(b)|) =$$

$$= 2^{r|\mathcal{P}_1|}\prod_{b\in\mathcal{P}_1}(1 - 2^{-r}|z^{-1}(b)|) \leqslant 2^{r|\mathcal{P}_1|}\exp\left(-2^{-r}\cdot\sum_{b\in\mathcal{P}_1}|z^{-1}(b)|\right) =$$

$$= 2^{r\cdot|\mathcal{P}_1|}\exp(-2^{-r}|A|) = 2^{r|\mathcal{P}_1|}e^{-(t-1)2^{-r}}. \quad (4.29)$$

Так как согласно индукционному предположению

$$|\mathfrak{T}^{\text{T}}_{G,r}| \leqslant e^{-\binom{t-1}{2}2^{-r}}2^{r(p(G)-|\mathcal{P}_1|)},$$

то, учитывая (4.29), получаем

$$|\mathfrak{T}^{\text{T}}_{G,r}| \leqslant 2^{r\cdot p(G)}\cdot e^{-\left(t-1+\binom{t-1}{2}\right)2^{-r}} = 2^{r\cdot p(G)}e^{-\binom{t}{2}2^{-r}}.$$

Утверждение 4.2.10 доказано. □

Утверждение 4.2.11. *Если* $\varepsilon\in(0,1)$ *и*

$$2((\ln n)\ln\ln n)^{3/4}\lessgtr_n\chi(G)\lessgtr_n(\ln n)^{\ln\ln n},$$

то

$$L^{\min}_{G,n}\overset{\text{п.в.}}{\geqslant}_n\left[S_1\left(\binom{\chi(G)}{2},n\right)+\varepsilon\right].$$

Доказательство. Положим $r = \left[S_1\left(\binom{\chi(G)}{2},n\right)+\varepsilon\right]-1$. Ясно, что

$$r\leqslant S_1\left(\binom{\chi(G)}{2},n\right)-(1-\varepsilon). \quad (4.30)$$

Согласно предыдущему утверждению $\mathsf{M}\varphi^{\text{T}}_{G,n,r}\leqslant\binom{n}{r}\exp(-\binom{\chi(G)}{2}2^{-r})$. Следовательно, учитывая (4.30), в соответствии с пунктом 1 утверждения 4.1.6, так как

$$((\ln n)\ln\ln n)^{3/2}\lessgtr_n\binom{\chi(G)}{2}\lessgtr_n(\ln n)^{2\ln\ln n},$$

имеем $\mathsf{M}\varphi^{\text{T}}_{G,n,r}\lessgtr_n\binom{n}{r}^{1-2^{(1-\varepsilon)/2}}\ll_n 1$. Следовательно, $\varphi^{\text{T}}_{G,n,r}\overset{\text{п.в.}}{=}_n 0$.

Утверждение 4.2.11 доказано. □

Утверждение 4.2.12. *Если* $\varepsilon\in(0,1)$ *и* $r=\left[S_1\left(2\cdot\binom{m}{2},n\right)+\varepsilon\right]+1$, *то* $\mathsf{M}\varphi^{\text{T}}_{K_m,n,r}\gg_n 1$.

Доказательство. Так как $\mathsf{M}\varphi^{\mathrm{T}}_{K_{m,n,r}} = \binom{n}{r}2^{-rm}A^m_{2^r}$, то согласно утверждению 4.1.2 имеем $\mathsf{M}\varphi^{\mathrm{T}}_{K_{m,n,r}} \geqslant \binom{n}{r}\exp\left(-2\binom{m}{2}\cdot 2^{-r}\right)$. Следовательно, в силу пункта 1 утверждения 4.1.6 получаем $\mathsf{M}\varphi^{\mathrm{T}}_{K_{m,n,r}} \gtrapprox_n \binom{n}{r}^{1-2^{-\varepsilon}} \gg_n 1$.

Утверждение 4.2.12 доказано. □

Утверждение 4.2.13. *Если* $\varepsilon \in (0,1)$,

$$(\ln n)\cdot\ln\ln n \lessapprox_n m \lessapprox_n (\ln n)^{\ln\ln n}, \quad r = \left[S_1\left(2\cdot\binom{m}{2}, n\right) + \varepsilon\right] + 1,$$

то

$$\sum_{t=[(1/2)(1+2^{-\varepsilon})r]+1}^{r-1} \binom{r}{t}\binom{n-r}{r-t}\cdot\left(2^{-rm}\binom{n}{r}A^m_{2^r}\right)^{-1} \ll_n 1.$$

Доказательство. Так как согласно предыдущему утверждению

$$\binom{n}{r}2^{-rm}A^m_{2^r} \gtrapprox_n \binom{n}{r}^{1-2^{-\varepsilon}},$$

и, кроме того, $\binom{r}{t}\binom{n-r}{r-t}/\binom{n}{r} \leqslant (r^2/n)^t$, то сумма, которую мы оцениваем, не превосходит, начиная с некоторого n, величины

$$\sum_{t=[(1/2)(1+2^{-\varepsilon})r]+1}^{r-1} (r^2/n)^t\cdot\binom{n}{r}^{2^{-\varepsilon}} \lessapprox_n r\cdot(r^2/n)^{\frac{1+2^{-\varepsilon}}{2}r}\cdot n^{2^{-\varepsilon}r} =$$

$$= r^{1+(1+2^{-\varepsilon})r} n^{(1/2)(2^{-\varepsilon}-1)r}.$$

Так как $r \lessapprox 2\ln m \lessapprox 2(\ln\ln n)^2$, имеем $r^{1+(1+2^{-\varepsilon})r}n^{(1/2)(2^{-\varepsilon}-1)r} \ll_n 1$.

Утверждение 4.2.13 доказано. □

Утверждение 4.2.14. *Если* $\varepsilon \in (0,1)$,

$$(\ln n)\cdot\ln\ln n \lessapprox_n m \lessapprox_n ((\ln m)\ln n)^{(5+3\cdot 2^{-\varepsilon})/(4(1+2^{-\varepsilon}))},$$

$$r = \left[S_1\left(2\cdot\binom{m}{2}, n\right) + \varepsilon\right] + 1,$$

то

$$D\varphi^{\mathrm{T}}_{K_{m,n,r}} \ll_n \left(M\varphi^{\mathrm{T}}_{K_{m,n,r}}\right)^2.$$

Доказательство. Так как

$$\mathtt{D}\varphi^{\mathtt{T}}_{K_m,n,r} \leqslant \mathtt{M}\varphi^{\mathtt{T}}_{K_m,n,r} + (\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{T}}_{K_m,n,r})^2 \sum_{t=1}^{r} \frac{\binom{r}{t}\binom{n-r}{r-t}}{\binom{n}{r}} 2^{tm} \frac{|\mathfrak{T}^{\mathtt{T}}_{K_m,r,t}|}{(A^m_{2^r})^2}$$

и $|\mathfrak{T}^{\mathtt{T}}_{K_m,r,t}| \leqslant A^m_{2^r} \cdot 2^{(r-t)m}$, а также согласно утверждению 4.2.3 $|\mathfrak{T}^{\mathtt{T}}_{K_m,r,t}| \leqslant (A^m_{2^r})^2 \cdot 2^{-tm}(O(2^{r-t}))^{2^{t-1}}$, то для некоторой константы c_1 имеем

$$\mathtt{D}\varphi^{\mathtt{T}}_{K_m,n,r} \leqslant \mathtt{M}\varphi^{\mathtt{T}}_{K_m,n,r} + (\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{T}}_{K_m,n,r})^2 \left(\sum_{t=1}^{[(1/2)(1+2^{-\varepsilon})r]} (r^2/n)^t (2^{r-t+c_1})^{2^{t-1}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{t=[(1/2)(1+2^{-\varepsilon})r]+1}^{r-1} \left(\binom{r}{t} \cdot \binom{n-r}{r-t} \Big/ \binom{n}{r} \right) 2^{rm}/A^m_{2^r} \right). \quad (4.31)$$

Согласно предыдущему утверждению, имеем

$$\sum_{t=[(1/2)(1+2^{-\varepsilon})r]+1}^{r-1} \left(\binom{r}{t} \cdot \binom{n-r}{r-t} \Big/ \binom{n}{r} \right) \cdot 2^{rm}/A^m_{2^r} \ll_n 1. \quad (4.32)$$

В соответствии с утверждением 4.1.7 имеем

$$r \sim_n (\ln m \cdot (m-1)) \cdot \left(1 - \frac{\ln((\ln m \cdot (m-1)) \ln n)}{\ln m \cdot (m-1)}\right) \sim_n$$

$$\sim_n (\ln m) \cdot \left(2 - \frac{\ln((\ln m) \ln n)}{\ln m}\right).$$

Так как $m \lesseqgtr_n ((\ln m) \ln n)^{(5+3\cdot 2^{-\varepsilon})/(4\cdot(1+2^{-\varepsilon}))}$, то

$$r \lesssim_n (\ln m) \cdot (2 - 4(1+2^{-\varepsilon})/(5+3\cdot 2^{-\varepsilon})) =$$

$$= (\ln m)(6+2\cdot 2^{-\varepsilon})/(5+3\cdot 2^{-\varepsilon}).$$

Так как $\ln m \lesseqgtr_n (\ln\ln m + \ln\ln n)(5+3\cdot 2^{-\varepsilon})/(4\cdot(1+2^{-\varepsilon}))$, то

$$\ln m \lesssim_n (\ln\ln n)(5+3\cdot 2^{-\varepsilon})/(4\cdot(1+2^{-\varepsilon})).$$

Следовательно, $r \lesssim_n (\ln\ln n)(6+2\cdot 2^{-\varepsilon})/(4+4\cdot 2^{-\varepsilon})$, и, далее,

$$(1/2)\cdot(1+2^{-\varepsilon})\cdot r \lesssim_n (\ln\ln n)(6+2\cdot 2^{-\varepsilon})/8 =$$

$$= (\ln\ln n)\cdot(3+2^{-\varepsilon})/4.$$

При доказательстве утверждения 4.2.6 было показано, что для $3 \leqslant r_1 \leqslant r-2$ верно, что $\max\limits_{1\leqslant x\leqslant r_1} (r-x+c_1)\cdot \dfrac{2^x}{x} \leqslant (r-r_1+c_1)\dfrac{2^{r_1}}{r_1}$. Таким образом,

$$\sum_{t=1}^{[(1/2)\cdot(1+2^{-\varepsilon})\cdot r]} \left(\frac{r^2}{n}\right)^t \cdot 2^{(r-t+c_1)\cdot 2^{t-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{t=1}^{[(1+2^{-\varepsilon})\cdot r/2]} 2^{t\left((r-t+c_1)\frac{2^t}{t}-\ln n+2\cdot\ln r\right)} \lessapprox_n$$

$$\lessapprox_n \sum_{t=1}^{[(1+2^{-\varepsilon})\cdot r/2]} 2^{t\left(r\cdot 2^{(1+o_n(1))(\ln\ln n)(3+2^{-\varepsilon})/4}-\ln n+2\cdot\ln r\right)} \lessapprox_n$$

$$\lessapprox_n \sum_{t=1}^{[(1+2^{-\varepsilon})\cdot r/2]} 2^{t\cdot\left((\ln\ln n)\cdot(\ln n)^{(3+2^{-\varepsilon})/4}-\ln n+2\ln\ln\ln n\right)} \ll_n 1.$$

Следовательно, учитывая (4.31) и (4.32) имеем

$$\mathtt{D}\varphi^{\mathrm{T}}_{K_m,n,r} \ll_n (\mathtt{M}\varphi^{\mathrm{T}}_{K_m,n,r})^2.$$

Утверждение 4.2.14 доказано. □

Утверждение 4.2.15. *Если* $\varepsilon\in(0,1)$,

$$((\ln m)\cdot\ln n)^{(5+3\cdot 2^{-\varepsilon})/(4+4\cdot 2^{-\varepsilon})} \lessapprox_n m \lessapprox_n (\ln n)^{\ln\ln n},$$
$$r=\left[S\Big(2\cdot\binom{m}{2},n\Big)+\varepsilon\right]+1$$

и

$$t\leqslant(\ln m)(1+(1/4)(1-2^{-\varepsilon})/(5+3\cdot 2^{-\varepsilon})),$$

то

$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_m,r,t}| \ll_n (A^m_{2^r})^2\cdot 2^{-tm}\cdot\sqrt{n}\,.$$

Доказательство. Через $\mathfrak{T}^{\mathrm{T},1}_{K_m,r,t}$ обозначим множество таких троек (T_1,T_2,K_m) из $\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_m,r,t}$, что для любого a из E^t выполнено

$$|(<T_1,T_2>{}^t)^{-1}(a)| \leqslant m\cdot 2^{-t}\cdot 2^{\frac{1}{2}\frac{1-2^{-\varepsilon}}{5+3\cdot 2^{-\varepsilon}}\ln m}=u(t,m).$$

Число троек (T_1, T_2, K_m) из $\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_m,r,t}$ таких, что для данных a из E^t и U, $U \subseteq \mathcal{P}(K_m)$, выполнено $U \subseteq (< T_1, T_2 >^t)^{-1}(a)$, не превосходит $2^{2(r-t)\cdot|U|} \cdot |\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_{m-|U|},r,t}|$. Так как

$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_m,r,t}| \geqslant |\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_{m-|U|},r,t}| \cdot (2^{2r-t} - 2 \cdot m \cdot 2^{r-t})^{|U|}, \tag{4.33}$$

то получаем

$$\begin{aligned}&|\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_m,r,t} \backslash \mathfrak{T}^{\mathrm{T},1}_{K_m,r,t}| \leqslant \\ &\qquad \leqslant 2^t \cdot \binom{m}{]u(t,m)[} \cdot \frac{\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_m,r,t}}{(2^{2r-t} - 2 \cdot m \cdot 2^{r-t})^{]u(t,m)[}} \cdot 2^{2\cdot(r-t)\cdot]u(t,m)[} = \\ &\qquad\qquad = |\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_m,r,t}| \cdot \binom{m}{]u(t,m)[} \cdot 2^t \cdot \left(\frac{2^{-t}}{1 - 2 \cdot m \cdot 2^{-r}}\right)^{]u(t,m)[}.\end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что при ограничениях утверждения выполняется

$$r \gtrsim_n \frac{6 + 2 \cdot 2^{-\varepsilon}}{5 + 3 \cdot 2^{-\varepsilon}} \ln m = \left(1 + \frac{1 - 2^{-\varepsilon}}{5 + 3 \cdot 2^{-\varepsilon}}\right) \ln m. \tag{4.34}$$

Следовательно, $1 - 2m2^{-r} \sim_n 1$ и для некоторой константы c_1 имеем

$$\begin{aligned}&|\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_m,r,t} \backslash \mathfrak{T}^{\mathrm{T},1}_{K_m,r,t}| \leqslant |\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_m,r,t}| \cdot 2^t \cdot \left(\frac{c_1 \cdot m \cdot 2^{-t}}{]u(t,m)[}\right)^{]u(t,m)[} \lessapprox_n \\ &\qquad \lessapprox_n |\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_m,r,t}| \cdot 2^t \cdot \left(c_1 \cdot 2^{-\frac{1}{2}\frac{1-2^{-\varepsilon}}{5+3\cdot 2^{-\varepsilon}} \ln m}\right)^{u(t,m)} \leqslant \\ &\leqslant |\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_m,r,t}| \cdot 2^{\left(1 + \frac{1}{4}\frac{1-2^{-\varepsilon}}{5+3\cdot 2^{-\varepsilon}}\right)\ln m} \cdot \left(c_1 \cdot 2^{-\frac{1}{2}\frac{1-2^{-\varepsilon}}{5+3\cdot 2^{-\varepsilon}} \ln m}\right)^{u(t,m)} \ll_n |\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_m,r,t}|.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_m,r,t}| \lesssim_n |\mathfrak{T}^{\mathrm{T},1}_{K_m,r,t}|. \tag{4.35}$$

В силу определения $\mathfrak{T}^{\mathrm{T},1}_{K_m,r,t}$, если (T_1, T_2, K_m) из $\mathfrak{T}^{\mathrm{T},1}_{K_m,r,t}$ и $1 \leqslant l \leqslant m$, то число пар (x_1, x_2) из $E^{r,t}$ таких, что $x_1 \notin T_1(U) \vee x_2 \notin T_2(U)$, где $|U| = l$, не превосходит

$$\begin{aligned}&2^{2r-t} - 2l \cdot 2^{r-t} + l \cdot u(t,m) \leqslant \\ &\qquad \leqslant 2^{2r-t}(1 - l \cdot 2^{-r})^2(1 + l \cdot u(t,m)2^{t-2r}/(1 - l \cdot 2^{-r})^2) \lessapprox_n \\ &\qquad\qquad \lessapprox_n 2^{-t}(2^r - l)^2 \cdot \left(1 + 2l \cdot m^{1+\frac{1}{2}\frac{1-2^{-\varepsilon}}{5+3\cdot 2^{-\varepsilon}}} \cdot 2^{-2r}\right) \lessapprox_n\end{aligned}$$

$$\lessgtr_n 2^{-t} \cdot (2^r - l)^2 \cdot \left(1 + 2l \cdot m^{-\frac{1}{2}\frac{1-2^{-\varepsilon}}{5+3\cdot 2^{-\varepsilon}}} \cdot 2^{-r}\right).$$

Следовательно,

$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{T},1}_{K_m,r,t}| \lessgtr_n 2^{-tm} \cdot \prod_{l=0}^{m-1} (2^r - l)^2 \left(1 + 2l \cdot 2^{-r} \cdot m^{-\frac{1}{2}\frac{1-2^{-\varepsilon}}{5+3\cdot 2^{-\varepsilon}}}\right) =$$

$$= 2^{-tm} (A^m_{2^r})^2 \exp\left(2 \cdot \binom{m}{2} \cdot 2^{-r} \cdot m^{-\frac{1}{2}\frac{1-2^{-\varepsilon}}{5+3\cdot 2^{-\varepsilon}}}\right).$$

Согласно утверждению 4.1.6, имеем $\exp\left(2 \cdot \binom{m}{2} \cdot 2^{-r}\right) \lessgtr_n \binom{n}{r}^{2^{-\varepsilon}} \leqslant \leqslant n^{2^{-\varepsilon} r}$. Таким образом, поскольку $r \lesssim_n \ln m$, верно

$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{T},1}_{K_m,r,t}| \lessgtr_n 2^{-tm} \cdot (A^m_{2^r})^2 \exp_n \left(2^{2-\varepsilon} \cdot (\ln m) \cdot m^{-\frac{1}{2}\frac{1-2^{-\varepsilon}}{5+3\cdot 2^{-\varepsilon}}}\right) \ll_n$$

$$\ll_n 2^{-tm} (A^m_{2^r})^2 \sqrt{n}\,.$$

Учитывая (4.35), получаем искомый результат.

Утверждение 4.2.15 доказано. □

Утверждение 4.2.16. *Если* $\varepsilon \in (0, 1)$,

$$((\ln m) \cdot \ln n)^{(5+3\cdot 2^{-\varepsilon})/(4+4\cdot 2^{-\varepsilon})} \lessgtr_n m \lessgtr_n (\ln n)^{\ln\ln n},$$

$$(1 + (1/4)(1 - 2^{-\varepsilon})/(5 + 3 \cdot 2^{-\varepsilon})) \ln m \leqslant t \leqslant (1 + 2^{-\varepsilon}) r/2$$

и

$$r = \left[S\left(2 \cdot \binom{m}{2}, n\right) + \varepsilon\right] + 1,$$

то

$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_m,r,t}| \ll_n (A^m_{2^r})^2 \cdot 2^{-tm} \cdot \sqrt{n}\,.$$

Доказательство. Через $\mathfrak{T}^{\mathrm{T},2}_{K_m,r,t}$ обозначим множество таких троек (T_1, T_2, K_m) из $\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_m,r,t}$, что $| < T_1, T_2 >^t (\mathcal{P}(K_m))| \geqslant m - - v$, где $v = \exp_m(1 - (1/8)(1 - 2^{-\varepsilon})/(5 + 3 \cdot 2^{-\varepsilon}))$. Число троек (T_1, T_2, K_m) из $\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_m,r,t}$ таких, что для данного U, $U \subseteq \mathcal{P}(K_m)$, $|U| = v$, выполнено

$$< T_1, T_2 >^t (U) \subseteq < T_1, T_2 >^t (\mathcal{P}(K_m) \backslash U),$$

не превосходит $|\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_{m-]v[},r,t}| \cdot 2^{2(r-t)]v[} \cdot m^{]v[}$. Учитывая (4.33) из предыдущего утверждения получаем

$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_m,r,t} \backslash \mathfrak{T}^{\mathrm{T},2}_{K_m,r,t}| \leqslant |\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_m,r,t}| \cdot \binom{m}{]v[} \cdot (m \cdot 2^{-t}/(1 - m \cdot 2^{-r}))^{]v[}.$$

Следовательно, в силу (4.34) из предыдущего утверждения для некоторой константы c_1 имеем

$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_m,r,t}\backslash\mathfrak{T}^{\mathrm{T},2}_{K_m,r,t}| \leqslant |\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_m,r,t}| \cdot \left(\frac{c_1 \cdot m^2 \cdot 2^{-t}}{]v[}\right)^{]v[} \lessgtr_n$$

$$\lessgtr_n \left(c_1 m^2 \cdot \frac{\exp_m\Big(-1-\frac{1}{4}(1-2^{-\varepsilon})/(5+3\cdot 2^{-\varepsilon})\Big)}{\exp_m\Big(1-\frac{1}{8}(1-2^{-\varepsilon})/(5+3\cdot 2^{-\varepsilon})\Big)}\right)^{\exp_m\left(1-\frac{1}{8}\frac{1-2^{-\varepsilon}}{5+3\cdot 2^{-\varepsilon}}\right)} \times$$

$$\times|\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_m,r,t}| \lessgtr_n \left(c_1 \cdot m^{-\frac{1}{8}\frac{1-2^{-\varepsilon}}{5+3\cdot 2^{-\varepsilon}}}\right)^{\exp_m\left(1-\frac{1}{8}\frac{1-2^{-\varepsilon}}{5+3\cdot 2^{-\varepsilon}}\right)} \cdot |\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_m,r,t}| \ll_n |\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_m,r,t}|.$$

Таким образом,

$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{K_m,r,t}| \lesssim_n |\mathfrak{T}^{\mathrm{T},2}_{K_m,r,t}|. \tag{4.36}$$

Если $(T_1, T_2, K_m) \in \mathfrak{T}^{\mathrm{T},2}_{K_m,r,t}$ и $1 \leqslant |U| \leqslant m$, то число пар (x_1, x_2) из $E^{r,t}$ таких, что $x_1 \notin T_1(U)$, $x_2 \notin T_2(U)$, не превосходит

$$2^{2r-t} - 2(|U| - v)2^{r-t} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{2r-t}(1 - |U|2^{-r})^2 \cdot (1 + 2v \cdot 2^{-r}/(1 - |U| \cdot 2^{-r})^2) \lessgtr_n$$
$$\lessgtr_n 2^{-t} \cdot (2^r - |U|)^2 \cdot (1 + 4v \cdot 2^{-r}).$$

Следовательно,

$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{T},2}_{K_m,r,t}| \lessgtr_n 2^{-tm}(1 + 4v \cdot 2^{t-2r})^m \cdot \prod_{l=0}^{m-1}(2^r - l)^2 =$$
$$= 2^{-tm} \cdot (A^m_{2^r})^2 \cdot e^{4v\cdot m\cdot 2^{-r}} \lessgtr_n 2^{-tm}(A^m_{2^r})^2 \cdot e^{2\cdot\binom{m}{2}2^{-r}\cdot 4\frac{v}{m-1}}.$$

Так как $\exp(2 \cdot \binom{m}{2} \cdot 2^{-r}) \lessgtr_n \binom{n}{r}^{2^{-\varepsilon}} \leqslant n^{2^{-\varepsilon}\cdot r}$, имеем

$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{T},2}_{K_m,r,t}| \lessgtr_n \exp_n(2^{-\varepsilon} \cdot r \cdot 8 \cdot m^{-\frac{1}{8}\cdot\frac{1-2^{-\varepsilon}}{5+3\cdot 2^{-\varepsilon}}}) \cdot 2^{-tm} \cdot (A^m_{2^r})^2.$$

Так как $r \lessgtr_n 2\ln m$, получаем $|\mathfrak{T}^{\mathrm{T},2}_{K_m,r,t}| \ll_n 2^{-tm}\sqrt{n} \cdot (A^m_{2^r})^2$, откуда в силу (4.36) следует доказываемое неравенство.

Утверждение 4.2.16 доказано. □

Утверждение 4.2.17. *Если* $\varepsilon \in (0, 1)$,

$$((\ln m) \cdot \ln n)^{(5+3\cdot 2^{-\varepsilon})/(4+4\cdot 2^{-\varepsilon})} \lessgtr_n m \lessgtr_n (\ln n)^{\ln\ln n}$$

и
$$r = \left[S\Bigl(2\cdot\binom{m}{2}, n\Bigr) + \varepsilon\right] + 1,$$
то
$$\mathtt{D}\varphi^{\mathtt{T}}_{K_{m,n,r}} \ll_n (\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{T}}_{K_{m,n,r}})^2.$$

Доказательство. Так как
$$\mathtt{D}\varphi^{\mathtt{T}}_{K_{m,n,r}} \leqslant \mathtt{M}\varphi^{\mathtt{T}}_{K_{m,n,r}} + \\ + (\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{T}}_{K_{m,n,r}})^2 \cdot \sum_{t=1}^{r-1} \frac{\binom{r}{t}\binom{n-r}{r-t}}{\binom{n}{r}} \cdot 2^{tm} \cdot |\mathfrak{T}^{\mathtt{T}}_{K_{m,r,t}}|/(A^m_{2^r})^2,$$
то в силу утверждений 4.2.13, 4.2.15 и 4.2.16 имеем
$$\mathtt{D}\varphi^{\mathtt{T}}_{K_{m,n,r}} \leqslant \mathtt{M}\varphi^{\mathtt{T}}_{K_{m,n,r}} + (\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{T}}_{K_{m,n,r}})^2 \cdot \Bigl(o_n(1) + \\ + \sum_{t=1}^{[(1+2^{-\varepsilon})r/2]} (r^2/n)^t \cdot o_n(\sqrt{n}\,)\Bigr) \ll_n (\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{T}}_{K_{m,n,r}})^2.$$

Утверждение 4.2.17 доказано. □

Непосредственно из утверждений 4.2.13, 4.2.14 и 4.2.17 вытекает предложение.

Утверждение 4.2.18. *Если* $\varepsilon \in (0,1)$ *и* $((\ln n)\ln\ln n) \leqslant m \leqslant$ $\leqslant (\ln n)^{\ln\ln n}$, *то* $L^{\min}_{K_{m,n}} \overset{\text{п.в.}}{\leqslant_n} \left[S_1\Bigl(2\cdot\Bigl(\binom{m}{2}\Bigr), n\Bigr) + \varepsilon\right] + 1.$

Учитывая замечание 4.2.5, получаем предложение.

Следствие 4.2.19. *Если* $\varepsilon \in (0,1)$ *и*
$$((\ln n)\ln\ln n) \lessgtr_n p^*(G) \lessgtr_n (\ln n)^{\ln\ln n},$$
то
$$L^{\min}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{\leqslant_n} \left[S_1\Bigl(2\cdot\Bigl(\binom{p^*(G)}{2}\Bigr), n\Bigr) + \varepsilon\right] + 1.$$

4.3. Случай «высоких» таблиц

Утверждение 4.3.1. *Если* $D \in \mathcal{B}$, $D(n) \lessgtr_n \ln\ln n$, $\varepsilon \in (0,1)$ *и* $(\ln n)^{D(n)} \leqslant q(G) \leqslant 2^n/(\ln n)^{D(n)}$, *то*
$$L^{\min}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{\leqslant_n} \left[S\Bigl(\Bigl(q(G), n\Bigr) + \varepsilon\right] + 1.$$

Доказательство. Считаем, что $\delta \in (0, \min(1/16, \delta_1)$, где $5\delta_1 = \widetilde{\psi}(1 - 5\delta_1)$. Ранее были введены (глава 3) функции $\varphi^{\mathrm{T},\delta}_{G,n,x}$ и $\varphi^{\mathrm{T},\delta}_{G,n,r}$. Ясно, что $\varphi^{\mathrm{T},\delta}_{G,n,x} \leqslant \varphi^{\mathrm{T}}_{G,n,x}$, $\varphi^{\mathrm{T},\delta}_{G,n,r} \leqslant \varphi^{\mathrm{T}}_{G,n,r}$. Полагаем $r = \left[S\Big(q(G), n\Big) + \varepsilon\right] + 1$. При наших ограничениях на $q(G)$ в силу утверждения 4.1.5 выполнено $r \sim_n \ln q(G)$. Следовательно, в силу утверждения 2.3.2 имеем $|\mathfrak{T}^{\mathrm{T},\delta}_{G,r}| \gtrsim_n \exp(-q(G) \cdot 2^{-r})|\mathfrak{T}_{G,r}|$ и

$$\mathtt{M}\varphi^{\mathrm{T},\delta}_{G,n,r} \gtrsim_n \binom{n}{r} \exp(-q(G) \cdot 2^{-r}).$$

Тогда, в силу утверждения 4.1.6, имеем $\mathtt{M}\varphi^{\mathrm{T},\delta}_{G,n,r} \gtrsim_n \binom{n}{r}^{1-2^{-\varepsilon/2}} \gg$ $\gg_n 1$. Ясно, что

$$\mathtt{D}\varphi^{\mathrm{T},\delta}_{G,n,r} \leqslant \mathtt{M}\varphi^{\mathrm{T},\delta}_{G,n,r} +$$
$$+ \binom{n}{r} \cdot \sum_{t=1}^{r-1} \binom{r}{t}\binom{n-r}{r-t} \left(|\mathfrak{T}^{\mathrm{T},\delta}_{G,r,t}| \cdot 2^{(t-2r)p(G)} - (|\mathfrak{T}^{\mathrm{T},\delta}_{G,r}| \cdot 2^{-r\cdot p(G)})^2\right).$$

Так как согласно утверждению 2.4.4

$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{T},\delta}_{G,r,t}| \lesssim_n \exp_2((2\cdot r - t)p(G)) \exp(-2 \cdot q(G) \cdot 2^{-r}) \cdot \exp(q(G) \cdot 2^{t-2r}),$$

то имеем

$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{T},\delta}_{G,r,t}| \cdot 2^{(t-2r)p(G)} - (|\mathfrak{T}^{\mathrm{T},\delta}_{G,r}| \cdot 2^{-r\cdot p(G)})^2 \lesssim_n$$
$$\lesssim_n e^{-2\cdot q(G)\cdot 2^{-r}} (e^{q(G)\cdot 2^{t-2r}} - 1 + o_n(1)).$$

Поскольку $\sum_{t=1}^{r-1} \binom{r}{t}\binom{n-r}{r-t} \leqslant \binom{n}{r}$, то

$$\mathtt{D}\varphi^{\mathrm{T},\delta}_{G,n,r} \lesssim_n (\mathtt{M}\varphi^{\mathrm{T},\delta}_{G,n,r})^2 \left(o_n(1) + \sum_{t=1}^{r-1} a_t\right), \tag{4.37}$$

где $a_t = \left(\binom{r}{t} \cdot \binom{n-r}{r-t} / \binom{n}{r}\right)(\exp(q(G) \cdot 2^{t-2r}) - 1)$. Согласно утверждению 4.1.6 имеем $e^{q(G)\cdot 2^{r-2r}} \lesseqgtr_n \binom{n}{r}^{2^{-\varepsilon/2}\cdot 2^{t-r}}$. Положим $b_t =$ $= \left(\binom{r}{t} \cdot \binom{n-r}{r-t} / \binom{n}{r}\right) \cdot \left(\binom{n}{r}^{2^{-\varepsilon/2}\cdot 2^{t-r}} - 1\right)$. Покажем, что

$$\sum_{t=0}^{r} b_t \ll_n 1. \tag{4.38}$$

Рассмотрим случай, когда $r \leqslant n/2$. Пусть $\alpha \in (0,1)$. Если $t \leqslant \leqslant (1-\alpha)r$, то $\binom{n}{r}^{2^{-\varepsilon/2}\cdot 2^{t-r}} - 1 \ll_n 1$, поскольку $\ln\ln\binom{n}{r} \leqslant \ln r + \ln\ln n \ll_n r$, а $r - t \geqslant \alpha r$. Следовательно,

$$\sum_{t=0}^{[(1-\alpha)r]} b_t \ll_n \sum_{t=0}^{[(1-\alpha)r]} \binom{r}{t}\binom{n-r}{r-t} \Big/ \binom{n}{r} \leqslant 1.$$

Согласно утверждению 2.1.11 существует $\alpha_0 \in (0,1)$ такое, что

$$\binom{n}{\alpha_0 \cdot r} \lesseqgtr_n \binom{n}{r}^{(1-2^{-\varepsilon/2})/4}.$$

Тогда

$$\sum_{t=[(1-\alpha_0)r]+1}^{r} b_t \leqslant \sum_{t=[(1-\alpha_0)r]+1}^{r} \binom{r}{r-t}\cdot\binom{n-r}{r-t}\cdot\binom{n}{r}^{2^{-\varepsilon/2}-1} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{t=[(1-\alpha_0)r]+1}^{r} \binom{n}{r-t}^2 \binom{n}{r}^{2^{-\varepsilon/2}-1} \leqslant r\cdot\binom{n}{\alpha_0\cdot r}^2\binom{n}{r}^{2^{-\varepsilon/2}-1} \lesseqgtr_n$$

$$\lesseqgtr_n r\cdot\binom{n}{r}^{((1-2^{-\varepsilon/2})/2)+2^{-\varepsilon/2}-1} = r\cdot\binom{n}{r}^{(2^{-\varepsilon/2}-1)/2} \ll_n 1.$$

Таким образом,

$$\sum_{t=0}^{r} b_t = \sum_{t=0}^{[(1-\alpha_0)r]} b_t + \sum_{t=[(1-\alpha_0)r]+1}^{r} b_t \ll_n 1. \tag{4.39}$$

Пусть теперь $r \geqslant n/2$. Ясно, что

$$b_t = \frac{\binom{n-r}{(n-r)-(r-t)}\binom{r}{r-t}}{\binom{n}{n-r}}\cdot\left(\binom{n}{n-r}^{2^{-\varepsilon/2}\cdot 2^{(n-r)-(r-t)-(n-r)}} - 1\right).$$

Положив $s = (n-r)-(r-t)$, получаем, согласно (4.39), что

$$\sum_{t=0}^{n} b_t = \sum_{s=n-2r}^{n-r} \frac{\binom{n-r}{s}\binom{n-(n-r)}{n-r-s}}{\binom{n}{n-r}}\left(\binom{n}{n-r}^{2^{-\varepsilon/2}\cdot 2^{s-(n-r)}} - 1\right) \ll_n 1,$$

так как $\ln\ln n \ll_n n - r \leqslant n/2$. Таким образом, неравенство (4.38) выполняется. Поскольку $a_t \leqslant b_t$, то в силу (4.37) получаем, что

$$\mathtt{D}\varphi^{\mathtt{T},\delta}_{G,n,r} \ll_n (\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{T},\delta}_{G,n,r})^2,$$

следовательно,

$$\varphi^{\mathtt{T},\delta}_{G,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \mathtt{M}\varphi^{\mathtt{T},\delta}_{G,n,r} \gg_n 1.$$

Утверждение 4.3.1 доказано. □

Утверждение 4.3.2. *Если* $D \in \mathcal{B}$, $D(n) \lesseqgtr_n \ln\ln n$, $\varepsilon \in (0,1)$, $\Delta(G) \geqslant (\ln n)^{D(n)}$ *и* $q(G) \leqslant 2^n/(\ln n)^{D(n)}$, *то* $L^{\min}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{\geqslant}_n [S(\Delta(G),n)+\varepsilon]$.

Доказательство. Положим $r = [S(\Delta(G),n)+\varepsilon]-1$. Согласно утверждению 2.2.1, $|\mathfrak{T}^{\mathtt{T}}_{G,r}| \leqslant \exp(-\Delta(G)2^{-r}) \cdot |\mathfrak{T}_{G,r}|$. Следовательно, $\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{T}}_{G,n,r} \leqslant \binom{n}{r}\exp(-\Delta(G)2^{-r})$. Так как $S(\Delta(G),n) - (1 - \varepsilon) - 1 \leqslant r \leqslant S(\Delta(G),n) - (1-\varepsilon)$, то согласно утверждению 4.1.6 имеем

$$\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{T}}_{G,n,r} \leqslant \binom{n}{r}^{1-2^{(1-\varepsilon)/2}} \ll_n 1.$$

Утверждение 4.3.2 доказано. □

Утверждение 4.3.3. *Если* $\alpha, \varepsilon \in (0,1)$, $D \in \mathcal{B}$, $D(n) \lesseqgtr_n \ln\ln n$, $(\ln n)^{D(n)} \leqslant q(G) \leqslant 2^n/(\ln n)^{D(n)}$ *и*

$$\Delta(G) \leqslant \left(q(G)(\ln q(G))/\ln\binom{n}{\ln q(G)}\right)(1-\alpha),$$

то

$$L^{\min}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{\geqslant}_n [S(q(G),n)+\varepsilon].$$

Доказательство. Положим $r = [S(q(G),n)+\varepsilon]-1$. Ясно, что

$$S(q(G),n) - (1-\varepsilon) - 1 \leqslant r \leqslant S(q(G),n) - (1-\varepsilon).$$

Без ограничения общности можно считать, что $\ln(1+\alpha) \leqslant (1 - \varepsilon)/2$. Так как

$$\begin{aligned}\Delta(G) \lesssim_n (1-\alpha)\cdot \exp_2(S(q(G),n))\cdot(\ln 2)\cdot(\ln q(G) - \\ - \ln\ln\binom{n}{\ln q(G)} - \ln(1+\alpha)) = (1-\alpha^2)\cdot\exp_2(S(q(G),n) - \\ - \ln(1+\alpha))\cdot \ln\exp_2(S(q(G),n)-\ln(1+\alpha)).\end{aligned}$$

Следовательно, в силу замечания 1 из утверждения 2.2.3, имеем

$$\mathrm{Tes}^{]2^{S(q(G),n)-\ln(1+\alpha)}[}(G)]2^{S(q(G),n)-\ln(1+\alpha)}[^{-p(G)} \lesssim_n$$
$$\lesssim_n \exp(-q(G)\cdot 2^{-r_\alpha}), \quad (4.40)$$

где

$$r_\alpha = \ln]\exp_2(S(q(G),n)-\ln(1+\alpha))[=$$
$$= S(q(G),n)-\ln(1+\alpha)+o_n(1) \gtreqless_n r.$$

Так как
$$2^r \lesseqgtr_n]\exp_2(S(q(G),n)-\ln(1+\alpha))[,$$

то, согласно (4.40), получаем
$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{G,r}| \lesssim_n \exp(-q(G)\cdot 2^{-r_\alpha})\cdot|\mathfrak{T}_{G,r}|. \quad (4.41)$$

Так как $r_\alpha \lesseqgtr_n S(q(G),n)-(1/2)\ln(1+\alpha)$, то, в силу утверждения 4.1.6, получаем

$$\exp(-q(G)\cdot 2^{-r_\alpha}) \lesseqgtr_n \binom{n}{r_\alpha}^{-2^{(1/4)\ln(1+\alpha)}}.$$

Так как $r - r_\alpha \asymp 1$, то

$$\exp(-q(G)\cdot 2^{-r_\alpha}) \lesseqgtr_n \binom{n}{r}^{-2^{(1/8)\ln(1+\alpha)}}.$$

Следовательно, учитывая (4.41), имеем

$$\mathtt{M}\varphi^{\mathrm{T}}_{G,n,r} \lesseqgtr_n \binom{n}{r}^{-2^{(1/8)\ln(1+\alpha)}+1} \ll_n 1.$$

Утверждение 4.3.3 доказано. □

Утверждение 4.3.4. *Если* $\varepsilon\in(0,1)$, $\alpha\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $\lambda_\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ — *решение уравнения*

$$\lambda(1-\alpha)+\lambda\ln\lambda+(1-\lambda)\ln(1-\lambda)=0,$$

$D\in\mathcal{B}$, $D(n)\lesseqgtr_n \ln\ln n$ *и* $(\ln n)^{D(n)}\leqslant q(G)\leqslant 2^{\lambda_\alpha n}$, *то*

$$L^{\min}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{\geqslant}_n \left[S\left(q(G)\cdot\frac{(1-2\alpha)\cdot\ln q(G)}{\ln\binom{n}{\ln q(G)}},n\right)+\varepsilon\right].$$

Доказательство. Заметим, что если $0 < x \leqslant \lambda_\alpha$, то $x(1-\alpha) + x\ln x + (1-x)\ln(1-x) \leqslant 0$, $x/\psi(x) \leqslant 1/(1-\alpha)$. Так как в силу утверждения 2.1.1 $\ln\binom{n}{\ln q(G)} \sim_n \psi((\ln q(G))/n)\cdot n$, то

$$\frac{\ln q(G)}{\ln\dbinom{n}{\ln q(G)}} \sim_n \frac{(\ln q(G))/n}{\psi((\ln q(G))/n)} \leqslant \frac{1}{1-\alpha},$$

следовательно,

$$q(G)(1-2\alpha)(\ln q(G))/\ln\binom{n}{\ln q(G)} \lesssim_n q(G)(1-2\alpha)/(1-\alpha). \tag{4.42}$$

Если $\Delta(G) \leqslant q(G)(1-2\alpha)(\ln q(G))/\ln\binom{n}{\ln q(G)}$, то в силу предыдущего утверждения имеем $L^{\min}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{\geqslant}{}_n [S(q(G),n)+\varepsilon]$, откуда и из (4.42) следует искомое неравенство. Если $\Delta(G) \geqslant q(G)(1-2\alpha)(\ln q(G))/\ln\binom{n}{\ln q(G)}$, то в силу утверждения 4.3.2 получаем искомое неравенство.

Утверждение 4.3.4 доказано. □

Утверждение 4.3.5. *Если* $\varepsilon \in (0,1)$, $\alpha \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, $\lambda_\alpha \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$ *— решение уравнения* $\lambda(1-\alpha) + \lambda\ln\lambda + (1-\lambda)\ln(1-\lambda) = 0$, $D \in \mathcal{B}$, $D(n) \gtrless_n \ln\ln n$ *и* $2^{\lambda_\alpha n} \leqslant q(G) \leqslant 2^n/(\ln n)^{D(n)}$, *то* $L^{\min}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{\geqslant}{}_n [S(q(G),n)+\varepsilon]$.

Доказательство. Заметим, что если $\lambda_\alpha \leqslant x \leqslant 1$, то

$$\begin{gathered} x(1-\alpha) + x\ln x + (1-x)\ln(1-x) \geqslant 0, \\ x/\psi(x) \geqslant 1/(1-\alpha) > 1. \end{gathered} \tag{4.43}$$

Так как в силу утверждения 2.1.1

$$\ln\binom{n}{\ln q(G)} \sim_n \psi((\ln q(G))/n)\cdot n,$$

то в силу (4.43)

$$\frac{q(G)\ln q(G)}{\ln\dbinom{n}{\ln q(G)}} \sim_n q(G)\frac{(\ln q(G))/n}{\psi((\ln q(G))/n)} \geqslant \frac{q(G)}{1-\alpha}.$$

Но тогда $\Delta(G) \leqslant q(G) \gtrless_n (1-\alpha/2)q(G)(\ln q(G))/\ln\binom{n}{\ln q(G)}$. Исходя из утверждения 4.3.3, получаем искомое неравенство.

Утверждение 4.3.5 доказано. □

Утверждение 4.3.6. *Если* $\varepsilon \in (0,1)$ *и* $2^n/n \leqslant q(G) \leqslant 2^n \cdot \ln n$, *то*

$$[n - x + \varepsilon] \overset{\text{п.в.}}{\leqslant_n} \widehat{L}^{\min}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{\leqslant_n} [n - x + \varepsilon] + 1,$$

где x, $1 \leqslant x \leqslant 2\ln n$, *такое, что* $q(G) = 2^n \cdot (\ln \binom{n}{x})/(2^x - 1)$.

Доказательство. Если $1 \leqslant x \leqslant 2\ln n$, $q(G) = 2^n \cdot (\ln \binom{n}{x})/(2^x - 1)$, $-2 < \alpha < 2$, то

$$\Delta(G) \leqslant q(G) \lesseqqgtr_n 2^{n-x-\alpha-1}(n - x - \alpha) \cdot \ln 2,$$

так как $2^{-x-\alpha-1}(n - x - \alpha)\ln 2 \gtrless_n (\ln \binom{n}{x})/(2^x - 1)$. Аналогично, $\Delta(G) \leqslant q(G) \leqslant 2^{n-1} \cdot n \cdot \ln 2$. Следовательно, если $|r - (n - x)| \leqslant 2$, то согласно утверждению 2.2.3 имеем

$$\begin{aligned} |\mathfrak{T}^{\text{T}}_{G,r}| &\lesssim_n \exp(-q(G)2^{-r}) \cdot |\mathfrak{T}_{G,r}|, \\ |\mathfrak{T}^{\text{T}}_{G,n}| &\lesssim_n \exp(-q(G)2^{-n}) \cdot |\mathfrak{T}_{G,n}|. \end{aligned} \tag{4.44}$$

Пусть $\delta \in (0, \min(\delta_1, 1/16))$, $5\delta_1 = \widetilde{\psi}(1 - \delta_1)$. Если $|r - (n - x)| \leqslant 2$, то $r \sim_n \ln q(G) \sim_n n$, следовательно, согласно утверждению 2.3.2

$$\begin{aligned} |\mathfrak{T}^{\text{T},\delta}_{G,r}| &\succeq_n \exp(-q(G)2^{-r}) \cdot |\mathfrak{T}_{G,r}|, \\ |\mathfrak{T}^{\text{T},\delta}_{G,n}| &\succeq_n \exp(-q(G)2^{-n}) \cdot |\mathfrak{T}_{G,n}|. \end{aligned} \tag{4.45}$$

Если $2r - n \leqslant t \leqslant r - 1$, то согласно утверждению 2.4.4

$$|\mathfrak{T}^{\text{T},\delta}_{G,r,t}| \lesssim_n e^{-2q(G)\cdot 2^{-r}} \cdot e^{q(G)\cdot 2^{t-2r}} \cdot |\mathfrak{T}_{G,r,t}|. \tag{4.46}$$

Если же $x \in E^n_r$, то

$$\begin{aligned} \mathtt{P}(\widehat{\varphi}^{\text{T}}_{G,n,x} = 1) &= \frac{|\mathfrak{T}^{\text{T}}_{G,r}|/|\mathfrak{T}_{G,r}|}{|\mathfrak{T}^{\text{T}}_{G,n}|/|\mathfrak{T}_{G,n}|}, \\ \mathtt{P}(\widehat{\varphi}^{\text{T},\delta}_{G,n,x} = 1) &= \frac{|\mathfrak{T}^{\text{T},\delta}_{G,r}|/|\mathfrak{T}_{G,r}|}{|\mathfrak{T}^{\text{T}}_{G,n}|/|\mathfrak{T}_{G,n}|}. \end{aligned} \tag{4.47}$$

Если x_1, $x_2 \in E^n_r$, $x_1 \& x_2 \in E^n_t$, то

$$\mathtt{P}(\widehat{\varphi}^{\text{T},\delta}_{G,n,x_1} = 1 \& \widehat{\varphi}^{\text{T},\delta}_{G,n,x_2} = 1) = \frac{|\mathfrak{T}^{\text{T},\delta}_{G,r,t}|/|\mathfrak{T}_{G,r,t}|}{|\mathfrak{T}^{\text{T}}_{G,n}|/|\mathfrak{T}_{G,n}|}. \tag{4.48}$$

Положим $r_1 = [n - x + \varepsilon] - 1$, $r_2 = [n - x + \varepsilon] + 1$, $\alpha_1 = n - x - r_1$, $\alpha_2 = r_2 - n + x$. Ясно, что $1 - \varepsilon \leqslant \alpha_1 \leqslant 2 - \varepsilon$, $\varepsilon \leqslant \alpha_2 \leqslant 1 + \varepsilon$. В силу (4.44), (4.45) и (4.47), получаем

$$\mathtt{M}\widehat{\varphi}^{\text{T}}_{G,n,r_1} \lesssim_n \binom{n}{r_1} e^{-q(G)(2^{-r_1} - 2^{-n})} = \binom{n}{x + \alpha_1} e^{-q(G)\cdot 2^{-n}\cdot(2^{x+\alpha_1} - 1)} =$$

$$= \binom{n}{x+\alpha_1} e^{-(\ln \binom{n}{x}) \frac{2^{x+\alpha_1}-1}{2^x-1}} = \binom{n}{x+\alpha_1} \binom{n}{x}^{-\frac{2^{x+\alpha_1}-1}{2^x-1}}.$$

Так как согласно утверждению 2.1.8 $\binom{n}{x+\alpha_1} \leqslant \binom{n}{x}^{(x+\alpha_1)/x}$, то получаем, что

$$\mathtt{M}\widehat{\varphi}^{\mathtt{T}}_{G,n,r_1} \lesssim_n \binom{n}{x}^{(x+\alpha_1)/x-(2^{x+\alpha_1}-1)/(2^x-1)}.$$

Поскольку $x \geqslant 1$, $\alpha_1 \geqslant 1-\varepsilon$, то

$$\frac{x+\alpha_1}{x} - \frac{2^{x+\alpha_1}-1}{2^x-1} = \frac{x+\alpha_1}{2^x-1}\left(\frac{2^x-1}{x} - \frac{2^{x+\alpha_1}-1}{x+\alpha_1}\right),$$

так как при $a>0$ функция $y=(2^a-1)/a$ строго возрастает. Так как при $a \to +\infty$ предел $(a+\alpha_1)/a-(2^{a+\alpha_1}-1)/(2^a-1)$, равномерно по $\alpha_1 \in [1-\varepsilon, 2-\varepsilon]$ равен $1-2^{\alpha_1} \leqslant 1-2^{1-\varepsilon} < 0$, то

$$\sup_{\substack{a\geqslant 1\\ 1-\varepsilon\leqslant\alpha_1\leqslant 2-\varepsilon}} \left(\frac{a+\alpha_1}{a} - \frac{2^{a+\alpha_1}-1}{2^a-1}\right) = I_1 < 0. \tag{4.49}$$

Следовательно, $\mathtt{M}\widehat{\varphi}^{\mathtt{T}}_{G,n,r_1} \lesssim_n \binom{n}{x}^{I_1} \ll_n 1$, а, значит, $\widehat{L}^{\min}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{\geqslant}_n r_1+1$.

В силу (4.44), (4.45) и (4.47) имеем

$$\mathtt{M}\widehat{\varphi}^{\mathtt{T},\delta}_{G,n,r_2} \succeq_n \binom{n}{r_2} e^{-q(G)(2^{-r_2}-2^{-n})} = \binom{n}{x-\alpha_2}\binom{n}{x}^{-(2^{x-\alpha_2}-1)/(2^x-1)}.$$

Так как согласно утверждению 2.1.8 $\binom{n}{x} \leqslant \binom{n}{x-\alpha_2}^{x/(x-\alpha_2)}$, и, следовательно, $\binom{n}{x-\alpha_2} \geqslant \binom{n}{x}^{(x-\alpha_2)/x}$, то получаем, что

$$\mathtt{M}\widehat{\varphi}^{\mathtt{T},\delta}_{G,n,r_2} \succeq_n \binom{n}{x}^{(x-\alpha_2)/x-(2^{x-\alpha_2}-1)/(2^x-1)}.$$

Заметим, что, если $1+\alpha_2 > x$, то $r_2 \geqslant n$, а, значит, $\widehat{L}^{\min}_{G,n} \leqslant r_2$. Рассмотрим случай, когда $x \geqslant 1+\alpha_2$. Аналогично выводу (4.49) имеем

$$\inf_{\substack{a\geqslant 1+\alpha_2\\ \varepsilon\leqslant\alpha_2\leqslant 1+\varepsilon}} \left(\frac{a-\alpha_2}{a} - \frac{2^{a-\alpha_2}-1}{2^a-1}\right) = I_2 > 0.$$

Следовательно, $\mathtt{M}\widehat{\varphi}^{\mathtt{T},\delta}_{G,n,r_2} \succeq_n \binom{n}{x}^{I_2} \gg_n 1$. Так как согласно (4.47) и (4.48)

$$\mathtt{D}\widehat{\varphi}^{\mathtt{T},\delta}_{G,n,r_2} \lesseqgtr_n \mathtt{M}\widehat{\varphi}^{\mathtt{T},\delta}_{G,n,r_2} +$$

$$+\binom{n}{r_2}\sum_{t=2r_2-n}^{r_2-1}\binom{r_2}{t}\binom{n-r_2}{r_2-t}\times$$

$$\times\left(\frac{|\mathfrak{T}^{\mathtt{T},\delta}_{G,r_2,t}|2^{(t-2r_2)p(G)}}{|\mathfrak{T}^{\mathtt{T}}_{G,n}|2^{-np(G)}}-\left(\frac{|\mathfrak{T}^{\mathtt{T},\delta}_{G,r_2}|2^{-r_2p(G)}}{|\mathfrak{T}^{\mathtt{T}}_{G,n}|2^{-np(G)}}\right)^2\right),$$

то, согласно (4.45) и (4.46), получаем

$$\mathtt{D}\widehat{\varphi}^{\mathtt{T},\delta}_{G,n,r_2}\lesssim_n \mathtt{M}\widehat{\varphi}^{\mathtt{T},\delta}_{G,n,r_2}+\binom{n}{r_2}\sum_{t=2r_2-n}^{r_2-1}\binom{r_2}{t}\binom{n-r_2}{r_2-t}\times$$

$$\times e^{-2q(G)(2^{-r_2}-2^{-n})}\left(o_n(1)+e^{q(G)(2^{t-2r_2}-2^{-n})}-1\right)=$$

$$=\left(\mathtt{M}\widehat{\varphi}^{\mathtt{T},\delta}_{G,n,r_2}\right)^2\cdot(o_n(1)+\sum_{t=2r_2-n}^{r_2-1}\left(\binom{r_2}{t}\binom{n-r_2}{r_2-t}\Big/\binom{n}{r_2}\right)\times$$

$$\times\left(e^{q(G)(2^{t-2r_2}-2^{-n})}-1\right)\Big). \tag{4.50}$$

Далее, имеем

$$\sum_{t=2r_2-n}^{r_2-1}\frac{\binom{r_2}{t}\binom{n-r_2}{r_2-t}}{\binom{n}{r_2}}\left(e^{q(G)(2^{t-2r_2}-2^{-n})}-1\right)=$$

$$=\sum_{l=1}^{x-\alpha_2}\frac{\binom{x-\alpha_2}{l}\binom{n-(x-\alpha_2)}{x-\alpha_2-l}}{\binom{n}{x-\alpha_2}}\left(e^{q(G)2^{-n}(2^l-1)}-1\right)=$$

$$=\sum_{l=1}^{x-\alpha_2}\frac{\binom{x-\alpha_2}{l}\binom{n-(x-\alpha_2)}{x-\alpha_2-l}}{\binom{n}{x-\alpha_2}}\left(\binom{n}{x}^{(2^l-1)/(2^x-1)}-1\right). \tag{4.51}$$

Пусть $x\gtrapprox_n(\ln\ln n)^2$ и $\alpha\in(0,1)$. Если $l\leqslant(1-\alpha)x$, то

$$\binom{n}{x}^{(2^l-1)/(2^x-1)}\leqslant\binom{n}{x}^{(2^{x-\alpha x}-1)/(2^x-1)}\leqslant\binom{n}{x}^{2^{-\alpha x}}\leqslant e^{x2^{-\alpha x}\ln n}\lesssim_n 1,$$

следовательно,

$$\sum_{l=1}^{[x(1-\alpha)]} \frac{\binom{x-\alpha_2}{l}\binom{n-(x-\alpha_2)}{x-\alpha_2-l}}{\binom{n}{x-\alpha_2}} \left(\binom{n}{x}^{\frac{2^l-1}{2^x-1}}-1\right) \ll_n 1. \quad (4.52)$$

Согласно утверждению 2.1.11, существует $\alpha_0 \in (0,1)$ такое, что $\binom{n}{\alpha_0 \cdot x} \lessgtr_n \binom{n}{x}^{\frac{1-2^{-\alpha_2}}{4}}$. Поскольку $\binom{n}{x-\alpha_2} = \binom{n}{x}^{1-o_n(1)}$, то

$$\sum_{l=[x(1-\alpha_0)]+1}^{x-\alpha_2} \frac{\binom{x-\alpha_2}{l}\binom{n-(x-\alpha_2)}{x-\alpha_2-l}}{\binom{n}{x-\alpha_2}} \left(\binom{n}{x}^{\frac{2^l-1}{2^x-1}}-1\right) \lessgtr_n$$

$$\lessgtr_n x \cdot \binom{n}{x}^{2^{-\alpha_2}} \cdot \frac{\binom{n}{x-\alpha_2-x(1-\alpha_0)}}{\binom{n}{x-\alpha_2}} \lessgtr_n$$

$$\lessgtr_n x \cdot \binom{n}{x}^{\frac{1-2^{-\alpha_2}}{2}+2^{-\alpha_2}} \Big/ \binom{n}{x-\alpha_2} \ll_n 1. \quad (4.53)$$

В силу (4.52) и (4.53) получаем

$$\sum_{l=1}^{x-\alpha_2} \frac{\binom{x-\alpha_2}{l}\binom{n-(x-\alpha_2)}{x-\alpha_2-l}}{\binom{n}{x-\alpha_2}} \left(\binom{n}{x}^{\frac{2^l-1}{2^x-1}}-1\right) \ll_n 1. \quad (4.54)$$

Пусть теперь $x \lessgtr_n (\ln\ln n)^2$. Так как

$$\binom{x-\alpha_2}{l}\binom{n-(x-\alpha_2)}{x-\alpha_2-l} \Big/ \binom{n}{x-\alpha_2} \leqslant (x^2/n)^l,$$

то

$$\sum_{l=1}^{x-\alpha_2} \frac{\binom{x-\alpha_2}{l}\binom{n-(x-\alpha_2)}{x-\alpha_2-l}}{\binom{n}{x-\alpha_2}} \left(\binom{n}{x}^{\frac{2^l-1}{2^x-1}} - 1\right) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{x-\alpha_2} \left(\frac{x^2}{n}\right)^l n^{x\cdot\frac{2^l-1}{2^x-1}} \lessgtr_n x^{2x} \cdot \sum_{l=1}^{x-\alpha_2} n^{\frac{x(2^l-1)-l(2^x-1)}{2^x-1}} =$$

$$= n^{o_n(1)} \sum_{l=1}^{x-\alpha_2} n^{\frac{x(2^l-1)-l(2^x-1)}{2^x-1}}. \quad (4.55)$$

Ранее мы предположили, что $x \geqslant \alpha_2 + 1 \geqslant \varepsilon + 1$. Положим $a_l = x(2^l - 1) - l(2^x - 1)$. Так как $a_{l+1} - a_l = x \cdot 2^l - 2^x + 1$, то для $l \leqslant \ln((2^x - 1)/x)$ имеем $a_{l+1} \leqslant a_l$, а для $l \geqslant \ln((2^x - 1)/x)$ имеем $a_{l+1} \geqslant a_l$. Следовательно, для $1 \leqslant l \leqslant x - \alpha_2$ верно, что $a_l \leqslant \max(a_1, a_{x-\alpha_2}) = \max(x - (2^x - 1), x(2^{x-\alpha_2} - 1) - (x - \alpha_2)(2^x - 1))$. Так как $x \geqslant 1 + \varepsilon$, то

$$a_1/(2^x - 1) = x/(2^x - 1) - 1 \leqslant (1 + \varepsilon)/(2^{1+\varepsilon} - 1) - 1 < 0. \quad (4.56)$$

Далее,

$$\frac{a_{x-\alpha_2}}{2^x - 1} = \frac{x(x - \alpha_2)}{2^x - 1}\left(\frac{2^{x-\alpha_2} - 1}{x - \alpha_2} - \frac{2^x - 1}{x}\right).$$

Аналогично выводу (4.49), имеем

$$\sup_{\substack{a\geqslant\alpha_2+1\\ \varepsilon\leqslant\alpha_2\leqslant 1+\varepsilon}} \left(\frac{a(a-\alpha_2)}{2^a - 1}\left(\frac{2^{a-\alpha_2} - 1}{a - \alpha_2} - \frac{2^a - 1}{a}\right)\right) = I_3 < 0.$$

Положим $I_4 = \max(I_3, (1 + \varepsilon)/(2^{1+\varepsilon} - 1) - 1) < 0$. Тогда $a_l/(2^x - 1) \leqslant I_4$, и, следовательно,

$$n^{o_n(1)} \cdot \sum_{l=1}^{x-\alpha_2} n^{\frac{x(2^l-1)-l(2^x-1)}{2^x-1}} \leqslant n^{o_n(1)} \cdot x \cdot n^{I_4} \ll_n 1.$$

Учитывая (4.50), (4.51), (4.54), (4.55) и (4.56), получаем $\mathtt{D}\widehat{\varphi}^{\mathtt{T},\delta}_{G,n,r_2} \ll_n (\mathtt{M}\widehat{\varphi}^{\mathtt{T},\delta}_{G,n,r_2})^2$. Следовательно, $\widehat{\varphi}^{\mathtt{T},\delta}_{G,n,r_2} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \mathtt{M}\widehat{\varphi}^{\mathtt{T},\delta}_{G,n,r_2} \gg \gg_n 1$.

Утверждение 4.3.6 доказано. □

Утверждение 4.3.7. *Если* $2^n \ln n \leqslant q(G) \leqslant 2^n 2 \ln n$, *то* $\widehat{L}^{\min}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{\geqslant}_n n - 1$.

Доказательство. В силу тех же соображений, что были приведены при доказательстве предыдущего утверждения, имеем

$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{G,n-2}| \lesssim_n \exp(-q(G)\cdot 2^{-n+2})\cdot|\mathfrak{T}_{G,n-2}|,$$

и, далее,

$$\mathrm{M}\widehat{\varphi}^{\mathrm{T}}_{G,n-2} \lesssim_n \binom{n}{2}\exp(-q(G)(2^{-n+2}-2^{-n}))\oleq_n$$
$$\oleq_n n^2\exp(-2^n(\ln n)3\cdot 2^{-n}) = n^{-1} \ll_n 1.$$

Утверждение 4.3.7 доказано. □

Утверждение 4.3.8. *Если* $D\in\mathcal{B}$, $D(n)\oleq_n \ln\ln n$ *и* $q(G)\ogeq_n 2^n(\ln n + D(n))$, *то* $\widehat{L}^{\min}_{G,n} \overset{\text{П.В.}}{=}{}_n n$.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $q(G)\oleq_n 2^n(\ln n + D(n))+1$, так как если G_1- подграф G с тем же множеством вершин, то $\widehat{L}^{\min}_{G_1,n}\geqslant\widehat{L}^{\min}_{G,n}$. В силу тех же соображений, что и в утверждении 4.3.6, имеем

$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{G,n-1}| \lesssim_n \exp(-q(G)2^{-n+1})|\mathfrak{T}_{G,n-1}|,$$

и далее

$$\mathrm{M}\widehat{\varphi}^{\mathrm{T}}_{G,n-1} \lesssim_n n\cdot\exp(-q(G)(2^{-n+1}-2^{-n})) =$$
$$= n\cdot\exp(-q(G)2^{-n}) \leqslant n\cdot\exp(-2^n(D(n)+\ln n)2^{-n}) =$$
$$= \exp(-D(n)) \ll_n 1.$$

Утверждение 4.3.8 доказано. □

Нетрудно заметить, что имеет место предложение.

Утверждение 4.3.9. *Если* $\varepsilon\in(0,1)$, $D\in\mathcal{B}$, $D(n)\oleq_n\ln\ln n$, $(\ln n)^{D(n)}\leqslant q(G)\leqslant 2^n/(\ln n)^D(n)$ *и* $q(G)\geqslant(p^*(G))^{1+\varepsilon}$, *то*

$$\Delta(G)\ll_n q(G)(\ln q(G))/\ln\binom{n}{\ln q(G)}.$$

Глава 5

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ТУПИКОВЫХ ТЕСТОВ

Прежде чем сформулировать результаты главы, введем ряд понятий. Назовем *прямоугольной* $m \times n$*-решеткой* декартово произведение $N_{m,n} = N_m \otimes N_n$. Под *таблицей* T, *имеющей* m *строк и* n *столбцов*, будем в этой главе понимать отображение $T : N_{m,n} \to E$, полагая

$$\mathfrak{T}_{m,n} = E^{N_{m,n}}, \qquad \mathfrak{T}^* = \bigcup_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} \mathfrak{T}_{m,n}.$$

Если $T \in \mathfrak{T}_{m,n}$, то через $\widehat{T}$ обозначим таблицу из $\mathfrak{T}_{N_m,n}$ такую, что $(\widehat{T}(k))(l) = T(k,l)$ для любой пары (k,l) из $N_{m,n}$. Набор x назовем *тестом или тупиковым тестом таблицы* T из $\mathfrak{T}_{m,n}$, если он является тестом или, соответственно, тупиковым тестом таблицы $\widehat{T}$. Далее полагаем $\mathcal{L}_{m,n} = (E^m \setminus \{0^m\}) \otimes (E^n \setminus \{0^n\})$. Каждой паре (a,b) из $\mathcal{L}_{m,n}$ соответствует подрешетка $a^{-1}(1) \otimes b^{-1}(1)$ решетки $N_{m,n}$.

Пусть имеется графическое изображение таблицы T из $\mathfrak{T}_{m,n}$ и некоторая пара (a,b) из $\mathcal{L}_{m,n}$. Сотрем все строки, соответствующие нулям набора a, и все столбцы, соответствующие нулям набора b. Мы получили график некоторой таблицы T' из $\mathfrak{T}_{|a|,|b|}$. Эта таблица задается следующей композицией: $T' = T \circ (\eta_a, \eta_b)$, где

$$(T \circ (\eta_a, \eta_b))(i,j) = T(\eta_a(i), \eta_b(j)).$$

Далее будем обозначать: $T^{(a,b)} = T \circ (\eta_a, \eta_b)$, $T_{(a,b)} = T|_{a^{-1}(1)\otimes b^{-1}(1)}$.

Введем понятие теста подтаблицы. Пусть имеется T из $\mathfrak{T}_{m,n}$ и (a,b) из $\mathcal{L}_{m,n}$. Набор x из E^n, $x \leqslant b$, называется *тестом или тупиковым тестом подтаблицы* $T_{(a,b)}$, если набор $x \circ \eta_b$ является тестом или, соответственно, тупиковым тестом таблицы $T^{(a,b)}$. Это определение соответствует графической интерпретации композиций $x \circ \eta_b$ и $T \circ (\eta_a, \eta_b)$.

В первом параграфе этой главы обосновывается целесообразность следующих ниже определений. Под схемой алгоритма фактически понимается оператор, ставящий в соответствие каждой таблице набор ее фрагментов, которые просматривает алгоритм построения тупиковых тестов.

Определение 5.0.1. Пара $A = (\Sigma, F)$, где Σ каждой паре (m, n) натуральных чисел ставит в соответствие множество $\Sigma(m, n)$, $\Sigma(m, n) \subseteq \mathcal{L}_{m,n}$, а F — функция из $E^{\mathfrak{T}^*}$, называется *схемой алгоритма*, если выполнено:

1) $\{1^m\} \otimes (E^n \setminus \{0^n\}) \subseteq \Sigma(m, n)$, $(m, n) \in \mathbb{N}^2$;
2) если $F(T) = 1$, то T — тупиковая тестовая;
3) если $(a, b) \in \Sigma(m, n)$ и x— тупиковый тест подтаблицы $T_{(a,b)}$, то существует c, $c \leqslant a$, такое что $(c, x) \in \Sigma(m, n)$ и $F(T^{(c,x)}) = 1$.

Определение 5.0.2. Схема $A = (\Sigma, F)$ называется *локальной*, если для любой пары (a, b) из $\Sigma(m, n)$ верно: если $c \leqslant a$, $x \leqslant b$, то $(c, x) \in \Sigma(m, n)$ тогда и только тогда, когда $(c \circ \eta_a, x \circ \eta_b) \in \in \Sigma(|a|, |b|)$.

Для таблицы T из $\mathfrak{T}_{m,n}$ и схемы алгоритма $A = (\Sigma, F)$ определим граф $G_A(T)$ с множеством вершин

$$\mathcal{P}_A(T) = \{(a, b) : (a, b) \in \Sigma(m, n), F(T^{(a,b)}) = 1\} \cup \{(0^m, 0^n)\}$$

и множеством ребер $X_A(T)$, состоящим из таких пар вершин $\{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$, что $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$, $|b_2| = |b_1| + 1$; и, если $a_1 < a < a_2$, $(a, b_1) \in \Sigma(m, n)$, то набор b_1 является тупиковым тестом подтаблицы $T(a, b_1)$.

Определение 5.0.3. Схема $A = (\Sigma, F)$ называется *связной*, если для любой таблицы T из $\mathfrak{T}^*$ граф $G_A(T)$ является связным.

Нас будут интересовать вопросы сложности алгоритмов построения тупиковых тестов. Введем два функционала сложности. Если A — схема алгоритма, а $T \in \mathfrak{T}^*$, то $\mu(A, T) = |\mathcal{P}_A(T)|$, а $\mu^*(A, T)$ равно числу таких наборов x, что для некоторого c верно, что $(c, x) \in \mathcal{P}_A(T)$. Если A и B — схемы алгоритмов, то $A \leqslant B$, если для любой таблицы T из $\mathfrak{T}^*$ выполнено $\mu(A, T) \leqslant \mu(B, T)$. Аналогично определяется и неравенство $A \leqslant {}^*B$.

Мы определили класс связных локальных схем алгоритмов. Естественно, встает вопрос об их существовании. Требованиям, сформулированным нами, удовлетворяет, например, алгоритм Е. В. Дюковой. Приведем его схему: $A^* = (\Sigma^*, F^*)$, $\Sigma^*(m, n) = \mathcal{L}_{m,n}$, и $F^*(T) = 1$ тогда и только тогда, когда T — тупиковая тестовая таблица, имеющая одинаковое количество строк и столбцов. Ясно, что схема A^* будет связной и локальной.

Обозначим через $\mathcal{H}$ множество таких функций f из $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, что для любого n выполнено $f(n) \leqslant n$. Пусть $f \in \mathcal{H}$, определим систему наборов $C_f^{k,p}$ из E^*, где $k \in \mathbb{N}$, а $p \in N_k$, причем $C_f^{k,p} \in E^k$. Мы полагаем, что для любого натурального k выполнено

$$1^k = C_f^{k,k} > C_f^{k,k-1} > \cdots > C_f^{k,1} > C_f^{k,0} = 0^k,$$

а для p из N_k верно

$$(C_f^{k,p} - C_f^{k,p-1})(\eta_{C_f^{k,p}}(f(p))) = 1.$$

Легко видеть, что эти условия полностью определяют указанную систему, причем $C_f^{k,p} \in E_p^k$. Теперь определим схему алгоритма $\mathbf{Д}(f) = (\Sigma_{\mathbf{Д}(f)}, F_{\mathbf{Д}(f)})$, где

$$\Sigma_{\mathbf{Д}(f)}(k,n) = \{(C_f^{k,p}, x) : p \in N_k, x \in E^n \setminus \{0^n\}\}$$

и, если $T \in \mathfrak{T}_{k,n}$, то $F_{\mathbf{Д}(f)}(T) = 1$ тогда, когда T — тупиковая тестовая, а $T^{(C_f^{k,k-1}, 1^n)}$ — не тупиковая. Множество всех таких схем обозначим через $\mathbf{Д}(\mathcal{H})$. Во втором параграфе этой главы будет показано, что любая схема из $\mathbf{Д}(\mathcal{H})$ является связной и локальной. Основным результатом этого параграфа является утверждение.

Теорема 5.0.4. *Для любой связной локальной схемы алгоритма A существует функция f из $\mathcal{H}$ такая, что $\mathbf{Д}(f) \leqslant A$ и $\mathbf{Д}(f) \leqslant {}^*A$.*

Заметим, что схемы алгоритмов от $\mathbf{Д}(\mathcal{H})$ попарно эквивалентны с точностью до перестановки строк таблицы. Через $\mathbf{Д}$ будем обозначать схему алгоритма, соответствующую тождественной функции, $\mathbf{Д} = \mathbf{Д}(f_0)$. Ясно, что

$$C_{f_0}^{k,p} = \bigvee_{i=1}^{p} 0_i^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad p \in N_k.$$

Далее мы опишем алгоритм, соответствующий схеме $\mathbf{Д}$.

