П. С. Моденов

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

С АНАЛИЗОМ РЕШЕНИЙ

СОВЕТСКАЯ НАУКА
Москва — 1959

П. С. МОДЕНОВ

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ НАЛИЗОМ РЕШЕНИЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
«СОВЕТСКАЯ НАУКА»
Москва — 1959

Петр Сергеевич Моденов

Сборник задач по математике
с анализом ошибок

Редактор *С. И. Новоселов*

Редактор издательства *К. И. Аношина*

Технический редактор *С. С. Горохова*

Корректоры *Л. С. Касаткина* и *А. В. Коротк*

Сдано в набор 4/IV-59 г. Подписано к печати 18/VIII-59

Бумага $84 \times 108^1/_{32}$. 30,0 печ. л., 24,6 усл. печ. л., 24,15 уч.-

Тираж 194 000. Т06354. Издательство «Советская наук

Заказ 64. Цена 7 р. 25 к.

Набрано в 1-й типографии МПС. Отпечатано в Первой Образцов
имени А. А. Жданова Московского городского Совнарх
Москва, Ж-54, Валовая, 28. Заказ № 3478.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник задач по элементарной математике содержит задачи по всем разделам (алгебра, геометрия и тригонометрия) этой дисциплины; кроме того, в книге проведен анализ решений, методов решений и наиболее часто допускающихся ошибок при решении задач.

Этот сборник может быть использован читателями, уже хорошо усвоившими программу по элементарной математике полной средней школы: студентами физико-математических факультетов пединститутов, преподавателями средних школ, поступающими в высшие учебные заведения и др.

В сборнике уделено много внимания разнообразным методам решения задач, вопросам исследования решений, синтезу различных разделов элементарной математики, вопросам построения рассуждений в геометрии, не зависящих от чертежа (с использованием теорем Шаля и без аналитических методов). В сборник включено большое количество задач, предлагавшихся на конкурсных испытаниях в вузах различного профиля за 1954—1958 гг., и значительное количество задач повышенной трудности. Часть задач заимствована из иностранных журналов.

Москва, 1959 г.

Глава I

ЗАДАЧИ, ПРЕДЛАГАВШИЕСЯ НА КОНКУРСНЫХ ЭКЗАМЕНАХ В ВЫСШИЕ УЧЕБНЫЕ ЗАВЕДЕНИЯ

Вариант 1

1. Найти четырехзначное число по следующим условиям сумма квадратов крайних цифр равна 13, сумма квадратов средних цифр равна 85; если же из искомого числа вычесть 1089, то получится число, записываемое теми же цифрами, что искомое, но в обратном порядке.

2. Показать, что единственным решением системы

$$2x + y + z = 0, \quad yz + zx + xy - y^2 = 0, \quad xy + z^2 = 0$$

является решение

$$x = y = z = 0.$$

3. Решить уравнение

$$4^x - 3^{x - \frac{1}{2}} = 3^{x + \frac{1}{2}} - 2^{2x-1}.$$

4. Найти коэффициент при x^m в разложении по степеням выражения

$$(1 + x)^k + (1 + x)^{k+1} + \ldots + (1 + x)^n.$$

Разобрать при этом случаи:

$$m < k, \quad m \geqslant k.$$

Вариант 2

5. Сочинение по русскому языку писало 100 человек

Им было роздано 480 листов бумаги, причем каждая девочка получила на два листа больше мальчика, а все мальчики получили столько же листов, сколько все девочки. Сколько было мальчиков и сколько девочек?

6. Решить систему

$$x + y + z = a, \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x^3 + y^3 + z^3 = a^3.$$

Указание: полезно использовать тождество

$$(x + y + z)(yz + zx + xy) = 3xyz + x^2y + \\ + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y.$$

7. Решить систему

$$\lg_y x - \lg_x y = \frac{8}{3}, \quad \frac{x}{y} = 16.$$

8. В разложении $\left(x\sqrt{x} - \frac{1}{x^4}\right)^n$ коэффициент третьего члена на 44 больше абсолютной величины коэффициента второго члена. Найти свободный член.

Вариант 3

9. Некоторое количество равных шаров расположено в виде правильной четырехугольной пирамиды. Доказать, что из всех этих шаров можно составить фигуру, имеющую вид двух правильных тетраэдров, приставленных друг к другу своими основаниями. Любое ребро этой фигуры будет содержать столько же шаров, сколько содержит их ребро первоначальной пирамиды.
Указание: на плоскости аналогичным свойством обладают квадрат и ромб.

10. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$. Составить новое уравнение, корнями которого были бы числа

$$y_1 = x_2 x_3, \quad y_2 = x_3 x_1, \quad y_3 = x_1 x_2.$$

Указание: полезно найти зависимость между корнями уравнения и его коэффициентами.

11. Решить систему

$$a^{2x} + a^{2y} = 2b, \quad a^{x+y} = c.$$

Каким условиям должны удовлетворять a, b, c, чтобы решение было возможно?

12. Решить неравенство

$$\lg_a x + \lg_a (x+1) < \lg_a (2x+6), \quad a > 1.$$

Вариант 4

13. Бак объемом 425 $м^3$ наполнился водой из двух кранов, причем первый кран был открыт на 5 час. дольше второго. Сколько времени был открыт второй кран, если известно: 1) что, если первый кран был бы открыт столько времени, сколько на самом деле был открыт второй, а второй кран был бы открыт столько времени, сколько был открыт первый, то из первого крана вытекло бы вдвое меньше воды, чем из второго; 2) что, если одновременно открыть сба крана, то бак наполнится через 17 час.

14. Показать, что сумма решений $x+y$ системы

$$x + y + \sqrt{xy} + \frac{1}{\sqrt{xy}} = a, \qquad x^2 + y^2 + xy - \frac{1}{xy} - 2 = b$$

всегда вещественна, при любых вещественных a и b.

15. Решить систему

$$\lg_5 x + 3^{\lg_5 y} = 7, \qquad x^y = 5^{12}.$$

16. Ряд чисел 1, 4, 10, 19, ... обладает тем свойством, что разности двух соседних чисел образуют арифметическую прогрессию. Найти n-ый член и сумму n членов этой последовательности чисел.

Указание: воспользоваться формулой

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Вариант 5

17. В двух одинаковых сосудах объемом по 30 *л* каждый содержится всего 30 *л* спирта. Первый сосуд доливают доверху водой и полученной смесью дополняют второй сосуд, затем из второго сосуда отливают в первый 12 *л* новой смеси. Сколько спирта было первоначально в каждом сосуде, если во втором сосуде оказалось на 2 *л* спирта меньше, чем в первом?

18. Пусть x_1, x_2, x_3 — корни уравнения $x^3 - x^2 - 1 =$

Составить новое уравнение, корнями которого были бы

$$y_1 = x_2 + x_3, \quad y_2 = x_3 + x_1, \quad y_3 = x_1 + x_2.$$

Указание: полезно найти зависимость между коэффициентами уравнения и его корнями.

19. Решить систему

$$x^{x+y} = y^{x-y}, \quad x^2 y = 1.$$

20. Доказать, что можно найти такую бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, первый член которой равен 1 и каждый член которой в k раз больше суммы всех следующих за ним членов. При каких k задача возможна?

Вариант 6

21. Шестизначное число начинается цифрой 1. Если эту цифру перенести с первого места на последнее, сохранив порядок остальных пяти цифр, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найти первоначальное число.

22. Найти вещественные решения системы

$$(x+y)(x^2-y^2) = 9, \quad (x-y)(x^2+y^2) = 5.$$

23. Решить уравнение

$$\lg_2(9^{x-1}+7) = 2 + \lg_2(3^{x-1}+1).$$

24. Решить неравенство

$$x^{\lg_a x + 1} > a^2 x, \quad a > 1.$$

Вариант 7

25. Плоты шли из пункта A до устья реки вниз по течению. У устья реки их взял на буксир пароход и через $17^1/_8$ суток после выхода плотов из A доставил их по озеру в пункт B. Сколько времени пароход вел плоты от устья реки по озеру до B, если известно, что пароход тратит на рейс (без буксировки) от A до B 61 час и от B до A — 79 час., а его скорость во время буксировки уменьшается вдвое?

26. Найти все решения уравнения

$$\left(\sqrt[3]{x} - 4{,}5\right)^4 + \left(\sqrt[3]{x} - 5{,}5\right)^4 = 1.$$

27. Решить уравнение

$$\lg_x 2 \cdot \lg_{\frac{x}{16}} 2 = \lg_{\frac{x}{64}} 2.$$

28. При каком значении k член T_{k+1} разложения по формуле бинома Ньютона

$$(1+\sqrt{3})^{100}$$

будет одновременно больше как предшествующего, так и последующего членов этого разложения?

Вариант 8

29. От пристани A одновременно отправились вниз по течению катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 *км*, затем повернул обратно и вернулся в A через 14 час. Найти скорость катера в стоячей воде и скорость течения, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 *км* от A.

30. Решить систему

$$x-y=\frac{7}{2}\left(\sqrt[3]{x^2y}-\sqrt[3]{xy^2}\right), \quad \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=3.$$

31. Решить систему

$$x^a=y^b, \ \lg_c\frac{x}{y}=\frac{\lg_c x}{\lg_c y}.$$

32. В вещевой лотерее разыгрываются 8 предметов. Первый подошедший к урне вынимает из нее 5 билетов. Каким числом способов он может их вынуть, чтобы: 1) ровно два из них оказались выигрышными? 2) чтобы по крайней мере два из них оказались выигрышными? Всего в урне 50 билетов.

Вариант 9

33. Через точку, взятую произвольно на основании треугольника ABC, провести прямую, делящую площадь треугольника на две равновеликие части.

34. Доказать, что из равенства $\cos z=\cos x\cos y$ вытекает равенство

$$\operatorname{tg}\frac{z+x}{2}\operatorname{tg}\frac{z-x}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}.$$

35. Доказать, что любой плоский угол произвольного четырехгранного угла меньше суммы трех других плоских углов.

Вариант 10

36. Найти отношение площади треугольника к площади другого треугольника, стороны которого равны медианам данного треугольника.

37. Показать, что если x удовлетворяет уравнению

$$\frac{\cos x - \cos \alpha}{\cos x - \cos \beta} = \frac{\sin^2 \alpha \cos \beta}{\sin^2 \beta \cos \alpha},$$

то

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}.$$

38. Найти отношение объема конуса к объему вписанного в него шара, если известно, что плоскость, касающаяся шара и перпендикулярная к одной из образующих конуса, отсекает на этой образующей, считая от вершины, отрезок в k раз больший радиуса шара.

Вариант 11

39. В треугольник со сторонами a, b, c вписан полукруг с диаметром, лежащим на стороне c. Найти радиус полукруга.

40. Доказать тождество

$$\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} (30^\circ - \alpha) + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} (60^\circ - \alpha) +$$
$$+ \operatorname{tg} (60^\circ - \alpha) \operatorname{tg} (30^\circ - \alpha) = 1.$$

41. На одной и той же образующей конуса взяты две точки A и B на расстоянии a друг от друга. На поверхности конуса взяты еще две точки C и D такие, что $ABCD$ — правильный тетраэдр. Найти расстояние от вершины конуса до ребра CD этого тетраэдра, если известно, что угол при вершине осевого сечения конуса определяется условиями:

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \quad \alpha < 90^\circ.$$

Вариант 12

42. Доказать, что сумма квадратов расстояний какой-нибудь точки окружности до вершин правильного вписанного треугольника есть величина постоянная, не зависящая от положения точки на окружности.

43. Доказать, что из равенств

$$\frac{\cos(y-z)-\cos(x-y)}{\cos(y+z)-\cos(x+y)}=\frac{\cos(z-x)-\cos(y-z)}{\cos(z+x)-\cos(y+z)}=$$

$$=\frac{\cos(x-y)-\cos(z-x)}{\cos(x+y)-\cos(z+x)}$$

вытекают равенства

$$\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}\frac{y+z}{2}}=\frac{\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg}\frac{z+x}{2}}=\frac{\operatorname{tg} z}{\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}}.$$

44. Найти высоту правильной четырехугольной пирамиды, если известно, что объем описанного вокруг пирамиды шара равен v, а перпендикуляр, опущенный из центра шара на ее боковую грань, образует с высотой пирамиды угол α.

Вариант 13

45. Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, соответственно параллельные сторонам треугольника. Эти прямые разделяют площадь треугольника на шесть частей, из которых три — треугольники с площадями равными, s_1, s_2, s_3. Найти площадь данного треугольника.

46. Доказать, что при n целом и $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ имеет место тождество

$$\sin 2n\alpha+\sin 2n\beta+\sin 2n\gamma=$$

$$=(-1)^{n+1}4\sin n\alpha\sin n\beta\sin n\gamma.$$

47. Все 4 стороны равнобочной трапеции касаются цилиндра, ось которого перпендикулярна к параллельным сторонам трапеции. Найти угол, образуемый плоскостью трапеции с осью цилиндра, если длины оснований трапеции равны a и b, а высота трапеции равна h.

Вариант 14

48. Из всех треугольников с одинаковым основанием и одним и тем же углом при вершине найти треугольник с наибольшим периметром.

49. Доказать, что

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=-\frac{1}{2}.$$

50. Площади параллельных сечений шара, расположенных по одну сторону от его центра, равны s_1 и s_2, а расстояние между этими сечениями равно d. Найти площадь сечения шара, параллельного сечениям s_1 и s_2 и делящего пополам расстояние между ними.

Вариант 15

51. Через точку A, лежащую внутри угла, проведена прямая, отсекающая от этого угла наименьший по площади треугольник. Доказать, что отрезок этой прямой, заключенный между сторонами угла, делится в точке A пополам.
52. Решить уравнение

$$(1+k)\frac{\cos x\cos(2x-\alpha)}{\cos(x-\alpha)}=1+k\cos 2x.$$

53. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α, а кратчайшее расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания равно d. Найти объем этой пирамиды.

Вариант 16

54. Через точку M, лежащую на основании AC треугольника, провести прямую MN, отсекающую от треугольника k-ую часть его площади. Сколько решений имеет задача?
55. Решить уравнение

$$\cos 3x\cos^3 x+\sin 3x\sin^3 x=0.$$

56. Шар вписан в прямую призму, в основании которой лежит прямоугольный треугольник. В этом треугольнике перпендикуляр h, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, составляет с одним из катетов угол α. Найти объем призмы.

Вариант 17

57. Может ли выражение

$$z = x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 4$$

принимать отрицательные значения при вещественных x и y?

58. Упростить выражение $a^{\frac{\lg(\lg a)}{\lg a}}$.

Все логарифмы взяты по одному и тому же основанию.

59. Доказать, что если все двугранные углы некоторой пирамиды равны, то и все ребра этой пирамиды также равны.

60. Доказать неравенство:

$$\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} > 1 + \operatorname{ctg}\varphi$$

при $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Вариант 18

61. Упростить выражения:

а) $(x + a)(x^2 + a^2)\ldots(x^{2^{n-1}} + a^{2^{n-1}})$;

б) $(x^2 - ax + a^2)(x^4 - a^2x^2 + a^4)\ldots(x^{2^n} - a^{2^{n-1}}x^{2^{n-1}} + a^{2^n})$.

62. Решить неравенство:

$$x^{2 - \lg_2^2 x - \lg_2 x^2} - \frac{1}{x} > 0.$$

63. В равнобедренном треугольнике с основанием a и боковой стороной b угол при вершине равен 20°.

Доказать, что

$$a^3 + b^3 = 3ab^2.$$

64. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x - 2\sin 2x = 1.$$

Вариант 19

65. Доказать неравенство:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{9}{a + b + c}$$

(a, b, c — положительны).

66. Показать, что уравнение

$$\lg_{2x}\frac{2}{x}\lg_2^2 x+\lg_2^4 x=1$$

имеет лишь один корень, удовлетворяющий неравенству $x>1$ и найти этот корень.

67. На двух параллельных плоскостях расположены отрезки AB и CD. Концы этих отрезков являются вершинами некоторой треугольной пирамиды. Доказать, что объем пирамиды сохраняется, если отрезки перемещать в этих плоскостях параллельно самим себе.

68. Решить уравнение:

$$2\sec x\operatorname{cosec} x+2(\operatorname{cosec} x-\sec x)-5=0.$$

Вариант 20

69. Две железные дороги AA' и BB' перпендикулярны друг другу и пересекаются в пункте C, причем расстояния AC и BC равны соответственно a и b. Из пунктов A и B по направлению к C одновременно выходят два поезда со скоростями соответственно v_1 и v_2. Через сколько времени после отправления расстояние между поездами будет наименьшим? Чему равно это наименьшее расстояние?

70. Найти все значения λ, при которых два уравнения:

$$\lambda x^3-x^2-x-(\lambda+1)=0,$$

$$\lambda x^2-x-(\lambda+1)=0$$

имеют общий корень и найти этот корень.

71. Доказать, что прямая, пересекающая две грани двугранного угла, образует с ними равные углы тогда и только тогда, когда точки пересечения одинаково удалены от ребра.

72. Рассматривается функция

$$f(x)=A\cos x+B\sin x,$$

где A и B некоторые постоянные.

Доказать, что если $f(x)$ обращается в нуль при двух значениях аргумента x_1 и x_2 таких, что $x_1-x_2\neq k\pi$ (k — целое число), то $f(x)$ тождественно равна нулю.

Вариант 21

73. В треугольнике ABC из вершины A проведена высота $h>1$, пересекающая основание BC треугольника и делящая его на отрезки длиной a и b.

Выяснить, можно ли по величине суммы

$$\frac{1}{\lg_a h} + \frac{1}{\lg_b h}$$

сделать заключение о том, является ли угол A острым, прямым или тупым.

74. Найти все вещественные решения уравнения

$$x^2 + 4x\cos(xy) + 4 = 0.$$

75. Дана прямая CD и две точки A и B, не лежащие на ней. Найти на прямой точку M такую, что

$$\angle AMC = 2\angle BMD.$$

76. Решить уравнение

$$1 + 2\operatorname{cosec} x = -\frac{\sec^2\frac{x}{2}}{2}.$$

Вариант 22

77. В колбе имеется раствор поваренной соли. Из колбы в пробирку отливают $\frac{1}{n}$-ую часть раствора и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится вдвое. После этого выпаренный раствор выливают обратно в колбу. В результате содержание соли в колбе повышается на p процентов. Определить исходное процентное содержание соли.

78. Показать, что при любом натуральном $n > 1$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}.$$

79. В треугольнике ABC проведены высоты, основания которых соединены между собой. Определить отношение площади получившегося треугольника к площади треугольника ABC, если углы треугольника ABC известны. Рассмотреть случаи остроугольного, тупоугольного и прямоугольного треугольников.

80. Доказать, что при $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$

$$\cos\sin\varphi > \sin\cos\varphi.$$

Остается ли справедливым это неравенство при всех φ?

Вариант 23

81. На участке реки от A до B течение так слабо, что им можно пренебречь; на участке от B до C течение уже достаточно сильное.

Лодка покрывает расстояние вниз по течению от A до C за 6 час., а от C до A вверх против течения за 7 час. Если бы на участке от A до B течение было таким же, как на участке от B до C, то весь путь от A до C занял бы 5,5 час.

Сколько времени в этом случае понадобилось бы на то, чтобы подняться вверх от C до A?

82. Решить систему:

$$\sqrt{\frac{x}{y}}-\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{3}{2},$$

$$x+y+xy=9.$$

83. На плоскости даны два отрезка AB и CD. Найти геометрическое место точек M, обладающих тем свойством, что сумма площадей треугольника AMB и CMD равна некоторой постоянной a.

Указание: подобрать сперва такой частный случай расположения отрезков, при котором задача решается легко; затем решение распространить на общий случай.

84. Решить уравнение

$$(\cos 4x-\cos 2x)^2=\sin 3x+5.$$

Вариант 24

85. Трое A, B и C переправляются через водохранилище шириною в s *км*, A — вплавь, со средней скоростью v *км/час*, B и C пользуются для этой цели моторной лодкой, скорость которой v_1 *км/час*.

Через некоторое время после начала переправы C решает оставшийся участок пути преодолеть вплавь (но плывет с той же скоростью, что и A). B тем временем поворачивает назад, чтобы взять с собою A; A садится в лодку и продолжает путь вместе с B. На противоположном берегу все трое оказываются одновременно. Определить продолжительность переправы.

86. Решить уравнение

$$\lg_{3x}\frac{3}{x}+\lg_3^3 x=1.$$

87. В пространстве рассматриваются два отрезка AB и CD, не лежащие в одной плоскости. Пусть MN — отрезок, соединяющий их середины.
Доказать, что

$$\frac{AC+BD}{2} > MN.$$

88. Доказать, что

$$\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}.$$

Вариант 25

89. Решить систему

$$\frac{x_2 x_3 \ldots x_n}{x_1} = a_1,$$

$$\frac{x_1 x_3 \ldots x_n}{x_2} = a_2,$$

$$\frac{x_1 x_2 \ldots x_{n-1}}{x_n} = a_n,$$

предполагая, что

$$a_1 > 0,\quad a_2 > 0, \ldots, a_n > 0 \text{ и } x_1 > 0,\quad x_2 > 0, \ldots, x_n > 0.$$

90. Доказать, что при $n > 2$

$$(n!)^2 > n^n.$$

91. Одна из двух треугольных пирамид с общим основанием расположена внутри другой. Доказать, что сумма плоских углов при вершине внутренней пирамиды больше, чем сумма плоских углов при вершине внешней.

92. Решить уравнение

$$\cos 7x - \sin 5x = \sqrt{3}(\cos 5x - \sin 7x).$$

Вариант 26

93. Рассматривается дробь (отношение двух целых чисел), знаменатель которой меньше квадрата числителя на единицу. Если к числителю и знаменателю прибавить по 2, то значение дроби будет больше, чем $\frac{1}{3}$, если же от числителя и знаменателя отнять по 3, то дробь

останется положительной, но будет меньше 0,1. Найти эту дробь.

94. Доказать, что функция $\cos\sqrt{x}$ не является периодической (т. е. не существует такого постоянного числа $T \neq 0$, чтобы при всех x было $\cos\sqrt{x+T} = \cos\sqrt{x}$).

95. Через середины двух параллельных ребер куба, не лежащих на одной грани, проведена прямая. Куб повернут вокруг нее на 90°. Определить объем общей части исходного куба и повернутого.

96. Найти соотношение между

$$\arcsin\cos\arcsin x$$

и

$$\arccos\sin\arccos x.$$

Вариант 27

97. Найти все вещественные решения системы

$$x^3 + y^3 = 1, \quad x^2 y + 2xy^2 + y^3 = 2.$$

98. Найти наименьшее значение функции

$$\varphi(x) = |x-a| + |x-b| + |x-c| + |x-d|,$$

где $a < b < c < d$ — фиксированные вещественные числа, а x принимает произвольные вещественные значения.

Указание: рассуждения удобно проводить на числовой оси.

99. В правильной четырехугольной призме проведены два параллельных сечения: одно проходит через середины двух смежных сторон основания и середину оси, другое делит ось в отношении 1 : 3. Зная, что площадь первого сечения равна s, найти площадь второго.

100. В равнобедренном треугольнике ABC угол при вершине B равен 20°. На боковых сторонах AB и CB взяты соответственно точки Q и P так, что $\angle QCA = 60°$, а $\angle PAC = 50°$. Доказать, что $\angle QPA = 80°$.

Вариант 28

101. Выразить свободный член c кубического уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ через коэффициенты a и b, если известно, что корни уравнения образуют арифметическую прогрессию.

Указание: можно воспользоваться выражениями коэффициентов многочлена через его корни.

102. Среди комплексных чисел z, удовлетворяющих условию

$$|z-25i| \leqslant 15$$

найти число, имеющее наименьший аргумент. Сделать чертеж.

103. Данный выпуклый четырехгранный угол пересечь плоскостью так, чтобы в сечении получился параллелограмм.

104. Доказать справедливость неравенства:

$$(\operatorname{ctg}^2 x-1)(3\operatorname{ctg}^2 x-1)(\operatorname{ctg} 3x \operatorname{tg} 2x-1) \leqslant -1$$

для всех значений x, при которых левая часть имеет смысл.

Вариант 29

105. При каких значениях a система неравенств

$$-3<\frac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2$$

удовлетворяется при всех значениях x?

106. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_k$ — различные простые числа. Сколько делителей имеет число $q=p_1 p_2 \ldots p_k$, включая 1 и q?

107. Показать, что площадь любого треугольного сечения произвольной треугольной пирамиды не превосходит площади хотя бы одной из ее граней.

108. Решить систему:

$$\operatorname{tg} x=\operatorname{tg}^3 y,$$
$$\sin x=\cos^2 y.$$

Вариант 30

109. Решить уравнение

$$\sqrt{y-2+\sqrt{2y-5}}+\sqrt{y+2+3\sqrt{2y-5}}=7\sqrt{2}.$$

(берутся арифметические значения корней).

110. Пусть $P(x)$ — многочлен, дающий при делении на $x-a$ остаток A, при делении на $x-b$ — остаток B, при делении на $x-c$ — остаток C. Найти многочлен, получающийся в остатке при делении $P(x)$ на $(x-a)(x-b)(x-c)$. Предполагается, что среди чисел a, b и c нет равных.

111. На одной из сторон острого угла взяты две точки A и B. Найти на другой стороне угла точку C такую, чтобы угол ACB был наибольшим. Построить точку C с помощью циркуля и линейки.

112. Решить уравнение

$$\frac{a\sin x + b}{b\cos x + a} = \frac{a\cos x + b}{b\sin x + a}$$

(a и b — вещественные числа, отличные от нуля).

Вариант 31

113. Решить уравнение

$$\sqrt[m]{(1+x)^2} - \sqrt[m]{(1-x)^2} = \sqrt[m]{1-x^2}.$$

114. Доказать, что

$$\sqrt{\underbrace{111\ldots1}_{2n \text{ цифр}} - \underbrace{222\ldots2}_{n \text{ цифр}}} = \underbrace{333\ldots3}_{n \text{ цифр}}.$$

115. В треугольной пирамиде проводятся сечения, параллельные двум ее непересекающимся ребрам. Найти сечение с наибольшей площадью.

116. Определить, в каких пределах можно изменять параметр λ так, чтобы уравнение

$$\sec x + \operatorname{cosec} x = \lambda$$

имело корень x, удовлетворяющий неравенству

$$0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

Вариант 32

117. Доказать, что многочлен

$$x^8 - x^5 + x^2 - x + 1$$

положителен при всех вещественных x.

118. Найти все вещественные корни уравнения

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{x+1} = x\sqrt[3]{2}.$$

119. В данный треугольник вписать с помощью циркуля и линейки прямоугольник, имеющий заданную диагональ.

120. Решить уравнение

$$6\operatorname{tg} x + 5\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x.$$

Вариант 33

121. Пусть при любом положительном λ все корни уравнения

$$ax^2 + bx + c + \lambda = 0$$

вещественны и положительны. Доказать, что тогда $a = 0$ (коэффициенты a, b и c предполагаются вещественными).

122. Упростить выражение

$$(\lg_b a - \lg_a b)^2 + (\lg_b \tfrac{1}{2}a - \lg_{a^2} b)^2 + \ldots + (\lg_b \tfrac{1}{2n}a - \lg_{a^{2^n}} b)^2$$

123. Из двух точек прямой проведены по две касательные к окружности. В образованные углы с вершинами в этих точках вписаны окружности равного радиуса. Доказать, что их линия центров параллельна данной прямой.

124. Доказать, что уравнение

$$(\sin x + \sqrt{3}\cos x)\sin 4x = 2$$

не имеет решений.

Вариант 34

125. Найти наибольшее значение выражения

$$\lg_2^4 x + 12\lg_2^2 x \lg_2 \frac{8}{x},$$

если x изменяется между 1 и 64.

124. Доказать, что

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{199} - \frac{1}{200} =$$

$$= \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \ldots + \frac{1}{200}.$$

127. Трехгранный угол пересекается плоскостью по треугольнику ABC. Найти геометрическое место центров тяжести треугольников ABC, если:

а) вершины A и B закреплены;

б) вершина A закреплена.

128. Решить систему

$$\sin x + \sin y = \sin(x + y), \quad |x| + |y| = 1.$$

Вариант 35

129. Найти комплексное число z, если

$$\left|\frac{z-12}{z-8i}\right|=\frac{5}{3} \quad \text{и} \quad \left|\frac{z-4}{z-8}\right|=1.$$

130. Найти значения a, при которых смешанная система

$$x^2+y^2+2x\leqslant 1,$$
$$x-y+a=0$$

имеет единственное решение. Найти соответствующие решения.

131. Рассматриваются два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, которые лежат в непараллельных плоскостях и имеют попарно непараллельные стороны. При этом прямые, соединяющие соответственные вершины, пересекаются в одной точке O.

Доказать, что соответствующие стороны треугольника попарно пересекаются и точки их пересечения лежат на одной прямой.

132. В точке A плоскости P расположен источник света. Над плоскостью помещено полусферическое зеркало радиуса 1, обращенное внутренней зеркальной поверхностью к плоскости, причем так, что ось симметрии зеркала перпендикулярна к плоскости P в точке A. Зная, что наименьший угол между лучами, отраженными зеркалом и плоскостью P равен 15°, определить расстояние от зеркала до плоскости и радиус освещенного на плоскости P круга.

Вариант 36

133. Решить систему

$$x+y+z=9,$$
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1,$$
$$xy+xz+yz=27.$$

134. Пункты A и B расположены на прямолинейной магистрали, идущей с запада на восток. Пункт B в 9 *км* восточнее A. Из пункта A на восток выходит автомашина, движущаяся равномерно со скоростью 40 *км/час*. Одновременно из B в том же направлении

с постоянным ускорением 32 *км/час*^{2} выходит мотоцикл. Определить наибольшее расстояние между автомашиной и мотоциклом в течение первых двух часов движения.

Указание: полезно начертить график зависимости расстояния между автомашиной и мотоциклом от времени.

135. Показать, что отрезки, соединяющие вершины некоторой трехгранной пирамиды с центрами тяжести противолежащих граней, пересекаются в одной точке.

136. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$\varphi(x) = \sin^6 x + \cos^6 x.$$

Вариант 37

137. Велосипедист выехал из пункта A в пункт B и ехал с постоянной скоростью 20 *км/час*. Когда он проехал $8\frac{1}{3}$ *км*, его догнал автомобиль, вышедший из A на 15 мин. позднее и шедший тоже с постоянной скоростью. После того, как велосипедист проехал еще 25 *км*, он встретил автомобиль уже возвращавшийся из B, где он простоял полчаса. Найти расстояние между A и B.

138. Найти все решения системы:

$$\sin^2 x + \sin^2 y = \frac{3}{4},$$

$$x + y = 75^\circ.$$

139. Доказать, что если $a_1 > a_2 > a_3 > 0$, то

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_1} > 3.$$

140. Из концов данной дуги окружности проведены касательные до взаимного пересечения и в полученную фигуру вписан круг. Найти радиус вписанного круга, если заданная дуга равна α и ее хорда равна a.

141. Два шара радиуса r_1 и два шара радиуса r_2 лежат на плоскости так, что каждый шар касается трех других. Найти отношение $r_1 : r_2$.

Вариант 38

142. Два пешехода направились одновременно из пункта A в пункт B. Первый шел половину времени со скоростью a *км/час*, а вторую половину со скоростью b *км/час*, второй шел первую половину пути со скоростью b *км/час*, а вторую — со скоростью a *км/час*. Который из них пришел скорее к месту назначения?

143. Найти действительные корни уравнения:

$$\sqrt{x} = \sqrt{a-x} + \sqrt{b-x},$$

где $a > b > 0$.

144. Найти все значения x, для которых

$$\lg_{x+2} x^2 > 1.$$

145. Найти сторону квадрата, вписанного в сегмент, дуга которого равна α, а хорда равна a.

146. Найти радиус шара, описанного около треугольной пирамиды, в основании которой лежит треугольник со сторонами 13, 14 и 15, а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 15°.

Вариант 39

147. Отец предполагал распределить некоторую сумму денег между своими тремя сыновьями в отношении 7 : 6 : 5. Затем он изменил свое решение и эту же сумму разделил в отношении 6 : 5 : 4. Кто из сыновей получит больше в результате второго деления? Кто меньше? Известно, что один из сыновей в результате второго деления получил на 12 руб. больше другого. Сколько получил каждый?

148. Решить уравнение

$$\sec x + \operatorname{cosec} x = 2\sqrt{2}\,a.$$

149. Найти сумму всех четырехзначных чисел, которые можно написать данными цифрами a, b, c, d, ни одна из которых не есть нуль, причем все четыре цифры различны.

150. Найти сторону a треугольника и его площадь s, если даны его углы A и B и полупериметр p.

151. Ребро куба равно a. Найти радиус цилиндрической поверхности, осью которой служит диагональ куба, если известно, что эта цилиндрическая поверхность касается ребра куба.

Вариант 40

152. Из пункта A на берегу озера в пункт B, расположенный на берегу реки, впадающей в это озеро, вышел катер; он прибыл к месту назначения через t час., пройдя по озеру a *км*, а по реке половину этого расстояния. Скорость течения реки b *км/час*. Найти собственную скорость катера.

153. Составляется таблица умножения целых чисел, в первой колонне которой произведения числа 1 на числа 1, 2, 3, ... n, во второй — произведения числа 2 на те же числа 1, 2, 3, ..., n, в последней — произведения числа n на числа 1, 2, 3, ... n. Найти сумму всех чисел таблицы. Найти сумму всех печатных чисел таблицы.

154. Найти все значения k, при которых корни уравнения

$$kx^2-(k+1)x+2=0$$

будут действительны и оба по абсолютной величине меньше 1.

155. Найти угол A треугольника, если заданы длины его сторон b и c и длина l биссектрисы внутреннего угла A.

156. На плоскости P стоит равносторонний конус (осевое сечение — равносторонний треугольник), высота которого 10 *см*. Каждый из трех равных между собою шаров, лежащих на плоскости P внутри конуса, касается двух других шаров и боковой поверхности конуса. Найти радиус шаров.

Вариант 41

157. В два сосуда A и B одинакового веса налита вода, причем вес сосуда A с водой составляет $\frac{4}{5}$ веса сосуда B с водой. Если содержимое сосуда B перелить в сосуд A, то вес последнего с водой превзойдет вес сосуда B в 8 раз. Найти вес каждого сосуда и количество воды в каждом из них, зная, что в сосуде B содержится на 50 *г* больше воды, чем в сосуде A.

158. При каких значениях k корни уравнения

$$kx^2+kx-2=0$$

будут действительны и один корень по абсолютной величине будет больше 1, а другой по абсолютной величине будет меньше 1?

159. Решить уравнение

$$(\operatorname{tg} x)^{\sin x} = (\operatorname{ctg} x)^{\cos x}.$$

160. Из внешней точки A проведены две взаимно перпендикулярные секущие ABD и ACE круга. Площади треугольников ABC и ADE относятся как $m:n$. Определить величину дуг $\breve{BC}$ и $\breve{DE}$.

161. Каждый плоский угол при вершине трехгранного угла равен 60°. В этот трехгранный угол вписаны два касательных друг к другу шара. Найти отношение их радиусов.

Вариант 42

162. Велосипедист совершил поездку из A в B и обратно. Путь состоял из горизонтальных участков, подъемов и спусков. На горизонтальных участках он ехал со скоростью 12 *км/час*, на подъемах — 8 *км/час.*, а на спусках — 15 *км/час*. Из A в B велосипедист ехал 5 час., а из B в A — 4 час. 39 мин. Определить общую длину подъемов и общую длину спусков, если горизонтальная часть пути составляет 28 *км*.

163. Найти все значения x, для которых

$$\lg_3 \lg_{\frac{1}{2}} (x^2 - x - 1)$$

есть действительное число.

164. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}.$$

165. В треугольнике ABC дана длина a стороны BC и угол A. Найти стороны b и c, если известно, что $c = 2b$. Исследовать, при каких a и A задача имеет решение.

166. В пирамиде $SABC$ дано: $AB = AC = 5$, $BC = 6$; высота пирамиды проходит через середину BC и равна 1. Найти радиус шара, вписанного в эту пирамиду.

Вариант 43

167. Перевозка одной тонны груза от пункта M до пункта N по железной дороге обходится на b коп. дороже, чем водным путем. Сколько тонн груза можно перевезти по железной дороге из M в N на сумму s руб., если водным путем на ту же сумму можно перевезти на k T больше, чем по железной дороге.

168. Выразить x, через z, если

$$y = 10^{\frac{1}{1-\lg x}},\quad z = 10^{\frac{1}{1-\lg y}}.$$

169. Найти все значения x, для которых

$$\operatorname{arc\,tg} \sqrt{x} > \arccos(1 - x).$$

170. Вычислить длину l биссектрисы внешнего угла A треугольника, если даны его стороны b и c и угол A между ними.

171. На плоскости P стоит равносторонний конус (осевое сечение — равносторонний треугольник), высота которого 10 *см*. Каждый из трех равных между собою шаров, лежащих на плоскости P вне конуса, касается двух других шаров и боковой поверхности конуса. Найти радиусы шаров.

Вариант 44

172. Букинистический магазин продал книгу со скидкой 10% с назначенной цены и получил при этом 8% прибыли. Сколько процентов прибыли первоначально полагал получить магазин?

173. Упростить выражение:

$$\sqrt{\sqrt{a}+\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}}+\sqrt{\sqrt{a}-\sqrt{\frac{a^2-4}{a}}},$$

где $a \geqslant 2$.

174. Найти все значения a, при которых уравнение

$$\sin^2 x - (a^2 + 2a)\sin x + a^3 + a^2 = 0$$

имеет решения.

175. Внутри окружности пересекаются в точке E хорды AB и CD. Площади треугольников AEC и BED относятся, как $m:n$, а угол между этими хордами равен 30°. Определить дуги $\smile AC$ и $\smile BD$.

176. В параллелепипеде длины трех ребер, выходящих из общей вершины, равны a, b и c. Ребра a и b взаимно перпендикулярны, а ребро c образует с каждым из них угол α. Определить объем параллелепипеда и угол φ между ребром c и плоскостью прямоугольника.

Вариант 45

177. Из A в B и из B в A одновременно вышли два пешехода. Когда первый прошел половину пути, второму осталось пройти 24 *км*, а когда второй прошел половину пути, первому осталось пройти 15 *км*. Сколько километров останется пройти второму пешеходу после того, как первый закончит переход?

178. Решить систему уравнений

$$\cos^2 x + \cos^2 y = a,$$
$$x + y = b.$$

179. Найти $\lg 2$ и $\lg 5$, если $\lg 676 = a$ и $\lg 104 = b$.

180. В данный треугольник вписана окружность, и точки касания соединены между собой. Определить стороны полученного треугольника, зная стороны a, b, c данного треугольника.

181. Цилиндрическая поверхность, ось которой перпендикулярна к диагонали квадрата и образует с его плоскостью угол α, касается всех сторон квадрата; зная, что сторона квадрата равна a, найти радиус цилиндрической поверхности.

Вариант 46

182. Из города A в город B отправляются одновременно две автомашины, причем скорость первой на a *км* в час больше скорости второй. Первая автомашина приходит в город B на t час. раньше второй. Определить скорости автомашин, если расстояние между A и B равно s *км*.

183. Дан квадратный трехчлен

$$ax^2 + bx + c$$

с действительными коэффициентами, причем $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Доказать, что существует такое действительное значение для k, при котором

$$ax^2 + bx + c + k(x^2 + 1)$$

будет полным квадратом некоторого выражения первой степени относительно x.

184. Решить уравнение

$$\sin^3 x - \cos^3 x = \sin^2 x - \cos^2 x.$$

185. Даны стороны a, b, c треугольника ABC. Найти длины m_a и m_b его медиан, проведенных к сторонам a и b. При каком условии возможно равенство $m_a = m_b$?

186. Все двугранные углы между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды равны α. Найти двугранный угол, образуемый боковой гранью с основанием.

Вариант 47

187. Найти знаменатель геометрической прогрессии, зная, что сумма первых пяти членов прогрессии равна ее первому члену.

188. Найти все значения a, при которых корни уравнения

$$x^2 + 4ax + 2a^2 + 3a - 1 = 0$$

будут действительны.

189. Решить уравнение

$$\sin x + \sin 9x = 2.$$

190. Даны стороны a, b, c треугольника ABC. Пусть O — центр окружности, описанной около этого треугольника. Выразить через стороны треугольника расстояние от точки O до стороны BC.

191. $ABCD$ — квадрат. Через стороны AB, BC, CA и DA этого квадрата проведены четыре плоскости, перпендикулярные к плоскости квадрата, которые образуют призматическую поверхность. Проводится плоскость, пересекающая указанную поверхность по ромбу с острым углом α. Найти угол наклона этой плоскости к плоскости квадрата $ABCD$.

Вариант 48

192. Расстояние от точки A до точки B равно s. Точка M проходит это расстояние (двигаясь равномерно) за некоторое время. Если бы расстояние s было на 1 *м* больше, а скорость на 1 *м/сек* меньше, то затраченное время было бы в два раза больше, а если бы расстояние s было на 1 *м* меньше, а скорость на 1 *м/сек* больше, то путь был бы пройден в два раза скорее. Найти расстояние s и скорость движения точки M.

193. При каких значениях a оба корня уравнения

$$x^2 + (1 - a)x + a = 0$$

будут положительны?

194. Решить систему уравнений

$$x+y=\frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=2.$$

195. Даны стороны a, b и c треугольника ABC. Пусть O центр окружности, вписанной в этот треугольник. Выразить длину отрезка AO через стороны треугольника.

196. В треугольной пирамиде все боковые ребра и две стороны основания равны b. Угол между указанными сторонами основания равен α. Вычислить объем пирамиды.

Вариант 49

197. Один сплав металлов A и B содержит эти металлы в отношении $2:3$, другой сплав содержит те же металлы в отношении $4:3$. Сколько килограммов второго сплава надо взять на 1 *кг* первого сплава, чтобы после сплавления этих сплавов в один, содержания металлов A и B были бы равны между собой?

198. Доказать, что

$$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy\geqslant 0$$

при всех действительных значениях x, y и z. При каком условии имеет место знак равенства?

199. Решить систему уравнений

$$\sin x\cos y=\sin y\cos x=\frac{1}{2}.$$

200. Даны стороны a, b, c треугольника ABC. Пусть H — точка пересечения его высот. Выразить через a, b, c длину отрезка AH.

201. Углы треугольника равны A, B и C. Определить, как относятся между собой объемы тел вращения, полученных при вращении этого треугольника последовательно вокруг его сторон.

Вариант 50

202. Двое рабочих затрачивают на выполнение некоторой работы 25 час., причем первую половину работы сначала выполняет первый рабочий, а затем вторую половину работы выполняет второй рабочий. Если же они будут работать вместе, то они затратят на эту же работу 12 час. Найти за сколько часов каждый из них в отдельности может выполнить всю работу.

203. Найти все значения p и q, при которых x^4+1 делится на x^2+px+q.

204. Решить систему уравнений

$$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=2\operatorname{tg} z, \quad \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y=\operatorname{tg} z, \quad x+y+z=\frac{3\pi}{4}.$$

205. ABC — равносторонний треугольник со стороной, равной $\sqrt{39}$. Найти рáдиус окружности, проходящей через точки A и B и делящей пополам окружность, вписанную в треугольник ABC.

206. В треугольной пирамиде два плоских угла при вершине равны α, а третий плоский угол при той же вершине равен β. Боковое ребро, служащее боковой стороной равных плоских углов, перпендикулярно плоскости основания и длина его равна a. Определить объем пирамиды.

Вариант 51

207. Два крана, работая одновременно, наполняют сосуд за 18 час. В какое время наполняет сосуд каждый кран в отдельности, если известно, что один первый кран наполняет сосуд на 27 час. дольше, чем один второй?

208. Доказать, что если $p_1 p_2=2(q_1+q_2)$, то по крайней мере одно из уравнений:

$$x^2+p_1 x+q_1=0, \quad x^2+p_2 x+q_2=0$$

имеет действительные корни (p_1, q_1, p_2, q_2 — действительные числа).

209. Вычислить без таблиц: $\cos 55^\circ \cdot \cos 65^\circ \cdot \cos 175^\circ$.

210. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен r, а радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений катетов, равен R. Вычислить площадь этого прямоугольного треугольника.

211. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида, у которой двугранный угол при основании равен α. Найти сторону основания и боковое ребро этой пирамиды.

Вариант 52

212. Сумма m первых членов арифметической прогрессии равна n, а сумма n первых членов той же прогрессии равна m. Найти сумму $m+n$ первых членов.

213. Доказать, что если $x+y+z=3$, то $x^2+y^2+z^2 \geqslant 3$.

214. Решить уравнение

$$\sin x + \cos x \sin 2x = 1.$$

215. В треугольнике ABC дано: $a = 14$, $h_a = 12$, $b + c = 28$. Вычислить b и c.

216. На плоскости лежат вокруг общей вершины n равных последовательно касающихся друг друга конусов. Определить угол α при вершине в их осевом сечении.

Вариант 53

217. Сколько различных четырехзначных чисел, делящихся на 4, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5?

218. При каком условии уравнение $x^3 + px + q = 0$ имеет два равных корня? Предполагая это условие выполненным, найти этот корень.

219. Решить уравнение:

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0.$$

220. В треугольнике ABC проведены высоты CC_1 и AA_1. Вычислить площадь треугольника BC_1A_1, если $AB = 13$, $BC = 14$, $CA = 15$.

221. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. Через ребро основания проведена внутри пирамиды плоскость, составляющая с основанием угол β. В каком отношении она делит площади тех боковых граней, которые она рассекает на два треугольника?

Вариант 54

222. Найти три числа, образующие геометрическую прогрессию, зная, что их сумма равна 7, а сумма их квадратов равна 21.

223. При каком состоянии между a, b, c корни уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ образуют геометрическую прогрессию?

224. Вычислить без таблиц: $\cos\frac{\pi}{10}\cos\frac{3\pi}{10}$.

225. По двум сторонам b и c треугольника ABC и биссектрисе l внутреннего угла A вычислить третью сторону a.

226. Из точки S сферы радиуса R проведены равные между собою хорды: $SA = SB = SC = SD$ так, что $\angle DSB = \angle BSC = \angle CSA = \angle DSA = \alpha$. Вычислить длину SA.

Вариант 55

227. Двое рабочих заработали — один 80 руб., другой 45 руб.; первый работал на 5 час. больше второго. Если бы первый работал столько часов, сколько второй, а второй столько часов, сколько первый, то они заработали бы поровну. Сколько часов работал каждый и сколько он получал в час?

228. Найти коэффициент при x^k в выражении:

$$1 + (1 + x) + (1 + x)^2 + \ldots + (1 + x)^n.$$

Вычислить значение этого коэффициента также при $k = 9$, $n = 14$.

229. Доказать, что

$$2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \arccos x.$$

230. По данным двум сторонам a и b треугольника найти третью сторону, зная что медианы m_a и m_b пересекаются под прямым углом.

231. Прямоугольник вращается вокруг оси, которая проходит через его вершину параллельно диагонали. Вычислить объем тела вращения, если площадь прямоугольника равна s, а острый угол между диагоналями равен α.

Вариант 56

232. Через два крана бассейн наполняется при совместном действии за p час. Если бы половину бассейна наполнить сначала через один кран, а вторую половину через второй, то для наполнения бассейна потребуется q час. Во сколько часов наполняется бассейн через каждый кран в отдельности. При каком условии задача имеет решение?

233. Вычислить

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}.$$

1) при $1 \leqslant x \leqslant 2$; 2) при $x > 2$.

234. Решить уравнение:

$$\cos\left(\pi \sqrt{x}\right) \cos\left(\pi \sqrt{x-4}\right) = 1.$$

235. Стороны треугольника связаны соотношением: $a^2 = c(b+c)$. Доказать, что угол A вдвое больше угла C.

236. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, площадь которого равна s; боковые ребра равны между собой; двугранные углы при катетах основания равны α и β. Вычислить объем пирамиды.

Вариант 57

237. Из города A в город B выезжают одновременно два велосипедиста, а навстречу им в тот же момент из города B в город A выезжает третий велосипедист. Через t_1 час. от начала движения первый велосипедист находится посередине расстояния между двумя другими. Через t_2 час. от начала движения третий велосипедист находится посередине расстояния между двумя другими. Через сколько часов от начала движения второй велосипедист будет находиться посередине расстояния между первым и третьим? При каком условии задача имеет решение?

238. Дана последовательность чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, таких, что

$$a_{n+1} = \frac{1+a_n}{1-a_n};$$

найти $a_1 + a_5 + a_9 + a_{13} + a_{17} + a_{21} + a_{25}$, считая a_1 данным (причем $a_1 \neq 0$, $a_1 \neq 1$, $a_1 \neq -1$).

239. Решить уравнение $\cos x + \cos\frac{x}{17} + \cos\frac{x}{5} = 3$. Сколько корней имеет это уравнение в промежутке

$$0 < x < 10\,000?$$

240. В треугольнике ABC угол A вдвое более угла C. Найти зависимость между сторонами.

241. Вычислить объем треугольной пирамиды, у которой два скрещивающиеся ребра, длины которых равны a и b, образуют угол α, а кратчайшее расстояние между ними равно c.

Вариант 58

242. Сколько понадобится цифр, чтобы выписать все целые числа от 1 до 10^n включительно (n — целое положительное число)?

243. Найти все значения x, для которых

$$\lg_{10}\frac{x+3}{x+4}>\lg_{10}\frac{x+5}{x+2}.$$

244. Дано, что углы A, B и C треугольника ABC связаны соотношением $\operatorname{ctg} A = 2(\operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} C)$. Вычислить стороны b и c этого треугольника, если задан угол A и сторона $BC = a$.

245. Доказать, что если $|x|<1$, то

$$4\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}-2\arcsin x=\pi.$$

246. В правильную четырехугольную пирамиду вписан цилиндр, осевое сечение которого квадрат, причем ось цилиндра параллельна диагонали основания пирамиды. Найти радиус цилиндра, если боковое ребро пирамиды равно 5, а высота пирамиды равна 3.

Вариант 59

247. Две материальные частицы A и B, находящиеся друг от друга на расстоянии 1 *м*, движутся с постоянной скоростью 1 *м/сек* по одной и той же прямой, наклоненной к упругой стенке под углом 45° и после отражения от стенки (по закону оптики) продолжают движение с той же скоростью. Частица B движется впереди частицы A. Через какой промежуток времени, считая от того момента, когда от стенки отражается частица B, расстояние между A и B будет наименьшим? Чему будет равно это наименьшее расстояние?

248. Решить систему уравнений: $\cos(\pi xy)=\lg_5(x^2+y^2)=1$.

249. В треугольнике ABC три угла, расположенные в порядке возрастания $A<B<C$, образуют арифметическую прогрессию с разностью φ. Найти углы и стороны треугольника ABC, зная его периметр $2p$ и величину φ. При каком условии задача возможна?

250. Найти радиус сферы, описанной около пирамиды $SABC$, если $AB = AC = 30$, $BC = 48$, SA — перпендикулярно плоскости основания и равно 120.

251. Решить уравнение

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} - \frac{nx^{n+1}}{(1-x)^2} = 0.$$

Вариант 60

252. По окружности радиуса R в одном направлении из одной и той же точки выходят три точки со скоростями v_1, v_2, v_3. При каком условии эти точки через некоторый промежуток времени совпадут все три с одной и той же точкой окружности? Предполагая это условие выполненным, найти промежутки времени, через которые будут происходить совпадения всех трех точек.

253. Найти все значения x, при которых

$$\frac{1}{5 - \lg_{10} x} + \frac{2}{1 + \lg_{10} x} < 1.$$

254. Решить систему уравнений

$$\sin x + \cos y = 1, \quad \sin y + \cos x = \frac{1}{7}.$$

255. В вершинах треугольника ABC проведены касательные к его описанной окружности. Зная углы A, B, C треугольника ABC, вычислить углы треугольника, образованного этими касательными.

256. Параллелограмм, имеющий стороны a и b и острый угол α, вращается около перпендикуляра к бóльшей диагонали, проведенного через ее конец (в плоскости параллелограмма). Определить объем тела вращения.

Вариант 61

257. Из города A в город B и из города B в город A одновременно вышли два пешехода. Когда первый прошел половину пути, второму осталось пройти 24 *км*, а когда второй прошел половину пути, первому осталось пройти 15 *км*. Сколько километров останется пройти второму пешеходу после того, как первый закончит переход?

258. Исходя из равенств

$$(x+1)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + \ldots + C_n^1 x + 1,$$

$$(x-1)^n = x^n - C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} - \ldots + \\ + (-1)^{n-1} C_n^1 x + (-1)^n$$

вычислить

$$1^2-(C_n^1)^2+(C_n^2)^2-(C_n^3)^2+\ldots+(-1)^n(C_n^n)^2.$$

259. Выразить $\cos 5x$ через $\cos x$, а затем, исходя из равенства $\cos(5\cdot 18^\circ)=0$, вычислить $\cos 18^\circ$.

260. Треугольник ABC вписан в окружность с центром O. Сторона BC проходит через середину D радиуса OA. Угол ADB равен φ. Вычислить углы треугольника ABC.

261. Ребро куба равно 1. Вычислить радиус круглой цилиндрической поверхности, проходящей через 6 вершин куба, если ось цилиндра параллельна диагонали грани куба.

Вариант 62

262. Две суммы денег, всего 50 000 руб. положены в сберкассу по 3% годовых. Каждая из них дала 600 руб. дохода, причем первая сумма находилась в сберкассе на 4 месяца дольше, чем вторая. Как велика каждая сумма и за какие сроки получены указанные доходы (по 600 руб.), если известно, что ни один из этих сроков не превышает одного года?

263. Разложить на множители первой степени относительно x, y, z следующее выражение

$$x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy$$

(употребление комплексных коэффициентов допускается).

264. Для треугольника ABC задан периметр $2p$, радиус r вписанной окружности и высота h_a (опущенная на сторону BC). Найти стороны.

265. Найти радиус круглой цилиндрической поверхности, проходящей через одно ребро и через все вершины правильного тетраэдра. Ребро тетраэдра равно a.

266. Доказать, что если

$$0<A<\frac{\pi}{2},\quad 0<B<\frac{\pi}{2},\quad 0<C<\frac{\pi}{2} \text{ и}$$

$$A+B+C=\frac{\pi}{2},$$

то

$$\operatorname{tg}^2 A+\operatorname{tg}^2 B+\operatorname{tg}^2 C\geqslant 1.$$

При каком условии имеет место знак равенства?

Вариант 63

267. Типографский шрифт готовится из сплава трех металлов A, B и C с процентным содержанием $p\%$, $q\%$, $r\%$ $(p+q+r=100)$. После износа шрифта его переплавляют и при этом после переплавки процентное содержание металлов A, B, C меняется и становится $p'\%$, $q'\%$, $r'\%$, $(p'+q'+r'=100)$. Доказать, что для восстановления начального процентного содержания металлов в сплаве достаточно к переплавленному сплаву добавить только два металла из трех. В каких количествах это следует сделать и каких металлов нужно добавить на s *кг* переплавленного сплава, содержащего металлы A, B, C в количествах $p'\%$, $q'\%$, $r'\%$ для восстановления начального процентного содержания этих металлов.

268. Найти все действительные значения x, при которых существует дуга

$$\arcsin(2x^2+5x+1).$$

269. На прямой, проходящей через вершину A параллелограмма, перпендикулярно к его диагонали, выходящей из этой вершины, взята произвольная точка M. Найти отношение проекций отрезка AM на стороны параллелограмма, если стороны параллелограмма равны a и b.

270. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно b, и оно образует с плоскостью основания угол α. В эту пирамиду вписан цилиндр с квадратным осевым сечением так, что основание цилиндра лежит в плоскости основания пирамиды. Определить высоту цилиндра.

271. Решить уравнение

$$x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}.$$

Вариант 64

272. Производительности машин $A_1, A_2, \ldots, A_n$ таковы, что машины $A_1, A_2, \ldots, A_{r-1}$ (r — произвольно и меньше $n+1$) выполняют вместе в один день такую работу, которую машина A_r выполняет в p дней. Машина A_n выполняет некоторую работу в 1 день. Сколько времени нужно для выполнения этой работы машиной A_1; сколько времени нужно для выполнения этой работы машиной A_r, где $r>1$?

273. Решить систему уравнений:

$$\arcsin x + \arccos y = \frac{\pi}{3}, \quad x + y = \frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

274. Даны два луча, выходящие из одной и той же точки O и образующие между собой угол α. На первом луче отложены отрезки $OA = a$ и $OA' = a'$, на втором $OB = b$, $OB' = b'$; на отрезках OA и OB построен параллелограмм $OACB$, на отрезках OA' и OB' также построен параллелограмм $OA'C'B'$. Вычислить косинус угла COC' между их диагоналями.

275. Круговой сегмент, стягиваемый хордой длины a, вращается вокруг диаметра, параллельного этой хорде. Вычислить объем тела вращения.

276. Доказать, что если $a > b > \sqrt{3}$, то

$$\frac{\frac{a+b}{2}}{1+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{1+a^2} + \frac{b}{1+b^2}\right) < 0.$$

Вариант 65

277. Найти все значения x, для которых

$$\lg_x(2x) > \lg_{2x} x.$$

278. Велосипедист и пешеход отправляются из одного и того же пункта A в пункт B. Велосипедист, прибыв в B на 50 мин. раньше пешехода, тотчас же отправляется обратно в A и встречается с пешеходом на расстоянии 2 *км* от B. На весь путь от A до B и обратно велосипедист тратит 1 час. 40 мин. Найти расстояние AB и скорости (в *м/мин*) велосипедиста и пешехода.

279. Найти все значения α из интервала $0 < \alpha < 2\pi$, для которых корни уравнения

$$\sec^2 x - 2\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{tg} x = 0$$

действительны и все лежат в пределах

$$k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

280. Внутри треугольника ABC берется точка O такая, что $\angle CAO = \angle ABO = \angle BCO = \alpha$. Зная углы A, B, C треугольника ABC, найти угол α.

281. В пространстве дана точка M, равноудаленная от всех трех вершин некоторого прямоугольного треугольника на расстояние b. Гипотенуза этого треугольника равна a. Найти расстояние от точки M до плоскости треугольника.

Вариант 66

282. Дано квадратное уравнение:

$$x^2 - 2(k-1)x + 2k + 1 = 0, \text{ где } k < 0.$$

Доказать, что корни этого уравнения действительны, и исследовать их знак в зависимости от значений $k < 0$.

283. Расстояние между городами A и B равно 900 *км*. Два поезда отправляются одновременно один из A в B, другой — из B в A. Они встречаются в пункте M. Первый прибывает в B через 4 час. после встречи, второй прибывает в A через 16 час. после встречи. Найти расстояние AM и скорости поездов.

284. Найти все положительные корни уравнения:

$$\sin^2 a^x - \cos^2 a^x = \cos \frac{3}{2} a^x$$

$$(a > 0, \quad a \neq 1).$$

285. Вне окружности радиуса $r = 5$ взята точка O и через нее проведена секущая OAB, причем $OA = 2$, $OB = 8$. Вычислить угол, который образует эта секущая с касательной, проведенной из точки O к данной окружности; берется та касательная OC, для которой центр окружности лежит внутри угла COA.

286. В одной из вершин прямоугольника восставлен перпендикуляр к плоскости этого прямоугольника. Конец этого перпендикуляра отстоит от трех других вершин прямоугольника на расстоянии a, b и c. Найти длину этого перпендикуляра.

Вариант 67

287. Найти все значения x от 0 до 2π, для которых

$$\lg_{10}^2 \sin x - 2 \lg_{10} 2 \lg_{10} \sin x - 3 \lg_{10}^2 2 > 0.$$

288. Пешеход и велосипедист отправляются одновременно — первый из A в B, второй — из B в A. Через 3 час. после отправления они встречаются в пункте M, отстоящем от A на четверть расстояния AB. Зная, что велосипедист делает в час на 10 *км* больше пешехода, определить скорости пешехода и велосипедиста и длину пути AB.

289. Доказать, что если x_1 и x_2 суть корни уравнения

$$\operatorname{tg}^2 x - 2\sec\alpha \operatorname{tg} x + 1 = 0$$

и $\operatorname{tg} x_1 \neq \operatorname{tg} x_2$, то сумма $x_1 + x_2$ кратна $\frac{\pi}{2}$. При каких α оба эти корня лежат в первой, либо в третьей четверти?

290. Даны углы A, B, C треугольника ABC; AD — медиана, проведенная к стороне BC. Вычислить угол CAD.

291. ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине A. Около него описана окружность, радиус которой R. Вычислить катеты AB и AC, зная, что при вращении этого треугольника вокруг касательной, проведенной к описанной окружности в точке A, получается тело, объем которого равен $\frac{2}{3}\pi R^3$.

Вариант 68

292. Найти все значения x, для которых

$$\lg_{x^2}(x^2 - 4x + 3) > 1.$$

293. Два лица, находящиеся друг от друга на расстоянии 27 *км*, отправляются одновременно из пунктов A и B, двигаясь по прямой AB. Они встретятся через 3 час., если будут идти навстречу друг другу и через 9 час., если будут идти в одном направлении. Найти скорость каждого.

294. Найти значение m, при котором для корней x_1 и x_2 тригонометрического уравнения

$$3m \operatorname{tg}^2 x - 2m \operatorname{tg} x + m - 1 = 0,$$

удовлетворяющих условиям

$$0 < x_1 < \pi, \quad 0 < x_2 < \pi, \quad x_1 \neq x_2,$$

выполняется равенство

$$x_1 + x_2 = \frac{7\pi}{6}.$$

295. Острый угол между касательными, проведенными к двум окружностям радиусов r_1 и r_2 в точке их пересечения, равен α. Определить радиус окружности, касающейся обеих данных окружностей и их общей касательной.

296. На расстоянии a от вершины трехгранного угла и на равных расстояниях от его граней взята точка M. Все плоские углы трехгранного угла равны α. Найти радиус сферы с центром в точке M, которая касается всех ребер этого трехгранного угла.

Вариант 69

297. Найти все значения k, для которых один из корней уравнения

$$2kx^2 - 2x - 3k - 2 = 0$$

будет больше 1, а другой—меньше 1.

298. Грузовик должен был пройти из A в B со скоростью 64 *км/час*. В течение 3 час. он шел с этой скоростью. После 3 час. пути снежный занос заставил его простоять 50 мин. и затем отправиться по другой дороге, в результате чего путь удлинился на 31 *км*. С другой стороны, скорость его на этом участке была увеличена на 6 *км/час*. Опоздание составило 1 час 5 мин. Найти расстояние AB.

299. Решить систему уравнений

$$\sin x + \sin y = \sqrt{2}, \quad 2\cos x \cos y = 1.$$

300. Вычислить углы треугольника, зная, что $A = 60^\circ$ и $b = c\,(2 + \sqrt{3})$ (A — угол, заключенный между сторонами b и c).

301. Все плоские углы трехгранного угла равны α. Точка M, находящаяся внутри этого трехгранного угла, отстоит от его граней на расстояниях равных a. Найти расстояние от точки M до вершины трехгранного угла.

Вариант 70

302. Найти все значения x от 0 до 2π, для которых выражение

$$\sqrt{\lg_{10}\lg_{10}^{2}\operatorname{tg}x}$$

есть действительное число.

303. Пешеход и велосипедист отправляются из A в B. Скорость пешехода v *км/час*. После того, как он прошел расстояние $AC = a$ *км*; его догоняет велосипедист, выехавший через $\frac{1}{4}$ час. после него. Новая встреча происходит тогда, когда пешеход прошел расстояние $CD = b$, а велосипедист, доехав до B, после получасовой остановки возвращается из B в A. Требуется узнать скорость v' велосипедиста и расстояние $AB = x$.

304. 1) Найти все значения α из промежутка $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, для которых уравнение

$$x^2 - 2x(\cos\alpha + \sin\alpha) + 1 = 0$$

имеет действительные и различные корни. 2) При каких α один из корней этого уравнения равен $2\sqrt{\sin 2\alpha}$? Найти при этом условии оба корня.

305. Две окружности радиусов R_1 и R_2 с центрами O_1 и O_2 касаются друг друга внешним образом. На отрезке O_1O_2, как на диаметре, строится окружность. Найти радиус окружности, которая касается внешним образом данных окружностей и внутренним образом окружности, построенной на O_1O_2, как на диаметре.

306. Из некоторой точки M опущен на плоскость P перпендикуляр h и проведены две наклонные, углы которых с перпендикуляром равны 30°. Угол же между наклонными равен 60°. Найти расстояние между основаниями наклонных.

Вариант 71

307. Доказать, что

$$\sin^4 x - 6\sin^2 x + 8 > 0$$

при всех x.

308. Велосипедист отправляется с некоторой скоростью из города A в город B, отстоящий от A на 60 *км*. Затем он выезжает обратно из B в A с той же скоростью, но через час после выезда делает остановку

на 20 мин. После этого он продолжает путь, увеличив скорость на 4 *км/час*. Какова была первоначальная скорость велосипедиста, если известно, что на обратный путь от B до A он употребил столько же времени, сколько на путь от A до B.

309. Пусть x_1 и x_2 — острые положительные углы, удовлетворяющие уравнению:

$$\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2 x-\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\operatorname{tg} x+\frac{2}{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}=0.$$

Найти x_1+x_2.

310. На плоскости заданы две точки B и C на расстоянии 6 *см* друг от друга. Переменная точка A перемещается по плоскости так, что все время $AB+AC=10$ *см*. Доказать, что произведение

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

тангенсов половин углов B и C треугольника ABC остается постоянным, и найти величину этой постоянной.

311. Плоские углы трехгранного угла соответственно равны 45°; 45° и 60°. Найти величину двугранного угла между гранями плоских углов по 45°.

Вариант 72

312. Найти все значения α из промежутка от 0 до 2π, для которых уравнение

$$\frac{5^x+5^{-x}}{2}=\sec\alpha$$

имеет решение, и найти эти решения.

313. Пешеход отправляется из города A в город B; расстояние $AB=13$ *км* 200 *м*. В тоже время из B в A выезжает велосипедист. Встреча происходит через 44 мин., после чего велосипедист прибывает в A на 1 час. 45 мин. раньше, чем пешеход прибывает в B. Каковы скорости пешехода и велосипедиста (в метрах в минуту).

314. Доказать, что если $\operatorname{tg} x=a\operatorname{tg} y$ и $a>0$, то

$$\operatorname{tg}^2(x-y)\leqslant\frac{(a-1)^2}{4a}.$$

При каком условии имеет место знак равенства?

315. ABC — треугольник, M — середина его стороны BC. Пусть прямая, проходящая через точку M, перпендикулярна BC, пересекает сторону AC или ее продолжение в точке O, а сторону AB или ее продолжение — в точке N. Пусть O — середина отрезка MN. Доказать, что углы B и C треугольника — острые, и найти соотношение между ними.

316. $SABC$ — тетраэдр, в котором основание ABC — прямоугольный треугольник с гипотенузой $BC = 2a$. Ребро SB перпендикулярно плоскости основания и его длина также равна $2a$. Доказать, что все грани этого тетраэдра — прямоугольные треугольники. Определить положение центра и радиус сферы, описанной около $SABC$.

Вариант 73

317. При каких положительных x выражение

$$\sqrt{\lg_{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} a^x}, \quad a > 0, a \neq 1$$

представляет собой действительное число.

318. В начале в поселке было 15 000 человек. В течение некоторого количества лет прирост населения составил 4% в год по отношению к этому первоначальному количеству. После этого прирост населения стал равным 5% в год по отношению к числу жителей, имевшихся в городе в результате первого прироста. Узнать продолжительность первого периода, если известно, что второй промежуток времени, когда прирост составлял 5%, длился на полгода дольше первого и за это время прирост населения составил 2 475 человек.

319. Доказать, что корни уравнения

$$x^2 - 2x\cos\varphi + (2 - \sqrt{3})(1 - 4\sin^2\varphi = 0$$

всегда действительны. Исследовать знаки корней, когда φ изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

320. Полуокружность ограничена диаметром $AB = 2R$. К этой полуокружности проведены в точках A и B две касательные и еще третья касательная, пересекающая эти две касательные соответственно в точках C и D, и наклоненная к AB под углом α. Вычислить длины отрезков AC и BD.

321. Шаровой слой имеет основаниями окружности радиусов a и b. Поверхность пояса, ограничивающего слой, равна сумме площадей его оснований. Вычислить высоту пояса и радиус шара.

Вариант 74

322. При каких значениях k корни квадратного трехчлена

$$(2-k)\,x^2-3kx+2k$$

действительны и оба больше $\frac{1}{2}$?

323. Тело, взвешенное на неравноплечных весах, уравновешивается при взвешивании на одной чашке грузом p *г*, на другой — грузом q *г*. Каков истинный вес тела?

324. Найти все значения x из промежутка $0<x<\frac{\pi}{2}$, для которых

$$\lg_{\cos x}\sin x>\lg_{\sin x}\cos x.$$

325. Даны две концентрические окружности радиусов r и R, причем $r<R$. Определить сторону квадрата, две вершины которого лежат на одной окружности, а две — на другой. При каких условиях решение возможно?

326. Пирамида с равными боковыми ребрами имеет в основании прямоугольник, стороны которого a и b. Соответствующие этим сторонам плоские углы при вершине пирамиды относятся как $3:1$. Определить объем пирамиды.

Вариант 75

327. Решить неравенство

$$\frac{1}{\lg_a x-1}-\frac{1}{\lg_a x^2-1}<1$$

$$(a>0,\quad a\neq 1).$$

328. Два автомобиля выезжают одновременно из A в B. Первый проходит на m *км* в час больше, чем второй, а потому приходит в B на n час. раньше. Расстояние AB равно a *км*. Определить скорости автомобилей.

329. Решить уравнение:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin a^x+\frac{1}{2}\cos a^x=\sin 5a^x.$$

Исследовать знак корней в зависимости от a ($a>0$, $a\neq 0$).

330. Две окружности касаются друг друга внутренним образом. Радиус меньшей окружности равен r. Хорда бо̀льшей окружности, касающаяся меньшей, делится в точке касания на части a и b. Найти радиус бо̀льшей окружности.

331. $SABC$ — тетраэдр, ребро SA которого перпендикулярно плоскости ABC. Грани SBC и SBA взаимноперпендикулярны. Доказать, что центр сферы, описанной вокруг этого тетраэдра, является серединой отрезка SC.

Вариант 76

332. При каких значениях k корни квадратного трехчлена

$$4x^2 - \frac{8}{3^k}x + \frac{6}{3^k} - 3$$

действительны и оба меньше 2.

333. Несколько человек должны были уплатить поровну сумму 10 800 руб. Но эту сумму уплатили не все, а на два человека меньше и потому доля каждого увеличилась на 900 руб. Сколько человек участвовало в платеже фактически.

334. Решить уравнение:

$$\log_{\sin x}\cos x \cdot \log_{\sin^2 x}(\sin x \cos x) = 1.$$

335. Из точки вне окружности радиуса r проведены под углом α две секущие, отстоящие от центра на одинаковом расстоянии a. Определить площадь трапеции, боковыми сторонами которой служат внутренние части секущих.

336. Определить радиус шара, описанного около правильной треугольной пирамиды, у которой каждое боковое ребро равно b, а сторона основания — a.

Вариант 77

337. Решить неравенство

$$\frac{2}{2a^x - 1} > a^{2x} - \frac{5}{2}a^x - 2 \quad (a>0, \quad a\neq 1).$$

338. Двое рабочих, работая равномерно, но с разной производительностью, окончили работу за 20 час. Если бы

сначала первый сделал $\frac{1}{3}$ часть работы, а потом один второй остальную часть, то общее затраченное ими время было бы 50 час. Во сколько времени каждый из них в отдельности мог бы окончить работу?

339. Решить уравнение:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = a \sin 2x + \frac{a}{2} \quad (a > 0).$$

При каких (больших нуля) a решение существует?

340. Даны стороны a, b, c треугольника ABC. Вычислить угол ASB, где S — точка пересечения медиан.

341. Найти радиус сферы, касающейся всех ребер правильной пирамиды, у которой в основании треугольник со стороной a, а боковое ребро равно b. Сколько решений имеет задача?

Вариант 78

342. При каких значениях p корни квадратного трехчлена

$$(2 + \log_{\frac{1}{2}} p)\ x^2 + 5x \log_{\frac{1}{2}} p - 6 \log_{\frac{1}{2}} p$$

действительны и оба больше единицы?

343. Поезд был задержан на 16 мин. и нагнал опоздание на перегоне 80 *км*, увеличив скорость на 10 *км/час* по сравнению с обычной. Найти обычную скорость поезда, считая, что она всегда постоянна.

344. Решить уравнение

$$\log_{\sin x \cos x} \sin x \cdot \log_{\sin x \cos x} \cos x = \frac{1}{4}.$$

345. Даны две концентрические окружности радиусов r и R, причем $r < R$. Определить сторону равностороннего треугольника, у которого вершина A лежит на окружности радиуса r, а B и C — на окружности радиуса R.

346. Из точки S выходят три луча SA, SB, SC, причем $\angle BSC = \angle CSA = \angle ASB = \alpha$. Луч SM образует со всеми тремя лучами SA, SB и SC равные углы. Определить этот угол.

Вариант 79

347. Решить неравенство

$$\frac{1}{\log_a x^3 + 1} - \frac{1}{\log_a x - 1} > -1 \quad (a > 0,\ a \neq 1).$$

348. Некто, проезжая на равномерно движущемся трамвае, заметил своего знакомого, идущего в противоположную сторону. Через 8 сек. он сошел на остановке* и пошел пешком за знакомым. Через сколько времени он его догнал, если скорость его вдвое больше скорости знакомого и в 5 раз меньше скорости трамвая?

349. Найти все значения x в промежутке $0 < x < 2\pi$, для которых

$$2\cos^2 x - 7\cos x + 3 > 0.$$

350. Вычислить острые углы прямоугольного треугольника, зная острый угол α между медианами, проведенными к катетам.

351. Даны две концентрические сферы радиусов r и R, причем $r < R$. Определить ребро правильного тетраэдра, у которого одна вершина лежит на большей сфере, а три других — на меньшей.

Вариант 80

352. При каких значениях a корни квадратного трехчлена $2x^2 - 3ax + 2 - a$ действительны и оба $\leqslant 1$.

353. Лодка спускается вниз по течению на расстояние $28^1/_2$ *км*, затем поднимается на $22^1/_2$ *км*. Вся поездка продолжается 8 час. Какова собственная скорость лодки, если известно, что скорость течения равна $2^1/_2$ *км/час*.

354. Найти все значения x, для которых справедливо неравенство

$$\log_a\left(\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) < 0.$$

Рассмотреть два случая: 1) $0 < a < 1$; 2) $a > 1$.

---

* Считать, что трамвай остановился мгновенно (без замедления).

355. Внутри угла α с вершиной O взята точка M на расстояниях $MP = a$ и $MQ = b$ от сторон угла. Вычислить отрезки OP, OQ, OM.

356. В пространстве даны две скрещивающиеся взаимно-перпендикулярные прямые p и q; AB — их общий перпендикуляр, причем A лежит на p, B — на q. На прямой p перемещается точка M, на прямой q — точка N. Доказать, что сфера с диаметром MN проходит через точки A и B. Доказать, что если $AM = BN$, то геометрическое место центров этих сфер есть две биссектрисы углов между проекциями p и q на плоскость, им параллельную и равноудаленную от них.

Вариант 81

357. Решить неравенство

$$\frac{3+7b^x}{1+2b^x-b^{2x}} > b^x+3, \quad b>0, \quad b\neq 1.$$

358. Две прямолинейные железные дороги пересекаются в пункте C. Из пункта A на одной железной дороге и из пункта B на другой — одновременно в сторону C отправляются два поезда, движущихся равномерно, первый со скоростью 20 *км/час*, второй 30 *км/час*. $AC = 50$ *км*, $BC = 40$ *км*, $\angle ACB = 60^\circ$. Через сколько времени расстояние между поездами (по прямой) будет равно длине отрезка AB?

359. Найти все t в промежутке $0 < t < 2\pi$, для которых

$$2\cos^2 t + 9\sin t + 3 > 0.$$

360. Найти геометрическое место точек пересечения высот остроугольных треугольников, имеющих постоянную и неподвижную сторону a и заданный противолежащий угол A.

361. Даны две концентрические сферы радиусов r и R, причем $r < R$. Четыре вершины куба лежат на сфере радиуса R, а противоположная грань касается сферы радиуса r. Определить ребро куба.

Вариант 82

362. $$\frac{1}{\log_b x^2+1} + \frac{1}{\log_b x-2} > 1, \quad b>0, \quad b\neq 1.$$

При каких значениях x имеет место это неравенство?

363. Число свободных нейтронов в реакторе, увеличившись на некоторое число процентов, стало равным $31{,}25 \cdot 10^n$. Найти первоначальное число нейтронов, если известно, что его отношение к 10^n равно указанному выше числу процентов.

364. Решить уравнение $\sin^2 c^x + \sin^2 2c^x = \sin^2 3c^x$. Исследовать знак его корней в зависимости от c $(c > 0,\ c \neq 1)$.

365. В треугольнике угол A равен 60°. В каких границах может меняться отношение $\frac{b+c}{a}$.

366. Ребро SA пирамиды $SABC$ перпендикулярно к плоскости основания ABC;

$$SA = 1,\quad AB = \frac{13}{16},\quad AC = \frac{15}{16},\quad BC = \frac{7}{8}.$$

Вычислить площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через A перпендикулярно ребру BC.

Вариант 83

367. Температура воздуха за день поднялась на 10%, а за ночь упала на 10% (считая от последнего, более высокого показания температуры). Каков процент изменения температуры в целом?

368. Найти все действительные значения k, при которых корни уравнения

$$x^2 + 2x + k + 0$$

будут действительны и различны и оба будут заключены между -1 и $+1$?

369. Решить уравнение $\log \sin x + \log \sin 5x = \log \sec 4x$.

370. Дана длина a гипотенузы прямоугольного треугольника ABC $(\angle A = 90°)$ и произведение l^2 длин биссектрис углов B и C. Найти эти углы B и C.

371. Определить радиус сферы, касающейся трех каких-нибудь ребер правильного тетраэдра (все ребра которого равны a) и продолжений трех других его ребер.

Вариант 84

372. Найти все значения k, при которых корни уравнения $(2 + k)x^2 - 2kx + 3k = 0$ действительны и положительны.

373. Найти все корни уравнения

$$\sin 2b^x + \sin 3b^x = \sin 5b^x \quad (b > 0, \quad b \neq 1).$$

Исследовать знак корней в зависимости от b.

374. В каком отношении делит площадь правильного треугольника прямая, пересекающая продолжение его основания под углом β и делящая высоту от вершины к основанию в отношении $3:5$?

