



МГТУ имени Н.Э. Баумана

Кафедра ИУ-1 «Системы автоматического управления»

Методы вычислений

Численные методы решения задачи Коши



Андрей Леонидович Масленников
amas@bmstu.ru

2023 г.

Задача Коши — это поиск решения системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющего заданным начальным условиям

Для ДУ первого порядка

$$\begin{cases} x^{(1)}(t) = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Для системы из n ДУ первого порядка

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

описание системы
в нормальной
форме Коши

Численные методы могут решать только системы ДУ 1-го порядка, поэтому произвольная системы ДУ n -ого порядка предварительно приводятся к системе n дифференциальных уравнений первого порядка, т.е. к нормальной форме Коши

Явные методы

$$\mathbf{x}_{k+1} = \text{sol}(\mathbf{x}_k)$$

Неявные методы

$$\mathbf{x}_{k+1} = \text{sol}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k)$$

Одношаговые методы

$$\mathbf{x}_{k+1} = \text{sol}(\mathbf{x}_k)$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \text{sol}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k)$$

Многошаговые методы ($p > 0$ шагов)

$$\mathbf{x}_{k+1} = \text{sol}(\mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{x}_{k-p})$$

$$\mathbf{x}_{k+1} = \text{sol}(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{x}_k, \dots, \mathbf{x}_{k-p})$$

отдельным классом
можно выделить
адаптивные методы

Дано описание системы:

$$f_1(x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n_1)}, \dots, x_p, x_p^{(1)}, \dots, x_p^{(n_p)}) = g_1(\mathbf{u})$$

$$\vdots$$

$$f_p(x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n_1)}, \dots, x_p, x_p^{(1)}, \dots, x_p^{(n_p)}) = g_p(\mathbf{u})$$

p дифференциальных уравнений произвольного порядка, с m (в общем случае) входными воздействиями



$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) \quad \text{или} \quad \mathbf{M}(\mathbf{y})\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t)$$

p дифференциальных уравнений **первого** порядка

1. Выражаем из каждого уравнения старшую производную

$$x_1^{(n_1)} = g_1(\mathbf{u}) - f_1(x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n_1)}, \dots, x_p, x_p^{(1)}, \dots, x_p^{(n_p)})$$

$$\vdots$$

$$x_p^{(n_p)} = g_p(\mathbf{u}) - f_p(x_1, x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n_1)}, \dots, x_p, x_p^{(1)}, \dots, x_p^{(n_p)})$$

2. Формируем вектор состояния по каждой переменной **до $n - 1$ порядка включительно**

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_1^{(1)} & \dots & x_1^{(n_1-1)} & \dots & x_p & x_p^{(1)} & \dots & x_p^{(n_p-1)} \end{bmatrix}^T$$

3. Находим его производную

$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 & \dot{y}_2 & \dots & \dot{y}_n \end{bmatrix}^T$$

4. Заменяем в полученном векторе правых частей дифференциальных уравнений все x на y и получаем

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t)$$

Численные методы решения задачи Коши

Пример. Получение описания системы в нормальной форме Коши

Дана система дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} -m_1 \ddot{x}_1 = -k_2 x_2 + k_1 x_1 + b \dot{x}_1 - b \dot{x}_2 \\ -m_2 \ddot{x}_2 = -f + k_2 x_2 + k_1 (x_2 - x_1) - b \dot{x}_1 + b \dot{x}_2 \end{cases}$$

Выражаем старшие производные

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= \frac{-k_2 x_2 + k_1 x_1 + b \dot{x}_1 - b \dot{x}_2}{-m_1} \\ \ddot{x}_2 &= \frac{-f + k_2 x_2 + k_1 (x_2 - x_1) - b \dot{x}_1 + b \dot{x}_2}{-m_2} \end{aligned}$$

Вводим вектор состояния, затем дифференцируем

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 = x_1 \\ y_2 = \dot{x}_1 \\ y_3 = x_2 \\ y_4 = \dot{x}_2 \end{bmatrix}$$



$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \dot{y}_1 = \dot{x}_1 \\ \dot{y}_2 = \ddot{x}_1 \\ \dot{y}_3 = \dot{x}_2 \\ \dot{y}_4 = \ddot{x}_2 \end{bmatrix}$$



$$\dot{\mathbf{y}} = \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2 \\ \dot{y}_2 = \frac{-k_2 \overset{x_2}{y_3} + k_1 \overset{x_1}{y_1} + b \overset{\dot{x}_1}{y_2} - b \overset{\dot{x}_2}{y_4}}{-m_1} \\ \dot{y}_3 = y_4 \\ \dot{y}_4 = \frac{-f + k_2 y_3 + k_1 (y_3 - y_1) - b y_2 + b y_4}{-m_2} \end{cases}$$

Интегральное преобразование Лапласа — это интегральное преобразование функции, определенной во временной области $f(t)$, в функцию, определенную в частотной области $f(s)$ (при $s = j\omega$).

Прямое преобразование:

$$f(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

Обратное преобразование:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{st} f(s) ds$$

Свойства:

- **линейность:** $\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}$

- **подобие:** $\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a} f\left(\frac{s}{a}\right)$

- **абсолютная сходимость:**

Если интеграл Лапласа абсолютно сходится при $\sigma = \sigma_0$, то:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b |f(t)| e^{-\sigma_0 t} dt = \int_0^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma_0 t} dt$$

существует и сходится равномерно и абсолютно для $\sigma \geq \sigma_0$.

