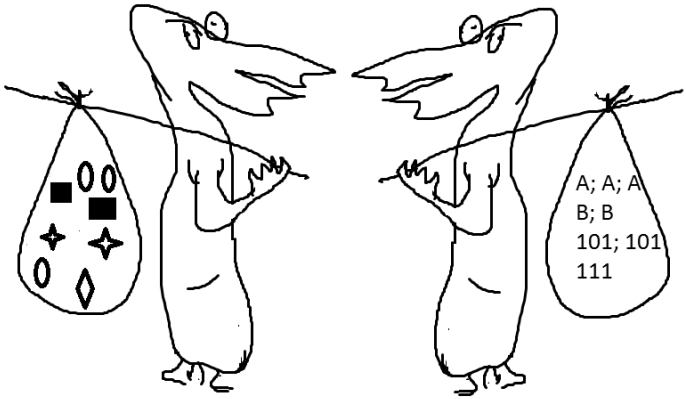
А.А. Локшин

МЕШКИ, МНОЖЕСТВА И МАТЕМАТИКА ДЛЯ ДЕТЕЙ



МАКС Пресс

МОСКВА – 2015

УДК 51:002(075.8)
ББК 22.1:32.81я73
Л73

Локшин А.А.

Л73 **Мешки, множества и математика для детей:** Пособие. – М.: МАКС Пресс, 2015. – 44 с.: ил.
ISBN 978-5-317-05038-2

В пособии, адресованном студентам пединститутов – будущим учителям начальных классов, рассматриваются некоторые логические трудности, возникшие в результате объединения начального курса математики с информатикой.

УДК 51:002(075.8)
ББК 22.1:32.81я73

ISBN 978-5-317-05038-2

© Локшин А.А., 2015

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3

1. О преподавании элементов наивной теории множеств в школе 7
2. Нужно ли объединять математику с информатикой? 12
3. О неизбежности использования языка множеств 19
4. Использование мешков в текстовых задачах – лишние трудности 24
5. О переводе с языка множеств на язык мешков 26
6. Задача, в которой можно обойтись без формулы включений и исключений 34

Приложение 1. О понятии мультимножества 39

Приложение 2. Какое число древнее – количественное или порядковое? 41

ПРЕДИСЛОВИЕ

Начну с описания одного загадочного случая, произошедшего со мной на обзорной лекции по математике, которую я читал студентам-выпускникам, будущим учителям начальных классов. В зале присутствовало примерно 90 человек (три студенческие группы), четыре с половиной года я учил две из этих групп математике, необходимой в избранной ими профессии. Еще на первом курсе мы изучали элементы теории множеств – предмет, весьма полезный для объяснения младшим школьникам, что такое натуральное число. (Сам учитель может при этом и не употреблять термина «множество», если его нет в школьной программе, по которой он работает.) С понятием множества мы сталкивались и впоследствии, изучая комбинаторику, основы логики, элементы алгебры и геометрии, основы теории вероятностей…

Итак, в самом начале лекции я вынул из кармана две совершенно одинаковые шариковые ручки и обратился к залу:

– Посмотрите на эти две новые шариковые ручки. Они совершенно одинаковые. Давайте рассмотрим два множества – A и B. Множество A содержит в качестве своего единственного элемента ручку, которую я держу в левой руке, а множество B тоже содержит один-единственный элемент – ручку, которую я держу в правой руке. Теперь ответьте мне, пожалуйста, на вопрос: из каких элементов состоит пересечение этих двух множеств?

Секунд через тридцать одна из лучших студенток решилась ответить:

– Это пересечение состоит из одной шариковой ручки...

Я спросил у зала:

– Есть ли другие ответы?

Зал безмолвствовал. Через некоторое время я снова услышал от одной из студенток все тот же ответ.

– Но этот ответ неверен, – сказал я, – попробуйте вспомнить, что такое пересечение множеств!

В зале воцарилась мрачная тишина.

Но я хорошо помнил, что у студентов предыдущих выпусков подобных проблем не возникало.

Что же случилось с этим выпуском?

Именно эта проблема исследуется в настоящей работе.

Я убежден, что упомянутая выше проблема – отражение коллизии двух близких понятий – «мешок» и «множество». Дело в том,

что на пятом курсе студенты, о которых шла речь выше, познакомились с «теорией мешков» и изучали ее в течение первого семестра, а их неверные ответы, прозвучавшие на обзорной лекции, были бы абсолютно верными, если бы речь шла не о множествах, а о мешках.

Фактически эта брошюра посвящена одному элементарному, но важному математическому вопросу, возникшему в последние годы – а именно, взаимоотношению понятий «мешок» и «множество». Надо сразу предупредить читателя, что математический термин «мешок» был введен академиком А.Л. Семеновым из соображений педагогического удобства, а в математике прежде использовались для этого же понятия термины «мультимножество» и «комплект».

Впрочем, между понятием «мультимножество» и понятием «мешок» имеется тонкая разница, игнорирование которой приводит к нежелательным последствиям.

По общепринятому определению, мультимножество отличается от множества тем, что каждый элемент мультимножества может входить в него несколько раз. Нужно сказать, что само понятие мультимножества изначально было придумано для работы с такими абстракциями как «вакансия», «признак», «натуральное число» и т.д. Упомянутые абстрактные сущности никакого места в пространстве не занимают, и мы вполне можем представить себе, что, например, вакансия доцента по кафедре математики входит в список вакансий дважды. Мы можем даже обозначить этот факт, поставив цифру «2» напротив слов «вакансия доцента».

Однако если речь идет о материальных объектах, желательно бывает их как-то изобразить. Например, одна и та же чашка тоже может входить в какое-нибудь мультимножество M дважды, но изобразить это, в сущности, невозможно. Чашка занимает в пространстве вполне определенное место, и нарисовать ее на этом самом месте в двух экземплярах при всем желании не удается.

Мне могут возразить:

– Давайте нарисуем рядом вторую точно такую же чашку, и проблема будет решена!

Но в том-то и дело, что проблема не только не будет решена, а будет создана невообразимая путаница, мы перестанем различать две совершенно разные ситуации:

а) имеется только одна чашка, но она изображена дважды, чтобы показать таким способом, что она входит в рассматриваемое мультимножество дважды;

б) имеются две одинаковые с виду чашки, каждая из которых входит в наше мультимножество по одному разу.

Иными словами, наглядностью изложения иногда бывает полезно жертвовать, чтобы не угодить в ловушку.

Какой же смысл можно придать двукратному вхождению чашки в мультимножество? Допустим, что от нас требуется расставить на столе 10 емкостей для жидкости, причем среди этих емкостей должен быть в точности один предмет, сделанный из фарфора, и в точности один предмет синего цвета. Эту задачу можно решить, например, следующим образом. Поставим на стол 9 стеклянных стаканов и одну синюю фарфоровую чашку. Тогда мы сможем утверждать, что эта чашка дважды входит в состав мультимножества *M*, образованного предметами, которые мы расставили на столе: один раз – как фарфоровый предмет и второй раз – как предмет синего цвета.

Теперь – о теории мешков. В одной из своих публикаций А.Л. Семенов прямо пишет, что мешок – это мультимножество. Однако это не совсем так. «Теория мешков» предназначена для детей, и изложение, конечно же, должно быть наглядным. Для достижения требуемой наглядности в теории мешков говорится о вхождении в мешок *нескольких одинаковых элементов* (а не *о нескольких вхождениях одного и того же элемента*). В результате такого адаптированного для детей подхода теряется различие между двумя ключевыми для математики понятиями – «такой же» и «тот же самый». (Как мы только что видели, в теории мультимножеств этого недоразумения не возникает.)

Поэтому, на мой взгляд, в целом интересная и полезная теория мешков должна быть отчасти переработана. О том, как это можно сделать с наименьшими потерями, будет сказано ниже. (Фактически, цель такой переработки – устранение несовместимости «языка мешков» с «языком множеств».)

В заключение отмечу, что проблема различения понятий «такой же» и «тот же самый» существовала и до того, как появилась теория мешков, но не была столь остра как сейчас. Справиться с этой проблемой хотел еще Колмогоров, вводя в школьные учебники геометрии термин «конгруэнтность», но, к сожалению, не преуспел.

Автор
Москва,
25.06.2015

1. О ПРЕПОДАВАНИИ ЭЛЕМЕНТОВ НАИВНОЙ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ В ШКОЛЕ [5]

Как уже отмечалось в предисловии, еще до проникновения в начальные курсы математики теории мешков, учителя столкнулись с трудностями, связанными с восприятием детьми обычной наивной теории множеств. Причем эти трудности вовсе не были связаны с какими-либо известными парадоксами (например, парадоксом кучи или парадоксом Рассела). Оказалось, что многие дети просто-напросто не понимают, что такое *равные множества.* Более того, как показали недавние эксперименты, имеются очевидным образом вытекающие отсюда трудности с пониманием смысла таких операций как объединение и пересечение множеств, причем эти трудности присутствуют не только у школьников, но даже у студентов. Как мы увидим ниже, «корень зла» заключается в смешении двух фундаментальных понятий: «такой же» и «тот же самый». С трудностями в различении этих двух понятий ребенок сталкивается еще в начальной школе, где в рамках некоторых программ вводится понятие множества.

Следует ли отсюда вывод, что нужно вообще отказаться от введения в школе понятия множества и, соответственно, не вводить операции над множествами и диаграммы Эйлера?

Ниже мы попытаемся ответить на этот вопрос.