Если S — некоторый набор (отображение) из $N_n^{N_l}$, то через $\widetilde{S}$ обозначим набор из E^n такой, что $\widetilde{S}^{-1}(1) = S(N_l)$. Пусть имеется T из $\mathfrak{T}_{m,n}$. Если $(C_{f_0}^{m,p}, x)$ — вершина дерева $G_{\mathbf{Д}}(T)$ (в параграфе 5.2 показано, что для любой f из $\mathcal{H}$ и T из $\mathfrak{T}^*$ граф $G_{\mathbf{Д}(f)}(T)$ является деревом) отличная от $(0^m, 0^n)$, то ей можно поставить в соответствие пару наборов (K, S), где $S \in N_n^{N_{|x|}}$, $K \in N_m^{N_{|x|}}$, таких, что $(\widetilde{K}, \widetilde{S}) = (C_{f_0}^{m,p}, x)$, $(\widetilde{K|_{N_i}}, \widetilde{S|_{N_i}}) \in \mathcal{P}_{\mathbf{Д}}(T)$, для $i = 1, \cdots, |x|$, и кроме того вершины $(\widetilde{K|_{N_i}}, \widetilde{S|_{N_i}})$ и $(\widetilde{K|_{N_{i+1}}}, \widetilde{S|_{N_{i+1}}})$ смежны для $i = 1, \cdots, |x| - 1$.

Текущими параметрами алгоритма в «момент времени» t будет являться пятерка (t, K_t, S_t, l_t, A_t), где пара наборов (K_t, S_t), $K_t \in N_m^{N_{l_t}}$, $S_t \in N_n^{N_{l_t}}$, обладает указанными свойствами для одной из вершин $G_{\mathbf{Д}}(T)$; A_t — таблица из $\mathfrak{T}_{l_t,n}$, которая строится специальным образом в процессе работы алгоритма. Теперь приведем описание работы **Д**-алгоритма на таблице T из $\mathfrak{T}_{m,n}$.

1) Если $\widehat{T}(1) = 1^n$, то T не имеет тестов, перейти к 6). В противном случае перейти к 2).
2) Положить $t = 1$, $l_t = 1$, $K_t(1) = 1$, $\widehat{A}(1) = \widehat{T}(1) \oplus 1^n$, $S_t(1) = \min(\widehat{T}(1))^{-1}(0)$. Перейти к 3).
3) Пусть $\mathcal{E} = (\widehat{T}^{(1^m, \widetilde{S}_t)})^{-1}(1^{l_t})$. Проверить условие $\mathcal{E} = 0$. Если оно выполнено, то $\widetilde{S}_t$ — тупиковый тест, перейти к 5). В противном случае перейти к 4).
4) Положить $k = \min \mathcal{E}$; для $i \in N_{l_t}$ положить
$$\mathcal{E}_i = (\widehat{T}^{(C_{f_0}^{m,k}, \widetilde{S}_t)})^{-1}(1_i^{l_t}),$$
$$y = \left(\bigwedge_{i=1}^{l_t} \left(\bigvee_{r \in \mathcal{E}_i} \widehat{T}(r) \right) \right) \bigwedge \left(\widehat{T}(k) \oplus 1^n \right).$$
Если $y = 0^n$, перейти к 5). В противном случае увеличить t на 1 и положить $l_t = l_{t-1} + 1$, $\widehat{A}_t(l_t) = y$, $(K_t, S_t, A_t)|_{N_{l_{t-1}}} = (K_{t-1}, S_{t-1}, A_{t-1})$, $S_t(l_t) = \min y^{-1}(1)$, $K_t(l_t) = k$. Перейти к 3).
5) Если не существует r такого, что
$$C_r = (\widehat{A}_t(r))^{-1}(1) \cap (N_n \setminus N_{S_t(r)}) \neq \varnothing,$$
то перейти к 6). В противном случае положить $j_0 = \min C_{r_0}$, где $r_0 = \min\{r : C_r \neq \varnothing\}$. Увеличить t на 1 и положить $S_t|_{N_{r_0-1}} = S_{t-1}|_{N_{r_0-1}}$, $S_t(r_0) = j_0$, $l_t = r_0$, $(K_t, A_t) = (K_{t-1}, A_{t-1})|_{N_{r_0}}$. Перейти к 3).
6) Закончить работу.

Пусть имеется граф G и π — нумерация его ребер, т. е. взаимнооднозначное отображение $X(G)$ на $N_{q(G)}$. Под алгоритмом построения тупиковых тестов пар (T, G) из $\mathfrak{T}_{G,n}$ мы будем понимать пару (A, π), где π указанная нумерация, а A — алгоритм построения тупиковых тестов для таблиц из $\mathfrak{T}_{q(G),n}$. Эта пара работает следующим образом: сначала получаем из пары (T, G) таблицу τ из $\mathfrak{T}_{q(G),n}$ такую, что $\widehat{\tau} = T_G \circ \pi^{-1}$, а затем применяем к τ алгоритм A. Сложность работы пары (A, π) естественно определить следующим образом:

$$\mu((A,\pi),(T,G)) = \mu(A, T_G \circ \pi^{-1}),$$
$$\mu^*((A,\pi),(T,G)) = \mu^*(A, T_G \circ \pi^{-1}).$$

(Мы не отличаем алгоритм от его схемы и T от $\widehat{T}$.)

Непосредственно из утверждения 5.3.3 параграфа 5.3 вытекает утверждение.

Теорема 5.0.5. *Если каждому графу G поставить в соответствие нумерацию его ребер π_G, $D \in \mathcal{B}$, $D(n) \lesseqgtr_n \ln\ln n$ и $1 \leqslant q(G) \lesseqgtr_n 2^{(\ln^2 n)/D(n)}$, то*

$$\mu((\text{Д}, \pi_G),(T,G)) = \mu^*((\text{Д}, \pi_G),(T,G)) \overset{\text{п.в.}}{\lesssim}_n \varphi^{\text{ТТ}}_{G,n}.$$

5.1. Связные локальные алгоритмы

При рассмотрении задачи построения тупиковых тестов по таблице сравнения сразу же возникает алгоритм перебора всех наборов столбцов в каком-либо порядке, скажем, лексикографическом, и проверке на каждом шаге, является выбранный набор столбцов тупиковым тестом или нет. Однако этот логически самый простой алгоритм имеет слишком большую сложность, чтобы его можно было использовать. Поэтому естественно проверять не все наборы столбцов, а лишь, в некотором смысле, «подозрительные» на тупиковость. Первым шагом этого направления уменьшения сложности алгоритма является модификация полного перебора, в процессе которого после просмотра данного набора столбцов в зависимости от того, является ли он не тупиковым тестом, тупиковым тестом или не тестом, отбрасывается часть наборов столбцов, как заведомо не являющиеся тупиковыми тестами. Если набор является не тупиковым тестом, то отбрасываются все объемлющие его наборы, если не тестом — то все поднаборы, а если тупиковым тестом, то и те и другие. В приведенном алгоритме, однако, производится, скорее не выделение «подозрительных», а отбрасывание некоторой части «неподозрительных» наборов столбцов.

Остановимся на самом понятии «подозрительности». Что можно понимать под этим? Необходимо, чтобы множество «подозрительных» наборов по возможности мало отличалось от множества тупиковых тестов, и, в то же время, их последовательный выбор был достаточно простым, т. е. чтобы при построении «подозрительных» наборов нам не пришлось фактически осуществлять перебор всех наборов. Этой цели мы достигнем, если «время» построения следующего «подозрительного» набора будет мало́ по сравнению с «временем» проверки набора на тупиковую тестовость и множество «подозрительных» наборов будет ма́ло отличаться от множества тупиковых тестов.

Следующее естественное требование, которое нужно предъявлять к алгоритму, состоит в том, что информация, полученная при построении и просмотре данного «подозрительного» набора, не должна теряться, а, по возможности, более полно использоваться при выявлении «подозрительности» и проверке на тупиковую тестовость наборов столбцов, имеющих с ним непустое пересечение.

Поскольку «время» проверки наличия какого-либо свойства таблицы сравнения явно коррелирует с величиной ее фрагмента, который надо просмотреть для этого, требование относительно небольшого построения следующего «подозрительного» набора можно заменить требованием, чтобы нужная нам информация содержалась в небольшом фрагменте таблицы.

Естественно полагать, что «подозрительность» набора зависит только от столбцов, в него входящих.

Изложенное приводит нас к точке зрения, что наиболее целесообразно «подозрительность» набора столбцов рассматривать как наличие подтаблицы, состоящей из этих столбцов и некоторых строк, и обладающей определенными свойствами, а процесс работы алгоритма суть последовательное построение этих подтаблиц и проверка на каждом шаге, является ли соответствующий набор столбцов тупиковым тестом.

Ясно, что если некоторая подтаблица выражает «подозрительность» своего набора столбцов, то она должна являться тестовой. Однако тестовости явно недостаточно, чтобы обеспечить небольшое отличие множества «подозрительных» наборов от множества тупиковых тестов, хотя бы потому, что следует ожидать, что число тестов таблицы много больше, чем число ее тупиковых тестов. В этом плане кажется необходимым, чтобы подтаблица, определяющая «подозрительность», была тупиковой тестовой. С одной стороны, это дает нам, так сказать, «максимум производительности», а с другой стороны, как мы увидим из конкретных примеров, допускает достаточно простое последовательное построение таких подтаблиц.

Таким образом, мы пришли к выводу, что элементарный шаг «хорошего» алгоритма нахождения тупиковых тестов суть построение следующей тупиковой тестовой подтаблицы из некоторого заранее заданного класса, и проверка, является ли соответствующий ей набор столбцов тестом всей таблицы. Каждой паре (m, n) натуральных чисел можно поставить в соответствие множество пар (a, b) из $\mathcal{L}_{m,n}$ таких, что существует таблица T из $\mathfrak{T}_{m,n}$, такая, что алгоритм A строит на некотором шаге подтаблицу $T(a, b)$. Обозначим его через $Z_A(m, n)$.

Конкретизируем термин «алгоритм строит тупиковую тестовую подтаблицу». Во-первых, строить в прямом смысле нам подтаблицу не надо, она уже существует. Поэтому этот термин, как нам кажется, не может означать ничего, кроме: данная подтаблица $T(a, b)$ была просмотрена в ходе работы алгоритма и на основе информации, полученной в ходе просмотра, было принято решение, что набор b является «подозрительным» и необходимо просмотреть строки подтаблицы $T(1^m - a, b)$ для проверки набора b на тестовость. Такая интерпретация приводит нас к выводу, что факт, строит или не строит алгоритм A подтаблицу $T(a, b)$, зависит лишь от нее самой, т. е. от таблицы $T^{(a,b)}$ и, быть может, пары (a, b), ибо, в противном случае, для принятия решения о «подозрительности» набора b должна быть просмотрена, т. е. построена, более широкая подтаблица, чем $T(a, b)$.

Пусть теперь $(a, b) \in Z_A(m, n)$, а подтаблица $T(a, b)$ является тестовой, но не строится алгоритмом A. На основании чего могло быть принято решение не просматривать ее для выявления «подозрительности» набора b? Ранее нами была отмечена необходимость возможно более полного использования информации, полученной при проверке «подозрительности» и последующем просмотре какого-либо набора столбцов для выявления «подозрительности» и тупиковой тестовости других наборов столбцов. Поэтому естественно считать, что упомянутое решение должно было быть принято на основе просмотра некоторого фрагмента подтаблицы $T(a, b)$. При этом логически возможным представляются лишь два случая: $T(a, b)$ — тупиковая тестовая, и на основе просмотра некоторой $T(a', b)$, $a' < a$, был сделан вывод о «подозрительности» набора b; $T(a, b)$ — не тупиковая, на основе просмотра некоторой $T(a', b')$, $a' \leqslant a$, $b' < b$, был сделан вывод о «подозрительности» набора b' и было выяснено, что b' — тупиковый тест подтаблицы $T(a, b)$. В первом случае был построен тупиковый тест b подтаблицы $T(a, b)$, во втором случае — тупиковый тест b'. Причем следует заметить, что при вариации T в качестве b' может возникнуть любой набор, меньший b, но больший 0^n. Таким образом, наш алгоритм строит некоторое непустое множество тупиковых тестов подтаблицы $T_{(a,b)}$. Из соображений простоты следует предположить, что это множество устроено не экзотически, а представляет собой множество всех тупиковых тестов подтаблицы $T_{(a,b)}$. В пользу такого подхода говорит следующее соображение: зафиксируем фрагмент $T_{(a,b)}$ и будем варьировать $T_{(1^m-a,b)}$ так, чтобы множество тупиковых тестов $T_{(1^m,b)}$ совпадало с множеством тупиковых тестов $T_{(a,b)}$, и, кроме того, если c — тупиковый тест и $c_1 < c$, $|c_1| = |c| - 1$, то c_1 — тест подтаблицы $T_{(1^m-a,b)}$. Тогда если $T_{(g,c)}$ тупиковая тестовая подтаблица, определяющая «подозрительность» c, то подтаблица $T_{(g\&a,c)}$ также является тупиковой тестовой, причем вся полезная информация встречается именно в ней, а «хвост» $T_{(g\&(\neg a),c)}$ информации о подозрительности c не несет. То есть, просмотр $T_{(g,c)}$ сводится к просмотру $T_{(g\&a,c)}$ и позволяет нам заключить о «подозрительности» c на тупиковый тест $T_{(a,b)}$, а так как проверка c на тестовость для T включает в себя и проверку c на тестовость для $T_{(a,b)}$, можно заключить, что алгоритм строит c как тупиковый тест $T_{(a,b)}$.

Обозначим через $\Sigma_A(m,n)$, $\Sigma_A(m,n) \subseteq \mathcal{L}_{m,n}$, множество таких пар (a,b), что для любой таблицы T из $\mathfrak{T}_{m,n}$ алгоритм A строит все тупиковые тесты подтаблицы $T_{(a,b)}$. Нами была показана необходимость того, чтобы для «хорошего» алгоритма выполнялось $Z_A(m,n) \lesssim \Sigma_A(m,n)$. Ранее было отмечено, что факт построения или непостроения алгоритмом A подтаблицы $T_{(a,b)}$, где $(a,b) \in Z_A(m,n)$, зависит лишь от таблицы $T^{(a,b)}$ и, быть может, самой пары (a,b). Перефразируя это, мы можем сказать, что факт построения или непостроения подтаблицы $T_{(a,b)}$, где $(a,b) \in \Sigma(m,n)$, зависит лишь от нее самой и, быть может, от пары (a,b).

Остановимся на этом «быть может». Необходимость возможно более простых правил построения подтаблиц позволяет нам сделать допущение, что указанный выше факт зависит лишь от принадлежности пары (a,b) множеству $\Sigma_A(m,n)$ и таблицы $T^{(a,b)}$.

Отметим, что $\Sigma_A(m,n)$ обязательно должно включать все пары из $\{1^m\} \otimes (E^n \setminus \{0^n\})$, так как любой тупиковый тест подтаблицы $T_{(1^m,b)}$ является тупиковым тестом таблицы T.

Приведенных выше рассуждений нам кажется достаточным для того, чтобы сформулировать определение 5.0.1.

Пусть $(a,b) \in \Sigma_A(m,n)$. Алгоритм A строит все тупиковые тесты подтаблицы $T_{(a,b)}$.

Его работа на подтаблице определяется лишь ею самой, а фрагмент $T|_{N_{m,n} \setminus (a^{-1}(1) \otimes b^{-1}(1))}$ никакого влияния на эту работу не оказывает. То есть, фактически ограничение работы алгоритма на $T_{(a,b)}$ есть обработка таблицы $T^{(a,b)}$. Поэтому естественно выдвинуть требование, чтобы работа алгоритма на $T_{(a,b)}$ проходила точно так же, как он обрабатывает $T^{(a,b)}$. Это свойство выражает определение 5.0.2.

Ранее нами была отмечена необходимость по возможности более полного использования информации, полученной при просмотрах подтаблиц, и максимальной простоты построения подтаблиц. Нам кажется, этого можно достичь, если текущая тупиковая тестовая подтаблица строится из некоторой уже ранее построенной путем добавления к ней столбца и некоторого количества строк. Это свойство наиболее точно сформулировано в определении 5.0.3.

5.2. Минимизация сложности в классе связных локальных схем алгоритмов

Утверждение 5.2.1. *Если $f \in \mathcal{H}$, то $\mathbf{Д}(f)$ — связная локальная схема и для любой T из $\mathfrak{T}^*$ граф $G_{\mathbf{Д}(f)}(T)$ является деревом.*

Доказательство. Заметим, что, если $k_1 \geqslant k_2 \geqslant k_3 \geqslant 0$, то

$$C_f^{k_1,k_3} \circ \eta_{C_f^{k_1,k_2}} = C_f^{k_2,k_3}. \tag{5.1}$$

Пусть $(C_f^{k,p}, x) \in \Sigma_{\mathbf{Д}(f)}(k,n)$, тогда если $(a,y) \in \Sigma_{\mathbf{Д}(f)}(k,n)$ и $a \leqslant C_f^{k,p}$, $y \leqslant x$, то $a = C_f^{k,p_1}$, $p_1 \leqslant p$. И далее, в силу (5.1), имеем

$$(a \circ \eta_{C_f^{k,p}}, y \circ \eta_x) = (C_f^{p,p_1}, y \circ \eta_x) \in \Sigma_{\mathbf{Д}(f)}(p, |x|).$$

Если $(C_f^{p,p_1}, z) \in \Sigma_{\mathbf{Д}(f)}(p,|x|)$, то существует $y \in E^n$, такой, что $z = y \circ \eta_x$, и, следовательно, $(C_f^{p,p_1}, z) = (C_f^{k,p_1} \circ \eta_{C_f^{k,p}}, y \circ \eta_x)$. Но $(C_f^{k,p_1}, y) \in \Sigma_{\mathbf{Д}(f)}(k,n)$. Таким образом, схема $\mathbf{Д}(f)$ — локальная.

Пусть $F_{\mathbf{Д}(f)}(T^{(C_f^{k,p},x)}) = 1$. Покажем, что тогда существует и, при том единственная пара, (C_f^{k,p_1}, y) из $\Sigma_{\mathbf{Д}(f)}(k,n) \cup \{0^k, 0^n\}$ такая, что $p_1 < p$, $y < x$, $|y| = |x| - 1$; и y — тупиковый тест $T_{(C_f^{k,p-1},y)}$. Заметим, что $|x| \leqslant p$. Если $|x| = 1$, то эта пара $(0^k, 0^n)$. Пусть $|x| \geqslant 2$. В силу определения $F_{\mathbf{Д}(f)}$ существует i из $N_{|x|}$ такое, что

$$f(p) = \left(T^{(C_f^{k,p},x)}\right)^{-1} (1_i^{|x|}). \tag{5.2}$$

Положим $y = x \& 1^n_{\eta_x(i)}$. Ясно, что $|y| = |x| - 1$, $y \circ \eta_x = 1_i^{|x|}$ и y является тупиковым тестом (в силу (5.2)) подтаблицы $T_{(C_f^{k,p-1},y)}$

и тестом любой из подтаблиц $T_{(C_f^{k,l},y)}$, $1 \leqslant l \leqslant p-2$. Выберем наименьшее l, такое, что y является тупиковым тестом $T_{(C_f^{k,l},y)}$. Тогда $F_{\text{Д}(f)}(T^{(C_f^{k,l},y)}) = 1$. Теперь остается лишь заметить, что, если $|y_1| = |y|$, $y_1 \neq y$, $y_1 < x$, то подтаблица $T_{(C_f^{k,p-1},y_1)}$ не является даже тестовой, поскольку $y_1 \circ \eta_x \in \widetilde{\mathcal{E}}^{|x|}$ и $y_1 \circ \eta_x \neq 1_i^{|x|}$. В силу указанного факта мы получаем, что $G_{\text{Д}(f)}(T)$ является связным ациклическим графом, т. е. деревом.

Утверждение 5.2.1 доказано. $\square$

Далее мы выявим некоторые свойства, присущие связным локальным алгоритмам.

Пусть $A = (\Sigma, F)$ — схема алгоритма, через σ_Σ обозначим отображение, ставящее в соответствие натуральному числу m множество $\sigma_\Sigma(m)$, $\sigma_\Sigma(m) \subseteq E^m \setminus \{0^m\}$, такое, что $a \in \sigma_\Sigma(m)$ тогда и только тогда, когда существует n и x из $E^n \setminus \{0^n\}$ такое, что $(a, x) \in \Sigma(m, n)$. Положим $\Sigma(m, n, a) = \{x : (a, x) \in \Sigma(m, n)\}$. Будем полагать, что для любого натурального n выполнено $n < \infty$, $n \leqslant \infty$.

Утверждение 5.2.2. *Если $A = (\Sigma, F)$ — локальная схема, то для любого натурального m существует $l_{\Sigma,m}$ из $(\mathbb{N} \cup \cup \{\infty\})^{\sigma_\Sigma(m)}$ такое, что при $a \in \sigma_\Sigma(m)$ для любого натурального n выполнено*

$$\Sigma(m, n, a) = \{x : x \in E^n \setminus \{0^n\}, |x| \leqslant l_{\Sigma,m}(a)\}.$$

Доказательство. Пусть (a, x) из $\Sigma(m, n)$, тогда $(a, 1^{|x|}) \in \in \Sigma(m, |x|)$ и, следовательно, если $a \otimes (E^{|x|} \setminus \{0^{|x|}\}) \subseteq \Sigma(m, n)$. Но тогда для любого k из $N_{|x|}$ верно, что $(a, 1^k) \in \Sigma(m, k)$ и, следовательно, если $|y| \in N_{|x|}$, $y \in E^s$, то $(a, y) \in \Sigma(m, s)$. Из доказанного факта непосредственно вытекает существование $l_{\Sigma,m}$.

Утверждение 5.2.2 доказано. $\square$

Утверждение 5.2.3. *Если $A = (\Sigma, F)$ — связная локальная схема, то для любого m существует такая функция f из $\mathcal{H}$, что выполнено*

$$l_{\Sigma,m}(C_f^{m,i}) \geqslant i, \qquad i = 1, \cdots, m.$$

Доказательство. Проведем индукцией по m. Если $m = 1$, то $l_{\Sigma,m} = \infty$ и неравенство верно для $f \equiv 1$. Пусть утверждение верно для $m \leqslant k-1$. Покажем, что тогда оно верно для $m = k$.

Пусть T — тупиковая тестовая таблица из $\mathfrak{T}_{m,m}$. Так как граф $G_A(T)$ — связный, то существует i из N_m и a из E^m такие, что $(a, 1_i^m) \in \Sigma(m,m)$, и $T_{(a,1_i^m)}$ — тупиковая тестовая. Так как T — квадратная тупиковая тестовая таблица, то необходимо, чтобы $|a| = m-1$, т.е. для некоторого j из N_m верно, что $a = 1_j^m$. Таким образом, $(1_i^m, 1_j^m) \in \Sigma(m,m)$ и, следовательно,

$$l_{\Sigma,m}(1_j^m) \geqslant m-1. \tag{5.3}$$

Пусть f — функция из $\mathcal{H}$, соответствующая $(m-1)$ согласно индукционному предположению. Положим $g(m) = j$, $g|_{\mathbb{N}\setminus\{m\}} = f|_{\mathbb{N}\setminus\{m\}}$. Ясно, что $g \in \mathcal{H}$. Так как $C_g^{m,m} = 1^m$, $C_g^{m,m-1} = 1_j^m$, то

$$l_{\Sigma,m}(C_g^{m,k}) \geqslant k, \qquad k = m, m-1. \tag{5.4}$$

Легко видеть, что $C_f^{m-1,k} = C_g^{m,k} \circ \eta_{1_j^m}$, $k \in N_{m-1}$. Так как для любого k из N_{m-1} существует x_k из E^m такое, что $|x_k| = k$ и $(C_f^{m-1,k}, x_k) \in \Sigma(m-1,m)$, а также $(C_f^{m-1,k}, x_k) = (C_g^{m,k} \circ \eta_{1_j^m}, x_k \circ \eta_{1^m})$, то в силу локальности схемы A имеем $(C_g^{m,k}, x_k) \in \Sigma(m,m)$, $k \in N_{m-1}$. Таким образом, учитывая (5.4), получаем, что $l_{\Sigma,m}(C_g^{m,k}) \geqslant k$, $k \in N_m$.

Утверждение 5.2.3 доказано. □

Утверждение 5.2.4. *Если $A = (\Sigma, F)$ — связная локальная схема, то существует f из $\mathcal{H}$ такая, что для любого натурального m выполнено*

$$l_{\Sigma,m}(C_f^{m,i}) \geqslant i, \qquad i \in N_m. \tag{5.5}$$

Доказательство. Функцию f из $\mathcal{H}$ назовем (A,m)-полной, если для m выполнено (5.5). Как было показано при доказательстве предыдущего утверждения, если $k \leqslant m$ и f — (A,m)-полная, то она и (A,k)-полная. Кроме того, согласно предыдущему утверждению, для любого натурального m существует (A,m)-полная функция из $\mathcal{H}$. Пусть $s \in N_k^{N_k}$, $s(i) \leqslant i$ для $i \in N_k$, т.е. для некоторой S из $\mathcal{H}$, $s = S|_{N_k}$. И, кроме того, для любого m существует (A,m)-полная f из $\mathcal{H}$ такая, что $f|_{N_k} = s$. Тогда существует j из N_{k+1} такое, что для любого натурального m существует (A,m)-полная f из $\mathcal{H}$ такая, что $f|_{N_k} = s$, $f(k+1) = j$. Ибо в противном случае, в силу конечного числа значений, которые могут принимать функции из $\mathcal{H}$, на $(k+1)$ указанное свойство s выполняться не могло бы.

Используя этот факт, определим индуктивно функцию g из $\mathcal{H}$.

1. $g(1) = 1$.
2. Если g определена на N_k, $g|_{N_k} = g_k$, то положим $g(k+1) = j$, где j — наименьшее число из N_{k+1} такое, что для любого m существует (A, m)-полная f из $\mathcal{H}$ такая, что $f|_{N_k} = g_k$, $f(k+1) = j$.

Ясно, что определение g корректно, и для любого натурального m она будет (A, m)-полной. Такие функции будем называть (A, ∞)-полными.

Утверждение 5.2.4 доказано. $\square$

Определим следующие функции на $\mathfrak{T}_{m,n}$: $\varphi_{m,n,x}(T) = 1$, если x — тупиковый тест таблицы T, и 0 — в противном случае; $\varphi_{m,n,r} = \sum_{x \in E_r^n} \varphi_{m,n,x}$; $\varphi_{m,n} = \sum_{r=1}^{n} \varphi_{m,n,r}$.

Утверждение 5.2.5. *Если $A = (\Sigma, F)$ — связная локальная схема алгоритма, $f \in \mathcal{H}$, f — (A, ∞)-полная, $T \in \mathfrak{T}_{m,n}$, то*

$$\mu^*(A, T) \geqslant \left(\sum_{x \in E^n \setminus \{0^n\}} \max_{k \in N_m} \varphi_{k,n,x} \left(T^{(C_f^{m,k}, 1^n)} \right) \right) + 1.$$

Доказательство. Действительно, пусть x — тупиковый тест $T^{(C_f^{m,k}, 1^n)}$ для некоторого k из N_m. Тогда $|x| \leqslant k$ и, следовательно, в силу (A, ∞)-полноты f имеем $(C_f^{m,k}, x) \in \Sigma(m, n)$, а значит, найдется C, $C \leqslant C_f^{m,k}$, такое, что $(C, x) \in \mathcal{P}_A(T)$. Из доказанного факта непосредственно вытекает нужное нам неравенство.

Утверждение 5.2.5 доказано. $\square$

Утверждение 5.2.6. *Если $f \in \mathcal{H}$, $T \in \mathfrak{T}_{m,n}$, то*

$$\mu(\text{Д}(f), T) = \mu^*(\text{Д}(f), T) = 1 + \sum_{x \in E^n \setminus \{0^n\}} \max_{k \in N_m} \varphi_{k,n,x} \left(T^{(C_f^{m,k}, 1^n)} \right).$$

Доказательство. В силу определения $F_{\text{Д}(f)}$ верно, что $F_{\text{Д}(f)}(T^{(C_f^{m,k}, x)}) = 1$ тогда и только тогда, когда $T^{(C_f^{m,k}, x)})$ — тупиковая тестовая, а $T^{(C_f^{m,k-1}, x)})$ — не тупиковая. Следовательно, если $F_{\text{Д}(f)}(T^{(C_f^{m,k}, x)}) = 1$, то для $l < k$ верно $F_{\text{Д}(f)}(T^{(C_f^{m,l}, x)}) = 0$, ибо $T^{(C_f^{m,l}, x)}$ — не тупиковая тестовая, а для $l > k$ это же равенство выполнено потому, что либо $T^{(C_f^{m,l}, x)}$ — не тестовая, либо, если она тестовая, то $T^{(C^{m,l-1},x)}$ — тупиковая тестовая. Таким образом,

$$\max_{k\in N_m} \varphi_{k,n,x}(T^{(C_f^{m,k},1^n)}) = \sum_{k+1}^{m} F_{\textbf{Д}(f)}(T^{(C_f^{m,k},x)}).$$

Но тогда

$$\mu(\textbf{Д}(f),T) = 1 + \sum_{(C,x)\in\Sigma_{\textbf{Д}(f)}(m,n)} F(T^{(C,x)}) = 1 + \sum_{x\in E^n\setminus\{0^n\}} \sum_{k=1}^{m} F_{\textbf{Д}(f)}(T^{(C_f^{m,k},x)}) =$$

$$= 1 + \sum_{x\in E^n\setminus\{0^n\}} \max_{k\in N_m} \varphi_{k,n,x}(T^{(C_f^{m,k},1^n)}).$$

Так как $\mu^* \leqslant \mu$ и f является $(\textbf{Д}(f),\infty)$-полной, то в силу предыдущего утверждения получим искомое равенство.

Утверждение 5.2.6 доказано. □

Утверждение 5.2.7. *Для любой A — связной локальной схемы алгоритма существует $f \in \mathcal{H}$ такая, что $\textbf{Д}(f) \leqslant A$, $\textbf{Д}(f) \leqslant {}^*A$.*

Доказательство. Согласно утверждению 5.2.4, существует (A,∞)-полная f из $\mathcal{H}$. Тогда согласно утверждениям 5.2.5 и 5.2.6 для любой T из $\mathfrak{T}^*$ верно, что

$$\mu^*(A,T) \geqslant \mu^*(\textbf{Д}(f),T) = \mu(\textbf{Д}(f),T),$$

но также выполняется $\mu(A,T) \geqslant \mu^*(A,T)$. Следовательно, $\textbf{Д}(f) \leqslant A$ и $\textbf{Д}(f) \leqslant {}^*A$.

Утверждение 5.2.7 доказано. □

5.3. Асимптотическая эффективность Д-алгоритма

Пусть имеется граф G и π — взаимнооднозначное отображение (нумерация) $X(G)$ на $N_{q(G)}$. Через $< G,\pi >_k$ обозначим остовный подграф G такой, что $X(< G,\pi >_k) = \pi^{-1}(N_k)$, $k = 1,\cdots,q(G)$. Через $< G,\pi >_k^*$ обозначим граф, полученный из $< G,\pi >_k$ отождествлением вершин, инцидентных $\pi^{-1}(k+1)$, $k = 1,\cdots,q(G) = 1$. Через $OCT(G)$ обозначим множество остовных подграфов G с непустым множеством ребер. Если $x \in E^n$, то положим

$$\varphi_{G,n,x}^{\text{TT},\pi} = \max_{k\in N_{q(G)}} \varphi_{<G,\pi>_k,n,x}^{\text{TT}},$$

$$\varphi^{\text{ТТ},\pi}_{G,n,r} = \sum_{x\in E^n_r} \varphi^{\text{ТТ},\pi}_{G,n,x}, \qquad \varphi^{\text{ТТ},\pi}_{G,n} = \sum_{r=1}^{n} \varphi^{\text{ТТ},\pi}_{G,n,r}.$$

Нетрудно видеть, что справедливо

Замечание 5.3.1. Функция $f(a) = H(a,r)$ при $0 \leqslant a \leqslant 2^r(\ln(r+1)$ строго возрастает и строго убывает при $a \geqslant 2^r \ln(r+1)$, достигая при $a = 2^r \ln(r+1)$ своего единственного максимума, равного $(1/(r+1))(1-1/(r+1))^r$.

Утверждение 5.3.2. *Если каждому графу G поставлена в соответствие нумерация его ребер π_G, $D \in \mathcal{B}$, $D(n) \lessgtr_n \ln\ln n$ и $1 \leqslant q(G) \lessgtr_n 2^{(\ln^2 n)/D(n)}$, то*

$$\varphi^{\text{ТТ},\pi_G}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{\text{ТТ}}_{G,n}.$$

Доказательство. В силу определения $\varphi^{\text{ТТ},\pi_G}_{G,n} \geqslant \varphi^{\text{ТТ}}_{G,n}$. Пусть имеется ε из (0, 1/16) и пусть $1 \leqslant q(G) \leqslant n^{1-\varepsilon}$. В этом случае, согласно утверждению 3.1.19, имеем

$$\varphi^{\text{ТТ}}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_m \sum_{r=1}^{p^*(G)-1} \varphi^{\text{ТУ},*}_{G,n,r}. \tag{5.6}$$

Но, в силу определения,

$$\varphi^{\text{ТТ}}_{G,n} \leqslant \varphi^{\text{ТТ},\pi_G}_{G,n} \leqslant \sum_{r=1}^{p^*(G)-1} \varphi^{\text{ТУ},*}_{G,n,r} \tag{5.7}$$

Следовательно,

$$\varphi^{\text{ТТ}}_{G,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_m \varphi^{\text{ТТ},\pi_G}_{G,n}. \tag{5.8}$$

Далее будем полагать, что имеется ε из (0, 1/128) и

$$n^{1-\varepsilon} \leqslant q(G) \lessgtr_n 2^{(\ln^2 n)/D(n)}. \tag{5.9}$$

В силу определения величины $\varphi^{\text{ТТ},\pi}_{G,n,x}$ имеем

$$\varphi^{\text{ТТ},\pi}_{G,n,x} = \varphi^{\text{ТТ}}_{G,n,x} + \sum_{k=1}^{q(G)-1} \varphi^{\text{ТТ}}_{<G,\pi>_k,n,x}\left(1 - \varphi^{\text{ТТ}}_{<G,\pi>_{k+1},n,x}\right), \tag{5.10}$$

кроме того, верно, что

$$\mathtt{P}\left(\varphi^{\text{ТТ}}_{<G,\pi>_k,n,x}\left(1 - \varphi^{\text{ТТ}}_{<G,\pi>_{k+1},n,x}\right) = 1\right) =$$

$$= \mathtt{P}\left(\varphi^{\text{ТТ}}_{<G,\pi>^*_k,n,x} = 1\right) \cdot 2^{-|x|}, \tag{5.11}$$

так как, если

$$\left(\varphi^{\text{ТТ}}_{<G,\pi>_k,n,x}\left(1-\varphi^{\text{ТТ}}_{<G,\pi>_{k+1},n,x}\right)\right)(T)=1,$$

то $T_G(\pi^{-1}(k+1)) \geqslant x$.

Положим $\varphi^{\text{ТТ},\pi,0}_{G,n,x}=0$, и для k из $N_{q(G)}$ полагаем

$$\varphi^{\text{ТТ},\pi,k}_{G,n,x}=\varphi^{\text{ТТ}}_{<G,\pi>_k,n,x},$$

$$\varphi^{\text{ТТ},\pi,k,1}_{G,n,x}=\varphi^{\text{ТТ}}_{<G,\pi>_k,n,x}\left(1-\varphi^{\text{ТТ}}_{<G,\pi>_{k+1},n,x}\right),$$

$$\varphi^{\text{ТТ},\pi,k,2}_{G,n,x}=\varphi^{\text{ТТ}}_{<G,\pi>_k,n,x}\left(1-\varphi^{\text{ТТ}}_{<G,\pi>_{k-1},n,x}\right),$$

$$\varphi^{\text{ТТ},\pi,k}_{G,n,r}=\sum_{x\in E^n_r}\varphi^{\text{ТТ},\pi,k}_{G,n,x}, \qquad \varphi^{\text{ТТ},\pi,k,1}_{G,n,r}=\sum_{x\in E^n_r}\varphi^{\text{ТТ},\pi,k,1}_{G,n,x},$$

$$\varphi^{\text{ТТ},\pi,k,2}_{G,n,r}=\sum_{x\in E^n_r}\varphi^{\text{ТТ},\pi,k,2}_{G,n,x}, \qquad \varphi^{\text{ТТ},\pi,k}_{G,n}=\sum_{r=1}^{n}\varphi^{\text{ТТ},\pi,k}_{G,n,r},$$

$$\varphi^{\text{ТТ},\pi,k,1}_{G,n}=\sum_{r=1}^{n}\varphi^{\text{ТТ},\pi,k,1}_{G,n,r}, \qquad \varphi^{\text{ТТ},\pi,k,2}_{G,n}=\sum_{r=1}^{n}\varphi^{\text{ТТ},\pi,k,2}_{G,n,r}.$$

Пусть π^k — нумерация ребер $<G,\pi>_k$, порожденная нумерацией π, т. е. $\pi^k=\pi|_{\pi^{-1}(N_k)}$. В силу (5.10) получаем, что

$$\varphi^{\text{ТТ},\pi}_{G,n,x}=\varphi^{\text{ТТ}}_{G,n,x}+\sum_{k=1}^{q(G)-1}\varphi^{\text{ТТ},\pi,k}_{G,n,x}\left(1-\varphi^{\text{ТТ},\pi,k+1}_{G,n,x}\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{q(G)}\varphi^{\text{ТТ},\pi,k}_{G,n,x}\left(1-\varphi^{\text{ТТ},\pi,k-1}_{G,n,x}\right)=$$

$$=\sum_{k=l+1}^{q(G)}\varphi^{\text{ТТ},\pi,k}_{G,n,x}\left(1-\varphi^{\text{ТТ},\pi,k-1}_{G,n,x}\right)+\sum_{k=1}^{l}\varphi^{\text{ТТ},\pi,k}_{G,n,x}\left(1-\varphi^{\text{ТТ},\pi,k-1}_{G,n,x}\right)=$$

$$=\varphi^{\text{ТТ},\pi^l}_{<G,\pi>_l,n,x}+\sum_{k=l+1}^{q(G)}\varphi^{\text{ТТ},\pi,k}_{G,n,x}\left(1-\varphi^{\text{ТТ},\pi,k-1}_{G,n,x}\right)=$$

$$=\varphi^{\text{ТТ},\pi^l}_{<G,\pi>_l,n,x}+\sum_{k=l+1}^{q(G)}\varphi^{\text{ТТ},\pi,k,2}_{G,n,x}.$$

Следовательно,

$$\varphi_{G,n}^{\text{тт},\pi} = \varphi_{<G,\pi>_l,n}^{\text{тт},\pi^l} + \sum_{k=l+1}^{q(G)} \varphi_{G,n}^{\text{тт},\pi,k,2}.$$

Далее полагаем $l =]n^{1-2\varepsilon}[$. Так как $\varepsilon \in (0, 1/128)$, то, согласно (5.8), имеем

$$\varphi_{<G,\pi>_l,n}^{\text{тт},\pi_G^l} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi_{G,n}^{\text{тт},\pi,l},$$

следовательно,

$$\varphi_{G,n}^{\text{тт},\pi_G} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi_{G,n}^{\text{тт},\pi_G,l} + \sum_{k=l+1}^{q(G)} \varphi_{G,n}^{\text{тт},\pi_G,k,2} = \varphi_{G,n}^{\text{тт}} + \sum_{k=l}^{q(G)-1} \varphi_{G,n}^{\text{тт},\pi_G,k,1}. \tag{5.12}$$

Далее имеем

$$\varphi_{G,n}^{\text{тт},\pi_G} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi_{G,n}^{\text{тт}} + \sum_{k=l}^{q(G)-1} \sum_{r=1}^{n} \varphi_{G,n,r}^{\text{тт},\pi_G,k,1} =$$

$$= \varphi_{G,n}^{\text{тт}} + \sum_{r=s+1}^{n} \sum_{k=l}^{q(G)-1} \varphi_{G,n,r}^{\text{тт},\pi_G,k,1} + \sum_{r=1}^{s} \sum_{k=l}^{q(G)-1} \varphi_{G,n,r}^{\text{тт},\pi_G,k,1}. \tag{5.13}$$

Поскольку

$$\sum_{k=l}^{q(G)-1} \varphi_{G,n,x}^{\text{тт},\pi_G,k,1} \leqslant \varphi_{G,n,x}^{\text{тт},\pi_G} \leqslant 1,$$

то

$$\sum_{r=1}^{s} \sum_{k=l}^{q(G)-1} \varphi_{G,n,r}^{\text{тт},\pi_G,k,1} \leqslant \sum_{r=1}^{s} \binom{n}{r}. \tag{5.14}$$

Положим $s = [\theta(q(G))]$. Так как $s \ll_n n$, то для $r \leqslant s$ верно, что $\binom{n}{r-1} / \binom{n}{r} \ll_n 1$ и, следовательно,

$$\sum_{r=1}^{s} \binom{n}{r} \lesssim_n \binom{n}{s}. \tag{5.15}$$

В силу следствия 3.3.9 имеем

$$\varphi_{G,n}^{\text{тт}} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n = \sum_{r=1}^{n} \binom{n}{r} \cdot H(q(G), r). \tag{5.16}$$

Положив $\alpha = s + 1 - \theta(q(G))$ имеем

$$H(q(G), s+1) = \exp\left(-q(G)2^{-\theta(q(G))-\alpha}\right) \times \\ \times \left(1 - \exp\left(-q(G)2^{-q(G)-\alpha}\right)\right)^{s+1} = \\ = \frac{1}{(\ln q(G))^{2^{-\alpha}}} \cdot \left(1 - \frac{1}{(\ln q(G))^{2^{-\alpha}}}\right)^{s+1}.$$

Так как $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, то

$$\begin{aligned} &H(q(G), s+1) \geqslant \frac{1}{\ln q(G)} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\ln q(G)}}\right)^{s+1} \sim_n \\ &\sim_n \frac{1}{\ln q(G)} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{\ln q(G)}}\right)^{\ln q(G)} \asymp_n \frac{e^{-\sqrt{\ln q(G)}}}{\ln q(G)} \circledgeq_n \\ &\circledgeq_n \frac{1}{\ln^2 n} \cdot e^{-(\ln n)/\sqrt{D(n)}} = \frac{1}{\ln^2 n} \cdot n^{-1/\sqrt{D(n)}}. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Так как $\binom{n}{s+1} = \frac{n-s}{s+1} \cdot \binom{n}{s}$, то

$$\binom{n}{s+1} \cdot H(q(G), s+1) \geqslant \binom{n}{s} \cdot n^{1-o_n(1)}. \tag{5.18}$$

Следовательно, в силу (5.14) – (5.16) получаем, что

$$\sum_{r=1}^{s} \sum_{k=l}^{q(G)-1} \varphi_{G,n,r}^{\text{тт},\pi_G,k,1} \overset{\text{п.в.}}{\ll_n} \varphi_{G,n}^{\text{тт}},$$

и согласно (5.13) имеем

$$\varphi_{G,n}^{\text{тт},\pi_G} \overset{\text{п.в.}}{\sim_n} \varphi_{G,n}^{\text{тт}} + \sum_{r=s+1}^{n} \sum_{k=l}^{q(G)-1} \varphi_{G,n,r}^{\text{тт},\pi_G,k,1}, \tag{5.19}$$

где $l =]n^{1-2\varepsilon}[$, $s = [\theta(q(G))]$.

В соответствии с (5.11) получаем, что

$$\mathtt{M} \sum_{r=s+1}^{n} \sum_{k=l}^{q(G)-1} \varphi_{G,n,r}^{\text{тт},\pi_G,k,1} = \sum_{r=s+1}^{n} 2^{-r} \sum_{k=l}^{q(G)-1} \mathtt{M}\varphi_{<G,\pi_G>_k^*,n,r}^{\text{тт}}. \tag{5.20}$$

Так как, если $r \geqslant \theta(q(G))$ и $m \leqslant q(G)$, то $m \lesseqgtr_n 2^r r(\ln 2)/2$, в силу утверждения 2.2.14, для $r \geqslant s+1$ имеем

$$\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{TT}}_{<G,\pi_G>^*_k,n,r} \lesssim_n \binom{n}{r} H(q(< G, \pi_G >^*_k), r). \tag{5.21}$$

Если $r \geqslant s+2 \geqslant \theta(q(G))+1$, то

$$2^r \ln(r+1) \geqslant 2q(G)\frac{\ln(s+2)}{\ln\ln q(G)} \gtrapprox_n q(G).$$

Следовательно, в этом случае

$$H(q(< G, \pi_G >^*_k), r) \leqslant H(k, r), \tag{5.22}$$

так как $q(< G, \pi_G >^*_k) \leqslant k \leqslant q(G)$. Если $r \geqslant s+1 \geqslant \theta(q(G))$ и $k \leqslant 2^r \ln(r+1)$, то неравенство (5.22) выполняется в силу тех же соображений. Пусть $r = s+1$ и $2^r \ln(r+1) \leqslant k \leqslant q(G)$. Тогда $H(k,r) \geqslant H(q(G), r)$. Так как $r \geqslant \theta(q(G))$, то

$$\exp\left(-q(G)2^{-r}\right) \geqslant \exp\left(-q(G)2^{-\theta(q(G))}\right) = \frac{1}{\ln q(G)}.$$

Поскольку $q(G) \geqslant 2^r \ln(r+1)$, имеем

$$\left(1 - \exp(-q(G)2^{-r})\right)^r \geqslant \left(1 - \exp(-2^r(\ln(r+1))2^{-r}\right)^r = \left(1 - \frac{1}{r+1}\right)^r.$$

Так как $\ln q(G) \sim_r r+1$, то получаем, что

$$H(k,r) \geqslant H(q(G), r) \gtrsim_r \frac{1}{r+1}\left(1 - \frac{1}{r+1}\right)^r,$$

но для любого неотрицательного a выполнено

$$H(a, r) \leqslant \frac{1}{r+1}\left(1 - \frac{1}{r+1}\right)^r.$$

Следовательно, в рассматриваемом нами случае верно, что

$$H(q(< G, \pi_G >^*_k), r) \lesssim_n H(k, r).$$

Таким образом, $\mathtt{M}\varphi^{\mathtt{TT}}_{<G,\pi_G>^*_k,n,r} \lesssim_n \binom{n}{r} H(k,r)$ и

$$\mathtt{M}\sum_{r=s+1}^{n}\sum_{k=l}^{q(G)-1}\varphi^{\mathtt{TT},\pi_G,k,1}_{G,n,r} \lesssim_n \sum_{r=s+1}^{n} 2^{-r}\binom{n}{r}\sum_{k=l}^{q(G)-1} H(k,r). \tag{5.23}$$

В силу замечания 5.3.1

$$\sum_{k=l}^{q(G)-1} H(k,r) \lesseqgtr_n \int_0^{q(G)} H(x,r)dx + \frac{1}{r+1}\left(1-\frac{1}{r+1}\right)^r,$$

если $r = s+1$, и

$$\sum_{k=l}^{q(G)-1} H(k,r) \lesseqgtr_n \int_0^{q(G)} H(x,r)dx$$

если $r \geqslant s+2$. Легко видеть, что

$$\int_0^{q(G)} \exp(-x2^{-r})(1-\exp(-x2^{-r}))dx =$$

$$= \frac{2^r}{r+1}(1-\exp(-x2^{-r}))^{r+1}\big|_0^{q(G)} = \frac{2^r}{r+1}(1-\exp(-q(G)2^{-r}))^{r+1} =$$

$$= \frac{2^r}{r+1}(\exp(q(G)2^{-r})-1)H(q(G),r). \quad (5.24)$$

Ясно, что

$$\frac{2^r}{r+1}(1-\exp(-q(G)2^{-r}))^{r+1} \gg_n \frac{1}{r+1}\left(1-\frac{1}{r+1}\right)^r.$$

Следовательно, учитывая (5.23), имеем

$$\mathtt{M}\sum_{r=s+1}^{n}\sum_{k=l}^{q(G)-1} \varphi_{G,n,r}^{\text{тт},\pi_G,k,1} \lesssim_n \sum_{r=s+1}^{n}\binom{n}{r}\frac{e^{q(G)2^{-r}}-1}{r+1}H(q(G),r).$$

Покажем, что

$$\sum_{r=s+1}^{n}\binom{n}{r}\frac{e^{q(G)2^{-r}}-1}{r+1}H(q(G),r) \ll_n \sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}H(q(G),r). \quad (5.25)$$

Если $r \geqslant s+2 \geqslant \theta(q(G))+1$, то

$$\frac{e^{q(G)2^{-r}}-1}{r+1} \leqslant \frac{\sqrt{\ln q(G)}-1}{r+1} \ll_n 1.$$

Следовательно,

$$\sum_{r=s+2}^{n}\binom{n}{r}\frac{e^{q(G)2^{-r}}-1}{r+1}H(q(G),r) \ll_n \sum_{r=s+2}^{n}\binom{n}{r}H(q(G),r).$$

Если для некоторой D из $\mathcal{B}$ выполнено

$$\exp(q(G)2^{-s-1}) \leqslant (r+1)/\sqrt{D(n)},$$

то

$$(\exp(q(G)2^{-s-1}-1)/(s+2) \ll_n 1$$

и (5.25) выполняется.

Пусть $\exp(q(G)2^{-s-1}) \geqslant (s+2)/\sqrt{D(n)}$. Так как $s+1 \geqslant \geqslant \theta(q(G))$, то

$$\frac{\binom{n}{s+1}\cdot\big((\exp(q(G)2^{-s-1})-1)/(s+2)\big)\cdot H(q(G),s+1)}{\binom{n}{s+2}\cdot H(q(G),s+2)} =$$

$$= \big(\exp(q(G)2^{-s-2})/(n-s-1)\big)\cdot(1+\exp(-q(G)2^{-s-2}))^{s+2} \leqslant$$

$$\leqslant \big(\exp(q(G)2^{-\theta(q(G))-1})/(n-s-1)\big)\cdot\left(1+\sqrt{\frac{\sqrt{D(n)}}{s+2}}\right)^{s+2} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sqrt{\ln q(G)}}{n-s-1}e^{\sqrt{(s+2)D(n)}} \lesssim_n \frac{1}{\sqrt{D(n)}}\frac{\ln n}{n}e^{\ln n\sqrt{\sqrt{D(n)}\,/D(n)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{D(n)}}\frac{\ln n}{n}n^{1/D(n)^{1/4}} \ll_n 1.$$

Следовательно, и в этом случае неравенство (5.25) выполняется. Таким образом,

$$\mathtt{M}\sum_{r=s+1}^{n}\sum_{k=l}^{q(G)-1}\varphi_{G,n,r}^{\text{тт},\pi_G,k,1} \ll_n \sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}H(q(G),r),$$

а, значит, выполнено

$$\sum_{r=s+1}^{n}\sum_{k=l}^{q(G)-1}\varphi_{G,n,r}^{\text{тт},\pi_G,k,1}\overset{\text{п.в.}}{\ll_n} \sum_{r=1}^{n}\binom{n}{r}H(q(G),r).$$

Учитывая (5.16) и (5.19), получаем, что

$$\varphi_{G,n}^{\text{тт},\pi_G}\overset{\text{п.в.}}{\lesssim_n}\varphi_{G,n}^{\text{тт}}.$$

Утверждение 5.3.2 доказано. □

Непосредственно из доказанного утверждения, а также из утверждения 5.2.6, вытекает предложение.

Утверждение 5.3.3. *Если каждому графу G поставлена в соответствие нумерация его ребер π_G, $D \in \mathcal{B}$, $D(n) \lesseqgtr_n \ln\ln n$ и $1 \leqslant q(G) \leqslant exp_2((\ln^2 n)/D(n))$, то*

$$\mu((\mathbf{Д}, \pi_G), (T, G)) = \mu^*((\mathbf{Д}, \pi_G), (T, G)) \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi_{G,n}^{\text{тт}}.$$

Часть III

Т-АЛГОРИТМЫ РАСПОЗНАВАНИЯ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ КОРОТКИЕ ТЕСТЫ

Глава 6

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ

В данной части мы будем придерживаться обозначений, приведенных в параграфе 1.3. Напомним основные из них.

Если имеются два множества A и B, отображение $f : B \to A$, множества C, D, $C \subseteq A$, $D \subseteq B$ и элемент $a \in A$, то полагаем $f(D) = \{b : b = f(a), a \in D\}$, $f^{-1}(a) = \{b \in B : f(b) = a\}$, $f^{-1}(c) = \cup_{a\in C} f^{-1}(a)$. Если f, g — отображения $f : B \to A$, $g : C \to B$, то $f \circ g : C \to A$ и $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Через $A \otimes B$ обозначим множество упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$; через $|A|$ обозначим мощность конечного множества A.

Обозначим через $\widetilde{N}_m$ — множество $\{0, 1, \ldots, m\}$ для $m \geqslant 0$ и через N_m множество $\widetilde{N}_m \setminus \{0\}$. Положим $E = \{0, 1\}$. Отображения множества N_n в E будем отождествлять с наборами из n-мерного бинарного куба E^n. Считаем, что i-я координата набора $\widetilde{x}$ из E^n, $i \in N_n$, есть значение отображения $\widetilde{x}(i)$. Аналогично, будем рассматривать наборы длины n элементов некоторого множества A как отображения N_n в A.

Через $\widetilde{1}^n$, $\widetilde{0}^n$ обозначим, соответственно, тождественные 1 и 0 из E^n. Если $i, j \in N_n$, то положим

$$\widetilde{1}^n_i(j) = \begin{cases} 0, & \text{при } i = j, \\ 1, & \text{при } i \neq j, \end{cases}$$

$$\widetilde{0}^n_i(j) = \begin{cases} 1, & \text{при } i = j, \\ 0, & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

Если $l \in \widetilde{N}_n$, то обозначим через E^n_l множество $\{\widetilde{x} \in E^n : |\widetilde{x}^{-1}(1)| = l\}$, т. е. E^n_l — есть l-й слой куба.

Положим $\widetilde{\mathcal{E}}^n = \{\widetilde{1}^n_i : i \in N_n\}$, т. е. $\widetilde{\mathcal{E}}^n = E^n_{n-1}$, $\mathcal{E}^n = \widetilde{\mathcal{E}}^n \cup \{\widetilde{1}^n\}$. Для $a \in [0, n]$ положим $E^{n+}_a = \cup_{l>a} E^n_l$ и $E^{n-}_a = \cup_{l<a} E^n_l$.

Определим на E операцию «$\leftrightarrow$» так, что $a \leftrightarrow b = a \oplus b \oplus 1$ для любых $a, b \in E$. Операции &, $\vee$, $\oplus$, $\leftrightarrow$ над наборами E^n производятся поэлементно так, что $(\widetilde{x} \& \widetilde{y})(i) = \widetilde{x}(i) \& \widetilde{y}(i)$ для всех $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in E^n$, $i \in N_n$, и т.д. Знаки $\leqslant$, $<$, связывающие наборы из E^n, относятся к стандартной поэлементной упорядоченности. Если $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in E^n$, положим $|\widetilde{x}| = |\widetilde{x}^{-1}(1)|$ — число единиц в наборе

$\widetilde{x}$, $\rho(\widetilde{x},\widetilde{y}) = |\widetilde{x}\oplus\widetilde{y}| = n - |\widetilde{x}\leftrightarrow\widetilde{y}|$ — число компонент, в которых наборы $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$ отличаются. Если $A\subseteq E^n$, $\diamond$ — одна из операций $\&$, $\vee$, $\oplus$, $\leftrightarrow$, то положим $A\diamond\widetilde{x} = \{\widetilde{y}\diamond\widetilde{x} : \widetilde{y}\in A\}$.

Для $\widetilde{x}\in E^n\setminus\{\widetilde{0^n}\}$ определим отображения $\eta_{\widetilde{x}}$, $\eta_{\widetilde{x}} : N_{|\widetilde{x}|}\to N_n$, положив $\eta_{\widetilde{x}}(i) = k_i$, $i\in N_{|\widetilde{x}|}$, где k_i — номер i-й единицы набора $\widetilde{x}$. Если выписать набор $\widetilde{y}\in E^n$ и вычеркнуть координаты, соответствующие нулям набора $\widetilde{x}$, получим запись набора $\widetilde{y}\circ\eta_{\widetilde{x}}$. Для $\widetilde{x}$ из E^n определим отображение $\pi_{\widetilde{x}}$, $\pi_{\widetilde{x}} : E^n\to E^{|\widetilde{x}|}$, так, что $\pi_{\widetilde{x}}(\widetilde{y}) = \widetilde{y}\circ\eta_{\widetilde{x}}$. Если первые l, $l\in N_n$, координат набора $\widetilde{x}$ из E^n равны 1, а остальные — 0, то будет обозначать отображение $\pi_{\widetilde{x}}$ через $\pi_{n,l}$.

Если G — граф, то через $\mathcal{P}(G)$, $X(G)$ будем обозначать, соответственно, множества вершин и ребер графа G. Если A и B — конечные множества, $A\cap B=\varnothing$, то через $G_{A,B}$ обозначим полный двудольный граф такой, что $\mathcal{P}(G) = A\cup B$, $X(G) = A\otimes B$. Через $k(G)$ обозначим число компонент связности графа G.

Если U — конечное множество, то бинарными U-таблицами, имеющими n столбцов, будем называть отображения T, $T : U\to E^n$. Множество таких таблиц обозначим через $\mathfrak{T}_{U,n}$. Если V_1, V_2 — конечные множества, $V_1\cap V_2=\varnothing$, то полагаем $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n} = \mathfrak{T}_{V_1,n}\otimes\mathfrak{T}_{V_2,n}$. Множества V_1 и V_2 также иногда будем называть классами (V_1 — первый класс, V_2 — второй). Определим понятия теста и тупикового теста пары таблиц $T=(T_1,T_2)$ из $\mathfrak{T}_{A,B,n}$ (таблицы T_1 из $\mathfrak{T}_{A,n}$), где A и B — конечные множества.

Определение 6.0.4. Набор $\widetilde{x}$ из E^n называется *тестом пары таблиц* $T=(T_1,T_2)$ из $\mathfrak{T}_{A,B,n}$, если ни для каких a_1 из A и a_2 из B не выполнено

$$T_1(a_1)\circ\eta_{\widetilde{x}} = T_2(a_2)\circ\eta_{\widetilde{x}}.$$

Определение 6.0.5. Набор $\widetilde{x}$ из E^n называется *тестом таблицы* T_1 из $\mathfrak{T}_{A,n}$, если ни для какого $a\in A$ не выполнено $T_1(a)\geqslant\widetilde{x}$.

Определение 6.0.6. Тест $\widetilde{x}$ пары таблиц T из $\mathfrak{T}_{A,B,n}$ (таблицы T_1 из $\mathfrak{T}_{A,n}$) называется *тупиковым*, если никакой набор $\widetilde{y}$ из E^n, $\widetilde{y}<\widetilde{x}$, не является тестом пары таблиц T (таблицы T_1).

Если набор $\widetilde{x}$ из E^n — тест (тупиковый тест) пары таблиц T из $\mathfrak{T}_{A,B,n}$ (таблицы T_1 из $\mathfrak{T}_{A,n}$), то будем также называть тестом (тупиковым тестом) набор столбцов, соответствующих единицам набора $\widetilde{x}$.

Если T — пара таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$ и φ — отображение E^n в E^r, то через $\varphi\circ T$ будем обозначать пару таблиц $(\varphi\circ T_1, \varphi\circ T_2)$.

Если $T=(T_1,T_2)$ — пара таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$, то таблицей сравнения для T назовем таблицу $\widehat{T}$ из $\mathfrak{T}_{V_1\otimes V_2,n}$, такую, что для любых $a_1 \in V_1$, $a_2 \in V_2$ выполнено $\widehat{T}((a_1, a_2)) = T_1(a_1) \leftrightarrow T_2(a_2)$. Очевидно, что набор $\widetilde{x}$ из E^n будет тестом (тупиковым тестом) пары таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{x}$ будет тестом (тупиковым тестом) ее таблицы сравнения $\widehat{T}$.

Пару таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$ будем называть тестовой (тупиковой тестовой), если набор $\widetilde{1}^n$ является тестом (тупиковым тестом) пары таблиц T. Множество тестовых (тупиковых тестовых) пар таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$ будем обозначать через $\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,n}$ ($\mathfrak{T}^{\mathrm{TT}}_{V_1,V_2,n}$).

Если T — пара таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$, то, так как $X(G_{V_1,V_2}) = V_1 \oplus V_2$, можно считать, что $\widehat{T} \in \mathfrak{T}_{X(G_{V_1,V_2}),n}$. Множество $\mathfrak{T}_{X(G),n}$ будем также обозначать через $\mathfrak{T}_{G,n}$.

В дальнейшем символы T, V_1, V_2 будут использоваться только в указанном выше смысле. Будем также обозначать $m_1 = |V_1|$, $m_2 = |V_2|$, $m = m_1 m_2$. Положим $\ln x = \max\{2, \ln_2 x\}$.

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ — множества, соответственно, натуральных, действительных и положительных действительных чисел. Полагаем, что $\mathcal{M}$ есть множество таких непрерывных отображений α, $\alpha : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, что $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$, и $\mathcal{B} = \{D : D(x) = 1/\alpha(x), \alpha \in \in \mathcal{M}\}$.

Пусть $f(n) \geqslant 0$, $g(n) > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Будем записывать $f(n) \leqslant_n g(n)$, если $f(n) \leqslant g(n)$ начиная с некоторого номера n; $f(n) \sim_n g(n)$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 1$; $f(n) \ll_n g(n)$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} = 0$ и $f(n) \asymp_n g(n)$, если $0 < \underline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} < \overline{\lim}_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{g(n)} < \infty$.

Будем говорить, что некоторое свойство выполняется для почти всех при $n \to \infty$ пар таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$ ($\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,n}$ и т.д.) при заданных ограничениях на m_1, m_2, n и, возможно, другие параметры, если найдется такое α из $\mathcal{M}$, что при любых допустимых значениях m_1, m_2, n и других параметров, если доля пар таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$ ($\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,n}$ и т.д.), для которых не выполняется данное свойство, не превосходит $\alpha(n)$.

Будем также считать, что на $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$ задано дискретное вероятностное пространство, при котором вероятность появления всех пар таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$ одинакова и равна $2^{-n(m_1+m_2)}$. В вероятностной интерпретации термину «для почти всех таблиц» будет соответствовать термин «почти всюду».

Глава 7 посвящена асимптотическому поведению весов признаков. Обозначим через $\varphi^{\text{т}}_{V_1,V_2,n,\widetilde{x}}$, где $\widetilde{x} \in E^n \setminus \{\widetilde{0^n}\}$, функцию, определенную на множестве $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$ и принимающую значение 1 на таких парах таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$, что $\widetilde{x}$ — тест пары T, и значение 0 на остальных парах таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$. Для r из N_n через $\varphi^{\text{т}}_{V_1,V_2,n,r}$ обозначим функцию, равную числу тестов длины r пары таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$, а через $\varphi^{\text{т}}_{V_1,V_2,n}$ — функцию, равную числу всех тестов пары таблиц T, тогда

$$\varphi^{\text{т}}_{V_1,V_2,n,r} = \sum_{\widetilde{x}\in E^n_r} \varphi^{\text{т}}_{V_1,V_2,n,\widetilde{x}} \quad \text{и} \quad \varphi^{\text{т}}_{V_1,V_2,n} = \sum_{r=1}^{n} \varphi^{\text{т}}_{V_1,V_2,n,r}.$$

Аналогичным образом определим функцию $\varphi^{\text{тт}}_{V_1,V_2,n,\widetilde{x}}$, которая равна 1, если $\widetilde{x}$ — тупиковый тест пары таблиц T, и 0 — в остальных случаях. Определим также функции $\varphi^{\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r}$ — число тупиковых тестов длины r, $\varphi^{\text{тт}}_{V_1,V_2,n}$ — число всех тупиковых тестов, $\varphi^{\text{кт}}_{V_1,V_2,n,r}$ — число тестов длины не более r, $\varphi^{\text{ктт}}_{V_1,V_2,n,r}$ — число тупиковых тестов длины не более r. Для этих функций выполнено

$$\varphi^{\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r} = \sum_{\widetilde{x}\in E^n_r} \varphi^{\text{тт}}_{V_1,V_2,n,\widetilde{x}}, \quad \varphi^{\text{тт}}_{V_1,V_2,n} = \sum_{r=1}^{n} \varphi^{\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r},$$

$$\varphi^{\text{кт}}_{V_1,V_2,n,r} = \sum_{j=1}^{r} \varphi^{\text{т}}_{V_1,V_2,n,j}, \quad \varphi^{\text{ктт}}_{V_1,V_2,n,r} = \sum_{j=1}^{r} \varphi^{\text{тт}}_{V_1,V_2,n,j}.$$

Пусть ∇ — один из значков «т», «тт», а Δ — один из значков «т», «тт», «кт», «ктт». Для $i \in N_n$ и $r \in N_n$ определим функции

$$\varphi^{\nabla,i}_{V_1,V_2,n,r} = \sum_{\widetilde{x}\in E^n_r,\widetilde{x}(i)=1} \varphi^{\nabla}_{V_1,V_2,n,\widetilde{x}}, \quad \varphi^{\nabla,i}_{V_1,V_2,n} = \sum_{r=1}^{n} \varphi^{\nabla,i}_{V_1,V_2,n,r},$$

$$\varphi^{\text{к}\nabla,i}_{V_1,V_2,n,r} = \sum_{j=1}^{r} \varphi^{\nabla,i}_{V_1,V_2,n,j}.$$

Определим на $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$ функции $\psi^{\Delta,i}_{V_1,V_2,n,r}$, $\psi^{\nabla,i}_{V_1,V_2,n}$, равные доле тестов соответствующего вида, содержащих i-й признак,

$$\psi^{\Delta,i}_{V_1,V_2,n,r} = \frac{\varphi^{\Delta,i}_{V_1,V_2,n,r}}{\varphi^{\Delta}_{V_1,V_2,n,r}} \quad \text{и} \quad \psi^{\nabla,i}_{V_1,V_2,n} = \frac{\varphi^{\nabla,i}_{V_1,V_2,n}}{\varphi^{\nabla}_{V_1,V_2,n}}.$$

Определение 6.0.7. Функции $\psi^{\nabla,i}_{V_1,V_2,n}$, $\psi^{\Delta,i}_{V_1,V_2,n,r}$ будем называть *весами i-го признака* в паре таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$, а именно:

$\psi^{T,i}_{V_1,V_2,n}$	—	вес по всем тестам,
$\psi^{\text{ТТ},i}_{V_1,V_2,n}$	—	вес по всем тупиковым тестам,
$\psi^{T,i}_{V_1,V_2,n,r}$	—	вес по всем тестам длины r,
$\psi^{\text{ТТ},i}_{V_1,V_2,n,r}$	—	вес по всем тупиковым тестам длины r,
$\psi^{\text{КТ},i}_{V_1,V_2,n,r}$	—	вес по всем тестам длины не более r,
$\psi^{\text{КТТ},i}_{V_1,V_2,n,r}$	—	вес по всем тупиковым тестам длины не более r.

Считаем, что функции весов по тестам каждого конкретного вида определены на парах таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$, имеющих соответствующие тесты. Не ограничивая общности, будем рассматривать весовые функции для первого столбца и будем опускать номер столбца при записи весовых функций: $\psi^{\text{Т}}_{V_1,V_2,n}$, $\psi^{\text{Т}}_{V_1,V_2,n,r}$ и т. д.

Через $\mathfrak{T}^{\alpha,\varepsilon}_{V_1,V_2,n}$, где $\alpha \in (0,1)$, $\varepsilon \in (0,1/2)$, обозначим множество таких пар таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$, что $\varepsilon m_i \leqslant |(\pi_{n,1} \circ T)^{-1}(1)| \leqslant \leqslant (1-\varepsilon) m_i$, $i \in N_2$, и $|(\pi_{n,1} \circ \widehat{T})^{-1}(1)| = \alpha m_1 m_2$. Будем рассматривать только такие значения α, при которых множества $\mathfrak{T}^{\alpha,\varepsilon}_{V_1,V_2,n}$ не пусты. Очевидно, что для каждого ε из $(0,1/2)$ такие α лежат на отрезке $[2\varepsilon - 2\varepsilon^2, 1 - 2\varepsilon + 2\varepsilon^2]$, который будем обозначать I^ε. Через $\psi^{\alpha,T}_{V_1,V_2,n}$, $\psi^{\alpha,\text{ТТ}}_{V_1,V_2,n}$, $\psi^{\alpha,T}_{V_1,V_2,n,r}$, $\psi^{\alpha,\text{ТТ}}_{V_1,V_2,n,r}$, $\psi^{\alpha,\text{КТ}}_{V_1,V_2,n,r}$, $\psi^{\alpha,\text{КТТ}}_{V_1,V_2,n,r}$ будем обозначать сужения соответствующих весовых функций на множество $\mathfrak{T}^{\alpha,\varepsilon}_{V_1,V_2,n}$.

Положим

$$\begin{aligned} r^{\varepsilon}_{1,k}(m) &= \,]\ln m - (1-\varepsilon)\ln\ln m[, \\ r^{\varepsilon}_{2,k}(m) &= \,]\ln m - (1+\varepsilon)\ln\ln\ln m[, \\ \widetilde{r}^{\varepsilon}_{1,k}(m) &= \,]\ln m - (2-\varepsilon)\ln\ln m[, \\ \widetilde{r}^{\varepsilon}_{2,k}(m) &= \,]\ln m - (1+\varepsilon)\ln\ln m[. \end{aligned}$$

Понятно, что $\widetilde{r}^{\varepsilon}_{1,k}(m) < \widetilde{r}^{\varepsilon}_{2,k}(m) < r^{\varepsilon}_{1,k}(m) < r^{\varepsilon}_{2,k}(m)$.

Основным результатом главы 7 является следующая теорема.

Теорема 6.0.8. *Пусть c_1, c_2, ε — константы, $0 < c_1 < 1 < < c_2$, $\varepsilon \in (0, \min(1/32, c_1/(20c_2)))$. Тогда, если $n^{c_1} \leqslant m_1 m_2 \leqslant n^{c_2}$, $m_1 \asymp_n m_2$, α, α_1, $\alpha_2 \in I^\varepsilon$, то*

1. *Существует такая функция $\Psi^\alpha(n, m_1 m_2)$, что*

$$\psi^{\alpha,\text{ТТ}}_{V_1,V_2,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \Psi^\alpha(n, m_1 m_2)$$

и при $\alpha_1 < \alpha_2$

$$\Psi^{\alpha_1}(n, m_1 m_2) \ll_n \Psi^{\alpha_2}(n, m_1 m_2);$$

2. $\psi^{\alpha,T}_{V_1,V_2,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \dfrac{1}{2}$;
3. *Существует такая функция* $\Psi^{\alpha}_{k}(n, m_1 m_2, r)$*, что при* $r \in [\widetilde{r}^{\varepsilon}_{1,k}(m_1 m_2), r^{\varepsilon}_{2,k}(m_1 m_2)]$

$$\psi^{\alpha,\text{кт}}_{V_1,V_2,n,r} \sim \psi^{\alpha,\text{ктт}}_{V_1,V_2,n,r} \sim \psi^{\alpha,T}_{V_1,V_2,n,r} \sim \psi^{\alpha,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r} \sim \Psi^{\alpha}_{k}(n, m_1 m_2, r).$$

Если $\alpha_1 < \alpha_2$ *и* $r \in [r^{\varepsilon}_{1,k}(m_1 m_2), r^{\varepsilon}_{2,k}(m_1 m_2)]$*, то*

$$\Psi^{\alpha_1}_{k}(n, m_1 m_2, r) \gg_n \Psi^{\alpha_2}_{k}(n, m_1 m_2, r).$$

Если $\alpha < \dfrac{1}{2}$ *и* $r \in [\widetilde{r}^{\varepsilon}_{1,k}(m_1 m_2), \widetilde{r}^{\varepsilon}_{2,k}(m_1 m_2)]$*, то*

$$\Psi^{\alpha}_{k}(n, m_1 m_2, r) \sim_n 1.$$

Эти результаты вытекают непосредственно из утверждений 7.5.3–7.5.5, 7.5.7, 7.5.10. В утверждениях 7.5.2, 7.5.5 указан вид функций $\Psi^{\alpha}_{k}(n, m_1 m_2, r)$ и $\Psi^{\alpha}_{k}(n, m_1 m_2)$.

Теорема 6.0.8 описывает асимптотическое поведение весов признаков по различным множествам тестов в зависимости от доли различаемых признаком пар объектов, не лежащих в одном классе. Из нее можно сделать следующие выводы:

а) вес признака по всем тупиковым тестам имеет тенденцию к уменьшению с увеличением доли различаемых признаком пар объектов;

б) вес признака по всем тестам не зависит от доли различаемых признаком пар объектов и почти всегда равен $1/2$;

в) вес признака по всем коротким тестам (коротким тупиковым тестам) растет с увеличением доли различаемых признаков пар объектов;

г) вес признака, различающего больше половины пар объектов, по множеству тестов, длина которых достаточно близка к минимальной, почти всегда равна единице.