- **дифференцирование оригинала:**

Если $f(t), f^{(1)}(t), \dots, f^{(n)}(t)$ являются оригиналами, то:

$$\mathcal{L}\{f^{(0)}(t)\} = f(s)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(1)}(t)\} = sf(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(2)}(t)\} = s^2 f(s) - sf(0) - f^{(1)}(0)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n f(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} f^{(i-1)}(0)$$

- интегрирование оригинала:

Если $f(t)$ – оригинал, а $f(s)$ его изображением по Лапласу, то:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{f(s)}{s}$$

- запаздывание оригинала:

Если $f(t)$ – оригинал, а $f(s)$ его изображением по Лапласу, то:

$$\mathcal{L}\{f(t-\tau)\} = f(s)e^{-s\tau}$$

- дифференцирование изображения:

Если $f(t)$ – оригинал, а $f(s)$ его изображением по Лапласу, то:

$$\mathcal{L}\{(-1)^n t^n f(t)\} = f^{(n)}(s)$$

- теорема о начальном и конечном значениях дает возможность определить значение оригинала функции при $t \rightarrow \infty$ и при $t = 0$ по известному изображению.

$$f(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sf(s)$$

Если существует конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$$

тогда:

$$f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sf(s)$$

$f(t)$	$f(s)$	$f(t)$	$f(s)$	$f(t)$	$f(s)$
$\delta(t)$	1	$\delta(t - \tau)$	$e^{-s\tau}$	$\sin(\omega t)H(t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$H(t)$	$\frac{1}{s}$	$H(t - \tau)$	$\frac{e^{-s\tau}}{s}$	$\cos(\omega t)H(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-a\tau}H(t)$	$\frac{1}{s + a}$	$(1 - e^{-at})H(t)$	$\frac{1}{s(s + a)}$	$\text{sh}(at)H(t)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$tH(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$te^{-at}H(t)$	$\frac{1}{(s + a)^2}$	$\text{ch}(at)H(t)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$
$\frac{t^n}{n!}H(t)$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$\frac{t^n}{n!}e^{-at}H(t)$	$\frac{1}{(s + a)^{n+1}}$	$\sin(\omega t)e^{-at}H(t)$	$\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$

Пусть дано дифференциальное уравнение вида

$$f(x, x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}) = g(u)$$

$$\sum_{k=0}^n c_k x^{(k)} = g(u)$$

1. Находим изображение каждой переменной и всех ее производных с учётом начальных условий

$$\mathcal{L}\{x^{(0)}(t)\} = x(s)$$

$$\mathcal{L}\{x^{(1)}(t)\} = sx(s) - x(0)$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{L}\{x^{(n_1)}(t)\} = s^{n_1} x(s) - \sum_{k=1}^{n_1-1} s^{n_1-k} x^{(k)}(0)$$

2. Аналогичным образом находим изображение $u(s)$ и всех производных (которых, как правило, нет)
3. Заменяем в дифференциальных уравнениях все переменные на найденные изображения

Как аналитический метод решения ДУ

$$\begin{array}{ccc} x^{(n)}(t) & \longrightarrow & x(t) \\ \mathcal{L}\{ \} & \downarrow & \uparrow \mathcal{L}^{-1}\{ \} \\ s^n x(s) & \longrightarrow & x(s) \end{array}$$

4. Записываем набор уравнений для всех комбинаций $x_j(s)$ и $u_i(s)$, выражая одно через другое. Считая, что все остальные входные воздействия равны 0
5. Приводим к элементарным дробям
6. Находим обратное преобразование Лапласа для каждой элементарной дроби
7. Записываем итоговое решение $x(t)$

Пример. Решение дифференциальных уравнений с использованием преобразования Лапласа

Пусть задано дифференциальное уравнение

$$x^{(2)}(t) + 2x^{(1)}(t) + 2x(t) = \underbrace{te^{-t}}_{u(t)}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = 0, \quad x^{(1)}(0) = 0$$

Найдем оригиналы каждой переменной и входного воздействия с использованием преобразования

Лапласа

$$\mathcal{L}\{x^{(0)}(t)\} = x(s)$$

$$\mathcal{L}\{x^{(1)}(t)\} = sx(s) - x(0) = sx(s)$$

$$\mathcal{L}\{x^{(2)}(t)\} = s^2x(s) - sx(0) - x^{(1)}(0) = s^2x(s)$$

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \mathcal{L}\{te^{-t}\} = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Заменим в исходном дифференциальном уравнении

$$s^2x(s) + 2sx(s) + 2x(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$$

Выразим $x(s)$

$$x(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s^2+2s+2)}$$

Разложим на элементарные дроби

$$x(s) = \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^2+1}$$

Применим обратное преобразование Лапласа

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} = te^{-t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\right\} = e^{-t}\sin(t)$$

Запишем итоговое решение $x(t)$

$$x(t) = te^{-t} - e^{-t}\sin(t) = e^{-t}(t - \sin(t))$$

Одношаговые численные методы решения задачи Коши

Метод Эйлера (прямой)