375. Плоский угол при вершине правильной n-угольной пирамиды равен θ. Определить двугранный угол между двумя смежными боковыми гранями пирамиды.

376. В одном из 2 растворов отношение веса растворенного вещества к весу растворителя равно p, в другом q. При смешивании некоторых количеств этих растворов в одном сосуде отношение веса растворенного вещества к весу растворителя оказывается равным r.

В каком отношении взяты веса смешанных частей растворов? При каких условиях решение возможно?

Вариант 85

377. Найти все значения x, при которых

$$\frac{1}{5-\log_a x} + \frac{2}{1+\log_a x} < 1, \quad 0 < a < 1.$$

378. Решить уравнение $\sin^6 x + \cos^6 x = a$. При каких a решение существует?

379. Через точку M, лежащую внутри круга радиуса r, проведены диаметр AB и хорда CD, составляющая угол α с диаметром и угол β с хордой BD. Найти площадь треугольника MBD.

380. Доказать, что отношение объемов 2 трехгранных пирамид, из которых одна отсекается от другой плоскостью, пересекающей ребра и не проходящей через вершины, равно отношению произведений их ребер, выходящих из общей вершины. Найти это отношение, если большая пирамида является правильным тетраэдром, а секущая плоскость перпендикулярна к одному из ребер и проходит через середину высоты противоположной грани.

381. Два сплава серебра и меди имеют одинаковую пробу (пробой называется отношение веса серебра к весу

всего сплава). Если сплавить каждый из них с таким количеством меди, которое содержится в другом, то отношение проб новых сплавов будет равно m. Какова первоначальная проба, если соответствующее отношение весов вновь полученных сплавов равно n. При каких условиях задача разрешима.

Вариант 86

382. Найти все значения p, при которых корни уравнения $(p-3)x^2-2px+5p=0$ действительны и положительны.

383. Найти все корни уравнения $\sin a^x \sin 8a^x - \sin 4a^x \sin 5a^x = 0$. Исследовать знак корней в зависимости от a.

384. Угол при основании равнобедренного треугольника равен α. В каком отношении делит площадь этого треугольника прямая, делящая его основание в отношении $2:3$ и составляющая с большим отрезком основания угол β $(0<\beta<\alpha)$.

385. Определить плоский угол при вершине правильной n-угольной пирамиды, если боковые ребра наклонены к плоскости ее основания под углом α.

386. Имеется 4 сосуда. В одном сосуде находится p *кг* водного раствора соли, в другом q *кг*. 3-й и 4-й сосуды пусты. В первом сосуде весовое отношение соли к воде равно α, во втором β. Из первого сосуда отливают в третий, а из второго — в четвертый равные по весу количества раствора. Затем содержимое 3-го сосуда выливают во второй, а содержимое 4-го — в первый. После этого весовое отношение соли к воде оказывается одинаковым в обоих сосудах. Сколько раствора было отлито из каждого сосуда?

Вариант 87

387. Найти все значения x, при которых

$$\frac{1}{\log_a x}<\frac{1}{\log_a x-1}-\frac{1}{2}, \quad 0<a<1.$$

388. Решить уравнение $2\sin^4 x+\cos^4 x=b$. При каких b решение существует?

389. Из точки A, лежащей вне круга радиуса r, проведены к окружности касательная AB и секущая AC, составляющая угол α с касательной и угол β — с хордой BC. Определить площадь треугольника ABC (C — ближайшая к A точка пересечения секущей с окружностью).

390. В пирамиде $ABCD$ грани BCD и ABC — равнобедренные треугольники ($AB = AC$, $DB = DC$). Плоскость, проходящая через AD перпендикулярно BC, образует треугольник с углами α и β (при вершинах A и D — соответственно). Какую часть объема пирамиды отсекает плоскость, параллельная BC и пересекающая AD под углом γ, отсекая отрезок $DE = \frac{1}{5} AD$?

391. В одной руде отношение веса железа к весу породы равно p. Каково весовое отношение железа к породе в другой руде, если смесь первой руды со второй в отношении α (α — отношение веса первой руды к весу второй) имеет весовое отношение железа к породе равное r? Какому условию должно удовлетворять p, чтобы задача была разрешима при $\alpha = 1$, $r < 1$?

Вариант 88

392. Расстояние между городами A и B пароход проходит по течению реки на 1 час быстрее, чем против течения; катер проходит то же расстояние по течению на $1\frac{1}{2}$ час. быстрее, чем против течения. Катер проходит от A до B за то же время, за которое пароход проходит от B до A. Найти отношение собственной скорости парохода к собственной скорости катера.

393. На поверхности земли взяты два пункта A и B, лежащие на одной широте θ и имеющие долготы φ_1 и φ_2. На сколько расстояние между пунктами A и B, измеряемое по параллели, превышает кратчайшее расстояние между этими пунктами, измеряемое по дуге большого круга. Землю считать шарообразной, длину окружности ее большого круга равной 40 000 *км*. Рассмотреть частный случай A (45° с. ш., 10° в. д.), B (45° с. ш., 100° в. д.).

394. В произвольном выпуклом шестиугольнике соединены через одну середины сторон. Доказать, что точки пере-

сечения медиан двух образовавшихся треугольников совпадают.

395. Решить систему

$$x^2 y + 2y - y^2 - 2xy = 0,$$
$$\log_x y + 2 \log_y x = 3.$$

Вариант 89

396. Из A в B одновременно выехали 2 автомобиля с одинаковой скоростью. Первый повернул обратно, как только он встретился с пешеходом, вышедшим из B в 8 час. утра, а второй, доехав до B в 9 час. утра, вернулся в A через 10 мин. после возвращения в A первого автомобиля. Во сколько раз скорость автомобиля больше скорости пешехода?

397. В треугольной пирамиде $OABC$ все плоские углы при вершине O—прямые, а перпендикуляр, опущенный из вершины на грань ABC образует с ребрами OA, OB и OC углы α, β, γ и по длине равен h.

Определить радиус шара, вписанного в эту пирамиду.

398.** На касательной к окружности даны две точки B и C, симметрично расположенные относительно точки касания A ($BA = CA$). Через точки B и C проводятся две произвольные секущие BB_2 и CC_2, пересекающие окружность соответственно в точках B_1 и C_1. Через B_2 и C_1 и C_2, B_1 проводятся прямые, пересекающие касательную в точках D и E. Доказать, что $DA = AE$.

399. Решить систему

$$y^2(x^2 - 3) + yx + 1 = 0,$$
$$y^2(3x^2 - 6) + yx + 2 = 0.$$

Вариант 90

400. Трое рабочих должны выкопать канаву определенной длины. Если канаву разделить на 3 равные части, то первый кончит свою часть работы на час раньше второго и на два часа раньше третьего. Если же первый, закончив свою треть работы, станет помогать третьему, то третий (вместе с первым) закончит свою часть работы на 12 мин. раньше, чем второй закончит свою треть. За сколько часов все трое закончат работу, работая вместе?

401. В треугольной пирамиде $OABC$ все плоские углы при вершине O—прямые, а перпендикуляр, опущенный из вершины O на грань ABC, образует с ребрами OA, OB и OC углы α, β, γ и по длине равен h. Определить радиус шара, описанного около этой пирамиды.

402. Доказать, что если у выпуклого шестиугольника противоположные стороны параллельны и три диагонали, соединяющие противоположные вершины, равны между собой, то вокруг этого шестиугольника можно описать окружность.

403. Решить систему

$$2x^2y^2 - 4y^2 - xy + 2 = 0,$$
$$3x^2y^2 - 8y^2 + 3xy - 2 = 0.$$

Вариант 91

404. Три трактора разной производительности вспахивают два поля разной величины. Один третий трактор может вспахать второе поле на 3 час. быстрее, чем первый вспашет первое поле, но на 2 час. медленнее, чем второй может вспахать первое поле. Первый и второй тракторы вместе могут вспахать первое поле на 6 час. быстрее, чем третий вспашет второе поле. За сколько часов третий трактор вспашет второе поле?

405. В треугольной пирамиде $OABC$ все плоские углы при вершине O — прямые. Через центр M сферы, описанной около этой пирамиды, проведена плоскость, параллельная грани ABC и пересекающая ребра OA, OB и OC соответственно в точках A', B', C'. Найти отношение объема пирамиды $OA'B'C'$ к объему пирамиды $OABC$.

406. В прямоугольном треугольнике один из углов 60°. Доказать, что три точки пересечения биссектрис внешних углов с противоположными сторонами лежат на одной прямой.

407. Решить систему

$$x^2(4 - 3y^2) - 2xy + 1 = 0,$$
$$x^2(2y^2 - 2) - xy + 1 = 0.$$

Вариант 92

408. Со станции A в направлении к станции B в 8 час. вышел скорый поезд, а в 9 час. — товарный. Со станции B в 9 час. вышел в направлении к A третий поезд, который в 10 час. встретился со скорым, а в 11 час.— с товарным. Товарный поезд прибыл в B на 4 час. позже скорого. Когда третий поезд прибыл в A? (Каждый поезд двигался равномерно).

409. Дана пирамида $ABCD$. Строим новую пирамиду $A'B'C'D'$ следующим образом: точки A', B' определяем как симметричные точкам A, B относительно произвольной точки O', лежащей на прямой AB, и точки C', D' определяем как симметричные точкам C, D относительно произвольной точки O'', лежащей на прямой CD. Доказать, что объемы пирамид равны.

410. Доказать, что если k-ый, l-ый, m-ый и n-ый члены арифметической прогрессии составляют геометрическую прогрессию, то разности $l-k$, $m-l$, $n-m$ составляют геометрическую прогрессию.

411. Через вершину B прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена прямая l, не пересекающая гипотенузы. Из вершин A, C опущены перпендикуляры AA_1, CC_1 на прямую l; точки A_1 и C_1 лежат на прямой l. При каком значении угла $\varphi = CBC_1$ площадь трапеции A_1ACC_1 будет наибольшей?

Вариант 93

412. Два трактора разной мощности начали пахать поле в 14 *га* в 7 час и кончили пахать одновременно. Если бы первый трактор вспахивал в час на 0,1 *га* больше, а второй начал бы работу на час раньше, то работа была бы окончена на 1 час 12 мин. раньше. Если бы второй трактор вспахивал в час на 0,1 *га* больше, а первый начал бы работу на час раньше, то работа была бы окончена на 1 час 4 мин. раньше. В котором часу тракторы закончили работу?

413. Рассмотрим треугольную пирамиду $ABCD$, в которой даны ребра AB и CD и кратчайшее расстояние между ними. При каком значении угла φ (между ребрами AB и CD) объем пирамиды будет наибольшим?

414. Дано: $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — арифметическая прогрессия, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — возрастающая геометрическая прогрессия, $b_1 > 0$, $n > 20$. Известно, что $b_{20} = a_{20}$, $b_{21} = a_{21}$. Доказать, что все остальные члены геометрической прогрессии больше соответствующих членов

арифметической прогрессии, т. е. $b_к > a_к$ при любом k ($k \neq 20$, $k \neq 21$).

415. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, катет которого равен 1. Прямая l проходит через вершину прямого угла ABC и не пересекает гипотенузу треугольника. Из точек A и C опущены перпендикуляры AA_1 и CC_1 на прямую l. Фигура A_1ACC_1 вращается вокруг прямой l. При каком значении угла $\varphi = CBC_1$ объем тела вращения будет наибольшим?

Вариант 94

416. 1-я и 2-я трубы наполняют бассейн в 260 *л*, 3-я и 4-я — бассейн в 370 *л*. 3-я труба подает на 45 *л* в минуту больше, чем первая, а четвертая вдвое больше, чем вторая. Все 4 трубы открываются одновременно; 1-я, 2-я, 4-я закрываются одновременно, но позже третьей, которая действует 2 мин. При этом оба бассейна оказываются наполненными. Все 4 трубы вместе подают 200 *л* в минуту. Сколько времени действовала 1-я труба?

417. В треугольной пирамиде $ABCD$ даны два ребра $AB = 8$ *см*, $CD = 12$ *см*, кратчайшее расстояние $d = 6$ *см* между прямыми AB и CD и объем пирамиды $v = 48$ *см*^{3}. Определить угол между AB и CD.

418. При каких a уравнение

$$ax^2 + 2a(a-1)x + a - 1 = 0$$

имеет вещественные решения?

419. Построить равносторонний треугольник ABC, если дана его сторона a и известно, что две стороны AB, AC и биссектриса AD проходят соответственно через три данные точки M, N, P, лежащие на одной прямой.

Вариант 95

420. На складе было некоторое количество угля. Один завод начал вывозить уголь со склада с 1/IX по a *т* в день, 2-й завод — начал с 10/IX и вывозил по b *т* в день. К концу дня 25/IX на складе осталась половина первоначального количества угля. Какого числа весь уголь был вывезен, если оба завода получили угля поровну?

421. В треугольной пирамиде $ABCD$ даны два ребра $AB = 6$ *см*, $CD = 8$ *см*, угол между ними $\varphi = 60^\circ$ и кратчайшее расстояние между ними 5 *см*. Определить объем пирамиды.

422. Решить неравенство

$$\frac{2}{x} < 2 + \frac{3}{x-1}.$$

423. Построить равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$), если две его вершины B, C находятся на данной прямой l, вершина A находится на данной прямой m, параллельной l, и стороны AB, AC проходят через данные точки M и N.

Вариант 96

424. Расстояние между городами A и B пароход проходит по течению реки на час быстрее, чем он проходит такое же расстояние в стоячей воде, и на $2^1/_2$ час. быстрее, чем против течения. За какое время пароход проходит от A до B по течению?

425. На диаметре круга радиуса R построены два круга радиусов R_1 и R_2 ($R_1 + R_2 = R$), касающиеся друг друга внешним образом и данного круга изнутри. Определить радиус круга, касающегося всех трех данных кругов.

426. Доказать, что если все двугранные углы треугольной пирамиды равны между собой, то все ее ребра также равны между собой.

427. Решить систему

$$10^{1+\lg(2x+y)} = 2{,}5,$$
$$\sqrt{2x+y} + 2\sqrt{4x^2 - y^2} = 4 + 2y.$$

Вариант 97

428. В 9 час. утра велосипедист выехал из пункта A в пункт B. Проехав $^1/_3$ пути, он встретил другого велосипедиста, выехавшего из B в 8 час. 24 мин. Доехав до B, 1-й велосипедист повернул обратно, а 2-й, доехав до A, повернул обратно и встретился с 1-м на полпути между A и B. Оба ехали без остановок, каждый со своей скоростью. Когда 1-й вернулся в A?

429. Дана окружность γ и точка A вне ее. Построить окружность с центром в точке A, пересекающую окружность γ под углом 30°.

430. Через вершину A куба, вписанного в шар, радиуса R, проведена плоскость, линии пересечения которой с гранями куба, проходящими через ребро его AB, составляют с этим ребром углы, равные α $(\alpha < 45^\circ)$. Найти площадь поверхности наименьшего шарового сегмента, отсекаемого данной плоскостью.

431. Решить систему:

$$\sqrt[x]{x+2y} = 2,$$
$$(2x+4y)\,3^x = 72.$$

Вариант 98

432. Из пункта A по реке вышла лодка в сторону пункта B, а через полчаса — катер. Через 10 мин. катер догнал лодку и перегнал ее. Как только катер прибыл в B, оттуда вышел пароход, который встретился с лодкой на полпути между A и B. Лодка прибыла в B через 2 час. после прибытия парохода в A. Сколько часов шла лодка из A в B?

433. Доказать, что отрезки прямых, соединяющие середины противоположных ребер треугольной пирамиды, пересекаются в одной точке.

434. Двугранный угол между боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды равен γ. Найти отношение полной поверхности пирамиды к поверхности равновеликого ей шара.

435. Решить систему:

$$(x-y)^{\lg(x+1,5)} = 0,2; \quad \sqrt[\lg(x-y)]{2x+3} = 0,1.$$

Вариант 99

436. Три печатные машины различной производительности должны отпечатать некоторое количество книг; 2-я машина, работая одна, могла бы выполнить весь заказ на несколько часов быстрее, чем 1-я, а 3-я — на столько же часов быстрее, чем 2-я. 1-я и 2-я машины вместе выполнили бы заказ за 24 час., а 1-я и 3-я вместе — за 15 час. За сколько часов выполнят заказ все три машины, работая вместе?

437. Правильный треугольник, площадь которого равна s,

повернут вокруг центра на угол $\alpha (0 < \alpha < 120°)$. Определить площадь общей части начального и конечного положений треугольника.

438. Доказать, что если противоположные ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, то все высоты ее пересекаются в одной точке.

439. Решить систему

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{2x+4y}=\sqrt{2}+4,$$
$$\sqrt{x+2y}-\sqrt{2x+2y}=2\sqrt{2}-2.$$

Вариант 100

440. За 2,4 *м* ткани 1-го сорта, 3,6 *м* 2-го сорта и 4,8 *м* 3-го сорта заплатили 103 руб. 20 коп.; за 3,2 *м* 1-го сорта, 4,8 *м* 2-го сорта и 2,4 *м* 3-го сорта заплатили 105 руб. 60 коп. Сколько надо заплатить за 1,8 *м* 1-го сорта, 2,7 *м* 2-го сорта и 7 *м* 3-го сорта?

441. Найти длину приводного ремня, натянутого без перекрещивания на шкивы радиусов r и R, лежащие в одной плоскости, расстояние между центрами которых равно $d\,(d > r+R)$.

442. Дана плоскость P и вне ее отрезок AB. Каково геометрическое место точек плоскости P, из которых отрезок AB виден под прямым углом?

443. Решить систему

$$(x^2-y^2)^{\lg(x-y)}=0{,}1,$$
$$(x^2+2xy+y^2)^{\lg(x^2-y^2)}=10\,000.$$

Вариант 101

444. Два поезда отправляются одновременно навстречу друг другу из Москвы и Тулы и каждый едет с постоянной скоростью. Первый поезд в x час. проезжает все расстояние от Москвы до Тулы, а второй поезд за y час. — расстояние от Тулы до Москвы. В пути они встречаются за m час. до приезда первого поезда в Тулу и за n час. до приезда второго поезда в Москву. Доказать, что $x:y=\sqrt{m}:\sqrt{n}$.

445. Решить систему уравнений

$$\arccos\left(\frac{1}{2x}+\frac{1}{2y}\right)=0, \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\sqrt{xy}\right)=1.$$

446. Найти коэффициент при x^3 в разложении

$$(1+x+x^2+x^3)^5.$$

447. В треугольнике ABC дано отношение

$$\operatorname{tg} A : \operatorname{tg} B : \operatorname{tg} C = 1:2:3.$$

Найти синусы этих углов.

448. Центры четырех шаров находятся в вершинах квадрата со стороной a. Радиус каждого шара равен $\frac{a}{2}$.

Найти радиус круглого цилиндра, ось которого перпендикулярна к паре параллельных сторон квадрата и образует с плоскостью квадрата угол α, если известно, что этот цилиндр касается всех четырех шаров и проходит между шарами.

Указание: рассмотреть проекцию в плоскость, перпендикулярную оси цилиндра.

Вариант 102

449. Некоторая сумма денег была положена в банк. По истечении 8 месяцев за счет начисления процентов сумма увеличилась на 240 руб., а через 15 месяцев от начала вклада общий процентный прирост суммы составил 471 руб. 60 коп. Сколько было положено денег в банк и сколько процентов платит банк в месяц, если в течение года проценты начисляются на вклад, а в следующем году на вклад, увеличенный за счет процентов, начисленных в конце предыдущего года?

450. Решить уравнение

$$\sin x + \cos x + \sin 2x = 1 + \sqrt{2}.$$

451. При каких значениях a и α многочлен $x^3 + ax + 1$ делится на $(x-\alpha)^2$ нацело?

452. В треугольнике ABC медианы, проведенные из вершин A и B, пересекаются в точке O под прямым углом. Найти отношение площади треугольника AOB к площади треугольника ABC.

453. Центры трех шаров расположены в вершинах правильного треугольника со стороной a. Радиус каждого шара равен $\frac{a}{2}$. Найти радиус круглого цилиндра, ось

которого перпендикулярна к одной из сторон треугольника и образует с его плоскостью угол α, если известно, что этот цилиндр касается всех трех шаров и проходит между ними.

Указание: рассмотреть проекцию в плоскость, перпендикулярную оси цилиндра.

Вариант 103

454. По окружности в одном направлении едут три велосипедиста, каждый со своей скоростью. Они выехали одновременно из точек A, B, C этой окружности. За один час первый из них проехал дугу ABC, второй — дугу BCA и третий — дугу CAB. Продолжая движение, первый достиг B через 56 мин., второй достиг C через 50 мин., а третий через час не доехал 8 *км* до A. Найти длины дуг $\smile AB$, $\smile BC$ и $\smile CA$.

455. Внутри треугольника ABC взята произвольная точка O. Через точку O проведены прямые, параллельные сторонам треугольника: EK параллельна BC, PM параллельна AC, TX параллельна AB. Точки E и P лежат на стороне AB, точки K и T — на стороне AC, точки M и X — на стороне BC. Доказать, что

$$\frac{AP}{AB}+\frac{BX}{BC}+\frac{CK}{CA}=1.$$

456. Стороны основания треугольной пирамиды равны 10,4 *см*, 11,2 *см*, 12 *см*; все боковые ребра равны 7,5 *см*. Найти высоту пирамиды.

457. Найти все решения системы

$$\sin(2x+y)=0,$$
$$\sin(x+2y)=0,$$

заключенные между $0°$ и $180°$.

Вариант 104

458. Два охотника идут навстречу друг другу с одинаковой скоростью. От первого охотника ко второму бежит собака. Добежав до второго охотника, она поворачивает обратно и бежит к первому, затем опять ко второму и опять обратно к первому (без остановок и с постоянной скоростью). Первый раз собака пробежала туда и обратно за 9 мин., второй раз — за 4 мин. Во сколько раз скорость собаки больше скорости охотника?

459. Найти радиус шара, описанного около треугольной пирамиды, одно из ребер которой равно c, а каждое из пяти остальных равно $2c$.

460. Доказать, что проекция куба на плоскость, перпендикулярную одной из его диагоналей, является правильным шестиугольником.

461. Решить систему уравнений

$$x+y=4, \qquad x^4+y^4=44\frac{1}{8}.$$

Вариант 105

462. От деревни A до станции B—10 *км*. Два человека должны попасть из A в B. Их вызвался подвезти третий человек, имеющий мотоцикл. Но он может взять лишь одного пассажира. Ради экономии времени поступили так: мотоциклист с одним пассажиром выехал из A и одновременно с ними пешком отправился второй человек. Не доезжая станции B, первый человек слез с мотоцикла и отправился дальше пешком, а мотоциклист поехал обратно, встретил второго, посадил его на мотоцикл и поехал с ним на станцию. Туда он прибыл одновременно с первым. Оба человека шли с одинаковой скоростью. Скорость мотоцикла в 10 раз больше скорости человека. Найти, на каком расстоянии от B мотоциклист высадил первого человека.

463. В основании треугольной пирамиды с высотой H лежит равнобедренный треугольник со сторонами, равными a, a и c. Основание высоты пирамиды лежит внутри основания пирамиды. В пирамиду вписан цилиндр так, что одно его основание лежит на основании пирамиды, а окружность другого касается всех трех боковых граней. Диаметр основания цилиндра равен его высоте. Найти высоту цилиндра.

464. Правильный тетраэдр спроектирован на плоскость, параллельную двум его несмежным ребрам. Доказать, что в проекции получится квадрат.

465. Доказать, что $3\sin x+4\cos x$ ни при каких x не бывает больше 5.

Вариант 106

466. На железной дороге станция B расположена между станциями A и C. Со станции B одновременно выходят два поезда. Первый поезд направляется в C, а второй — в A. По прибытии в A второй поезд стоит 5 мин., затем отправляется обратно и без остановок приходит в C. Скорости обоих поездов одинаковы. Из пункта K, находящегося между станциями A и B, выходит пассажир, которому нужно попасть в C. Он может дойти пешком до B и сесть в первый поезд или дойти до станции A и сесть во второй поезд. Во втором случае он может выйти на полчаса позже, но при этом попадет в C на 12 мин. позднее (считается, что пассажир приходит на станцию к моменту отхода поезда). От K до A—10 мин. ходьбы. Определить, сколько времени нужно потратить на ходьбу от K до B.

467. В треугольнике ABC сторона BC равна 48 *см*, радиус описанного круга равен 30 *см*. На сторонах AB и AC взяты точки K и E, расстояние между которыми равно 28 *см*. Найти радиус круга, описанного вокруг треугольника AKE.

468. Дана треугольная пирамида $KABC$, в которой ребра KA, KB и KC попарно перпендикулярны,

$$AB = BC = x, \quad BK = y.$$

Найти радиус вписанного в пирамиду шара.

469. Доказать, что

$$\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}-\sqrt[3]{\sqrt{50}-7}=2.$$

Вариант 107

470. Два конькобежца выбегают одновременно: первый из A в B, второй из B в A, и встречаются на расстоянии 300 *м* от A. Пробежав дорожку AB до конца, каждый из них поворачивает назад и встречает другого на расстоянии 400 *м* от B. Найти длину дорожки AB.

471. Решить систему уравнений

$$\lg_a x + \lg_{a^2} y = c,$$

$$x^2 + a^{-\lg_{\frac{1}{a}} y} = 2a^c.$$

472. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SA, равное a, перпендикулярно к основанию ABC; $AB=AC$; двугранный угол при ребре SA равен α, а при ребре BC равен β. Найти радиус вписанного шара.

473. Решить уравнение

$$2\sin 3x - \cos 3x = 3\cos x.$$

Вариант 108

474. Автобус курсирует между городами A и B, расстояние между которыми равно 40 *км*. Велосипедист, выехав из A в B одновременно с автобусом, встретил этот автобус, возвращающийся из B в A, через 1 час. 36 мин., а через $10\frac{2}{3}$ *км* после встречи автобус обогнал велосипедиста по пути от A к B. Найти скорости велосипедиста и автобуса, пренебрегая временем стоянок последнего.

475. Решить систему уравнений

$$\lg_a x \lg_b y = \lg_a b,$$
$$a^{\lg_{a^2} y} = \sqrt{x}.$$

476. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро BC равно a; $AB=AC$; ребро SA перпендикулярно к основанию ABC; двугранный угол при ребре SA равен α, а при ребре BC равен β. Найти радиус описанного шара.

477. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x - \sin x = \operatorname{tg} 2x.$$

Вариант 109

478. Из города A в город B, отстоящий от A на 300 *км*, выезжает автомобиль. Одновременно из B в A выезжает второй автомобиль, который встречается с первым на расстоянии 120 *км* от A. Первый, доехав до B, сразу выезжает обратно в A, а второй остается в A один час и затем, выехав в B, встречается с первым через 3 час. 36 мин. после выезда из A. Найти скорость каждого автомобиля.

479. Решить систему уравнений

$$\lg_{a^2} x + \lg_y a = 1,$$
$$a^{\lg_{\sqrt{a}} y} = x^4.$$

480. В треугольной пирамиде $SABC$ ребро SC равное l наклонено к основанию ABC под углом α; двугранный угол при этом ребре равен β, а при ребре AB — прямой; $SA = SB$; $AC = BC$. Найти радиус вписанного шара.

481. Решить уравнение:

$$\sin^3 x \sin 3x + \cos^3 x \cos 3x = 0.$$

Вариант 110

482. Из пункта A в пункт B, находящийся на расстоянии 105 *км* от A, выходит автобус. Через $^1/_2$ час. вслед за ним из A выходит автомобиль, который, догнав автобус, поворачивает обратно и возвращается в A в тот момент, когда автобус приходит в B. Скорость автомобиля равна 40 *км/час*. Найти скорость автобуса и расстояние от A до места нагона.

483. Решить систему уравнений

$$\lg_a x + \lg_{a^2} y = 1,$$

$$b^{\lg_{\sqrt{b}} \sqrt{y}} + x^2 = 2a.$$

484. В треугольной пирамиде $SABC$ высота, опущенная из вершины S на основание ABC, равна h; $SA = SB$; $AC = BC$; ребро SC наклонено к грани ASB под углом α; двугранный угол при ребре SC равен β, а при ребре AB — прямой. Найти радиус описанного шара.

485. Решить уравнение

$$\cos 4x + \sin^2 3x = 1.$$

Вариант 111

486. Два тела A и B, находясь первоначально друг от друга на расстоянии 20 *м*, начали одновременно двигаться в одну и ту же сторону. Скорость тела A в первую секунду равна 25 *м*, а в каждую следующую секунду возрастает на $^1/_3$ *м*; скорость тела B в первую секунду равна 30 *м*, а в каждую из следующих секунд на $^1/_2$ *м* меньше. В начале движения тело A находилось позади тела B. Через сколько секунд тело A догонит тело B?

487. В треугольной пирамиде $OABC$ все плоские углы при вершине O — прямые и длины ребер, выходящие из этой вершины, $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Определить

высоту h пирамиды, опущенную из вершины O на грань ABC.

488. Из точки A к окружности с центром O радиуса r проведены касательные AB и AC, образующие угол α. Определить площадь фигуры, ограниченной этими касательными и большей из двух дуг, на которые окружность разбивается точками касания.

489. Решить систему уравнений

$$\sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{7}{\sqrt{xy}}+1,$$

$$\sqrt{x^3y}+\sqrt{y^3x}=78,$$

$$x>0,\quad y>0.$$

Вариант 112

490. Смешали некоторое количество руды, содержащей 72% железа, с некоторым количеством руды, содержащей 58% железа, и получили руду, содержащую 62% железа. Если бы для смеси взяли каждой руды на 15 *кг* больше, то получили бы руду, содержащую 63,25% железа. Определить вес каждой из взятых для смеси руд.

491. В треугольной пирамиде $OABC$ все плоские углы при вершине O — прямые и длины ребер, выходящих из этой вершины, суть $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$. Определить радиус шара, описанного около этой пирамиды.

492. Из точки A, лежащей на окружности с центром O радиуса r, проведены две равные хорды AB и AC, образующие угол α. Определить площадь фигуры, ограниченной хордами AB и AC, и той из двух дуг, определяемых точками B и C на окружности, которая не содержит точки A.

493. Найти действительные решения системы уравнений

$$\frac{2}{\sqrt{x+y}}+\frac{2}{\sqrt{3+7y-y^2}}=1,$$

$$\frac{16}{\sqrt{x+y}}-\frac{10}{\sqrt{61-(2y-7)^2}}=1.$$

Вариант 113

494. Пешеход отправляется из пункта A по направлению к пункту B. В то же время из пункта B в пункт A выезжает велосипедист. Через 50 мин. они встретились, после чего пешеход прибыл в пункт B на 4 час. позже, чем велосипедист в пункт A. Какова скорость пешехода и велосипедиста (в *км/час*), если расстояние между пунктами A и B равно 15 *км*?

495. В правильной треугольной пирамиде $OABC$ все плоские углы при вершине O — прямые и длины боковых ребер $OA = OB = OC = a$. Определить радиус шара, вписанного в эту пирамиду.

496. Середины смежных сторон правильного n-угольника соединены отрезками. Найти отношение площади полученного n-угольника к площади первоначального.

497. Решить уравнение

$$2x - \lg(5^{2x} + 4x - 16) = \lg 4^x.$$

Логарифмы считаются десятичными.

Вариант 114

498. Курьер, выезжающий из города A, должен успеть в город B через 5 час. В то же время другой курьер выезжает из города C и, чтобы успеть в город B в одно время с первым курьером, должен проезжать каждый километр на $1^1/_4$ мин. скорее, чем первый. Расстояние от C до B на 20 *км* больше расстояния от A до B. Определить последнее.

499. В правильной трехугольной пирамиде $OABC$ все плоские углы при вершине O — прямые, а длины боковых ребер $OA = OB = OC = a$. Определить ребро куба, вписанного в эту пирамиду так, чтобы одна из вершин куба совпадала с вершиной O пирамиды, три ребра куба, выходящие из вершины O, шли по ребрам пирамиды, а вершина M куба, противоположная вершине O, находилась на грани ABC пирамиды.

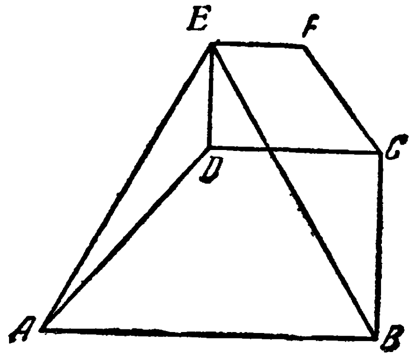
500. Круг радиуса r обложен снаружи n равными кругами, каждый из которых касается данного круга и двух соседних с ним кругов. Определить отношение радиусов этих кругов к радиусу данного круга.

501. Решить уравнение

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 4.$$

Вариант 115

502. Водоем A наполняется через трубу 1, водоем B — через трубу 2. Кроме того, по трубе 3 вода может перетекать из A в B. Пропускная способность труб 1 и 2 одинакова. Водоем B наполняется одной трубой 2 за 30 мин., водоем A наполняется за 2 час., если открыть трубы 1 и 3. Если начать наполнять водоем A трубой 1 при закрытых трубах 2 и 3, а, когда водоем A заполнится наполовину, открыть все трубы, то водоем B заполнится через 50 мин. после начала наполнения водоема A. За сколько времени наполнится водоем A трубой 1 при закрытой трубе 3?



Черт. 1

503. Найти отношение площади поверхности куба к площади поверхности прямого кругового конуса, вписанного в этот куб таким образом, что его вершина совпадает с вершиной куба, центр основания совпадает с центром куба, а окружность основания касается граней куба.

504. Дана прямоугольная трапеция $ABCD$, у которой $\angle C = \angle B = 90°$, $AB = 2CD$. На отрезке CD, как на основании, построена прямоугольная трапеция $DCFE$, расположенная вне первой трапеции и подобная ей, причем $\angle EDC = \angle FED = 90°$ и $DC > EF$. Точка E соединена с точками A и B (черт. 1). При условии, что треугольник ABE — правильный, найти отношение площади четырехугольника $EBCF$ к площади трапеции $ABCD$.

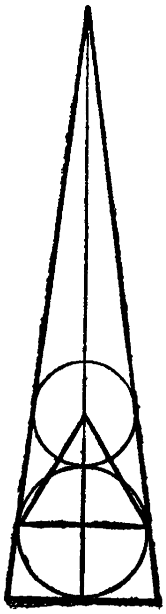
505. Решить уравнение

$$\sin x^{-\sin x} - 1 = \operatorname{ctg}^2 x.$$

Вариант 116

506. Имеется 3 сосуда. В первом сосуде находится 5 *л* 20%-ного раствора кислоты, во втором — 9 *л* воды и в третьем — некоторое количество раствора этой же кислоты. Из первого сосуда взяли один литр раствора,

перелили во второй сосуд и размешали. Затем взяли 1 *л* получившегося во втором сосуде раствора и перелили в третий сосуд. После размешивания из третьего сосуда взяли 1 *л* и перелили во второй сосуд. Наконец после размешивания перелили 1 *л* из второго сосуда снова в первый. После этого в первом сосуде оказался 18%-ный раствор. Затем содержимое всех трех сосудов слили вместе и размешали. При этом получился $41^2/_3$%-ный раствор. Какова была концентрация в третьем сосуде?



Черт. 2

507. Четыре шара с одинаковыми радиусами равными R расположены так, что каждый касается трех остальных. Найти радиус шара, касающегося всех четырех шаров.

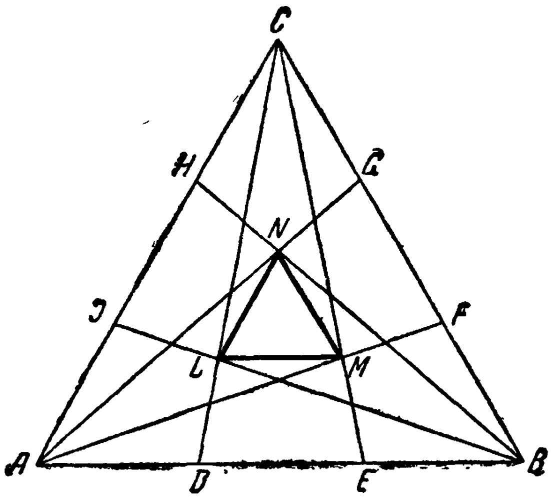
508.** В равнобедренный треугольник с основанием равным a и высотой равной h вписаны две окружности так, что одна касается всех сторон треугольника, а другая касается боковых сторон и первой окружности. Центр малой окружности и точки касания большой окружности с боковыми сторонами треугольника соединены между собой отрезками. Получается треугольник (черт. 2). При каком отношении a к h этот треугольник будет правильным?

Вариант 117

509. Имеются 2 чана, расположенных один над другим. В первый чан, расположенный выше, поступает вода через трубу A; из первого во второй вода может переливаться по трубе B; наконец, из второго чана вода выливается через трубу C. Известно, что через трубу A при закрытой трубе B первый чан наполняется за 3 час. и через трубу B при закрытой трубе A он опорожняется за 5 час. Если при пустых обоих чанах открыть все три трубы, то за 7 час. наполнится один из чанов. Если наполнить первый чан, а второй оставить пустым и после этого открыть трубы B и C (при закрытой трубе A), то полностью оба чана опорожнятся за 6 час. Какой из чанов больше и во сколько раз?

510. В правильный октаэдр с ребром равным a вписан шар. В этот шар вписан правильный октаэдр, в который снова вписан шар, затем в последний снова вписан октаэдр и т. д. Найти сумму объемов первых десяти шаров, построенных таким образом.

511. В правильном треугольнике ABC каждая из сторон разделена на три равные части: сторона AB — точками D и E, сторона BC — точками F и G, сторона CA — точками H и I. Через L, M и N обозначены соответственно точки пересечения пар прямых BI и CD, AF и CE, AG и BH (черт. 3). Найти отношение площади ΔLMN к площади $\triangle ABC$.



Черт. 3

512. Решить уравнение

$$(\operatorname{tg} x)^{\cos^2 x} = (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}.$$

Вариант 118

513. Пешеход движется по шоссе со скоростью 5 *км* в час. По шоссе в обе стороны с одинаковой скоростью движутся автобусы, выходящие из конечных пунктов через равные промежутки времени. Пешеход подсчитал, что за 2 час. число автобусов, попавшихся ему навстречу, оказалось на 4 больше, чем число обогнавших его автобусов. При этом, когда пешеход начал отсчитывать эти 2 час., около него как раз встретились 2 автобуса, идущие в противоположных направлениях (их он еще не учитывал), а когда кончил, то около него также встретились 2 автобуса (эти автобусы были последними, которые он посчитал). Пассажир, едущий в автобусе, замечает, что встречные автобусы попадаются каждые 5 мин. Какова скорость автобуса?

514. Найти площадь поверхности шара, описанного около треугольной пирамиды со сторонами, соответственно равными 1 *см*, 2 *см*, 10 *см*, 10 *см*, 10 *см*, 10 *см*.

515. В круг радиуса R вписана трапеция так, что расстояние от центра круга до одного из ее оснований вдвое меньше соответствующего расстояния до другого основания. Найти периметр трапеции, если известно, что один из ее углов равен 60°.

516. Найти решения уравнения

$$4^{\cos(\log_2 x)} - 4^{\cos^2(\log_2 \sqrt{x})} + 1 = 0,$$

меньшие 1000.

Вариант 119

517. Два самолета одновременно вылетают навстречу друг другу из городов A и B, расстояние между которыми равно l *км*. Через час после вылета они встретились и, не останавливаясь, продолжали свой путь, причем первый прибыл в город B на t мин. раньше, чем второй в город A. Найти скорости самолетов.

518. Из вершины O куба выходят два луча, образующие с ребрами куба, выходящими из этой вершины, углы α_1, β_1, γ_1 и, соответственно, α_2, β_2, γ_2. Определить косинус угла между ними.

519. Решить систему

$$2x^4 = y^4 + z^4, \quad xyz = 8,$$

зная, что логарифмы $\lg_y x$, $\lg_z y$, $\lg_x z$ образуют геометрическую прогрессию.

520. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}^3 x + 6 \operatorname{cosec} 2x - 8 \operatorname{cosec}^3 2x = 0.$$

Вариант 120

521. В приемные устройства двух автоматов по расточке поршневых колец (разной конструкции) было засыпано одинаковое количество, а именно, по N колец. Через час после включения второго автомата выяснилось, что первый выдал на p колец больше второго. Автоматы, не останавливаясь, продолжали работу до тех пор, пока у каждого из них не истощился запас колец, причем было установлено, что первый работал на T мин. меньше второго. Сколько колец в минуту вырабатывал каждый из них?

522. Зная длины a, b, c проекций трех ребер куба, выходящих из одной вершины на произвольную плоскость, определить углы между этими проекциями.

523. Найти сумму x^5+x^{-5}, зная, что $x+x^{-1}=k$.

524. Решить систему

$$x+y=\frac{2}{3}\pi, \quad \frac{\sin x}{\sin y}=2.$$

Вариант 121

525. Из двух точек A и B окружности радиуса R, находящихся друг от друга на расстоянии p (вдоль кратчайшей дуги AB), одновременно в одну и ту же сторону вылетели два тела так, что двигались по окружности с постоянной (для каждого тела своей) скоростью. Через t мин. после вылета одно из них нагнало другое и, не останавливаясь, оба продолжали свой путь пока не закончили его в исходных точках, одно на k мин. раньше другого. Найти скорости этих тел.

526. Из вершины O куба выходят два луча, образующие с ребрами куба, выходящими из этой вершины, углы α_1, β_1, γ_1, и, соответственно, α_2, β_2, γ_2. Определить косинус угла между проекциями этих лучей на какую-нибудь грань куба.

527. Найти положительные корни системы уравнений

$$x^2+y^2=3xyz, \quad y^2+z^2=4xyz, \quad z^2+x^2=5xyz.$$

528. Решить уравнение

$$8\sin x=\frac{\sqrt{3}}{\cos x}+\frac{1}{\sin x}.$$

Вариант 122

529. На эскалатор метро длиной в L *м* спешили два пассажира. Один взошел первым. Он стоял на эскалаторе и спустился на m *м* вниз (считая вдоль эскалатора) пока на эскалатор не взошел второй пассажир. Этот шел (с постоянной скоростью) и через t мин. после вступления на эскалатор нагнал первого. Не останавливаясь, он прошел дальше и пробыл на эскалаторе на s мин. меньше первого. Найти скорости обоих пассажиров относительно туннеля.

530. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с двумя его ребрами, выходящими из конца диагонали, углы α и β. Определить косинус двугранного угла между плоскостями, каждая из которых проходит через диагональ и одно из указанных ребер параллелепипеда.

531. Решить уравнение

$$\lg_a ax \lg_x ax = \lg_{a^2} \frac{1}{a},$$

где $a > 0$.

532. Решить уравнение

$$5 \sin 2x - 12 (\sin x - \cos x) + 12 = 0.$$

Вариант 123

533.** Для перелета по прямой из города A в город B и обратно в безветренную погоду самолету потребовалось в a раз меньше времени, чем для такого же перелета при наличии ветра, дувшего под углом 45° к прямой AB. Во сколько раз скорость самолета относительно воздуха больше скорости ветра?

534. Решить уравнение

$$\cos^3 x \sin 3x + \sin^3 x \cos 3x = \frac{3}{4}.$$

535. Даны три одинаковых окружности, каждая из которых касается двух остальных. В часть плоскости, расположенную между этими окружностями, вложен равносторонний треугольник так, что каждая его сторона касается некоторой окружности, причем точками касания являются вершины треугольника. Вычислить отношение радиуса каждой из данных окружностей к стороне треугольника.

536. Известно, что для арифметической прогрессии a_1, $a_2, \ldots, a_k, \ldots$ имеет место равенство $\frac{s_m}{s_n} = \frac{m^2}{n^2}$ (s_k — сумма первых k членов прогрессии). Доказать, что $\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$.

Вариант 124

537. Карманные часы идут быстрее, чем будильник. При проверке в некоторый момент времени выяснилось, что карманные часы отстают на a мин. от будильника. Если бы будильник шел на одну минуту в сутки быстрее, чем он идет на самом деле, то первое совпадение показаний обоих часов (считая с момента проверки) наступило бы на T час. раньше, чем это случилось на самом деле. Найти время, прошедшее от момента проверки до первого совпадения показаний обоих часов.

538. Решить уравнение

$$\sin 2x - \sin x - \cos x = 1.$$

539. Даны шесть шаров одного и того же радиуса, каждый из которых касается четырех остальных так, что, соединив их центры отрезками, мы получим октаэдр. В часть пространства, расположенную между этими шарами, вложен куб таким образом, что каждая его грань касается некоторого шара своим центром. Вычислить отношение стороны куба к радиусу данных шаров.

540. Даны арифметическая и геометрическая прогрессии с положительными членами. Первые члены этих прогрессий совпадают и вторые — тоже. Доказать, что всякий другой член арифметической прогрессии не больше соответствующего члена геометрической прогрессии.

Вариант 125

541. На разных берегах канала с постоянным течением воды имеется две пристани A и B, расстояние между которыми в два раза больше ширины канала. Для поездки напрямик из A в B и обратно катеру потребовалось в k раз больше времени, чем для такой же поездки по неподвижной воде. Найти отношение скорости течения к скорости катера в неподвижной воде.

542. Решить уравнение

$$2\cos 2x \cos x - 8\cos^2 x + 7\cos x = 1.$$

543. Вершины правильного шестиугольника являются центрами одинаковых окружностей, каждая из которых касается двух соседних. В части плоскости, рас-

положенной между этими окружностями, лежит правильный шестиугольник так, что каждая его сторона касается некоторой окружности, причем точками касания являются вершины шестиугольника. Вычислить отношение стороны шестиугольника к радиусу окружностей.

544. Пусть числа $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ составляют геометрическую прогрессию. Зная суммы $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ и $T = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}$ найти произведение

$$P = a_1 a_2 \ldots a_n.$$

Вариант 126

545. Лодка по реке прошла путь от пункта A до пункта B с помощью мотора. Обратный путь был пройден по течению на веслах, причем скорость на веслах относительно неподвижной воды в p раз больше скорости течения воды в реке. Лодка находилась в пути из A в B и обратно k час. Если бы она из A в B шла на веслах, а из B в A — с помощью мотора, то на весь путь было бы затрачено T час. За какое время течение могло бы пригнать лодку из B в A?

546. Решить уравнение

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x.$$

547. Даны четыре шара одного и того же радиуса, каждый из которых касается трех остальных. В части пространства между этими шарами лежит правильный тетраэдр так, что каждая его грань касается некоторого шара своим центром (точка пересечения медиан). Вычислить отношение радиуса данных шаров к ребру тетраэдра.

548. Доказать, что для членов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ арифметической прогрессии всегда выполняется равенство

$$\frac{1}{a_1 a_n} + \frac{1}{a_2 a_{n-1}} + \frac{1}{a_3 a_{n-2}} + \ldots + \frac{1}{a_n a_1} =$$
$$= \frac{2}{a_1 + a_n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Вариант 127

549. По окружности длиною 720 *см* движутся равномерно с одинаковой скоростью и в одном направлении несколько точек, находящихся на одинаковом расстоянии одна от другой. Наблюдатель, стоящий у окружности, отмечает, что промежуток времени между прохождением мимо наблюдателя двух соседних точек равен 10 сек. Если бы точек было двумя больше, а скорость каждой из них на 6 *см* меньше, то мимо наблюдателя они проходили бы через тот же промежуток времени. Сколько точек находится в движении и какова их скорость?

550. В правильной пирамиде с квадратным основанием через сторону основания проведено сечение перпендикулярно к противоположной боковой грани. Найти площадь сечения, зная длину бокового ребра равную b и угол α наклона боковой грани к основанию. Выяснить условие возможности построения сечения.

551. Отношение двух углов треугольника равно 2, а разность противоположных им сторон равна 2 *м*; третья сторона равна 5 *м*. Найти длины сторон треугольника.

552. Решить систему уравнений

$$10^{2-\lg(x-y)} = 2{,}5,$$

$$\lg(x-y) - 2\lg 2 = 1 - \lg(x+y).$$

Логарифмы считаются десятичными.

Вариант 128

553. Два поезда отправляются одновременно из A и B навстречу друг другу. Скорость первого поезда на 10 *км/час* больше скорости второго. Оба поезда встречаются на расстоянии 28 *км* от середины AB. Если бы первый поезд отправился из A на 45 мин. позже второго, то оба поезда встретились бы на середине AB. Найти расстояние AB и скорости обоих поездов.

554. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, а плоские углы при вершине равны α. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду.

555. Около окружности с $R = 10$ *см* описана равнобочная трапеция. Расстояние между точками касания

боковых сторон равно 16 *см*. Найти площадь трапеции.

556. Решить систему уравнений

$$\sqrt[3]{xy}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)=6,$$
$$x+y=9.$$

Вариант 129

557. Поезд через два часа после отправления со станции A останавливается на один час, а затем продолжает путь со скоростью, меньшей на $1/5$ первоначальной скорости, и вследствие этого прибывает на станцию B с опозданием на $3^1/_2$ час. Если бы остановка произошла на 180 *км* далее, то поезд прибыл бы в B с опозданием лишь на $1^1/_2$ час. Определить расстояние AB.

558. В правильной четырехугольной пирамиде даны боковое ребро b и угол α между противоположными боковыми ребрами. Найти площадь сечения, проведенного через вершину основания перпендикулярно к противоположному боковому ребру. Выяснить условие возможности построения сечения.

559. Два круга данных радиусов R и r касаются в точке C. К ним проведена общая внешняя касательная AB, где A и B — точки касания. Вычислить площадь треугольника ABC.

560. Решить систему уравнений

$$\sqrt[4]{x+y}-\sqrt[4]{x-y}=a \quad (a>0),$$
$$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=b^2$$

(b — действительное число).

Вариант 130

561. По окружности длиною 540 *см* движутся в одном направлении равномерно две точки. Определить скорости движения точек, если известно, что одна из них пробегает окружность на 9 сек. скорее другой и что через каждые 108 сек. положения точек совпадают.

562. В треугольной пирамиде боковые грани составляют с плоскостью основания равные углы α. Определить площадь основания, если полная поверхность пирамиды равна Q.

563. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла отсекает на гипотенузе отрезки p и q. Найти длину этой биссектрисы.

564. Решить систему уравнений

$$3^{\sin x + \cos y} = 1,$$
$$25^{\sin^2 x + \cos^2 y} = 5.$$

Вариант 131

565. Известно, что число A в m раз меньше разности чисел B и C, число B в n раз меньше разности чисел A и C, а число C в три раза больше разности чисел A и B. Найти зависимость между m и n.

566. Высота правильной треугольной пирамиды равна h, а угол между боковыми гранями равен φ. Определить объем пирамиды.

567. Решить уравнение

$$\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x + 2 = 0.$$

Вариант 132

568. Артель рабочих прорывает канаву в 14 дней. Если бы в артели было на 4 человека больше и каждый работал бы на 1 час в день больше, то та же работа была бы выполнена в 10 дней. При увеличении же артели еще на 6 человек и рабочего дня еще на 1 час вся работа была бы закончена в 7 дней. Сколько человек было в артели и сколько часов в день они работали?

569. Грани правильной усеченной треугольной пирамиды касаются шара. Определить отношение поверхности шара к полной поверхности пирамиды, если боковые грани пирамиды наклонены к плоскости ее основания под углом α.

570. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} - \frac{1}{\sec^2 x} - \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x} = -3.$$

Вариант 133

571. Три числа, образующие арифметическую прогрессию, в сумме составляют 24. Если большее из чисел уве-

личить на 4, то эти числа будут составлять геометрическую прогрессию. Определить эти прогрессии.

572. Стороны равнобедренной трапеции касаются круглого цилиндра, ось которого перпендикулярна параллельным сторонам трапеции. Найти угол, который образует ось цилиндра с плоскостью трапеции, если длины оснований трапеции равны a и b, а высота трапеции равна h.

573.** Решить уравнение

$$\frac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}}=1 \quad (a>0,\ b>0).$$

Вариант 134

574. Найти четыре числа, из которых первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую; сумма крайних чисел равна 14, а сумма средних — равна 12.

575. Шар радиуса R вписан в пирамиду, имеющую своим основанием ромб с острым углом α. Двугранный угол при основании пирамиды равен β. Определить объем пирамиды.

576. Решить уравнение

$$x^2+\frac{9x^2}{(3+x)^2}=7.$$

Вариант 135

577. Найти первый член и знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если известно, что сумма ее членов равна 3, а сумма квадратов ее членов равна 10.

578. От правильной четырехугольной призмы с полной поверхностью s плоскостью, проходящей через диагональ нижнего основания и одну из вершин верхнего основания, отсечена пирамида. Найти ее поверхность, если угол при вершине треугольника, получающегося в сечении призмы плоскостью, равен α.

579. Решить уравнение

$$\log_2|2x-5|+\log_2|x+20|=\frac{1}{\lg_{10}2}.$$

Вариант 136

580. Число членов геометрической прогрессии четно. Сумма всех ее членов в три раза больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Определить знаменатель прогрессии.

581. Квадрат $ABCD$ расположен в плоскости Q, наклоненной к плоскости P под углом φ. Сторона AB образует с плоскостью P угол α. Какой угол Θ образует с этой плоскостью сторона AD.

582. Решить уравнение

$$x - 2\sqrt{x\sqrt{x-1}+2} + 2 = 0.$$

Вариант 137

583. Два самолета вылетают одновременно из пункта A, летят с разными, но постоянными скоростями в пункт B и, достигнув его, немедленно поворачивают обратно. Первый самолет, обогнав второй, встречает его на обратном пути на расстоянии a *км* от B, затем, достигнув A и снова повернув обратно к B, он встречает второй самолет, пролетев расстояние, составляющее $\frac{1}{k}$ расстояния от A до B. Найти расстояние от A до B.

584. В конус вписан шар радиуса r. Найти объем конуса, если известно, что плоскость, касающаяся шара и перпендикулярная к одной из образующих конуса, отстоит от вершины конуса на расстоянии d.

585. Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\log_2(1+x)-\log_2 x-\frac{1}{2}\log_2(x^2+2x+2)} = 8.$$

Вариант 138

586. Два поезда выезжают одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу и встречаются на расстоянии p *км* от B. Через t час. после встречи второй поезд, миновав пункт A, находился в q *км* от него, а первый в это время, миновав пункт B, находился от второго поезда на расстоянии в два раза большем, чем расстояние между пунктами A и B. Найти скорости поездов и расстояние между A и B.

587. Через одно из ребер основания правильной треугольной пирамиды со стороны основания a проведена плоскость перпендикулярно к противолежащему боковому ребру, делящая это ребро в отношении $m:n$. Определить полную поверхность пирамиды.

588. При каком значении m уравнения

$$2x^2-(3m+2)x+12=0,$$

$$4x^2-(9m-2)x+36=0$$

имеют общий корень?

Вариант 139

589. Имеются три слитка золота, пробы которых соответственно таковы: 0,800; 0,720 и 0,450. Если сплавить вместе первый и третий слитки, то получим слиток с пробой 0,695; если же сплавить два последних слитка и прибавить 24 *г* чистого золота, то получим слиток с пробой 0,600. Наконец, если сплавить все 3 слитка, то получим слиток пробы 0,700. Каков вес каждого слитка?

590. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна d, а плоский угол при вершине равен углу наклона бокового ребра к плоскости основания.

591. Решить уравнение

$$x^{\sqrt[n]{x}}=\left(\sqrt[n]{x}\right)^x.$$

Вариант 140

592. Найти арифметическую прогрессию, у которой сумма любого числа членов, начиная с первого, в два раза меньше квадрата числа взятых членов.

593. На высоте конуса, как на диаметре, описан шар. Определить объем части шара, заключенной внутри конуса, если известны высота конуса h и угол φ между образующей конуса и плоскостью его основания.

594. Решить уравнение

$$\sqrt{3\log_2(-x)}=\log_2\sqrt{x^2}.$$

Вариант 141

595. Две бригады школьников сажали фруктовые деревья. В первой бригаде было на 3 человека меньше, чем во второй, но каждый посадил на 2 дерева больше, чем во второй бригаде. В результате обе бригады посадили по 180 деревьев. Сколько школьников было в каждой бригаде?

596. Плоскость, проходящая через центр шара, вписанного в прямой круговой конус и параллельная основанию его, делит объем конуса пополам. Под каким углом наклонены образующие этого конуса к плоскости основания?

597. Решить систему уравнений

$$\log_3(\log_2 x) + \log_{\frac{1}{3}}\left(\log_{\frac{1}{2}} y\right) = 1,$$

$$xy^2 = 4.$$

Вариант 142

598. На протяжении 36 *м* переднее колесо экипажа делает на 20 оборотов больше заднего. Если окружность переднего колеса увеличить на 6 *дм*, а окружность заднего уменьшить на 6 *дм*, то на том же протяжении переднее колесо сделает на 8 оборотов больше заднего. Найти длины окружностей обоих колес.

599. Боковые ребра правильной четырехугольной пирамиды наклонены к основанию под углом α; апофема пирамиды равна m. Найти объем конуса, описанного около пирамиды, и его полную поверхность.

600. Решить систему уравнений

$$x + y + x^2 + y^2 = 8,$$

$$xy + x^2 + y^2 = 7.$$

Вариант 143

601. Полная поверхность прямоугольного параллелепипеда равна 192 *см*^{2}; если уменьшить каждое из ребер на 1 *см*, то полная поверхность уменьшится на 70 *см*^{2}. Найти длину диагонали параллелепипеда.

602. Основанием конусов, вписанных в сферу радиуса R, служит круг, площадь которого равна одной двенадцатой площади поверхности этой сферы. Найти объемы обоих конусов.

603. Решить систему уравнений

$$20x^{\log_3 y} + 7y^{\log_3 x} = 81\sqrt[3]{3},$$
$$xy = 9\sqrt[3]{9}.$$

Вариант 144

604. Из пункта M в пункт N вышел товарный поезд. Спустя 5 час. 5 мин. из N в M вышел пассажирский поезд. Оба поезда встретились в пункте A. От A до N товарный поезд шел 12 час. 55 мин., а пассажирский от A до M шел 4 час. 6 мин. Сколько времени употребил каждый поезд на прохождение всего пути между M и N?

605. Через ребро основания правильной четырехугольной пирамиды проведена плоскость, отсекающая от противоположной грани треугольник с площадью s_1. Найти боковую поверхность пирамиды, отсеченной плоскостью от данной пирамиды, если боковая поверхность данной пирамиды равна $4s$.

606. Решить уравнение

$$4^{-\frac{1}{x}} + 6^{-\frac{1}{x}} = 9^{-\frac{1}{x}}.$$

Вариант 145

607. Определить бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, в которой второй член равен 6, а сумма членов равна $^1/_8$ суммы квадратов ее членов.

608. Правильная шестиугольная пирамида пересечена плоскостью, параллельной боковой грани и проходящей через центр основания; сторона основания равна a; апофема пирамиды равна k. Найти площадь сечения.

609. Решить уравнение

$$2\left(2^{\sqrt{x}}+3\right)^{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}} - \sqrt[\sqrt{x}-1]{16} = 0.$$

Вариант 146

610. Самолет летит из A в C по ломаной ABC; угол B прямой. Остановка в B длится столько же, сколько путь от B до C. Одновременно с первым из A вылетел

второй самолет, скорость которого вдвое меньше. Он летел по прямой AC без остановок и прибыл в C одновременно с первым. Какую часть пути AC пролетел второй за время остановки первого в B?

611. В треугольной пирамиде $OABC$ все плоские углы при вершине O прямые, а перпендикуляр, опущенный из вершины O на грань ABC, образует с ребрами OA, OB и OC углы соответственно равные α, β, γ и имеет длину h. В эту пирамиду вписан куб так, что одна из вершин куба совпадает с вершиной пирамиды O, три ребра куба, выходящие из этой вершины, идут по ребрам пирамиды, а вершина M куба противоположная O лежит на грани ABC. Вычислить длину ребра куба.

612. Решить систему уравнений

$$\sqrt[x]{x+2y}=2, \quad (2x+4y)\,3^x=72.$$

Вариант 147

613. По окружности длиной 384 *м* равномерно движутся в одном направлении две точки. Одна из них обходит окружность на 16 мин. скорее другой, и при этом движущиеся точки совпадают между собой каждые 32 мин. Найти скорости движения точек.

614. Решить неравенство

$$\lg_{(x+1)^2}(x+3)>1.$$

615. Пусть в треугольнике ABC угол A прямой, а угол B меньше 45°. Найти угол B, если известна длина c катета AB и расстояние m между центром O описанной окружности и основанием H высоты, опущенной на гипотенузу. При каком условии задача разрешима?

616. В тетраэдре (треугольной пирамиде) $OABC$ ребра OA, OB, OC попарно перпендикулярны. Найти длины ребер OB и OC, если известна длина a ребра OA, площадь s треугольника ABC и объем v рассматриваемого тетраэдра. При каком условии задача разрешима?

617. Решить систему уравнений:

$$\sin\frac{\pi x^2}{2}=1, \quad |x|+|y|=3.$$

Вариант 148

618. Сосуд объемом 30 *л* наполнен спиртом. Из него отливают некоторое количество спирта в другой сосуд такого же объема и, дополнив остальную часть второго сосуда водой, дополняют этой смесью первый сосуд. Затем из первого сосуда отливают 12 *л* получившейся там смеси во второй, после чего в первом сосуде оказывается на 2 *л* спирта меньше, чем во втором. Сколько отлито первоначально спирта из первого сосуда во второй?

619. Найти сумму всех различных чисел, которые можно получить из числа 22 731, переставляя в нем цифры всевозможными способами.

620. В треугольнике ABC разность углов B и C равна $\frac{\pi}{2}$. Найти угол C этого треугольника, зная, что сумма сторон b и c равна k, а высота, опущенная из вершины A, равна h. При каких условиях решение возможно?

621. ACD и BCD — два равнобедренных треугольника с общим основанием $CD=2a$. Вычислить радиус сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$, если известно, что грани треугольников ACD и BCD взаимно-перпендикулярны, а ребра AC, AD, BC, BD равны между собой и имеют длину равную b.

622. Найти все значения m, при которых уравнение

$$\sin^2 x + 4\sin x + m = 0$$

имеет решение. Найти эти решения.

Вариант 149

623. Катер переплывает реку, двигаясь по прямой, перпендикулярной к берегу. Если собственную скорость катера уменьшить вдвое, то время переправы увеличится в m раз. Во сколько раз собственная скорость катера больше скорости течения реки. При каких m решение возможно?

624. Найти все действительные значения x, при которых выполнено неравенство

$$\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x} < 1.$$

625. В треугольнике ABC даны радиус R описанной окружности, угол A и известно, что высота AA' равна R. Вычислить углы B и C. При каком условии решение возможно?

626. В тетраэдре (треугольной пирамиде) $OABC$ ребра предполагаются неограниченно продолженными во всех направлениях. Пусть p — плоскость, параллельная грани ABC; P, Q и R середины ребер BC, CA и AB; A', B', C' — точки пересечения плоскости p с ребрами OA, OB, OC или с их продолжениями. При каком положении плоскости p прямые $A'P$, $B'Q$, $C'R$ параллельны между собой?

627. Найти все значения m, при которых уравнение

$$\cos^4 x - 6\cos^2 x + m^2 = 0$$

имеет решения. Найти эти решения.

Вариант 150

628. Три трактора разной производительности вспахивают два поля разной величины. Один третий трактор может вспахать второе поле на 3 час. быстрее, чем первый вспашет первое поле, но на 2 час. медленнее, чем второй может вспахать первое поле. Первый и второй тракторы вместе могут вспахать первое поле на 6 час. быстрее, чем третий вспашет второе поле. За сколько часов третий трактор вспашет второе поле?

629. Доказать, что если действительные числа x, y, z ($x \neq 0$, $y \neq 0$, $z \neq 0$) удовлетворяют соотношениям $x + y + z = xyz$ и $x^2 = yz$, то $x^2 \geqslant 3$.

630. Вычислить углы B и C треугольника, если даны длина a стороны BC, угол A и высота h, опущенная из A на BC. При каком условии решение возможно?

631. Ребро SA тетраэдра (треугольной пирамиды) $SABC$ перпендикулярно плоскости грани ABC; треугольник ABC прямоугольный (угол B равен 90°) и $SA = AB = BC$. Вычислить внутренний двугранный угол с ребром SC.

632. Доказать, что, если $|\sin x| = |k \sin y|$, где $|k| < 1$, то произведение $\sin(x+y)\sin(x-y)$ не меняет знака.

Вариант 151

633. Два сосуда A и B содержат одинаковое количество воды. В сосуд A вливается литр спирта, после чего

литр смеси выливается в сосуд B; затем из сосуда B выливается один литр смеси, после чего в сосуде B остается 0,16 *л* спирта. Определить, сколько воды было в сосуде A вначале.

634. Доказать, что если x, y, z действительные числа, удовлетворяющие равенствам

$$x+y+z=5, \quad yz+zx+xy=8,$$

то

$$1\leqslant x\leqslant\frac{7}{3}, \quad 1\leqslant y\leqslant\frac{7}{3}, \quad 1\leqslant z\leqslant\frac{7}{3}.$$

635. Даны длины b и c сторон треугольника ABC и известно, что разность углов B и C равна 90°. Вычислить длину стороны BC.

636. В пространстве даны 5 точек A, B, C, D, E, из которых никакие 4 не лежат в одной плоскости. Пусть P — середина AE; P' — середина CD; Q — точка пересечения медиан треугольника BCD, а Q' — точка пересечения медиан треугольника ABE. Доказать, что отрезки PQ и $P'Q'$ пересекаются. В каком отношении делит их точка пересечения?

637. Доказать, что

$$a\cdot 2^x+b\cdot 3^y+1\leqslant\sqrt{4^x+9^y+1}\,\sqrt{a^2+b^2+1},$$

где $a>0$, $b>0$. При каких значениях x и y имеет место знак равенства?

Вариант 152

638. Пусть $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ — некоторая перестановка из чисел $1, 2, 3, \ldots, n$. Рассмотрим всевозможные пары чисел:

$$\begin{array}{r}(a_1, a_2);\ (a_1, a_3); \ldots ;\ (a_1, a_n);\\ (a_2, a_3); \ldots ;\ (a_2, a_n);\\ \ldots\ldots\ldots\\ (a_{n-1}, a_n).\end{array}$$

Числом инверсий в перестановке $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ называется число тех из указанных пар, в которых большее число предшествует меньшему. Подсчитать сумму чисел инверсий во всех перестановках из чисел 1, 2, 3, ..., n.

639. Решить неравенство

$$\sqrt{x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}.$$

640. В треугольнике ABC даны угол A, противоположная ему сторона a и опущенная на нее из вершины A высота равная $\frac{a}{2}$. Вычислить углы B и C. При каком условии задача разрешима?

641. O_1 и O_2 — две данные точки пространства. Найти геометрическое место окружностей, по которым пересекаются сферы с центрами в этих точках, при условии, что сумма поверхностей этих сфер равна данному числу k.

642. Найти все значения m, при которых система

$$\sin x \cos 2y = m^2 + 1, \quad \cos x \sin 2y = 3m$$

разрешима, и решить эту систему.

Вариант 153

643. В бассейн проведены 4 трубы. Когда открыты 1-я, 2-я и 3-я трубы, бассейн наполняется за 12 мин.; когда открыты 2-я, 3-я и 4-я трубы — за 15 мин.; когда открыты только 1-я и 4-я трубы — за 20 мин. За какое время наполнится бассейн, если открыть все 4 трубы?

644. Доказать, что при любом целом $n > 0$ число $4^n + 15n - 1$: а) делится на 3, б) делится на 9.

645. Внутри угла A дана точка M. Провести через M прямую l так, чтобы она отсекала от заданного угла треугольник наименьшей площади. Указать способ построения прямой l.

646. В правильную треугольную усеченную пирамиду вписан шар радиуса r, касающийся всех 5 граней пирамиды; боковое ее ребро равно стороне меньшего основания. Найти объем этой усеченной пирамиды.

Вариант 154

647. Пять человек выполняют некоторую работу. Первый, второй и третий, работая вместе, могут выполнить эту работу за $7^1/_2$ час.; 1-й, 3-й и 5-й — за 5 час.; 1-й, 3-й и 4-й — за 6 час.; 2-й, 4-й и 5-й — за 4 час. За какое время выполнят эту работу все 5 человек, работая вместе?

648. Дано, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$. Доказать, что тогда сумма некоторых двух чисел из a, b и c обязательно равна нулю.

649. Точки A, B, C и D лежат на некоторой окружности (в порядке обхода против часовой стрелки). Найти геометрическое место точек касания окружностей, проходящих через A, B и соответственно, C, D.

650. Найти сторону куба, вписанного в правильную треугольную пирамиду, сторона основания которой равна a, а боковое ребро b. Четыре вершины куба лежат на основании пирамиды, четыре другие — на боковых гранях.

Вариант 155

651. Сосуд снабжен 4 кранами. Если открыты все 4 крана, сосуд заполняется жидкостью за 4 час.; 1-й, 2-й, и 4-й краны заполняют его за 5 час., а 2-й, 3-й и 4-й — за 6 час. За какое время заполнят сосуд 1-й и 3-й краны?

652. Найти такое трехзначное число abc, чтобы четырехзначные числа $abc1$ и $2abc$ удовлетворяли равенству

$$abc1 = 3 \cdot 2abc.$$

653. Дана прямоугольная трапеция с высотой H. На наклонной боковой стороне, как на диаметре, строится полуокружность и оказывается, что она касается вертикальной боковой стороны. Вычислить площадь прямоугольного треугольника с катетами, равными основаниям трапеции.

654. От правильной треугольной призмы $ABCA'B'C$ плоскостью $A'BC$ отрезана пирамида. В оставшееся тело вписан шар, касающийся всех его пяти граней. Радиус шара равен r. Найти объем призмы.

Вариант 156

655. Первый раствор содержит 6% (по весу) вещества A, 16% вещества B и 4% вещества C, второй раствор соответственно 15%, 9%, 10%, третий 3%, 5% и 2%. В каком отношении надо смешать эти растворы, чтобы получить раствор, содержащий 12% вещества A, 10% вещества B и 8% вещества C?

656. Решить уравнение

$$\sin^2 x + \sin 2x \sin 4x + \ldots + \sin nx \sin n^2 x = 1.$$

657. Стороны a, b и c треугольника лежат, соответственно, против углов A, B и C. Доказать, что биссектриса угла A

$$b_a = \frac{2bc \cos \frac{A}{2}}{b + c}.$$

Пользуясь этой формулой, доказать, что треугольник с двумя равными биссектрисами равнобедренный.

658. В треугольной пирамиде боковые ребра равны a, b и c, а все плоские углы при вершине прямые. Найти сторону куба, вписанного в пирамиду так, что одна из его вершин совпадает с вершиной пирамиды, а противоположная вершина лежит на основании.

Глава II

УПРАЖНЕНИЯ, ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ К ПРОГРАММЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВЫСШИЕ УЧЕБНЫЕ ЗАВЕДЕНИЯ

§ 1. Действительные и комплексные числа

1. Сформулировать и доказать правило обращения периодической десятичной дроби в обыкновенную.
2. Дать определение функции $y = a^x$.
3. Сформулировать определение абсолютной величины (или модуля) действительного числа.
4. Построить графики линий, заданных следующими уравнениями:

   1) $|x| + |x-a| + |y| = a, \ a > 0$;
   2) $|x| + |y| = 1$;
   3) $|2y-1| + |2y+1| + \frac{4}{\sqrt{3}}|x| = 4$;
   4) $|x| + |y| + \frac{1}{\sqrt{2}}\{|x-y| + |x+y|\} = \sqrt{2} + 1$;
   5) $||x| - |y|| = 1$;
   6) $||x| + ||y| - 3| - 3| = 1$;
   7) $|y| = \frac{\sqrt{3}}{2}(|x| - x)$;
   8) $||x-1|-1| = |||y|-3|-1|-1$;
   9) Доказать, что $2|y-z| + |2x-y-z-|y-z|| + |2x-y-z+|y-z|| = 4\{\max(x, y, z) - \min(x, y, z)\}$,

где $\max\{x, y, z\}$ означает наибольшее из чисел x, y, z, а $\min\{x, y, z\}$ наименьшее из этих чисел.

5. Что называется арифметическим значением $\sqrt{a}$, где a — действительное положительное число?

Доказать, что арифметическое значение $\sqrt{a^2}$, где a действительное число равно $|a|$.

6. Введем следующее обозначение

$$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} 1, & \text{если } a > 0; \\ -1, & \text{если } a < 0; \\ 0, & \text{если } a = 0 \end{cases}$$

($\operatorname{sgn} a$ читается так: «сигнатура a»).

Доказать, что

$$|a| = a \cdot \operatorname{sgn} a,$$

$$\sqrt{a^2} = a \cdot \operatorname{sgn} a,$$

$$\frac{|a|}{a} = \frac{a}{|a|} = \operatorname{sgn} a \ (\text{если } a \neq 0).$$

7. Доказать, что:

1) $(\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta) = \cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)$,

2) $\dfrac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta} = \cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)$,

3) $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$ (n — целое число; применить метод полной индукции для n — целого положительного).

8. Найти все n значений

$$\sqrt[n]{\cos\alpha + i\sin\alpha};$$

как располагаются на плоскости точки, соответствующие этим значениям корня?

9. На плоскости построены две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, соответствующие комплексным числам $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$. Где находится точка, соответствующая числам:

1) $z_1 + z_2$;

2) $\frac{1}{2}(z_1 + z_2)$;

3) $pz_1 + qz_2$, где $p + q = 1$;

4) $pz_1 + qz_1$, где $p+q=1$; $p>0$, $q>0$;

5) $pz_1 + qz_2 + rz_3$,
где $p+q+r=1$, $p>0$, $q>0$, $r>0$;

6) $\frac{1}{z_1}$;

7) $\overline{z}_1$ ($\overline{z}_1$ — комплексное число, сопряженное z_1).

10. Выполнить указанные действия:

1) $\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}$;

2) $\frac{a+bi}{a-bi}$;

3) $\frac{(1-i)^5-1}{(1+i)^5+1}$;

4) $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$;

5) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^2$;

6) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3$;

7) $(a+b\varepsilon+c\varepsilon^2)^3+(a+b\varepsilon^2+c\varepsilon)^3$,

где $\varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$.

11. Вычислить:

1) $\sqrt{2i}$; 2) $\sqrt{-8i}$; 3) $\sqrt{3-4i}$;

4) $\sqrt{-15+8i}$; 5) $\sqrt{-3-4i}$; 6) $\sqrt{-11+60i}$;

7) $\sqrt{1-i\sqrt{3}}$; 8) $\sqrt[4]{-1}$; 9) $\sqrt[4]{2-i\sqrt{12}}$.

12. Представить в тригонометрической форме следующие комплексные числа:

1) 1; 2) -1; 3) i; 4) $-i$;

5) $1+i$; 6) $-1+i$; 7) $-1-i$; 8) $1+i\sqrt{3}$;

9) -3; 10) $3+4i$; 11) $3-4i$; 12) $-3+4i$;

13) $-3-4i$.

13. Найти геометрическое место точек, соответствующих числам z, удовлетворяющих соотношениям:

1) $|z| = 2$;
2) $|z| < 2$;
3) $|z - z_1| = 3$ (z_1 — данное число);
4) $|z - i| \leqslant 1$;
5) $|z - z_1| = |z - z_2|$ (z_1 и z_2 — данные числа);
6) $\left|\dfrac{z - z_1}{z - z_2}\right| = k$ (k — данное положительное число);
7) $|z - z_1|^2 - |z - z_2|^2 = k$.

14. Вычислить

1) $\sqrt[3]{i}$; 2) $\sqrt[6]{1}$; 3) $\sqrt[7]{3 + 4i}$.

15. Вычислить суммы:

$$A = \cos x + 2\cos 2x + 3\cos 3x + \ldots + n\cos nx;$$
$$B = \sin x + 2\sin 2x + 3\sin 3x + \ldots + n\sin nx.$$

Указание: составить выражение $A + Bi$; заметить, что для вычисления сумм вида $1 + 2a + 3a^2 + \ldots + na^{n-1}$ полезно это выражение умножить на $1 - a$.

Просуммировав таким образом $A + Bi$, отделить действительную часть (это будет A) от мнимой (коэффициент при i будет B).

16. Известно, что при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ имеют место следующие неравенства

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120},$$
$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

(x выражен в радианах). Как надо вести вычисления для того, чтобы быть абсолютно уверенным в размерах допущенной погрешности? Провести такие вычисления для

$$x = \frac{\pi}{10} (= 18°).$$

17. Известно, что величины x и y изменяются в пределах:

$$2{,}311 < x < 2{,}312,$$
$$3{,}501 < y < 3{,}502.$$

В каких пределах будет изменяться выражение

$$\frac{xy-2x+y}{x^2-y+x}$$

(см. предыдущую задачу).

18. Совершенным числом называется целое положительное число, равное сумме всех своих делителей (само число исключается), например:

$$6=1+2+3,$$

$$28=1+2+4+7+14, \ldots$$

— числа совершенные. Доказать, что если $2^{n+1}-1$ — число простое (т. е. делящееся только на 1 и на само себя, то $2^n(2^{n+1}-1)$ — число совершенное. Следует ли отсюда, что множество совершенных чисел бесконечно?

19. Является ли соотношение

$$a'=a$$

определением или его можно доказать?

20. Какой принципиальный дефект имеет геометрическая теория исследования системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными?

21. Дано: $a>0$, $b>0$. Построить с помощью операций сложения, вычитания, умножения и деления над числами a и b число $c>0$ такое, что $c<a$ и $c<b$.

22. Пусть точка z описывает окружность. Какую линию при этом описывает точка

$$z'=\frac{az+b}{cz+d},$$

где a, b, c, d — данные комплексные числа, причем

$$ad-bc\neq 0.$$

23.** 1°. Доказать, что всякое простое число не равное 2 может быть представлено, и притом только одним способом, в виде разности квадратов двух натуральных чисел.

2°. Доказать, что всякое нечетное число, не являющееся простым, может быть, вообще говоря, представлено двумя способами в виде разности двух квадратов натуральных чисел. В каких случаях мы будем иметь исключение? Приложить к числам 25, 125, 225.

3°. Каково необходимое и достаточное условие, при котором четное число может быть представлено, по крайней мере, одним способом, в виде разности двух квадратов натуральных чисел?

Приложение. Представить всеми возможными способами каждое из чисел 672 и 1344 в виде разности квадратов двух натуральных чисел.

4°. Сколькими способами можно представить число $N = 2^m p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ ($p_1, p_2, \dots, p_n$ — простые числа, отличные от 2; $m, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ — целые неотрицательные числа) в виде разности квадратов двух натуральных чисел?

