

А. А. Локшин, Е. А. Иванова

«КАМЕШКИ»

И ДРУГИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ



МОСКВА – 2021

УДК 372.8(072):511

ББК 22.130я71

Л73

Локшин А. А., Иванова Е. А.

Л73 «Камешки» и другие математические игры /
А. А. Локшин, Е. А. Иванова. – Москва : МАКС Пресс,
2021. – 44 с.

ISBN 978-5-317-06625-3

Книжка посвящена разбору ряда задач, относящихся к элементарной теории игр. Адресована студентам младших курсов педагогических институтов, а также старшим школьникам, интересующимся математикой.

УДК 372.8(072):511

ББК 22.130я71

ISBN 978-5-317-06625-3

© Локшин А. А., Иванова Е. А., 2021

© Оформление. ООО «МАКС Пресс», 2021

Содержание

| | |
|--|----|
| Предисловие | 4 |
| § 1. О периодических решениях в игре «камешки»..... | 5 |
| § 2. Биения и устойчивость в последовательности П и В в игре «камешки». Мультипликативность периода | 12 |
| § 3. Периодичность проигрышных и выигрышных позиций в игре «камешки» (две кучи камней) | 16 |
| § 4. Игра «ползунок» | 19 |
| § 5. Игра «ломаная» | 23 |
| § 6. Магический квадрат и стратегия Шеня | 24 |
| § 7. Игра с часовыми стрелками | 27 |
| § 8. Задача о трех кучах конфет | 29 |
| § 9. Игра с минусами | 33 |
| § 10. Игра «календарь» | 35 |
| § 11. Доказательство мультипликативности периода в игре «камешки» | 38 |
| Литература..... | 42 |

Предисловие

В этой книжке рассмотрены некоторые вопросы, относящиеся к основам элементарной теории игр и представляющиеся авторам недостаточно освещенными в литературе. Основное внимание уделено вычислению периода в последовательности выигрышных и проигрышных стратегий в игре «камешки», приведено компактное описание выигрышных стратегий в играх «ползунок» и «ломаная», рассмотрены некоторые другие игры. Книжка может быть полезна студентам педагогических вузов и старшим школьникам.

Авторы признательны И.В. Рублеву за полезные обсуждения.

*Авторы,
Москва, 2021*

§ 1. О периодических решениях в игре «камешки»

В этом параграфе (содержание которого в основном взято из [3]) мы рассмотрим один класс несложных задач, встречающийся в теории игр (так называемую игру «камешки»). Пусть имеется куча камней (количество камней в куче равно M) и двое играющих, которые по очереди могут взять из кучи a_1 или $a_2 \dots$ или a_n камней. Здесь

$$a_1 < a_2 < \dots < a_n < M. \quad (1.1)$$

Проигрывает тот, кто не может сделать хода. В частности, если один из игроков в какой-то момент забрал все оставшиеся камни, то его партнер не может сделать хода и, следовательно, проиграл.

Количество камней, остающееся в куче после какого-либо хода одного из партнеров, мы будем называть *позицией*. Позицию будем называть *проигрышной*, если игрок, которому она досталась, неизбежно проиграет при некотором (оптимальном) способе действий его партнера. Ничьих в данной игре, очевидно, не бывает. Поэтому каждая позиция, не являющаяся проигрышной, будет *выигрышной*. А именно, игрок, которому досталась выигрышная позиция, при некотором (оптимальном) способе действий обязательно выиграет у своего партнера.

Нетрудно видеть, что справедливы следующие два исключительно полезные утверждения (см., например, [1, 2]):

Утверждение 1. Позиция, из которой есть **хотя бы один ход** в проигрышную, – выигрышная.

Утверждение 2. Позиция, из которой **все** ходы ведут в выигрышные позиции, сама является проигрышной.

Замечание. Обычно в теории игр принято задавать следующий вопрос. Пусть заданы конкретные числовые значения для a_1, a_2, \dots, a_n, M . Кто выиграет при правильной (оптимальной для каждого из участников) игре – начинающий или его партнер? Проще всего решать такую задачу «с конца», опираясь на Утверждения 1 и 2. А именно, строят последовательность целых неотрицательных чисел (где каждое число – количество камней, оставшихся в куче, т.е. некоторая позиция в рассматриваемой игре), и под каждой такой позицией пишут букву П (проигрышная) или В (выигрышная). Например, если из кучи камней разрешается брать только по два камня, то получается таблица вида:

$$0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ \dots$$

$$\text{ППВВППП ВВП} \dots$$

Нетрудно видеть, что последовательность букв П и В в рассматриваемом частном случае имеет период 4.

Теорема 1. Пусть выполнено условие (1.1). Кроме того, будем считать, что количество M камней в куче сколь угодно велико. Тогда последовательность букв П и В, обозначающих проигрышные и выигрышные позиции в рассматриваемой игре, оказывается периодической начиная с некоторого номера.

Доказательство теоремы. Пусть X – произвольная позиция (т.е. число остающихся камней в куче), такая, что $X > a_n$. Введем обозначение $f(X)$ для функции, принимающей значения П или В, в зависимости от того, является позиция X проигрышной или выигрышной. В силу Утверждений 1 и 2 значение $f(X)$ однозначно определяется значениями $f(X - a_1), f(X - a_2), \dots, f(X - a_n)$. Очевидно, что мы можем ослабить только что сделанное утверждение, придав ему следующую форму:

Для любого X , удовлетворяющего условию $X > a_n$, значение $f(X)$ однозначно определяется значениями

$$f(X-1), f(X-2), \dots, f(X-a_n). \quad (1.2)$$

Далее, заметим, что всегда можно найти такие различные X и Y , что выполнены равенства:

$$\begin{aligned} f(X-1) &= f(Y-1), \\ f(X-2) &= f(Y-2), \\ &\dots \\ f(X-a_n) &= f(Y-a_n). \end{aligned} \quad (1.3)$$

(Для определенности считаем здесь, что $Y > X$.)

Действительно, различных составленных из букв П и В упорядоченных наборов длины a_n имеется всего лишь конечное количество (а именно, 2^{a_n}). Так как рассматриваемая последовательность букв П и В бесконечна (ибо мы устремили M к бесконечности), то существование X и Y с требуемыми свойствами очевидно.

Теперь в силу (1.2) мы можем продолжить равенства (1.3), написав:

$$\begin{aligned} f(X) &= f(Y), \\ f(X+1) &= f(Y+1), \\ f(X+2) &= f(Y+2), \\ &\dots \\ f(X+k) &= f(Y+k) \\ &\dots \end{aligned} \quad (1.4)$$

Покажем, что из этих равенств следует периодичность (начиная с номера X) рассматриваемой последовательности проигрышей и выигрышей. Действительно, положим в (1.4)

$$k = Y - X; \quad (1.5)$$

в результате получим:

$$f(X + (Y - X)) = f(Y + (Y - X)).$$

Используя тождество

$$Y = X + (Y - X), \quad (1.6)$$

предыдущее соотношение, очевидно, можно переписать в виде

$$f(X + (Y - X)) = f(X + 2(Y - X)). \quad (1.7)$$

С учетом (1.4) и (1.6) получаем отсюда:

$$f(X) = f(X + (Y - X)) = f(X + 2(Y - X)). \quad (1.8)$$

Положим теперь в (1.4)

$$k = 2(Y - X). \quad (1.9)$$

Снова пользуясь тождеством (1.6), получаем соотношение, аналогичное (1.7):

$$f(X + 2(Y - X)) = f(X + 3(Y - X)).$$

Продолжая процесс, легко приходим к бесконечной цепочке равенств:

$$f(X) = f(X + (Y - X)) = f(X + 2(Y - X)) = f(X + 3(Y - X)) = \dots \quad (1.10)$$

Аналогичная цепочка равенств, очевидно, может быть установлена для любого натурального i :

$$\begin{aligned} f(X + i) &= f(X + i + (Y - X)) = \\ &= f(X + i + 2(Y - X)) = \\ &= f(X + i + 3(Y - X)) = \dots \end{aligned} \quad (1.11)$$

Из (1.10) и (1.11) и следует утверждение теоремы.