Поэтому в качестве опорного множества тестового алгоритма распознавания образов целесообразно использовать множество всех коротких тестов, т. е. тестов, длина которых не превосходит некоторого числа из интервала $(\ln m - \ln\ln m, \ln m - \ln\ln\ln m)$, а в качестве меры важности (информативности) признака — его вес по множеству коротких тестов.

В главе 8 рассматривается вопрос устойчивости опорных множеств тестов различного вида при малых искажениях обучающей таблицы.

С этой целью мы определяем множество $\mathfrak{T}^2_{V_1,V_2,n} = \mathfrak{T}_{V_1,V_2,n} \otimes \mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$ и рассматриваем конечное вероятностное пространство со следующим распределением:

$$\mathtt{P}\{T,T^*\} = p^{\widetilde{\rho}(T,T^*)} \cdot (1-p)^{(|V_1|+|V_2|)_n - \widetilde{\rho}(T,T^*)} \cdot 2^{-(|V_1|+|V_2|)_n},$$

где $\widetilde{\rho}(T,T^*)$ — число отличий пар таблиц T и T^* из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$, т. е. $\widetilde{\rho}(T,T^*) = \sum\limits_{i=1}^{2} \sum\limits_{a \in V_i} \rho(T_i(a), T_i^*(a))$. Это распределение моделирует ситуацию, когда каждая компонента пары таблиц T независимо от других с вероятностью p меняет свой значение на противоположное, и в результате изменений возникает пара таблиц T^*.

Определим на $\mathfrak{T}^2_{V_1,V_2,n}$ функции $\varphi^{\text{ТТ},\&}_{V_1,V_2,n}$, $\varphi^{\text{ТТ},\vee}_{V_1,V_2,n}$, $\varphi^{\text{ТТ},\&}_{V_1,V_2,n,r}$, $\varphi^{\text{ТТ},\vee}_{V_1,V_2,n,r}$, $\varphi^{\text{ТТ},\vee}_{V_1,V_2,n,r}$, $\varphi^{\text{КТТ},\&}_{V_1,V_2,n,r}$, $\varphi^{\text{КТТ},\vee}_{V_1,V_2,n,r}$, $\varphi^{T,\&}_{V_1,V_2,n,r}$, $\varphi^{T,\vee}_{V_1,V_2,n,r}$, $\varphi^{\text{КТ},\&}_{V_1,V_2,n,r}$, $\varphi^{\text{КТ},\vee}_{V_1,V_2,n,r}$ такие, что

$\varphi^{\text{ТТ},\&}_{V_1,V_2,n}((T,T^*))$ — число наборов из E^n, одновременно являющихся тупиковыми тестами пар таблиц T и T^*,

$\varphi^{\text{ТТ},\vee}_{V_1,V_2,n}((T,T^*))$ — число наборов из E^n, являющихся тупиковыми тестами хотя бы одной из пар таблиц T и T^*,

$\varphi^{\text{ТТ},\&}_{V_1,V_2,n,r}((T,T^*))$ — число наборов длины r из E^n, являющихся одновременно тупиковыми тестами пар таблиц T и T^*,

$\varphi^{\text{ТТ},\vee}_{V_1,V_2,n,r}((T,T^*))$ — число наборов длины r из E^n, являющимися тупиковыми тестами хотя бы одной из пар таблиц T и T^*,

$\varphi^{\text{КТТ},\&}_{V_1,V_2,n,r}((T,T^*))$ — число наборов длины не более r из E^n, одновременно являющихся тупиковыми тестами пар таблиц T и T^*,

$\varphi^{\text{КТТ},\vee}_{V_1,V_2,n,r}((T,T^*))$ — число наборов длины не более r, являющихся тупиковыми тестами хотя бы одной из пар таблиц T и T^*,

$\varphi^{T,\&}_{V_1,V_2,n,r}((T,T^*))$ — число наборов длины r из E^n, одновременно являющихся тестами пар таблиц T и T^*,

$\varphi^{T,\vee}_{V_1,V_2,n,r}((T,T^*))$ — число наборов длины r из E^n, являющихся тестами хотя бы одной из пар таблиц T и T^*,

$\varphi^{\text{КТ},\&}_{V_1,V_2,n,r}((T,T^*))$ — число наборов длины не более r из E^n, одновременно являющихся тестами пар таблиц T и T^*,

$\varphi^{\text{КТ},\vee}_{V_1,V_2,n,r}((T,T^*))$ — число наборов длины не более r из E^n, являющихся тестами хотя бы одной из пар таблиц T и T^*.

Определенные выше функции со значком конъюнкции задают количество наборов из E^n, являющихся тестами соответствующего вида как для правильно заданной, так и для искаженной таблицы, а функции со значком дизъюнкции — количество наборов, являющихся тестами одной из таблиц.

Множество тестов любого из указанных видов назовем устойчивым к искажениям (при определенных ограничениях на параметры), если $\varphi^{*,\&} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{*,\vee}$, где φ^* — функция, задающая число тестов соответствующего вида.

Основным результатом главы 8 является следующая теорема.

Теорема 6.0.9. *Пусть* $\varepsilon \in (0, \min(1/32, c_1/(20c_2)))$, $0 < c_1 < 1 < c_2$, $n^{c_1} \leqslant m_1 m_2 \leqslant n^{c_2}$, $(\ln m_1 m_2)^{-2} \ll_n p \ll_n (\ln m_1 m_2)^{-(1+\varepsilon)}$, ∇ — *один из значков* «т», «тт», «кт», «ктт», *то*

1. *Если* $r =]\ln m_1 m_2 - \varepsilon \ln\ln m_1 m_2[$ *или* $r =]\ln m_1 m_2 - b \ln\ln\ln m_1 m_2[$, $b > 1 + \varepsilon$, *то*

$$\varphi^{\nabla,\&}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{\nabla,\vee}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \binom{n}{r} \exp\left\{-\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\}.$$

2. $\varphi^{\text{тт},\&}_{V_1,V_2,n} \ll_n \varphi^{\text{тт},\vee}_{V_1,V_2,n}$.
3. *Если* $r =]\ln m_1 m_2 - a \ln\ln m_1 m_2[$, $a \in (1+\varepsilon, 2-\varepsilon)$, *то*

$$\varphi^{\nabla,\&}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\ll}_n \varphi^{\nabla,\vee}_{V_1,V_2,n,r}.$$

Теорема следует непосредственно из утверждений 8.2.5, 8.3.7, 8.4.3.

Теорема 6.0.9 описывает асимптотическое поведение множества тупиковых тестов пар таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$ при искажениях таблиц, задаваемых распределением вероятностей $\mathtt{P}$. При таких искажениях почти все тупиковые тесты правильно заданной пары таблиц являются тупиковыми тестами искаженной пары таблиц, и наоборот, в то время как множество коротких тестов практически не изменяется. Кроме того, множество тестов (тупиковых тестов), длина которых близка к минимальной, также изменяется почти полностью. Поэтому распознающие алгоритмы, использующие в качестве опорного множества множество всех коротких тестов пар таблиц, будут устойчивыми к малым искажениям обучающей информации.

В главе 9 рассматриваются алгоритмы построения коротких тестов и анализируется эффективность.

Если T — пара таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$, то назовем нумерацией строк таблицы сравнения $\widehat{T}$ (или ребер графа G_{V_1,V_2}) взаимнооднозначное отображение $\pi : X(G_{V_1,V_2}) \to N_m$, где $m = m_1 \cdot m_2$. Через $\widehat{T}_\pi$ обозначим таблицу $\widehat{T}_\pi = \widehat{T} \circ \pi^{-1} : N_m \to E^n$. Множество всех нумераций ребер графа G_{V_1,V_2} обозначим через P_{V_1,V_2}. Пусть $\pi \in P_{V_1,V_2}$. Очевидно, что набор $\widetilde{x}$ из $E^n \setminus \{\widetilde{0^n}\}$ является тестом (тупиковым тестом) таблицы $\widehat{T}$ тогда и только тогда, когда он является тестом (тупиковым тестом) таблицы $\widehat{T}_\pi$.

Обозначим через $\mathfrak{T}^*_{m,n}$ множество таблиц S, $S : N_m \to E^n$, и положим $\mathfrak{T}^* = \cup_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}\mathfrak{T}^*_{m,n}$. Пусть $S \in \mathfrak{T}^*$, A — алгоритм построения тестов (тупиковых тестов). Под сложностью работы алгоритма $\mu^{\text{т}}(A,S)$ $(\mu^{\text{тт}}(A,S))$ будем понимать, следуя А. Е. Андрееву [3], количество наборов из E^n, проверяемых в алгоритме на принадлежность к множеству тестов (тупиковых тестов) таблицы S.

Предлагаются два алгоритма построения коротких тестов: $\mathbf{Д}_1$ и $\mathbf{Д}_2$. Алгоритм $\mathbf{Д}_1(r)$ предназначен для построения всех тупиковых тестов длины не более r, а алгоритм $\mathbf{Д}_2(r)$ — для построения всех тестов длины не более r.

Алгоритм $\mathbf{Д}_1$ построен на основе алгоритма нахождения всех тупиковых тестов таблиц, предложенного А. Е. Андреевым.

Пусть T — пара таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$, $\widehat{T}$, $\widehat{T} \in \mathfrak{T}^*_{m,n}$ — ее таблица сравнения, π — нумерация строк таблицы сравнения. Набор S, состоящий из l чисел из N_n, будем отождествлять с отображением $S : N_l \to N_n$. Через $\widetilde{S}$ обозначим такой набор из E^n, что $\widetilde{S}^{-1}(1) = S(N_l)$, через $\widetilde{T}^{\widetilde{S}}_\pi$ обозначим таблицу $\widehat{T}_\pi \circ \pi_{\widetilde{S}}$, и будем называть подтаблицей, задаваемой $\widetilde{S}$.

Текущими параметрами алгоритма $\mathbf{Д}_1(r)$ будут t, K_t, S_t, l_t, A_t, где t — номер проверяемого алгоритмом набора из E^n, l_t — длина этого набора. В «момент времени» t алгоритм проверяет набор $\widetilde{S}_t$, где $S_t : N_{l_t} \to N_n$. Набор K_t, $K_t : N_{l_t} \to N_n$, и таблица A_t, $A_t \in \mathfrak{T}^*_{l_t,n}$, служат для организации работы алгоритма.

Описание работы алгоритма $\mathbf{Д}_1(r)$ на таблице $\widehat{T}_\pi$.

1. Если $\widehat{T}_\pi(1) = \widetilde{1}^n$, то $\widehat{T}_\pi$ не имеет тестов, перейти к 7. В противном случае перейти к 2.
2. Положить $t = 1$, $l_t = 1$, $K_t(1) = 1$, $A_t(1) = \widehat{T}_\pi(1) \oplus \widetilde{1}^n$. $S_t(1) = \min A_t(1)^{-1}(0)$, т. е. $S_t(1)$ — номер первого нуля в строке $A_t(1)$.
3. Положить $\mathcal{E} = (\widehat{T}^{\widetilde{S}_t}_\pi)^{-1}(\widetilde{1}^{l_t})$. Если $\mathcal{E} = \varnothing$, т. е. в подтаблице, задаваемой $\widetilde{S}_t$, нет единичной строки, то $\widetilde{S}_t$ — тупиковый тест, перейти к 6. В противном случае перейти к 4.
4. Положить $k = \min\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_i = (\widehat{T}^{\widetilde{S}_t}_\pi)^{-1}(\widetilde{1}^{l_i}_i) \cap N_{K_t(l_t)}$ для $i \in$ $\in N_{l_t}$. Если $l_t = r - 1$, то перейти к 5. В противном случае положить
$$\widetilde{y} = (\&_{i=1}^{l_t}(\bigvee_{j\in\mathcal{E}_i}(\widehat{T}_\pi(j))))\&(\widehat{T}_\pi(k) \oplus \widetilde{1}^n).$$

Если $\widetilde{y} = \widetilde{0}^n$, то перейти к 6. В противном случае положить $t = t+1$, $l_t = l_{t-1}+1$, $A_y(l_t) = \widetilde{y}$, $S_t(l_t) = \min \widetilde{y}^{-1}(1)$, $K_t(l_t) = k$, $(K_t, S_t, A_t)|_{N_{l_{t-1}}} = (K_{t-1}, S_{t-1}, A_{t-1})$. Перейти к 3.

5. Положить $\widetilde{y} = (\&_{i=1}^{l_t}(\bigvee\limits_{j\in\mathcal{E}_i} \widehat{T}_\pi(j)))\&((\bigvee\limits_{j\in\mathcal{E}} \widehat{T}_\pi(j)) \oplus \widetilde{1}^n)$. $\widetilde{S}_t \oplus \widetilde{0}_j^n$ — тупиковый тест для любого $j \in \widetilde{y}^{-1}(1)$. Положить $t = t + |\widetilde{y}|$, $(l_t, S_t, K_t, A_t) = (l_{t-|\widetilde{y}|}, S_{t-|\widetilde{y}|}, K_{t-|\widetilde{y}|}, A_{t-|\widetilde{y}|})$. Перейти к 6.
6. Положить для $j \in N_{l_t}$

$$C_j = (A_t(j))^{-1}(1) \cap (N_n \setminus N_{S_t(j)}).$$

Если $C_j = \varnothing$ для всех j из N_{l_t}, то перейти к 7. В противном случае положить $t = t+1$, $l_t = \max(j : C_j \neq \varnothing)$, $S_t(l_t) = \min C_{l_t}$, $S_t|_{N_{l_t-1}} = S_{t-1}|_{N_{l_t-1}}$, $(K_t, A_t) = (K_{t-1}, A_{t-1})|_{N_{l_t}}$. Перейти к 3.

7. Закончить работу.

Доопределим таблицу $\widehat{T}_\pi$ на N_{m+1} так, что $\widehat{T}_\pi(m+1) = \widetilde{0}^n$. Текущими параметрами алгоритма $\mathbf{Д}_2(r)$ будут t, K_t, S_t, l_t, A_t, M_t, где t — номер проверяемого алгоритмом набора из E^n, l_t — длина этого набора. В «момент времени» t алгоритм проверяет, будет ли набор $\widetilde{S}_t$ из E^n, где $S_t : N_{l_t} \to N_n$, тестом таблицы $\widehat{T}_\pi$. Набор K_t, $K_t : N_{l_t} \to N_{m+1}$, и таблицы A_t, M_t из $\mathfrak{T}^*_{l_t,n}$ служат для организации работы алгоритма.

Описание работы алгоритма $\mathbf{Д}_2(r)$ на таблице $\widehat{T}_\pi$.

1. Если $\widehat{T}_\pi(1) = \widetilde{1}^n$, то $\widehat{T}_\pi$ не имеет тестов, перейти к 7. В противном случае перейти к 2.
2. Положить $t = 1$, $l_t = 1$, $K_t(1) = 1$, $A_t(1) = \widehat{T}_\pi(1) \oplus \widetilde{1}^n$, $M_t(1) = \widetilde{0}^n$, $S_t(1) = \min A_t(1)^{-1}(0)$. Перейти к 3.
3. Положить $\mathcal{E}$ равным $(\widehat{T}_\pi^{\widetilde{S}_t})^{-1}(\widetilde{1}^{l_t})$, если $K_t(l_t) < m+1$ и $\{m+1\}$ в противном случае. Если $\mathcal{E} \cap N_m \neq \varnothing$, то $\widetilde{S}_t$ — тест. Если $l_t = r-1$, то перейти к 5. В противном случае перейти к 4.
4. Положить $k = \min \mathcal{E}$ и $\widetilde{y} = (\widehat{T}_\pi(k) \vee M_t(l_t)) \oplus \widetilde{1}^n$. Если $\widetilde{y} = \widetilde{0}^n$, то перейти к 6. В противном случае положить $t = t+1$, $l_t = l_{t-1}+1$, $A_t(l_t) = \widetilde{y}$, $S_t(l_t) = \min \widetilde{y}^{-1}(1)$, $K_t(l_t) = k$, $M_t(l_t) = M_{t-1}(l_{t-1})$, $(K_t, S_t, A_t, M_t)|_{N_{l_{t-1}}} = (K_{t-1}, S_{t-1}, A_{t-1}, M_{t-1})$, перейти к 3.

5. Положить $\widetilde{y} = ((\bigvee_{j \in \mathcal{E}} \widehat{T}(i)) \vee M_t(l_t)) \oplus \widetilde{1}^n$. $\widetilde{S}_t \oplus \widetilde{0}^n_j$ — тест для любого $j \in \widetilde{y}^{-1}(1)$. Положить $t = t + |\widetilde{y}|$,
$$(l_t, S_t, K_t, A_t, M_t) = (l_{t-|\widetilde{y}|}, S_{t-|\widetilde{y}|}, K_{t-|\widetilde{y}|}, A_{t-|\widetilde{y}|}, M_{t-|\widetilde{y}|}).$$
Перейти к 6.
6. Положить для $j \in N_{l_t}$
$$C_j = (A_t(j))^{-1}(1) \cap (N_n \setminus N_{S_t(j)}).$$
Если $C_j \neq \varnothing$ для всех j из N_{l_t}, то перейти к 7. В противном случае положить $t = t + 1$, $l_t = \max\{j : C_j \neq \varnothing\}$, $M_t(l_t) = M_{t-1}(l_t) \vee \widetilde{0}^n_{S_{t-1}(l_t)}$, $S_t(l_t) = \min C_{l_t}$, $(S_t, M_t)|_{N_{l_t-1}} = (S_{t-1}, M_{t-1})|_{N_{l_t-1}}$, $(K_t, A_t) = (K_{t-1}, A_{t-1})|_{N_{l_t}}$. Перейти к 3.
7. Закончить работу.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 6.0.10. *Пусть π, $\pi \in P_{V_1,V_2}$, — произвольная нумерация ребер графа G_{V_1,V_2}, T — пара таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$. Тогда*

1. *Если $c > 1$, $\ln m \leqslant (\ln n)^c$, $a \in (0, 1/c)$ и $r =]\ln m - a \ln\ln m[$, то*
$$\mu^{\text{тт}}(\mathbf{Д}_1(r), \widehat{T}_\pi) \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \mu^{\text{т}}(\mathbf{Д}_2(r), \widehat{T}_\pi) \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{\text{КТТ}}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{\text{КТ}}_{V_1,V_2,n,r};$$
2. *Если $\varepsilon \in (0, 1)$, $\ln m \leqslant 2^{(\ln n)^{1-\varepsilon}}$, $b \in (1, \dfrac{1}{1-\varepsilon})$ и $r =]\ln m - b \ln\ln\ln m[$, то*
$$\mu^{\text{тт}}(\mathbf{Д}_1(r), \widehat{T}_\pi) \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \mu^{\text{т}}(\mathbf{Д}_2(r), \widehat{T}_\pi) \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{\text{КТТ}}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{\text{КТ}}_{V_1,V_2,n,r}.$$

Рассматривалась возможность применения в задаче построения коротких тестов длины не более r алгоритма Е. В. Дюковой. В параграфе 7.1 показано, что в условиях теоремы 6.0.10 этот алгоритм приводит к многократному перебору всех наборов длины не более r.

Глава 7

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ВЕСОВ ПРИЗНАКОВ

7.1. Некоторые предварительные оценки

В этом параграфе вводятся некоторые понятия и доказывается ряд утверждений технического характера, которые будут использоваться в дальнейшем.

Как и в предыдущей части, будем считать функцию $\binom{k}{r}$ определенной для любой пары (k, r) из $\mathbb{R}_+ \otimes [0, k]$, полагая $\binom{k}{r} = \Gamma(k+1)/(\Gamma(r+1)\cdot\Gamma(k-r+1))$, где Γ — гамма-функция.

Мы будем использовать асимптотическое разложение — формулу Стирлинга $\Gamma(x+1) \sim_x e^{-x}x^x\sqrt{2\pi x}$.

Напомним определения функций ψ и $\widetilde{\psi}$, $\psi(x) = -x\ln x - (1-x)\ln(1-x)$, $\psi : (0,1) \to (0,1)$, и $\psi(\widetilde{\psi}(x)) = x$, $\widetilde{\psi} : (0,1) \to (0,1/2)$. Схематично эти функции изображены на рис. 2.1.

Согласно утверждению 2.1.1 при $r \gg_n 1$ и $n - r \gg_n 1$ выполнено

$$\binom{n}{r} = \sqrt{n/(2\pi r(n-r))}\cdot 2^{\psi(\frac{r}{n})n}.$$

Утверждение 7.1.1. *Если* $\varepsilon \in (0, 1/2)$ *и* $0 \leqslant r \leqslant \varepsilon n$, $r, n \in \mathbb{N}$, *то* $\binom{n}{r} \leqslant_n 2^{\psi(\varepsilon)n}$.

Доказательство. Так как $[\varepsilon n] \leqslant n/2$, то $\binom{n}{r} \leqslant_n \binom{n}{[\varepsilon n]}$ и из утверждения 2.1.1 следует

$$\binom{n}{r} \leqslant_n 2\sqrt{n/(2\pi[\varepsilon n](n-[\varepsilon n]))}\cdot 2^{\psi(\frac{[\varepsilon n]}{n})\cdot n} \leqslant_n 2^{\psi(\varepsilon)\cdot n}.$$

Утверждение 7.1.1 доказано. □

Утверждение 7.1.2. *Если* c_1 *— константа и* $0 \leqslant r \leqslant \dfrac{c_1 n}{\ln^2 n}$, $r, n \in \mathbb{N}$, *то* $\binom{n}{r} \leqslant_n 2^{n/\ln n}$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\binom{n}{r} &\leqslant_n \exp\{n\ln n-(n-r)\ln(n-r)-r\ln r\}\leqslant_n\\ &\leqslant_n \exp\left\{n\ln\left(1+\frac{r}{n-r}\right)+r\ln\frac{n-r}{r}\right\}\leqslant_n\\ &\leqslant_n \exp\left\{r\left(2+\ln\frac{n}{r}\right)\right\}\leqslant_n\\ &\leqslant_n \exp\left\{\frac{c_1 n}{\ln^2 n}(2+2\ln\ln n-\ln c_1)\right\}\leqslant_n 2^{n/\ln n}.\end{aligned}$$

Утверждение 7.1.2 доказано. □

Утверждение 7.1.3. *Если $n>1$, $n\geqslant t\geqslant 2$, то* $\sum\limits_{j=0}^{t}\binom{n}{j}\leqslant n^t$.

Доказательство. Число t — выборок с повторениями из N_n — равно r^t. Каждой выборке $\widetilde{i}=(i_1,\ldots,i_t)$ можно сопоставить набор $\widetilde{x}(\widetilde{i})$ из E^n такой, что

$$\widetilde{x}(\widetilde{i})^{-1}=\{i_1,\ldots,i_t\} \text{ и } 1\leqslant|\widetilde{x}(\widetilde{i})^{-1}(1)|\leqslant t.$$

То есть, $\sum\limits_{j=1}^{t}\binom{n}{j}\leqslant n^t$. Так как $t\geqslant 2$, то найдется набор из E_2^n, соответствующий не менее, чем двум выборкам.

Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{t}\binom{n}{j}+1=\sum_{j=0}^{t}\binom{n}{j}\leqslant n^t.$$

Утверждение 7.1.3 доказано. □

Утверждение 7.1.4. *Если $r\leqslant\ln^2 n$, то* $\sum\limits_{i=0}^{r-1}\binom{n}{r}\leqslant_n\dfrac{2r}{n}\binom{n}{r}$.

Доказательство. Положим $a_i=\binom{n}{i}$. Тогда при $i\leqslant r$

$$\frac{a_{i-1}}{a_i}=\frac{i}{n-i+1}\leqslant_n\frac{3r}{2n}$$

и

$$\sum_{i=0}^{r-1}\binom{n}{i}\leqslant\binom{n}{r}\frac{3r}{2n}\Big/\left(1-\frac{3r}{2n}\right)\leqslant_n\frac{2r}{n}\binom{n}{r}.$$

Утверждение 7.1.4 доказано. □

Утверждение 7.1.5. *Если A, B — конечные множества, $|A| = m$, $|B| = n$, $n > m > l \geqslant 0$, $\dfrac{m^2}{(n-m)l} \ll_n 1$ и $\mathcal{F}(A, B, l) = \{f : A \to B : |f(A)| < m - l\}$, то*

$$|\mathcal{F}(A, B, l)| \leqslant_n \frac{n^{m+1}}{n-m}\left(\frac{em^2}{n \max\{l, 1\}}\right)^{l+1}.$$

Доказательство. Число отображений f, для которых $|f(A)| = m - k$ не превосходит $a_k = \binom{n}{m-k}\binom{m}{k}(m-k)^k(m-k)!$. Если $l > 0$, то при $k > 0$

$$\begin{aligned}\frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{(m-k)(m-k-1)(m-k+1)^k}{(n-m+k+1)(k+1)(m-k)^k} \leqslant \\ &\leqslant \frac{(m-k)(m-k-1)}{(n-m+k+1)(k+1)} \leqslant \frac{2m^2}{(n-m)k}.\end{aligned}$$

Значит, при $k \geqslant l$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant \frac{2m^2}{(n-m)l} \ll_n 1.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=l+1}^{m-1} a_k \leqslant a_l \frac{2m^2}{(n-m)l} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{2m^2}{(n-m)l}} \leqslant_n a_l \frac{em^2}{(n-m)l};$$

$$a_l = \binom{n}{m-l}\binom{m}{l}(m-l)^l(m-l)! \leqslant \frac{n^{m-l}m^{2l}}{l!} \leqslant_n n^m\left(\frac{em^2}{nl}\right)^l.$$

Получаем

$$\sum_{k=l+1}^{m-1} a_k \leqslant \frac{n^{m+1}}{n-m}\left(\frac{em^2}{nl}\right)^{l+1}.$$

Если $l = 0$, то

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{m(m-1)}{n-m+1} \leqslant \frac{m^2}{n-m}.$$

При $k > 0$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leqslant \frac{(m-k)(m-k+1)}{(n-m+k+1)(k+1)} \leqslant \frac{m^2}{n-m}, \quad a_0 < n^m.$$

Аналогично получаем

$$\sum_{k=1}^{m-1} a_k \leqslant a_0 \frac{m^2}{n-m} \Big/ \left(1 - \frac{m^2}{n-m}\right) \leqslant n^m \frac{em^2}{n-m} = \frac{n^{m+1}}{n-m} \cdot \frac{em^2}{n}.$$

Утверждение 7.1.5 доказано. □

Утверждение 7.1.6. *Если* $|A| = m$, $|B| = 2^r$, $\delta \in (0, 1/2)$, $2^{r(1-2\delta)} \geqslant m \geqslant r^{\ln r}$, *то*

$$|\mathcal{F}(A, B, m^{1-\delta})| \leqslant_r 2^{rm} \exp\{-m^{1-2\delta}\}.$$

Доказательство. Из утверждения 7.1.5 следует, что

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}(A, B, m^{1-\delta})| &\leqslant 2^{rm} \left(\frac{em^2}{2^r [m^{1-\delta}]}\right)^{[m^{1-\delta}]} \leqslant_r \\ &\leqslant_r 2^{rm} \left(\frac{3}{m^\delta}\right)^{[m^{1-\delta}]} \leqslant_r 2^{rm} \exp\{-m^{1-2\delta}\}. \end{aligned}$$

Утверждение 7.1.6 доказано. □

Аналогично, из утверждения 7.1.5 следует

Утверждение 7.1.7. *Если* $|A| = m$, $|B| = 2^r$, $\delta \in (0, 1/2)$, *то*

$$|\mathcal{F}(A, B, 0)| \leqslant_r 2^{rm} \cdot \frac{3m^2}{2^r}.$$

В частности, $|\mathcal{F}(A, B, 0)| \leqslant_r 2^{rm} \cdot 2^{-r(1-\frac{\delta}{2})}$ *при* $r^{\ln r} \geqslant m > 2$.

Утверждение 7.1.8. *Пусть* $\delta \in (0, 1/2)$, $\frac{1}{n} \ll_n p < \frac{1}{2}$. *Тогда*

$$\sum_{k, |k-pn| \geqslant (np)^{1-\delta}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \leqslant_n \exp\left\{-\frac{1}{12}(np)^{1-2\delta}\right\}.$$

Доказательство. Положим $a_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Если $k \geqslant np + a(np)^{1-\delta}$, где $a > 0$, то

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p} \leqslant \frac{n-np}{np(1+a(np)^{-\delta})} \cdot \frac{p}{1-p} \leqslant 1 - \frac{a}{2}(np)^{-\delta}.$$

Следовательно, если $k =]np + (np)^{1-\delta}[$ и $l = [np + \frac{1}{2}(np)^{1-\delta}]$, то

$$\begin{aligned} \sum_{t \geqslant k} a_t &\leqslant_n a_k \cdot 2(np)^{1-\delta} \leqslant a_l \left(1 - \frac{1}{4}(np)^{-\delta}\right)^{k-l} \cdot 2(np)^\delta \leqslant_n \\ &\leqslant_n \exp\left\{-\frac{1}{9}(np)^{1-2\delta}\right\} \cdot 2(np)^\delta \leqslant_n \exp\left\{-\frac{1}{10}(np)^{1-2\delta}\right\}. \end{aligned}$$

Аналогично, если $k \leqslant np - a(np)^{1-\delta}$, где $a > 0$, то

$$\frac{a_{k-1}}{a_k} = \frac{k}{n-k+1} \cdot \frac{1-p}{p} \leqslant \frac{np(1-a(np)^{-\delta})}{n-np} \cdot \frac{1-p}{p} \leqslant 1 - a(np)^{-\delta}$$

и при $k = [np - (np)^{1-\delta}]$, $l =]np - \frac{1}{2}(np)^{1-\delta}[$ получаем

$$\sum_{t \leqslant k} a_t \leqslant a_k(np)^{\delta} \leqslant_n a_l \cdot \exp\Big\{-\frac{1}{5}(np)^{1-2\delta}\Big\}(np)^{\delta} \leqslant_n$$
$$\leqslant_n \exp\Big\{-\frac{1}{6}(np)^{1-2\delta}\Big\}.$$

В итоге имеем

$$\sum_{k, |k-np| \leqslant (np)^{1-\delta}} a_k \leqslant_n \exp\Big\{-\frac{1}{10}(np)^{1-2\delta}\Big\} + \exp\Big\{-\frac{1}{6}(np)^{1-2\delta}\Big\} \leqslant_n$$
$$\leqslant_n \exp\Big\{-\frac{1}{12}(np)^{1-2\delta}\Big\}.$$

Утверждение 7.1.8 доказано. □

Утверждение 7.1.9. *Если* $np < (\ln n)^{2\ln\ln n}$, $0 < p < \frac{1}{2}$, $\delta \in (0, 1)$, *то*

$$\sum_{k \geqslant n^{\sigma}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \leqslant_n \exp\{-n^{\delta/2}\}.$$

Доказательство. Обозначим $a_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Если $k \geqslant an^{\delta}$, где $a > 0$, то

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{n-k}{k+1} \cdot \frac{p}{1-p} \leqslant \frac{2(\ln n)^{2\ln\ln n}}{an^{\delta}} \leqslant_n n^{-\frac{\delta}{2}} \ll_n 1.$$

Следовательно,

$$\sum_{k \geqslant n^{\delta}} a_k \leqslant_n 2a_{]n^{\delta}[} \leqslant_n 2a_{]n^{\delta/2}[} \cdot n^{-\frac{\delta}{2} \cdot \frac{n^{\delta}}{2}} \leqslant_n \exp\{-n^{\frac{\delta}{2}}\}.$$

Утверждение 7.1.9 доказано. □

Утверждение 7.1.10. *Если* $p \in (0, 1/2)$, $D(n) \in \mathcal{B}$, $D(n) < \ln n$, $np \ll_n 1$, *то*

$$\sum_{i=0}^{[n-D(n)]} \binom{n}{i} p^{n-i} (1-p)^i \leqslant_r 2\Big(\frac{e\,np}{D(n)}\Big)^{D(n)}.$$

Доказательство. Положим $a_i = \binom{n}{i} p^{n-i}(1-p)^i$. Тогда при $i \leqslant n - D(n)$ $\dfrac{a_i}{a_{i+1}} = \dfrac{p(i+1)}{(1-p)(n-i)} \ll_n 1$. Следовательно,

$$\sum_{i=0}^{[n-D(n)]} a_i \leqslant_r 2a_{[n-D(n)]} \leqslant 2\binom{n}{]D(n)[} p^{]D(n)[} \leqslant_n$$

$$\leqslant_n 2\Big(\frac{e\,np}{]D(n)[}\Big)^{]D(n)[} \leqslant 2\Big(\frac{e\,np}{D(n)}\Big)^{D(n)}.$$

Утверждение 7.1.10 доказано. □

Как и ранее обозначим

$$H(x,y) = \exp\Big\{-\frac{x}{2^y}\Big\}\Big(1 - \exp\Big\{-\frac{x}{2^y}\Big\}\Big)^y.$$

Утверждение 7.1.11. *Если $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 \leqslant a_2$, то*

$$\inf_{x\in[a_1,a_2]} H(x,y) = \min(H(a_1,y), H(a_2,y)).$$

Доказательство. $H(x,y)$ — бесконечно дифференцируемая на $(-\infty,+\infty)$ по x функция при любом y,

$$\frac{\partial H(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{2^y}\exp\Big\{-\frac{x}{2^y}\Big\}\Big(1-\exp\Big\{-\frac{x}{2^y}\Big\}\Big)^y +$$

$$+\, y\exp\Big\{-\frac{x}{2^y}\Big\}\Big(1-\exp\Big\{-\frac{x}{2^y}\Big\}\Big)^{y-1}\cdot\frac{1}{2^y}\exp\Big\{-\frac{x}{2^y}\Big\} =$$

$$= \frac{1}{2^y}\exp\Big\{-\frac{x}{2^y}\Big\}\Big(1-\exp\Big\{-\frac{x}{2^y}\Big\}\Big)^{y-1}\cdot\Big((y+1)\exp\Big\{-\frac{x}{2^y}\Big\}-1\Big).$$

При всех действительных x, y

$$\frac{1}{2^y}\exp\Big\{-\frac{x}{2^y}\Big\}\Big(1-\exp\Big\{-\frac{x}{2^y}\Big\}\Big)^{y-1} > 0,$$

$h_2(x,y) = (y+1)\exp\Big\{-\dfrac{x}{2^y}\Big\} - 1$ — монотонно убывающая по x функция при любых y и $h_2(x,y) = 0$ при $x = 2^y\ln(y+1)$. То есть $H(x,y)$ не имеет локальных минимумов и, следовательно, для любых $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 \leqslant a_2$,

$$\inf_{x\in[a_1,a_2]} H(x,y) = \min(H(a_1,y), H(a_2,y)).$$

Утверждение 7.1.11 доказано. □

Положим
$$H^s(x_0, x_1, \dots, x_s, y) = H(x_0, y-s) \cdot \prod_{i=1}^{s} (1 - \exp\{-\frac{x_i}{2^{y-s}}\}).$$

Утверждение 7.1.12. *Если* $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 \leqslant a_2$, *то*
$$\inf_{x_i \in [a_1, a_2], i \in N_s} H^s(x_0, x_1, \dots, x_s, y) =$$
$$= \min(H^s(a_1, a_1, \dots, a_1, y), H^s(a_2, a_1, \dots, a_1, y)).$$

Доказательство. При любом y $H^s(x_0, x_1, \dots, x_s, y)$ — бесконечно дифференцируемая функция $s+1$ переменной. При $i \in N_s$
$$\frac{\partial H^s(x_0, x_1, \dots, x_s, y)}{\partial x_i} = H(x_0, y-s) \cdot \frac{1}{2^{y-s}} \exp\left\{-\frac{x_i}{2^{y-s}}\right\} \times$$
$$\times \prod_{j \in N_s \setminus \{i\}} \left(1 - \exp\left\{-\frac{x_i}{2^{y-s}}\right\}\right) > 0.$$

Следовательно, для любого $b \in \mathbb{R}$
$$\inf_{x_i \in [a_1, a_2], i \in N_s} H^s(b, x_1, \dots, x_s, y) = H^s(b, a_1, \dots, a_1, y).$$

Учитывая предыдущее утверждение, получаем
$$\inf_{x_i \in [a_1, a_2], i \in N_s} H^s(x_0, x_1, \dots, x_s, y) =$$
$$= \min(H^s(a_1, a_1, \dots, a_1, y), H^s(a_2, a_1, \dots, a_1, y)).$$

Утверждение 7.1.12 доказано. □

7.2. Оценки числа пар тестовых и тупиковых тестовых таблиц

Введем ряд обозначений, связанных с парами бинарных таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1, V_2, r}$.

Пусть $T \in \mathfrak{T}_{V_1, V_2, r}$. Обозначим через $A_j(T)$, $j = 1, 2$, множество $T_j(V_j) \subseteq E^r$; через $T^{\widetilde{x}}$, где $\widetilde{x} \in E_0^{r+}$, — пару таблиц $\pi_{\widetilde{x}} \circ T = (\pi_{\widetilde{x}} \circ T_1, \pi_{\widetilde{x}} \circ T_2) = (T_1^{\widetilde{x}}, T_2^{\widetilde{x}})$ из $\mathfrak{T}_{V_1, V_2, |\widetilde{x}|}$.

Положим $A_j^{\widetilde{x}}(T) = T_j^{\widetilde{x}}(V_j)$, $A_j^{\widetilde{x}} \subseteq E^{|\widetilde{x}|}$ и $B_j^{\widetilde{x}} = \{a \in \in V_j : |(T_j^{\widetilde{x}})^{-1}(T_j^{\widetilde{x}}(a))| = 1\}$, $B_j^{\widetilde{x}} \subseteq V_j$, $j = 1, 2$.

Очевидно, что для любого a из $B_j^{\widetilde{x}}$ набор $T_j(a) \leftrightarrow \widetilde{x}$ не принадлежит множеству $T_j(B_j^{\widetilde{x}})$.

Если $X \subseteq E_0^{r+}$, то обозначим $B_0(X) = \cap_{\widetilde{x} \in X} B_1^{\widetilde{x}}$.

Утверждение 7.2.1. *Если* $X \subseteq E_0^{r+}$, $Y \subseteq \cup_{\widetilde{x}\in X}\{\widetilde{y} \in E^r : \widetilde{y} \geqslant \widetilde{x}\}$, *то* $B_0(Y) \supseteq B_0(X)$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{x}, \widetilde{y} \in E_0^{r+}$ и $\widetilde{x} < \widetilde{y}$. Если для некоторого a из V_1 найдется такое b из V_1, что $b \neq a$ и $T_1^{\widetilde{y}}(a) = T_1^{\widetilde{y}}(b)$, то будет выполнено и $T_1^{\widetilde{x}}(a) = T_1^{\widetilde{x}}(b)$, так как $T_1^{\widetilde{x}} = \pi_{\pi_{\widetilde{y}}(\widetilde{x})} \circ T_1^{\widetilde{y}}$. Следовательно, $B_1^{\widetilde{y}} \supseteq B_1^{\widetilde{x}}$ и $\cap_{\widetilde{y}\geqslant\widetilde{x}} B_1^{\widetilde{y}} \supseteq B_1^{\widetilde{x}}$. Получаем

$$B_0(Y) = \cap_{\widetilde{x}\in X} \cap_{\,\widetilde{y}\in Y, \widetilde{y}\geqslant\widetilde{x}} \supseteq \cap_{\widetilde{x}\in X} B_1^{\widetilde{x}} = B_0(X).$$

Утверждение 7.2.1 доказано. □

Обозначим

$$\mathcal{F}_\delta^{\widetilde{x}} = \{T_1 \in \mathfrak{T}_{V_1,r} : |T_1^{\widetilde{x}}(V_1)| \geqslant m_1 - m_1^{1-\delta}\}$$

и

$$\mathfrak{T}_{V_1,r}^{\delta,l} = \{T_1 \in \mathfrak{T}_{V_1,r} : |B_0(E_{r-l}^r)| \geqslant m_1 - m_1^{1-\delta}\}, \quad l \in N_r.$$

Утверждение 7.2.2. *Пусть* $\delta \in (0, 1/4)$, $l = [\widetilde{\psi}(\delta/3)r]$. *Тогда*

а) *если* $r^{\ln r} \leqslant m_1 \leqslant 2^{r(1-3\delta)}$, *то*

$$|\mathfrak{T}_{V_1,r}^{\delta,l}| \geqslant_r 2^{rm_1}(1 - \exp\{-m_1^{1-3\delta}\}),$$

б) *если* $2 \leqslant m_1 < r^{\ln r}$, *то*

$$|\mathfrak{T}_{V_1,r}^{\delta,l}| \geqslant_r 2^{rm_1}(1 - 2^{-r(1-\delta)}).$$

Доказательство. Так как $(r-l)^{\ln(r-l)} < r^{\ln r}$ и $r(1-3\delta) < (r-l)(1-2\delta)$, то согласно утверждению 7.1.6 для любого $\widetilde{x}$ из E_{r-l}^r и δ из $(0, 1/4)$ выполнено

$$|\mathcal{F}_{2\delta}^{\widetilde{x}}| \geqslant_r 2^{(r-l)m_1}(1 - \exp\{-m_1^{1-2\delta}\}) \cdot 2^{lm_1}.$$

Если $T_1 \in \mathcal{F}_{2\delta}^{\widetilde{x}}$, то $|A_1^{\widetilde{x}}| \geqslant m_1 - m_1^{1-2\delta}$ и

$$|B_1^{\widetilde{x}}| \geqslant 2|A_1^{\widetilde{x}}| - m_1 \geqslant m_1 - 2m_1^{1-2\delta}.$$

Используя утверждение 7.2.2, получаем

$$|\cap_{\,\widetilde{x}\in E_{r-l}^r} \mathcal{F}_{2\delta}^{\widetilde{x}}| \geqslant 2^{rm_1}(1 - \binom{r}{\widetilde{\psi}(\delta/3)r} \exp\{-m_1^{1-2\delta}\}) \geqslant$$

$$\geqslant 2^{rm_1}(1 - 2^{\delta r/3}\exp\{-m_1^{1-2\delta}\}) \geqslant_r$$

$$\geqslant_r 2^{rm_1}(1 - \exp\{-m_1^{1-2\delta}\}).$$

Для всех таблиц T_1 из $\cap_{\widetilde{x}\in E^r_{r-l}}\mathcal{F}^{\widetilde{x}}_{2\delta}$ выполнено

$$|B_0(E^r_{r-l})| \geqslant m_1 - 2\binom{r}{l}m_1^{1-2\delta} \geqslant_r m_1 - 2^{1+\frac{\delta r}{3}}m_1^{1-2\delta} \geqslant_r m_1 - m_1^{1-\delta}$$

и $\mathfrak{T}^{\delta,l}_{V_1,r} \supseteq \cap_{\widetilde{x}\in E^r_{r-l}}\mathcal{F}^{\widetilde{x}}_{2\delta}$. Пункт б) доказывается аналогично с использованием утверждения 7.1.7.

Утверждение 7.2.2 доказано. □

Определим следующие множества:

$$\mathcal{U}_{0,l}(T_1) = T_1(B_0(E^r_{r-l})), \quad l \in N_r,$$

$$\mathcal{U}_{\widetilde{x},l}(T_1) = \mathcal{U}_{0,l}(T_1)\leftrightarrow\widetilde{x}, \quad l \in N_r,\ \widetilde{x}\in E^r,$$

$$\mathcal{U}_{i,l}(T_1) = \mathcal{U}_{0,l}(T_1)\leftrightarrow\widetilde{1}^r_i, \quad l \in N_r,\ i \in N_r,$$

$$A_{ji}(T_j) = A_j(T_j) \leftrightarrow \widetilde{1}^r_i, \quad i \in N_r,\ j \in N_2,$$

$$W(T_1) = A_1(T_1) \cup \Big(\cup_{i=1}^r A_{1i}(T_1)\Big),$$
$$D(T_1) = \cup_{i=1}^r (A_{1i}(T_1) \setminus \mathcal{U}_i(T_1)).$$

Запись $\mathfrak{T}^{\delta}_{V_1,r}, \mathcal{U}_0(T_1), \mathcal{U}_i(T_1), \mathcal{U}_{\widetilde{x}}(T_1)$ будет означать $\mathfrak{T}^{\delta,l}_{V_1,r}$ и т. д. для $l = [\widetilde{\psi}(\delta/3)r]$. Если позволяет контекст, то вместо $\mathcal{U}_0(T_1)$, $\mathcal{U}_i(T_1)$, $\mathcal{U}_{\widetilde{x}}(T_1)$, $A_j(T_1)$, $A_{ij}(T_1)$, $W(T_1)$, $D(T_1)$ будем писать $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_i$, $\mathcal{U}_{\widetilde{x}}$, A_j, A_{ij}, W, D.

Замечание 1. Из утверждений 7.2.1 и 7.2.2 следует, что для любой таблицы T_1 из $\mathfrak{T}^{\delta}_{V_1,r}$ и любых $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ из $\mathcal{U}_0(T_1)$ $\rho(\widetilde{x},\widetilde{y}) > [\widetilde{\psi}(\delta/3)r]$. Следовательно, для любых $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ из $E^{r+}_{r-[\widetilde{\psi}(\delta/3)r]/2}$ выполнено $\mathcal{U}_{\widetilde{x}}(T_1)\cap\mathcal{U}_{\widetilde{y}}(T_1) = \varnothing$.

Утверждение 7.2.3. *Пара таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$ будет тестовой тогда и только тогда, когда $A_1(T_1)\cap A_2(T_2) = \varnothing$. Пара таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$ будет тупиковой тестовой тогда и только тогда, когда $A_1(T_1)\cap A_2(T_2) = \varnothing$ и $A_{1i}(T_1)\cap A_2(T_2) = \varnothing$ для всех $i \in N_r$.*

Доказательство. Первая часть утверждения очевидна. Для доказательства второй части заметим, что если найдется i из N_r такое, что $A_{1i}(T_1)\cap A_2(T_2) = \varnothing$, то $\widetilde{1}^r_i$ будет тестом пары таблиц T. И обратно, условие $A_{1i}(T_1)\cap A_2(T_2) = \varnothing$ означает, что $\widehat{T}^{-1}(\widetilde{1}^r_i) = \varnothing$. Следовательно, для любого $\widetilde{x}$ из $E^r\setminus\{\widetilde{1}^r\}$ найдется такое i из N_r и ребро γ графа G_{V_1,V_2}, что $\widetilde{x} \leqslant \widetilde{1}_i^r = \widehat{T}(\gamma)$, т. е. $\widetilde{x}$ не будет тестом T.

Утверждение 7.2.3 доказано. □

Далее будем считать, что $m_1 \asymp_r m_2$, $m_1 \leqslant m_2$ и c — константа, $c > 1$.

Утверждение 7.2.4. *Если $\delta \in (0,1)$, $2^r \cdot r^s \geqslant m_1 m_2$, $m_1 \geqslant k \geqslant \geqslant m_1 - m_1^{1-\delta}$ и $r^{\ln r} \geqslant a \geqslant 0$, то*

$$2^{rm_2} \exp\Big\{-\frac{am_1m_2}{2^r}\Big\}(1 + 2^{\frac{-\delta r}{3}}) \geqslant_r (2^r - ak)^{m_2} \geqslant_r$$
$$\geqslant_r 2^{rm_2} \exp\Big\{-\frac{am_1m_2}{2^r}\Big\}(1 - 2^{\frac{-r}{3}}).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}(2^r - ak)^{m_2} \geqslant (2^r - am_1)^{m_2} &= \\ &= 2^{rm_2} \exp\Big\{m_2 \ln\Big(1 - \frac{am_1}{2^r}\Big)\Big\} \geqslant_r \\ &\geqslant_r 2^{rm_2} \exp\Big\{-\frac{am_1m_2}{2^r} - \frac{a^2m_1^2m_2^2}{2^{2r}}\Big\} \geqslant_r \\ &\geqslant_r 2^{rm_2} \exp\Big\{-\frac{am_1m_2}{2^r}\Big\}(1 - 2^{-\frac{r}{3}}).\end{aligned}$$

В другую сторону:

$$\begin{aligned}(2^r - ak)^{m_2} &\leqslant 2^{rm_2} \exp\Big\{m_2 \ln\Big(1 - \frac{a(m_1 - m_1^{1-\delta})}{2^r}\Big)\Big\} \leqslant \\ &\leqslant 2^{rm_2} \exp\Big\{-\frac{am_1m_2}{2^r} + \frac{am_1m_2}{2^r} m_1^{-\delta}\Big\} \leqslant_r \\ &\leqslant_r 2^{rm_2} \exp\Big\{-\frac{am_1m_2}{2^r}\Big\}(1 + 2^{-\frac{\delta r}{3}}).\end{aligned}$$

Утверждение 7.2.4 доказано. □

Утверждение 7.2.5. *Если $2^r r^3 \geqslant m_1 m_2 \geqslant 2^{r/c}$, $c > 1$, то*

$$|\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r}| \sim_r 2^{r(m_1+m_2)} \exp\Big\{-\frac{m_1m_2}{2^r}\Big\}.$$

Доказательство. Возьмем δ из $(0, 1/64)$. Пусть $\mathfrak{T}_1^\delta$ — множество пар таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$ таких, что $T_1 \notin \mathfrak{T}^\delta_{V_1,r}$. Из утверждения 7.2.2 следует, что $|\mathfrak{T}_1^\delta| \leqslant_r 2^{r(m_1+m_2)} \exp\{-m_1^{1-3\delta}\}$. Обозначим через $\mathfrak{T}_2^{\delta,\mathrm{TT}}$ множество тестовых пар таблиц T таких, что $T_1 \in \mathfrak{T}^{\delta}_{V_1,r}$. Для всех T из $\mathfrak{T}_2^{\delta,\text{тт}}$ выполнено $m_1 \geqslant |A_1| \geqslant m_1 - m_1^{1-\delta}$. Следовательно,

$$|\mathfrak{T}^{\delta}_{V_1,r}|(2^r - m_1 + m_1^{1-\delta})^{m_2} \geqslant |\mathfrak{T}_2^{\delta,\text{тт}}| \geqslant |\mathfrak{T}^{\delta}_{V_1,r}|(2^r - m_1)^{m_2}.$$

Из утверждений 7.2.2, 7.2.4 следует, что

$$|\mathfrak{T}_2^{\delta,\text{тт}}| \sim_r 2^{r(m_1+m_2)} \exp\Big\{-\frac{m_1m_2}{2^r}\Big\}.$$

Так как $\mathfrak{T}^{\text{т}}_{V_1,V_2,r} \subseteq \mathfrak{T}_2^{\delta,T} \cup \mathfrak{T}_1^{\delta}$ и $|\mathfrak{T}_1^{\delta}| \ll_r |\mathfrak{T}_2^{\delta,\text{тт}}|$, то

$$|\mathfrak{T}^{\text{т}}_{V_1,V_2,r}| \sim_r 2^{r(m_1+m_2)} \exp\Big\{-\frac{m_1m_2}{2^r}\Big\}.$$

□

Утверждение 7.2.6. *Если $2^r r^5 \geqslant m_1 m_2 \geqslant 2^{r/c}$, $c > 1$, то при $0 \leqslant \nu_j \leqslant r^4$, $j \in N_r$, выполнено*

$$\prod_{j=1}^{r}\binom{m_2}{\nu_j} \geqslant \binom{m_2}{\nu_1}\binom{m_2-\nu_1}{\nu_2}\dots\binom{m_2-\nu_1\ldots-\nu_{r-1}}{\nu_r} \geqslant_r$$

$$\geqslant_r (1-2^{-\frac{r}{3}})\prod_{j=1}^{r}\binom{m_2}{\nu_j}.$$

Доказательство. Левое неравенство очевидно. Докажем правое: если $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_r$, то

$$\binom{m_2}{\nu_1}\binom{m_2-\nu_1}{\nu_2}\dots\binom{m_2-\nu_1\ldots-\nu_{r-1}}{\nu_r} =$$

$$= \binom{m_2}{\nu_1}\prod_{j=2}^{r}\binom{m_2}{\nu_j}\prod_{i=0}^{\sum_{k=1}^{j}\nu_k-1}\Big(1-\frac{\nu_j}{m_2-i}\Big) \geqslant$$

$$\geqslant \binom{m_2}{\nu_1}\prod_{j=2}^{r}\binom{m_2}{\nu_j}\Big(1-\frac{\nu_j}{m_2-\nu}\Big)^{\nu} \geqslant_r$$

$$\geqslant_r \Big(1-\frac{2\nu^2}{m_2}\Big)\prod_{j=1}^{r}\binom{m_2}{\nu_j} \geqslant_r (1-2^{-\frac{r}{3}})\prod_{j=1}^{r}\binom{m_2}{\nu_j}.$$

Утверждение 7.2.6 доказано. □

Утверждение 7.2.7. *Если* $\delta \in (0,1)$, $2^r r^3 \geqslant m_1 m_2 \geqslant 2^{r/c}$, $c > 1$, $m_1 \geqslant k \geqslant m_1 - m_1^{1-\delta}$, $r^{\ln r} \geqslant a \geqslant 0$, *то*

$$\left(\exp\left\{\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\} - 1\right)(1 + 2^{-r/4}) \geqslant_r \sum_{i=1}^{m_2} k^i (2^r - ak)^{-i} \binom{m_2}{i} \geqslant$$
$$\geqslant \sum_{i=1}^{r^4} k^i (2^r - ak)^{-i} \binom{m_2}{i} \geqslant_r \left(\exp\left\{\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\} - 1\right)(1 - 2^{-(\delta r)/4}).$$

Доказательство:

$$\sum_{i=1}^{r^4} k^i (2^r - ak)^{-i} \binom{m_2}{i} \geqslant \sum_{i=1}^{r^4} (m_1 - m_1^{1-\delta})^i 2^{-r_i} \binom{m_2}{i} \geqslant$$
$$\geqslant (1 - r^4 m_1^{-\delta}) \sum_{i=1}^{r^4} m_1^i 2^{-r_i} \binom{m_2}{i}.$$

Обозначим $a_i = m_1^i \cdot 2^{-r_i} \binom{m_2}{i}$. При $i > \left]\dfrac{r^4}{2}\right[$

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{m_1(m_2 - i)}{2^r(i+1)} \leqslant \frac{m_1 m_2}{2^r i} \leqslant_r \frac{3}{r};$$

$$\sum_{i \geqslant r^4} a_i \leqslant_r a_{[r^4]} \frac{1}{1 - \frac{3}{r}} \leqslant_r a_{]r^4/2[} \left(\frac{3}{r}\right)^{r^4/3} \leqslant_r \exp\left\{-\frac{r^4}{4} \ln r\right\} \sum_{i=1}^{m_2} a_i.$$

Но

$$\sum_{i=1}^{m_2} a_i = \left(1 + \frac{m_1}{2^r}\right)^{m_2} - 1 = \exp\left\{m_2 \ln\left(1 + \frac{m_1}{2^r}\right)\right\} - 1 \geqslant_r$$
$$\geqslant_r \exp\left\{\frac{m_1 m_2}{2^r} - \frac{m_1^2 m_2}{2^{2r}}\right\} - 1 \geqslant_r$$
$$\geqslant_r \exp\left\{\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\} - \exp\left\{\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\} \frac{m_1^2 m_2}{2^{2r}} - 1 =$$
$$= \left(\exp\left\{\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\} - 1\right)\left(1 - \frac{m_1^2 m_2}{2^{2r}} \Big/ \left(1 - \exp\left\{-\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\}\right)\right).$$

Если $\dfrac{m_1 m_2}{2^r} \geqslant \dfrac{1}{r}$, то

$$1 - \frac{m_1^2 m_2}{2^{2r}} \Big/ \left(1 - \exp\left\{-\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\}\right) \geqslant_r 1 - 2^{-(2r)/5} / 2^{-r} \geqslant_r 1 - 2^{-r/3}.$$

Если $\dfrac{m_1 m_2}{2^r} < \dfrac{1}{r}$, то

$$1-\frac{m_1^2 m_2}{2^{2r}}\Big/\left(1-\exp\left\{-\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\}\right) \geqslant_r 1-\frac{m_1^2 m_2}{2^{2r}}\Big/\frac{m_1 m_2}{2^{r+1}} \geqslant_r 1-2^{-r/3}.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{r^4} a_i \geqslant_r \left(1-\exp\left\{-\frac{r^4}{4}\ln r\right\}\right)(1-2^{-r/3})\left(\exp\left\{\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\}-1\right) \geqslant_r$$
$$\geqslant_r (1-2^{-r/4})\left(\exp\left\{\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\}-1\right).$$

Так как $1-r^4 m_1^{-\delta} \geqslant_r 1-2^{-(\delta r)/3}$, то

$$\sum_{i=1}^{r^4} k^i(2^r-ak)^{-i}\binom{m_2}{i} \geqslant_r (1-2^{-(\delta r)/4})\left(\exp\left\{\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\}-1\right).$$

С другой стороны,

$$\sum_{i=1}^{r^4} k^i(2^r-ak)^{-i}\binom{m_2}{i} \leqslant \left(1+\frac{k}{2^r-ak}\right)^{m_2} \leqslant$$
$$\leqslant \exp\left\{\frac{m_1 m_2}{2^r-am_1}\right\}-1 \leqslant_r \exp\left\{\frac{m_1 m_2}{2^r}+\frac{2am_1^2 m_2}{2^{2r}}\right\}-1 \leqslant_r$$
$$\leqslant_r \left(\exp\left\{\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\}-1\right)\left(1-\frac{2am_1^2 m_2}{2^{2r}}\Big/\left(1-\exp\left\{-\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\}\right)\right) \leqslant_r$$
$$\leqslant_r (1+2^{-r/4})\left(\exp\left\{\frac{m-1m_2}{2^r}\right\}-1\right)$$

аналогично нижней оценке.

Утверждение 7.2.7 доказано. □

Утверждение 7.2.8. *Если* $\delta \in (0, 1/16)$, $2^r r^3 \geqslant m_1 m_2 \geqslant 2^{r/c}$, $c >$ > 1, *то*

$$|\mathfrak{T}^{\text{тт}}_{V_1,V_2,r}| \geqslant_r 2^{r(m_1+m_2)} H(m_1 m_2, r)(1-2^{-(\delta r)/5}).$$

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{T}^{\delta,\text{тт}}$ множество таких тупиковых тестовых пар таблиц T, что $T_1 \in \mathfrak{T}^{\delta}_{V_1,r}$ и для всех i

из N_r $|T^{-1}(\mathcal{U}_i)\cap V_2|\leqslant r^4$ и $T^{-1}(D)\cap V_2=\varnothing$. Число таких пар таблиц T из $\mathfrak{T}^{\delta,\text{тт}}$, что выполнено $T_1=f_1$, $f_1\in\mathfrak{T}^{\delta}_{V_1,r}$ равно

$$\sum_{r^4\geqslant\nu_i\geqslant 1, i\in N_r}|\mathcal{U}_1(f)|^{\nu_1}\cdot\ldots\cdot|\mathcal{U}_r(f)|^{\nu_r}(2^r-|W(f)|)^{m_2-\nu}\times$$
$$\times\binom{m_2}{\nu_1}\binom{m_2-\nu_1}{\nu_2}\cdot\ldots\cdot\binom{m_2-\nu_1-\ldots-\nu_{r-1}}{\nu_r}\geqslant$$
$$\geqslant(2^r-(r+1)m_1)^{m_2}\cdot\sum_{r^4\geqslant\nu_i\geqslant 1, i\in N_r}(m_1-m_1^{1-\delta})^{\nu}(2^r-(r+1)m_1)^{-\nu}\times$$
$$\times\binom{m_2}{\nu_1}\binom{m_2-\nu_1}{\nu_2}\cdot\ldots\cdot\binom{m_2-\nu_1-\ldots-\nu_{r-1}}{\nu_r},$$

где $\nu=\nu_1+\ldots+\nu_r$. Применяя утверждения 7.2.4, 7.2.6, 7.2.7 получаем

$$|\mathfrak{T}^{\delta,\text{тт}}|\geqslant_r 2^{rm_1}(1-\exp\{-m_1^{1-3\delta}\})2^{rm_2}\exp\left\{-\frac{(r+1)m_1m_2}{2^r}\right\}\times$$
$$\times(1-2^{-\frac{r}{3}})\cdot\left(\sum_{i=1}^{r^4}(m_1-m_1^{1-\delta})^i(2^r-(r+1)m_1)^{-i}\binom{m_2}{i}\right)^r\times$$
$$\times(1-2^{-\frac{r}{3}})\geqslant_r 2^{r(m_1+m_2)}\exp\left\{-\frac{(r+1)m_1m_2}{2^r}\right\}(1-2^{-r/4})\times$$
$$\times\left(\exp\left\{\frac{m_1m_2}{2^r}\right\}-1\right)^r(1-r2^{-(\delta r)/4})\geqslant_r$$
$$\geqslant_r 2^{r(m_1+m_2)}H(m_1m_2,r)(1-2^{(-\delta r)/5}).$$

Утверждение 7.2.8 доказано. □

Утверждение 7.2.9. *Если* $\delta\in(0,1/10)$, $2^r r^3\geqslant m_1m_2\geqslant 2^r/r^5$, *то*

$$|\mathfrak{T}^{\text{тт}}_{V_1,V_2,r}|\leqslant_r 2^{r(m_1+m_2)}H(m_1m_2,r)(1+2^{-(\delta r)/10}).$$

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{T}^{\delta}_1$ множество таких пар таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$, что $T_1\notin\mathfrak{T}^{\delta}_{V_1,r}$. Из утверждения 7.2.2 следует, что

$$|\mathfrak{T}^{\delta}_1|\leqslant_r 2^{r(m_1+m_2)}\exp\{-m_1^{1-3\delta}\}.$$

Согласно утверждению 7.1.11 $H(m_1m_2,r)\geqslant_r e^{-r^3}/2$. Следовательно,

$$|\mathfrak{T}^{\delta}_1|\leqslant_r 2^{r(m_1+m_2)}H(m_1m_2,r)\exp\{-2^{r/4}\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{T}_2^{\delta,\text{тт}}$ множество тупиковых тестовых пар таблиц T таких, что $T_1 \in \mathfrak{T}^{\delta}_{V_1,r}$ и $A_2 \cap D = \varnothing$. Аналогично предыдущему утверждению (используя утверждения 7.2.4 и 7.2.7) получаем

$$|\mathfrak{T}_2^{\delta,\text{тт}}| \leqslant |\mathfrak{T}^{\delta}_{V_1,r}| \sum_{\substack{\nu_i \geqslant 1, i \in N_r,\\ m_2 \geqslant \nu}} m_1^{\nu}(2^r - (r+1)(m_1 - m_1^{1-\delta}))^{m_2-\nu} \times$$

$$\times \binom{m_2}{\nu_1} \cdot \ldots \cdot \binom{m_2}{\nu_r} \leqslant_r 2^{rm_1}(2^r - (r+1)(m_1 - m_1^{1-\delta}))^{m_2} \times$$

$$\times \Big(\sum_{i=1}^{m_2} m_1^i (2^r - (r+1)m_1)^{-i} \binom{m_2}{i} \Big)^r \leqslant_r$$

$$\leqslant_r 2^{r(m_1+m_2)} H(m_1 m_2, r)(1 + 2^{-(\delta r)/3})(1 + 2^{-r/4})^r \leqslant_r$$

$$\leqslant_r 2^{r(m_1+m_2)} H(m_1 m_2, r)(1 + 2^{-(\delta r)/4}).$$

Обозначим через $\mathfrak{T}_3^{\delta,\text{тт}}$ множество тупиковых тестовых пар таблиц T таких, что $T_1 \in \mathfrak{T}^{\delta}_{V_1,r}$, $A_2 \cap D \neq \varnothing$ и для любого $\widetilde{x}$ из D число таких множеств A_{1i}, $i \in N_r$, что $\widetilde{x} \in A_{1i}$ меньше $r/\ln^2 r$, а множество пар таблиц T из $\mathfrak{T}_3^{\delta,\text{тт}}$, для которых выполнено $|T_2^{-1}(D) \cap V_2| = k$ через $\mathfrak{T}_{3,k}^{\delta,\text{тт}}$.

Так как пары таблиц из $\mathfrak{T}_{3,k}^{\delta,\text{тт}}$ тестовые, то

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{T}_{3,k}^{\delta,\text{тт}}| \quad &\leqslant \quad 2^{rm_1} \binom{m_2}{k} \big(\max_{T \in \mathfrak{T}_{3,k}^{\delta,\text{тт}}} |D| \big)^k \big(2^r - \min_{T \in \mathfrak{T}_{3,k}^{\delta,\text{тт}}} |A_1| \big)^{m_2-k} \leqslant_r \\
&\leqslant_r \quad 2^{rm_1}(2^r - m_1 + m_1^{1-\delta})^{m_2} \Big(\frac{m_2(r+1)m_1^{1-\delta}}{2^r - m_1} \Big)^k \leqslant_r \\
&\leqslant_r \quad 2^{rm_1}(2^r - m_1 + m_1^{1-\delta})^{m_2} (2^{1-r} r m_2 m_1^{1-\delta})^k.
\end{aligned}$$

Обозначим $2^{1-r} r m_2 m_1^{1-\delta}$ через a. Так как $a <_r 2^{-\frac{5}{12}\delta r}$ и $k \leqslant m_2$, то

$$\sum_{k \geqslant]\ln^2 r[} a^k \leqslant_r m_2 a^{]\ln^2 r[} \leqslant_r m_2 2^{-\frac{5}{12}\delta r \ln^2 r} \leqslant_r 2^{-\frac{\delta}{4} r \ln^2 r}.$$

Из утверждения 7.2.4 следует, что

$$(2^r - m_1 + m_1^{1-\delta})^{m_2} \leqslant_r 2 \cdot 2^{rm_2} \exp\Big\{ -\frac{m_1 m_2}{2^r} \Big\}.$$

Учитывая, что $(1-\exp\{-m_1m_2/2^r\})^r \geqslant_r 2^{-6r\ln r}$, получаем

$$\sum_{k=]\ln^2 r[}^{m_2} |\mathfrak{T}_{3,k}^{\delta,\text{тт}}| \leqslant_r 2^{r(m_1+m_2)} \exp\Big\{-\frac{m_1m_2}{2^r}\Big\} 2^{1-\frac{\delta}{4}r\ln^2 r} \leqslant_r$$
$$\leqslant_r 2^{r(m_1+m_2)} H(m_1m_2, r) 2^{-\frac{\delta}{4}r\ln^2 r}.$$

Рассмотрим $\mathfrak{T}_{3,k}^{\delta,\text{тт}}$, где $]\ln^2 r[> k \geqslant 1$. Множество $A_2 \cap D$ пересекается не более, чем с $kr/\ln^2 r$ множествами A_{1i}, $i \in N_r$. Для того чтобы пара таблиц T из $\mathfrak{T}_{3,k}^{\delta,\text{тт}}$ была тупиковой тестовой, необходимо, чтобы A_2 пересекалась не менее, чем с $]r-kr/\ln^2 r[$ множествами $\mathcal{U}_i$. Обозначим $]r-kr/\ln^2 r[$ через l_k. Число пар таблиц из $\mathfrak{T}_3^{\delta,\text{тт}}$ таких, что $A_2 \cap \mathcal{U}_i = \varnothing$ для всех i из N_{l_k} и $|T_2^{-1}(D) \cap V_2| = k$ не превосходит

$$2^{rm_1} \sum_{\nu_i \geqslant 1, i \in N_{l_k}} m_1^{\nu}(rm_1^{1-\delta})^k (2^r - (l_k+1) \times$$
$$\times (m_1 - m_1^{1-\delta}))^{m_2-\nu-k} \binom{m_2}{\nu_1} \cdots \binom{m_2}{\nu_{l_k}} \binom{m_2}{k},$$

где $\nu = \nu_1 + \cdots + \nu_{l_k}$.

Таким образом, применяя утверждения 7.2.4, 7.2.6, 7.2.7, получаем

$$|\mathfrak{T}_{3,k}^{\delta,\text{тт}}| \leqslant_r \binom{r}{l_k} 2^{r(m_1+m_2)} \exp\Big\{-\frac{(l_k+1)m_1m_2}{2^r}\Big\} \times$$
$$\times \Big(\exp\Big\{-\frac{m_1m_2}{2^r}\Big\} - 1\Big)^{l_k} (1+2^{(-\delta r)/4}) a^k \leqslant_r$$
$$\leqslant_r \binom{r}{l_k} 2^{r(m_1+m_2)} H(m_1m_2, r) \times$$
$$\times \Big(1 - \exp\Big\{-\frac{m_1m_2}{2^r}\Big\}\Big)^{l_k - r} 2^{(-\delta/3)kr}.$$

Но при $l_k \geqslant r - kr/\ln^2 r$

$$\Big(1 - \exp\Big\{-\frac{m_1m_2}{2^r}\Big\}\Big)^{l_k-r} \leqslant_r \Big(\frac{1}{2^{r^5}}\Big)^{-kr/\ln^2 r} \leqslant_r 2^{6kr/\ln^2 r} \leqslant_r 2^{(\delta/6)kr}.$$

Так как $\binom{r}{l_k} < 2^r$, то при $]\ln^2 r[> k > \dfrac{12}{\delta}$

$$|\mathfrak{T}_{3,k}^{\delta,\text{ТТ}}| \leqslant_r 2^{r(m_1+m_2)} H(m_1 m_2, r) 2^{-r}.$$

При $k \leqslant \dfrac{12}{\delta}$ имеем $l_k \leqslant r - 12r/(\delta \ln^2 r)$ и, согласно утверждению 7.1.2, получаем

$$|\mathfrak{T}_{3,k}^{\delta,\text{ТТ}}| \leqslant 2^{r(m_1+m_2)} H(m_1 m_2, r) 2^{r/\ln r - \delta r k/6} \leqslant_r$$
$$\leqslant_r 2^{r(m_1+m_2)} H(m_1 m_2, r) 2^{-\delta r/7}.$$

Таким образом,

$$|\mathfrak{T}_{3,k}^{\delta,\text{ТТ}}| \leqslant_r 2^{r(m_1+m_2)} H(m_1 m_2, r) \times$$
$$\times \left(\frac{12}{\delta} 2^{-\delta r/7} + \ln^2 r 2^{-r} + 2^{(-\delta/4) r \ln^2 r}\right) \leqslant_r$$
$$\leqslant_r 2^{r(m_1+m_2)} H(m_1 m_2, r) 2^{-\delta r/8}.$$

Обозначим через $\mathfrak{T}_4^{\delta,\text{ТТ}}$ множество тупиковых тестовых пар таблиц, для которых $T_1 \in \mathfrak{T}_{V_1,r}^{\delta}$ и найдутся $\widetilde{x}$ из D и по крайней мере $l =]r/\ln^2 r[$ множеств A_{1i}, $i \in N_r$, таких, что $\widetilde{x} \in A_{1i}$. Это означает, что существуют l различных элементов $\widetilde{1}_{i_1}^r, \ldots, \widetilde{1}_{i_l}^r$ из $\widetilde{\mathcal{E}}^r$, таких, что $\widetilde{x} \leftrightarrow \widetilde{1}_{i_j}^r \in A_1$, $j \in N_l$. То есть, в A_1 найдутся l различных наборов, отличающихся от $\widetilde{x}$ лишь в одной координате. Таких таблиц на V_1 можно задать не больше, чем

$$\binom{m_1}{l} 2^{r(m_1-l)} 2^r \binom{r}{l} \leqslant 2^{rm_1} m_1^l 2^{-r(l-2)} \leqslant 2^{rm_1 - \frac{r^2}{2\ln^2 r}}.$$

Таким образом,

$$|\mathfrak{T}_4^{\delta,\text{ТТ}}| \leqslant 2^{rm_1 - \frac{r^2}{2\ln^2 r}} (2^r - m_1 + m_1^{1-\delta})^{m_2} \leqslant_r$$
$$\leqslant_r 2^{r(m_1+m_2)} \exp\left\{-\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\} 2^{-\frac{r^2}{3\ln^2 r}} \leqslant_r$$
$$\leqslant_r 2^{r(m_1+m_2)} H(m_1 m_2, r) 2^{-r^{3/2}}.$$

Так как $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}^{\text{ТТ}} \subseteq \mathfrak{T}_1^{\delta} \cup \mathfrak{T}_2^{\delta,\text{ТТ}} \cup \mathfrak{T}_3^{\delta,\text{ТТ}} \cup \mathfrak{T}_4^{\delta,\text{ТТ}}$, то

$$|\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}^{\text{ТТ}}| \leqslant_r 2^{r(m_1+m_2)} H(m_1 m_2, r)(1 + 2^{-\frac{\delta r}{10}}).$$

Утверждение 7.2.9 доказано. $\square$

Утверждение 7.2.10. *Если $T \in \mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$ и G' — подграф графа G_{V_1,V_2} такой, что $\widehat{T}(X(G')) \subseteq \mathcal{E}^r$ и $|\widehat{T}(X(G'))| = |X(G')| > 0$, то G' — лес.*

Доказательство. На ребрах графа G' таблица $\widehat{T}$ принимает все значения из $\mathcal{E}^r$ не более, чем по одному разу. Если $|X(G')| = 1$, то G' — лес. Предположим, что G' при $|X(G')| > 1$ не является лесом. Тогда найдутся ребра графа G' $\gamma_1 = (a_1, b_1)$, $\gamma_2 = (a_2, b_1)$, $\gamma_3 = (a_2, b_2)$, $\gamma_4 = (a_3, b_2)$, $\cdots$, $\gamma_{2t} = (a_1, b_t)$, $a_i \in V_1$, $b_i \in V_2$, $i \in N_t$, $2t \leqslant r + 1$, образующие простой цикл. Так как $2t > 1$, то можно считать, что $\widehat{T}(\gamma_1) \neq \widetilde{1}^r$. Пусть $\widehat{T}(\gamma_1) = \widetilde{1}^r_j$. Тогда $T_1(a_1)(j) \neq T_2(b_1)(j)$. Но $\widehat{T}$ на $\gamma_2, \ldots, \gamma_{2t}$ принимает значения из $\widetilde{\mathcal{E}}^r$, не равные $\widetilde{1}^r_j$, т. е. $\widehat{T}(\gamma_i)(j) = 1$, $i \in N_{2t} \setminus \{1\}$.