§ 2. Преобразование алгебраических выражений

Будем называть формой однородный многочлен относительно входящих в него букв (например, $2x+3y$, $x^2+5xy+y^2$, x^3-3x^2y — формы, x^2+y — не форма). Формы первой степени ($2x+3y$, $x-5y, \dots$) будем называть линейными, формы второй степени ($x^2+2xy+3y^2, \dots$) квадратичными и т. д.

1. Разложить в произведение линейных форм относительно x и y следующие формы:

1) x^3+y^3;
2) x^3-y^3;
3) x^4-y^4;
4) x^4+y^4;
5) $x^4+x^2y^2+y^4$.

Упростить следующие выражения:

2. $$\frac{1}{8}\,\frac{x^2+1}{x^2-1}\,\frac{2x(x^2+1)-2x(x^2-1)}{(x^2+1)^2}-\frac{1}{4}\,\frac{2x}{1+x^4}.$$

3. $$\frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{(4x+1-\sqrt{5})[2x^2+(1+\sqrt{5})x+2]-(4x+1+\sqrt{5})[2x^2+(1-\sqrt{5})x+2]}{[2x^2+(1-\sqrt{5})x+2][2x^2+(1+\sqrt{5})x+2]}$$

4. $x-\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}-\frac{x^2}{2\sqrt{x^2-1}}+\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}$.

5. $\frac{2}{\sqrt{5}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1+2x}{\sqrt{5}}\right)^2}}+\frac{1+x}{3+x+2\sqrt{1-x-x^2}}\times$

$\times\frac{\left(1-\frac{1+2x}{\sqrt{1-x-x^2}}\right)(1+x)-\left(3+x+2\sqrt{1-x-x^2}\right)}{(1+x)^2}$.

6. $-\frac{5+4x}{6}\sqrt{1+2x-x^2}-\frac{19+5x+2x^2}{12}\frac{2-2x}{\sqrt{1+2x-x^2}}+$

$+\frac{4}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x}{\sqrt{2}}\right)^2}}$.

7. $\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x-1}{\sqrt{3}}\right)^2}}-\frac{\sqrt{2}}{3}\frac{1}{1+\left[\frac{\sqrt{2+2x-x^2}}{(1-x)\sqrt{2}}\right]^2}\times$

$\times\frac{\frac{2-2x}{2\sqrt{2+2x-x^2}}(1-x)\sqrt{2}+\sqrt{2}\sqrt{2+2x-x^2}}{2(1-x)^2}-$

$-\frac{1}{\sqrt{6}}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}}\times$

$\times\frac{\frac{2-2x}{2\sqrt{2+2x-x^2}}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}\right)^2}+$

$+\frac{\frac{2-2x}{2\sqrt{2+2x-x^2}}\left(\sqrt{6}+\sqrt{2+2x-x^2}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2+2x-x^2}\right)^2}$.

8. $$\left[\frac{1}{4}\,\frac{z-1}{z+1}\,\frac{z-1-(z+1)}{(z-1)^2}-\frac{1}{2(1+z^2)}\right]\times$$
$$\times\frac{\frac{1}{4}(1+x^4)^{-\frac{3}{4}}\cdot 4x^4-\sqrt[4]{1+x^4}}{x^2},$$

где $z=\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}$.

9. Исключить иррациональность в знаменателе:

1) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$;

2) $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}}$;

3) $\dfrac{7}{1-\sqrt[4]{2}+\sqrt{2}}$.

10. При каком условии x^3+px+q делится на x^2+mx-1.

11. При каком условии x^4+px^2+q делится на x^2+mx+1.

12. Выполнить деление (с остатком):

1) $4x^3+x^2$ на $x+1+i$.

2) x^3-x^2-x на $x-1+2i$.

13. Разложить следующие выражения на линейные относительно x множители:

1) $x^3-6x^2+11x-6$;

2) x^4+4;

3) $x^4+4x^3+4x^2+1$;

4) x^4-10x^2+1.

14. Доказать, что один из корней уравнения
$$36x^3-12x^2-5x+1=0$$
равен сумме двух других и решить это уравнение.

15. Определить соотношение между p и q, при котором корни уравнения $x^3+px+q=0$ связаны соотношением $x_3=\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}$.

§ 3. Уравнения. Неравенства. Функции и их графики

1. Доказать теорему. Если $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, то система
$$a_1x+b_1y=c_1,\quad a_2x+b_2y=c_2$$

имеет, и притом только одно, решение. Найти это решение.

2. Доказать теорему. Если $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, но хотя бы одно из чисел $c_1b_2 - c_2b_1$ или $a_1c_2 - a_2c_1$ не равно нулю, то система

$$a_1x + b_1y = c_1, \quad a_2x + b_2y = c_2$$

несовместна.

3. Доказать, что если $a_1b_2 - a_2b_1 = c_1b_2 - c_2b_1 = a_1c_2 - a_2c_1 = 0$, но хотя бы одно из чисел a_1, b_1, a_2, b_2 не равно нулю, то система

$$a_1x + b_1y = c_1,$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

неопределенная, т. е. имеет бесконечное множество решений. Найти все эти решения.

4. Доказать, что если $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$, то существует и притом только одна совокупность чисел A, B, C таких, что имеет место тождество:

$$\frac{px^2 + qx + r}{(x-a)(x-b)(x-c)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \frac{C}{x-c}$$

(требуется выразить A, B, C через a, b, c, p, q и r).

5. Доказать, что если трехчлены x^2+px+q и x^2+rx+s с действительными коэффициентами имеют попарно различные мнимые корни, то существует, и притом только одна, совокупность действительных чисел A, B, C, D таких, что

$$\frac{x^3 + bx^2 + cx + d}{(x^2 + px + q)(x^2 + rx + s)} = \frac{Ax + B}{x^2 + px + q} + \frac{Cx + D}{x^2 + rx + s}$$

(требуется выразить A, B, C, D через p, q, r, s, b, c, d; b, c, d — также действительны).

6. Подобрать числа A, B, C, D так, чтобы имело место тождество

$$(Ax + B)(x^2 - x\sqrt{2} + 1) + (Cx + D)(x^2 + x\sqrt{2} + 1) \equiv 1.$$

Доказать, что такая совокупность чисел A, B, C, D единственна.

7. Доказать теорему. Если a, b, c, d — числа действительные, x — мнимое и

$$ax + b = cx + d,$$

то $a = c$ и $b = d$. Верна ли эта теорема, если среди чисел a, b, c, d есть мнимые?

8. Доказать, что дробь

$$\frac{2x - 1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}$$

может быть представлена в виде:

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+x+1} + \\ + \frac{Dx+H}{(x^2+x+1)^2} \qquad (1)$$

(требуется найти A, B, C, E, F, G, H). Доказать, что система чисел, при которых данная дробь представима в виде (1) — единственна.

9. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения

$$x^2 + px + q = 0.$$

Выразить через p, q и x следующие суммы:

1) $\dfrac{1}{x - x_1} + \dfrac{1}{x - x_2}$;

2) $\dfrac{x_1}{x - x_1} + \dfrac{x_2}{x - x_2}$;

3) $\dfrac{1}{(x - x_1)^2} + \dfrac{1}{(x - x_2)^2}$.

10. Доказать, что если p, q, r действительные числа и трехчлены $x^2 + px + q$ и $x^2 + px + r$ имеют действительные корни, то и трехчлен $x^2 + px + s$, где s заключено между q и r, также имеют действительные корни.

11. Дано, что сумма двух корней уравнения

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

равна сумме двух других его корней. Доказать, что тогда подстановкой $x = y + \alpha$ это уравнение при надлежащем выборе α приводится к биквадратному.

12. Составить формулу для решения биквадратного уравнения $x^4+px^2+q=0$ (p и q — действительны), удобную для случая

$$\frac{p^2}{4}-q<0.$$

13. Решить уравнения:

1) $x^2-(2+i)x+(-1+7i)=0$;
2) $(2+i)x^2-(5-i)x+2-2i=0$;
3) $x^4+6x^3+9x^2+100=0$;
4) $x^4-30x^2+289=0$.

14. Исследовать расположение действительного числа λ относительно корней x_1 и x_2 уравнения

$$ax^2+bx+c=0$$

(предполагается, что x_1 и x_2 действительны и различны, a, b, c — действительны).

15. Пусть уравнение

$$x^3+px+q=0 \quad (p \text{ и } q \text{ — действительны})$$

имеет действительные и попарно различные корни x_1, x_2, x_3. Исследовать расположение действительного числа λ относительно корней x_1, x_2, x_3.

16. При каком условии оба корня уравнения $x^2+px+q=0$ (p и q — действительны) будут действительны и по абсолютной величине меньше 1.

17. При каком условии модули обоих корней уравнения

$$x^2+px+q=0$$

(p и q — действительны, но корни могут быть и мнимыми) будут меньше 1.

18. Доказать, что в области $x\leqslant-\frac{b}{2a}$ функция

$$y=ax^2+bx+c$$

(a, b, c — действительны и $a>0$) — убывающая, а в области $x>-\frac{b}{2a}$ возрастающая, т. е.:

1) если $x_1<x_2\leqslant-\frac{b}{2a}$, то

$$ax_1^2+bx_1+c>ax_2^2+bx_2+c;$$

2) если $-\frac{b}{2a} \leqslant x_1 < x_2$, то

$$ax_1^2 + bx_1 + c < ax_2^2 + bx_2 + c.$$

19. Доказать, что при $a > 0$ функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ выпукла вниз, т. е.

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

а при $a < 0$ — вверх, т. е. имеет место обратное неравенство. Дать геометрическую интерпретацию результату.

20. Доказать, что функция

$$y = \lg_a x$$

при $a > 1$ выпукла вверх, т. е.

$$\lg_a \frac{x_1 + x_2}{2} > \frac{\lg_a x_1 + \lg_a x_2}{2}.$$

Какой теореме арифметики соответствует это неравенство? Каков его геометрический смысл?

21. Исследовать на возрастание и убывание, на выпуклость вверх и вниз функции:

1) $f(x) = x^3 + 3px + q, \quad p \neq 0,$

2) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$

(во втором случае сделать предварительно замену $x = z + \alpha$ и α выбрать так, чтобы выражение $ax^3 + bx^2 + cx + d$ перешло в выражение, не содержащее z^2).

22. Решить неравенства:

1) $x^2 - 5x + 6 > 0;$

2) $-x^2 - x + 2 < 0;$

3) $\frac{x(x+2)}{(x-1)(x+3)} < 0;$

4) $x^4 > 1;$

5) $x^6 < 64;$

6) $\frac{1}{x^3} > 27;$

7) $|x^2 - 2x - 2| < 1;$

8) $\left|\frac{x+2}{x-1}\right| > 3.$

23. При построении графика параболы $y = x^2$ мы рисуем эту кривую выпуклостью вниз. Обосновать это аналитически, т. е. доказать, что для любых двух значений x_1 и x_2 хорда M_1M_2, соединяющая точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, будет выше стягивающей ее дуги $\left(y_1 = x_1^2,\ y_2 = x_2^2\right)$.

24. Доказать выпуклость вниз дуги гиперболы $y = \frac{1}{x}$ при $x > 0$ в соответствии с определением выпуклости вниз, данном в предыдущей задаче.

25. Доказать, что график функции

$$y = x^2 + \frac{1}{x}$$

при $x > 0$ будет иметь выпуклость вниз, т. е. любая хорда этой линии будет выше стягивающей ее дуги.

26. Доказать, что при $x > 0$

$$x^2 + \frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

27. Построить графики функций:

1) $y = 2x$;
2) $y = -3x$;
3) $y = -x + 2$;
4) $y = 2x + 5$;
5) $y = \frac{2}{x}$;
6) $y = -\frac{1}{x}$;
7) $y = 2x^2$;
8) $y = -x^2$;
9) $y = 2x - x^2$;
10) $y = 2x + x^2$;
11) $y = (x - 3)^2 + 2$;
12) $y = x^2 + x + 1$;
13) $y = 1 - x^2$;
14) $y = \frac{2x + 3}{x + 1}$;

15) $y=\frac{1}{1-x^2}$;

16) $y=\frac{x}{1-x^2}$;

17) $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$.

§ 4. Прогрессии. Суммирование

1. Найти сумму рядов:

   а) $\cos x+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\cos 3x+\ldots+$
   $+\frac{1}{2^{n-1}}\cos nx+\ldots$;

   б) $\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{4}\sin 3x+\ldots+$
   $+\frac{1}{2^{n-1}}\sin nx+\ldots$

2. Верны ли формулы для суммы n членов арифметической и геометрической прогрессий, если допускать мнимые значения для разности и для знаменателя прогрессии?

3. При каком условии существует сумма бесконечной геометрической прогрессии

$$a_1+a_1 q+a_1 q^2+\ldots+a_1 q^n+\ldots,$$

   если для q допускать и комплексные значения.

4. Вычислить сумму ряда

$$1+2q+3q^2+\ldots+(n+1)q^n+\ldots,$$

   где q комплексное число по модулю меньшее 1.

5. Доказать, что члены $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ арифметической прогрессии равны значениям линейной функции $y=kx+b$ для целых x; найти эту функцию.

6. Доказать, что члены $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ геометрической прогрессии равны значениям показательной функции $y=a\cdot b^x$ для целых положительных значений x; найти эту функцию.

7. Последовательность

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

такова, что начиная с a_4 имеет место соотношение:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}}{3}.$$

Найти эту последовательность, считая, что a_1, a_2, a_3 заданы.

8. Доказать, что последовательность, общий член которой

$$a_n = \sin nx$$

удовлетворяет соотношению вида

$$a_{n+1} = pa_n - a_{n-1},$$

где p — функция только от x; найти эту функцию. Исходя из последнего равенства, вычислить

$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx.$$

9. Вычислить следующие суммы:

1) $\lg\frac{1\cdot 3}{2^2} + \lg\frac{2\cdot 4}{3^2} + \lg\frac{3\cdot 5}{4^2} + \ldots + \lg\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$;

2) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} + \frac{1}{8}\operatorname{tg}\frac{x}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}$;

3) $$\frac{\sin\frac{1}{1\cdot 2}}{\cos\frac{1}{1}\cdot\cos\frac{1}{2}} + \frac{\sin\frac{1}{2\cdot 3}}{\cos\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{1}{3}} + \frac{\sin\frac{1}{3\cdot 4}}{\cos\frac{1}{3}\cos\frac{1}{4}} + \ldots + \frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}};$$

4) $$\frac{1}{1\sqrt{2}+2\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{4}+4\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}+(n+1)\sqrt{n}}.$$

§ 5. Логарифмы

1. При каких значениях a и b выражение $\lg_a b$ определено?
2. Прологарифмировать $\lg(a^2 b^4)$.
3. Найти область определения функций (т. е. все значения x, при которых следующие выражения являются действительными числами):

   1) $\lg[x(1-x^3)]$;

   2) $\sqrt{\lg_{\frac{1}{2}} \frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x+4)}}$;

   3) $\lg(x^2-1)$;

   4) $\lg(x+1)+\lg(x-1)$;

   5) $\lg(1-x^2)$;

   6) $\lg(1-x)+\lg(1+x)$;

   7) $\sqrt{\lg_{10} \lg_{10}^2 x}$.

4. Решить неравенства:

   1) $2^x+2^{2x}>3$;

   2) $\lg_{x+1}(x+3)>1$;

   3) $\lg_{x^2+1} x^2>2$.

5. Решить уравнение

$$\lg_{\frac{1}{2}} \frac{(x+2)(x+3)}{(x-1)(x+4)}=1.$$

6. Доказать, что если $a>1$, то

$$\frac{a^{x_1}+a^{x_2}}{2}>a^{\frac{x_1+x_2}{2}}.$$

Каков геометрический смысл этого неравенства?

7. Построить график функции

$$y=\lg\lg x$$

(логарифмы десятичные).

8. Построить график функции

$$y=\lg_{\frac{1}{4}} \frac{x}{1+x^2}$$

$\left(\text{предварительно построить график функции } y=\frac{x}{1+x^2}\right)$.

§ 6. Тригонометрические уравнения, неравенства и тождества

1. Доказать, что необходимым и достаточным условием равенства $\sin x = \sin y$ является или равенство $x = y + 2k\pi$ или $x = (2k+1)\pi - y$, где k — целое число.
2. Доказать, что необходимым и достаточным условием равенства $\cos x = \cos y$ является одно из равенств $x = 2k\pi \pm y$, где k — число целое.
3. Доказать, что необходимым (но недостаточным!) условием равенства $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$ является равенство $x = y + k\pi$, где k — целое число. При каком дополнительном условии это равенство $x = y + k\pi$ будет и достаточным для выполнения равенства $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$.
4. Доказать, что все решения уравнения
$$\sin^2 x = a, \quad \text{где} \quad 0 < a < 1,$$
могут быть записаны в виде:
$$x = k\pi \pm \arcsin \sqrt{a},$$
где k — любое целое число.
5. Доказать, что все решения уравнения
$$\cos^2 x = a, \quad \text{где} \quad 0 < a < 1,$$
могут быть записаны в виде:
$$x = k\pi \pm \arccos \sqrt{a},$$
где k — любое целое число.
6. Доказать, что все решения уравнения
$$\operatorname{tg}^2 x = a, \quad \text{где} \quad a \geqslant 0,$$
могут быть записаны в виде:
$$x = k\pi \pm \operatorname{arc\,tg} \sqrt{a},$$
где k — любое целое число.
7. Доказать, что все решения уравнения
$$\operatorname{ctg}^2 x = a, \quad \text{где} \ a \geqslant 0,$$
могут быть записаны в виде:
$$x = k\pi \pm \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{a},$$
где k — любое целое число.
8. Доказать, что при всех значениях x
$$-1 \leqslant \sin^3 x + \cos^3 x \leqslant 1.$$

9. Будем говорить, что функция $y = f(x)$ на сегменте $[a, b]$ имеет выпуклость вниз, если

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

для двух любых значений x_1 и x_2 ($x_1 \neq x_2$) из этого сегмента. В случае

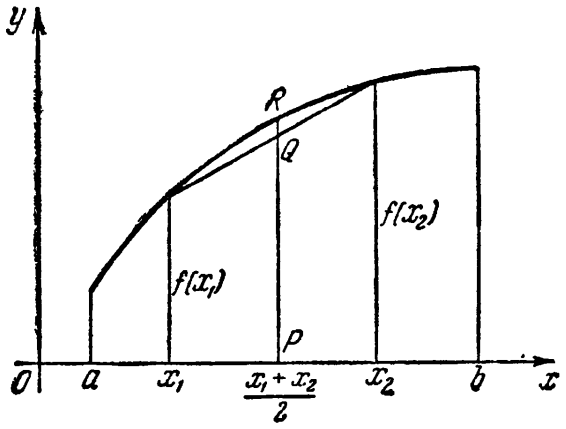
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

будем говорить, что функция $y=f(x)$ на сегменте $[a, b]$ имеет выпуклость вверх. Геометрический смысл этих неравенств усматривается из чертежей 4 и 5. Доказать, что функция $y = \sin x$ на сегменте $[0, \pi]$ выпукла вверх, а на сегменте $[\pi, 2\pi]$ — выпукла вниз. Доказать, что функция $y = \operatorname{tg} x$ на полуинтервале $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ выпукла вверх, а на полуинтервале $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ — вниз. Доказать, что функция $y = \operatorname{cosec} x$ в интервале $(0, \pi)$ выпукла вниз, а в интервале $(\pi, 2\pi)$ — вверх. Доказать, что функция $y=\operatorname{ctg} x$ в полуинтервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ выпукла вниз, а в полуинтервале $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ — вверх.

$$PQ = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

$$PR = f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right),$$

$$PQ < PR.$$



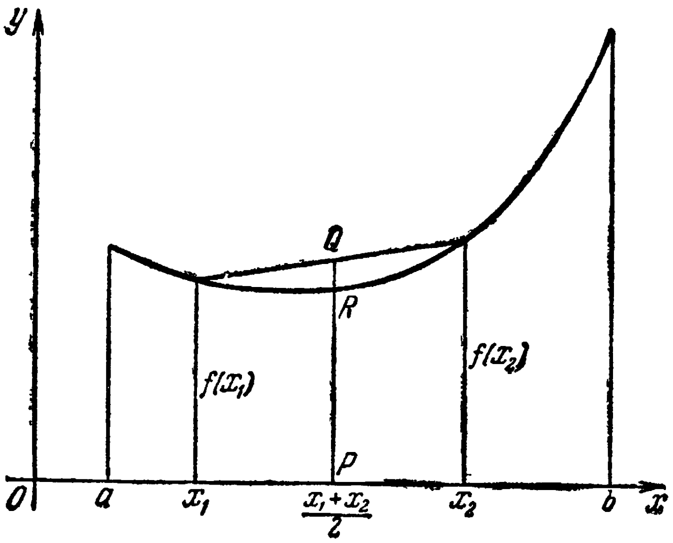
Черт. 4

10. При каких ограничениях имеет место формула

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}.$$

11. Какие из функций $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{arc\,ctg} x$ возрастающие, а какие убывающие? Исследовать их на выпуклость вверх и вниз. Построить графики этих функций.

12. Будем говорить, что функция $y = f(x)$ возрастает в точке $x = a$, если существует такое число $h > 0$, что при всех x, удовлетворяющих неравенствам $a - h < x < a$, мы будем иметь $f(x) < f(a)$, а при всех x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < a + h$, мы будем иметь $f(a) < f(x)$.



$$PQ = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

$$PR = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right),$$

$$PQ > PR.$$

Черт. 5

Верны ли следующие положения:

1) $\operatorname{tg} x$ возрастает в каждой точке своей области определения; 2) $\operatorname{ctg} x$ убывает в каждой точке своей области определения.

13. Верно ли положение: $\operatorname{tg} x$ возрастает в любом интервале (a, b) (т. е., если x_1 и x_2 — две точки этого интервала, в которых $\operatorname{tg} x$ определен, то следует ли из неравенства $x_1 < x_2$ неравенство $\operatorname{tg} x_1 < \operatorname{tg} x_2$?).

14. В каких точках функция $y = \sin x$ не возрастает и не убывает?

15. Доказать, что если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то

$$\sqrt{\operatorname{tg} x + \sin x} + \sqrt{\operatorname{tg} x - \sin x} = 2\sqrt{\operatorname{tg} x} \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right).$$

16. Доказать тождества:

$$\sin 3x + \cos x = (\sin x + \cos x)(\sin 2x + \cos 2x);$$
$$\cos 3x + \sin x = (\cos x - \sin x)(\cos 2x + \sin 2x);$$

$$\sin 3x - \cos x = (\cos x - \sin x)(\sin 2x - \cos 2x);$$
$$\cos 3x - \sin x = (\cos x + \sin x)(\cos 2x - \sin 2x).$$

17. Доказать, что:

$$1)\ \cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}; \qquad 2)\ \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1}{4}.$$

18. Доказать, что

$$\frac{\cos 3x}{\cos x} - \frac{\cos 6x}{\cos 2x} = 2(\cos 2x - \cos 4x).$$

19. Решить уравнения:

1) $\operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1-\cos|x|}{1-\sin|x|}$;

2) $|\sin(x^2)| = 1$.

20. Доказать методом полной индукции неравенство

$$\left|\frac{\sin nx}{x}\right| \leqslant n,$$

причем $x \neq k\pi$, где k — любое целое число.

21. Доказать, что при всех x:

$$-\sqrt{3} \leqslant \frac{3\sin x}{2+\cos x} \leqslant \sqrt{3}.$$

22. Построить график функции

$$y = 2\cos^4 x - 3\cos^2 x + 1.$$

§ 7. Трансцендентные уравнения и неравенства

Решить следующие уравнения:

1. $\lg_a(\sin x + \cos x) = 2$,

где a — положительное число не равное 1, причем $a^2 \leqslant \sqrt{2}$.

2. $\arcsin(\lg_{10} x) = 0$.
3. $\lg_{10}(\arcsin x) = 0$.
4. $\arccos(\pi \lg_3 \operatorname{tg} x) = 0$.
5. $\lg_{\sin x}\dfrac{4}{3} = -2$.

6. $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^{\sin x}+\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^{\sin x}=\frac{10}{3}$.

7. $\lg_{\sin x} 2 \cdot \lg_{\sin^2 x} 3 = 1$.

8. $\sin(5 \operatorname{arc tg} 3x) = 1$.

9. $\sin(\pi \lg x) + \cos(\pi \lg x) = 1$.

10. $\operatorname{tg}(3 \operatorname{arc tg} x) = \operatorname{ctg}(3 \operatorname{arc ctg} x)$.

11. $\sqrt[3]{\lg \operatorname{tg} x + 1} + \sqrt[3]{1 - \lg \operatorname{tg} x = 2}$.

12. $\lg_2 x + \lg_3 x + \lg_4 x = 1$.

13. $\arcsin\left(x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

14. $\lg_{10}(\operatorname{arc tg} x) + \lg_{10}(\operatorname{arc ctg} x) = a$.

Исследовать решения в зависимости от значений:

15. $3x - \operatorname{ctg}\left(\operatorname{arc tg}\frac{1}{x} - \operatorname{arc tg}\frac{1}{x+1}\right) = 0$.

16. $4 \operatorname{arc tg}(x^2 - 3x + 3) = \pi$.

17. $\arcsin[\lg(x^2)] + \arcsin \lg x = \frac{\pi}{3}$.

18. $\operatorname{arc tg}(2+\cos x) - \operatorname{arc tg}\left(2\cos^2\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.

19. $(\cos x)^{\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}} = 1$.

20. $\operatorname{arc tg}(2 + \sin x) - \operatorname{arc tg}(1 + \sin x) = \frac{\pi}{4}$.

21. $\arcsin 2^{x+2} + \arcsin(4\sqrt{3} \cdot 2^x) = \frac{\pi}{2}$.

22. $\operatorname{arc tg} 3^x - \operatorname{arc tg} 3^{-x} = \frac{\pi}{6}$.

23. $\sin(\pi \operatorname{arc tg} x) = \cos(\pi \operatorname{arc tg} x)$.

24. $\sin[\pi(\operatorname{arc tg} x)^2] = \frac{1}{2}$.

Решить следующие неравенства:

25. $\lg_a^x > 6 \lg_x a - 1$, где $0 < a < 1$.

26. $\frac{\lg_a(35 - x^3)}{\lg_a(5 - x)} > 3$, где $a > 1$.

27. $\dfrac{1}{2^x-1} > \dfrac{1}{1-2^{x-1}}$.

28. $\dfrac{1}{\lg_{10} x} + \dfrac{1}{1-\lg_{10} x} > 1$.

29. $2\lg_x a + \lg_{ax} a + 3\lg_{a^2x} a > 0$, где $a > 1$.

30. $\lg_x (x+2) > 2$.

31. $\lg_8 (x^2-4x+3) < 1$.

32.** $\lg_{x+p} 2 < \lg_x 4$, $0 < p < \dfrac{1}{4}$.

33. $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} > \dfrac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 2}$.

34. $\sin \dfrac{\pi}{x} > 0$.

35. $\operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{4(x+1)} > 1$.

36. $\sin (2\pi \cos x) > 0$.

Глава III

АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ И НАИБОЛЕЕ РАСПРОСТРАНЕННЫХ ОШИБОК

Настоящая глава ставит своей целью помочь устранению все еще повторяющихся типичных ошибок, погрешностей и недочетов в знаниях по математике окончивших среднюю школу и готовящихся к конкурсным экзаменам в высшие учебные заведения (в первую очередь, на механико-математические факультеты университетов и педагогических институтов). Для повышения общей математической культуры лиц, интересующихся математикой и желающих поступить в высшие учебные заведения, в которых требуются значительно более глубокие знания по математике, чем для поступающих, скажем, на гуманитарные факультеты, весьма желательны самостоятельные дополнительные занятия по математике. Необходимо ознакомиться с разнообразными по постановке вопроса задачами и методами их решения. Эти дополнительные занятия по математике можно построить например, по такому плану:

1°. Прочитать настоящую главу.

2°. Прочитать решения всех задач, помещенных в главе IV, §§ 1—6, а затем решить все задачи из этой главы, к которым не дано решений.

3°. Решить задачи из главы II.

4°. Проконтролировать себя решением вариантов из главы I; полезно измерить время, которое будет затрачено на решение всех задач одного варианта; нормой здесь будет являться срок 4 час. (перерыв в решении задач делать не рекомендуется, чтобы приблизить обстановку самоконтроля к условиям, в которых проводятся конкурсные экзамены). Этот самоконтроль можно периодически повторять.

5°. Параллельно с выработкой методики решения задач следует заниматься теорией. Хорошими дополнительными теоретическими курсами, в дополнение к учебникам средней школы, можно рекомендовать следующие:

а) Новоселов С. И., Специальный курс элементарной алгебры, изд. Советская наука, 1958.

б) Новоселов С. И., Специальный курс тригонометрии, изд. Советская наука, 1957.

в) Перепелкин Д. И., Курс элементарной геометрии, т. I — геометрия на плоскости, Гостехиздат, 1948, т. II — геометрия в пространстве, Гостехиздат, 1949.

Замечание. Мы рекомендуем после просмотра анализа ошибок и анализа решений прочитать решения задач из главы IV; наряду с самостоятельным решением задач совершенно необходимо ознакомиться с готовыми решениями, так как они являются образцами задач самых разнообразных по постановке вопроса и методам их решения; прежде, чем самому приступать к решению задач нужно познакомиться с методами и приемами их решения. Конечно, ценою больших усилий многие из указанных задач могут быть решены самостоятельно, но почти наверное эти решения будут, так сказать, «кустарны» и не будет достигнута основная цель — знакомство с методикой.

Чтение и разбор готовых решений на систематически подобранных образцах, является одним из важнейших элементов в выработке глубоких навыков в решении задач. Таким образом, порядок работы над главой IV рекомендуется следующий: после прочтения условия задачи и небольшого срока, в течение которого следует продумать это условие и возможные пути решения, следует обратиться к готовому решению, прочитать его, а затем попытаться на память повторить решение для себя.

Переходя к анализу ошибок, я начну с наиболее общих, а вместе с тем и с наиболее принципиальных замечаний, относящихся к недочетам в решениях задач.

§ 1. Вопросы исследования

Основным дефектом поступавших в высшие учебные заведения является недостаточная тщательность в проведении исследований решения задач. Этот дефект особенно ярко был представлен при решении задач по геометрии и по геометрии с тригонометрией; в меньшей степени при решении задач по алгебре. В школе алгебраические задачи решаются часто с исследованием, по геометрии же исследования проводятся реже и уже совсем редко они проводятся при решении задач по тригонометрии и по геометрии с приложением тригонометрии. При чтении готовых решений задач, помещенных в главе IV, §§ 3—6, читатель познакомится как следует исследовать решения задач в геометрии, в тригонометрии и как следует ставить вопросы таких исследований. Вопросы исследования в геометрии и в геометрии с приложением тригонометрии бывают очень трудны из-за обилия параметров, из-за обилия рассмотрения различных частных случаев, поэтому в этих случаях при постановке задач на исследование мы часто фиксируем часть параметров, чтобы исследование можно было довести до исчерпывающего результата.

§ 2. О методах решения задач по геометрии

Другим общим дефектом поступавших в вузы является неумение проводить рассуждения в геометрии так, чтобы они не зависели от конкретного чертежа, а потому были вполне общими. Но даже, и пользуясь конкретным чертежом, поступающие в вузы проводят часто рассуждения не достаточно полно и ссылаются на геометрическую «очевидность» там, где соответствующие положения должны быть доказаны. Так, например, хотя и «очевидно», что противоположные ребра правильного тетраэдра взаимно-перпендикулярны, это должно быть доказано, хотя и «очевидно», что существует кратчайшее расстояние между двумя скрещивающимися прямыми в пространстве, — это должно быть доказано и т. д.

Для того чтобы научиться проводить рассуждения в геометрии без чертежа, нужно научиться строить рассуждения, опираясь лишь на аксиомы геометрии и на доказанные теоремы. Следует отметить, что овладеть подобным методом в геометрии очень трудно и знакомство с последующим материалом по этому вопросу можно рекомендовать лишь тем, кто готовится поступать на механико-математические и физические факультеты университетов и педагогических институтов.

Трудность проводить рассуждения в геометрии в общем виде, кроется в специфичности этой дисциплины. В то время, как в алгебре мы имеем хорошо развитый алгорифм действий, в геометрии правильно построенные решения задач слагаются из ссылок на многочисленные положения — теоремы (которые предварительно сами должны быть установлены в общем виде).

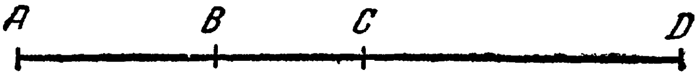
Таким образом, желательно решения задач в геометрии и рассуждения строить, опираясь лишь на аксиомы и факты, доказанные в общем виде, т. е. строить рассуждения на грани оснований геометрии.

Для того чтобы научиться в геометрии строить рассуждения подобным образом, нужно уметь расчленить данную задачу на части и вести рассуждения так, чтобы каждый раз выделять какой-нибудь сравнительно простой геометрический факт, для установления которого не требуется сложных рассуждений и построений; следует производить как бы «анатомирование» фигуры с помощью набора готовых теорем, с последующим синтезом результатов.

Приводимые ниже примеры в подавляющем большинстве, помимо иллюстрации этой мысли, познакомят читателя с теми понятиями, которые необходимо знать для чтения решений задач главы IV, §§ 3—6 и которые являются хорошей основой для самостоятельного решения многих задач по геометрии.

Одним из мощных средств достижения общности рассуждений в геометрии является приписывание знаков длинам отрезков и величинам углов. При этом общность достигается в несколько ином плане, а именно: задачи по геометрии приобретают аналитический характер и появляется возможность использования в полной мере аппарата алгебры.

При решении ряда задач по геометрии весьма полезным является понятие длины ориентированного (т. е. направленного) отрезка и величины ориентированного угла. Отрезки, лежащие на прямой l, могут иметь или одинаковое (как например, AB и CD на черт. 6) или противоположное (как например, AB и DC) направления. Условимся длине отрезка AB приписывать знак, считая ее положительной для отрезков одного (безразлично какого) направления и отрицательной для отрезков противоположного направления. Длину отрезка AB, которой приписан знак, будем обозначать так: $\overline{AB}$. Таким образом,



Черт. 6

если, например, на черт. 6, $\overline{AB} > 0$, то $\overline{CD} > 0$, $\overline{DC} < 0$, $\overline{BA} < 0$, $\overline{BC} > 0$, $\overline{CB} < 0$ и т. д. Но, если на том же чертеже считать $\overline{AB} < 0$, то знаки всех предыдущих неравенств надо будет изменить на противоположные.

Отметим, что соглашение о выборе направления, для которого длины считаются положительными, становится несущественным, если идет речь, например, о произведении $(\overline{AB} \cdot \overline{CD})$ или отношении двух таких длин $\left(\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}\right)$, или о равенстве, связывающем такие длины $\left(\text{например, } \overline{AB} = \dfrac{1}{\overline{CD}}\right)$.

Перейдем к углам. Будем называть углом (α, β) от прямой α до прямой β угол, на который надо повернуть прямую α, чтобы она или совпала или стала параллельной прямой β. Этот поворот можно совершать в одном из двух противоположных направлений; условимся считать для некоторого направления отсчета, что $(\alpha, \beta) > 0$, если поворот совершен в каком-либо из двух возможных направлений. Тогда величины углов, отсчитанных в противоположном направлении, будем считать отрицательными. Отметим еще, что существует бесконечное множество поворотов, совмещающих прямую α с прямой β; на черт. 7 указано несколько таких поворотов (именно 3 поворота); если (α, β) величина угла, соответствующая одному такому повороту, то величины углов, соответствующих всем таким поворотам, будут заключены в формуле $(\alpha, \beta)+k\pi$, где k — любое целое число. Пусть (α, β) одно из значений угла от прямой α до прямой β, а (γ, δ) одно из значений угла от прямой γ до прямой δ; если $(\alpha, \beta)-(\gamma, \delta)=k\pi$, где k — число целое, т. е.

$$(\alpha, \beta)=(\gamma, \delta)+k\pi,$$

то мы будем писать

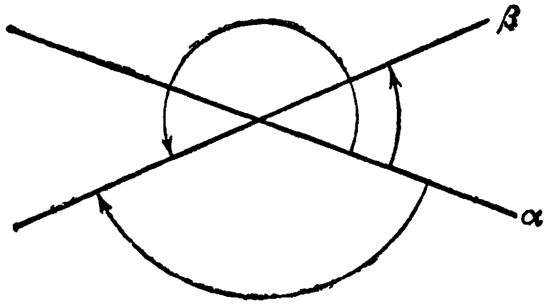
$$(\alpha, \beta)=(\gamma, \delta)(\mathrm{mod}\cdot\pi)$$

(читается: «угол (α, β) равен углу (γ, δ) по модулю π»). Приписывая длинам отрезков и величинам углов знаки, мы добиваемся в геометрии, как уже было указано выше, следующего:

1) целый ряд определений получают естественную форму;

2) целый ряд теорем получают естественное обобщение;

3) в геометрию вводится аналитический метод, который, с одной стороны, не лишает решений и доказательств геометричности, с другой стороны, позволяет решать геометрические задачи и доказывать геометрические теоремы общим рассуждением, не опирающимся на конкретный чертеж.



Черт. 7

Основными соотношениями являются теоремы Шаля для отрезков и углов:

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}, \tag{1}$$

$$(\alpha, \beta)+(\beta, \gamma)=(\alpha, \gamma)\ (\mathrm{mod}\,\pi). \tag{2}$$

Для доказательства равенства (1) читателю надо рассмотреть 6 взаимных расположений на прямой точек A, B и C друг относительно друга. Соотношение (2) доказывается так: рассмотрим три прямые α, β и γ, проходящие через одну точку; повороты всегда можно производить так, что поворот от α до β в каком-то направлении, а затем поворот от β до γ будет совершен в том же направлении, и в том же направлении можно совершить поворот от α до γ, притом так, что $(\alpha, \beta)+$

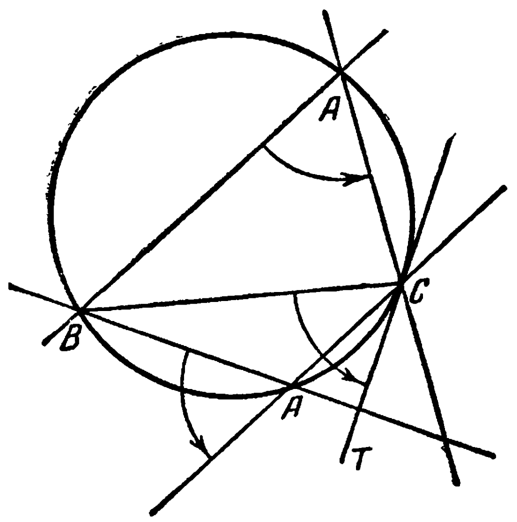
$+(\beta, \gamma)=(\alpha, \gamma)$. Так как каждый угол (α, β), (β, γ), (α, γ) определяется «с точностью до $k\pi$», то формула (2) доказана.

Рассмотрим ряд примеров.

Пример 1. Пусть A' — проекция вершины A треугольника ABC на сторону BC; тогда теорему о квадрате стороны треугольника можно, не различая случаев, когда угол C — острый, прямой или тупой, — записать так:

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2\overline{CB}\cdot\overline{CA'}.$$

Доказательство предоставляется читателю.



Черт. 8

Пример 2. Будем обозначать через (AB, AC) ориентированный угол от прямой AB до прямой AC. Пусть точки B и C — фиксированы. Тогда геометрическое место точек, для которых

$$(AB, AC) = \alpha \pmod{\pi}, \quad (1)$$

где α — данный угол, есть окружность, проходящая через точки B и C и касающаяся в точке C прямой CT такой, что $(BC, CT) = \alpha \pmod{\pi}$ (черт. 8). Отметим, что соотношение (1) имеет место для всех точек указанной окружности (за исключением точек B и C), т. е. как для всех тех, которые расположены по одну сторону от прямой BC, так и для всех тех, которые расположены по другую сторону от BC.

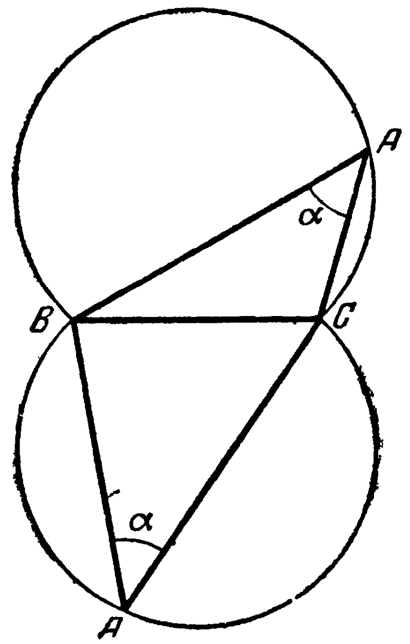
Полезно сравнить это геометрическое место с геометрическим местом точек, из которых данный отрезок BC виден под данным углом α (острым или тупым); это геометрическое место состоит из двух равных дуг двух окружностей с концами B и C, симметричных относительно прямой BC (черт. 9). Заметим еще, что если для окружности (Γ), о которой мы говорили выше $(AB, AC) = \alpha \pmod{\pi}$, то для окружности (Γ'), симметричной (Γ) относительно BC мы будем иметь $(AB, AC) = -\alpha \pmod{\pi}$ (черт. 10).

Пример 3. Ангармоническим отношением $(ABCD)$ четырех точек, лежащих на одной прямой, называется число:

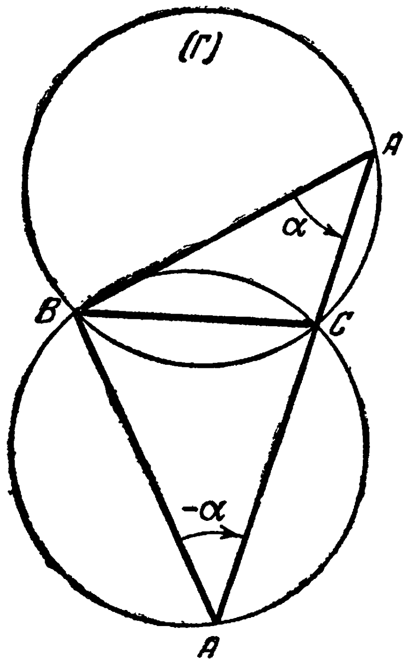
$$(ABCD) = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}.$$

Говорят, что A, B, C, D — гармоническая четверка, если

$$(ABCD) = -1$$



Черт. 9



Черт. 10

Докажем, что если A, B, C, D — гармоническая четверка, то середина O отрезка CD лежит вне отрезка AB.

Доказательство.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = -1,$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} + \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = 0,$$

$$\frac{\overline{AO} + \overline{OC}}{\overline{CO} + \overline{OB}} + \frac{\overline{AO} + \overline{OD}}{\overline{DO} + \overline{OB}} = 0.$$

Так как O середина CD, то $\overline{OC} = -\overline{OD}$, и значит

$$\frac{-\overline{OA}+\overline{OC}}{-\overline{OC}+\overline{OB}}+\frac{-\overline{OA}-\overline{OC}}{\overline{OC}+\overline{OB}}=0$$

или

$$-\overline{OA}\cdot\overline{OC}+\overline{OC}^2-\overline{OA}\cdot\overline{OB}+\overline{OC}\cdot\overline{OB}+\overline{OA}\cdot\overline{OC}+$$
$$+\overline{OC}^2-\overline{OA}\cdot\overline{OB}-\overline{OC}\cdot\overline{OB}=0,$$

или

$$\overline{OC}^2=\overline{OA}\cdot\overline{OB},$$

Но $\overline{OC}^2 > 0$, значит $\overline{OA}\cdot\overline{OB} > 0$, а это возможно тогда и только тогда, когда точка O лежит вне отрезка AB. Доказательство проведено лишь на основании теоремы Шаля (для отрезков).

Пример 4. Пусть A, B, C, D — гармоническая четверка; доказать, что тогда

$$\frac{2}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AD}}.$$

Доказательство.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}:\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=-1,$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}+\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=0,$$

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CA}+\overline{AB}}+\frac{\overline{AD}}{\overline{DA}+\overline{AB}}=0,$$

$$-\overline{AC}\cdot\overline{AD}+\overline{AC}\cdot\overline{AB}-\overline{AD}\cdot\overline{AC}+\overline{AB}\cdot\overline{AD}=0,$$

$$2\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\overline{AC}\cdot\overline{AB}+\overline{AB}\cdot\overline{AD},$$

$$\frac{2}{\overline{AB}}=\frac{1}{\overline{AC}}+\frac{1}{\overline{AD}}$$

— опять чисто аналитическое доказательство.

Пример 5. На прямой даны две точки A и B. Пусть k — данное число положительное, отрицательное или нуль. Доказать, что на прямой AB существует одна и только одна точка C такая, что

$$AC^2 - BC^2 = k.$$

Как построить эту точку?

Доказательство. Пусть такая точка C существует:

$$AC^2 - BC^2 = k,$$

$$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = k,$$

$$\overline{AC}^2 - \overline{CB}^2 = k,$$

$$(\overline{AC} + \overline{CB})(\overline{AC} - \overline{CB}) = k,$$

$$\overline{AB}\,[\overline{AC} - (\overline{CA} + \overline{AB})] = k.$$

$$\overline{AB}\,(2\overline{AC} - \overline{AB}) = k,$$

$$\overline{AC} = \frac{k + \overline{AB}^2}{2\overline{AB}}.$$

Этим доказана единственность такой точки; в самом деле: предполагая, что существует еще одна такая точка, получим

$$\overline{AC_1} = \frac{k + \overline{AB}^2}{2\overline{AB}},$$

откуда $\overline{AC} = \overline{AC_1}$, т. е. C и C_1 совпадают.

Существование точки C устанавливается проверкой (или тем соображением, что любые два соседних равенства в написанной выше цепи равенств — эквивалентны). Произведем проверку:

$$\overline{AC} = \frac{k + \overline{AB}^2}{2\overline{AB}},$$

$$\overline{BC} = \overline{BA} + \overline{AC} = \overline{BA} + \frac{k + \overline{AB}^2}{2\overline{AB}} = \frac{k - \overline{AB}^2}{2\overline{AB}},$$

$$\overline{AC}^2 - \overline{BC}^2 = AC^2 - BC^2 = \frac{(k + \overline{AB}^2)^2 - (k - \overline{AB}^2)^2}{4AB^2} = k.$$

Пример 6. Найти геометрическое место точек M плоскости, обладающих следующим свойством:

$$AM^2 - BM^2 = k,$$

где A и B — данные точки, а k — данное число.

Решение. Пусть C — проекция точки M на AB, тогда $AM^2 - BM^2 = AC^2 - BC^2 = k$. Но на прямой AB существует только одна точка C, для которой $AC^2 -$

$-CB^2=k$, значит геометрическое место точек M есть прямая, перпендикулярная к AB в точке C.

Пример 7. Если точка M не лежит на окружности (C) (C — центр), то степенью точки M относительно окружности (C) называется число $\sigma=\overline{MA}\cdot\overline{MB}$, где A и B — точки пересечения с окружностью (C) произвольной секущей, проходящей через M. Если же точка M лежит на окружности (C), то по определению $\sigma=0$. Доказать, что степень точки M относительно окружности (C) может быть всегда вычислена по формуле:

$$\sigma=CM^2-R^2,$$

где R — радиус окружности (C).

Доказательство. Пусть прямая CM пересекает окружность (C) в точках P и Q; тогда $\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MP}\times\times\overline{MQ}=\sigma$

или

$$(\overline{MC}+\overline{CP})(\overline{MC}+\overline{CQ})=\sigma,$$

$$(\overline{MC}+\overline{CP})(\overline{MC}-\overline{CP})=\sigma,$$

$$MC^2-\overline{CP}^2=\sigma,$$

$$\sigma=MC^2-R^2.$$

Если точка M лежит на окружности (C), то $MC=R$ и $\sigma=0$ в соответствии с определением.

Пример 8. Радикальной осью двух окружностей называется геометрическое место точек M, степени каждой из которых относительно этих окружностей равны между собой. Доказать, что радикальная ось двух неконцентрических окружностей есть прямая линия.

Решение. Пусть C_1 и C_2 — центры окружностей (C_1) и (C_2), а R_1 и R_2 их радиусы. Из равенства

$$MC_1^2-R_1^2=MC_2^2-R_2^2$$

находим

$$MC_1^2-MC_2^2=R_1^2-R_2^2$$

и значит геометрическое место точек M есть прямая, перпендикулярна и линия C_1C_2.

Замечание 1. Если окружности (C_1) и (C_2) пересекаются в точках A и B, то прямая AB есть их радикальная ось, если они касаются, то радикальной осью является их общая касательная.

Замечание 2. Если центры C_1, C_2, C_3 окружностей (C_1), (C_2), (C_3) не лежат на одной прямой, то радикальные оси их взятых попарно, проходят через одну точку (радикальный центр). В самом деле: если Ω — точка пересечения радикальной оси окружностей (C_1) и (C_3) с радикальной осью окружностей (C_2) и (C_3), то ее степени относительно (C_1) и (C_2) также будут равны между собой, а потому Ω лежит и на радикальной оси окружностей (C_1) и (C_2).

Замечание 3. Если радикальный центр трех окружностей лежит вне одной из них, то он лежит и вне других (почему?); в этом случае он служит центром окружности, пересекающих данные окружности под прямым углом [степень точки M, лежащей вне окружности (C) равная $CM^2 - R^2$, равна также MT^2, где T — точка прикосновения любой касательной, проведенной из M к (C) ($\triangle CMT$ — прямоугольный, $\angle CMT = 90°$)].

Пример 9. Доказать, что если A, B, C, D — гармоническая четверка, то окружность построена на CD, как на диаметре, пересекает ортогонально любую окружность, проходящую через A и B.

Решение. Пусть O — центр окружности, построенной на CD, как на диаметре, иначе середина CD. На основании предыдущего, $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OC}^2$, т. е. степень точки O относительно любой окружности, проходящей через A и B, равна квадрату радиуса окружности, построенной на CD, как на диаметре. Но точка O лежит вне окружности, проходящей через A и B, значит $OC = OT$, где T — точка прикосновения касательной, проведенной из O к окружности, проходящей через A и B.

Пример 10. Обратно. Если окружности (C_1) и (C_2) ортогональны, то диаметр любой из них, например (C_1), делится гармонически точками пересечения его со второй окружностью.

Доказательство. Пусть CD — диаметр (C_1) пересекает (C_2) в точках A и B. Так как окружности (C_1) и (C_2) ортогональны, то $OC = OT$, где O — середина CD, а T — точка прикосновения касательной из O к (C_2). Значит $\overline{OA} \cdot \overline{OB} = \overline{OC}^2$, а отсюда следует, что

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} : \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = -1.$$

Пример 11. (C) данная окружность (C — ее центр, R — радиус), A — данная точка. Найти геометрическое место точек таких, что степень точки M относительно (C) равна AM^2.

Решение.

$$MC^2 - R^2 = AM^2,$$
$$MC^2 - MA^2 = R^2$$

— геометрическое место точек M есть прямая, перпендикулярная AC. Эту прямую называют радикальной осью окружности (C) и точки A (или окружности (C) и окружности-точки A).

Пример 12. Пусть (O_1) и (O_2) — две неконцентрические окружности, M—произвольная точка плоскости. Доказать, что разность σ_1—σ_2 степеней точки M относительно окружностей (O_1) и (O_2) определяется формулой

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2\overline{MP} \cdot \overline{O_2O_1},$$

где P — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на радикальную ось окружностей (O_1) и (O_2).

Доказательство.

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \overline{MO}_1^2 - r_1^2 - \overline{MO}_2^2 + r_2^2,$$
$$0 = \overline{PO}_1^2 - r_1^2 - \overline{PO}_2^2 + r_2^2.$$

Обозначим через M_1 и P_1 проекции точек M и P на O_1O_2; тогда

$$MO_1^2 - MO_2^2 = M_1O_1^2 - M_1O_2^2,$$
$$PO_1^2 - PO_2^2 = P_1O_1^2 - P_1O_2^2$$

и значит

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \overline{M_1O}_1^2 - r_1^2 - \overline{M_1O}_2^2 + r_2^2,$$
$$0 = \overline{P_1O}_1^2 - r_1^2 - \overline{P_1O}_2^2 + r_2^2,$$

следовательно,

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \overline{M_1O}_1^2 - \overline{O_1P}_1^2 - \overline{M_1O}_2^2 + \overline{O_2P}_1^2 =$$
$$= (\overline{M_1O_1} + \overline{O_1P_1})(\overline{M_1O_1} = \overline{O_1P_1}) + (\overline{M_1O_2} + \overline{O_2P_1}) \times$$
$$\times (\overline{O_2P_1} - \overline{M_1O_2}) = \overline{M_1P_1}(\overline{M_1O_1} - \overline{O_1P_1} + \overline{O_2P_1} - \overline{M_1O_2}) =$$
$$= \overline{M_1P_1}(\overline{O_2M_1} + \overline{M_1O_1} + \overline{O_2P_1} + \overline{P_1O_1}) =$$
$$= \overline{M_1P_1}(\overline{O_2O_1} + \overline{O_2O_1}) = 2\overline{M_1P_1} \cdot \overline{O_2O_1}.$$

Но $\overline{M_1P_1} = \overline{MP}$, значит

$$\sigma_1 - \sigma_2 = 2\overline{MP} \cdot \overline{O_2O_1}.$$

Пример 13. Периметр треугольника можно обходить в двух противоположных направлениях. Одно из таких направлений (безразлично какое) будем считать положительным, тогда противоположное — отрицательным. Будем называть треугольник ориентированным, если его периметр обходится в определенном направлении. Площадью $[ABC]$ ориентированного треугольника ABC (ориентация определяется порядком записи вершин) называется число, модуль которого равен площади треугольника ABC и которое положительно, если ориентация треугольника положительная и отрицательно в противном случае.

Доказать, что

$$(ABCD) = \frac{[SAC]}{[SCB]} : \frac{[SAD]}{[SDB]},$$

где S — любая точка, не лежащая на прямой $ABCD$.

Доказательство.

$$\frac{[SAC]}{[SCB]} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CB}},$$

ибо если отрезки $\overline{AC}$ и $\overline{CB}$ имеют одинаковое направление, т. е. $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} > 0$, то треугольники SAC и SCB имеют одинаковую ориентацию, т. е. $\frac{[SAC]}{[SCB]} > 0$. Если же $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} < 0$, то и $\frac{[SAC]}{[SCB]} < 0$. Кроме того ясно, что

$$\left|\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}\right| = \left|\frac{[SAC]}{[SCB]}\right|,$$

так как треугольники SAC и SCB имеют одинаковую высоту (основания AC и CB). Отсюда и следует доказываемое равенство.

Пример 14. Пусть α, β, γ, δ — четыре прямых, проходящие через одну точку S, а l и l' — две секущие, не проходящие через точку S, пересекающие эти прямые соответственно в точках A, B, C, D (секущая l) и A', B', C', D' (секущая l'). Доказать, что

$$(ABCD) = (A'B'C'D').$$

Доказательство.

$$(ABCD) = \frac{[SAC]}{[SCB]} : \frac{[SAD]}{[SDB]} = \frac{[SAC]\cdot[SDB]}{[SAD]\cdot[SCB]}.$$

Сдвинем лишь одну точку A в положение A' (по прямой α). Тогда изменяется лишь $[SAC]$ и $[SAD]$, но при этом

$$\frac{[SAC]}{[SAD]} = \frac{[SA'C]}{[SA'D]}.$$

В самом деле:

$$\frac{[SAC]}{[SA'C]} = \frac{[CSA]}{[CSA']} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}},$$

$$\frac{[SAD]}{[SA'D]} = \frac{[DSA]}{[DSA']} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SA'}}.$$

Таким образом

$$\frac{[SAC]}{[SCB]} : \frac{[SAD]}{[SDB]} = \frac{[SA'C]}{[SCB]} : \frac{[SA'D]}{[SDB]}.$$

Аналогично доказывается, что

$$\frac{[SAC]}{[SCB]} : \frac{[SAD]}{[SDB]}$$

не меняется, если сдвинуть (соответственно по прямым β, γ и δ) лишь одну точку B или C, или D. Значит, если сдвинуть все 4 точки A, B, C, D в положение A', B', C', D', то это выражение не изменится.

Замечание. Указанное значение

$$\frac{[SAC]}{[SCB]} : \frac{[SAD]}{[SDB]}$$

определяется, таким образом, лишь прямыми α, β, γ, δ (в том смысле, что значение этого выражения не зависит от секущей); оно называется ангармоническим отношением прямых α, β, γ, δ и обозначается так: $(\alpha\beta\gamma\delta)$. Отметим, что точки A, B, C, D могут быть выбраны на прямых α, β, γ, δ совершенно произвольно (не обязательно одной прямой), лишь бы ни одна из них не совпадала с S. Если $(\alpha\beta\gamma\delta) = -1$, то говорят, что 4 прямые α, β, γ, δ образуют гармоническую четверку.

Пример 15. Доказать, что если M — середина стороны BC треугольника ABC, а AK — прямая, параллельная

BC, то четверка прямых AB, AC, AM, AK — гармоническая.

Решение.

$$(AB, AC, AM, AK) = \frac{[ABM]}{[AMC]} : \frac{[ABK]}{[AKC]} =$$

$$= \frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} : \frac{[ABK]}{[AKC]} = \frac{[AKC]}{[ABK]},$$

так как $\frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} = 1$. Но

$$\frac{[AKC]}{[ABK]} = -\frac{[CAK]}{[BAK]} = -1.$$

Пример 16. Пусть ABC — произвольный треугольник, а D и D' — основания на стороне BC биссектрис внутреннего и внешнего угла A. Доказать, что B, C, D, D' — гармоническая четверка.

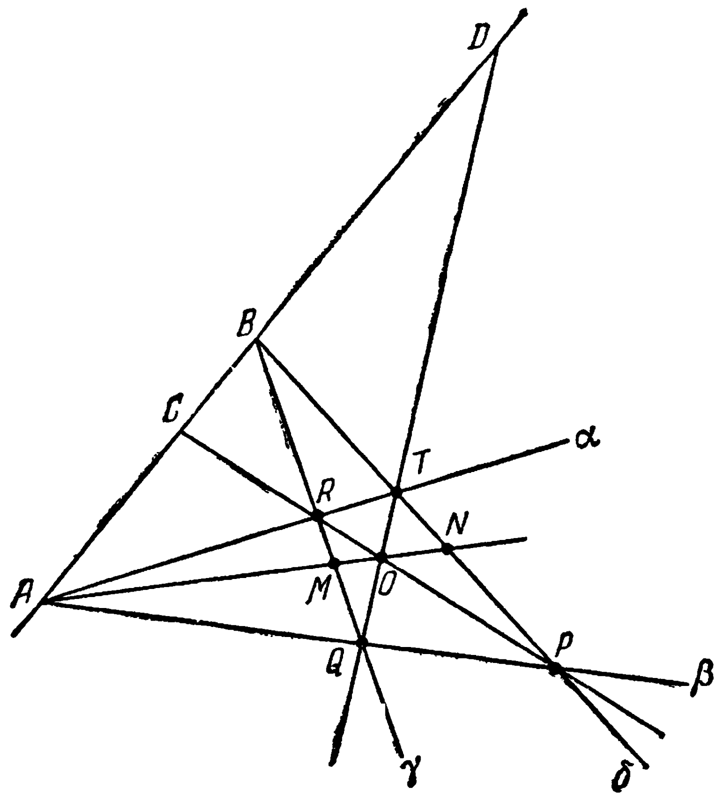
Решение.

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{b}{c}, \quad \frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}} = -\frac{b}{c},$$

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} : \frac{\overline{BD'}}{\overline{D'C}} = -1.$$

Пример 17. α, β, γ, δ — четыре произвольные прямые. Доказать, что A, B, C, D — гармоническая четверка (черт. 11).

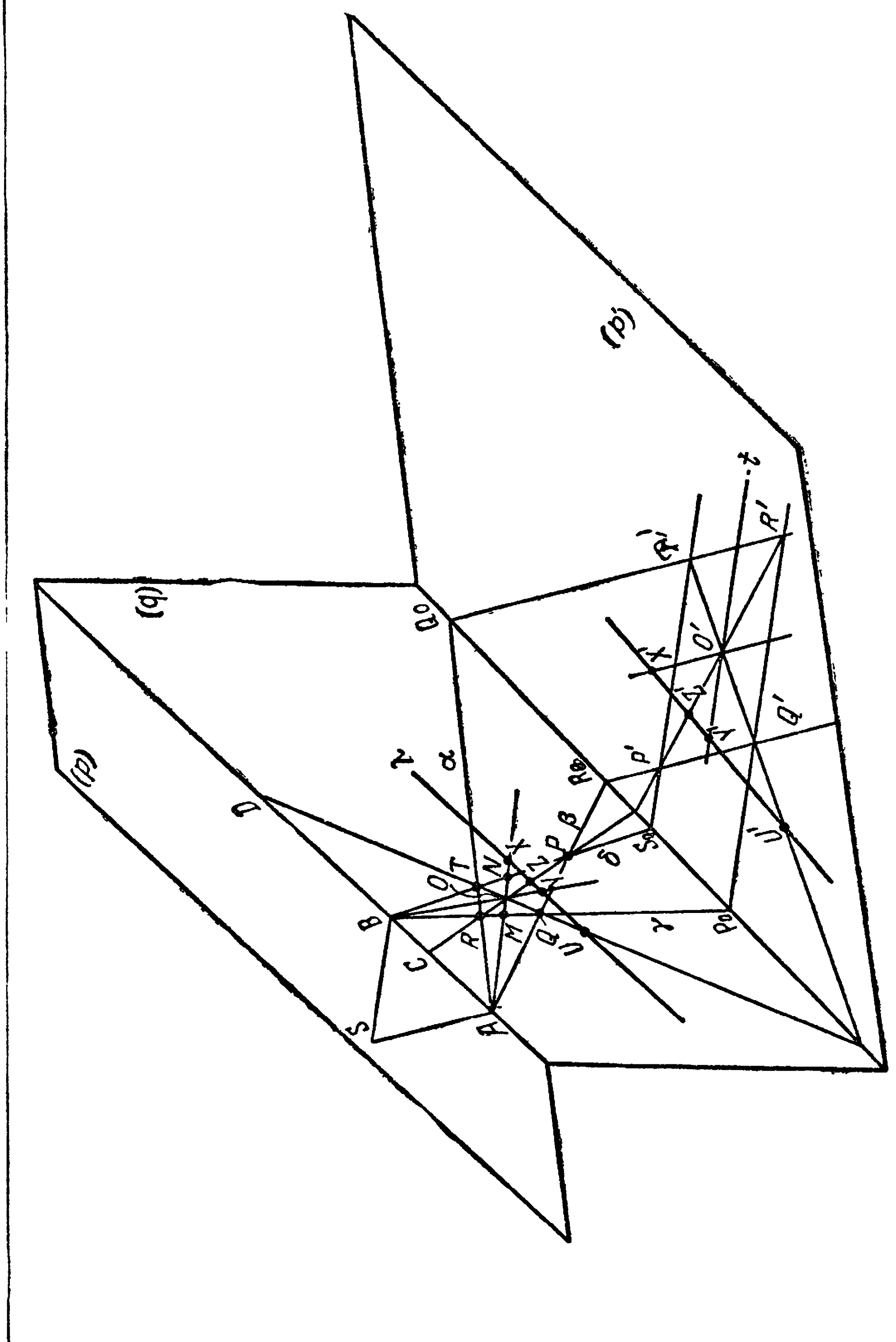
Решение. Проведем через прямую $ABCD$ две произвольные плоскости (p) и (q) и проведем еще плоскость $(p') \parallel (p)$. Данную конфигурацию расположим в плоскости (q) (черт. 12.). Возьмем в плоскости (p) произвольную точку S, не лежащую на прямой $ABCD$, и спроектируем из точки S данную конфигурацию, которую мы поместили в плоскость (q), в плоскость (p'). Плоскости SAR SAQ, проектирующие прямые AR и AQ в плоскость (p'), проходят обе через прямую $SA \parallel (p')$, значит в проекции мы получим две параллельные прямые (обе они будут параллельны SA). Аналогично — прямые BP и BQ спроектируются в прямые, параллельные SB. Таким образом проекцией четырехугольника $PSRQ$ в плоскость (p') будет параллелограмм $P'T'R'Q'$, а проекцией точки O будет точка O' пересечения диагоналей этого параллелограмма. Прямые OA, OB, OC, OD спроектируются в прямые m, n, s, t, проходящие через центр O' этого параллелограмма; OA и OB спроектируются в прямые s, t, проходящие через его центр O' параллельно его сторонам, а OC и OD спроектируются в диагонали параллелограмма (черт. 12). На основании примера 15 четыре прямые m, n, s, t образуют гармоническую чет-



Черт. 11

верку. Пересечем эти 4 прямые произвольной секущей λ', не проходящей через точку O' и пересекающей их соответственно в точках X', Y', Z', U'. Четверка точек X', Y', Z', U' — гармоническая. Пусть прямые SX', SY', SZ', SU' пересекают плоскость (q) в точках X, Y, Z, U. Эти точки лежат на прямой, по которой плоскость $(S\lambda')$ пересекает (q) и соответственно на прямых OA, OB, OC, OD. На основании примера 14 точки X, Y, Z, U так же, как и X', Y', Z', U' образуют гармоническую четверку. Поэтому и прямые OA, OB, OC, OD — образуют гармоническую четверку, значит и $(ABCD) = -1$.

Замечание. Из доказанного следует (черт. 11 и 12): $(QTOD) = -1$, $(MNOA) = -1$ т. д.



Черт. 12

Пример 18. В плоскости треугольника ABC взята произвольная точка O. Пусть прямые AO, BO и CO пересекают BC, CA и AB соответственно в точках P, Q и R. Доказать, что

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} = 1,$$

и обратно, если на прямых BC, CA и AB выбраны точки P, Q и R так, что выполнено это соотношение, то прямые AP, BQ и CR проходят через одну точку (теорема Чевы и ей обратная).

Доказательство. Пусть $\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} > 0$; тогда точка R лежит между точками A и B, а значит точки A и B лежат по разные стороны от прямой COR. В таком случае треугольники AOC и BOC имеют противоположный обход и значит $[AOC]$ и $[BOC]$ — разных знаков. Что касается абсолютной величины отношения этих величин, то она равна $\left|\frac{[AOC]}{[BOC]}\right| = \frac{AA_1}{BB_1}$, где A_1 и B_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точек A и B на прямую OC. Очевидно, что $\frac{AA_1}{BB_1} = \frac{AR}{RB}$ (черт. 13), а значит

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = -\frac{[AOC]}{[BOC]}.$$

Если $\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} < 0$, то точка R лежит на продолжении отрезка AB либо за точку A, либо за точку B. Теперь $[AOC]$ и $[BOC]$ — числа одного знака и

$$\frac{[AOC]}{[BOC]} = \frac{AA_1}{BB_1},$$

так что опять

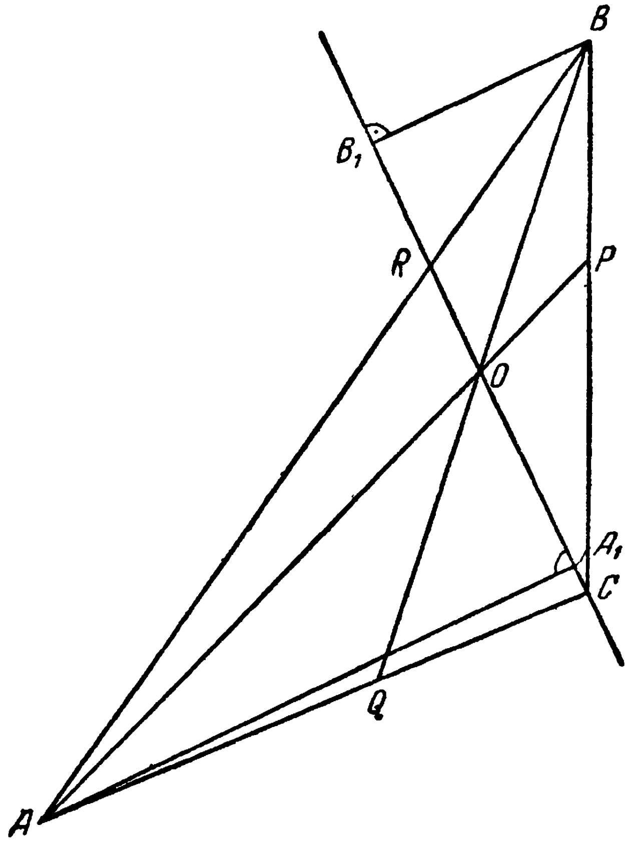
$$\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = -\frac{[AOC]}{[BOC]},$$

Аналогично

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = -\frac{[BOA]}{[COA]},$$

$$\frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} = -\frac{[COB]}{[AOB]}.$$

Перемножая эти равенства и учитывая, что треугольники AOC и COA имеют противоположный обход, тре-



Черт. 13

угольники BOC и COB имеют противоположный обход, треугольники BOA и AOB имеют противоположный обход, получим

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} = 1.$$

Обратно. Пусть выполнено это соотношение. Обозначим через O точку пересечения AP и BQ, а через R' — точку пересечения CO с AB.

Тогда

$$\frac{\overline{AR'}}{\overline{R'B}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} = 1.$$

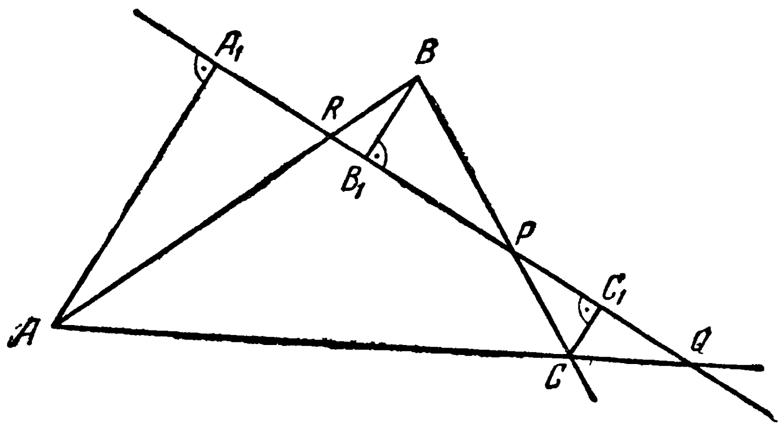
Отсюда и из данного отношения

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{AR'}}{\overline{R'B}}.$$

Прибавляя по 1 и используя теорему Шаля, получим:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{R'B}}, \quad \overline{RB} = \overline{R'B}, \quad \overline{RB} + \overline{BR'} = 0, \quad \overline{RR'} = 0,$$

т. е. точки R и R' совпадают.



Черт. 14

Пример 19. Прямая l пересекает стороны BC, CA и AB треугольника ABC в точках P, Q, R. Доказать, что

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = -1. \qquad (\alpha)$$

Обратно, если на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC выбраны точки P, Q и R такие, что выполнено это соотношение, то точки P, Q и R лежат на одной прямой (теорема Менелая и ей обратная).

Доказательство. Пусть A_1, B_1 и C_1 — основания перпендикуляров, опущенных из точек A, B и C на прямую l. Тогда, вводя на прямой, перпендикулярной к l, положительное направление, будем иметь (черт. 14)

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = -\frac{\overline{AA_1}}{\overline{BB_1}}, \quad \frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} = -\frac{\overline{BB_1}}{\overline{CC_1}}, \quad \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} = -\frac{\overline{CC_1}}{\overline{AA_1}}.$$

Перемножая, получим требуемое.

Обратно. Пусть P, Q и R таковы, что выполнено соотношение (α). Обозначим через R_1 точку, в которой прямая PQ пересекает AB. Тогда

$$\frac{\overline{BP}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{CQ}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{AR_1}}{\overline{R_1B}} = -1.$$

Отсюда из данного соотношения получим

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{RB}} = \frac{\overline{AR_1}}{\overline{R_1B}}$$

и как в предыдущем примере докажем, что точки R и R_1 совпадают.

Пример 20. Пусть A — произвольная точка, не лежащая на данной окружности (O). Проведем через точку A произвольную секущую, пересекающую окружность (O) в точках C и D. Пусть B — точка, гармонически сопряженная с точкой A относительно точек C и D, т. е. $(ABCD) = -1$. Доказать, что точки B при вращении секущей вокруг A располагаются на одной прямой [называемой полярой точки A относительно окружности (O)].

Доказательство. Пусть H — середина AB. Тогда из соотношения $(ABCD) = -1$ следует $\overline{HC} \cdot \overline{HD} = \overline{HA^2}$, значит степени точки H относительно точки A и окружности (O) равны между собой и точка H лежит на радикальной оси окружности (O) и точки A. Но так как $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AH}$, то точка B лежит на прямой, полученной из указанной радикальной оси гомотетией $(A,2)$.

Пример 21. Доказать, что если точка A лежит вне окружности (O), то ее поляра пересекает окружность, а если — внутри, то не пересекает.

Решение. На основании предыдущего примера поляра a точки A относительно окружности (O) перпендикулярна диаметру окружности, проходящему через точку A. Пусть этот диаметр пересекает окружность в точках C и D. Тогда, если точка A лежит на отрезке CD, то гармонически сопряженная с ней точка B лежит вне этого отрезка и обратно.

Пример 22. Доказать следующий геометрический способ построения поляры точки A относительно окружности (O): 1) если точка A лежит вне (O), то из нее проходят две касательные AT и AT'; прямая TT', проходящая через точки касания, и есть поляра точки A относительно окружности (O); 2) если точка A лежит внутри окружности (O), то проводим через нее диаметр и хорду TAT' к нему перпендикулярную; пусть касательные к окружности в точках T и T' пересекаютя в точке B; прямая, проходящая через точку B перпендикулярно AB, есть поляра точки A относительно окружности (O).

Доказательство. 1) Середины H и H' отрезков AT и AT' лежат на радикальной оси окружности (O) и точки A, ибо $HA^2 = HT^2$, $H'A^2 = H'T'^2$; 2) из указанного построения следует, что $(BACD) = -1$, где C и D — точки пересечения AB с (O), значит и $(ABCD) = -1$.

Пример 23. Доказать, что если поляра точки A относительно окружности (O) проходит через точку B, то и поляра точки B проходит через точку A [две такие точки называются полярносопряженными относительно окружности (O)].

Доказательство. 1) Пусть A лежит вне (O), а B — внутри; тогда AB пересекает окружность (O) в точках C и D. Пусть поляра точки A проходит через B, тогда $(ABCD) = -1$, но тогда и $(BACD) = -1$, т. е. поляра точки B проходит через A.

2) Пусть A и B лежат вне окружности. Обозначим через a точку, гармонически сопряженную с точкой A относительно точек пересечения с окружностью (O) прямой OA (полярой точки A будет прямая, проходящая через a перпендикулярно OA); в таком случае $\overline{Oa} \cdot \overline{OA} = R^2$. Точка B по предположению лежит на поляре точки A.

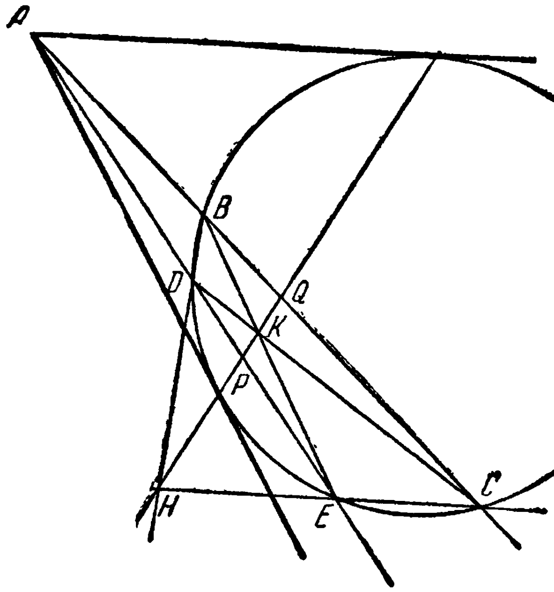
Опустим на OB перпендикуляр из A и пусть b его основание. Так как $\angle AbB = 90°$, $\angle AaB = 90°$, то 4 точки A, B, a, b лежат на одной окружности (с диаметром AB). Поэтому $\overline{Oa} \cdot \overline{OA} = \overline{Ob} \cdot \overline{OB} = R^2$ и поэтому Ab — поляра точки B (это доказательство годится для всех случаев; оно только упрощается, если одна из точек A или B лежит внутри окружности — см. выше первый случай).

Пример 24. Доказать способ построения поляры точки A относительно окружности при помощи одной линейки, указанной на черт. 15:

ABC и ADE — две произвольные секущие; K — точка пересечения DC и BE, H — точка пересечения BD и CE; HK — поляра точки A относительно окружности (O).

Доказательство. Точки A и P гармонически сопряжены относительно точек E и D; точки A и Q гармонически сопряжены относительно B и C (см. выше — пример 17).

Пример 25. Пусть на плоскости фиксирована точка O и задано число $k \neq 0$ (положительное или отрицательное). Поставим в соответствие точке M плоскости, отличной от O, точку M', лежащую на прямой OM и такую, что $\frac{\overline{OM'}}{\overline{OM}} = k$. Это преобразование множества точек плоскости называется гомотетией (прямой, в случае $k > 0$ и обратной, в случае $k < 0$). Гомотетию будем обозначать так: (O,k). В случае прямой гомотетии точки M и M' лежат на одном луче, выходящим из центра гомотетии, в случае обратной гомотетии точки M и M' лежат на лучах, имеющих противоположное направление. При гомотетии всякая фигура переходит в фигуру ей подобную (черт. 16); прямая l переходит в прямую l', параллельную l, окружность переходит в окружность и т. д.



Черт. 15

Пример 26. Фиксируем на плоскости точку O и фиксируем число $k \neq 0$ (положительное или отрицательное). Поставим в соответствие точке M плоскости, отличной от O, точку M', лежащую на прямой OM и такую, что

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k.$$

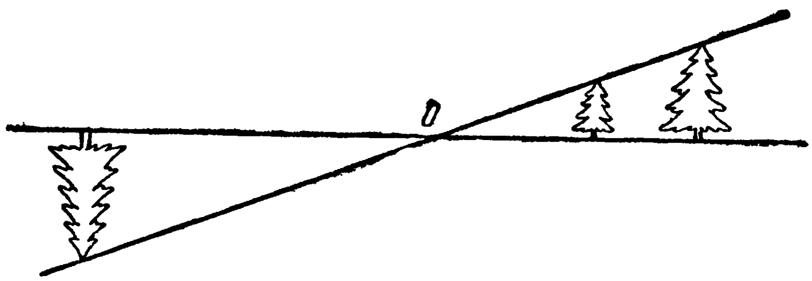
Это преобразование множества точек плоскости называется инверсией. Инверсию будем обозначать так же, как и гомотетию (O,k). Докажем, что если над точками плоскости выполнить последовательно две инверсии относительно одного и того же полюса, то результирующее преобразование будет гомотетией.