Замечание. Доказанная теорема позволяет дать грубую оценку для длины T наименьшего периода последовательности проигрышных и выигрышных позиций в рассматриваемой задаче.

Прежде всего, заметим, что, поскольку $Y - X$ является длиной одного из периодов нашей последовательности, справедлива оценка $T \leq Y - X$. Далее, как было замечено при доказательстве теоремы 1, различных составленных из букв П и В упорядоченных наборов длины a_n имеется всего 2^{a_n} . Рассмотрим теперь последовательность упорядоченных наборов позиций:

$$[1, 2, \dots, a_n], [2, 3, \dots, a_n + 1], [3, 4, \dots, a_n + 2], \dots, \\ \dots, [1 + 2^{a_n}, 2 + 2^{a_n}, \dots, a_n + 2^{a_n}]. \quad (1.12)$$

Этих наборов позиций в последовательности (1.12) всего $1 + 2^{a_n}$ штук. Следовательно, по крайней мере для двух наборов позиций из последовательности (1.12) соответствующие им упорядоченные наборы букв П и В будут одинаковы. Отсюда, очевидно, следует оценка

$$Y - X \leq 2^{a_n}.$$

Следовательно, для длины T наименьшего периода тем более будет справедлива оценка

$$T \leq 2^{a_n}. \quad (1.12')$$

Эта оценка, безусловно, является чрезвычайно грубой. Однако для общего случая авторам неизвестна более точная оценка длины периода. Впрочем, для достаточно широкого класса задач, в формулировке которых присутствует своеобразная «центральная симметрия», длину периода удается вычислить точно.

Лемма. Пусть в условиях предыдущей теоремы $n = 2$. Для упрощения обозначений положим теперь $a_1 = a$, $a_2 = c$. Тогда последовательность букв П и В, обозначающих проигрышные и выигрышные позиции в рассматриваемой игре, оказывается периодической с самого начала (предпериодическая часть отсутствует) и обладает периодом, длина которого равна $a + c$.

Доказательство. Рассмотрим некоторую произвольную позицию X нашей игры (иными словами, пусть X – это число остающихся камней в куче). Снова воспользуемся обозначением $f(X)$ для функции, принимающей значения Π или B , в зависимости от того, является позиция X проигрышной или выигрышной. Заметим теперь, что

$$\text{если } f(X) = \Pi, \text{ то } f(X + a + c) = \Pi. \quad (1.13)$$

Действительно, пусть игрок A , находящийся в позиции $X + a + c$, берет a камней, т.е. ставит своего партнера в позицию $X + c$. Но тогда его партнер имеет возможность взять c камней и тем самым поставить игрока A в проигрышную позицию X . Если же игрок A , находящийся в позиции $X + a + c$, возьмет c камней, то его партнер возьмет a камней и снова поставит игрока A в проигрышную позицию X . Итак, соотношение (1.13) установлено.

Покажем теперь, что имеет место следующее соотношение, аналогичное (1.13):

$$\text{если } f(X) = B, \text{ то } f(X + a + c) = B. \quad (1.14)$$

Случай 1. $X \geq c$.

Итак, пусть для некоторого X (такого, что $X \geq c$) имеем $f(X) = B$. Тогда в силу Утверждения 1 должно выполняться по крайней мере одно из двух равенств:

$$f(X - a) = \Pi,$$

$$f(X - c) = \Pi,$$

откуда в силу (1.13) следует, что должно выполняться по крайней мере одно из двух других равенств:

$$f(X + c) = \Pi,$$

$$f(X + a) = \Pi.$$

В силу Утверждения 1 отсюда, очевидно, следует, что

$$f(X + a + c) = B.$$

Тем самым соотношение (1.14) в случае $X \geq c$ доказано.

Случай 2. $a \leq X < c$.

Пусть $f(X) = B$. Взять c камней из кучи, находясь в позиции X , очевидно, невозможно. Поэтому должно выполняться соотношение $f(X - a) = П$.

В силу (1.13) отсюда следует, что

$$f(X + c) = П.$$

Вспомянув Утверждение 1, заключаем, что

$$f(X + a + c) = B.$$

Тем самым (1.14) установлено в случае $a \leq X < c$.

Наконец, в случае $0 \leq X < a$ равенство $f(X) = B$, очевидно, невозможно.

Итак, (1.14) полностью доказано. Из (1.13) и (1.14) вытекает утверждение леммы.

Пример. Пусть в условиях предыдущей леммы $a = 2$, $c = 9$. Построим таблицу, сопоставляющую каждой позиции X в игре значение $f(X)$:

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----|
| <u>0</u> | <u>1</u> | <u>2</u> | <u>3</u> | <u>4</u> | <u>5</u> | <u>6</u> | <u>7</u> | <u>8</u> | <u>9</u> | <u>10</u> | <u>11</u> | <u>12</u> | <u>13</u> | <u>14</u> | <u>15</u> | <u>16</u> | <u>17</u> | <u>18</u> | <u>19</u> | <u>20</u> | <u>21</u> | ... |
| П | П | В | В | П | П | В | В | П | В | В | П | П | В | В | П | П | В | В | П | В | В | ... |

Из приведенной таблицы видно, что период последовательности букв П и В равен $2 + 9 = 11$.

Из результата леммы сразу следует важная

Теорема 2 (основная). Пусть выполнены предположения теоремы 1 и пусть, кроме того, для возможных вариантов хода имеет место центральная симметрия:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = S,$$

где S – некоторое натуральное число. Тогда последовательность букв П и В, обозначающих проигрышные и вы-

игрышные позиции в рассматриваемой игре, оказывается периодической с самого начала (предпериодическая часть отсутствует) и обладает периодом, длина которого равна S .

Доказательство этой теоремы полностью аналогично доказательству предыдущей леммы.

§ 2. Биения и устойчивость в последовательности П и В в игре «камешки». Мультипликативность периода

Рассмотрим теперь в качестве примера игру «камешки» со следующими вариантами хода: из кучи камней игроки по очереди могут брать два, девять или сто камней. Проигрывает (как обычно) тот, кто не может сделать хода.

Изобразим последовательность выигрышных и проигрышных позиций в соответствующей таблице:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 ...