Следовательно,

$$T_2(b_1)(j) = T_1(a_2)(j) = \ldots = T_2(b_t)(j) = T_1(a_t)(j).$$

Получили противоречие, значит граф G' не содержит циклов.

Утверждение 7.2.10 доказано. □

Утверждение 7.2.11. *Если $2^r/r^3 \geqslant m_1 m_2$, то*

$$|\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{V_1,V_2,r}| \leqslant_r 2^{r(m_1+m_2)} H(m_1 m_2, r)\Big(1 + \frac{1}{r^2}\Big).$$

Доказательство. Если $T \in \mathfrak{T}^{\text{TT}}_{V_1,V_2,r}$, то найдется подграф G' графа G_{V_1,V_2} такой, что $|X(G')| = r$ и $\widehat{T}(X(G')) = \widetilde{\mathcal{E}}^r$. Из предыдущего утверждения следует, что G' является лесом. Значения T_1, T_2 на вершинах из $\mathcal{P}(G')$ задать таким образом, чтобы было выполнено $\widehat{T}(X(G')) = \widetilde{\mathcal{E}}^r$, можно $2^{r-k(G')}r!$ способами. Число тупиковых тестовых таблиц, для которых $\widehat{T}(X(G')) = \widetilde{\mathcal{E}}^r$, не будет превосходить $2^{rk(G')}r!2^{r(m_1+m_2-r-k(G'))} = 2^{r(m_1+m_2)-r^2}r!$, так как $|\mathcal{P}(G')| = r + k(G')$. Если $m_1 m_2 \geqslant r$, то число r-лесов графа G_{V_1,V_2} не превосходит $\binom{m_1 m_2}{r} \leqslant \dfrac{m_1^r m_2^r}{r!}$, в противном случае таких лесов не существует. Следовательно,

$$|\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{V_1,V_2,r}| \leqslant 2^{r(m_1+m_2)-r^2} r! \,\frac{m_1^r m_2^r}{r!} = 2^{r(m_1+m_2)}\Big(\frac{m_1 m_2}{2^r}\Big)^r.$$

При $m_1 m_2 < 2^r/r^3$

$$\exp\Big\{-\frac{m_1 m_2}{2^r}\Big\} \geqslant \exp\Big\{-\frac{1}{r^3}\Big\} \geqslant 1 - r^{-3}$$

и

$$\Big(1 - \exp\Big\{-\frac{m_1 m_2}{2^r}\Big\}\Big)^r \geqslant_r \Big(\frac{m_1 m_2}{2^r} - \frac{1}{2}\Big(\frac{m_1 m_2}{2^r}\Big)^2\Big)^r \geqslant \geqslant \Big(\frac{m_1 m_2}{2^r}\Big)^r \Big(1 - \frac{1}{2r^2}\Big).$$

Таким образом,

$$|\mathfrak{T}^{\text{ТТ}}_{V_1,V_2,r}| \leqslant 2^{r(m_1+m_2)}\Big(\frac{m_1 m_2}{2^r}\Big)^r \leqslant_r 2^{r(m_1+m_2)} H(m_1 m_2, r)\Big(1 + \frac{1}{r^2}\Big).$$

Утверждение 7.2.11 доказано. □

Из утверждений 7.2.8, 7.2.9, 7.2.11 непосредственно следует

Утверждение 7.2.12. *Если $r^3 2^r \geqslant m_1 m_2 \geqslant 2^{r/c}$, $c > 1$, то*

$$|\mathfrak{T}^{\text{ТТ}}_{V_1,V_2,r}| \sim_r 2^{r(m_1+m_2)} H(m_1 m_2, r).$$

Перед дальнейшим изложением введем некоторые понятия.

Через $\widetilde{V}_i$, $\widetilde{V}_i = (V_i^1, \ldots, V_i^\nu)$, $i \in N_2$, $\nu \geqslant 1$, будем обозначать разбиение множества V_i на ν попарно непересекающихся подмножеств $V_i^1, \ldots, v_i^\nu$, считая, что $\cup_{j=1}^{\nu} V_i^j = V_i$. Положим $m_i^j = |V_i^j|$ и $\widetilde{m}_i = (m_i^1, \ldots, m_i^\nu)$, $i \in N_2$, $j \in N_\nu$. Если $\widetilde{a} = (a^1, \ldots, a^\nu)$ и $\widetilde{b} = (b^1, \ldots, b^\nu)$, то через $\widetilde{a} \cdot \widetilde{b}$ будем обозначать величину $\sum\limits_{j=1}^{\nu} a^j b^j$.

Через $\pi_{r,i}$, $\tau_{r,i}$ будем, соответственно, обозначать отображения, сопоставляющие набору $\widetilde{a}$ из E^r набор, состоящий из первых i и последних $r - i$ координат $\widetilde{a}$. Обозначим через μ_r, $\mu_r : E^r \to N_{2^r}$, такое отображение, что для любого $\widetilde{a}$ из E^r $\mu_r(\widetilde{a})$ равно увеличенному на единицу целому числу, двоичной записью которого является набор $\widetilde{a}$. Обозначим через $\mu_{r,i}$, $i \in N_r$, такое отображение N_{2^r} в N_{2^r}, что для любого k из N_{2^r} $\mu_{r,i}(k) = \mu_r(\mu_r^{-1}(k) \leftrightarrow \widetilde{1}_i^t)$, т.е. $\mu_{r,i}(k)$ дает номер набора, отличающегося от k-го в i-й компоненте. При $i > r$ и $i = 0$ положим $\mu_{r,i}(k) = k$. Очевидно, что $\mu_{r,i}$ — биекция N_{2^r} на N_{2^r} и $\mu_{r,i}(\mu_{r,i}(k)) = k$.

Если s — фиксированное целое число из N_r и $f \in \mathfrak{T}_{V_1,V_2,s}$, то через $\mathfrak{T}^f_{V_1,V_2,r}$ будем обозначать множество всех таких пар таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$, что $\pi_{r,s} \circ T = f$. Аналогично, через $\mathfrak{T}^{f_1}_{V_1,r}$, $f_1 \in \mathfrak{T}_{V_1,s}$ будем обозначать множество всех таблиц T_1 из $\mathfrak{T}_{V_1,r}$ таких, что $\pi_{r,s} \circ T_1 = f_1$. 2^s-разбиения $\widetilde{V}_1$, $\widetilde{V}_2$ множеств V_1, V_2 назовем порожденными парой таблиц f из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,s}$, если для всех $i \in N_2$, $j \in N_{2^s}$, $a \in V_i$, выполнено $a \in V_i^j$ тогда и только тогда, когда $\mu_s(f_i(a)) = j$.

Через T_i^j, где $j \in N_{2^s}$, а $\widetilde{V} = (V_i^1, \ldots, V_i^{2^s})$ — разбиения V_1, V_2, порожденные парой таблиц f, $f \in \mathfrak{T}_{V_1,V_2,s}$, обозначим таблицу $(\tau_{r,s} \circ T_i)|_{V_i^j}$, $T \in \mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$ и положим $A_i^j(T_i) = A_i(T_i^j)$, $i \in N_2$, $\mathcal{U}_i^j(T_1) = \mathcal{U}_i(T_1^j)$, $i \in \widetilde{N}_r$, $W^j(T_1) = W(T_1^j)$, $D^j(T_1) = D(T_1^j)$, $\Delta^j(T_1) = m_1^j - |\mathcal{U}_0^j(T_1)|$ и $\widetilde{\Delta}(T_1) = (\Delta^1(T_1), \ldots, \Delta^{2^s}(T_1))$. Если смысл будет ясен из контекста, будем писать просто $A_i^j, \mathcal{U}_i^j$ и т. д.

Если $\widetilde{V}_i = (V_i^1, \ldots, V_i^{2^s})$, $i \in N_2$, то обозначим через V_{ik}^j, $k \in N_r$, множество $V_i^{\mu_{s,k}(j)}$ и $\widetilde{V}_{ik} = (V_{ik}^1, \ldots, V_{ik}^{2^s})$. Аналогично, определяются вектора $\widetilde{m}_{ik}$ и $\widetilde{\Delta}_k$. При $k \in \widetilde{N}_r \setminus N_s$ $\widetilde{m}_{ik} = \widetilde{m}_i$ и $\widetilde{\Delta}_k = \widetilde{\Delta}$.

Если $\widetilde{V}_1$, $\widetilde{V}_2$ — 2^s-разбиения множеств V_1, V_2, то обозначим через $G_{\widetilde{V}_1,\widetilde{V}_2}$ подграф графа G_{V_1,V_2} такой, что $\mathcal{P}(G_{\widetilde{V}_1,\widetilde{V}_2}) = V_1 \cup V_2$, $X(G_{\widetilde{V}_1,\widetilde{V}_2}) = \cup_{j=1}^{2^s} X(G_{V_1^j,V_2^j})$. Аналогично вводятся графы $G_{\widetilde{V}_{1k},\widetilde{V}_2}$, $k \in N_r$. Назовем пару таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$ $(\widetilde{V}_1, \widetilde{V}_2)$-тестовой ($(\widetilde{V}_1, \widetilde{V}_2)$-тупиковой тестовой), если таблица $(\tau_{r,s} \circ \widehat{T})|_{X(G_{\widetilde{V}_1,\widetilde{V}_2})}$ является тестовой (тупиковой тестовой). Если f — пара таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,s}$, то назовем T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$ f-тестовой, если T является $(\widetilde{V}_1, \widetilde{V}_2)$-тупиковой тестовой и не является $(\widetilde{V}_{1k}, \widetilde{V}_2)$-тестовой ни для какого k из N_{2^s}, где $\widetilde{V}_1$, $\widetilde{V}_2$ — разбиения множеств V_1, V_2, порожденные парой таблиц f. Если G — подграф графа G_{V_1,V_2} и $X(G) = \varnothing$, то будем считать таблицу $\widehat{T}|_{X(G)}$ тестовой и не тупиковой тестовой.

Справедливо следующее

Утверждение 7.2.13. *Если $s \in N_{r-1}$, $f \in \mathfrak{T}_{V_1,V_2,s}$ и $T \in \mathfrak{T}^f_{V_1,V_2,r}$, то пара таблиц T будет тестовой тогда и только тогда, когда T является $(\widetilde{V}_1, \widetilde{V}_2)$-тестовой, и тупиковой тестовой тогда и только тогда, когда T является f-тестовой.*

Доказательство. Если $a \in V_1$, $b \in V_2$, то $f((a,b)) = \widetilde{1}^s$ тогда и только тогда, когда найдется такое j из N_{2^s}, что $a \in V_1^j$, $b \in V_2^j$. Значит,
$$\widehat{T}^{-1}(\mathcal{E}^r \setminus \cup_{i=1}^s \{\widetilde{1}_i^r\}) \subseteq \cup_{j=1}^{2^s} X(G_{V_1^j,V_2^j}).$$

Таблица $\tau_{r,s} \circ \widehat{T}|_{X(G_{\widetilde{V}_1,\widetilde{V}_2})}$ не будет тестовой тогда и только тогда, когда найдется j из N_{2^s}, $a \in V_1^j$, $b \in V_2^j$ такие, что $\tau_{r,s}(\widehat{T}((a,b))) = \widetilde{1}^{r-s}$. Но в этом случае $\widehat{T}((a,b)) = \widetilde{1}^r$, и T — не тестовая пара таблиц, т. е. $T \in \mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r} \iff T$ — $(\widetilde{V}_1, \widetilde{V}_2)$-тестовая.

Аналогично доказывается, что $\widehat{T}^{-1}(\widetilde{1}_i^r) \neq \varnothing$ для всех $i \in \in N_r \setminus N_s$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{\mathcal{E}}^{r-s} \subseteq (\tau_{r,s} \circ T)(X(G_{\widetilde{V}_1,\widetilde{V}_2}))$, и что $\widehat{T}^{-1}(\widetilde{1}_i^r) \neq \varnothing$ для $i \in N_s$ тогда и только тогда, когда T — не $(\widetilde{V}_{1k}, \widetilde{V}_2)$-тестовая пара таблиц. Из этого следует, что $T \in \mathfrak{T}^{\text{TT}}_{V_1,V_2,r} \iff T$ — $(\widetilde{V}_1, \widetilde{V}_2)$-тупиковая тестовая и не $(\widetilde{V}_{1k}, \widetilde{V}_2)$-тестовая пара таблиц.

Утверждение 7.2.13 доказано. □

Введенные понятия можно доопределить для случая $s = 0$. Считая $\pi_{r,0} \equiv 0$, $\tau_{r,0} \circ T = T$, $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,0} = \{\pi_{r,0}\}$, $\mu_0 \equiv 1$, получаем $\mathfrak{T}^{\pi_{r,0}}_{V_1,V_2,r} = \mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$ и 2^0-разбиения $\widetilde{V}_1$, $\widetilde{V}_2$ множеств V_1, V_2, образованные самими этими множествами: $\widetilde{V}_1 = (V_1)$, $\widetilde{V}_2 = (V_2)$. При $s = 0$ $N_s = \varnothing$ и отображения $\mu_{s,k}$ не определены, и понятие $\pi_{r,0}$-тестовой пары таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$ совпадает с понятием тупиковой тестовой пары таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$.

Через $\mathfrak{T}^{f_1,\delta}_{V_1,r}$, где $\delta \in (0,1)$, $s \in \widetilde{N}_{r-1}$, $f_1 \in \mathfrak{T}_{V_1,s}$, обозначим множество таких таблиц T_1 из $\mathfrak{T}^{f_1}_{V_1,r}$, что $|\mathcal{U}_0^j| \geqslant m_1^j - (m_1^j)^{1-\delta}$ для всех $j \in N_{2^s}$. Через $\mathcal{F}_{V_1,V_2,s}$ обозначим множество таких пар таблиц f из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,s}$, что для разбиений $\widetilde{V}_1$, $\widetilde{V}_2$, порожденных f, выполнено

$$\min_{I \in N_2, j \in N_{2^s}} m_i^j \geqslant r^{\ln r}.$$

В дальнейшем будем всюду полагать, что s — фиксированное целое число $s \in \widetilde{N}_{r-1}$.

Утверждение 7.2.14. *Если $\delta \in (0, 1/16)$, $m_1 \leqslant 2^{r(1/2+\delta/2)}$, $0 \leqslant \leqslant t \leqslant \ln m_1 - \delta r$, $f \in \mathcal{F}_{V_1,V_2,t}$, то*

$$|\mathfrak{T}^{f_1,\delta}_{V_1,r}| \geqslant_r 2^{(r-t)m_1}(1 - \exp\{-r^{\frac{1}{2}\ln r}\}).$$

Доказательство. Из утверждения 7.2.2 следует, что для любого $j \in N_{2^t}$

$$|\mathfrak{T}^{\delta}_{V_1^j,r-t}| \geqslant_r 2^{(r-t)m_1^j}(1 - \exp\{-(\min_{j \in N_{2^s}} m_1^j)^{1-2\delta}\}).$$

Следовательно,

$$|\mathfrak{T}^{f_1,\delta}_{V_1,r}| \geqslant_r 2^{(r-t)m_1}(1 - 2^t \exp\{-r^{(1-2\delta)\ln r}\}) \geqslant_r$$
$$\geqslant_r 2^{(r-t)m_1}(1 - \exp\{-r^{\ln r/2}\}).$$

Утверждение 7.2.14 доказано. □

Утверждение 7.2.15. *Если* $\delta \in (0, 1/16)$, $2^r r^5 \geqslant m_1 m_2 \geqslant 2^{r/c}$, $c > 1$, $f \in \mathcal{F}_{V_1,V_2,s}$, $m_{1i}^j \geqslant k_i^j \geqslant m_{1i}^j - (m_{1i}^j)^{1-\delta}$, $r^2 \geqslant a_i \geqslant 0$, $i \in \widetilde{N}_r$, $j \in N_{2^s}$ *и* $\widetilde{V}_1$, $\widetilde{V}_2$ *— разбиения, порожденные* f, *то*

$$
\begin{aligned}
2^{(r-s)m_2}\exp\Big\{-2^{s-r}\sum_{i=0}^{r}a_i\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2\Big\}(1+r^{-(\delta/2)\ln r}) &\geqslant_r \\
\geqslant_r \prod_{j=1}^{2^s}\Big(2^{r-s}-\sum_{i=0}^{r}a_ik_i^j\Big)^{m_2^j} &\geqslant_r \\
\geqslant_r 2^{(r-s)m_2}\exp\Big\{-2^{s-r}\sum_{i=0}^{r}a_i\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2\Big\}(1-2^{-r/3}).
\end{aligned}
$$

Доказательство.

$$
\begin{aligned}
&\prod_{j=1}^{2^s}\Big(2^{r-s}-\sum_{i=0}^{r}a_ik_i^j\Big)^{m_2^j} \geqslant \\
&\geqslant 2^{(r-s)m_2}\exp\Big\{\sum_{j=1}^{2^s}m_2^j\ln\Big(1-2^{s-r}\sum_{i=0}^{r}a_im_{1i}^j\Big)\Big\} \geqslant_r \\
&\geqslant_r 2^{(r-s)m_2}\exp\Big\{-2^{s-r}\sum_{i=0}^{r}a_i\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2\Big\}\times \\
&\qquad\times\exp\Big\{-2^{2s-2r}r^4\sum_{i=0}^{r}\sum_{j=1}^{2^s}(m_{1i}^j)^2m_2^j\Big\} \geqslant \\
&\geqslant 2^{(r-s)m_2}\exp\Big\{-2^{s-r}\sum_{i=0}^{r}a_i\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2\Big\}\times \\
&\qquad\times\exp\{-2^{2s-2r}r^5(m_1)^2m_2\} \geqslant \\
&\geqslant 2^{(r-s)m_2}\exp\Big\{-2^{s-r}\sum_{i=0}^{r}a_i\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2\Big\}(1-2^{-r/3}).
\end{aligned}
$$

В другую сторону,

$$
\prod_{j=1}^{2^s}\Big(2^{r-s}-\sum_{i=0}^{r}a_ik_i^j\Big)^{m_2^j} \leqslant
$$

$$\leqslant 2^{(r-s)m_2} \exp\Big\{ \sum_{j=1}^{2^s} m_2^j \ln\Big(1 - 2^{s-r} \sum_{i=0}^{r} a_i (m_{1i}^j - (m_{1i}^j)^{1-\delta})\Big)\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant_r 2^{(r-s)m_2} \exp\Big\{ - 2^{r-s} \sum_{i=0}^{r} a_i \widetilde{m}_{1i} \widetilde{m}_2 \Big\} \exp\{2^{s-r} r^3 m_1 m_2 r^{-\delta \ln r}\} \leqslant_r$$

$$\leqslant_r 2^{(r-s)m_2} \exp\Big\{ - 2^{r-s} \sum_{i=0}^{r} a_i \widetilde{m}_{1i} \widetilde{m}_2 \Big\} (1 + r^{-(\delta/2)\ln r}).$$

Утверждение 7.2.15 доказано. □

Положим $H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) = H^s(\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2, \widetilde{m}_{11}\widetilde{m}_2, \ldots, \widetilde{m}_{1s}\widetilde{m}_2, r)$.

Если $f \in \mathfrak{T}_{V_1,V_2,s}$, то через $\mathfrak{T}^{f,T}_{V_1,V_2,r}$ обозначим множество тестовых пар таблиц из $\mathfrak{T}^{f}_{V_1,V_2,r}$, а через $\mathfrak{T}^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,r}$ — множество тупиковых тестовых пар таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$.

Утверждение 7.2.16. *Если $r^3 2^r \geqslant m_1 m_2 \geqslant 2^{r/c}$, $c > 1$, $f \in \mathcal{F}_{V_1,V_2,s}$ и $\widetilde{V}_1$, $\widetilde{V}_2$ — разбиения V_1, V_2, порожденные f, то*

$$|\mathfrak{T}^{f,T}_{V_1,V_2,r}| \sim {}_r 2^{(r-s)(m_1+m_2)} \exp\Big\{ - \frac{\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2}{2^{r-s}} \Big\}.$$

Доказательство. Возьмем δ из $(0, 1/16)$. Пусть $\mathfrak{T}^{f,\delta}_1$ — множество таких пар таблиц T из $\mathfrak{T}^{f}_{V_1,V_2,r}$, что $T_1 \notin \mathfrak{T}^{f_1,\delta}_{V_1,r}$. Из утверждения 7.2.14 следует, что

$$\begin{aligned} |\mathfrak{T}^{f,\delta}_1| \ &\leqslant_r \ 2^{(r-s)(m_1+m_2)} \exp\{-r^{(1/2)\ln r}\} \ll_r \\ &\ll_r \ 2^{(r-s)(m_1+m_2)} \exp\Big\{ - \frac{\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2}{2^{r-s}} \Big\}. \end{aligned}$$

Обозначим через $\mathfrak{T}^{f,\delta,T}_2$ множество тестовых пар таблиц T из $\mathfrak{T}^{f,\delta}_{V_1,V_2,r}$ таких, что $T_1 \in \mathfrak{T}^{f_1,\delta}_{V_1,r}$. Для всех T из $\mathfrak{T}^{f,\delta,T}_2$ и $j \in N_{2^s}$ выполнено $m_1^j \geqslant |A_1^j| \geqslant m_1^j - (m_1^j)^{1-\delta}$. Следовательно,

$$|\mathfrak{T}^{f_1,\delta}_{V_1,r}| \prod_{j=1}^{2^s} (2^{r-s} - m_1^j + (m_1^j)^{1-\delta})^{m_2^j} \geqslant |\mathfrak{T}^{f,\delta,T}_2| \geqslant$$

$$\geqslant |\mathfrak{T}^{f_1,\delta}_{V_1,r}| \prod_{j=1}^{2^s} (2^{r-s} - m_1^j)^{m_2^j}.$$

Из утверждений 7.2.14, 7.2.15 следует, что

$$|\mathfrak{T}_2^{f,\delta,T}| \sim_r 2^{(r-s)(m_1+m_2)} \exp\Big\{-\frac{\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2}{2^{r-s}}\Big\}.$$

Так как $\mathfrak{T}^{f,T}_{V_1,V_2,r} \subseteq \mathfrak{T}_2^{f,\delta,T} \cup \mathfrak{T}_1^{f,\delta}$, то

$$|\mathfrak{T}^{f,T}_{V_1,V_2,r}| \sim_r 2^{(r-s)(m_1+m_2)} \exp\Big\{-\frac{\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2}{2^{r-s}}\Big\}.$$

Утверждение 7.2.16 доказано. □

Через $T_1^{f,j}$ обозначим таблицу $(\tau_{r,s}\circ T_1)|_{\widehat{V}_1^{f,j}}$, где $T \in \mathfrak{T}^f_{V_1,V_2,r}$, $f \in \mathcal{F}_{V_1,V_2,s}$, $\widehat{V}_1^{f,j} = V_1^j \cup (\cup_{k=1}^s V_1^{\mu_{s,k}(j)})$. Положим $\widehat{m}_1^{f,j} = |\widehat{V}_1^{f,j}|$, $\mathcal{U}_0^{f,j} = \mathcal{U}_0(T_1^{f,j}) \cap A_1^j$,

$$A_{1i}^{f,j} = \begin{cases} A_1^j \leftrightarrow \widetilde{1}^{r-s}_{i-s} = A_{1i}^j & \text{при } i \in N_r \setminus N_s, \\ A_1^{\mu_{s,i}(j)} & \text{при } i \in N_s; \end{cases}$$

$$\mathcal{U}_1^{f,j} = \begin{cases} \mathcal{U}_0^{f,j} \leftrightarrow \widetilde{1}^{r-s}_{i-s} & \text{при } i \in N_r \setminus N_s, \\ \mathcal{U}_0(T_1^{f,j}) \cap A_1^{\mu_{s,i}(j)} & \text{при } i \in N_s. \end{cases}$$

$W^{f,j} = T_1(\widehat{V}_1^{f,j}) \cup (\cup_{i=s+1}^r A_{1i}^j(T_1^j))$, $D^{f,j} = W^{f,j} \setminus (\cup_{i=0}^r \mathcal{U}_i^{f,j})$, $V_{1i}^{f,j} = V_1^{\mu_{s,i}(j)}$, $m_{1i}^{f,j} = |V_{1i}^{f,j}|$, $\Delta_i^{f,j} = m_{1i}^{f,j} - |\mathcal{U}_i^{f,j}|$, $i \in N_r$, $j \in N_{2^s}$.

Обозначим через $\widehat{\mathfrak{T}}^{f_1,\delta}_{V_1,r}$ множество таких таблиц T_1 из $\mathfrak{T}^{f_1,\delta}_{V_1,r}$, что $|\mathcal{U}_0(T_1^{f,j})| \geqslant \widehat{m}_1^{f,j} - (\widehat{m}_1^{f,j})^{1-\delta}$. Ясно, что для любого $j \in N_{2^s}$ $\mathcal{U}_0^{f,j} \subseteq \mathcal{U}_0^j$ и множества $\mathcal{U}_i^{f,j}$, $i \in \widetilde{N}_r$ попарно не пересекаются.

Утверждение 7.2.17. *Если $\delta \in (0, 1/16)$, $m_1 \leqslant 2^{r(1/2+\delta/2)}$, $f \in \in \mathcal{F}_{V_1,V_2,s}$, то*

$$|\widehat{\mathfrak{T}}^{f_1,\delta}_{V_1,r}| \geqslant_r 2^{(r-s)m_1}(1 - \exp\{-r^{(1/3)\ln r}\}).$$

Доказательство. Пусть $\widehat{\mathfrak{T}}_1^{f_1}$ — множество таких таблиц T_1 из $\mathfrak{T}^{f_1}_{V_1,r}$, что $|\mathcal{U}_0(T_1^{f,j})| \geqslant \widehat{m}_1^{f,j} - (\widehat{m}_1^{f,j})^{1-\delta}$ для всех $j \in N_{2^s}$. Аналогично утверждению 7.2.14 доказывается, что

$$|\widehat{\mathfrak{T}}_1^{f_1}| \geqslant_r 2^{(r-s)m_1}(1 - \exp\{-r^{\frac{1}{2}\ln r}\}).$$

Но так как $\widehat{\mathfrak{T}}^{f_1,\delta}_{V_1,r} = \mathfrak{T}^{f_1,\delta}_{V_1,r} \cap \widehat{\mathfrak{T}}_1^{f_1}$, то

$$|\widehat{\mathfrak{T}}^{f_1,\delta}_{V_1,r}| \geqslant_r 2^{(r-s)m_1}(1 - \exp\{-r^{\frac{1}{3}\ln r}\}).$$

Утверждение 7.2.17 доказано. □

Утверждение 7.2.18. *Если* $m_2^j \geqslant r^{\ln r}$, $\nu_i^j \geqslant 0$, $\nu_i = \sum\limits_{l=1}^{2^s} \nu_i^l \leqslant r^4$, $i \in N_r$, $j \in N_{2^s}$, *то*

$$\prod_{j=1}^{2^s}\prod_{i=1}^{r}\binom{m_2^j}{\nu_i^j} \geqslant \prod_{j=1}^{2^s}\binom{m_2^j}{\nu_1^j}\binom{m_2^j-\nu_1^j}{\nu_2^j}\cdots\binom{m_2^j-\nu_1^j-\ldots-\nu_{r-1}^j}{\nu_r^j} \geqslant_r$$

$$\geqslant_r \left(1 - r^{-\frac{1}{2}\ln r}\right)\prod_{j=1}^{2^s}\prod_{i=1}^{r}\binom{m_2^j}{\nu_i^j}.$$

Доказательство. Верхняя оценка очевидна, и

$$\prod_{j=1}^{2^s}\binom{m_2^j}{\nu_1^j}\binom{m_2^j-\nu_1^j}{\nu_2^j}\cdots\binom{m_2^j-\nu_1^j-\ldots-\nu_{r-1}^j}{\nu_r^j} \geqslant$$

$$\geqslant \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{2^s}\binom{m_2^j}{\nu_i^j}\left(1-\frac{\nu_i^j}{m_2^j-\nu}\right)^{\nu} \geqslant \prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{\nu_i}{m_2^j-\nu}\right)^{\nu}\prod_{j=1}^{r}\binom{m_2^j}{\nu_i^j} \geqslant_r$$

$$\geqslant_r \left(1 - r^{-\frac{1}{2}\ln r}\right)\prod_{j=1}^{2^s}\prod_{i=1}^{r}\binom{m_2^j}{\nu_i^j},$$

где $\nu = \sum\limits_{i=1}^{r}\nu_i \leqslant r^5$.

Утверждение 7.2.18 доказано. □

Утверждение 7.2.19. *Если* $\delta \in (0, 1/16)$, $r^3 2^r \geqslant m_1 m_2 \geqslant 2^{r/c}$, $c > 1$, $f \in \mathcal{F}_{V_1,V_2,s}$, $\widetilde{V}_1$, $\widetilde{V}_2$ — *разбиения* V_1, V_2, *порожденные* f, $r^2 \geqslant a_i^j \geqslant 0$, $m_{1i}^j \geqslant k_i^j \geqslant m_{1i}^j - (m_{1i}^j)^{1-\delta}$, $i \in N_r$, $j \in N_{2^s}$, *то*

$$\left(\exp\left\{\frac{\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2}{2^{r-s}}\right\} - 1\right)(1 + 2^{-r/4}) \geqslant_r$$

$$\geqslant_r \sum_{m_2^j \geqslant \nu^j, \nu_i > 0}\prod_{j=1}^{2^s}(k_i^j)^{\nu_i^j}\left(2^{r-s} - \sum_{l=1}^{r} a_l^j k_l^j\right)^{-\nu_i^j}\binom{m_2^j}{\nu_i^j} \geqslant_r$$

$$\geqslant_r \sum_{\nu_i=1}^{r^4}\prod_{j=1}^{2^s}(k_i^j)^{\nu_i^j}\left(2^{r-s} - \sum_{l=1}^{r^4} a_l^j k_l^j\right)^{-\nu_i^j}\binom{m_2^j}{\nu_i^j} \geqslant_r$$

$$\geqslant_r \left(\exp\left\{\frac{\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2}{2^{r-s}}\right\} - 1\right)(1 - r^{-\frac{\delta}{4}\ln r}),$$

где $\nu_i = \sum\limits_{l=1}^{2^s} \nu_i^l$, $\nu^j = \sum\limits_{l=1}^{r} \nu_l^j$.

Доказательство. Положим

$$a_k = \sum_{\nu_i = k, \nu^j = m_2^j} \prod_{j=1}^{2^s} (k_i^j)^{\nu_i^j} \Big(2^{r-s} - \sum_{l=1}^{r} a_l^j k_l^j\Big)^{\nu_i^j} \binom{m_2^j}{\nu_i^j};$$

$$\sum_{k=1}^{r^4} a_k \geqslant \sum_{\nu_i=1}^{r^4} \prod_{j=1}^{2^s} (1-(m_{1i}^j)^{-\delta})^{\nu_i^j} (m_{1i}^j 2^{s-r})^{\nu_i^j} \binom{m_2^j}{\nu_i^j} \geqslant_r$$

$$\geqslant_r (1 - r^{-(\delta/2)\ln r}) \sum_{\nu_i=1}^{r^4} \prod_{j=1}^{2^s} (m_{1i}^j 2^{s-r})^{\nu_i^j} \binom{m_2^j}{\nu_i^j}.$$

Обозначим

$$c_k = \sum_{\nu_i = k, \nu^j \leqslant m_2^j} \prod_{j=1}^{2^s} (m_{1i}^j 2^{s-r})^{\nu_i^j} \binom{m_2^j}{\nu_i^j}.$$

Очевидно, что $c_k \leqslant (m_1)^k 2^{(s-r)k} \binom{m_2}{k} = b_k$. При $i >]r^4/2[$

$$\frac{b_{i-1}}{b_i} = \frac{m_1(m_2 - i)}{2^{r-s}(i+1)} \leqslant \frac{m_1 m_2}{2^{r-s} i} \leqslant_r r^{-1/2}.$$

Тогда

$$\sum_{k \geqslant r^4} c_k \leqslant \sum_{k \geqslant r^4} b_k \leqslant_r 2b_{]r^4[} \leqslant_r 2b_{]r^4/2[} r^{-\frac{[r^4/2]}{2}} \leqslant_r \exp\Big\{-\frac{r^4}{5}\ln r\Big\},$$

так как $b_{[r^4/2]} \leqslant_r \Big(\dfrac{e m_1 m_2}{2^{r-s}[r^4/2]}\Big)^{[r^4/2]} \leqslant_r 1$. Поскольку $c_1 \geqslant$ $\geqslant \prod\limits_{j=1}^{2^s} \dfrac{m_{1i}^j m_2^j}{2^{r-s}} \geqslant_r 2^{-2^s r}$, то

$$\sum_{k=1}^{r^4} a_k \geqslant_r \Big(1 - \exp\Big\{-\frac{r^4}{6}\ln r\Big\}\Big)(1 - r^{-(\delta/2)\ln r})\Big(\sum_{k=0}^{m_2} c_k - 1\Big) \geqslant_r$$

$$\geqslant_r (1 - r^{-(\delta/3)\ln r})\Big(\prod_{j=1}^{2^s}\Big(1 + \frac{m_{1i}^j}{2^{r-s}}\Big)^{m_2^j} - 1\Big) \geqslant_r$$

$$\geqslant_r (1-r^{-(\delta/3)\ln r})\Big(\exp\Big\{\sum_{j=1}^{2^s}\frac{m_{1i}^j m_2^j}{2^{r-s}}-\frac{(m_{1i}^j)^2 m_2^j}{2^{2r-2s}}\Big\}-1\Big)\geqslant_r$$

$$\geqslant_r (1-r^{-(\delta/3)\ln_r})\Big(\exp\Big\{\frac{\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2}{2^r}\Big\}\Big(1-2^{-r/3}\frac{\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2}{2^{r-s}}\Big)-1\Big).$$

Аналогично доказательству утверждения 7.2.7 получаем

$$\sum_{k=1}^{r^4} a_k \geqslant_r (1-r^{-(\delta/4)\ln r})\Big(\exp\Big\{\frac{\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2}{2^{r-s}}\Big\}-1\Big).$$

В другую сторону,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{m_2} a_k \quad &\leqslant \quad \sum_{\nu_i>0,\nu^j\leqslant m_2^j}\prod_{j=1}^{2^s}(m_{1i}^{\nu_i^j})(2^{r-s}-r^3m_1)^{-\nu_i^j}\binom{m_2^j}{\nu_i^j}\leqslant\\
&\leqslant \quad \prod_{j=1}^{2^s}\Big(1+\frac{m_{1i}^j}{2^{r-s}-r^3m_1}\Big)^{m_2^j}-1\leqslant\\
&\leqslant \quad \exp\Big\{\frac{\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2}{2^{r-s}-r^3m_1}\Big\}-1\leqslant_r\\
&\leqslant_r \quad \exp\Big\{\frac{\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2}{2^{r-s}}+2^{-r/3}\frac{\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2}{2^{2r-2s}}\Big\}-1\leqslant_r\\
&\leqslant_r \quad (1+2^{-r/4})\Big(\exp\Big\{-\frac{\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2}{2^{r-s}}\Big\}-1\Big).
\end{aligned}$$

Утверждение 7.2.19 доказано. □

Утверждение 7.2.20. *Если* $\delta\in(0,1/16)$, $r^3 2^r\geqslant m_1m_2\geqslant 2^{r/c}$, $c>1$, $f\in\mathcal{F}_{V_1,V_2,s}$, $\widetilde{V}_1$, $\widetilde{V}_2$ *— разбиения* V_1, V_2, *порожденные* f, *то*

$$|\mathfrak{T}^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,r}|\geqslant_r 2^{(r-s)(m_1+m_2)}H^{f,s}(\widetilde{m}_1,\widetilde{m}_2,r)(1-r^{-(\delta/6)\ln r}).$$

Доказательство. Обозначим через $\widehat{\mathfrak{T}}^{f,\delta,\text{тт}}$ множество таких пар таблиц T из $\mathfrak{T}^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,r}$, что $T_1\in\widehat{\mathfrak{T}}^{f_1,\delta}_{V_1,r}$, $T(V_2^j)\cap D^{f,j}=\varnothing$ для всех $j\in N_{2^s}$ и $\sum\limits_{j=1}^{2^s}|T^{-1}(\mathcal{U}_1^{f,j})\cap V_2^j|\leqslant r^4$ для всех $i\in N_r$. Положим $\widehat{\mathfrak{T}}^{f,\delta,\text{тт}}_{T_1}=\{S\in\widehat{\mathfrak{T}}^{f,\delta,\text{тт}}:S_1=T_1\}$. Обозначив $\nu_i^j=|T^{-1}(\mathcal{U}_i^{f,j})\cap V_2^j|$, $\nu_i=\sum\limits_{l=1}^{2^s}\nu_i^l$, $\nu^j=\sum_{l=1}^r\nu_l^j$, $i\in N_r$, $j\in N_{2^s}$, и, учитывая утверждение 7.2.13 и то, что для любого $j \in N_{2^s}$ множества $\mathcal{U}_i^{f,j}$ попарно не пересекаются, получаем для T_1 из $\widehat{\mathfrak{T}}^{f_1,\delta}_{V_1,r}$

$$|\widehat{\mathfrak{T}}^{f,\delta,\text{тт}}_{T_1}| = \sum_{r^4 \geqslant \nu_i > 0, i \in N_r} \prod_{j=1}^{2^s} \Big(\prod_{i=1}^{r} |\mathcal{U}_i^{f,j}|^{\nu_i^j} \Big) (2^{r-s} - |W^{f,j}|)^{m_2^j - \nu^j} \times \\ \times \binom{m_2^j}{\nu_1^j} \binom{m_2^j - \nu_1^j}{\nu_2^j} \ldots \binom{m_2^j - \nu_1^j - \ldots - \nu_{r-1}^j}{\nu_r^j}.$$

Из утверждений 7.2.15, 7.2.18, 7.2.19 следует, что

$$\begin{aligned} |\widehat{\mathfrak{T}}^{f,\delta,\text{тт}}_{T_1}| \geqslant_r\ & 2^{(r-s)m_2} \exp\Big\{ -2^{s-r} \sum_{i=0}^{r} \widetilde{m}_{1i} \widetilde{m}_2 \Big\} \times \\ & \times (1 - 2^{-r/3})(1 - r^{-(1/2)\ln r}) \times \\ & \times \sum_{r^4 \geqslant \nu_i > 0} \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{2^s} |\mathcal{U}_i^{f,j}|^{\nu_i^j} 2^{-(r-s)\nu_i^j} \binom{m_2^j}{\nu_i^j} \geqslant_r \\ \geqslant_r\ & 2^{(r-s)m_2} \exp\Big\{ -2^{s-r} \sum_{i=0}^{r} \widetilde{m}_{1i} \widetilde{m}_2 \Big\} \times \\ & \times \prod_{i=1}^{r} \Big(\exp\Big\{ \frac{\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2}{2^{r-s}} \Big\} - 1 \Big) (1 - r^{-(\delta/4)\ln r})^{r+1} \geqslant_r \\ \geqslant_r\ & 2^{(r-s)m_2} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r)(1 - r^{-(\delta/5)\ln r}), \end{aligned}$$

так как при $i \in \widetilde{N}_r \setminus N_s$ $\widetilde{m}_{1i} = \widetilde{m}_1$.

Из утверждения 7.2.17 следует, что

$$|\widehat{\mathfrak{T}}^{f,\delta,\text{тт}}| \geqslant_r 2^{(r-s)(m_1+m_2)} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r)(1 - r^{-(\delta/5)\ln r}).$$

Так как $\widehat{\mathfrak{T}}^{f,\delta,\text{тт}} \subseteq \mathfrak{T}^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,r}$, то утверждение 7.2.20 доказано. □

Через $\mathcal{F}^{\varepsilon}_{V-1,V-2,s}$, $\varepsilon \in (0, 2^{-s})$, $s \geqslant 0$, обозначим множество таких таблиц f из $\mathcal{F}_{V_1,V_2,s}$, что для разбиений $\widetilde{V}_1$, $\widetilde{V}_2$ множеств V_1, V_2 и $i \in \widetilde{N}_r$ выполнено $\min\limits_{i \in \widetilde{N}_r} \widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2 \geqslant \varepsilon m_1 m_2$. При $s = 0$ полагаем $\mathcal{F}^{\varepsilon}_{V_1,V_2,s} = \mathfrak{T}_{V_1,V_2,0}$ для любого $\varepsilon \in (0, 1)$.

Утверждение 7.2.21. *Если* $\delta \in (0, 1/16)$, $\varepsilon \in (0, 2^{-s})$, $r^3 2^r \geqslant \geqslant m_1 m_2 \geqslant 2^r/r^5$, $f \in \mathcal{F}^{\varepsilon}_{V_1,V_2,s}$, $\widetilde{V}_1$, $\widetilde{V}_2$ *— разбиения* V_1, V_2, *порожденные* f, *то*

$$|\mathfrak{T}^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,r}| \leqslant_r 2^{(r-s)(m_2+m_2)} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r)(1 + r^{-(\delta/5)\ln r}).$$

Доказательство. Обозначим через $\widehat{\mathfrak{T}}^{f,\delta}_1$ множество таких пар таблиц T из $\mathfrak{T}^{f}_{V_1,V_2,r}$, что $T_1 \notin \widehat{\mathfrak{T}}^{f_1,\delta}_{V_1,r}$. Из утверждения 7.2.17 следует, что

$$|\widehat{\mathfrak{T}}^{f,\delta}_1| \leqslant_r 2^{(r-s)(m_1+m_2)} \exp\{-r^{(1/3)\ln r}\}.$$

Из утверждения 7.1.12 следует, что $H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) \geqslant_r \exp\{-r^6\}$. Значит,

$$|\widehat{\mathfrak{T}}^{f,\delta}_1| \leqslant_r 2^{(r-s)(m_1+m_2)} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) \exp\{-r^{(1/4)\ln r}\}.$$

Обозначим через $\mathfrak{T}^{f,\delta,\text{тт}}_2$ множество таких пар таблиц T из $\mathfrak{T}^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,r}$, что $T_1 \in \widehat{\mathfrak{T}}^{f_1,\delta}_{V_1,r}$ и $A^j_2 \cap D^{f,j} = \varnothing$ для всех $j \in N_{2^s}$. Аналогично предыдущему утверждению, используя утверждения 7.2.15, 7.2.18, 7.2.19, имеем

$$\begin{gathered}
|\mathfrak{T}^{f,\delta,\text{тт}}_2| \leqslant |\widehat{\mathfrak{T}}^{f_1,\delta}_{V_1,r}| \sum_{\substack{\nu_i > 0, i \in N_r \\ \nu^j \leqslant m^j_2, j \in N_{2^s}}} \prod_{j=1}^{2^s} \Big(\Big(\prod_{i=0}^{r} m^j_{1i} \Big)^{\nu^j_i} \Big) \times \\
\times \Big(2^{r-s} - \sum_{k=0}^{r} (m^j_{1k} - (m^j_{1k})^{1-\delta}) \Big)^{m^j_2 - \nu^j} \times \\
\times \binom{m^j_2}{\nu^j_1} \binom{m^j_2 - \nu^j_1}{\nu^j_2} \ldots \binom{m^j_2 - \nu^j_1 - \ldots - \nu^j_{r-1}}{\nu^j_r} \leqslant_r \\
\leqslant_r 2^{(r-s)(m_1+m_2)} \exp\Big\{ -2^{s-r} \sum_{k=0}^{r} \widetilde{m}_{1k} \widetilde{m}_2 \Big\} (1 + r^{-(\delta/3)\ln r}) \times \\
\times \sum_{\nu_i > 0, \nu^j \leqslant m^j_2} \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{2^s} (m^j_{1i})^{\nu^j_i} \cdot \Big(2^{r-s} - \sum_{k=0}^{r} (m^j_{1k} - (m^j_{1k})^{1-\delta}) \Big)^{-\nu^j_i} \binom{m^j_2}{\nu^j_i} \leqslant_r \\
\leqslant_r 2^{(r-s)(m_1+m_2)} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r)(1 + r^{-(\delta/4)\ln r}).
\end{gathered}$$

Обозначим через $\mathfrak{T}_3^{f,\delta,\text{тт}}$ множество таких таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}^{f,\text{тт}}$, что $T_1 \in \widehat{\mathfrak{T}}_{V_1,r}^{f_1,\delta}$, $\cup_{j=1}^{2^s}(A_2^j \cap D^{f,j} \neq \varnothing)$ и для всех j из N_{2^s} для любого $\widetilde{x}$ из $D^{f,j}$ число множеств A_{1i}^j, $i \in N_r$, таких, что $\widetilde{x} \in A_{1i}^j$, меньше $r/\ln^2 r$. Множество пар таблиц T из $\mathfrak{T}_3^{f,\delta,\text{тт}}$, таких, что $\sum_{j=1}^{2^s} |T^{-1}(D^{f,j}) \cap V_2^j| = k$, обозначим через $\mathfrak{T}_{3,k}^{f,\delta,\text{тт}}$.

Так как все пары таблиц из $\mathfrak{T}_3^{f,\delta,\text{тт}}$ тестовые, то

$$|\mathfrak{T}_{3,k}^{f,\delta,\text{тт}}| \leqslant |\widehat{\mathfrak{T}}_{V_1,r}^{f_1,\delta}| \cdot \max_{T_1 \in \widehat{\mathfrak{T}}_{V_1,r}^{f_1,\delta}} \sum_{\nu^j \geqslant 0, \nu = k} \prod_{j=1}^{2^s} |D^{f,j}|(2^{r-s} - |A_1^j|)^{m_2^j - \nu^j} \binom{m_2^j}{\nu_i^j},$$

где $\nu = \sum\limits_{j=1}^{2^s} \nu^j$.

Так как $|D^{f,j}| \leqslant_r (r+1)(m_1)^{1-\delta}$ и $m_1 \geqslant m_1^j \geqslant |A_1^j| \geqslant m_1^j - (m_1^j)^{1-\delta}$, то, используя утверждение 7.2.15, получаем

$$\begin{aligned}
|\mathfrak{T}_{3,k}^{f,\delta,\text{тт}}| \ &\leqslant_r \ 2^{(r-s)(m_1+m_2)} \exp\Big\{-\frac{\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2}{2^{r-s}}\Big\}(1 + r^{-(\delta/2)\ln r}) \ \times \\
&\qquad \times \Big(\frac{(r+1)(m_1)^{1-\delta}}{2^{r-s} - m_1}\Big)^k \sum_{\nu^j \geqslant 0, \nu = k} \prod_{j=1}^{2^s} \binom{m_2^j}{\nu^j} \ \leqslant_r \\
&\leqslant_r \ 2^{(r-s)(m_1+m_2)} \exp\Big\{\frac{\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2}{2^{r-s}}\Big\}\Big(\frac{2r(m_1)^{1-\delta}}{2^{r-s}}\Big)^k \binom{m_2}{k} \ \leqslant_r \\
&\leqslant_r \ 2^{(r-s)(m_1+m_2)} \exp\Big\{-\frac{\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2}{2^{r-s}}\Big\}\Big(\frac{2r(m_1)^{1-\delta}m_2}{2^{r-s}}\Big)^k.
\end{aligned}$$

Обозначим $(2r(m_1)^{1-\delta}m_2/2^{r-s})$ через a. Так как $a < 2^{-\frac{5}{12}\delta r}$ и $k \leqslant m_2$, то

$$\sum_{k \geqslant]\ln^2 r[} a^k \ \leqslant_r \ m_2 a^{]\ln^2 r[} \leqslant_r m_2 2^{-\frac{5}{12}\delta r \ln^2 r} \leqslant_r 2^{-(\delta/4) r \ln^2 r}.$$

Так как $H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) \geqslant_r \exp\{-\frac{\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2}{2^{r-s}}\}2^{-7r\ln r}$, то

$$\sum_{k \geqslant]\ln^2 r[} |\mathfrak{T}_{3,k}^{f,\delta,\text{тт}}| \leqslant_r 2^{(r-s)(m_1+m_2)} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) 2^{-(\delta/5) r \ln^2 r}.$$

Рассмотрим $\mathfrak{T}_{3,k}^{f,\delta,\text{тт}}$, где $]\ln^2 r[> k \geqslant 1$. Обозначим через $\eta^j = |T^{-1}(D^{f,j}) \cap V_2^j|$, тогда $\sum\limits_{j=1}^{2^s} \eta^j = \eta$. В этом случае для каждого $j \in N_{2^s}$ $A_2^j \cap D^{f,j}$ пересекается не более, чем с $\eta^j r/\ln^2 r$ множествами из $A_{11}^{f,j}, A_{12}^{f,j}, \ldots, A_{1r}^{f,j}$, а число номеров i из N_r, для которых $\cup_{j=1}^{2^s}(A_2^j \cap D^{f,j} \cap A_{1i}^{f,j}) \neq \varnothing$, не превосходит $kr/\ln^2 r$. Для того чтобы пара таблиц T была f-тестовой, при некоторых j из N_{2^s} множества A_2^j должны пересекаться с $\mathcal{U}_i^{f,j}$, по крайней мере, для $l_k =]r - kr/\ln^2 r[$ номеров i из N_r.

Пусть $\widetilde{a} = (a_1, \cdots, a_{l_k})$ — набор $\widetilde{a} : N_{l_k} \to N_k$. Число таких пар таблиц из $\mathfrak{T}_{3,k}^{f,\delta,\text{тт}}$, что $\cup_{j=1}^{2^s} A_2^j \cap \mathcal{U}_i^{f,j} \neq \varnothing$ для $i \in \widetilde{a}^{-1}(N_{l_k})$, не превосходит

$$2^{(r-s)m_1} \max_{T_1 \in \widehat{\mathfrak{T}}_{V_1,r}^{f_1,\delta}} \sum_{\substack{\eta=k,\nu_i^j>0,\\ m_2^j \geqslant \eta^j+\nu^j}} \prod_{j=1}^{2^s} |D^{f,j}|^{\eta^j} \binom{m_2^j}{\eta^j} (2^{r-s} - |W_{\widetilde{a}}^{f,j}|)^{m_2^j-\eta^j-\nu^j} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{l_k} |\mathcal{U}_{\widetilde{a}^{-1}(i)}^{f,j}|^{\nu_i^j} \binom{m_2^j}{\nu_i^j} \leqslant_r$$

где $\nu^j = \sum\limits_{i=1}^{l_k} \nu_i^j$, $\eta = \sum\limits_{j=1}^{2^s} \eta^j$, $W_{\widetilde{a}}^{f,j} = (\cup_{i=1}^{l_k} A_{1,\widetilde{a}^{-1}(i)}^{f,j}) \cup A_1^j$,

$$\leqslant_r 2^{(r-s)(m_1+m_2)} \exp\Big\{ -2^{s-r}\Big(\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2 + \sum_{i=1}^{l_k} \widetilde{m}_{1,\widetilde{a}^{-1}(i)}\widetilde{m}_2\Big)\Big\} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{l_k} \Big(\exp\Big\{ \frac{\widetilde{m}_{1,\widetilde{a}^{-1}(i)}\widetilde{m}_2}{2^{r-s}} \Big\} - 1 \Big)(1 + r^{-(\delta/4)\ln r}) 2^{-(5/12)\delta r} \leqslant_r$$

$$\leqslant_r 2^{(r-s)(m_1+m_2)} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) \Big(\min_{i \in N_r} \Big(1 - \exp\Big\{ -\frac{\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2}{2^{r-s}} \Big\} \Big) \Big)^{l_k - r} \times$$
$$\times 2^{-(\delta/3)rk} \leqslant_r$$

так как $l_k - r > -kr/\ln^2 r$, то

$$\begin{aligned} &\leqslant_r \quad 2^{(r-s)(m_1+m_2)} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) 2^{(7kr/\ln r)-(\delta/3)rk} \leqslant_r \\ &\leqslant_r \quad 2^{(r-s)(m_1+m_2)} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) 2^{-(\delta/6)rk}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$|\mathfrak{T}_{3,k}^{f,\delta,\text{тт}}| \leqslant_r \binom{r}{l_k} 2^{(r-s)(m_1+m_2)} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) 2^{-(\delta/6)rk}.$$

При $k > 12/\delta$ $\binom{r}{l_k}2^{-(\delta/6)rk} \leqslant 2^r 2^{-2r} = 2^{-r}$. При $k \leqslant 12/\delta$ $l_k \geqslant \geqslant r - 12r/\delta \ln^2 r$, и, согласно утверждению 7.1.2, $\binom{r}{l_k} \leqslant_r 2^{r/\ln r}$. В итоге получаем

$$\begin{aligned} |\mathfrak{T}_3^{f,\delta,\text{тт}}| &= \sum_{k=1}^{m_2} |\mathfrak{T}_{3,k}^{f,\delta,\text{тт}}| \leqslant_r \\ &\leqslant_r 2^{(r-s)(m_1+m_2)} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) \times \\ &\quad \times \left(\frac{12}{\delta} 2^{(r/\ln r)-(\delta r/6)} + \ln^2 r 2^{-r} + 2^{-(\delta/5) r \ln^2 r}\right) \leqslant_r \\ &\leqslant_r 2^{(r-s)(m_1+m_2)} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) 2^{-(\delta r/8)}. \end{aligned}$$

Через $\mathfrak{T}_4^{f,\delta,\text{тт}}$ обозначим множество пар таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}^{f,\text{тт}}$, для которых $T_1 \in \widehat{\mathfrak{T}}_{V_1,r}^{f_1,\delta}$ и найдутся $j_0 \in N_{2^s}$, $\widetilde{x} \in D^{f,j_0}$ и, по крайней мере, $l =]r/\ln^2 r[$ множеств из A_{1i}^{f,j_0}, $i \in N_r$, содержащих $\widetilde{x}$. Не менее, чем $l - s$ из этих множеств имеют индекс i, больший s, то есть, являются множествами вида $A_1^{j_0} \leftrightarrow \widetilde{1}_{i-s}^{r-s}$, $i \in N_r \setminus N_s$. Это означает, что в $A_1^{j_0}$ найдутся $l - s$ различных наборов, отличающихся от $\widetilde{x}$ лишь одной координатой. Таких таблиц на $V_1^{j_0}$ можно задать не более, чем

$$\begin{aligned} \binom{m_1^{j_0}}{l-s} 2^{r-s} \binom{r-s}{l-s} 2^{(r-s)(m_1^{j_0}-l+s)} &\leqslant \\ \leqslant\ & 2^{(r-s)m_1^{j_0}} (m_1^{j_0})^{l-s} 2^{-(r-s)(l-s-2)} \leqslant_r \\ \leqslant_r\ & 2^{(r-s)m_1^{j_0}-(r/3)(l-s)} \leqslant \\ \leqslant\ & 2^{(r-s)m_1^{j_0}-(r^2/(4\ln^2 r))}. \end{aligned}$$

Следовательно, так как пары таблиц из $\mathfrak{T}_4^{f,\delta,\text{тт}}$ — тестовые, то

$$\begin{aligned} |\mathfrak{T}_4^{f,\delta,\text{тт}}| &\leqslant_r 2^{(r-s)m_1^{j_0}-(r^2/(4\ln^2 r))} \times \\ &\quad \times \left(\prod_{j \neq j_0} (2^{r-s} - m_1^j + (m_1^j)^{1-\delta})^{m_2^j}\right) \leqslant_r \\ &\leqslant_r 2^{(r-s)(m_1+m_2)} \exp\left\{-\frac{\widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2}{2^{r-s}}\right\} 2^{-(r^2/(5\ln^2 r))} \leqslant_r \\ &\leqslant_r 2^{(r-s)(m_1+m_2)} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) 2^{-(r^2/(6\ln^2 r))}. \end{aligned}$$

Так как $\mathfrak{T}^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,r} \subseteq \widehat{\mathfrak{T}}^{f_1,\delta}_1 \cup (\cup_{k=2}^4 \mathfrak{T}^{f,\delta,\text{тт}}_k)$, то

$$|\mathfrak{T}^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,r}| \leqslant_r 2^{(r-s)(m_1+m_2)} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r)(1 + r^{-(\delta/5)\ln r}).$$

Утверждение 7.2.21 доказано. □

Утверждение 7.2.22. *Если* $\varepsilon \in (0, 2^{-s})$, $2^r/r^4 \geqslant m_1 m_2$, $f \in \in \mathcal{F}^{\varepsilon}_{V_1,V_2,s}$, $\widetilde{V}_1$, $\widetilde{V}_2$ *— разбиения* V_1, V_2, *порожденные* f, *то*

$$|\mathfrak{T}^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,r}| \leqslant_r 2^{(r-s)(m_1+m_2)} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r)(1 + r^{-2}).$$

Доказательство. Если $m_1 m_2 \leqslant 2^r/r^4$ и $f \in \mathcal{F}^{\varepsilon}_{V_1,V_2,r}$, то для любого $i \in N_r$ $\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2 \leqslant 2^r/r^{7/2}$. Тогда

$$\begin{aligned} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) \quad &\geqslant \quad \prod_{i=1}^{r}\Big(1 - \exp\Big\{-\frac{\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2}{2^{r-s}}\Big\}\Big) \geqslant_r \\ &\geqslant_r \quad \prod_{i=1}^{r}\Big(\frac{\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2}{2^{r-s}} - \frac{1}{2}\Big(\frac{\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2}{2^{r-s}}\Big)^2\Big) \geqslant_r \\ &\geqslant_r \quad \prod_{i=1}^{r}\Big(\frac{\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2}{2^{r-s}}\Big)\Big(1 - \frac{1}{2r^{7/2}}\Big) \geqslant_r \\ &\geqslant_r \quad (1 - r^{-5/2})\prod_{i=1}^{r}\frac{\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2}{2^{r-s}}. \end{aligned}$$

Пара таблиц T из $\mathfrak{T}^{f}_{V_1,V_2,r}$ будет f-тестовой, если найдется подграф G' графа $G_{\widetilde{V}_1,\widetilde{V}_2}$, такой, что $|X(G')| = r - s$ и $\tau_{r,s} \circ \widehat{T}(X(G')) = \widetilde{\mathcal{E}}^{r-s}$ и ребра $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, $\gamma_i \in X(G_{\widetilde{V}_{1i},\widetilde{V}_2})$ такие, что для всех $i \in N_s$ $\tau_{r,s} \circ \widehat{T}(\gamma_i) = \widetilde{1}^{r-s}$. Из утверждения 7.2.10 следует, что граф G' является лесом. Значения $\tau_{r,s} \circ T$ на вершинах из $\mathcal{P}(G')$ задать таким образом, чтобы было выполнено $\tau_{r,s} \circ \widehat{T}(X(G')) = \widetilde{\mathcal{E}}^{r-s}$, можно $2^{(r-s)k(G')}(r-s)!$ способами. Обозначим через G'' граф, полученный добавлением к G' ребер $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ и инцидентных им вершин. Так как $\widehat{T}(X(G'')) = \widetilde{\mathcal{E}}^{r}$, то G'' также будет лесом. Значит, значения $\tau_{r,s} \circ T$ определить на вершинах из $\mathcal{P}(G'')$ так, чтобы $\tau_{r,s} \circ \widehat{T}(X(G')) = \widetilde{\mathcal{E}}^{r-s}$ и $\tau_{r,s} \circ \widehat{T}(\gamma_i) = \widetilde{1}^{r-s}$ для $i \in N_s$, можно $2^{(r-s)k(G')}(r-s)!\ 2^{(r-s)(k(G'')-k(G'))}$ способами. Так как $|\mathcal{P}(G'')| = r + k(G'')$, то число пар таблиц T из $\mathfrak{T}^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,r}$, таких, что $\tau_{r,s}\circ\widehat{T}(X(G'))=\widetilde{\mathcal{E}}^{r-s}$ и $\tau_{r,s}\circ\widehat{T}(\gamma_i)=\widetilde{1}^{r-s}$, $i\in N_s$ не будет превосходить

$$2^{(r-s)k(G'')}(r-s)!2^{(r-s)(m_1+m_2-r-k(G''))}=2^{(r-s)(m_1+m_2-r)}(r-s)!.$$

Если $|X(G_{\widetilde{V}_1,\widetilde{V}_2})|\geqslant r$, то число r-лесов вида G'' не превосходит

$$\binom{|X(G_{\widetilde{V}_1,\widetilde{V}_2})|}{r-s}\prod_{i=1}^{s}|X(G_{\widetilde{V}_{1i},\widetilde{V}_2})|=\binom{\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2}{r-s}\prod_{i=1}^{s}\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2\leqslant\frac{\prod\limits_{i=1}^{r}\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2}{(r-s)!},$$

в противном случае таких лесов не существует. Следовательно,

$$\begin{aligned}|\mathfrak{T}^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,r}| &\leqslant 2^{(r-s)(m_1+m_2-r)}(r-s)!\Big(\prod_{i=1}^{r}\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2\Big)\Big/(r-s)! =\\ &= 2^{(r-s)(m_1+m_2)}\prod_{i=1}^{r}\left(\frac{\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2}{2^{r-s}}\right)\leqslant\\ &\leqslant 2^{(r-s)(m_1+m_2)}H^{f,s}(\widetilde{m}_1,\widetilde{m}_2,r)(1+r^{-2}).\end{aligned}$$

Утверждение 7.2.22 доказано. □

Из утверждений 7.2.20–7.2.22 непосредственно следует

Утверждение 7.2.23. *Если $\varepsilon\in(0,2^{-s})$, $2^r r^3\geqslant m_1m_2\geqslant 2^{r/c}$, $c>1$, $f\in\mathcal{F}^{\varepsilon}_{V_1,V_2,s}$, $\widetilde{V}_1$, $\widetilde{V}_2$ — разбиения V_1, V_2, порожденные f, то*

$$|\mathfrak{T}^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,r}|\sim{}_r 2^{(r-s)(m_1+m_2)}H^{f,s}(\widetilde{m}_1,\widetilde{m}_2,r).$$

7.3. Оценки числа f-тестовых пар таблиц

Во всех утверждениях этого параграфа будем полагать, что s — фиксированное целое число, $\varepsilon\in(0,2^{-s})$, $c>1$ — константы, $m_1\asymp m_2$, $m_1\leqslant m_2$.

Если $0\leqslant u\leqslant t<r$ и $f\in\mathfrak{T}_{V_1,V_2,u}$, то через $\mathfrak{T}^{f,t}_{V_1,V_2,r}$ обозначим множество таких пар (T,S), $T,S\in\mathfrak{T}^{f}_{V_1,V_2,r}$, что $\pi_{r,t}\circ T=\pi_{r,t}\circ S$. Очевидно, что $|\mathfrak{T}^{f,t}_{V_1,V_2,r}|=2^{(2r-t-u)(m_1+m_2)}$.

Для $\delta\in(0,1/16)$ определим множества

$$\mathfrak{T}^{\delta,1}_{V_1,V_2,r}=\Big\{T\in\mathfrak{T}_{V_1,V_2,t}:\Big||\widehat{T}^{-1}(\widetilde{x})|-\frac{m_1m_2}{2^t}\Big|\leqslant\frac{m_1m_2}{2^t}2^{-(\delta^2r/3)}\,\forall x\in E^t\Big\};$$

$$\mathfrak{T}^{\delta,2}_{V_1,V_2,r} = \Big\{ T \in \mathfrak{T}_{V_1,V_2,t} : \quad \text{для всех } \widetilde{x} \in E^t,\ i \in N_2 \ \text{ выполнено}$$

$$\left| |T_i^{-1}(\widetilde{x})| - \frac{m_i}{2^t} \right| \leqslant \left(\frac{m_i}{2^t}\right)^{1-\delta}, \text{ если } 1 \leqslant t < \ln m_1 - \delta r,$$

$$|T_i^{-1}(\widetilde{x})| \leqslant 2^{3\delta r}, \text{ если } \ln m_1 - \delta r \leqslant t \leqslant \ln m_1 + \delta r,$$

$$|T_i^{-1}(\widetilde{x})| \leqslant 2^{\delta r/(4c)}, \text{ если } \ln m_2 + \delta r < t \leqslant \ln m_1 m_2 - \delta r \Big\};$$

$$\mathfrak{T}^{\delta,3}_{V_1,V_2,t} = \mathfrak{T}^{\delta,1}_{V_1,V_2,t} \cap \mathfrak{T}^{\delta,2}_{V_1,V_2,t};$$

$$\mathfrak{T}^{g,\delta,1}_{V_1,V_2,r} = \Big\{ T \in \mathfrak{T}^{g}_{V_1,V_2,r}, \text{ где } g \in \mathfrak{T}_{V_1,V_2,t},\ t \in N_{r-1}$$

$$\text{и } \widehat{\Delta}_k \widetilde{m}_2 \leqslant \widetilde{m}_{1k} \widetilde{m}_2 2^{-\delta r},\ k \in N_t,$$

$$\text{где } \widetilde{V}_1,\ \widetilde{V}_2 \text{ — разбиения } V_1,\ V_2, \text{ порожденные } g \Big\};$$

$$\mathfrak{T}^{\delta,*}_{V_1,V_2,t} = \Big\{ g \in \mathfrak{T}^{\delta,3}_{V_1,V_2,t} : |\mathfrak{T}^{g,\delta^2/2,1}_{V_1,V_2,r}| \geqslant 2^{(r-t)(m_1+m_2)}(1 - \exp\{-2^{\delta r/2}\}),$$

$$t \in N_{r-1} \Big\}.$$

Утверждение 7.3.1. *Если* $r^3 2^r \geqslant m_1 m_2 \geqslant 2^{r/c}$, $c > 1$, $\delta \in$ $\in (0, \min(1/16, \dfrac{1}{6c}))$, $1 \leqslant t < \ln m_1 - \delta r$, *то*

$$|\mathfrak{T}^{\delta,3}_{V_1,V_2,r}| \geqslant_r 2^{t(m_1+m_2)}(1 - \exp\{-2^{-(\delta r/3)}\}).$$

Доказательство. При $i \in N_2$ $m_i^{-1} \ll_r 2^{-t} \leqslant 1/2$. Применяя утверждение 7.1.1, получаем, что

$$\begin{aligned} |\mathfrak{T}^{\delta,2}_{V_1,V_2,t}| \ &\geqslant_t \ 2^{t(m_1+m_2)} \left(1 - 2\exp\left\{ -\frac{1}{12}\left(\frac{m_i}{2^t}\right)^{1-2\delta} \right\}\right) \geqslant_r \\ &\geqslant_r \ 2^{t(m_1+m_2)}(1 - \exp\{-2^{\delta r/3}\}). \end{aligned}$$

Для всех пар таблиц T из $\mathfrak{T}^{\delta,2}_{V_1,V_2,t}$ и любого $\widetilde{x} \in E^t$ выполнено

$$|\widehat{T}^{-1}(\widetilde{x})| \leqslant 2^t \left(\frac{m_1}{2^t} + \left(\frac{m_1}{2^t}\right)^{1-\delta}\right)\left(\frac{m_2}{2^t} + \left(\frac{m_2}{2^t}\right)^{1-\delta}\right) \leqslant_r$$
$$\leqslant_r \frac{m_1 m_2}{2^t}(1 + 2^{-(\delta^2 r/2)}).$$

Аналогично,

$$|\widehat{T}^{-1}(\widetilde{x})| \geqslant_r \frac{m_1 m_2}{2^t}(1 - 2^{-(\delta^2 r/2)}).$$

Следовательно,
$$|\mathfrak{T}^{\delta,3}_{V_1,V_2,t}| \geqslant |\mathfrak{T}^{\delta,2}_{V_1,V_2,t}|.$$
Утверждение 7.3.1 доказано. □

Утверждение 7.3.2. *Если* $r^3 2^r \geqslant m_1 m_2 \geqslant 2^{r/c}$, $c > 1$, $\delta \in (0, \min(1/16, \dfrac{1}{6c}))$, $1 \leqslant t < \ln m_1 - \delta r$, *то* $|\mathfrak{T}^{\delta,*}_{V_1,V_2,t}| \geqslant |\mathfrak{T}^{\delta,3}_{V_1,V_2,t}|$.