Доказательство. Рассмотрим две инверсии $I = (O,k)$ и $I_1 = (O,k_1)$. Пусть точке M в инверсии I соответствует точка M', а точке M' в инверсии I_1, соответствует точка M''. Тогда

$$\overline{OM} \cdot \overline{OM'} = k,$$
$$\overline{OM'} \cdot \overline{OM''} = k_1,$$

следовательно,

$$\frac{\overline{OM''}}{\overline{OM}} = \frac{k_1}{k}.$$



Черт. 16

Пример 27. Доказать, что если полюс инверсии O не лежит на данной окружности (C), то ее образ в инверсии (O,k) есть снова окружность (C').

Доказательство. Пусть k_1 — степень точки O относительно окружности (C), тогда инверсия (O, k_1) переводит окружность (C) в себя (оставляет ее инвариантной); если затем произвести инверсию (O,k), то результат будет гомотетией с коэффициентом $\frac{k}{k_1}$ и значит при инверсии (O,k) окружность (C) перейдет в окружность (C'), гомотетичную (C) с коэффициентом гомотетии $\frac{k}{k_1}$, где k_1 — степень точки O относительно (C).

Пример 28. Доказать, что

$$A'B' = \frac{|k| \cdot AB}{OA \cdot OB}, \qquad (1)$$

где A и B — две произвольные точки плоскости, а A' и B' — их образы в инверсии (O,k).

Доказательство. Точки A' и B' лежат либо на тех же лучах, что и точки A и B (если $k>0$) или на лучах, противоположных лучам OA и OB (если $k<0$). Значит всегда

$$\angle AOB = \angle A'OB' = \varphi.$$

Поэтому

$$A'B'^2 = OA'^2 + OB'^2 - 2OA' \cdot OB' \cos\varphi =$$

$$= \frac{k^2}{OA^2} + \frac{k^2}{OB^2} - \frac{2k^2}{OA \cdot OB}\cos\varphi =$$

$$= \frac{k^2}{OA^2 \cdot OB^2}(OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB\cos\varphi) = \frac{k^2 \cdot AB^2}{OA^2 \cdot OB^2}.$$

Отсюда

$$A'B' = \frac{|k| \cdot AB}{OA \cdot OB}.$$

Замечание. Соотношение (1) верно в том случае, если точки A и B лежат на одной прямой, проходящей через O (в этом случае $\varphi = 0$ или $\varphi = \pi$). Доказать отсюда, что при инверсии сохраняется гармоническое отношение 4 точек луча, проходящего через полюс инверсии.

Пример 29. Доказать, что если прямая l не проходит через полюс O инверсии, то ее образ в инверсии (O,k) есть окружность, проходящая через O; диаметр этой окружности, проходящий через O, будет перпендикулярен l.

Доказательство. Опустим из точки O перпендикуляр OH на прямую l. Пусть H' — образ точки H в инверсии (O,k). Возьмем на прямой l произвольную точку M, отличную от H и пусть M' ее образ в той же инверсии. Так как $\angle OHM = 90°$, то

$$OH^2 + HM^2 = OM^2.$$

Далее имеем

$$OH'^2 = \frac{k^2}{OH^2}, \quad OM'^2 = \frac{k^2}{OM^2},$$

а на основании предыдущего примера

$$H'M'^2 = \frac{k^2 \cdot HM^2}{OH^2 \cdot OM^2}.$$

Мы видим, что

$$OH'^2 = OM'^2 + M'H'^2,$$

ибо

$$OM'^2 + M'H'^2 = \frac{k^2}{OM^2} + \frac{k^2 \cdot HM^2}{OH^2 \cdot OM^2} =$$

$$= \frac{k^2}{OM^2} \frac{OH^2 + HM^2}{OH^2} = \frac{k^2}{OH^2} = OH'^2,$$

значит точка M' лежит на окружности с диаметром OH'. Обратно. Пусть M' — любая точка этой окружности. Тогда

$$OM'^2 + M'H'^2 = OH'^2$$

или

$$\frac{k^2}{OM^2} + \frac{k^2 HM^2}{OH^2 \cdot OM^2} = \frac{k^2}{OH^2},$$

откуда

$$OM^2 + HM^2 = OM^2,$$

значит $\angle OHM = 90°$ и точка M, являющаяся прообразом точки M', лежит на прямой l.

Замечание. Из доказанного следует, что образом в инверсии (O,k) окружности, проходящей через точку O, является прямая (перпендикулярная к диаметру этой окружности, проходящему через точку O).

Пример 30. Пусть AB — хорда окружности (C), причем ни окружность (C), ни хорда AB не проходят через полюс O инверсии (O,k); пусть A' и B' — образы точек A и B в инверсии (O,k), а окружность (C') — образ окружности (C) в рассматриваемой инверсии. Тогда AB и $A'B'$ пересекаются в точке, лежащей на радикальной оси окружностей (C) и (C').

Доказательство.

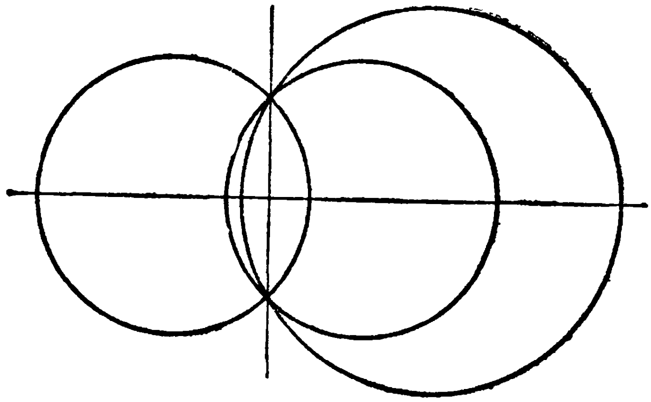
$$\overline{OA} \cdot \overline{OA'} = \overline{OB} \cdot \overline{OB'} \, (= k),$$

следовательно, точки A, A', B, B' лежат на одной окружности; AB — радикальная ось этой окружности и окружности (C), $A'B'$ — радикальная ось этой окружности и окружности (C'), следовательно, точка пересечения AB и $A'B'$ есть радикальный центр трех указанных окружностей и значит лежит на радикальной оси окружности (C) и (C').

Пример 31. При инверсии углы между окружностями и прямыми сохраняются (это значит, что если, например, две окружности пересекаются, то угол между касательными к ним в точке пересечения будет равен углу между касательными к их образам в точке их пересечения или если, например, две прямые пересекаются и после инверсии они переходят в две окружности, то эти две окружности также пересекаются и угол между касательными к ним в точке пересечения будет равен углу между исходными прямыми).

Доказательство. Прежде всего заметим, что если две окружности (C_1) и (C_2) касаются в точке M и если после инверсии они перейдут в две окружности (C'_1) и (C'_2), то эти две окружности будут иметь лишь одну общую точку M' и, следовательно, будут касаться в этой точке. Если окружность (C_1) перейдет в окружность (C'_1), а окружность (C_2) в прямую (C'_2), то окружность (C'_1) и прямая (C'_2) будут иметь лишь одну общую точку M' (образ M) и значит прямая (C'_2) будет касаться (C'_1) в точке M'. Наконец, если и (C_1) и (C_2) перейдут в прямые (C'_1) и (C'_2), то это значит, что M — полюс инверсии; в таком случае (C'_1) и (C'_2) — параллельные прямые. Если (C_1) — окружность, а (C_2) — прямая, касающаяся (C_1) в точке M, то аналогичными рассуждениями установим, что (C_1) и (C_2) перейдут либо в две окружности, касающиеся в точке M' (образ M), либо в окружность (C'_1) и прямую (C'_2), либо в прямую (C'_1) и окружность (C'_2), касающиеся в точке M', либо в две параллельные прямые (C'_1) и (C'_2). Таким образом, при инверсии касание окружностей и прямых с окружностями сохраняются. Пусть теперь (C_1) и (C_2) — две пересекающиеся окружности или пересекающиеся окружность (C_1) и прямая (C_2) или две пересекающиеся прямые. Пусть M — точка их пересечения. В первом случае угол между окружностями (C_1) и (C_2) будет равен углу между касательными к ним в точке M их пересечения; во втором — углу между касательной к окружности (C_1) в точке M и прямой (C_2), в третьем — углу между (C_1) и (C_2). Таким образом, в силу сохранения при инверсии касания вопрос о сохранении углов между окружностями и между окружностью и прямой сводится к вопросу о сохранении угла при инверсии между двумя пересекающимися прямыми (C_1) и (C_2).

Предположим, что эти прямые (C_1) и (C_2) не проходят через полюс инверсии. Построим две окружности (S_1) и (S_2), проходящие через полюс O инверсии и касающиеся (C_1) и (C_2) в точке M. В силу сохранения касания при инверсии угол между окружностями, в которые перейдут (C_1) и (C_2), будет равен углу между прямыми, в которые перейдут окружности (S_1) и (S_2); но эти окружности перейдут в прямые, параллельные касательным (σ_1) и (σ_2) в точке O к окружности (S_1) и (S_2) и таким образом угол между прямыми, в которые перейдут (S_1) и (S_2), будет равен углу между (C_1) и (C_2). Если одна из прямых (C_1) или (C_2), например, (C_1) проходит через полюс инверсии, а другая не проходит, то строим лишь окружность (S_2), касающуюся C_2 в точке M. Угол между (C_1) и (C_2) после инверсии будет равен углу между образами (C_1) и (S_2), т. е. углу между (C_1) и касательной (σ_2) к (S_2) в точек O.



Черт. 17

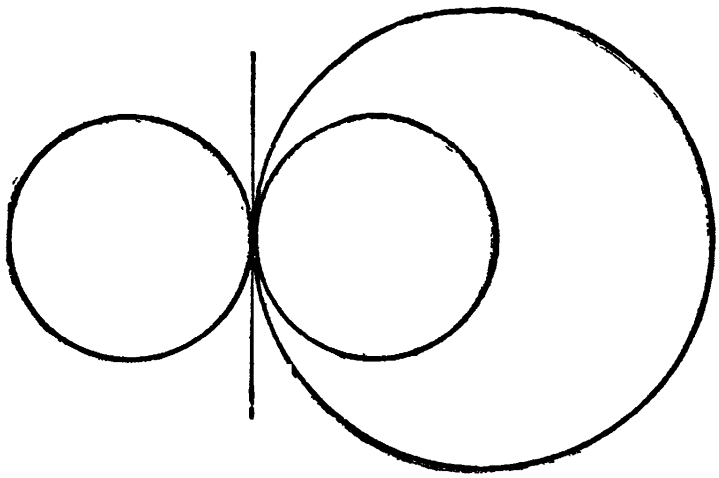
Наконец, если обе прямые (C_1) и (C_2) проходят через полюс инверсии, то в силу их инвариантности при инверсии, угол между ними сохранится. Отметим также, что если рассматривать ориентированные углы, то

$$\left[\widehat{(C_1), (C_2)}\right] = -\left[\widehat{(\sigma_1), (\sigma_2)}\right],$$

так что при инверсии углы сохраняются, но их ориентация меняется на противоположную.

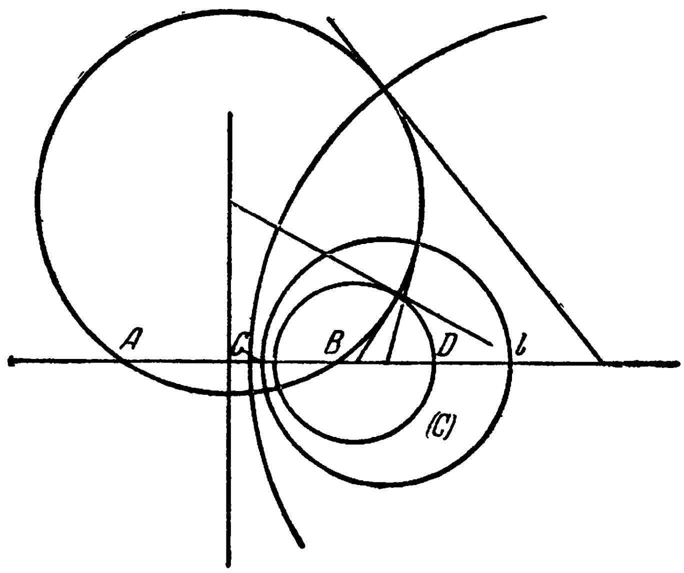
Пример 32. Пучком окружностей называется множество всех окружностей с общей радикальной осью. Пучок окружностей определен, если задана радикальная ось пучка и одна из окружностей пучка (или если заданы две окружности пучка). Исследовать типы пучков окружностей в зависимости от взаимного расположения радикальной оси с одной из окружностей пучка.

Решение. Если радикальная ось пересекает данную окружность пучка, то все окружности пучка должны проходить через точки A и B пересечения данной радикальной оси (Δ) с данной окружностью пучка (эллиптический пучок, черт 17). Если радикальная ось (Δ) ка-



Черт. 18

сается в точке A данной окружности пучка (черт. 18), то пучок состоит из всех окружностей, касающихся в точке A прямой (Δ) (параболический пучок).



Черт. 19

Если, наконец, радикальная ось не пересекает данной окружности (C), то пучок состоит из окружностей, не пересекающихся друг с другом и с прямой (Δ) (гиперболический пучок, черт. 19). Центры всех этих окружностей расположены на прямой l, проходящей через центр

(C) перпендикулярно (Δ). Если на радикальной оси (Δ) взять произвольную точку S и провести из точки S касательную ST к данной окружности (C) и затем построить окружность с центром S и радиусом ST, то эта окружность пересечет прямую l в точках A и B, которые диаметр CD окружности (C) разделят гармонически (см. выше пример 10). Любая окружность с центром на прямой (Δ), проходящая через точки A и B будет пересекать окружность (C) ортогонально и значит степень любой точки S относительно (C) будет равна степени S относительно точек A и B (SA^2 и SB^2), поэтому точки A и B, как точки окружности нулевого радиуса, включаются в гиперболический пучок; они называются предельными точками гиперболического пучка (в отличие от точек A и B эллиптического пучка, называемых там базисными). Отметим, что предельные точки гиперболического пучка служат базисными для эллиптического, окружности которого ортогональны окружностям гиперболического пучка и обратно.

Пример 33. Связкой окружностей называется множество всех окружностей с общим радикальным центром. Исследовать типы связок окружностей.

Исследование предлагается провести читателю самостоятельно; три полученные при этом типа связок зависят от взаимного расположения заданного радикального центра и окружности связки.

Пример 34. Пусть A', B', C' — проекции произвольной точки S окружности (Γ), описанной около треугольника ABC, на его стороны BC, CA и AB. Доказать, что точки A', B', C' лежат на одной прямой (прямая Симпсона).

Доказательство. Точки S, A, B, C лежат на окружности (Γ), значит (см. выше пример 2) $(SC, SA) = (BC, BA)$ $(\mathrm{mod}\ \pi)$. Прямые SA' и SC' соответственно перпендикулярны BC и BA, значит $(SA', SC') = (BC, BA)$ $(\mathrm{mod}\ \pi)$. Из полученных равенств следует, что $(SC, SA) = (SA', SC')$; прибавляя к обеим частям этого равенства по (SA, SA') и используя теорему Шаля, получим $(SC, SA') = (SA, SC')$ $(\mathrm{mod}\ \pi)$. Так как четыре точки S, C, A', B' лежат на одной окружности с диаметром SC, то $(SC, SA') = (B'C, B'A')$ $(\mathrm{mod}\ \pi)$.

Аналогично. Четыре точки S, B', A, C' лежат на одной окружности с диаметром SA, значит $(SA, SC') =$

$= (B'A,\ B'C') \pmod{\pi}$. Итак, $(B'C,\ B'A') = (B'A,\ B'C') \pmod{\pi}$ или $(B'C,\ B'A') = (B'C,\ B'C') \pmod{\pi}$, а потому точки A', B', C' лежат на одной прямой*.

Пример 35. Дана окружность (C) и хорда AB этой окружности; пусть (Δ) — медиатриса отрезка AB. Доказать, что кроме точки B на окружности (C) существуют три точки M такие, что если H — проекция M на (Δ), то $MA = 2\ MH$. Какую особенность представляет треугольник, образованный этими тремя точками. Можно ли построить эти точки с помощью циркуля и линейки?

Решение. Примем точку A за начало отсчета дуг на данной окружности (C) и установим произвольно положительное направление отсчета дуг на окружности (C). Пусть M — произвольная точка окружности (C), а H — ее проекция на (Δ). Обозначим через P точку, симметричную точке M относительно (Δ); тогда $2MH = MP$. Для того, чтобы точка M удовлетворяла условию задачи, необходимо и достаточно, чтобы $MA = MP$, а значит $\breve{AM} = \pm \breve{MP}$. Если $\breve{AM} = -\breve{MP}$, то $\breve{AM} + \breve{MP} = 0 \pmod{2\pi}$ или $\breve{AP} = 0$, т. е. точки A и P совпадают, а значит точка M совпадает с точкой B. Пусть $\breve{AM} = \breve{MP}$. Обозначим через I одну из точек пересечения (Δ) и (C). Так как (Δ) — медиатриса AB, следовательно, и MP, то I есть середина дуги MP.

Значит $2\breve{AI} = \breve{AM} + \breve{AP} \pmod{2\pi}$. Но $\breve{AP} = \breve{AM} + \breve{MP} = 2\breve{AM} \pmod{2\pi}$, значит $2\ \breve{AI} = 3\breve{AM} \pmod{2\pi}$ или

$$3\breve{AM} = 2\breve{AI} + 2k\pi,$$

откуда

$$\breve{AM} = \frac{2}{3}\breve{AI} + \frac{2k\pi}{3}.$$

Этим доказано, что на окружности (C) существуют три и только три точки M_1, M_2, M_3, удовлетворяющие

* Этим и следующим примером иллюстрируется применение теоремы Шаля для углов.

условию задачи; положения этих точек определяются дугами:

$$\overset{\smile}{AM_1}=\frac{2}{3}\overset{\smile}{AI},\ \overset{\smile}{AM_2}=\frac{2}{3}\overset{\smile}{AI}+\frac{2\pi}{3},\ \overset{\smile}{AM_3}=\frac{2}{3}\overset{\smile}{AI}+\frac{4\pi}{3}.$$

Построить эти точки с помощью циркуля и линейки невозможно, так как вопрос сводится к трисекции угла.

В заключение этого пункта покажем как можно использовать установленные выше положения для «анатомирования» геометрической задачи, т. е. для расчленения ее на более простые факты, установленные в общем виде.

Пример 36. Доказать, что во всяком неравнобедренном треугольнике ABC точка G пересечения медиан лежит на одной прямой с центром O описанной окружности (ABC) и с точкой H пересечения высот (ортоцентр). Доказать также, что точка G лежит всегда между точками O и H, причем $OG:GH=1:2$. Доказать, что окружность (O_9), проходящая через середины A', B', C' сторон BC, CA и AB, пройдет также через основания A'', B'', C'' высот AA'', BB'' и CC'', а также через середины A''', B''', C''' отрезков HA, HB и HC.

Доказательство. Рассмотрим гомотетию: $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$. При этой гомотетии точка A перейдет в A' (так как точка G всегда лежит на медиане AA' и $AG:GA'=2:1$). Так как при гомотетии каждая прямая переходит в прямую ей параллельную или с ней совпадающую и так как данный треугольник не равнобедренный, то при гомотетии $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$ высота AA'' перейдет в прямую, проходящую через точку A' (ибо A перейдет в A') и параллельную AA'', т. е. в медиатрису отрезка BC (медиатрисой отрезка называется прямая, проходящая через середину этого отрезка перпендикулярно к нему). Итак, в гомотетии $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$ каждая высота перейдет в медиатрису той стороны, на которую эта высота опущена. Значит в той же гомотетии точка H пересечения высот треугольника перейдет в точку O пересечения медиатрис его сторон, т. е. в центр окружности, описанной около треугольника. Этим доказано, что точка G лежит всегда между O и H и что $OG:GH=1:2$.

Далее, в указанной гомотетии $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$ окружность (ABC), описанная около треугольника ABC, перейдет в окружность $(A'B'C')$, проходящую через середины A', B', C' сторон BC, CA и AB $\Big[$радиус окружности $(A'B'C')$ равен $\frac{R}{2}$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC, ибо абсолютная величина коэффициента гомотетии $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$ равна $\frac{1}{2}\Big]$.

Центр ω окружности $(A'B'C')$ есть точка, полученная из O гомотетией $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$; это, следовательно, — середина отрезка OH. Так как середина ω отрезка OH равноудалена от высоты AA'' и от медиатрисы отрезка BC, то точка ω равноудалена и от точек A' и A''; значит окружность $(A'B'C')$ пройдет и через точку A'' (аналогично и через B'' и через C'').

Далее окружность $(A'B'C')$ имеет с высотой AA'' общую точку A'', значит она имеет с этой высотой еще одну общую точку; пусть A''' — эта точка. Так как $\angle A'A''A=90^\circ$, а точка A''' лежит на AA'', то $\angle A'A''A'''$ также равен 90°; но точки A' и A'' лежат на окружности $(A'B'C')$, значит точки A' и A''' — диаметрально противоположные точки окружности $(A'B'C')$. В гомотетии $(\omega, -1)$ точка A' поэтому перейдет в A''', а точка O естественно — в точку H (ибо ω — середина OH); отсюда следует, что $\overrightarrow{OA'}=-\overrightarrow{HA'''}$. С другой стороны, в гомотетии $(G, -2)$ точки O и A' перейдут соответственно в H и A, значит $\overrightarrow{OA'}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{HA}$. Значит $\overrightarrow{HA}=2\overrightarrow{HA'''}$, т. е. A''' — середина HA. Аналогично доказывается, что окружность $(A'B'C')$ проходит через середины B''' и C''' отрезков BH и CH.

§ 3. Обобщение задач

Умение обобщить задачу, дать для нее общее решение и применить затем результат к данной конкретной зада-

-че, является признаком очень высокой подготовки по математике. Для большинства поступающих это замечание нужно использовать в том смысле, чтобы учесть нельзя ли при решении данной задачи свести ее к известной задаче общего вида. Умение отыскать объединяющую идею в примерах казалось бы различного вида, является делом очень трудным, но развивать в себе это необходимо. Приведу несколько примеров из алгебры.

Пример 1. Задачи №№ 154, 158, 174, 219, 282, 297, 319, 322, 332, 339, 342, 352, 372, 382, 388 и некоторые другие задачи главы 1 могут быть сравнительно легко решены, если предварительно решить такую задачу: о п р е д е л и т ь в ф о р м е р а ц и о н а л ь н ы х н е р а в е н с т в м е ж д у п а р а м е т р а м и р а с п о л о ж е н и е д а н н о г о д е й с т в и т е л ь н о г о ч и с л а m о т н о с и т е л ь н о к о р н е й x_1 и x_2 к в а д р а т н о г о у р а в н е н и я $ax^2+bx+c=0$, с ч и т а я и х д е й с т в и т е л ь н ы м и и р а з л и ч н ы м и (т. е. с ч и т а я, ч т о $a \neq 0$ и $b^2-4ac>0$).

Р е ш е н и е. Получим сначала необходимые признаки:

1) Пусть $m<x_1<x_2$; тогда $a(am^2+bm+c)>0$ *, $m<\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$ и значит $a(2am+b)<0$.

2) Если $x_1<m<x_2$, то $a(am^2+bm+c)<0$.

3) Наконец, если $x_1<x_2<m$, то $a(am^2+bm+c)>0$, $a(2am+b)>0$.

Методом от противного доказывается и достаточность этих признаков.

Замечание. Если $a>0$ (в частности $a=1$), то полученные необходимые и достаточные признаки расположения числа m относительно действительных корней квадратного уравнения могут быть записаны в виде:

1) $m<x_1<x_2$, $am^2+bm+c>0$, $2am+b<0$;

2) $x_1<m<x_2$, $am^2+bm+c<0$;

3) $x_1<x_2<m$, $am^2+bm+c>0$, $2am+b>0$.

Рассмотрим теперь решение какой-либо из перечисленных выше задач, например, решение задачи № 154; найти все значения k, при которых корни уравнения $kx^2-(k+1)x+2=0$ будут действительны и оба по абсолютной величине меньше 1 (т. е. $-1<x_1\leqslant x_2<1$).

---

* В самом деле: $a(am^2+bm+c)=a^2(m-x_1)(m-x_2)$.

На основании решенной общей задачи вопрос сводится к решению следующей системы неравенств:

$$\left.\begin{array}{c} k \neq 0 \\ (k+1)^2 - 8k > 0 \end{array}\right\} \text{условие того, что корни действительны и различны;}$$

$$\left.\begin{array}{c} k(k+k+1+2) > 0 \\ k(-2k-k-1) < 0 \end{array}\right\} \text{условие того, что } -1 < x_1 < x_2;$$

$$\left.\begin{array}{c} k(k-k-1+2) > 0 \\ k(2k-k-1) > 0 \end{array}\right\} \text{условие того, что } x_1 < x_2 < 1.$$

Все эти неравенства будут иметь место тогда, и только тогда, когда $k > 3 + 2\sqrt{2}$. Отметим, что при $k = 3 + 2\sqrt{2}$ корни данного уравнения равны между собой и также заключены между -1 и $+1$.

Итак, $k \geqslant 3 + 2\sqrt{2}$.

Рекомендуется этим методом решить задачу № 2, гл. V.

В качестве второго примера рассмотрим общий метод исследования элементарных функций элементарными средствами, связанный с задачами на построение графиков функций, отыскания их наибольших и наименьших значений и т. д.

Для исследования функции $y = f(x)$ на возрастание или убывание в том или ином интервале (a, b) или на сегменте $[a, b]$ полезно составить разность $\delta = f(x_2) - f(x_1)$ (считая $x_2 > x_1$) и исследовать ее знак.

Если на данном сегменте $[a, b]$ из условия $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$ следует, что $\delta = f(x_2) - f(x_1) > 0$, то на этом сегменте функция $f(x)$ возрастает; в противном случае $(\delta < 0)$ — убывает.

Для исследования выпуклости графика вверх или вниз (на данном интервале или сегменте) полезно исследовать знак выражения

$$\Delta = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Если на данном интервале или сегменте $[a, b]$ из условий $a \leqslant x_1 \leqslant b$, $a \leqslant x_2 \leqslant b$, $x_1 \neq x_2$ следует, что $\Delta = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > 0$, то на этом сегменте график функции имеет выпуклость вверх (см. выше черт. 4 и 5); в противном случае ($\Delta < 0$) — вниз. Рассмотрим конкретный пример.

Исследовать функцию

$$y = f(x) = x^3 + px + q$$

на возрастание и убывание, на выпуклость вверх и вниз ее графика.

Решение. Полагая $x_2 > x_1$, составим разность:

$$f(x_2) - f(x_1) = x_2^3 + px_2 + q - (x_1^3 + px_1 + q) =$$
$$= (x_2 - x_1)(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + p) =$$
$$= (x_2 - x_1)[(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 + p] >^{*}$$
$$> (x_2 - x_1)\left[(x_1 + x_2)^2 - \frac{(x_1 + x_2)^2}{4} + p\right] =$$
$$= (x_2 - x_1)\left[\frac{3}{4}(x_1 + x_2)^2 + p\right].$$

Отсюда видно, что при $p > 0$ данная функция — возрастающая. Если же $p < 0$ и $x_1 > x_2 \geqslant \sqrt{-\frac{p}{3}}$ или $x_1 < x_2 \leqslant -\sqrt{-\frac{p}{3}}$, то $\frac{3}{4}(x_1 + x_2)^2 + p > \frac{3}{4} \cdot 4\left(-\frac{p}{3}\right) + p = 0$, т. е. функция в полуинтервалах $\left(-\infty, -\sqrt{-\frac{p}{3}}\right]$ и $\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}, +\infty\right]$ — возрастающая.

Если же $-\sqrt{-\frac{p}{3}} \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \sqrt{-\frac{p}{3}}$, то $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 < -\frac{p}{3} - \frac{p}{3} - \frac{p}{3} = -p$ и значит $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 + p < 0$, т. е. $f(x_2) - f(x_1) < 0$ — данная функция на сегменте $\left[-\sqrt{-\frac{p}{3}}, \sqrt{-\frac{p}{3}}\right]$ — убывающая.

---

* Так как $x_1 x_2 < \frac{(x_1 + x_2)^2}{4}$ $(x_1 \neq x_2)$.

Отсюда следует, что при $x = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$ данная функция принимает наибольшее значение, равное

$$-\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3} - p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q = q - \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}},$$

а при $x = \sqrt{-\frac{p}{3}}$ — наименьшее значение равное

$$q + \frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}.$$

Составим теперь выражение:

$$\Delta = f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left[f(x_1) + f(x_2)\right] =$$

$$= \frac{(x_1 + x_2)^3}{8} + p\frac{x_1 + x_2}{2} + q - \frac{x_1^3 + px_1 + q + x_2^3 + px_2 + q}{2} =$$

$$= \frac{(x_1 + x_2)^3}{8} - \frac{x_1^3 + x_2^3}{2} = -\frac{3}{8}(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)^2.$$

Отсюда видно, что при $x_1 \leqslant 0$, $x_2 \leqslant 0 \, (x_1 \neq x_2)$, данное выражение положительно — линия выпукла вверх, а при $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0 \, (x_1 \neq x_2)$, $\Delta < 0$ — линия выпукла вниз. График функции дан на черт. 20.

В качестве третьего примера, обобщающего целый цикл задач, приведем без доказательства две теоремы Гюльдена.

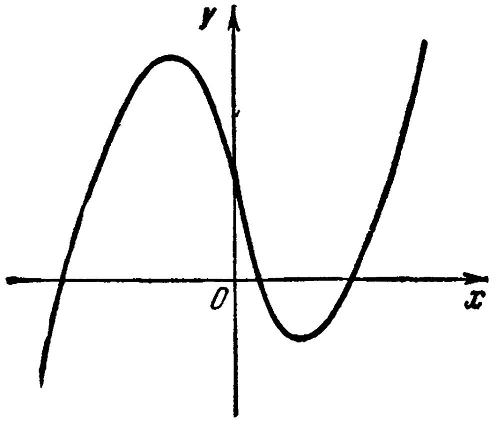
Первая теорема Гюльдена. Поверхность тела вращения, полученного вращением плоской ломаной вокруг оси, лежащей в плоскости этой ломаной, но не пересекающей ее, равна длине ломаной, умноженной на длину окружности, описанной ее центром тяжести.

Вторая теорема Гюльдена. Объем тела вращения, полученного вращением плоской замкнутой ломаной (не пересекающей себя) вокруг оси, лежащей в плоскости этой ломаной и не пересекающей ее, равен произведению площади, ограниченной этой ломаной на длину окружности, описанной ее центром тяжести.

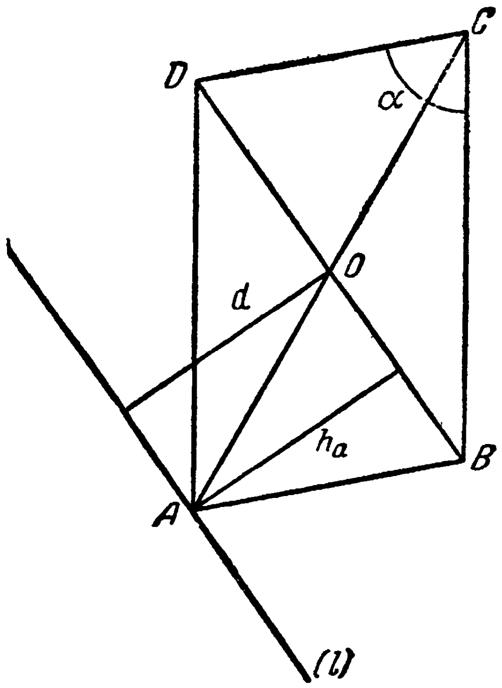
Предоставляя читателю доказательство этих теорем, рассмотрим ряд приложений этих теорем.

1) Пусть вокруг оси (l) вращается треугольник ABC; ось (l) не пересекает его контура; требуется вычислить поверхность тела вращения.

Решение. Пусть A', B', C' — середины сторон BC, CA и AB; это — центры тяжести сторон BC, CA и AB. Обозначим через a, b, c длины сторон BC, CA и AB.



Черт. 20



Черт. 21

Вопрос сводится к отысканию центра тяжести системы трех материальных точек A', B', C', в которых сосредоточены массы, соответственно равные a, b, c. Центр тяжести системы из двух материальных точек A' и B', в которых сосредоточены массы, соответственно равные a и b, расположен в точке C'' отрезка $A'B'$ такой, что $A'C'' : C''B' = b:a$. Но так как $b : a = AC : CB = A'C' : C'B'$, то $A'C'' : C''B' = A'C' : C'B'$ и значит точка C'' лежит на биссектрисе $C'C''$ внутреннего угла C' треугольника $A'B'C'$. На этой биссектрисе лежит и центр тяжести системы трех материальных точек A', B', C', в которых сосредоточены массы, соответственно равные a, b, c. Аналогично доказывается, что центр тяжести указанной системы трех материальных точек A', B', C', в которых сосредоточены массы a, b, c, лежит на биссектрисах внутренних углов A' и B' треугольника $A'B'C'$. Итак, искомый центр тяжести есть центр O окружности, вписанной в треугольник $A'B'C'$, вершинами которого служат середины сторон BC, CA и AB данного треугольника. Поверхность тела вращения, полученного вращением вокруг оси (l) контура треугольника ABC равна $2p2\pi d$ ($2p$ — периметр треугольника ABC, а d — расстояние от точки O до оси вращения l).

2) Параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB=a$ и $AD=b$ и острым углом $BAD=\alpha$ вращается вокруг оси (l), проходящей через вершину A параллельно диагонали BD (черт. 21). Определить поверхность тела вращения.

Решение. Вопрос сводится к определению расстояния d от точки O пересечения диагоналей BD и AC до оси (l) вращения; это расстояние равно расстоянию между прямыми BD и (l), иначе — высоте h_a треугольника DAB.

Имеем:

$$BD = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha},$$

$$\text{пл. } \Delta ABD = \frac{1}{2} d \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha},$$

$$\text{пл. } \Delta ABD = \frac{1}{2} ab\sin\alpha;$$

отсюда

$$d = \frac{ab\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}$$

и, следовательно, поверхность тела вращения:

$$\sigma = (2a+2b)\cdot 2\pi d = \frac{4\pi ab(a+b)\sin\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}.$$

3) Параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB=a$ и $AD=b$ и острым углом α вращается вокруг оси (l), проходящей через вершину A, параллельно диагонали BD. Определить объем тела вращения.

Решение. Искомый объем равен (см. предыдущий пример):

$$v = ab\sin\alpha\cdot 2\pi d = \frac{2\pi a^2 b^2 \sin^2\alpha}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}}.$$

Уже на этих трех примерах видно, что определение поверхностей и объемов многих тел вращения есть вобщем однообразная задача, сводящаяся к применению только двух теорем Гюльдена. Подобная типизация задач возможна, как мы показали, и в алгебре, и в геометрии, и в тригонометрии.

Существует, например, формула Симпсона

$$v = \frac{h}{6}(Q_0 + 4Q_1 + Q_2),$$

где h — «высота» тела, Q_0 и Q_2 — площади его оснований, Q_1 — площадь «среднего» сечения, по которой можно совершенно точно вычислять объемы тел, площадь сечения Q которых плоскостью, параллельной основанию и отстоящей от основания на расстоянии x, выражается функцией вида: $Q = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (сюда относятся, например, следующие тела: сфера, сферический слой, сферический сегмент, конус, усеченный конус, цилиндр и даже такие тела как клин, параболоид вращения и т. д.). Формула Симпсона также является хорошим примером формулы, типизирующей решение огромного числа задач на вычисление объемов тел *.

В заключение этого пункта рассмотрим еще одну «обобщающую» идею, лежащую в основе решения неравенств, содержащих элементарные функции. Имеет место следующая теорема:

*если элементарная функция*** $f(x)$ *определена при всех значениях* x *в интервале* (a, b) *и если она в этом интервале* (a, b) *не имеет корней, то она в этом интервале сохраняет знак.*

---

* В курсе высшей математики такая типизация находит практически свое завершение в интегральном исчислении, где дается формула для вычисления объема тела при «любом» законе распределения площади сечения тела в зависимости от расстояния x секущей плоскости от основания.

** Функции x^n (n — рациональное число), $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, a^x $(a > 0,\ a \neq 1)$, $\lg_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{arc\,ctg} x$ — называются основными элементарными функциями. Функции, полученные из них в результате действий сложения, вычитания, умножения и деления и повторного применения знаков основных элементарных функций, называются элементарными. Например,

$$y = \sqrt{\frac{\sin(3x^{\operatorname{tg} x} + 5x^2 - 3)}{\lg(2^x + \lg x + 5 \arcsin(1 - \sqrt{x}))}}$$

— элементарная функция.

Доказательства этой теоремы мы приводить не будем, но приложение ее дадим.

Пусть, например, надо решить неравенство

$$2\sin x + \cos 2x > 1.$$

Переписывая это неравенство в виде:

$$2\sin x + 1 - 2\sin^2 x > 1$$

или

$$\sin x(1 - \sin x) > 0,$$

положим

$$\sin x(1 - \sin x) = 0$$

и найдем корни этого уравнения на сегменте $[0, 2\pi]$:

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{\pi}{2},\ x_3 = \pi,\ x_4 = 2\pi.$$

При $x = \frac{\pi}{4}$, $2\sin x + \cos 2x = 2\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{2} = \sqrt{2} > 1$, значит неравенство $2\sin x + \cos 2x > 1$ выполнено и при всех x таких, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$, ибо в этом интервале уравнение $2\sin x + \cos 2x = 1$ не имеет корней.

Далее, например, при $x = \frac{3\pi}{4}$ имеем $2\sin x + \cos 2x = 2\sin\frac{3\pi}{4} + \cos\frac{3\pi}{2} = \sqrt{2} > 1$, значит, $2\sin x + \cos 2x > 1$ и при всех x из интервала $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Далее, если $\pi < x < 2\pi$, например, $x = \frac{3\pi}{2}$, то $2\sin x + \cos 2x = 2\sin\frac{3\pi}{2} + \cos 3\pi < 0 < 1$, значит $2\sin x + \cos 2x < 1$ и при всех x таких, что $\pi < x < 2\pi$.

Итак, все решения данного неравенства:

$$2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

и

$$\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \pi + 2k\pi,$$

где k — любое целое число.

Общий метод применения указанной теоремы заключается, следовательно, в следующем: если надо решить неравенство $f(x)>0$ (или $f(x)<0$), где $f(x)$ — элементарная функция, то решаем сначала уравнение $f(x)=0$. Пусть x_1, x_2, x_3, ... — корни этого уравнения, расположенные в порядке возрастания, или значения x, при которых функция $f(x)$ не определена.

Для определения знака $f(x)$ в каком-нибудь интервале (x_k, x_{k+1}) берем любое значение $x=x_0$ из этого интервала: $x_k<x_0<x_{k+1}$; если $f(x_0)>0$, то $f(x)>0$ при всех x из интервала (x_k, x_{k+1}), а если $f(x_0)<0$, то $f(x)<0$ при всех x из этого интервала [предполагается, конечно, что $f(x)$ определена на всем интервале (x_k, x_{k+1})].

Изложенный прием сводит таким образом решение неравенств, содержащих элементарные функции к уравнениям того же типа (т. е. уравнениям, содержащим элементарные функции).

Подобных обобщающих приемов решения задач имеется много в геометрии и алгебре и в тригонометрии. Отыскание и классификация этих приемов играет весьма важную роль в развитии элементарной математики.

Не развивая далее конкретно и подробно этой идеи, отметим лишь еще несколько принципов и методов, позволяющих обобщить способы решения многих задач: принцип Кавальери в геометрии, метод перспективы, теорема Безу, как инструмент доказательства многих тождеств в алгебре и многое другое.

Подводя итог настоящему пункту, следует сказать, что в школах еще мало внимания уделяют изучению методов, позволяющих классифицировать задачи по способу их решения. Отыскание таких обобщающих задач и стандартных методов их решения составляет важную задачу в методике решения задач элементарной математики.

§. 4. Синтез разделов элементарной математики

Серьезным недостатком является неумение синтезировать знания, полученные в результате изучения разных разделов школьного курса элементарной математики (например, исследовать знак квадратного трехчлена относительно какой-нибудь тригонометрической функции, если к тому же коэффициенты трехчлена — функции какого-нибудь параметра или решение задач на построение с применением тригонометрии, или исследование одного вопроса различными методами: алгебраически, геометрически и тригонометрически; сопоставление результатов этого исследования и установление их эквивалентности и т. д.).

В главах IV—IX дано много задач, при решении каждой из которых приходится применять различные разделы школьного курса.

Приведем здесь лишь один пример.

Доказать, что если $0 < x_1 < a$, $0 < x_2 < a$, $x_1 \neq x_2$, то

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 - x_1^2} + \sqrt{a^2 - x_2^2}\right) < \sqrt{a^2 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2}.$$

Алгебраическое решение. Данное неравенство эквивалентно следующему

$$\sqrt{a^2 - x_1^2} + \sqrt{a^2 - x_2^2} < 2\sqrt{a^2 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2}$$

или (так как для всех радикалов берется арифметическое значение) это неравенство эквивалентно следующему:

$$a^2 - x_1^2 + 2\sqrt{(a^2 - x_1^2)(a^2 - x_2^2)} + a^2 - x_2^2 <$$
$$< 4a^2 - (x_1 + x_2)^2,$$

или

$$\sqrt{(a^2 - x_1^2)(a^2 - x_2^2)} < a^2 - x_1 x_2$$

и так как $a^2 - x_1 x_2 > 0$, то это неравенство эквивалентно следующему:

$$(a^2 - x_1^2)(a^2 - x_2^2) < a^4 - 2a^2 x_1 x_2 + x_1^2 x_2^2$$

или

$$-a^2 x_1^2 - a^2 x_2^2 + 2a^2 x_1 x_2 < 0,$$

или

$$-a^2 (x_2 - x_1)^2 < 0 -$$

— это неравенство верно, значит верно и начальное неравенство, так как в процессе преобразования мы не нарушали эквивалентности.

Тригонометрическое решение. Так как $0 < x_1 < a$, $0 < x_2 < a$, $a > 0$, $x_1 \neq x_2$, то найдутся неравные углы φ_1 и φ_2 такие, что $0 < \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$, $0 < \varphi_2 < \frac{\pi}{2}$ и

$$\frac{x_1}{a} = \cos\varphi_1, \quad \frac{x_2}{a} = \cos\varphi_2.$$

Но тогда

$$x_1 = a\cos\varphi_1, \quad x_2 = a\cos\varphi_2$$

и

$$\sqrt{a^2 - x_1^2} = \sqrt{a^2 - a^2\cos^2\varphi_1} = a\sin\varphi_1,$$

$$\sqrt{a^2 - x_2^2} = \sqrt{a^2 - a^2\cos^2\varphi_2} = a\sin\varphi_2,$$

$$\sqrt{a^2 - \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2)^2} =$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{4 - 4\cos^2\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\cos^2\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}} >$$

$$> \frac{a}{2}\sqrt{4 - 4\cos^2\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}} = a\sin\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} >$$

$$> a\sin\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \frac{a}{2}(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2) =$$

$$= \frac{1}{2}(a\sin\varphi_1 + a\sin\varphi_2) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 - x_1^2} + \sqrt{a^2 - x_2^2}\right).$$

Геометрическое решение. Построим два прямоугольных треугольника ABC и ADE таких, что $AB = x_1$, $AD = x_2$, $AC = AE = a$ (черт. 22). Тогда $BC = \sqrt{a^2 - x_1^2}$, $DE = \sqrt{a^2 - x_2^2}$ и значит $\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2 - x_1^2} + \sqrt{a^2 - x_2^2}\right)$ — средняя линия трапеции $BCED$.

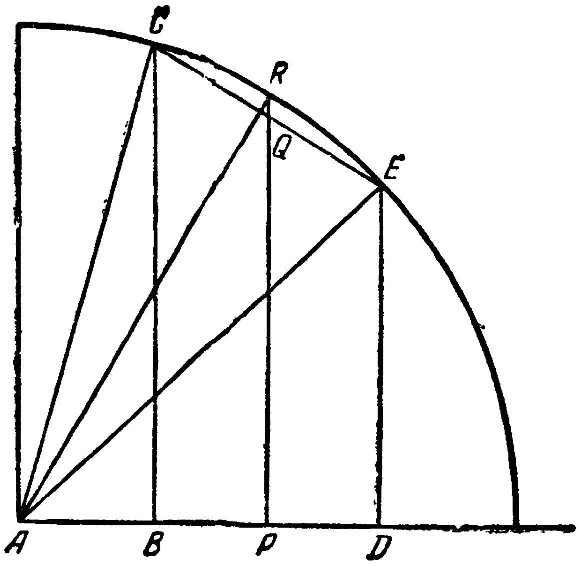
Далее:

$$BD = x_2 - x_1, \ BP = \frac{x_2 - x_1}{2}, \ AP = x_1 + \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

значит

$$\sqrt{a^2-\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2-AP^2}.$$

Построим окружность радиуса a с центром A. Эта окружность пройдет через точки C и E. Продолжим PQ



Черт. 22

до пересечения с окружностью в точке R. Тогда $\sqrt{a^2-AP^2}=PR$ и, так как $PR>PQ$, то все доказано.

§ 5. Техническая подготовка

У некоторой части поступавших следует отметить недостаточную техническую подготовку (умение быстро, а главное верно, провести довольно сложные преобразования). Ошибки технического порядка резко возрастают, если технически трудный пример осложнен еще какой-либо трудностью принципиального характера. С этим дефектом надо решительно бороться. Поступающий в высшее учебное заведение должен абсолютно точно и свободно производить элементарные преобразования в алгебре и тригонометрии даже и достаточно технически сложные.

§ 6. Задачи с параметрами

Очень плохо обстоит дело с решением задач, содержащих параметры. В подобного рода вопросах поступающие часто решают задачу формально, не заботясь о том, имеет ли смысл полученная формула.

Пример 1. На конкурсном экзамене в одном из московских вузов было предложено решить следующее уравнение

$$1 + \lg_x \frac{4-x}{10} = (\lg_{10} \lg_{10} n - 1) \lg_x 10.$$

Приведем формальное решение без учета области изменения параметра n:

$$\lg_x x + \lg_x \frac{4-x}{10} = \lg_{10} \lg_{10} n \cdot \lg_x 10 - \lg_x 10,$$

$$\lg_x \frac{x(4-x)}{10} = \lg_x \lg_{10} n - \lg_x 10,$$

$$\lg_x \frac{x(4-x)}{10} = \lg_x \frac{\lg_{10} n}{10},$$

$$\frac{x(4-x)}{10} = \frac{\lg_{10} n}{10},$$

$$x^2 - 4x + \lg_{10} n = 0,$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4 - \lg_{10}^2 n}.$$

Такое решение нельзя признать удовлетворительным, так как не указано, при каких значениях n значения

$$x = 2 \pm \sqrt{4 - \lg_{10} n}$$

будут корнями данного уравнения.

Приведем исчерпывающее решение данного уравнения. Прежде всего ясно, что если $n \leqslant 1$, то $\lg_{10} \lg_{10} n$ не существует и значит при $n \leqslant 1$ уравнение не имеет решений.

Далее, так как x является основанием логарифмов $\left(\text{например, в выражении } \lg_x \frac{4-x}{10}\right)$, то корнями данного уравнения могут быть только положительные значения x, отличные от 1.

Кроме того, так как в данное уравнение входит $\lg_x \frac{4-x}{10}$, то $x < 4$. Итак, предполагая, что $n > 1$ и, что уравнение имеет корень x такой, что $0 < x < 4$ и $x \neq 1$, произведем все указанные выше преобразования. Результат, который мы получили:

$$x = 2 \pm \sqrt{4 - \lg_{10} n}$$

дает прежде всего следующее ограничение на n: $n \leqslant 10000$, так как при $n > 10\,000$ оба корня мнимые; итак, если $1 < n \leqslant 10\,000$ и если этой формулой определяются значения x такие, что $0 < x_1 < 4$, $0 < x_2 < 4$ и $x_1 \neq 1$, $x_2 \neq 1$, то оба эти значения будут корнями данного уравнения, так как проведенные выкладки будут обратимы. Если же не выполнены эти условия, хотя бы для одного $x = 2 \pm \sqrt{4 - \lg_{10} n}$, то это значение x не будет корнем данного уравнения.

Прежде всего заметим, что если $1 < n \leqslant 10\,000$, то оба корня будут в интервале $(0,4)$, так что при выполнении неравенств $1 < n \leqslant 10\,000$ оба корня удовлетворяют неравенствам $0 < x_1 < 4$ и $0 < x_2 < 4$.

Остается установить, не будет ли среди корней x_1, x_2 равных 1.

Ясно, что $2 + \sqrt{4 - \lg_{10} n} > 1$ $(1 < n \leqslant 10\,000)$. Значит единице может быть равен лишь корень

$$2 - \sqrt{4 - \lg_{10} n}.$$

Полагая

$$2 - \sqrt{4 - \lg_{10} n} = 1,$$

находим

$$\sqrt{4 - \lg_{10} n} = 1,$$

$$4 - \lg_{10} n = 1,$$

$$\lg_{10} n = 3, \quad n = 1\,000.$$

Окончательно, если $n \leqslant 1$ или $n > 10\,000$, уравнение не имеет корней; если $n = 1000$, уравнение имеет один корень $x = 3$. Если же $1 < n \leqslant 10\,000$, то уравнение имеет два корня $x = 2 \pm \sqrt{4 - \lg_{10} n}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sin^4 x + \cos^4 x + \sin 2x + a = 0. \qquad (1)$$

Решение. Перепишем данное уравнение в виде

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x + \sin 2x + a = 0$$

или

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x + \sin 2x + a = 0,$$

или

$$\sin^2 2x - 2\sin 2x - 2(a+1) = 0.$$

Положим $\sin 2x = z$. Получим

$$z^2 - 2z - 2(a+1) = 0. \qquad (2)$$

Прежде всего, это уравнение должно иметь действительные корни, т. е.

$$1 + 2a + 2 \geqslant 0 \text{ или } a \geqslant -\frac{3}{2}.$$

Если $a = -\frac{3}{2}$, то уравнение принимает вид; $z^2 - 2z + 1 = 0$, т. е. $z = 1$, $\sin 2x = 1$, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ (k — любое целое число). Пусть $a > -\frac{3}{2}$. Тогда корни уравнения (2) действительны и различны; обозначим их через z_1 и z_2 и будем считать, что $z_1 < z_2$.

Данное уравнение (1) имеет решение в одном из следующих случаев:

1) $z_1 < -1 < z_2 < 1$;
2) $-1 < z_1 < z_2 < 1$;
3) $-1 < z_1 < 1 < z_2$.

В случае 1) годится лишь бо́льший корень z_2; в случае 2) — оба корня z_1 и z_2; в случае 3) — меньший корень z_1.

Случай 1) будет иметь место, если -1 заключен между корнями уравнения (2), а 1 больше обоих корней, т. е. (см. стр. 148)

$$\left.1 + 2 - 2(a+1) < 0\right\} \text{ условие } z_1 < -1 < z_2,$$

$$\left.\begin{array}{c} 1 - 2 - 2(a+1) > 0 \\ 2 - 2 > 0 \end{array}\right\} \text{ условие } z_1 < z_2 < 1 -$$

— что невозможно.

Случай 2) будет иметь место, если

$$1+2-2(a+1)>0\} \text{ условие } -1<z_1<z_2,$$
$$-2-2<0$$

$$\left.\begin{array}{c}1-2-2(a+1)>0\\ 2-2>0\end{array}\right\} \text{ условие } z_1<z_2<1,$$

что опять невозможно.

Случай 3) будет иметь место, если

$$\left.\begin{array}{c}1+2-2(a+1)>0\\ -2-2<0\end{array}\right\} \text{ условие } -1<z_1<z_2;$$

$$1-2-2(a+1)<0\ \} \text{ условие } z_1<1<z_2.$$

Последние неравенства имеют место, если

$$-\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2}.$$

Итак, при этом условии

$$\sin 2x = 1-\sqrt{3+2a}$$

и

$$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{2}(-1)^k \arcsin\left(1-\sqrt{3+2a}\right)$$

(k — любое целое число).

Остается рассмотреть граничные случаи: $a=\frac{1}{2}$ и $a=-\frac{3}{2}$. Случай $a=-\frac{3}{2}$ мы уже рассмотрели. Если же $a=\frac{1}{2}$, то $z^2-2z-3=0$, $z=1\pm 2$, $z=-1$, $\sin 2x=-1$, $2x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$, $x=\frac{3\pi}{4}+k\pi$. Итак, если

$$-\frac{3}{2}<a<\frac{1}{2},$$

то

$$x=\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{2}(-1)^k \arcsin\left(1-\sqrt{3+2a}\right).$$

Если $a = -\frac{3}{2}$, то

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi,$$

а если $a = \frac{1}{2}$, то $x = \frac{3\pi}{4} + k\pi$
(во всех трех формулах k — любое целое число).

Пример 3. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC $(\hat{A} = 90°)$. Дана длина c катета AB. Обозначим через O центр окружности, описанной около этого треугольника, а через H — основание высоты, опущенной на гипотенузу BC из вершины A. Дана длина m отрезка OH. Составить уравнение, определяющее угол B. Исследовать в зависимости от значения m возможность решения задачи и число решений.

Решение. Исключим случай $m = 0$ $\left(\text{в случае } m = 0\right.$ точки O и H совпадают и треугольник ABC — равнобедренный прямоугольный, $\left.\hat{B} = \frac{\pi}{4}\right)$. Предположим $m > 0$. Заметим, что если $\hat{B} < \frac{\pi}{4}$, то точка H лежит между O и C и $\widehat{AOH} = 2\hat{B}$; если же $\hat{B} > \frac{\pi}{4}$, то точка H лежит между O и B и $\widehat{AOH} = \pi - 2B$. Рассмотрим отдельно оба случая.

1-й случай. $\hat{B} < \frac{\pi}{4}$. В этом случае $OA = \frac{BC}{2} = \frac{c}{2\cos B}$ и $OH = OA \cos \widehat{AOH} = \frac{c \cdot \cos 2B}{2\cos B}$. По условию $\frac{c \cdot \cos 2B}{2\cos B} = m$ или

$$2c\cos^2 B - 2m\cos B - c = 0.$$

Полагая $\cos B = x$, получаем следующую смешанную систему:

$$f(x) \equiv 2cx^2 - 2mx - c = 0,$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1.$$

Уравнение $f(x)=0$ имеет действительные корни противоположных знаков. Отрицательный корень не дает решения задачи. Положительный же корень будет давать решение тогда и только тогда, когда

$$\frac{\sqrt{2}}{2}<x<1,$$

т. е.

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)f(1)<0,$$

откуда $-m\sqrt{2}(c-2m)<0$, т. е. $m<\frac{c}{2}$.

Итак, если $0<m<\frac{c}{2}$ и $\widehat{B}<\frac{\pi}{4}$, то существует и только один треугольник, удовлетворяющий условию задачи. Угол B этого треугольника определится из соотношения:

$$\cos B=\frac{m+\sqrt{m^2+2c^2}}{2c}.$$

2-й случай. $\widehat{B}>\frac{\pi}{4}$. В этом случае $OA=\frac{c}{2\cos B}$, но

$$OH=OA\cos AOH=OA\cos(\pi-2B)=-\frac{c\cos 2B}{2\cos B}.$$

Получаем уравнение

$$-\frac{c\cos 2B}{2\cos B}=m,$$

или

$$2c\cos^2 B+2m\cos B-c=0,$$

или, полагая $\cos B=x$ $\left(\text{и замечая, что теперь } \widehat{B}>\frac{\pi}{4}\right)$

$$\varphi(x)\equiv 2cx^2+2mx-c=0,$$

$$0<x<\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Уравнение $\varphi(x)=0$ имеет корни противоположных знаков. Отрицательный корень не дает решения задачи;

положительный же дает тогда и только тогда, когда $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)>0$, т. е. $m\sqrt{2}>0$, т. е. $m>0$.

Условие $m>0$ выполнено по предположению, значит положительный корень

$$x=\cos B=\frac{-m+\sqrt{m^2+2c^2}}{2c}$$

всегда дает решение задачи.

Подводя итоги, можно сказать, что

1) если $0<m<\frac{c}{2}$, то задача имеет два решения; имеем один треугольник с углом $\widehat{B}<\frac{\pi}{4}$, другой — с углом $\widehat{B}>\frac{\pi}{4}$; косинусы этих углов B определяются соотношением

$$\cos B=\frac{\sqrt{m^2+2c^2}\pm m}{2c}$$

2) если $m>\frac{c}{2}$, то задача имеет одно решение с углом $\hat{B}$, большим $\frac{\pi}{4}$,

$$\cos\hat{B}=\frac{\sqrt{m^2+2c^2}-m}{2c};$$

3) если $m=\frac{c}{2}$, имеем одно решение, $B=\frac{\pi}{3}$;

4) если $m=0$, имеем одно решение, $B=\frac{\pi}{4}$.

Задачи с параметрами являются пожалуй наиболее интересными задачами по элементарной математике. Задач подобного типа очень много среди задач, помещенных в главах IV—IX.

§ 7. Логическая сторона вопросов решения уравнений и систем уравнений

Не все поступавшие в высшие учебные заведения понимают основную логическую сторону теории решения уравнений и систем уравнений, вопросы появления «посторонних» решений и причины «утери» решений. В подавляющем большинстве случаев при решении уравнений и систем уравнений мы получаем **необходимые** признаки решения системы, а потому решения как правило **следует проверять** подстановкой в начальные уравнения системы. Если производится цепь эквивалентных преобразований, то такая проверка не нужна; при эквивалентных преобразованиях уравнений мы никогда и не потеряем и не приобретем «посторонних» корней.

Наконец, абсолютно недопустимым является производство выкладок, при которых из данного уравнения получается уравнение, не являющееся следствием начального, так как при этом могут быть потеряны корни начального уравнения.

Наконец, следует иметь в виду возможность применения смешанных систем; при этом достигается эквивалентность всей цепи промежуточных результатов.

Пример 1. Решить уравнение

$$\lg(x-1)+\lg(x-5)=1.$$

Решение. *1-й способ.*

$$\lg(x-1)+\lg(x-5)=1, \tag{1}$$

$$\lg[(x-1)(x-5)]=\lg 10, \tag{2}$$

$$(x-1)(x-5)=10, \tag{3}$$

$$x^2-6x-5=0, \tag{4}$$

$$x=3\pm\sqrt{14}. \tag{5}$$

Проверка: $x=3-\sqrt{14}$ — не корень данного уравнения, так как при $x=3-\sqrt{14}$ мы будем иметь $x-1<0$, $x-5<0$, так что $\lg(x-1)$ и $\lg(x-5)$ не существуют.

Значение же $x=3+\sqrt{14}$ является корнем данного уравнения; в самом деле, если $x=3+\sqrt{14}$, то $x-1=2+\sqrt{14}>0$, $x-5+\sqrt{14}-2>0$, оба логарифма $\lg(x-1)$ и $\lg(x-5)$ существуют и при $x=3+\sqrt{14}$

$$\lg(x-1)+\lg(x-5)=\lg(\sqrt{14}+2)+\lg(\sqrt{14}-2)= \\ =\lg(14-4)=\lg 10=1.$$

Проанализируем логическую сторону приведенного выше решения; **предположим**, что x есть корень данного уравнения, так что соотношение (1) есть тождество; тогда будут выполнены равенства (2), (3), (4) и (5), каждое из которых есть следствие предыдущего. Таким образом, логический вывод, который следует сделать, таков: если x есть корень данного уравнения, то x равен или $3+\sqrt{14}$ или $3-\sqrt{14}$; проверка устанавливает, что только $x=3+\sqrt{14}$ — корень данного уравнения, так что данное уравнение имеет и притом только один корень. Подобным образом и решаются обычно уравнения и системы и как мы видим, проверка устанавливает наличие посторонних решений и устанавливает, какие из найденных значений x являются корнями данного уравнения. При этом, т. е. при условии, что из данного соотношения получаются следствия, корни никогда не теряются. Трудно и даже невозможно перечислить все причины, по которым появляются посторонние корни при указанном методе решений уравнений и систем. Можно сказать лишь то, что происходит это в результате какого-то неэквивалентного преобразования уравнения, хотя бы в одной цепи промежуточных выкладок.

В данном примере такое нарушение эквивалентности произошло при переходе от уравнения (1) к уравнению (2). В самом деле, из соотношения (1) следует соотношение (2), но не наоборот; из соотношения (2) следует

$$\lg|x-1|+\lg|x-5|=1,$$

а это — не уравнение (1) (заметим, что если $a\neq 0$ и $b\neq 0$, то $\lg ab=\lg|a|+\lg|b|$, при условии, что a и b одного знака).

Все дальнейшие преобразования уже эквивалентны, так что уравнения (2), (3), (4) имеют по два корня $x=3\pm\sqrt{14}$. Покажем теперь как решить то же уравнение, применяя метод смешанных систем*.

Данное уравнение

$$\lg(x-1)+\lg(x-5)=1$$

эквивалентно следующей смешанной системе

$$\lg[(x-1)(x-2)]=\lg 10, \qquad (6)$$
$$x>5.$$

В самом деле, если выполнено соотношение (1), то $x-1>0$, $x-5>0$, т. е. $x>5$ и кроме того, потенцируя

* Метод введен С. И. Новоселовым в 1952 году.

получим $\lg[(x-1)(x-5)] = \lg 10$, так что будут выполнены оба соотношения (6). Обратно. Если выполнены соотношения (6), то $x-1>0$, $x-5>0$, поэтому $\lg[(x-1)(x-5)] = \lg(x-1)+\lg(x-5)$ и значит $\lg(x-1)+\lg(x-5)=1$, т. е. будет выполнено соотношение (1). Решая уравнение, входящее в смешанную систему (6) (путем производства цепи эквивалентных преобразований) мы получим $x = 3 \pm \sqrt{14}$, так что смешанная система (6) эквивалентна такой $x = 3 \pm \sqrt{14}$, $x > 5$, но $x = 3 - \sqrt{14} < 5$, а $x = 3 + \sqrt{14} > 5$, значит данное уравнение имеет и притом только один корень $x = 3 + \sqrt{14}$; проверка не нужна.

Пример 2. Решить уравнение:

$$\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{ctg}(\pi \operatorname{ctg} x).$$

Решение:

$$\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{ctg}(\pi \operatorname{ctg} x), \tag{1}$$

$$\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{ctg} x\right), \tag{2}$$

$$\pi \operatorname{tg} x = \frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{ctg} x + k\pi, \tag{3}$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = k + \frac{1}{2}, \tag{4}$$

$$\sin 2x = \frac{4}{1+2k}, \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x &= 2n\pi + \arcsin\frac{4}{1+2k}, \\ 2x &= 2n\pi + \pi - \arcsin\frac{4}{1+2k}, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= n\pi + \frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{1+2k}, \\ x &= n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{1+2k}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Это решение проведено в плане, указанном выше, т. е. каждое из соотношений (2), (3), (4), (5), (6), (7) является следствием предыдущего, а потому потерять корней мы не могли; «посторонние» же решения появиться могли. Поэтому необходима проверка найденных значений для x. Прежде всего заметим, что функция $\arcsin \frac{4}{1+2k}$ определена, если $\left|\frac{4}{1+2k}\right| \leqslant 1$, поэтому для k исключаются значения: $k=0$, $k=1$, $k=-1$, $k=-2$. Далее, уравнения (1) и (2) эквивалентны; начиная с уравнения (3) и до (7) эквивалентность нигде не могла быть нарушена [следует только учесть, что уже в уравнении (3), как выясняется ниже для k, надо исключить значения $k=0$, $k=1$, $k=-1$ и $k=-2$]. Эквивалентность могла быть нарушена при переходе от уравнения (2) к уравнению (3); уравнение (3) есть следствие уравнения (2), но не наоборот. Поэтому при переходе от уравнения (2) к уравнению (3) могли появиться лишние корни и это потому, что среди найденных значений x, определенных формулами (7), могут быть такие, для которых $\operatorname{tg} x$ есть число вида $\frac{2s+1}{2}$ (где s — число целое); в таком случае $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x)$ не существует, ибо $\pi \operatorname{tg} x = \frac{2s+1}{2}\pi$.

Кроме того, из значений x, определяемых формулами (7), должны быть исключены и такие значения x, для которых $\operatorname{ctg} x$ есть целое число, ибо тогда не существует $\operatorname{ctg}(\pi \operatorname{ctg} x)$. Итак, из значений x, определяемых формулами (7), где k — любое целое число, кроме $0, 1, -1$ и -2, следует исключить еще те и только те значения k, для которых

$$\operatorname{tg} x = \frac{2s+1}{2} \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg} x = s$$

(s — число целое); все же остальные значения x, определяемые формулами (7), будут корнями и исходного уравнения (1).

Беря первую из формул (7), находим:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(n\pi + \frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{1+2k}\right) =$$

$$= \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{1+2k}\right) = \frac{\sin\left(\arcsin\frac{4}{1+2k}\right)}{1+\cos\left(\arcsin\frac{4}{1+2k}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{4}{1+2k}}{1+\sqrt{1-\frac{16}{(1+2k)^2}}}.$$

Полагая

$$\frac{\frac{4}{1+2k}}{1+\sqrt{1-\frac{16}{(1+2k)^2}}} = \frac{2s+1}{2}$$

и вводя обозначения $1+2k=p$, $1+2s=q$, получим

$$\frac{4}{p} = \frac{q}{2}\left(1+\sqrt{1-\frac{16}{p^2}}\right),$$

$$\frac{8}{pq} - 1 = \sqrt{1-\frac{16}{p^2}},$$

$$\frac{64}{p^2 q^2} - \frac{16}{pq} + 1 = 1 - \frac{16}{p^2},$$

$$\frac{4}{pq^2} - \frac{1}{q} = -\frac{1}{p},$$

$$4 - pq = -q^2,$$

$$q(p-q) = 4.$$

Так как q — нечетное число, то это равенство возможно только при $q=1$ и при $q=-1$; $q=1$, $p=5$, а при $q=-1$, $p=-5$. При $p=5$, $k=2$, а при $p=-5$, $k=-3$. Подставляя для проверки $k=2$ и $k=-3$ в выражение

$$\frac{\frac{4}{1+2k}}{1+\sqrt{1-\frac{16}{(1+2k)^2}}},$$

получим: при $k=2$ это выражение обращается в $\frac{1}{2}$, а при $k=-3$ в $-\frac{1}{2}$ (в обоих случаях в половину нечетного числа). Значит для первой из формул (7) для k должны быть еще исключены значения $k=2$ и $k=-3$.

Теперь посмотрим, не может ли для первой из формул (7) $\operatorname{ctg} x$ обратиться в целое число

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}\left(\pi n + \frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{1+2k}\right) =$$

$$= \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{1+2k}\right) = \frac{\sin\left(\arcsin\frac{4}{1+2k}\right)}{1-\cos\left(\arcsin\frac{4}{1+2k}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{4}{1+2k}}{1-\sqrt{1-\frac{16}{(1+2k)^2}}}.$$

Приравнивая это выражение целому числу s и полагая $2s=q$, $1+2k=p$, будем иметь

$$\frac{\frac{4}{p}}{1-\sqrt{1-\frac{16}{p^2}}} = \frac{q}{2}, \quad \frac{8}{pq} = 1-\sqrt{1-\frac{16}{p^2}},$$

$$\sqrt{1-\frac{16}{p^2}} = 1-\frac{8}{pq},$$

$$1-\frac{16}{p^2} = 1-\frac{16}{pq}+\frac{64}{p^2q^2},$$

$$-\frac{1}{p} = -\frac{1}{q}+\frac{4}{pq^2},$$

$$-q^2 = -pq+4,$$

$$q(p-q)=4,$$

а так как q — четное, а p — нечетное, то $q=4$; $p=5$, значит $x=2$ или $q=-4$, $p=-5$, значит $k=-3$, Итак для первой из формул (7) надо исключить лишь следующие значения $k: 0, 1, 2 - 1, \ -2, \ -3$. Переходим ко второй из формул (7).

Находим

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{1+2k}\right) =$$

$$= \operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{1+2k}\right) = \frac{\sin\left(\arcsin\frac{4}{1+2k}\right)}{1-\cos\left(\arcsin\frac{4}{1+2k}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{4}{1+2k}}{1-\sqrt{1-\frac{16}{(1+2k)^2}}}.$$

Полагая

$$\frac{\frac{4}{1+2k}}{1-\sqrt{1-\frac{16}{(1+2k)^2}}} = \frac{2s+1}{2}, \quad 1+2k=p, \quad 1+2s=q,$$

находим

$$\frac{8}{pq} = 1-\sqrt{1-\frac{16}{p^2}},$$

и

$$q(p-q) = 4.$$

Так как q — нечетное, то $q = 1$ или $q = -1$, тогда $p = 5$ или $p = -5$, значит $k = 2$ или $k = -3$.

При $k = 2$:

$$\frac{\frac{4}{1+2k}}{1-\sqrt{1-\frac{16}{(1+2k)^2}}} = \frac{\frac{4}{5}}{1-\frac{3}{5}} = 2;$$

при $k = -3$:

$$\frac{\frac{4}{1+2k}}{1-\sqrt{1-\frac{16}{(1+2k)^2}}} = \frac{-\frac{4}{5}}{1-\frac{3}{5}} = -2.$$

В обоих случаях получается четное число. Значит пока нет оснований исключать значения $k=2$ и $k=-3$ из значений k для второй из формул (7).

Находим наконец

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}\left(\pi n + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{1+2k}\right) =$$

$$= \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{1+2k}\right) = \frac{\sin\left(\arcsin\frac{4}{1+2k}\right)}{1+\cos\left(\arcsin\frac{4}{1+2k}\right)} =$$

$$= \frac{\frac{4}{1+2k}}{1+\sqrt{1-\frac{16}{(1+2k)^2}}}.$$

Приравнивая это целому числу s и полагая $2s=q$, $1+2k=p$, получим

$$\frac{8}{pq} = 1+\sqrt{1-\frac{16}{p^2}},$$

откуда

$$q(p-q)=4,$$

откуда, $q=4$, $p=5$ или $q=-4$, $p=-5$, т. е. $k=2$ или $k=-3$.

Итак, корни данного уравнения

$$x = n\pi + \frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{1+2k},$$

$$x = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{1+2k},$$

где k — любое целое число, кроме 0, 1, 2, —1, —2, —3, а n — любое целое число.

Пример 3. В качестве третьего примера отметим теоретические вопросы, связанные с исследованием линейной системы двух уравнений с двумя неизвестными.

За последние годы на приемных испытаниях здесь часто выяснялось непонимание ряда общих принципов в математических рассуждениях (необходимости и достаточность, существование и единственность). Поступающие не могли даже четко сформулировать соответствующие теоремы.

Теорема 1. Если $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$, то система

$$\begin{aligned} a_1x+b_1y&=c_1,\\ a_2x+b_2y&=c_2 \end{aligned}\qquad (1)$$

имеет, и притом только одно, решение

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\qquad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

Теорема 2. Если $a_1b_2-a_2b_1=0$, но хотя бы одно из чисел $c_1b_2-c_2b_1$ или $a_1c_2-a_2c_1$ не равно нулю, то система (1) несовместна.

Теорема 3. Если $a_1b_2-a_2b_1=c_1b_2-c_2b_1=a_1c_2-a_2c_1=0$, но хотя бы одно из четырех чисел a_1, b_1, a_2, b_2 не равно нулю, то система (1) имеет бесконечное множество решений. Если, например, $a_1\neq 0$, то в с е решения системы (1):

$$x=\frac{c_1-b_1y}{a_1},\quad y\text{ — любое число.}$$

Я приведу подробные доказательства этих теорем, так как тогда учащимся легче будет понять допускаемые здесь ошибки логического порядка.

Доказательство теоремы 1. Докажем сначала единственность решения системы (1) при выполнении неравенства $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$. Предположим, что система (1) имеет решение $x=x_0$, $y=y_0$. Тогда будем иметь тождества:

$$\left.\begin{aligned} a_1x_0+b_1y_0&\equiv c_1,\\ a_2x_0+b_2y_0&\equiv c_2. \end{aligned}\right\}\qquad (2)$$

Умножая первое из этих тождеств на b_2, второе на $-b_1$ и складывая, получим новое тождество

$$(a_1b_2-a_2b_1)x_0\equiv c_1b_2-c_2b_1$$

и так как

$$a_1b_2-a_2b_1\neq 0,$$

то

$$x_0\equiv\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1}.\qquad (3)$$

Умножая теперь первое из тождеств (2) на $-a_2$, второе на a_1 и складывая, получим новое тождество

$$(a_1b_2-a_2b_1)y_0\equiv a_1c_2-a_2c_1$$

и так как

$$a_1b_2-a_2b_1\neq 0,$$

то

$$y_0\equiv\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \qquad (4)$$

Предположим теперь, что система (1) имеет еще какое-нибудь решение $x=x_1$, $y=y_1$. Тогда, повторяя в точности те же выкладки, что и выше, получим:

$$x_1\equiv\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y_1\equiv\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}. \qquad (5)$$

Из тождеств (3), (4), (5) находим

$$x_0\equiv x_1 \text{ и } y_0\equiv y_1.$$

Этим доказано, что система (1) имеет только одно решение.

Доказана единственность решения.

Отмечу, что многие из поступавших, повторяя по существу то, что было сейчас указано, считают, что этим процессом они «находят» решение. Это является глубокой логической ошибкой. Выше доказана пока лишь единственность решения, но не существование решения. При этом абитуриенты «возражают» так: ведь мы производили операции, при которых не могут появиться посторонние решения и раз мы «нашли»

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1},$$

то этими соотношениями и определяется решение данной системы. Несостоятельность этого утверждения заключается в том, что общие теоремы об эквивалентности уравнений с одним неизвестным не применимы к системам. В самом деле, рассмотрим в качестве примера систему;

$$\begin{aligned} x+2y+3z&=8;\\ x+y+2z&=5;\\ 2x+y+z&=5. \end{aligned}$$

Эта система имеет единственное решение $x=1$, $y=2$, $z=1$.

Получим теперь из данной системы новую, также состоящую из трех уравнений, которые получим так:

1) обе части первого уравнения умножим на 1, обе части второго — на 2, обе части третьего — на 2 и сложим полученные уравнения почленно;

2) обе части первого уравнения умножим на 2, обе части второго — на 3, обе части третьего — на 1 и сложим полученные уравнения почленно;

3) обе части первого уравнения умножим на 4, обе части второго — на 7, обе части третьего — на 5 и сложим полученные уравнения почленно.

В результате мы получим следующую систему уравнений:

$$7x+6y+9z=28,$$

$$7x+8y+13z=36,$$

$$21x+20y+31z=92.$$

Эта система уравнений вовсе не эквивалентна начальной. Она имеет, например, решение:

$$x=\frac{4}{7},\quad y=4,\quad z=0,$$

в то время как эта тройка чисел не есть решение начальной системы.

Можно доказать, что последняя система имеет даже бесконечное множество решений.

А ведь мы не производили ни возвышения в квадрат, ни извлечения корней, не умножали и не сокращали на неизвестные. Мы умножали левые части данных уравнений на числа, отличные от нуля, и складывали их почленно и все же пришли к системе, неэквивалентной начальной. Таким образом приводимое выше «возражение» логически порочно; повторяем: приведенным выше рассуждением доказана лишь единственность решения, а не его существование.

Существование решения устанавливается проверкой того, что числа

$$x=\frac{c_1b_2-c_2b_1}{a_1b_2-a_2b_1},\quad y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$$

удовлетворяют каждому из уравнений (1); произведем эту проверку: подставляя в левую часть первого из уравнений (1)

$$\frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \quad \text{и} \quad \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$

вместо x и y, получим

$$a_1 \frac{c_1 b_2 - c_2 b_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} + b_1 \frac{a_1 c_2 - a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} =$$

$$= \frac{a_1 c_1 b_2 - a_1 c_2 b_1 + b_1 a_1 c_2 - b_1 a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} =$$

$$= \frac{a_1 c_1 b_2 - b_1 a_2 c_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = \frac{c_1 (a_1 b_2 - a_2 b_1)}{a_1 b_2 - a_2 b_1} = c_1.$$

Аналогично доказывается, что и второе уравнение системы (1) при указанной замене обращается в тождество. Вот теперь доказано и существование решения, теорема 1 доказана полностью. Отмечу, что почти никто не мог ответить на вопрос: почему исследование линейной системы не хорошо проводить геометрически? Ответ. Все три сформулированные теоремы верны и в том случае, если под a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 подразумевать любые комплексные числа, а в геометрической интерпретации уравнений $a_1 x + b_1 y = c_1$ и $a_2 x + b_2 y = c_2$ предполагается, что a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — действительные числа, и притом, что или a_1, или b_1 не равно нулю, а также, что или a_2, или b_2 не равно нулю (а это не входит в условие теорем).

Вопрос об исследовании линейных систем есть вопрос чисто алгебраический и его не следует излагать геометрически. К тому же аккуратное доказательство того, что уравнение первой системы $a_1 x + b_1 y = c_1$ с действительными коэффициентами определяет прямую линию — не простое дело.

Переходим к доказательству теоремы 2. Будем эту теорему доказывать методом от противного. Предположим, что система (1) имеет решение $x = x_0$, $y = y_0$. Тогда будем иметь тождества:

$$a_1 x_0 + b_1 y_0 \equiv c_1,$$

$$a_2 x_0 + b_2 y_0 \equiv c_2.$$

Умножая первое из этих тождеств на b_2, второе — на $-b_1$ и складывая, получим новое тождество:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\,x_0 \equiv c_1b_2 - c_2b_1.$$

Но $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, значит $c_1b_2 - c_2b_1 = 0$. Умножая первое из указанных выше тождеств на $-a_2$, второе — на a_1 и складывая, получим:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)\,y_0 \equiv a_1c_2 - a_2c_1$$

и так как

$$a_1b_2 - a_2b_1 = 0,$$

то

$$a_1c_2 - a_2c_1 = 0.$$

Итак

$$c_1b_2 - c_2b_1 = 0 \quad \text{и} \quad a_1c_2 - a_2c_1 = 0,$$

а это противоречит условию теоремы. Теорема доказана методом от противного.

Отмечу, что некоторые давали такой ответ: «если знаменатель (?!) $a_1b_2 - a_2b_1$ равен нулю, а один из числителей $c_1b_2 - c_2b_1$ или $a_1c_2 - a_2c_1$ не равен нулю, то одну из формул

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (A)$$

нельзя писать, ибо на нуль делить нельзя». В этом ответе грубейшие логические промахи: эти формулы нельзя писать и в условиях теоремы 3, а между тем в условиях теоремы 3 система (1) совместна и даже имеет бесконечное множество решений. Основным логическим промахом такого ответа является недопустимость написания самих формул (A); эти формулы выведены в условиях теоремы 1; условия теоремы 2 д р у г и е и потому применять выводы теоремы 1 при доказательстве теоремы 2 недопустимо логически.

