

Александр А. Локшин
Ольга В. Бахтина

АРИФМЕТИКА НА ЧАШЕЧНЫХ ВЕСАХ

Пособие



Москва – 2019

УДК 372.8(072):511

ББК 22.130я71

Л73

Локшин А. А., Бахтина О. В.

Л73 Арифметика на чашечных весах / А. А. Локшин, О. В. Бахтина. – Москва : МАКС Пресс, 2019. – 32 с.
ISBN 978-5-317-06258-3

Пособие адресовано, прежде всего, родителям младших школьников (и старших дошкольников), а также учителям начальных классов и студентам пединститутов. Приведено описание ряда опытов с взвешиванием на чашечных весах; эти опыты позволяют дать наглядную практическую интерпретацию законам арифметики и тем самым заложить у детей прочную базу для дальнейшего изучения математики.

УДК 372.8(072):511

ББК 22.130я71

Учебное издание

ЛОКШИН Александр Александрович

БАХТИНА Ольга Владимировна

АРИФМЕТИКА НА ЧАШЕЧНЫХ ВЕСАХ

Пособие

Подготовка оригинал-макета:

Издательство «МАКС Пресс»

Главный редактор: *Е. М. Бугачева*

Компьютерная верстка: *Н. С. Давыдова*

В издании использованы рисунки А. А. Локишина

Подписано в печать 30.10.2019 г.

Формат 84x108 1/32. Усл. печ. л. 3,36.

Тираж 50 экз. Изд. № 254.

Издательство ООО «МАКС Пресс».

Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,

МГУ имени М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, 527 к.

Тел.8(495) 939-3890/93. Тел./Факс 8(495) 939-3891.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»
115201, г. Москва, ул. Котляковская, д.3, стр. 13.

© Локшин А. А., Бахтина О. В., 2019

© Оформление. ООО «МАКС Пресс», 2019

ISBN 978-5-317-06258-3

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта маленькая книжка адресована родителям младших школьников, а также учителям начальных классов и студентам пединститутов. Законы арифметики ребенок познает, прежде всего, оперируя конечными множествами материальных предметов, пересчитывая их, объединяя и пересекая множества, удаляя из множества объектов часть и т.д. Именно предметные действия позволяют ребенку органично воспринять арифметику, поверив собственным глазам, а не чисто механически зазубрив то, что сказал учитель.

Совершенно очевидно, что предметные действия должны быть, по возможности, разнообразными. В этой книжке мы предлагаем ряд несложных математических опытов с чашечными весами; опыты эти позволяют проверить (или, если угодно, установить) справедливость законов арифметики для операций первой ступени – сложения и вычитания (законы второй ступени – умножение и деление – затронуты лишь отчасти).

Кроме того, с помощью простейшего оборудования удастся наглядно продемонстрировать, почему при решении линейных уравнений и неравенств *“можно переносить слагаемое в другую часть с другим знаком”*. Надо сказать, что не раз мы сталкивались с тем,

что первокурсники не могут объяснить, откуда это правило берется (школьное правило принято “на веру”, без понимания). Наглядный опыт с чашечными весами, на наш взгляд, был бы крайне полезен для исправления ситуации, да и вообще для развития воображения.

В заключение заметим следующее. Ребенок (младший школьник) познает математические законы и правила на примерах, а затем, руководствуясь своей способностью к обобщению, воспринимает, так сказать, “общий случай”, когда используются буквенные обозначения вместо конкретных чисел. Некоторым детям этот переход дается труднее, чем остальным. И здесь учителю (и родителям) нужно, на наш взгляд, проявлять осторожность. Например, непонимание того, что значит выражение “*a и b – произвольные числа*” в формулировке переместительно закона $a + b = b + a$, может говорить не только об отсутствии математических способностей, но, напротив, о глубине восприятия математики и стремлении дойти “до самой сути”.

Авторы признательны Е.А. Ивановой и Н.Н. Лавровой за полезные обсуждения.

*Авторы
Москва, сентябрь 2019*

СОДЕРЖАНИЕ

1. Коммутативность сложения. Пример	6
2. Коммутативность сложения. Общий случай	7
3. Ассоциативность сложения. Пример.....	8
4. Ассоциативность сложения. Общий случай	9
5. Обратность вычитания к сложению	10
6. Обратность вычитания к сложению (окончание).....	11
7. Вычитание числа из суммы	12
8. Вычитание суммы из числа	13
9. Вычитание разности из числа	14
10. Вычитание суммы из суммы	15
11. Перенос слагаемого из левой части уравнения в правую (с минусом)	16
12. Перенос вычитаемого из левой части уравнения в правую (с плюсом).....	17
13. Вычисление разности двух неизвестных.....	18
14. Сложение неравенств	19
15. Вычитание неравенств	20
16. Перенос слагаемого из левой части неравенства в правую (с минусом)	21
17. Перенос вычитаемого из левой части неравенства в правую (с плюсом)	22
18. Коммутативность умножения	23
19. Ассоциативность умножения	24
20. Разделение сыпучего груза на равные доли	25
21. Задача о неправильных чашечных весах	26
22. Неправильные чашечные весы и задача Баше	27
23. Приложение для детей	29