Доказательство. Так как начиная с некоторого номера r $\mathfrak{T}^{\delta,3}_{V_1,V_2,t} \subseteq \mathcal{F}_{V_1,V_2,t}$, то из утверждения 7.2.14 следует, что для $g \in \mathfrak{T}^{\delta,3}_{V_1,V_2,t}$
$$\begin{aligned} |\mathfrak{T}^{g_1,\delta}_{V_1,r}| &\geqslant_r 2^{(r-t)m_1}(1 - 2^t \exp\{-(\min_{j\in N_{2^t}} m_1^j)^{1-2\delta}\}) \geqslant_r \\ &\geqslant_r 2^{(r-t)m_1}(1 - \exp\{-2^{\delta r/2}\}). \end{aligned}$$
Если $T_1 \in \mathfrak{T}^{g_1,\delta}_{V_1,r}$, то
$$\widetilde{\Delta}\widetilde{m}_2 \leqslant \sum_{j=1}^{2^s} (m_1^j)^{1-\delta} m_2^j \leqslant_r \widetilde{m}_1\widetilde{m}_2 \left(\frac{2m_1}{2^t}\right)^{-\delta} \leqslant_r \widetilde{m}_1\widetilde{m}_2 2^{-(\delta^2 r/2)}.$$
Аналогично, для $k \in N_r$ $\widetilde{\Delta}_k\widetilde{m}_2 \leqslant_r \widetilde{m}_{1k}\widetilde{m}_2 2^{-(\delta^2 r/2)}$. Следовательно, для $g \in \mathfrak{T}^{\delta,3}_{V_1,V_2,t}$ имеем
$$|\mathfrak{T}^{g,\delta^2/2,1}_{V_1,V_2,r}| \geqslant_r 2^{(r-t)(m_1+m_2)}(1 - \exp\{-2^{\delta r/2}\}).$$
Утверждение 7.3.2 доказано. □

Утверждение 7.3.3. *Если* $r^3 2^r \geqslant m_1 m_2 \geqslant 2^{r/c}$, $c > 1$, $\delta \in (0, \min(1/16, \dfrac{1}{6c}))$, $\ln m_2 + \delta r < t \leqslant \ln m_1 m_2 - \delta r$, *то*
$$|\mathfrak{T}^{\delta,3}_{V_1,V_2,t}| \geqslant_r 2^{t(m_1+m_2)}(1 - \exp\{-2^{\delta^2 r/2}\}).$$

Доказательство. Положим $\delta_1 = t/\ln m_1 - 1$. Очевидно, что $\delta <_r \delta_1 < 1 - \delta$, $(m_1)^{\delta_1} = 2^t/m_1$. Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{T}}^{\delta_1}_{V_i,t}$, $i \in N_2$, множество таблиц T_i из $\mathfrak{T}_{V_i,t}$ таких, что
$$|A_i(T_1)| > m_i - (m_i)^{1-\delta_1} r^{\ln r}. \tag{7.1}$$
Согласно утверждению 7.1.9
$$|\widetilde{\mathfrak{T}}^{\delta_1}_{V_i,t}| \geqslant_r 2^{tm_i}(1 - \exp\{-(m_i)^{1-\delta_1}\}) \geqslant_r 2^{tm_i}(1 - \exp\{-2^{2\delta^2 r}\}),\ i \in N_2.$$

Пусть $\widetilde{V}_1$, $\widetilde{V}_2$ — 2^t-разбиения множеств V_1, V_2, порожденные таблицами T_i из $\mathfrak{T}_{V_i,t}$, $i \in N_2$. Определим множества $J_k(T_1) \subseteq N_{2^t}$, $k \in \widetilde{N}_2$ так, что $j \in J_0(T_1)$, если $m_1^j = 0$, $j \in J_1(T_1)$, если $m_1^j = 1$, и $j \in J_2(T_1)$, если $m_1^j > 1$. Если $T_1 \in \widetilde{\mathfrak{T}}^{\delta_1}_{V_1,r}$, то непустых V_1^j не меньше, чем $m_1 - (m_1)^{1-\delta_1} r^{\ln r}$, следовательно,

$$|J_2(T_1)| \leqslant_r (m_1)^{1-\delta_1} r^{\ln r}, \quad |J_1(T_1)| \geqslant_r m_1 - 2(m_1)^{1-\delta_1} r^{\ln r}.$$

Количество таблиц T_i из $\mathfrak{T}_{V_i,t}$, $i \in N_2$, имеющих l одинаковых строк, не превосходит

$$a_{il} = \binom{m_i}{l} (2^t - 1)^{m_i - l} 2^t < 2^{t m_i + 1} \Big(\frac{m_i}{2^t}\Big)^l,$$

и

$$\sum_{l \geqslant 2^{\frac{\delta r}{4c}}} a_{il} \leqslant_r 2^{t m_i + 1} \Big(\frac{m_i}{2^t}\Big)^{]2^{\frac{\delta r}{4c}}[} \sum_{k \geqslant 0} \Big(\frac{m_i}{2^t}\Big) \leqslant_r$$
$$\leqslant_r 2^{t m_i} \exp\Big\{ -]2^{\frac{\delta r}{4c}}[\frac{\delta r}{2} + \ln e + 1 \Big\} \leqslant_r$$
$$\leqslant_r 2^{t m_i} \exp\{-2^{\frac{\delta r}{4c}}\}.$$

То есть, по крайней мере, для $2^{t m_i}(1 - \exp\{-2^{\frac{\delta r}{4c}}\})$ таблиц T_i из $\mathfrak{T}_{V_i,t}$, $i \in N_2$, выполнено

$$\max_{j \in N_{2^t}} m_1^j < 2^{\frac{\delta r}{4c}}. \tag{7.2}$$

Так как $m_2^{-1} \ll_r |J_1(T_1)|/2^t < 1/2$ для $T_1 \in \widetilde{\mathfrak{T}}^{\delta_1}_{V_1,r}$, то, применяя утверждение 7.1.9, получаем, что

$$\Big|\Big\{ T_2 \in \mathfrak{T}_{V_2,t} : \Big| |T_2^{-1}(\mu_t^{-1}(J_1(T_1)))|^{-\frac{|J_1(T_1)| m_2}{2^t}} \Big| \leqslant \Big(\frac{|J_1(T_1) m_2|}{2^t}\Big)^{1-\delta} \Big\}\Big| \geqslant_r$$
$$\geqslant_r 2^{m_2 t}\Big(1 - \exp\Big\{ - \frac{1}{12}\Big(\frac{|J_1(T_1)| m_2}{2^t}\Big)^{1-2\delta}\Big\}\Big) \geqslant_r$$
$$\geqslant_r 2^{m_2 t}(1 - \exp\{-2^{\delta r/2}\}). \tag{7.3}$$

Выполнено также

$$\frac{|J_1(T_1) m_2|}{2^t} + \Big(\frac{|J_1(T_1)| m_2}{2^t}\Big)^{1-\delta} \leqslant_r \frac{m_1 m_2}{2^t}\Big(1 + \Big(\frac{m_1 m_2}{2^t}\Big)^{-\delta}\Big) \leqslant_r$$
$$\leqslant_r \frac{m_1 m_2}{2^t}(1 + 2^{-(\delta^2 r/2)}),$$

$$\frac{|J_1(T_1)m_2|}{2^t} - \Big(\frac{|J_1(T_1)m_2|}{2^t}\Big)^{1-\delta} \geqslant_r$$
$$\geqslant_r \frac{m_1m_2}{2^t}\Big(1 - m_1^{-\delta_1} r^{\ln r} - \Big(\frac{m_1m_2}{2^t}\Big)^{-\delta}\Big) \geqslant_r$$
$$\geqslant_r \frac{m_1m_2}{2^t}(1 - 2^{-(\delta^2 r/2)}).$$

Возьмем некоторое множество $J_3(T_1) \subseteq L_{2^t}$, $|J_3(T_1)| = m_1^{1-\delta}$, $J_3(T_1) \supseteq J_2(T_1)$. Для $T_1 \in \widetilde{\mathfrak{T}}^{\delta_1}_{V_1,r}$ выполнено $m_2^{-1} \ll_r \dfrac{|J_3(T_1)|}{2^t} < \dfrac{1}{2}$. Применяя утверждение 7.1.9, получаем

$$\Big|\Big\{T_2 \in \mathfrak{T}_{V_2,t} : \Big||T_2^{-1}(\mu_t^{-1}(J_3(T_1)))| - \frac{|J_3(T_1)|m_2}{2^t}\Big| \leqslant \Big(\frac{|J_3(T_1)|m_2}{2^t}\Big)^{1-\delta}\Big\}\Big| \geqslant_r$$
$$\geqslant_r 2^{tm_2}\Big(1 - \exp\Big\{-\frac{1}{12}\Big(\frac{|J_3(T_1)|m_2}{2^t}\Big)^{1-2\delta}\Big\}\Big) \geqslant_r$$
$$\geqslant_r 2^{tm_2}(1 - \exp\{-2^{\frac{\delta r}{3}}\}). \quad (7.4)$$

Кроме того,
$$\frac{|J_3(T_1)|m_2}{2^t} + \Big(\frac{|J_3(T_1)|m_2}{2^t}\Big)^{1-\delta} \leqslant_r \frac{m_1m_2}{2^t} \cdot 2(m_1)^{-\frac{\delta}{2}} \leqslant_r \frac{m_1m_2}{2^t} \cdot 2^{-\frac{\delta r}{3c}}.$$
Число таких пар таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,t}$, что для T_1 и T_2 выполнены условия (7.1)–(7.4), начиная с некоторого r, не меньше, чем $2^{t(m_1+m_2)} \cdot (1 - \exp\{-2^{\delta^2 r}\})$. Для таких пар таблиц выполнено
$$\frac{m_1m_2}{2^t}(1-2^{-\frac{\delta^2 r}{2}}) \leqslant_r |\widehat{T}^{-1}(\widetilde{1}^t)| \leqslant_r \frac{m_1m_2}{2^t}(1+2^{-\frac{\delta^2 r}{2}}) + \frac{m_1m_2}{2^t} \cdot 2^{-\frac{\delta r}{3c}+\frac{\delta r}{4c}}.$$
Так как $\delta < \dfrac{1}{6c}$, то
$$\Big||\widehat{T}^{-1}(\widetilde{1}^t)| - \frac{m_1m_2}{2^t}\Big| \leqslant_r \frac{m_1m_2}{2^t} \cdot 2^{-\frac{\delta^2 r}{3}}. \quad (7.5)$$
Аналогичные рассуждения можно провести для любого $\widetilde{x} \in E^t$, рассматривая $\mu_t^{-1}(J_k(T_1)) \leftrightarrow \widetilde{x}$, $k = 1, 3$, вместо $\mu_t^{-1}(J_k(T_1))$.

Получаем, что

$$|\mathfrak{T}^{\delta,3}_{V_1,V_2,t}| \geqslant_r 2^{t(m_1+m_2)}(1 - 2^t \exp\{-2^{\delta^2 r}\}) \geqslant_r$$
$$\geqslant_r 2^{t(m_1+m_2)}(1 - \exp\{-2^{\delta^2 r/2}\}).$$

Утверждение 7.3.3 доказано. □

Утверждение 7.3.4. *Если* $r^3 \cdot 2^r \geqslant m_1 m_2 \geqslant 2^{r/c}$, $c > 1$, $\delta \in (0, \min(1/16, \frac{1}{6c}))$, $\ln m_2 + \delta r < t \leqslant \ln m_1 m_2 - \delta r$, *то*

$$\left|\left\{g \in \mathfrak{T}^{\delta,*}_{V_1,V_2,t} : |\mathfrak{T}^{g,\frac{\delta}{2},1}_{V_1,V_2,r}| = 2^{(r-t)(m_1+m_2)}\right\}\right| \geqslant_r$$
$$\geqslant_r 2^{t(m_1+m_2)}(1 - \exp\{-r^{\frac{\ln r}{3}}\}).$$

Доказательство. Пусть для таблицы g_1 из $\mathfrak{T}_{V_1,t}$ выполнено

$$|A_1(g_1)| > m_1 - (m_1)^{1-\delta_1} \cdot r^{\ln r}, \quad \text{где } \delta_1 = \frac{t}{\ln m_1} - 1. \tag{7.6}$$

В предыдущем утверждении было показано, что $|J_2(g_1)| \leqslant (m_1)^{1-\delta_1} \cdot r^{\ln r}$. Пусть $J_4(g_1) \subseteq N_{2^t}$ — такое множество, что $|J_4(g_1)| = (m_1)^{1-\delta_1} \cdot r^{\ln r}$, $J_4(g_1) \supseteq J_2(g_1)$. Так как при $m_1^j \leqslant 1$ $\Delta^j = 0$, то для любой таблицы T из $\mathfrak{T}^g_{V_1,V_2,r}$, где $g \in \mathfrak{T}^g_{V_1,V_2,t}$

$$\widetilde{\Delta} \cdot \widetilde{m}_2 = \sum_{j \in J_2(g_1) \cap (J_1(g_2) \cup J_2(g_2))} \Delta^j \cdot m_2^j \leqslant \sum_{j \in J_4(g_1) \cap (J_1(g_2) \cup J_2(g_2))} \Delta^j \cdot m_2^j.$$

Пусть для g_i, $i \in N_2$, выполнено

$$\max_{j \in N_{2^t}} m_1^j < 2^{\frac{\delta r}{4c}}. \tag{7.7}$$

Тогда $\Delta^j m_2^j \leqslant 2^{\frac{\delta r}{2c}}$ и

$$\widetilde{\Delta} \cdot \widetilde{m}_2 \leqslant \Big|J_4(g_1) \cap (J_1(g_2) \cup J_2(g_2))\Big| \cdot 2^{\frac{\delta r}{2c}} = \Big|g_2^{-1}(\mu_t^{-1}(J_4(g_1)))\Big| \cdot 2^{\frac{\delta r}{2c}}.$$

Если $\dfrac{(m_1)^{1-\delta_1} \cdot m_2}{2^t} = \dfrac{(m_1)^2 m_2}{2^{2t}} > 1$, то $m_2^{-1} \ll_r \dfrac{|J_4(g_1)|}{2^t} < \dfrac{1}{2}$.

Применяя утверждение 7.1.9, получаем

$$\left|\left\{g_2 \in \mathfrak{T}_{V_2,t} : \left|g_2^{-1}(\mu_t^{-1}(J_4(g_1)))\right| \leqslant \frac{2|J_4(g_1)|m_2}{2^t}\right\}\right| \geqslant_r$$
$$\geqslant_r 2^{tm_2}\left(1 - \exp\left\{-\frac{1}{12}\left(\frac{|J_4(g_1)|m_2}{2^t}\right)^{1-2\delta}\right\}\right) \geqslant_r$$
$$\geqslant_r 2^{tm_2}\left(1 - \exp\left\{-r^{\frac{\ln r}{2}}\right\}\right)$$

и $\dfrac{2|J_4(g_1)|m_2}{2^t} \cdot 2^{\frac{\delta r}{4c}} \leqslant \dfrac{2(m_1)^2 m_2 r^{\ln r}}{2^{2t}} \cdot 2^{\frac{\delta r}{4c}} \leqslant_r \dfrac{m_1 m_2}{2^t} \cdot 2^{-\frac{\delta r}{2}}$.

Если $\dfrac{(m_1)^{1-\delta} m_2}{2^t} \leqslant 1$, то $\dfrac{|J_4(g_1)|m_2}{2^t} \leqslant_r \ln r \leqslant_r (\ln m_2)^{2\ln\ln m_2}$.

Применяя утверждение 7.1.9, получаем

$$\Big|\Big\{g_2 \in \mathfrak{T}_{V_2,t} : \big|g_2^{-1}(\mu_t^{-1}(J_4(g_1)))\big| \leqslant (m_2)^{\delta/2}\Big\}\Big| \geqslant_r \\ \geqslant_r 2^{m_2 t}\big(1 - \exp\big\{-(m_2)^{\delta/4}\big\}\big) \geqslant_r \\ \geqslant_r 2^{m_2 t}\big(1 - \exp\big\{-2^{\frac{\delta^2 r}{2}}\big\}\big)$$

и $(m_2)^{\delta/2} \cdot 2^{\frac{\delta r}{4c}} \leqslant_r \exp\big\{\frac{\delta r}{4} + \delta \ln r + \frac{\delta r}{2c}\big\} \leqslant_r 2^{\frac{\delta r}{2}} \leqslant \frac{m_1 m_2}{2^t} \cdot 2^{-\frac{\delta r}{2}}$.

Проводя аналогичные рассуждения для $\mu_t^{-1}(J_4(g_1)) \leftrightarrow \widetilde{1}_i^t$, $i \in N_t$ вместо $\mu_t^{-1}(J_4(g_1))$, получаем, что если для таблицы g_1 из $\mathfrak{T}_{V_1,t}$ выполнены условия (7.6), (7.7), то, по крайней мере, для $2^{tm_2}(1 - \exp\{-2^{\frac{\delta r}{4c}}\} - r\exp\{-r^{\frac{\ln r}{2}}\})$ таблиц из $\mathfrak{T}_{V_2,t}$ выполнено (7.7), и для всех T из $\mathfrak{T}^g_{V_1,V_2,r}$ выполнено

$$\widetilde{\Delta}_k \cdot \widetilde{m}_2 \leqslant_r \frac{m_1 m_2}{2^t} \cdot 2^{-\frac{\delta r}{2}} \leqslant_r \widetilde{m}_{1k} \cdot \widetilde{m}_2 \cdot 2^{-\frac{\delta r}{3}}, \quad k \in N_t. \tag{7.8}$$

Из доказательства утверждения 7.3.3 следует, что условия (7.6) и (7.7) выполняются, начиная с некоторого r для $2^{tm_1}(1 - \exp\{-2^{\frac{\delta r}{4c}}\} - \exp\{-2^{2\delta^2 r}\})$ пар таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,t}$. Значит, пар таблиц g из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,t}$, для которых выполнены условия (7.6)–(7.8) (а, следовательно, $\mathfrak{T}^{g,\delta^2/2,1}_{V_1,V_2,r} \supseteq \mathfrak{T}^{g,\delta/2,1}_{V_1,V_2,r} = \mathfrak{T}^g_{V_1,V_2,r}$), начиная с некоторого r, будет не меньше, чем $2^{t(m_1+m_2)}(1 - \exp\{-r^{\frac{1}{3}\ln r}\})$.

Утверждение 7.3.4 доказано. □

Утверждение 7.3.5. *Если* $r^3 \cdot 2^r \geqslant m_1 m_2 \geqslant 2^{r/c}$, $c > 1$, $\delta \in (0, \min(1/16, \frac{1}{6c}))$, $\ln m_1 - \delta r \leqslant t \leqslant \ln m_2 + \delta r$, *то*

$$|\mathfrak{T}^{\delta,3}_{V_1,V_2,t}| \geqslant_r 2^{t(m_1+m_2)} \cdot (1 - \exp\{-2^{\delta^2 r}\}).$$

Доказательство. Возьмем некоторое u, $t < \ln m_2 + \delta r < u \leqslant \ln m_2 + \frac{3}{2}\delta r$. Так как $\ln m_1 m_2 - \delta r \geqslant \ln m_2 + \frac{4r}{9c} - \delta r \geqslant_r \ln m_2 + \frac{\delta r}{3}$, то в силу утверждения 7.3.3

$$|\mathfrak{T}^{\delta,3}_{V_1,V_2,u}| \geqslant_r 2^{u(m_1+m_2)} \cdot (1 - \exp\{-2^{\delta^2 r}\}).$$

Каждой паре таблиц g из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,t}$ соответствует множество $\mathfrak{T}^g_{V_1,V_2,u}$ пар таблиц S из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,u}$, для которых $\pi_{u,t} \circ S = g$. Для любого $\widetilde{x} \in E^t$, $S \in \mathfrak{T}^g_{V_1,V_2,u}$

$$|\widehat{g}^{-1}(\widetilde{x})| = \sum_{\widetilde{y}:\pi_{u,t}(\widetilde{y})=\widetilde{x}} |\widehat{S}^{-1}(\widetilde{y})|.$$

Число таких пар таблиц g из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,t}$, что $\mathfrak{T}^g_{V_1,V_2,u} \cap \mathfrak{T}^{\delta,*}_{V_1,V_2,u} = \varnothing$, начиная с некоторого не превосходит

$$2^{u(m_1+m_2)} \cdot \exp\{-2^{\delta^2 r}\}/2^{(u-t)(m_1+m_2)} = 2^{t(m_1+m_2)} \exp\{-2^{\delta^2 r}\}.$$

Если найдется $S \in \mathfrak{T}^g_{V_1,V_2,u} \cap \mathfrak{T}^{\delta,*}_{V_1,V_2,u}$, то для любого $\widetilde{x} \in E^t$

$$2^{u-t}\frac{m_1 m_2}{2^t}(1 - 2^{-\frac{\delta^2 r}{3}}) \leqslant_r |\widetilde{g}^{-1}(\widetilde{x})| \leqslant_r 2^{u-t}\frac{m_1 m_2}{2^t}(1 + 2^{-\frac{\delta^2 r}{3}}).$$

То есть,

$$\left|\left\{g \in \mathfrak{T}_{V_1,V_2,t} : \forall \widetilde{x} \in E^t \Big| |\widehat{g}^{-1}(\widetilde{x})| - \frac{m_1 m_2}{2^t}\Big| \leqslant \frac{m_1 m_2}{2^t} \cdot 2^{-\frac{\delta^2 r}{3}}\right\}\right| \geqslant \geqslant 2^{t(m_1+m_2)}(1 - \exp\{-2^{\delta^2 r}\}).$$

Кроме того, если $S \in \mathfrak{T}^g_{V_1,V_2,u} \cap \mathfrak{T}^{\delta,3}_{V_1,V_2,u}$, то

$$\max_{\widetilde{x} \in E^t, i \in N_2} \left|g_i^{-1}(\widetilde{x})\right| \leqslant 2^{u-t} \max_{\widetilde{y} \in E^u, i \in N_2} \left|S_i^{-1}(\widetilde{y})\right| \leqslant_r 2^{\frac{5}{2}\delta r + \frac{\delta r}{4c}} \leqslant 2^{3\delta r}.$$

Следовательно, $\left|\mathfrak{T}^{\delta,3}_{V_1,V_2,t}\right| \geqslant_r 2^{t(m_1+m_2)} \cdot \Big(1 - \exp\big\{ - 2^{\delta^2 r}\big\}\Big)$.

Утверждение 7.3.5 доказано. □

Утверждение 7.3.6. *Если* $r^3 \cdot 2^r \geqslant m_1 m_2 \geqslant 2^{r/c}$, $c > 1$, $\delta \in (0, \min(\frac{1}{64}, \frac{1}{40c}))$, $\ln m_1 - \delta r \leqslant t \leqslant \ln m_2 + \delta r$, *то* $\left|\mathfrak{T}^{\delta,*}_{V_1,V_2,t}\right| \geqslant \left|\mathfrak{T}^{\delta,3}_{V_1,V_2,t}\right|$.

Доказательство. Из утверждений 7.2.2, 7.3.5 вытекает, что для $g \in \mathfrak{T}^{\delta,3}_{V_1,V_2,t}$, $j \in N_{2^t}$ выполнено

$$\left|\left\{T_1^j \in \mathfrak{T}_{V_1^j,r-t} : |\mathcal{U}_0(T_1^j)| < m_1^j\right\}\right| \leqslant_r 2^{(r-t)m_1^j} \cdot \frac{3(m_2^j)^2}{2^{(r-t)(1-\delta/2)}} \leqslant_r \leqslant_r 2^{(r-t)m_1^j - \frac{r}{2} + 8\delta r}.$$

Тогда согласно утверждению 7.1.9 число таблиц T_1 из $\mathfrak{T}_{V_1,r-t}$, для которых неравенство $|\mathcal{U}_0(T_1^j)| < m_1^j$ выполнено не более, чем для $2 \cdot 2^{-r/2+8\delta r+t} \leqslant 2^{10\delta r}$ j из N_{2^t}, начиная с некоторого r, не меньше, чем

$$2^{(r-t)m_1} \cdot \left(1 - \exp\left\{-\frac{1}{12}\left(2^{10\delta r}\right)^{1-2\delta}\right\}\right) \geqslant_r 2^{(r-t)m_1}\left(1 - \exp\left\{-2^{8\delta r}\right\}\right).$$

Для таких таблиц T_1 и любых таблиц T_2 из $\mathfrak{T}_{V_2,r-t}$

$$\widetilde{\Delta}_k \cdot \widetilde{m}_2 \leqslant 2^{10\delta r} \cdot 2^{3\delta r} \cdot 2^{3\delta r} = 2^{16\delta r}, \quad k \in N_r,$$

в то время как $\widetilde{m}_1 \cdot \widetilde{m}_2 \geqslant \dfrac{1}{2}\dfrac{m_1 m_2}{2^r} \geqslant m_1 \cdot 2^{-\delta r-1} \geqslant 2^{\frac{r}{2c}-2\delta r}$. Получаем $\widetilde{\Delta}_k \cdot \widetilde{m}_2 \leqslant_r \widetilde{m}_1 \cdot \widetilde{m}_2 \cdot 2^{-2\delta r}$ для всех $k \in N_r$. Следовательно, для $g \in \mathfrak{T}^{\delta,3}_{V_1,V_2,t}$

$$\left|\mathfrak{T}^{g,\delta^2/2,1}_{V_1,V_2,r}\right| \geqslant \left|\mathfrak{T}^{g,2\delta,1}_{V_1,V_2,r}\right| \geqslant 2^{(r-t)(m_1+m_2)}\left(1 - \exp\{-2^{r/8}\}\right).$$

Утверждение 7.3.6 доказано. □

Непосредственно из утверждений 7.3.1–7.3.6 следует

Утверждение 7.3.7. *Если* $r^3 \cdot 2^r \geqslant m_1 m_2 \geqslant 2^{r/c}$, $c > 1$, $\delta \in \left(0, \min\left(\frac{1}{64}, \frac{1}{40c}\right)\right)$, $1 \leqslant t \leqslant \ln m_1 m_2 - \delta r$, *то*

$$\left|\mathfrak{T}^{\delta,*}_{V_1,V_2,t}\right| \geqslant_r 2^{t(m_1+m_2)}\left(1 - \exp\left\{-r^{\frac{\delta}{3}\ln r}\right\}\right).$$

Обозначим через $\mathcal{J}^{\varepsilon}_{V_1,V_2,s}$, где $\varepsilon \in (0, 2^{-s})$, множество пар таблиц f из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,s}$, для которых $\left|f_i^{-1}(\widetilde{x})\right| \geqslant \varepsilon m_i$ для всех $\widetilde{x} \in E^s$, $i \in N_2$. Через $\widetilde{V}_1, \widetilde{V}_2$ будем обозначать 2^s-разбиения множеств V_1, V_2, порожденные таблицей f, $\widetilde{V}_i = (V_i^1, \ldots, V_i^{2^s})$. Положим $m_i^j = |V_i^j|$, $\widetilde{m}_i = (m_i^1, \ldots, m_i^{2^s})$, $m_{il}^j = m_i^{\mu_{t,l}(j)}$, $\widetilde{m}_{il} = (m_{il}^1, \ldots, m_{il}^{2^s})$, $i \in N_2$, $j \in N_{2^s}$, $l \in N_t \setminus N_s$. Так как $\min\limits_{j \in N_{2^s}} m_1^j \geqslant \varepsilon m_1$, то $\widetilde{m}_{1l} \cdot \widetilde{m}_2 \geqslant \varepsilon m_1 m_2$ для любого $l \in N_t$. Рассматривая пары таблиц g из $\mathfrak{T}^{f}_{V_1,V_2,t}$, где $f \in \mathcal{J}^{\varepsilon}_{V_1,V_2,s}$, $t > s$, через $\widetilde{K}_1, \widetilde{K}_2$ будем обозначать 2^t-разбиения множеств V_1, V_2, порожденные g, $\widetilde{K}_i = (K_i^1, \ldots, K_i^{2^t})$, и $k_i^j = |K_i^j|$, $\widetilde{k}_i = (k_i^1, \ldots, k_i^{2^t})$, $k_{il}^j = k_i^{\mu_{r,l}(j)}$, $\widetilde{k}_{il} = (k_{il}^1, \ldots, k_{il}^{2^t})$, $i \in N_2$, $j \in N_{2^t}$, $l \in N_r \setminus N_t$.

Через $\mathfrak{T}^{f,g,*}_{V_1,V_2,t}$ обозначим множество таких пар таблиц g из $\mathfrak{T}^{f}_{V_1,V_2,t}$, что

$$\left|\mathfrak{T}^{g,\frac{\delta^2}{3},1}_{V_1,V_2,r}\right| \geqslant 2^{(r-t)(m_1+m_2)}\left(1 - \exp\left\{-2^{\frac{\delta r}{4}}\right\}\right),$$

а через $\mathfrak{T}^{g,\delta,1}_{V_1,r}$ — множество таких таблиц T_1 из $\mathfrak{T}^{g_1}_{V_1,r}$, что для любой таблицы T_2 из $\mathfrak{T}^{g_2}_{V_2,r}$ $T\in\mathfrak{T}^{g,\delta,1}_{V_1,V_2,r}$. Очевидно, что если $g\in\in\mathfrak{T}^{f,\delta,*}_{V_1,V_2,t}$, то

$$\left|\mathfrak{T}^{g,\delta,1}_{V_1,r}\right|\geqslant 2^{(r-t)m_1}\left(1-\exp\left\{-2^{\frac{\delta r}{4}}\right\}\right).$$

Утверждение 7.3.8. *Если* $r^{5/2}\cdot 2^r\geqslant m_1m_2\geqslant 2^{r/c}$, $c>1$, $\delta\in\in\left(0,\min\left(\frac{1}{64},\frac{1}{40c}\right)\right)$, $s+1\leqslant\ln m_1m_2-\delta r$, $f\in\mathcal{J}^{\varepsilon}_{V_1,V_2,s}$ *то*

$$\left|\mathfrak{T}^{f,\delta,*}_{V_1,V_2,t}\right|\geqslant_r 2^{(t-s)(m_1+m_2)}\left(1-\exp\left\{-r^{\frac{\ln r}{5}}\right\}\right).$$

Доказательство. Случай $s=0$ содержится в утверждении 7.3.7. Пусть $s>0$. Рассмотрим множества V_1^j,V_2^l, $j,l\in N_{2^s}$. Так как $f\in\mathcal{J}^{\varepsilon}_{V_1,V_2,s}$, то $p^3\cdot 2^p\geqslant_p m_1^jm_2^l\geqslant\varepsilon^2m_1m_2\geqslant_p 2^{p/c_1}$, $c_1\geqslant c$, где $p=r-s$. Если $s+1\leqslant t\leqslant\ln m_1m_2-\delta r$, то для любого $\delta_1\in(0,\delta)$ выполнено $1\leqslant u\leqslant_p\ln m_1^jm_2^l-\delta_1p$, где $u=t-s$.

Если $u>s$ и $g\in\mathfrak{T}_{V_1,V_2,u}$, то через g^{jl} будем обозначать пару таблиц $(g_1|_{V_1^j},g_2|_{V_2^l})$ из $\mathfrak{T}_{V_1^j,V_2^l,u}$.

Для пар таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1^j,V_2^l,u}$ можно применить утверждение 7.3.7. Обозначим через $\widetilde{Z}_1^j,\widetilde{Z}_2^l$ разбиения множеств V_1^j,V_2^l, порожденные парой таблиц $g^{jl}\in\mathfrak{T}_{V_1^j,V_2^l,u}$, $z_i^{j\nu}=|Z_i^{j\nu}|$, $\widetilde{z}_i^j=(z_i^{j1},\ldots,z_i^{j2^u})$, $z_i^{\widetilde{x},j,\nu}=z_i^{j_1(j,\widetilde{x}),i_1(i,\widetilde{x})}$, где $j_1(j,\widetilde{x})==\mu_s(\mu_s^{-1}(j)\leftrightarrow\pi_{u+s,s}(\widetilde{x}))$, $i_1(i,\widetilde{x})=\mu_u(\mu_u^{-1}(i)\leftrightarrow\tau_{u+s,s}(\widetilde{x}))$, $\widetilde{z}_i^{\widetilde{x},j}=(z_i^{\widetilde{x},j,1},\ldots,z_i^{\widetilde{x},j,2^u})$, $i\in N_2$, $j\in N_{2^s}$, $\nu\in N_{2^u}$, $\widetilde{x}\in E^{u-s}$. Положим $w^{i\nu}=z^{i\nu}-|\mathcal{U}_0(g_1^{jl}|_{Z_1^{j\nu}})|$ и введем вектора $\widetilde{w}^j,\widetilde{w}^{\widetilde{x},j}$ аналогично $\widetilde{z}^j,\widetilde{z}^{\widetilde{x},j}$. Тогда для $\delta_1\in(0,\delta)$ выполнено

$$\left|\mathfrak{T}^{\delta_1,*}_{V_1^j,V_2^l,u}\right|\geqslant_p 2^{u(m_1^j+m_2^l)}\left(1-\exp\left\{-p^{\frac{\ln p}{3}}\right\}\right),$$

и, если $g^{jl}\in\mathfrak{T}^{\delta_1,*}_{V_1^j,V_2^l,u}$, то для всех пар таблиц из $\mathfrak{T}^{g^{jl},\delta_1^2/2,1}_{V_1^j,V_2^l,p}$ и $\widetilde{x}\in\{\widetilde{y}\in E^u:\pi_{u+s,s}(\widetilde{y})=\widetilde{1}^s\}$ выполнено $\widetilde{w}^{\widetilde{x},j}\cdot\widetilde{z}_2^l\leqslant_p 2^{-\frac{\delta_1^2p}{2}}\widetilde{z}_1^{\widetilde{x},j}\cdot\widetilde{z}_2^l$ (если $\pi_{u+s,s}(\widetilde{x})=\widetilde{1}^s$, то $j_1(j,\widetilde{x})=j$). Тот факт, что $\widetilde{w}^{\widetilde{x},j}\cdot\widetilde{z}_2^l\leqslant_p 2^{-\frac{\delta_1^2p}{2}}\cdot\widetilde{z}_1^{\widetilde{x},j}\cdot\widetilde{z}_2^l$ для остальных $\widetilde{x}$ из E^{u+s}, следует из аналогичных рассуждений для $V_1^{j_1(j,\widetilde{x})}$ и V_2^l.

Обозначим через $\mathfrak{T}^{\delta,*}_{\widetilde{V}_1,\widetilde{V}_2,u}$ множество таких пар таблиц g из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,u}$, что для всех $j,l \in N_{2^s}$ $g^{jl} \in \mathfrak{T}^{\delta,*}_{V_1^j,V_2^l,u}$ и через $\mathfrak{T}^{g,\delta,1}_{\widetilde{V}_1,\widetilde{V}_2,p}$ — множество таких пар таблиц S из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,p}$, что для всех $j,l \in N_{2^s}$ $S^{jl} \in \mathfrak{T}^{g^{jl},\delta,1}_{V_1^j,V_2^l,p}$.

Для всех g из $\mathfrak{T}^{\delta_1,*}_{\widetilde{V}_1,\widetilde{V}_2,u}$ выполнено

$$\begin{aligned} \left|\mathfrak{T}^{g,\delta_1^2/2,1}_{\widetilde{V}_1,\widetilde{V}_2,p}\right| &\geqslant_p 2^{(p-u)(m_1+m_2)}\cdot\left(1-\exp\left\{-2^{\frac{\delta p}{3}}\right\}\right)\\ \text{и}\quad \left|\mathfrak{T}^{\delta_1,*}_{\widetilde{V}_1,\widetilde{V}_2,u}\right| &\geqslant_p 2^{u(m_1+m_2)}\cdot\left(1-2^{2s}\exp\left\{-p^{\frac{\ln p}{3}}\right\}\right)\geqslant_p\\ &\geqslant_p 2^{u(m_1+m_2)}\cdot\left(1-\exp\left\{-p^{\frac{\ln p}{4}}\right\}\right). \end{aligned}$$

Для всех таблиц из $\mathfrak{T}^{g,\delta_1^2/2,1}_{\widetilde{V}_1,\widetilde{V}_2,p}$ и $\widetilde{x}\in\widetilde{\mathcal{E}}^{u+s}$

$$\sum_{j=1}^{2^s}\widetilde{w}^{\widetilde{x},j}\cdot\widetilde{z}_2^l \leqslant_p 2^{-\frac{\delta_1^2 p}{2}}\cdot\sum_{j=1}^{2^s}\widetilde{z}_1^{\widetilde{x},j}\cdot\widetilde{z}_2^l.$$

Следовательно, если пара таблиц S принадлежит $\mathfrak{T}^{g,\delta_1^2/2,1}_{\widetilde{V}_1,\widetilde{V}_2,p}$, где $g\in\in\mathfrak{T}^{\delta_1,*}_{\widetilde{V}_1,\widetilde{V}_2,u}$, то пара таблиц T из $\mathfrak{T}^{f}_{V_1,V_2,r}$, $f\in\mathcal{J}^{\varepsilon}_{V_1,V_2,s}$, такая, что $\tau_{r,s}\circ T=S$, принадлежит $\mathfrak{T}^{h,\delta_1^2/2,1}_{V_1,V_2,r}$, где $\tau_{t,s}\circ h=g$ и $\pi_{t,s}\circ h=f$. Для любого $\delta_1\in(0,\min(1/64,1/40c))$ найдется $\delta\in\in(\delta_1,\min(1/64,1/40c))$, и, если $\widetilde{K}_1,\widetilde{K}_2$ — 2^t-разбиения V_1,V_2, порожденные парой таблиц h из $\mathfrak{T}^{f,\delta_1,*}_{V_1,V_2,t}$, то для $i\in N_t$

$$\begin{aligned} \widetilde{\Delta}_i\cdot\widetilde{k}_2=\sum_{j=1}^{2^s}\widetilde{w}^{\widetilde{1}_i^t,j}\cdot\widetilde{z}_2^j\leqslant_p 2^{-\frac{\delta_1^2 p}{2}}\sum_{j=1}^{2^s}\widetilde{z}_1^{\widetilde{1}_i^t,j}\cdot\widetilde{z}_2^j=\\ =2^{-\frac{\delta_1^2 p}{2}}\widetilde{k}_{1i}\cdot\widetilde{k}_2\leqslant_r 2^{-\frac{\delta_1^2 r}{3}}\widetilde{k}_{1i}\cdot\widetilde{k}_2. \end{aligned}$$

Аналогично, для $i\in N_r\backslash N_t$

$$\widetilde{\Delta}_i\cdot\widetilde{k}_2=\sum_{j=1}^{2^s}\widetilde{w}^j\cdot\widetilde{z}_2^j\leqslant_r 2^{-\frac{\delta_1^2 r}{3}}\cdot\widetilde{k}_{1i}\cdot\widetilde{k}_2.$$

Полагая

$$\widetilde{\mathfrak{T}}^{f,\delta_1,*}_{V_1,V_2,t}=\left\{h\in\mathfrak{T}^{f}_{V_1,V_2,t}:\tau_{t,s}\circ h\in\mathfrak{T}^{\delta_1,*}_{\widetilde{V}_1,\widetilde{V}_2,u},\ \pi_{t,s}\circ h=f\right\},$$

имеем

$$\left|\widetilde{\mathfrak{T}}^{f,\delta_1,*}_{V_1,V_2,t}\right| \geqslant_r 2^{(t-s)(m_1+m_2)}\left(1-\exp\left\{-r^{\frac{\ln r}{5}}\right\}\right)$$

и для любой таблицы h из $\mathfrak{T}^{f,\delta_1,*}_{V_1,V_2,t}$

$$\left|\mathfrak{T}^{h,\delta_1^2/2,1}_{V_1,V_2,r}\right| \geqslant 2^{(r-t)(m_1+m_2)}\left(1-\exp\left\{-2^{\frac{\delta r}{4}}\right\}\right),$$

и, следовательно, $\mathfrak{T}^{f,\delta_1,*}_{V_1,V_2,r} \supseteq \widetilde{\mathfrak{T}}^{f,\delta_1,*}_{V_1,V_2,r}$.

Утверждение 7.3.8 доказано. □

Утверждение 7.3.9. *Если* $r^{5/2}\cdot 2^r \geqslant m_1m_2 \geqslant 2^{r/c}$, $c>1$, $\delta \in \in \left(0, \min\left(\frac{1}{64}, \frac{1}{40c}\right)\right)$, $s+1 \leqslant t \leqslant \ln m_1m_2 - \delta r$, $f \in \mathcal{J}^{\varepsilon}_{V_1,V_2,s}$ *то для любой таблицы* h *из* $\widetilde{\mathfrak{T}}^{f,\delta,*}_{V_1,V_2,t}$ *выполнено* $\max\limits_{i\in N_{2^t}} 2^{t-r}\cdot k_1^i \leqslant \leqslant_r 2^{-\frac{\delta r}{2}}$.

Доказательство. Так как $\mathfrak{T}^{\delta,*}_{V_1^j,V_2^l,t-s} \subseteq \mathfrak{T}^{\delta,2}_{V_1^j,V_2^l,t-s}$, то для любых $j \in N_{2^s}$ и $\delta_1 \in (0,\delta)$ для всех $K_1^i \subseteq V_1^j$, начиная с некоторого номера r, выполнено:

$$|k_1^i - 2^{s-t}m_1^j| \leqslant (2^{s-t}m_1^j)^{1-\delta_1}, \text{ если } 1 \leqslant t-s < \ln m_1^j - \delta_1 p,$$
$$k_1^i \leqslant 2^{3\delta r}, \text{ если } \ln m_1^j - \delta_1 p \leqslant t-s \leqslant \ln m_2^l + \delta_1 p,$$
$$k_1^i \leqslant 2^{\frac{\delta r}{4c}}, \text{ если } \ln m_2^l + \delta_1 p < t-s \leqslant \ln m_1^j m_2^l - \delta_1 p,$$

где $p=r-s$. В первом случае $2^{t-r}\cdot k_1^i \leqslant_r 2^{t-r}\cdot 2^{s-t+1}m_1 \leqslant_r 2^{-r/3}$, во втором — $2^{t-r}\cdot k_1^i \leqslant_r 2^{-\frac{r}{3}+3\delta r}$, в третьем — $2^{t-r}\cdot k_1^i \leqslant_r 2^{-\delta r}2^{\frac{\delta r}{4c}} \leqslant \leqslant 2^{-\frac{\delta r}{2}}$.

Утверждение 7.3.9 доказано. □

Утверждение 7.3.10. *Если* $r^{5/2}\cdot 2^r \geqslant m_1m_2 \geqslant 2^{r/c}$, $c>1$, $\delta \in \in (0, \min(\frac{1}{64}, \frac{1}{40c}))$, $s+1 \leqslant t \leqslant \ln m_1m_2 - \delta r$, $f \in \mathcal{J}^{\varepsilon}_{V_1,V_2,s}$ *то для всех таблиц* h *из* $\widetilde{\mathfrak{T}}^{f,\delta,*}_{V_1,V_2,t}$ *и всех* x *из* E^t *выполнено*

$$\left|\left|\widehat{h}^{-1}(\widetilde{x})\right| - \frac{\widetilde{m}_1^{\widetilde{x}}\cdot\widetilde{m}_2}{2^{t-s}}\right| \leqslant 2^{s-t}\widetilde{m}_1^{\widetilde{x}}\cdot\widetilde{m}_2\cdot 2^{-\frac{\delta^2 r}{4}},$$

где $\widetilde{m}_1^{\widetilde{x}} = (m_1^{j_1(1,\widetilde{x})}, \ldots, m_1^{j_1(2^s,\widetilde{x})})$.

Доказательство. Так как $\mathfrak{T}^{\delta,*}_{V_1^j,V_2^l,t-s} \subseteq \mathfrak{T}^{\delta,1}_{V_1^j,V_2^l,t-s}$, то для всех $j,l \in N_{2^s}$, $\widetilde{x} \in E^{t-s}$

$$\left| \left| (\widehat{g}^{jl})^{-1}(\widetilde{x}) \right| - 2^{s-t} m_1^j m_2^l \right| \leqslant 2^{s-t} m_1^j m_2^l \cdot 2^{-\frac{\delta^2 r}{4}}.$$

Следовательно, для любого $\widetilde{x} \in E^t$

$$\left| \left| \widehat{h}^{-1}(\widetilde{x}) \right| - 2^{s-t} \cdot \widetilde{m}_1^{\widetilde{x}} \cdot \widetilde{m}_2 \right| \leqslant 2^{s-t} \widetilde{m}_1^{\widetilde{x}} \cdot \widetilde{m}_2 \cdot 2^{-\frac{\delta^2 r}{4}}.$$

Утверждение 7.3.10 доказано. □

Утверждение 7.3.11. *Если* $2^r \cdot r^{5/2} \geqslant m_1 m_2 \geqslant 2^r / r^5$, $\delta \in (0, \min(\frac{1}{64}, \frac{1}{40c}))$, $s+1 \leqslant t \leqslant \ln m_1 m_2 - \delta r$, $f \in \mathcal{J}^{\varepsilon}_{V_1,V_2,s}$ $g \in \widetilde{\mathfrak{T}}^{f,\delta,*}_{V_1,V_2,t}$, *то*

$$\left| \mathfrak{T}^{g,\text{ТТ}}_{V_1,V_2,r} \right| \leqslant_r 2^{(r-t)(m_1+m_2)} \cdot H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) \cdot \left(1 + 2^{-\frac{\delta^2 r}{12}} \right).$$

Доказательство. Это утверждение доказывается по той же схеме, что и утверждение 7.2.21.

Обозначим через $\mathfrak{T}_1^{g,\delta}$ множество пар таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$, таких, что $T_1 \notin \mathfrak{T}^{g,\delta^2/3,1}_{V_1,r}$. Так как $g \in \mathfrak{T}^{f,\delta,*}_{V_1,V_2,t}$, то

$$\left| \mathfrak{T}_1^{g,\delta} \right| \leqslant_r 2^{(r-t)(m_1+m_2)} \cdot \exp\left\{ -2^{\frac{\delta r}{4}} \right\} \leqslant_r$$
$$\leqslant_r 2^{(r-t)(m_1+m_2)} \cdot H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) \cdot \exp\left\{ -2^{\frac{\delta r}{5}} \right\}.$$

Через $\mathfrak{T}_2^{g,\delta,\text{ТТ}}$ обозначим множество таких пар таблиц T из $\mathfrak{T}^{g,\text{ТТ}}_{V_1,V_2,r}$, что $T_1 \in \mathfrak{T}^{g_1,\delta^2/3,1}_{V_1,r}$ и $A_2^j \cap D^{g,j} = \varnothing$ для всех $j \in N_{2^t}$, где

$$A_i^j = T\left(K_i^j\right), \quad D^{g,j} = \left(A_1^j \cup \cup_{k=1}^r A^{g,j}_{1,k} \right) \Big\backslash \left(\cup_{k=0}^r \mathcal{U}_k^{g,j} \right),$$

$$i \in N_2,\ j \in N_{2^t}.$$

Имеем

$$\left|\mathfrak{T}_2^{g,\delta,\text{тт}}\right| \leqslant \left|\mathfrak{T}_{V_1,r}^{g_1,\delta^2/3,1}\right| \cdot \max_{T_1\in\mathfrak{T}_{V_1,r}^{g_1,\delta^2/3,1}} \left(\sum_{\substack{\nu_i>0, i\in N_r,\\ \nu^j\leqslant k_2^j, j\in N_{2^t}}} \prod_{j=1}^{2^t} \left(\prod_{i=1}^{r} \left(k_{1i}^j\right)^{\nu_i^j}\right) \times \right.$$

$$\times \left(2^{r-t} - \sum_{\eta=0}^{r} \left(k_{1\eta}^j - \Delta_\eta^j\right)\right)^{k_2^j-\nu^j} \times$$

$$\left.\times \binom{k_2^j}{\nu_1^j}\binom{k_2^j-\nu_1^j}{\nu_2^j}\ldots\binom{k_2^j-\nu_1^j-\ldots-\nu_{r-1}^j}{\nu_r^j}\right) \leqslant_r$$

$$\leqslant_r 2^{(r-t)(m_1+m_2)} \cdot \max_{T_1\in\mathfrak{T}_{V_1,r}^{g_1,\delta^2/3,1}} \left(\prod_{j=1}^{2^t} \left(1 - 2^{t-r}\sum_{\eta=0}^{r}\left(k_{1\eta}^j - \Delta_\eta^j\right)\right)^{k_2^j} \times \right.$$

$$\left.\times \sum_{\substack{\nu_i>0, i\in N_r,\\ \nu^j\leqslant k_2^j, j\in N_{2^t}}} \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{2^t} \left(k_{1i}^j\right)^{\nu_i^j} \left(2^{r-t} - \sum_{\eta=0}^{r} k_{1\eta}^j\right)^{-\nu_i^j} \binom{k_2^j}{\nu_i^j}\right) \leqslant_r$$

$$\leqslant_r 2^{(r-t)(m_1+m_2)} \cdot \max_{T_1\in\mathfrak{T}_{V_1,r}^{g_1,\delta^2/3,1}} \left(\exp\left\{ -2^{tr}\sum_{\eta=0}^{r}\left(\widetilde{k}_{1\eta}\cdot\widetilde{k}_2 - \widetilde{\Delta}_\eta\widetilde{k}_2\right)\right\} \times \right.$$

$$\left.\times \prod_{i=1}^{r} \exp\left\{2^{t-r}\left(\widetilde{k}_{1i}\cdot\widetilde{k}_2 + 2^{t-r+1}\sum_{j=1}^{2^t} k_{1i}^j\cdot k_2^j - \sum_{\eta=0}^{r} k_{1\eta}^j\right)\right\} - 1\right),$$

где $\nu_i = \sum\limits_{j=1}^{2^t} \nu_i^j$, $\nu^j = \sum\limits_{i=1}^{r} \nu_i^j$. Из утверждений 7.3.8–7.3.10 следует, что

$$\left|\mathfrak{T}_2^{g,\delta,\text{тт}}\right| \leqslant_r 2^{(r-t)(m_1+m_2)} \cdot \exp\left\{ -2^{s-r}\sum_{i=0}^{r} \widetilde{m}_{1i}\cdot\widetilde{m}_2 + 2^{-\frac{\delta^2 r}{4}}\right\} \times$$

$$\times \prod_{i=1}^{r} \left(\exp\left\{ \frac{\widetilde{m}_{1i}\cdot\widetilde{m}_2}{2^{r-s}}\left(1 + 2^{-\frac{\delta^2 r}{5}}\right)\right\} - 1\right).$$

Так как $\dfrac{\widetilde{m}_{1i}\cdot\widetilde{m}_2}{2^{r-s}} \leqslant_r 2^{-\frac{\delta r}{2}}$, то аналогично утверждению 7.2.7 получаем

$$\left|\mathfrak{T}_2^{g,\delta,\text{тт}}\right| \leqslant_r 2^{(r-t)(m_1+m_2)} \cdot H^{f,s}(\widetilde{m}_1,\widetilde{m}_2,r)\cdot\left(1 + 2^{-\frac{\delta^2 r}{7}}\right).$$

Обозначим через $\mathfrak{T}_3^{g,\delta,\text{тт}}$ множество таких пар таблиц T из $\mathfrak{T}^{g,\text{тт}}_{V_1,V_2,r}$, что $T_1 \in \mathfrak{T}^{g_1,\delta^2/3,1}_{V_1,r}$, $\cup_{j=1}^{2^t}\left(A_2^j \cap D^{g,j}\right) \neq \varnothing$ и для всех $j \in N_{2^t}$, $\widetilde{x} \in D^{g,j}$ число множеств A_{1i}^j, $i \in N_r$, которым принадлежит $\widetilde{x}$, меньше $r/\ln^2 r$. Множество пар таблиц T из $\mathfrak{T}_3^{g,\delta,\text{тт}}$, таких, что $\sum\limits_{j=1}^{2^t}\left|T^{-1}\left(D^j\right)\cap V_2^j\right| = l$, обозначим через $\mathfrak{T}_{3,l}^{g,\delta,\text{тт}}$. Так как пары таблиц из $\mathfrak{T}_3^{g,\delta,\text{тт}}$ — тестовые, то

$$\left|\mathfrak{T}_{3,l}^{g,\delta,\text{тт}}\right| \leqslant \left|\mathfrak{T}^{g_1,\delta^2/3,1}_{V_1,r}\right| \times$$

$$\times \max_{T_1\in\mathfrak{T}^{g_1,\delta^2/3,1}_{V_1,r}} \left(\sum_{\nu^j\geqslant 0,\nu=l}\prod_{j=1}^{2^t}\left|D^{g,j}\right|^{\nu^j}\left(2^{r-t}-\left|A_1^j\right|\right)^{k_2^j-\nu^j}\cdot\binom{m_2^j}{\nu^j}\right) \leqslant_r$$

$$\leqslant_r 2^{(r-t)(m_1+m_2)}\cdot \max_{T_1\in\mathfrak{T}^{g_1,\delta^2/3,1}_{V_1,r}}\left(\prod_{j=1}^{2^t}\left(1-\frac{k_1^j-\Delta^j}{2^{r-t}}\right)^{k_2^j}\right)\times$$

$$\times\sum_{\nu^j\geqslant 0,\nu=l}\prod_{j=1}^{2^t}\binom{k_2^j}{\nu^j}\cdot\left(\frac{\left|D^{g,j}\right|}{2^{r-t}-k_1^j}\right)^{\nu^j},$$

где $\nu = \sum_{j=1}^{2^t}\nu^j$. Используя утверждения 7.3.8–7.3.10, получаем

$$\left|\mathfrak{T}_{3,l}^{g,\delta,\text{тт}}\right| \leqslant_r 2^{(r-t)(m_1+m_2)}\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\widetilde{m}_1\cdot\widetilde{m}_2}{2^{r-s}}+2^{-\frac{\delta^2 r}{4}}\right\}\cdot\left(\sum_{j=1}^{2^t}\frac{\left|D^{g,j}\right|k_2^j}{2^{r-t}-k_1^j}\right)^l \leqslant_r$$

$$\leqslant_r 2^{(r-t)(m_1+m_2)}\cdot\exp\left\{-2^{s-r}\widetilde{m}_1\cdot\widetilde{m}_2\right\}2^{-\frac{\delta^2 rl}{6}}.$$

Аналогично утверждению 7.2.21 получаем

$$\sum_{l\geqslant]\ln^2 r[}\left|\mathfrak{T}_{3,l}^{g,\delta,\text{тт}}\right| \leqslant_r 2^{(r-t)(m_1+m_2)}\cdot H^{f,s}(\widetilde{m}_1,\widetilde{m}_2,r)\cdot 2^{-\delta^2 r\ln^2 r/7}.$$

Рассмотрим $\mathfrak{T}_{3,l}^{g,\delta,\text{тт}}$, где $]\ln^2 r[> l \geqslant 1$. В этом случае для каждого j из N_{2^t} множество $A_2^j \cap D^{f,j}$ пересекается не более, чем с $\eta^j r/\ln^2 r$ множествами $A_{1i}^{f,j}$, $i\in N_r$, где $\eta^j = \left|T^{-1}(D^{g,j})\cap K_2^j\right|$,

$\eta = \sum\limits_{j=1}^{2^t} \eta^j = l$. Количество номеров i из N_r, для которых $\cup_{j=1}^{2^t} A_2^j \cap D^{g,j} \cap A_{1i}^{g,j} \neq \varnothing$, не превосходит $lr/\ln^2 r$. Для того чтобы пара таблиц T была g-тестовой, множества A_2^j должны при некоторых j из N_{2^t} пересекаться с $\mathcal{U}_i^{g,j}$, по крайней мере, для $p_l =]r - lr/\ln^2 r[$ номеров i из N_r.

Пусть $\widetilde{a} = (a_1, \ldots, a_{p_l})$ — набор $\widetilde{a} : N_{p_l} \to N_r$, $\nu^j = \sum_{i=1}^{p_l} \nu_i^j$, $W_{\widetilde{a}}^{f,j} = \left(\cup_{i=1}^{p_l} A_{1,\widetilde{a}^{-1}(i)}^{f,j}\right) \cup A_1^j$. Тогда аналогично утверждению 7.2.21 получаем

$$\left|\mathfrak{T}_{3,l}^{g,\delta,\text{тт}}\right| \leqslant \binom{r}{p_l} \cdot 2^{(r-t)m_1} \cdot \max_{T_1,\widetilde{a}} \left(\sum_{\substack{\eta=l,\nu_i^j>0,\\ m_2^j \geqslant \eta^j+\nu^j}} \prod_{j=1}^{2^t} \left(\left|D^{f,j}\right|^{\eta_j} \times \right.\right.$$

$$\times$$

$$\left.\left.\times \left(\prod_{i=1}^{p_l} \left|\mathcal{U}_{\widetilde{a}^{-1}(i)}^{f,j}\right|^{\nu_i^j}\right) \cdot \left(2^{r-s} - \left|W_{\widetilde{a}}^{f,j}\right|\right)^{m_2^j - \nu^j - \eta^j} \cdot \binom{k_2^j}{\eta^j} \cdot \prod_{i=1}^{p_l} \cdot \binom{k_2^j}{\nu_i^j}\right)\right) \leqslant_r$$

$$\leqslant_r \binom{r}{p_l} \cdot 2^{(r-t)(m_1+m_2)} \cdot H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) \times$$

$$\times \min_{i \in N_r} \left(1 - \exp\left\{-2^{t-r}\widetilde{k}_{1i} \cdot \widetilde{k}_2\right\}\right)^{p_l - r} 2^{-\frac{\delta^2 rl}{6}} \leqslant_r$$

$$\leqslant_r \binom{r}{p_l} \cdot 2^{(r-t)(m_1+m_2)} \cdot H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) \cdot 2^{-\frac{\delta^2 rl}{8}}.$$

При $k > \dfrac{16}{\delta^2}$ выполнено $\binom{r}{p_l} \cdot 2^{-\frac{\delta^2 rl}{8}} \leqslant 2^{-r}$.

При $k \leqslant \dfrac{16}{\delta^2}$ выполнено $p_l \geqslant r - \dfrac{16r}{\delta^2 \ln^2 r}$, и согласно утверждению 7.1.2 $\binom{r}{p_l} \leqslant_r 2^{r/\ln r}$. Получаем, что при $1 \leqslant l <]\ln^2 r[$

$$\left|\mathfrak{T}_{3,l}^{g,\delta,\text{тт}}\right| \leqslant_r 2^{(r-t)(m_1+m_2)} \cdot H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) \cdot 2^{-\frac{\delta^2 r}{9}}$$

и $$\left|\mathfrak{T}_{3}^{g,\delta,\text{тт}}\right| \leqslant_r 2^{(r-t)(m_1+m_2)} \cdot H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) \cdot 2^{-\frac{\delta^2 r}{10}}.$$

Через $\mathfrak{T}_4^{g,\delta,\text{тт}}$ обозначим множество пар таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}^{g,\text{тт}}$, для которых $T_1 \in \mathfrak{T}_{V_1,r}^{g_1,\delta^2/3,1}$, и найдутся $j_0 \in N_{2^t}$, $\widetilde{x} \in D^{g,j_0}$ и, по крайней мере, $l =]r/\ln^2 r[$ множеств A_{1i}^{f,j_0}, $i \in N_r$, содержащих $\widetilde{x}$. Не менее, чем $l-s$ из этих множеств имеют индекс i, больший s, т. е. принадлежат одному из множеств $T_1(V_1^q)$, $q \in N_{2^s}$. Следовательно, в V_1^q найдутся $l-s$ элементов $b_1, \ldots, b_{l-s}$, таких, что $\tau_{r,t} \circ T_1(b_i) \in \mathcal{E}^{r-t}$ и $T_1(b_i)$, $i \in N_{l-s}$, попарно не равны между собой. Если $k(q) = \max\limits_{K_1^j \subseteq V_1^q} k_1^j$, то таких таблиц можно задать не больше, чем

$$\left(\prod_{j \neq q} 2^{(r-t)m_1^j}\right) \cdot 2^{(r-t)(m_1^q - l - s)} \times$$
$$\times \sum_{i=0}^{l-s} \binom{t-s}{i} k(q)^i \binom{k(q)}{l-s-i} \binom{r-t}{l-s-i} \cdot 2^{r-t} \leqslant$$

согласно утверждениям 7.1.3, 7.3.9:

$$\leqslant 2^{(r-t)m_1} 2^{2r-2t} \cdot \left((t-s)k(q)2^{t-r}\right)^{l-s} \leqslant_r 2^{(r-t)m_1 - \frac{\delta r^2}{4\ln^2 r}}.$$

Так пары таблиц из $\mathfrak{T}_4^{g.\delta,\text{тт}}$ — тестовые, то

$$\left|\mathfrak{T}_4^{g,\delta,\text{тт}}\right| \leqslant_r 2^{(r-t)m_1 - \frac{\delta r^2}{4\ln^2 r}} \cdot \max_{T_1 \in \mathfrak{T}_{V_1,r}^{g_1,\delta^2/3,1}} \prod_{j=1}^{2^t} \left(2^{r-t} - \left|A_1^j\right|\right)^{k_2^j} \leqslant_r$$
$$\leqslant_r 2^{(r-t)(m_1+m_2)} \cdot H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) \cdot 2^{-\frac{\delta r^2}{6\ln^2 r}}.$$

Так как $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}^{g,\text{тт}} \subseteq \mathfrak{T}_1^{g,\delta} \cup \cup_{k=2}^4 \mathfrak{T}_k^{g,\delta,\text{тт}}$, то

$$\left|\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}^{g,\text{тт}}\right| \leqslant_r 2^{(r-t)(m_1+m_2)} \cdot H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) \cdot \left(1 + 2^{-\frac{\delta r^2}{12}}\right).$$

Утверждение 7.3.11 доказано. □

Утверждение 7.3.12. *Если* $2^r/r^4 \geqslant m_1 m_2 \geqslant 2^{r/c}$, $c > 1$, $\delta \in (0, \min(\frac{1}{64}, \frac{1}{40c}))$, $s+1 \leqslant t \leqslant \ln m_1 m_2 - \delta r$, $f \in \mathcal{J}_{V_1,V_2,s}^{\varepsilon}$ $g \in \widetilde{\mathfrak{T}}_{V_1,V_2,t}^{f,\delta,*}$, *то*

$$\left|\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}^{g,\text{тт}}\right| \leqslant_r 2^{(r-t)(m_1+m_2)} \cdot H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) \cdot \left(1 + r^{-2}\right).$$

Доказательство. Это утверждение доказывается аналогично утверждению 7.2.22. Получаем

$$\left|\mathfrak{T}^{g,\text{тт}}_{V_1,V_2,r}\right| \leqslant_r$$
$$\leqslant_r 2^{(r-t)(m_1+m_2)}(r-t)! \cdot \binom{\left|X\left(G_{\widetilde{K}_1,\widetilde{K}_2}\right)\right|}{r-t} \cdot \prod_{i=1}^{t}\left|X\left(G_{\widetilde{K}_{1i},\widetilde{K}_2}\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2^{(r-t)(m_1+m_2-r)} \cdot \prod_{i=1}^{r} \widetilde{k}_{1i} \cdot \widetilde{k}_2.$$

Из утверждения 7.3.10 следует, что

$$\widetilde{k}_{1i} \cdot \widetilde{k}_2 \leqslant 2^{s-t} \cdot \widetilde{m}_{1i} \cdot \widetilde{m}_2\Big(1 - 2^{-\frac{\delta^2 r}{4}}\Big).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\left|\mathfrak{T}^{g,\text{тт}}_{V_1,V_2,r}\right| &\leqslant_r \quad 2^{(r-t)(m_1+m_2)} \cdot \left(1 - 2^{-\frac{\delta^2 r}{3}}\right) \cdot \prod_{i=1}^{r}\left(\frac{\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2}{2^{r-s}}\right) \leqslant_r \\ &\leqslant_r \quad 2^{(r-t)(m_1+m_2)} \cdot H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) \cdot \left(1 + r^{-2}\right).\end{aligned}$$

Утверждение 7.3.12 доказано. □

Утверждение 7.3.13. *Если* $2^r \cdot r^{5/2} \geqslant m_1 m_2 \geqslant 2^{r/c}$, $c > 1$, $\delta \in \in (0, \min(\frac{1}{64}, \frac{1}{40c}))$, $s + 1 \leqslant t \leqslant \ln m_1 m_2 - \delta r$, $f \in \mathcal{J}^{\varepsilon}_{V_1,V_2,s}$, *то*

$$\left|\mathfrak{T}^{f,\text{тт},t}_{V_1,V_2,r}\right| \leqslant_r 2^{(2r-t-s)(m_1+m_2)} \cdot \left(H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r)\right)^2 \cdot \left(1 + r^{-\frac{3}{2}}\right).$$

Доказательство. Для $g \in \widetilde{\mathfrak{T}}^{f,\delta,*}_{V_1,V_2,t}$ из утверждений 7.3.11, 7.3.12 следует, что

$$\left|\mathfrak{T}^{g,\text{тт},t}_{V_1,V_2,r}\right| \leqslant_r 2^{(2r-2t)(m_1+m_2)} \cdot \left(H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r)\right)^2 \cdot \left(1 + r^{-\frac{5}{3}}\right).$$

Из утверждения 7.3.8 следует, что

$$\left|\left\{(T,S) \in \mathfrak{T}^{f,\text{тт},t}_{V_1,V_2,r} : \pi_{r-s,t}(\tau_{r,s}(T)) \notin \mathfrak{T}^{f,\delta,*}_{V_1,V_2,t}\right\}\right| \leqslant_r$$
$$\leqslant_r 2^{(2r-t-s)(m_1+m_2)} \exp\left\{-r^{\frac{\ln r}{5}}\right\}.$$

Следовательно,

$$\left|\mathfrak{T}^{f,\text{тт},t}_{V_1,V_2,r}\right| \leqslant_r \left|\mathfrak{T}^{f,\delta,*}_{V_1,V_2,r}\right| \times \\ \times 2^{(2r-2t)(m_1+m_2)} \cdot \left(H^{f,s}(\widetilde{m}_1,\widetilde{m}_2,r)\right)^2 \cdot \left(1+r^{-\frac{5}{3}}\right) + \\ + 2^{(2r-t-s)(m_1+m_2)} \cdot \exp\left\{-r^{\frac{\ln r}{5}}\right\} \leqslant_r \\ \leqslant_r 2^{(2r-t-s)(m_1+m_2)} \cdot \left(H^{f,s}(\widetilde{m}_1,\widetilde{m}_2,r)\right)^2 \cdot (1+r^{-\frac{3}{2}}).$$

Утверждение 7.3.13 доказано. □

Обозначим через $\mathfrak{T}^{f,\delta,2}_{V_1,V_2,t}$, где $f \in \mathfrak{T}_{V_1,V_2,s}$, $0 \leqslant s < t$ множество таких пар таблиц g из $\mathfrak{T}^{f}_{V_1,V_2,t}$, что $\left|\widehat{g}^{-1}(\widetilde{x})\right| \leqslant 2^{3\delta r/2}$ для любого $\widetilde{x} \in E^t$.

Утверждение 7.3.14. *Если* $2^r \cdot r^2 \geqslant m_1m_2 \geqslant 2^{r/c}$, $c > 1$, $\delta \in \in \left(0, \min\left(\frac{1}{64}, \frac{1}{40c}\right)\right)$, $\ln m_1m_2 - \delta r < t \leqslant r-1$, $f \in \mathcal{J}^{\varepsilon}_{V_1,V_2,s}$, *то*

$$\left|\mathfrak{T}^{f,\delta,2}_{V_1,V_2,t}\right| \leqslant_r 2^{(t-s)(m_1+m_2)} \cdot \left(1-\exp\left\{-r^{\frac{\ln r}{5}}\right\}\right).$$

Доказательство. Положим $u = [\ln m_1m_2 - \delta r]$. Из утверждения 7.3.10 следует, что для любой таблицы g из $\widetilde{\mathfrak{T}}^{f,\delta,*}_{V_1,V_2,u}$

$$\left|\widehat{g}^{-1}(\widetilde{x})\right| \leqslant 2^{s-u+1} \cdot m_1m_2 \cdot 2^{-\frac{\delta^2 r}{4}} \leqslant_r 2^{\frac{3}{2}\delta r}$$

для любого $\widetilde{x}$ из E^u. Для любой пары таблицы h из $\mathfrak{T}^{g}_{V_1,V_2,t}$, $t > u$ и, $\widetilde{y} \in E^t$ такого, что $\pi_{t,u}(\widetilde{y}) = \widetilde{x}$, выполнено $\left|\widehat{h}^{-1}(\widetilde{y})\right| \leqslant \left|\widehat{g}^{-1}(\widetilde{x})\right|$.

Из утверждения 7.3.8 следует, что

$$\left|\mathfrak{T}^{f,\delta,2}_{V_1,V_2,t}\right| \leqslant \left|\mathfrak{T}^{f,\delta,*}_{V_1,V_2,u}\right| \cdot 2^{(t-u)(m_1+m_2)} \leqslant_r \\ \leqslant_r 2^{(t-s)(m_1+m_2)}\left(1-\exp\left\{-r^{\frac{\ln r}{5}}\right\}\right).$$

Утверждение 7.3.14 доказано. □

Утверждение 7.3.15. *Если* $\delta_1 \in (0,1)$, $2^r \cdot r^{2-\delta_1} \geqslant m_1m_2 \geqslant 2^{r/c}$, $c > 1$, $\delta \in \left(0, \min\left(\frac{1}{64}, \frac{1}{40c}\right)\right)$, $\ln m_1m_2 - \delta r < t \leqslant \min(\ln m_1m_2 + + \delta r, r-1)$, $f \in \mathcal{J}^{\varepsilon}_{V_1,V_2,s}$, *то*

$$\left|\mathfrak{T}^{f,\text{тт},t}_{V_1,V_2,r}\right| \leqslant_r 2^{(2r-t-s)(m_1+m_2)} \cdot \left(H^{f,s}(\widetilde{m}_1,\widetilde{m}_2,r)\right)^2 \cdot 2^{8\delta r^2}.$$

Доказательство. Аналогично утверждению 7.3.12 имеем

$$\left|\mathfrak{T}^{g,\text{TT}}_{V_1,V_2,r}\right| \leqslant 2^{(r-t)(m_1+m_2-r)}(r-t)!\times$$
$$\times \binom{\left|X(G_{\widetilde{K}_1,\widetilde{K}_2})\right|}{r-t} \prod_{i=1}^{r} \left|X\left(G_{\widetilde{K}_{1i},\widetilde{K}_2}\right)\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2^{(r-t)(m_1+m_2)} \cdot 2^{rt-r^2} \cdot \prod_{i=1}^{r} \widetilde{k}_{1i} \cdot \widetilde{k}_2.$$

Учитывая утверждение 7.3.14, для g из $\mathfrak{T}^{f,\delta,2}_{V_1,V_2,t}$ получаем

$$\left|\mathfrak{T}^{g,\text{TT}}_{V_1,V_2,r}\right| \leqslant_r 2^{(r-t)(m_1+m_2)} \cdot \left(\frac{m_1m_2 \cdot 2^{\delta r}}{2^r}\right)^r \cdot 2^{\frac{3}{2}\delta r} \leqslant 2^{rs+\frac{5}{2}\delta r^2} \cdot \prod_{i=1}^{r} \frac{\widetilde{m}_{1i}\cdot\widetilde{m}_2}{2^{r-s}}.$$

Если $m_1m_2 \leqslant 2^r/r^4$, то $\prod\limits_{i=1}^{r} \dfrac{\widetilde{m}_{1i}\cdot\widetilde{m}_2}{2^{r-s}} \leqslant_r 2H^{f,s}(\widetilde{m}_1,\widetilde{m}_2,r)$, а если $2^r\cdot r^{2-\delta_1} \geqslant m_1m_2 > 2^r/r^4$, то $H^{f,s}(\widetilde{m}_1,\widetilde{m}_2,r) \geqslant_r 2^{-\frac{\delta r^2}{3}}$ и

$$\prod_{i=1}^{r} \left(\frac{\widetilde{m}_{1i}\cdot\widetilde{m}_2}{2^{r-s}}\right) \leqslant 2^{rs}\cdot r^{2r} \leqslant_r H^{f,s}(\widetilde{m}_1,\widetilde{m}_2,r)\cdot 2^{\frac{\delta r^2}{2}}.$$

Следовательно, для $g \in \mathfrak{T}^{f,\delta,1}_{V_1,V_2,t}$

$$\left|\mathfrak{T}^{g,\text{TT}}_{V_1,V_2,r}\right| \leqslant_r 2^{(r-t)(m_1+m_2)+\frac{7}{2}\delta r^2}\cdot H^{f,s}(\widetilde{m}_1,\widetilde{m}_2,r)$$

и

$$\left|\mathfrak{T}^{f,\text{TT},t}_{V_1,V_2,r}\right| \leqslant_r 2^{(2r-t-s)(m_1+m_2)}\times$$
$$\times\left(H^{f,s}(\widetilde{m}_1,\widetilde{m}_2,r)\cdot 2^{7\delta r^2} + \exp\left\{-r^{\frac{\ln r}{5}}\right\}\right) \leqslant_r$$
$$\leqslant_r 2^{(2r-t-s)(m_1+m_2)}\cdot\left(H^{f,s}(\widetilde{m}_1,\widetilde{m}_2,r)\right)^2\cdot 2^{8\delta r^2}.$$

Утверждение 7.3.15 доказано. □

Утверждение 7.3.16. *Если* $\delta \in \left(0, \min\left(\frac{1}{64}, \frac{1}{40c}\right)\right)$, $2^{r(1-\delta)} \geqslant \geqslant m_1m_2 \geqslant 2^{r/c}$, $c > 1$, $\ln m_1m_2 + \delta r < t \leqslant r-1$, $f \in \mathcal{J}^{\varepsilon}_{V_1,V_2,s}$, *то*

$$\left|\mathfrak{T}^{f,\text{TT},t}_{V_1,V_2,r}\right| \leqslant_r 2^{(2r-t-s)(m_1+m_2)}\cdot\left(H^{f,s}(\widetilde{m}_1,\widetilde{m}_2,r)\right)^2\cdot\left(\frac{2^{t+2\delta r}}{m_1m_2}\right)^r.$$

Доказательство. Аналогично предыдущему утверждению, для $g \in \mathfrak{T}^{f,\delta,2}_{V_1,V_2,t}$ получаем

$$\begin{aligned}\left|\mathfrak{T}^{g,\text{тт}}_{V_1,V_2,r}\right| &\leqslant_r 2^{(r-t)(m_1+m_2)} \cdot 2^{rt-r^2+\frac{3}{2}r^2} \leqslant \\ &\leqslant 2^{(r-t)(m_1+m_2)} \cdot \left(\frac{m_1m_2}{2^r}\right)^r \cdot \left(\frac{2^{t+\frac{3}{2}\delta r}}{m_1m_2}\right)^r \leqslant_r \\ &\leqslant_r 2^{(r-t)(m_1+m_2)} \cdot H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) \cdot \left(\frac{2^{t+\frac{5}{3}\delta r}}{m_1m_2}\right)^r\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\left|\mathfrak{T}^{f,\text{тт},t}_{V_1,V_2,r}\right| &\leqslant_r 2^{(2r-t-s)(m_1+m_2)} \times \\ &\times \left(H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) \cdot \left(\frac{2^{t+\frac{5}{3}\delta r}}{m_1m_2}\right)^r + \exp\left\{-r^{\frac{\ln r}{5}}\right\}\right) \leqslant_r \\ &\leqslant_r 2^{(2r-t-s)(m_1+m_2)} \cdot \left(H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r)\right)^2 \cdot \left(\frac{2^{t+2\delta r}}{m_1m_2}\right)^r.\end{aligned}$$

Утверждение 7.3.16 доказано. □

7.4. Асимптотика числа тупиковых тестов

Будем считать, что s — фиксированное целое число, $s \geqslant 0$. Обозначим

$$\begin{aligned}\varphi^{s,\nabla}_{V_1,V_2,n,i} &= \sum_{\widetilde{x}\in E^n_r,\widetilde{x}(i)=1} \varphi^{\nabla}_{V_1,V_2,n,\widetilde{x}}, \\ \varphi^{s,\nabla}_{V_1,V_2,n} &= \sum_{r=1}^{n} \varphi^{s,\nabla}_{V_1,V_2,n,r}, \\ \varphi^{s,k\nabla}_{V_1,V_2,n,r} &= \sum_{j=1}^{r} \varphi^{s,\nabla}_{V_1,V_2,n,j},\end{aligned}$$

где $i \in N_r$, ∇ — один из значков «т», «тт». Если $f \in \mathfrak{T}_{V_1,V_2,s}$, то через $\varphi^{f,\nabla}_{V_1,V_2,n,\widetilde{x}}$, $\varphi^{f,\Delta}_{V_1,V_2,n,r}$, $\varphi^{f,\nabla}_{V_1,V_2,n}$ будем обозначать, соответственно, сужения функций $\varphi^{s,\nabla}_{V_1,V_2,n,\widetilde{x}}$, $\varphi^{s,\Delta}_{V_1,V_2,n,r}$, $\varphi^{s,\nabla}_{V_1,V_2,n}$ на $\mathfrak{T}^{f}_{V_1,V_2,n}$, ∇ — один из значков «т», «тт», Δ — один из значков «т», «тт», «кт», «ктт».