Перейдем, наконец, к доказательству теоремы 3. Пусть, например, $a_1 \neq 0$. Пусть x_0, y_0 — любое решение одного только первого уравнения системы (1), т. е.

$$a_1x_0 + b_1y_0 \equiv c_1.$$

Докажем, что тогда это решение x_0, y_0 будет решением и второго уравнения системы (1). Из написанного выше тождества находим

$$x_0 \equiv \frac{c_1 - b_1 y_0}{a_1}$$

и, значит,

$$a_2 x_0 + b_2 y_0 \equiv a_2 \frac{c_1 - b_1 y_0}{a_1} + b_2 y_0 \equiv$$
$$\equiv \frac{a_2 c_1 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) y_0}{a_2}.$$

Но так как

$$a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0,$$

то

$$a_2 x_0 + b_2 y_0 \equiv \frac{a_2 c_1}{a_1}.$$

По условию

$$a_1 c_2 - a_2 c_1 = 0,$$

значит

$$\frac{a_2 c_1}{a_1} = c_2$$

и последнее тождество принимает вид:

$$a_2 x_0 + b_2 y_0 \equiv c_2,$$

а это и означает, что x_0, y_0 — решение и второго уравнения системы (1).

Итак — *любое* решение первого уравнения системы (1) есть и решение второго уравнения системы (1), т. е. решение самой системы (1). Значит мы найдем *все* решения системы (1), если найдем все решения только одного первого уравнения $a_1 x + b_1 y = c_1$ этой системы.

Для отыскания всех решений уравнения

$$a_1 x + b_1 y = c_1$$

будем рассуждать так (напоминаем, что мы предполагаем $a_1 \neq 0$). Пусть x_0, y_0 *какое-нибудь* решение этого уравнения, т. е.

$$a_1 x_0 + b_1 y_0 \equiv c_1,$$

тогда

$$x_0 \equiv \frac{c_1 - b_1 y_0}{a_1}.$$

Обратно. Если y_0 — любое число, то два числа

$$x_0 = \frac{c_1 - b_1 y_0}{a_1} \text{ и } y_0$$

образуют решение уравнения $a_1 x + b_1 y = c_1$, ибо

$$a_1 \frac{c_1 - b_1 y_0}{a_1} + b_1 y_0 = c_1 - b_1 y_0 + b_1 y_0 = c_1.$$

Отсюда следует, что все решения уравнения $a_1 x + b_1 y = c_1$, а значит и все решения данной системы будут:

$$x_0 = \frac{c_1 - b_1 y_0}{a_1}, \ y_0 \text{ — любое число.}$$

§ 8. О задачах на геометрические места точек

При решении задачи на отыскание того или иного геометрического места часто ограничиваются выводом лишь необходимого признака, а именно, устанавливается, например, лишь то, что точки данного геометрического места лежат, скажем, на некоторой прямой, или на окружности, но не исследуется какое множество точек этой прямой, или окружности удовлетворяют данному свойству.

Пример 1. Пусть, например, надо найти геометрическое место точек, для каждой из которых длины отрезков касательных, проведенных к двум данным окружностям, равны между собой. Будем рассуждать так: если длины отрезков MT_1 и MT_2 касательных, проведенных из точки M к данным окружностям (O_1) и (O_2), равны между собой, то равны степени точки M относительно данных окружностей $(MT_1^2 = MT_2^2)$ и значит точка M лежит на радикальной оси данных окружностей. Мы, однако, не можем утверждать, что данное геометрическое место точек есть вся радикальная ось данных окружностей. В самом деле: если данные окружности (O_1) и (O_2) пересекаются в точках A и B, то их радикальной осью является прямая AB; для любой точки M прямой AB, лежащей между A и B, степени ее относительно данных окружностей будут равны, но будут отрицательны; все эти точки лежат внутри окружностей (O_1) и (O_2) и из таких точек к окружностям (O_1) и (O_2) нельзя провести касательные.

Если же M — любая точка прямой AB, лежащая на продолжении отрезка AB (либо за точку A, либо за точку B), то степени ее относительно окружностей (O_1) и (O_2) будут равны между собой и будут положительны, из такой точки M можно провести к данным окружностям (O_1) и (O_2) касательные, и их отрезки MT_1 и MT_2 будут равны между собой. Итак, если окружности (O_1) и (O_2) пересекаются в точках A и B, то геометрическое место точек M, для каждой из которых отрезки касательных, проведенных к окружностям (O_1) и (O_2), равны между собой, есть прямая AB за исключением отрезка AB. Если же окружности (O_1) и (O_2) не пересекаются (и не концентричны), то данное геометрическое место точек есть их радикальная ось в целом. Иногда при определении характера данного геометрического места точек строится линия, все точки которой удовлетворяют условию задачи, а затем доказывается, что никакие другие точки данному условию не удовлетворяют. Таким образом устанавливается, что данное геометрическое место точек состоит из точек построенной линии и только из этих точек. Рассмотрим пример.

Пример 2. На плоскости фиксированы две различные точки A и B. Пусть k — данное положительное число, не равное 1. Требуется найти геометрическое место точек M, для каждой из которых выполнено условие

$$\frac{AM}{BM} = k. \qquad (1)$$

Решение. Докажем, что на отрезке AB существует точка C, для которой

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = k. \qquad (2)$$

В самом деле. Пусть C — точка, лежащая на отрезке AB и удовлетворяющая условию (2), тогда

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} = \frac{1}{k},$$

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AC}}+1=\frac{1}{k}+1,$$

$$\frac{\overline{AC}+\overline{CB}}{\overline{AC}}=\frac{k+1}{k},$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{k+1}{k},$$

$$\overline{AC}=\frac{k\overline{AB}}{k+1}.$$

Так как точки A и B заданы, число $k>0$ — также задано, то полученным соотношением доказана **единственность** точки C, удовлетворяющей равенству (2)*.

То, что точка C, определяемая последним равенством, удовлетворяет соотношению (2), можно доказать или повторив все выкладки в обратном порядке (что возможно, так как записанная выше цепь равенств обратима в любом своем звене), или производя проверку непосредственно:

$$\overline{AC}=\frac{k}{k+1}\overline{AB},$$

$$\overline{CB}=\overline{CA}+\overline{AB}=-\frac{k}{k+1}\overline{AB}+\overline{AB}=\frac{1}{k+1}\overline{AB};$$

откуда

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=\frac{k}{k+1}\overline{AB}:\frac{1}{k+1}\overline{AB}=k.$$

---

* В самом деле, предполагая, что на прямой AB существует еще одна точка C^*, для которой

$$\frac{\overline{AC^*}}{\overline{C^*B}}=k,$$

и повторяя те же выкладки, получим:

$$\overline{AC^*}=\frac{k}{k+1}\overline{AB};$$

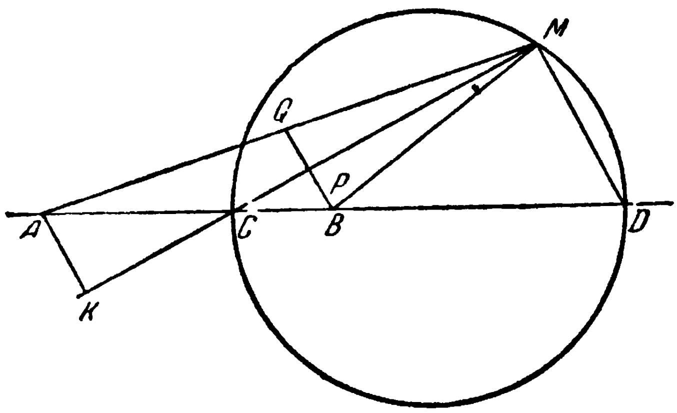
значит $\overline{AC}=\overline{AC^*}$, т. е. точки C и C^* — совпадают.

Аналогично доказывается, что на прямой AB существует, и притом только одна, точка D такая, что

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = -k. \tag{3}$$

$\left(\text{Эта точка } D \text{ определяется соотношением } \overline{AD} = \frac{k}{k-1}\overline{AB};\right.$ здесь используется условие $k \neq 1$; точка D лежит вне отрезка AB.)

Построив таким образом на прямой AB точки C и D (черт. 23), рассмотрим окружность с диаметром CD и до-



Черт. 23

кажем, что для **любой** точки M этой окружности будет выполнено соотношение (1). Соединим произвольную точку M окружности (отличную от точек C и D) с точками A, B, C, D и из точки B опустим перпендикуляр на прямую MC; пусть этот перпендикуляр пересечет прямые MC и MA соответственно в точках P и Q.

Наконец, пусть K — проекция точки A на CM;

тогда
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{AK}}{\overline{BP}},$$

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MQ}} = -\frac{\overline{AK}}{\overline{QP}},$$

и так как

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}},$$

то

$$\overline{BP} = \overline{PQ},$$

т. е. P — середина BQ. Значит MP — биссектриса угла AMB и потому

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AC}{CB} = k.$$

Теперь докажем, что никакие другие точки, кроме точек построенной окружности, не удовлетворяют соотношению (1). Для этого перепишем соотношения

$$\overline{AC} = \frac{k}{k+1}\,\overline{AB}.$$

и

$$\overline{AD} = \frac{k}{k-1}\,\overline{AB}$$

в виде

$$\overline{AC} = \frac{1}{1+\frac{1}{k}}\,\overline{AB},$$

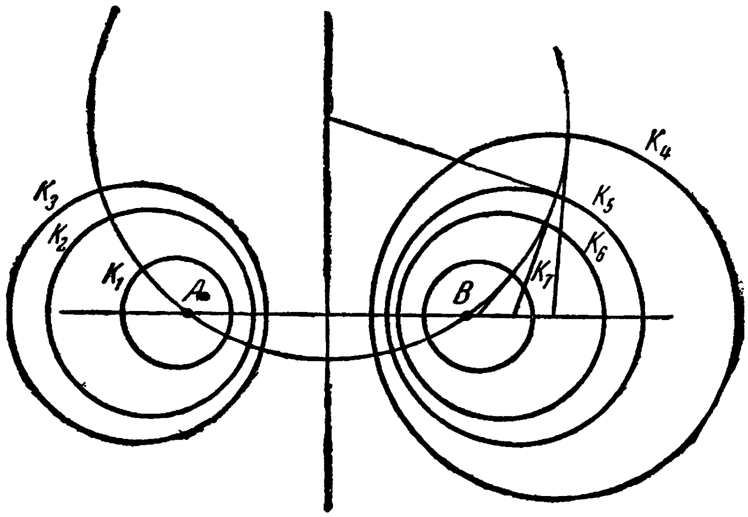
$$\overline{AD} = \frac{1}{1-\frac{1}{k}}\,\overline{AB}$$

и будем считать, как k возрастает от 1 до $+\infty$.

В таком случае $\overline{AC}$ будет возрастать от $\frac{\overline{AB}}{2}$ до $\overline{AB}$, т. е. точка C будет описывать отрезок OB (где O — середина AB), двигаясь от точки O к точке B; $\overline{AD}$ будет убывать от $+\infty$ до $\overline{AB}$, т. е. при изменении k от 1 до $+\infty$ точка D будет описывать тот луч прямой AB, ограниченный точкой B, который не содержит точки A, причем точка D будет двигаться по этому лучу в направлении к точке B. Для каждого значения k, $1 < k < +\infty$

мы будем получать окружность, построенную на CD, как на диаметре, для всех точек которой, по доказанному, будет выполнено соотношение (1). В силу только что сказанного эти окружности будут вложены друг в друга (точки C и D при изменении k от 1 до $+\infty$ движутся навстречу друг другу) и значит не будут иметь общих точек. Для всех точек каждой из этих окружностей будет выполнено соотношение (1) со своим значением k. На черт. 24 изображено несколько таких окружностей.

Если $k=1$, т. е. $AM=MB$, то геометрическим местом точек M является медиатриса отрезка AB. Наконец,



Черт. 24.
$k_1 < k_2 < k_3 < 1 < k_4 < k_5 < k_6 < k_7$

если k изменяется от 0 до 1, то мы получаем окружности, симметричные уже рассмотренным относительно медиатрисы отрезка AB $\left[\text{ибо (1) можно переписать в виде } \frac{BM}{AM}=\frac{1}{k}\right]$.

Все построенные окружности, включая и медиатрису отрезка, целиком заполняют всю плоскость* и ни одна

* В самом деле, пусть M_0 — произвольная точка плоскости, не лежащая на прямой AB и на медиатрисе отрезка AB; пусть C и D — точки пересечения с AB биссектрис угла M_0 треугольника AM_0B. Тогда для всех точек M окружности с диаметром $C\Gamma$ (эта окружность проходит через точку M_0) мы будем иметь

$$\frac{AM}{BM}=\frac{AM_0}{BM_0}.$$

пара окружностей не имеет общих точек. Значит, если для некоторого фиксированного значения $k>1$ построена соответствующая окружность, для всех точек которой $\frac{AM}{BM}=k$, то для всех точек M, лежащих внутри этой окружности, мы будем иметь $\frac{AM}{BM}>k$, а для всех точек, лежащих вне ее $\frac{AM}{BM}<k$.

Если же окружность построена для $0<k<1$, то для всех точек, лежащих внутри ее, $\frac{AM}{BM}<k$, а для всех точек, лежащих вне, $\frac{AM}{BM}>k$. Вот теперь можно утверждать, что геометрическое место точек M, для каждой из которых $\frac{AM}{BM}=k$, где A и B — две различные фиксированные точки плоскости, а k — фиксированное положительное число, не равное 1, есть окружность с диаметром CD, где C и D — две точки прямой AB, определяемые соотношениями

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}=k,$$

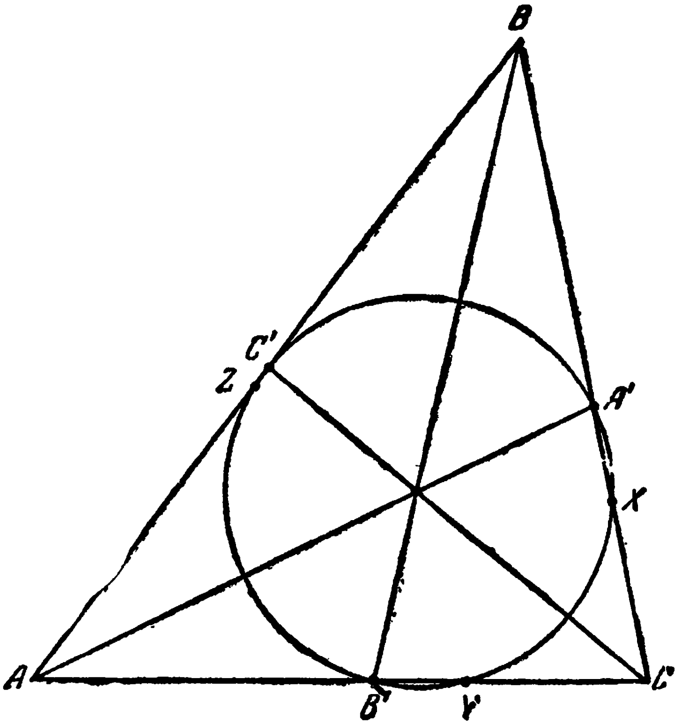
$$\left(\text{или}\quad \overline{AC}=\frac{k}{k+1}\overline{AB},\quad \overline{AD}=\frac{k}{k-1}\overline{AB}\right).$$

Окружность, определяемая указанным свойством, называется окружностью Аполлония. Множество всех окружностей Аполлония с фиксированными точками A и B (и k, изменяющемся от 0 до $+\infty$) образует гиперболический пучок окружностей с предельными точками A и B. Медиатриса отрезка AB есть радикальная ось этого пучка.

§ 9. Анализ решения трудной задачи, в которой синтезируются методы алгебры, геометрии и тригонометрии

В настоящем пункте я рассмотрю одну очень интересную задачу, которая была помещена в журнале по элементарной математике, издаваемом во Франции (Journal de mathematique élèmentaire). Задача предложена M. V. Thébault, была напечатана в этом журнале 1 октября 1950 г. и обсуждалась на страницах этого журнала периодически более года. Содержание задачи, в ее первоначальной редакции, таково.

«Доказать, что если окружность, проходящая через основания биссектрис внутренних углов треугольника, касается одной



Черт. 25

из его сторон, то треугольник равнобедренный, и обратно». Через несколько недель в указанном журнале было напечатано следующее решение этой задачи.

Рассмотрим треугольник со сторонами $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ (черт. 25) и пусть биссектрисы его внутренних углов A, B, C пересекают противоположные стороны BC, CA и AB в точках A', B', C'. Проведем окружность (Γ) через точки A', B', C'; пусть эта окружность пересекает вторично BC, CA и AB соответственно в точках X, Y, Z.

Выражая степень каждой вершины треугольника ABC [относительно (Γ)] двумя способами, будем иметь:

$$\begin{aligned}
\overline{AB'}\cdot\overline{AY}&=\overline{AC'}\cdot\overline{AZ},\\
\overline{BC'}\cdot\overline{BZ}&=\overline{BA'}\cdot\overline{BX},\\
\overline{CA'}\cdot\overline{CX}&=\overline{CB'}\cdot\overline{CY}.
\end{aligned}\tag{1}$$

Легко получить, что

$$BA'=\frac{ac}{b+c},\quad CA'=\frac{ab}{b+c},\quad CB'=\frac{ba}{a+c},$$

$$AB'=\frac{bc}{a+c},\quad C'A=\frac{cb}{a+b},\quad C'B=\frac{ac}{a+b}.$$

Ориентируем теперь периметр треугольника ABC в направлении от A к B и C и положим

$$\overline{A'X}=x,\quad \overline{B'Y}=y,\quad \overline{C'Z}=z.$$

Тогда соотношения (1) примут вид:

$$-\frac{bc}{a+c}\left(-\frac{bc}{a+c}+y\right)=\frac{bc}{a+b}\left(\frac{bc}{a+b}+z\right),$$

$$-\frac{ca}{a+b}\left(-\frac{ca}{a+b}+z\right)=\frac{ca}{b+c}\left(\frac{ca}{b+c}+x\right),$$

$$-\frac{ab}{b+c}\left(-\frac{ab}{b+c}+x\right)=\frac{ab}{a+c}\left(\frac{ab}{a+c}+y\right).$$

Умножим эти равенства соответственно на a^2, b^2, c^2 и сложим полученные равенства почленно, будем иметь:

$$abc(x+y+z)=0.$$

Так как a, b, c отличны от нуля, то

$$x+y+z=0.$$

Если окружность $(A'B'C')$ касается BC (в точке A'), то $x=0$, а потому $y+z=0$ (и обратно).

Хорды $B'Y$ и $C'Z$ имеют одинаковую длину и значит центр окружности $(A'B'C')$ отстоит на равных расстояниях от AB и AC. Отсюда следует, что центр окружности $(A'B'C')$ находится на биссектрисе угла A. Поэтому прямая AA' — высота треугольника ABC, а потому этот треугольник равнобедренный ($AB=AC$).

Сбратное положение очевидно [т. е. если в треугольнике ABC стороны AB и AC равны между собой, то окружность $(A'B'C')$, проходящая через основания A', B', C' биссектрис его внутренних углов, касается стороны BC].

Еще через некоторое время один из читателей журнала (Андерсен, Швеция) прислал в редакцию журнала письмо, в котором утверждал, что приведенное выше решение является ошибочным. Редакция журнала в ответ на это письмо поместила заметку, которую мы приводим ниже, однако не было указано, где ошибка, а главное не было проанализировано решение, которое приводит к интересному результату.

Ошибка решения—логическая: автор решения считает, что из того, что центр окружности равноудален от сторон AB и AC следует, что он лежит на биссектрисе внутреннего угла A треугольника ABC. Если это так, то действительно треугольник ABC равнобедренный. Но ведь и точки биссектрисы внешнего угла A треугольника ABC равноудалены от сторон AB и AC и вот (как выяснится позже), существуют неравнобедренные треугольники ABC $(AB \neq AC)$, для которых окружность $(A'B'C')$, проходящая через основания A', B' и C' биссектрис внутренних углов A, B и C треугольника ABC, касается стороны BC; центр окружности $(A'B'C')$ при этом лежит на биссектрисе внешнего угла A треугольника ABC.

Перед тем как изложить решение этого вопроса, остановимся еще на том решении, которое дано выше. Мы видим, что ошибка была допущена в самом конце рассуждений; соотношение $x+y+z=0$ или $\overline{A'X}+\overline{B'Y}+\overline{C'Z}=0$ — верно и выражает достаточно интересный факт. Именно, так как $\overline{A'X}+\overline{B'Y}+\overline{C'Z}=0$, то среди чисел $\overline{A'X}$, $\overline{B'Y}$ и $\overline{C'Z}$ есть как положительные, так и отрицательные (если только не все они равны 0). Пусть, например, $\overline{A'X}>0$, а $\overline{B'Y}<0$ и $\overline{C'Z}<0$; тогда из соотношения $\overline{A'X}+\overline{B'Y}+\overline{C'Z}=0$ следует, что $A'X=B'Y+C'Z$.

Итак, мы получаем следующую теорему: если окружность (Γ), проходящая через основания биссектрис внутренних углов любого треугольника ABC пересекает его стороны BC, CA и AB соответственно в точках A' и X, B' и Y, C' и Z, то сумма двух из трех отрезков $A'X$,

$B'Y$, $C'Z$ равна третьему. Теперь вернемся к заметке, напечатанной 15 июля 1951 г. (автор заметки A. Monjallon). Заметка была озаглавлена так: Об окружности, проходящей через основания биссектрис внутренних углов треугольника, касающейся одной из его сторон.

Пусть ABC — какой-нибудь треугольник. Проведем биссектрисы AA', BB' и CC' внутренних его углов A, B и C. Пусть окружность (Γ), проходящая через точки A', B' и C' пересекает стороны BC, CA и AB вторично в точках X, Y и Z.

Ориентируя контур треугольника ABC как и выше от A к B и к C, находим:

$$\overline{BA'} = \frac{ac}{b+c}, \quad \overline{A'C} = \frac{ab}{b+c}, \quad \overline{CB'} = \frac{ab}{a+c},$$

$$\overline{B'A} = \frac{bc}{a+c}, \quad \overline{AC'} = \frac{bc}{a+b}, \quad \overline{C'B} = \frac{ac}{a+b}.$$

Теперь из соотношений:

$$\overline{AB'} \cdot \overline{AY} = \overline{AC'} \cdot \overline{AZ}, \quad \overline{BC'} \cdot \overline{BZ} = \overline{BA'} \cdot \overline{BX},$$

$$\overline{CA'} \cdot \overline{CX} = \overline{CB'} \cdot \overline{CY},$$

мы имеем:

$$\frac{\overline{AY}}{a+c} + \frac{\overline{AZ}}{a+b} = 0, \quad \frac{\overline{BZ}}{a+b} + \frac{\overline{BX}}{b+c} = 0,$$

$$\frac{\overline{CX}}{b+c} + \frac{\overline{CY}}{a+c} = 0. \tag{1}$$

Если мы предположим, что A' и X совпадают, то

$$\overline{BX} = \frac{ac}{b+c}, \quad \overline{XC} = \frac{ab}{b+c}.$$

и, следовательно, из соотношений (1) находим:

$$\overline{CY} = \frac{ab(a+c)}{(b+c)^2}, \quad \overline{BZ} = -\frac{ac(a+b)}{(b+c)^2},$$

откуда

$$\overline{AY} = \overline{AC} + \overline{CY} = -b + \frac{ab(a+c)}{(b+c)^2} =$$

$$= \frac{b[a\ (a+c)-(b+c)^2]}{(b+c)^2}.$$

и

$$\overline{AZ} = \overline{AB} + \overline{BZ} = c - \frac{ac(a+b)}{(b+c)^2} =$$

$$= \frac{c\,[(b+c)^2 - a\,(a+b)]}{(b+c)^2}.$$

Теперь из первого из соотношений (1) имеем:

$$\frac{b\,[a\,(a+c)-(b+c)^2]}{a+c} + \frac{c\,[(b+c)^2 - a\,(b+a)]}{a+b} = 0$$

или

$$(b-c)\left[a - \frac{(b+c)^2(a+b+c)}{(a+b)(a+c)}\right] = 0. \qquad (2)$$

Отсюда следует, что или $b - c = 0$, т. е. треугольник равнобедренный, или

$$a\,(a+b)(a+c) - (b+c)^2(a+b+c) = 0. \qquad (3)$$

Остается установить, что существуют неравнобедренные треугольники, длины сторон которых удовлетворяют соотношению (3). Перепишем соотношение (3) в виде:

$$abc = (b+c)^3 + a\,(b+c)^2 - a^2(b+c) - a^3. \qquad (4)$$

Если мы положим $b + c = ak\,(k > 1)$, то получим:

$$bc = a^2(k^3 + k^2 - k - 1).$$

Очевидно, что если $k > 1$, то $bc > 0$. Стороны b и c, следовательно, корни следующего квадратного уравнения:

$$X^2 - akX + a^2(k^3 + k^2 - k - 1) = 0. \qquad (5)$$

Дискриминант этого уравнения

$$\Delta = a^2k^2 - 4a^2(k^3 + k^2 - k - 1) = a^2(4 + 4k - 3k^2 - 4k^3).$$

В области $k>1$ эта функция убывает. В самом деле, если $k_2>k_1>1$, то

$$f(k_2)-f(k_1)=$$
$$=4+4k_2-3k_2^2-4k_2^3-(4+4k_1-3k_1^2-4k_1^3)=$$
$$=(k_2-k_1)(4-3k_1-3k_2-4k_1^2-4k_1k_2-4k_2^2)<0.$$

Но при $k=1$ значение этой функции от k равно 1, значит, существует и притом только один действительный корень $k=k_0>1$ функции $4+4k-3k^2-4k^3$. В интервале $(1, k_0)$ дискриминант положителен, уравнение (5) имеет два различных действительных положительных корня.

Замечание. В случае, если треугольник равнобедренный, центр окружности, проходящей через точки A', B', C', лежит на биссектрисе AA' внутреннего угла A. В случае, если этот треугольник неравнобедренный, этот центр лежит на биссектрисе внешнего угла A (см. ниже черт. 26). Отсюда следует, что точки Y и Z симметричны точкам C' и B' по отношению к биссектрисе внешнего угла A. Выражая двумя способами степень точки A относительно окружности, мы получим:

$$\overline{AB'}\cdot\overline{AY}=\overline{AI}^2-\overline{IA'}^2.$$

Угол AIA' прямой, поэтому $\overline{AI}^2-\overline{IA'}^2=-\overline{AA'}^2$ и значит

$$\overline{AB'}\cdot\overline{AC'}=AA'^2.$$

Это соотношение показывает, что неравнобедренный треугольник, обладающий указанным выше свойством, может быть охарактеризован следующим геометрическим свойством: биссектриса AA' внутреннего угла A есть средняя геометрическая между расстояниями от точки A до оснований B' и C' биссектрис двух других внутренних углов B и C.

Проанализируем это решение. Некоторая неполнота решения заключается в том, что следовало еще показать, что и обратно — из соотношения (3)', т. е. из соотношения

$$a(a+b)(a+c)-(b+c)^2(a+b-c)=0$$

следует, что точки A' и X совпадают, т. е. что окружность $(A'B'C')$ касается стороны BC в точке A'. Сделать это можно, например, так: из соотношения (3) следует конечно соотношение (2), а значит и соотношение

$$\frac{-b+\dfrac{ab(a+c)}{(b+c)^2}}{a+c}+\frac{c-\dfrac{ac(a+b)}{(b+c)^2}}{a+b}=0.$$

или

$$\frac{-b+\dfrac{a+c}{b+c}\,\overline{A'C}}{a+c}+\frac{c-\dfrac{a+b}{b+c}\,\overline{BA'}}{a+b}=0. \qquad (\alpha)$$

Первое из соотношений (1), которое имеет место для любого треугольника ABC, можно переписать так:

$$\frac{\overline{AC}+\overline{CY}}{a+c}+\frac{\overline{AB}+\overline{BZ}}{a+b}=0,$$

или

$$\frac{-b-\dfrac{a+c}{b+c}\,\overline{CX}}{a+c}+\frac{c-\dfrac{a+b}{b+c}\,\overline{BX}}{a+b}=0. \qquad (\beta)$$

Вычитая почленно из равенства (β) равенство (α), получим $\overline{A'X}\cdot\dfrac{2}{b+c}=0$, откуда $\overline{A'X}=0$, т. е. точки A' и X совпадают.

Далее, в заметке доказано, что уравнение (5) в случае, если $1<k<k_0$ имеет два действительных и положительных корня b и c, а значит уравнение (4) имеет действительные различные положительные решения a, b, c такие, что $b+c<a$. Но ведь этого еще не достаточно для того, чтобы можно было утверждать существование треугольника, длины сторон которого a, b, c. Нужно еще установить, что $|b-c|<a$. Это имеет место и доказывается так:

$$\frac{(b-c)^2}{a^2}-1=\frac{(b+c)^2-4bc}{a^2}-1=3+4k-3k^2-4k^3=$$
$$=(3+4k)(1-k^2)<0,$$

ибо $k>1$, а потому

$$\frac{(b-c)^2}{a^2}-1<0,$$

откуда

$$|b-c|<a.$$

Итак, уравнение (4) имеет положительные решения a, b, c такие, что $b \neq c$ и $|b-c|<a<b+c$, и значит существуют неравнобедренные треугольники ABC, для которых окружность (Γ), проходящая через основания A', B' и C' биссектрис внутренних углов касается стороны BC [ибо нами было установлено, что из соотношения (4) следует совпадение точек A' и X].

Наконец, утверждение, высказанное в замечании относительно характеристического свойства таких треугольников, недостаточно обосновано, ибо не доказано обратное положение, а именно, что из соотношения

$$\overline{AB}' \cdot \overline{AC}' = -AA'^2,$$

следует, что треугольник ABC неравнобедренный, а окружность $(A'B'C')$ касается его стороны BC. Доказательство этого положения мы предоставляем читателю.

Еще по прошествии некоторого времени (15 октября 1951 г.) появляется заметка A. Monjallon'a, поставившего и решившего аналогичный вопрос: если окружность, проходящая через основание A' биссектрисы внутреннего угла A треугольника ABC и основания B'' и C'' биссектрис внешних углов B и C, касается стороны BC, то $AB = AC$ (и обратно).

Решение этой задачи предоставляется читателю (суть дела здесь заключается в том, что уравнение, аналогичное уравнению (4), не имеет даже положительных решений).

Наконец, еще через месяц (15 ноября 1951 г.) в том же журнале появляется следующая статья, в которой дается исчерпывающее решения все той же задачи, доказывается, что неравнобедренные треугольники, обладающие указанным свойством, могут быть построены с помощью циркуля и линейки и указано как это сделать. Ниже дан перевод этой статьи (с небольшими дополнениями). Автор статьи M. René Blanchar — Ancien élève de l, École normal supérieure de Saint-Cloud).

Пусть ABC — неравнобедренный треугольник, в котором окружность, проходящая через основания биссектрис внутренних углов, касается стороны BC, (O, R) — описанная около него окружность, s — площадь; a, b, c — длины сторон BC, CA и AB; p — полупериметр; r, r_a, r_b, r_c — радиусы окружностей вписанной и вневписанных в этот треугольник. Стороны треугольника удовлетворяют соотношению

$$abc = (b+c)^3 + a(b+c)^2 - a^2(b+c) - a^3.$$

Это соотношение можно преобразовать к виду

$$abc = (b+c)[(b+c)^2 - a^2] + a[(b+c)^2 - a^2],$$

или

$$abc = (a+b+c)^2(b+c-a) = 8p^2(p-a),$$

а так как

$$abc = 4Rs, \quad s = pr = (p-a)r_a = \sqrt{rr_ar_br_c},$$

то наше соотношение принимает вид:

$$Rr = 2r_br_c (1), \quad 2Rr_a = 4p^2.$$

Заметим, что $2Rr_a$ есть степень центра I_a окружности, вневписанной в угол A относительно окружности (O), так как $OI_a^2 = R(R+2r_a)$*, или квадрат длины касательных, которые можно провести из I_a к окружности (O). Следовательно, если дан неравнобедренный треугольник ABC, для которого окружность, проходящая через основания биссектрис внутренних его углов, касается стороны BC, то произведение радиусов окружностей, описанной около треугольника, на радиус окружности и вписанной, равно двойному произведению радиусов окружностей, вневписанных в углы B и C и длина касательных, которые можно провести из центра окружности, вневписанной в угол A к описанной окружности, равна периметру. Имеют место и обратные положения.

---

* Соотношение $OI_a^2 = R(R+2r_a)$, пожалуй, проще всего установить при помощи инверсии. Рассмотрим инверсию $\left(I_a, r_a^2\right)$; в этой инверсии все точки окружности (I_a), вневписанной в угол A, неподвижны. Пусть окружность (I_a) касается BC, CA и AB в точках A_1, B_1, C_1. В инверсии $\left(I_0, r_a^2\right)$ точки A, B и C перейдут в точки A', B', C' пересечения I_aA и B_1C_1, I_aB и C_1A_1, I_aC и A_1B_1. Эти точки A', B', C' — середины сторон B_1C_1, C_1A_1 и

Известно, что

$$r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

$$r_b = 4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

$$r_c = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

Внося эти значения r, r_b, r_c в соотношение (1), получим

$$\sin\frac{A}{2} = 8\cos^2\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2},$$

а так как

$$\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{B+C}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sin\frac{A}{2} + \cos\frac{B-C}{2}\right),$$

A_1B_1. Окружность (ABC) перейдет поэтому в окружность $(A'B'C')$, являющуюся окружностью Эйлера для треугольника $A_1B_1C_1$ и потому радиус окружности $(A'B'C')$ будет $R' = \frac{r_a}{2}$. С другой стороны, отношение $\frac{R'}{R}$ радиусов окружностей $(A'B'C')$ и (ABC) равно $\frac{k}{\sigma}$, где σ — степень центра инверсии I_a относительно окружности (ABC), а k — степень инверсии; в самом деле, пусть M и M' — точки окружностей (ABC) и $(A'B'C')$, соответствующие друг другу в инверсии (I_a, r_a^2); тогда $\overline{I_aM'}\cdot\overline{I_aM} = r_a^2$ $(= k)$; пусть M_1 — вторая точка пересечения I_aM' с (ABC). Тогда $\overline{I_aM}\cdot\overline{I_aM_1} = \sigma$. Отсюда $\frac{\overline{I_aM'}}{\overline{I_aM_1}} = \frac{k}{\sigma} = \frac{R'}{R}$. Соотношение $\frac{k}{\sigma} = \frac{R'}{R}$ можно переписать так: $\frac{r_a^2}{I_aO^2 - R^2} = \frac{\frac{r_a}{2}}{R}$, откуда $I_aO^2 = R(R+2r_a)$.

то

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}\left(1-4\cos^2\frac{A}{2}\right)}{4\cos^2\frac{A}{2}}. \qquad (2)$$

Заметим, между прочим, что угол A больше $\frac{2\pi}{3}$, так как $1-4\cos^2\frac{A}{2}$ должно быть числом положительным, а потому $\cos\frac{A}{2}<\frac{1}{2}$.

Соотношение (2) позволяет построить треугольник ABC, для которого известна сторона BC и угол A. В самом деле, тогда можно построить окружность (O), описанную около треугольника ABC. Обозначим через D и D' середины большой и малой дуг BC окружности (O), а через M—середину BC. Примем за единицу длину диаметра окружности (O).

Имеем:

$$DA=\cos\frac{B-C}{2},\quad DB=\sin\frac{A}{2},$$

$$D'B=\cos\frac{A}{2},\quad D'M=D'B\cos\frac{A}{2}=\cos^2\frac{A}{2}.$$

Возьмем на прямой $D'D$ в направлении от D' к D точку N такую, что

$$D'N=4D'M=4\cos^2\frac{A}{2}.$$

Тогда

$$DN=DD'-ND'=1-4\cos^2\frac{A}{2}.$$

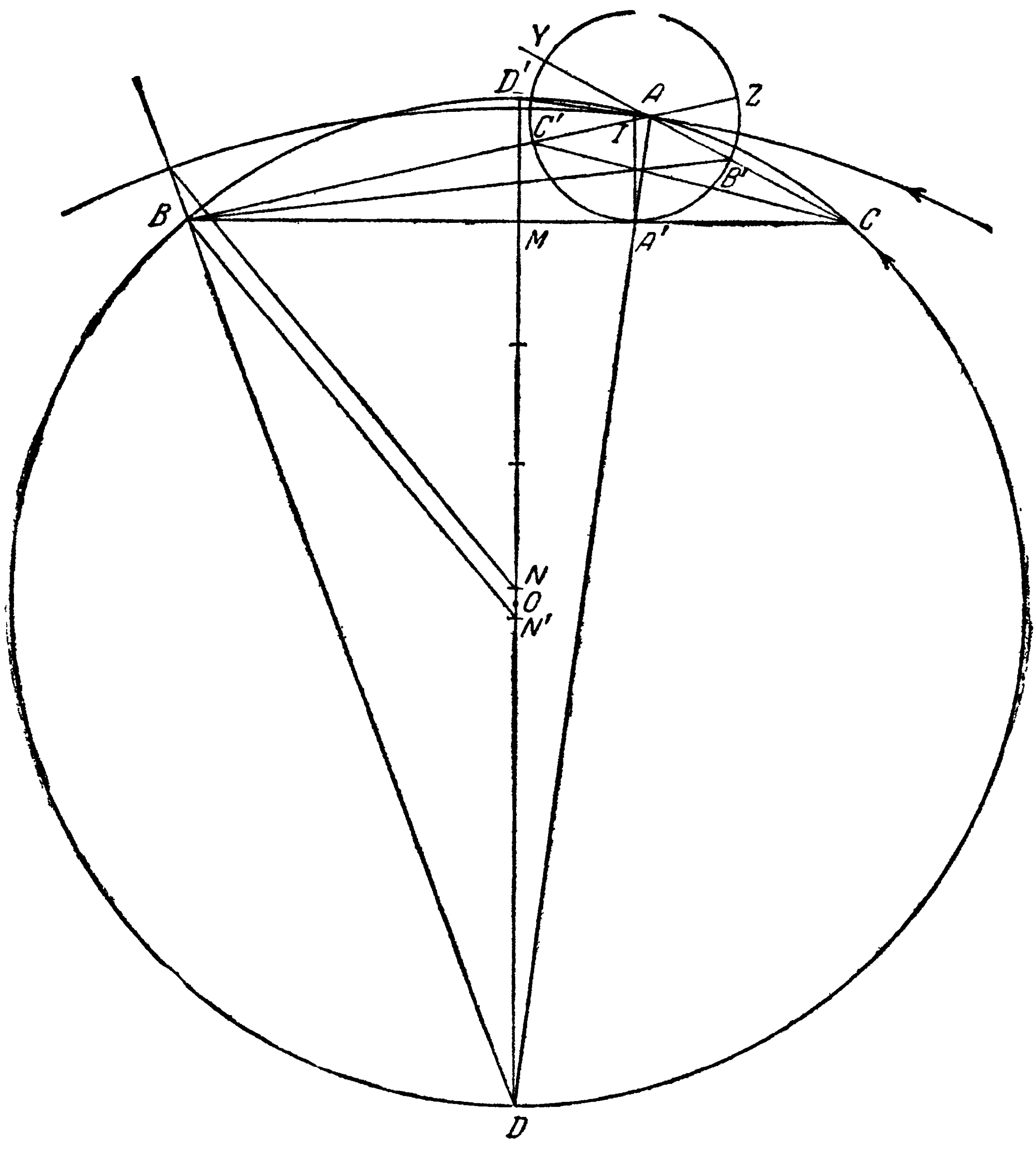
С другой стороны, обозначая через N' точку, симметричную точке N относительно O, будем иметь:

$$DN'=D'N=4\cos^2\frac{A}{2},$$

и соотношение (2) принимает вид:

$$DA=\frac{DB\cdot DN}{DN'},$$

Длина DA и точка A таким образом будут определены. В самом деле, прямая, проведенная через точку N па-



Черт. 26

раллельно $N'B$, пересечет прямую DB в точке A_1 такой, что

$$DA_1 = \frac{DN \cdot DB}{DN'} = DA,$$

и точка A есть одна из точек пересечения окружности (O) и окружности с центром D и радиусом DA_1 (черт. 26).

Исследование. Для того чтобы построение было возможным, необходимо и достаточно, чтобы

$$DB \leqslant DA \leqslant 1,$$

откуда

$$\sin\frac{A}{2} \leqslant \frac{\sin\frac{A}{2}\left(1-4\cos^2\frac{A}{2}\right)}{4\cos^2\frac{A}{2}} \leqslant 1.$$

Первое неравенство дает

$$\cos^2\frac{A}{2} \leqslant \frac{1}{8} \quad \text{или} \quad \sin^2\frac{A}{2} \geqslant \frac{7}{8},$$

откуда

$$\sin\frac{A}{2} \geqslant \frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Это условие перекрывает указанное выше ограничение на угол

$$A\left(A > \frac{2\pi}{3}\right).$$

Второе неравенство эквивалентно такому

$$y = 4\sin^3\frac{A}{2} + 4\sin^2\frac{A}{2} - 3\sin\frac{A}{2} - 4 \leqslant 0.$$

Полагая

$$\sin\frac{A}{2} = x,$$

будем иметь:

$$y = 4x^3 + 4x^2 - 3x - 4 \leqslant 0,$$

причем

$$\frac{\sqrt{14}}{4} \leqslant x < 1.$$

На этом полуинтервале функция y возрастает; в самом деле, пусть

$$\frac{\sqrt{14}}{4} \leqslant x_1 < x_2 < 1;$$

тогда

$$y(x_2)-y(x_1)=$$
$$=(x_2-x_1)\left[4\left(x_1^2+x_1x_2+x_2^2\right)+4(x_1+x_2)-3\right]>$$
$$>(x_2-x_1)\left(4\cdot 3\cdot\frac{14}{16}+4\cdot\frac{2\sqrt{14}}{4}-3\right)>0,$$

а так как

$$y\left(\frac{\sqrt{14}}{4}\right)=\frac{\sqrt{14}-4}{8}<0,\quad y(1)=1>0,$$

то на полуинтервале $\left[\frac{\sqrt{14}}{4},\ 1\right]$ имеется лишь один действительный корень функции

$$y=4x^3+4x^2-3x-4.$$

Этот корень можно выразить в радикалах*. В самом деле, полагая

$$x=z-\frac{1}{3},$$

получим

$$y=4\left(z^3-z^2+\frac{1}{3}z-\frac{1}{27}\right)+4\left(z^2-\frac{2}{3}z+\frac{1}{9}\right)-$$
$$-3\left(z-\frac{1}{3}\right)-4=4\left(z^3-\frac{13}{12}z-\frac{73}{108}\right).$$

Положим далее

$$z=u+\frac{13}{36u},$$

тогда уравнение

$$z^3-\frac{13}{12}z-\frac{73}{108}=0,$$

примет вид

$$u^6-\frac{73}{108}u^3+\frac{13^3}{36^3}=0,$$

* Приводимое ниже мною дополнение к решению René Blanchar'a дает точные границы для угла A. По существу здесь применяется метод Картана решения уравнения 3-й степени.

откуда

$$u^3 = \frac{73 \pm \sqrt{3132}}{216},$$

и значит (ограничиваясь лишь действительными значениями для u):

$$u_1 = \frac{\sqrt[3]{73 + \sqrt{3132}}}{6}, \quad u_2 = \frac{\sqrt[3]{73 - \sqrt{3132}}}{6},$$

значит

$$z = \frac{\sqrt[3]{73 + \sqrt{3132}}}{6} + \frac{\frac{13}{36} \cdot 6}{\sqrt[3]{73 + \sqrt{3132}}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{73 + \sqrt{3132}}}{6} + \frac{\sqrt[3]{73 - \sqrt{3132}}}{\sqrt[3]{73^2 - 3132}} \cdot \frac{13}{6} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{73 + \sqrt{3132}} + \sqrt[3]{73 - \sqrt{3132}}}{6}.$$

Полагая $u = \frac{\sqrt[3]{73 - \sqrt{3132}}}{6}$, получим то же самое значение для z.

Таким образом,

$$\frac{\sqrt{14}}{4} \leqslant \sin\frac{A}{2} \leqslant \frac{\sqrt[3]{73 + \sqrt{3132}} + \sqrt[3]{73 - \sqrt{3132}} - 2}{6}.$$

Если $\sin\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{14}}{4}$, точка A совпадает с одной из точек B или C — случай, не представляющий никакого интереса, если же $\sin\frac{A}{2} = \frac{\sqrt[3]{73 + \sqrt{3132}} + \sqrt[3]{73 - \sqrt{3132}} - 2}{6}$, треугольник ABC—равнобедренный. Приближенные значения $\frac{\sqrt{14}}{4}$ и $\frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{73 + \sqrt{3132}} + \sqrt[3]{73 - \sqrt{3132}} - 2\right)$ для граничных значений $\sin\frac{A}{2}$ соответственно таковы:

0,935 и 0,942 — очень близки друг к другу, что требует очень деликатного построения треугольника—чертеж должен быть выполнен чрезвычайно тщательно!

Именно, из приближенных соотношений

$$0,935 < \sin \frac{A}{2} < 0,942$$

следует

$$0,113 < \cos^2 \frac{A}{2} < 0,125.$$

Таким образом, значение

$$\cos^2 \frac{A}{2} = D'M,$$

немного меньше $\frac{1}{8}$ $(=0,125)$, т. е. $D'M$ несколько меньше одной четвертой радиуса окружности, описанной около треугольника ABC. Именно в соответствии с этими соображениями и выполнено построение треугольника ABC на черт. 26 (точка N берется отстоящей от центра окружности на 2 *мм* при диаметре окружности равном 155 *мм*, что обеспечивает границы для $\cos^2 \frac{A}{2}$).

В главах IV — IX мною подобраны задачи, для решения которых применяются разнообразные методы, а сама постановка вопроса приводит к использованию алгебры, геометрии и тригонометрии при решении одной задачи.

§ 10. Вопросы определений

Основные дефекты в ответах на подобного рода вопросы происходят в основном по двум причинам:

1) часто то или иное понятие в курсе элементарной математики возникает постепенно, иногда даже в течение более чем одного года обучения, и учащемуся трудно бывает дать синтезирующее определение такого понятия;

2) над вводимыми определениями мало работают, они не вводятся в задачи, а потому не закрепляются прочно в сознании учащегося.

Приведу примеры.

Пример 1. Вопрос: дать определение функции

$$y = a^x, \quad \text{где } a > 0 \text{ и } a \neq 1.$$

Ответ на этот вопрос слагается из нескольких формулировок:

1°. Если x — целое положительное число большее 1, то

$$a^x = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{x \text{ раз}}.$$

2°. Если $x = 0$, то (по определению)

$$a^x = a^0 = 1.$$

3°. Если $x = 1$, то (по определению)

$$a^x = a^1 = a.$$

4°. Если $x = \frac{p}{q}$, где p и q — целые положительные числа, то a^x определяется как такое положительное число y, что

$$y^q = a^p$$

(это определение должно быть еще обосновано, а именно — надо доказать, что такое положительное число y существует и притом только одно*).

5°. Если x — целое отрицательное число или $x = -\frac{p}{q}$, где p и q — целые положительные числа, то a^x по определению считается равным $\frac{1}{a^{-x}}$.

6°. Если x — иррациональное число, то a^x определяется как такое число, что $a^r < a^x < a^R$, где r и R — любые рациональные числа такие, что $r < x < R$ (и это определение должно быть обосновано, а именно — надо доказать, что число a^x, обладающее указанным свойством, существует и притом только одно**).

Пример 2. Вопрос. Что называется абсолютной величиной или модулем действительного числа?

---

* Считаем $a > 0$, $a \neq 1$.

** Обоснование определений 4° и 6° сделано в рекомендованном выше специальном курсе элементарной алгебры — С. И. Новоселов.

Ответ. Модулем числа x называется само это число, если $x \geqslant 0$ и число $-x$, если $x \leqslant 0$. Итак,

$$|x| = x, \quad \text{если } x \geqslant 0,$$

$$|x| = -x, \quad \text{если } x \leqslant 0.$$

Это определение многие хотя и знают, но применяя его, допускают ошибки и это потому, что учащиеся решают мало задач, связанных со знаком абсолютной величины.

Здесь нетрудно было бы дать много вопросов и примеров:

1) доказать, что $\sqrt{x^2} = |x|$ (имеется в виду арифметическое значение корня);

2) построить графики функций:

$$y = |x|, \quad y = |x-1|, \quad y = |x^2 - 2x|, \quad y = |\sin x|,$$

$$y = |\log x|, \quad y = \log|x| \text{ и т. д.;}$$

3) построить графики линий, заданных уравнениями:

$$y = |x-1| + |x-2|,$$

$$y = |x-1| + |x-2| + |x-4| \text{ и т. д.,}$$

4) доказать, что неравенства

$$|x-a| < b, \quad \text{где } b > 0,$$

и

$$a - b < x < a + b$$

— эквивалентны [т. е. из $|x-a| < b$ следует, что $a - b < x < a + b$, и обратно: если $a - b < x < a + b$, то $|x-a| < b$].

Пример 3. Вопрос. Что называется возрастающей функцией?

Ответ. Функция $y = f(x)$ называется возрастающей в интервале (a, b), если большему значению аргумента из этого интервала соответствует большее значение функции, т. е., если из неравенств

$$a < x_1 < x_2 < b,$$

следует, что

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Основные ошибки, которые здесь допускаются, заключаются в том, что в формулировке ответа забывают указать, что определение следует относить к определенному интервалу (или сегменту). Возьмем совершенно конкретный пример: $y = \operatorname{tg} x$. Эта функция возрастает в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и в интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ и, вообще, в любом интервале вида $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, где k — любое целое число.

Однако сказать про функцию $y = \operatorname{tg} x$, что она возрастающая будет просто неверно, так как, например, $\frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4}$, в то время как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} > \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$ $(1 > -1)$.

Все определения, с которыми приходится сталкиваться в курсе элементарной математики, должны быть тщательно сформулированы, заучены и применены при решении достаточно большого числа задач.

§ 11. Обратные тригонометрические функции

В программах для поступающих в вузы и в программах по математике для средних школ предусматривается лишь понятие об обратных тригонометрических функциях. Обстоятельная книга по этом вопросу С. И. Новоселова—Обратные тригонометрические функции—далеко выходит за рамки программы и может быть рекомендована лишь для дополнительных занятий.

Вместе с тем я считаю целесообразным дать здесь сжатый перечень основных формул по этому вопросу, наметить идею вывода этих формул (подробные выводы можно рекомендовать произвести читателю; это—хорошие упражнения), а также привести небольшое число упражнений.

Определение 1. $y = \arcsin x$, если $x = \sin y$ и $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Определение 2. $y = \arccos x$, если $x = \cos y$ и $0 \leqslant y \leqslant \pi$.

Определение 3. $y = \operatorname{arctg} x$, если $x = \operatorname{tg} y$ и $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$.

Определение 4. $y = \operatorname{arc\,ctg} x$, если $x = \operatorname{ctg} y$ и $0 < y < \pi$.

Основные формулы я разделю на шесть групп:

I группа формул

$$\left.\begin{aligned} &\arcsin(-x) = -\arcsin x \\ &\arccos(-x) = \pi - \arccos x \end{aligned}\right\}$$ —эти формулы верны при всех x таких, что $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x \\ &\operatorname{arc\,ctg}(-x) = \pi - \operatorname{arc\,ctg} x \end{aligned}\right\}$$ —эти формулы верны при всех значениях x.

II группа формул

$$\left.\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}\right\}$$ —эта формула верна при всех x таких, что $-1 \leqslant x \leqslant 1$;

$$\left.\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2}\right\}$$ —эта формула верна при всех значениях x.

III группа формул

$$\left.\begin{aligned} &\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2} = \\ &= \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,ctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \\ &\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2} = \\ &= \operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} = \operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}\right\}$$ — эти формулы верны при всех значениях x таких, что $0 < x < 1$;

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x} = \\ &= \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ &\operatorname{arc\,ctg} x = \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x} = \\ &= \arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}\right\}$$ — эти формулы верны при всех $x > 0$.

IV группа формул

$$\left.\begin{aligned}
&\arcsin x + \arcsin y = \\
&= \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy\right) \\
&\arcsin x - \arcsin y = \\
&= \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right) \\
&\arccos x + \arccos y = \\
&= \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) \\
&\arccos x - \arccos y = \\
&= \arcsin\left(y\sqrt{1-x^2} - x\sqrt{1-y^2}\right)
\end{aligned}\right\}$$

— эти формулы верны при всех x и y таких; что $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{1-xy}{x+y} \\
&\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x-y}{1+xy} \\
&\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg}\frac{xy-1}{x+y} \\
&\operatorname{arcctg} x - \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arctg}\frac{y-x}{1+xy}
\end{aligned}\right\}$$

— эти формулы верны при всех $x > 0$, $y > 0$,

V группа формул

$$\left.\begin{aligned}
&2\arcsin x = \arccos(1-2x^2) \\
&2\arccos x = \arccos(2x^2-1)
\end{aligned}\right\}$$

— эти формулы верны при всех значениях x таких, что $0 < x > 1$;

$$\left.\begin{aligned}
&2\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{1-x^2}{2x} \\
&2\operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{x^2-1}{2x}
\end{aligned}\right\}$$

— эти формулы верны при всех $x > 0$.

VI группа формул

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\arcsin x = \arccos\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2} \\
&\frac{1}{2}\arccos x = \arccos\sqrt{\frac{1+x}{2}}
\end{aligned}\right\}$$

— эти формулы верны при всех значениях x таких, что $0 < x < 1$;

$$\left.\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right\}$$

— эта формула верна при всех значениях x.

При применении этих формул не следует забывать об ограничениях, наложенных на x. Если эти ограничения не выполнены, то обычно следует воспользоваться формулами I группы. Например: выразить $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)$ через другие обратные тригонометрические функции.

Решение. $\arccos\left(-\frac{3}{5}\right) = \pi - \arccos\frac{3}{5} = \pi - \arcsin\frac{4}{5} = \pi - \operatorname{arctg}\frac{4}{3} = \pi - \operatorname{arcctg}\frac{3}{4} = \operatorname{arcctg}\left(-\frac{3}{4}\right)$.

Приведем выводы некоторых из этих формул.

Вывод формулы

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Так как

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad \text{то} \quad 0 \leqslant \frac{\pi}{2} - \arcsin x \leqslant \pi.$$

Далее

$$\cos(\arccos x) = x,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \sin(\arcsin x) = x.$$

Мы видим, что оба числа: $\arccos x$ и $\frac{\pi}{2} - \arcsin x$ лежат на сегменте $[0, \pi]$ и имеют равные косинусы; значит, эти числа равны:

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x,$$

откуда и следует доказываемая формула.

Вывод формулы

$$\arcsin x + \arcsin y = \arccos\left(\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - y^2} - xy\right),$$

где

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1.$$

Так как

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

то

$$0 \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leqslant \arcsin y \leqslant \frac{\pi}{2},$$

следовательно,

$$0 \leqslant \arcsin x + \arcsin y \leqslant \pi.$$

Далее,

$$\cos(\arcsin x + \arcsin y) =$$
$$= \cos(\arcsin x)\cos(\arcsin y) - \sin(\arcsin x)\sin(\arcsin y) =$$
$$= \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy$$

и

$$\cos\left[\arccos\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy\right)\right] =$$
$$= \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy.$$

Окончание рассуждений, как в предыдущем выводе.
Вывод формулы

$$\frac{1}{2}\arcsin x = \arccos\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{2},$$

где

$$0 < x \leqslant 1.$$

Так как

$$0 < x < 1, \quad \text{то} \quad 0 < \frac{1}{2}\arcsin x < \frac{\pi}{4} \quad \text{и,}$$

значит,

$$\left(\sin\frac{\arcsin x}{2} + \cos\frac{\arcsin x}{2}\right)^2 = 1 + \sin(\arcsin x) = 1 + x,$$

$$\left(\cos\frac{\arcsin x}{2} - \sin\frac{\arcsin x}{2}\right)^2 = 1 - x.$$

Извлекая корень $\left(\text{и замечая, что, в силу } 0 < \frac{\arcsin x}{2} < \right.$ $\left. < \frac{\pi}{4}, \text{ мы будем иметь } \cos\frac{\arcsin x}{2} > \sin\frac{\arcsin x}{2}\right)$, получим:

$$\cos\frac{\arcsin x}{2} + \sin\frac{\arcsin x}{2} = \sqrt{1+x},$$

$$\cos\frac{\arcsin x}{2}-\sin\frac{\arcsin x}{2}=\sqrt{1-x},$$

откуда

$$\cos\frac{\arcsin x}{2}=\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}$$

и, значит,

$$\frac{1}{2}\arcsin x=\arccos\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}.$$

Аналогично выводятся все формулы, приведенные выше. Приведу небольшой список вопросов.

1. Доказать, что,

если $x\geqslant 0$, то $\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=0,$

а если $x<0$, то

$$\arcsin\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\pi-2\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

2. Доказать, что

$$\arcsin x=\begin{cases}\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если}\quad 0<x\leqslant 1,\\ \operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\pi, & \text{если}\quad -1\leqslant x\leqslant 0.\end{cases}$$

3. Доказать, что

$$\operatorname{arctg} x=\begin{cases}\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}, & \text{если}\quad x>0,\\ \operatorname{arcctg}\frac{1}{x}-\pi, & \text{если}\quad x<0.\end{cases}$$

4. Доказать, что

$$\arcsin x+\arcsin y=\begin{cases}\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right), \text{ если}\\ \qquad xy\leqslant 0 \text{ или } x^2+y^2\leqslant 1;\\ \pi-\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right),\\ \qquad \text{если } x>0,\ y>0 \text{ и } x^2+y^2>1;\\ -\pi-\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right),\\ \qquad \text{если } x<0,\ y<0,\ x^2+y^2>1.\end{cases}$$

5. Доказать, что

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x+y}{1-xy}, & \text{если } xy<1, \\ \pi + \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x+y}{1-xy}, & \text{если } x>0,\ xy>1, \\ -\pi + \operatorname{arc\,tg} \dfrac{x+y}{1-xy}, & \text{если } x<0,\ xy>1. \end{cases}$$

6. Доказать, что

$$\arcsin x + 3\arccos x + \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = \begin{cases} \dfrac{3\pi}{2}, & \text{если } -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{2}; \\ \dfrac{\pi}{2} + 4\arccos x, & \text{если } \dfrac{1}{\sqrt{2}} < x < 1; \\ -\dfrac{3\pi}{2} + 4\arccos x, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant -\dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

7. Доказать, что если $x>1$, то

$$2\operatorname{arc\,tg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi.$$

8. Доказать, что

$$\frac{2x-1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\frac{2x-1}{2}\pi\right) = [x],$$

где $[x]$ — есть наибольшее целое число меньшее или равное x.

9. Доказать, что если $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$, то

$$\arcsin\frac{\sin x + \cos x}{\sqrt{2}} = \frac{3\pi}{4} - x.$$

10. Доказать, что если $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$, то

$$\arccos x + \arccos\left(\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1-x^2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

11. Доказать, что

$$4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$

В указанной выше книге С. И. Новоселова читатель найдет много вопросов, задач и графиков, связанных с обратными тригонометрическими функциями.

§. 12. Логические ошибки

Логические ошибки, которые допускают учащиеся, связаны обычно с непониманием таких логических категорий как необходимость и достаточность, существование и единственность. Выше мы уже приводили примеры неверных ответов, относящихся к этим понятиям (см. например, п. 7).

Я приведу здесь лишь несколько простых вопросов; читателю предлагается установить, верны или нет приводимые утверждения.

Следует еще отметить, что ошибки логического порядка часто возникают в связи с нечеткими знаниями основных определений.

1. Стороны a, b, c треугольника связаны соотношением $a^2 = b^2 + c^2$. Правильно ли утверждение: «этот треугольник прямоугольный на основании теоремы Пифагора»?

2. Найти ошибку следующего «доказательства» того, что $a^0 = 1$. «Доказательство» — если $a \neq 0$, то $\frac{a}{a} = 1$; с другой стороны, вычитая показатели, находим $\frac{a}{a} = a^{1-1} = a^0$, значит, $a^0 = 1$.

3. $n!$ определяется как произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$. Следует ли из этого определения, что $1! = 1$.

4. Необходимым признаком делимости целого числа на 4 является четность последней цифры. Верно ли это утверждение?

5. Достаточным признаком делимости целого числа на 4 является четность последней цифры. Верно ли это утверждение?

6. Для того чтобы целая рациональная функция (от x) $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ делилась на $(x-\alpha)^2$ необходимо, чтобы α был ее корнем. Верно ли это утверждение?

7. Для того чтобы числа $a > b > c > 0$ могли служить длинами сторон треугольника, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено неравенство $a > b + c$. Верно ли это утверждение?

§ 13. Об оформлении письменных работ по математике

Решения задач в письменных работах по математике часто подаются неряшливо оформленными.

Все пояснения к работе должны быть ясными, четкими и краткими. Формулы более или менее значительные по размеру следует помещать посредине страницы (при перечислении формул их следует располагать посредине страницы в один столбец и отделять одну от другой — запятой); при этом дальнейшие словесные пояснения следует начинать всегда с новой строки от левого края страницы, несколько ниже последней выделенной между строк формулы.

Чертежи к работе должны быть выполнены аккуратно (допустимо в карандаше); все построения, проводимые на чертеже и все буквенные обозначения должны быть описаны в работе. Не следует приводить в работе совершенно элементарных промежуточных выкладок непосредственно следующих друг за другом. Например, не следует писать так:

«Решая квадратное уравнение

$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$

получим

$$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3} \text{ и т. д.»}$$

Надо писать так:

«Решая квадратное уравнение

$$x^2 - 4x + 3 = 0,$$

получим

$$x_1 = 1, \ x_2 = 3».$$

Или еще. Не следует писать так:

«Решая систему уравнений

$$2x + 3y - 1 = 0,$$
$$x + 4y - 3 = 0,$$

получим

$$\begin{array}{r} - \begin{array}{r} 2x + 3y - 1 = 0, \\ 2x + 8y - 6 = 0 \end{array} \\ \hline -5y + 5 = 0 \end{array}$$

и т. д.».

Надо писать так:

«Решая систему уравнений

$$2x + 3y - 1 = 0,$$
$$x + 4y - 3 = 0,$$

получим

$$x = -1,\ y = 1».$$

Образцами правильного оформления письменных работ по математике, образцами правильного расположения формул относительно текста пояснений и т. д. могут служить учебники по математике. Излагать решения задач и оформлять решения задач в письменных работах следует примерно так, как это делается в учебниках, статьях и различных методических пособиях по математике. Недостаточно найти верные решения задач; нужно еще эти решения математически грамотно изложить. Четкое изложение часто помогает и по существу получить более хорошее решение задачи. Неряшливость изложения решений задач поступавшими в вузы иногда принимала такие размеры, что экзаменатору трудно (а иногда и невозможно) было разобраться в существе решения. При самоконтроле степени своей подготовки по математике, который мы советуем проводить, решая варианты, приведенные в главе I, следует для себя оформлять работу (в срок 4 час.) в соответствии с высказанными здесь требованиями. Разумеется при разборе готовых решений задач и при решении задач «для себя», помещенных в главах I, II и IV—IX, оформлять решения так, как это указано, не нужно. Не нужно заботиться о хорошем оформлении работы и в процессе отыскания решения задачи (черновики). Оформление работы ведется в чистовике, при переписывании начисто предварительно найденного решения. Черновики к работе также всегда прилагаются.

Глава IV

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

§ 1. Алгебра

1. Доказать, что если $-1<x<1$, $-1<y<1$, $-1<z<1$ и

$$x+y+z=xyz,$$

то

$$\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=$$
$$=\frac{2x}{1-x^2}\cdot\frac{2y}{1-y^2}\cdot\frac{2z}{1-z^2}.$$

2. Рассмотрим функцию

$$y=\frac{ax^2+bx+1}{x^2+bx+a},$$

где a и b — действительные параметры.

1°. При каком условии y принимает одно и то же значение (при всех значениях x)?

2°. При каком условии y сохраняет знак?

3°. При каком условии y имеет одно наибольшее и одно наименьшее значение?

4°. Определить a и b так, чтобы при $x=c$ функция y принимала бы наименьшее значение m. При каких m задача имеет решение?

3. Дана функция

$$y=\frac{x^3-10x^2}{1-x}.$$

1°. Исследовать эту функцию на возрастание и убывание. Построить график ($Г$) этой функции.

2°. Исследовать число действительных решений системы

$$y=\frac{x^3-10x^2}{1-x}, \quad y=kx+10 \qquad (1)$$

в зависимости от значений k.

3°. Пусть (x', y') и (x'', y'') — два решения системы (1). Вычислить в функции k следующие выражения

$$x=\frac{x'+x''}{2}, \quad y=\frac{y'+y''}{2},$$

затем найти (исключая k) зависимость между этими x и y. Какую кривую определяет эта зависимость $F(x, y)=0$. Обозначим через (P) эту кривую. Решить систему уравнений (1) и $F(x, y)=0$.

4°. Найти все целые решения уравнения

$$y=\frac{x^3-10x^2}{1-x}.$$

4. Дана функция

$$y=\frac{-2x^2-5x+3}{x+a}.$$

1°. Изучить изменение этой функции в зависимости от значений a. Доказать, что графики всех таких функций (для различных значений a) проходят через одну и ту же точку. Какую?

2°. Начертить график функции y, если $a=-1$.

3°. Доказать, что если $Y=-2x-7$, то разность $Y-y$ стремится к нулю, когда x увеличивается неограниченно (по модулю).

4°. Сколько действительных корней имеет уравнение

$$\frac{-2x^2-5x+3}{x-1}=m$$

(решить графически и аналитически).

5. Кривая (Π_m) задана уравнением:

$$y=(m-1)x^2+2mx+4.$$

Построить кривые (Π_1), (Π_3), (Π_{-1}). Доказать, что кривая (Π_m) проходит через две фиксированные точки A и B. В какой точке (отличной от A) кривая (Π_m) пересекает ось Ox $(m \neq 1)$? Для каких значений m кривая (Π_m) касается оси Ox? Для каких значений m кривая (Π_m) имеет вершиной точку B (B не лежит на оси Ox). Доказать, что кривые (Π_0) и (Π_2) симметричны относительно середины AB.

6. Исследовать функцию

$$y = x^2 + 4x + 8 + \frac{8}{x-1}$$

на возрастание и убывание, на выпуклость вверх и вниз и построить ее график.

Каково взаимное расположение этой линии с параболой $y = x^2 + 4x + 8$ и с гиперболой $y = \frac{8}{x-1}$? Построить все три графика на одном чертеже.

7. Дано уравнение

$$x^2 - (m-1)\,x + m + 2 = 0$$

(m — параметр).

1°. При каком условии корни этого уравнения будут действительны?

2°. Пусть параметр m удовлетворяет этому условию; отметим на оси Ox точки M' и M'' с координатами x' и x'', где x' и x'' — корни уравнения (1).

Построим окружности (C') и (C'') на OM' и OM'', как на диаметрах. При каком условии эти окружности касаются внешне? Могут ли эти окружности быть равны, не совпадая?

3°. Предположим, что параметр m имеет такое значение, при котором окружности (C') и (C'') касаются внешне. Найти в функции m длину отрезка $T'T''$, где T' и T'' — точки прикосновения общей внешней касательной к окружностям (C') и (C''), а также поверхность, полученную вращением отрезка $T'T''$ вокруг оси Ox.

8. Рассмотрим уравнение относительно z

$$z^2 - 2\,(1+x)\,z + y + x^2 + 3 = 0$$

и будем считать, что x и y — координаты какой-либо точки плоскости. Всякому соотношению между x и y соответствует линия на плоскости.

1°. При каком соотношении между x и y — корни данного уравнения будут равны между собой?

Построить график (C_1) соответствующей зависимости между x и y.

2°. Каково геометрическое место (C_2) точек $M(x, y)$, для которых уравнение (1) имеет корень $z = 0$.

3°. Каково геометрическое место (C_3) точек M, для которого корни уравнения действительны и противоположны по знаку?

4°. Вычертить линии (C_1), (C_2), (C_3) на одном и том же графике. Исследовать в зависимости от положения точки $M(x, y)$ относительно этих кривых характер корней данного уравнения (действительные, мнимые, положительные, отрицательные, кратные).

5°. Каким соотношением связаны x и y, если корни уравнения (1) связаны соотношением $z'' = -2z'$?

9. Рассмотрим две последовательности:
$u_0 = 0$, $u_1 = 1$, u_2, u_3, u_4, $u_5, \ldots$ (последовательность u),
$U_0 = a$, $U_1 = b$, U_2, U_3, U_4, $U_5, \ldots$ (последовательность U),
в каждой из которых каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих.

1°. Написать 10 первых членов последовательности u и 10 первых членов последовательности U. Найти формулу, выражающую U_n через u_{n-1}, u_n, a и b.

2°. Обозначим через s_n сумму $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ (последовательность s). Написать 10 первых членов этой последовательности. Доказать, что

$$s_n = u_{n+2} - 1.$$

Доказать, что $u_{n+1} u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$.

3°. Положим $r_n = \dfrac{u_n}{u_{n+1}}$ (последовательность r). Вычислить с точностью до $\dfrac{1}{10\,000}$ десять первых членов этой последовательности. Каким свойством обладают подпоследовательности r_0, r_2, $r_4, \ldots$, $r_{2n}, \ldots$ и r_1, r_3, $r_5, \ldots$, $r_{2n+1}, \ldots$?

Доказать, что

$$r_{n+1} - r_n = \frac{(-1)^n}{u_n u_{n+1}}.$$

Вывести отсюда, когда эта разность положительна и когда отрицательна и что

$$\lim_{n \to +\infty} (r_{n+1} - r_n) = 0..$$

Можно ли на основании предыдущего сделать вывод о существовании предела $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n$.

4°. Доказать, что

$$r_{n-1} = \frac{1 - r_n}{r_n},$$

Выразить $|r_{n-1} - r_n|$ через r_n. Составить, исходя из этого выражения, уравнение второй степени, которому удовлетворяет $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = z$ и вычислить этот предел с точностью до $\frac{1}{10000}$.

10. Вычислить корни квадратного уравнения

$$x^2 - 17{,}81\,x + 22{,}563 = 0$$

с точностью до 0,001 (с недостатком и с избытком).

11. Дано уравнение (E) второй степени относительно x:

$$(m + 1)\,x^2 - m^2\,(m - 1)\,x + (m - 1)^3 = 0,$$

где m — действительный параметр.

1°. Для каких значений m это уравнение имеет действительные и различные корни? Равные корни?

2°. Вычислить эти корни α и β в функции m. Доказать, что один из них, который мы обозначим через α, сохраняет знак. Изучить в зависимости от значений m знак другого корня β.

3°. Начертить на одном и том же чертеже графики (A) и (B) функций $\alpha = \alpha\,(m)$ и $\beta = \beta\,(m)$ (m — абсцисса, α и β — ординаты).

4°. Вычислить координаты точек пересечения графиков (A) и (B).

Показать, как из рассмотрения этих графиков можно определить (без новых вычислений) значения m, при которых существуют действительные корни данного уравнения (E).

12. 1°. Решить следующую систему двух уравнений с двумя неизвестными u и v:

$$5\,(u + v) = 4\,(uv + 1),$$
$$(u - 1)\,(v - 1) = m.$$

2°. При каких значениях m значения неизвестных u и v будут действительны и будут заключены между -1 и 1.

13. Обозначим через $f_m(x)$ следующую функцию

$$f_m(x) = x^2 + (m-1)x - 2(m+1),$$

где x — переменное, m — параметр.

1°. Доказать, что для каждого значения m эта функция имеет наименьшее значение $g(m)$; вычислить это наименьшее значение в функции m. Какому условию должно удовлетворять m, чтобы уравнение $f_m(x) = 0$ имело бы два равных корня?

2°. Начертить график функции $g(m)$. При каких значениях m функция $g(m)$ имеет наибольшее значение? Каково при этом значении m наименьшее значение $f_m(x)$?

3°. Даны два числа a и b. Доказать, что линии $f_a(x)$ и $f_b(x)$ получаются одна из другой — переносом. Доказать, что если $a \neq b$, то эти кривые имеют и притом только одну общую точку. Найти координаты этой точки.

14. 1°. Изучить изменение функции $y = x^2(1-x)$ при условии, что x изменяется от 0 до 1. Построить график (S) этой функции (считая $0 \leqslant x \leqslant 1$).

2°. Проведем прямую (D), параллельную оси Ox, и пусть она пересекает дугу (S) в двух точках A и B (A — та точка, которая ближе к оси Oy). Пусть a и b — абсциссы точек A и B. Найти соотношение между a и b (для любой прямой D, пересекающей S в двух различных точках A и B) и представить это соотношение в виде уравнения, куда входят лишь $a+b$ и ab.

Изучить возможность выбора прямой (D) так, чтобы абсцисса середины C отрезка AB имела бы данное положительное значение λ. Получить отсюда экстремальные значения для $a+b$.

3°. Выразить b, затем $s = a+b$ только через a и показать, что s — возрастающая функция от a.

4°. Пусть (Δ) прямая, параллельная оси Oy и проходящая через наивысшую точку дуги (S); обозначим через M точку пересечения прямых (D) и (Δ). Доказать, что $MA \geqslant MB$.

15. 1°. Исследовать функцию

$$y=\frac{(x-2)^2}{x^2-1}$$

на возрастание и убывание, на выпуклость вверх и вниз и построить ее график.

2°. Найти геометрическое место середин M хорд AB этой линии, параллельных оси Ox.

16. Исследовать функцию

$$y=\frac{1}{x^2-1}$$

на возрастание и убывание, на выпуклость вверх и вниз и построить ее график.

17. Изучить функцию

$$y=\frac{(2m+1)\,x+5m+7}{x+m+3}$$

на возрастание и убывание в зависимости от значений m.

18. Рассмотрим следующую функцию от x:

$$y=\frac{x^2+2x+\lambda}{x^2-2x+2}.$$

1°. Определить λ так, чтобы при $x=\sqrt{2}$ эта функция принимала или наибольшее или наименьшее значение; найти затем при найденном значении λ наибольшее и наименьшее значения данной функции.

2°. Построить при найденном значении λ график функции (исследовав его лишь на возрастание и убывание).

3°. Составить уравнение, из которого находятся значения x, для которых $y=m$. В каких границах должно изменяться m для того, чтобы корни этого уравнения были действительными. Если m находится в указанных границах, то прямая $y=m$ пересекает график данной функции в двух точках M' и M''; найти геометрическое место середин отрезков $M'M''$, когда m меняется в своих границах.

19. Дано соотношение

$$32y-3x\,(x^2+9x+15)=53. \qquad (1)$$

1°. Будем рассматривать y как функцию от x.

Построить график этой функции, найти точки максимума и минимума.

2°. Пусть в соотношении (1) задано значение y. Опираясь на построенный график, установить число действительных корней уравнения (1) (уравнения относительно x при заданном y) и их знаки, если y изменяется от $-\infty$ до $+\infty$.

20. 1°. Решить систему:

$$(m^2+1)\,x-m\,(m+1)\,y=-(m^2+1), \qquad (1)$$

$$(m^2+1)\,x-(m+1)\,y=m^2+1 \qquad (2)$$

(x и y — неизвестные, m — действительный параметр).

2°. Пусть x и y — координаты точки относительно прямоугольной системы координат xOy. Тогда уравнения (1) и (2) как уравнения первой степени определяют две прямые (Δ_1) и (Δ_2). Доказать, что при изменении m каждая из них проходит через фиксированную точку: прямая (Δ_1) — через фиксированную точку A_1, прямая (Δ_2) — через фиксированную точку A_2. Каковы координаты этих точек? Прямые (Δ_1) и (Δ_2), вообще говоря, пересекаются в некоторой точке P. Каковы координаты точки P?

3°. Найти соотношение между координатами точки P, не зависящее от m. Вывести отсюда геометрическое место точек P, когда m изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Построить линию.

21. Пусть PBC не прямоугольный треугольник, причем $PB > PC$. Перпендикуляр в точке B к прямой PB пересекает прямую PC в точке Q и перпендикуляр в точке C к PC пересекает прямую PB в точке R. Обозначим через B' точку, гармонически сопряженную с точкой B относительно пары точек P и R, и через C' — точку, гармонически сопряженную с точкой C относительно пары точек P и Q (в случае, если эти точки B' и C' существуют). Ориентируем прямую PB от точки P к точке B и прямую PC от точки P к точке C. Положим,

$$\overline{PB}=d,\quad \overline{PC}=md,\ \angle BPC=\theta\ (0<\theta<\pi)$$

(углы измерим в радианах). На основании сделанных выше допущений мы имеем:

$$d>0, \quad 0<m<1, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2}, \quad m \neq \cos\theta.$$

I. Вычислить в функции m и $\cos\theta$ отношения $\frac{\overline{BB'}}{d}$ и $\frac{\overline{CC'}}{d}$ $\Big($напомним, что соотношение $\frac{2}{\overline{IJ}} = \frac{1}{\overline{IK}} + \frac{1}{\overline{IL}}$, в котором I, J, K, L — четыре различные точки, лежащие на одной прямой, выражает необходимое и достаточное условие того, что точки I и J гармонически разделяют точки K и $L\Big)$.

Если мы положим $\cos\theta = X$, то эти два отношения можно представить как гомографические функции от X, коэффициенты которых зависят от m.

II. 1°. Пусть имеет место соотношение

$$\overline{BB'} = \overline{CC'}. \tag{1}$$

α) Доказать, что необходимое и достаточное условие того, что будет выполнено соотношение (1) может быть записано в виде:

$$m + \frac{1}{m} = 2X + \frac{1}{X} + 1. \tag{1'}$$

β) Предположим, что X дано ($X = \cos\theta$). Определить значения m $(0<m<1)$, для которых выполнено соотношение (1); исследовать в зависимости от значений X; установить расположение решений относительно чисел X и $\frac{1}{2}$ (в случае, если эти решения существуют).

γ) Предположим, что дано m $(0<m<1)$. Определить значения X ($X = \cos\theta$), для которых выполнено соотношение (1); исследовать в зависимости от значений m; установить расположение решений (в случае их существования) относительно чисел 0, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2}$ и m.