1. Коммутативность сложения. Пример

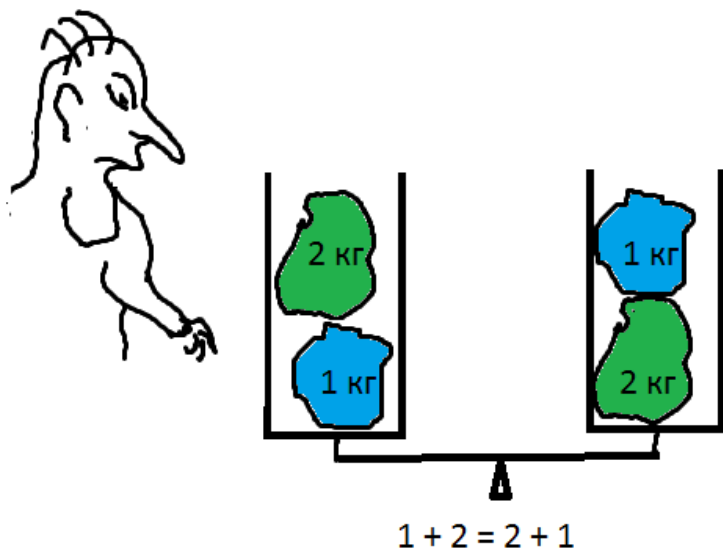
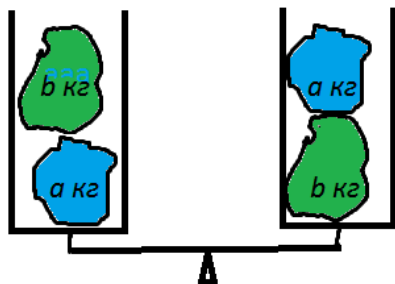


Рис. 1

Итак, мы начали с конкретного примера. Порядок слагаемых определяется очередностью помещения грузов на чаши весов. Для практической демонстрации, очевидно, можно брать любые грузы (не обязательно с целочисленными весами). Ясно также, что практическая демонстрация произведет на детей неизмеримо более сильное впечатление, чем рассматривание картинок.

2. Коммутативность сложения. Общий случай



$$a + b = b + a$$



Рис. 2

А вот это – уже общий случай. Двух-трех практических демонстраций с конкретными предметами наверняка будет достаточно для того, чтобы ребенок воспринял этот закон арифметики в общем виде. Возможно, следует объяснить ребенку, что $a + b = b + a$ – это не одно равенство, а целая серия, бесконечная совокупность равенств, куда вместо букв можно подставлять произвольные (натуральные) числа.

3. Ассоциативность сложения.

Пример

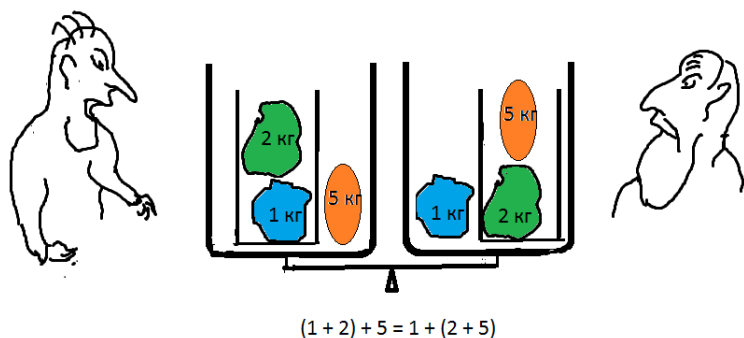


Рис. 3

Опять начинаем демонстрацию арифметического закона на конкретном наборе чисел. В дальнейшем делать этого уже не будем, сразу переходя к буквенным обозначениям.

4. Ассоциативность сложения. Общий случай

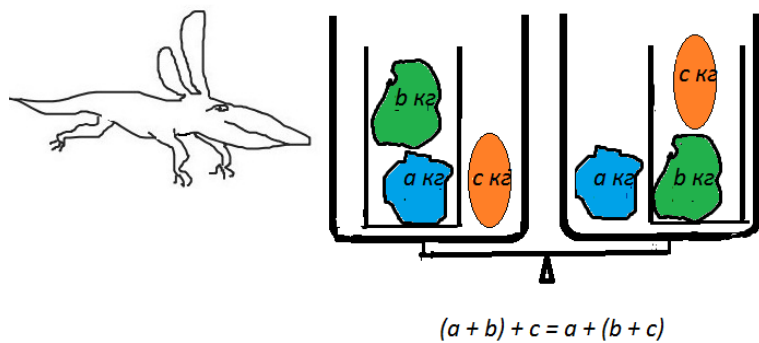


Рис. 4

5. Обратность вычитания к сложению

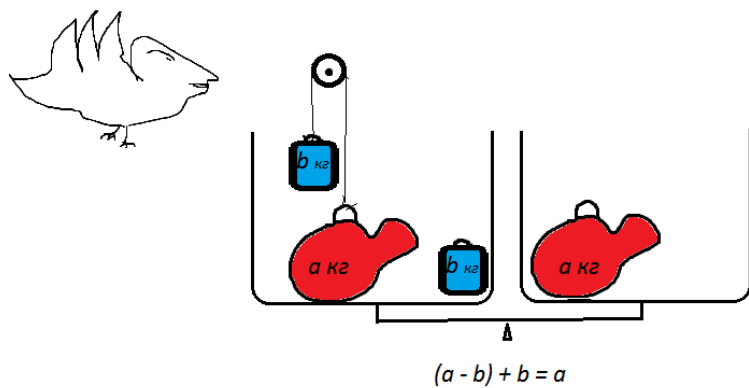


Рис. 5

Здесь предполагается, что $a \geq b$.