Дана система и начальные условия

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

тогда можно аппроксимировать первую производную через конечные разности

$$\mathbf{x}^{(1)}(t_k) \approx \frac{\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k}{h}$$

откуда можно получить рекуррентное выражение для расчета решения на каждом шаге

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + hf(\mathbf{x}_k, t_k)$$

решение на текущем шаге

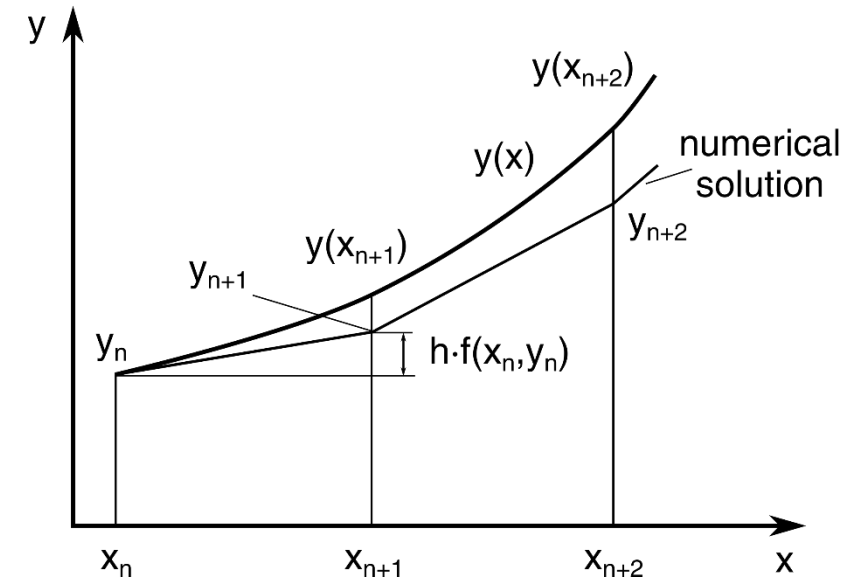
решение на предыдущем шаге

интегрирование динамики системы с предыдущего до текущего момента времени

Полагаем, что дискретное время изменяется с заданным шагом

$$t_k = t_0 + kh$$

$$k = 0, 1, \dots$$



Метод Эйлера иллюстрирует общую идею подавляющего большинства численных методов решения задачи Коши, которые, по сути, отличаются тем, как реализуется интегрирование динамики системы

Дана система и начальные условия

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Схема расчета метода Эйлера—Коши

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{x}}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + h\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) && \leftarrow \text{прогноз} \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \frac{h}{2} \left[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) + \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}, t_{k+1}) \right] && \leftarrow \text{коррекция} \end{aligned}$$

которая используется для решения неявного метода Эйлера—Коши

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{2} \left[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1}) \right]$$

Подобная схема разрешения неявности называется «предиктор—корректор» и, как правило, используется в многошаговых неявных методах

Дана система и начальные условия

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Схема усовершенствованным методом Эйлера

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+0.5} &= \mathbf{x}_k + \frac{h}{2} \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) && \leftarrow \text{это не прогноз, а} \\ &&& \text{двустадийность} \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + h \left[\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+0.5}, t_{k+0.5}) \right] \end{aligned}$$

Похожим образом строится схема вычислений метода Эйлера—Коши с итерационной обработкой

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1,0} &= \mathbf{x}_k + h\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) \\ \mathbf{x}_{k+1,i} &= \mathbf{x}_k + \frac{h}{2} \left[\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1,i-1}, t_{k+1}) \right] \end{aligned}$$

интегрирование по методу трапеций

i — счётчик итераций (нужны единицы).

Дана система и начальные условия

$$\begin{cases} \mathbf{x}^{(1)}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

Решение методом Эйлера

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)$$

Обозначим

$$K_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)$$

Тогда решение получится в виде

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + hK_1$$

Таблицу Бутчера для которого имеет вид

0	0
	1

В методе Рафсона 2-го порядка коэффициенты

$$K_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)$$

$$K_2 = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k + \frac{2}{3}hK_1, t_k + \frac{2}{3}h\right)$$

Решение формируется в виде

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h\left(\frac{1}{4}K_1 + \frac{3}{4}K_2\right)$$

Таблица Бутчера для метода имеет вид

0	0	0
2/3	2/3	0
	1/4	3/4

Явные методы Рунге—Кутты

Рассмотрим обобщенный случай

$$K_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)$$

$$K_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k + a_{21}hK_1, t_k + c_2h),$$

⋮

$$K_s = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k + a_{s1}hK_1 + \dots + a_{s,s-1}hK_{s-1}, t_k + c_sh)$$

В общем случае вычисление K_i :

$$K_i = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k + h \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} K_j, t_k + c_i h\right)$$

Решение получается в виде:

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \sum_{i=1}^s b_i K_i$$

Таблица Бутчера для явных одношаговых методов

0	0			
c_2	a_{21}	0		
⋮	⋮	⋮	0	
c_s	a_{s1}	⋯	$a_{s,s-1}$	0
	b_1	⋯	b_{s-1}	b_s

\mathbf{c}	\mathbf{A}
	\mathbf{b}^T

Метод Рунге—Кутта 4-го порядка (3/8)