2°. Пусть имеет место соотношение

$$\overline{BB'} + \overline{CC'} = 0. \tag{2}$$

α) Доказать, что необходимое и достаточное условие того, что будет выполнено соотношение (2) может быть записано в виде:

$$m + \frac{1}{m} = 2X + \frac{1}{X} - 1. \tag{2'}$$

β) Предположим, что X дано ($X = \cos\theta$). Определить значения m $(0 < m < 1)$, для которых будет выполнено соотношение (2); исследовать в зависимости от значений X. Установить расположение решений в случае их существования относительно числа X.

γ) Предположим, что дано m $(0 < m < 1)$. Определить значения X ($X = \cos\theta$), для которых выполнено соотношение (2). Исследовать в зависимости от значений m; установить расположение решений относительно чисел 0, $\frac{1}{2}$ и m.

III. Рассмотрим гомографические функции от X, полученные в части I, представляющие собою отношения $\frac{\overline{BB'}}{d}$ и $\frac{\overline{CC'}}{d}$, и заменим в них X независимой переменной x, которой можно придавать какие угодно действительные значения (число m предполагается данным, $0 < m < 1$). Таким путем мы получим две гомографические функции y и z от x.

1°. Изучить эти функции и построить их графики.

2°. Пусть (Γ) и (Δ) эти две линии, которые мы отнесем к одной и той же системе координат $x'Ox$, $y'Oy$ (значения x будем откладывать на оси абсцисс, значения y и z — на оси ординат). Пусть (Δ') — линия, симметричная линии (Δ) относительно оси $x'Ox$.

Имеют ли линии (Γ) и (Δ) общие точки? Имеют ли линии (Γ) и (Δ') общие точки? Исследовать в зависимости от значений m. Построить линии (Γ), (Δ) и (Δ') для $m = \frac{1}{4}$.

IV. *Геометрическая интерпретация.* Возвращаясь к фигуре, описанной в части I, обозначим через BU прямую, гармонически сопряженную прямой BC относительно прямых BP и BQ, и через CV — прямую, гармонически сопряженную прямой CB относительно прямых CP и CR (BU и CV проходят соответственно через C' и B', если эти последние точки существуют). Прямые BU и CV пересекаются в точке A. На основании хорошо известного факта, прямые BP и BQ, перпендикулярные и гармонически сопряженные по отношению к BC и BU, являются биссектрисами угла B треугольника ABC; точно также прямые CP и CR — биссектрисы угла C; отрезки BB' и CC' являются частями одной или другой биссектрис, внутренней или внешней, углов B и C треугольника ABC, ограниченные вершиной (B или C) и противоположной стороной (AC или AB). Показать, что точки P, Q, R являются центрами трех из четырех окружностей, касающихся сторон треугольника ABC и что центр четвертой такой окружности есть точка S пересечения прямых BQ и CR; прямые QR и PS проходят), следовательно, через точку A (они являются биссектрисами угла A треугольника ABC).

1°. Уточнить в зависимости от значений $\cos\theta$ и m, на какой из биссектрис (внутренней или внешней) угла B (или угла C) лежит отрезок BB' (соответственно отрезок CC'). Следует рассмотреть три случая в зависимости от расположения значения $\cos\theta$ относительно чисел 0 и m.

2°. Доказать, что треугольники PQR, PBC, AQC и ABR подобны.

Обозначая через a, b, c длины сторон BC, CA и AB треугольника ABC, вычислить в функции m и $\cos\theta$ отношения

$$\frac{a^2}{d^2}, \quad \frac{ab}{d^2}, \quad \frac{ac}{d^2},$$

которые можно рассматривать как величины сторон треугольника, подобного треугольнику ABC.

3°. Если m и $\cos\theta$ ($\cos\theta = X$) удовлетворяют или соотношению (1′) или соотношению (2′), изученных в части II, то соответствующий треугольник ABC таков, что отрезки BB' и CC' биссектрис его углов B и C имеют одинаковую длину. Указать в этих двух случаях, о которых идет речь, отрезками каких биссектрис, внешних или внутренних, являются отрезки BB' и CC'. Пусть в одном из рассматриваемых случаев ($\overline{BB'} = \overline{CC'}$ или $\overline{BB'} + \overline{CC'} = 0$) соответствующий треугольник ABC таков, что $AB = AC$; построить треугольник, подобный этому равнобедренному треугольнику.

4°. Пусть $m = \frac{1}{2}$. Определить значение $\cos\theta$, для которого будет выполнено соотношение (2) и вычислить для соответствующего треугольника ABC отношения

$$\frac{a^2}{d^2}, \quad \frac{ab}{d^2}, \quad \frac{ac}{d^2}, \quad \frac{\overline{BB'}}{d} \quad \text{и} \quad \frac{\overline{CC'}}{d}.$$

Можно ли построить с помощью циркуля и линейки треугольник, подобный этому треугольнику ABC?

§ 2. Алгебра с тригонометрией

1. Рассмотрим функцию

$$y = \frac{(x-a)(ax+1)}{x^2+1},$$

где a — параметр. Пусть (Γ) — график этой функции.

1°. Каково взаимное расположение графиков (Γ_1) и (Γ_2), соответствующих значениям $a = a_1$ и $a = -a_1$?

2°. Будем во всем дальнейшем считать $a \geqslant 0$. Изучить функции, соответствующие следующим значениям параметра:

$$a = 0, \quad a = \frac{1}{2}, \quad a = 1, \quad a = 2$$

и построить их графики.

3°. Обозначим через α угол такой, что $\operatorname{tg} \alpha = a$, а через φ — угол такой, что $\operatorname{tg} \varphi = x$. Доказать, что

$$y = A \sin 2(\varphi - \alpha),$$

где A зависит только от α.

4°. Пусть $\varphi = \varphi_1$ данное значение φ, x_1 — соответствующее значение x и M_1 — соответствующая точка линии (Γ); пусть M_1 и M_2 — точки графика (Γ), которые соответствуют следующим значениям φ:

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{3}, \quad \varphi_3 = \varphi_1 - \frac{\pi}{3}.$$

Доказать, что центр тяжести треугольника $M_1M_2M_3$ не зависит от φ_1; вычислить в функции φ_1 абсциссу этого центра тяжести $\left(\text{т. е. } \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right)$ и изучить ее изменение, когда φ_1 изменяется от 0 до π.

2. 1°. Исследовать, при каких значениях m корни уравнения

$$f(x) \equiv 4x^2 + (2 - m)x - 2m^2 + 2m = 0$$

будут действительны и определить их расположение относительно -1 и 1.

2°. Приложить результаты предыдущего исследования к решению неравенства

$$4\cos^2 u + (2 - m)\cos u - 2m^2 + 2m < 0, \quad 0 \leqslant u \leqslant \pi.$$

3°. Решить это неравенство в случае $m = \frac{5}{4}$.

3. Решить неравенства

$$\cos\varphi - \sin\varphi + 1 > 0,$$
$$\cos\varphi - \sin\varphi + 1 < 0,$$

полагая $\cos\varphi = x$, $\sin\varphi = y$ и рассматривая наряду с тригонометрическим кругом график линии $x - y + 1 = 0$.

§ 3. Планиметрия

1. Дана сторона a треугольника ABC и разность $b-c=2l$ двух других его сторон ($b \geqslant c$).
   1°. Найти положение точки S, в которой окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC, найти положение точки S', в которой окружность, вневписанная в угол A треугольника ABC, касается стороны BC.
   2°. Найти геометрическое место центров указанных окружностей. В каких границах изменяются их радиусы r и r'. Вычислить rr'.
   3°. Вычислить стороны b и c, зная a, $b-c\,(\geqslant 0)$ и $\frac{r'}{r}=k^2$. Исследовать.
   4°. Построить геометрически треугольник, если заданы a, $b-c\,(\geqslant 0)$ и $\frac{r'}{r}=k^2$.

2. На оси $x'Ox$ фиксированы точки A', A, B; $\overline{OA'}=-a$, $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$ (a — данное положительное число, b — данное число, $b \neq \pm a$). Пусть M — произвольная точка окружности (O), построенной на AA', как на диаметре, (ω) и (ω') — окружности, описанные около треугольников MAB и $MA'B$.
   1°. Построить центры ω и ω' окружностей (ω) и (ω'). Доказать, что $O\omega \perp O\omega'$. Каково геометрическое место точек ω и ω' [если M описывает окружность (O)]. Пусть H и H' — проекции ω и ω' на AA'. Доказать, что произведение $\overline{H\omega}\cdot\overline{H'\omega'}$ остается постоянным.
   2°. Какова огибающая поляры ω относительно окружности (O), когда ω описывает свое геометрическое

место? Определить геометрическое место точки пересечения поляр ω и ω' относительно окружности (O), если M описывает эту окружность.

3°. Доказать, что окружности (ω) и (ω') — ортогональны. Определить положения точки M, при которых эти окружности будут равны друг другу.

3. Рассмотрим на плоскости две фиксированные точки A и B. В настоящей задаче требуется изучить преобразование, которое определяется следующим образом: точке M ставится в соответствие точка M' такая, что $AM \perp AM'$, а точки M, B и M' лежат на одной прямой.

1°. Доказать, что для того чтобы точка M не имела образа, необходимо и достаточно, чтобы она находилась на некоторой окружности (C_0) (какой?).

2°. Пусть M описывает окружность (C), проходящую через A и B и отличную от (C_0). Доказать, что точка M' описывает также окружность (C') и что окружность (C') проходит через точки A и B. Изучить расположение окружностей (C) и (C') и доказать, что точки M и M', описывающие их, соответствуют друг другу в простом преобразовании (каком?).

3°. Пусть точка M описывает окружность (Γ), проходящую через A, с центром на прямой AB и которая (окружность) отлична от (C_0). Доказать, что точка M' описывает окружность (Γ'), проходящую через A, с центром на прямой AB и что точки M и M', описывающие эти окружности, соответствуют одна другой в простом преобразовании (каком?).

4°. Пусть O — центр окружности (Γ), O' — центр окружности (Γ'). Положим $\overline{AB} = a > 0$, $\overline{AO} = x$, $\overline{AO'} = x'$. Вычислить $y = \overline{OO'}$ в функции x и построить ее график, когда O описывает AB. Получить отсюда график функции $z = OO'$.

4. Рассмотрим прямую (D) и две точки F и H, имеющие одну и ту же проекцию I на (D) $(IF < IH)$ и расположенные по одну сторону от (D). Пусть O — какая-нибудь точка (D). Построить окружность (C), проходящую через F и касающуюся в точке H прямой OH. Пусть окружность (C) вторично пересекает прямую OF в точке G; найти геометрическое место точек G, когда O описывает прямую (D).

5. На оси Ox фиксированы две точки B и C такие, что $\overline{OB} = a$, $\overline{OC} = -a$, где a — данное число. Пусть OL — полупрямая выходящая из O и образующая с осью Ox угол α, $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OL}) = \alpha$, причем $0 < \alpha < \pi$.

1°. Точка M лежит на луче OL на расстоянии x от O; вычислить в функции x отношение:

$$y = \frac{\overline{MB}^2}{\overline{MC}^2},$$

изучить изменение этой функции и построить ее график, считая, что M описывает всю полупрямую OL.

2°. Дано положительное число k; построить точку A полупрямой OL такую, что $\frac{AB}{AC} = k$.

В каких пределах может изменяться k, если α дано для того, чтобы построение было возможным? Проконтролировать результаты этого исследования, используя результаты, полученные в 1°.

3°. Для подходящим образом выбранных k и α построение 2° позволит получить две точки A и A', удовлетворяющие вопросу. Рассмотрим два треугольника ABA' и ACA' и обозначим через (Γ) и (Γ') окружности, описанные около этих треугольников.

a) Доказать, что $OA \cdot OA' = a^2$.

b) Найти геометрическое место центров (Γ) и (Γ'), когда один из параметров α или k остается постоянным, а другой меняется.

4°. Обозначим через B' и C' вторые точки пересечения окружностей (Γ) и (Γ') с окружностью, построенной на BC, как на диаметре. Обозначим через P точку пересечения BB' и CC', через Q — точку пересечения BC и $B'C'$, через R — точку пересечения BC' и CB'. Доказать, что точка P лежит на AA', и что Q и R — центры гомотетий окружностей (Γ) и (Γ').

6. (C) — окружность радиуса R с центром O; (C') — окружность радиуса $\frac{R}{2}$ с центром A, лежащим на окружности (C); M и N — точки пересечения окружностей (C) и (C'). Выразить приближенно в радианах угол MON.

7. На прямой (D) от точки A в одну сторону отложены отрезки $AB = a$ и $AB' = a'$ $(a' > a)$ и по одну сторону от (D) на отрезках AB и AB', как на диаметрах, построены полуокружности. Пусть H — произвольная точка отрезка AB. Прямая, проходящая через точку H, пересекает указанные полуокружности в точках M и M'.

   1°. Доказать, что отношение AM к AM' не зависит от положения точки H на отрезке AB.

   2°. Пусть P — точка пересечения BM и BM'. Доказать, что треугольники APB и APB' подобны. Каково геометрическое место точек P, если точка H описывает отрезок AB?

8. Построить треугольник, зная на плоскости положение центров I, I_a и O вписанной окружности (I), вневписанной (I_a) (в угол A) и описанной (O). При каком взаимном расположении точек I, I_a и O построение возможно?

9. Дан прямоугольный треугольник ABC (A — прямой угол), вершины которого B и C фиксированы, причем $BC = a$.

   1°. Найти длины x и y сторон AB и AC этого треугольника, зная его периметр $2p$. Исследовать.

   2°. Вычислить в функции p высоту AH треугольника ABC, радиус r вписанной в него окружности и площадь s. Изучить изменение s, когда p изменяется в пределах, установленных в 1°. Построить соответствующую кривую.

   3°. Вычислить периметр треугольника ABC и его стороны AB и AC в каждом из следующих случаев:

   α) один из его острых углов в два раза более другого;

   β) один из катетов в два раза более другого;

   γ) площадь $s = \dfrac{6a^2}{25}$.

10. Дана полупрямая Ax и две фиксированные окружности (O) и (O'), касающиеся внутренним образом в точке A и радиусы которых соответственно R и R' $(R > R')$; центры этих окружностей лежат на полупрямой Ax. Обозначим через (C) переменную окружность с центром C, касающуюся окружностей (O) и (O') в переменных точках E и E'.

1°. Доказать, что геометрическое место точек C таково, что $OC + O'C = \text{const}$. Найти значение этой постоянной.

2°. Найти геометрическое место точек P пересечения касательных к окружности (C) в точках E и E'.

3°. Построить окружность (C), проходящую через данную точку M. Исследовать.

4°. Обозначим через T точку прикосновения двух окружностей (C), касающихся между собой. Найти геометрическое место точек T. Под каким углом это геометрическое место пересекает окружности (C)? Доказать, что существует точка H, степени которой относительно окружностей (C) равны между собой. Вычислить AH. Найти геометрическое место оснований поляр точки A относительно окружностей (C).

11. На фиксированной прямой (Δ) заданы три точки A, F, A', причем точка F лежит между точками A и A' и $A'F > FA$. Пусть D' и D'' — прямые, перпендикулярные прямой AA' и проходящие соответственно через точки A и A'. Рассмотрим две переменные взаимно-перпендикулярные прямые d и d', проходящие через точку F. Обозначим точки пересечения прямой d с прямыми D' и D'', соответственно, через M и M', а прямой d' с прямыми D' и D'', соответственно P и P'. Пусть, наконец, прямые PM' и MP' пересекаются в точке R.

1°. Доказать, что геометрическое место точек R есть прямая (D); требуется также определить точку I, в которой прямая (D) пересекает (Δ) (показать, что геометрическое место точек R есть вся прямая D).

2°. Доказать, что геометрическое место проекций точки F на MP' и $M'P$ есть окружность.

12. A. a) Построить окружность, проходящую через две данные точки и касающуюся данной окружности (без исследования).

b) Построить окружность, касающуюся данной прямой в данной точке и касающуюся другой данной окружности.

B. A, A' и F — три различные точки, лежащие на одной прямой (порядок безразличен). Обозначим через (C) окружность с диаметром AA' через O — центр этой окружности, через D — поляру точки F

относительно окружности (C) и через I — точку пересечения AA' с (D).

Пусть P — какая-нибудь точка прямой (D). Построить окружности (γ_1) и (γ_2), касающиеся в точке F прямой PF и касающиеся кроме того окружности (C) в точках K_1 и K_2.

а) Доказать, что окружность с диаметром PF проходит через точки K_1 и K_2.

б) Пусть PK_1 и PK_2 пересекают (γ_1) и (γ_2) вторично в точках M_1 и M_2. Доказать, что отрезки PM_1 и PM_2 видны из точки I под прямым углом.

в) Пусть M_1M_2 пересекает (D) в точке Q; доказать, что окружность с диаметром M_1M_2 ортогональна окружности с диаметром FQ (можно использовать инверсию с полюсом P и модулем PF^2). Получить отсюда, что IF — биссектриса угла M_1IM_2.

C. Рассмотрим произвольную прямую (D) и фиксированную точку F. Обозначим проекцию точки F на прямую (D) через I. Пусть M — какая-нибудь точка плоскости. В инверсии с полюсом F и произвольным модулем λ окружность с диаметром MF переходит в прямую (γ'). Пусть I' и M' — образы I и M в этой инверсии, H — проекция точки M на (D), K' — проекция точки I' на γ'. Доказать, что треугольники FIM и $FM'I'$ подобны. Доказать, что треугольники HIM и $K'M'I'$ также подобны.

Получить отсюда, что если отношение $\frac{MF}{MH}$ сохраняет постоянную величину (и при переменной точке M), то прямая γ' остается касательной к некоторой фиксированной окружности.

D. Обратно. Пусть дана фиксированная окружность (C) с центром O и фиксированная точка F. Пусть (D) — поляра F относительно (C), I — проекция F на (D). Рассмотрим переменную окружность (γ), проходящую через F и касающуюся (C) в точке K.

Рассмотрим инверсию с полюсом F, которая сохраняет окружность (C). Во что переходит окружность (γ)? Доказать, что I переходит в O. Обозначим через H проекцию на (D) точки M, диаметрально противоположной точке F окружности (γ), а через K' и M' — образы точек K и M в указанной выше инверсии. Доказать, что треугольники FMI

и FOM' подобны и что треугольники MIH и $OM'K'$ также подобны. Получить отсюда, что отношение $\frac{MH}{MF}$ не зависит от выбора окружности (γ).

Замечание. Разделы C и D решать независимо от A и B.

13. Пусть BCA_1A_2, CAB_1B_2, ABC_1C_2 — три квадрата, построенные во внешнюю сторону треугольника ABC на его сторонах. Пусть A', B', C' — их центры, (α), (β) и (γ) — окружности, построенные на A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, как на диаметрах. Доказать, что степени точек A, B и C соответственно относительно окружностей (α), (β) и (γ), равны между собой и каждая из них равна учетверенной площади треугольника $A'B'C'$.

14. Пусть (O) — окружность с центром O и радиусом r, AB — фиксированный диаметр этой окружности, (D) — касательная к окружности в точке A, а (Δ) — касательная к окружности (O) в точке B. Пусть переменная секущая, проходящая через точку B, пересекает (D) в точке P, а (O) — в точке R. Пусть прямая AR пересекает (Δ) в точке Q. Обозначим через M середину отрезка AP.

1°. Доказать, что MR — касательная к окружности (O) в точке R. Построить поляры точек M и Q относительно (O). Доказать, что окружность (Γ) с диаметром MQ ортогональна (O).

2°. Обозначим через F и F' поляры диаметра окружности (O), перпендикулярного к AB. Доказать, что (Γ) ортогональна всякой окружности, проходящей через F и F'. Что будет являться касательной в точке M к окружности, описанной около треугольника MFF'?

3°. Пусть MQ пересекает BP в точке S, а AB—в точке P. Доказать, что точки M и Q гармонически сопряжены с точками S и T и что окружность, описанная около треугольника SFF', проходит через T.

15. Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, r — радиус этой окружности, а D, E, F — точки прикосновения ее к сторонам BC, CA и AB.

1°. Рассмотрим инверсию (J) с центром (I) и степенью инверсии r^2. Обозначим через A', B', C' образы точек A, B, C в этой инверсии. Обозначим через

(α), (β) и (γ) окружности, в которые инвертируются прямые BC, CA и AB. Найти радиусы этих окружностей и углы, под которыми они пересекаются.

2°. Доказать, что точки F, A', E лежат на одной прямой (аналогично F, B', D и D, C' E). Вычислить углы, стороны и радиус окружности, описанной около треугольника $A'B'C'$, зная углы A, B, C и радиус r окружности, вписанной в данный треугольник.

3°. Доказать, что окружности ($A'ID$), ($B'IE$), ($C'IF$) принадлежат одному пучку.

4°. Доказать, что центр O окружности, описанной около треугольника ABC, имеет одну и ту же степень относительно окружностей (AID), (EIB), (CIF).

16. В плоскости дан отрезок AB прямой и две прямые (d_α) и (d_β), не параллельные прямой AB, не проходящие ни через точку A, ни через точку B и пересекающиеся в точке O, не лежащей на AB. Пусть (Δ) — переменная прямая, параллельная AB. Если она не проходит через O и не совпадает с AB, то она пересекает (d_α) и (d_β) в точках C и D. Рассмотрим *выпуклую* трапецию $ABCD$. Найти геометрическое место точек пересечения ее диагоналей. Найти также геометрическое место середин отрезка, концы которого — середины этих диагоналей.

17. В плоскости даны две пересекающиеся в точке O прямые (D_1) и (D_2) и дана фиксированная точка A. Найти геометрическое место точек M плоскости таких, что точки M_1 и M_2, симметричные с точкой M относительно (D_1) и (D_2), лежат на одной прямой с точкой A.

18. Две параллельные прямые (Δ) и (Δ') проходят соответственно через вершину A и ортоцентр H треугольника ABC. Пусть M и N — проекции точек B и C на (Δ), а Q и T — проекции точек B и C на (Δ'); наконец, пусть A', B' и C' — основания высот треугольника ABC.

1°. Найти при условии, что прямая (Δ) вращается вокруг A, геометрическое место центров ω прямоугольника $MNPQ$. Доказать, что окружность, описанная около этого прямоугольника, проходит через точку A'.

2°. Доказать, что диагонали MP и MQ прямоугольника $MNPQ$ проходят соответственно через точки B' и C'.

19. Рассмотрим окружность (O, R) и точку A такую, что $OA = 2R$. Пусть (D) перпендикуляр к OA и пересекает этот отрезок в точке H, отстоящий от O на расстоянии $\frac{5}{4}R$. На прямой (D) берется произвольная точка M, из которой проводятся касательные MT и MT' к окружности (O).

1°. Доказать, что $MT = MT' = MA$.

2°. Полагая, что M описывает прямую (D), доказать, что TT' проходит через фиксированную точку, и определить положение этой точки.

3°. Найти геометрическое место ортоцентров треугольников MTT'.

4°. Найти геометрическое место центров окружностей, вписанных в треугольник MTT'.

5°. Пусть (C) и (C') — окружности, проходящие через I и касающиеся (O) — одна в точке T, другая в точке T'. Доказать, что вторая точка S пересечения окружностей (C) и (C') лежит на окружности с диаметром OI.

20. Пусть (C) и (C') — две окружности радиуса R с центрами C и C'; $CC' = 2a\,(a > R)$.
Отрезок MM' длиной $2k$ перемещается по плоскости так, что точка M лежит все время на окружности (C), а точка M' — на окружности (C').

1°. Каким условиям должно удовлетворять число k?

Построить дуги, которые описывают точки M и M'. Для каких значений k точки M и M' описывают окружности (C) и (C') целиком?

2°. Полагая $2a = 14$ *см*, $R = 4$*см*, $2k = 15$ *см*, построить с помощью циркуля и линейки отрезок MM', если соблюдено еще одно из следующих условий:

а) середина I отрезка MM' совпадает с серединой O отрезка CC';

б) отрезок MM' наклонен к CC' под углом 30°;

в) точка M занимает граничное положение дуги, определенной в 1°;

г) точка I не совпадает с O, но находится на равных расстояниях от C и от C';

д) точка I не совпадает с O, но находится на прямой CC'.

3°. Определить условия возможности построений, указанных в пунктах б) и д), считая R, a, k и u произвольными.

21. Точка M притягивается к двум точкам A и B ($AB = a$) силами, пропорциональными расстояниям от точки M до точек A и B. Коэффициенты пропорциональности равны соответственно ω_a и ω_b (ω_a и ω_b — две постоянные положительные константы).

1°. Доказать, что равнодействующая притягивающих сил проходит через точку O, расположенную на прямой AB и такую, что $\omega_a \cdot \overline{AO} = \omega_b \cdot \overline{OB}$ и что ее величина равна $(\omega_a + \omega_b) OM$ [разложить для этого силы $\overline{F}_a$ и $\overline{F}_b$ по двум направлениям: по направлению MO (составляющие $\overrightarrow{MD}$ и $\overrightarrow{ME}$) и по направлению, параллельному AB (составляющие $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{EF}$). Затем доказать, что $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{EF}$ противоположно направлены и равны по модулю].

2°. Рассмотрим теперь материальную точку M, масса которой равна m и которая притягивается к двум точкам A и B ($AB = a$) силами, пропорциональными расстояниям от этой точки M до точек A и B с коэффициентами пропорциональности, соответственно равными $2m\frac{g}{a}$ и $2km\frac{g}{a}$ (g — ускорение силы тяжести, k — положительная константа или нуль).

а) Предположим, что AB — горизонтальна. Найти положение равновесия точки M геометрически (можно использовать свойство, установленное в 1°) и алгебраически (вычисляя проекции сил притяжения на две взаимно-перпендикулярные оси, соответствующим образом выбранные). Каково геометрическое место положений равновесия точки M, если k — меняется?

б) Обобщить результаты исследования, если AB не горизонтальна.

3°. Рассмотрим окружность (Γ) и две точки A и B в плоскости этой окружности. Точка M (не материальная) остается на окружности (Γ) и скользит по ней без трения. Она притягивается двумя силами, определенными в 1°. Найти геометрически положения равновесия.

4°. Окружность (Γ) имеет коэффициент трения $f=\operatorname{tg}\varphi$. Найти геометрически положения равновесия. Исследовать.

22. Дан треугольник ABC. Переменная точка M описывает *прямую* BC. Пусть (O) — окружность, проходящая через точку M и касающаяся AB в точке B; (O') — окружность, проходящая через точку M и касающаяся AC в точке C. Вторую точку пересечения окружностей (O) и (O') обозначим через P.

1°. а) Вычислить углы, образованные прямыми PB, PC и PM, взятыми попарно.

б) Найти геометрическое место точек P, когда M описывает прямую BC.

в) Доказать, что прямая PM проходит через фиксированную точку; определить положение этой точки относительно точек A, B и C.

2°. Пусть точка M фиксирована. Рассмотрим инверсию с полюсом M и степенью инверсии равной $k = \overline{MB} \cdot \overline{MC}$.

а) Во что переходит окружность (O) в этой инверсии; под каким углом ее образ пересекает BC? Тот же вопрос по отношению к (O').

б) Получить отсюда новые решения вопросов 1°, в), затем 1°, б).

3°. а) Найти геометрическое место центров O и O' окружностей (O) и (O'), когда M описывает прямую BC.

Вычислить угол, образованный прямыми ωO и $\omega O'$, где ω — центр окружности, описанной около треугольника ABC; вывести отсюда, что окружность, проходящая через точки ω, O и ω' проходит через фиксированную точку, отличную от ω.

б) Каким простым преобразованием можно перейти от точки O к O'?

23. На окружности (S) радиуса R с центром O взяты две точки A и B такие, что $\angle AOB = 2\alpha$ $(0 < 2\alpha < \pi)$. Рассмотрим всевозможные пары окружностей (D) и (D'), касающиеся между собой и касающиеся окружности (S) — первая в точке A, вторая — в точке B. Пусть C и C' — центры этих окружностей, а x и y — их радиусы.

Часть первая

1°. Пусть x задан. Вычислить y. Исследовать в зависимости от положения центра C окружности (D) характер касания окружностей (S), (D) и (D'). Установить в различных случаях соотношение, существующее между x, y, R и α.

2°. Пусть $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $R = 1$. Выразить в этом случае через x функцию $z = x^2 + y^2$. Построить соответствующую кривую. Вычислить x и y, зная, что $s_1 + s_2 = ms$, где s_1, s_2, s — поверхности сфер, полученных при вращении вокруг их диаметров соответственно окружностей (D), (D') и (S). Исследовать. Можно ли получить результаты этого исследования, если исходить из графика линии $z = x^2 + y^2$?

Часть вторая

3°. Найти геометрическое место точек M прикосновения окружностей (D) и (D'). Найти огибающую прямых CC'. Найти геометрическое место (Γ) точек пересечения общих внешних касательных к окружностям (D) и (D').

4°. Пусть дана точка N на (Γ) такая, что ей соответствуют две пары окружностей (D), (D'); точка прикосновения первой пары — M, точка прикосновения второй пары — M_1. Найти геометрическое место центров, вписанных окружностей, центров описанных окружностей и ортоцентров треугольника NMM_1.

24. На сторонах AB, BC, CD и DA четырехугольника $ABCD$ наружу построены квадраты. Пусть ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 — их центры. Обозначим через I и J середины AC и BD, через H и K — середины $\omega_1\omega_3$ и $\omega_2\omega_4$.

1°. Доказать, что отрезки $\omega_1\omega_3$ и $\omega_2\omega_4$ равны и взаимно-перпендикулярны; к какому типу четырехугольников относится четырехугольник $IKJH$?

2°. При каком необходимом и достаточном условии, наложенном на четырехугольник $ABCD$, четырехугольник $\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4$ будет квадратом?

25. Даны две окружности (C) и (C'), точка A на окружности (C) и точка A' на окружности (C').

Найти на радикальной оси этих окружностей точку P такую, что прямая MM', проходящая через вторые точки M и M' пересечения секущих PA и PA' с окружностями (C) и (C'), была бы перпендикулярна к этой радикальной оси.

26. Дана окружность (C), AB — ее диаметр, (Δ) — касательная к (C) в точке B.

Переменная прямая (D), проходящая через A, пересекает (C) в P, а (Δ) — в Q. Обозначим через M точку этой прямой, определенную условием $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PQ}$..

1°. Пусть P', Q', и M' — точки, соответствующие аналогичным образом секущей (D'), проходящей через A. Обозначим через S и T точки пересечения (Δ) с прямыми PP' и MM'. Доказать, что отрезки QQ' и ST имеют общую середину.

2°. Вывести на основании предыдущего способ построения касательной в точке M к геометрическому месту точек M (при этом само геометрическое место точек M определять не требуется).

27. ABC — равнобедренный треугольник, в котором $AB = AC = b$, $BC = a$, $\angle BAC = 2\alpha$ и I — середина стороны BC. На продолжении сторон AB и AC за точки B и C берутся две точки M и N такие, что $BM \cdot CN = IC^2 = IB^2 = \frac{a^2}{4}$.

1°. Найти геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольника MIN.

2°. Найти геометрическое место основания H высоты IH и основания D биссектрисы ID внутреннего угла I треугольника MIN.

3°. Применим к треугольнику MIN инверсию с центром I и степенью инверсии, равной IC^2. Пусть при этой инверсии точки M и N перейдут в M' и N'. Найти геометрическое место середин J отрезка $M'N'$.

4°. Ограничиваясь случаем, когда равнобедренный треугольник ABC и прямоугольный ($\angle A = 90°$), определить геометрическое место середин L отрезка MN. Для решения этого последнего вопроса обозначить длину отрезка BM через x. Для всех геометрических мест надо указать точно их положение, размеры и границы.

28. Пусть (D) и (D') — две параллельные прямые, O и A —

две фиксированные точки на первой из них. Рассмотрим на прямой (D) переменную пару точек M и M', которые симметричны относительно точки A.

1°. Построить окружности (C) и (C'), касающиеся (D'), проходящие через O и соответственно через точки M и M'. Обозначим через N и N' точки прикосновения (C) и (C') с (D'). Доказать, что прямые MN и $M'N'$ пересекаются в фиксированной точке I. Доказать, что вторая точка B пересечения окружностей (C) и (C') располагается на фиксированной прямой; уточнить геометрическое место точек B.

2°. Пусть касательная в точке M к (C) и касательная в точке M' к (C') пересекаются в точке P. Доказать, что прямые PM и PM' имеют в качестве одной из биссектрис прямую PI и что прямые PM и PM' огибают некоторую фиксированную окружность (Γ). Доказать, что точка P располагается на фиксированной прямой $I'A'$, где I' — точка, симметричная точке O относительно I, а A' — точка, симметричная точке O относительно A. Уточнить геометрическое место точек P. Доказать, что угол между касательными к (C) и (C') в точке O равен углу, образованному прямыми PM и PM'. Как построить пару точек M и M', симметричных относительно A, и таких, чтобы соответствующие окружности (C) и (C') были ортогональны? Сколько решений имеет эта задача?

3°. Подвергнем окружности (C) и (C') инверсии (O, OI^2); сравнить полученную при этом фигуру с фигурой, образованной касательными MP и $M'P'$; где находится образ Q точки B в указанной инверсии? Применяя эту инверсию, дать новое построение пары точек M и M', симметричных относительно A и таких, что соответствующие им окружности (C) и (C') будут ортогональны.

29. На биссектрисе угла $xAy = 2u$ берется точка M такая, что $AM = a \cos u$, где a — данное положительное число. Переменная прямая, проходящая через точку M, пересекает луч Ax в точке P, а луч Ay — в точке Q. Положим $AP = x$, $AQ = y$. Пусть P' и Q' — проекции P и Q на AM.

1°. Доказать, что A, M, P', Q' — гармоническая четверка точек и что, следовательно,

$$\frac{1}{\overline{AP'}}+\frac{1}{\overline{AQ'}}=\frac{2}{\overline{AM}}.$$

Вывести отсюда соотношение $a(x+y)=2xy$.

2°. В каких пределах изменяются x и y, если прямая PQ вращается вокруг M так, что точки P и Q остаются все время на лучах Ax и Ay? Выразить y как функцию от x (исходя из 1°) и построить график полученной функции, считая, что x изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Выделить на этой кривой ту часть, которая соответствует значениям x в соответствии с условием задачи.

3°. Вычислить x и y, зная, что $x^2+y^2=ma^2$. Исследовать. Рассмотреть случай $m=\frac{45}{16}$.

Пусть x и y определены в соответствии с условием $m=\frac{45}{16}$. Каков должен быть при этом угол u для того, чтобы треугольник APQ был прямоугольным.

30. В плоскости (P) дана точка O. Каждой точке M плоскости, отличной от O, ставятся в соответствие две точки M' и M'' прямой OM, определяемые соотношениями

$$\overline{OM'}=\overline{OM}+a, \quad \overline{OM''}=\overline{OM}-a,$$

где a — данное число. Если точка M описывает линию (C), то точка M' описывает линию (C'), а точка M'' описывает линию (C'').

1°. Пусть M_1 и M_2 — две точки линии (C); M_1' и M_2' — соответствующие им точки линии (C').

Доказать, что точка I пересечения медиатрис отрезков M_1M_2 и $M_1'M_2'$ расположена на одной из биссектрис углов, образованных прямыми OM_1 и OM_2. Вывести отсюда свойства нормалей в точке M_1 к линии (C) и в точке M_2' — к линии (C'). Показать, как, используя это свойство, построить касательную к линии (C') в точке M_1', зная касательную к линии (C) в точке M_1. Установить, что из предыдущего справедливо и по отношению к линиям (C) и (C'').

2°. Предположим, что линия (C) есть прямая (D), расположенная на расстоянии $OH=a$ от точки O.

Взять на этой прямой точки A, B, C, расположенные с одной стороны от точки H и такие, что $OA = \frac{3a}{2}$, $OB = 2a$, $OC = \frac{5a}{2}$. Построить соответствующие точки линий (C') и (C'') так же, как и касательные к линиям (C') и (C'') в этих точках. Вычертить линии (C') и (C'') и доказать, что линия (D) является для них асимптотой.

31. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$; AC — его диагональ. Пусть (O, R) — окружность, вневписанная в угол A треугольника ABC, (O', R') — окружность, вневписанная в угол A треугольника ADC.
    1°. Доказать, что окружности (O) и (O') касаются прямой AC в одной и той же точке I.
    2°. Доказать, что C — ортоцентр треугольника AOO' и что $IA \cdot IC = RR'$.
    3°. Пусть окружность (O) касается прямой AB в точке T, а окружность (O') касается прямой AD в точке T'; обозначим через M точку пересечения прямых OT и $O'T'$. Доказать, что произведение расстояний от точек O и O' до прямой AM равно RR'.

32. Рассмотрим полуокружность с диаметром $AB = 2R$; пусть O — середина AB и OC — радиус этой полуокружности, перпендикулярный к AB. Возьмем на дуге $\overset{\frown}{AC}$ точку M и положим $AM = x$. Пусть H — проекция точки M на BC.
    1°. Выразить в функции R и x величину $y = AM + MH$.
    2°. Определить x при условии, что y имеет данную величину l.
    3°. Построить график функции $y = y(x)$.
    4°. Получить по графику результаты предыдущего исследования, полученные в 2°.

33. Рассмотрим угол XOY и окружность (Γ_0) с центром I_0, вписанную в этот угол.
    1°. Всякая окружность (Γ), вписанная в угол XOY, может быть получена из (Γ_0) гомотетией с центром O. Исходя из этого, построить окружности (Γ), проходящие через данную точку A, лежащую внутри угла, и вписанные в этот угол.
    2°. Пусть H — проекция I_0 на OX, C — точка отрезка I_0H (концы исключаются) и (C) — окружность с центром C, целиком лежащая внутри (Γ_0). Дока-

зать, что центры гомотетии окружности (C) и переменной окружности (Γ), вписанной в угол XOY, располагаются каждый на фиксированной прямой. Приложить этот вывод к построению окружностей (Γ), вписанных в угол XOY и касающихся окружности (C). Существуют всегда четыре окружности, удовлетворяющие условию задачи; доказать, используя инверсию с полюсом O, что произведение радиусов двух из этих окружностей равно произведению радиусов двух других окружностей.

3°. Доказать, что отыскание окружностей (Γ), вписанных в угол XOY и касающихся (C), может быть сведено к отысканию окружностей, проходящих через точку C и касающихся сторон некоторого угла. Установить на этом пути существование четырех окружностей, удовлетворяющих условию задачи.

4°. Исследовать случай, когда C совпадает с I_0.

§ 4. Планиметрия с тригонометрией

1. Для треугольника ABC выполнено соотношение $a = b\sqrt{2}$.

1°. Доказать, что тогда $\cos^2 A = \cos^2 2B$. Найти наибольшее значение для B (при выполнении условия $a = b\sqrt{2}$) и соответствующие значения A и C.

2°. Выразить стороны a и b через c и B. Исследовать, считая c фиксированным, B переменным.

3°. Построить геометрически треугольник, зная c и B и зная, что $a = b\sqrt{2}$. Найти средствами этого построения наибольшее значение B и наибольшее значение площади s треугольника ABC.

4°. Выразить s через c и C; считая c — постоянным, начертить график функции $s = s(C)$.

2. Внутри прямого угла XOY проведен луч OZ. Положим $\widehat{XOZ} = x$. На луче OX берется точка A такая, что $OA = 3a$. На луче OY берется точка B такая, что $OB = 4a$. Пусть A' и B' — проекции точек A и B на луч OZ. Обозначим через M середину $A'B'$.

1°. Вычислить в функции a и x длины отрезков OA', OB', OM и площадь s треугольника OMB.

2°. Составить уравнение, которому должен удовлетворять угол x в случае

$$s = ma^2. \qquad (1)$$

Преобразовать это уравнение в рациональное относительно $t = \operatorname{tg} x$. Исследовать в зависимости от значений m возможность решения и число решений.

3°. При каком x площадь s будет максимальной? Обозначим через t_1 соответствующее значение t, а соответствующее положение точки M — через M_1. Доказать, что если задача допускает два различных решения M' и M'' (таких, что условие (1) будет выполнено), то биссектрисой угла $M'OM''$ будет OM_1.

3. На прямой фиксированы две точки A и B на расстоянии $2a$ друг от друга. На перпендикуляре к этой прямой в точке A отложен отрезок AA', длина которого также равна $2a$. На отрезке AA', как на диаметре, строится окружность (C). Пусть M—произвольная точка окружности (C). Обозначим угол BAM через x.

1°. Вычислить в функции a и x длины отрезков MA и MB.

2°. Определить положение точки M на окружности (C), для которого

$$MB = k \cdot MA, \qquad (1)$$

где k — данное положительное число.

Составить уравнение, которому удовлетворяет x. Преобразовать это уравнение к рациональному относительно $\operatorname{tg} x$. Изучить в зависимости от значений k возможность решения задачи и число решений. Изучить также, в зависимости от значений k, с какой стороны от прямой AA' расположены точки M, удовлетворяющие условию (1).

3°. Указать, как можно геометрически построить точки M, удовлетворяющие соотношению (1). Провести исследование геометрически и установить совпадение результатов этого исследования с исследованием (алгебраическим), выполненным в п. 2°.

4. В треугольнике ABC, $\operatorname{tg} A = \frac{1}{3}$.

1°. Вычислить $\sin A$, $\cos A$, $\sin(B+C)$, $\cos(B+C)$.

2°. Зная еще, что $\sin B \sin C = \frac{1}{\sqrt{10}}$, вычислить $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$. Получить отсюда ответ на вопрос: будет ли наибольший из углов B и C острым или тупым?

3°. Составить квадратное уравнение, корни которого $\operatorname{tg} B$ и $\operatorname{tg} C$. Вычислить $\operatorname{tg} B$ и $\operatorname{tg} C$.

4°. Дан еще радиус R окружности, описанной около треугольника ABC. Вычислить в функции R стороны a, b, c этого треугольника, его высоты и радиус r окружности, вписанной в этот треугольник.

5. Построить треугольник, зная его вершину A, ортоцентр H и середину m стороны BC. Доказать, что необходимое и достаточное условие возможности построения состоит в том, что точка m лежит вне окружности с диаметром AH (середину AH обозначим через F).

A. Будем обозначать через (T) такие треугольники ABC, для которых высота AA' равна радиусу R описанной окружности.

1°. Доказать, что треугольники (T) характеризуются условием

$$\sin B \cdot \sin C = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

2°. Дан угол A треугольника (T), вычислить углы B и C $(B > C)$. Исследовать. Рассмотреть случай $A = 60°$.

3°. Треугольник (T) — переменный, вершина A и его ортоцентр H — фиксированы; найти огибающую окружностей, описанных около (T).

B. Обозначим через (K) треугольники, для которых

$$AA' = kR.$$

1°. Найти соотношение, аналогичное (1), показать, что $k < 2$ двумя способами: аналитически, геометрически.

2°. В треугольнике (K) вершина A и ортоцентр H фиксированы. Найти огибающую окружностей, описанных около этого треугольника.

6. Пусть ABC — прямоугольный треугольник (A — прямой угол), $BC = a$; AI — биссектриса прямого угла A. Определить угол B так, чтобы

$$AI = mBC.$$

1°. Решить тригонометрическое уравнение, определяющее угол B.

2°. Исследовать, в зависимости от значений m возможность решения.

3°. Изучить частный случай $m = \frac{1}{2}$.

7. Найти угол B треугольника ABC, зная его сторону a, сумму $s = b + c$ и угол $A = 90°$.
Исследовать.

Указание: $a(\cos B + \sin B) = s$. Полагая $\operatorname{tg} \frac{B}{2} = x$, находим

$$f(x) = (a+s)\ x^2 - 2ax + s - a = 0.$$

Так как $0 \leqslant x \leqslant 1$, то вопрос сводится к нахождению условия, при котором это уравнение имеет корни, заключенные между 0 и 1. Имеем:

$$f(0) = s - a,\ f(1) = 2(s - a) \text{ и т. д.}$$

8. Рассмотрим окружность с центром O и диаметром $AB = 2R$. Пусть M какая-нибудь точка этой окружности, а M' точка, симметричная точке M относительно AB.

1°. Вычислить площадь и периметр треугольника AMM'.

2°. Вычислить радиус r окружности, вписанной в треугольник AMM'. Найти наибольшее значение r.

3°. Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник AMM'. Ориентируем диаметр AB от A к B. Вычислить $y = \overline{OI}$. Изучить изменение y, если α изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$ и изучить, как изменяет свое положение на AB точка I, когда α изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

4°. Построить точку M, (определить α), зная, что радиус окружности, вписанной в треугольник AMM' имеет данную длину l. Исследовать.

5°. Доказать, что $\overline{OI}^2 - R^2 = -2Rr$. Построить точку M геометрически, зная, что $r = l$. Исследовать.

9. В плоскости фиксирован отрезок OA длиной $2a$. Отрезок же OB длиной a может вращаться вокруг точки O. Обозначим угол от OA до OB через $x\,(0 \leqslant x \leqslant \pi)$. Построим равносторонний треугольник ABC так, чтобы точки C и O лежали по разные стороны от прямой AB. Обозначим четырехугольник $OACBO$ через (P).

1°. Вычислить площадь s четырехугольника (P). Определить x, зная, что $s = ka^2$. В каких пределах может изменяться k? Найти наибольшее значение s.

2°. Каково геометрическое место точек C. Какова максимальная величина для угла OAC? Построить (P), зная, что точки O, B и C лежат на одной прямой и в случае, если (P) — трапеция.

3°. Доказать, что s можно выразить через a и через расстояние h от точки C до прямой OA. Изучить отсюда условие, при котором площадь s принимает наибольшее значение.

10. Найти углы треугольника, зная, что угол A равен 60° и зная, что высота, опущенная из вершины A на сторону BC, равна радиусу окружности, описанной около этого треугольника.

11. 1°. Пусть D и E точки, в которых биссектрисы внутреннего и внешнего угла A пересекают сторону BC. Вычислить длины отрезков AD и AE в функции b, c и A $(b > c)$.

2°. Предполагая, что $AD = AE$, найти соотношение между углами B и C треугольника ABC.

3°. Ниже рассматриваются треугольники ABC, для которых

$$B - C = \frac{\pi}{2}.$$

а) Установить геометрически свойства биссектрис внутреннего и внешнего угла A.

б) Доказать, что высота, опущенная из вершины A, касается окружности, описанной около треугольника ABC.

в) Зная b и c, найти a.

12. В плоскости даны две параллельные полупрямые Ax и By, имеющие одно и то же направление. В той же плоскости фиксирована точка S по ту же сторону от AB, что и данные полупрямые Ax и By; точка S не лежит между Ax и By и не лежит ни на одной из этих полупрямых. Проведем через точку S прямую Sz, пересекающую Ax и By соответственно в точках A' и B'.

1°. Провести прямую Sz так, чтобы около трапеции $ABB'A'$ можно было описать окружность.

2°. Построить Sz так, чтобы площадь той же трапеции имела данную величину m^2.

3°. Теперь предположим, что точка S лежит на продолжении отрезка AB за точку B. Положим $SA = a$, $SB = b$ $(a > b)$. Какое соотношение существует между углом α луча Ax с AB и углом x луча $SA'B'$ с лучом BA, если площадь трапеции $ABB'A'$ равна m^2. Рассмотреть частный случай: $a = 4$, $b = 2$, $m^2 = \sqrt{3}$; определить x, зная, что $x = \alpha$.

4°. Точка S снова лежит на прямой AB. Доказать, что прямая, параллельная Ax и Ay и проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции $ABB'A'$, проходит через фиксированную точку, если углы α и x меняются.

13. В треугольнике ABC стороны $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, углы A, B, C, причем $B \geqslant C$; r — радиус вписанной окружности, r' — радиус окружности, вневписанной в угол A. Положим

$$d=r'-r, \quad s=r'+r.$$

1°. Вычислить в функции a, d, s следующие выражения:

$$b+c, \ b-c, \ \operatorname{tg}\frac{A}{2}, \ \sin A, \ \sin B+\sin C, \ \cos\frac{B-C}{2}.$$

2°. В следующих трех вопросах (независимых друг от друга) следует решить треугольник, зная a, d и s (и предполагая, что $B \geqslant C$).

а) *Вычисление сторон.* Выразить b и c через a, d, s и исследовать, при каком условии возможно решение. Вычислить также площадь s треугольника.

б) *Вычисление углов.* Вычислить углы B и C. Исследовать.

в) Построить треугольник ABC, зная a, d, s и получить снова результаты предыдущего исследования, анализируя возможность построения.

14. Рассмотрим треугольник ABC со сторонами $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$; $2p$ — его периметр, s — площадь; обозначим через h высоту, опущенную из вершины A на сторону BC, через R радиус описанной окружности.

1°. Выразить через углы B и C отношение $\frac{uh}{a}$. Доказать, что $\cos(B-C)=2u\sin B-\cos A$. Определить углы B и C, зная угол A и величину u. Исследовать, считая, что угол A фиксирован, а u — параметр.

2°. Вычислить углы B и C, зная, что $B-C=\frac{\pi}{4}$ и $u=\frac{1}{2}$.

3°. Используя соотношения

$$s = \frac{1}{2} ah \quad \text{и} \quad s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

найти соотношение между a, b, c, u (которое предлагается записать в виде биквадратного уравнения относительно a). Пусть даны b и c и $u > 0$. Доказать, что тогда можно определить a, если

$$u \leqslant \frac{bc}{|b^2 - c^2|}.$$

Положим $v = \dfrac{bc}{|b^2-c^2|}$. Предположим, что b постоянно, а c меняется. Изучить изменение v в функции c, предполагая, что c изменяется от 0 до $+\infty$. Построить график этой функции.

4°. Предположим, что треугольник ABC таков, что $u = v$. Пусть O — середина BC. Доказать, что тогда $AB \cdot AC = 2AH \cdot OH$. Вывести отсюда, что $OH = R$.

а) Используя это последнее соотношение, установить, что высота AH касается в точке A окружности, описанной около треугольника ABC.

б) Рассмотрим окружность (K) с диаметром BC и окружность $(Г)$ с центром A, которая делит окружность (K) пополам. Что является радикальной осью окружности $(Г)$ и окружности, описанной около треугольника ABC?

15. Дан прямоугольный треугольник ABC:

$$\angle ABC = 90°, \text{ причем } \angle BAC = \alpha.$$

Рассмотрим полуокружность с диаметром AB; эта полуокружность и треугольник ABC расположены по разные стороны от прямой AB. Через точку P полуокружности проводится прямая, параллельная BC; пусть эта прямая пересекает AC в точке Q; пусть k — данное положительное число; требуется на полуокружности найти точку P такую, что

$$AQ + QP = k \cdot AB.$$

Исследовать. Дать решение алгебраическое и геометрическое. Рассмотреть частные случаи.

1°. $AC = 2BC$. 2°. $AC = 2AB$. 3°. $AB = BC$.

16. Предполагается изучить треугольники ABC такие, что медианы BB' и CC' одинаково наклонены к стороне, к которой они проведены, т. е. $\angle BB'C$ равен одному из углов $CC'B$ и $CC'A$. Положим $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $BB'=\beta$, $CC'=\gamma$.

1°. Доказать, что треугольник ABC будет обладать указанным свойством тогда и только тогда, когда будет выполнено одно из соотношений:

$$b\beta=c\gamma,$$

$$(b-c)(b^2+c^2-2a^2)=0.$$

Предполагая, что вершины B и C такого треугольника ABC фиксированы, найти геометрическое место вершин A. Может ли треугольник указанного типа быть прямоугольным?

2°. Пусть теперь ABC неравнобедренный треугольник, обладающий указанным свойством. Доказать, что углы такого треугольника связаны соотношением $2\cos 2A=\cos 2B+\cos 2C$, где $B\neq C$, и обратно. Вычислить B и C, зная A. Исследовать. Рассмотреть случай $A=\frac{\pi}{4}$.

3°. Обозначим через θ острый угол, который прямая BB' образует с AC, для неравнобедренного треугольника, обладающего указанным свойством, через x — величину проекции медианы AA' на сторону BC. Вычислить $\cos\theta$ только в функции b и c, затем только в функции a и x. Как изменяется θ, если a фиксировано, а x изменяется в возможных пределах?

4°. Построить треугольник ABC, обладающий указанным вначале свойством, зная a и θ.

17. Рассмотрим треугольник ABC, внутренний угол A которого равен $\frac{\pi}{3}$.

1°. Решить этот треугольник, зная длину a стороны BC и зная, что $b+c=ka$, где k — положительное число. Исследовать, при каких значениях k задача имеет решение.

2°. Построить по тем же данным треугольник ABC. Получить снова результаты предыдущего исследования.

3°. Выразить сумму $y = b + c$ в функции a и C. Построить график кривой $y = y(c)$ и получить отсюда снова результаты предыдущего исследования.

18. Треугольник ABC вписан в фиксированную окружность с центром O и радиусом R. Обозначим через OD радиус, перпендикулярный к BC, который не пересекает BC, через u — угол DOA. Пусть $\hat{B} > \hat{C}$. Положим $a = 2R \sin v$, где v — *острый* угол. Вычислить в функции v, u и R следующие величины: $\hat{B} - \hat{C}$, затем углы $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, затем b, c, s (площадь), $2p = a + b + c$ и r (радиус вписанной окружности). Следует рассмотреть два случая:

$$u < \pi - v \text{ и } u > \pi - v.$$

Показать, что эти случаи равносильны случаям: A — острый угол, A — тупой угол. Исследовать изменение s и r как функций от u.

19. В плоскости фиксирована точка O и прямая (D), не проходящая через точку O. Расстояние OH от O до (D) равно 1. Прямой угол с вершиной O обращен все время к прямой (D) и его стороны пересекают прямую (D) в точках A и B. Положим $\angle HOA = x$.

1°. а) Вычислить периметр треугольника OAB в функции

$$s = \sin x + \cos x.$$

б) Найти, при каких значениях x периметр треугольника OAB имеет данное значение $2p$. Исследовать.

2°. а) Доказать, что окружность, описанная около треугольника OAB, проходит через фиксированную точку O', отличную от O. б) Как можно установить это свойство, используя инверсию (i) с полюсом O и степенью инверсии равной 1?

3°. Постоянный угол u с вершиной O, меньший или равный 90°, постоянно обращен к прямой (D). Его стороны пересекают (D) в точках M и N. Используя инверсию (i), показать, что окружность, описанная около треугольника OMN, остается касательной к фиксированной окружности (C) с центром C. Вычислить в функции u расстояние $OC = y$ и радиус z окружности (C).

4°. Изучить изменение y и z, если u изменяется от O до $\frac{\pi}{2}$, и начертить на одном чертеже графики этих функций. Получить отсюда (графически) результаты 2°, а).

20. В прямоугольной системе координат строится ломаная $ABCD\ldots KL$ с n звеньями: AB, BC, CD, ..., и KL. Точка A расположена на оси Ox, причем $OA = 1$. Точка B определяется углами $(0 < \lambda < \alpha < \pi)$, $\angle xOB = \lambda$, $\angle xAB = \alpha$. Точки C, $D, \ldots, K$, L строятся так, что треугольники OBC, $OCD, \ldots, OKL$ подобны треугольнику OAB и имеют с ним одинаковую ориентацию.

1°. Выразить длину отрезка OL через λ, α, n, считая, что для λ надо найти, в каких границах может изменяться α для того, чтобы длина отрезка OL убывала с возрастанием n.

2°. Даны λ, n, $OL = q^n$ $(q > 0)$. Решить уравнение, полученное в пункте 1° относительно α.

3°. Обозначим через $\overline{P}$ алгебраическую величину проекции вектора $\overrightarrow{AL}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$. Применяя обозначения, введенные в пункте 2°, вычислить величину $\overline{P}$: а) в виде суммы n членов; б) в виде суммы двух членов. Найти $\lim\limits_{n \to \infty} \overline{P}$ в случае $0 < q < 1$.

4°. Просуммировать ряд:

$$1 + \frac{\cos 9^\circ}{\sqrt[10]{10}} + \frac{\cos 18^\circ}{\sqrt[10]{100}} + \frac{\cos 27^\circ}{\sqrt[10]{1000}} + \ldots$$

21. $ABCD$ — квадрат со стороной a. На стороне BC этого квадрата берется переменная точка M, определяемая углом $x = \angle BAM$. Точке M на стороне CD ставится в соответствие точка N, что $\angle MAN = 45^\circ$. Положим $\operatorname{tg} x = t$.

1°. Выразить в функции a и t длины CM и CN, затем длину MN.

2°. Определить t так, чтобы отрезок MN имел бы данную длину l. Исследовать.

Доказать, что если задача имеет два решения, то сумма соответствующих значений x равна 45°.

3°. Вычислить в функции a и t площадь треугольника MAN и доказать отсюда, что если M изменяется, прямая MN остается на постоянном расстоянии от точки A.

22. 1°. На оси $x'Ox$ фиксированы две точки A и B. Положим $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=b$ и предположим, что $0<a<b$. Пусть M переменная точки оси $x'Ox$, $\overline{OM}=x$, причем $a<x<b$ (т. е. точка M расположена между точками A и B). Выразить через x функцию

$$y=-\frac{\overline{MA}\cdot\overline{MB}}{\overline{MO}^2};$$

исследовать ее изменение и начертить ее график.

Доказать, что если M' положение точки M, при котором y принимает максимум, то

$$\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}+\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=0.$$

Дать этим вопросам аналитическое и геометрическое решения.

2°. На перпендикуляре к $x'Ox$ в точке O фиксируется точка C; положим $OC=h$. Выразить через x функцию

$$z=-\frac{\overline{MA}\cdot\overline{MB}}{\overline{MC}^2}.$$

Исследовать ее изменение и начертить график этой функции.

Доказать, что если M'' — положение точки M, при котором функция z принимает максимальное значение, то прямая CM'' является биссектрисой угла ACB.

Дать этим вопросам аналитическое и геометрическое решения.

3°. На тригонометрическом круге фиксируется точка S, служащая началом отсчета дуг, а также фиксируются две точки A и B. Положим

$$\smile SA=\alpha,\ \smile SB=\beta,\ \smile SM=x$$

и предположим, что

$$0<\alpha<x<\beta<2\pi.$$

Выразить через x функцию

$$u = \frac{MA \cdot MB}{MS^2}.$$

Выразить u через $t = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$. Изучить изменение u при изменении t от $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ до $\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$. Обозначим через M''' положение точки M, соответствующее максимуму u. Доказать, что прямые SA, SB и SM''' высекают на прямой, параллельной касательной к тригонометрической окружности в точке S, два равных отрезка. Дать аналитическое и геометрическое решения.

23. Дана длина a гипотенузы и произведение l^2 длин биссектрис углов B и C прямоугольного треугольника

$$ABC\,(\angle BAC = 90°).$$

1°. Доказать, что

$$\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{l^2}{4a^2}.$$

2°. Вычислить B и C. Исследовать, считая a — фиксированным, а l — параметром.

3°. Доказать, что если I — центр окружности, вписанной в треугольник, то

$$BI \cdot CI = \frac{l^2}{2}.$$

4°. Опираясь на это соотношение, дать построение треугольника ABC. Провести исследование, считая a — фиксированным, а l — параметром.

24. В треугольнике ABC дана длина r радиуса вписанной окружности, высота h, опущенная из вершины A на сторону BC, и угол A. Предположим $h > 2r$ и что $B \geqslant C$.

1°. Вычислить углы B и C. Исследовать.

2°. Вычислить a (длина стороны BC) в функции r и углов B и C, затем в функции данных величин.

3°. Получить отсюда величину R радиуса описанной окружности и величину полупериметра p. Вычислить радиус r' окружности, вневписанной в угол A, в функции r, a и p; показать, что $\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}=\frac{2}{h}$.

4°. Доказать, что если $h=3r$, то длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что если $R=r'$, то угол A заключен в определенных границах. Найти эти границы.

Могут ли быть выполнены условия $R=r'=3r$? Вычислить в этом случае угол A; как выражается при этом a в функции r?

25. В настоящей задаче рассматривается переменный треугольник OMN; вершина O фиксирована, а вершина N остается на фиксированной полупрямой Ox; дано, что $MO=MN$ и что окружность, вписанная в треугольник OMN, касается фиксированной прямой (D), параллельной Ox. Обозначим через $2a$ расстояние между прямыми (D) и Ox, через I — центр окружности, вписанной в треугольник OMN и через φ — угол xOI.

1°. Построить треугольник OMN, зная угол φ. Исследовать. В каких пределах может изменяться φ? Найти геометрическое место точек I.

2°. Доказать, что биссектриса внутреннего угла M треугольника OMN проходит через фиксированную точку.

3°. Вычислить в функции a и φ радиус R окружности, описанной около треугольника OMN. Показать, что R выражается только через a и $\cos 2\varphi$. Определить φ так, чтобы R имел данную длину l. Исследовать.

26. Дана сторона a и противолежащий ей угол A в треугольнике ABC. Известно, что $AB \neq AC$ и что медианы, проведенные из вершин B и C к сторонам AC и AB, обратно пропорциональны этим сторонам.

1°. Доказать, что для этого треугольника:

$$b^2+c^2=2a^2 \quad \text{и} \quad bc=\frac{a^2}{2\cos A}.$$

Какое заключение можно сделать отсюда о величине угла A?

2° Вычислить b и c. Исследовать в зависимости от значений A.

3°. Вычислить высоту $AH = h$. Дать построение треугольника ABC, используя полученные формулы. Исследовать в зависимости от значений A.

4°. Дать другое построение треугольника, исходя из формул, полученных в 1°. Исследовать в зависимости от значений A.

27. Обозначим через A' основание высоты, опущенной из вершины A на сторону BC треугольника ABC, а через h длину этой высоты ($AA' = h$).

1°. Доказать, что $\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{a}{h}$.

2°. Даны A, a и h. Вычислить произведение $\operatorname{ctg} B \times \times \operatorname{ctg} C$ (в функции A, a и h), затем $\operatorname{ctg} B$ и $\operatorname{ctg} C$. Исследовать. Доказать, что условие возможности решения задачи

$$\operatorname{ctg} A \geqslant \frac{4h^2 - a^2}{4ah}$$

эквивалентно следующему

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \leqslant \frac{a}{2h}.$$

3°. Построить треугольник, зная A, a и h и получить геометрически результаты предыдущего исследования (2°).

4°. Сторона BC переменного треугольника ABC фиксирована; угол A задан. Пусть B' и C' — проекции точек B и C на стороны CA и AB; H — точка пересечения высот BB' и CC'. Найти геометрическое место точек B' и C'. Доказать, что $B'C'$ остается касательной к некоторой фиксированной окружности. Найти геометрическое место середин I отрезка AH.

28. Дана окружность (O) с центром O и диаметром $AB = 2R$. Проведем через точку A какую-нибудь хорду AM. Пусть касательная к окружности (O) в точке M пересекает AB в точке T. Пусть перпендикуляр к AB в точке T пересекает BM в точке N. Соединим A с N.

1°. Доказать, что четырехугольник $AMTN$ — вписанный; получить отсюда, что AN симметрична AM относительно AB и что $TM = TN$.

2°. Выразить в функции угла $\widehat{BOM} = \alpha$ и радиуса R площадь s треугольника AMT. Построить график этой функции $s = s(\alpha)$.

29. В треугольнике ABC дана сторона $BC = a$ и высота $h = ka$, выходящая из A (k — данное положительное число).

1°. Доказать следующие соотношения

$$\sin B \cdot \sin C = k \sin A,$$

$$\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{1}{k}.$$

2°. Вычислить углы B и C, зная угол $A (0 < A < 180°)$ и зная $k = \frac{1}{2}$. Исследовать. Установить результаты предыдущего исследования геометрически.

30. Пусть a, b, c — длины сторон BC, CA и AB треугольника ABC; α, β, γ — длины отрезков AA_1, BB_1, CC_1 биссектрис внутренних углов, ограниченные вершинами и точками, лежащими на противоположных сторонах. Будем предполагать, что $B \geqslant C$.

1°. Доказать, что длина высоты, выходящей из вершины A, равна $\alpha \cos \frac{B-C}{2}$. Вывести отсюда, используя два различных выражения для площади треугольника ABC, следующую формулу

$$\alpha = \frac{a \sin B \sin C}{\cos \frac{B-C}{2} \sin A}. \tag{1}$$

Решить треугольник ABC, считая, что даны A $(0 < A < 180°)$, a (>0) и α (>0). Исследовать, считая α параметром, а A и a фиксированными.

2°. Доказать, что если ω — точка, в которой продолжение AA_1 за точку A_1 встречает окружность, описанную около треугольника ABC, то

$$\omega A \cdot \omega A_1 = \omega B^2.$$

Предполагая, как и в пункте 1°, что A, a и α даны, построить окружность, описанную около треугольника ABC, затем точку ω, затем отрезок ωA_1 и затем сам треугольник ABC. Выяснить на этом пути возможность построения треугольника и получить отсюда снова результаты предыдущего исследования.

3°. Доказать, используя формулу (1), следующую формулу

$$\beta\gamma = \frac{a^2 \sin B \sin C}{\cos\frac{C-A}{2}\cos\frac{B-A}{2}}.$$

Предполагая, что A и a даны и дано отношение $\frac{\beta\gamma}{a^2} = k$ $(k > 0)$, решить треугольник ABC. Исследовать, считая k параметром, а A и a фиксированными.

31. a, b, c — длины сторон треугольника ABC; A, B, C — его углы. Будем предполагать, что $b > c$.

I. 1°. Биссектрисы внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC пересекают его сторону BC в точках D и D'. Вычислить в функции b, c и A длины отрезков AD и AD'.

2°. Какое существует соотношение между углами B и C, если

$$AD = AD'.$$

II. Будем обозначать через (T) треугольник ABC, в котором $B - C = \frac{\pi}{2}$.

1° Выразить углы A и B треугольника (T) в функции угла C. В каких границах может изменяться угол C?

2°. Вывести соотношение между сторонами a, b, c треугольника (T).

3°. Вычислить углы треугольника (T), зная его высоту $AH = h$ и сумму $b + c = k$ двух его сторон.

§ 5. Стереометрия

1. 1°. Угол $xOy = \frac{\pi}{3}$. Окружность (I) с центром I и радиуса R касается сторон Ox и Oy этого угла в точках A и B. Положим $(Ox, \overrightarrow{IM}) = \alpha\,(-\pi < \alpha < \pi)$, где M — произвольная точка окружности (I). В каких пределах должен изменяться угол α для того, чтобы касательная в точке M к окружности (I) пересекала бы обе стороны данного угла xOy; пусть P и Q — точки, в которых эта касательная пересекает Ox и Oy.

   2°. На перпендикуляре в точке I к плоскости круга (I) откладывается отрезок IK такой, что все плоские углы трехгранного угла, образованного лучами Ox, Oy и OK, равны $\frac{\pi}{3}$. Вычислить IK в функции R.

   3°. Полагая $\alpha = \frac{\pi}{4}$, выразить через R длины следующих отрезков OP, OQ, а также площадь s треугольника OPQ и объем v тетраэдра $KOPQ$.

2. Будем обозначать через S_0 симметрию относительно точки O, через S_D — симметрию относительно прямой (D), через S_P — симметрию относительно плоскости (P). Настоящая задача заключается в доказательстве различных представлений произведений* $S_D S_O$ и $S_P S_D$

---

* Если над точками плоскости производится сначала преобразование A, а затем над преобразованными точками — преобразование B, то результирующее преобразование называется произведением преобразования B на преобразование A и обозначается так: BA.

(на втором месте мы ставим то преобразование, которое производится первым). В каждом из указанных выше случаев требуются установить, будет ли произведение коммутативным или нет.

А. Изучение произведения $S_D S_O$.

1°. Доказать, что если точка O расположена на (D), то произведение $S_D S_O$ есть симметрия относительно плоскости (какой?).

2°. Доказать, что если точка O не расположена на (D), то $S_D S_O$ можно представить в виде произведения переноса (какого?) на симметрию в плоскости (какой?).

В. Изучение произведения $S_P S_D$.

1°. Доказать, что если прямая (D) перпендикулярна плоскости (P), то это произведение есть симметрия S_O, где O — точка пересечения (D) и (P).

2°. Доказать, что если прямая (D) лежит на плоскости (P), то это произведение есть симметрия относительно плоскости (какой?).

3°. Доказать, что если $(D) \parallel (P)$, то это произведение можно представить в виде произведения переноса (какого?) на симметрию относительно плоскости (какой?).

4°. Доказать, что если прямая (D) наклонна к плоскости (P), то это произведение может быть представлено в виде произведения поворота вокруг оси (какой и на какой угол?) на симметрию относительно плоскости (какой?).

3. $SABC$ тетраэдр, ребро SA которого перпендикулярно плоскости грани ABC; двугранный угол $A(SB)C$ — прямой; угол BSC равен 45°, наконец, длина ребра SC и величина угла ASB даны;

$$SC = 2a, \quad \angle ASB = \alpha.$$

1°. Доказать, что ребро BC перпендикулярно плоскости ASB. Вычислить длины ребер тетраэдра. При каком значении α угол ASC будет равен 60°?

2°. Вычислить объем v пирамиды $SABC$. При каком значении α этот объем будет иметь наибольшую величину?

3°. Вычислить в функции a и $\cos^2\alpha$ (положить $\cos^2\alpha = x$) сумму квадратов площадей граней SBC, SCA и

SAB. Построить график этой функции $y = y(x)$, считая a фиксированным.

4°. Определить x так, чтобы $y = l^4$. Исследовать алгебраически и проконтролировать результаты исследования при помощи кривой, построенной в пункте 3°. Определить в частности x, если $y = \frac{13}{8} a^4$.

4. В основании (Π) наклонного параллелепипеда лежит ромб $ABCD$ со стороной a, причем $\angle BAD = \frac{2\pi}{3}$. Боковое ребро AA' расположено в плоскости, проходящей через AC перпендикулярно к плоскости (Π); длина AA' также равна a, а угол CAC' равен $\frac{\pi}{3}$. Три другие боковые ребра, наклонные к основанию (Π), обозначим через BB', CC' и DD'.

Переменная плоскость (P), параллельная плоскости (Π), пересекает AB' в точке M, BC' в точке N, CD' — в точке P и DA' — в точке Q. Положим $AM = x$.

1°. Каков тип четырехугольника $MNPQ$? Найти геометрическое место середины MP, когда M описывает AB'.

2°. Положим $y = MP^2$; выразить y через x. Построить график полученной функции $y = y(x)$. Изучить геометрически изменение $y = y(x)$ и найти геометрически минимальное значение для y (следовательно и для MP).

3°. Определить x так, чтобы $MP = l$.

Исследовать. Что можно сказать про две точки M, если последняя задача имеет два решения.

5. В плоскости (P) задан ромб, составленный из двух равносторонних треугольников ABD и BCD со стороной a (A и C — противоположные его вершины). Через точку A проводится луч, перпендикулярный плоскости (P), и на нем от точки A откладывается отрезок $AS = a$. Рассмотрим пирамиду с вершиной S и основанием $ABCD$. Через точку M диагонали AC ромба проводится плоскость (Q), перпендикулярная этой диагонали. Плоскость (Q) пересекает пирамиду по ломаной (F). Пусть $CM = x \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1°. Вычислить углы треугольников SAB, SAD и SAC и длины их сторон.

2°. Изучить в зависимости от значений x форму ломаной (F). Вычислить длины звеньев этой ломаной, углы между звеньями и площадь, ограниченную (F).

3°. Для какого значения x эта площадь будет максимальна? Чему равна эта максимальная площадь?

6. Основанием пирамиды $SABC$ служит равносторонний треугольник ABC со стороной a. Ребро SA перпендикулярно к плоскости ABC и длина SA равна $\frac{a}{2}$.

1°. Вычислить расстояние SK от точки S до ребра BC и полную поверхность пирамиды $SABC$.

2°. Пусть B' — середина AB. На отрезке AB' возьмем точку M на расстоянии x от A. Пусть плоскость, перпендикулярная к AB и проходящая через точку M, пересекает AC в точке Q, SB — в точке N, SC — в точке P. Каков характер четырехугольника $MNPQ$? Вычислить в функции a и x длины сторон этого четырехугольника.

3°. Составить уравнение, которому будет удовлетворять x, если диагональ MP указанного четырехугольника имеет данную длину m. Сколько, в зависимости от значения m, существует положений для точки M, при котором $MP = m$. Для какого значения m отрезок MP имеет минимальную длину? Доказать, что тогда $MP \perp SC$.

4°. Проведем через точку A плоскость, перпендикулярную SB; пусть она пересекает ребро SB в точке H, а прямую BC — в точке I. Доказать, что треугольник HAI прямоугольный и вычислить его стороны.

7. В плоскости (P) задана окружность (O) с центром O и радиусом a. В точке A плоскости (P), отстоящей от O на расстоянии $2a$, восставлен перпендикуляр (Δ) [к плоскости (P)] по одну сторону от плоскости (P). Обозначим через M произвольную точку диаметра окружности (O), лежащего на прямой OA. Ориентируем прямую OA от A к O (O — начало координат) и положим $OM = xa (a > 0)$.

1°. В каких пределах изменяется x.

2°. Рассмотрим хорду BC окружности (O), перпендикулярную в точке M к AM. Найти геометрическое место точек пересечения медиан треугольника NBC, где N — произвольная точка полупрямой (Δ) в каждом из следующих случаев:

α) M — фиксировано, N — меняется;

β) N — фиксировано, M — меняется;

γ) M и N — меняются.

3°. Для каждого положения точки M на прямой (Δ) берется отрезок AN равный BC. Выразить через a и x выражение $y = \frac{MN^2}{a^2}$ и изучить, как изменяется y, когда x изменяется в своих пределах (1°). Для каких значений x существует два положения точки M, для которых MN имеет одно и то же значение?

4°. Найти геометрическое место точек пересечения медиан треугольника NBC, если точки M и N переменные, но всегда $AN = BC$.

8. 1°. Пусть A и B — две точки, находящиеся на равных расстояниях от прямой (Δ), но не лежащие в одной плоскости с этой прямой. Пусть C и D — точки, симметричные точкам A и B относительно прямой (Δ). Доказать, что грани тетраэдра $ABCD$ — равные между собой треугольники. Чему равна сумма плоских углов любого из трехгранных углов этого тетраэдра?

2°. Пусть I, K, M — середины BC, CA и AB; I', K', M' — соответственно середины противоположных ребер. Доказать, что четыре точки I, I', K, K' — вершины параллелограмма; каков характер этого параллелограмма? Каковы аналогичные четырехугольники? Как пересекаются между собой II', KK' и MM'?

3°. Доказать, что II', KK' и MM' — суть общие перпендикуляры противоположных ребер тетраэдра $ABCD$. Полагая $II' = d$, $KK' = d'$, $MM' = d''$, вычислить d, d' и d'' в функции a, b, c — длин ребер BC, CA и AB.

4°. Вычислить в функции d, d' и d'' объем пирамиды с основанием $KMK'M'$ и вершиной I. Каковы объемы аналогичных пирамид?

9. $SABC$ — тетраэдр, ребро SA которого перпендикулярно плоскости ABC и двугранный угол $A(SB)C$ — прямой. Дано: $SB = \sqrt{2}$, $\angle BSC = 45°$. Положим $\angle ASB = \alpha$.

1°. Доказать, что треугольник SBC прямоугольный (B — прямой угол). Определить центр и радиус R сферы, описанной около тетраэдра $SABC$.

2°. Вычислить в функции a объем тетраэдра $SABC$. При каком значении a этот объем будет максимальным? Чему равен этот максимальный объем?

3°. Вычислить сумму y квадратов площадей граней SAB, SAC и SCA. Полагая $\cos^2\alpha = x$, построить график функции $y = y(x)$.

4°. Определить x, затем α, если $y = \frac{13}{8}$.

10. (P) и (Q) — две фиксированные параллельные плоскости; A — фиксированная точка, лежащая на плоскости (P), а B — фиксированная точка, лежащая на плоскости (Q); при этом прямая AB не перпендикулярна плоскостям (P) и (Q). Обозначим через A' проекцию точки A на плоскость (Q), через B' проекцию точки B на плоскость (P). Положим $AB = l$, $AA' = BB' = d$. Две переменные прямые (D) и (Δ) лежат соответственно в плоскостях (P) и (Q); первая из них проходит через точку A, вторая — через точку B и они ортогональны.

1°. Найти геометрическое место точек M и N пересечения прямых (D) и (Δ) с их общим перпендикуляром. Найти геометрическое место прямых MN.

2°. Доказать, что сумма квадратов длин ребер тетраэдра $ABMN$ постоянна.

3°. Выразить объем тетраэдра $ABMN$ через l, d и острый угол θ, который образует прямая (D) с прямой AB'. Для какого значения θ этот объем будет максимальным? Чему равен этот максимальный объем?

11. Даны три точки A, B, S, не лежащие на одной прямой. В пространстве рассматривается переменная прямая (Δ), проходящая через S; пусть A' и B' — проекции точек A и B на (Δ), I — середина AB, I' — середина $A'B'$.

Требуется найти геометрическое место прямых (Δ), для которых $AA' = BB'$. Для этой цели требуется доказать, что:

а) если точки A и B находятся на равных расстояниях от прямой (Δ), то $\Delta AA'B' = \Delta BB'A'$ и $\Delta AA'B = \Delta BB'A$ и что II' — общий перпендикуляр к AB и (Δ);

б) если $II' \perp AB$, то точки A и B находятся на равных расстояниях от (Δ) и II' — общий перпендикуляр к AB и (Δ).

После этого рассмотреть два случая:

1°. S лежит в плоскости, являющейся медиатрисой AB.

2°. S не лежит в этой плоскости.

12. В фиксированной плоскости (P) дана полуокружность с диаметром $AB=2R$. Пусть M — произвольная точка этой полуокружности и пусть $x = MH$ — расстояние от точки M до AB. На перпендикуляре к плоскости (P) в точке M откладывается отрезок $SM = MN = x$. Рассмотрим тетраэдр $SAMB$.

    1°. Вычислить в функции R и x длины его ребер.

    2°. Доказать, что сумма квадратов длин двух противоположных ребер одна и та же для любой из трех пар таких ребер. Назовем эту сумму буквой y. Построить график функции $y = y(x)$.

    3°. Где находится центр сферы, описанной около тетраэдра $SAMB$. Пусть d — ее диаметр. Доказать, что $y = d^2$.

    4°. Точка S находится одновременно на двух простых поверхностях. Каких?

13. Рассмотрим тетраэдр $Oxyz$ такой, что $\angle xOy = 60°$, $\angle yOz = \angle zOx = 90°$. На луче Oy фиксируется точка A такая, что $OA=a$. На осях Ox и Oz берутся соответственно точки B и C такие, что $OB + OC = 2a$. Пусть $OD = x$.

    1°. Вычислить в функции a и x объем тетраэдра $OABC$.

    2°. Вычислить сумму s квадратов сторон треугольника ABC.

    3°. В каких границах изменяется x? Построить график функции $s = s(x)$. Сколько решений (действительных) имеет уравнение $s = b^2$. Исследование провести: а) алгебраически; б) геометрически.

    4°. Найти геометрическое место середин BC. Найти геометрическое место центров сфер, описанных около тетраэдра $OABC$.