В работах [1] и [2] вполне убедительно продемонстрировано, что уже 5–6-летние дети успешно справляются с классификацией предметов по двум признакам, т.е. фактически работают с диаграммами Эйлера. Может быть, дело не в том, что детская психика еще недостаточно созрела для восприятия такого сложного понятия как «множество», а в том, что взрослые «по умолчанию» предполагают некоторые соглашения выполненными, в то время как детям их нужно объяснять?

Приведем определение из учебника Л.Г. Петерсон [3, с. 7]:

«*Два множества* ***равны****, если они состоят* ***из одних и тех же элементов****. Если множества A и B равны, то пишут A = B. <…> Пусть*

A = {малина; земляника; смородина},

B = {земляника; малина; смородина} *<…>*

A = B (в них одни и те же элементы, только в разном порядке)».

В результате возникает следующий интересный эффект (сообщено проф. А.Л. Чекиным).

На рис. 1.1 изображен шкаф с двумя полками.

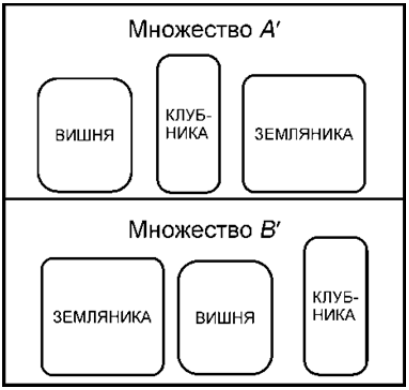


Рис. 1.1

На верхней полке стоят три банки варенья (например – вишневое, клубничное, земляничное). На нижней полке – **такие же** три банки, но в другом порядке. Совокупность трех верхних банок обозначается через A', а совокупность трех нижних банок – через B'. Учитель спрашивает ученика:

– Равны ли множества A' и B'?

Ученик отвечает:

– Да, равны.

Итак, мы столкнулись с серьезной проблемой, которую необходимо как-то разрешить. Как объяснить ученику, что множества A' и B' не равны, если, глядя на подчеркнутые выше строчки из определения равных множеств A и B, он не заметит никакой разницы в ситуациях.

Разница, очевидно, заключается в том, что в приведенном выше определении в фигурных скобках перечислены имена объектов, а сами объекты (элементы множества) подразумеваются. Что же это за подразумеваемые объекты? В рассматриваемом случае это – понятия, обозначаемые соответствующими словами.

В то же время на рис. 1.1 присутствуют не имена объектов, а напротив, сами объекты.

Таким образом, при работе с множествами нам предстоит иметь дело с двумя разными ситуациями.

Ситуация 1. В фигурных скобках перечисляются имена объектов (имена элементов множества).

Ситуация 2. На рисунке присутствуют сами объекты (элементы множества).

Каждая из этих ситуаций требует особого подхода.

Разбор ситуации 1. Здесь важно соблюсти следующие два условия:

а) в перечислении, записываемом в фигурных скобках, ни в коем случае не должны участвовать сами элементы, присутствуют только их имена;

б) из контекста должно быть ясно, каким объектам соответствуют перечисленные в фигурных скобках имена.

Тогда недоразумения, связанные с «проблемой равных множеств», не возникнут.

Из сказанного выше вытекает, что нам следует согласиться, например, со следующими равенствами множеств, заданных перечислением:

{I, II, III, IV, V} = {1, 2, 3, 4, 5};

{клубника, малина} = {*МАЛИНА*, *КЛУБНИКА*}.

При этом перечисления вида, изображенного на рис.1.2, недопустимы вследствие их двусмысленности.

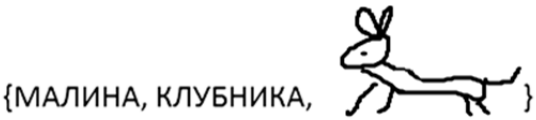


Рис. 1.2. Недопустимое перечисление элементов множества

Замечание. Конечно, можно специально договориться, что животное на рис. 1.2 – это имя какого-то объекта (а не сам объект). Однако лучше этого избежать и пользоваться для производства имен известными стандартными алфавитами.

Разбор ситуации 2. Здесь имеет смысл придерживаться следующих договоренностей.

а) Как известно, в макромире не бывает абсолютно одинаковых объектов. Можно это обстоятельство подчеркивать, а не затушевывать. Если бы банки с вареньем, изображенные на рис. 1.1, име-

ли заметные глазу индивидуальные признаки, ученик не смог бы ошибиться. Соблюдение этого условия исключит путаницу, при которой два разных множества принимаются за равные.

б) И все же соблюдение условия из п. а) может оказаться не лучшим решением проблемы. Некоторые различные объекты могут казаться человеческому глазу совершенно одинаковыми. (Например, банки варенья на витрине магазина.) Можно предложить иной способ указания на то, что мы имеем дело именно с несколькими внешне не отличимыми друг от друга предметами, а не с одним предметом, изображенным несколько раз. Следует договориться, что предметы, изображенные внутри овала, – это то, что видит в некоторый момент времени «живой» персонаж, изображенный рядом с овалом. Для большей наглядности рядом с персонажем могут быть нарисованы часы (см. рис. 1.3).

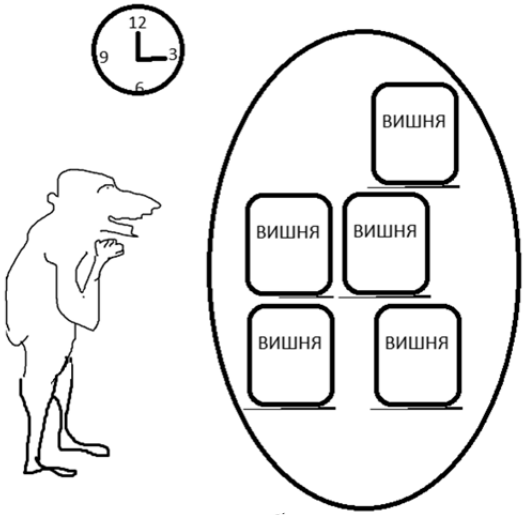


Рис. 1.3

в) Остается еще неразобранным случай, когда нужно дважды изобразить одно и то же множество. Например, показать на рисунке, что множество из трех банок варенья не изменится (останется равным самому себе), если мы поменяем две банки местами. Этого нетрудно добиться, например, таким способом: поместив на *дополнительный* рисунок «живого» персонажа, переставляющего банки.

Замечание 1. Перечисленные выше трудности очевидным образом связаны с различением понятий «такой же» и «тот же самый». В случае работы с карточками, которые (в отличие от рисунков на странице учебника) можно перекладывать, эти трудности, как правило, исчезают. Заметим в этой связи, что упомянутый выше «живой» персонаж не может быть «таким же», он обязательно «тот же самый»!

Замечание 2. Вернемся еще раз к ситуации, изображенной на рис.1.1. Выше было подчеркнуто то обстоятельство, что на этом рисунке присутствуют именно объекты, а не их имена. То есть объектами (элементами множеств) считаются *изображения банок*. Но с тем же успехом мы могли бы говорить о множествах настоящих (стеклянных) банок, стоящих на полках настоящего (сделанного из дерева) шкафа. При этом все наши соображения и выводы, к которым мы пришли, глядя на рис. 1.1, оставались бы в силе.

Замечание 3. В естественном языке проблема различения понятий «такой же» и «тот же самый» тоже существует и решается в зависимости от контекста. Для нас, однако, важно следующее. Например, мы говорим: «*это же слово встречается на следующей странице*», но мы не можем сказать: «*эта же чашка стоит на полке в соседней комнате*».

Таким образом, естественный язык не желает признавать за словами индивидуальность, которой обладают материальные предметы. Это обстоятельство мы будем в дальнейшем иметь в виду (см. параграф 5).

Литература

1. Формирование элементарных математических представлений у дошкольников / Под ред. А.А. Столяра. – М.: Просвещение, 1988.

2. Звонкин А.К. Малыши и математика. – М.: МЦНМО, 2014.

3. Петерсон Л.Г. Математика. 3 класс. Часть 1. – М.: Ювента, 2004.

4. Давыдов В.В. Логико-психологические проблемы начальной математики как учебного предмета http://www.experiment.lv/rus/biblio/vestnik_6/v6_dav_log-psi.htm

5. Локшин А.А., Иванова Е.А. О преподавании элементов «наивной» теории множеств в школе (в печати).

2. НУЖНО ЛИ ОБЪЕДИНЯТЬ МАТЕМАТИКУ С ИНФОРМАТИКОЙ?

В этом параграфе я хочу изложить свои соображения о том, почему объединение курса математики для начальной школы с информатическим курсом А.Л. Семенова и Т.А. Рудченко [1] представляется мне в высшей степени спорным.

В [1] используется «язык мешков», внешне напоминающий язык наивной теории множеств. Замечу, однако, что *элементы в мешке* – это нечто, в корне отличное от *элементов множества.* Действительно, для каждого элемента мешка (как это следует из изложения в [1]) в *библиотеке элементов* можно взять *одинаковый* с ним. В противоположность этому, в качестве элементов множества можно брать вполне материальные объекты, в точности одинаковых с которыми в материальном мире найти в принципе нельзя. (Я имею в виду, конечно же, объекты макромира.)