П П В В П П В В П В В П П В В П П В В П В В

89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110

П П В В П П В В П В В В В В В П П В В П П В

Мы видим, что последовательность проигрышей и выигрышей в нашей задаче вплоть до позиции 99 (включительно) происходит с периодом 11 в полном соответствии с основной теоремой 2. Однако начиная с позиции 100 эта периодичность «сбивается»: позиция 100, очевидно, становится выигрышной, то же верно и для позиции 101. Однако позиция 102 не превращается в проигрышную, поскольку $102 - 9 = 93$, а позиция 93 проигрышная. Коротко запишем это в виде: $102 = В$, поскольку $93 = П$. Аналогично, $103 = В$,

поскольку $94 = П$. Продолжая в том же духе, заполняем таблицу для позиций 104, 105,... 110. Мы видим, что на промежутке [100; 110] по сравнению с предыдущими промежутками той же длины «рисунок» последовательности проигрышей и выигрышей полностью изменился. Посмотрим, как этот рисунок будет видоизменяться дальше:

| | | | | | | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 111 | 112 | 113 | 114 | 115 | 116 | 117 | 118 | 119 | 120 | 121 | ... |
| В | В | В | В | В | В | В | В | В | П | П | ... |

Мы видим, что новая периодичность не устанавливается сразу же. Более того, на промежутке [200; 210] «в игру», очевидно, вступят изменения, произошедшие на промежутке [100; 110]. В результате возникают своеобразные «бие-ния», из-за которых окончательный период последовательности проигрышей и выигрышей может оказаться большим.

Замечание 1. Существуют, однако, ситуации, когда добавление дополнительного варианта хода *не меняет* установившегося периода в последовательности П и В.

Итак, рассмотрим в качестве очередного примера игру «камешки», в которой из кучи камней двое по очереди берут 1 или 2 камня (как обычно, проигрывает тот, кто не может сделать хода).

В этом случае последовательность проигрышных и выигрышных позиций имеет, очевидно, вид:

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|-----|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | ... |
| П | В | В | П | В | В | П | В | В | П | В | ... |

(2.1)

Таким образом, все проигрышные позиции имеют номера, кратные 3. Если в качестве возможного варианта хода добавить любое натуральное число, большее 1 и не деля-

щееся на 3, то последовательность выигрышных и проигрышных позиций, очевидно, не изменится. Например, таблица (2.1) по-прежнему будет описывать последовательность проигрышных и выигрышных позиций в игре, где игрокам разрешается брать 1, 2 или 7 камней. Аналогичное утверждение справедливо и в еще более общей ситуации, когда вариантов хода несколько: например, разрешается брать за один ход 1, 2, 13, 17 или 25 камней.

Замечание 2. Вот еще один пример, когда добавление нового варианта хода не меняет установившегося периода игры. Итак, пусть в игре «камешки» игроки по очереди берут из кучи камней 2, 3 или 4 камня. В этом случае, как мы можем сразу сказать, опираясь на основную теорему 2 из § 1, длина периода в последовательности П и В будет равна $2 + 4 = 6$. Приведем соответствующую таблицу:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|-----|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | ... |
| П | П | В | В | В | В | П | П | В | В | В | В | П | П | |

(2.2)

Добавим теперь в игру в качестве варианта хода возможность взять 8 камней. Заметим, что $8 = 6 + 2$, т.е. 8 на 2 превышает длину периода исходной игры (2.2). Очевидно, что взятие 8 камней из любой проигрышной позиции в (2.2) обязательно ведет к выигрышной позиции партнера. В результате приходим к выводу, что добавление нового хода в игру не изменило последовательности проигрышей и выигрышей. (Аналогичный эффект произвела бы добавленная в игру возможность взять 9 или 10 камней.)

Замечание 3. В заключение этого параграфа продемонстрируем еще одно замечательное свойство периода последовательностей проигрышей и выигрышей в игре «камешки». Это свойство можно назвать *мультипликативностью периода*, и мы его продемонстрируем на примерах.

Итак, рассмотрим игру, в которой из кучи камней разрешается взять 2 или 8 камней. Такую игру мы будем называть $\{2; 8\}$ -игрой. Нетрудно проверить, что в этой игре период последовательности проигрышей и выигрышей имеет вид ППВВППВВВВ.

Удвоим теперь количества камней, которые разрешается взять из кучи, т.е. рассмотрим $\{4; 16\}$ -игру. Элементарный подсчет позволяет вычислить период и в этой игре; этот период имеет теперь вид

ППППВВВВППППВВВВВВВВ.

Мы видим, что по сравнению с $(2; 8)$ -игрой в $(4; 16)$ -игре период последовательности П и В удлинился вдвое с сохранением “внутренних пропорций”.

Проверим обнаруженную закономерность в более сложном, не симметричном случае, когда из кучи камней первоначально разрешается брать 1, 2 или 6 камней, т.е. рассмотрим $\{1; 2; 6\}$ -игру. Нетрудно проверить, что в этой игре период последовательности проигрышей и выигрышей имеет длину 7 и, соответственно, вид: ПВВППВВВ.

Удвоим количества камней, которые разрешается брать из кучи, т.е. рассмотрим $\{2; 4; 12\}$ -игру. Как и ожидалось, период последовательности П и В удлинился вдвое (теперь его длина стала равна 14) и сохранил свои “внутренние пропорции”. Вот как выглядит этот новый период:

ППВВВВППВВВВВВ.

Авторы провели еще несколько аналогичных экспериментов, в которых сохранялось обнаруженное свойство периода в игре «камешки»: при переходе от $\{a, b, c\}$ -игры к $\{ka, kb, kc\}$ -игре период последовательности П и В удлинялся в k раз с сохранением “внутренних пропорций”.

Задача 1. Выясните, справедливо ли свойство мультипликативности периода в общем случае $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ -игры.

Задача 2. Попробуйте придумать алгоритм, восстанавливающий игру «камешки» по последовательности проигрышных и выигрышных позиций (букв П и В).

§ 3. Периодичность проигрышных и выигрышных позиций в игре «камешки» (две кучи камней)

Попробуем обобщить результат основной теоремы 2 из § 1 на случай, когда камни берутся не из одной кучи, а из двух.

Точнее, поставим задачу следующим образом. Имеются две кучи камней, в которых соответственно М и N камней. Играют двое. По очереди берут из какой-либо одной кучи 1 или 2 камня. Требуется составить таблицу из проигрышных и выигрышных позиций.

В табл. 1 приведен угловой фрагмент этой таблицы, где над верхней строкой по горизонтали отложено число оставшихся камней в куче № 1, а по вертикали справа от крайнего правого столбца – число оставшихся камней в куче № 2. В каждой клетке приведенного фрагмента таблицы записана буква П или В, в зависимости от того, является ли проигрышной или выигрышной позиция с соответствующими координатами. (Заполнение таблицы осуществляется единственным образом при движении влево и вниз от верхнего правого угла.)