Вычисление коэффициентов

$$K_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)$$

$$K_2 = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k + \frac{1}{3}hK_1, t_k + \frac{1}{3}h\right)$$

$$K_3 = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k + \left(K_2 - \frac{1}{3}K_1\right)h, t_k + \frac{2}{3}h\right)$$

$$K_4 = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k + (K_1 - K_2 + K_3)h, t_k + h\right)$$

Решение

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{8}(K_1 + 3K_2 + 3K_3 + K_4)$$

Таблица Бутчера

0				
1/3	1/3			
2/3	-1/3	1		
1	1	-1	1	
	1/8	3/8	3/8	1/8

Метод Рунге—Кутта 4-го порядка (классический)

Вычисление коэффициентов

$$K_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)$$

$$K_2 = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k + \frac{1}{2}hK_1, t_k + \frac{1}{2}h\right)$$

$$K_3 = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k + \frac{1}{2}hK_2 + 2hK_2, t_k + \frac{1}{2}h\right)$$

$$K_4 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k + hK_3, t_k + h)$$

Решение

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

Таблица Бутчера

0				
1/2	1/2			
1/2	0	1/2		
1	0	0	1	
	1/6	1/3	1/3	1/6

Неявные методы Рунге—Кутта

В общем случае вычисление K_i :

$$K_i = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_k + \sum_{j=1}^s a_{ij} h K_j, t_k + c_i h\right)$$

Решение получается в виде

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h \sum_{i=1}^s b_i K_i$$

Разрешение неявности для методов семейства Рунге—Кутта, как правило, реализуется по методу простой итерации

не $i - 1$, как в явных, а s – все количество K , т.е. K_1 может зависеть от K_s , который еще не вычислен, в этом и проявляется неявность

Таблица Бутчера для
неявных одношаговых методов

c_1	a_{11}	\cdots	a_{1s}
c_2	a_{21}	\cdots	a_{2s}
\vdots	\vdots	\ddots	
c_s	a_{s1}	\cdots	a_{ss}
	b_1	\cdots	b_s

хотя бы один не нулевой элемент на главной диагонали или выше нее

Метод Радау IA 3-ого порядка:

0	1/4	-1/4
2/3	1/4	5/12
	1/4	3/4

Метод Радау IIA 3-ого порядка:

1/3	5/12	-1/12
1	3/4	1/4
	3/4	1/4

Метод Радау IA 5-ого порядка:

0	$\frac{1}{9}$	$\frac{-1 - \sqrt{6}}{18}$	$\frac{-1 + \sqrt{6}}{18}$
$\frac{3}{5} - \frac{\sqrt{6}}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{11}{45} + \frac{7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{11}{45} - \frac{43\sqrt{6}}{360}$
$\frac{3}{5} + \frac{\sqrt{6}}{10}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{11}{45} + \frac{43\sqrt{6}}{360}$	$\frac{11}{45} - \frac{7\sqrt{6}}{360}$
	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9} + \frac{\sqrt{6}}{36}$	$\frac{4}{9} - \frac{\sqrt{6}}{36}$

Сформируем матрицу из коэффициентов решений для методов семейства Рунге—Кутта

$$\mathbf{K} = [K_1, K_2, \dots, K_s]$$

На каждом k -ом шаге поиска решения x_{k+1} будем запускать дополнительный итерационный процесс в котором

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\rho+1} &= \mathbf{f}(\mathbf{K}_\rho) \\ &= [\mathbf{f}(K_1) \quad \mathbf{f}(K_2) \quad \dots \quad \mathbf{f}(K_s)] \end{aligned}$$

и который останавливается если

$$\|\mathbf{K}_{\rho+1} - \mathbf{K}_\rho\| > \varepsilon \quad \rho < \rho_{\max}$$

while $t_k < t_{\text{end}}$

$$\rho = 0$$

...

while $\rho < \rho_{\max}$ & $\|\mathbf{K}_{\rho+1} - \mathbf{K}_\rho\| > \varepsilon$

$$\mathbf{K}_{\rho+1} = \mathbf{f}(\mathbf{K}_\rho)$$

$$\rho = \rho + 1$$

end

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \dots$$

$$k = k + 1$$

end

Начальное приближение \mathbf{K}_0 на каждом k -ом шаге берется как решение \mathbf{K} , полученное на предыдущем $k - 1$ шаге.

Адаптивные численные методы решения задачи Коши — это методы в которых значение шага h изменяется в процессе решения внутри самого метода для повышения точности вычислений

Два подхода:

- при вычислении \mathbf{x}_{k+1} шаг h постоянно уменьшается до h^* , пока не будет достигнута требуемая точность. Следующий шаг начинается с момента времени $t_k + h^*$.

(перерасчет решения на каждом шаге)

- При вычислении \mathbf{x}_{k+1} определяется удовлетворяет ли решение заданной точности и если нет, то шаг h для следующей итерации, \mathbf{x}_{k+2} уменьшается, а значение \mathbf{x}_{k+1} принимается таким, каким есть.

(без перерасчета решения на каждом шаге)

Адаптивные численные методы решения задачи Коши

Две идеи контроля точности решения на каждом шаге

две идеи:

1. контролировать точность по двум решениям
2. использовать верхний/нижний порог точности

Контроль точности на каждом шаге:

- вычисляем \mathbf{x}_{k+1} с шагом h и с шагом $2h$;
- оцениваем погрешность решения как:

$$E = \frac{\|\mathbf{x}_{k+1}^h - \mathbf{x}_{k+1}^{2h}\|}{2^s - 1}$$

- $E < \varepsilon$ продолжаем вычисления с тем же шагом;
- $E \geq \varepsilon$ уменьшаем шаг h и повторяем с t_k .