Таким образом, *элементы мешка* – это некие идеальные (а не реальные) объекты, причем детям об этом не говорится. Говорится при этом, что два элемента мешка одинаковы, если они совмещаются при наложении. Понятно, что элементы мешка – это будущие *имена команд в программах или имена каких-то объектов,* и (интерпретируя их именно как имена) неизбежно приходится говорить о совершенно одинаковых элементах. Впрочем, никакие две картинки (два элемента мешка) идеально совпадать при наложении не могут. Существенно ли это? Пока мы остаемся в рамках информатики – совершенно не существенно. Дело в том, что две идеально или не совсем идеально совпадающие картинки – это символы **одного и того же объекта.** Таким образом, придираться к неидеальному совпадению при наложении друг на друга двух элементов-картинок нет никакого смысла.

То, что детям ничего не говорится об идеальной природе элементов мешка (о том, что элементы мешка – это не сами объекты, а их символы), с педагогической точки зрения удобно и вполне допустимо (если оставаться в информатическом контексте).

Проблема возникает тогда, когда перекидывается мостик к математике, где нужно учить детей арифметическим операциям, имеющим прямое отношение к счету реальных (материальных) объектов.

Положив теорию мешков в основание математического курса, уже невозможно считать элементы мешков идеальными объектами. Но для материальных объектов полная взаимная заменимость неосуществима. И если нам все же говорят об одинаковости (взаимной заменимости) двух материальных объектов, то это, по-видимому, означает, что каждый такой объект заменяется некоторым подходящим набором признаков. Именно избранные наборы признаков и должны совпадать, а остальные характеристики рассматриваемых объектов отбрасываются как несущественные. Среди таких «ненужных», отбрасываемых характеристик неизбежно оказываются пространственные координаты объекта. Все это приводит к неожиданному эффекту, отсутствующему в теории мультимножеств, – невозможности различить «тот же самый» объект от «такого же» объекта. (Именно здесь закладывается несовместимость «языка мешков» с общепринятым в математике «языком множеств». С теорией мультимножеств у теории множеств подобной несовместимости не возникает, поскольку многократному вхождению материального объекта в мультимножество не принято давать никакой «геометрической интерпретации»; см. в этой связи Предисловие.)

Возможно, именно поэтому в курсе «Математика и информатика» [2], [3] операции пересечения, объединения, суммы и разности мешков – аналоги соответствующих операций с множествами – формулируются так, что возникает смешение понятий: «такой же» и «тот же самый». (Здесь «такой же» выступает в качестве синонима с «одинаковый »). Однако вне информатического контекста такое смешение ведет к нежелательным последствиям.

Перейду к примерам.

На странице 18 учебника «Математика и информатика» для 2-го класса (см. [2]) дается определение пересечения мешков. Цитирую:

«Возьмем два мешка – К и Л. [На картинке – два мешка, расположенные в разных местах. Т.е. бусины этих мешков с точки зрения ребенка физически различны – *А.Л.*] Соединим **все** одинаковые бусины в мешках К и Л в пары».

Однако некоторым из «одинаковых» бусин не хватает пары. Каким образом из трех «одинаковых» круглых серых бусин вы-

брать две, для которых в другом мешке приготовлены пары – не указывается. Итак, термин «все» в данном контексте выглядит несколько двусмысленно. Но важно другое. Из определения ясно, что «одинаковые» бусины полностью взаимно заменимы. ИХ ФИЗИЧЕСКОЕ РАЗЛИЧИЕ НЕ ИГРАЕТ АБСОЛЮТНО НИКАКОЙ РОЛИ.

Но продолжу цитирование: «Мешок К1 – это часть мешка К, в которой лежат **все** те бусины, которые есть и в мешке Л. [Неточность (“те” вместо “такие же”) – шаг к подмене понятия. Мешки К и Л расположены в разных местах. Общих – в общепринятом смысле – бусин у них нет. – А.Л.]»

И далее:

«Наибольшую *общую* [выделено мной – *А.Л.*] часть мешков мы будем называть **пересечением мешков**». В учебнике для 3-го класса [3, с. 13] при повторении материала рассматривается иллюстрация с тем же количеством бусин и говорится: «Мы называем **пересечением мешков** наибольшую общую часть мешков: все те бусины, которые лежат и в мешке К, и в мешке Л». Следует подчеркнуть, что операции суммы и пересечения определяются авторами не только для мешков, наполненных бусинами, но, судя по задачам 45 и 48 из [2], для мешков с любыми другими элементами.

В результате произошла **подмена понятия**: «одинаковые» превратились в «общие». Эта подмена кажется неопасной и даже удобной, когда речь идет об идеальных, неотличимых друг от друга объектах (или о символах одного и того же объекта). Действительно, две команды «вперед!», отданные в разное время, полностью взаимно заменимы. Точно так же полностью взаимно заменимы две вакансии на должность доцента по кафедре математики. Но два бильярдных шара, внешне сколь угодно похожие друг на друга, всегда отличаются самым радикальным образом: у них разные траектории в мировом пространстве.

Итак, мы не можем считать элементы мешков объектами, обладающими какой-либо индивидуальностью, и нам, по сути, запрещено идентифицировать их по занимаемому ими месту на плоскости (в пространстве). Существенно, что дети об этом не предупреждены.

Однако неизбежна ситуация, когда на уроке будут рассмотрены два реальных мешка, в одном из которых, например, два пинг-понговых шарика, а в другом – три (см. в этой связи, например, [4]). Что собой представляет пересечение этих мешков? Это, в соответствии с определением, – мешок, в котором два пинг-понговых шарика. Но откуда они взяты? Из левого мешка или из правого? Или еще откуда-то? Посмотрим теперь на пинг-понговые шарики внимательнее. Оказывается, что они вовсе не одинаковые. Тогда приходится считать, что пересечение наших мешков просто-напросто пусто. Но как же быть? Нужно ли учитывать, что шарики чуть-чуть неодинаковые? Или не нужно? (Этого тяжелого для детей вопроса не возникнет, если говорить не о мешках, а о множествах.) Учителю, очевидно, приходится на все эти вопросы отвечать так:

– Какие именно пинг-понговые шарики мы поместим в пересечение наших мешков – не имеет значения. На мелкие различия между шариками тоже не следует обращать внимания!

Может возникнуть и такой неудобный вопрос: если мы в пересечение наших мешков поместим пинг-понговые шарики из левого мешка, останутся ли эти самые шарики в левом мешке или они оттуда исчезнут? В [2–4] не дается ответа на этот вопрос. Следуя общей логике изложения курса «Математика и информатика» (прежде всего – чтобы избежать неоднозначности в результате пересечения мешков), учитель, видимо, должен отвечать так:

– Шарики в левом мешке не исчезнут! Давайте будем считать, что в пересечении наших мешков находятся такие же точно шарики, купленные в магазине.

До сих пор все затруднения, возникающие при использовании мешков вместо множеств, преодолевались, по сути, волевым образом – ссылкой на то, что «так будем считать по определению». (При этом несовместимость «языка мешков» с «языком множеств» оставалась открытой проблемой.) Теперь перейдем к обучению счету, в процессе которого ребенку неизбежно приходится пересчитывать реальные объекты.

Осложнение со сложением. Изложение в учебнике (см. [3]) ведется таким образом, что, вплоть до определения пересечения, мешки изображаются как наборы, расположенные в разных ме-

стах. Таким образом, ребенок подведен к тому, чтобы предполагать, что у двух мешков физически общих элементов быть не может. Это впечатление подтверждается определением сложения мешков. (В [3] на стр. 12 изображены два таких складываемых друг с другом мешка, не налегающие друг на друга; **само сложение этих мешков сводится к перекладыванию их элементов в третий мешок.**) Но что будет, если у мешков есть физически общие элементы? Бывают ли вообще такие мешки? Об этом ничего не говорится. Здесь возникает тяжелая искусственно созданная проблема.

Если принять, что мешков с физически общими элементами не бывает, то изложение сохраняет внутреннюю логику, но окончательно выясняется, что никакие реальные физические объекты не могут рассматриваться как элементы мешков (можно себе представить, какое впечатление это открытие произведет на детей!). Потому что реальные физические объекты можно объединять в совокупности по разным признакам, и в результате у двух совокупностей может образоваться настоящая физически общая часть.

Так что обойтись без рассмотрения мешков с физически общими элементами невозможно.

Однако здесь нас подстерегает новая неприятность.

Пример. Папа, умываясь, пользуется большой зубной щеткой (Щ) и куском мыла (М), а ребенок, умываясь, пользуется маленькой зубной щеткой (щ) и тем же куском мыла, что и папа. Поместим в первый мешок папины предметы для умывания, а во второй – предметы для умывания, которыми пользуется ребенок:

$$\text{Мешок № 1} = [\text{Щ, М}], \quad \text{Мешок № 2} = [\text{щ, М}]. \qquad (2.1)$$

Замечание. Возникает, однако, вопрос: не должны ли мы вынимать мыло (М) из Мешка № 1, когда формируем новый мешок – Мешок № 2? Ответ на этот вопрос может быть только отрицательным. Действительно, если предположить, что должны, то это лишило бы нас возможности одновременно перечислить те предметы, которыми пользуется папа, и те предметы, которыми пользуется ребенок.

Теперь, следуя правилу сложения мешков, очевидно, получим:

$$[\text{Щ, М}] + [\text{щ, М}] = [\text{Щ, щ, М, М}]. \qquad (2.2)$$

Ученик, решающий эту задачу, конечно, будет понимать, что в действительности папа и ребенок пользуются тремя (а не четырьмя!) предметами при умывании. Но тогда какое отношение имеет сложение мешков к изучению арифметической операции сложения чисел?