Таблица 1. Из любой одной кучи можно брать один или два камня

| | | | | | | | | | | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | |
| П | В | В | П | В | В | П | В | В | П | 0 |
| В | В | П | В | В | П | В | В | П | В | 1 |
| В | П | В | В | П | В | В | П | В | В | 2 |
| П | В | В | П | В | В | П | В | В | П | 3 |
| В | В | П | В | В | П | В | В | П | В | 4 |
| В | П | В | В | П | В | В | П | В | В | 5 |
| П | В | В | П | В | В | П | В | В | П | 6 |
| В | В | П | В | В | П | В | В | П | В | 7 |
| В | П | В | В | П | В | В | П | В | В | 8 |
| П | В | В | П | В | В | П | В | В | П | 9 |

Пусть (X, Y) – произвольная игровая позиция (т.е. пара чисел, обозначающих количества остающихся камней в кучах № 1 и № 2 соответственно). Введем обозначение $F(X, Y)$ для функции, принимающей значения П или В, в зависимости от того, является позиция (X, Y) проигрышной или выигрышной. Из табл. 1 ясно, что функция $F(X, Y)$ оказывается периодической с периодом 3 по каждому аргументу. Более того, все столбцы (и соответственно, все строки) в таблице проигрышных и выигрышных позиций (фрагментом этой бесконечной таблицы является табл. 1) получаются друг из друга в результате сдвига, так что период вдоль каждого столбца (и каждой строки) имеет один и тот же вид: ПВВ. Подчеркнем, что именно таков период в последовательности проигрышей и выигрышей, когда один или два камня берутся из единственной кучи.

Рассмотрим теперь другой пример, слегка видоизменив предыдущую постановку задачи. Пусть теперь из любой одной кучи камней игроки могут по очереди брать 2 или 3 камня.

В этом случае результаты вычислений функции $F(X, Y)$ окажутся более интересными (см. табл. 2).

Таблица 2. Из любой одной кучи можно брать два или три камня

| 9 | 8 | 7 | 6 | 5 | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>В</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>П</i> | <i>П</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>П</i> | <i>П</i> | 0 |
| <i>В</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>П</i> | <i>П</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>П</i> | <i>П</i> | 1 |
| <i>В</i> | <i>П</i> | <i>П</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>П</i> | <i>П</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | 2 |
| <i>В</i> | <i>П</i> | <i>П</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>П</i> | <i>П</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | 3 |
| <i>П</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>П</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | 4 |
| <i>В</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>П</i> | <i>П</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>П</i> | <i>П</i> | 5 |
| <i>В</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>П</i> | <i>П</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>П</i> | <i>П</i> | 6 |
| <i>В</i> | <i>П</i> | <i>П</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>П</i> | <i>П</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | 7 |
| <i>В</i> | <i>П</i> | <i>П</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>П</i> | <i>П</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | 8 |
| <i>П</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>П</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | <i>В</i> | 9 |

И на этот раз функция $F(X, Y)$ оказалась периодической по каждому аргументу, причем длина этого периода снова совпала с длиной периода в задаче, где камни берутся из единственной кучи. Однако на этот раз столбцы (и, соответственно, строки) таблицы выигрышей и проигрышей уже не однотипны, а естественным образом разбиваются на два класса: а) с периодом ВВВВП; б) с периодом ВВВП.

Гипотеза. Имеются две кучи камней, в которых соответственно M и N камней. Играют двое. По очереди берут из какой-либо одной кучи a_1 или $a_2 \dots$ или a_n камней.

Здесь $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \min(M, N)$. Пусть, кроме того, для возможных вариантов хода имеет место центральная симметрия:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \dots = S.$$

Тогда функция $F(X, Y)$, введенная выше, будет периодична по каждой из своих переменных с периодом S .

§ 4. Игра «ползунок»

Эту превосходную игру изобрел Д. Сильверман (1971). Вот ее правила.

Игровое поле состоит из узлов прямоугольной решетки размера $m \times n$. Играют двое. Вначале Первый соединяет единичным (горизонтальным или вертикальным) отрезком два соседних узла. Затем Второй соединяет единичным отрезком (горизонтальным или вертикальным) один из концов отрезка, проведенного Первым, с одним из соседних узлов. *Затем Первый соединяет единичным отрезком один из концов образовавшейся ломаной с одним из соседних узлов.* И так далее. Проигрывает тот, у кого получится замкнутый контур.

В случае, когда хотя бы одно из чисел m, n четно, существует очевидная выигрышная стратегия у Первого игрока. Эта стратегия основана на использовании осевой симметрии (зеркальном повторении ходов Второго игрока). Рассмотрим, например, игровое поле размером 3×4 (см. рис. 1).

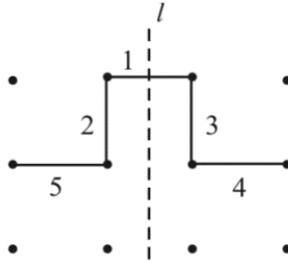


Рис. 1

Здесь нечетными цифрами обозначены ходы Первого игрока, а четными цифрами – ходы Второго. Зеркально отражая (относительно прямой l) ходы Второго игрока, Первый обеспечивает себе победу.

Таким образом, играть на поле размером $m \times n$ в случае, когда хотя бы одно из чисел m, n четно – неинтересно, поскольку выигрышная стратегия Первого очевидна с самого начала.

Обозримым и, вместе с тем, не вполне тривиальным является случай, когда игровое поле имеет размеры 3×3 . Рассмотрением этого случая мы здесь и ограничимся. Покажем, что здесь существует удобная и легко запоминающаяся выигрышная стратегия для Второго игрока.

Прежде всего, заметим, что у Первого игрока существуют всего лишь два существенно различных первых хода (остальные сводятся к ним в результате поворотов и отражений).

Вот эти возможные первые ходы Первого игрока (см. рис. 2).



Рис. 2

В случае а) центрально-симметричная стратегия неизбежно ведет Второго игрока к успеху (см. рис. 3).

Впрочем, в случае а) у Второго игрока имеется еще одна (чуть более опасная) стратегия, также ведущая к выигрышу (см. рис. 4). Если Первый игрок не делает хода “3”, то победа Второго игрока обеспечена.

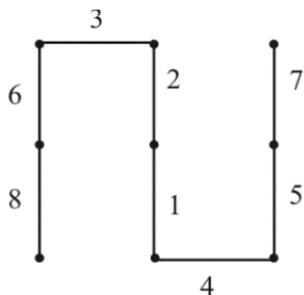


Рис. 3

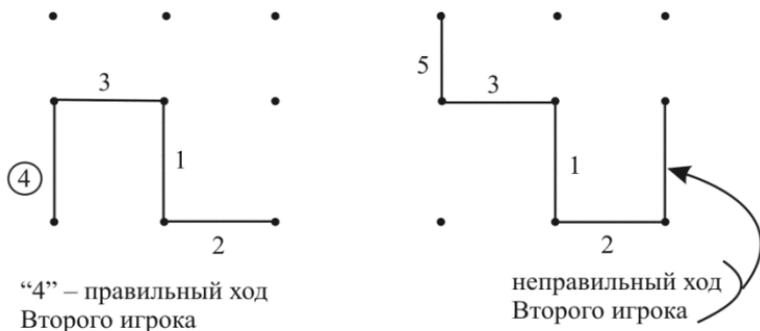
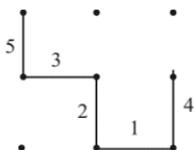


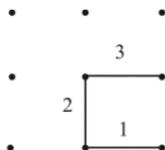
Рис. 4

Если же Первый делает этот ход, то для Второго ход “4”, обведенный кружком на рисунке, является единственным, ведущим к выигрышу. Не делая этого хода, Второй игрок предоставляет возможность Первому игроку сделать ход “5” (см. правую картинку на рис. 4), гарантирующий Первому выигрыш.