6. Обратность вычитания к сложению (окончание)

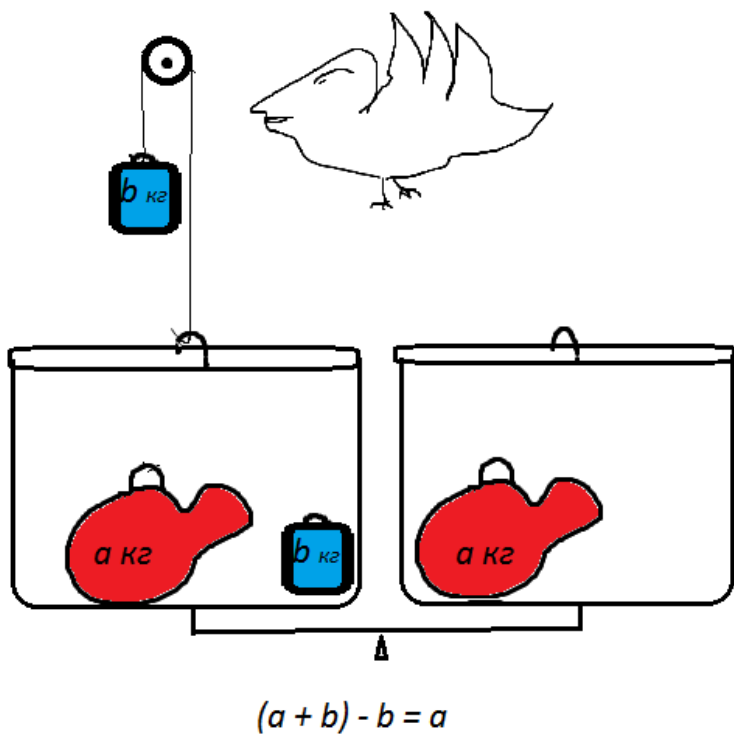


Рис. 6

А здесь, в отличие от предыдущего, условие $a \geq b$ оказывается излишним.

7. Вычитание числа из суммы

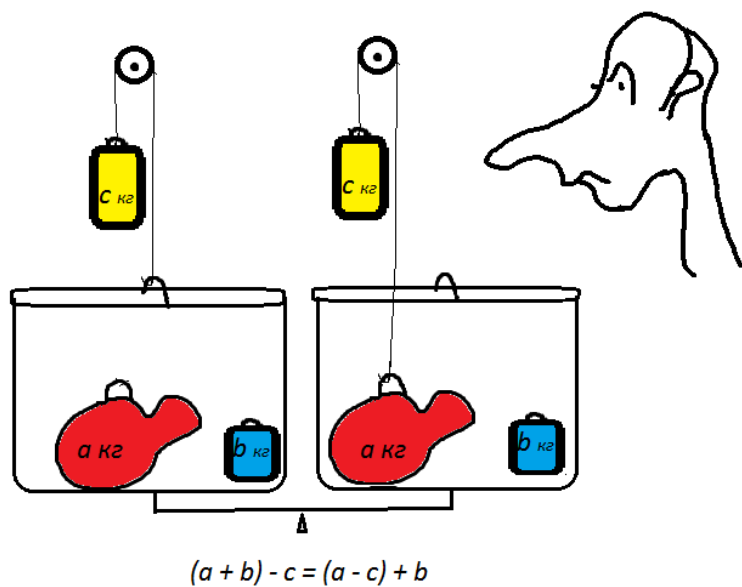


Рис. 7

Здесь предполагается, что $a \geq c$.

8. Вычитание суммы из числа

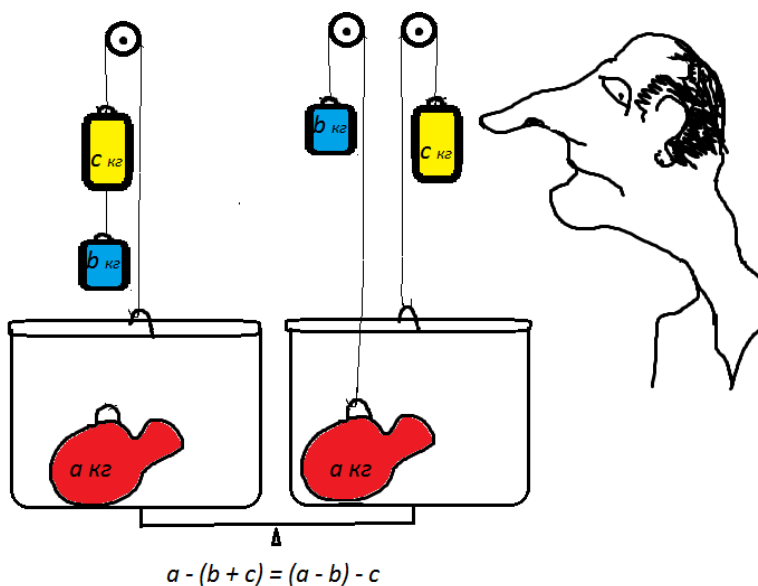


Рис. 8

Этот опыт имеет смысл, только если $a \geq b + c$. Поэтому неравенство $a \geq b$ должно выполняться автоматически.