Итак, если допустить существование мешков с физически общими элементами (а не только с «общими» в переносном смысле, как при определении пересечения мешков), то мешок становится структурой, намного более сложной, чем множество, так что изучение множеств должно, по идее, предшествовать изучению таких мешков. И, кроме того, попытка иллюстрировать сложение чисел при помощи сложения мешков, обладающих физически общими элементами, неизбежно приведет к недоуменным вопросам вроде: «А откуда взялся лишний кусок мыла?» (См. приведенный выше Пример.)

Итак, важнейшая математическая операция, элемент фундамента математики (сложение) излагается двусмысленным образом. Причина – выбор «языка мешков» вместо «языка множеств».

Замечу, что изучать множества и операции над ними все равно придется. Но делать это **после** изучения операций с мешками будет затруднительно.

Кроме того, по моему глубокому убеждению, никакие тактические соображения «педагогического удобства» не уравновешивают нежелательные последствия подмены понятия в процессе рассуждений.

Вывод. Я убежден, что объединение курсов математики и информатики (если к нему стремиться) должно быть проведено на базе языка множеств, а не мешков. Почему же язык множеств естественно считать базовым? Дело хотя бы в том, что материальные предметы (вещи), окружающие ребенка, будучи собраны в кучу или сложены в виде коллекции, образуют именно множество, а не мешок – ведь они, как правило, не являются символами чего-то и все (хотя бы немного) отличаются друг от друга.

Литература

1. Семенов А.Л., Рудченко Т.А. Информатика. 3 класс. Ч. 1. – М., 2013.

2. Семенов А.Л., Рудченко Т.А. Математика и информатика. 2 класс. Ч. 2. – М., 2012.

3. Семенов А.Л., Рудченко Т.А. Математика и информатика. 3 класс. Ч. 1. – М., 2011.

4. Семенов А.Л., Рудченко Т.А. Программа курса «Математика и информатика» http://nachalka.seminfo.ru/file.php/4/documents/Programa_Kursa_MATINF1-4.pdf

В этой программе, в частности, говорится*: «Понятие мешок при работе в области конечных множеств часто бывает удобнее, чем понятие множество. Его использование в начальной школе имеет методические преимущества: оно легче воспринимается детьми, чем понятие множество. Оно более непосредственно связано с понятием числа, легко ложится на телесные объекты, например настоящие мешки (пакеты, коробки) с предметами (кубиками, деталями Лего и др.)».*

5. Информатика: Пособие для учителя. 2 класс / А.Л. Семенов, Т.А. Рудченко, А.А. Муранов, Е.И. Яковлева. – М.: Просвещение: Ин-т новых технологий образования, 2002.

6. Локшин А.А. Об использовании понятий *мешок* и *множество* / Начальная школа, 2015, № 3, с. 90–93.

3. О НЕИЗБЕЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ЯЗЫКА МНОЖЕСТВ

Я попытаюсь здесь обосновать с помощью новых аргументов, почему «язык мешков» нуждается в глубокой реформе. Собственно говоря, речь пойдет о том, что без «языка множеств» в учебном процессе обойтись невозможно. Но если рано или поздно «язык множеств» школьнику придется изучать, то мгновенно обнаружится несовместимость этого языка с «языком мешков». (Об этом уже говорилось в Предисловии.)

Вначале рассмотрим совсем простую задачу.

Задача 1. *В классе 20 человек, и каждый изучает по крайней мере один из двух языков – английский или французский. При этом 12 учеников изучают английский язык, а 13 – французский. Сколько человек изучают два языка?*

Решение № 1 на «языке множеств» мгновенно получается при взгляде на диаграмму Эйлера–Венна. Для полноты изложения все же приведу соответствующее рассуждение. Пусть A – множество учеников, изучающих английский, а B – множество учеников, изучающих французский, $n(\ )$ – численность соответствующего множества.

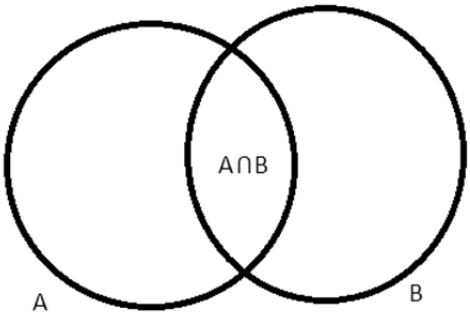


Рис. 3.1

Тогда по формуле включений и исключений (справедливость которой очевидна из диаграммы Эйлера–Венна; рис. 3.1) имеем:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B), \qquad (3.1)$$

откуда $n(A \cap B) = 5$.

Ответ: два языка изучают пять человек.

Достоинством этого решения является, конечно, его простота и наглядность. Складывая $n(A)$ и $n(B)$, мы дважды учитываем *одни и те же* элементы из $A \cap B$. Поэтому в окончательной формуле для $n(A \cap B)$из суммы $n(A) + n(B)$ приходится вычитать численность *все того же* множества $A \cap B$.

Любопытно, что эту задачу удается решить, проводя рассуждения на «языке мешков», ни разу не воспользовавшись понятием «тот же самый»! Впрочем, для этого приходится прибегнуть к искусственному приему.

Решение № 2 на «языке мешков». Действуем в соответствии с идеями теории мешков А.Л. Семенова.

Каждому ученику даем один или два жетона – в соответствии с количеством языков, которые он изучает. (*Все жетоны совершенно одинаковые*.) Затем все жетоны складываем в один общий мешок. Теперь, используя операцию вычитания мешков, удаляем из этого мешка 20 жетонов (т.е. столько жетонов, сколько человек в классе), там остается 12 + 13 – 20 = 5 жетонов. Теперь **очевидно** (см. рис. 3.2), что 5 человек изучают одновременно английский и французский языки.

Это решение менее наглядно, чем решение № 1, к тому же оно основано на искусственном приеме (на раздаче одинаковых жетонов) и, конечно, требует дополнительного психического усилия для осознания того факта, что оставшихся «лишних» жетонов столько же, сколько учеников, изучающих два языка. Ведь остаться могут вовсе не «вторые» жетоны, обладателями которых были ученики, изучающие два языка.

ЖЖЖЖЖ ЖЖЖЖЖ ЖЖЖЖЖ ЖЖЖЖЖ
ЖЖЖЖЖ

Рис. 3.2

Впрочем, сам подход, безусловно, интересен.

Рассмотрим теперь несколько более сложную задачу.

Задача 2. *В классе 25 учеников, и каждый изучает по крайней мере один из трех иностранных языков: английский, французский или японский. При этом 12 человек изучают английский, 12 человек – французский, 12 человек – японский. Кроме того, известно,*

что 4 человека изучают английский и французский, 4 человека – английский и японский, 4 человека – французский и японский. Сколько человек изучают три языка?

Решение № 1 на «языке множеств» производится по общеизвестной формуле включений и исключений:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - \\ -n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C). \quad (3.2)$$

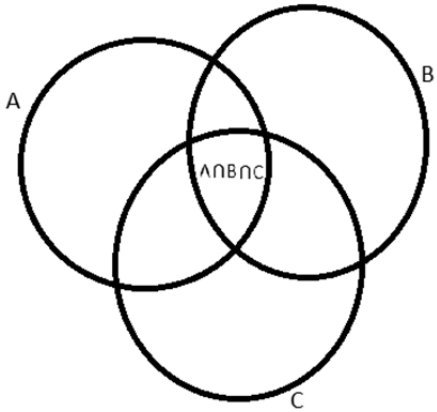


Рис. 3.3

Это решение иллюстрируется диаграммой Эйлера–Венна (см. рис. 3.3) и легко воспринимается зрительно. Как и в случае формулы (3.1), вывод формулы (3.2) существенно опирается на понятие «тот же самый». Подставляя в (3.2) данные задачи, легко получаем

Ответ: $n(A \cap B \cap C) = 1$.

Решение № 2 на «языке мешков». Желая обойтись без понятия «тот же самый», **п**опробуем действовать так же, как в предыдущей задаче. Раздадим ученикам по одному, два или три жетона – в точном соответствии с количеством изучаемых каждым учеником языков. (Все жетоны, как и во втором решении предыдущей задачи, одинаковые.) Сложим все розданные жетоны в мешок. В мешке у нас оказывается 12 + 12 +12 = 36 жетонов (см. рис. 3.4).

ЖЖЖЖЖЖ ЖЖЖЖЖЖ ЖЖЖЖЖЖ ЖЖЖЖЖЖ ЖЖЖЖЖЖ
ЖЖЖЖЖЖ ЖЖЖЖЖЖ Ж

Рис. 3.4

Удалим из мешка 25 жетонов – в соответствии с числом учеников в классе. Останется 11 «лишних» жетонов, розданных за изучение второго и третьего языков. Однако как связать это количество «лишних» жетонов с не использованными до сих пор данными задачи? Сделать это можно с помощью перебора вариантов.

Вариант А. Никто не изучает три языка одновременно. Тогда в соответствии с данными задачи в мешке должно остаться 12 жетонов, что противоречит сказанному выше. **Заметим, что здесь мы были вынуждены воспользоваться техникой не мешков, а множеств: три множества учеников (а не жетонов), изучающих по крайней мере два языка, попарно не пересекаются. Поэтому численность их объединения должна быть равна сумме численностей.**

Вариант Б. Три языка изучает единственный ученик. Тогда у него два жетона. Остальных учеников, изучающих в точности два языка, оказывается ровно 9 (11 – 2 = 9). Далее, пользуясь данными задачи, легко получаем для каждой пары языков, что число учеников, изучающих в точности эту пару языков, равно 3. В результате получаем согласие с данными задачи. Ответ: три языка изучает единственный ученик.