Положим $æ(x) = (\ln x - \ln\ln x)/2$, $r_1^\varepsilon(n,m) = \widetilde{r}^\varepsilon_{1,n}(m)$,

$$r_2^\varepsilon(n,m) = \begin{cases}]\frac{1}{2}\ln mn[, & \text{если } m \leqslant n^{1-\varepsilon}, \\ ](1+\varepsilon)\ln m[, & \text{если } m > n^{1-\varepsilon}. \end{cases}$$

Из утверждения 7.2.23 непосредственно следует

Утверждение 7.4.1. *Если* $\varepsilon \in (0, 2^{-s})$, $n^{c_1} \leqslant m_1 m_2 \leqslant n^{c_2}$, $0 < c_1 < 1 < c_2$, $r_1^\varepsilon(n, m_1 m_2) \leqslant r \leqslant r_2^\varepsilon(n, m_1 m_2)$, $f \in \mathcal{J}^\varepsilon_{V_1,V_2,s}$ *и* $\widetilde{V}_1, \widetilde{V}_2$ *— разбиения* V_1, V_2, *порожденные* f, *то*

$$\mathtt{M}\varphi^{f,\mathtt{TT}}_{V_1,V_2,n,r} \sim_n \binom{n-s}{r-s} \cdot H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r).$$

Доказательство. Действительно, при $n^{c_1} \leqslant m_1 m_2 \leqslant n^{c_2}$ и $r_1^\varepsilon(n, m_1 m_2) \leqslant r \leqslant r_2^\varepsilon(n, m_1 m_2)$ выполнено

$$2^r \cdot r^2 \geqslant m_1 m_2 \geqslant 2^{\frac{(1+c_1)r}{2}}, \ \frac{1+c_1}{2} < 1,$$

откуда следует требуемый результат

Утверждение 7.4.1 доказано. □

Утверждение 7.4.2. *Если* $\varepsilon \in (0, 1/32)$, $\delta \in (0, \min(1/64, c_1/18c_2))$, $n^{c_1} \leqslant m_1 m_2 \leqslant n^{c_2}$, $0 < c_1 < 1 < c_2$, $r_1^\varepsilon(n, m_1 m_2) \leqslant r \leqslant r_2^\varepsilon(n, m_1 m_2)$, *то*

$$\sum_{t=[\ln m_1 m_2 - \delta r]+1}^{r-1} \binom{r-s}{t-s}\binom{n-r}{r-t} \cdot 2^{8\delta r^2} \leqslant_n n^{-\frac{r}{8}} \binom{n-s}{r-s}.$$

Доказательство. Так как

$$\binom{r-s}{t-s}\binom{n-r}{r-t} \leqslant r^{t-s}\binom{n-s}{r-s}\frac{r(r-1)\cdot\ldots\cdot(r-t+s+1)}{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-t+s+1)} \leqslant$$
$$\leqslant$$
$$\leqslant \binom{n-s}{r-s}\left(\frac{r^2}{n-s}\right)^{t-s} \leqslant_n \binom{n-s}{r-s} n^{-\frac{7t}{8}}$$

и $r \leqslant \min\left(\frac{\ln m_1 m_2}{c_1}, (1+\varepsilon)c_2 \ln n\right)$, то

$$\sum_{t=[\ln m_1 m_2+\delta r]+1}^{r-1} \binom{r-s}{t-s}\binom{n-r}{r-t} \cdot 2^{8\delta r^2} \leqslant_n$$

$$\leqslant_n \binom{n-s}{r-s} \cdot 2^{8\delta r^2+1} \cdot n^{-\frac{3}{4}\ln m_1 m_2} \leqslant_n$$

$$\leqslant_n \binom{n-s}{r-s} \cdot n^{\left(9\frac{c_2}{c_1}\delta - \frac{3}{4}\right)\ln m_1 m_2} \leqslant \binom{n-s}{r-s} \cdot n^{-\frac{r}{8}}.$$

Утверждение 7.4.2 доказано. □

Утверждение 7.4.3. *Если* $\varepsilon \in (0, 1/16c_2)$, $\delta \in (0, \min(1/64, c_1/16c_2))$, $n^{c_1} \leqslant m_1 m_2 \leqslant n^{c_2}$, $0 < c_1 < 1 < c_2$, $r_1^\varepsilon(n, m_1 m_2) \leqslant r \leqslant$ $\leqslant r_2^\varepsilon(n, m_1 m_2)$, *то*

$$\sum_{t=[\ln m_1 m_2+\delta r]+1}^{r-1} \binom{r-s}{t-s}\binom{n-r}{r-t} \cdot \left(\frac{2^{t+2\delta r}}{m_1 m_2}\right)^{2r} \leqslant_n (m_1 m_2)^{-\frac{r}{2c_2}} \binom{n-s}{r-s}.$$

Доказательство. Если $r - 1 < [\ln m_1 m_2 + \delta r] + 1$, то сумма равна нулю. В противном случае

$$\sum_{t=[\ln m_1 m_2+\delta r]+1}^{r-1} \binom{r-s}{t-s}\binom{n-r}{r-t} \cdot \left(\frac{2^{t+2\delta r}}{m_1 m_2}\right)^{2r} \leqslant_n$$

$$\leqslant_n \binom{n-s}{r-s} \cdot \left(\frac{2^{2\delta r}}{m_1 m_2}\right)^{2r} \cdot \sum_{t=[\ln m_1 m_2+\delta r]+1}^{r-1} \left(\frac{2^{2r} r^2}{n-s}\right)^{t-s} \leqslant_n$$

$$\leqslant_n \binom{n-s}{r-s} \cdot r \cdot \left(\frac{r^2 \cdot 2^{2\delta r+1} \max\left(m_1 m_2 n, (m_1 m_2)^{2+2\varepsilon}\right)}{(m_1 m_2)^2 n}\right)^r \leqslant$$

$$\leqslant \binom{n-s}{r-s} \cdot r \cdot \left(r^2 \cdot 2^{2\delta r+1} (m_1 m_2)^{2\varepsilon - \frac{1}{c_2}}\right)^r \leqslant_n \binom{n-s}{r-s} (m_1 m_2)^{-\frac{r}{2c_2}}.$$

Утверждение 7.4.3 доказано. □

Утверждение 7.4.4. *Если* $\varepsilon \in (0, \min(2^{-s}, 1/32, c_1/18c_2))$, $n^{c_1} \leqslant$ $\leqslant m_1 m_2 \leqslant n^{c_2}$, $0 < c_1 < 1 < c_2$, $r_1^\varepsilon(n, m_1 m_2) \leqslant r \leqslant r_2^\varepsilon(n, m_1 m_2)$, $f \in \mathcal{J}^\varepsilon_{V_1, V_2, s}$, $\widetilde{V}_1, \widetilde{V}_2$ — *разбиения множеств* V_1, V_2, *порожденные* f, *то*

$$\mathtt{D}\varphi^{f,\mathtt{TT}}_{V_1,V_2,n,r} \leqslant_n r^{-\frac{5}{4}} \left(\mathtt{M}\varphi^{f,\mathtt{TT}}_{V_1,V_2,n,r}\right)^2.$$

Доказательство. Обозначим $E_r^{ns} = \left\{\widetilde{x} \in E_r^n : \widetilde{x}^{-1}(i) = 1, i \in N_s\right\}$. Тогда

$$\mathsf{D}\varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r} = \sum_{\widetilde{x} \in E_r^{ns}} \mathsf{D}\varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,\widetilde{x}} +$$

$$+ \sum_{\widetilde{x}_1 \in E_r^{ns}} \sum_{\widetilde{x}_2 \in E_r^{ns}} \operatorname{cov}\left(\varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,\widetilde{x}_1}, \varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,\widetilde{x}_2}\right) =$$

$$= \binom{n-s}{r-s} \frac{\left|\mathfrak{T}^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,r}\right|}{\left|\mathfrak{T}^{f}_{V_1,V_2,r}\right|} \cdot \left(1 - \frac{\left|\mathfrak{T}^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,r}\right|}{\left|\mathfrak{T}^{f}_{V_1,V_2,r}\right|}\right) + \binom{n-s}{r-s} \times$$

$$\times \sum_{t=s+1}^{r-1} \binom{r-s}{t-s}\binom{n-r}{r-t} \left(\frac{\left|\mathfrak{T}^{f,\text{тт},t}_{V_1,V_2,r}\right|}{\left|\mathfrak{T}^{f,t}_{V_1,V_2,r}\right|} - \left(\frac{\left|\mathfrak{T}^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,r}\right|}{\left|\mathfrak{T}^{f}_{V_1,V_2,r}\right|}\right)^2\right).$$

В условиях утверждения выполнено $2^r \cdot r^{2-\frac{\varepsilon}{2}} \geqslant m_1 m_2 \geqslant 2^{c_1 r}$. Из утверждений 7.2.20, 7.2.22 следует, что для $\delta \in (0, \min(1/64, c_1/40))$

$$H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r)\left(1 + r^{-2}\right) \geqslant_n \left|\mathfrak{T}^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,r}\right| \Big/ \left|\mathfrak{T}^{f}_{V_1,V_2,r}\right| \geqslant_n$$

$$\geqslant_n H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) \cdot \left(1 - r^{-\frac{\delta}{8}\ln r}\right).$$

В силу утверждения 7.3.13 имеем при $s + 1 \leqslant t \leqslant [\ln m_1 m_2 - \delta r]$

$$\left|\mathfrak{T}^{f,\text{тт},t}_{V_1,V_2,r}\right| \Big/ \left|\mathfrak{T}^{f,t}_{V_1,V_2,r}\right| \leqslant_n \left(H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r)\right)^2 \cdot \left(1 + r^{-\frac{3}{2}}\right).$$

При $\delta \in (0, \min(1/64, c_1/40c_2))$, $\ln m_1 m_2 - \delta r < t \leqslant \min(\ln m_1 m_2 + \delta r, r - 1)$ из утверждения 7.3.15 следует

$$\left|\mathfrak{T}^{f,\text{тт},t}_{V_1,V_2,r}\right| \Big/ \left|\mathfrak{T}^{f,t}_{V_1,V_2,r}\right| \leqslant_n \left(H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r)\right)^2 \cdot 2^{8\delta r^2},$$

и при $\ln m_1 m_2 + \delta r < t \leqslant r - 1$ из утверждения 7.3.16 получаем

$$\left|\mathfrak{T}^{f,\text{тт},t}_{V_1,V_2,r}\right| \Big/ \left|\mathfrak{T}^{f,t}_{V_1,V_2,r}\right| \leqslant_r \left(H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r)\right)^2 \cdot \left(\frac{2^{t+2\delta r}}{m_1 m_2}\right)^r.$$

Таким образом,

$$\mathsf{D}\varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r} \leqslant_n \binom{n-s}{r-s} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r)(1 + r^{-2}) + \binom{n-s}{r-s} \times$$

$$
\times \sum_{t=s+1}^{[\ln m_1 m_2 - \delta r]} \binom{r-s}{t-s}\binom{n-r}{r-t} \left(H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r)\right)^2 \cdot r^{-\frac{4}{3}} +
$$

$$
+ \binom{n-s}{r-s} \cdot \sum_{t=[\ln m_1 m_2 - \delta r]+1}^{\min([\ln m_1 m_2 + \delta r], r-1)} \binom{r-s}{t-s} \times
$$

$$
\times \binom{n-r}{r-t} \left(H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r)\right)^2 \cdot 2^{8\delta r^2} +
$$

$$
+ \binom{n-s}{r-s} \cdot \sum_{\min([\ln m_1 m_2 + \delta r], r-1)}^{r-1} \binom{r-s}{t-s} \times
$$

$$
\times \binom{n-r}{r-t} \left(H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r)\right)^2 \left(\frac{2^{t+2\delta r}}{m_1 m_2}\right).
$$

Так как $\binom{n-s}{r-s} \geqslant \left(\dfrac{n-s}{r-s}\right)^{r-s} \geqslant {}_n n^{(1-\varepsilon)n}$ и в силу утверждения 7.1.12 при

$$
\begin{aligned}
H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) \ &\geqslant_n \ \min\Bigg(\frac{1}{2}\exp\left\{-(\ln m_1 m_2)^{2-\varepsilon}\right\}, \\
&\qquad \frac{1}{2}\left(1 - \exp\left\{-n^{-\frac{1-c_1}{2}}\right\}\right)^r \Bigg) \geqslant_n \\
&\geqslant_n \ \min\left(n^{-r^{2-\varepsilon/2}}, n^{-\frac{r}{2}}\right) \geqslant {}_n n^{-\frac{r}{2}},
\end{aligned}
$$

и при $m > n^{1-\varepsilon}$

$$
\begin{aligned}
H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) \ &\geqslant_n \ \min\Bigg(\frac{1}{2}\exp\left\{-(\ln m_1 m_2)^{2-\varepsilon}\right\}, \\
&\qquad \frac{1}{2}\left(1 - \exp\left\{-(m_1 m_2)^{\varepsilon}\right\}\right)^r \Bigg) \geqslant_n \\
&\geqslant_n \ \min\left(n^{-r^{2-\varepsilon/2}}, n^{-2c_2\varepsilon r}\right) \geqslant {}_n n^{-\frac{r}{8}},
\end{aligned}
$$

то $\binom{n-s}{r-s} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r) \geqslant {}_n n^{\frac{3r}{8}}$.

Следовательно, учитывая утверждения 7.4.1–7.4.3, получаем

$$
\begin{aligned}
\mathtt{D}\varphi^{f,\mathtt{TT}}_{V_1,V_2,n,r} \ &\leqslant_n \ \left(\binom{n-s}{r-s} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r)\right)^2 \times \\
&\qquad \times \left(n^{-\frac{3r}{8}} + r^{-\frac{4}{3}} + n^{-\frac{r}{8}} + (m_1 m_2)^{-\frac{r}{2c_2}}\right) \leqslant_n \\
&\leqslant_n \ r^{-\frac{5}{4}} \left(\mathtt{M}\varphi^{f,\mathtt{TT}}_{V_1,V_2,n,r}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Утверждение 7.4.4 доказано. □

Утверждение 7.4.5. *Если* $\varepsilon \in (0, \min(1/32, c_1/18c_2))$, $n^{c_1} \leqslant$ $\leqslant m_1m_2 \leqslant n^{c_2}$, $0 < c_1 < 1 < c_2$, $r_1^\varepsilon(n, m_1m_2) \leqslant r \leqslant r_2^\varepsilon(n, m_1m_2)$, $f \in \mathcal{J}^\varepsilon_{V_1,V_2,s}$, $\widetilde{V}_1, \widetilde{V}_2$ *— разбиения множеств* V_1, V_2, *порожденные* f, *то*

$$\varphi^{f,\mathtt{TT}}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \mathtt{M}\varphi^{f,\mathtt{TT}}_{V_1,V_2,n,r} \sim_n \binom{n-s}{r-s} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r)$$

и

$$\sum_{r=]r_1^\varepsilon(n,m_1m_2)[}^{[r_2^\varepsilon(n,m_1m_2)]} \varphi^{f,\mathtt{TT}}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \mathtt{M} \sum_{r=]r_1^\varepsilon(n,m_1m_2)[}^{[r_2^\varepsilon(n,m_1m_2)]} \varphi^{f,\mathtt{TT}}_{V_1,V_2,n,r} \sim_n$$
$$\sim_n \sum_{r=]r_1^\varepsilon(n,m_1m_2)[}^{[r_2^\varepsilon(n,m_1m_2)]} \binom{n-s}{r-s} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r).$$

Доказательство. Если $r_1^\varepsilon(n, m_1m_2) \leqslant r \leqslant r_2^\varepsilon(n, m_1m_2)$, то

$$\mathtt{P}\left(\left|\varphi^{f,\mathtt{TT}}_{V_1,V_2,n,r} - \mathtt{M}\varphi^{f,\mathtt{TT}}_{V_1,V_2,n,r}\right| \geqslant r^{-\frac14}\mathtt{M}\varphi^{f,\mathtt{TT}}_{V_1,V_2,n,r}\right) \leqslant$$
$$\leqslant \mathtt{D}\varphi^{f,\mathtt{TT}}_{V_1,V_2,n,r} \Big/ \left(r^{-\frac14}\mathtt{M}\varphi^{f,\mathtt{TT}}_{V_1,V_2,n,r}\right)^2 \leqslant_n r^{-\frac98} \ll_n 1.$$

Так как $r_2^\varepsilon(n, m_1m_2) - r_1^\varepsilon(n, m_1m_2) \leqslant_n r^{\frac{11}{10}}$, то

$$\mathtt{P}\left(\left|\sum_{r=]r_1^\varepsilon(n,m_1m_2)[}^{[r_2^\varepsilon(n,m_1m_2)]} \left(\varphi^{f,\mathtt{TT}}_{V_1,V_2,n,r} - \mathtt{M}\varphi^{f,T}_{V_1,V_2,n,r}\right)\right| \geqslant\right.$$
$$\left.\geqslant r^{-\frac14}\mathtt{M}\sum_{r=]r_1^\varepsilon(n,m_1m_2)[}^{[r_2^\varepsilon(n,m_1m_2)]} \varphi^{f,\mathtt{TT}}_{V_1,V_2,n,r}\right) \leqslant_n r^{\frac{11}{10}} \cdot r^{-\frac98} \ll_n 1.$$

Учитывая утверждение 7.4.1, получаем искомый результат.

Утверждение 7.4.5 доказано. □

Утверждение 7.4.6. *Если* $\varepsilon \in (0, \min(2^{-s}, 1/32, c_1/18c_2))$, $n^{c_1} \leqslant$ $\leqslant m_1m_2 \leqslant n^{c_2}$, $0 < c_1 < 1 < c_2$, $r_1^\varepsilon(n, m_1m_2) \leqslant r_0 \leqslant \ln m_1m_2 -$

$-\ln\ln\ln m_1m_2+s$, $f\in\mathcal{J}^{\varepsilon}_{V_1,V_2,s}$, $\widetilde{V}_1,\widetilde{V}_2$ — разбиения V_1,V_2, порожденные f, то

$$\sum_{r=s+1}^{r_0-1}\varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r}\leqslant\sum_{r=s+1}^{r_0-1}\varphi^{f,T}_{V_1,V_2,n,r}\overset{\text{п.в.}}{\ll_n}$$

$$\overset{\text{п.в.}}{\ll_n}\varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r_0}\overset{\text{п.в.}}{\sim_n}\binom{n-s}{r_0-s}H^{f,s}(\widetilde{m}_1,\widetilde{m}_2,r).$$

Доказательство. При всех r $\varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r}\leqslant\varphi^{f,T}_{V_1,V_2,n,r}$. Согласно утверждению 7.2.16 $\mathtt{M}\varphi^{f,T}_{V_1,V_2,n,r_0}\sim_n\binom{n-s}{r_0-s}\exp\left\{-\frac{\widetilde{m}_1\cdot\widetilde{m}_2}{2^{r_0-s}}\right\}$. Пусть $T\in\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$. Если пара таблиц $S=\pi_{r,r-1}\circ T$ — тестовая, то все $2^{m_1+m_2}$ пар таблиц из $\mathfrak{T}^S_{V_1,V_2,r}$ будут тестовыми.

Следовательно, $\left|\mathfrak{T}^{\text{т}}_{V_1,V_2,r-1}\right|/\left|\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r-1}\right|\leqslant\left|\mathfrak{T}^{\text{т}}_{V_1,V_2,r}\right|/\left|\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}\right|$ и для любого $s+1\leqslant r<r_0$ выполнено

$$\mathtt{M}\varphi^{f,T}_{V_1,V_2,n,r}\leqslant\mathtt{M}\varphi^{f,T}_{V_1,V_2,n,r_0}\cdot\binom{n-s}{r-s}\Big/\binom{n-s}{r_0-s}.$$

Получаем

$$\mathtt{M}\varphi^{f,\text{кт}}_{V_1,V_2,n,r_0-1}\leqslant\mathtt{M}\varphi^{f,T}_{V_1,V_2,n,r_0}\left(\sum_{r=s+1}^{r_0-1}\binom{n-s}{r-s}\right)\Big/\binom{n-s}{r_0-s}.$$

Так как согласно утверждению 7.1.4 $\sum\limits_{r=s+1}^{r_0-1}\binom{n-s}{r-s}\leqslant_n\frac{2r_0}{n}\binom{n-s}{r_0-s}$, и при $r_1^{\varepsilon}(n,m_1m_2)\leqslant r_0\leqslant\ln m_1m_2-\ln\ln\ln m_1m_2+s$

$$\prod_{i=1}^{r_0}\left(1-\exp\left\{-\frac{\widetilde{m}_{1i}\cdot\widetilde{m}_2}{2^{r_0-s}}\right\}\right)\geqslant\left(1-\exp\left\{-\varepsilon\ln\ln m_1m_2\right\}\right)^{\ln m_1m_2}=$$

$$=(m_1m_2)^{\ln(1-(\ln m_1m_2)^{\varepsilon})}\geqslant_n(m_1m_2)^{-\frac{1}{2c_2}}\geqslant_n n^{-\frac{1}{2}},$$

то в силу утверждений 7.4.1, 7.4.5

$$\mathtt{M}\varphi^{f,\text{кт}}_{V_1,V_2,n,r_0-1}\leqslant_n\mathtt{M}\varphi^{f,T}_{V_1,V_2,n,r_0}\cdot\frac{2r_0}{n}\leqslant_n n^{-\frac{1}{3}}\mathtt{M}\varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r_0}\overset{\text{п.в.}}{\ll_n}\varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r_0}.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{r=s+1}^{r_0-1}\varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r}=\varphi^{f,\text{ктт}}_{V_1,V_2,n,r_0-1}\leqslant\varphi^{f,\text{кт}}_{V_1,V_2,n,r_0-1}\overset{\text{п.в.}}{\ll_n}\varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r_0}.$$

Утверждение 7.4.6 доказано. $\square$

Утверждение 7.4.7. *Если* $\varepsilon \in (0, \min(2^{-s}, 1/32, 1/16c_2))$, $n^{c_1} \leqslant m_1 m_2 \leqslant n^{c_2}$, $0 < c_1 < 1 < c_2$, $r_0 = [r_2^\varepsilon(n, m_1 m_2)]$, $f \in \mathcal{J}^\varepsilon_{V_1,V_2,s}$, $\widetilde{V}_1, \widetilde{V}_2$ *— разбиения* V_1, V_2, *порожденные* f, *то*

$$\sum_{r>[r_2^\varepsilon(n,m_1m_2)]} \varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\ll}_n \varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r_0} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \binom{n-s}{r_0-s} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r_0).$$

Доказательство. Из утверждения 7.2.22 следует, что при $r \geqslant r_0$

$$\mathsf{M}\varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r} \leqslant \binom{n-s}{r-s} \cdot \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{\widetilde{m}_{1i} \cdot \widetilde{m}_2}{2^{r-s}}\right) = a_r.$$

При $r > r_2^\varepsilon(n, m_1 m_2)$ имеем: если $m_1 m_2 \leqslant n^{1-\varepsilon}$, то

$$\frac{a_{r+1}}{a_r} = \frac{(n-r)\widetilde{m}_1 \cdot \widetilde{m}_2}{(r+1-s)2^{2r+1-s}} \leqslant_n \frac{n m_1 m_2 2^{s-1}}{r_2^\varepsilon(n, m_1 m_2) n m_1 m_2} \leqslant_n (\ln m_1 m_2)^{-\frac{1}{2}},$$

если $m_1 m_2 > n^{1-\varepsilon}$, то

$$\frac{a_{r+1}}{a_r} \leqslant_n \frac{n m_1 m_2 2^{s-1}}{r_2^\varepsilon(n, m_1 m_2)(m_1 m_2)^{2+2\varepsilon}} \leqslant_n n^{-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Следовательно, $\sum\limits_{r>r_0} a_r \ll_r a_{r_0}$. Так как согласно утверждениям 7.2.23, 7.4.1 $\varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r_0} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n a_{r_0}$ и $\mathsf{M} \sum\limits_{r>r_0} \varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r} \leqslant \sum\limits_{r>r_0} a_r \ll_n a_{r_0}$, то выполнено

$$\sum_{r>r_0} \varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\ll}_n \varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r_0} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n a_{r_0} \sim_n \binom{n-s}{r-s} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r).$$

Утверждение 7.4.7 доказано. □

Из утверждений 7.4.5–7.4.7 следует

Замечание 2. При $\varepsilon \in (0, \min(2^{-s}, 1/32, c_1/18c_2))$, $n^{c_1} \leqslant m_1 m_2 \leqslant n^{c_2}$, $0 < c_1 < 1 < c_2$, $f \in \mathcal{J}^\varepsilon_{V_1,V_2,s}$

$$\sum_{r=]r_1^\varepsilon(n,m_1m_2)[}^{[r_2^\varepsilon(n,m_1m_2)]} \varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n$$

$$\overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \sum_{r=]r_1^\varepsilon(n,m_1m_2)[}^{[r_2^\varepsilon(n,m_1m_2)]} \binom{n-s}{r-s} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r).$$

Утверждение 7.4.8. *Если* $\varepsilon \in (0, \min(2^{-s}, 1/32, c_1/18c_2))$, $n^{c_1} \leqslant \leqslant m_1 m_2 \leqslant n^{1-\varepsilon}$, $0 < c_1 < 1 < c_2$, $f \in \mathcal{J}^{\varepsilon}_{V_1,V_2,s}$, $\widetilde{V}_1, \widetilde{V}_2$ — *разбиения* V_1, V_2, *порожденные* f, $D \in \mathcal{B}$, $D \leqslant \ln\ln\ln n$, *то*

$$\varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \sum_{r=]\text{æ}(nm_1m_2)-D[}^{[\text{æ}(nm_1m_2)+D]} \binom{n-s}{r-s} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r).$$

Доказательство. Положим $a_r = \binom{n-s}{r-s} \cdot H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r)$.

Если $r \in (r_1^{\varepsilon}(n, m_1m_2), \ln m_1m_2 + 3\ln\ln m_1m_2)$, то

$$\begin{aligned}
\frac{a_r}{a_{r+1}} &= \frac{r-s+1}{n-r-1} \cdot \frac{\exp\{-\frac{\widetilde{m}_1 \cdot \widetilde{m}_2}{2^{r-s}}\}}{\exp\{-\frac{\widetilde{m}_1 \cdot \widetilde{m}_2}{2^{r-s+1}}\}(1-\exp\{-\frac{\widetilde{m}_1 \cdot \widetilde{m}_2}{2^{r-s+1}}\})} \times \\
&\quad \times \prod_{i=1}^{r} \frac{1-\exp\{-\frac{\widetilde{m}_{1i} \cdot \widetilde{m}_2}{2^{r-s}}\}}{1-\exp\{-\frac{\widetilde{m}_{1i} \cdot \widetilde{m}_2}{2^{r-s+1}}\}} \leqslant_n \\
&\leqslant_n \frac{2r}{n}\left(1+\exp\left\{-\frac{\varepsilon m_1m_2}{2^{r-s+1}}\right\}\right)^r \Big/ \left(1+\exp\left\{-\frac{\varepsilon m_1m_2}{2^{r-s+1}}\right\}\right) \leqslant_n \\
&\leqslant_n \frac{2^{r+1} r \ln^4 m_1m_2}{n} \leqslant_n n^{-\frac{\varepsilon}{2}} \ll_n 1.
\end{aligned}$$

Если $r \in [\ln m_1m_2 + 3\ln\ln m_1m_2, r_2^{\varepsilon}(n, m_1m_2) - 1]$, то

$$a_r \sim_n \binom{n-s}{r-s} \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{\widetilde{m}_{1i} \cdot \widetilde{m}_2}{2^{r-s}}\right).$$

При $r < \text{æ}(nm_1m_2) - D$ имеем

$$\frac{a_r}{a_{r+1}} \sim_n \frac{r-s+1}{n-r-1} \cdot \frac{2^{2r-s+1}}{\widetilde{m}_1 \cdot \widetilde{m}_2} \leqslant_n \frac{rnm_1m_2 2^{-2D-s+1}}{\varepsilon nm_1m_2 \ln(nm_1m_2)} \leqslant_n 2^{-\frac{3D}{2}} \ll_n 1.$$

Следовательно, $\sum\limits_{r=]r_1^{\varepsilon}(n,m_1m_2)[}^{]\text{æ}(nm_1m_2)-D[-1} a_r \ll_n a_{]\text{æ}(nm_1m_2)-D[}$. Аналогично получаем при $r > \text{æ}(nm_1m_2) + D$ выполнено $\dfrac{a_r}{a_{r-1}} \leqslant_n 2^{-D} \ll_n 1$ и

$$\sum_{r=[\text{æ}(nm_1m_2)+D]+1}^{[r_2^{\varepsilon}(n,m_1m_2)]} a_r \ll_n a_{[\text{æ}(nm_1m_2)+D]}.$$

Используя утверждения 7.4.1, 7.4.5 и замечание 2, получаем требуемый результат.

Утверждение 7.4.8 доказано. □

Утверждение 7.4.9. *Если* $\varepsilon \in (0, \min(2^{-s}, 1/32, c_1/18c_2))$, $n^{1+\varepsilon} \leqslant \leqslant m_1 m_2 \leqslant c_2$, $0 < c_1 < 1 < c_2$, $f \in \mathcal{J}^{\varepsilon}_{V_1,V_2,s}$, $\widetilde{V}_1, \widetilde{V}_2$ *— разбиения* V_1, V_2, *порожденные* f, *то найдется такое* $c(n, \widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)$, $-\ln\ln\frac{1}{2^{\frac{1}{c_2}}-1} \leqslant c(n, \widetilde{m}_1\widetilde{m}_2) \leqslant -\ln\ln\frac{1}{2^{1-\frac{\varepsilon}{2}}-1}$, *что*

$$\varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \sum_{r=\ln m_1 m_2 + c(n,\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)}^{\ln m_1 m_2 + c(n,\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)+1} \binom{n-s}{r-s} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r).$$

Доказательство. Положим $a_r = \binom{n-s}{r-s} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r)$.

При $r \in [r_1^{\varepsilon}(n, \widetilde{m}_1\widetilde{m}_2),\ r_2^{\varepsilon}(n, \widetilde{m}_1\widetilde{m}_2) - 1]$ выполнено

$$\frac{a_r}{a_{r+1}} = \frac{r-s+1}{n-r+s} \cdot \frac{\exp\{-\frac{\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2}{2^{r-s+1}}\}}{1-\exp\{-\frac{\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2}{2^{r-s+1}}\}} \cdot \prod_{i=1}^{r}\left(1+\exp\left\{-\frac{\widetilde{m}_{1i}\cdot\widetilde{m}_2}{2^{r-s+1}}\right\}\right).$$

Пусть $x = r - \ln\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2 - s + 1$, $b_i = \ln\frac{\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2}{\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2}$, $x_i = x + b_i$, $i \in N_s$, и

$$g(x) = \frac{a_r}{a_{r+1}} = \frac{\ln\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2 + x}{n - \ln\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2 - x + 1} \cdot \frac{\exp\{-2^{-x}\}}{1-\exp\{-2^{-x}\}} \times$$
$$\times \left(1+\exp\left\{-2^{-x}\right\}\right)^{\ln\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2 + x - 1} \cdot \prod_{i=1}^{s}\left(1+\exp\left\{-2^{-x_i}\right\}\right).$$

При всех x таких, что $r \in [r_1^{\varepsilon}(n, m_1m_2), r_2^{\varepsilon}(n, m_1m_2) - 1]$ функция $g(x)$ определена и монотонно возрастает по x, так как является произведением монотонно возрастающих по x функций. Положим

$$g_1(x) = \ln\left(1+\exp\left\{-2^{-x}\right\}\right).$$

Функция $g_1(x)$ монотонно возрастает от 0 до 1 на $(-\infty, +\infty)$. Возьмем x_0 такое, что $g_1(x_0) = \ln n/\ln\widetilde{m}_1\cdot\widetilde{m}_2$. Такое x_0 найдется, так как $1 > 1 - \frac{\varepsilon}{2} \geqslant \ln n/\ln\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2 \geqslant \frac{1}{c_2} > 0$ и, следовательно,

$$x_0 \in \left[-\ln\ln\frac{1}{2^{\frac{1}{c_2}}-1}, -\ln\ln\frac{1}{2^{1-\frac{\varepsilon}{2}}-1}\right] = [d_1, d_2]$$

Так как

$$g(x_0) = \frac{\ln \widetilde{m}_1 \cdot \widetilde{m}_2 + x_0}{n - \ln \widetilde{m}_1 \cdot \widetilde{m}_2 - x_0 + 1} \cdot (\widetilde{m}_1 \cdot \widetilde{m}_2)^{\frac{\ln n}{\ln \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2}} \cdot \frac{\exp\{-2^{-x_0}\}}{1 - \exp\{-2^{-x_0}\}} \times$$
$$\times \left(1 + \exp\left\{-2^{-x_0}\right\}\right)^{x_0 - 1} \cdot \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \exp\left\{-2^{-x_0 - b_i}\right\}\right) \asymp_n \ln m_1 m_2,$$

то при $\alpha > 0$ $g(x_0 + \alpha) > g(x_0) \gg_n 1$.

Если $\alpha \geqslant 1$, то найдется такое β, $\beta \geqslant \max\limits_{x \in [d_1+1, d_2]} (g_1(x) - g_1(x - 1)) > 0$, что $g_1(x_0 - \alpha) \leqslant g_1(x_0) - \beta$ и

$$g(x_0 - \alpha) \leqslant \frac{\ln^2 \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2}{n} \cdot (\widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2)^{\frac{\ln n}{\ln \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2} - \beta} \leqslant_n (\widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2)^{-\frac{\beta}{2}} \ll_n 1.$$

Положим $c(n, \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2) = [\ln \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2 + x_0] - \ln m_1 m_2 + s - 1$, $y_1 = x_0 - (\ln \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2 + x_0 - [\ln \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2 + x_0])$. Тогда $x_0 - (y_1 - 1) \geqslant 1$ и $y_1 + 1 - x_0 > 0$. Следовательно, $g(y_1 - 1) \ll_n 1$ и $g(y_1 + 1) \gg_n 1$ или

$$a_{\ln m_1 m_2 + c(n, \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2) - 1} \ll_n a_{\ln m_1 m_2 + c(n, \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2)}$$

и $a_{\ln m_1 m_2 + c(n, \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2) + 1} \gg_n a_{\ln m_1 m_2 + c(n, \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2) + 2}$. В силу монотонности функции $g(x)$ $a_r / a_{r+1} < a_{r+1} / a_{r+2}$ для всех $r \in [r_1^\varepsilon(n, m_1 m_2),\ r_2^\varepsilon(n, m_1 m_2) - 2]$. Значит,

$$\sum_{r =]r_1^\varepsilon(n, m_1 m_2)[}^{\ln m_1 m_2 + c(n, \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2) - 1} a_r \ll_n a_{\ln m_1 m_2 + c(n, \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2)}$$

и

$$\sum_{\ln m_1 m_2 + c(n, \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2) + 2}^{[r_2^\varepsilon(n, m_1 m_2)]} a_r \ll_n a_{\ln m_1 m_2 + c(n, \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2) + 1}.$$

Используя утверждения 7.4.1, 7.4.5 и замечание 2, получаем

$$\varphi_{V_1, V_2, n}^{f, \text{тт}} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \sum_{r = \ln m_1 m_2 + c(n, \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2)}^{\ln m_1 m_2 + c(n, \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2) + 1} \varphi_{V_1, V_2, n, r}^{f, \text{тт}} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n$$
$$\overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \sum_{r = \ln m_1 m_2 + c(n, \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2)}^{\ln m_1 m_2 + c(n, \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2) + 1} \binom{n - s}{r - s} H^{f, s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r).$$

Утверждение 7.4.9 доказано. □

Утверждение 7.4.10. *Если* $\varepsilon \in (0, \min(1/32, 2^{-s}))$, $n^{1-\varepsilon} \leqslant m_1 m_2 \leqslant n^{1+\varepsilon}$, $f \in \mathcal{J}_{V_1, V_2, s}^{\varepsilon}$, $\widetilde{V}_1, \widetilde{V}_2$ — *разбиения* V_1, V_2, *порожденные* f, *то найдется такое* $r_0(n, \widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)$, $\ln m_1m_2 + \ln\varepsilon + s - 1 \leqslant r_0(n, \widetilde{m}_1\widetilde{m}_2) \leqslant (1 + \frac{\varepsilon}{2})\ln m_1m_2 + s - 1$, $D \in \mathcal{B}$, $D < \ln\ln\ln\ln n$, *что*

$$\varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \sum_{r=]r_0(n,\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)-D[}^{[r_0(n,\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)+D]} \binom{n-s}{r-s} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r).$$

Доказательство. Положим $a_r = \binom{n-s}{r-s} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r)$, $x = r - \ln\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2 - s + 1$, $b_i = \dfrac{\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2}{\widetilde{m}_{1i}\widetilde{m}_2}$, $x_i = x + b_i$, $i \in N_s$. Аналогично доказательству предыдущего утверждения определим функцию $g(x)$

$$g(x) = \frac{a_r}{a_{r+1}} = \frac{\ln\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2 + x}{n - \ln\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2 - x + 1} \cdot \frac{\exp\{-2^{-x}\}}{1 - \exp\{-2^{-x}\}} \times$$
$$\times \left(1 + \exp\left\{-2^{-x}\right\}\right)^{\ln\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2 + x - 1} \cdot \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \exp\left\{-2^{-x_i}\right\}\right).$$

Функция $g(x)$ определена при всех x таких, что $r \in [r_1^\varepsilon(n, m_1m_2), r_2^\varepsilon(n, m_1m_2) - 1]$ и монотонно возрастает по x. При $x = 0$

$$g(x) = \frac{\ln\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2}{n - \ln\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2 + 1} \cdot \frac{e^{-1}}{1 - e^{-1}} \cdot (\widetilde{m}_1 \cdot \widetilde{m}_2)^{\ln(1+e^{-1})} \times$$
$$\times \left(1 + e^{-1}\right)^{-1} \cdot \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \exp\left\{-2^{-b_i}\right\}\right).$$

Так как $\ln(1 + e^{-1}) < \dfrac{1}{2}$, то $g(0) \ll_n 1$.

При $x = \dfrac{\varepsilon}{2}\ln m_1m_2$

$$g(x) = \frac{\ln\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2 + \frac{\varepsilon}{2}\ln m_1m_2}{n - \ln\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2 - \frac{\varepsilon}{2}\ln m_1m_2 + 1} \cdot \frac{\exp\{-(m_1m_2)^{-\frac{\varepsilon}{2}}\}}{1 - \exp\{-(m_1m_2)^{-\frac{\varepsilon}{2}}\}} \times$$
$$\times (\widetilde{m}_1 \cdot \widetilde{m}_2)^{\ln(1+\exp\{-(m_1m_2)^{-\frac{\varepsilon}{2}}\})} \cdot (m_1 \cdot m_2)^{\frac{\varepsilon}{2}\ln(1+\exp\{-(m_1m_2)^{-\frac{\varepsilon}{2}}\})} \times$$
$$\times \left(1 + \exp\left\{-(m_1m_2)^{-\frac{\varepsilon}{2}}\right\}\right)^{-1} \times$$
$$\times \prod_{i=1}^{s} \left(1 + \exp\left\{-(m_1m_2)^{-\frac{\varepsilon}{2}} \cdot 2^{-b_i}\right\}\right) \geqslant_n$$

$$\geqslant_n \frac{\ln m_1 m_2}{2n} \cdot \frac{(m_1 m_2)^{\frac{\varepsilon}{2}}}{2} \cdot \varepsilon^2 \cdot (\widetilde{m}_1 \cdot \widetilde{m}_2)^{1-(m_1 m_2)^{-\frac{\varepsilon}{2}}} \times \\ \times (m_1 m_2)^{\frac{\varepsilon}{2}\left(1-(m_1 m_2)^{-\frac{\varepsilon}{2}}\right)} \cdot \frac{1}{2} \geqslant_n \\ \geqslant_n \frac{\sqrt{\ln m_1 m_2}\,(m_1 m_2)^{1+\varepsilon}}{n} \gg_n 1.$$

В силу монотонности $g(x)$ существует такое x_0, $x_0 \in \in \left(0, \frac{\varepsilon}{2} \ln m_1 m_2\right)$, что $g(x_0) = 1$. Кроме того, так как

$$(\widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2)^{\ln(1+\exp\{-2^{-x}\})} \ll_n (\widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2)^{\ln(1+\exp\{-2^{-x-D}\})}$$

для всех x из $\left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, то $g(x_0 - D) \ll_n 1$ и $g(x_0 + d) \gg_n 1$. Обозначив $r_0(n, \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2) = x_0 + \ln \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2 + s - 1$, получаем $\frac{a_r}{a_{r+1}} \gg_n 1$ при $r \in [r_2^\varepsilon(n, m_1 m_2), r_0(n, \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2) + D)$ и $\frac{a_r}{a_{r+1}} \ll_n 1$ при $r \in \in (r_0(n, \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2) - D, r_1^\varepsilon(n, m_1 m_2)]$. Следовательно,

$$\sum_{r=]r_0(n,\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)-D[}^{[r_0(n,\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)+D]} a_r \sim_n \sum_{r=]r_1^\varepsilon(n,m_1m_2)[}^{[r_2^\varepsilon(n,m_1m_2)]} a_r.$$

Из утверждений 7.4.1, 7.4.5 и замечания следует, что

$$\varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \sum_{r=]r_0(n,\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)-D[}^{[r_0(n,\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)+D]} \varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \\ \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \sum_{r=]r_0(n,\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)-D[}^{[r_0(n,\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)+D]} \binom{n-s}{r-s} H^{f,s}(\widetilde{m}_1, \widetilde{m}_2, r).$$

Так как $0 \leqslant x_0 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \ln m_1 m_2$, то

$$\ln m_1 m_2 + \ln \varepsilon + s - 1 \leqslant \ln \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2 + s - 1 \leqslant r_0(n, \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2) \leqslant \\ \leqslant \ln \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2 + s - 1 + \frac{\varepsilon}{2} \ln m_1 m_2 \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \ln m_1 m_2 + s - 1.$$

Утверждение 7.4.10 доказано. □

Обозначим

$$r^\varepsilon_{1,D}(n, \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2) = \begin{cases}]\text{æ}(n, m_1 m_2) - D[, \text{ если } m_1 m_2 \leqslant n^{1-\varepsilon}, \\ ]r_0(n, \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2) - D[, \text{ если } n^{1-\varepsilon} < m_1 m_2 < n^{1+\varepsilon}, \\ \ln m_1 m_2 + c(n, \widetilde{m}_1 \widetilde{m}_2), \text{ если } n^{1+\varepsilon} \leqslant m_1 m_2, \end{cases}$$

$$r^{\varepsilon}_{2,D}(n,\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)=\begin{cases}[\text{æ}(n,m_1m_2)+D], & \text{если } m_1m_2\leqslant n^{1-\varepsilon},\\ [r_0(n,\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)+D], & \text{если } n^{1-\varepsilon}<m_1m_2<n^{1+\varepsilon},\\ \ln m_1m_2+c(n,\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)+1, & \text{если } n^{1+\varepsilon}\leqslant m_1m_2.\end{cases}$$

Из утверждений 7.4.8–7.4.10 следует

Утверждение 7.4.11. *Если* $\varepsilon\in(0,\min(2^{-s},1/32,c_1/18c_2))$, $n^{c_1}\leqslant$ $\leqslant m_1m_2\leqslant n^{c_2}$, $0<c_1<1<c_2$, $f\in\mathcal{J}^{\varepsilon}_{V_1,V_2,s}$, $\widetilde{V}_1,\widetilde{V}_2$ *— разбиения* V_1,V_2, *порожденные* f, *и* $D\in\mathcal{B}$, $D<\ln\ln\ln\ln n$, *то*

$$\varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n}\overset{\text{п.в.}}{\sim}_n\sum_{r=r^{\varepsilon}_{1,D}(n,\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)}^{r^{\varepsilon}_{2,D}(n,\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)}\varphi^{f,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r}\overset{\text{п.в.}}{\sim}_n\sum_{r=r^{\varepsilon}_{1,D}(n,\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)}^{r^{\varepsilon}_{2,D}(n,\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)}\binom{n-s}{r-s}H^{f,s}(\widetilde{m}_1,\widetilde{m}_2,r).$$

7.5. Вычисление весов признаков

В этом параграфе рассматривается асимптотическое поведение весов первого признака для почти всех пар таблиц из $\mathfrak{T}^{f}_{V_1,V_2,n}$, где $f\in\mathcal{J}^{\varepsilon}_{V_1,V_2,1}$, в зависимости от доли единиц в первом столбце таблицы сравнения. На протяжении всего параграфа будем считать, что $\varepsilon\in(0,\min(1/32,c_1/40c_2))$. Из утверждения 7.4.1 следует, что при $r\in[r^{\varepsilon}_1(n,\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)+1,r^{\varepsilon}_2(n,\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)]$ для почти всех таблиц T из $\mathfrak{T}^{f}_{V_1,V_2,n}$, где $f\in\mathcal{J}^{\varepsilon}_{V_1,V_2,1}$, число тупиковых тестов длины r, содержащих первый столбец, асимптотически равно $\binom{n-1}{r-1}H^{f,1}(\widetilde{m}_1,\widetilde{m}_2,r)$, а число тупиковых тестов, не содержащих первый столбец, асимптотически равно $\binom{n-1}{r}H(m_1m_2,r)$.

В начале главы было определено множество $\mathfrak{T}^{\alpha,\varepsilon}_{V_1,V_2,n}$. Если $T\in\mathfrak{T}^{\alpha,\varepsilon}_{V_1,V_2,n}$, то найдется f из $\mathcal{J}^{\varepsilon}_{V_1,V_2,1}$ такое, что $\widetilde{m}_1\cdot\widetilde{m}_2=\alpha m_1m_2$ и $\pi_{n,1}\circ T=f$. В этом случае $\widetilde{m}_{11}\widetilde{m}_2=(1-\alpha)m_1m_2$ и

$$H^{f,1}(\widetilde{m}_1,\widetilde{m}_2,r)=\exp\left\{-\frac{\alpha m_1m_2}{2^{r-1}}\right\}\cdot\left(1-\exp\left\{-\frac{\alpha m_1m_2}{2^{r-1}}\right\}\right)^{r-1}\times\\ \times\left(1-\exp\left\{-\frac{(1-\alpha)m_1m_2}{2^{r-1}}\right\}\right).$$

Обозначим эту функцию через $H^{\alpha}(m_1m_2,r)$. Считаем далее, что $\alpha\in I^{\varepsilon}$.

Утверждение 7.5.1. *Если* $n^{c_1} \leqslant m_1 m_2 \leqslant n^{c_2}$, $0 < c_1 < 1 < c_2$ *и* $\widetilde{r}^{\varepsilon}_{1,k}(m_1 m_2) \leqslant r \leqslant r^{\varepsilon}_{2,k}(m_1 m_2)$, *то*

$$H(m_1 m_2, r) \sim_n \exp\left\{-\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\} \text{ и } H^{\alpha}(m_1 m_2, r) \sim_n \exp\left\{-\frac{\alpha m_1 m_2}{2^r}\right\}.$$

Доказательство. При таких r и $\beta \in (0, 2)$

$$\begin{aligned} 1 - \exp\left\{-\frac{\beta m_1 m_2}{2^r}\right\} &\geqslant 1 - \exp\left\{-\beta\left(\ln\ln m_1 m_2\right)^{1+\varepsilon}\right\} \geqslant_n \\ &\geqslant_n 1 - \exp\left\{-(\ln\ln m_1 m_2)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}\right\} \geqslant_n 1 - r^3. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$H(m_1 m_2, r) \geqslant \exp\left\{-\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\} \cdot \left(1 - \frac{1}{r^2}\right) \sim_n \exp\left\{-\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\}.$$

Аналогично,

$$H^{\alpha}(m_1 m_2, r) \sim_r \exp\left\{-\frac{\alpha m_1 m_2}{2^r}\right\}.$$

Утверждение 7.5.1 доказано. □

Утверждение 7.5.2. *Если* $n^{c_1} \leqslant m_1 m_2 \leqslant n^{c_2}$, $0 < c_1 < 1 < c_2$ *и* $r^{\varepsilon}_{1,k}(m_1 m_2) \leqslant r \leqslant r^{\varepsilon}_{2,k}(m_1 m_2)$, *то*

$$\psi^{\alpha,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \frac{r}{n} \exp\left\{\frac{(1-2\alpha) m_1 m_2}{2^r}\right\}.$$

Если $\alpha < \dfrac{1}{2}$ *и* $\widetilde{r}^{\varepsilon}_{1,k}(m_1 m_2) \leqslant r \leqslant \widetilde{r}^{\varepsilon}_{2,k}(m_1 m_2)$, *то*

$$\psi^{\alpha,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n 1.$$

Доказательство. Из утверждения 7.5.1 следует, что при всех таких r

$$\frac{\dbinom{n-1}{r-1} H^{\alpha}(m_1 m_2, r)}{\dbinom{n-1}{r} H(m_1 m_2, r)} \sim_n \frac{r}{n} \exp\left\{\frac{(1-2\alpha) m_1 m_2}{2^r}\right\},$$

откуда видно, что при $r \geqslant r^{\varepsilon}_{1,k}(m_1 m_2)$

$$\frac{r}{n} \exp\left\{\frac{(1-2\alpha) m_1 m_2}{2^r}\right\} \ll_n 1,$$

а при $\alpha < \dfrac{1}{2}$ и $r \leqslant \widetilde{r}^{\varepsilon}_{2,k}(m_1m_2)$

$$\frac{r}{n}\exp\left\{\frac{(1-2\alpha)m_1m_2}{2^r}\right\} \geqslant_n \exp\left\{(\ln m_1m_2)^{1+\frac{\varepsilon}{2}}\right\} \gg_n 1.$$

Так как $\psi^{\alpha,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r} = \varphi^{\alpha,1,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r}/\varphi^{\alpha,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r}$, то в силу утверждения 7.4.1

$$\psi^{\alpha,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \binom{n-1}{r-1}H^{\alpha}(m_1m_2,r)\Bigg/$$

$$\Bigg/\left(\binom{n-1}{r-1}H^{\alpha}(m_1m_2,r) + \binom{n-1}{r}H(m_1m_2,r)\right) \sim_n$$

$$\sim$$

$$\sim_n \begin{cases} 1, \text{ если } \alpha < \dfrac{1}{2} \text{ и } \widetilde{r}^{\varepsilon}_{1,k}(m_1m_2) \leqslant r \leqslant \widetilde{r}^{\varepsilon}_{2,k}(m_1m_2), \\ \dfrac{r}{n}\exp\left\{\dfrac{(1-2\alpha)m_1m_2}{2^r}\right\}, \text{ если } r^{\varepsilon}_{1,k}(m_1m_2) \leqslant r \leqslant r^{\varepsilon}_{2,k}(m_1m_2). \end{cases}$$

Утверждение 7.5.2 доказано. □

Положим $\Psi^{\alpha}_k(n, m_1m_2, r) = \dfrac{r}{n}\exp\left\{\dfrac{(1-2\alpha)m_1m_2}{2^r}\right\}$.

Из утверждений 7.2.16, 7.4.6, 7.5.2 следует

Утверждение 7.5.3. *Если $n^{c_1} \leqslant m_1m_2 \leqslant n^{c_2}$, $0 < c_1 < 1 < c_2$, то при $r^{\varepsilon}_{1,k}(m_1m_2) \leqslant r \leqslant r^{\varepsilon}_{2,k}(m_1m_2)$*

$$\psi^{\alpha,\text{ктт}}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \psi^{\alpha,\text{кт}}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n$$
$$\overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \psi^{\alpha,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \psi^{\alpha,T}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \Psi^{\alpha}_k(n, m_1m_2, r),$$

и, если $\alpha_1, \alpha_2 \in I^{\varepsilon}$, $\alpha_1 < \alpha_2$, то

$$\Psi^{\alpha_1}_k(n, m_1m_2, r) \gg_n \Psi^{\alpha_2}_k(n, m_1m_2, r).$$

При $\alpha < \dfrac{1}{2}$ и $\widetilde{r}^{\varepsilon}_{1,k}(m_1m_2) \leqslant r \leqslant \widetilde{r}^{\varepsilon}_{2,k}(m_1m_2)$

$$\psi^{\alpha,\text{ктт}}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \psi^{\alpha,\text{кт}}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \psi^{\alpha,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \psi^{\alpha,T}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n 1.$$

Утверждение 7.5.4. *Если $n^{c_1} \leqslant m_1m_2 \leqslant n^{c_2}$, $0 < c_1 < 1 < c_2$, то $\psi^{\alpha,T}_{V_1,V_2,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \dfrac{1}{2}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично утверждению 7.2.16, при $r \geqslant 5 \ln m_1 m_2$ получаем

$$\left|\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r}\right| \geqslant 2^{rm_1}\left(2^r - m_1\right)^{m_2} \geqslant \left(1 - \frac{1}{(m_1 m_2)^n}\right) \cdot 2^{r(m_1+m_2)}.$$

Используя утверждение 7.1.4, получаем

$$\mathtt{M}\varphi^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,n-1} \geqslant \sum_{i=]5\ln m_1 m_2[}^{n-1} \binom{n-1}{i}\left(1-(m_1m_2)^{-4}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \left(1-(m_1m_2)^{-4}\right)\cdot 2^{n-1} - \sum_{i=1}^{]5\ln m_1 m_2[} \binom{n-1}{i} \geqslant$$

$$\geqslant \left(1-(m_1m_2)^{-4}\right)\cdot 2^{n-1} - \frac{6\ln m_1 m_2}{n-1}(n-1)^{6\ln m_1 m_2} \geqslant_n$$

$$\geqslant_n 2^{n-1}\left(1-(m_1m_2)^{-3}\right).$$

Так как $\varphi^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,n-1} \leqslant 2^{n-1}-1$, то $\varphi^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,n-1} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n 2^{n-1}$.

Из того, что $\tau_{n,1}(\widetilde{x})$ — тест пары таблиц $\tau_{n,1}\circ T$, следует, что $\widetilde{x}$ будет тестом пары таблиц T.

Следовательно, $\varphi^{\alpha,T}_{V_1,V_2,n} \geqslant \varphi^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,n-1}$ (значение $\varphi^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,n-1}$ берется на паре таблиц $\tau_{n,1}\circ T$), $\varphi^{\alpha,T}_{V_1,V_2,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n 2^{n-1}$ и $\psi^{\alpha,T}_{V_1,V_2,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \frac{1}{2}$.

Утверждение 7.5.4 доказано. □

Положим

$$\Psi^\alpha(n, m_1m_2) = \sum_{r=r^\varepsilon_{1,D}(n,\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)}^{r^\varepsilon_{2,D}(n,\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)} \binom{n-1}{r-1} H^\alpha(m_1m_2, r) \Bigg/ \left(\sum_{r=r^\varepsilon_{1,D}(n,\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)}^{r^\varepsilon_{2,D}(n,\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)} \binom{n-1}{r-1} H^\alpha(m_1m_2, r) + \sum_{r=r^\varepsilon_{1,D}(n,\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)}^{r^\varepsilon_{2,D}(n,\widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)} \binom{n-1}{r} H(m_1m_2, r)\right).$$

Из утверждения 7.4.11 следует

Утверждение 7.5.5. *Если* $n^{c_1} \leqslant m_1m_2 \leqslant n^{c_2}$, $0 < c_1 < 1 < c_2$, $D \in \mathcal{B}$, $D < \ln\ln\ln\ln n$, *то* $\psi^{\alpha,T}_{V_1,V_2,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \Psi^\alpha(n, m_1m_2)$.

Утверждение 7.5.6. *Если* $n^{1-\varepsilon} \geqslant m_1m_2 \geqslant n^{c_2}$, $1-\varepsilon > c_1 > 0$, $D \in \mathcal{B}$, $D < \ln\ln\ln\ln n$ *и* $r \in \left[r^{\varepsilon}_{1,D}(n, m_1m_2), r^{\varepsilon}_{2,D}(n, m_1m_2)\right]$, *то*

$$\psi^{\alpha,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \frac{r}{n}\cdot 2^r\alpha^{r-1}(1-\alpha).$$

Доказательство. При $r > \ln m_1m_2 + 2\ln\ln m_1m_2$

$$H^{\alpha}(m_1m_2, r) \sim_n \left(\frac{\alpha m_1m_2}{2^{r-1}}\right)^{r-1}\frac{(1-\alpha)m_1m_2}{2^{r-1}}$$

и

$$H(m_1m_2, r) \sim_n \left(\frac{m_1m_2}{2^r}\right)^r.$$

Следовательно, при $r \in \left[r^{\varepsilon}_{1,D}(n, \widetilde{m}_1\widetilde{m}_2), r^{\varepsilon}_{2,D}(n, \widetilde{m}_1\widetilde{m}_2)\right]$ и $\alpha \in (0,1)$ $2^r < \sqrt{nm_1m_2} \leqslant n^{1-\varepsilon/2}$ и

$$\binom{n-1}{r-1}H^{\alpha}(m_1m_2, r) \leqslant 2^r\binom{n-1}{r-1}H(m_1m_2, r) \ll_n \ll_n \binom{n-1}{r}H(m_1m_2, r)$$

и в силу утверждения 7.4.1

$$\psi^{\alpha,\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \frac{\binom{n-1}{r-1}H^{\alpha}(m_1m_2, r)}{\binom{n}{r}H(m_1m_2, r)} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \frac{r}{n}2^r\alpha^{r-1}(1-\alpha).$$

Утверждение 7.5.6 доказано. □

Утверждение 7.5.7. *Если* $n^{1-\varepsilon} \geqslant m_1m_2 \geqslant n^{c_1}$, $1-\varepsilon > c_1 > 0$, $\alpha_1, \alpha_2 \in I^{\varepsilon}$, $\alpha_1 < \alpha_2$, *то* $\Psi^{\alpha_1}(n, m_1m_2) \ll_n \Psi^{\alpha_2}(n, m_1m_2)$.

Доказательство. Возьмем некоторое D из $\mathcal{B}$, $D < \ln\ln\ln\ln n$. Согласно определению при $m_1m_2 \leqslant n^{1-\varepsilon}$

$$r^{\varepsilon}_{1,D}(n, m_1m_2) = r^{\varepsilon}_{i,D}(n, \widetilde{m}_1\widetilde{m}_2), \quad i \in N_2.$$

При $r \in [r^{\varepsilon}_{1,D}(m_1m_2), r^{\varepsilon}_{2,D}(m_1m_2)]$

$$\binom{n-1}{r-1} \cdot H^{\alpha_1}(m_1m_2, r) \leqslant_n$$
$$\leqslant_n \binom{n-1}{r-1} \cdot H^{\alpha_2}(m_1m_2, r) \cdot 2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{r-1} \cdot \frac{1-\alpha_1}{1-\alpha_2} \leqslant_n$$
$$\leqslant_n \binom{n-1}{r-1} \cdot H^{\alpha_2}(m_1m_2, r)\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{r^{\varepsilon}_{1,D}(m_1m_2)/2}.$$

Учитывая утверждения 7.5.5, 7.5.6, получаем

$$\sum_{r=r^{\varepsilon}_{1,D}(n,m_1m_2)}^{r^{\varepsilon}_{2,D}(n,m_1m_2)} \binom{n-1}{r-1} H^{\alpha_1}(m_1m_2, r) \ll_n$$
$$\ll_n \sum_{r=r^{\varepsilon}_{1,D}(n,m_1m_2)}^{r^{\varepsilon}_{2,D}(n,m_1m_2)} \binom{n-1}{r} H(m_1m_2, r),$$

$$\Psi^{\alpha_i}(n, m_1m_2) \sim_n \sum_{r=r^{\varepsilon}_{1,D}(n,m_1m_2)}^{r^{\varepsilon}_{2,D}(n,m_1m_2)} \binom{n-1}{r-1} H^{\alpha_i}(m_1m_2, r) \Bigg/$$
$$\Bigg/ \sum_{r=r^{\varepsilon}_{1,D}(n,m_1m_2)}^{r^{\varepsilon}_{2,D}(n,m_1m_2)} \binom{n-1}{r} H(m_1m_2, r)$$

и

$$\Psi^{\alpha_1}(n, m_1m_2) \leqslant \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{\ln m_1m_2}{2}} \cdot \Psi^{\alpha_2}(n, m_1m_2) \ll_n \Psi^{\alpha_2}(n, m_1m_2).$$

Утверждение 7.5.7 доказано. $\square$

Обозначим

$$r^{\varepsilon}_{1,T}(m) = \left]\ln m - \ln\ln\ln\ln m\right[,$$
$$r^{\varepsilon}_{2,T}(m) = \left]\left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\ln m\right[.$$

Утверждение 7.5.8. *Если $\alpha_1, \alpha_2 \in I^{\varepsilon}$, $\alpha_1 < \alpha_2$, $r^{\varepsilon}_{1,T}(m) \leqslant r \leqslant$ $\leqslant r^{\varepsilon}_{2,T}(m)$, то $H^{\alpha_1}(m, r) \ll_r H^{\alpha_2}(m, r)$.*

Доказательство:

$$H^\alpha(m,r) = \exp\left\{-\frac{\alpha m}{2^{r-1}}\right\} \times \\ \times \left(1-\exp\left\{-\frac{\alpha m}{2^{r-1}}\right\}\right)^{r-1} \cdot \left(1-\exp\left\{-\frac{(1-\alpha)m}{2^{r-1}}\right\}\right).$$

Положим $x = m/2^{r-1}$. Тогда

$$H^\alpha(m,r) = f_1(x,r,\alpha) = e^{-\alpha x}(1-e^{-\alpha x})^{r-1}(1-e^{(\alpha-1)x}).$$

Считаем далее, что $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$. Функция f_1 при всех x, r дифференцируема по α на $[\alpha_1, \alpha_2]$.

$$\begin{aligned} f_2(x,r,\alpha) &= \frac{\partial f_1(x,r,\alpha)}{\partial \alpha} = -xe^{-\alpha x}(1-e^{-\alpha x})^{r-1}(1-e^{(\alpha-1)x}) + \\ &\quad + e^{-\alpha x}(1-e^{-\alpha x})^{r-2}(r-1)xe^{-\alpha x}(1-e^{(\alpha-1)x}) - \\ &\quad - e^{-\alpha x}(1-e^{-\alpha x})^{r-1}e^{(\alpha-1)x}x = \\ &= xe^{-(1+\alpha)x}(1-e^{-\alpha x})^{r-2}[-e^x + e^{\alpha x} + e^{(1-\alpha)x} - 1 + \\ &\quad + (r-1)(e^{(1-\alpha)x}-1) - e^{\alpha x} + 1] = \\ &= xe^{-(1+\alpha)x}(1-e^{-\alpha x})^{r-2}(r(e^{(1-\alpha)x}-1)-(e^x-1)). \end{aligned}$$

Обозначим $f_3(x,r,\alpha) = r(e^{(1-\alpha)x}-1)-(e^x-1)$.

Если $r \in \left[r^\varepsilon_{1,T}(m), r^\varepsilon_{2,T}(m)\right]$, то $x \in \left[m^{-\frac{\varepsilon}{2}}, \ln\ln\ln m\right]$.

При $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{\ln r}$ $\quad 1+x \leqslant e^x \leqslant_m 1+2x$ и

$$r(e^{(1-\alpha)x}-1) \geqslant_m (1-\alpha)rx \gg_m 2x \geqslant_m e^x - 1.$$

При $\dfrac{1}{\ln r} < x \leqslant \ln\ln\ln r \quad e^x > 1+x$ и

$$r(e^{(1-\alpha)x}-1) \geqslant \frac{r(1-\alpha)}{\ln r} \gg_m e^{\ln\ln\ln m} > e^x - 1.$$

Следовательно, $f_3(x,r,\alpha) >_m 0$ и $f_3(x,r,\alpha) \sim_m r(e^{(1-\alpha)x}-1)$. Так как $xe^{-(1+\alpha)x}(1-e^{-\alpha x})^{r-2} > 0$, то $f_2(x,r,\alpha) = \dfrac{\partial f_1(x,r,\alpha)}{\partial\alpha} > {}_m 0$ и

$$f_1(x,r,\alpha_1) <_m f_1(x,r,\alpha_2).$$

Далее рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} f_4(x,r,\alpha) &= \frac{f_1(x,r,\alpha)}{f_2(x,r,\alpha)} = \frac{(e^{\alpha x}-1)(e^{(1-\alpha)x}-1)}{x(r(e^{(1-\alpha)x}-1)-(e^x-1))} \sim_m \\ &\sim_m \frac{(e^{\alpha x}-1)(e^{(1-\alpha)x}-1)}{xr(e^{(1-\alpha)x}-1)} = \frac{e^{\alpha x}-1}{xr}. \end{aligned}$$

При $\frac{1}{\ln r} < x \leqslant \ln\ln\ln n \quad xr \geqslant_m r^{\frac{1}{2}} \gg_m e^{\alpha x}$ и при $m^{-\frac{\varepsilon}{2}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{\ln r}$ $xr \gg_m 2\alpha x \geqslant_m e^{\alpha x} - 1$. Следовательно, при $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$

$$\frac{\partial f_1(x,r,\alpha)}{\partial \alpha} \gg_m f_1(x,r,\alpha) \geqslant_m f(x,r,\alpha_1)$$

и

$$f_1(x,r,\alpha_1) \ll_m f_1(x,r,\alpha_1) + (\alpha_2 - \alpha_1) \min_{\alpha \in [\alpha_1,\alpha_2]} \frac{\partial f_1(x,r,\alpha)}{\partial \alpha} \leqslant \leqslant f_1(x,r,\alpha_2).$$

Утверждение 7.5.8 доказано. □

Утверждение 7.5.9. *Если $\alpha \in I^\varepsilon$, $r^\varepsilon_{1,T}(m) \leqslant r \leqslant r^\varepsilon_{2,T}(m)$, то*

$$r^2 H(m,r) \geqslant_m H^\alpha(m,r).$$

Доказательство. Положим $x = m/2^r$. Тогда $H(m,r) = f_1(x,r,\frac{1}{2})$, где f_1 определена в предыдущем утверждении, согласно которому при $\varepsilon \leqslant \alpha < \frac{1}{2} \quad H(m,r) \gg_m H^\alpha(m,r)$. При $\alpha = \frac{1}{2} \quad r^2 H(m,r) > H(m,r) = H^\alpha(m,r)$. Пусть $\frac{1}{2} < \alpha < 1 - \varepsilon$. Тогда

$$f_2(x,r,\alpha) = \frac{\partial f_1(x,r,\alpha)}{\partial \alpha} = = xe^{-(1+\alpha)x}\left(1 - e^{-\alpha x}\right)^{r-2}\left(r\left(e^{(1-\alpha)x} - 1\right) - \left(e^{-x} - 1\right)\right) \sim_m \sim_m xre^{-2\alpha x}\left(1 - e^{-\alpha x}\right)^{r-2}\left(1 - e^{(\alpha-1)x}\right) \leqslant_m 2xr.$$

Следовательно,

$$f_1(x,r,\alpha) \leqslant_m 2xr \cdot \frac{1}{2} f_1\left(x,r,\frac{1}{2}\right) \leqslant_m r^2 f\left(x,r,\frac{1}{2}\right).$$

Утверждение 7.5.9 доказано. □

Утверждение 7.5.10. *Если $n^{c_2} \geqslant m_1 m_2 \geqslant n^{1-\varepsilon}$, $c_2 > 1$, $\alpha_1, \alpha_2 \in I^\varepsilon$, $\alpha_1 < \alpha_2$, то $\Psi^{\alpha_1}(n, m_1 m_2) \ll_n \Psi^{\alpha_2}(n, m_1 m_2)$.*

Доказательство. Из утверждений 7.4.9, 7.4.10 следует, что при $D \in \mathcal{B}$, $D \leqslant \dfrac{1}{2} \ln\ln\ln\ln m_1 m_2$

$$\left[r^{\varepsilon}_{1,D}(n, \widetilde{m}_1 \cdot \widetilde{m}_2), r^{\varepsilon}_{2,D}(n, \widetilde{m}_1 \cdot \widetilde{m}_2)\right] \subseteq \\ \subseteq \left[r^{\varepsilon}_{1,T}(m_1 m_2), r^{\varepsilon}_{2,D}(m_1 m_2)\right] \subseteq \left[r^{\varepsilon}_{1}(n, m_1 m_2), r^{\varepsilon}_{2}(n, m_1 m_2)\right].$$

Из утверждения 7.5.9 имеем при

$$\ln m_1 m_2 - \ln\ln\ln\ln m_1 m_2 \leqslant r \leqslant \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \ln m_1 m_2$$

и $\alpha \in I^{\varepsilon}$

$$\binom{n-1}{r-1} \cdot H^{\alpha}(m_1 m_2, r) \leqslant_n n^{-\frac{1}{2}} \cdot \binom{n-1}{r} \cdot H(m_1 m_2, r),$$

откуда, учитывая утверждения 7.4.1, 7.4.11,7.5.8, получаем

$$\sum_{r=r^{\varepsilon}_{1,T}(m_1 m_2)}^{r^{\varepsilon}_{2,T}(m_1 m_2)} \binom{n-1}{r-1} H^{\alpha_1}(m_1 m_2, r) \ll_n \\ \ll_n \sum_{r=r^{\varepsilon}_{1,T}(m_1 m_2)}^{r^{\varepsilon}_{2,T}(m_1 m_2)} \binom{n-1}{r-1} H^{\alpha_2}(m_1 m_2, r) \ll_n \\ \ll_n \sum_{r=r^{\varepsilon}_{1,T}(m_1 m_2)}^{r^{\varepsilon}_{2,T}(m_1 m_2)} \binom{n-1}{r} H(m_1 m_2, r),$$

$$\Psi^{\alpha_i}(n, m_1 m_2) \;\sim_n\; \sum_{r=r^{\varepsilon}_{1,T}(m_1 m_2)}^{r^{\varepsilon}_{2,T}(m_1 m_2)} \binom{n-1}{r-1} H^{\alpha_i}(m_1 m_2, r) \Bigg/ \\ \Bigg/ \sum_{r=r^{\varepsilon}_{1,T}(m_1 m_2)}^{r^{\varepsilon}_{2,T}(m_1 m_2)} \binom{n-1}{r} H(m_1 m_2, r),$$

$i \in N_2$ и $\Psi^{\alpha_1}(n, m_1 m_2) \ll_n \Psi^{\alpha_2}(n, m_1 m_2)$.

Утверждение 7.5.10 доказано. □

Глава 8

УСТОЙЧИВОСТЬ ОПОРНЫХ МНОЖЕСТВ ПРИ ИСКАЖЕНИЯХ ТАБЛИЦ

8.1. Модель появления ошибок в исходной таблице

График пары таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$ можно представить в виде бинарной матрицы, имеющей m_1+m_2 строк и n столбцов. Можно считать, что первые m_1 строк соответствуют образам элементов из первого класса (V_1), а последние m_2 строк — образам элементов из второго класса (V_2). Будем считать, что при задании образов элементов ошибки возникают таким образом, что каждый элемент матрицы графика пары таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$ независимо от других с вероятностью p заменяется на противоположный.

Определим множество $\mathfrak{T}^2_{V_1,V_2,n}=\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}\otimes\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$ и рассмотрим заданное на этом множестве конечное вероятностное пространство со следующим распределением:

$$\mathtt{P}\{(T,T^*)\}=p^{\widetilde{\rho}(T,T^*)}\cdot(1-p)^{(m_1+m_2)n-\widetilde{\rho}(T,T^*)}\cdot 2^{-(m_1+m_2)n},$$

где $\widetilde{\rho}(T,T^*)=\sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{a\in V_i}\rho(T_i(a),T_i^*(a))$ — число отличий пар таблиц T и T^* из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}, 0\leqslant p\leqslant 1$. Будем обозначать элементы из $\mathfrak{T}^2_{V_1,V_2,n}$ через $\widetilde{\xi}=(\xi_1,\xi_2)$. Первую координату $\widetilde{\xi}$ будем считать правильно заданной таблицей, а вторую координату — искаженной таблицей.

Очевидно, что для любых $T\in\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n,r}$, $p\in[0,1]$ выполнено

$$\mathtt{P}(\xi_1=T)=\mathtt{P}(\xi_2=T)=2^{-(m_1+m_2)}.$$

В первой главе были определены функции

$$\varphi^{\text{т}}_{V_1,V_2,n,r},\ \varphi^{\text{кт}}_{V_1,V_2,n,r},\ \varphi^{\text{т}}_{V_1,V_2,n}\ (\varphi^{\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r},\ \varphi^{\text{ктт}}_{V_1,V_2,n,r},\ \varphi^{\text{тт}}_{V_1,V_2,n}),$$

равные, соответственно, числу тестов (тупиковых тестов) длины r, длины не больше r и всех тестов (тупиковых тестов) таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$. На $\mathfrak{T}^2_{V_1,V_2,n}$ определим функции

$$\varphi^{T,j}_{V_1,V_2,n,r},\ \varphi^{\text{кт},j}_{V_1,V_2,n,r},\ \varphi^{\text{тт},j}_{V_1,V_2,n,r},\ \varphi^{\text{ктт},j}_{V_1,V_2,n,r},\ \varphi^{T,j}_{V_1,V_2,n},\ \varphi^{\text{тт},j}_{V_1,V_2,n},\quad j=1,2$$

таким образом, что если $\widetilde{\xi} \in \mathfrak{T}^2_{V_1,V_2,n}$, то

$$\varphi^{T,j}_{V_1,V_2,n,r}(\widetilde{\xi}) = \varphi^{\text{т}}_{V_1,V_2,n,r}(\xi_j),\ \varphi^{\text{тт},j}_{V_1,V_2,n,r}(\widetilde{\xi}) = \varphi^{\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r}(\xi_j),$$

и так далее.