9. Вычитание разности из числа

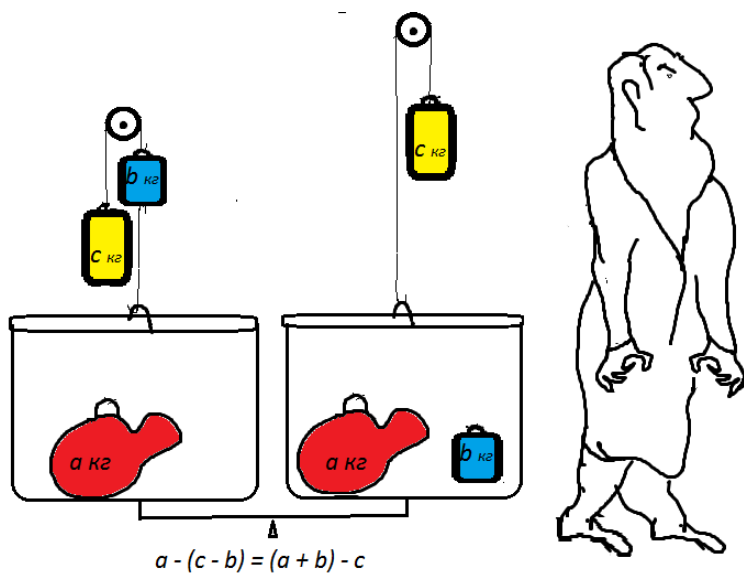


Рис. 9

Предполагается, что $(a + b) \geq c \geq b$.

10. Вычитание суммы из суммы

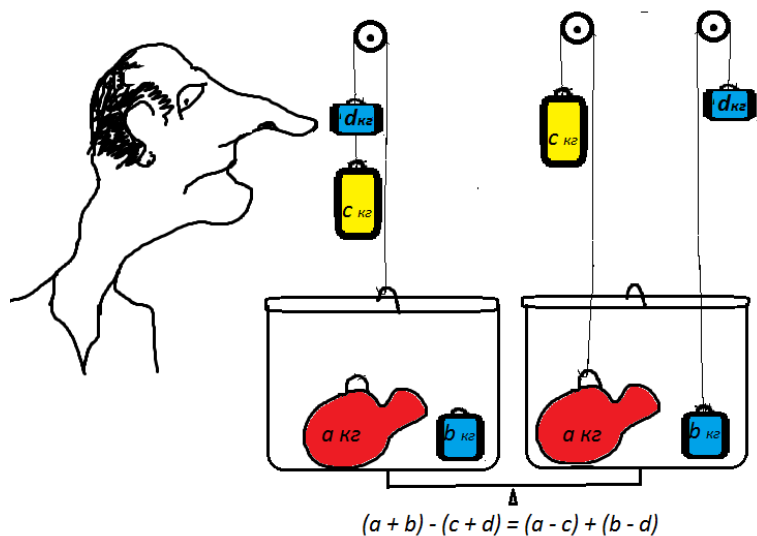


Рис. 10

Снова, как и выше, предполагается, что все участвующие в формуле разности неотрицательны. В дальнейшем повторять это очевидное условие не будем.

11. Перенос слагаемого из левой части уравнения в правую (с минусом)

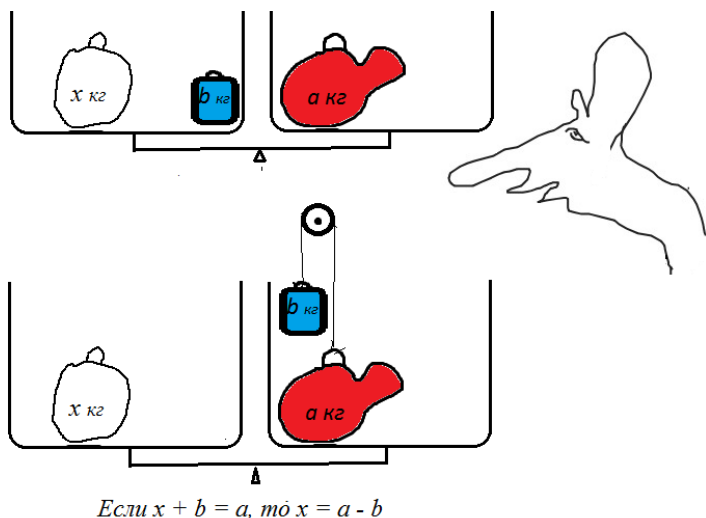


Рис. 11

Этот опыт и следующий за ним – наверное, самые важные в нашей книжке. Груз весом b килограммов, лежавший на левой чаше весов (см. верхний рисунок), удаляется оттуда и подвешивается через блок к грузу, лежащему в правой чаше (см. нижний рисунок).

Вопрос: «А сохранится ли равновесие при переносе груза?» задают даже взрослые, недоверчиво относящиеся к применению математических законов к практике.