Замечание. Перебор вариантов закончился быстро в силу специального выбора числовых данных задачи. При других числовых данных этот перебор мог оказаться не столь коротким. Но главное – в другом. По-видимому, не удается решить поставленную задачу, не выходя за рамки «языка мешков» и не обращаясь к «языку множеств». В этом, на мой взгляд, существенное отличие задачи 2 от задачи 1.

* * *

Теперь я хочу высказаться в защиту языка множеств еще по одному поводу. Допустим, например, что нам предлагают решить систему из трех линейных неравенств от двух переменных x и y. Будем вначале анализировать эту систему на языке множеств.

Решение нашей системы представляет собой пересечение трех множеств, элементами которых являются пары чисел вида (x, y). Рассмотрим, например, случай, когда на декартовой плоскости решение нашей системы представляет собой внутренность треугольника. Эта внутренность треугольника образована пересечением трех точечных (т.е. состоящих из точек) множеств, каждое из которых представляет собой полуплоскость. Возможность визуализации решения на декартовой плоскости чрезвычайно важна для понимания того, как устроено решение задачи. Именно язык множеств позволяет осуществить эту визуализацию!

Попробуем теперь проанализировать эту же задачу на языке мешков. До тех пор, пока мы не пытаемся изобразить решение на декартовой плоскости, все происходит точно так же, как и выше. Решение системы – это пересечение мешков, содержащих соответствующие пары чисел вида (x, y).

Однако как только мы захотим перейти на декартову плоскость, чтобы изобразить решение нашей задачи, нас поджидает неприятность. Причина неприятности такова: все точки на декартовой плоскости одинаковы!

Вывод. Я убежден, что язык множеств не может быть удален из математики (в том числе – школьной). Но для того, чтобы сосуществовать с языком множеств, язык мешков, на мой взгляд, должен:

А) ограничить область своего применения;

Б) сменить обозначения и названия операций.

О том, как это можно сделать, я попробую рассказать в следующих параграфах.

4. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕШКОВ В ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧАХ – ЛИШНИЕ ТРУДНОСТИ

Задача 1. *У Васи 2 яблока и 3 груши, а у Кати – 3 яблока и 2 груши. Сколько фруктов у Васи и Кати вместе?*

Ученик Митрофан:

– Построим два мешка:

М1 = [Я, Я, Г, Г, Г] (васины фрукты),
М2 = [Я, Я, Я, Г, Г] (катины фрукты);

затем вспоминаем операцию объединения мешков:

М1 ∪ М2 = [Я, Я, Я, Г, Г, Г].

– Итак, – заключает Митрофан, – всего у обоих детей 6 фруктов: три яблока и три груши…

Учитель:

– Ты, Митрофан, применил неправильную операцию! В задачах, где требуется ответить на вопрос «сколько всего?», нужно использовать операцию сложения мешков, а не объединение мешков! Сколько можно повторять!

Задача 2. *В классе каждый ученик изучает какой-нибудь иностранный язык. Известно, что 10 человек изучают французский, а 10 – английский. Может ли так быть, что в классе всего 19 человек?*

Митрофан:

– Я хорошо запомнил ваше правило, господин учитель! Поэтому сразу могу сказать, что такого быть не может! Построим два мешка, М1 и М2, в одном будут все ученики, изучающие французский, в другом – все ученики, изучающие английский. Теперь сложим эти мешки, однако М1 + М2 содержит двадцать элементов, а не 19. Значит, в классе должно быть 20 учеников…

* * *

Причина трудностей, возникших у Митрофана, – в неприспособленности языка мешков к тому, чтобы обслуживать всю математику.

Ученику, не знакомому с мешками и операциями над ними, обе приведенные выше задачи будет решать проще, чем Митрофану – не придется выбирать между операцией сложения и операцией объединения мешков.

5. О ПЕРЕВОДЕ С ЯЗЫКА МНОЖЕСТВ НА ЯЗЫК МЕШКОВ

В курсе информатики и математики А.Л. Семенова (с соавторами) собраны превосходные задачи, которые было бы обидно потерять из-за несовместимости «языка мешков» с «языком множеств». Однако сделать эти два языка совместимыми совсем не трудно. Более того, практически весь массив задач из упомянутого курса удастся сохранить. Для этого придется переопределить понятие мешка и по-новому посмотреть на операции над мешками. При этом операции над мешками фактически сохранят свой смысл (см. [1, 2]), но их придется также переопределить и ввести для них такие обозначения, чтобы операции над мешками нельзя было перепутать с операциями над множествами.

Кроме того, в этом параграфе мы рассмотрим способ преобразования данных задачи, сформулированной на языке множеств, в данные, сформулированные на языке мешков. Нам понадобится следующее

Определение. *Под мешком мы будем понимать лексикографически упорядоченный набор слов, составленных из букв какого-либо алфавита. В частности, таким алфавитом могут быть цифры; тогда под словами следует понимать записи чисел в выбранной системе счисления.*

Замечание. Слова, входящие в мешок, могут повторяться. Всеми различиями между повторяющимися (одинаковыми) словами пренебрегаем.

Определение. *Два мешка A* и B* **одинаковы**, если их словарный состав одинаков (с учетом кратности вхождения слов в мешки).*

Мы рассмотрим одну конкретную задачу (похожую задачу рассматривал А.Л. Семенов в своих лекциях), при этом из нашего рассмотрения будет однозначно следовать общий принцип перевода с языка множеств на язык мешков.

Итак, пусть известно, что **для приготовления Большой Яичницы требуются: 2 белых страусиных яйца и одно черное, а также 2 белых куриных яйца и 3 черных.**

Кроме того, пусть известно, что **для приготовления Праздничного Гоголя-Моголя требуются: одно белое страусиное яйцо и 2 черных, а также одно белое куриное яйцо.**

Мы будем считать, что в нашем распоряжении достаточно продуктов для приготовления любого из упомянутых блюд (но не обязательно достаточно – для приготовления обоих блюд одновременно). Рассмотрим, например, ситуацию, изображенную на рис. 5.1, где в виде больших прямоугольников изображены страусиные яйца, а в виде маленьких прямоугольников – куриные.

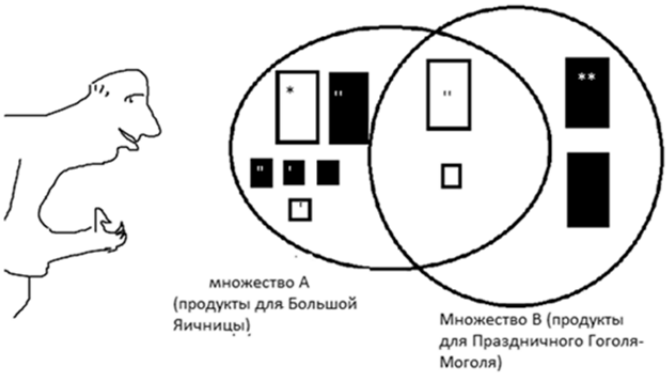


Рис. 5.1

Таким образом, множество A – это те продукты, которые *заранее решено* использовать для Большой Яичницы, а множество B – те продукты, которые *заранее выбраны* для Праздничного Гоголя-Моголя. (В соответствии с этим предварительным выбором, только белое страусиное яйцо и белое куриное яйцо из пересечения $A \cap B$ будут использованы в любом случае – независимо от того, будет ли готовиться Большая Яичница или же Праздничный Гоголь-Моголь.)

Будем теперь кодировать каждый элемент из множеств A и B упорядоченной парой (величина, цвет) по следующему правилу:

«большой» = 1, «маленький» = 0;

«черный» = 1, «белый» = 0

(см. в этой связи, например, [3]). Тогда множеству A можно сопоставить мешок A^*, а множеству B – мешок B^* (см. рис. 5.4). Несмотря на то, что множества A и B *пересекаются,* соответствую-

щие им мешки мы изображаем как *«непересекающиеся»*, т.е. не имеющие физически общих элементов. Это принципиально важно для того, чтобы можно было разумным образом определить три основные операции над мешками, не опираясь на понятие «тот же самый». Фактически, переход от пары множеств (например, множеств A и B) к соответствующим мешкам A^* и B^* – это переход от *наборов конкретных элементов* (которые могут быть выбраны осознанно или случайно) к соответствующим формальным *потребностям* (а точнее – *к именам потребностей*).