Будем считать, что на протяжении всей этой главы все утверждения формулируются в следующих условиях: ε, c_1, c_2 — константы, $0 < c_1 < 1 < c_2$, $\varepsilon \in (0, \min(\frac{1}{32}, \frac{c_1}{40c_2}))$, $n^{c_1} \leqslant m_1 m_2 \leqslant n^{c_2}$ и $m_1 \asymp_n m_2$.

Из утверждений 7.4.6, 7.4.11, 7.5.4 и определения функций $\varphi^{T,j}_{V_1,V_2,n}$, и т. д. следует

Утверждение 8.1.1. *Если* $p \in (0,1)$, *то*

$$\varphi^{T,1}_{V_1,V_2,n}(\widetilde{\xi}) \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{T,2}_{V_1,V_2,n}(\widetilde{\xi}) \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \mathtt{M}\varphi^{\text{т}}_{V_1,V_2,n},$$

$$\varphi^{\text{тт},1}_{V_1,V_2,n}(\widetilde{\xi}) \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{\text{тт},2}_{V_1,V_2,n}(\widetilde{\xi}) \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \mathtt{M}\varphi^{\text{тт}}_{V_1,V_2,n},$$

и, если $\widetilde{r}^{\varepsilon}_{1,k}(m_1,m_2) \leqslant r \leqslant \widetilde{r}^{\varepsilon}_{2,k}(m_1,m_2), j \in N_2$, *то*

$$\varphi^{T,j}_{V_1,V_2,n,r}(\widetilde{\xi}) \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{\text{тт},j}_{V_1,V_2,n,r}(\widetilde{\xi}) \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{\text{кт},j}_{V_1,V_2,n,r}(\widetilde{\xi}) \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{\text{ктт},j}_{V_1,V_2,n,r}(\widetilde{\xi}) \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n$$
$$\overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \mathtt{M}\varphi^{\text{тт}}_{V_1,V_2,n,r} \sim_n \binom{n}{r} \exp\left\{-\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\}$$

Множество тестов некоторого вида будет устойчивым к искажениям (при определенных ограничениях на p, n, m_1, m_2, и, возможно, другие параметры), если будет выполнено $\varphi^{*,\&}_n \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{*,\vee}_n \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{*,j}_n$, где $j \in N_2$, а $\varphi^{*,\&}_n, \varphi^{*,\vee}_n, \varphi^{*,j}_n$ — введенные выше функции количества тестов соответствующего вида. Неустойчивым будем считать опорное множество, изменяющееся при искажениях таблиц почти полностью, т. е. множество тестов, для которых выполнено $\varphi^{*,\&}_n \overset{\text{п.в.}}{\ll}_n \varphi^{*,\vee}_n$.

8.2. Устойчивость множества коротких тестов

Если $X_1, \ldots, X_k$ — множества из E^r, значок ∇ означает «T» или «тт», то обозначим через $\mathcal{F}^{\nabla+}_{V_1,V_2,r}(i_1, X_1, \ldots, i_k, X_k)$ множество таких пар таблиц T из $T^{\nabla}_{V_1,V_2,r}$, что найдутся j из N_k и $\widetilde{x}$ из X_j такие, что $|\widehat{T}^{-1}(\widetilde{x})| > i_j$.

Утверждение 8.2.1. *Если* $\widetilde{r}_1^{\varepsilon}(m_1, m_2) \leqslant r \leqslant \widetilde{r}_2^{\varepsilon}(m_1, m_2), X \subseteq E^r$, $r^4 \geqslant i > D(r)\dfrac{m_1 m_2}{2^r}$, *где* $D(r) \in B, D(r) < \ln\ln\ln\ln r$, *то*

$$|\mathcal{F}_{V_1,V_2,r}^{T+}(i, X)| \leqslant_r 3|\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}^{\mathrm{T}}| \cdot \exp\{-\frac{1}{2} i \ln D(r) + \ln |X|\}.$$

Доказательство. Если $T_1 \in \mathfrak{T}_{V_1,r}, \widetilde{x} \in E^r$, то через $\mathcal{F}_{V_2,r}^{\mathrm{T}}(T_1, \widetilde{x}, i)$ обозначим множество таблиц T_2 из $\mathfrak{T}_{V_2,r}$, для которых число элементов b из V_2 таких, что $\widetilde{x} \in T_1(V_1) \leftrightarrow T_2(b)$, равно i и $T_1(V_1) \cap T_2(V_2) = \varnothing$. Положим, далее, $\mathcal{F}_{V_2,r}^{T+}(T_1, \widetilde{x}, k) = \cup_{i>k} \mathcal{F}_{V_2,r}^{\mathrm{T}}(T_1, \widetilde{x}, i)$.

Обозначив $A_1^{\widetilde{x}} = (A_1(T_1) \leftrightarrow \widetilde{x}) \backslash A_1(T_1), m_3 = |A_1^{\widetilde{x}}|$, получаем

$$|\mathcal{F}_{V_2,r}^{\mathrm{T}}(T_1, \widetilde{x}, i)| = |A_1^{\widetilde{x}}|^i \binom{m_2}{i} (2^r - |A_1(T_1)| - |A_1^{\widetilde{x}}|)^{m_2 - i}.$$

Если $i \leqslant r^4, \delta \in \left(0, \dfrac{1}{4}\right), T_1 \in \mathfrak{T}_{V_1,r}^{\delta}$, то

$$|\mathcal{F}_{V_2,r}^{\mathrm{T}}(T_1, \widetilde{x}, i)| \leqslant m_3^i \binom{m_2}{i} (2^r - m_1 - m_3 + m_1^{1-\delta})^{m_2 - i} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{rm_2} \left(\frac{m_3 m_2}{2^r}\right)^i \cdot \frac{1}{i!} \left(1 - \frac{m_1 + m_3 + m_1^{1-\delta}}{2^r}\right)^{m_2 - i} \leqslant_r$$
$$\leqslant_r 2^{rm_2} \left(\frac{e m_3 m_2}{2^r}\right)^i \cdot \exp\left\{-\frac{m_1 m_2}{2^r} - \frac{m_1 m_2}{2^r} + \frac{m_1^{1-\delta} m_2}{2^r} + \frac{2 i m_1}{2^r}\right\} \leqslant_r$$
$$\leqslant_r 2^{rm_2} \exp\left\{-\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\} \exp\left\{i \left(\ln \frac{m_1 m_2}{2^r} - \ln i + 1\right)\right\} (1 + 2^{-\frac{\delta r}{3}}).$$

Если $i > D(r) \cdot \dfrac{m_1 m_2}{2^r}$, где $D(r) \in \mathcal{B}$, то

$$|\mathcal{F}_{V_2,r}^{\mathrm{T}}(T_1, \widetilde{x}, i)| \leqslant 2^{rm_2} \exp\left\{-\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2} i \ln D(r)\right\}.$$

При таких i

$$\frac{|\mathcal{F}_{V_2,r}^{\mathrm{T}}(T_1, \widetilde{x}, i+1)|}{|\mathcal{F}_{V_2,r}^{\mathrm{T}}(T_1, \widetilde{x}, i)|} = \frac{|A_1^{\widetilde{x}}|(m_2 - i)}{(2^r - |A_1(T_1)| - |A_1^{\widetilde{x}}|)(i+1)} \leqslant \frac{2 m_1 m_2}{i \cdot 2^r} \leqslant \frac{2}{D(r)}.$$

Получаем, что при $r^4 \geqslant i > D(r)\dfrac{m_1 m_2}{2^r}$

$$|\mathcal{F}_{V_2,r}^{T+}(T_1, \widetilde{x}, i)| \leqslant \frac{3}{D(r)} |\mathcal{F}_{V_2,r}^{\mathrm{T}}(T_1, \widetilde{x}, i)| \leqslant_r$$
$$\leqslant_r 2^{rm_2} \cdot \exp\left\{-\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\} \exp\left\{-\frac{1}{2} i \ln D(r)\right\}.$$

Аналогичным образом определим множества $\mathcal{F}^{\mathrm{T}}_{V_1,r}(T_2,\widetilde{x},i)$ и $\mathcal{F}^{T+}_{V_1,r}(T_2,\widetilde{x},i)$ и получим, что при $\delta\in(0,1/4), T_2\in\mathfrak{T}^{\delta}_{V_2,r}$, $r^4\geqslant i>$ $>D(r)\dfrac{m_1m_2}{2^r}$ выполнено

$$|\mathcal{F}^{T+}_{V_1,r}(T_2,\widetilde{x},i)|\leqslant_r 2^{rm_1}\cdot\exp\left\{-\frac{m_1m_2}{2^r}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}i\ln D(r)\right\}.$$

При $\widetilde{x}=\widetilde{1}^r$, $j\in N_2$ имеем $\mathcal{F}^{\mathrm{T}}_{V_j,r}(T_{3-j},\widetilde{x},i)=0$.

Если $X\subseteq E^n$, то обозначим через $\mathcal{F}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r,j}(i,X)$ множество таких таблиц T из $\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r}$, для которых найдется $\widetilde{x}$ из X такое, что $T_j\in\mathcal{F}^{T+}_{V_j,r}(T_{3-j},\widetilde{x},i)$.

При $\delta\in(0,1/4), X\subseteq E^n, j\in N_2$ согласно утверждению 7.2.2

$$\begin{aligned}
&|\mathcal{F}^{T+}_{V_1,V_2,r,j}(i,X)|\leqslant\\
&\leqslant|X|\cdot|\mathfrak{T}^{\delta}_{V_{3-j},r}|\cdot\max_{T_{3-j}\in\mathfrak{T}^{\delta}_{V_{3-j},r},\widetilde{x}\in X}|\mathcal{F}^{T+}_{V_j,r}(T_{3-j},\widetilde{x},i)|+\\
&+2^{rm_j}\cdot|\mathfrak{T}_{V_{3-j},r}\setminus\mathfrak{T}^{j}_{V_{3-j},r}|\leqslant_r\\
&\leqslant_r 2^{r(m_1+m_2)}\exp\left\{-\frac{m_1m_2}{2^r}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}i\ln D(r)+\ln|X|\right\}+\\
&+2^{r(m_1+m_2)}\cdot\exp\left\{-m_{3-j}^{1-\delta}\right\}\leqslant_r\\
&\leqslant_r\frac{4}{3}2^{r(m_1+m_2)}\exp\left\{-\frac{m_1m_2}{2^r}\right\}\exp\left\{-\frac{1}{2}i\ln D(r)+\ln|X|\right\}.
\end{aligned}$$

Так как $\mathcal{F}^{T+}_{V_1,V_2,r}(i,X)\subseteq\mathcal{F}^{T+}_{V_1,V_2,r,1}(i,X)\cup\mathcal{F}^{T+}_{V_1,V_2,r,2}(i,X)$, то учитывая утверждение 7.2.5, получаем

$$|\mathcal{F}^{T+}_{V_1,V_2,r}(i,X)|\leqslant_r 3\cdot|\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r}|\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2}i\ln D(r)+\ln|X|\right\}.$$

Утверждение 8.2.1 доказано. □

Утверждение 8.2.2. *Если* $\widetilde{r}^{\varepsilon}_{1,k}(m_1,m_2)\leqslant r\leqslant r^{\varepsilon}_{2,k}(m_1,m_2)$, *то*

$$\begin{aligned}
&\left|\mathcal{F}^{T+}_{V_1,V_2,r}\left(D(r)\frac{m_1m_2}{2^r},E^{r+}_{r-\ln\ln r},r,E^r\right)\right|\leqslant_r\\
&\qquad\leqslant_r|\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r}|\cdot\exp\left\{-(\ln\ln r)^{1+\varepsilon}\right\}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Из предыдущего утверждения следует, что

$$|\mathcal{F}^{T+}_{V_1,V_2,r}(r,E^r)| \leqslant_r |\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r}| \cdot 3\exp\left\{-\frac{1}{2} r \ln D(r) + r\ln 2\right\} \leqslant_r \\ \leqslant_r |\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r}| \cdot e^{-r}.$$

Из утверждения 7.1.3 следует, что $|E^{r+}_{r-\ln\ln r}| \leqslant r^{\ln\ln r}$, поэтому

$$\left|\mathcal{F}^{T+}_{V_1,V_2,r}\left(D(r)\frac{m_1m_2}{2^r}, E^{r+}_{r-\ln\ln r}\right)\right| \leqslant_r \\ \leqslant_r |\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r}| \cdot 3\exp\left\{-\frac{1}{2}D(r)\frac{m_1m_2}{2^r}\cdot \ln D(r) + \ln r \ln\ln r\right\} \leqslant_r \\ \leqslant_r |\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r}| \cdot \exp\left\{-D(r)\cdot(\ln\ln r)^{1+\varepsilon}\right\}.$$

Так как

$$\mathcal{F}^{T+}_{V_1,V_2,r}\left(D(r)\frac{m_1m_2}{2^r}, E^{r+}_{r-\ln\ln r}, r, E^r\right) \subseteq \\ \subseteq \mathcal{F}^{T+}_{V_1,V_2,r}\left(D(r)\frac{m_1m_2}{2^r}, E^{r+}_{r-\ln\ln r}\right) \cup \mathcal{F}^{T+}_{V_1,V_2,r}(r,E^r),$$

то

$$\left|\mathcal{F}^{T+}_{V_1,V_2,r}\left(D(r)\frac{m_1m_2}{2^r}, E^{r+}_{r-\ln\ln r}, r, E^r\right)\right| \leqslant_r \\ \leqslant_r |\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r}| \cdot \exp\left\{-(\ln\ln r)^{1+\varepsilon}\right\}.$$

Утверждение 8.2.2 доказано. □

Определим функцию

$$l^*_r(\widetilde{x}, r_1, a_1 r_2) = \begin{cases} r_1, & \text{при } |\widetilde{x}| > r - a, \\ r_2, & \text{при } |\widetilde{x}| \leqslant r - a. \end{cases}$$

Утверждение 8.2.3. *Если* $\widetilde{r}^{\varepsilon}_{1,k}(m_1m_2) \leqslant r \leqslant r^{\varepsilon}_{2,k}(m_1m_2), p \leqslant \leqslant \frac{1}{r\ln r}$, $D(r) \in \mathcal{B}, D(r) < \ln\ln\ln\ln r$, *то*

$$\mathtt{P}(\xi_2 \notin \mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r} | \xi_1 \in \mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r}) \leqslant_r Dr\frac{m_1m_2}{2^r} rp + r(rp)^{\ln\ln r} + \frac{1}{\ln r}.$$

Доказательство. Для $D(r) \in \mathcal{B}, D(r) < \ln\ln\ln\ln r$ и $D_1(r) = D(r)/2$ имеем $\mathtt{P}(\xi_2 \notin \mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r} | \xi_1 \in \mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r}) \leqslant p_1 + p_2$, где в силу утверждения 8.2.2

$$p_1 = \mathtt{P}\left(\xi_1 \in \mathcal{F}^{T+}_{V_1,V_2,r}\left(D(r)\frac{m_1m_2}{2^r}, E^{r+}_{r-\ln\ln r}, r, E^r\right)\right) \leqslant_r \frac{1}{\ln r}$$

и

$$p_2 = \mathtt{P}\left(\xi_2 \notin \mathfrak{T}^{\mathtt{T}}_{V_1,V_2,r} | \xi_1 \in \right.$$
$$\left. \in \mathfrak{T}^{\mathtt{T}}_{V_1,V_2,r} \setminus \mathcal{F}^{T+}_{V_1,V_2,r}\left(D_1(r)\frac{m_1 m_2}{2^r}, E^{r+}_{r-\ln\ln r}, r, E^r\right)\right).$$

Если $T \in \mathfrak{T}^{\mathtt{T}}_{V_1,V_2,r}) \setminus \mathcal{F}^{T+}_{V_1,V_2,r}\left(D_1(r)\frac{m_1 m_2}{2^r}, E^{r+}_{r-\ln\ln r}, r, E^r\right)$, то

$$\mathtt{P}(\xi_2 \notin \mathfrak{T}^{\mathtt{T}}_{V_1,V_2,r} | \xi_1 = T) = \sum_{\gamma \in X(G_{V_1,V_2})} \mathtt{P}(\widehat{\xi_2}(\gamma) = \widetilde{1}^r | \xi_1 = T) =$$
$$= \sum_{\widetilde{x} \in E^{r-}_r} \sum_{\gamma \in X(G_{V_1,V_2}) : \widehat{T}(\gamma) = \widetilde{x}} \sum_{\widetilde{y} \in E^r} p^{\rho(\widetilde{1}^r, \widetilde{y})} \times$$
$$\times (1-p)^{r-\rho(\widetilde{1}^r,\widetilde{y})} \cdot p^{\rho(\widetilde{1}^r, \widetilde{x} \leftrightarrow \widetilde{y})} \cdot (1-p)^{r-\rho(\widetilde{1}^r, \widetilde{x} \leftrightarrow \widetilde{y})},$$

Так как $\rho(\widetilde{1}^r, \widetilde{x} \leftrightarrow \widetilde{y}) = |\widetilde{x}| + |\widetilde{y}| - 2|\widetilde{x} \& \widetilde{y}|$ и $\rho(\widetilde{1}^r, \widetilde{y}) = r - |\widetilde{y}|$, то

$$\mathtt{P}(\xi_2 \notin \mathfrak{T}^{\mathtt{T}}_{V_1,V_2,r} | \xi_1 = T) \leqslant \sum_{\widetilde{x} \in E^{r-}_r} l^*_r\left(\widetilde{x}, D_1(r)\frac{m_1 m_2}{2^r}, \ln\ln r, r\right) \times$$
$$\times \sum_{\widetilde{y} \in E^r} p^{r+|\widetilde{x}|-2|\widetilde{x}\&\widetilde{y}|}(1-p)^{r-|\widetilde{x}|+2|\widetilde{x}\&\widetilde{y}|} =$$
$$= \sum_{\widetilde{y} \in E^r} l^*_r\left(\widetilde{x}, D_1(r)\frac{m_1 m_2}{2^r}, \ln\ln r, r\right) \times$$
$$\times (p-p^2)^{r-|\widetilde{x}|} \sum_{\widetilde{y} \in E^r} p^{|2\widetilde{x}|-2|\widetilde{x}\&\widetilde{y}|} \cdot (1-p)^{2|\widetilde{x}\&\widetilde{y}|}.$$

Отношение $\widetilde{y}_1 = \widetilde{y}_2 \Leftrightarrow \widetilde{x}\&\widetilde{y}_1 = \widetilde{x}\&\widetilde{y}_2$, заданное на E^n, является отношением эквивалентности, разбивающим E^n на $2^{|\widetilde{x}|}$ классов, каждый из которых содержит $2^{r-|\widetilde{x}|}$ элементов. Для каждого i из $\widetilde{N}_{|x|}$ существует $\binom{|\widetilde{x}|}{i}$ различных классов, для представителей которых $\widetilde{y}$ верно $|\widetilde{x} \leftrightarrow \widetilde{y}| = i$. Следовательно, последняя сумма имеет вид

$$2^{r-|\widetilde{x}|} \sum_{i=0}^{|\widetilde{x}|} \binom{|\widetilde{x}|}{i} (p^2)^{|\widetilde{x}|-i} \cdot (1-p)^{2i} = 2^{r-|\widetilde{x}|} \cdot (1-2p+2p^2)^{\widetilde{x}}.$$

Положив $q = 2p - 2p^2$, согласно утверждению 7.1.10 получаем

$$\mathtt{P}(\xi_2 \notin \mathfrak{T}^{\mathtt{T}}_{V_1,V_2,r} | \xi_1 = T) \leqslant \sum_{\widetilde{x} \in E^{r-}_r} l^*_r\left(\widetilde{x}, D_1(r)\frac{m_1 m_2}{2^r}, \ln\ln r, r\right) \times$$

$$\times q^{r-|\widetilde{x}|} \cdot (1-q^{|\widetilde{x}|}) \leqslant D_1(r)\frac{m_1 m_2}{2^r}\sum_{i=0}^{r-1}\binom{r}{i}q^{r-i}\cdot(1-q^i) +$$

$$+ r\sum_{i=0}^{[r-\ln\ln r]}\binom{r}{i}q^{r-i}\cdot(1-q^i) \leqslant D_1(r)\frac{m_1 m_2}{2^r}(1-(1-q)^r)) +$$

$$+ r\left(\frac{erq}{\ln\ln r}\right)^{\ln\ln r} \leqslant_r 2D_1(r)\frac{m_1 m_2}{2^r}rp + r(rp)^{\ln\ln r}.$$

Следовательно, $p_2 \leqslant_r D(r)\dfrac{m_1 m_2}{2^r}rp + r(rp)^{\ln\ln r}$.

Утверждение 8.2.3 доказано. $\square$

Утверждение 8.2.4. а) *при* $r =]\ln m_1 m_2 - a\ln\ln m_1 m_2[$, $a \in (0, 2-\varepsilon)$ *и* $p \ll_r r^{-(1+a)}$

$$P(\xi_2 \in \mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r} | \xi_1 \in \mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r}) \ll_r 1,$$

б) *при* $r =]\ln m_1 m_2 - b\ln\ln\ln m_1 m_2[$, $b > 1+\varepsilon$ *и* $p \ll_r r^{-(1+\varepsilon)}$

$$P(\xi_2 \in \mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r} | \xi_1 \in \mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r}) \ll_r 1.$$

Доказательство. Докажем пункт а). Если $a > 0$ и $p \ll_r r^{-(1+a)}$, то $r(rp)^{\ln\ln r} + \dfrac{1}{\ln r} \ll_r 1$. Кроме того, найдется такая $\alpha(r) \in \mathcal{M}$, что $r^{1+a}p \ll_r \alpha(r)$ и такая $D(r) \in \mathcal{B}$, $D(r) < \ln\ln\ln\ln r$, что $D(r)\alpha^{1/2}(r) \in \mathcal{M}$. Тогда при $r = \ln m_1 m_2 - a\ln\ln\ln m_1 m_2$

$$D(r)\frac{m_1 m_2}{2^r}rp \leqslant D(r)(\ln m_1 m_2)^a rp \sim_r D(r)r^{1+a}p \leqslant \alpha^{1/2}(r) \ll_r 1.$$

Пункт б) доказывается аналогично.

Утверждение 8.2.4 доказано. $\square$

Утверждение 8.2.5. *Если выполнено одно из условий*:
а) $r =]\ln m_1 m_2 - a\ln\ln m_1 m_2[, a \in (0, 2-\varepsilon), p \ll_r (\ln m_1 m_2)^{-(1+a)}$,
б) $r =]\ln m_1 m_2 - b\ln\ln\ln m_1 m_2[, b > 1+\varepsilon, p \ll_r (\ln m_1 m_2)^{-(1+\varepsilon)}$, *то*

$$\varphi^{\nabla,\&}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{\nabla,j}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \varphi^{\nabla,\vee}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim}_n \binom{n}{r}\exp\left\{-\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\},$$

где значок ∇ *означает* «т», «тт», «кт» *или* «ктт».

Доказательство. Так как $r \sim_r \ln\ln m_1 m_2$, то из утверждения 8.2.4 следует, что

$$\mathtt{M}(\varphi^{T,1}_{V_1,V_2,n,r} - \varphi^{T,\&}_{V_1,V_2,n,r}) \ll_n \mathtt{M}\varphi^{T,1}_{V_1,V_2,n,r}.$$

Так как $\varphi^{T,1}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim_n} \mathtt{M}\varphi^{T,1}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim_n} \binom{n}{r} \exp\left\{-\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\}$, то

$$\mathtt{M}(\varphi^{T,1}_{V_1,V_2,n,r} - \varphi^{T,\&}_{V_1,V_2,n,r}) \ll_n \varphi^{T,1}_{V_1,V_2,n,r}$$

и

$$\varphi^{T,1}_{V_1,V_2,n,r} - \varphi^{T,\&}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\ll_n} \varphi^{T,1}_{V_1,V_2,n,r}.$$

Следовательно, $\varphi^{T,1}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim_n} \varphi^{T,\&}_{V_1,V_2,n,r}$. Так как

$$\varphi^{T,1}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim_n} \varphi^{T,2}_{V_1,V_2,n,r}$$

и

$$\varphi^{T,\vee}_{V_1,V_2,n,r} \leqslant \varphi^{T,\&}_{V_1,V_2,n,r} + (\varphi^{T,1}_{V_1,V_2,n,r} - \varphi^{T,\&}_{V_1,V_2,n,r}) + (\varphi^{T,2}_{V_1,V_2,n,r} - \varphi^{T,\&}_{V_1,V_2,n,r}),$$

то $\varphi^{T,\vee}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim_n} \varphi^{T,\&}_{V_1,V_2,n,r}$. и

$$\varphi^{T,\&}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim_n} \varphi^{T,j}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim_n} \varphi^{T,\vee}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim_n} \binom{n}{r} \exp\left\{-\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\}.$$

Пусть ∇-один из значков «тт», «кт», «ктт». Из утверждения 7.2.5, 7.4.6 следует, что $\varphi^{\nabla,j}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim_n} \varphi^{T,j}_{V_1,V_2,n,r}$.
Так как

$$\varphi^{\nabla,j}_{V_1,V_2,n,r} \leqslant \varphi^{\nabla,\vee}_{V_1,V_2,n,r} \leqslant$$
$$\leqslant \varphi^{\nabla,j}_{V_1,V_2,n,r} + \sum_{i=1}^{2} |\varphi^{\nabla,i}_{V_1,V_2,n,r} - \varphi^{T,i}_{V_1,V_2,n,r}| + (\varphi^{T,i}_{V_1,V_2,n,r} - \varphi^{T,\&}_{V_1,V_2,n,r}),$$

то $\varphi^{\nabla,\vee}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim_n} \varphi^{\nabla,j}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim_n} \binom{n}{r} \exp\left\{-\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\}, \quad j \in N_2$.

Аналогично доказывается, что $\varphi^{\nabla,\&}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim_n} \varphi^{\nabla,j}_{V_1,V_2,n,r}$

Утверждение 8.2.5 доказано. □

8.3. Неустойчивость множества всех тупиковых тестов

Если G — подграф графа G_{V_1,V_2}, то через $\mathcal{P}_j(G)$ будем обозначать множества вершин G, лежащих в $V_j \in N_2$. Через $\widetilde{G}$ обозначим такой подграф G_{V_1,V_2}, что $\mathcal{P}(\widetilde{G}) = V_1 \cup V_2$ и

$$X(\widetilde{G}) = (\mathcal{P}_1(G) \otimes V_2 \cup V_1 \otimes \mathcal{P}_2(G)) \setminus X(G).$$

Если Т — пара таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$, то через $G^*(T)$ обозначим подграф G_{V_1,V_2}, не имеющий изолированных вершин и такой, что $X(G^*(T)) = \widehat{T}^{-1}(\widetilde{\mathcal{E}}^r)$. Пару таблиц Т из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$ будем называть регулярной, если граф $G^*(T)$ состоит из неинцидентных друг другу ребер. Если $X \subseteq E^r$, то регулярную пару таблиц Т из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$ назовем X-регулярной, если $\widehat{T}(X(\widetilde{G}^*(T))) \cap X = 0$.

Множество регулярных пар таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$ обозначим через $\mathfrak{T}^R_{V_1,V_2,r}$, а множество X-регулярных пар таблиц — через $\mathfrak{T}^R_{V_1,V_2,r}(X)$.

Утверждение 8.3.1. *Если* $\ln m_1m_2 - 2\ln\ln m_1m_2 \leqslant r \leqslant \leqslant \ln m_1m_2 + 4\ln\ln m_1m_2$, *то*

$$|\mathfrak{T}^{\text{ТТ}}_{V_1,V_2,r} \cap \mathfrak{T}^R_{V_1,V_2,r}(E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r})| \sim_r |\mathfrak{T}^{\text{ТТ}}_{V_1,V_2,r}|.$$

Доказательство. Из способа перечисления тупиковых тестовых таблиц в доказательстве утверждения 7.2.8 видно, что для $\delta \in (0, 1/16)$ и всех пар таблиц Т из определенного в доказательстве множества $\mathfrak{T}^{\delta,\text{ТТ}}$ степень всех вершин $\mathcal{P}_2(G^*(T)))$ равна 1. Следуя доказательству утверждения 7.2.8 и учитывая, что в силу утверждения 7.1.3 $|E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r}| \leqslant_r r^{\ln\ln\ln r}$, получаем, что число пар таблиц из $\mathfrak{T}^{\delta,\text{ТТ}}$, для которых

$$\widehat{T}((\mathcal{P}_1(G^*(T)) \otimes V_2) \setminus X(G^*(T))) \cap E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r} = 0,$$

не меньше, чем

$$\sum_{r^4 \geqslant \nu_i \geqslant 1, i\in N_r} (m_1 - m_1^{1-\delta})^{\nu}(2^r - (r+1)m_1 - r^{4+\ln\ln\ln r})^{m_2-\nu} \times$$
$$\times \binom{m_2}{\nu_1}\binom{m_2-\nu_1}{\nu_2} \cdot \ldots \cdot \binom{m_2-\nu_1-\ldots-\nu_{r-1}}{\nu_r} \geqslant_r$$
$$\geqslant_r (1 - \frac{r^4+\ln\ln\ln r}{2^{r-1}})^{m_2} \cdot \sum_{r^4 \geqslant \nu_i \geqslant 1, i\in N_r} (m_1 - m_1^{1-\delta})(2^r - (r+1)m_1)^{\nu} \times$$
$$\times \binom{m_2}{\nu_1}\binom{m_2-\nu_1}{\nu_2} \cdot \binom{m_2-\nu_1-\ldots-\nu_{r-1}}{\nu_r} \sim_r$$
$$\sim_r 2^{r(m_1+m_2)} H(m_1m_2, r) \sim_r |\mathfrak{T}^{\text{ТТ}}_{V_1,V_2,r}|,$$

где $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_r$.

Если мы будем доказывать утверждения 7.2.8 и 7.2.9, поменяв V_1 и V_2 местами, то получим, что для почти всех пар таблиц T из $\mathfrak{T}^{\text{ТТ}}_{V_1,V_2,r}$ степень всех вершин из $\mathcal{P}_1(G^*))$ равна 1 и

$$\widehat{T}((V_1 \otimes \mathcal{P}_2(G^*(T))) \setminus X(G^*(T))) \cap E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r} = \varnothing.$$

Так как степень каждой вершины графа $G^*(T)$ равна 1, то он состоит из неинцидентных друг другу ребер и

$$|\mathcal{P}_1(G^*(T))| = |\mathcal{P}_2(G^*(T))| = |X(G^*(T))|.$$

Следовательно, почти все тупиковые тестовые пары таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$ являются $E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r}$-регулярными.

Утверждение 8.3.1 доказано. □

Если $T \in \mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$, то через $\widetilde{\mathcal{E}}(T)$ обозначим множество таких $\widetilde{x}$ из $\widetilde{\mathcal{E}}^r$, что $\widehat{T}^{-1}(\widetilde{x}) = 1$. Через $G_2(T)$ обозначим подграф G_{V_1,V_2}, не имеющий изолированных вершин и такой, что $X(G_2(T)) = \widetilde{\mathcal{E}}(T)$.

Положим для $\delta \in (0,1)$ $\mathfrak{T}^{\text{ТТ},\delta}_{V_1,V_2,r} = \left\{T \in \mathfrak{T}_{V_1,V_2,r} | \widetilde{\mathcal{E}}(T)| \geqslant \delta r\right\}$.

Утверждение 8.3.2. *Если $b \in (0,1)$, $\ln m_1m_2 + \ln b \leqslant r \leqslant$ $\leqslant r\ln m_1m_2 + 3\ln\ln m_1m_2$, то найдется такое $\varepsilon_1 \in (0,1)$, что* $\mathfrak{T}^{\text{ТТ},\varepsilon_1}_{V_1,V_2,r}| \sim_r |\mathfrak{T}^{\text{ТТ}}_{V_1,V_2,r}|$.

Доказательство. Воспользуемся верхней оценкой числа тупиковых тестов пар таблиц из доказательства утверждения 7.2.9, где для $\delta \in (0,1/16)$ было определено такое множество $\mathfrak{T}^{\delta,\text{ТТ}}_2$, что $\mathfrak{T}^{\delta,\text{ТТ}}_2 \subseteq \mathfrak{T}^{\text{ТТ}}_{V_1,V_2,r}$, $|\mathfrak{T}^{\delta,\text{ТТ}}_2| \sim_r |\mathfrak{T}^{\text{ТТ}}_{V_1,V_2,r}|$ и

$$|\mathfrak{T}^{\delta,\text{ТТ}}_2| \leqslant_r (1 + 2^{-\frac{\delta r}{4}}) \cdot 2^{r(m_1+m_2)} \cdot \exp\left\{-\frac{(r+1)m_1m_2}{2^r}\right\} \times$$
$$\times \sum_{m_2 \geqslant \nu_i \geqslant 1, i \in N_r} m_1^{\nu_i}(2^r - (r+1)m_1)^{-\nu_i}\binom{m_2}{\nu_i}.$$

Положим $\mathfrak{T}^{\delta,\text{ТТ}}_{2,t} = \{T \in \mathfrak{T}^{\delta,\text{ТТ}}_2 : |\widehat{T}^{-1}(\widetilde{1}^r_i)| > 1$ для $i \in N_t\}, t \in N_{r-1}$. Тогда

$$|\mathfrak{T}^{\delta,\text{ТТ}}_{2,t}| \leqslant_r (1 + 2^{-\frac{\delta r}{4}}) \cdot 2^{r(m_1+m_2)} \cdot \exp\left\{-\frac{(r+1)m_1m_2}{2^r}\right\} \times$$
$$\times \sum_{\substack{m_2 \geqslant \nu_i \geqslant 1, i \in N_t \\ m_2 \geqslant \nu_i \geqslant 1, i \in N_r \setminus N_t}} \prod_{i=1}^{r} m_1^{\nu_i}(2^r - (r+1)m_1)^{-\nu_i}\binom{m_2}{\nu_i} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{r(m_1+m_2)} \cdot \exp\left\{-\frac{(r+1)m_1m_2}{2^r}\right\} \cdot \left(1 + \frac{m_1}{2^r - (r+1)m_1}\right)^{r-t} \times$$
$$\times \left(\left(1 + \frac{m_1}{2^r - (r+1)m_1}\right)^{m_2} - 1 - \frac{m_1m_2}{2^r}\right)^t \leqslant_r$$

$$\leqslant_r 2^{r(m_1+m_2)+1} \cdot \exp\left\{-\frac{(r+1)m_1m_2}{2^r}\right\} \times$$

$$\times \left(\exp\left\{\frac{m_1m_2}{2^r} + 2^{-\frac{r}{3}}\frac{m_1m_2}{2^r}\right\} - 1\right)^{r-t} \times$$

$$\times \left(\exp\left\{\frac{m_1m_2}{2^r} + 2^{-\frac{r}{3}}\frac{m_1m_2}{2^r}\right\} - 1 - \frac{m_1m_2}{2^r}\right)^t \leqslant_r$$

$$\leqslant_r 2^{r(m_1+m_2)+1} \cdot \exp\left\{-\frac{m_1m_2}{2^r}\right\} \times$$

$$\times \left(1 - \exp\left\{\frac{m_1m_2}{2^r}\right\} + 2^{-\frac{r}{4}}\frac{m_1m_2}{2^r}\right)^{r-t} \times$$

$$\times \left(1 - \exp\left\{\frac{m_1m_2}{2^r}\right\} - \frac{m_1m_2}{2^r}\exp\left\{-\frac{m_1m_2}{2^r}\right\} + 2^{-\frac{r}{4}}\frac{m_1m_2}{2^r}\right)^t \leqslant_r$$

$$\leqslant_r 2^{r(m_1+m_2)+1} \cdot H(m_1m_2, r) \times$$

$$\times \left(1 + 2^{-\frac{r}{4}}\frac{m_1m_2}{2^r} \Big/ \left(1 - \exp\left\{\frac{m_1m_2}{2^r}\right\}\right)\right)^r \times$$

$$\times \left(1 - \frac{m_1m_2}{2^r}\exp\left\{-\frac{m_1m_2}{2^r}\right\} \Big/\right.$$

$$\left.\Big/ \left(1 - \exp\left\{-\frac{m_1m_2}{2^r}\right\} + 2^{-\frac{r}{4}}\frac{m_1m_2}{2^r}\right)\right)^t.$$

В утверждении 7.2.9 доказано, что

$$\left(1 + 2^{-\frac{r}{4}}\frac{m_1m_2}{2^r} \Big/ \left(1 - \exp\left\{\frac{m_1m_2}{2^r}\right\}\right)\right)^t \sim_r 1.$$

Так как $2^{-\frac{r}{4}}\frac{m_1m_2}{2^r} \leqslant_r 1 - \exp\left\{-\frac{m_1m_2}{2^r}\right\}$, то

$$\left(1 - \frac{m_1m_2}{2^r}\exp\left\{-\frac{m_1m_2}{2^r}\right\} \Big/ \left(1 - \exp\left\{-\frac{m_1m_2}{2^r}\right\} + 2^{-\frac{r}{4}}\frac{m_1m_2}{2^r}\right)\right)^t \leqslant_r$$

$$\leqslant_r \left(1 - \frac{m_1m_2}{2^r} \Big/ \left(\exp\left\{\frac{m_1m_2}{2^r}\right\} - 1\right)\right)^t.$$

Функция $y = \dfrac{x}{e^x - 1}$ монотонно убывает на $(0, +\infty)$ потому, что $y'(x) = (e^x - 1 - xe^x)/(e^x - 1)^2$, $y'(0) = 0$ и $y_1'(x) = e^x - e^x - e^x \cdot x < 0$, где $y_1(x) = e^x - 1 - xe^x$, следовательно,

$$\left(1 - \frac{m_1m_2}{2^r} \Big/ \left(\exp\left\{\frac{m_1m_2}{2^r}\right\} - 1\right)\right)^t < \left(1 - \frac{b}{2(e^b - 1)}\right)^t.$$

Обозначив $\delta(b) = 1 - \dfrac{b}{2(e^b-1)}$, $\delta(b) \in (0,1)$, получаем

$$|\mathfrak{T}_{2,t}^{\delta,\text{TT}}| \leqslant_r |\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}^{\text{TT}}| \cdot 2\delta(b)^t.$$

Через $\mathfrak{T}_{2,t}^{\delta,\text{TT},*}$ обозначим множество таблиц T из $\mathfrak{T}_2^{\delta,\text{TT}}$, для которых найдутся такие $j_1,\ldots,j_t$ из N_r, $1 \leqslant j_1 < j_2 < \ldots < j_t \leqslant r$, что $|\widehat{T}^{-1}(\widetilde{1}_{j_i}^r)| > 1$, $i \in N_t$. Очевидно, что $|\mathfrak{T}_{2,t}^{\delta,\text{TT},*}| \leqslant_r |\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}^{\text{TT}}|\binom{r}{t} \cdot 2\delta(b)^t$. Из утверждения 7.1.1 следует, что при $t > r(1-\varepsilon_2)$, $\varepsilon_2 \in (0,1/2)$

$$2\binom{r}{t} \cdot \delta(b)^t \leqslant_r 2 \cdot 2^{\psi(\varepsilon_2)r}\delta(b)^{r/2} = 2(2^{\psi(\varepsilon_2)}\sqrt{\delta(b)}\,)^r.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\psi(x) = 0$, то найдется такое $\varepsilon_2(b) \in (0,1/2)$, что $2^{\psi(\varepsilon_2(b))} \cdot \sqrt{\delta(b)} < 1$. Положив $\varepsilon_1 = \varepsilon_2(b)$ и $t =]r(1-\varepsilon_1)[$ имеем $|\mathfrak{T}_{2,t}^{\delta,\text{TT},*}| \ll_r |\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}^{\text{TT}}|$ и

$$|\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}^{\text{TT},\varepsilon_1}| \geqslant |\mathfrak{T}_2^{\delta,\text{TT}} \setminus \mathfrak{T}_{2,t}^{\delta,\text{TT},*}| \sim_r |\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}^{\text{TT}}|.$$

Утверждение 8.3.2 доказано. □

Утверждение 8.3.3. *Если* $\ln m_1m_2 + 3\ln\ln m_1m_2 < r \leqslant r_2^{\varepsilon}(n, m_1m_2)$ *то для любого* $\varepsilon_1 \in (0,1)$ $|\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}^{\text{TT},\varepsilon_1}| \sim_r |\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}^{\text{TT}}|$ *и*

$$|\mathcal{F}_{V_1,V_2,r}^{\text{TT}+}(1, \widetilde{\mathcal{E}}^r, \ln r, E_{r-\ln\ln\ln r}^{r+})| \ll_r |\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}^{\text{TT}}|.$$

Доказательство. Воспользуемся нижней оценкой числа тупиковых тестовых таблиц из утверждения 7.2.8. Если $\mathfrak{T}_1^{\text{TT}}$ — множество таких пар таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}^{\text{TT}}$, что $|\mathcal{P}_2(G^*(T))| = r$, а $\mathfrak{T}^{\delta,\text{TT}}$, $\mathfrak{T}^{\delta,\text{TT}} \leqslant \mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}^{\text{TT}}$, $\delta \in (0,1/16)$, — множество, определенное в доказательстве утверждения 7.2.8, то

$$|\mathfrak{T}_1^{\text{TT}} \cap \mathfrak{T}^{\delta,\text{TT}}| \geqslant_r 2^{rm_1}(1-\exp\{-m_1^{1-3\delta}\})(m_1 - m_1^{1-\delta})^r \times$$
$$\times (2^r - (r+1)m_1)^{m_2-r}\prod_{i=0}^{r}(m_2 - i) \sim_r$$
$$\sim_r 2^{r(m_1+m_2)-r^2}m_1^r m_2^r \sim_r |\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}^{\text{TT}}|.$$

Для любой пары таблиц T из $\mathfrak{T}_1^{\text{TT}}$ и $\widetilde{x}$ из $\widetilde{\mathcal{E}}^r$ $|\widehat{T}^{-1}(\widetilde{x})| = 1$, следовательно, для любого $\varepsilon_1 \in (0,1)$ $|\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}^{\text{TT},\varepsilon_1}| \sim_r |\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}^{\text{TT}}|$. Так как $\mathcal{F}^{\text{TT}+}_{V_1,V_2,r}(1,\widetilde{\varepsilon}_r) \leqslant \mathfrak{T}^{\text{TT}}_{V_1,V_2,r} \setminus \mathfrak{T}^{\text{TT}}_1$, то $\mathcal{F}^{\text{TT}+}_{V_1,V_2,r}(1,\widehat{\varepsilon}_r) \ll_r |\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{V_1,V_2,r}|$. Учитывая утверждение 8.3.1, получаем

$$|(\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{V_1,V_2,r} \setminus \mathcal{F}^{\text{TT}+}_{V_1,V_2,r}(1,\widetilde{\varepsilon}_r)) \cap \mathfrak{T}^{R}_{V_1,V_2,r}(E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r})| \sim_r |\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{V_1,V_2,r}|. \quad (8.1)$$

Обозначим через $\Gamma^r_{V_1,V_2}$ множество подграфов G графа G_{V_1,V_2}, для которых выполнено $|X(G)| = r$, $|\mathcal{P}_1(G)| = |\mathcal{P}_2(G)| = r$. Через $\mathfrak{T}^{\text{TT}}_G$ обозначим множество таких пар таблиц T из $\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{V_1,V_2,r}$, что $G^*(T) = G$. Очевидно, что для любых G_1, G_2 из Γ^{V_1,V_2}_r $|\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{G_1}| = |\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{G_2}|$ и

$$|\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{G_1} \cap \mathfrak{T}^{R}_{V_1,V_2,r}(E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r})| = |\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{V_1,V_2,r} \cap \mathfrak{T}^{R}_{V_1,V_2,r}(E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r})|.$$

Из (8.1) следует, что

$$\sum_{G\in\Gamma^r_{V_1,V_2}} |\mathfrak{T}^{\text{TT}}_G| \sim_r |\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{V_1,V_2,r}|$$

и для любого G из $\Gamma^r_{V_1,V_2}$ $|\mathfrak{T}^{\text{TT}}_G \cap \mathfrak{T}^{R}_{V_1,V_2,r}(E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r})| \sim_r |\mathfrak{T}^{\text{TT}}_G|$. Через $\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{G,j}(\widetilde{x}), \widetilde{x} \in E^r \setminus \mathcal{E}^r, j \in N_2$, обозначаем множество пар таблиц T из $\mathfrak{T}^{\text{TT}}_G$, для которых число вершин b из $V_j \setminus \mathcal{P}_j(G)$, что $T(b) \in T(V_{3-j}) \leftrightarrow \widetilde{x}$, больше, чем $\sqrt{\ln r}$. Легко видеть, что

$$|\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{G,2}(\widetilde{x})| \leqslant r!\, 2^{r^2} \cdot 2^{r(m_1-r)} \left(\frac{m_2-r}{\sqrt{]\ln r[}}\right)^{]\sqrt{\ln r}\,[} \cdot m_1^{]\ln r[} \cdot 2^{r(m_2-r-]\ln r[)} \leqslant_r$$
$$\leqslant_r r!2^{r(m_1+m_2)-r^2} \left(\frac{m_1m_2}{2^r}\right)^{\sqrt{]\ln r[}} \leqslant_r r!\, 2^{r(m_1+m_2)-r^2} \cdot r^{-2\sqrt{\ln r}}.$$

Аналогично, $|\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{G,1}(\widetilde{x}) \leqslant_r r!2^{r(m_1+m_2)-r^2} \cdot r^{-2\sqrt{\ln r}}$.

Обозначим $\mathfrak{T}^{\text{TT},*}_G = \bigcup\limits_{\widetilde{x}\in E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r}\setminus\mathcal{E}^r} \bigcup\limits_{j\in N_2} \mathfrak{T}^{\text{TT}}_{G,j}(\widetilde{x})$.

Согласно утверждению 7.1.3 имеем

$$|\mathfrak{T}^{\text{TT},*}_G| \leqslant 2|E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r}|\, r!\, 2^{r(m_1+m_2)-r^2} \cdot r^{-2\sqrt{\ln r}} \leqslant_r$$
$$\leqslant_r r!2^{r(m_1+m_2)-r^2} \cdot r^{-\sqrt{\ln r}}.$$

Если $\widetilde{x} \in E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r} \setminus \mathcal{E}^r$ и $E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r}$ — регулярная пара таблиц T из $\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{V_1,V_2,r}$ — не принадлежит ни $\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{G,1}(\widetilde{x})$, ни $\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{G,2}(\widetilde{x})$, то $|\widehat{T}^{-1}(\widetilde{x})| \leqslant \ln r$. Следовательно,

$$\mathfrak{T}^{\text{TT}}_G \cap \mathfrak{T}^{R}_{V_1,V_2,r}(E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r}) \cap \mathcal{F}^{\text{TT}+}_{V_1,V_2,r}(\ln r, E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r}) \leqslant \mathfrak{T}^{\text{TT},*}_G.$$

Учитывая (8.1), получаем

$$\mathcal{F}^{\text{TT}+}_{V_1,V_2,r}(\ln r, E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r}) \leqslant \Big(\bigcup_{G\in\Gamma^r_{V_1,V_2}} \mathfrak{T}^{\text{TT},*}_G\Big)\bigcup$$
$$\bigcup(\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{V_1,V_2,r} \setminus \mathfrak{T}^{R}_{V_1,V_2,r}(E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r}))\bigcup \mathcal{F}^{\text{TT}+}_{V_1,V_2,r}(1, \widetilde{\mathcal{E}}^r)$$

и, так как

$$\Big|\bigcup_{G\in\Gamma^r_{V_1,V_2}} \mathfrak{T}^{\text{TT},*}_G\Big| \leqslant r!\binom{m_1}{r}\binom{m_2}{r} r! 2^{r(m_1+m_2)-r^2}\cdot r^{-\sqrt{\ln r}} \leqslant$$
$$\leqslant 2^{r(m_1+m_2)}\left(\frac{m_1m_2}{2^r}\right)^r r^{-\sqrt{\ln r}} \ll_r |\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{V_1,V_2,r}|,$$

то

$$|\mathcal{F}^{\text{TT}+}_{V_1,V_2,r}(\ln r, E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r})| \ll_r |\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{V_1,V_2,r}|.$$

Так как

$$\mathcal{F}^{\text{TT}+}_{V_1,V_2,r}(1, \widetilde{\mathcal{E}}^r, \ln r, E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r}) \subseteq$$
$$\subseteq \mathcal{F}^{\text{TT}+}_{V_1,V_2,r}(1, \widetilde{\mathcal{E}}^r) \cup \mathcal{F}^{\text{TT}+}_{V_1,V_2,r}(\ln r, E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r}),$$

то $\mathcal{F}^{\text{TT}+}_{V_1,V_2,r}(1, \widetilde{\mathcal{E}}^r, \ln r, E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r}) \ll_r |\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{V_1,V_2,r}|$.

Утверждение 8.3.3 доказано. □

Утверждение 8.3.4. *Если* $\ln m_1m_2 + \ln b \leqslant r < \ln m_1m_2 + 3\ln\ln m_1m_2$, $b \in (0,1)$, *то*

$$|\mathcal{F}^{\text{TT}+}_{V_1,V_2,r}(\ln r, E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r})| \ll_r |\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{V_1,V_2,r}|.$$

Доказательство. Возьмем $\delta \in (0, 1/16)$ и обозначим через $\mathfrak{T}^{\delta,\text{TT},*}_z$ множество таких пар таблиц T из $\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{V_1,V_2,r}$, что $T_1 \in \mathfrak{T}^{\delta}_{V_1,r}$ и $A_2 \cap D_2 = \varnothing$, где

$$D_2 = \bigcup_{\widetilde{x}\in E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r}\setminus\{\widetilde{1}^r\}} ((A_1 \leftrightarrow \widetilde{x}) \setminus (\mathcal{U}_0 \leftrightarrow \widetilde{x})).$$

Из утверждений 7.1.3, 7.2.2 следует, что $|D_2| \leqslant_r r^{\ln\ln\ln r}\cdot m_1^{1-\delta} \leqslant_r \leqslant_r m_1^{1-\delta/2}$. Проделав рассуждения, аналогичные доказательствам утверждений 7.2.8, 7.2.9, можно показать, что $\mathfrak{T}^{\delta,\text{TT},*}_2 \sim_r |\mathfrak{T}^{\text{TT}}_{V_1,V_2,r}|$.

Через $\mathfrak{T}_2^x$ обозначим множество пар таблиц T из $\mathfrak{T}_2^{\delta,\text{тт},*}$, для которых число таких вершин a из V_2, что $T(a) \in A_1 \leftrightarrow \widetilde{x}$, больше $\ln r$. Для $\widetilde{x}$ из $E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r} \setminus \mathcal{E}^r$ выполнено

$$|\mathfrak{T}_2^{\widetilde{x}}| \leqslant 2^{rm_1} \sum_{\nu_i \geqslant 1, i \in N_r} m_1^{\nu}(2^r - (r+1)(m_1 - m_1^{1-\delta}))^{m_2-\nu-]\ln r[} \times$$

$$\times \binom{m_2}{\nu_1} \cdot \ldots \cdot \binom{m_2}{\nu_r} \binom{m_2}{]\ln r[} \leqslant_r 2^{r(m_1+m_2)} H(m_1 m_2, r)(1+2^{-\frac{\delta r}{4}}) \times$$

$$\times \left(\frac{m_1}{2^r - (r+1)m_1}\right)^{]\ln r[} \cdot \binom{m_2}{]\ln r[} \leqslant_r$$

$$\leqslant_r |\mathfrak{T}^{\text{тт}}_{V_1,V_2,r}| \cdot 2\left(\frac{em_1m_2}{2^r]\ln r[}\right)^{]\ln r[} \leqslant_r |\mathfrak{T}^{\text{тт}}_{V_1,V_2,r}| \exp\left\{-\frac{1}{2}\ln r \cdot \ln\ln r\right\},$$

где $\nu = \nu_1 + \ldots + \nu_r$. Для $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{E}}^r$, $\widetilde{x} = \widetilde{1}^r_j$ аналогично получаем

$$\mathfrak{T}_2^{\widetilde{x}} \leqslant 2^{rm_1} \sum_{\nu_i \geqslant \ln r, \nu_i \geqslant 1, i \in N_r \setminus \{j\}} m_1^{\nu}(2^r - (r+1)(m_1 - m_1^{1-\delta}))^{m_2-\nu} \times$$

$$\times \binom{m_2}{\nu_1} \cdot \ldots \cdot \binom{m_2}{\nu_r} \leqslant_r$$

$$\leqslant_r 2^{r(m_1+m_2)+1} \cdot H(m_1m_2, r)\left(\frac{m_1}{2^r - (r+1)m_1}\right)^{]\ln r[} \times$$

$$\times \binom{m_2}{]\ln r[} \Big/ \left(1 - \exp\left\{-\frac{m_1m_2}{2^r}\right\}\right) \leqslant$$

$$\leqslant_r |\mathfrak{T}^{\text{тт}}_{V_1,V_2,r}| \cdot 2\left(\frac{em_1m_2}{2^r]\ln r[}\right)^{]\ln r[} r^4 \leqslant_r$$

$$\leqslant_r |\mathfrak{T}^{\text{тт}}_{V_1,V_2,r}| \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\ln\ln\ln r\right\}.$$

Используя утверждение 7.1.3, получаем

$$\left|\bigcup_{\widetilde{x} \in E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r} \setminus \{\widetilde{1}^r\}} \mathfrak{T}_2^{\widetilde{x}}\right| \leqslant_r$$

$$\leqslant_r |\mathfrak{T}^{\text{тт}}_{V_1,V_2,r}| \cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\ln r \cdot \ln\ln r\right\} \cdot r^{\ln\ln\ln r} \ll_r |\mathfrak{T}^{\text{тт}}_{V_1,V_2,r}|. \quad (8.2)$$

Так как для любой пары таблиц T из $\mathfrak{T}_2^{\delta,\text{тт},*}$, $\widetilde{x}$ из $E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r} \setminus \left\{\widetilde{1}^r\right\}$ и a_2 из V_2, такого, что $T(a_2) \in A_1 \leftrightarrow \widetilde{x}$ существует единственная вершина $a_1 \in V_1$, такая, что $\widehat{T}((a_1, a_2)) = \widetilde{x}$, то

$$\mathcal{F}^{\text{тт}+}_{V_1,V_2,r}(\ln r, E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r}) \cap \mathfrak{T}_2^{\delta,\text{тт},*} \subseteq \bigcup_{\widetilde{x}\in E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r}\setminus\{\widetilde{1}^r\}} \mathfrak{T}_2^{\widetilde{x}}.$$

Учитывая (8.2), получаем

$$|\mathcal{F}^{\text{тт}+}_{V_1,V_2,r}(\ln r, E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r}) \ll_r |\mathfrak{T}^{\text{тт}}_{V_1,V_2,r}|.$$

Утверждение 8.3.4 доказано. □

Утверждение 8.3.5. *Если* $\ln m_1 m_2 + \ln b \leqslant r \leqslant r_2^{\varepsilon}(n, m_1 m_2), b \in \in (0,1)$, *то*

$$|\mathcal{F}^{\text{тт}+}_{V_1,V_2,r}(r^2, E^r)| \ll_r |\mathfrak{T}^{\text{тт}}_{V_1,V_2,r}|.$$

Доказательство. Если T_1 — таблица из $\mathfrak{T}_{V_1,r}, \widetilde{x} \neq \widetilde{1}^r$, то $|A_1 \leftrightarrow \widetilde{x}| \leqslant m_1$. Обозначим через $\mathcal{F}^{\text{тт}+}_{V_2,r}(T_1, \widetilde{x}, i)$ множество таблиц T_2 из $\mathfrak{T}_{V_2,r}$, для которых число элементов a из V_2 таких, что $\widetilde{x} \in A_1 \leftrightarrow T_2(b)$, не меньше i. Понятно, что

$$|\mathcal{F}^{\text{тт}+}_{V_2,r}(T_1, \widetilde{x}, r)| \leqslant m_1^r \binom{m_2}{r} 2^{r(m_2-r)} \leqslant 2^{r(m_2-r)} \left(\frac{e m_1 m_2}{r 2^r}\right)^r.$$

Если $r > \ln m_1 m_2 + \dfrac{3}{2}\ln\ln m_1 m_2$, то аналогично утверждению 7.2.10 получаем $\left(\dfrac{m_1 m_2}{2^r}\right)^r \sim_r H(m_1 m_2, r)^r$ и $|\mathcal{F}^{\text{тт}+}_{V_2,r}(T_1, \widetilde{x}, r)| \leqslant \leqslant_r 2^{r m_2} H(m_1 m_2, r) \cdot r^{-5/2}$.

Если $r \geqslant \ln m_1 m_2 + \ln b$, то $\exp\left\{-\dfrac{m_1 m_2}{2^r}\right\} \geqslant \exp\left\{-2^{-b}\right\} \geqslant \geqslant_r \dfrac{1}{r}$. Если $\ln m_1 m_2 + \ln b \leqslant r \leqslant \ln m_1 m_2 + (1-2\delta)\ln\ln m_1 m_2$, где $\delta \in (0, 1/64)$, то

$$\left(\frac{e m_1 m_2}{r^{1-\delta} 2^r}\right)^r \leqslant \left(\frac{e}{r^{1-\delta} b}\right)^r \leqslant_r$$

$$\leqslant_r r^{-r(1-2\delta)} \leqslant_r \left(\frac{1}{2}(\ln m_1 m_2)^{1-2\delta}\right)^{-r} \leqslant_r \left(1 - \exp\left\{-\frac{m_1 m_2}{2^r}\right\}\right)^r.$$

Если $\ln m_1 m_2 + (1-2\delta)\ln\ln m_1 m_2 \leqslant r \leqslant \ln m_1 m_2 + \frac{3}{2}\ln\ln m_1 m_2$, то

$$\left(\frac{em_1m_2}{r^{1-\delta}2^r}\right) \leqslant_r (r^{2-4\delta})^{-r} \leqslant_r (2r^{3/2})^{-r} \leqslant_r$$
$$\leqslant_r \left(\frac{3}{2}(\ln m_1 m_2)^{\frac{3}{2}}\right)^{-r} \leqslant_r \left(1-\exp\left\{-\frac{m_1m_2}{2^r}\right\}\right)^r.$$

То есть, при $\ln m_1 m_2 + \ln b \leqslant r \leqslant \ln m_1 m_2 + \frac{3}{2}\ln\ln m_1 m_2$

$$|\mathcal{F}^{\mathtt{TT}+}_{V_2,r}(T_1,\widetilde{x},r)| \leqslant 2^{rm_2}\cdot r^{-\delta r}\cdot r\cdot H(m_1m_2,r) \leqslant_r$$
$$\leqslant_r, 2^{rm_2}H(m_1m_2,r)\cdot r^{-\frac{\delta r}{2}}.$$

Обозначим через $\mathcal{F}^{\mathtt{TT}+}_{V_1,V_2,r,2}(r,E^r)$ множество пар таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$, для которых найдется $\widetilde{x}$ из E^r такой, что $T_2 \in \mathcal{F}^{\mathtt{TT}+}_{V_2,r}(T_1,\widetilde{x},r)$. Имеем

$$|\mathcal{F}^{\mathtt{TT}+}_{V_1,V_2,r,2}(r,E^r)| \leqslant_r 2^{rm_1}\cdot 2^r\cdot^{-rm_1}\cdot|\mathfrak{T}^{\mathtt{TT}}_{V_1,V_2,r}|\cdot r^{-\frac{\delta r}{2}} \ll_r |\mathfrak{T}^{\mathtt{TT}}_{V_1,V_2,r}|.$$

Аналогичным образом определим множества $\mathcal{F}^{\mathtt{TT}+}_{V_1,r}(T_2,\widetilde{x},r)$ и $\mathcal{F}^{\mathtt{TT}+}_{V_1,V_2,r,1}(r,E^r)$ и получим $|\mathcal{F}^{\mathtt{TT}+}_{V_1,V_2,r,1}(r,E^r)| \ll_r |\mathfrak{T}^{\mathtt{TT}}_{V_1,V_2,r}|$. Если T не принадлежит ни одному из этих множеств $\mathcal{F}^{\mathtt{TT}+}_{V_1,V_2,r,j}(r,E^r)$, $j \in N_2$, то для любого $\widetilde{x} \in E^r$, $j \in N_2$ число вершин $a \in V_j$, инцидентных ребрам γ графа G_{V_1,V_2} таким образом, что $\widehat{T}(\gamma) = \widetilde{x}$, не превосходит r. Следовательно,

$$\mathcal{F}^{\mathtt{TT}+}_{V_1,V_2,r}(r^2,E^r) \subseteq \bigcup_{j=1}^{2} \mathcal{F}^{\mathtt{TT}+}_{V_1,V_2,r,j}(r,E^r)$$

и $|\mathcal{F}^{\mathtt{TT}+}_{V_1,V_2,r}(r^2,E^r)| \ll_r |\mathfrak{T}^{\mathtt{TT}}_{V_1,V_2,r}|$.

Утверждение 8.3.5 доказано. □

Пусть $\delta \in (0,1)$. Обозначим через $\mathcal{F}^*_\delta$ множество

$$(\mathfrak{T}^{\mathtt{TT},\delta}_{V_1,V_2,r}) \cap \mathfrak{T}^R_{V_1,V_2,r}(E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r})) \setminus \mathcal{F}^{\mathtt{TT}+}_{V_1,V_2,r}(\ln r, E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r}, r^2, E^r).$$

Из утверждений 8.3.1–8.3.5 следует, что найдутся такие $\delta \in (0,1)$ и $\alpha^*_\delta(r) \in \mathcal{M}$, что $|\mathcal{F}^*_\delta| \sim_r |\mathfrak{T}^{\mathtt{TT}}_{V_1,V_2,r}|$ и

$$|\mathfrak{T}^{\mathtt{TT}}_{V_1,V_2,r} \setminus \mathcal{F}^*_\delta| \ll_r \alpha^*_\delta(r)|\mathfrak{T}^{\mathtt{TT}}_{V_1,V_2,r}|.$$

Если T — регулярная пара таблиц из $\mathfrak{T}^{\mathrm{TT}}_{V_1,V_2,r}$, то обозначим через $G_3(T)$ такой подграф графа G_{V_1,V_2}, что $\mathcal{P}(G_3(T)) = V_1 \cup V_2$ и

$$X(G_3(T)) = (\mathcal{P}_1(G_2(T)) \otimes V_2 \cup V_1 \oplus \mathcal{P}_2(G_2(T))) \setminus X(G_2(T)).$$

Через $G_4(T)$ обозначим граф $G_{V_1 \setminus \mathcal{P}_1(G_2(T)), V_2 \setminus \mathcal{P}_2(G_2(T))}$.

Утверждение 8.3.6. *Если* $\ln m_1 m_2 + \ln b \leqslant r \leqslant r_2^{\varepsilon}(n, m_1 m_2), b \in \in (0,1)$, *то при* $\exp\{-\ln r - \ln r / \ln\ln\ln\ln r\} \geqslant p \gg {}_r r^{-}2$ *найдутся такие* $\delta \in (0,1)$ *и* $\alpha^*_\delta \in \mathcal{M}$, *что*

$$\mathcal{P}(\xi_2 \in \mathfrak{T}^{\mathrm{TT}}_{V_1,V_2,r} | \xi_1 \in \mathfrak{T}^{\mathrm{TT}}_{V_1,V_2,r}) \leqslant_r$$
$$\leqslant_r (1-p)^{\delta r^2} + 3rp\ln r + r^3 (rp)^{\ln\ln\ln r - 1} + \alpha^*_\delta(r).$$

Доказательство. Аналогично утверждению 8.2.3 имеем

$$\mathsf{P}(\xi_2 \in \mathfrak{T}^{\mathrm{TT}}_{V_1,V_2,r} | \xi_1 \in \mathfrak{T}^{\mathrm{TT}}_{V_1,V_2,r}) \leqslant p_1 + p_2,$$

где $p_1 = \mathsf{P}(\xi_1 \in \mathfrak{T}^{\mathrm{TT}}_{V_1,V_2,r} \setminus \mathcal{F}^*_\delta)$ и $p_2 = \mathcal{P}(\xi_2 \in \mathfrak{T}^{\mathrm{TT}}_{V_1,V_2,r} | \xi_1 \in \mathcal{F}^*_\delta)$.

Существует $\alpha^*_\delta(r)$ из $\mathcal{M}$ такое, что

$$p_1 = |\mathfrak{T}^{\mathrm{TT}}_{V_1,V_2,r} \setminus \mathcal{F}^*_\delta| / |\mathfrak{T}^{\mathrm{TT}}_{V_1,V_2,r}| \leqslant {}_\alpha \alpha^*_\delta(r).$$

Если $T \in \mathcal{F}^*_\delta$, то существует такое множество $\widetilde{\mathcal{E}}(T)$, $\widetilde{\mathcal{E}}(T) \subseteq \widetilde{\mathcal{E}}^r$, $|\widetilde{\mathcal{E}}(T)|| \geqslant \delta r$, что для любого $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{E}}(T)$ $|\widehat{T}^{-1}(\widetilde{x})| = 1$, и граф $G_2(T)$ такой, что $X(G_2(T)) = |\widehat{T}^{-1}(\widetilde{x})| = 1$, граф $G_2(T)$ такой, что $X(G_2(T)) = \widehat{T}^{-1}(\widetilde{\mathcal{E}}(T))$, состоит из неидентичных друг другу ребер. Если $T \in \mathcal{F}^*_\delta$, то

$$\mathsf{P}(\xi_2 \in \mathfrak{T}^{\mathrm{TT}}_{V_1,V_2,r} | \xi_1 = T) \leqslant p_{21}(T) + p_{22}(T) + p_{23}(T),$$

где

$$p_{21}(T) = \mathsf{P}(\widehat{\xi}_2(X(G_2(T))) = \widetilde{\mathcal{E}}(T) | \xi_1 = T),$$
$$p_{22}(T) = \mathsf{P}(\widehat{\xi}_2(X(G_3(T))) \cap \widetilde{\mathcal{E}}(T) \neq 0 | \xi_1 = T),$$
$$p_{23}(T) = \mathsf{P}(\exists \widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{E}}(T)) \text{ такое, что } \widetilde{x} \notin \widehat{\xi}_2(X(G_2(T))) \text{ и}$$
$$\widetilde{x} \in \widehat{\xi}_2(X(G_4(T))) | \xi_1 = T).$$

Положим $q = 2p - 2p^2$. Тогда

$$p_{21}(T) \leqslant \mathsf{P}(\forall \gamma \in X(G_2(T)) \text{ выполнено } \widehat{\xi}_2(\gamma) = \widetilde{\xi}_1(\gamma) | \xi_1 = T) +$$
$$+ \mathsf{P}(\exists \gamma \in X(G_2(T)) \text{ такое, что } + \mathsf{P}(\widehat{\xi}_2 \in \widehat{\xi}_1(X(G_2(T))) \setminus \{\gamma\} | \xi_1 = T).$$

В утверждении 8.2.4 доказано, что для $\gamma \in X(G_{V_1,V_2})$

$$\mathsf{P}(\widehat{\xi}_2(\gamma) = \widetilde{z} | \xi_1 = T, \widehat{\xi}_1(\gamma) = \widetilde{x}) = q^{\rho(\widetilde{z},\widetilde{x})} \cdot (1-q)^{r - \rho(\widetilde{z},\widetilde{x})}.$$

Следовательно, так как $\forall \widetilde{x},\ \widetilde{y} \in \widetilde{\mathcal{E}}(T),\ \widetilde{x} \neq \widetilde{y}, \rho(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = 2$, то

$$p_{21}(T) \leqslant (1-q)^{r\cdot|\widetilde{\mathcal{E}}(T)|} + |\widetilde{\mathcal{E}}(T)| \cdot |\widetilde{\mathcal{E}}(T)| \cdot g^2(1-q)^{r-2} \leqslant_r$$
$$\leqslant_r (1-q)^{\delta r^2} + \delta^2 r^2 q^2 \leqslant (1-p)^{\delta r^2} + r^2 p^2.$$

Рассмотрим $p_{22}(T)$. Таблица сравнения $\widehat{T}$ не принимает значений из $E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r}$ на ребрах графа $G_3(T)$, а каждое значение из $E^r \setminus E^{r+}_{r-\ln\ln\ln r}$ принимает не более r^2 раз. Если $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{E}}(T)$, то так как $|\widetilde{x}| = r-1$ и в силу утверждения 7.1.10

$$\mathtt{P}(\widetilde{x} \in \widehat{\xi}_2(X(G_3(T)))|\xi_1 = T) \leqslant \sum_{\gamma\in X(G_3(T))} \mathtt{P}(\widehat{\xi}_2(\gamma) = \widetilde{x}|\xi_1 = T) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{|\widetilde{y}|\leqslant r-\ln\ln\ln r}\ \sum_{\gamma\in X(G_3(T)):\widehat{T}(\gamma)=\widetilde{x}} q^{\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})} \cdot (1-q)^{r-\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})} \leqslant$$
$$\leqslant r^2 \sum_{\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})\leqslant r-\ln\ln\ln r+1} q^{\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})} \cdot (1-q)^{r-\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})} =$$
$$= r^2 \sum_{i=0}^{[r-\ln\ln\ln r+1]} \binom{r}{i} q^{r-i}(1-q)^i \leqslant_r$$
$$\leqslant_r r^2 \cdot 2\left(\frac{erq}{\ln\ln\ln r - 1}\right)^{\ln\ln\ln r-1} \leqslant_r r^2(r\rho)^{\ln\ln\ln r-1}.$$

Так как $X(G_2(T)))| \leqslant \delta r$, то $p_{22}(T) \leqslant_r \delta r^3(rp)^{\ln\ln\ln r-1}$. Поскольку множества вершин и ребер графов $G_2(T)$ и $G_4(T)$ не пересекаются, то для любого $\widetilde{x}$ из $\widetilde{\mathcal{E}}(T)$ события $(\widetilde{x} \notin \widehat{\xi}_2(X(G_2(T)))\&(\xi_1 = T))$ и $(\widetilde{x} \in \widehat{\xi}_2(X(G_4(T)))\&(\xi_1 = T))$ будут независимы. Поэтому

$$p_{23}(T) \leqslant \mathtt{P}(\widehat{\xi}_2(X(G_2(T))) \neq \widehat{\xi}_1(X(G_2(T)))|\xi_1 = T)\times$$
$$\times \max_{\widetilde{x}\in\widetilde{\mathcal{E}}(T)} \mathtt{P}(\widetilde{x} \in \widehat{\xi}_2(X(G_4(T)))|\xi_1 = T) \leqslant$$
$$\leqslant \max_{\widetilde{x}\in\widetilde{\mathcal{E}}(T)} \mathtt{P}(\widetilde{x} \in \widehat{\xi}_2(X(G_4(T)))|\xi_1 = T).$$

Если $\widetilde{x} \in \widetilde{\mathcal{E}}(T)$, то $|\widetilde{x}| = r-1$ и

$$\mathtt{P}(\widetilde{x} \in \widehat{\xi}_2(X(G_4(T)))|\xi_1 = T) \leqslant \sum_{\gamma\in X(G_4(T))} \mathtt{P}(\widehat{\xi}_2(\gamma) = \widetilde{x}|\xi_1 = T) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\widetilde{y}\in E^r\setminus\{\widetilde{1}^r,\widetilde{x}\}} l_r^*(\widetilde{y}, \ln r, \ln\ln\ln r, r^2) q^{\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})} \cdot (1-q)^{r-\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})\geqslant 1} l_r^*(\widetilde{y}, \ln r, \ln\ln\ln r - 1, r^2) q^{\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})} \cdot (1-q)^{r-\rho(\widetilde{x},\widetilde{y})} \leqslant$$

$$\leqslant \ln r \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} q^{r-i}(1-q)^i + r^2 \sum_{i=0}^{[r-\ln\ln\ln r+1]} \binom{r}{i} q^{r-i}(1-q)^i \leqslant_r$$

$$\leqslant_r \ln r(1-(1-q)^r) + r^2(rq)^{\ln\ln\ln r-1} \leqslant 2rp\ln r + \delta r^3(rp)^{\ln\ln\ln r-1}.$$

Следовательно

$$p_2 \leqslant (1-p)^{\delta r^2} + r^2p^2 + 2rp\ln r + 2\delta r^3(rp)^{\ln\ln\ln r-1} \leqslant_r$$
$$\leqslant_r (1-r)^{\delta r^2} + 3rp\ln r + r^3(rp)^{\ln\ln\ln -1}.$$

Утверждение 8.3.6 доказано. □

Утверждение 8.3.7. *Если* $(\ln m_1m_2)^{-2} \ll_r p \ll (\ln m_1m_2)^{-(1+\varepsilon)}$, $j \in N_2$, *то*

$$\varphi^{\text{тт},\&}_{V_1,V_2,n} \overset{\text{п.в.}}{\ll_n} \varphi^{\text{тт},j}_{V_1,V_2,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim_n} \varphi^{\text{тт},V}_{V_1,V_2,n}/2.$$

Доказательство. Из утверждения 8.3.6 следует, что при $\ln m_1m_2 + \ln b \leqslant r \leqslant r_2^\varepsilon(n, m_1m_2)$, $b \in (0,1)$

$$\mathsf{P}(\xi_2 \in \mathfrak{T}^{\text{тт}}_{V_1,V_2,r} | \xi_1 \in \mathfrak{T}^{\text{тт}}_{V_1,V_2,r}) \leqslant$$
$$\leqslant (1-p)^{\delta r^2} + 3rp\ln r + r^3(rp)^{\ln\ln\ln r-1} + \alpha_\delta^*(r) \leqslant_r$$
$$\leqslant_r \exp\left\{-\frac{\delta}{2}p(\ln m_1m_2)^2\right\} 3\cdot\frac{1}{2}(1+1/c_1)p\ln m_1m_2 \times$$
$$\times 2\ln\ln m_1m_2 + ((1+1/c_1)/2)^{\ln\ln\ln r+2}\times$$
$$\times (\ln m_1m_2)^{\ln\ln\ln r+2}\cdot p^{\ln\ln\ln r-1} + \alpha_\delta^*(r) \leqslant_r 1.$$

Следовательно, при таких r $\mathsf{M}\varphi^{\text{тт},\&}_{V_1,V_2,n,r} \ll_n \mathsf{M}\varphi^{\text{тт},1}_{V_1,V_2,n,r}$. Из утверждений 7.4.8–7.4.10 следует, что найдется такая константа b, что при $n^{c_1} \leqslant m_1m_2 \leqslant n^{c_2}, 0 < c_1 < 1 < c_2$

$$\varphi^{\text{тт},j}_{V_1,V_2,n} \overset{\text{п.в.}}{\sim_n} \sum_{r=]\ln m_1m_2+\ln b[}^{r_2^\varepsilon(n,m_1m_2)} \varphi^{\text{тт},j}_{V_1,V_2,n,r}.$$

Так как при

$$r_{1,k}^\varepsilon(m_1m_2) \leqslant r \leqslant r_2^\varepsilon(n, m_1m_2)$$

$\mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ},j}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{П.В.}}{\sim} {}_r\varphi^{\text{ТТ},j}_{V_1,V_2,n,r}$, то

$$\sum_{r=]\ln m_1 m_2+\ln b[}^{r_2^\varepsilon(n,m_1 m_2)} \mathtt{M}\varphi^{\text{ТТ},\&}_{V_1,V_2,n,r} \ll_n \varphi^{\text{ТТ},1}_{V_1,V_2,n}.$$

Кроме того,

$$\sum_{r<\ln m_1 m_2+\ln b} \varphi^{\text{ТТ},\&}_{V_1,V_2,n,r} + \sum_{r>r_2^\varepsilon(n,m_1 m_2)} \varphi^{\text{ТТ},\&}_{V_1,V_2,n,r} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{r<\ln m_1 m_2+\ln b} \varphi^{\text{ТТ},1}_{V_1,V_2,n,r} + \sum_{r>r_2^\varepsilon(n,m_1 m_2)} \varphi^{\text{ТТ},1}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{П.В.}}{\ll_n} \varphi^{\text{ТТ},1}_{V_1,V_2}.$$

В итоге получаем $\varphi^{\text{ТТ},\&}_{V_1,V_2,n} \overset{\text{П.В.}}{\ll_n} \varphi^{\text{ТТ},1}_{V_1,V_2,n}$.