12. Перенос вычитаемого из левой части уравнения в правую (с плюсом)

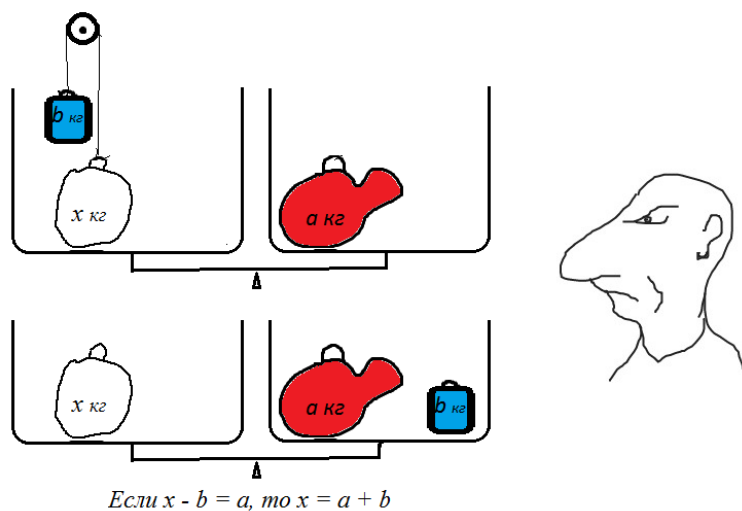


Рис. 12

Этот опыт (как и предыдущий) крайне желательно провести на практике, не ограничиваясь рассмотрением рисунков.

13. Вычисление разности двух неизвестных

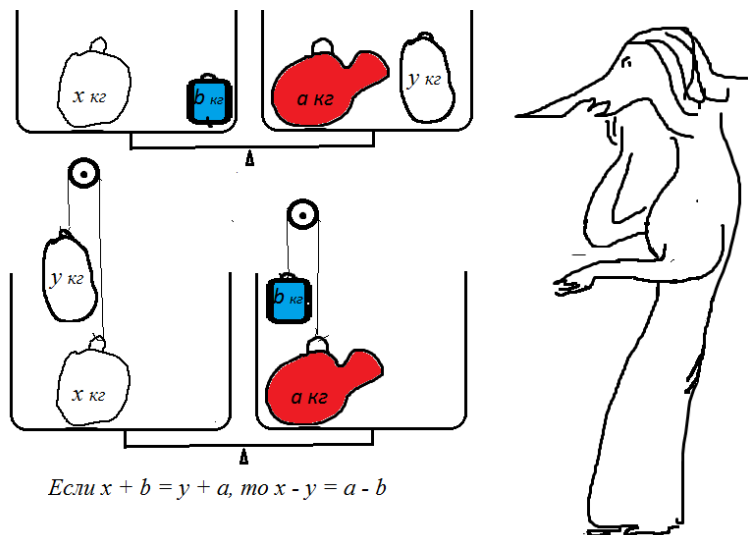


Рис. 13

14. Сложение неравенств

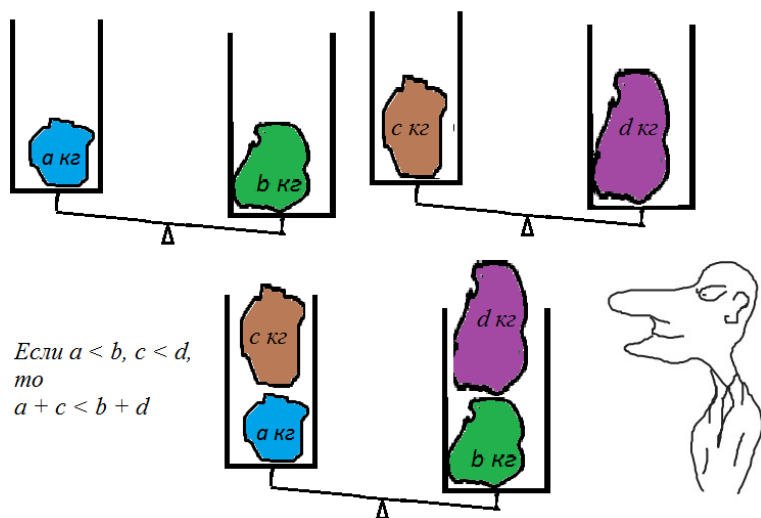


Рис. 14

15. Вычитание неравенств

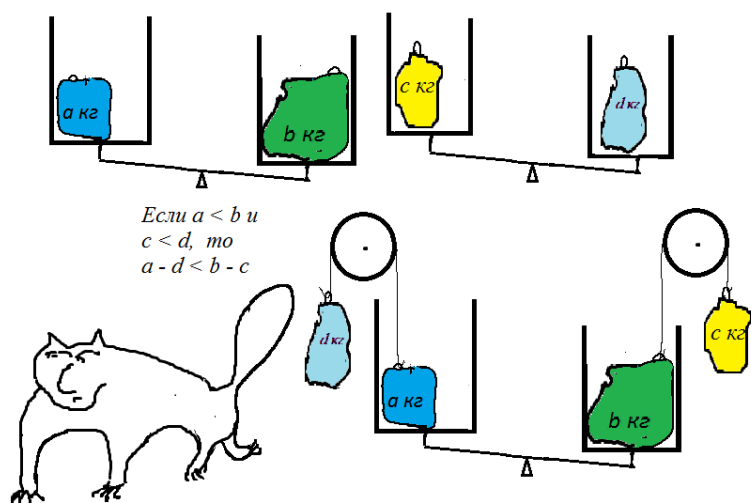


Рис. 15

16. Перенос слагаемого из левой части неравенства в правую (с минусом)