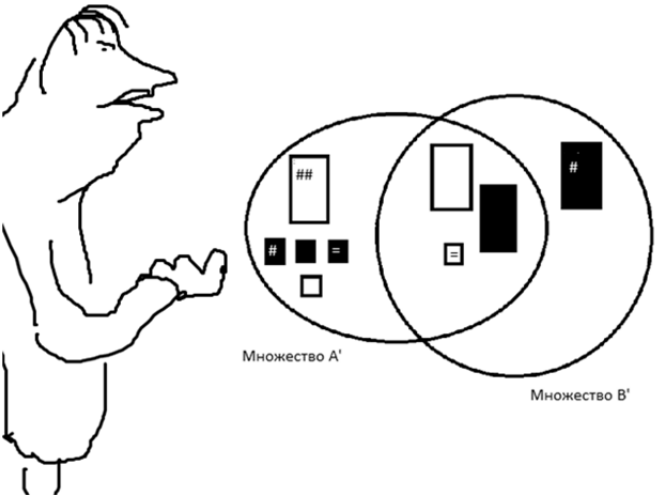


Рис. 5.2

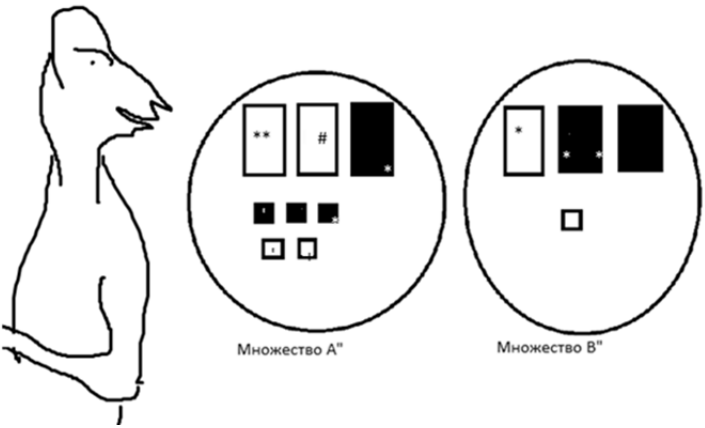


Рис. 5.3

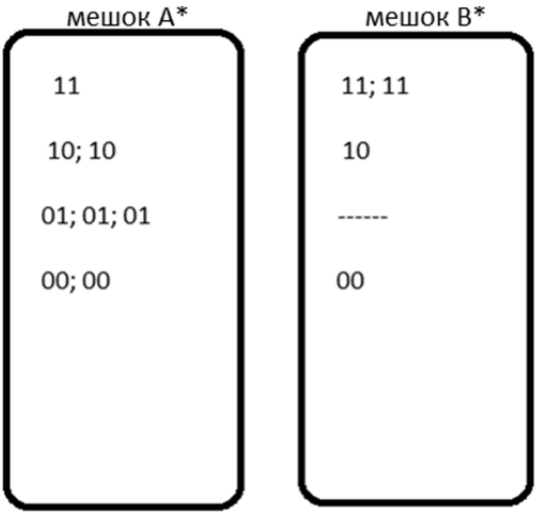


Рис. 5.4

1) **Операция Сложение Мешков (по А.Л. Семенову)** изображена на рис. 5.5. Эта операция указывает на минимальные количества соответствующих продуктов, необходимые для того, чтобы оба блюда одновременно могли быть приготовлены. Результат этой операции над мешками A^* и B^* будем обозначать через $A^* + B^*$ и называть *суммой мешков*.

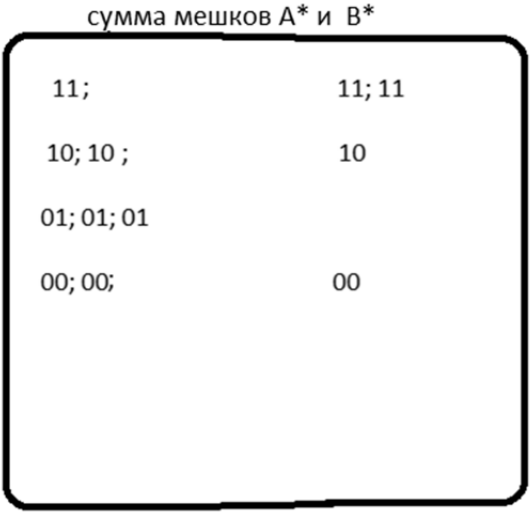


Рис. 5.5

2) **Операция Большая Строчка (объединение мешков по А.Л. Семенову)** изображена на рис. 5.6. Эта операция указывает на минимальные количества продуктов, необходимые для того, чтобы любое из двух блюд могло быть приготовлено. Обозначать результат применения этой операции к мешкам A^* и B^* будем через BIG(A^*, B^*).

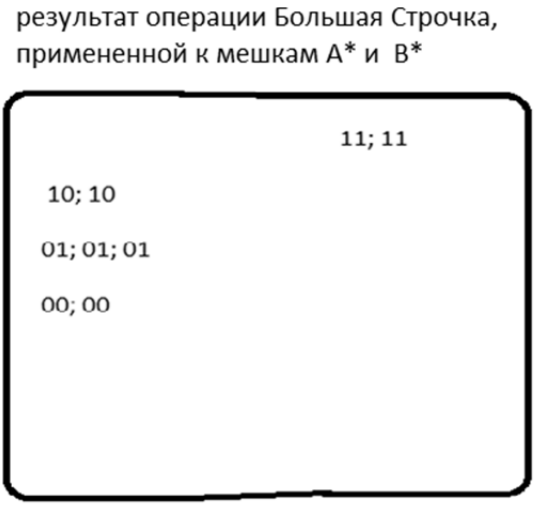


Рис. 5.6

3) **Операция Малая Строчка (пересечение мешков по А.Л. Семенову)** изображена на рис. 5.7. Эта операция указывает на максимально возможные количества продуктов, которые можно приобрести, если заранее не решено, какое именно из двух блюд нужно будет приготовить. (При этом никаких «лишних» продуктов не должно оставаться!) Обозначать результат применения этой операции к мешкам A^* и B^* будем через SMALL(A^*, B^*).

4) **Операция Вычитание Мешков (по А.Л. Семенову);** результат этой операции назовем *разностью* мешков. Разность мешков A^* и B^* будем обозначать через $A^* - B^*$, эта разность указывает на превышение количества продуктов, необходимых для приготовления Большой Яичницы над количеством соответствующих продуктов, необходимых для приготовления Праздничного Гоголя-Моголя (см. рис. 5.8).

результат операции Малая Строчка,
примененной к мешкам А* и В*

11

10

00

Рис. 5.7

разность мешков А* и В*

10

01; 01; 01

00

Рис. 5.8

Замечание 1. Обратим внимание на тот факт, что получающиеся мешки A^* и B^* не позволяют однозначно восстановить соответствующие множества. Действительно, множествам A', B' и A'', B'' (см. рис. 5.2 и 5.3) будут соответствовать все те же мешки A^* и B^*.

Замечание 2. Что касается соответствия между операциями над мешками и над множествами, то справедливо следующее:

а) В случае *непересекающихся* множеств A'' и B'' их объединению очевидным образом соответствует сумма мешков A^* и B^* (см. рис. 5.3 и 5.5).

б) Если же количество элементов в объединении исходных множеств – *минимально возможное при сохранении остальных условий* (см. рис. 5.2), то объединению этих множеств, т.е. $A' \cup B'$, соответствует Большая Строчка мешков A^* и B^*, т.е. объединение мешков по А.Л. Семенову (см. рис. 5.6). При этом пересечению исходных множеств, т.е. $A' \cap B'$, соответствует Малая Строчка мешков A^* и B^*, т.е. пересечение мешков по А.Л. Семенову (см. рис. 5.7). Кроме того, в этом случае разности исходных множеств, т.е. $A' \backslash B'$, очевидным образом соответствует разность мешков A^* и B^* (см. рис. 5.8).

Замечание 3. Считать, что мешок – это лексикографически упорядоченный набор слов, необязательно. Вместо этого можно (по определению) считать, что порядок слов в мешке несуществен, но для проведения операций «Большая Строчка», «Малая Строчка» и «Вычитание» слова в мешках придется лексикографически упорядочивать.

Замечание 4. Рассматривая элементы мешков *как имена потребностей*, нетрудно дать интерпретацию соотношению (2.2) для суммы мешков из задачи, рассмотренной в параграфе 2:

$$[\text{Щ, М}] + [\text{щ, М}] = [\text{Щ, щ, М, М}]$$

(соответствующая возможность предоставляется читателю).

Замечание 5. В курсе «Математика и информатика» А.Л. Семенова (с соавторами) имеется ряд задач, где элементы мешков – не слова (и не числа), а цветные картинки нескольких сортов. Для

того чтобы приспособить эти задачи к новому определению мешка и новым определениям операций над мешками, достаточно считать каждую такую картинку буквой в некотором алфавите (или словом, записанным буквами некоторого алфавита).

Замечание 6. Чтобы добиться большей математической строгости в определениях операций над мешками, можно договориться о следующем. На самом деле нас интересует не сам мешок, а класс мешков, одинаковых с данным. И вместо операций над мешками можно рассматривать операции над классами, каждый из которых состоит из одинаковых мешков. Пусть M* и N* – два мешка, а <M*> и <N*> – соответствующие классы. Тогда для того, чтобы определить, например, сумму этих классов, нужно выбрать в классах <M*> и <N*> мешки M^*_0 и N^*_0, не имеющие физически общих элементов, воспользоваться определением сложения, введенным выше как раз для таких мешков, а потом рассмотреть соответствующий класс $<M^*_0 + N^*_0>$, который и следует считать суммой <M*> + <N*>. Эта конструкция (заимствованная из количественной теории целых неотрицательных чисел [4]) может показаться излишне сложной, однако именно она позволяет избежать употребления двусмысленных записей вида M* + M*.

Литература

1. Семенов А.Л., Рудченко Т.А. Математика и информатика. 2 класс. Ч. 2. – М., 2012.

2. Семенов А.Л., Рудченко Т.А. Математика и информатика. 3 класс. Ч. 1. – М., 2011.

3. Формирование элементарных математических представлений у дошкольников / Под ред. А.А. Столяра. – М.: Просвещение, 1988, с. 286–287.