Контроль точности для РК4

$$\theta_k = \frac{\|K_2 - K_3\|}{\|K_1 - K_2\|}$$

- $\theta_k > 0.01$ – уменьшаем h
- $\theta_k < 0.001$ – увеличиваем h

Таблица Бутчера

0						
1/4	1/4					
3/8	3/32	9/32				
12/13	1932/2197	-7200/2197	7296/2197			
1	439/216	-8	3680/513	-845/4104		
1/2	-8/27	2	-3544/2565	1859/4104	-11/40	
	16/135	0	6656/12825	28561/56430	-9/50	2/55
	25/216	0	1408/2565	28561/56430	-1/5	0
$\mathbf{x}_{k+1}^1 = \mathbf{x}_k +$	$h \left(\frac{16}{135} K_1 + \frac{6656}{12825} K_3 + \frac{28561}{56430} K_4 - \frac{9}{50} K_5 + \frac{2}{55} K_6 \right)$					
$\mathbf{x}_{k+1}^2 = \mathbf{x}_k +$	$h \left(\frac{25}{216} K_1 + \frac{1408}{2565} K_3 + \frac{28561}{56430} K_4 - \frac{1}{5} K_5 \right)$					

решение более
высокого порядка

На каждой итерации считаются два решения, их разница сравнивается с ε , затем принимается решение об изменении шага h , до тех пор, пока разница решений не удовлетворит точности

Без перерасчета на каждом шаге

$$t_k = t_{\text{begin}}$$

while $t_k < t_{\text{end}}$

$$t_{k+1} = t_k + h$$

$$K_i = \dots, \quad \mathbf{x}_{k+1}^1 = \dots, \quad \mathbf{x}_{k+1}^2 = \dots$$

$$\mathbf{X}_{\text{add}} \leftarrow \mathbf{x}_{k+1}^1, \quad \mathbf{T}_{\text{add}} \leftarrow t_{k+1}$$

$$k = k + 1$$

if $\|\mathbf{x}_{k+1}^1 - \mathbf{x}_{k+1}^2\| > \varepsilon_1$

$$h = h / 2$$

else if $\|\mathbf{x}_{k+1}^1 - \mathbf{x}_{k+1}^2\| < \varepsilon_2$

$$h = 2h$$

end

end

С перерасчетом на каждом шаге

$$t_k = t_{\text{begin}}$$

while $t_k < t_{\text{end}}$

$$K_i = \dots, \quad \mathbf{x}_{k+1}^1 = \dots, \quad \mathbf{x}_{k+1}^2 = \dots$$

if $\|\mathbf{x}_{k+1}^1 - \mathbf{x}_{k+1}^2\| > \varepsilon_1$

$$h = h / 2$$

else

$$t_{k+1} = t_k + h$$

$$\mathbf{X}_{\text{add}} \leftarrow \mathbf{x}_{k+1}^1, \quad \mathbf{T}_{\text{add}} \leftarrow t_{k+1}$$

if $\|\mathbf{x}_{k+1}^1 - \mathbf{x}_{k+1}^2\| < \varepsilon_2$

$$h = 2h$$

end

$$k = k + 1$$

end


end

$t_k = t_{\text{begin}}$ **while** $t_k < t_{\text{end}}$ **if** $t_k + h > t_{\text{end}}$ $h = t_{\text{end}} - t_k$ **end**

...

end

шаг всегда будет меньше, т.е.
требование по точности решения
будут удовлетворены



Вычисление решений:

1 порядок $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + h\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)$

2 порядок $\mathbf{x}_{k+2} = \mathbf{x}_{k+1} + h\left(\frac{3}{2}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1}) - \frac{1}{2}\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)\right)$

3 порядок $\mathbf{x}_{k+3} = \mathbf{x}_{k+2} + h\left(\frac{23}{12}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+2}, t_{k+2}) - \frac{16}{12}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1}) + \frac{5}{12}\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)\right)$

4 порядок $\mathbf{x}_{k+4} = \mathbf{x}_{k+3} + h\left(\frac{55}{24}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+3}, t_{k+3}) - \frac{59}{24}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+2}, t_{k+2}) + \frac{37}{24}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1}) - \frac{9}{24}\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)\right)$

Многошаговые методы— не самостартующие, т.е. для метода n -го порядка нужно предварительно определить n первых точек решения любым самостартующим методом

Вычисление решений:

1 порядок $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \frac{1}{2}h(\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1}) + \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k))$

2 порядок $\mathbf{x}_{k+2} = \mathbf{x}_{k+1} + h\left(\frac{5}{12}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+2}, t_{k+2}) + \frac{2}{3}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1}) - \frac{1}{12}\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)\right)$

3 порядок $\mathbf{x}_{k+3} = \mathbf{x}_{k+2} + h\left(\frac{3}{8}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+3}, t_{k+3}) + \frac{19}{24}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+2}, t_{k+2}) - \frac{5}{24}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1}) + \frac{1}{24}\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)\right)$