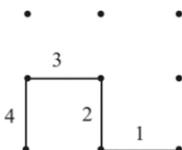
Перейдем теперь к разбору случая б), изображенного на рис. 2. В этом случае правильным ходом Второго игрока будет ход к центру игрового поля (см. рис 5). Затем, при правильной игре Второго игрока, ситуация может развиваться по одному из трех сценариев (Б, В или Г).



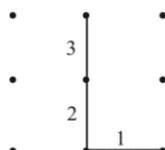
А) Неверный ход “4” Второго игрока после хода “3” Первого игрока



В) Беспригрешная позиция у Второго игрока



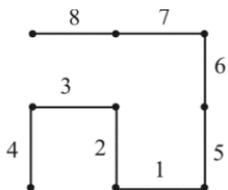
Б) Верный ход “4” Второго игрока после хода “3” Первого игрока



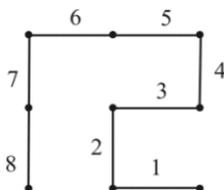
Г) Второй игрок выигрывает, применяя центрально-симметричную стратегию

Рис. 5

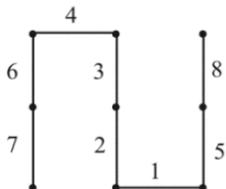
Общим для всех этих сценариев является «вихрь», закручивающийся вокруг центра игрового поля (см. рис. 6).



Б)



В)



Г)

Рис. 6

Понятно, что если ход Первого будет отложен от среднего нижнего узла не вправо, а влево, то соответствующие вихри будут закручиваться в другую сторону.

§ 5. Игра «ломаная»

Эта игра взята нами из книжки А. Шеня «Игры и стратегии с точки зрения математики», где после формулировки условия самой игры предлагается доказать, что у Первого игрока всегда имеется выигрышная стратегия. Вот формулировка этой игры (см. [1], задача 29):

«Даны n точек на плоскости, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Двое играют в такую игру: начав с некоторой точки, по очереди последовательно соединяют их отрезками. Первый проводит отрезок AB из исходной точки A , второй – отрезок BC , первый – CD и так далее. (Ломаная $ABCD\dots$ может быть самопересекающейся и проходить несколько раз через одну и ту же точку, но дважды проходить по одному отрезку нельзя.) Тот, кто не может сделать ход (все отрезки из его точки уже проведены), проигрывает. Докажите, что первый игрок может выиграть».

Заметим, что слова «Докажите, что первый игрок может выиграть», приведенные после формулировки условия игры, сами по себе являются подсказкой, значительно облегчающей поиск оптимальной стратегии.

Эвристическая стратегия, которую мы сумели обнаружить, формулируется очень просто: *при каждом своем ходе Первый игрок должен проводить свой отрезок в точку, уже соединенную с другими точками максимальным числом отрезков. Если таких точек несколько, то безразлично, какую из них выбрать.*

На рис. 7 и 8 изображен ход игры в случае $n = 4$ и $n = 5$. (Как и выше, ходы Первого игрока пронумерованы нечетными числами, а ходы Второго – четными.)

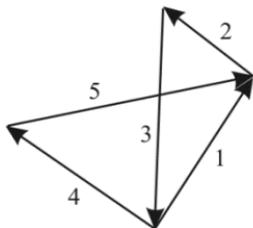


Рис. 7 ($n = 4$)

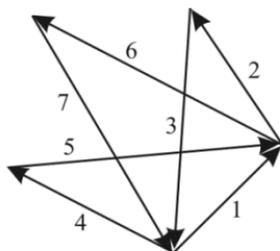


Рис. 8 ($n = 5$)

Что касается строгого доказательства предложенного А. Шенем утверждения, то оно может быть проведено по индукции.

§ 6. Магический квадрат и стратегия Шеня (см. [3])

В этом параграфе мы рассмотрим одну красивую идею, связывающую магический квадрат с игрой в крестики-нолики. Идея эта, по-видимому, принадлежит А. Шеню [1, с. 19–20].

Напомним, прежде всего, что *магическим квадратом* n -го порядка называется квадратная таблица размера $n \times n$, заполненная числами $1, 2, \dots, n^2$, причем так, что сумма этих чисел вдоль каждой строки, каждого столбца и каждой из двух диагоналей одна и та же. Рассмотрим магический квадрат третьего порядка (см. рис. 9).

| | | |
|---|---|---|
| 2 | 9 | 4 |
| 7 | 5 | 3 |
| 6 | 1 | 8 |

Рис. 9

Можно показать, что все остальные магические квадраты размера 3×3 , заполненные девятью различными ненулевыми цифрами, получаются из квадрата, изображенного на рис. 9, при помощи отражений относительно горизонтальной и/или вертикальной средней линии, а также относительно диагоналей этого квадрата. (Заметим, что суперпозиция отражения относительно какой-либо средней линии квадрата и отражения относительно диагонали квадрата представляет собой поворот на 90 градусов с центром в центре квадрата.)

А. Шень в [1] предложил следующую игру:

*На столе выложены карточки с номерами от 1 до 9. Двое играющих по очереди берут карточки; выигрывает тот, кто **первым** соберет **три** карточки с общей суммой 15.*

Как заметил А. Шень, если расположить эти карточки в виде магического квадрата (см. рис. 9), предложенная им игра сведется к обычной игре в крестики-нолики! Дело здесь в том, что существует в точности восемь различных комбинаций из трех ненулевых цифр, которые в сумме дают 15, и все эти комбинации представлены на рис. 9. (Об-

щеизвестно, что при правильной игре в крестики-нолики на квадрате 3×3 неизбежна ничья.)

Ниже предлагается следующая 1-я модификация игры Шеня.

На столе выложены десять карточек с написанными на них номерами: 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 9 (номер «три» встречается дважды). Двое играющих по очереди берут карточки; выигрывает тот, кто **первым** сможет составить из каких-либо **трех** своих карточек набор с общей суммой 15.

Пример.

Таблица 3

| | | | | | |
|------------------------|---|---|---|---|---|
| Ходы Первого игрока | 5 | 8 | 4 | 7 | 9 |
| Ходы Второго игрока | 3 | 2 | 6 | 3 | 1 |

Как видно из табл. 3, результат проведенной игры – ничья (ни один из игроков не может из своих пяти карточек выбрать три с общей суммой 15).

Задача 1. Проводится 1-я модифицированная игра Шеня. Каким будет ее итог, если оба игрока действуют оптимально?

Решение. Покажем, что при правильной игре Первый игрок выигрывает. Итак, первый ход Первого игрока – это карточка с числом 5. Чтобы предотвратить немедленный выигрыш Первого, Второй игрок должен взять карточку с числом 7. В противном случае своим следующим ходом эту карточку возьмет Первый игрок, а затем, как бы ни ответил ему Второй, возьмет карточку с числом 3.

После того, как Второй игрок возьмет карточку с числом 7, Первый может взять, например, карточку с числом 2. Дальнейшие ходы при оптимальной игре обоих игроков определяются однозначно (см. рис. 9 и табл. 4).