14. Пусть $x'x$ и $y'y$ — две ориентированные прямые, ортогональные, но не лежащие в одной плоскости. Пусть AA' — их общий перпендикуляр (A на $x'x$ и A' на $y'y$) и O — середина AA'. Положим $AA' = 2a$. Пусть

P — какая-нибудь точка оси $x'x$, а P' — точка оси $y'y$. Обозначим через M проекцию точки O на прямую PP' и через H — проекцию O на $A'P$.

α) Предполагается, что P фиксирована, а точка P' — переменная точка оси $y'y$.

1°. Что можно сказать про направление прямой $A'P'$ относительно плоскости $AA'P$? Относительно расположения двух плоскостей $AA'P$ и $A'P'P$? Что можно сказать относительно направления прямой OH относительно плоскости $A'P'P$?

2°. Чему равна величина угла HMP? Вывести отсюда геометрическое место точек M, когда P' описывает ось $y'y$.

3°. Вычислить в функции a степень точки A' относительно окружности, расположенной в плоскости $A'PP'$ и построенной на HP, как на диаметре. Доказать, что эта степень не зависит от положения точки P на оси $x'x$.

β) Предполагается, что P и P' меняются соответственно на осях $x'x$ и $y'y$, но так, что $\overline{AP} = \overline{A'P'}$.

1°. Доказать, что $OP = OP'$.

2°. Каково положение точки M на отрезке PP'?

3°. Каково геометрическое место точек M? (Провести через O прямые, параллельные $x'x$ и $y'y$).

γ) В этой части γ предполагается, что P и P' изменяются соответственно на лучах Ax и $A'y$ и так, что если $\overline{AP} = x$, то $\overline{A'P'} = 2a - x$.

1°. В каких пределах может изменяться x?

2°. Вычислить объем y тетраэдра $AA'PP'$; построить график полученной функции $y = y(x)$.

15. В плоскости (P) задан треугольник ABC и прямая (L) пространства, пересекающая плоскость (P). Пусть D какая-нибудь точка, лежащая на прямой (L). Рассмотрим ломаную $DBACD$ (не обязательно плоскую).

1°. Доказать, что четырехугольник, вершины которого E, F, G, H находятся в серединах звеньев DB, BA, AC и CD — параллелограмм. Как изменяется площадь этого параллелограмма, если точка D описывает прямую (L).

2°. При каком положении точки D на прямой (L) этот параллелограмм будет прямоугольником или ромбом.

3°. Может ли этот параллелограмм быть квадратом?

16. 1°. Доказать, что объем v сферического слоя может быть вычислен по формуле:

$$v = \frac{h}{6}(B + 4B' + B''),$$

где h — высота слоя, B и B'' — площади его оснований, B' — площадь среднего сечения.

2°. Выразить объем v сферического слоя только через его высоту h и радиус r' среднего сечения B'. Эта формула не содержит R; какое замечательное заключение можно отсюда сделать? Задано r'; в каких пределах может изменяться h? Заданы h и r'; в каких пределах может изменяться R?

3°. Обозначим через s сумму боковой поверхности сферического слоя и площади наименьшего из оснований (B или B''). Заданы r' и $h < \frac{2r'}{\sqrt{3}}$. Вычислить R, при котором s будет иметь наименьшее значение. Вычислить острый угол φ, под которым эта сфера пересекает плоскость среднего сечения.

17. В пространстве даны две ортогональные, но не пересекающиеся прямые (Δ) и (Δ'); AA' — их общий перпендикуляр [A — на (Δ), A' — на (Δ')]. На прямых (Δ) и (Δ') перемещаются две точки M и M'; первая, по прямой (Δ), вторая, по прямой (Δ').

1°. Доказать, что сфера с диаметром MM' проходит через точки A и A'.

2°. Найти геометрическое место центров этой сферы, если $AM = AM'$.

18. В плоскости (P) задана окружность (C) с центром C. Прямая (D), не лежащая в плоскости (P), пересекает эту плоскость в точке A, лежащей на окружности (C) и образует с плоскостью (P) угол u (углом прямой с плоскостью мы называем острый угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость).

1°. а) На прямой (D) фиксируется точка B, отличная от A; построить точку E на окружности (C) так, чтобы прямая BE образовывала бы с плоскостью (P) тот же угол u. Исследовать.

б) На окружности (C) фиксируется точка E, отличная от A. Построить на прямой (D) точку B

такую, что прямая BE образует с плоскостью (P) угол u. Исследовать.

2°. Точка B — фиксирована. Требуется найти геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольника ABE, если E описывает окружность (C) [для этого полезно установить, что на перпендикуляре в точке C к плоскости (P) существует фиксированная точка K, равноудаленная от точек A, B и E]. Это геометрическое место есть окружность (M). Найти геометрическое место центров M окружности (M), если точка B описывает прямую (D).

19. Через вершину C прямоугольного треугольника ABC ($\angle A = 90°$) проводится луч CS перпендикулярный к плоскости этого треугольника. Пусть плоскость, проходящая через точку C перпендикулярно SA, пересекает SA в точке D, а SB — в точке E.

1°. Доказать, что $DE \parallel AB$ и что ΔDEC — прямоугольный.

2°. Доказать, что сечение тетраэдра $SABC$ плоскостью (P), перпендикулярной SA и проходящей через точку M отрезка SA, есть или прямоугольный треугольник или прямоугольная трапеция в зависимости от того, — будет ли точка M лежать на отрезке SD или на отрезке DA.

3°. В этом пункте предполагается, что $AB = SC = a$, $\angle CBA = \frac{\pi}{3}$. Положим $AM = x$. Вычислить значение $x = x_0$ (т. е. AD), для которого сечение тетраэдра плоскостью (P), перпендикулярной к ребру SA тетраэдра, переходит от треугольника к трапеции. Выразить через x площадь y сечения тетраэдра произвольной плоскостью, параллельной (P), и построить график этой функции.

20. В плоскости (P) задан отрезок AB. Отрезок CD параллелен плоскости (P) и проектируется на нее в отрезок $C'D'$ так, что $AC'BD'$ — квадрат (AB — диагональ). Положим $AC' = a$, $C'C = b$. На отрезке AB берется точка M, на отрезке CD берется точка N такие, что прямая MN параллельна плоскости BCC'.

1°. Обозначим через N' проекцию N на плоскость (P). Доказать, что MN' остается параллельной фиксированному направлению в то время как точка M описывает отрезок AB.

2°. Плоскость (Q), параллельная плоскости (P), пересекает отрезок CC' в точке I, а отрезок NM — в точке K. Пусть K' проекция K на плоскость (P). Положим $C'I = mb$. В каких пределах изменяется m? Пусть точка I фиксирована; вычислить отношение $\frac{MK'}{MN'}$. Вывести отсюда геометрическое место точек K', затем геометрическое место точек K, если M описывает отрезок AB.

3°. Геометрическое место точек K ограничено точками U и V (U на AD, V на BC); пусть U' и V' проекции U и V на плоскость (P). Положим $y = UV^2$. Вычислить y в функции m и a и построить график этой функции.

21. В основании конуса вращения с вершиной S лежит окружность (C) радиуса R; высота конуса также равна R. В плоскости основания конуса берется точка P на расстоянии $2R$ от центра O окружности (C). Пусть OA радиус окружности (C), перпендикулярный OP. Обозначим через B вторую точку пересечения прямой PA с окружностью (C).

1°. Пусть M переменная точка SA. Каково геометрическое место вторых точек Q пересечения PM с поверхностью конуса? Доказать, что геометрическое место проекций H точки O на прямую PM есть дуга окружности, проходящая через ортоцентр треугольника PSA.

2°. Определить положение точки M так, чтобы кратчайшее расстояние между OS и PM было равно данной величине l. Исследовать.

3°. Определить положение точки M так, чтобы $\frac{PO}{PM}$ имело бы данную величину κ. Исследовать.

4°. В каких пределах может изменяться угол α прямой PM с плоскостью основания конуса?

22. В плоскости (P) фиксирована точка O. Пусть OAB равносторонний треугольник, длина стороны которого постоянна; стороны OA и OB расположены по одну сторону от плоскости (P); A' и B' — ортогональные проекции точек A и B на плоскость (P). Положим $OA = a$, $AA' = x$, $BB' = y$.

1°. Вычислить $A'B'$ в функции a, x и y. Доказать, что необходимое и достаточное условие того, что $\angle A'OB' = 90°$ может быть записано в виде

$$2xy = a^2.$$

Будем предполагать во всех последующих вопросах, что это условие выполнено.

2°. Найти OB' и BB', зная $OA = a$ и $AA' = x$. В каких пределах может изменяться x для того, чтобы эта задача имела решение? Пусть сторона OA перемещается в плоскости (Q), перпендикулярной (P). Каково геометрическое место точек B и B'?

3°. Определить x и y, зная $x + y = u$. Исследовать. Определить x и y, зная $A'B' = l$. Исследовать.

4°. Пусть треугольник $OA'B'$, кроме того, равнобедренный. Вычислить тогда x и y, объем пирамиды $OABB'A'$ и косинус угла v плоскости OAB с плоскостью (P).

23. На прямой задан отрезок AB, длина которого равна $4d$. Пусть O — точка, лежащая на отрезке AB на расстоянии d от точки A. Обозначим через (P) и (Q) плоскости, перпендикулярные AB и проходящие соответственно через точки A и B. Пусть M и N — переменные точки, лежащие соответственно в плоскостях (P) и (Q) и такие, что $\angle AMN = 90°$.

1°. Найти геометрическое место точек N, считая, что точка M на плоскости (P) фиксирована. Доказать, что это геометрическое место есть прямая и найти расстояние x от точки B до этой прямой, если $AM = a$.

2°. Доказать, что если фиксирована точка N, то геометрическое место точек M есть, вообще говоря, окружность. Указать положение центра этой окружности и ее радиус, если $BN = b$. Исследовать в зависимости от положения точки N в плоскости (Q) существование геометрического места точек M.

3°. Пусть O' — точка, симметричная точка O относительно точки A, и пусть (Π) — плоскость, проходящая через точку O' перпендикулярно AB. Фиксируем на плоскости (Π) точку S. Найти геометрическое место точек M и N, считая, что переменная прямая MN проходит постоянно через точку S.

24. В настоящей задаче предлагается установить некоторые общие свойства параллелепипедов, а затем изучить некоторые частные виды параллелепипедов. Обозначения: A, B, C, D—последовательные вершины параллелограмма, образующие одну из граней параллелепипеда (U). Через A', B', C', D' обозначим вершины, соответственно противоположные вершинам A, B, C, D (две вершины называются противоположными, если они не принадлежат к общей грани). Диагоналями (U) будут тогда отрезки AA', BB', CC', DD'. Они имеют общую середину S, являющуюся центром симметрии (U). Рассмотрим три ребра (U), выходящие из одной и той же вершины, например DA, DB' и DC, выходящие из D; A, B', C — их граничные точки, отличные от D, образуют треугольник, который мы будем называть треугольником «семидиагональным», ассоциированным с вершиной D (стороны этого треугольника суть диагонали граней, сходящихся в D).

I. Пусть (U) какой-нибудь параллелепипед.

1°. Доказать, что диагональ DD' пересекает плоскости $AB'C$ и $A'BC'$ треугольников «семидиагональных», ассоциированных с вершинами D и D' соответственно в точках G и G', являющихся точками пересечения медиан этих треугольников и что точки G и G' делят DD' на три равные части.

2°. Доказать, что сумма квадратов двенадцати ребер (U) равна сумме квадратов четырех его диагоналей.

3°. Будем говорить, что параллелепипед (U) — описанный, если существует сфера, касающаяся всех его граней (вписанная сфера). Доказать, что описанный параллелепипед может быть охарактеризован равенством площадей всех его граней.

II. В плоскости (V) дан треугольник с вершинами A, B', C. Обозначим через I, J, K соответственно середины сторон $B'C$, CA, AB' и через a, b, c — их длины; через G обозначим точку пересечения медиан этого треугольника, через H — его ортоцентр, через O — центр описанной окружности, через OX — ось этой окружности (т. е. прямую, проходящую через ее центр перпендикулярно к ее плоскости) и через R — радиус описанной окружности. Будем обозначать через (W) всякий параллелепипед, для которого вершине D соответствует треугольник $AB'C$ как «семидиагональный».

1°. Доказать, что параллелепипед (W) определен, если выбрать как угодно его вершину D, лишь бы она не лежала в плоскости (V). Доказать, что параллелепипед (W) определяется также выбором его центра S [в не (V)]. Как перейти от одной из точек S и D к другой? Как связаны направления и длины ребер (W) с направлениями и длинами отрезков SI, SI и SK?

2°. Обозначим соответственно через p, q, r длины ребер DA, DB', DC и через α, β, γ, δ — длины полудиагоналей SA, SB', SC, SD параллелепипеда (W). Вычислить p^2, q^2, r^2 и δ^2 в функции a, b, c, α, β, γ и α^2, β^2, γ^2, δ^2 и функции a, b, c, p, q, r.

III. Данные и обозначения те же, что и в разделе II. Назовем через (W_0) параллелепипед (W), все шесть граней которого — ромбы.

1°. Доказать, что параллелепипед (W_0) может быть охарактеризован тем, что его вершина D лежит на оси OX. Каковы геометрические места их центров S и их вершин D' противоположных D? Могут ли быть охарактеризованы параллелепипеды (W_0) свойством противоположных ребер тетраэдра DI и JK (или тетраэдра $D'AB'C$)? Обозначая через p длину ребра параллелепипеда (W_0) [все ребра (W_0) очевидно равны между собой] вычислить в функции p, a, b, c квадраты длин полудиагоналей и квадраты площадей граней.

2°. Доказать, что параллелепипед (W_0) может быть описанным тогда и только тогда, когда треугольник $AB'C$ равнобедренный или равносторонний.

Предположим, что треугольник $AB'C$ — равнобедренный, но не равносторонний, и пусть $B'A = B'C = a$, $AC = b\,(b \neq a)$, $\angle AB'C = \theta$. Определить, принимая за неизвестное $OD = x$ положение точки D на оси OX, для которых (W_0) будет описанным; вычислить x в функции a и b, а также в функции R и $\cos\theta$. В каких пределах должен изменяться угол θ или отношение $\dfrac{b}{a}$ для того, чтобы существовал описанный параллелепипед (W_0)? Пусть D_0 — положение точки D, при котором (W_0) описанный параллелепипед. Какое соотношение должно существовать между углами AD_0C,

AD_0B', CD_0B'? Положим $\angle AD_0C = \varphi$. Вычислить в функции a и b косинус угла φ, общую длину p ребер этого параллелепипеда и радиус ρ вписанной сферы. Вычислить также $\cos\varphi$ в функции $\cos\theta$.

IV. Снова данные и обозначения раздела II. Назовем через (W_1) всякий параллелепипед (W), для которого три диагонали, выходящие из A, B' и C, равны между собой.

1°. Каковы геометрические места центров S и вершин D параллелепипедов (W_1)? Доказать, что эти параллелепипеды могут быть охарактеризованы свойством противоположных ребер тетраэдра $DAB'C$. Пусть α — общая длина полудиагоналей SA, SB', SC параллелепипеда (W_1); вычислить в функции a, b, c, α квадраты p^2, q^2, r^2 и δ^2 длин его ребер и полудиагонали SD. Обозначив через σ_1, σ_2, σ_3 площади треугольников $DB'C$, DCA и DAB', рассмотрим два какие-нибудь из этих треугольников, например $DB'C$ и DCA с общей стороной DC; установить, что

$$4(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) = r^2(p^2 - q^2) = r^2(a^2 - b^2).$$

Доказать, что не существует описанных параллелепипедов (W_1), если треугольник $AB'C$ не равносторонний.

2°. Доказать, что параллелепипед будет прямоугольным, если все его диагонали равны между собой.

Доказать, что необходимое и достаточное условие того, что существует параллелепипед (W), все четыре диагонали которого равны между собой, заключается в том, что все углы треугольника $AB'C$ острые (или что ортоцентр H треугольника $AB'C$ лежит внутри этого треугольника). Вычислить для такого параллелепипеда квадраты p^2, q^2, r^2, α^2 в функции a, b, c.

3°. Предположим теперь, что треугольник $AB'C$ равносторонний ($a = b = c$). Если точка D (или S) описывает OX, получаем параллелепипед (W), который одновременно является параллелепипедом типа (W_0) и типа (w_1); все получаемые параллелепипеды (W) будут описанные. Положим $OD = x$ и $\angle ADC = \varphi$; вычислить в функции x и a (или R) для параллелепипеда (W) с вершиной D длины ρ, α, δ ребер и полудиагоналей, радиус ρ вписанной сферы и $\cos\varphi$. В каких пределах изменяется ρ и φ, если D описывает OX?

25. Назовем бимедианой тетраэдра $(T) = ABCD$ прямые A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1', соединяющие середины ребер $BC = a$ и $DA = a'$; $CA = b$ и $DB = b'$; $AB = c$ и $BC = c'$. Назовем бивысотами тетраэдра $ABCD$ прямые MM', NN', PP', являющиеся общими перпендикулярами к ребрам BC и DA; CA и DB; AB и DC. Предметом настоящей задачи является изучение некоторых свойств бимедиан и бивысот тетраэдра $ABCD$.

1°. Доказать, что прямые, проведенные через произвольную точку пространства параллельно его бимедианам и бивысотам, образуют два дополнительных триэдра, т. е. каждая бивысота перпендикулярна двум бимедианам и обратно: именно, $MM' \perp B_1B_1'$, $MM' \perp C_1C_1'$; $NN' \perp C_1C_1'$; $NN' \perp A_1A_1'$; $PP' \perp A_1A_1'$, $PP' \perp B_1B_1'$.

2°. Доказать, что если бимедианы (или бивысоты) попарно ортогональны, то они совпадают с бивысотами (соответственно с бимедианами), а тетраэдр является правильным, и обратно.

3°. Доказать, что геометрические места точек Q, для которых

$$QB^2 + QC^2 + DA^2 = QD^2 + QA^2 + BC^2, \tag{1}$$

$$QC^2 + QA^2 + DB^2 = QD^2 + QB^2 + CA^2, \tag{2}$$

$$QA^2 + QB^2 + DC^2 = QD^2 + QC^2 + AB^2 \tag{3}$$

являются плоскостями (π_1), (π_2), (π_3) перпендикулярными соответственно бимедианам A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1'. Эти три плоскости пересекаются попарно по прямым (d_1), (d_2), (d_3), проходящим через точку Ω Монжа тетраэдра (T) [т. е. через точку, симметричную центру O, сферы $(ABCD)$ относительно центра тяжести G]. Вывести отсюда, что прямые (d_1), (d_2) и (d_3) проходят через точку Ω Монжа и параллельны бивысотам.

26. Предметом исследования настоящей задачи будет установление существования тетраэдров $ABCD$ таких, длины ребер которых удовлетворяют соотношениям:

$$AB \cdot CD = AC \cdot BD = AD \cdot BC$$

и изучение некоторых свойств таких тетраэдров. Такие тетраэдры будем обозначать так: (T).

В настоящей задаче мы будем обозначать через (ABC) окружность, проходящую через точки A, B и C, через $(ABCD)$ сферу, проходящую через точки A, B, C, D.

Часть первая

1°. Пусть A, B, C — вершины треугольника, причем $AB \neq AC$. Доказать, что геометрическое место точек M пространства таких, что

$$MB \cdot AC = MC \cdot AB,$$

есть сфера, диаметром EE' которой служит отрезок прямой BC, где E и E' — точки пересечения с BC внутренней и внешней биссектрис угла BAC; доказать, что центр этой сферы лежит на касательной в точке A к окружности (ABC).

2°. Дан треугольник ABC — неравнобедренный; пусть (V) его плоскость. Доказать, что геометрическое место точек M пространства таких, что

$$MA \cdot BC = MB \cdot AC = MC \cdot AB,$$

есть окружность (Δ), плоскость которой перпендикулярна плоскости (V), а центр лежит на плоскости (V). Обозначая через P и Q точки пересечения окружности (Δ) с плоскостью (V), установить соотношения:

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{BP}{BQ} = \frac{CP}{CQ};$$

доказать, что прямая PQ есть диаметр окружности (ABC) и что точки P и Q делят гармонически этот диаметр. Во что вырождается указанное выше геометрическое место точек M, если треугольник ABC — равносторонний? Эти результаты позволяют установить существование бесконечного множества тетраэдров (T), одна из граней которого — произвольный треугольник ABC.

1°. Рассмотрим треугольник ABC. Обозначим через A_1 точку, диаметрально противоположную точке A на окружности (ABC), через B_1 и C_1 — точки пересечения прямых AB и AC с касательной к окружности (ABC) в точке A_1.

Установить соотношения

$$AA_1^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AB_1} = \overline{AC} \cdot \overline{AC_1}.$$

Пусть теперь (s) — окружность, лежащая в плоскости ABC, проходящая через B и C, но не проходящая через A; пусть прямые AB и AC пересекают окружность (s) соответственно в точках B и B' и в точках C, C'. Доказать, что $B'C' \parallel B_1C_1$ и что обе эти прямые параллельны касательной в точке A к окружности (ABC) и что

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{AB'}{AC} = \frac{AB \cdot AB'}{AB \cdot AC}.$$

2°. Рассмотрим какой-нибудь тетраэдр $ABCD$ и сферу (S), проходящую через точки B, C, D, но не проходящую через A; пусть прямые AB, AC, AD пересекают (S) соответственно в точках B и B', C и C', D и D'. Доказать, что плоскость треугольника $B'C'D'$ параллельна касательной в точке A к сфере $(ABCD)$. Установить соотношения:

$$\frac{B'C'}{AD \cdot BC} = \frac{C'D'}{AB \cdot CD} = \frac{B'D'}{AC \cdot BD}. \qquad (2)$$

3°. Предположим теперь, сохраняя предыдущие обозначения, что $ABCD$ есть тетраэдр (T). Какова тогда форма треугольника $B'\ C'\ D'$. Какая фигура образуется прямыми пересечения плоскости касательной в точке A к сфере $(ABCD)$ с плоскостями граней ABC, ACD, ADB? Будут ли полученные свойства характеристическими для тетраэдров (T)? Вывести отсюда способ построения тетраэдра (T), для которого задана грань ABC и который вписан в сферу (Σ), проходящую через точки A, B, C. Сколько решений имеет эта задача?

Часть третья

1°. Соотношения (2), установленные во второй части пункта 2° имеют место и в том случае, если четыре точки A, B, C, D лежат в одной плоскости, но не на одной окружности; сфера (S) в этом случае вырождается в окружность, проходящую через точки B, C, D (которые мы предполагаем не лежащими на одной прямой). Возвращаясь тогда к фигуре, изученной в первой части, (пункт 2°) и употребляя введенные там обозначения, соединим одну из точек P или Q, например, точку P с точками A_1, B_1, C; пусть PA, PB, PC пересекают окружность (ABC) в точках A и A', B и B', C и C'. Какова форма треугольника $A'B'C'$? Будет ли полученное свойство характеристическим для точек P и Q, которые были определены для неравнобедренного треугольника ABC в первой части, пункт 2°?

2°. В пространстве задана окружность (Δ) и точка A, которая не расположена ни на окружности (Δ), ни на прямой, проходящей через ее центр перпендикулярно к ее плоскости; ищутся две точки B и C такие, что *всякий* тетраэдр с вершинами A, B, C и вершиной D, *произвольно* выбранной на (Δ), есть тетраэдр (T). Доказать, прежде всего, что точки B и C, если они существуют, совпадают с точками, которые можно определить и построить с помощью уже установленных свойств; уточнить это построение; вывести отсюда существование точек B и C. Сколько решений имеет эта задача?

Часть четвертая

1°. Пусть A, B, C, D — вершины тетраэдра (T). Доказать, что если взять какое-нибудь его ребро, например BC, то биссектрисы внутренних углов BAC и BDC пересекут это ребро в одной и той же точке E. Пусть F — точка, аналогичным образом определенная для противоположного ребра AD. Пусть A_0, B_0, C_0, D_0 — центры окружностей, вписанных в треугольники BCD, CDA, DAB, ABC. Доказать, что четыре прямые AA_0, BB_0, CC_0, DD_0 имеют одну общую точку, которая лежит также на каждой из трех прямых, определенных так, как определена прямая EF. Будут ли эти свойства характеристическими для тетраэдра (T)?

2°. Распространяется ли свойство, установленное для четырех прямых AA_0, BB_0, CC_0, DD_0 на другие группы из четырех прямых, которые мы получим, соединяя A, B, C, D с одним из центров окружностей, касающихся трех ребер противоположных граней (окружности, вписанные и вневписанные)? (Точки E и F в случае, если подобное обобщение имеет место, заменяются при этом точками, подходящим образом определенными). Обозначить для грани BCD (и аналогично для других граней) через A_B, A_C, A_D центры вневписанных окружностей в углы B, C, D треугольника BCD.

Замечание. Четвертая часть может быть решена независимо от второй и третьей части.

27. Пусть (C) — большой круг, ограничивающий полусферу $(\sum)$. Обозначим через O центр $(\sum)$, через R — ее радиус. Пусть AB фиксированный диаметр окружности (C). Пересечем полусферу $(\sum)$ плоскостью, параллельной плоскости, в которой лежит (C) и пусть (C') окружность сечения, M — ее центр, r — радиус.

1°. Построить точку P окружности (C') при условии, что $\angle APM = 90°$. Сначала определить, где находится проекция P' точки P на плоскость (C). Сколько решений имеет задача?

2°. Доказать, что если точка P такова, что $\angle APM = 90°$, то $AP' = PP'$.

Вывести отсюда, что если плоскость сечения (C') перемещается параллельно плоскости (C), то отрезок AP остается на поверхности вращения. Каково геометрическое место точек P'?

3°. Пусть Q — точка, диаметрально противоположная точке P на (C'). Доказать, что $\angle BQM = 90°$, что $AP = BQ$ и что AP и BQ ортогональны.

4°. Найти в функции R и r длину AP $(= BQ)$ и длину BP.

5°. Найти r, если $PQ = AP$. Каков в этом случае объем тетраэдра $ABPQ$?

28. Рассмотрим полуокружность с диаметром AB, центром O и радиусом R. Обозначим через M какую-нибудь точку этой полуокружности и через A' и B' — точки

пересечения касательной к полуокружности в точке M с касательными к ней в точках A и B. Пусть P — проекция M на AB. Положим

$$x=\frac{PA}{PB} \quad (x \geqslant 0).$$

1°. Доказать, что $\Delta A'OB'$ — прямоугольный. Вычислить в функции R и x длины отрезков MA', MB', AA' и BB'.

2°. Вычислить в функции R и x объем v_1, полученный вращением трапеции $AA'B'B$ вокруг AB и объем v_2, полученный вращением вокруг AB треугольника $A'OB'$, наконец, объем v_3, полученный вращением треугольника ABB' вокруг AB.

3°. Изучить изменение отношения $\frac{v_1}{v_3}$, если M описывает полуокружность от A к B. Построить график этого отношения как функции x.

4°. Определить x так, чтобы отношение $\frac{v_2}{v_1}$ было равно данному числу m. Исследовать. Каково наибольшее значение этого отношения? Каково при этом положение соответствующей точки M?

29. $ABCD$ и $BEFG$ — два равных квадрата со стороной a, расположенные во взаимно-перпендикулярных плоскостях; B — их общая вершина, а стороны AB и BE расположены на пересечении указанных плоскостей (точки A и E расположены по разные стороны от точки B). На диагоналях AC и EG берут точки M и N такие, что $AM=EN=x$.

1°. Вычислить $y=MN^2$ в функции a и x. Определить x, если $MN=2l$ (l — данное число). Исследовать.

2°. Начертить кривую $y=y(x)$ и получить с помощью этого графика результаты предыдущего исследования.

3°. Показать геометрически, что если точки M и N выбраны так, что отрезок MN имеет наименьшую длину, то прямая MN перпендикулярна AC и EG и параллельна плоскости BCF. Каково геометрическое место середин O отрезка MN, когда точка M описывает диагональ AC?

4°. Доказать, что тело $CEFDBG$ — призма; вычислить объем этой призмы.

30. Дан прямой двугранный угол. На его гранях выбраны точки A и B; H и K их ортогональные проекции на ребро; точки A и B выбраны так, что $HK = HA = KB = a$. Рассмотрим две прямые (D) и (Δ) перпендикулярные соответственно плоскостям AHK и BHK и проходящие через A и B. За положительные направления этих прямых примем направления внутрь двугранного угла. Рассмотрим на осях (D) и (Δ) точки M и N. Положим $\overline{AM} = x$, $\overline{BN} = y$.

1°. Выразить MN через a, x и y. Каков минимум MN; каковы положения I и J точек M и N, соответствующие этому минимуму.

2°. Доказать, что сфера (Σ) с диаметром MN проходит постоянно через точки I и J, если M и N произвольно изменяются на (D) и (Δ).

Выразить в функции a, x и y расстояние от центра ω сферы (Σ) до середины O отрезка HK. Какое соотношение должно существовать между x и y для того, чтобы сфера (Σ) касалась HK и каково в этом случае геометрическое место центров сфер (Σ) и наименьший радиус.

3°. Каково геометрическое место центров ω сфер (Σ), если задан радиус R этих сфер?

4°. Будем считать теперь, что $x = y$. Доказать, что прямая MN остается параллельной плоскости (P), проведенной через AB параллельно HK и что ортогональная проекция MN на плоскость (P) вращается вокруг фиксированной точки. Каково в этом случае геометрическое место точек ω — середин MN?

31. Рассмотрим тетраэдр $SABC$, в котором грань ABC — прямоугольный равнобедренный треугольник с гипотенузой $BC = 2a$; ребро SB перпендикулярно плоскости ABC и имеет длину равную $2a$.

1°. Доказать, что все другие грани тетраэдра — прямоугольные треугольники.

2°. Определить центр и радиус сферы (Σ), описанной около тетраэдра. Каковы пересечения с плоскостью ABC плоскостей касательных к (Σ) в точках B и C?

3°. Пусть M — произвольная точка отрезка BC; положим $BM = x\,(0 \leqslant x \leqslant 2a)$. Пересечем тетраэдр плоскостью, перпендикулярной к BC в точке M. Выразить через x площадь сечения s (рассмотреть два случая) в функции x и построить график функции

$$s = s(x).$$

32. 1°. $OABC$ — тетраэдр; OA, OB, OC — три его попарно-перпендикулярные ребра, длины этих ребер обозначим так: $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Пусть K — основание перпендикуляра, опущенного из O на AB. Доказать, что $CK \perp AB$. Вычислить OK, CK и площадь s треугольника ABC в функции a, b и c.

2°. Вычислить b и c, если даны a, s и объем v тетраэдра $OABC$. При каком условии задача имеет решение?

Рассмотреть частный случай, когда $s^2 = \frac{9v^2}{a^2} + 3av$. Что можно сказать в этом случае про треугольник OBC?

3°. Пусть a_0 — данное положительное число. Положим $v_0 = \frac{a_0^2}{6}$. Вычислить положительное число s_0, определяемое равенством $s_0^2 = \frac{9v_0^2}{a_0^2} + 3\,a_0\,v_0$. Выразить разность

$$D = \frac{9v_0^2}{a^2} + 3av_0 - s_0^2$$

в функции a и a_0. Показать, что D обращается в нуль при $a = a_0$ и что D может быть представлено в виде произведения $(a - a_0)^2$ на некоторую положительную функцию от a и a_0. Вывести отсюда, что площадь s треугольника ABC при условии, что дан объем $v = v_0$ тетраэдра $OABC$, не может быть меньше числа s_0.

33. Пусть A, B, C, D — вершины тетраэдра, A', B', C', D' — проекции вершин A, B, C, D в плоскости противолежащих граней.

1°. Пусть AA' и BB' пересекаются; доказать, что $AB \perp CD$.

2°. Пусть $AB \perp CD$, доказать, что AA' и BB' пересекаются.

3°. Предположим, что $AC = AD = BC = BD$. Доказать, что AA' и BB' пересекаются; CC' и DD' также пересекаются. Пусть H — точка пересечения AA' и BB', а K — точка пересечения CC' и DD'.

4°. Будем опять, как в п. 3°, предполагать, что $AC = AD = BC = BD$. Доказать, что плоскость ABH пересекает CD в середине I этого отрезка. Вывести отсюда, что точка H расположена на прямой IJ, соединяющей середины I и I отрезков CD и AB. Что можно сказать о положении точки K?

34. Основанием пирамиды $SABC$ служит равносторонний треугольник ABC со стороной a. Ребро SA перпендикулярно плоскости основания ABC и его длина равна $\frac{a}{2}$.

1°. Вычислить расстояние SO от S до BC и полную поверхность пирамиды.

2°. На отрезке AB от точки A отложим отрезок AM длиной x, $0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}$. Пусть плоскость, перпендикулярная к AB в точке M пересекает SB в точке N, SC — в точке P, а AC — в точке Q. Вычислить в функции a и x стороны четырехугольника $MNPQ$ и его диагональ MP.

3°. Построить график функции $y = MP^2$ (функция от x). При каком значении x величина MP будет минимальна? Что можно сказать в этом случае про прямые MP и SC?

4°. Проведем через точку A плоскость, перпендикулярную SB; пусть эта плоскость пересечет SB в точке H, а BC — в точке I. Доказать, что треугольник IAH — прямоугольный. Вычислить стороны треугольника HAI. Вычислить косинус двугранного угла $\varphi = A(SB)C$.

35. Пусть $SABCD$ — пирамида с вершиной S и высотой $SA = a$. Основанием этой пирамиды служит половина правильного шестиугольника $ABCD$, вписанного в полуокружность с диаметром $AD = 2a$ (поэтому $SA = AB = BC = CD = a$).

1°. Доказать, что $BD \perp SAB$, $SC \perp CD$ и что пять точек S, A, B, C, D лежат на одной сфере; вычислить ее радиус.

2°. Через точку M отрезка AB проводится плоскость (R), параллельная плоскости SAD. Она пересекает SB в точке N, SC — в точке P и CD —

в точке Q. Доказать, что $MNPQ$ — прямоугольная трапеция.

36. Рассмотрим тетраэдр $OABC$, ребра которого будем предполагать неограниченно продолжены в обоих направлениях и пусть (P) — плоскость, параллельная грани ABC. Обозначим через A', B' и C' точки пересечения плоскости (P) с ребрами OA, OB и OC (или с их продолжениями). Обозначим через α, β, γ соответственно середины ребер BC, CA и AB.

1°. Для какого положения плоскости (P) прямые $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ будут параллельны. Такую плоскость обозначим через (P).

2°. Доказать, что для всякого другого положения плоскости (P) прямые $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ пересекаются в одной точке M.

3°. Найти геометрическое место точек M при условии, что плоскость (P) меняется.

37. Пусть ACD и BCD — два равных равнобедренных треугольника с общим основанием $CD = 2x$, но не лежащие в одной плоскости; $AC = AD = BC = BD = a$.

1°. Обозначим через I и J соответственно середины AB и CD. Доказать, что $IJ \perp AB$ и $IJ \perp CD$.

2°. Плоскость (P) треугольника ACD фиксирована. Найти геометрическое место точек I, если плоскость (Q) треугольника BCD вращать вокруг CD.

3°. Пусть плоскости (P) и (Q) взаимно-перпендикулярны. Вычислить в функции x и a длины AB и IJ и определить центр сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$. При каком значении x двугранный угол $C(AB)D$ будет прямым?

38. Дан отрезок OO' длиной a и полупрямая OU, перпендикулярная OO'; пусть $O'U'$ полупрямая, перпендикулярная в точке O' к плоскости, определяемой OO' и OU. Рассмотрим на лучах OU и $O'U'$ соответственно две переменные точки M и M' такие, что $OM + O'M' = l$ (l — данное число, $l > 0$). Положим $OM = x$ и обозначим через N' проекцию точки M' на плоскость, проходящую через O перпендикулярно OO'.

1°. Вычислить $y = MM'^2$ в функции a, l, x. Определить x, если задано $y = m$. Исследовать.

2°. Построить график функции $y = y(x)$ (взять $a = 1$, $l = 2$).

3°. Пусть M_0 и M'_0 — положения точек M и M', соответствующие наименьшему значению y. Доказать, что $M_0 M'_0$ образует равные углы с OU и $O'U'$.

4°. Обозначим через (P_x) пирамиду с вершиной M, основанием $OO'M'N'$ и высотой $x \geqslant a$. Обозначим через p периметр сечения (P_x) плоскостью, параллельной основанию на расстоянии a от вершины; вычислить p в функции a, l, x и построить график этой функции (взять $a = 1$, $l = 2$).

39. 1° O и O' — две фиксированные точки плоскости.

Найти геометрическое место точек M таких, что сумма площадей окружностей с центрами O и O' и радиусами OM и $O'M$ равна данной величине k^2. Исследовать.

2°. O и O' — две фиксированные точки пространства; $OO' = 2a$. Рассмотрим две переменные сферы (S) и (S') радиусов R и R' с центрами O и O', причем сумма поверхностей этих сфер равна k^2. Каково геометрическое место окружности, по которой пересекаются сферы (S) и (S')? Исследовать.

3°. Доказать, что если $k = 16\pi a^2$, то геометрическое место, рассмотренное в п. 2°, есть сфера $(\sum)$ с диаметром OO' и что сферы (S) и (S') в этом случае ортогональны.

4°. Пусть, по-прежнему, $k = 16\pi a^2$ и M — какая-нибудь точка сферы $(\sum)$. Доказать, что плоскость, касательная к $(\sum)$ в точке M, пересекает сферы (S) и (S') по равным окружностям (C) и (C'). Для какого положения точки M на сфере $(\sum)$ радиусы (C) [и (C')] будут максимальны? Доказать, что все сферы, диаметром которых служит отрезок, граничными точками которого являются центры окружностей (C) и (C') — касаются фиксированной прямой.

40. В пространстве дано 5 точек: A, B, C, D, E, из которых никакие четыре не лежат в одной плоскости. Обозначим буквой I середину отрезка, соединяющего две какие-нибудь точки, а буквой G — центр тяжести треугольника, образованного тремя остальными точками. Рассмотрим отрезок IG. Оперируя подобным образом всеми способами, мы получим некоторое число n отрезков, аналогичных IG.

1°. Чему равно n?
2°. Доказать, что два каких-нибудь отрезка IG и $I'G'$ из числа n указанных, пересекаются в точке O; определить расположение этой точки O относительно точек I и G.
3°. Доказать, что все n отрезков таких, как IG, проходят через точку O.

41. Ребро SA тетраэдра $SABC$ перпендикулярно плоскости грани ABC; треугольник ABC — прямоугольный

$$\hat{B} = 90^\circ \quad \text{и} \quad SA = AB = BC = a.$$

1°. Вычислить длины ребер и величины внутренних двугранных углов этого тетраэдра.
2°. Пусть I и J — соответственно середины ребер SC и AB. Доказать, что $IJ \perp SC$ и $IJ \perp AB$ и что, следовательно, IJ — ось симметрии тетраэдра $SABC$. Найти кратчайшее расстояние между SA и BC и кратчайшее расстояние между SC и AB.
3°. На отрезке AB берется точка M. Положим $AM = x$. Через точку M проводится плоскость (P), параллельная прямым SA и BC; она пересекает ребра SB, SC и AC соответственно в точках D, E, F. Вычислить площадь y четырехугольника $MDEF$ в функции a и x. Изучить изменение этой функции, если точка M описывает отрезок AB, и построить ее график. При каком положении точки M площадь y будет иметь наибольшее значение?

42. В плоскости (P) даны две параллельные прямые (d) и (d') на расстоянии a и две точки A и B, расположенные соответственно на (d) и (d'), на расстоянии $AB = 2a$. Две не параллельные прямые (D) и (D'), выходящие соответственно из точек A и B, проектируются ортогонально на плоскость (P) соответственно в прямые (d) и (d') и образуют с плоскостью (P) один и тот же угол 45°. На прямых (D) и (D') выбрано положительное направление по одну сторону от плоскости (P). На этих прямых выбираются соответственно точки M и N такие, что $\overline{AM} = \overline{BN} = x$.
1°. Доказать, что если x изменяется, прямая MN остается постоянно параллельной плоскости (P). Вывести, изучая расположение проекций m и n точек M и N на плоскость (P), геометрическое место середин отрезков MN.

2°. Рассмотрим тетраэдр $ABMN$. Выразить его объем в функции a и x. Этот тетраэдр имеет (каково бы ни было x) две пары противоположных ребер, равных между собой; при каком значении x ребра третьей пары также будут равны между собой. Доказать, что в этом последнем случае четыре высоты тетраэдра $ABMN$ будут равны между собой и выразить их величину через a.

3°. Для какого значения x, $AB \perp MN$. Доказать, что если $AB \perp MN$, то и $AN \perp BM$.

§ 6. Стереометрия с тригонометрией

1. Рассмотрим на сфере большой круг (Γ); пусть P и P' — его диаметрально противоположные точки (назовем их полюсами). Пусть (C) — какая-нибудь окружность, пересекающая окружность (Γ) в точках A и B. Обозначим через α и β полярные «расстояния» от точки P до точек A и B (т. е. углы PpA и PpB). Доказать, что произведение $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ остается постоянным, если окружность (C) фиксирована, а окружность (Γ) меняется.

2. В плоскости (P) дан квадрат $ABCD$ со стороной a. Проведем через точки A, B, C, D прямые, перпендикулярные плоскости (P). По одну и ту же сторону от плоскости (P) на перпендикулярах, проходящих через точки B и C, откладываем отрезки BB' и DD' равные a. Через прямую BB' проводится переменная плоскость (Q) не параллельная (P). Пусть плоскость (Q) пересекает перпендикуляры к плоскости (P), проходящие через точки A и C в точках A' и C'.

   1°. Доказать, что $A'\,B'\,C'\,D'$ — ромб.

   2°. Выразить через a объем тела $ABCDA'B'C'D'$ (можно использовать сечение построенной призматической поверхности плоскостью, перпендикулярной к ее ребрам). Доказать, что полная поверхность этого тела остается неизменной, если плоскость (Q) вращается вокруг $B'\,D'$.

   3°. Обозначим через θ острый угол между плоскостями (P) и (Q), а через 2α — угол $B'\,A'\,D'$. Выразить $A'\,C'$ через a и $\cos\theta$, затем через a и $\operatorname{tg}\alpha$. Доказать, что $\operatorname{tg}\alpha = \cos\theta$.

4°. Выразить $\operatorname{tg} 2\alpha$ через $\cos\theta$ и найти α в случае $\cos\theta = \sqrt{2} - 1$.

3. Рассмотрим три луча, выходящие из точки O: $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$. Внутренние двугранные углы триэдра $O\alpha\beta\gamma$ с ребрами $O\alpha$, $O\beta$, $O\gamma$ обозначим соответственно через A_1, B_1, C. Далее положим $\angle \beta O\gamma = a$, $\angle \gamma O\alpha = b$, $\angle \alpha O\beta = c$. На луче $O\gamma$ берется точка M на расстоянии от точки O равном 1. Пусть P — проекция точки M на плоскость, перпендикулярную к лучу $O\alpha$ и проходящую через точку O. Пусть Q — проекция точки M на плоскость $\alpha O\beta$ и N — проекция M на $O\beta$. Проекция вектора $\overrightarrow{ON}$ на ось $\overrightarrow{O\beta}$ равна сумме проекций векторов $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OP}$ и $\overrightarrow{PM}$ на ту же ось. Таким путем может быть получено некоторое соотношение между a, b, c и A.

I. Написать это соотношение.

II. С помощью этого соотношения выразить A через a, b и c.

III. Выразить $\left(\dfrac{\sin A}{\sin a}\right)^2$ через a, b и c.

Написать это выражение в симметрической форме относительно a, b и c. Какой отсюда можно сделать вывод?

IV. Выразить $\sin a$ через b, A и B.

4. Рассмотрим четверть (K) окружности с центром O и радиусом R, ограниченную взаимно-перпендикулярными прямыми Ox и Oy. Пусть M — переменная точка, лежащая на этой четверти окружности; положим $\angle xOM = \alpha \left(0 \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}\right)$. Касательная к (K) в точке M пересекает Ox и Oy соответственно в точках A и B. Обозначим через Oz полупрямую, проходящую через O и перпендикулярную плоскости xOy.

1°. Вычислить OA, OB и AB в функции α. При каком значении α длина отрезка AB будет минимальной?

2°. На лучах, перпендикулярных в точках A и B к плоскости xOy и идущих в ту же сторону, что и Oz, берутся точки A' и B' такие, что $AA' = OA$, $BB' = OB$. Найти геометрическое место точек A' и B'. Найти величину угла $A'OB'$?

3°. Прямая $A'B'$ пересекает, вообще говоря, плоскость xOy в некоторой точке I. Доказать, что $\frac{IA}{IB}=\frac{OA}{OB}$. На какой линии располагаются точки I? Рассмотреть обратное положение. Доказать, что линейный угол, построенный в точке O для двугранного угла с ребром OI, грани которого проходят через точки A и A', образован биссектрисами OD и OD' углов AOB и $A'OB'$.

4°. Требуется вычислить величину угла $A'OB'$ так: вычислить $A'B'$ в функции $OA=u$ и $OB=v$ и, рассмотрев $\Delta A'OB'$, найти $\cos A'OB'$, затем и сам угол $A'OB'$.

ОТВЕТЫ

Глава I

ЗАДАЧИ, ПРЕДЛАГАВШИЕСЯ НА КОНКУРСНЫХ ЭКЗАМЕНАХ В ВЫСШИЕ УЧЕБНЫЕ ЗАВЕДЕНИЯ

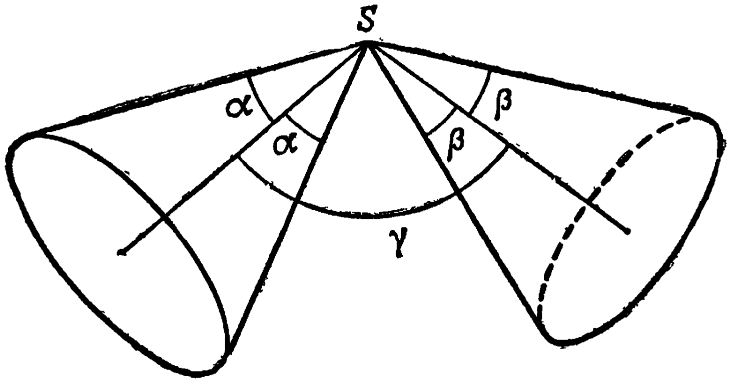
1. 3762. 3. $\frac{3}{2}$. 4. Если $m < k$, то $C_{n+1}^{m+1} - C_{k}^{m+1}$; если $n \geqslant m \geqslant k$, то C_{n+1}^{m+1}. 5. 60 мальчиков, 40 девочек. 6. $(a, 0, 0)$, $(0, a, 0)$, $(0, 0, a)$. 7. $(64,4)$, $(-64, -4)$, $\left(2, \frac{1}{8}\right)$, $\left(-2, -\frac{1}{8}\right)$. 8. 165. 10. $x^3 - x^2 - 2x - 1 = 0$. 11. $a > 0$, $a \neq 1$, $b \geqslant c > 0$,

$$\left(\log_a \frac{\sqrt{b+c}+\sqrt{b-c}}{\sqrt{2}},\ \log_a \frac{\sqrt{b+c}-\sqrt{b-c}}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\left(\log_a \frac{\sqrt{b+c}-\sqrt{b-c}}{\sqrt{2}},\ \log_c \frac{\sqrt{b+c}+\sqrt{b-c}}{\sqrt{2}}\right).$$

13. 15 час. 14. $x + y = \frac{1}{2}\left(a + \frac{b}{a}\right)$. 15. $(125,4)$, $(625,3)$, 16. $a_n = 1 + \frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$, $s_n = \frac{n(n^2+1)}{2}$. 17. В первом сосуде или 20 *л* или 10 *л*. 18. $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$. 19. $(\pm 1, 1)$, $\left(\frac{3}{\sqrt[3]{3}}, \sqrt[3]{9}\right)$. 20. 1, $\frac{1}{1+k}$, $\frac{1}{(1+k)^2}$, $\frac{1}{(1+k)^3}$, ...; или $k > 0$, или $k < -2$. 21. 142 857. 22. $(2,1)$, $(-1, -2)$. 23. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. 24. $0 < x < a^{-\sqrt{2}}$,

$x > a^{\sqrt{2}}$. **25.** 20 час. **26.** $x_1 = \frac{1331}{8}$, $x_2 = \frac{729}{8}$. **27.** $x_1 = 4$, $x_2 = 8$. **28.** $k = 36$. **29.** Скорость течения 2 *км/час*; скорость катера 14 *км/час*. **30.** $(-27, -216)$, $(216, 27)$. **31.** $x = c^{\frac{b^2}{a(a-b)}}$, $y = c^{\frac{b}{b-a}}$. **32.** 1) 321440; 2) 372612. **33.** Если данная точка M совпадает с серединой D стороны AC, то искомая прямая MB. Пусть M лежит на DC. Тогда искомая прямая должна пересекать AB. Построение. Строим Q на AC так, чтобы $AQ = MC$; перпендикуляр к AC в точке Q пересекает AB в точке K; искомая прямая MS, где S—середина KB. **35.** Для трехгранного угла луч SA можно рассматривать как образу-

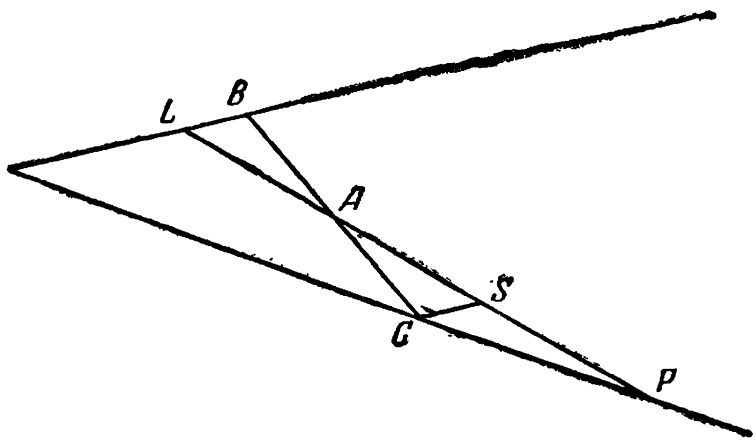


Черт. 27

ющую, по которой пересекаются конусы с вершиной S, осями SB и SC и углами при вершине 2α и 2β. Если бы было $\alpha + \beta < \gamma$, то эти конусы не пересекались бы (черт. 27). **36.** $\frac{3}{4}$. **38.** $\frac{(1 + \sqrt{k^2 + 2k + 2})^3}{4(k+1)^2}$, $\frac{(1 + \sqrt{k^2 - 2k + 2})^3}{4(k-1)^2}$. **39.** $\frac{2s}{a+b}$, где s—площадь треугольника. **40.** Заметить, что $2\alpha + 30° - \alpha + 60° - \alpha = 90°$ и что $\operatorname{ctg} 90° = 0$. **41.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. *Указание*: отрезок, соединяющий середины ребер AB и CD, перпендикулярен к ним обоим и его длина равна $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Расстояние от O до CD есть OM, где M — середина CD и т. д. **44.** $\sqrt[3]{\frac{6v}{\pi} \cdot \frac{\sin^2 \alpha}{1 + \cos^2 \alpha}}$. **45.** $(\sqrt{s_1} + \sqrt{s_2} + \sqrt{s_3})^2$. **47.** $\sin \alpha = \frac{\sqrt{ab}}{h}$. **48.** Равнобедренный. **50.** $2s_1 + 2s_2 + \frac{\pi d^2}{4}$. **51.** Проведем через середину A отрезка BC произвольную прямую и через C — прямую $SC \parallel LB$ (черт. 28). Тогда $AL = AS$, значит $AP > AL$ и значит пл. $\triangle APC >$ пл. ALB (у них высоты из B и C на AL и AP

равны, а $AP > AL$). **52.** $k\pi,\ \alpha + k\pi,\ k\pi + \frac{\pi}{2}$. **53.** $\frac{2}{3} d^3 \frac{\cos^3 \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{3\alpha}{2}}$.

54. Если M лежит в середине BC и $k = 1$, то решение единственное (MB). Если $k = 1$, но M не совпадает с серединой AC, то обозначим через D середину AC, а вершины треугольника так, чтобы точка M лежала между D и C (исключая C и включая D; если M совпадает с A или с C и $k = 1$, то решением будут медианы AA' и CC'). Положим пл. $\triangle MBC = s_1$, пл. $\triangle ABC = S$; тогда $\frac{s_1}{s} < 1$. Если $k = 1$, то решение опять единственное. Строим на AB точку K такую, что пл. $\triangle AKM =$ пл. $\triangle NBC$ (т. е.



Черт. 28

$h_b \cdot MC = h \cdot AM$, где h — высота треугольника AKM). Решением будет прямая MS, где S — середина KB. Пусть $k > 1$. Если M совпадает с C или A, например с C, то имеем два решения. $\frac{AP}{AB} = \frac{BQ}{BA} = k$ (P и Q лежат на AB); искомые прямые CP и CQ. Пусть M не совпадает ни с A, ни с C и $k > 1$. Заметим, что $\frac{s_1}{s} = \frac{CM}{CA}$. Рассмотрим три случая: I. $\frac{CM}{CA} = \frac{1}{k}$; II. $0 < \frac{CM}{CA} < \frac{1}{k}$ и III. $\frac{1}{k} < \frac{CM}{CA} < 1$. I. Если $\frac{CM}{CA} = \frac{1}{k}$, то два решения: BM и BM', где M' — точка AC такая, что $\frac{AM'}{M'C} = \frac{1}{k}$. II. Если $0 < \frac{CM}{CA} < \frac{1}{k}$, то задача имеет два решения: на прямой AB существуют две точки P и Q такие, что $\frac{\text{пл. } CBPM}{s} = \frac{1}{k}$, $\frac{\text{пл. } AQM}{s} = \frac{1}{k}$. Для построения точки P

заметим, что $\frac{\text{пл. } \triangle APM}{s} = \frac{k-1}{k}$, $\frac{H_p \cdot AM}{h_b \cdot AC} = \frac{k-1}{k}$; отсюда построим Hp (высоту из P на AM). Аналогично из $\frac{\text{пл. } \triangle AQM}{s} = \frac{1}{k}$ находим $\frac{H_Q \cdot AM}{h_b \cdot AC} = \frac{1}{k}$, строим H_Q, значит и Q; задача имеет два решения. III. Если, наконец, $\frac{1}{k} < \frac{CM}{CA} < 1$, имеем два решения MP и MQ, причем P лежит на BC, а Q — на AB. Аналогично исследуется случай $k < 1$. 55. $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$.

56. $\frac{h^3}{\sin\alpha\cos\alpha(1+\sin\alpha+\cos\alpha)}$.

57. Нет. 58. $\lg a$. 59. Из равенства двугранных углов при основании следует $OA = OB = OC = \ldots$, где A, B, C, … — основания перпендикуляров, опущенных из O на стороны (O — основание высоты). Значит в многоугольник основания можно вписать окружность (C), а грани тетраэдра касаются конуса по образующим SA, SB, SC, … Двугранный угол между касательными плоскостями к этому конусу увеличится, если точку A приблизить к точке B, значит из равенства двугранных углов при боковых ребрах следует, что $\smile AB = \smile BC = \ldots$, т. е. многоугольник в основании правильный; он не может иметь более трех сторон, так как двугранные углы при боковых ребрах в случае $n = 4$, $n = 5$, … будут тупыми, а при основании — острыми. Значит в основании — правильный треугольник. Теперь можно взять за основание любую другую боковую грань и повторить рассуждения.

61. а) $\frac{x^{2n} - a^{2n}}{x - a}$; б) $\frac{x^{2n+1} - a^{2n} x^{2n} + a^{2n+1}}{x^2 + ax + a^2}$.

62. $1 < x < 2$, $x < \frac{1}{8}$. 64. $\frac{k\pi}{2} \pm \frac{\pi}{8}$, $k\pi - \frac{\pi}{4}$.

66. $x = 2$. 67. Пусть $ABQP$ — параллелограмм, плоскость которого параллельна CD; тогда надо из тела $CDABQ$ отнять равные объемы пирамид $CABQP$ и $DABQP$. Другое решение: объем $ABCD = \frac{1}{6} \cdot AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin\alpha$, где d — кратчайшее расстояние между AB и CD. 68. $2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $2k\pi + 2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$, $2k\pi - 2\operatorname{arc\,tg} 2$. 69. Через $t = \frac{av_1 + bv_2}{v_1^2 + v_2^2}$; наименьшее расстояние будет равно $\frac{|bv_1 + av_2|}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}$.

70. При $\lambda \neq 0$ уравнения имеют общий корень $x = \frac{1+\lambda}{\lambda}$. При $\lambda = 0$ уравнения общих корней не имеют. 73. Если эта сумма равна 2, то угол A — прямой, если она < 2, то — острый, а если > 2, то — тупой. 74. $x = -2$, $y = k\pi$; $x = 2$, $y = k\pi + \frac{\pi}{2}$. 75. Пусть B' — точка, симметричная точке B относительно CD. Окружность (B', B', A) пересекает CD в точке E; перпендикуляр из B' на EA пересекает CD в искомой точке M. 76. $2k\pi - \frac{\pi}{2}$. 77. $p\left(1 - \frac{1}{2n}\right)$. *Указание*: говорят, что раствор p-процентный, если в 100 *г* раствора содержится p *г* соли (а значит $100 - p$ *г* воды). 78. $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$ и т. д. 79. Для остроугольного $1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$, для тупоугольного (угол A—тупой): $1 + \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C$, для прямоугольного—0. 80. Да. 81. 7 час. 24 мин. 82. $(4, 1)$ и $\left(-9, -\frac{9}{4}\right)$. 83. Если прямые AB и CD пересекаются в точке O, то искомое геометрическое место есть контур параллелограмма $SQRP$ с центром O, для которого прямые AB и CD служат диагоналями, причем расстояния от вершин S и R до диагонали PQ, не проходящей через вершину, равны $SS' = RR' = \frac{2a}{AB}$, а расстояния от вершин P и Q до диагонали SR равны $\frac{2a}{CD}$. 84. $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. *Указание*: $4\sin^2 3x \sin^2 x - \sin 3x = 5$ возможно лишь при $\sin^2 3x \sin^2 x = 1$, $\sin 3x = -1$. 85. $\frac{2v^2 + vv_1 + v_1^2}{vv_1(v_1 + 3v)} s$. 86. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. 87. Построить отрезок равный и параллельный CD, середина которого совпадает с серединой AB и отрезок равный и параллельный AB, середина которого совпадает с серединой CD. Соединив вершины полученных параллелограммов, построим параллелепипед и т. д.

89. $x_k = \sqrt[n-1]{\frac{\sqrt{a_1 a_2 \ldots a_n}}{a_k}}$. 92. $\frac{\pi}{12}(12k + 1)$, $\frac{\pi}{24}(4m + 1)$. 93. $\frac{4}{15}$. 95. $a^3\left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right)$. 96. Сумма данных выражений равна $\frac{\pi}{2}$. 97. $\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{4}, \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}\right)$, $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}, \frac{2}{3}\sqrt[3]{3}\right)$. 98. $d + c - b - a$; это значение (наименьшее) функция принимает при всех x таких, что $b \leqslant x \leqslant c$. 99. $\frac{11}{12}s$. 101. $C = -\frac{2}{27}a^3 + \frac{1}{3}ab$. 102. $12 + 16i$. 103. Пусть плоскости BSC и ASD пересекаются по

прямой l_1, а ASB и $Ds\ C$ — по прямой l_2; тогда любая плоскость, параллельная l_1 и l_2, пересечет угол по параллелограмму.

105. $-1 < a < 2$. **106.** 2^K. **108.** $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3 y = \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$. **109.** $y = 15$.

110. $$A\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + B\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + C\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

112. $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$. **113.** $\left[\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^m - 1\right] : \left[\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)^m + 1\right]$.

115. Сечение с наибольшей площадью проходит через середины не параллельных ему ребер. **116.** $\lambda \geqslant 2\sqrt{2}$. **118.** 0, 1, -1, $\pm\sqrt{1+\frac{3\sqrt{3}}{2}}$. **120.** $k\pi \pm \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$.

122. $\frac{1}{3}\left(4^{n+1}-1\right)\left(\lg_b^2 a + \frac{1}{4^n \lg_b^2 a}\right) - 2(n+1)$. **125.** 81 (при $x = 8$). **127.** а) Пусть D — середина AB, C — подвижная точка, Q — центр тяжести $\triangle ABC$, Q_0 — центр тяжести треугольника ASB. Так как точка Q делит отрезок DC в отношении $1:2$, то геометрическое место этих точек есть луч, параллельный ребру SE и проходящий через точку Q_0. б) Если теперь и точка B перемещается по ребру SB, то центры тяжести Q_0 треугольников ASB расположатся на луче, параллельном ребру и проходящем через точку Q_0, которая делит отрезок AS в отношении $2:1$. А соответствующие каждому фиксированному положению точки B лучи [рассматриваемые в пункте а)] заполнят сечение трехгранного угла плоскостью, проходящей через точку Q_0, параллельно ребрам SG и SE. **128.** $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(0, -1)$. **129.** $z_1 = 6 + 17i$, $z_2 = 6 + 8i$. **130.** При $a = 3$, $x = -2$, $y = 1$; при $a = -1$, $x = 0$, $y = -1$. **132.** $r = \frac{3+\sqrt{3}}{2}$, $h = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **133.** (3, 3, 3). **134.** 16 *км* (при 1 час. 15 мин. от начала движения). **136.** Наибольшее значение равно 1, наименьшее — 1/4). **137.** $\frac{475}{12}$ *км*. **138.** $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$, $y = -k\pi + \frac{\pi}{6}$; $x = k\pi + \frac{\pi}{6}$, $y = -k\pi + \frac{\pi}{4}$. **140.** $\dfrac{a\operatorname{tg}^2\frac{a}{4}}{2\sin\frac{a}{2}}$. **141.** $2 \pm \sqrt{3}$.

142. Первый. **143.** Действительные корни данного уравнения должны удовлетворять неравенствам: $0 \leqslant x \leqslant b$. Данное уравнение эквивалентно при этом следующему:

$$x = a - x + b - x + 2\sqrt{(a-x)-(b-x)}$$

или

$$3x-(a+b)=2\sqrt{(a-x)(b-x)}.$$

Действительные корни этого уравнения удовлетворяют условию $x \geqslant \frac{a+b}{3}$. Поэтому, если $\frac{a+b}{3}>b$, т. е. $a>2b$, то уравнение не имеет корней. Если $\frac{a+b}{3}=b$, т. е. $a=2b$, то уравнение имеет один корень $x=b$. Если $a<2b$, т. е. $\frac{a+b}{3}<b$, то неравенства $\frac{a+b}{3} \leqslant x \leqslant b$ возможны. Уравнение (1) эквивалентно следующей смешанной системе:

$$9x^2-6x(a+b)+(a+b)^2=4[ab-(a+b)x+x^2],$$
$$\frac{a+b}{3} \leqslant x \leqslant b$$

или

$$f(x)=5x^2-2(a+b)x+(a-b)^2=0,$$
$$\frac{a+b}{3} \leqslant x \leqslant b. \qquad (1)$$

Дискриминант этого уравнения

$$\Delta=(a+b)^2-5(a-b)^2=(a-b)^2\left(\frac{a+b}{a-b}+\sqrt{5}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{a+b}{a-b}-\sqrt{5}\right)>0,$$

ибо два первых множителя положительны, а последний $\left(b>\frac{a}{2}\right)$:

$$\frac{a+b}{a-b}-\sqrt{5}>\frac{a+\frac{a}{2}}{a-\frac{a}{2}}-\sqrt{5}=3-\sqrt{5}>0.$$

Значит корни уравнения (1) действительны. Находим:

$$f\left(\frac{a+b}{3}\right)=\frac{8}{9}(a-b)(a-2b)<0,\ f(b)=(a-2b)^2>0,$$

значит между $\frac{a+b}{3}$ и b имеется корень уравнения (1). Но так как один из корней уравнения (1) явно меньше, чем $\frac{a+b}{3}$, то система (1), следовательно, и начальное уравнение имеют только один корень (действительный)

$$x = \frac{a+b+\sqrt{(a+b)^2-5(a-b)^2}}{5}.$$

144. $x > 2$. 145. $\dfrac{\sqrt{4+\sin^2\frac{\alpha}{2}}-2\cos\frac{\alpha}{2}}{5\sin\frac{\alpha}{2}}\,a$. 146. $\dfrac{65}{4}$.

147. Первый — больше, второй — столько же, третий — меньше. На последний вопрос задачи два ответа: или 72 руб., 60 руб.; 48 руб. или 36 руб., 30 руб., 24 руб.

148. $x+\frac{\pi}{4}=z$. Ответ. Если $a=0$, то $x=k\pi-\frac{\pi}{4}$; если $a=1$, то $x-2k\pi+\frac{\pi}{4}$, $x=k\pi+(-1)^k\left(-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\pi}{4}$. Если $|a|>1$, то $x=k\pi+(-1)^k\arcsin\dfrac{1+\sqrt{1+8a^2}}{4a}-\dfrac{\pi}{4}$. Если $|a|<1$ ($и\ a\neq 0$), то $x=k\pi+(-1)^k\arcsin\dfrac{1-\sqrt{1+8a^2}}{4a}-\dfrac{\pi}{4}$.

149. $6666(a+b+c+d)$.

150. $a=\dfrac{2p\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{B}{2}\sin(A+B)}$, $s=2p^2\dfrac{\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cos^2\frac{A-B}{2}}{\sin(A+B)}$.

151. $\dfrac{a}{\sqrt{2}}$. 152. $\dfrac{1}{4t}\left(3a+2bt+\sqrt{9a^2-4abt+4b^2t^2}\right)$.

Указание: подкоренное выражение всегда положительно. При исследовании квадратного уравнения заметить, что b лежит между корнями $[f(b)<0]$, а потому надо в качестве v взять бо́льший корень (ясно, что должно быть $v>b$). 153. Сумма всех чисел таблицы $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$. Если n нечетно, то сумма всех нечетных чисел таблицы $\left(\frac{n+1}{2}\right)^4$, а если четно, то $\left(\frac{n}{2}\right)^4$. 154. $k\geqslant 3+$ $+2\sqrt{2}$. 155. $\cos\frac{A}{2}=\frac{l(b+c)}{2bc}$. 156. 2 *см*. 157. В сосуде A 150 *г* воды, в сосуде B 200 *г* воды. 158. $k>1$. 159. $k\pi+\frac{\pi}{4}$.

160. $BC=2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{m}{n}}$, $\overset{\smile}{DE}=\pi+2\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\dfrac{m}{n}}$. 161. $\dfrac{9\pm4\sqrt{2}}{7}$.

162. Подъемы 16 *км*, спуски 10 *км* (считая из A в B). 163 $-1 < x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < x < 2$. 164. $2k\pi$, $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$.

165. $\frac{a}{\sqrt{5-4\cos A}}$, $\frac{2a}{\sqrt{5-4\cos A}}$, $a > 0$, $0 < A < 180^\circ$. 166. $\frac{3}{7}$.

167. $\frac{\sqrt{k^2 b^2 + 400\,kbs - kb}}{2b}$. 168. $x = 10^{\frac{1}{1-\lg z}}$. 169. Решений нет. 170. $l = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}$. 171. 10 *см*. 172. 20%. 173. $\frac{\sqrt{2(a+2)}}{\sqrt[4]{a}}$.

174. $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqslant a \leqslant 1$. 175. $\frac{5\pi}{6} + 2\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{m-n}{m+n}(2+\sqrt{3})\right]$,

$$\frac{5\pi}{6} - 2\operatorname{arc\,tg}\left[\frac{m-n}{m+n}(2+\sqrt{3})\right].$$

176. $\cos\varphi = \sqrt{2}\cos\alpha$, $v = abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$. 177. 8 *км*. 178. $x = k\pi + \frac{b}{2} \pm \frac{1}{2}\arccos\frac{a-1}{\cos b}$, $y = -k\pi + \frac{b}{2} \mp \frac{1}{2}\arccos\frac{a-1}{\cos b}$.

179. $\lg 2 = \frac{2b-a}{4}$, $\lg 5 = \frac{4+a-2a}{4}$. 180. $2(p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ и т. д. 181. $\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{2}\sqrt{1+\sin^2\alpha}}$. 182. $\frac{\sqrt{t^2a^2+4sat} \pm ta}{2t}$.

183. $(a+k)x^2 + bx + c + k$, $4(a+k)(c+k) - b^2 = 0$; это квадратное уравнение относительно k имеет действительные корни

$$\frac{1}{2}\left[-(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + b^2}\right].$$

Ни один из них неравен $-a$, ибо тогда из $4(a+k)(c+k) - b^2 = 0$ следовало бы $b = 0$. Таким образом, прн любом из двух найденных значения k, $a + k \neq 0$ и

$$(a+k)x^2 + bx + c + k = (a+k)(x-x_1)^2 =$$
$$= [\sqrt{a+k}(x-x_1)]^2$$

$\sqrt{a+k}$ может быть и мнимым числом). 184. $2k\pi$, $2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k\pi + \frac{\pi}{4}$.

185. $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$. Из равенства $m_a = m_b$ следует $a = b$, и обратно. 186. $\cos\theta = \sqrt{-\frac{\cos\frac{3x}{2}}{3\cos\frac{\alpha}{2}}}$. 187. -1, i, $-i$.

188. Или $a \geqslant 1$, или $a \leqslant \frac{1}{2}$. 189. $2k\pi + \frac{\pi}{2}$. *Указание*: из данного уравнения сразу следует, что $\sin x = 1$. 190. $\frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{8s}$ (s — площадь). 191. $\cos\varphi = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. 192. 3 *м*, 3 *м/сек*. 193. $a \geqslant 3 + 2\sqrt{2}$. 194. $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$, $y = -k\pi + \frac{\pi}{4}$. 195. $\sqrt{bc\frac{p-a}{p}}$.

196. $\frac{b^3}{3}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{3\alpha}{2}}$. 197. 1, 4 *кг*. 198. Знак равенства имеет место при $x = y = z$. 199. $x = k\pi + \frac{s\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, $y = k\pi - \frac{s\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$, где k и s — любые целые числа. 200. $\frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{4s}$.

201. $\frac{1}{\sin A} : \frac{1}{\sin B} : \frac{1}{\sin C}$. 202. 20 час. и 30 час. 203. $p = \sqrt{2}$, $q = 1$; $p = -\sqrt{2}$, $q = 1$; $p = i\sqrt{2}$, $q = -1$; $p = -i\sqrt{2}$, $q = -1$; $p = 0$, $q = i$; $p = 0$, $q = -i$. *Указание*: или разложить $x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - (x\sqrt{2})^2 = (x^2 + x\sqrt{2} + 1)(x^2 - x\sqrt{2} + 1) = \ldots$ на линейные множители и затем перемножать их попарно или выполнить деление $x^4 + 1$ на $x^2 + px + q$. 204. $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$, $y = s\pi + \frac{\pi}{4}$, $z = -(k+s)\pi + \frac{\pi}{4}$; $x = k\pi - \frac{\pi}{4}$, $y = s\pi + \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$, $z = \pi - (k + s)\pi - \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$. 205. $\frac{13}{4}$.

206. $\frac{a^3}{3}\,\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos^2\alpha}\sqrt{\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\beta}{2}\right)}$. 207. 27 час и 54 час.

209. $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{16}$. 210. rR. 211. Сторона основания $\frac{4R\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha}{4 + \operatorname{tg}^2\alpha}$; боковое ребро $\frac{2R\sin\alpha}{1 + 3\cos^2\alpha}$. 212. $-m - n$. 214. $2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k\pi + (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$. 215. 13 и 15. 216. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\pi}{n}$. 217. 24. 218. Или при $p = q = 0$ (тогда $x_1 = x_2 = x_3 = 0$), или (если $q \neq 0$), то при условии $\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27} = 0$; двойной корень в этом случае равен $-\frac{3q}{2p}$. 219. При условии $-\frac{3}{2} < a < \frac{1}{2}$

уравнение имеет решение $\sin 2x = 1 - \sqrt{3+2a}$. 220. $\frac{2100}{169}$.

221. $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\sin\beta}$. 222. 1, 2, 4 или 4, 2, 1. 223. $b^3 + ca^3 = 0$.

224. $\frac{\sqrt{5}}{4}$. 225. $(b+c)\sqrt{1-\frac{l^2}{cb}}$. 226. $2R\sqrt{\cos\alpha}$. 227. Первый работал 20 час. и зарабатывал по 4 руб. в час, второй — 15 час. и зарабатывал 3 руб. в час. 228. C_{n+1}^{k+1}, 3003.

230. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$. 231. $2\pi s\sqrt{\frac{s\cdot\sin\alpha}{2}}$. 232. $q \pm \sqrt{q^2-2pq}$, $q \geqslant 2p$. 233. 1) 2; 2) $2\sqrt{x-1}$. 234. $x=4$. 235. *Указание*: продолжить BA за A на расстояние $AD = AC$. Тогда в силу $\frac{c}{a} = \frac{a}{b+c}$, треугольники ABC и CBD — подобны.

236. $\frac{1}{3}s\sqrt{\frac{1}{2}s\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$. 237. $\frac{t_1 t_2}{2t_1 - t_2}$. 238. $7a_1$. 239. $x = 170\,k\pi$; 18 корней. 240. $a^2 = c(c+b)$. 241. $\frac{1}{6}abc\sin\alpha$.

242. $n\cdot 10^n - \frac{10^n - 10}{9}$. 243. $x < -5$. 244. $b = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5+\frac{4}{\cos A}} + \sqrt{5-\frac{4}{\cos A}}\right)$, $c = \frac{a}{2}\left(\sqrt{5+\frac{4}{\cos A}} - \sqrt{5-\frac{4}{\cos A}}\right)$. 246. $r=1$.

247. Через $t = \frac{1}{2}$ сек.; минимальное расстояние будет равно $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

248. (2, 1), (1, 2), (—1, —2), (—2, —1), (2, —1), (—2, 1), (1, —2) (—1, 2), $(\sqrt{5}, 0)$, $(-\sqrt{5}, 0)$, $(0, \sqrt{5})$, $(0, -\sqrt{5})$.

249. $A = \frac{\pi}{3} - \varphi$, $B = \frac{\pi}{3}$, $C = \frac{\pi}{3} + \varphi$,

$$a = \frac{4p\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)}{\sqrt{3}(1+2\cos\varphi)},\quad b = \frac{2p}{1+2\cos\varphi},\quad c = \frac{4p\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)}{\sqrt{3}(1+2\cos\varphi)}.$$

250. 65. 251. $\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$. 252. *Решение.* Получим сначала необходимое условие. Если все три точки совпадут с одной и той же точкой окружности, то $v_1 t - v_2 t = 2m\pi$, $v_1 t - v_3 t = 2n\pi$, где m и n — целые числа, и значит, $\frac{v_1 - v_2}{v_1 - v_3} = \frac{m}{n}$ — число рациональное. Докажем, что это условие и *достаточное* условие. Будем

считать, что v_1 — наибольшая скорость, так что m и n — целые положительные числа. Будем искать целые числа p и q такие, что

$$v_1 t - v_2 t = 2p\pi, \quad v_1 t - v_3 t = 2q\pi,$$

$$v_1 - v_2 = \frac{m}{n}(v_1 - v_3), \quad v_1 t - v_2 t = \frac{m}{n}(v_1 t - v_3 t),$$

$$2p\pi = \frac{m}{n}\cdot 2q\pi, \quad p = \frac{m}{n} q.$$

Отсюда наименьшее значение для q, $q = n$, а тогда $p = m$. Промежутки, разделяющие совпадения, будут $t = \frac{2m\pi}{v_1 - v_2}$.

253. $0 < x < \frac{1}{10}, \quad 100 < x < 1\,000, \quad x > 100\,000.$

254. $\sin y = \frac{1}{14} + \frac{\sqrt{73}}{10}, \quad \cos y = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{73}}{70},$

$$\sin x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{73}}{70}, \quad \cos x = \frac{1}{14} - \frac{\sqrt{73}}{10},$$

$$x = 2s\pi + \pi - \arcsin\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{73}}{70}\right),$$

$$y = 2k\pi + \arcsin\left(\frac{1}{14} + \frac{\sqrt{73}}{10}\right).$$

255. $\pi - 2A, \quad \pi - 2B, \quad \pi - 2C.$

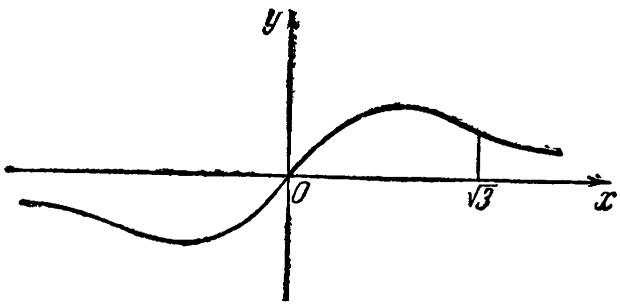
256. $\pi ab \sin\alpha \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}.$

257. 8 *км*. 258. 0, если n — нечетное, $(-1)^{\frac{n}{2}} C^{\frac{n}{2}}$, если n — четное. 259. $\frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$. 260. $A = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{\sin\varphi}{2}\right)$, $B = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sin\varphi}{2}\right)$, $C = \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sin\varphi}{2}\right)$. 261. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}$.
262. 30 000 руб. на 8 месяцев и 20 000 руб. на 12 месяцев.
263. $\left(x + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} y + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} z\right)\left(x + \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} y + \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} z\right)$. 264. $a = \frac{2pr}{h_a}$; две другие стороны

$$\frac{p}{h_a}(h_a - r) \pm r\sqrt{\frac{p^2}{h_a^2} - \frac{h_a}{h_a - 2r}}.$$

265. $\frac{3a}{4\sqrt{2}}$. 267. Пусть $\frac{r'}{r}$ — наибольшее из трех отношений

$\frac{p'}{p}$, $\frac{q'}{q}$ и $\frac{r'}{r}$. Тогда достаточно добавить лишь металлов A и B в количествах $x = \frac{s(pr' - rp')}{100r}$, $y = \frac{s(r'q - rq')}{100r}$ $\left(\text{в силу } \frac{r'}{r} \geqslant \frac{q'}{q}\right.$ и $\frac{r'}{r} \geqslant \frac{p'}{p}$ количества x и y будут положительны$\Big)$. 268. $-\frac{5}{2} \leqslant x \leqslant -2$, $-\frac{1}{2} \leqslant x < 0$. 269. $\frac{a}{b}$. 270. $\frac{b \sin\alpha \cos\alpha}{\cos\alpha + \sin\alpha}$. 271. $x_1 = \frac{5}{3}$, $x_2 = \frac{5}{4}$. *Указание:* возвести обе части уравнения в квадрат (можно также сделать подстановку $x = \sec\varphi$). 272. Машина A_1 за $\frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{n-2}$ дней, машина A_r за $\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{n-r}$ дней. 273. $x =$



Черт. 29

$= \frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 274. *Указание:* спроектировать ломаную OAC и ее замыкающую OC, затем ломаную $OA'C'$ и ее замыкающую OC' на OC' на OA' и на OB'.