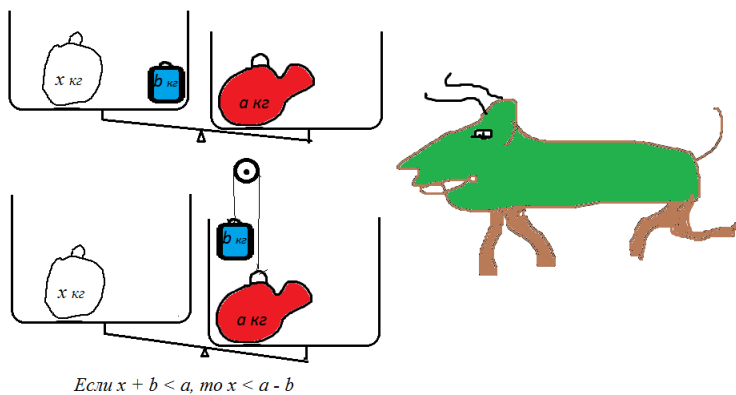


Рис. 16

17. Перенос вычитаемого из левой части неравенства в правую (с плюсом)

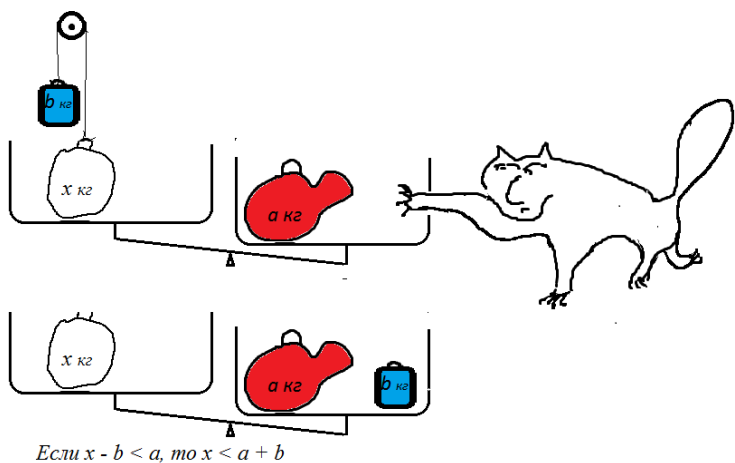
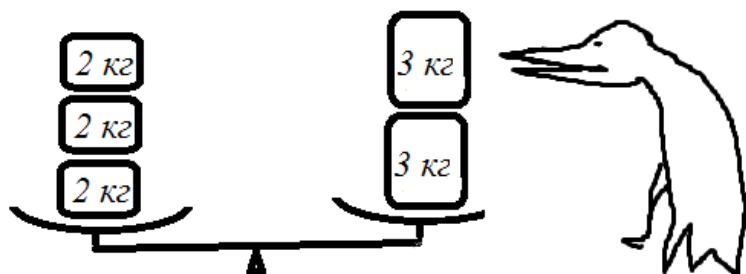


Рис. 17

18. Коммутативность умножения



$$2 \times 3 = 3 \times 2$$

$$ab = ba$$

Рис. 18

Демонстрируем коммутативность умножения, т.е. формулу $ab = ba$, на частном примере.

Обосновывать эту формулу, конечно, следует, работая с объединением конечных непересекающихся равночисленных множеств. Однако предлагаемый опыт тоже может быть полезен, как взгляд на проблему с иной точки зрения.

19. Ассоциативность умножения

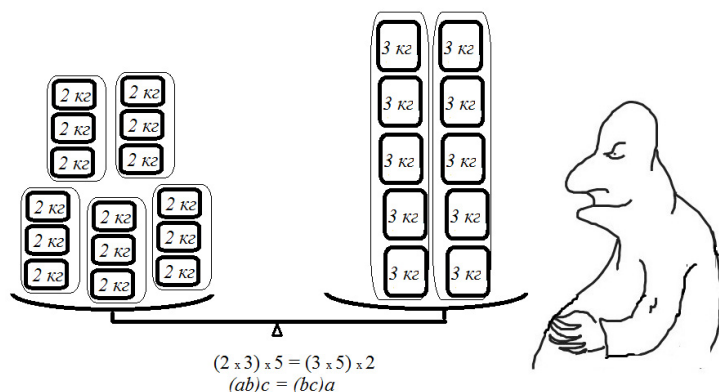


Рис. 19

Вообще говоря, ассоциативность операции умножения натуральных чисел выражается формулой

$$(ab)c = a(bc). \quad (*)$$

Однако соотношение $(ab)c = (bc)a$ оказывается более удобным для демонстрации на чашечных весах; оно равносильно соотношению (*) в силу коммутативности умножения.