Таблица 4

| | | | | | |
|------------------------|---|---|---|---|--|
| Ходы Первого игрока | 5 | 2 | 4 | 9 | |
| Ходы Второго игрока | 7 | 8 | 6 | | |

Итак, $2 + 4 + 9 = 15$; Первый игрок выиграл.

Рассмотрим теперь 2-ю модификацию игры Шеня:

*На столе выложены десять карточек с написанными на них номерами: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 9 (номер «шесть» встречается дважды). Двое играющих по очереди берут карточки; выигрывает тот, кто **первым** сможет составить из каких-либо **трех** своих карточек набор с общей суммой 15.*

Задача 2. Проводится 2-я модифицированная игра Шеня. Каким будет ее итог, если оба игрока действуют оптимально?

§ 7. Игра с часовыми стрелками

Вот еще одна задача, в похожей формулировке приведенная в [1].

Задача 1. *Стрелки на циферблате показывают полночь. Первый и Второй игроки по очереди переводят стрелки часов на 3 или 4 часа вперед. Выигрывает тот, кто первым*

поставит стрелки в исходное положение. Кто выиграет при оптимальной игре – Первый или Второй игрок?

Решение. Постановка задачи, на первый взгляд, лишь несущественно отличается от постановки задачи в игре «кашечки». Ниже, при поиске оптимальной стратегии, мы увидим, однако, довольно значительные отличия этих двух игр.

Как и в случае игры «кашечки», будем анализировать поставленную задачу «с конца». Предположим, что стрелки удалось установить в исходное положение спустя сутки, так что часовая стрелка сделала на циферблате два полных оборота. Изобразим теперь (не на циферблате, а на числовой оси) последовательность выигрышных и проигрышных положений часовой стрелки; см. табл. 5:

Таблица 5

(стрелки можно переводить на 3 или на 4 часа вперед)

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 |
| В | ? | ? | П | ? | ? | В | В | ? | ? | П | ? | ? | В | В | ? | ? | П | ? | ? | В | В | ? | ? | П |

Итак, анализ задачи «с конца» удалось провести и обнаружить выигрышную стратегию для Первого игрока.

Заметим, что, в отличие от анализа «с конца» в игре «кашечки», относительно многих позиций мы не сумели узнать, являются ли они выигрышными или проигрышными.

Из следующей задачи будет ясно, что анализ «с конца» не является универсальным средством, позволяющим отыскать оптимальную стратегию.

Задача 2. *Стрелки на циферблате показывают полночь. Первый и Второй игроки по очереди переводят стрелки часов на 1 или 5 часов вперед. Выигрывает тот, кто первым поставит стрелки в исходное положение. Кто выиграет при оптимальной игре – Первый или Второй игрок?*

Вот к какому результату приводит на этот раз попытка проанализировать задачу «с конца»; см. табл. 6:

Таблица 6

(стрелки можно переводить на 1 или на 5 часов вперед)

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | |
| ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? | ? | В | ? | ? | ? | В | П |

Таким образом, выяснить, как следует действовать игрокам, при помощи анализа задачи «с конца» не удастся. Способ, к которому остается прибегнуть, чтобы решить задачу – построение дерева всевозможных ходов обоих игроков.

§ 8. Задача о трех кучах конфет

В этом параграфе мы рассмотрим модификацию одной превосходной игры, приведенной в книге Н.Н. Петрова; см. [2, с. 119]. (Модификация заключается в том, что у нас три кучи конфет, а не две, как в [2].) Эта книжка уже была сдана в печать, когда авторы обнаружили, что предлагаемая задача разобрана в [7, с. 124]. Наш анализ, однако, несколько отличается от проведенного в [7].

Итак, пусть имеются три кучи конфет: в одной куче – тридцать, в другой – 25, в третьей – 17. Играют двое: Петя и Вася. Ход игрока заключается в следующем: он съедает целиком одну из куч, а любую из двух оставшихся делит на две (непустые) части произвольным образом. Тогда после очередного хода игрока снова получаются три кучи конфет. Проигрывает тот, кто не может сделать хода.

Очевидно, что сделать ход не удастся, если во всех трех кучах осталось по одной конфете.

Кто же выиграет в этой игре – Петя (он ходит первым) или его противник Вася? Ответ на этот вопрос мы сейчас получим, рассмотрев задачу в более общем виде:

Имеются три кучи конфет: в одной куче m , в другой n , в третьей k штук. Играют двое. Ход игрока заключается в следующем: он съедает целиком одну из куч, а любую из двух оставшихся делит на две (непустые) части произвольным образом. Тогда после очередного хода игрока снова получают три кучи конфет. Проигрывает тот, кто не может сделать хода.

Случай А. Покажем, что если одно из чисел m , n , k – четное, а два других – нечетные, то выигрывает Первый игрок. Действительно, в этом случае действия Первого игрока могут быть следующими. Он съедает одну из «нечетных» куч, а непустую «четную» кучу делит на две новые «нечетные» кучи. Таким образом, Второму игроку достаются три «нечетные» кучи. Одну из них он съедает, а одну из оставшихся (если это возможно!) делит на две части. При этом одна из двух образовавшихся новых куч обязательно будет «четной», а другая – «нечетной».

В результате Первому игроку достанется та же самая ситуация, с которой он уже имел дело: одна «четная» куча и две «нечетных». Действуя упомянутым выше способом, за конечное число ходов Первый игрок создаст ситуацию, когда во всех трех образовавшихся кучах лежит по одной конфете, и Второй не может сделать хода.

Случай В. Пусть теперь все три числа m , n , k – нечетные. Очевидно, что по сравнению с предыдущим случаем Первый и Второй игрок просто-напросто поменялись ролями, и выигрыш достается Второму игроку.

Случай С. Рассмотрим, далее, случай, когда среди чисел m , n , k два четных, а одно – нечетное. В этом случае Первый

игрок снова может обеспечить себе победу. Единственное отличие от случая А состоит в том, что на своем первом ходе Первый игрок должен съесть одну из «четных» куч.

Случай D. Пусть, наконец, все три числа m , n , k – четные. В этом случае оптимальная стратегия уже не является такой простой, как в случаях А, В и С. Понятно, что Первому игроку невыгодно разделять одну из не съеденных им «четных» куч на две «нечетные». Тем самым Первый игрок мгновенно уступил бы выигрыш Второму; см. случай А. Таким образом, Первый игрок будет стремиться разделять «четную» кучу на две «четные»; но то же самое будет стараться делать (пока это возможно!) и Второй игрок. (Очевидно, что позиция, когда во всех трех кучах осталось по 2 конфеты, является проигрышной.)

Пример 1. Рассмотрим в качестве примера случай, когда в одной из куч 6 конфет, а в двух других – по 4. Порядок расположения куч, очевидно, не имеет значения. (Начальную позицию, а также каждую последующую позицию, мы будем обозначать как числовое множество, элементы которого перечислены в фигурных скобках.) С учетом сказанного выше, партия в нашем примере может развиваться по одному из следующих сценариев:

$\{6; 4; 4\} \rightarrow \{6; 2; 2\} \rightarrow \{4; 2; 2\} \rightarrow \{2; 2; 2\} \rightarrow \{1; 1; 2\} \rightarrow \{1; 1; 1\}$

(выигрыш Первого игрока), либо

$\{6; 4; 4\} \rightarrow \{4; 2; 4\} \rightarrow \{2; 2; 2\} \rightarrow \{1; 1; 2\} \rightarrow \{1; 1; 1\}$

(выигрыш Второго игрока). Таким образом, в рассматриваемом примере при правильной игре Первый может обеспечить себе победу.