4 порядок $\mathbf{x}_{k+4} = \mathbf{x}_{k+3} + h\left(\frac{251}{720}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+4}, t_{k+4}) + \frac{646}{720}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+3}, t_{k+3}) - \frac{246}{720}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+2}, t_{k+2}) + \frac{106}{720}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1}) - \frac{19}{720}\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)\right)$

Для разрешения неявности, как правило, используется схема «предиктор—корректор», например для метода AM2 прогноз:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+2} = \mathbf{x}_{k+1} + h\left(\frac{3}{2}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1}) - \frac{1}{2}\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)\right)$$

коррекция:

$$\mathbf{x}_{k+2} = \mathbf{x}_{k+1} + h\left(\frac{5}{12}\mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_{k+2}, t_{k+2}) + \frac{2}{3}\mathbf{f}(\mathbf{x}_{k+1}, t_{k+1}) - \frac{1}{12}\mathbf{f}(\mathbf{x}_k, t_k)\right)$$

предиктор, как правило,
метод AB n -го порядка

$$\text{BDF1: } \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + hf(t_k, \mathbf{x}_k)$$

$$\text{BDF2: } \mathbf{x}_k = \frac{4}{3}\mathbf{x}_{k-1} - \frac{1}{3}\mathbf{x}_{k-2} + \frac{2}{3}hf(t_k, \mathbf{x}_k)$$

$$\text{BDF3: } \mathbf{x}_k = \frac{18}{11}\mathbf{x}_{k-1} - \frac{9}{11}\mathbf{x}_{k-2} + \frac{2}{11}\mathbf{x}_{k-3} + \frac{6}{11}hf(t_k, \mathbf{x}_k)$$

$$\text{BDF4: } \mathbf{x}_k = \frac{48}{25}\mathbf{x}_{k-1} - \frac{36}{25}\mathbf{x}_{k-2} + \frac{16}{25}\mathbf{x}_{k-3} - \frac{3}{25}\mathbf{x}_{k-4} + \frac{12}{25}hf(t_k, \mathbf{x}_k)$$

$$\text{BDF5: } \mathbf{x}_k = \frac{300}{137}\mathbf{x}_{k-1} - \frac{300}{137}\mathbf{x}_{k-2} + \frac{200}{137}\mathbf{x}_{k-3} - \frac{75}{137}\mathbf{x}_{k-4} + \frac{12}{137}\mathbf{x}_{k-5} + \frac{60}{137}hf(t_k, \mathbf{x}_k)$$

$$\text{BDF6: } \mathbf{x}_k = \frac{360}{147}\mathbf{x}_{k-1} - \frac{450}{147}\mathbf{x}_{k-2} + \frac{400}{147}\mathbf{x}_{k-3} - \frac{225}{147}\mathbf{x}_{k-4} + \frac{72}{147}\mathbf{x}_{k-5} - \frac{10}{147}\mathbf{x}_{k-6} + \frac{60}{147}hf(t_k, \mathbf{x}_k)$$

Очень похоже на методы Адамса—Мульттона, но значение функции $f(\cdot)$ вычисляется меньше раз

Для разрешения неявности также используется схема «предиктор—корректор». В качестве корректора берется метод АБ того же порядка

Обобщенная формула NDF m -го порядка

$$\sum_{m=1}^k \frac{1}{m} \nabla^m \mathbf{x}_{k+1} = h \mathbf{f}_{k+1} + \kappa \gamma^k \nabla^{k+1} \mathbf{x}_{k+1}$$

где

$$\gamma^k = \sum_{j=1}^k 1/j$$

$\nabla^m \mathbf{x}_{k+1}$ — обратные разности порядка m , вида:

$$\nabla \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}$$

κ — соответствующие заданные коэффициенты:

$$\kappa = \left[-\frac{37}{200}; \quad -\frac{1}{9}; \quad -0.0823; \quad -0.0415; \quad 0 \right]$$

Являются усовершенствованием BDF методов. Для разрешения неявности также используется схема «предиктор—корректор». В качестве корректора берется метод АБ $n - 1$ порядка

$$\text{NDF1: } \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_{k-1} + h\mathbf{f}(t_k, \mathbf{x}_k) + \kappa_1\gamma_1(\mathbf{x}_k - 2\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{x}_{k-2})$$

$$\text{NDF2: } \mathbf{x}_k = \frac{4}{3}\mathbf{x}_{k-1} - \frac{1}{3}\mathbf{x}_{k-2} + \frac{2}{3}h\mathbf{f}(t_k, \mathbf{x}_k) + \frac{2}{3}\kappa_2\gamma_2(\mathbf{x}_k - 3\mathbf{x}_{k-1} + 3\mathbf{x}_{k-2} - \mathbf{x}_{k-3})$$

$$\text{NDF3: } \mathbf{x}_k = \frac{18}{11}\mathbf{x}_{k-1} - \frac{9}{11}\mathbf{x}_{k-2} + \frac{2}{11}\mathbf{x}_{k-3} + \frac{6}{11}h\mathbf{f}(t_k, \mathbf{x}_k) + \frac{6}{11}\kappa_3\gamma_3(\mathbf{x}_k - 4\mathbf{x}_{k-1} + 6\mathbf{x}_{k-2} - 4\mathbf{x}_{k-3} + \mathbf{x}_{k-4})$$