20. Разделение сыпучего груза на равные доли

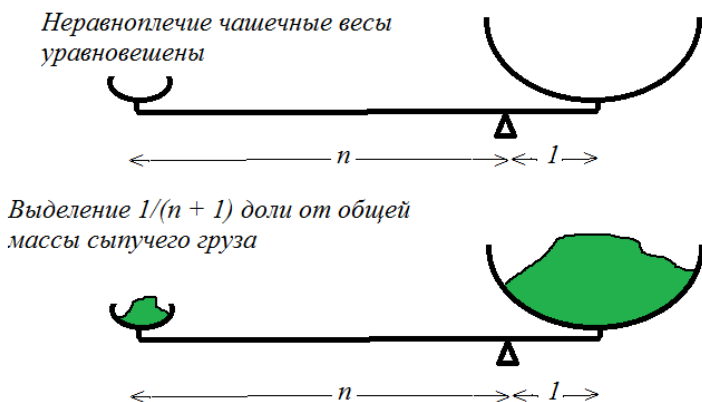


Рис.20

В силу закона рычага выделение $1/(n + 1)$ доли сыпучего груза возможно на неравноплечих чашечных весах, если эти весы предварительно приведены в уравновешенное состояние (см. рис.20). Мы предоставляем читателю возможность самостоятельно разобраться с тем, как следует действовать, чтобы разделить весь груз на $n+1$ равных частей.

21. Задача о неправильных чашечных весах

Определение. Чашечные весы назовем *неправильными*, если выполнены следующие два условия:

- а) *весы не уравновешены;*
- б) *плечи весов разной длины, причем точное соотношение их длин неизвестно.*

Задача. На неправильных чашечных весах, пользуясь двумя гирями неизвестного веса и пустым ведром, требуется точно отвесить 100 г золотого песка. Известно, однако, что разница весов обеих гирь составляет как раз 100 г.

Указание. Никаким дополнительным инвентарем пользоваться нельзя.

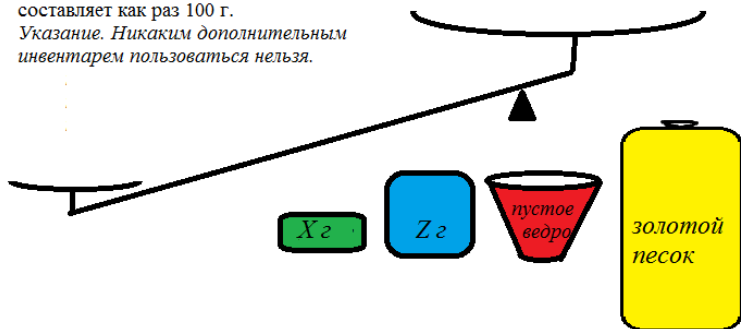


Рис. 21

Замечание. Эта задача представляет собой некоторое обобщение замечательной задачи № 132 из книги [1], где в качестве реквизита используется только одна гиря весом в 1 кг и требуется точно отвесить на неправильных чашечных весах один килограмм крупы.

22. Неправильные чашечные весы и задача Баше

Предыдущая задача естественным образом соединяется с известной задачей Баше о наименьшем количестве гирь, необходимых для взвешивания (на правильных чашечных весах) любого целочисленного груза в заданном весовом интервале. Решением задачи Баше, как известно, является набор гирь с весами, являющимися последовательными степенями тройки:

$$1 \text{ кг}, 3 \text{ кг}, 9 \text{ кг}, 27 \text{ кг}, 81 \text{ кг}, \dots$$

В частности, для взвешивания любого целочисленного груза в интервале от одного до сорока килограммов (включительно), достаточно первых четырех гирь из перечисленного выше набора. Покажем на примере, как с помощью гирь весом в 1 кг, 3 кг, 9 кг, 27 кг уравновесить на правильных чашечных весах груз весом 22 кг.

Прежде всего, представим запись числа 22 в троичной системе, а затем преобразуем эту запись:

$$22 = 2 \times 3^2 + 3 + 1 = (3 - 1)3^2 + 3 + 1,$$

откуда имеем

$$22 + 9 = 27 + 3 + 1.$$

Итак, для достижения равновесия на одну чашу обычных (правильных) весов нужно поставить наш груз (22 кг) и гирю весом в 9 кг, а на другую чашу – гири весом в 1 кг, 3 кг и 27 кг.

Задача. Имеются неправильные чашечные весы, гири весом в 1 кг, 3 кг, 9 кг и 27 кг, пустое ведро и мешок с золотым песком. Доказать, что с помощью перечисленного инвентаря можно точно отвесить любое (целочисленное) количество килограммов золотого песка в промежутке от 1 кг до 40 кг.

Еще задача. Имеются неправильные чашечные весы, мешок с (обычным) песком и девять одинаковых по виду монет, среди которых восемь настоящих и одна фальшивая. Все настоящие монеты одного веса, а фальшивая монета легче настоящих. Каково наименьшее число взвешиваний, позволяющее определить фальшивую монету?

На наш взгляд, эти задачи вполне могут быть адаптированы для использования в начальной школе.

И еще задача. Имеются две монеты, слегка различающиеся по весу, мешок песка и неправильные чашечные весы. Требуется определить, которая из монет тяжелее.

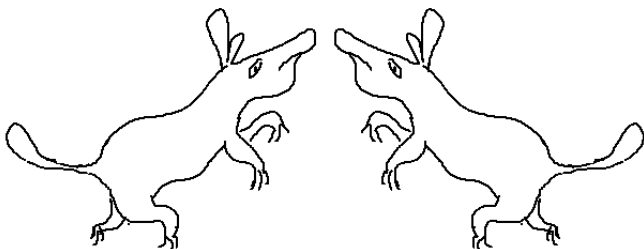


Рис. 22

23. Приложение для детей

Расставьте, пожалуйста, числовые значения на грузах так, чтобы весы находились в равновесии.