Пример 2. Рассмотрим теперь важный для понимания задачи случай, когда во всех трех кучах по 4 конфеты. Тогда с учетом соображений, высказанных выше, при ра-

зумных действиях обоих игроков партия будет развиваться следующим образом:

$$\{4; 4; 4\} \rightarrow \{4; 2; 2\} \rightarrow \{2; 2; 2\} \rightarrow \{1; 1; 2\} \rightarrow \{1; 1; 1\}$$

Таким образом, партия заканчивается выигрышем Второго игрока, т.е. $\{4; 4; 4\}$ – проигрышная позиция (как и позиции $\{2; 2; 2\}$ и $\{1; 1; 1\}$).

Перейдем теперь к разбору общей ситуации в случае D. Пусть начальная позиция имеет вид $\{2m; 2n; 2k\}$; для определенности будем считать, что числа m и n – нечетные, а k – четное ($k = 2q$). Как мы знаем, при любой разумной стратегии игроки будут стараться разбивать «четные» кучи снова на «четные» кучи. Поэтому игра будет проходить *почти* по тому же сценарию, что и при начальной позиции $\{m; n; k\}$. Это означает, что при сделанных предположениях правильная игра обеспечивает Первому игроку выигрыш (см. разобранный выше случай A).

Действительно, при сделанных предположениях игра начнет протекать так:

$$\{2m; 2n; 4q\} \rightarrow \{2n; 4q - 2; 2\} \text{ (это был первый ход Первого игрока).}$$

Затем Второй игрок должен: либо 1) уничтожить кучу, состоящую из двух конфет; либо 2) уничтожить одну из двух других «четных» куч. В первом случае партия, очевидно, продолжится следующим образом:

$$\{2m; 2n; 4q\} \rightarrow \{2m; 4q - 2; 2\} \rightarrow \{2m_1; 2n_1; 4q_1\}$$

(где m_1 и n_1 – нечетные числа).

Во втором случае продолжение игры будет выглядеть так:

$$\{2m; 2n; 4q\} \rightarrow \{2n; 4q - 2; 2\} \rightarrow \{2m_2; 4n_2; 2\}$$

(где m_2 нечетно).

В обоих случаях после хода Второго игрока перед Первым оказывается (как и в начале игры) куча конфет с численностью, кратной 4. Эту кучу Первый игрок всегда может разделить на две «четные» кучи, численности которых не делятся на 4. В результате в какой-то момент Второму игроку придется иметь дело с позицией $\{2; 2; 2\}$, а это, как мы знаем, – проигрышная позиция.

Замечание. Проведение полного анализа игры мы предоставляем читателю.

Задача. *Имеются четыре кучи конфет, в которых содержится соответственно 25, 26, 27 и 28 конфет. Играют двое. Ход игрока (как и выше) заключается в следующем: он съедает целиком одну из куч, а любую из оставшихся делит на две (непустые) части произвольным образом. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выиграет при правильной игре – Первый игрок или Второй?*

§ 9. Игра с минусами

Рассмотрим еще две простые, но любопытные задачи.

Задача 1. *Вдоль прямой через равные промежутки поставлено 100 минусов. Играют двое. За один ход разрешается зачеркнуть один минус или три соседних минуса. Проигрывает тот, кто не может сделать хода (ничего зачеркивать, все минусы уже зачеркнуты). Кто выиграет при правильной игре – Первый игрок или Второй?*

Обычно задачу про зачеркивание минусов формулируют несколько иначе – в условии говорится, что зачеркивать можно один или два рядом стоящих минуса. При такой постановке Первый игрок обеспечивает себе выигрыш, за-

черкнув единственный средний минус (если исходное число минусов нечетно) или два средних минуса (если исходное число минусов четно). Затем Первый игрок отвечает на ходы Второго симметричным образом.

В нашей постановке, однако, при правильной игре выигрывает Второй игрок. Действительно, обозначим через O середину отрезка, на котором расположены упомянутые в условии задачи сто минусов.

Тогда если Первый игрок перечеркивает минусы, лежащие по одну сторону от точки O , то Второй отвечает ему, перечеркивая минусы, расположенные симметрично относительно точки O .

Если же Первый игрок своим ходом перечеркивает три соседних минуса, лежащих по разные стороны от точки O (например, два – левее точки O , а один – правее), то Второй игрок перечеркивает один минус, соседний с перечеркнутым минусом, лежащим справа от O . В результате набор оставшихся не перечеркнутыми минусов оказывается симметричным относительно точки O . Теперь на каждый следующий ход Первого игрока Второй может ответить симметрично.

Задача 2. *Вдоль прямой через равные промежутки поставлено 100 минусов. Играют двое. За один ход разрешается зачеркнуть один минус или пять соседних минусов. Проигрывает тот, кто не может сделать хода (ничего зачеркивать, все минусы уже зачеркнуты). Кто выигрывает при правильной игре – Первый игрок или Второй?*

Решение этой задачи мы предоставляем читателю.

§ 10. Игра «календарь»

Эта игра принадлежит математическому фольклору; ее подробный разбор содержится в [7, с. 60–61]. Наши формулировка и анализ, однако, несколько отличаются от приводимых в [7].

Итак,

Игра «календарь». *Играют двое, по очереди называя все более и более поздние даты текущего года. При этом соблюдают следующие условия:*

1) своим начальным ходом Первый игрок называет любую дату января, за исключением 20 января;

2) затем каждый игрок может либо увеличивать число месяца, либо номер месяца, но дату 20 января никто из игроков называть не может;

3) выигрывает тот, кто сумеет назвать дату 31 декабря.

Кто выиграет при правильной игре – Первый игрок или Второй?

Заметим, прежде всего, что перечисленные условия почти совпадают с условиями следующей хорошо известной игры:

Вспомогательная задача. *На столе лежат две кучи камней, в которых соответственно M и N камней, причем M не равно N . Играют двое – по очереди берут произвольное количество камней из какой-то одной кучи. Выигрывает тот, кто возьмет последний камень.*

Решение вспомогательной задачи. В этой игре, как нетрудно видеть, при правильной стратегии выигрывает Первый игрок. Действительно, своим начальным ходом он должен уравнивать количество камней в обеих кучах. А затем

«копировать» ходы противника, используя симметричную стратегию (и тем самым каждый раз уравнивая количество камней в кучах).

Вернемся теперь к рассматриваемой игре «календарь».

В этой игре “камни из кучи № 1” – это натуральные числа 1, 2, 3, ..., 31, а “камни из кучи № 2” – месяцы года: январь, февраль, ..., декабрь.

Как мы знаем из решения вспомогательной задачи, своим начальным ходом Первый игрок должен уравнивать количество “камней” в обеих кучах. По условию игры, Первый игрок своим начальным ходом должен назвать какую-то январскую дату и тем самым забрать один месяц (январь) из кучи, содержащей 12 месяцев. В результате численность кучи № 2 становится равной 11.

Теперь, чтобы уравнивать численности обеих куч, Первый игрок должен назвать число 20. Действительно, тогда в куче № 1 останутся только натуральные числа 21, 22, 23, ... 31 (всего 11 штук).