$$\text{NDF4: } \mathbf{x}_k = \frac{48}{25}\mathbf{x}_{k-1} - \frac{36}{25}\mathbf{x}_{k-2} + \frac{16}{25}\mathbf{x}_{k-3} - \frac{3}{25}\mathbf{x}_{k-4} + \frac{12}{25}h\mathbf{f}(t_k, \mathbf{x}_k) + \frac{12}{25}\kappa_4\gamma_4(\mathbf{x}_k - 5\mathbf{x}_{k-1} + 10\mathbf{x}_{k-2} - 10\mathbf{x}_{k-3} + 5\mathbf{x}_{k-4} - \mathbf{x}_{k-5})$$

$$\text{NDF5: } \mathbf{x}_k = \frac{300}{137}\mathbf{x}_{k-1} - \frac{300}{137}\mathbf{x}_{k-2} + \frac{200}{137}\mathbf{x}_{k-3} - \frac{75}{137}\mathbf{x}_{k-4} + \frac{12}{137}\mathbf{x}_{k-5} + \frac{60}{137}h\mathbf{f}(t_k, \mathbf{x}_k) + \frac{60}{137}\kappa_5\gamma_5(\mathbf{x}_k - 6\mathbf{x}_{k-1} + 15\mathbf{x}_{k-2} - 20\mathbf{x}_{k-3} + 15\mathbf{x}_{k-4} - 6\mathbf{x}_{k-5} + \mathbf{x}_{k-6})$$

NDF методы выше 5-го порядка является неустойчивым

Численный метод решения задачи Коши называется **A—устойчивым**, если при фиксированном шаге h для дифференциального уравнения

$$\dot{x} = kx, \text{ при } x(0) = 1$$

получаемое решение стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

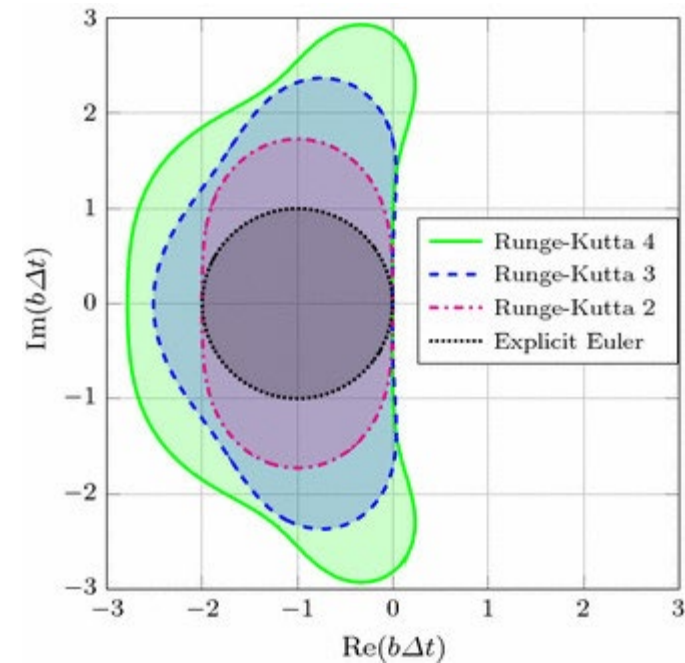
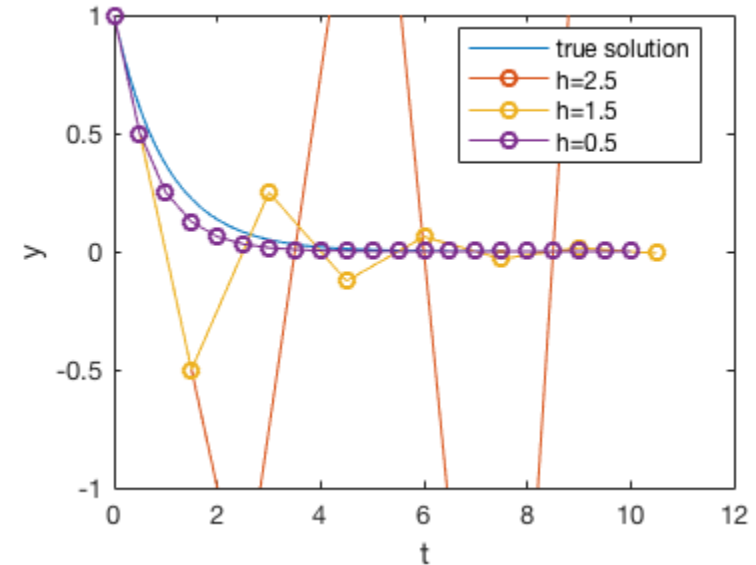
Для методов РК функция устойчивости имеет вид:

$$\varphi(\mathbf{z}) = \frac{\det \mathbf{I} - \mathbf{zA} + \mathbf{z}\mathbf{e}\mathbf{b}^T}{\det \mathbf{I} - \mathbf{zA}}$$

где \mathbf{e} – единичный вектор

Численный метод решения задачи Коши называется **L—устойчивым**, если он A—устойчив и