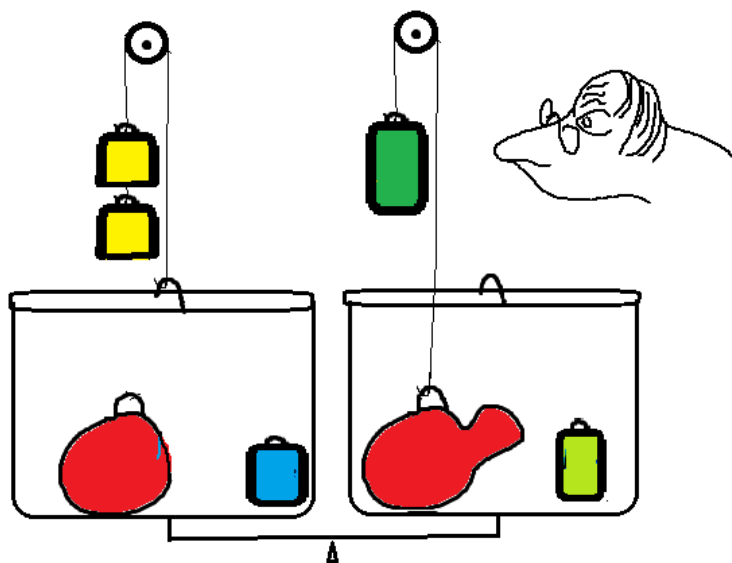


Рис. 23

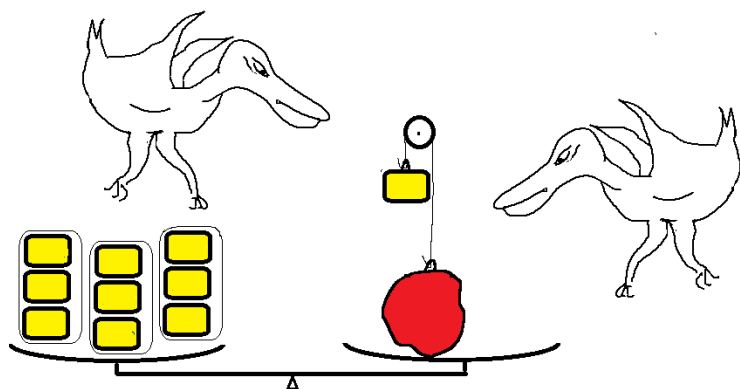


Рис. 24

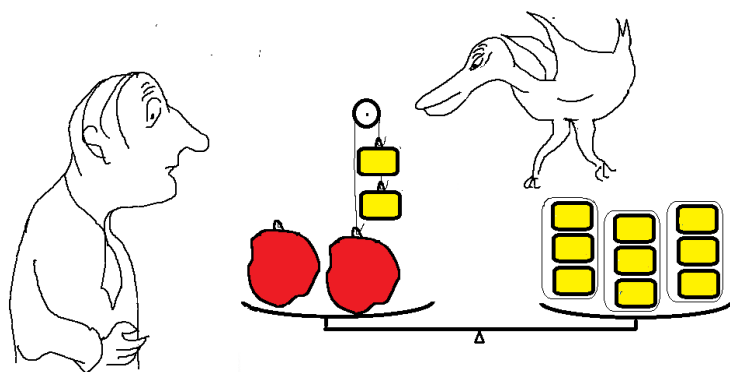


Рис. 25

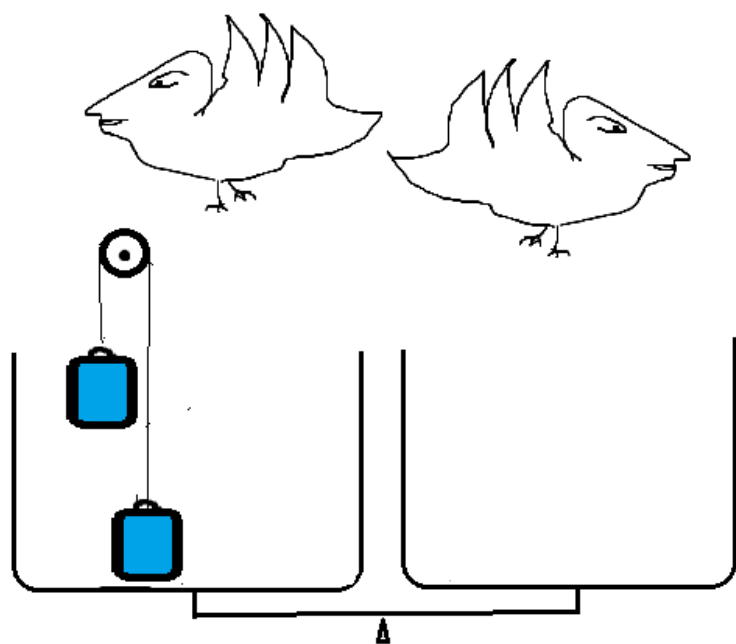


Рис. 26

Литература

1. *Козлова Е.Г.* Сказки и подсказки. – М.: МЦНМО, 2004.
2. *Кноп К.А.* Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. – М.: МЦНМО, 2018.
3. *Спивак А.В.* Тысяча и одна задача по математике. – М.: Просвещение, 2002.