Но дату 20 января называть запрещено! Поэтому в решение вспомогательной задачи необходимо внести коррективы. А именно, своим начальным ходом Первый игрок должен назвать дату 19 января. Так как запрет называть дату 20 января относится к обоим игрокам, то Второй будет вынужден увеличить либо число месяца (января), либо назвать один из следующих месяцев, сохранив число 19. В обоих случаях Первый игрок сможет применять симметричную стратегию, уравнивая численность обеих куч, что и обеспечивает ему победу в игре.

Замечание 1.

После начального хода “19 января”, Первый игрок может легко (не составляя таблицы выигранных и проиг-

рышных позиций) определять, каким должен быть его следующий ход. Действительно, равночисленность куч означает выполнение равенства:

$$31 - \text{“число”} = 12 - \text{“номер месяца”},$$

т.е.

$$\text{“число”} = 19 + \text{“номер месяца”}. \quad (10.1)$$

Это равенство может использоваться Первым игроком в двух различных (и, в некотором смысле, противоположных) ситуациях.

А) В случае, если “номер месяца” сохраняется, Первый игрок называет определяемое из равенства (10.1) новое “число”.

В) В случае, если сохраняется “число”, (10.1) позволяет вычислить новый “номер месяца”:

$$\text{“номер месяца”} = \text{“число”} - 19. \quad (10.2)$$

Например, если Второй игрок назвал дату “25 февраля”, то использовать (10.1) для определения нового “числа” невозможно, т.к. получим, что новое “число” должно быть равно $19 + 2 = 21$. Однако двигаться по времени в обратную сторону запрещено условиями игры. Поэтому пользуемся (10.2) и получаем новый “номер месяца”: $25 - 19 = 6$. Таким образом, в ответ на “25 февраля” Первый игрок должен назвать “25 июня”.

Замечание 2.

Заметим следующее любопытное обстоятельство, маскирующее симметрию игры «календарь». А именно, то, что в разных месяцах – разное количество дней, причем в феврале может быть либо 28 дней, либо 29. На первый взгляд кажется, что эти детали приведут к весьма сложной оптимальной стратегии, однако они, как нетрудно убедиться, на нее вовсе не влияют. Дело в том, что для осуществ-

ления выигрышной стратегии Первому игроку необходимо и достаточно сделать несколько ходов, выбрав их из следующего множества:

{“19 января”, “21 февраля”, “22 марта”, “23 апреля”, “24 мая”, “25 июня”, “26 июля”, “27 августа”, “28 сентября”, “29 октября”, “30 ноября”, “31 декабря”}.

Все эти ходы, очевидно, возможны, и различное количество дней в месяцах не накладывает на их осуществимость никаких ограничений.

Что касается возможностей для ходов Второго игрока, то их, действительно, становится меньше, но это никак не влияет на выигрышную стратегию Первого.

Задача. Заменим в игре «календарь» запрещенную дату “20 января” на “21 февраля”, а остальные условия оставим в силе. Кто выиграет при правильной игре – Первый игрок или Второй?

§ 11. Доказательство мультипликативности периода в игре «камешки»

Здесь мы приведем краткое доказательство гипотезы, сформулированной в §2.

Теорема 3. *Рассматривается (a_1, a_2, \dots, a_n) -игра «камешки». Период последовательности проигрышей и выигрышей (P, V -последовательности) в этой игре обозначим через T_1 .*

Одновременно с этой игрой рассматривается $(ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$ -игра «камешки», где k – произвольное натуральное число, большее единицы; период соответствующей P, V -последовательности обозначим через T_k . Тогда

1) длина периода T_k будет в k раз больше длины периода T_1 ;

2) “внутренние пропорции” периода T_k будут такими же, как и у периода T_1 .

Замечание. Поясним, что мы понимаем под “внутренними пропорциями” любой конечной последовательности букв П и В.

Рассмотрим, например, следующую последовательность длины 7:

ППВВВВВ; ее “внутренние пропорции” – это серия отношений длин ее последовательных частей, состоящих из букв одного типа. А именно, $2 : 3 : 1 : 1$.

Рассмотрим теперь последовательность длины 14:

ППППВВВВВВВВВВ; ее внутренние пропорции – это серия отношений $4 : 6 : 2 : 2$.

Сокращая на общий множитель 2, получаем:

$$4 : 6 : 2 : 2 = 2 : 3 : 1 : 1.$$

Доказательство теоремы. Мы ограничимся тем, что разберем один простой пример, из которого будет ясна идея доказательства в общем случае.

Итак, рассмотрим игру «камешки», в которой из кучи камней разрешается брать 2 или 3 камня, т.е.

(2; 3)-игру. Период последовательности проигрышей и выигрышей в этой игре, как нетрудно проверить, имеет вид: ППВВВ. Удвоим длину этой последовательности букв, сохранив ее “внутренние пропорции”: ПППВВВВВВВ. Из диаграмм, представленных на рис. 10 и 11, ясно, почему новая построенная последовательность неизбежно окажется периодом (4; 6)-игры «камешки». Все дело в том, что длины возможных ходов возросли во столько же раз, во

А вот как выглядит начало П,В-последовательности для (6; 14; 16)-игры:

ППППП ВВВВВ ПП ВВВВВВВВ ПППП ВВВВВ ПППП...
(11.2)

Как и следовало ожидать, внутренние пропорции пред-периодических частей у последовательностей (11.1) и (11.2) (как и внутренние пропорции периодов) одинаковы.

Литература

1. *Шень А.* Игры и стратегии с точки зрения математики. – М.: Издательство МЦНМО, 2008.
2. *Петров Н.Н.* Математические игры. – М.: ЛИБРОКОМ, 2012.
3. *Локшин А.А., Иванова Е.А.* Математическая смесь. – М.: МАКС Пресс, 2016.
4. *Потопахин В.* Видеоурок 71 (по теме «ползунок») <https://www.youtube.com/watch?v=Bz7Ynl8FvbY>
5. *Семенов А.Л., Рудченко Т.А.* Информатика 4 класс. Часть 3. – М.: Просвещение, 2013.
6. *Фролов И.* Введение в теорию комбинаторных игр http://xity.narod.ru/comb/Frolov_Combinatorial_Games.pdf
7. *Копылов И.А.* Логические игры. – М.: URSS, 2019.

Учебное издание

ЛОКШИН Александр Александрович
ИВАНОВА Елена Алексеевна

«КАМЕШКИ»

и другие математические игры

Подготовка оригинал-макета:
Издательство «МАКС Пресс»
Главный редактор: *Е. М. Бугачева*
Компьютерная верстка: *Н. С. Давыдова*
Обложка: *М. А. Еронина*

В издании использованы рисунки А. А. Локишина

Подписано в печать 28.05.2021 г.
Формат 84х108 1/16. Усл. печ. л. 4,6.
Тираж 50 экз. Изд. № 87.

Издательство ООО «МАКС Пресс».
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,
МГУ имени М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, 527 к.
Тел.8(495) 939-3890/93. Тел./Факс 8(495) 939-3891.

Отпечатано в полном соответствии с качеством
предоставленных материалов в ООО «Фотоэксперт»
115201, г. Москва, ул. Котляковская, д.3, стр. 13.