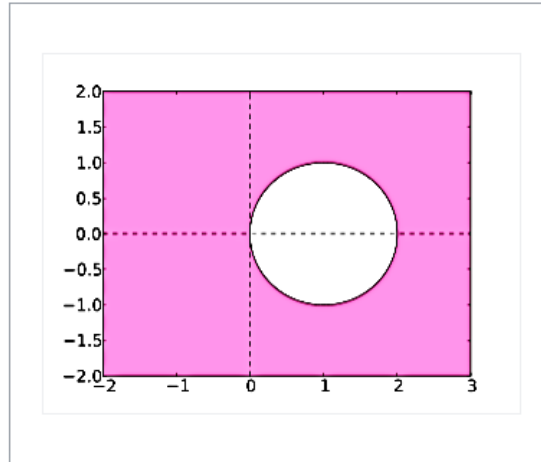
$$\lim_{z \rightarrow 0} |\varphi(\mathbf{z})| \rightarrow 0$$



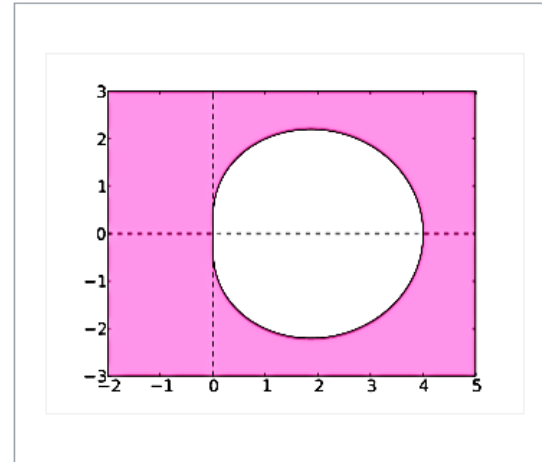
Численные методы решения задачи Коши

Устойчивость численных методов BDF (backward differentiation formula)

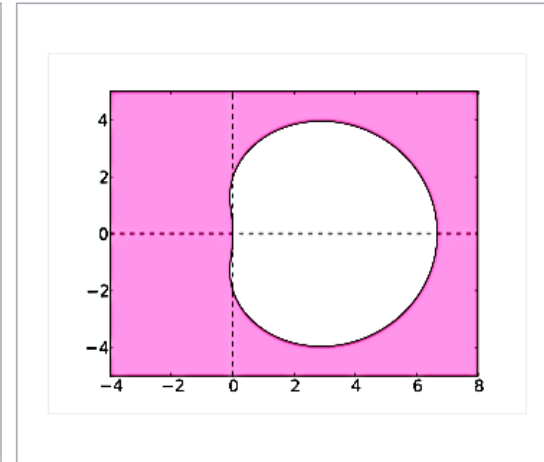
Розовая область показывает область устойчивости методов BDF



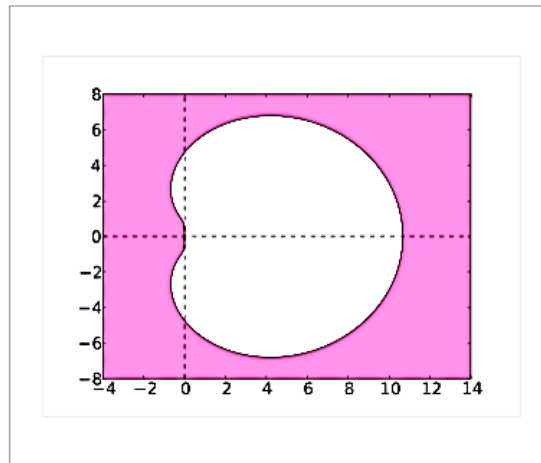
BDF1



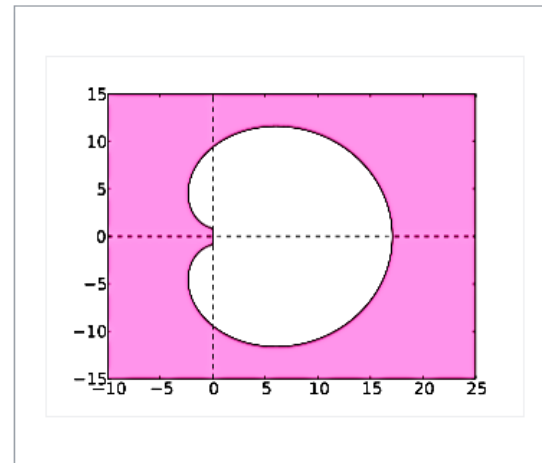
BDF2



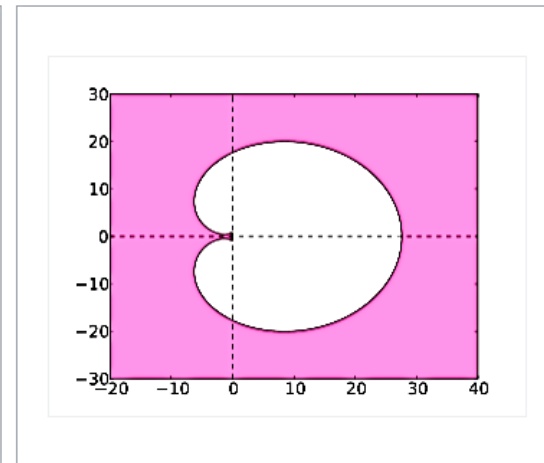
BDF3



BDF4



BDF5



BDF6