4. Мерзон А.Е., Добротворский А.С., Чекин А.Л. Пособие по математике для факультетов начальных классов. – М.: 1998.

6. ЗАДАЧА, В КОТОРОЙ МОЖНО ОБОЙТИСЬ БЕЗ ФОРМУЛЫ ВКЛЮЧЕНИЙ И ИСКЛЮЧЕНИЙ [4]

В параграфе 3 мы уже убедились в громадной пробивной силе формулы включений и исключений. Может показаться, что всюду, где речь идет о численностях объединений или пересечений нескольких множеств, без этой формулы не обойтись. В этом параграфе мы увидим, что дело обстоит не совсем так.

Но рассмотрим вначале (для разминки) еще одну простую задачу, похожую на задачи из параграфа 3.

Задача №1. В 1-ом классе все ученики изучают по крайней мере один из двух иностранных языков (английский или испанский). При этом 15 детей изучают английский, а 19 детей – испанский. Ровно один иностранный язык изучают 10 детей. Сколько учеников в классе?

Решение. Прежде всего, заметим, глядя на диаграмму Эйлера–Венна (см. рис. 6.1), что

$$n(A) + n(B) = n(A\backslash B) + n(A \cap B) + n(B\backslash A) + n(A \cap B). \quad (6.1)$$

Поэтому число учеников, изучающих два языка, т.е. *n(A∩B),* – это половина разности между $n(A) + n(B)$ и числом учеников, изучающих ровно один язык.

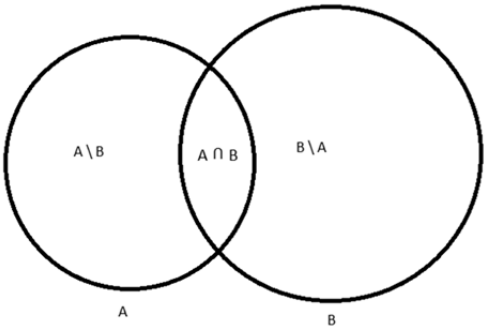


Рис. 6.1

Теперь пользуемся формулой включений и исключений:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B), \quad (6.2)$$

и получаем:

$$n(A \cup B) = 15 + 19 - (15 + 19 - 10) : 2 = 22.$$

Ответ: в классе 22 ученика.

Сейчас мы увидим, что формула включений и исключений не является единственно возможным идеальным средством для решения подобных задач.

Задача № 2 (*похожая задача имеется также в* [2], *где она помещена в раздел «формула включений и исключений»*). Профессор Птицелюбов держит в своей квартире множество говорящих попугаев. При этом a попугаев говорят на старо-провансальском, b попугаев – на древне-греческом, c попугаев – на арамейском и d попугаев – на средневековой латыни. Известно, что все попугаи профессора Птицелюбова говорят по крайней мере на одном из перечисленных языков, причем k попугаев говорят ровно на одном языке, один попугай – ровно на трех языках, еще один – ровно на четырех языках, а все остальные – в точности на двух языках. Сколько попугаев живет в квартире профессора Птицелюбова?

Решение. Прежде всего, заметим, что формула включений и исключений (см., например, [1]) оказывается для нашей задачи чрезвычайно громоздкой, избыток деталей мешает непосредственно увидеть простое решение, очевидное из диаграммы, изображенной на рис. 6.2.

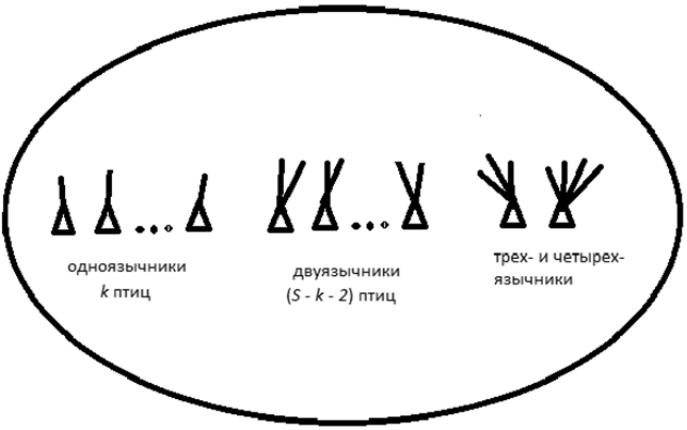


Рис. 6.2

Действительно, обозначим общее количество попугаев в квартире профессора через S. Тогда, подсчитывая количество «птице-языков» (изображенных на рис. 6.2 при помощи отрезков,

исходящих из вершин треугольников), легко получаем следующее уравнение:

$$a + b + c + d = k + (S - k - 2)\cdot 2 + 3 + 4, \qquad (6.3)$$

откуда

$$S = (a + b + c + d + k - 3)/2. \qquad (6.4)$$

Ответ: в квартире профессора Птицелюбова проживает

$(a + b + c + d + k - 3)/2$ попугаев.

Замечание 1. Вместо того чтобы рисовать «птице-языки», мы могли бы раздать всем попугаям одинаковые жетоны (в соответствии с количеством языков, которыми владеет каждый данный попугай). Тогда решение задачи можно было бы формально провести в рамках теории мешков; см. в этой связи параграф 3. Однако обратим внимание на следующее обстоятельство. В постановке задачи *предполагается существование* решения, но решение может существовать не при любых a, b, c, d, k. Например, если сумма $a + b + c + d + k$ четна, S оказывается дробным числом, и решения не существует.

Замечание 2. Более того, даже если при данных конкретных a, b, c, d, k значение S, даваемое формулой (6.4), – целое положительное, мы не можем без дополнительного исследования утверждать, что при данных конкретных a, b, c, d, k задача имеет смысл. Как мы сейчас увидим, для такого исследования снова оказывается необходим «язык множеств» (для большей наглядности подкрепленный диаграммой Эйлера–Венна).

Обобщая постановку задачи, будем считать с этого момента, что I, II, III, IV – некоторые свойства, которыми могут обладать/не обладать элементы из рассматриваемой конечной совокупности. Тогда вся совокупность рассматриваемых элементов естественным образом представима в виде объединения 16 классов. Мы будем в дальнейшем считать, что каждый элемент нашей совокупности обладает по крайней мере одним из свойств I–IV. Тогда потенциально возможных классов будет не 16, а 15.

Введем теперь следующие обозначения. Пусть x_1 – число элементов, обладающих только свойством I, x_2 – число элементов, обладающих только свойством II, x_3 – число элементов, обладающих только свойством III, x_4 – число элементов, обладающих

только свойством IV; y_{12} – число элементов, обладающих только свойствами I и II,…, y_{34} – число элементов, обладающих только свойствами III и IV; z_{123} – число элементов, обладающих только свойствами I, II и III,…, z_{234} – число элементов, обладающих только свойствами II, III и IV; w_{1234} – число элементов, обладающих всеми четырьмя свойствами I, II, III и IV.

Далее нас будут интересовать численности совокупностей элементов, обладающих соответственно *ровно* одним, двумя, тремя или четырьмя свойствами, т.е. суммы:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = p, \\ &y_{12} + y_{13} + y_{14} + y_{23} + y_{24} + y_{34} = q, \\ &z_{123} + z_{124} + z_{134} + z_{234} = r, \\ &w_{1234} = s. \end{aligned} \tag{6.5}$$

С другой стороны, нас будут интересовать численности совокупностей элементов, обладающих соответственно свойствами I, II, III или IV, т.е. суммы:

$$\begin{aligned} &x_1 + y_{12} + y_{13} + y_{14} + z_{123} + z_{124} + z_{134} + w_{1234} = a, \\ &x_2 + y_{12} + y_{23} + y_{24} + z_{123} + z_{124} + z_{234} + w_{1234} = b, \\ &x_3 + y_{13} + y_{23} + y_{34} + z_{123} + z_{134} + z_{234} + w_{1234} = c, \\ &x_4 + y_{14} + y_{24} + y_{34} + z_{124} + z_{134} + z_{234} + w_{1234} = d. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Нетрудно видеть, что

$$a + b + c + d = p + 2q + 3r + 4s. \tag{6.7}$$

Допустим, что в условии задачи заданы числа

$$a, b, c, d, p, q, r, \tag{6.8}$$

причем требуется найти численность всей совокупности рассматриваемых элементов, т.е. сумму

$$S = p + q + r + s.$$

В силу (6.7) имеем

$$s = [a + b + c + d - p - 2q - 3r]/4,$$

откуда

$$S = p + q + r + [a + b + c + d - p - 2q - 3r]/4. \tag{6.9}$$

Для того чтобы такая задача имела смысл, необходимо и достаточно, чтобы задаваемые параметры (6.8) удовлетворяли равенствам из (6.5), (6.6), в которых левые части представляют собой суммы *неотрицательных целочисленных* слагаемых.