Так как

$$\varphi^{\text{ТТ},1}_{V_1,V_2,n} + \varphi^{\text{ТТ},2}_{V_1,V_2,n} = \varphi^{\text{ТТ},\&}_{V_1,V_2,n} + \varphi^{\text{ТТ},\vee}_{V_1,V_2,n} \text{ и } \varphi^{\text{ТТ},1}_{V_1,V_2,n} \overset{\text{П.В.}}{\sim_n} \varphi^{\text{ТТ},2}_{V_1,V_2,n},$$

то $\varphi^{\text{ТТ},\vee}_{V_1,V_2,n} \overset{\text{П.В.}}{\sim_n} 2\varphi^{\text{ТТ},j}_{V_1,V_2,n}$, $j \in N_2$.

Утверждение доказано. □

8.4. Неустойчивость множества «очень коротких» тестов

Обозначим через $\mathfrak{T}^{T,\varepsilon,R}_{V_1,V_2,r}$ множество таких регулярных пар T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$, что $\widehat{T}^{-1}(\widetilde{\mathcal{E}}^r) < r^{2+\varepsilon/2}$.

Утверждение 8.4.1. *Если $\widetilde{r}^\varepsilon_{1,k}(m_1 m_2) \leqslant r \leqslant \widetilde{r}^\varepsilon_{2,k}(m_1 m_2)$, то*

$$|\mathfrak{T}^{T,\varepsilon,R}_{V_1,V_2,r}| \leqslant {}_r|\mathfrak{T}^{\text{Т}}_{V_1,V_2,r}| \cdot e^{-r^2}.$$

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{T}^{T\delta}_1$, $\delta \in (0, \min(1/64, \varepsilon/8))$, множество таких тестовых пар таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$, что $T_1 \in \mathfrak{T}^\delta_{V_1,r}$, $A_2(T) \cap D(T) = \varnothing$ и

$$|A_2(T) \cap F(T)| \leqslant \frac{m_2|F(T)|}{2^r} - \left(\frac{m_2|F(T)|}{2^r}\right)^{1-\delta},$$

где $F(T) = \cup_{i=1}^r \mathcal{U}_i(T)$.

Из утверждений 7.2.2, 7.2.5, 7.1.7 следует, что

$$\begin{aligned} |\mathfrak{T}_1^{T,\delta}| \quad &\leqslant \quad 2^{rm_1}(2^r - m_1 + (r-1)m_1^{1-\delta})^{m_2} \times \\ &\quad \times \exp\left\{-\frac{1}{12}\left(\frac{m_2 - r(m_1 - m_1^{1-\delta})}{2^r}\right)^{1-2\delta}\right\} \leqslant_r \\ &\leqslant_r \quad |\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r}| \cdot 2\exp\left\{-\frac{1}{13}\left(\frac{rm_1m_2}{2^r}\right)^{1-2\delta}\right\} \leqslant_r \\ &\leqslant_r \quad |\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r}| \cdot \exp\left\{-r^{2+3/2}\right\}. \end{aligned}$$

Для $T \in \mathfrak{T}_1^{T,\delta}$ выполнено $|\widehat{T}^{-1}(\widetilde{\mathcal{E}}^r)| = |A_2(T) \cap F(T)| \leqslant \leqslant_r r^{2+\varepsilon/2}$.

Если $\mathfrak{T}_2^{T,\delta} = \left\{T \in \mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r} : T_1 \notin \mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r}\right\}$, то $\mathfrak{T}^{T,\varepsilon,R}_{V_1,V_2,r} \subseteq \mathfrak{T}_1^{T,\delta} \cup \cup\, \mathfrak{T}_2^{T,\delta}$ и

$$|\mathfrak{T}^{T,\varepsilon,R}_{V_1,V_2,r}| \leqslant_r |\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r}| \cdot (\exp\left\{-m_1^{1-3\delta}\right\} + \exp\left\{-r^{2+\varepsilon/2}\right\}) \leqslant_r \\ \leqslant_r |\mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r}| \cdot e^{-r^2}.$$

Утверждение 8.4.1 доказано. □

Утверждение 8.4.2. *Если* $\widetilde{r}^{\varepsilon}_{1,k}(m_1m_2) \leqslant r \leqslant \widetilde{r}^{\varepsilon}_{2,k}(m_1m_2)$, $(\ln m_1m_2)^{-2} \leqslant p \leqslant (\ln m_1m_2)^{-1}$, *то*

$$\mathsf{P}(\xi_2 \in \mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r} | \xi_1 \in \mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r}) \leqslant_r 2e^{-r^2}.$$

Доказательство. $\mathsf{P}(\xi_2 \in \mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r} | \xi_1 \in \mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r}) \leqslant p_1 + p_2$, где

$$p_1 = \mathsf{P}(\xi_1 \in \mathfrak{T}^{T,\varepsilon,R}_{V_1,V_2,r}) \leqslant e^{-r^2}$$

согласно утверждению 8.4.1,

$$p_2 = \mathsf{P}(\xi_2 \in \mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r} | \xi_1 \in \mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r} \setminus \mathfrak{T}^{T,\varepsilon,R}_{V_1,V_2,r}).$$

Если $T \in \mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r} \setminus \mathfrak{T}^{T,\varepsilon,R}_{V_1,V_2,r}$, то $|\widehat{T}^{-1}(\widetilde{\mathcal{E}}^r)| \geqslant r^{2+\varepsilon/2}$ и, так как пара таблиц T — регулярная, то

$$\mathsf{P}(\xi_2 \in \mathfrak{T}^{\mathrm{T}}_{V_1,V_2,r} | \xi_1 = T) \leqslant (1 - p(1-p)^{r-1})^{r^{2+\varepsilon/2}} \leqslant \\ \leqslant \exp\left\{-p(1-p)^{r-1} r^{2+\varepsilon/2}\right\} \leqslant_r e^{-r^2}.$$

Следовательно, $p_2 \leqslant_r e^{-r^2}$

Утверждение 8.4.2 доказано. □

Утверждение 8.4.3. *Если* $r =]\ln m_1 m_2 - a \ln\ln m_1 m_2[$, $a \in (1+\varepsilon, 2-\varepsilon)$, $j \in N_2$, $(\ln m_1 m_2)^{-2} \leqslant p \leqslant (\ln m_1 m_2)^{-1}$, *то*

$$\varphi^{\nabla,\&}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\ll_n} \varphi^{\nabla,j}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim_n} \varphi^{\nabla,\vee}_{V_1,V_2,n,r}/2,$$

где значок ∇ *обозначает* «т», «тт», «кт» *или* «ктт».

Доказательство. Из утверждения 8.4.2 следует, что

$$\mathtt{M}\varphi^{\text{тт},\&}_{V_1,V_2,n,r} \ll_n \mathtt{M}\varphi^{\text{тт},1}_{V_1,V_2,n,r}.$$

Так как $\varphi^{T,1}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim_n} \mathtt{M}\varphi^{T,1}_{V_1,V_2,n,r}$, то $\varphi^{T,\&}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\ll_n} \varphi^{T,1}_{V_1,V_2,n,r}$. Из того, что $\varphi^{T,1}_{V_1,V_2,n,r} + \varphi^{T,2}_{V_1,V_2,n,r} = \varphi^{T,\&}_{V_1,V_2,n,r} + \varphi^{T,\vee}_{V_1,V_2,n,r}$ и $\varphi^{T,1}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim_n} \varphi^{T,2}_{V_1,V_2,n,r}$ следует, что $\varphi^{T,1}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim_n} \dfrac{1}{2}\varphi^{T,\vee}_{V_1,V_2,n,r}$.

Так как $\varphi^{T,j}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim_n} \varphi^{\text{кт},j}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim_n} n\varphi^{\text{тт},j}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim_n} \varphi^{\text{ктт},j}_{V_1,V_2,n,r}$, то

$$\varphi^{\nabla,\&}_{V_1,V_2,n,r} \leqslant \varphi^{T,\&}_{V_1,V_2,n,r} + \sum_{i=1}^{2} |\varphi^{\nabla,i}_{V_1,V_2,n,r} - \varphi^{T,j}_{V_1,V_2,n,r}| \overset{\text{п.в.}}{\ll_n} \varphi^{\nabla,j}_{V_1,V_2,n,r},\ j \in N_2,$$

где ∇ означает «т», «тт», «кт» или «ктт».

Утверждение 8.4.3 доказано. □

Глава 9

АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ КОРОТКИХ ТЕСТОВ

9.1. Алгоритм $\textbf{Д}_1$

Пусть T — пара таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$, а π — нумерация ребер графа G_{V_1,V_2}. Назовем набор $\widetilde{x}$ из E^n π-псевдотестом таблицы $\widehat{T}$ или псевдотестом таблицы $\widehat{T}_\pi$, если существует такое $k, k \in N_{m-1} \setminus N_{r-1}$, что таблица $\widehat{T}^{\widetilde{x}}_\pi|_{N_k}$ является тупиковой тестовой, а таблица $\widehat{T}^{\widetilde{x}}_\pi|_{N_{k+1}}$ не является тестовой. Для такого k выполнено $\widetilde{\mathcal{E}}^{|\widetilde{x}|} \subseteq \widehat{T}^{\widetilde{x}}_\pi(N_k)$ и $\min(\widetilde{T}^{\widetilde{x}}_\pi)^{-1}(\widetilde{1}^{|\widetilde{x}|}) = k+1$. Пару таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$ назовем π-псевдотестовой, если набор $\widetilde{1}^n$ является псевдотестом $\widehat{T}_\pi$. Множество всех π-псевдотестовых пар таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$ обозначим через $\mathfrak{T}^{\text{ПТ},\pi}_{V_1,V_2,n}$.

Далее доказывается, что алгоритм $\textbf{Д}_1(r)$ при работе на паре таблиц S из $\mathfrak{T}^*$ перебирает все тупиковые тесты S длины не больше r и все псевдотесты длины не более $r-1$. Шаг алгоритма 5), позволяющий исключить перебор псевдотестов длины r, важен, так как число коротких псевдотестов длины r для почти всех таблиц значительно больше числа тестов длины r.

Так как увеличение длины проверяемого набора происходит только на шаге 4) при условии $l_t < r-1$, то алгоритм $\textbf{Д}_1(r)$ не проверяет наборов длины, большей, чем r.

Утверждение 9.1.1. *Пусть $T \in \mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$, π — нумерация строк $\widehat{T}$, $r \geqslant 1$. Тогда не существует наборов $\widetilde{x}$ из E^n, которые алгоритм $\textbf{Д}_1(r)$ просматривает дважды.*

Доказательство. Предположим противное. Это значит, что найдутся t, s из $\mathbb{N}$ такие, что $\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_s$ и $l_t = l_s < r$.

Положим $\Omega = \left\{\omega \in \mathbb{N} : \exists v \neq \omega(\widetilde{S}_\omega = \widetilde{S}_v)\right\}$. Возьмем такие u и v, что $l_u = \min\limits_{\omega\in\Omega} l_\omega$ и $\widetilde{S}_u = \widetilde{S}_v$. Обозначим $S_1 = S_u|_{N_{l_u}-1}$, $S_2 = S_v|_{N_{l_u}-1}$, $k_1 = K_u(l_u-1)$, $k_2 = K_v(l_v-1)$. Ясно, что при $l_u = 1$ наборы $\widetilde{S}_u$ и $\widetilde{S}_v$ совпадать не могут, поэтому $\widetilde{S}_1 \neq |\widetilde{S}_2|, |\widetilde{S}_1| = |\widetilde{S}_2| = l_u - 1 \geqslant 1$. Такие $u, v, u \neq v$, что $l_u = l_v$

и $S_u = S_v$ существовать не могут в силу шага 6). По определению K_t получаем $k_i = \min(\widehat{T}_\pi^{\widetilde{S}_i})^{-1}(\widetilde{1}^{l_n-1}), i \in N_2$. Не ограничивая общности, считаем, что $k_1 \leqslant k_2$. Так как наборы $\widetilde{S}_1$ и $\widetilde{S}_2$ достраивались алгоритмом до $\widetilde{S}_u$, то $|(\widehat{T}_\pi^{\widetilde{S}_u})^{-1}(k_i)| = l_u - 1$, и так как $\widetilde{S}_1 \neq \widetilde{S}_2$, то найдется i_0 из N_{l_u-1} такое, что $(\widetilde{T}_\pi^{\widetilde{S}_1})^{-1}(k_2) = \widetilde{1}_{i_0}^{l_u-1}$. Для всех i из N_{l_u-1} множества $\mathcal{E}_i = (\widehat{T}_\pi^{\widetilde{S}_1})^{-1}(\widetilde{1}_i^{l_u-1}) \cap N_{k_1}$, в том числе $\mathcal{E}_{i_0}$, не пусты. В множестве $\mathcal{E}_{i_0}$ найдется элемент j_0 такой, что $T_\pi(j_0(S_u(l_u))) = 1$, т. е. $(\widehat{T}_\pi^{\widetilde{S}_u})^{-1}(j_0) = \widetilde{S}_2$. Так как $j_0 < k_1 \leqslant k_2$, получаем противоречие.

Утверждение 9.1.1 доказано. □

Из утверждения 9.1.1 следует, что алгоритм $\mathbf{Д}_1(r)$ заканчивает работу на любой таблице за конечное время.

Утверждение 9.1.2. *Пусть $T \in \mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$, π — нумерация строк $\widehat{T}, r > 1$. Тогда алгоритм $\mathbf{Д}_1(r)$ просматривает все тупиковые тесты $\widehat{T}_\pi$ длины не больше r и все псевдотесты $\widehat{T}_\pi$ длины не более $r - 1$.*

Доказательство. Если $\widehat{T}_\pi(1) = \widetilde{1}^n$, то таблица $\widehat{T}_\pi$ не имеет тупиковых тестов и псевдотестов. Считаем далее, что $\widehat{T}_\pi(1) \neq \neq \widetilde{1}^n$. Докажем утверждение индукцией по длине наборов. Если набор $\widetilde{x}$ из E_1^n, является тупиковым тестом или псевдотестом $\widehat{T}_\pi$, то $\widehat{T}_\pi^{\widetilde{x}}(1) = \widetilde{0}^1$. Из шагов 2), 6) следует, что все такие наборы просматриваются алгоритмом $\mathbf{Д}_1(r)$.

Предположим, что $\mathbf{Д}_1(r)$ проверяет все псевдотесты длины $l-1$, где $l \leqslant r-1$. Пусть набор $\widetilde{x}$ из E_l^n является тупиковым тестом или псевдотестом. Тогда найдется набор $\widetilde{y}, \widetilde{y} \in E_{l-1}^n, \widetilde{y} < < \widetilde{x}$, являющийся псевдотестом $\widehat{T}_\pi$ и такой, что алгоритм $\mathbf{Д}_1(r)$ достраивает его до $\widetilde{x}$. Легко видеть, что

$$\widetilde{y} = \widehat{T}_\pi(\max_{i \in N_{|\widetilde{x}|}} \min(\widehat{T}_\pi^{\widetilde{x}})^{-1}(\widetilde{1}_i^{|\widetilde{x}|}))\&\widetilde{x}.$$

При $l = r - 1$ рассуждаем аналогично, с той разницей, что вычисление $(\bigvee\limits_{j \in \mathcal{E}} \widehat{T}_\pi(j)) \oplus \widetilde{1}^n$ исключает из рассмотрения псевдотесты длины r.

Утверждение 9.1.2 доказано. □

При $r = 1$ алгоритм $\mathbf{Д}_1(r)$ просматривает все наборы $\widetilde{0}_j^n$, $j \in \in (\widehat{T}_\pi(1))^{-1}(0)$, и только их.

Если T — пара таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$, то через $G_1^*(T)$ обозначим не имеющий изолированных вершин подграф графа G_{V_1,V_2}, множество ребер которого есть $\widetilde{T}^{-1}(\mathcal{E}^r)$. Через $\mathcal{F}^{\delta}_{V_1,V_2,r}(l)$ обозначим множество всех таких пар таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$, что $|X(G_1^*(T))| \geqslant l$, $T_1 \in \mathfrak{T}^{\delta}_{V_1,r}$, что $A_2 \cap D_1 = \varnothing$, где $D_1 = (\bigcup_{i=0}^{r}(A_{1i} \setminus \mathcal{U}_i)) \cup (A_1 \setminus \mathcal{U}_0)$, и граф $G_1^*(T)$ состоит из неинцидентных друг другу ребер.

Утверждение 9.1.3. *Пусть* $\delta \in (0, 1/64)$,

$$\ln m_1 m_2 - 3\ln\ln m_1 m_2 \leqslant r \leqslant \ln m_1 m_2 - D(r),$$

где $D(r) \in \mathcal{B}$. *Тогда*

$$\left|\mathcal{F}^{\delta}_{V_1,V_2,r}\left(\frac{r m_1 m_2}{2^{r+1}}\right)\right| \geqslant_r |\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}| \cdot (1 - 2^{-\frac{\delta r}{4}}).$$

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{T}_{H,2}$ множество пар таблиц T, для которых выполнено $T_1 \in \mathfrak{T}^{\delta}_{V_1,r}$ и $A_2 \cap D_1 = \varnothing$. Из утверждения 7.2.7 следует, что

$$\begin{aligned}|\mathfrak{T}_{H,2}| &\geqslant_r 2^{r m_1}(1 - \exp\{-m_1^{1-3\delta}\})(2^r - |D_1|)^{m_2} \geqslant \\ &\geqslant 2^{r(m_1+m_2)}(1 - \exp\{-m_1^{1-3\delta}\})\left(1 - \frac{(r+1)m_1^{1-3\delta}}{2^r}\right)^{m_2} \geqslant_r \\ &\geqslant_r 2^{r(m_1+m_2)}(1 - 2^{-\frac{\delta r}{3}}).\end{aligned}$$

Для любой пары таблиц T из $\mathfrak{T}_{H,2}$ кратность любой вершины из $X(G_1^*(T)) \cap V_2$ равна 1. Определим множество $\mathfrak{T}_{H,1}$ аналогично множеству $\mathfrak{T}_{H,2}$ и поменяв V_1 и V_2 местами. Проведя те же рассуждения для $\mathfrak{T}_{H,1}$, получим

$$|\mathfrak{T}_{H,1}| \geqslant_r 2^{r(m_1+m_2)}(1 - 2^{-\frac{\delta r}{3}}).$$

Пусть $T_1 \in \mathfrak{T}^{\delta}_{V_1,r}$. Положим $t(T_1) = \sum\limits_{i=0}^{r} |\mathcal{U}_i| = (r+1)|\mathcal{U}_0|$, тогда $(r+1)m_1 \geqslant t(T_1) \geqslant (r+1)(m_1 - m_1^{1-\delta})$. Согласно утверждению 7.1.8 число пар таблиц S из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$ таких, что $S_1 = T_1$ и

$$\left|\left|A_2 \cap \left(\bigcup_{i=0}^{r} \mathcal{U}_i\right)\right| - \frac{t(T_1)m_2}{2^r}\right| \leqslant \left(\frac{t(T_1)m_2}{2^r}\right)^{1-\delta},$$

не меньше, чем

$$2^{rm_2}\left(1-\exp\left\{-\frac{1}{12}\left(\frac{t(T_1)m_2}{2^r}\right)^{1-2\delta}\right\}\right)\geqslant_r$$
$$\geqslant_r 2^{rm_2}\left(1-\exp\left\{-\left(\frac{rm_1m_2}{2^r}\right)^{1-3\delta}\right\}\right).$$

То есть, число пар таблиц S из $\mathfrak{T}_{V_1,V_1,r}$, для которых выполнено

$$|X(G_1^*,S)|>\frac{rm_1m_2}{2^{r+1}}$$

начиная с некоторого номера r, не меньше, чем

$$2^{r(m_1+m_2)}(1-\exp\{-r^{1-4\delta}\}).$$

В итоге получаем

$$\left|\mathcal{F}^{\delta}_{V_1,V_2,r}\left(\frac{rm_1m_2}{2^{r+1}}\right)\right|\geqslant_r 2^{r(m_1+m_2)}(1-2^{-\frac{\delta r}{4}}).$$

Утверждение 9.1.3 доказано. □

Рассмотрим последовательность независимых случайных величин ξ_t, $t=1,2,3\ldots.$ таких, что $\mathtt{P}(\xi_t=i)=\dfrac{1}{k+1}$ для любого i из N_{k+1}. Обозначим

$$\Xi(i)=\min\{t:\xi_t=i\},\quad i\in N_{k+1}.$$

Утверждение 9.1.4.

$$\mathtt{P}(\Xi(k+1)>\max_{i\in N_k}\Xi(i))=\frac{1}{k+1}.$$

Доказательство. Обозначим через $L(s)$ множество $\cup_{t=1}^{s}\{\xi_t\}$, считая $L(0)=\varnothing$. Пусть C_i, $i\in N_k$, $t\geqslant 1$, — события, заключающиеся в том, что $|L(t-1)|=i-1$, $|L(t)|=i$ и $L(t)\subseteq N_k$, а $C_{k+1}(t), t\geqslant 1$ — событие $\{L(t-1)=N_k, L(t)=N_{k+1}\}$, $C_0(0)$ — достоверное событие. Тогда

$$\mathtt{P}(\Xi(k+1)>\max_{i\in N_k}\Xi(i))=\sum_{t=1}^{\infty}\mathtt{P}(C_{k+1}(t))=$$
$$=\prod_{i=1}^{k+1}\sum_{t_i=1}^{\infty}\mathtt{P}\left(C_i\left(\sum_{j=1}^{i}t_j\right)\middle|C_{i-1}\left(\sum_{j=1}^{i-1}t_j\right)\right).$$

Так как при $t, s > 1$

$$\mathtt{P}(C_{i+1}(t+s)|C_i(t)) = \begin{cases} \left(\dfrac{i}{k+1}\right)^{s-1} \dfrac{k-i}{k+i}, & i \in N_{k-1}, \\ \left(\dfrac{k}{k+1}\right)^{s-1} \dfrac{1}{k-1}, & i \in N_k, \end{cases}$$

и

$$\mathtt{P}(C_1(t)|C_0(0)) = \begin{cases} \dfrac{k}{k+1}, & t = 1, \\ 0, & t > 1, \end{cases}$$

то

$$\mathtt{P}(\Xi(k+1) > \max_{i \in N_k} \Xi(i)) = \frac{k}{k+1} \prod_{i=1}^{k} \sum_{s_i=0}^{\infty} \frac{\max(k-1,1)}{k+1} \left(\frac{i}{k+1}\right)^{s_i} =$$

$$= \frac{k!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \prod_{i=1}^{k} \sum_{s_i=0}^{\infty} \left(\frac{i}{k+1}\right)^{s_i} = \frac{k!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - \dfrac{i}{k+1}} = \frac{1}{k+1}.$$

Утверждение 9.1.4 доказано. □

Из утверждения 9.1.4 и из того, что $\mathtt{P}(\Xi(k+1) > l) = \left(1 - \dfrac{1}{k+1}\right)^l$, следует, что для любого $l \geqslant 1$

$$\frac{1}{k+1} \geqslant \mathtt{P}\left(l \geqslant \Xi(k+1) > \max_{i \in N_k} \Xi(i)\right) \geqslant \frac{1}{k+1} - \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^l.$$

Считаем, что каждой паре (m_1, m_2) из $\mathbb{N}^2$ сопоставлена нумерация π ребер графа G_{V_1,V_2}.

Утверждение 9.1.5. *Пусть* $\delta \in (0, 1/64), b_1 > 1, \ln m_1 m_2 - 3 \ln\ln m_1 m_2 \leqslant r \leqslant \ln m_1 m_2 - b_1 \ln\ln\ln m_1 m_2$. *Тогда*

$$|\mathfrak{T}^{\text{ПТ},\pi}_{V_1,V_2,r}| \sim_r |\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}| \cdot \frac{1}{r+1}.$$

Доказательство. Возьмем некоторое множество V, $V \subseteq V_2$. Обозначим через $\mathcal{F}^{\delta,V}_{V_1,V_2,r}(l)$ подмножество пар таблиц T из $\mathcal{F}^{\delta}_{V_1,V_2,r}(l)$, для которых выполнено $\mathcal{P}_2(X(G_1^*(T))) = V$. Очевидно, что $\mathcal{F}^{\delta,V}_{V_1,V_2,r}(l)$ не пусто тогда и только тогда, когда $|V| = l$, и что $|V| = |\widehat{T}^{-1}(\mathcal{E}^r)|$. Пусть $\mathcal{J}_{V,T}$ — множество отображений g, $g : V_2 \setminus V \to E^n$ таких, что

$$g(V_2 \setminus V) \cap (A_1 \cup (\cup_{i=1}^r A_{1i})) = 0.$$

Обозначим через $\mathcal{F}^{\delta,V,f,g}_{V_1,V_2,r}(l)$ множество пар таблиц T из $\mathcal{F}^{\delta,V}_{V_1,V_2,r}(l)$ таких, что $T_1 = f$, $T_2|_{V_2\setminus V} = g$.

Тогда

$$\mathcal{F}^{\delta}_{V_1,V_2,r}(l) \subseteq \bigcup_{f\in\mathfrak{T}^{\delta}_{V_1,r}} \bigcup_{g\in\mathcal{J}_{V,f}} \mathcal{F}^{\delta,V,f,g}_{V_1,V_2,r}(l)$$

и

$$\mathcal{F}^{\delta}_{V_1,V_2,r}(l) \subseteq \bigcup_{V\subseteq V_2,|V|=l} \mathcal{F}^{\delta,V}_{V_1,V_2,r}(l).$$

Возьмем некоторые f из $\mathfrak{T}^{\delta}_{V_1,r}$ и g из $\mathcal{J}_{V,f}$. Тогда для любых i, j из $\widetilde{L}_r$, $i \neq j$, $|\mathcal{U}_i(f)| = |\mathcal{U}_j(f)|$ и $|\mathcal{U}_i(f)| \geqslant m_1 - m^{1-\delta}$, и для любого $\widetilde{x}$ из $\mathcal{U}_0(f)$

$$\min_{\widetilde{y}\in f(V_1)\setminus\{\widetilde{x}\}} \rho(\widetilde{x},\widetilde{y}) \geqslant \left[\psi^{-1}(\delta/3)r\right].$$

Пусть π — нумерация ребер графа G_{V_1,V_2}. Принадлежность пары таблиц T из $\mathcal{F}^{\delta,V,\&,g}_{V_1,V_2,r}(l)$ к множеству π-псевдотестовых таблиц зависит только от номеров ребер графа $G^*_1(T)$. Так как все ребра графа $G^*_1(T)$ не инцидентны друг другу, то $T \in \mathfrak{T}^{\text{ПТ},\pi}_{V_1,V_2,r}$ тогда и только тогда, когда $\widehat{T}(X(G^*_1(T))) \supseteq \mathcal{E}^r$ и $\min\left\{\widehat{T}^{-1}_{\pi}(\widetilde{1}^r)\right\} \geqslant \max_{i\in N_r}\min\left\{\widehat{T}^{-1}_{\pi}(\widetilde{1}^r_i)\right\}$. Обозначим через π_1 такое отображение N_m в $N_{|V|}$, что $\pi_1(\pi(X(G^*_1(T)))) = N_{|V|}$ и для двух различных ребер γ_1, γ_2 графа $G^*_1(T)$ выполнено

$$\pi(\gamma_1) < \pi(\gamma_2) \Leftrightarrow \pi_1(\pi(\gamma_1)) < \pi_1(\pi(\gamma_2)).$$

Ясно, что π_1 однозначно определяется нумерацией π. Любому отображению $g, g : V_2 \setminus V \to \cup_{i=0}^r \mathcal{U}_i(f)$ сопоставим набор $\widetilde{z}_{g_1}$ длины $|V|, \widetilde{z}_{g_1} : N_{|V|} \to N_{r+1}$, i-я координата которого равна номеру того из множеств $\mathcal{U}_j$, которому принадлежит набор $g_1(\pi^{-1}(\pi_1^{-1}(i)))$, если $j > 0$, и $r+1$, если $j = 0$. Получаем, что $T \in \mathfrak{T}^{\text{ПТ},\pi}_{V_1,V_2,r}$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{z}_{g_1}(N_{|V|}) \supseteq N_{r+1}$ и $\min \widetilde{z}^{-1}_{g_1}(r+1) > \max_{i\in N_r}\min \widetilde{z}^{-1}_{g_1}$, где $g_1 = T|_V$. Для числа l^* таких наборов выполнено $\dfrac{(r+l)^l}{r+1} \geqslant l^* \geqslant (r+l)^l\left(\dfrac{1}{r+1} - \left(1 - \dfrac{1}{r+1}\right)^{|V|}\right)$. Каждому набору $\widetilde{z}_0$ соответствует $|\mathcal{U}_0(f)|^{|V|}$ отображений $g_1 : V \to \cup_{i=0}^r \mathcal{U}_i(f)$ таких, что $\widetilde{z}_0 = \widetilde{z}_{g_1}$. Из этого следует, что

$$\frac{1}{r+1}|\mathcal{F}^{\delta,V,f,g}_{V_1,V_2,r}(l)| \geqslant |\mathcal{F}^{\delta,V,f,g}_{V_1,V_2,r}(l) \cap \mathfrak{T}^{\text{ПТ},\pi}_{V_1,V_2,r}| \geqslant$$
$$\geqslant \left(\frac{1}{r+1} - \left(1 - \frac{1}{r+1}\right)^l\right)|\mathcal{F}^{\delta,V,f,g}_{V_1,V_2,r}(l)|,$$

верно для всех $V, V \leqslant V_2, |V| = l, f \in \mathfrak{T}^{\delta}_{V_1,r}, g \in \mathcal{J}_{V,f}$.

Следовательно,

$$\frac{1}{r+1}\left|\mathcal{F}^{\delta}_{V_1,V_2,r}\left(\frac{rm_1m_2}{2^{r+1}}\right)\right| \geqslant \left|\mathcal{F}^{\delta}_{V_1,V_2,r}\left(\frac{rm_1m_2}{2^{r+1}}\right) \cap \mathfrak{T}^{\text{ПТ},\pi}_{V_1,V_2,r}\right| \geqslant$$
$$\geqslant \left(\frac{1}{r+1} - \left(1 - \frac{1}{r+1}\right)^{\frac{rm_1m_2}{2^{r+1}}}\right)\left|\mathcal{F}^{\delta}_{V_1,V_2,r}\left(\frac{rm_1m_2}{2^{r+1}}\right)\right|.$$

При $\ln m_1m_2 - 3\ln\ln m_1m_2 \leqslant r \leqslant \ln m_1m_2 - b_1 \ln\ln\ln m_1m_2$

$$\frac{1}{r+1} - \left(1 - \frac{1}{r+1}\right)^{\frac{rm_1m_2}{2^{r+1}}} \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{r+1} - \exp\left\{-\frac{1}{4}(\ln\ln m_1m_2)^{-b_1}\right\} \sim_r \frac{1}{r+1}.$$

Учитывая утверждение 9.1.3, получаем

$$|\mathfrak{T}^{\text{ПТ},\pi}_{V_1,V_2,r}| \sim_r \frac{1}{r+1}|\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}|.$$

Утверждение 9.1.5 доказано. □

Определим на множестве $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$ функцию $\varphi^{\text{ПТ},\pi}_{V_1,V_2,n,\widetilde{x}}$, где $\widetilde{x} \in E^n \setminus \left\{\widetilde{0}^n\right\}$, а π — нумерация ребер графа G_{V_1,V_2}, принимающую значение 1 на паре таблиц T, если набор $\widetilde{x}$ является π-псевдовектором T. Для r из N_n положим $\varphi^{\text{ПТ},\pi}_{V_1,V_2,n,r} = \sum\limits_{\widetilde{x}\in E^n_r} \varphi^{\text{ПТ},\pi}_{V_1,V_2,n,\widetilde{x}}$ и $\varphi^{\text{КПТ},\pi}_{V_1,V_2,n,r} = \sum\limits_{i=1}^{r} \varphi^{\text{ПТ},\pi}_{V_1,V_2,n,i}$. Из утверждения 9.1.5 следует, что при $\ln m_1m_2 - 3\ln\ln m_1m_2 \leqslant r \leqslant \ln m_1m_2 - b_1\ln\ln\ln m_1m_2$, $b_1 > 1$ и $n > r$

$$\mathtt{M}\varphi^{\text{ПТ},\pi}_{V_1,V_2,n,r} \sim_r \frac{1}{r+1}\binom{n}{r}.$$

Утверждение 9.1.6. *Пусть* $n \geqslant D(n)\ln m_1m_2, D(n) \in \mathcal{B}, b_1 > 1$, $\ln m_1m_2 - 2\ln\ln m_1m_2 \leqslant r \leqslant \ln m_1m_2 - b_1\ln\ln\ln m_1m_2$. *Тогда*

$$\mathtt{M}\varphi^{\text{КПТ},\pi}_{V_1,V_2,n,r} \sim_n \mathtt{M}\varphi^{\text{ПТ},\pi}_{V_1,V_2,n,r}.$$

Доказательство. Положим $r_0 =]\ln m_1 m_2 - 3\ln\ln m_1 m_2[$. Согласно утверждению 7.1.4 $\mathtt{M}\varphi^{\text{КПТ},\pi}_{V_1,V_2,n,r_0} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{r_0}\binom{n}{i} \leqslant_r 2\binom{n}{r_0}$. Так как $r > \ln m_1 m_2 - 2\ln\ln m_1 m_2$, то

$$\mathtt{M}\varphi^{\text{КПТ},\pi}_{V_1,V_2,n,r_0} \ll_n \binom{n}{r-1} \leqslant_n \frac{1}{r+1}\binom{n}{r} \sim_n \mathtt{M}\varphi^{\text{ПТ},\pi}_{V_1,V_2,n,r}.$$

Из утверждения 9.1.5 следует, что

$$\sum_{i=r_0+1}^{r} \mathtt{M}\varphi^{\text{ПТ},\pi}_{V_1,V_2,n,i} \sim_n \sum_{i=r_0+1}^{r} \frac{1}{i+1}\binom{n}{i} \leqslant \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{i+1}\binom{n}{i}.$$

Положим $a_i = \dfrac{1}{i+1}\binom{n}{i}$. При $i \leqslant r$ $\dfrac{a_{i-1}}{a_i} \leqslant_n \dfrac{2\ln m_1 m_2}{n} \leqslant \dfrac{2}{D(n)}$. Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^{r} a_i \leqslant_n a_r \cdot \dfrac{1}{1-2/D(n)} \sim_n a_r \sim_n \mathtt{M}\varphi^{\text{ПТ},\pi}_{V_1,V_2,n,r}$ и

$$\mathtt{M}\varphi^{\text{КПТ},\pi}_{V_1,V_2,n,r} = \mathtt{M}\varphi^{\text{КПТ},\pi}_{V_1,V_2,n,r_0} + \sum_{i=r_0+1}^{r} \mathtt{M}\varphi^{\text{ПТ},\pi}_{V_1,V_2,n,i} \sim_n \mathtt{M}\varphi^{\text{ПТ},\pi}_{V_1,V_2,n,r}.$$

Утверждение 9.1.6 доказано. □

Утверждение 9.1.7. *Если* $\varepsilon \in (0,1), \ln m_1 m_2 \leqslant 2^{(\ln n)^{1-\varepsilon}}$, *то найдется такое* b_1, $b_1 > 1$, *что при* $r =]\ln m_1 m_2 - b_1 \ln\ln\ln m_1 m_2[$

$$\varphi^{\text{КПТ},\pi}_{V_1,V_2,n,r-1} \overset{\text{п.в.}}{\ll_n} \varphi^{\text{КТТ}}_{V_1,V_2,n,r}.$$

Доказательство. Так как $2^{(\ln n)^{1-\varepsilon}} \ll_n n$, то согласно утверждению 9.1.6

$$\mathtt{M}\varphi^{\text{КПТ},\pi}_{V_1,V_2,n,r-1} \sim_n \mathtt{M}\varphi^{\text{ПТ},\pi}_{V_1,V_2,n,r-1} \sim_n \frac{1}{n}\binom{n}{r-1} \sim_n \frac{1}{n}\binom{n}{r}.$$

Из утверждения 7.2.12 следует, что

$$\varphi^{\text{КТТ}}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\sim_n} \binom{n}{r} \exp\left\{-(\ln\ln m_1 m_2)^{b_1}\right\}.$$

Поскольку $\ln n \geqslant (\ln\ln m_1 m_2)^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$, то при $1 < b_1 < \dfrac{1}{1-\varepsilon}$ и $r =]\ln m_1 m_2 - b_1 \ln\ln\ln m_1 m_2[$

$$\varphi^{\text{КТТ}}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\gg_n} \mathtt{M}\varphi^{\text{КПТ},\pi}_{V_1,V_2,n,r-1}.$$

Следовательно, выполнено

$$\varphi^{\text{КТТ}}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\gg}_n \varphi^{\text{КПТ},\pi}_{V_1,V_2,n,r-1}.$$

Утверждение 9.1.7 доказано. □

Утверждение 9.1.8. *Если* $\ln m_1 m_2 \geqslant (\ln n)^c$*,* $c > 1$*, то найдется такое* a_1*,* $a_1 \in (0,1)$*, что при* $r =]\ln m_1 m_2 - a_1 \ln\ln m_1 m_2[$

$$\varphi^{\text{КПТ},\pi}_{V_1,V_2,n,r-1} \overset{\text{п.в.}}{\ll}_n \varphi^{\text{КТТ}}_{V_1,V_2,n,r}.$$

Доказательство. Проводится аналогично предыдущему утверждению. Поскольку $\ln n \geqslant (\ln m_1 m_2)^{1/c}$, то при $0 < a_1 < \dfrac{1}{c}$ и $r =]\ln m_1 m_2 - a_1 \ln\ln m_1 m_2[$ выполнено $\varphi^{\text{КТТ}}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\gg}_n \dfrac{1}{r}\binom{n}{r}$ и $\varphi^{\text{КТТ}}_{V_1,V_2,n,r} \overset{\text{п.в.}}{\gg}_n \varphi^{\text{КПТ},\pi}_{V_1,V_2,n,r-1}$.

Утверждение 9.1.8 доказано. □

Замечание 3. При построении «очень коротких» тупиковых тестов длины $r \leqslant \ln m_1 m_2 - a_1 \ln\ln m_1 m_2, a_1 > 1$ при $m_1 m_2 \geqslant n^c, c > 0$, алгоритм $\mathbf{Д}_1(r)$ не будет эффективным. Аналогично утверждениям 9.1.7, 9.1.8 можно показать, что в этом случае

$$\mathtt{M}\varphi^{\text{КПТ},\pi}_{V_1,V_2,n,r-1} \overset{\text{п.в.}}{\gg}_n \varphi^{\text{КТТ}}_{V_1,V_2,n,r}.$$

Применение алгоритма, предложенного Е. В. Дюковой [4], в задаче построения всех коротких тупиковых тестов длины не более r приводит к многократному перебору всех наборов длины не более r. Обозначим этот алгоритм, применяемый в задаче построения тупиковых тестов длины не более r, через $A^*(r)$. Действительно, алгоритм A^* перебирает все «квадратные» тупиковые тестовые подтаблицы $\widehat{T}$, т. е. подтаблицы вида $\widehat{T}^{\widetilde{x}}|_B$, где $\widetilde{x} \in E^n$, $B \subseteq N_m, |\widetilde{x}| = |B|$ и $\widehat{T}^{\widetilde{x}}(B) = \widetilde{\mathcal{E}}^{|\widetilde{x}|}$. Алгоритм $A^*(r)$ будет перебирать все такие таблицы, соответствующие наборам $\widetilde{x}$ из E^n, $|\widetilde{x}| \leqslant r$. Сложность работы алгоритма $A^*(r)$ на таблице $\widehat{T}$ будет равна

$$\mu^{\text{ТТ}}(A^*(r), T) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\widetilde{x}\in E^n_i} \prod_{j=1}^{i} |(\widehat{T}^{\widetilde{x}})^{-1}(\widetilde{1}^i_j)|.$$

Утверждение 9.1.9. *Если* $b_1 > 1$, $1 \leqslant r \leqslant \ln m_1 m_2 - b_1 \ln\ln\ln m_1 m_2$*, то* $\prod\limits_{i=1}^{r} |\widehat{T}^{-1}(\widetilde{1}^r_i)| \geqslant_r \exp\left\{\dfrac{b_1 r}{2} \ln\ln\ln m_1 m_2\right\}$ *не менее, чем для*

$2^{r(m_1+m_2)} \cdot \left(1 - \exp\left\{-(\ln\ln m_1 m_2)^{\frac{b_1+1}{2}}\right\}\right)$ *пар таблиц* T *из* $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$.

Доказательство. Пусть $\delta \in (0, \min(1/64, \dfrac{b_1-1}{6b_1}))$. Обозначим через $\mathfrak{T}^{\delta,\widetilde{x}}_{V_1,V_2,r}$, $\widetilde{x} \in E^r$ множество таких пар таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$, что $T_1 \in \mathfrak{T}^{\delta}_{V_1,V_2,r}$ и

$$|\widehat{T}^{-1}(\widetilde{x})| \geqslant \frac{(m_1 - m_1^{1-\delta})m_2}{2^r} - \left(\frac{(m_1 - m_1^{1-\delta})m_1}{2^r}\right)^{1-\delta} \geqslant_r$$
$$\geqslant_r (\ln\ln m_1 m_2)^{b_1} \cdot (1 - (\ln\ln m_1 m_2)^{-\frac{\delta b_1}{2}}).$$

Согласно утверждениям 7.1.8, 7.2.2

$$|\mathfrak{T}^{\delta,\widetilde{x}}_{V_1,V_2,r}| \geqslant 2^{r(m_1+m_2)} \times$$
$$\times \left(1 - \exp\left\{-\frac{1}{12}\left(\frac{(m_1 - m_1^{1-\delta})m_2}{2^r}\right)^{1-2\delta}\right\} - \exp\left\{-m_1^{1-3\delta}\right\}\right) \geqslant_r$$
$$\geqslant_r 2^{r(m_1+m_2)} \cdot \left(1 - \exp\left\{-\frac{1}{13}(\ln\ln m_1 m_2)^{b_1(1-2\delta)}\right\}\right).$$

Следовательно,

$$\left|\bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{T}^{\delta,\widetilde{1}_i^r}_{V_1,V_2,r}\right| \geqslant$$
$$\geqslant 2^{r(m_1+m_2)} \cdot \left(1 - r\exp\left\{-\frac{1}{13}(\ln\ln m_1 m_2)^{b_1(1-2\delta)}\right\}\right) \geqslant_r$$
$$\geqslant_r 2^{r(m_1+m_2)} \cdot \left(1 - \exp\left\{-(\ln\ln m_1 m_2)^{\frac{b_1+1}{2}}\right\}\right),$$

так как $b_1(1-2\delta) > \dfrac{2b_1+1}{3}$ и $\ln r \leqslant_r \ln\ln m_1 m_2 \ll \ll_r (\ln\ln m_1 m_2)^{\frac{2b_1+1}{3}}$.

Для любой пары таблиц T из $\bigcap\limits_{i=1}^{r} \mathfrak{T}^{\delta,\widetilde{1}_i^r}_{V_1,V_2,r}$ выполнено

$$\prod_{i=1}^{r} |\widehat{T}^{-1}(\widetilde{1}_i^r)| \geqslant (\ln\ln m_1 m_2)^{b_1 r} \cdot \left(1 - (\ln\ln m_1 m_2)^{\frac{-\delta b_1}{2}}\right)^r \geqslant$$
$$\geqslant_r \exp\left\{b_1 r \cdot \ln\ln\ln m_1 m_2 - 2r(\ln\ln m_1 m_2)^{-\frac{\delta b_1}{2}}\right\} \geqslant_r$$

$$\geqslant_r \exp\left\{\frac{b_1 r}{2}\cdot \ln\ln\ln m_1 m_2\right\}.$$

Утверждение 9.1.9 доказано. □

Утверждение 9.1.10. *$b_1 > 1$, $1 \leqslant r \leqslant \ln m_1 m_2 - b_1 \ln\ln\ln m_1 m_2$, $c > 0$, $m_1 m_2 \geqslant n^c$, то*

$$\text{м}\mu^{\text{тт}}(A^*(r), \widehat{T}) \geqslant_n \frac{1}{2}\binom{n}{r} \exp\left\{\frac{b_1 r}{2}\cdot \ln\ln\ln m_1 m_2\right\}.$$

Доказательство. Из утверждения 9.1.9 следует, что

$$\text{м}\mu^{\text{тт}}(A^*(r), \widehat{T}) \geqslant \left(1 - \exp\left\{-(\ln\ln m_1 m_2)^{\frac{b_1+1}{2}}\right\}\right) \times$$
$$\times \sum_{i=1}^{r}\binom{n}{i} \exp\left\{\frac{b_1 i}{2} \ln\ln\ln m_1 m_2\right\} \geqslant_n \frac{1}{2}\binom{n}{r} \exp\left\{\frac{b_1 r}{2} \ln\ln\ln m_1 m_2\right\}.$$

Утверждение 9.1.10 доказано. □

Таким образом, алгоритм $A^*(r)$ при построении коротких тупиковых тестов работает значительно дольше, чем даже алгоритм $A_\Pi(r)$ полного перебора всех наборов длины не больше r. При увеличении числа строк таблицы сравнения эта разница увеличивается. Сложность работы алгоритма $A_\Pi(r)$ — $\mu^{\text{тт}}(A_\Pi(r), \widehat{T})$ при $1 \leqslant r \leqslant \ln m_1 m_2 - b_1 \ln\ln\ln m_1 m_2$, $b_1 > 1$, равна $\sum_{i=1}^{r}\binom{n}{i}$. В силу утверждения 7.1.4 $\mu^{\text{тт}}(A_\Pi(r), \widehat{T}) \sim_n \binom{n}{r}$.

9.2. Алгоритм $\mathbf{Д}_2$

Из описания алгоритма $\mathbf{Д}_2(r)$ видно, что он не проверяет наборов длины большей, чем r, а из наборов длины r перечисляет только тесты таблицы $\widehat{T}_\pi$.

Утверждение 9.2.1. *Пусть $T \in \mathfrak{T}_{V_1,V_2,r}$, π — нумерация строк таблицы сравнения $\widehat{T}, r \geqslant 1$. Тогда не существует наборов $\widetilde{x}$ из E^n, которые алгоритм $\mathbf{Д}_2(r)$ просматривает дважды.*

Доказательство. Предположим противное. Это значит, что найдутся t, s из $\mathbb{N}$ такие, что $\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_s$ и $l_t = l_s < r$. Положим $\Omega = \left\{\omega \in \mathbb{N} : \exists v \neq \omega(\widetilde{S}_\omega = \widetilde{S}_v)\right\}$. Возьмем такое u, что $l_u = \min\limits_{\omega\in\Omega} l_\omega$, и такое $v \neq u$, что $\widetilde{S}_u = \widetilde{S}_v$. В силу шага 6 не может существовать таких s и t, $s \neq t$, что $l_s = l_t$ и $S_s = S_t$. Поэтому $l_u \geqslant 2$ и $S_u|_{N_{l_u-1}} = S_v|_{N_{l_u-1}}$.

Обозначим через l минимум таких k, что $S_u|_{N_k} \neq S_v|_{N_k}$. Так как $k < l_u$, то существуют «единственные моменты времени» u_0, v_0 такие, что $S_{u_0} = S_u|_{N_l}, S_{v_0} = S_v|_{N_l}$. Для u_0, v_0 выполнено $S_{u_0}|_{N_{l-1}} = S_{v_0}|_{N_{l-1}}$ и $S_{u_0} \neq S_{v_0}$. Ясно, что $u_0 \neq v_0$. Пусть $u_0 < v_0$.

Обозначим

$$t_1 = \min\left\{t : t > u_0, l_t = l_{u_0}, S_t|_{N_{l-1}} = S_{u_0}|_{N_{l-1}}\right\},$$
$$t_2 = \max\left\{t : t > u_0, S_t|_{N_{l-1}} = S_{u_0}|_{N_{l-1}}\right\}.$$

Промежуток $[t_1, t_2]$ не пуст, так как $t_1 \leqslant v_0 < v \leqslant t_2$. Из изменений таблицы M на шаге 6 алгоритма следует, что для любого t, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, и k, $l \leqslant k \leqslant l_t$, $M_t(k)(S_{u_0}(l)) = 1$, т. е. в «моменты» t, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, столбец с номером $S_{u_0}(l)$ не может быть присоединен к текущему набору. Получаем противоречие с тем, что $S_{u_0}(l) \in S_u(N_{l_u}) = S_v(N_{l_u})$.

Утверждение 9.2.1 доказано. $\square$

Из утверждения 9.2.1 следует, в частности, что алгоритм $\mathbf{Д}_2(r)$ при $r \geqslant 1$ заканчивает работу на любой таблице за конечное время.

Утверждение 9.2.2. *Пусть T — пара таблиц из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$, π — нумерация строк $\widehat{T}$. Тогда алгоритм $\mathbf{Д}_2(r)$ строит все тесты таблицы $\widehat{T}_\pi$, имеющих длину не более r.*

Доказательство. Считаем, что $\widehat{T}_\pi^{-1}(\widetilde{1}^n) = \varnothing$, так как в противном случае таблица $\widehat{T}_\pi$ не имеет тестов. Докажем утверждение индукцией по длине наборов. Очевидно, что алгоритм $\mathbf{Д}_2(r)$ при $r \geqslant 1$ находит свои тесты $\widehat{T}_\pi$, длина которых не превосходит 1. Предположим, что алгоритм $\mathbf{Д}_2(r)$ строит все тесты длины не более $l, 1 \leqslant l < r$.

Положим $j = \min(\widehat{T}_\pi(1))^{-1}(0)$. Тогда $S_1 = \{j\}$, $K_1 = \{1\}$, $l_1 = 1$, $A_1(1) = \widehat{T}_\pi \oplus \widetilde{1}^n$, $M_1(1) = \widetilde{0}^n$ Пусть $t_2 = \max\{t : t > 1, S_t(1) = \{j\}\}$. Так как $\widehat{T}_\pi^{-1}(\widetilde{1}_n) = \varnothing$, то $t_2 > 1$. Положим $k_1 = \min(\widehat{T}_\pi^{\widetilde{0}_j^n})^{-1}(1)$. В «моменты времени» t, $1 < t \leqslant t_2$, алгоритм $\mathbf{Д}_2(r)$ не использует столбец j и строки $1, 2, \ldots, k-1$ таблицы $\widehat{T}_\pi$, и работа алгоритма при t, $1 < t \leqslant t_2$, будет полностью аналогична его работе на таблице $\widehat{T}_\pi^{\widetilde{1}_j^n}|_{N_{m+1} \setminus N_{k-1}} = \widehat{R}_\pi$. Набор $\widetilde{x}$ из E_k^{n-1}, $k \in N_{n-1}$, будет строиться алгоритмом $\mathbf{Д}_2(r-1)$ при работе на таблице $\widehat{R}_\pi$ тогда и только тогда, когда набор $\widetilde{x}_1$, такой, что $\{\widetilde{x}_1\} = (\widetilde{1}_j^n \& \pi_{\widetilde{1}_j^n}^{-1}(\widetilde{x})) \oplus \widetilde{0}_j^n$, будет строиться алгоритмом $\mathbf{Д}_2(r)$

при работе на таблице $\widehat{T}_\pi$. Ясно, что если $\mathbf{Д}_2(r)$ строит все тесты длины не меньше l, $1 \leqslant l < r$, то и $\mathbf{Д}_2(r-1)$ будет строить все такие тесты. Из этого следует, что алгоритм $\mathbf{Д}_2(r)$ строит все тесты длины не более $l+1$, содержащие j-й столбец. Пусть $\{j_1, \ldots, j_k\} = (\widehat{T}_\pi(1))^{-1}(0)$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$. Для любого $i = 2, \ldots, k$, рассуждая аналогично, сводим работу $\mathbf{Д}_2(r)$ на всей таблице к работе $\mathbf{Д}_2(r-1)$ на таблице $\widehat{T}_\pi^{\widetilde{y}_i}|_{N_{m+1}\setminus N_{k_i-1}}$, где $\widetilde{y}_i = (\oplus_{\nu=1}^{i-1}\widetilde{0}^n_{j_\nu}) \oplus \widetilde{1}^n$, а $k_i = \min(\widehat{T}_\pi^{\widetilde{0}^n_{j_i}})^{-1}(1)$, и получаем, что $\mathbf{Д}_2(r)$ строит все тесты $\widehat{T}_\pi$ длины не более $l+1$, содержащие столбец j_i и не содержащие столбцов $j_1, \ldots, j_{i-1}$. Так как любой текст таблицы $\widehat{T}_\pi$ содержит хотя бы один из столбцов $j_1, \ldots, j_k$, то алгоритм $\mathbf{Д}_2(r)$ строит все тесты таблицы $\widehat{T}_\pi$ длины не более $l+1$. Учитывая предположение индукции, получаем, что алгоритм $\mathbf{Д}_2(r)$ строит все тесты таблицы $\widehat{T}_\pi$, имеющие длину не более r. Очевидно также, что алгоритм $\mathbf{Д}_2(r)$ не проверяет нетестовые наборы длины r.

Утверждение 9.2.2 доказано. □

Утверждение 9.2.3. *Пусть $T \in \mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$, π — нумерация строк $\widehat{T}$, $r > 1$. Тогда алгоритм $\mathbf{Д}_2(r)$ проверяет все псевдотесты $\widehat{T}_\pi$ длины не более $r-1$.*

Доказательство. Пусть $\widetilde{x}$, $\widetilde{x} \in E^n_l$, $l \in N_{r-1}$, — псевдотест $\widehat{T}_\pi$. Тогда можно указать последовательность из l наборов $\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_l$, $\widetilde{0}^n < \widetilde{y}_1 < \ldots < \widetilde{y}_l = \widetilde{x}$, которая будет просматриваться алгоритмом в некоторые «моменты времени» $t_1, \ldots, t_l$, $t_1 < \ldots < t_l$. Пусть $S = \widetilde{x}^{-1}(1)$. Положим $\widetilde{y}_0 = \widetilde{0}^n$,

$$a_i = \begin{cases} \widehat{T}_\pi & \text{при } i = 1, \\ \widehat{T}_\pi(\min(\widehat{T}_\pi^{\widetilde{y}_{i-1}})^{-1}(\widetilde{1}^{i-1})) & \text{при } i = 2, \ldots, l, \end{cases}$$

$$j_i = \min\left\{a_i^{-1}(0) \cap S\right\}, \ \widetilde{y}_i = \widetilde{y}_{i-1} \oplus \widetilde{0}^n_{j_i}.$$

Полученные наборы $\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_l$ и будут искомой последовательностью.

Утверждение 9.2.3 доказано. □

При $r = 1$ алгоритм $\mathbf{Д}_2(r)$ просматривает все наборы $\widetilde{0}^n_j, j \in (\widehat{T}_\pi(1))^{-1}(0)$, и только их.

Утверждение 9.2.4. *Если* $\varepsilon \in (0,1), \ln m_1 m_2 \leqslant 2^{(\ln n)^{1-\varepsilon}}$*, то найдется такое* $b_1, b_1 > 1$*, что при* $r =]\ln m_1 m_2 - b_1 \ln\ln\ln m_1 m_2[$ *выполнено* $\binom{n}{r-1} \overset{\text{п.в.}}{\ll_n} \varphi^{\text{т}}_{V_1,V_2,n,r}$.

Доказательство. Аналогично утверждению 9.1.7 и учитывая, что $\ln r \ll_n \ln n$ получаем, что при $b_1 \in (1, 1/(1-\varepsilon))$ и $r =]\ln m_1 m_2 - b_1 \ln\ln\ln m_1 m_2[$ выполнено $\binom{n}{r-1} \overset{\text{п.в.}}{\ll_n} \varphi^{\text{т}}_{V_1,V_2,n,r}$.

Утверждение 9.2.4 доказано. □

Утверждение 9.2.5. *Если* $c > 1, \ln m_1 m_2 \leqslant (\ln n)^c$*, то найдется такое* $a_1, a_1 \in (0,1)$*, что при* $r =]\ln m_1 m_2 - a_1 \ln\ln m_1 m_2[$ *выполнено* $\binom{n}{r-1} \overset{\text{п.в.}}{\ll_n} \varphi^{\text{т}}_{V_1,V_2,n,r}$.

Доказательство. Аналогично утверждению 9.1.8 и учитывая, что $\ln r \ll_n \ln n$ при $a_1 \in (0,1)$ и $r =]\ln m_1 m_2 - a_1 \ln\ln m_1 m_2$ получаем

$$\binom{n}{r-1} \overset{\text{п.в.}}{\ll_n} \varphi^{\text{т}}_{V_1,V_2,n,r}.$$

Утверждение 9.2.5 доказано. □

Так из утверждения 9.2.2 следует, что для всех пар таблиц T из $\mathfrak{T}_{V_1,V_2,n}$

$$\mu(\mathbf{Д}_2(r), \widehat{T}_\pi) \leqslant \varphi^{\text{т}}_{V_1,V_2,n,r}(T) + \binom{n}{r-1},$$

и в условиях утверждений 9.2.4–9.2.5 $\binom{n}{r-1} \overset{\text{п.в.}}{\ll_n} \varphi^{\text{т}}_{V_1,V_2,n,r}$, то из них следует асимптотическая эффективность алгоритма $\mathbf{Д}_2(r)$.

Список литературы

1. *Андреев А.Е.* О восстановлении пар таблиц по их системам тестов // Тезисы докладов IV Всесоюзной конференции по проблемам теоретической кибернетики. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1977.
2. *Андреев А.Е.* Об одном классе алгоритмов построения тупиковых тестов // Тезисы докладов V Всесоюзной конференции по проблемам теоретической кибернетики. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1980.
3. *Андреев А.Е.* Некоторые вопросы тестового распознавания образов // ДАН СССР. — 1980. — Т. 255, № 4. — С. 781–784.
4. *Андреев А.Е.* О тупиковых и минимальных тестах // ДАН СССР. — 1981. — Т. 256, № 3. — С. 521–524.
5. *Андреев А.Е.* О качественных и метрических свойствах тестовых алгоритмов. Канд. дис. — Москва, 1981.
6. *Андреев А.Е.* Об асимптотическом поведении числа тупиковых тестов и минимальной длины теста для почти всех таблиц // Проблемы кибернетики. — 1984. — Т. 41. — С. 117–141.
7. *Богомолов А.М., Грунский И.С., Сперанский Д.В.* Контроль и преобразование дискретных автоматов. — Киев: Наукова думка, 1975.
8. *Богомолов А.М., Твердохлебов В.А.* Диагностика сложных систем. — Киев: Наукова думка, 1974.
9. *Горяшко А.П.* Синтез диагностируемых схем вычислительных устройств. — М.: Наука, 1987.
10. *Долотова О.А.* О сложности проверяющих тестов для классов Поста // Труды семинара по дискретной математике и ее приложениям. — М.: МГУ, 1989. — С. 233–244.
11. *Долотова О.А.* О сложности проверяющих тестов монотонных функций // Межвуз. темат. сб. научн. тр. — Калинин: Изд-во Калинин. ун-та, 1989.
12. *Долотова О.А.* О сложности контроля логических устройств, реализующих функции из классов Поста // Методы и системы технической диагностики. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. — 1990. — Т. 14, ч. 1. — С. 20–21.
13. *Долотова О.А.* О сложности проверяющих тестов функций из класса F_8^2 // Межвуз. темат. сб. научн. тр. — Калинин: Изд-во Калинин. ун-та, 1990.
14. *Долотова О.А.* О минимальных проверяющих тестах функций из класса F_7^2 // Тезисы докладов IX конференции «Проблемы теоретической кибернетики». — Волгоград, 1991. — Ч.4.
15. *Долотова О.А.* О сложности единичных проверяющих тестов функций из классов Поста // Тезисы докладов IX конференции «Проблемы теоретической кибернетики». — Волгоград, 1991. — Ч.4.
16. *Долотова О.А.* О сложности контроля логических схем типа Поста. Канд. дис. — Москва, 1991.
17. *Долотова О.А.* О сложности минимальных проверяющих тестов для классов Поста // ДАН СССР. — 1992. — Т. 324, № 4. — С. 730–733.
18. *Долотова О.А.* О Минимальных проверяющих тестах функций из классов Поста // Дискретная математика. — 1993. — Т. 5, № 2. — С. 75–82.
19. *Дюкова Е.В.* Об асимптотически оптимальном алгоритме построения тупиковых тестов // ДАН СССР. — 1977. — Т. 233, № 4. — С. 527–530.

20. *Дюкова Е.В.* Об асимптотически оптимальном алгоритме построения тупиковых тестов для бинарных таблиц // Проблемы кибернетики. — 1978. — Т. 34. — С. 169–186.
21. *Дюкова Е. В.* Асимптотически оптимальные тестовые алгоритмы в задачах распознавания. Канд. дис. — Москва, 1979.
22. *Журавлев Ю.И.* О несущественных переменных не всюду определенных функций алгебры логики // Дискретный анализ. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1963. — Т. 1. — С. 28–31.
23. *Журавлев Ю.И.* Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Проблемы кибернетики. — 1978. — Т. 33. — С. 5–68.
24. *Кибкало А.А.* О вычислении весов признаков в тестовых алгоритмах // VII Всесоюзная конференция «Проблемы теоретической кибернетики». Тезисы докладов. — Иркутск: 1986. — С. 88–89.
25. *Кибкало А.А.* О вычислении информационных весов признаков по системе тестов // Алгебра, логика и теория чисел. — М.: Изд-во МГУ, 1986. — С. 44–48.
26. *Кибкало А.А.* Об алгоритмах распознавания образов, использующих короткие тесты // Вестник Московского Университета, Математика, механика. — 1988.
27. *Кибкало А. А.* О T-алгоритмах распознавания, использующих короткие тесты. Канд. дис. — Москва, 1988.
28. *Константинов Р.М., Королева З.Е.* Применение тестовых алгоритмов к задачам геологического прогнозирования // Распознавание образов. Тр. Международн. симпозиума 1971 г. по практическим применениям методов распознавания образов. — М.: ВЦ АН СССР, 1973. — С. 194–199.
29. *Константинов Р.М., Королева З.Е., Кудрявцев В.Б.* Комбинаторно-логический подход к задачам прогноза рудоносности // Проблемы кибернетики. — 1976. — Т. 31. — С. 5–33.
30. *Королева З.Е.* О сравнении тестовых алгоритмов распознавания // Журнал выч. матем. и матем. физики. — 1975. — Т. 15, № 3. — С. 749–756.
31. *Коршунов А.Д.* О длине минимальных тестов для прямоугольных таблиц // Кибернетика. — 1970. — № 6. — С. 17–25.
32. *Коршунов А.Д.* О длине минимальных тестов для прямоугольных таблиц // Кибернетика. — 1971. — № 1. — С. 1–11.
33. *Коспанов Э.Ш.* Об одном алгоритме построения достаточно простых тестов // Дискретный анализ. — Новосибирск, 1966. — Т. 8. — С. 43–47.
34. *Кренделев Ф.П., Дмитриев А.Н., Журавлев Ю.И.* Сравнение геологического строения зарубежных месторождений докембрийских конгломератов с помощью дискретной математики // ДАН СССР. — 1967. — Т. 173, № 5.
35. *Кудрявцев В.Б.* Функциональные системы. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982.
36. *Кудрявцев В.Б.* Теория тестового распознавания // Интеллектуальные системы. — 2006. — Т. 10, № 1–4.
37. *Кудрявцев В.Б., Гасанов Э.Э., Долотова О.А., Погосян Г.Р.* Теория тестирования логических устройств. — М.: Физматлит, 2006.
38. Кузнецов В. Е. Об одном стохастическом алгоритме вычисления информационных характеристик таблиц по методу тестов // Дискретный анализ. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1973. — Т. 23. — С. 8–23.

39. *Мадатян Х.А.* Полный тест для бесповторных контактных схем // Проблемы кибернетики. — 1970. — Т. 23. — С. 103–118.
40. *Мадатян Х.А.* Построение единичных тестов для контактных схем // Сборник работ по математической кибернетике. — М.: ВЦ АН СССР, 1981. — С. 77–86.
41. *Мошков М.Ю.* Условные тесты // Проблемы кибернетики. — 1983. — Т. 40. — С. 131–170.
42. *Нефидов Ф. Н.* Построение модели лечения детей с некоторыми острыми заболеваниями брюшной полости. Канд. дис. — Москва, 1977.
43. *Носков В.Н.* О тупиковых и минимальных тестах для одного класса таблиц // Дискретный анализ. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1968. — Т. 12. — С. 27–49.
44. *Носков В.Н., Слепян В.А.* О числе тупиковых тестов для некоторого класса таблиц // Кибернетика. — 1972. — № 1. — С. 60–65.
45. *Носков В.Н.* Диагностические тесты для входов логических устройств // Дискретный анализ. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1974. — Т. 26. — С. 72–83.
46. *Носков В.Н.* О сложности тестов, контролирующих работу входов логических схем // Дискретный анализ. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1975. — Т. 27. — С. 23–51.
47. *Носков В.Н.* О сложности тестов, контролирующих работу входов логических схем // Математические заметки. — 1975. — Т.18, № 1. — С. 137–150.
48. *Носков В.Н.* О тупиковых и минимальных местах для одного класса таблиц // Дискретный анализ. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1986. — Т. 12. — С. 27–49.
49. *Носов М. В.* Функциональные характеристики тестовых алгоритмов распознавания образов. Канд. дис. — Москва, 1989.
50. *Переяславский В.И.* Об одном линейном методе распознавания образов // Комбинаторно-алгебраические методы в прикладной математике (Межвузовский сб.) — 1982.
51. *Переяславский В.И.* О линейном тестовом алгоритме распознавания // ДАН СССР. — 1983. — Т. 271, № 5.
52. *Погосян Г.Р.* О длине проверяющих тестов для одного класса неисправностей логических устройств // Дискретная математика и математическая кибернетика. — М.: Наука, 1981. — С. 140–145.
53. *Погосян Г.Р.* О проверяющих тестах для логических схем. — М.: ВЦ АН СССР, 1982.
54. *Погосян Г.Р.* О сложности проверяющих тестов для логических устройств. Канд. дис. — Москва, 1982.
55. *Погосян Г.Р.* О длине проверяющих тестов для логических схем // ДАН СССР. — 1982. — Т. 263, № 3.
56. *Редькин Н.П.* О полных проверяющих тестах для контактных схем // Методы дискретного анализа в исследовании экстремальных структур. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1983. — Т. 39 — С. 80–87.
57. *Редькин Н.П.* О проверяющих тестах замыкания и размыкания // Методы дискретного анализа в оптимизации управляющих систем. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1983. — Т. 40. — С. 87–99.

58. *Редькин Н.П.* О полных проверяющих тестах для схем из функциональных элементов // Вестн. МГУ. Серия 1. Математика, механика. — 1986. — № 1. — С. 72–74.
59. *Слепян В.А.* Вероятностные характеристики распределения тупиковых тестов // Дискретный анализ. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1968. — Т. 12. — С. 50–74.
60. *Слепян В.А.* Параметры распределения тупиковых тестов и информационные веса столбцов в бинарных таблицах // Дискретный анализ. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1969. — Т. 14. — С. 28–43.
61. *Слепян В.А.* О числе тупиковых тестов и о мерах информативности столбцов для почти всех бинарных таблиц // ДАН СССР. — 1970. — Т. 191, № 1. — С. 35–38.
62. *Слепян В.А.* Асимптотика среднего числа тупиковых тестов // Кибернетика. — 1970. — № 4. — С. 57–65.
63. *Слепян В.А.* Длина минимального теста для некоторого класса таблиц // Дискретный анализ. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1973. — Т. 23. — С. 59–71.
64. *Соловьев Н.А.* О максимальном числе тупиковых тестов // Кибернетика. — 1972. — № 1. — С. 28–30.
65. Соловьев Н.А., Безусловные минимальные тесты для таблиц с разделенными блоками единиц // Дискретный анализ. — Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1972. — Т. 20. — С. 22–65.
66. *Соловьев Н.А.* Тесты (теория, построение, применение). — Новосибирск: Наука, 1978.
67. *Чегис И.А, Яблонский С.В.* Логические способы контроля электрических схем // Труды матем. ин-та им. В.А. Стеклова, АН СССР. — 1958. — Т. 51. — С. 270–360.
68. *Шайеб А.* Исследование свойств линейных метрических алгоритмов распознавания. Канд. дис. — Москва, 1958.
69. *Яблонский С.В., Чегис И.А.* О тестах для электрических схем // Успехи матем. наук. — 1955. — Т. 10, вып. 4(66). — С. 182–184.
70. *Яблонский С.В., Гаврилов Г.П., Кудрявцев В.Б.* Функции алгебры логики и классы Поста. — М.: Наука, 1966.
71. *Яблонский С.В., Демидова Н.Г., Константинов Р.М., Королева З.Е., Кудрявцев В.Б., Сиротинская С.В.* Тестовый подход к количественной оценке геолого-структурных факторов и масштабов оруднения (на примере ртутных месторождений) // Геология рудных месторождений. — 1971. — Т. 13, № 2. — С. 30–42.
72. *Яблонский С.В.* О построении тупиковых кратных экспериментов для автоматов // Тр. МИАН СССР. — 1973. — Т. 83. — С. 263–272.
73. *Яблонский С.В.* Надежность и контроль управляющих систем // Материалы Всесоюзного семинара по дискретной математике и ее приложениям. — М.: МГУ, 1986. — С. 7–12.
74. *Яблонский С.В.* Некоторые вопросы надежности и контроля управляющих систем // Математические вопросы кибернетики. — 1988. — Т. 1. — С. 5–25.
75. *Post E.* Two-valued iterative systems of mathematical logic. — Princeton, 1941.