Описанную выше процедуру удается сделать более наглядной с помощью диаграммы Венна для четырех множеств [3]. На рис. 6.3 множество A – совокупность всех элементов, обладающих свойством I, множество B – совокупность всех элементов, обладающих свойством II, множество C – совокупность всех элементов, обладающих свойством III, множество D – совокупность всех элементов, обладающих свойством IV. Таким образом,

$$n(A) = a,\ n(B) = b,\ n(C) = c,\ n(D) = d.$$

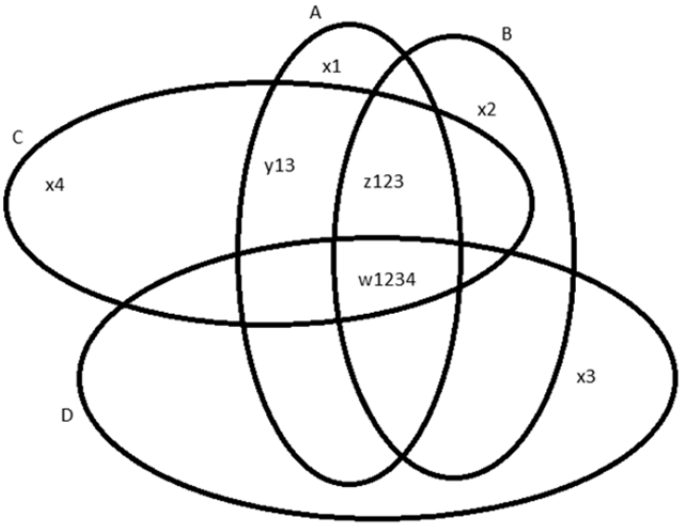


Рис. 6.3

Литература

1. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. – М.: Наука, 1975, с. 102.

2. http://mathus.ru/math/kombinatorika.pdf.

3. Кузичев А.С. Диаграммы Венна. – М.: Наука, 1968, с. 59.

4. Локшин А.А., Иванова Е.А. Задача, в которой можно обойтись без формулы включений и исключений (в печати).

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

О понятии мультимножества

Понятие мультимножества было введено в 70-х годах прошлого века и с тех пор активно используется в математике и программировании. Приведем определения мультимножества и важнейших операций над мультимножествами (см. [1, 2]).

Определение 1. Мультимножество, как и обычное множество, есть неупорядоченная совокупность элементов произвольной природы. Но, в отличие от обычного множества, мультимножество может содержать один и тот же элемент несколько раз. Если элемент a входит m раз в мультимножество A, то говорят, что *кратность* вхождения элемента a в мультимножество A равна m.

Определение 2. Два мультимножества A и B *равны* ($A = B$), если они состоят из одних и тех же элементов и, кроме того, для каждого элемента кратность его вхождения в мультимножество A совпадает с кратностью его вхождения в мультимножество B.

Определение 3. Пусть A и B – мультимножества, тогда их *сумма* $A+B$ определяется следующим образом: если некоторый элемент содержится m раз в A и n раз в B, то в $A+B$ этот элемент содержится $m+n$ раз.

Определение 4. Пусть A и B – мультимножества, тогда их *объединение* $A \cup B$ определяется так: если некоторый элемент содержится m раз в A и n раз в B, то в $A \cup B$ этот элемент содержится $\max(m,n)$ раз.

Определение 5. Пусть A и B – мультимножества, тогда их *пересечение* $A \cap B$ определяется следующим образом: если некоторый элемент содержится m раз в A и n раз в B, то в $A \cap B$ этот элемент содержится $\min(m,n)$ раз.

Определение 6. *Разностью* мультимножеств A и B называется мультимножество $A - B$, состоящее из всех элементов мультимножества A, кратность которых строго больше кратности со-

ответствующих элементов в мультимножестве B; при этом кратность каждого элемента в мультимножестве $A - B$ равна разности кратностей данного элемента в A и B соответственно.

Замечание. В известной книге Дж. Питерсона [3] также имеется раздел с соответствующими определениями, однако Питерсон использует термин «комплект» вместо термина «мультимножество».

* * *

Нетрудно видеть, что (обычные) множества являются частным случаем мультимножеств и что объединение, пересечение и разность множеств могут быть введены при помощи определений 4, 5 и 6 соответственно. Таким образом, мы можем считать, что «язык множеств» – это частный случай «языка мультимножеств».

Попробуем теперь понять, как «язык мешков» связан с «языком мультимножеств». В соответствии со сказанным в параграфе 5, в каждом мешке лежат имена некоторых абстрактных сущностей (потребностей), причем эти имена, вообще говоря, могут повторяться. Если теперь принять, что в мешках лежат не имена, а сами абстрактные сущности (потребности) с соответствующими кратностями, то рассматриваемые мешки, очевидно, окажутся мультимножествами специального вида, причем введенные операции над мешками перейдут в общепринятые операции над мультимножествами.

В результате подход к теории мешков, предложенный в параграфе 5, позволяет:

а) избежать имевшихся ранее коллизий между «языком мешков» и «языком множеств»;

б) при необходимости осуществить слияние этих языков в виде «языка мультимножеств».

Литература

1. Кнут Д. Искусство программирования, т. 2. Третье издание. – М.: Вильямс, 2000, с. 536.

2. Петровский А.Б. Основные понятия теории мультимножеств. – М.: УРСС, 2002.

3. Питерсон Дж. Теория сетей Петри и моделирование систем. – М.: Мир, 1984, с. 231.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Какое число древнее – количественное или порядковое?

Не так давно стало известно, что за количественное и порядковое натуральное число отвечают разные разделы мозга (см., например, [1, 9]). Какое же число появилось раньше – порядковое или количественное? Поскольку количественное число опирается на понятие множества, ответ на данный вопрос имеет отношение к теме данной работы.

Г. Фрейденталь по этому поводу пишет [3, с. 101]:

«Количественное число генетически, пожалуй, появилось раньше, чем порядковое. <…> Ребенок <…> столь рано учится считать, что вначале не замечает, что счет служит для определения количества. Однако, как легко убедиться, ребенок распознает небольшие числа независимо от счета, особенно когда они соответствуют конкретным примерам».

Процитирую теперь статью Александра Маркова [4], где приводится подтверждение наблюдений Фрейденталя в недавно проведенных опытах:

«Интуитивное “чувство количества” – способность приблизительно оценивать число объектов во множествах – обнаруживается у детей уже вскоре после рождения, то есть задолго до того, как ребенок начинает говорить или, тем более, учиться считать. Эта способность широко распространена и в животном мире. Американские психологи обнаружили, что дети, у которых “чувство количества” в шестимесячном возрасте развито сильнее, впоследствии успешнее овладевают арифметическими навыками. Полученные результаты – первое прямое подтверждение гипотезы о том, что уникальные для нашего вида математические способности развились на основе эволюционно древнего “чувства количества”».

Вот еще один поразительный экспериментальный результат [9]:

«Но небольшие числа обрабатывает сравнительно крупный участок коры – новое подтверждение того, что чувство количества ослабевает и становится менее точным по мере роста количества объектов».

Это наблюдение, очевидно, находится в согласии с тем общеизвестным фактом, что первобытный человек овладевал понятием натурального числа постепенно и что малые числа играли в его жизни первостепенную роль.

Нетрудно понять, что недавние результаты из [4] и [9] согласуются также с предположением Фройденталя о том, что количественное число является более древним, чем порядковое.

Впрочем, даже не проводя опытов, можно было утверждать, что количественное число генетически появилось *не позже* порядкового. Вот довод, который представляется существенным: пересчет материальных объектов, осуществлявшийся первобытным человеком, должен был иметь какой-то смысл. Наиболее вероятный смысл – установление количества пересчитываемых объектов. Об этом ясно свидетельствуют сохранившиеся в некоторых первобытных языках отдельные числа для круглых предметов, отдельные – для продолговатых и т.д. [2].

В заключение – два слова о том, какое отношение имеют приведенные выше соображения к обучению детей математике. Как хорошо известно, арифметические законы – например, такие как коммутативность и ассоциативность сложения – кажутся детям очевидными, если объяснять эти законы, интерпретируя натуральные числа как «количества». Но те же арифметические законы внезапно теряют свою очевидность, если объяснять их, оперируя порядковыми числами. Этот контраст перестает казаться удивительным после осознания того факта, что количественным числом (а значит, и операциями над ним) заведуют более древние структуры мозга.

Литература

1. http://www.brainspower.ru/?id=6&aid=54.

2. http://www.svyato.net/matematika/chisla/14-schet-u-pervobytnyx-narodov.html.

3. Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача. Ч 1. – М.: Просвещение, 1982.

4. Александр Марков. Математические способности детей проявляются уже в шестимесячном возрасте. http://scisne.net/a799.

5. Локшин А.А., Иванова Е.А. Математическая смесь. – М.: МАКС Пресс, 2014.

6. Александр Марков. Можно ли вылечить дискалькулию? http://scisne.net/a800.

7. Александр Марков. Математический центр мозга активен у детей, еще не умеющих считать. http://scisne.net/a1073.

8. Елена Наймарк. Обезьяны умеют складывать числа в уме. http://scisne.net/a1074.

9. Артем Космарский. Доказано: шестое чувство есть. Это чувство количества. http://scisne.net/t524.

10. Локшин А.А., Бахтина О.В. Какое число древнее – количественное или порядковое? / Аспирант и соискатель, 2015, № 3, с. 59–60.

Учебное издание

ЛОКШИН Александр Александрович

МЕШКИ, МНОЖЕСТВА И МАТЕМАТИКА ДЛЯ ДЕТЕЙ

Пособие

Подготовка оригинал-макета:
Издательство «МАКС Пресс»
Главный редактор: *Е.М. Бугачева*
Компьютерная верстка: *Н.С. Давыдова*

В издании использованы рисунки А.А. Локшина

Подписано в печать 20.07.2015 г.
Формат 60x90 1/16. Усл.печ.л. 2,75. Тираж 50 экз. Заказ 178.

Издательство ООО «МАКС Пресс»
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,
МГУ им. М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, 527 к.
Тел.8(495) 939-3890/91.
Тел./Факс 8(495) 939-3891.