Ответ.

$$\cos\theta = \frac{aa' + (ab' + a'b)\cos\alpha + bb'}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}\,\sqrt{a'^2 + b'^2 + 2a'b'\cos\alpha}}.$$

275. $\frac{\pi a^3}{6}$. 276. *Указание:* выделить из числителя дроби левой части (после приведения к общему знаменателю) множители $a + b$ и $(a - b)^2$. *Замечание:* Условие

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{2}[f(a) + f(b)] < 0$$

означает геометрически выпуклость функции $f(x)$ вниз. Геометрически данная задача означает, что график функции $y = \frac{x}{1 + x^2}$ на интервале $(\sqrt{3}, +\infty)$ имеет выпуклость вниз (черт. 29). 277. $\frac{1}{2} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $x > 1$. 278. $AB = 6$ *км.* $v_1 = 120$ *м/мин,*

$v_2 = 60$ *м/мин.* 279. $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha \leqslant \frac{5\pi}{4}$. 280. $\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C$. 281. $\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$. 282. Если $-\frac{1}{2} < k < 0$, оба корня отрицательны; если $k = -\frac{1}{2}$, один корень равен 0, другой -3; если $k < -\frac{1}{2}$, корни разных знаков. 283. $AM = 600$ *км*, $v_1 = 37{,}5$ *км/час*. $v_2 = 75$ *км/час*, 284. Если $a > 1$, то $x = \lg_a (2\pi + 4k\pi)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ и $x = \lg_a \left(\frac{2\pi}{7} + \frac{48k}{7}\right)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Если $0 < a < 1$, единственный положительный корень $x = \lg_a \frac{2\pi}{7}$. 285. $90°$. 286. $\sqrt{c^2 + a^2 - b^2}$. 287. $0 < x < \frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6} < x < \pi$. 288. $v_n = 5$ *км/час*, $v_b = 15$ *км/час*, $AB = 60$ *км*. 289. $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < \frac{\pi}{2} + 2k\pi$. 290. $\operatorname{ctg} \angle CAD = \operatorname{ctg} A + \frac{\sin C}{\sin A \sin B}$. 291. $\frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}}{2} R$. 292. $\frac{3}{4} < x < 1$ или $x < -1$.

293. 6 *км/час* и 3 *км/час*. 294. $m = \frac{1 + \sqrt{3}}{4}$.

295. $\frac{r_1 r_2}{(\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2})^2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}$. 296. $\frac{1}{\sqrt{3}} \arcsin \frac{\alpha}{2}$.

297. $k > 0$ или $k < -4$. 298. 336 *км*. 299. $x = y = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{4}$. 300. $15°$, $105°$. 301. $a\sqrt{3} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$. 302. $0 < x \leqslant \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{10}$,

$$\pi < x \leqslant \pi + \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{10}.$$

303. $v' = \frac{4av}{4a - v}$, $AB = \frac{8a(a + b) - v(4a + b)}{2(4a - v)}$. 304. 1) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

2) $\alpha = -\frac{1}{2} \arcsin \frac{1}{8}$; при этом второй корень равен

$$x_2 = \cos \alpha + \sin \alpha + \sqrt{\sin 2\alpha} \left(\text{где } \sin 2\alpha = \frac{1}{8}\right).$$

305. $\frac{r_1 r_2}{2(r_1 + r_2)}$. 306. $\frac{2h}{\sqrt{3}}$. 307. *Указание:*

$$\sin^4 x - 6 \sin^2 x + 8 = (\sin^2 x - 4)(\sin^2 x - 2).$$

308. 20 *км/час*. 309. $x_1 + x_2 = \frac{\pi}{3}$. 310. $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \frac{1}{4}$. 311. 30°.

312. $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha \leqslant 2\pi$, $x = \lg_5 \frac{1 \pm \sin\alpha}{\cos\alpha}$. 313. 80 *м/мин* и 220 *м/мин*. 314. Знак равенства имеет место при $\operatorname{tg}^2 y = \frac{1}{a}$.

315. $\operatorname{tg} B = 2\operatorname{tg} C$. 316. Центр — середина SC, радиус $a\sqrt{2}$.

317. Если $a > 1$, то $x < \lg_a \frac{\pi}{4}$ и $\lg_a k\pi \leqslant x \leqslant \lg_a\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)$. Если $0 < a < 1$, то $x > \lg_a \frac{\pi}{4}$. 318. 4 $^1/_2$ года. 319. Если $0 \leqslant \varphi < \frac{\pi}{6}$ — оба корня положительны. Если $\frac{\pi}{6} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ — корни разных знаков, причем бóльшую абсолютную величину имеет положительный корень. Если $\varphi = \frac{\pi}{6}$, то один из корней равен 0, другой $\sqrt{3}$. 320. $R\frac{1 \pm \sin\alpha}{\cos\alpha}$. 321. $\frac{a^2 + b^2}{2h}$,

$$h = \sqrt{\sqrt{(a^2 + b^2)^2 + 4a^2b^2} - (a^2 + b^2)}.$$

322. $\frac{16}{17} \leqslant k < 2$. 323. $\sqrt{pq}$. 324. $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

325. $\sqrt{\frac{R^2 + r^2 \pm \sqrt{6R^2r^2 - R^4 - r^4}}{2}}$.

326. $\frac{ab}{6}\sqrt{\frac{ab^2 + b^3 - 3a^2b + b^3}{3b - a}}$.

327. Если $a > 1$, то $x < a^{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$, $\sqrt{a} < x < a$, $x > a^{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$.

Если $0 < a < 1$, то $x > a^{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$, $\sqrt{a} > x > a$, $x < a^{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$.

328. $\frac{-mn + \sqrt{m^2n^2 + 4amn}}{2n}$. 329. $x = \lg a\left(\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{24}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ и $x = \lg_a\left(\frac{k\pi}{3} + \frac{5\pi}{36}\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

330. $R = \frac{a^2b^2 + r^2(a + b)^2}{4abr}$. 331. $SA \perp ABC$, следовательно, $ABS \perp ABC$, но $BCS \perp ABS$ по условию, значит, линия пересечения $BC \perp ABS$ и, значит, $BC \perp SB$. Пусть O — середина SC.

Возьмем сферу с центром O и радиусом OC; B и A будут лежать на ней, так как углы при A и B прямые. **332.** $k > \lg_3 \frac{10}{13}$.

333. 4. **334.** $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$. **335.** $4a\sqrt{r^2 - a^2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

336. $\dfrac{b^2}{2\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}}$. **337.** Если $a > 1$, то $\lg_a \frac{1}{2} < x < \lg_a\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)$.

Если $0 < a < 1$, то или $x < \lg_a \frac{1}{2}$, или $x > \lg_a\left(\frac{3}{2} + \sqrt{3}\right)$.

338. Первый за 100 час., второй за 25 час. или первый за 30 час. второй за 60 час. **339.** Если $a \geqslant \frac{1}{3}$, то $\sin 2x = -a + \sqrt{a^2 - a + 2}$; если $0 < a < \frac{1}{3}$, решений нет.

340. $\cos \angle ASB = \dfrac{a^2 + b^2 - 5c^2}{2\sqrt{2c^2 + 2a^2 - b^2}\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}}$.

341. $\dfrac{a(2b \pm a)}{2\sqrt{3b^2 - a^2}}$. **342.** $2^{\frac{48}{49}} \leqslant p < 4$. **343.** 50 *км/час*.

344. $2k\pi + \frac{\pi}{4}$. **345.** $\dfrac{\mp 2\sqrt{3} \pm \sqrt{4R^2 - r^2}}{2}$.

346. $\arccos \dfrac{\sqrt{1 + 2\cos\alpha}}{3}$. **347.** Если $a > 1$, то $x < a^{\frac{2-\sqrt{13}}{3}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{a}} < x < a$, $x > a^{\frac{2+\sqrt{13}}{3}}$. Если $0 < a < 1$, то $x > a^{\frac{2-\sqrt{13}}{3}}$, $\frac{1}{\sqrt[3]{a}} > x > a$, $x < a^{\frac{2+\sqrt{13}}{3}}$. **348.** 88 сек. **349.** $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5\pi}{3}$.

350. $\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{4}{3}\operatorname{tg}\alpha\right)$, $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{4}{3}\operatorname{tg}\alpha\right)$.

351. $\dfrac{R\sqrt{2} \pm \sqrt{3r^2 - R^2}}{\sqrt{3}}$. **352.** $\dfrac{-4 + 4\sqrt{10}}{9} \leqslant a < \frac{4}{3}$, $a \leqslant \dfrac{-4 - 4\sqrt{10}}{9}$. **353.** 7 *км/час*. **354.** 1) $2k\pi + \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} 2 < x < 2k\pi + \pi - \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} 2$;

2) $2k\pi + \pi - \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg} 2 < x < 2k\pi + \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}} -$ $- \operatorname{arctg} 2$. **355.** $OP = \frac{a\cos\alpha + b}{\sin\alpha}$, $OQ = \frac{b\cos\alpha + a}{\cos\alpha}$,

$$OM = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha}.$$

357. Если $b > 1$, то $1 < x < \lg_b(1+\sqrt{2})$. Если $0 < b < 1$, то $1 > x > \lg_b(1+\sqrt{2})$. **358.** Через 3 час. **359.** $0 < t < \frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6} < t < 2\pi$. **360.** Дуга $\smile{BC}$ окружности, из точек которой отрезок BC виден под углом $\pi - A$ (и еще дуга, ей симметричная относительно BQ при другом расположении треугольника). **361.** $\frac{1}{3}(\sqrt{6R^2 - 2r^2} \pm 2r)$. **362.** Если $b > 1$, то $b^2 < x < b^{\frac{3+\sqrt{11}}{2}}$, $\frac{1}{\sqrt{b}} < x < b^{\frac{3-\sqrt{11}}{2}}$. Если $0 < b < 1$, то $b^2 > x > b^{\frac{3+\sqrt{11}}{2}}$,

$$\frac{1}{\sqrt{b}} > x > b^{\frac{3-\sqrt{11}}{2}}. \quad \textbf{363.}\ 25 \cdot 10^n.$$

$$\textbf{364.}\quad x = \lg_c\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right),\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$$

$$x = \lg_c\left(k\pi + \frac{\pi}{6}\right),\quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$$

$$x = \lg_c\left(k\pi - \frac{\pi}{6}\right),\quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Из всех этих корней для $x = \lg_c\frac{\pi}{6}$ под знаком логарифма стоит положительное число меньшее 1. Если $c > 1$, то этот корень < 0, остальные > 0; при $0 < c < 1$ — наоборот. **365.** $1 < \frac{b+c}{a} \leqslant 2$.

366. $\frac{3}{8}$. **367.** Понизилась на 1%. **368.** Таких значений нет.

$$\textbf{369.}\quad 2k\pi + \frac{\pi}{2}.$$

370. Если $B > C$, то $B = \frac{\pi}{4} + \arccos\frac{+ a^2\sqrt{2}}{2a^2}$,

$C = \frac{\pi}{4} - \arccos\frac{l^2 + a^2\sqrt{2}}{2a^2}$. **371.** $\frac{3a\sqrt{2}}{4}$. **372.** $-3 \leqslant k \leqslant -2$.

373. $x = \lg_b k\pi$, $x = \lg_b\frac{2k\pi}{5}$, $x = \lg_b\frac{2k\pi}{3}$, где k — любое целое положительное число. **374.** $\dfrac{27\cos^2\beta}{165-229\sin^2\beta}$. **375.** $\sin\dfrac{x}{2}=\dfrac{2\cos\dfrac{\pi}{n}}{\cos\dfrac{\theta}{2}}$.

376. $\dfrac{(r-q)(p+r)}{(p-r)(q+r)}$, $p\leqslant r<q$ или $p>r>q$.

377. $x>\dfrac{1}{a}$, $a^3\leqslant x<a^2$, $x<a^5$.

378. $\dfrac{k\pi}{2}\pm\dfrac{1}{2}\arcsin 2\sqrt{\dfrac{1-a}{3}}$, $\dfrac{1}{4}\leqslant a\leqslant 1$.

379. $r^2\,\dfrac{\sin 2(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)\sin\beta}{\sin\alpha}$. **380.** $\dfrac{1}{16}$. **381.** $\dfrac{(1-n)(mn+1)}{1-mn^2}$.

382. $3<p\leqslant\dfrac{15}{4}$. **383.** $x_k=\lg_a\dfrac{k\pi}{4}$, $x'_k=\lg_a\dfrac{k\pi}{3}$,

где k — любое целое положительное число. Если $a>1$, то $x_1<0$, $x_k>0$ $(k>1)$, $x'_k>0$. Если $0<a<1$, то $x_1>0$, $x_k<0$ $(k>1)$, $x'_k<0$. **384.** $\dfrac{18\operatorname{tg}\beta}{25\operatorname{tg}\alpha-43\operatorname{tg}\beta}$. **385.** $\sin\dfrac{x}{2}=\sin\dfrac{\pi}{n}\cos\alpha$.

386. $\dfrac{pq}{p+q}$. **387.** $1\leqslant x<\dfrac{1}{a}$, $a^2<x\leqslant a$. **388.** При $\dfrac{2}{3}\leqslant b\leqslant 1$,

$$x=k\pi\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1\pm 2\sqrt{3b-2}}{3};$$

при $1\leqslant b\leqslant 2$,

$$x=k\pi\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-2\sqrt{3b-2}}{3}.$$

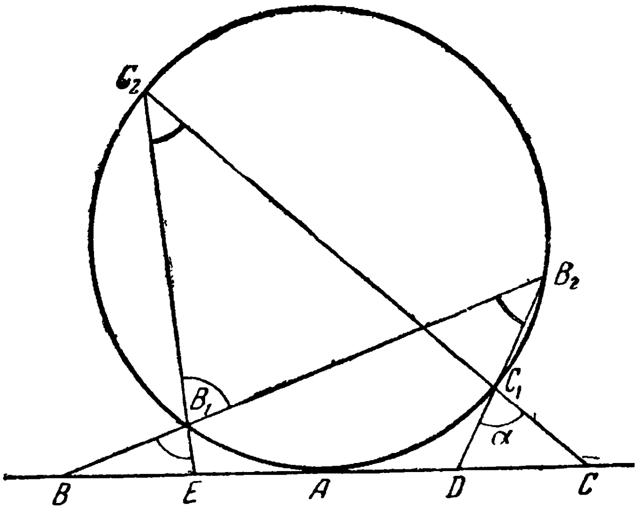
389. $\dfrac{2r^2\sin^3(\alpha+\beta)\sin\beta}{\sin\alpha}$. **390.** Если γ — острый угол и если проведенная плоскость пересекает ΔBCD, а высоту DK этого треугольника в точке S, причем $\angle SEA=\gamma$, то искомое отношение равно $\dfrac{\sin^2\alpha\sin^2(\gamma-\beta)}{5\sin^2\gamma\sin^2(\alpha+\beta)}$. **391.** $\dfrac{a(r-p)+r(p+1)}{a(p-r)+p+1}$, $0<p<\dfrac{2r}{1-r}$.

392. $\dfrac{5}{3}$ (если течение от A' к B). **393.** $r(\varphi_2-\varphi_1)\sin\theta-$ $-2r\arcsin\left(\sin\theta\sin\dfrac{\varphi_2-\varphi_1}{2}\right)$; $\dfrac{10\,000}{3}\pi(3\sqrt{2}-4)$ *км.*

394. Центр тяжести G треугольника ABC обладает тем свойством, что сумма трех сил $\overrightarrow{GA}$, $\overrightarrow{GB}$ и $\overrightarrow{GC}$ равна нулю. Обратно. Если $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=0$, то G — центр тяжести треугольника ABC, ибо тогда отрезки GA и GM, где M — середина BC противоположно направлены, т. е. точка G лежит между A и M и

$GA = 2GM$. Пусть G — центр тяжести треугольника с вершинами в серединах сторон A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6. Тогда сумма сил $\overrightarrow{GA_1}$, $\overrightarrow{GA_2}$, $\overrightarrow{GA_3}$, $\overrightarrow{GA_4}$, $\overrightarrow{GA_5}$, $\overrightarrow{GA_6}$ равна нулю. Если G' — центр тяжести треугольника с вершинами в серединах сторон A_2A_3, A_4A_5 и A_1A_6, то сумма сил $\overrightarrow{G'A_1}$, $\overrightarrow{G'A_2}$, $\overrightarrow{G'A_3}$, $\overrightarrow{G'A_4}$, $\overrightarrow{G'A_5}$, $\overrightarrow{G'A_6}$ также равна нулю. Отсюда $\overrightarrow{GA_1} - \overrightarrow{G'A_1} + \overrightarrow{GA_2} - \overrightarrow{G'A_2} + \ldots = 0$ или $\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1G'} + \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{A_2G'} + \ldots = 0$, или $\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{GG'} + \ldots = 0$, $6 \cdot \overrightarrow{GG'} = 0$, $GG' = 0$, т. е. точки G и G' совпадают. **395.** $x = 2$, $y = 2$.

396. В 11 раз. **397.** $\frac{h}{1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}$. **398.** $\frac{BD}{\sin B_2} =$



Черт. 30

$= \frac{BB_2}{\sin D}$, $\frac{EC}{\sin C_2} = \frac{CC_2}{\sin E}$, $\frac{BD}{EC} = \frac{BB_2}{CC_2}\,\frac{\sin E}{\sin D}$ = (ибо $BB_1 \cdot BB_2 = CC_1 \cdot CC_2) = \frac{CC_1}{BB_1}\,\frac{\sin E}{\sin D}$, $\frac{CC_1}{\sin D} = \frac{DC}{\sin\alpha}$, $\frac{BB_1}{\sin E} = \frac{BE}{\sin\alpha}$, $\frac{BD}{EC} = \frac{DC}{BE}$, $BD \cdot BE = EC \cdot DC$, $(a + AD)(a - AE) = (a + AE)(a - AD)$ (черт. 30). Раскрывая скобки, получим $AE = AD$.

399. $\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$. **400.** $\frac{180}{37}$ час.

401. $\frac{h}{2}\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\beta} + \frac{1}{\cos^2\gamma}}$. **403.** $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $\left(\frac{6}{\sqrt{17}}, \frac{\sqrt{17}}{2}\right)$, $\left(-\frac{6}{\sqrt{17}}, -\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$. **404.** 12 час. **405.** $\frac{27}{8}$.

407. $(1, 1)$, $(-1, -1)$, $\left(2\sqrt{2}, \frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$, $\left(-2\sqrt{2}, -\frac{3}{2\sqrt{2}}\right)$.

408. В 12 час. 409. *Указание:* см. задачу № 67 этой главы. 411. 45°. 412. В 17 час. 413. 90°. 415. 45°. 416. 4 мин. 417. 30°.

418. $a \leqslant \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, $a \geqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 420. К концу 20/X.

421. $20\sqrt{3}$. 422. $x < -2$, $-1 < x < 0$, $x > \frac{1}{2}$. 424. 5 час.

425. $\frac{3R_1 R_2 R_3}{4\left(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2\right)}$. 427. $\left(\frac{13}{8}, -3\right)$, $\left(\frac{5}{8}, -1\right)$.

428. В 11 час. 430. $25R^2\left(1 - \frac{2 - \operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{3}\sqrt{2+\operatorname{tg}^2\alpha}}\right)$. 431. (2, 1).

432. 6 час. 434. $\frac{1+\sqrt{-\cos\gamma}}{\sqrt[6]{-4\pi^2\cos^4\frac{\gamma}{2}\cos\gamma}}$.

435. $\left(\frac{7}{2}, \frac{17}{5}\right)$, $\left(-\frac{7}{5}, -\frac{32}{25}\right)$. 436. $\frac{120}{11}$ час.

437. $\frac{2s}{1+\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha}$. 439. $(-4{,}6)$. 440. 104 руб. 60 коп.

441. $2\sqrt{d^2-(R-r)^2}+\pi(R+r)+(R-r)\arcsin\frac{R-r}{d}$.

442. Окружность, или точка, или пустое множество.

443. (5,005; $-4{,}995$), (50,05; 49,95).

445. $x=(1+4k)\left(1+4k-\sqrt{(1+4k)^2-1}\right)$,

$y=(1+4k)\left(1+4k+\sqrt{(1+4k)^2-1}\right)$;

$x=(1+4k)\left(1+4k+\sqrt{(1+4k)^2-1}\right)$,

$y=(1+4k)\left(1+4k-\sqrt{(1+4k)^2-1}\right)$, $k=1, 2, 3, \ldots$

446. 35. 447. $\sin A : \sin B : \sin C = \sqrt{5} : 2\sqrt{2} : 3$.

448. $\frac{a}{2}\left(\sqrt{1+\cos^2\alpha}-1\right)$. 449. 1 500 руб. 24%. 450. $x=2k\pi+\frac{\pi}{4}$.

Указание: $\sin 2x=(\sin x+\cos x)^2-1$. 451. $a=-\frac{3\varepsilon^2}{\sqrt[3]{4}}$, $a=\frac{\varepsilon}{\sqrt[3]{2}}$,

где $\varepsilon=1$, или $\varepsilon=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$. 452. $\frac{1}{3}$. 453. $\frac{(\sqrt{3}\cos\alpha\mp 1)^2 a}{4\sqrt{3}\cos\alpha}$.

454. $AB=11$, $BC=19$, $CA=17$. 456. $\sqrt{14}$. 457. $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$,

$\left(\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$. 458. В 5 раз. 459. $\frac{\sqrt{11}}{4}c$. 461. $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$.

$$\left(2+\frac{i\sqrt{97}}{2},\ 2-\frac{i\sqrt{97}}{2}\right),\quad \left(2-\frac{i\sqrt{97}}{2},\ 2+\frac{i\sqrt{97}}{2}\right).$$

462. $\frac{110}{13}$ *км.* **463.** $\frac{H^2\sqrt{2a+c}}{H\sqrt{2a+c}+c\sqrt{2a-c}}$. **466.** 1 час. 3 мин.

467. $\frac{35}{2}$. **468.** $\frac{y\sqrt{x^2-y^2}}{2y+\sqrt{x^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2}}$. **470.** 500 *м.*

471. $x=a^{\frac{c}{2}}$, $x=a^c$. **472.** $\frac{a^2\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\beta\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\beta}{2}}$.

473. $x=k\pi+\frac{\pi}{4}$, $x=k\pi-\operatorname{arc\,tg}2$. **474.** 10 *км/час* и 40 *км/час.*

475. $(b,\ b)$, $\left(\frac{1}{b},\ \frac{1}{b}\right)$. **476.** $\frac{a}{2\sin\alpha}\sqrt{1+\cos^4\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\beta}$.

477. $x=k\pi$. **478.** $v_1=40$ *км/час*, $v_2=60$ *км/час.* **479.** $x=a$, $y=a^2$.

480. $\frac{l\sin\alpha\cos\alpha\sin\frac{\beta}{2}}{1+\sin\frac{\beta}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)}$. **481.** $\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$. **482.** 30 *км/час*, 60 *км.*

483. $x=\sqrt{a}$, $y=a$. **484.** $\frac{h}{2\cos\alpha}\sqrt{1+\sin^2\alpha\cos^2\alpha\operatorname{tg}^4\frac{\beta}{2}}$.

485. $k\pi$, $k\pi\pm\frac{\pi}{6}$. **486.** 16 *сек.* **487.** $\frac{abc}{\sqrt{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}}$.

488. $\frac{r^2}{2}\left(\pi+\alpha+2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)$. **489.** (4,9), (9,4). **490.** 12 *кг* и 30 *кг.*

491. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **492.** $r^2(\alpha+\sin\alpha)$. **493.** (30,6), (35,1).

494. 3 *км/час,* 15 *км/час.* **495.** $a\left(\frac{2}{\sqrt{3}}-1\right)$. **496.** $\sin^2\frac{\pi}{n}$.

497. $x=4$. **498.** 40 *км.* **499.** $\frac{a}{3}$. **500.** $\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1-\sin\frac{\pi}{n}}$.

501. $x_1=1$, $x_2=-1$. **502.** 1 час. **503.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{16}$. **504.** $\frac{5}{12}$.

505. $2k\pi+\frac{\pi}{2}$. **506.** 90%. **507.** $R\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\pm 1\right)$. **508.** *Решение.* Пусть α — половина угла при вершине; тогда радиус R окружности, вписанной в треугольник, будет равен

$$R=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{a}{2}\,\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Половина отрезка, высекаемого боковыми сторонами треугольника на касательной, проведенной в верхней точке вписанной окружности будет равна:

$$a_1=R\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{a}{2}\,\frac{(1-\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}.$$

Радиус второй окружности:

$$\rho=a_1\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{a}{2}\,\frac{(1-\sin\alpha)^3}{\cos^3\alpha}.$$

Расстояние от центра этой окружности до хорды, соединяющей точки касания вписанной окружности, будет

$$\frac{a}{2}\,\frac{(1-\sin\alpha)^3}{\cos^3\alpha}+\frac{a}{2}\,\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{a}{2}\,\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}\sin\alpha$$

и отношение этого расстояния к $R\cos\alpha=\frac{a}{2}(1-\sin\alpha)$ должно быть равно $\operatorname{tg}60^\circ=\sqrt{3}$; это дает:

$$(1-\sin\alpha)^2+(1-\sin\alpha)\cos^2\alpha=\sqrt{3}\cos^3\alpha,$$

$$1-\sin\alpha+\cos^2\alpha=\sqrt{3}\cos\alpha\,(1+\sin\alpha),$$

$$(1-\sin\alpha)^2\,(2+\sin\alpha)^2=3\,(1-\sin^2\alpha)\,(1+\sin\alpha)^2,$$

$$(1-\sin\alpha)\,(2+\sin\alpha)^2=3\,(1+\sin\alpha)^3$$

или

$$(1-x)\,(2+x)^2=3\,(1+x)^3,\quad \text{где } x=\sin\alpha,$$

или

$$4x^3+12x^2+9x-1=0.$$

Полагая $x=z-1$, получим

$$4z^3-3z-2=0.$$

Пусть $z=u+v$; тогда

$$4\,(u^3+v^3)+(12uv-3)\,(u+v)-2=0.$$

Выберем u и v такими, чтобы $12uv-3=0$, т. е. $uv=\frac{1}{4}$, тогда

$$u^3+v^3=\frac{1}{2},\quad u^3v^3=\frac{1}{64},$$

откуда

$$u=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2+\sqrt{3}},\quad v=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2-\sqrt{3}},$$

значит

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}-2}{2},$$

а потому

$$\frac{a}{h}=2\operatorname{tg}\alpha=$$

$$=2\frac{\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}-2}{\sqrt{4\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\right)-\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{3}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{3}^2}\right)}}.$$

509. Если v_1 — объем верхнего чана, v_2 — объем нижнего чана, то $v_1:v_2=30:7$. 510. $\frac{\pi\sqrt{2}\,(3^{15}-1)}{3^{16}\,(3\sqrt{3}-1)}$. 511. $\frac{1}{16}$. 512. $k\pi+\frac{\pi}{4}$, $k\pi+(-1)^k\arcsin\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ 513. $30\ \frac{км}{час}$. 514. $\frac{395\pi}{16}$. 515. $3R\sqrt{3}$.

516. $x=2^{2k\pi\pm\frac{\pi}{2}}$, $k=1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots$

517. $$v_1=l\left(-\frac{60}{t}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{120^2}{t^2}}\right),$$

$$v_2=l\left(\frac{60}{t}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{120^2}{t^2}}\right).$$

518. $\cos\varphi=\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2$.

519. (2, 2, 2). 520. Уравнение не имеет корней.

521. I-й, $\dfrac{N+p+\sqrt{(N-p)^2+\frac{1}{T}\cdot 240\,pN}}{2\,(60-T)}$ колец в мин.;

II-й, $\dfrac{N-p+\sqrt{(N-p)^2+\frac{1}{T}\cdot 240\,pN}}{120}$ колец в мин.

522. $$\arcsin\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \sqrt{-a^2+b^2+c^2}}{2bc},$$

$$\arcsin\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{2ab},$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a^2-b^2+c^2}}{2ac}.$$

523. k^5-5k^3+5k. 524. $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$, $y=-k\pi+\frac{\pi}{6}$.

525. $v_{1,2}=\dfrac{\sqrt{k^2p^2+8\pi tkpR}\pm kp}{2tk}$.

526. $\cos\varphi_1=\cos\beta_1\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cos\gamma_2$ и т. д.

527. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

528. *Решение*. $4\sin x=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x}{\sin x\cos x}$;

$$4\sin^2 x\cos x=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right),$$

$$2\sin x\sin 2x=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right),$$

$$\cos x-\cos 3x=\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right),$$

$$\cos x-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos 3x,$$

$$2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right),$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right).$$

и т. д.

Ответ. $x=k\pi+\frac{\pi}{6}$, $x=\frac{k\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$.

529. $\sqrt{\frac{m^2}{4t^2}+\frac{mL}{ts}}\pm\frac{m}{2t}$. 530. $\cos\theta=-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$.

531. $x_1=\frac{1}{a^2}$, $x_2=\frac{1}{\sqrt{a}}$. 532. $k\pi+\frac{\pi}{2}$.

Указание: $\sin 2x=1-(\sin x-\cos x)^2$.

533. Пусть v_1 — скорость самолета, а v_2 — скорость ветра, s — расстояние между A и B. Скорость v_1 самолета должна быть

направлена так, чтобы суммы $v_1 + v_2$ равные, v и v' (черт. 31), были бы направлены по AB.

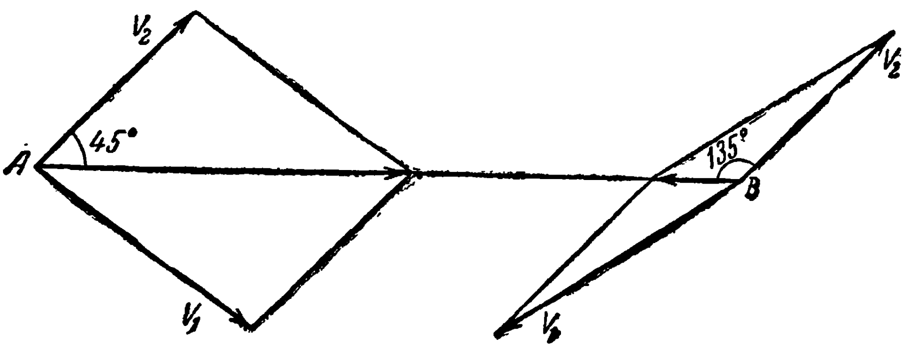
Имеем

$$v_1^2 = v^2 + v_2^2 - 2vv_2 \cos 45°,$$

$$v_1^2 = v'^2 + v_2^2 - 2v'v_2 \cos 135°.$$

Отсюда (считаем $v_1 > v_2$):

$$v = \frac{v_2}{\sqrt{2}} + \sqrt{v_1^2 - \frac{v_2^2}{2}}, \quad v' = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{v_1^2 - \frac{v_2^2}{2}};$$



Черт. 31

согласно условию задачи

$$\frac{s}{v} + \frac{s}{v'} = a \cdot \frac{2s}{v_1},$$

$$\frac{v + v'}{vv'} = \frac{2a}{v_1},$$

$$\frac{2\sqrt{v_1^2 - \frac{v_2^2}{2}}}{v_1^2 - v_2^2} = \frac{2a}{v_1},$$

$$v_1^2\left(v_1^2 - \frac{v_2^2}{2}\right) = a^2\left(v_1^2 - v_2^2\right)^2$$

и полагая $\frac{v_1}{v_2} = x$, находим:

$$x^2(2x^2 - 1) = 2a^2(x^2 - 1)^2$$

или

$$f(x) = 2(a^2 - 1)x^4 + (1 - 4a^2)x^2 + 2a^2 = 0.$$

Так как $f(1) = -1 < 0$, то (считаем $a > 1$) один из корней этого уравнения < 1, другой > 1, а так как $x > 1$, то

$$x = \sqrt{\frac{4a^2 - 1 + \sqrt{8a^2 + 1}}{4(a^2 - 1)}}.$$

534. $\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$. 535. $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{2}$. 537. $30T + \sqrt{900T^2 + 60aT}$.

538. $2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $2k\pi + \pi$. 539. $2(\sqrt{2} - 1)$.

541. $\sqrt{\frac{10k^2 - 1 - \sqrt{80k^2 + 1}}{10k^2}}$. 542. $2k\pi$, $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$. 543. $\frac{\sqrt{15} - \sqrt{3}}{2}$.

544. $\left(\frac{S}{T}\right)^{\frac{n}{2}}$. 545. $\frac{2kT(p^2 - 1)}{p^2(k - T) + 2p(T + k) + k - T}$. 546. $k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$, $2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}$. 547. $\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{6}}$. 549. 4 точки, 18 *см/сек*.

550. $\frac{2b^2 \sin\alpha \cos^2\alpha\,(1 + 2\sin^2\alpha)}{1 + \cos^2\alpha}$. 551. $a = 4$, $b = 6$. 552. (7,3).

553. $AB = 840$ *км*, $v_1 = 80$ *км/час*, $v_2 = 70$ *км/час*,

554. $\frac{\sqrt{\sin\frac{3\alpha}{2}}}{4\sqrt{3}\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}}}$. 555. 500 $см^2$. 556. (8,1), (1,8).

557. 270 *км*. 558. $\frac{b^2 \sin\alpha\cos\alpha\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$. 559. $\frac{2r^2\sqrt{Rr}}{R + r}$. 560. Если $|b| \geqslant a$, то

$$x = \frac{1}{32}\left[\left(\sqrt{2b^2 - a^2} + a\right)^4 + \left(\sqrt{2b^2 - a^2} - a\right)^4\right],$$

$$y = \frac{1}{32}\left[\left(\sqrt{2b^2 - a^2} - a\right)^4 - \left(\sqrt{2b^2 - a^2} + a\right)^4\right].$$

Если $|b| < a$, то система не имеет решений.

561. 15 *см/сек*, 20 *см/сек*. 562. $s = \frac{Q\cos\alpha}{1 + \cos\alpha}$. 563. $\frac{pq\sqrt{2}}{\sqrt{p^2 + q^2}}$.

564. $x = k\pi + (-1)^k \frac{\pi}{6}$, $y = 2s\pi \pm \frac{2\pi}{3}$; $x = k\pi - (-1)^k \frac{\pi}{6}$, $y = 2s\pi \pm \frac{\pi}{3}$. 565. $3mn - m + n - 3 = 0$. 566. $\dfrac{h^3\sqrt{3}\left(4\sin^2\frac{\varphi}{2} - 1\right)}{4\cos^2\frac{\varphi}{2}}$.

567. Уравнение не имеет корней. 568. 20 рабочих, 6 час. в день.

569. $\dfrac{2\pi\sqrt{3}\sin^2\alpha}{20 - 9\sin^2\alpha}$. 570. $k\pi \pm \frac{\pi}{4}$. 571. 4, 8, 12 и 12, 8, 4.

572. $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{h\sqrt{2}}$. 573. Если данное уравнение имеет корни, то $\dfrac{1-ax}{1+ax} > 0$, откуда $(a > 0)$, $-\frac{1}{a} < x < \frac{1}{a}$. Считая, что $-\frac{1}{a} < x < \frac{1}{a}$, получаем, что данное уравнение эквивалентно следующей смешанной системе:

$$a^2bx^3 - 2ax + bx = 0, \quad -\frac{1}{a} < x < \frac{1}{a}.$$

Отсюда $x_1 = 0$. Далее,

$$f(x) = a^2bx^2 - 2a + b = 0, \quad -\frac{1}{a} < x < \frac{1}{a}.$$

Это квадратное уравнение имеет корни, лежащие в интервале $\left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$, если $2a - b \geqslant 0$ и $f\left(\frac{1}{a}\right) > 0$ (ибо коэффициент при x^2 положителен). Условие $f\left(\frac{1}{a}\right) > 0$ дает $b > a$. Итак, если $a < b \leqslant 2a$, то уравнение имеет корни

$$x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{\frac{2a-b}{a^2b}}$$

(в случае $b = 2a$ — один корень $x = 0$). Если же $a > b$ или $b > 2a$, уравнение имеет только один корень $x = 0$.

574. 2, 4, 8, 10 и $\frac{25}{2}$, $\frac{15}{2}$, $\frac{9}{2}$, $\frac{3}{2}$. 575. $\frac{2}{3}R^3\dfrac{(2+\cos\beta)^3}{\cos\beta\sin^2\beta\sin\alpha}$.

576. *Указание*: $x^2 + \dfrac{9x^2}{(3+x)^2} = x^2 + \left(\dfrac{3x}{3+x}\right)^2 = x^2 - \dfrac{6x^2}{3+x} + \left(\dfrac{3x}{3+x}\right)^2 + \dfrac{6x^2}{3+x} = \left(x - \dfrac{3x}{3+x}\right)^2 + \dfrac{6x^2}{3+x} = \left(\dfrac{x^2}{3+x}\right)^2 + 6\dfrac{x^2}{3+x}$.

Ответ. $\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$, $\frac{-7 \pm i\sqrt{35}}{2}$. 577. $a_1 = \frac{60}{19}$, $q = -\frac{1}{19}$.

578. $\frac{s}{4} \frac{\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2}\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2} + \sqrt{2}\sqrt{\cos\alpha}}$.

579. $\frac{-35 \pm \sqrt{2105}}{4}$, $\frac{-35 \pm \sqrt{345}}{4}$. 580. 2. 581. $\sin\theta =$ $= \sqrt{\cos^2\alpha - \cos^2\varphi}$. 582. $x = 2$. 583. $a \frac{5k + \sqrt{25k^2 + 8k}}{4}$.

584. $\frac{1}{3} \frac{\pi r^2 (r + \sqrt{r^2 + (r+d)^2})^3}{(r+d)^2}$ или $\frac{1}{3} \frac{\pi r^2 (r + \sqrt{r^2 + (r-d)^2})^3}{(r-d)^2}$.

585. $x = 1 + \sqrt{3}$. 586. $v_1 = \frac{2(2p-q)}{t}$, $v_2 = \frac{2p}{t}$, $AB = 3p - q$.

587. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3a^2}{4}\sqrt{\frac{3m+2n}{n}}$. 588. $m=3$. 589. 448 *г*, 160 *г*, 192 *г*.

590. $\frac{d^3}{6}\sqrt{1+\sqrt{5}}$. 591. $x_1 = 1$, $x_2 = n^{\frac{n}{n-1}}$. 592. $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, ... 593. $\frac{\pi h^3}{6}\cos^2\varphi$. 594. $x_1 = -1$, $x_2 = -8$. 595. 48 и 51.

596. $\arccos\left(\sqrt[3]{2} - 1\right)$. 597. $x = 64$, $y = \frac{1}{4}$. 598. 12 *дм* и 36 *дм*.

599. $S = \pi m^2 \frac{2\cos\alpha(1+\cos\alpha)}{1+\sin^2\alpha}$, $v = \frac{2\sqrt{2}\pi m^3\cos^2\alpha\sin\alpha}{3(1+\sin^2\alpha)^{3/2}}$.

600. (2,1), (1,2), (1, −3), (−3,1). 601. 13. 602. $\frac{\pi R^3}{3}\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$.

603. $(9, \sqrt[3]{9})$, $(\sqrt[3]{9}, 9)$. 604. 23 час. 10 мин. и 9 час. 16 мин.

605. $(\sqrt{s} + \sqrt{s_1})^2$. 606. $x + \frac{\lg 3 - \lg 2}{\lg(\sqrt{5}-1) - \lg 2}$. 607. $a_1 = 12$; $q_1 = \frac{1}{2}$; $a_2 = -4$, $q_2 = -\frac{3}{2}$. 608. $\frac{a}{16}(4k+a)\sqrt{4k^2-3a^2}$. 609. $x=9$.

610. $\frac{3}{10}$. 611. $\frac{h}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}$. 612. $x = 2$, $y = 1$.

Глава II

УПРАЖНЕНИЯ, ЗАДАЧИ И ВОПРОСЫ К ПРОГРАММЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВЫСШИЕ УЧЕБНЫЕ ЗАВЕДЕНИЯ

§ 1. Действительные и комплексные числа

1. По определению периодическая дробь (смешанная) $k=0,a_1a_2\ldots a_k(b_1b_2\ldots b_s)$ есть сумма

$$0,a_1a_2\ldots a_k+0,\underbrace{00\ldots0}_{k\text{ нулей}}b_1b_2\ldots b_s+$$

$$+0,\underbrace{000}_{k\text{ нулей}}\ldots\underbrace{0000\ldots}_{s\text{ нулей}}0\,b_1b_2\ldots b_s+\ldots$$

Это — сумма числа $0,a_1a_2\ldots a_k$ с суммой бесконечно убывающей прогрессии. Знаменатель прогрессии равен $\frac{1}{10^s}$.

Значит,

$$k=0,a_1a_2\ldots a_k+\frac{0,\overbrace{00\ldots0}^{k\text{ нулей}}b_1b_2\ldots b_s}{1-10^{-s}}=$$

$$=0,a_1a_2\ldots a_k+\frac{0,b_1b_2\ldots b_s}{10^k\frac{10^s-1}{10^s}}=$$

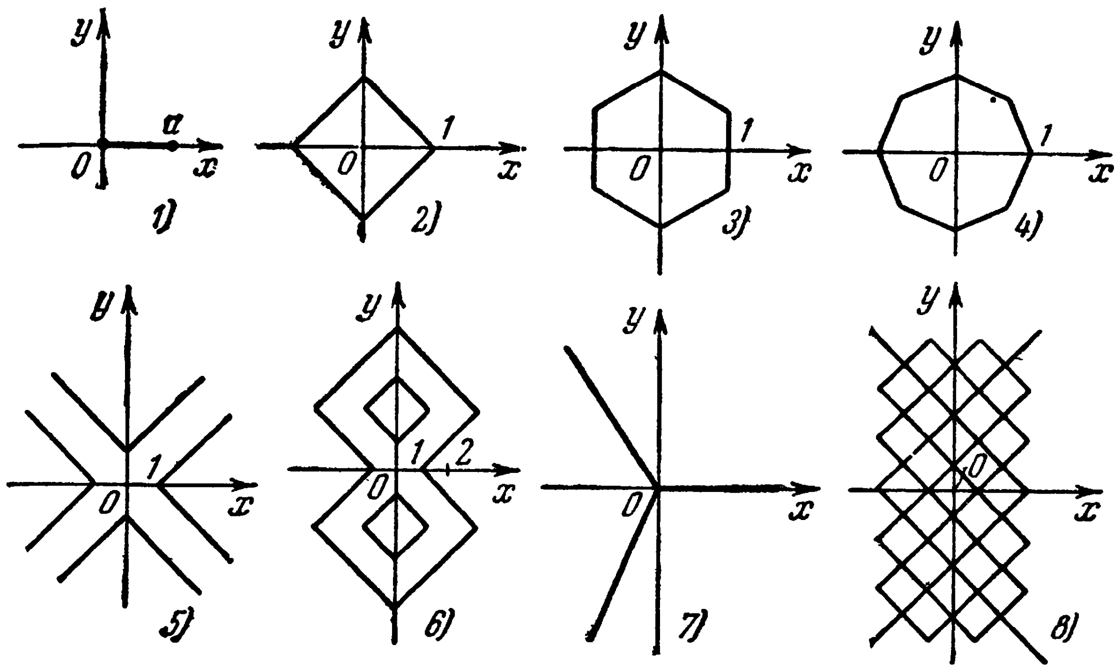
$$=0,a_1a_2\ldots a_k+\frac{b_1b_2\ldots b_s}{10^k(10^s-1)}=$$

$$=\frac{a_1a_2\ldots a_k(10^s-1)+b_1b_2\ldots b_s}{\underbrace{99\ldots9}_{s\text{ знаков}}\underbrace{000\ldots0}_{k\text{ нулей}}}=$$

$$=\frac{a_1a_2\ldots a_k\overbrace{00\ldots0}^{s\text{ нулей}}+b_1b_2\ldots b_s-a_1a_2\ldots a_k}{\underbrace{99\ldots9}_{s\text{ знаков}}\underbrace{00\ldots0}_{k\text{ нулей}}}=$$

$$=\frac{a_1a_2\ldots a_kb_1b_2\ldots b_s-a_1a_2\ldots a_k}{\underbrace{99\ldots9}_{s\text{ знаков}}\underbrace{00\ldots0}_{k\text{ нулей}}}.$$

Пример. $0,23(751)=\frac{23751-23}{99900}=\frac{23728}{99900}$. **2.** Пусть $a>0$ и $a\neq1$. Тогда, если x — целое положительное число большее 1, то $a^x=a\cdot a\ldots a$ (x раз). Если $x=1$, то $a^x=a$. Если $x=0$, то $a^x=1$. Если x — целое отрицательное число, то $a^x=\frac{1}{a^{-x}}$. Если x — рациональное число: $x=\frac{p}{q}$, где p и q — целые числа (будем считать $q>1$, p — любое целое число, дробь $\frac{p}{q}$ будем считать несократимой), то $a^x=\sqrt[q]{a^p}$. Наконец, если x — иррациональное число и $a>1$, то a^x определяется как число, заключенное между a^r и a^R, где r и R *любые* рациональные числа такие, что $r<x<R$. В подробных курсах алгебры (см. например. С. И. Новоселов, Специальный курс элементарной алгебры) доказывается существование и единственность такого числа. 3. Если $x>0$, то $|x|=x$, если $x<0$, то $|x|=-x$; $|0|=0$. 4. См. черт. 32.



Черт. 32

5. Такое число $x>0$, что $x^2=a$. 8. $\cos\frac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2k\pi}{n}$, $k=0, 1, 2, \dots, n-1$. 9. 1) Вершина параллелограмма, противолежащая O, стороны которого OM_1 и OM_2. 2) Середина отрезка M_1M_2. 3) Любая точка прямой M_1M_2. 4) Любая точка, отрезка M_1M_2, лежащая между точками M_1 и M_2. 5) Любая точка, лежащая внутри треугольника $M_1M_2M_3$. 6) Проводим из точки M_1 касательные M_1P и M_1Q к окружности радиуса 1 с центром в начале координат; пусть S — точка пересечения M_1O и PQ; точка, соответствующая числу $\frac{1}{z_1}$, симметрична S относительно оси Ox. 7) точка симметричная M_1 относительно оси Ox.

10. 1) $\cos 2\alpha+i\sin 2\alpha$; 2) $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}+i\,\frac{2ab}{a^2+b^2}$;

3) $\frac{-1-32i}{25}$; 4) 2; 5) $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; 6) 1;

7) $2(a^3+b^3+c^3)-3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+12abc.$

11. 1) $\pm(1+i)$; 2) $\pm 2(1-i)$; 3) $\pm(2-i)$; 4) $\pm(1+4i)$;

5) $\pm(1-2i)$; 6) $\pm(5+6i)$; 7) $\pm\left(\sqrt{\frac{3}{2}}-i\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$;

8) $\frac{\pm 1\pm i}{\sqrt{2}}$; 9) $i^{\alpha}\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\right)$, $\alpha=0, 1, 2, 3.$

12. 1) $\cos 0+i\sin 0$; 2) $\cos\pi+i\sin\pi$; 3) $\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$;

4) $\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$; 5) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

6) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 7) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$;

8) $2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; 9) $3(\cos\pi+i\sin\pi)$;

10) $5\left[\cos\left(\arccos\frac{3}{5}\right)+i\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)\right]$;

11) $5\left[\cos\left(-\arccos\frac{3}{5}\right)+i\sin\left(-\arccos\frac{3}{5}\right)\right]$;

12) $5\left[\cos\left(\pi-\arccos\frac{3}{5}\right)+i\sin\left(\pi-\arccos\frac{3}{5}\right)\right]$;

13) $5\left[\cos\left(\pi+\arccos\frac{3}{5}\right)+i\sin\left(\pi+\arccos\frac{3}{5}\right)\right]$.

13. 1) Окружность радиуса 2 с центром в начале координат. 2) Все точки, лежащие внутри указанной окружности. 3) Окружность радиуса 3 с центром в точке $M_1(x_1, y_1)$ $(z_1=x_1+iy_1)$. 4) Все точки, лежащие внутри и на окружности радиуса 1 с центром в точке (10,1). 5) Перпендикуляр к отрезку M_1M_2 в его середине. 6) Окружность Апполония (если $k\neq 1$). 7) Прямая.

14. 1) $-i$, $\frac{\sqrt{3}+i}{2}$, $\frac{-\sqrt{3}+i}{2}$;

2) 1, -1, $-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

3) $\sqrt[7]{5}\left(\cos\dfrac{2k\pi+\arccos\frac{3}{5}}{7}+i\sin\dfrac{2k\pi+\arccos\frac{3}{5}}{7}\right)$,

$k=0,1,2,3,4;5,6$ (для $\sqrt[7]{5}$ берется действительное значение).

15. $$A=\frac{(n+1)\cos nx-n\cos(n+1)x-1}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

$$B=\frac{(n+1)\sin nx-n\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}.$$

16. Вычисления надо вести так: при вычислении левой части неравенства

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin x<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120},$$

следует левую часть вычислять с недостатком, а правую — с избытком. Подставляя вместо x его приближенное значение, например,

$$x=\frac{\pi}{10}=0{,}314159,$$

следует поэтому в выражение

$$x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$$

(в первое и последнее слагаемое) подставить, например, **0,31416**, а в среднее 0,31415; при производстве вычислений следует сумму $x+\frac{x^5}{120}$ считать с избытком, а $\frac{x^3}{6}$ — с недостатком, так, что вся сумма $x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}$ будет вычислена с избытком.

Итак, полагая $x=18°=\frac{\pi}{10}=0{,}314159...$, имеем:

$$0{,}31415-\frac{0{,}31416^3}{6}<\sin 18°<0{,}31416-\frac{0{,}31415^3}{6}+\frac{0{,}31416^5}{120}.$$

Далее находим: $0{,}31\,416^2=0{,}098\,695\,056<0{,}098\,696$, $0{,}31\,416^3<$ $<0{,}31\,416\cdot 0{,}098\,696=0{,}031\,006\,523\,856$, и поделив это число на 6, взяв частное с избытком, получим: 0,00517. Таким образом $0{,}31415-0{,}00517=0{,}30898<\sin 18°$. Далее: $0{,}31\,415^2=0{,}0\,986\,902\,225>$

$> 0{,}09\,869$; $0{,}31\,415^3 > 0{,}09\,869 \cdot 0{,}31\,415 = 0{,}0\,310\,034\,635$. Поделив это на 6 и взяв частное с недостатком, получим: 0,00516, так что

$$0{,}31\,416 - \frac{0{,}31\,415^3}{6} < 0{,}31\,416 - 0{,}00\,516 = 0{,}3090.$$

Вычислим с избытком $\frac{0{,}31\,416^5}{120}$. Имеем:

$$\frac{0{,}31\,416^5}{120} < \frac{0{,}32^5}{120} = \frac{1024 \cdot 1024 \cdot 32}{120 \cdot 10^{10}} = \frac{1\,048\,576 \cdot 32}{12 \cdot 10^{11}} < \frac{1049 \cdot 32}{12 \cdot 10^8} =$$

$$= \frac{33\,568}{12 \cdot 10^8} < \frac{3000}{10^8} = 0{,}00\,003.$$

Итак

$$0{,}31\,416 - \frac{0{,}31\,415^3}{6} + \frac{0{,}31\,416^5}{120} < 0{,}3090 + 0{,}00\,003 = 0{,}30\,903.$$

Значит,

$$0{,}30\,898 < \sin 18^\circ < 0{,}30\,903.$$

Ошибка вычисления меньше, чем $0{,}30903 - 0{,}30898 = 0{,}00025$.

Остается еще решить вопрос со сколькими знаками следует вести приближенное вычисление и где производить округления. Без достаточного теоретического обоснования можно указать, что так как ошибка не превосходит $\frac{x^5}{120}$ и при $x = 18^\circ = \frac{\pi}{10}$ эта ошибка меньше, чем 0,00003, то вычисления можно вести с 5-ю знаками. Поэтому для того, чтобы определить с какой точностью надо вести вычисления, надо предварительно приблизительно вычислить ошибку, на которую указывают теоретические соображения.

17.

$$\frac{2{,}311 \cdot 3{,}501 - 2 \cdot 2{,}312 + 3{,}501}{2{,}312^2 - 3{,}501 + 2{,}312} < \frac{xy - 2x + y}{x^2 - y + x} <$$

$$< \frac{2{,}312 \cdot 3{,}502 - 2 \cdot 2{,}311 + 3{,}502}{2{,}311^2 - 3{,}502 + 2{,}311}$$

или

$$\frac{6{,}967\,811}{4{,}154\,344} < \frac{xy - 2x + y}{x^2 - y + x} < \frac{6{,}976\,624}{4{,}149\,721}$$

или

$$1{,}677 < \frac{xy - 2x + y}{x^2 - y + x} < 1{,}682;$$

ошибка не превосходит 0,005. **18.** Воспользоваться формулой для суммы геометрической прогрессии. Бесконечность множества совершенных чисел из высказанного положения не следует, так как не ясно, будет ли бесконечным множество простых чисел вида $2^{n+1}-1$. 19. Определение. 20. Алгебраическая теория строится над полем комплексных чисел. 21. $\frac{ab}{a+b}$.

$$22.\quad z'=\frac{az+b}{cz+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c^2\left(z+\frac{d}{c}\right)};$$

каждое из преобразований: $z''=z+\frac{d}{c}$, $z'''=c^2z''$, $z^{\mathrm{IV}}=\frac{bc-ad}{z'''}$ [см. задачу № 9, 6)], $z'=\frac{a}{c}+z^{\mathrm{IV}}$ окружность переводит в окружность. 23. Предварительное замечание. Во всем последующем мы будем говорить, что число представлено в виде разности двух квадратов, если оно равно разности квадратов двух натуральных чисел. 1°. N — **простое.** Пусть простое число N представлено в виде разности двух квадратов:

$$N=x^2-y^2=(x-y)(x+y).$$

Так как N делится лишь на 1 и N, то

$$x-y=1,\quad x+y=N,$$

откуда

$$x=\frac{N+1}{2},\qquad y=\frac{N-1}{2}.$$

Эти числа x и y — целые, так как N нечетно. Только одно простое число четно — это 2. Поэтому, всякое простое число, не равное 2, может быть представлено и притом только одним способом в виде разности квадратов двух натуральных чисел. 2°. N—**нечетное и непростое.** В этом случае имеется несколько способов представить такое число в виде произведения двух натуральных чисел; будем называть два таких множителя *ассоциированными делителями* числа N. Заметим, кроме того, что так как N нечетно, то оба ассоциированных делителя N нечетны. Пусть α и β — ассоциированные делители N, т. е. $N=\alpha\beta$. Пусть x и y — натуральные числа такие, что $N=x^2-y^2=(x-y)(x+y)$ и значит, если $\alpha>\beta$, то $x-y=\alpha$, $x+y=\beta$, откуда $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $y=\frac{\beta-\alpha}{2}$. Таким образом, если α и β — нечетные и не равны между собой, то x и y — натуральные числа, разность квадратов которых равна N. Таким образом всякой паре делителей, ассоциированных с N и не равных друг другу, соответствует представление N в виде разности квадратов двух натуральных чисел.

Итак существует столько способов представления нечетного непростого числа в виде разности квадратов двух натуральных чисел, сколько существует пар не равных друг другу делителей, ассоциированных с N.

Значит существует, по крайней мере, два представления числа N в виде разности квадратов двух натуральных чисел (одно из них соответствует паре 1, N) за исключением того случая, когда N есть квадрат простого числа; в последнем случае число N может быть представлено только одним способом в виде разности квадратов двух натуральных чисел.

Приложение I. $N = 25$. Число 25 есть квадрат простого нечетного числа, значит, N может быть представлено только одним способом в виде разности квадратов двух натуральных чисел: $25 = \left(\frac{25+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{25-1}{2}\right)^2 = 13^2 - 12^2$. .II $N = 125$. Имеется только два способа представления числа 125 в виде произведения двух различных множителей:

$$125 = 1 \cdot 125 = 5 \cdot 25,$$

и значит существует два, и только два, способа представления числа 125 в виде разности квадратов двух натуральных чисел:

$$125^2 = \left(\frac{125+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{125-1}{2}\right)^2 = 63^2 - 62^2,$$

и

$$125^2 = \left(\frac{25+5}{2}\right)^2 - \left(\frac{25-5}{2}\right)^2 = 15^2 - 10^2.$$

III. N-225. Число 225 может быть представлено в виде произведения двух различных множителей четырьмя способами:

$$225 = 1 \cdot 225 = 3 \cdot 75 = 5 \cdot 45 = 9 \cdot 25$$

и значит число 225 может быть представлено четырьмя и только четырьмя способами в виде разности квадратов двух натуральных чисел:

$$225 = \left(\frac{225+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{225-1}{2}\right)^2 = 113^2 - 112^2,$$

$$225 = \left(\frac{75+3}{2}\right)^2 - \left(\frac{75-3}{2}\right)^2 = 39^2 - 36^2,$$

$$225 = \left(\frac{45+5}{2}\right)^2 - \left(\frac{45-5}{2}\right)^2 = 25^2 - 20^2,$$

$$225 = \left(\frac{25+9}{2}\right)^2 - \left(\frac{25-9}{2}\right)^2 = 17^2 - 8^2.$$

3°. N — **четное.** Заметим, что если x и y натуральные, отличные друг от друга числа, то числа $x + y$ и $x - y$ имеют одинаковую четность и значит из равенства $N = (x + y)(x - y)$ следует, что оба эти числа $x + y$ и $x - y$ — четные (ибо N — четное), а значит число N делится на 4. Отсюда заключаем, что если N делится на 2, но не делится на 4, то такое число N не может быть представлено в виде разности квадратов двух натуральных чисел. Предположим поэтому, что N делится на 4. В таком случае число N

может быть, по крайней мере одним способом, представлено в виде произведения двух четных натуральных множителей:

$$N = 2\alpha \cdot 2\beta, \quad \text{где } \alpha \geqslant \beta.$$

Если x и y такие целые числа, что

$$x + y = 2\alpha \text{ и } x - y = 2\beta,$$

т. е.

$$x = \alpha + \beta, \quad y = \alpha - \beta,$$

то

$$N = (x + y)(x - y) = x^2 - y^2,$$

и число N представлено в виде разности квадратов двух натуральных чисел, если α не равно β.

Итак, для того, чтобы четное число N можно было представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел, необходимо и достаточно, чтобы: 1°. Число N делилось на 4; 2°. Число N можно представить в виде произведения двух четных, не равных друг другу множителей.

Четное число, не удовлетворяющее второму из этих условий, имеет вид произведения $2\alpha \cdot 2\alpha$, причем это единственное его представление в виде произведения двух четных множителей, отсюда $\alpha = 1$ и значит $N = 4$.

Окончательно. Среди всех четных чисел те могут быть представлены в виде разности квадратов двух натуральных чисел, которые делятся на 4 и отличны от числа 4.

Приложение. $N = 672$. Число 672 можно представить в виде произведения двух четных, отличных друг от друга, множителей следующими способами:

$$672 = 2 \cdot 336 = 4 \cdot 168 = 6 \cdot 112 = 8 \cdot 84 = 12 \cdot 56 =$$
$$= 14 \cdot 48 = 16 \cdot 42 = 24 \cdot 28,$$

и значит число 672 можно представить в виде разности квадратов натуральных чисел следующими и только следующими способами:

$$169^2 - 167^2, \quad 86^2 - 82^2, \quad 59^2 - 53^2, \quad 46^2 - 38^2,$$
$$34^2 - 22^2, \quad 31^2 - 17^2, \quad 29^2 - 13^2, \quad 26^2 - 2^2.$$

$N = 1344$ — это число равное $2 \cdot 672$ может быть представлено в виде произведения двух четных, не равных друг другу множителей следующими десятью способами:

$$2 \cdot 672 = 4 \cdot 336 = 6 \cdot 224 = 8 \cdot 168 = 12 \cdot 112 = 14 \cdot 96 = 16 \cdot 84 =$$
$$= 24 \cdot 56 = 28 \cdot 48 = 32 \cdot 42,$$

и значит число 1344 можно представить следующими, и только следующими, способами в виде разности квадратов натуральных чисел:

$$337^2 - 335^2, \quad 170^2 - 166^2, \quad 115^2 - 109^2 \quad 88^2 - 80^2,$$

$$62^2 - 50^2, \quad 55^2 - 41^2, \quad 50^2 - 34^2, \quad 40^2 - 16^2, \quad 38^2 - 10^2, \quad 37^2 - 5^2.$$

4°. Заметим, прежде всего, что число делителей числа $N = 2^m p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$, включая 1 и само число N, равно

$$D = (m+1)(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\ldots(\alpha_n+1) = (m+1)\prod_{i=1}^{i=n}(\alpha_i+1).$$

Теперь рассмотрим случай четного и нечетного N. **I. N нечетно:** $N = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$. На основании предыдущего число представления числа N в виде разности квадратов натуральных чисел равно числу пар неравных делителей N, ассоциированных с N, так как две различные пары делителей N, ассоциированные с N, дают два различных представления N в виде разности квадратов двух натуральных чисел, а каждое такое представление N соответствует некоторой паре делителей, ассоциированных с N.

Рассмотрим два случая. **1 случай. По крайней мере одно из чисел α_i — нечетное (N — не есть точный квадрат).** Число делителей числа N равно $D = \prod_{i=1}^{i=n}(\alpha_i+1)$ причем в рассматриваемом случае два делителя, ассоциированные с N, не могут быть равны между собой, поэтому число различных пар делителей (не равных между собой), ассоциированных с N, равно

$$S = \frac{1}{2}\prod_{i=n}^{i=n}(\alpha_i+1). \qquad (1)$$

2 случай. Все числа α_i четные (N точный квадрат). Делитель $\sqrt{N}$ должен быть исключен, он равен ассоциированному с ним, и значит, остается $-1+\prod_{i=1}^{i=n}(\alpha_i+1)$ подходящих делителей, поэтому в этом случае:

$$S = \frac{1}{2}\left[-1+\prod_{i=1}^{i=n}(\alpha_i+1)\right]. \qquad (2)$$

II. N — четное: $N = 2^m p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ ($m \geqslant 2$ и все α_i не равны нулю, если $m = 2$). Всякая пара четных делителей, ассоциированных с N, соответствует некоторому представлению N в виде разности квадратов двух натуральных чисел. Две различные пары таких делителей соответствуют двум различным представлениям числа N в виде разности квадратов двух натуральных чисел. Таким образом, число представлений числа N в виде разности квадратов двух натуральных чисел равно числу пар четных делителей, ассоциированных с N и различных между собой. Рассмотрим опять два случая. **1 случай. По крайней мере, одно из чисел m или α_i нечетное (N не есть точный квадрат).**

Точное число всех делителей числа N равно

$$D = (m+1)\prod_{i=1}^{i=n}(\alpha_i+1),$$

и значит число всех пар делителей, ассоциированных с N, равно $\frac{D}{2}$. Однако среди этих пар делителей надо исключить те, среди которых есть хотя бы один нечетный; число таких делителей равно $\prod_{i=1}^{i=n}(\alpha_i+1)$ (число делителей числа $p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$). Таким образом из числа всех пар надо исключить $\prod_{i=1}^{i=n}(\alpha_i+1)$ пар и значит

$$S=\frac{1}{2}(m+1)\prod_{i=1}^{i=n}(\alpha_i+1)-\prod_{i=1}^{i=n}(\alpha_i+1)$$

или

$$S=\frac{1}{2}(m-1)\prod_{i=1}^{i=n}(\alpha_i+1). \tag{3}$$

2 случай. ***m*** **и все числа** α_i **— четные (*N* — точный квадрат).** Делитель $\sqrt{N}$ в этом случае следует исключить. Число всех пар различных делителей, ассоциированных с N, равно $\frac{1}{2}(-1+D)$, но из этого числа надо исключить число пар $\prod_{i=1}^{i=n}(\alpha_i+1)$, ассоциированных с N и имеющих хотя бы один множитель нечетным. Окончательно: в этом случае:

$$S=\frac{1}{2}\left[-1+(m+1)\prod_{i=1}^{i=n}(\alpha_i+1)\right]-\prod_{i=1}^{i=n}(\alpha_i+1)$$

или

$$S=\frac{1}{2}\left[-1+(m-1)\prod_{i=1}^{i=n}(\alpha_i+1)\right]. \tag{4}$$

Замечание. Обозначим через $E(x)$ наибольшее целое число, меньшее или равное x. Тогда формулы (1), (2), (3), (4) можно объединить в виде одной формулы:

$$S=E\left(\left|\frac{1}{2}(m-1)\prod_{i=1}^{i=n}(\alpha_i+1)\right|\right), \tag{5}$$

эта формула годится для любого числа $N=2^m p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_n^{\alpha_n}$. Если $m=1$ или если $m=2$, а все α_i равны 0 (т. е если N равно 2 или 4), формула (5) дает $S=0$, что также соответствует случаю, исключенному из рассмотрения задачи.

Пусть, например, $N = 225 = 3^2 \cdot 5^2$, тогда

$$S = E\left(\left|-\frac{1}{2}(2+1)(2+1)\right|\right) = E\left(\frac{9}{2}\right) = 4.$$

Если $N = 125 = 5^3$, то $S = E\left(\left|-\frac{1}{2}\cdot 4\right|\right) = 2.$

Если $N = 1344 = 2^6 \cdot 3 \cdot 7$, то $S = E\left(\left|\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 2\cdot 2\right|\right) = 10.$

Если $N = 672 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7$, то $S = E\left(\left|\frac{1}{2}\cdot 4(1+1)(1+1)\right|\right) = 8.$

§ 2. Преобразование алгебраических выражений

1. 1) $(x+y)\left(x-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}y\right)\left(x-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}y\right)$.

2) $(x-y)\left(x-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}y\right)\left(x-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}y\right)$.

3) $(x+y)(x-y)(x+iy)(x-iy)$. 4) $x^4+y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2y^2 = (x^2+y^2)^2 - (xy\sqrt{2})^2 = (x^2+xy\sqrt{2}+y^2)(x^2-xy\sqrt{2}+y^2) = \left(x-\frac{1+i}{\sqrt{2}}y\right)\left(x-\frac{1-i}{\sqrt{2}}y\right)\left(x-\frac{-1+i}{\sqrt{2}}y\right)\left(x-\frac{-1-i}{\sqrt{2}}y\right)$.

5) $\left(x-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}y\right)\left(x-\frac{1-i\sqrt{3}}{2}y\right)\left(x-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}y\right)\times\left(x-\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}y\right)$.

2. $\frac{x}{x^8-1}$. **3.** $\frac{x^2-1}{x^4+x^3+x^2+x+1}$. **4.** $\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$.

5. $\frac{x}{(1+x)\sqrt{1-x-x^2}}$. **6.** $\frac{x^3}{\sqrt{1+2x-x^2}}$.

7. $\frac{x^2}{(4-2x+x^2)\sqrt{2+2x-x^2}}$. **8.** $\frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

9. 1) $\frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$; 2) $\frac{-3+7\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}}{23}$;

3) $1+3\sqrt[4]{2}+2\sqrt{2}-\sqrt[4]{8}$. **10.** $p+q^2+1=0$, $m=q$.

11. 1) $q=p-1$, $m=0$; 2) $q=1$, $m=\pm\sqrt{2-p}$.

12. 1) $(x+1+i)[4x^2-(3+4i)x+(-1+7i)]+8-6i$;

2) $(x-1+2i)(x^2-2ix-5-2i)-9+8i$.

13. 1) $(x-1)(x-2)(x-3)$; 2) $(x-1-i)(x-1+i)(x+1-$
$-i)(x+1+i)$; 3) $x^4+4x^3+4x^2+1=f_1f_2f_3f_4$,

где

$$f_1=x+1-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}},$$

$$f_2=x+1-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}},$$

$$f_3=x+1+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}+i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}},$$

$$f_4=x+1+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}-i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}};$$

4) $(x-\sqrt{3}-\sqrt{2})(x-\sqrt{3}+\sqrt{2})(x+\sqrt{3}-$
$-\sqrt{2})(x+\sqrt{3}+\sqrt{2})$.

14. $x_1=\frac{1}{6}$, $x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=-\frac{1}{3}$. **15.** $q^3+pq+q=0$.

§ 3. Уравнения. Неравенства. Функции и их графики.

4. Для того чтобы имело место предложенное тождество, необходимо и достаточно, чтобы имело место следующее тождество

$$px^2+qx+r\equiv A(x-b)(x-c)+B(x-a)(x-c)+$$
$$+C(x-a)(x-b).$$

Слева и справа находятся целые рациональные функции второй степени. Можно доказать, что необходимым и достаточным признаком равенства двух целых рациональных функций степени n является равенство их значений для $n+1$ различных значений аргумента (эта теорема вытекает сразу из следующей: уравнение $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n=0$ имеет не более n различных между собою корней). Подставляя в последнее равенство $x=a$, $x=b$, $x=c$, найдем

$$A=\frac{pa^2+qa+r}{(a-b)(a-c)},\quad B=\frac{pb^2+qb+r}{(b-c)(b-a)},\quad C=\frac{pc^2+qc+r}{(c-a)(c-b)}.$$

На основании указанной теоремы при этих значениях A, B и C указанное равенство будет тождеством. Можно было решать эту задачу и иначе; для того чтобы были равны две целые рациональные функции, необходимо и достаточно, чтобы были равны их соответствующие коэффициенты. Поэтому можно было раскрыть скобки в правой части предполагаемого тождества и приравнять соответствующие коэффициенты при x^2, x и $x0$ слева и справа. Из полученных трех уравнений для A, B и C эти последние и будут определены. 5. Эту задачу можно было решать методом, указанным в конце решения предыдушей задачи. Однако лучше следовать первому способу:

$$x^3+bx^2+cx+d=(Ax+B)(x^2+rx+s)+ \\ +(Cx+D)(x^2+px+q). \qquad (A)$$

Подставим в это равенство вместо x любой из корней уравнения $x^2+rx+s=0$. Тогда получим

$$x^3+bx^2+cx+d=(Cx+D)(x^2+px+q).$$

Далее

$$x^2=-rx-s, \quad x^3=-rx^2-sx,$$

значит

$$x^3+bx^2+cx+d=-rx^2-sx+bx^2+cx+d= \\ =(b-r)x^2+(c-s)x+d$$

и то, $x^2=-rx-s$, так как

$$(b-r)x^2+(c-s)x+d=-r(b-r)x-s(b-r)+ \\ +(c-s)x+d=[c-s-r(b-r)]x+d-s(b-r).$$

Далее

$$(Cx+D)(x^2+px+q)=(Cx+D)(-rx-s+px+q)= \\ =(Cx+D)[(p-r)x+q-s]=C(p-r)x^2+[D(p-r)+ \\ +C(q-s)]x+D(q-s)=C(p-r)(-rx-s)+[D(p-r)+ \\ +C(q-s)]x+D(q-s)=[D(p-r)+C(q-s)-rC(p-r)]x+ \\ +D(q-s)-sC(p-r).$$

Докажем теперь лемму: если $\alpha x+\beta=\gamma x+\delta$, числа α, β, γ, δ — действительны, а $x=u+iv$ — мнимое (u и v — действительны), то $\alpha=\gamma$ и $\beta=\delta$. В самом деле $\alpha(u+iv)+\beta=\gamma(u+iv)+\delta$, $\alpha u+\beta+iv\alpha=\gamma u+\delta+iv\gamma$, значит, $v\alpha=v\gamma$ и так как $v\neq 0$, то $\alpha=\gamma$, но тогда из равенства $\alpha x+\beta=\gamma x+\delta$ следует $\beta=\delta$. На основании этой леммы:

$$c-s-r(b-r)=D(p-r)+C[q-s-r(p-r)], \qquad (1)$$

$$d-s(b-r)=D(q-s)-Cs(p-r).$$

Определитель этой системы (относительно C и D) равен $\Delta=(q-s)^2-r(p-r)(q-s)+s(p-r)^2$. Так как корни трехчлена x^2+rx+s мнимые, то $\Delta\geqslant 0$, причем $\Delta=0$ только при $p=r$, $q=s$, что исключается. Итак, $\Delta\neq 0$.

Отметим, что мы получим ту же самую систему (1), если вместо x подставим корень, сопряженный тому корню трехчлена x^2+rx+s, который мы подставили сначала. Таким образом система (1) имеет и притом только одно решение относительно C и D, и при этих C и D соотношение (A)

будет обращаться в равенства при $x=x_1$ и $x=x_2$, где x_1 и x_2 корни трехчлена x^2+rx+s. Аналогично составляется система для A и B и находятся их значения, при которых (и только при которых) соотношение (A) обратится в равенство при $x=x_3$ и $x=x_4$, где x_3 и x_4 — корни трехчлена x^2+px+q. Таким образом существует единственная система чисел A, B, C, D, при которых соотношение (A) обращается в равенство при $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$, $x=x_4$. Но так как x_1, x_2, x_3, x_4 попарно различны, то при найденных A, B, C, D соотношение (A) будет тождеством. Вычисление C и D, а также A и B рекомендуется произвести читателю.

6. $x^2+x\sqrt{2}+1=0$, $(Ax+B)\left(x^2-x\sqrt{2}+1\right)=1$,

$$\text{но } x^2=-x\sqrt{2}-1, \text{ значит, } (Ax+B)(-2x\sqrt{2})=1,$$

$$-2\sqrt{2}Ax^2-2\sqrt{2}Bx=1, \quad -2\sqrt{2}(-x\sqrt{2}-1)A-$$

$$-2\sqrt{2}Bx=1, \ \left(4A-2\sqrt{2}B\right)x+2\sqrt{2}A=1, \quad A=\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$B=\frac{4A}{2\sqrt{2}}=A\sqrt{2}=\frac{1}{2}; \text{ далее: } x^2-x\sqrt{2}+1=0,$$

$$(Cx+D)(x^2+x\sqrt{2}+1)=1, \ (Cx+D)2\sqrt{2}x=1,$$

$$2\sqrt{2}Cx^2+2\sqrt{2}Dx=1, \ 2\sqrt{2}C\left(x\sqrt{2}-1\right)+2\sqrt{2}Dx=1,$$

$$\left(4C+2\sqrt{2}\,D\right)x-2\sqrt{2}C=1, \quad C=-\frac{1}{2\sqrt{2}},$$

$$D=-\frac{4C}{2\sqrt{2}}=-\sqrt{2}C=\frac{1}{2}.$$

Итак,

$$A=\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad B=\frac{1}{2}, \quad C=-\frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad D=\frac{1}{2}.$$

8. $-\dfrac{1}{x}+\dfrac{7}{x+1}+\dfrac{3}{(x+1)^2}-\dfrac{6x+2}{x^2+x+1}-\dfrac{3x+2}{(x^2+x+1)^2}$.

Решение. Положим

$$\frac{2x-1}{x(x+1)^2(x^2+x+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+$$

$$+\frac{Ex+F}{x^2+x+1}+\frac{Gx+H}{(x^2+x+1)^2},$$

$$2x-1=A(x+1)^2(x^2+x+1)^2+Bx(x+1)(x^2+x+1)^2+$$
$$+C(x^2+x+1)^2x+(Ex+F)x(x+1)^2(x^2+x+1)+$$
$$+(Gx+H)x(x+1)^2. \qquad (1)$$

Полагая $x=0$, найдем $A=-1$; полагая $x=-1$, найдем $C=3$. Подставляя $A=-1$ и $C=3$ в (1) получим

$$2x-1+(x+1)^2(x^2+x+1)^2-3x(x^2+x+1)^2=$$
$$=Bx(x+1)(x^2+x+1)^2+(Ex+F)x(x+1)^2(x^2+x+1)+$$
$$+(Gx+H)x(x+1)^2$$

или

$$x^6+x^5+2x^4+x^3+2x^2+3x=Bx(x+1)(x^2+x+1)^2+$$
$$+(Ex+F)x(x+1)^2(x^2+x+1)+(Gx+H)x(x+1)^2.$$

Сокращая на $x(x+1)$, получим

$$x^4+2x^2-x+3=B(x^2+x+1)^2+(Ex+F)(x+1)(x^2+$$
$$+x+1)+(Gx+H)(x+1).$$

Если тождеством будет это равенство, то тождеством будет и равенство (1).

Полагая $x=-1$, найдем $B=7$, и значит,

$$x^4+2x^2-x+3-7(x^2+x+1)^2=(Ex+F)(x+1)+$$
$$=(Ex+F)(x+1)(x^2+x+1)+(Gx+H)(x+1)$$

или

$$-6x^4-14x^3-19x^2-15x-4=$$
$$=(Ex+F)(x+1)(x^2+x+1)+(Gx+H)(x+1).$$

Сокращая на $x+1$, получим:

$$-6x^3-8x^2-11x-4=(Ex+F)(x^2+x+1)+Gx+H.$$

Если при известном выборе E, F, G, H — это равенство будет тождеством, то и равенство (1) будет тождеством.

Теперь подставим сюда корень уравнения

$$x^2+x+1=0; \quad \text{тогда} \quad x^3=-x^2-x,$$
$$-6x^3-8x^2-11x-4=-6(-x^2-x)-8x^2-11x-4=$$
$$6x^2+6x-8x^2-11x-4=-2x^2-5x-4=$$
$$=-2(-x-1)-5x-4=2x+2-5x-4=-3x-2,$$

и мы получим

$$-3x-2=Gx+H,$$

откуда

$$G=-3, \quad H=-2.$$

Тогда

$$-6x^3-8x^2-11x-4+3x+2=(Ex+F)(x^2+x+1),$$
$$-6x^3-8x^2-8x-2=(Ex+F)(x^2+x+1).$$

Сокращая на x^2+x+1, получим:

$$-6x-2=Ex+F.$$

Если при известном выборе E и F, это равенство будет тождеством, то будут тождествами и все предыдущие равенства. Но последнее равенство будет тождеством тогда и только тогда, когда $E=-6$, $F=-2$. **9.** 1) $\frac{2x+p}{x^2+px+q}$; 2) $\frac{-px-2q}{x^2+px+q}$;

3) $\frac{2x^2+2px+p^2-2q}{x^4+2px^3+(p^2-2q)x+2pqx+q^2}$.

12. $\pm\sqrt{\frac{\sqrt{q}}{2}-\frac{p}{4}}\pm i\sqrt{\frac{\sqrt{q}}{2}+\frac{p}{4}}$. **13.** 1) $x_1=3-i$; $x_2=-1+2i$; 2) $x_1=1-i$, $x_2=\frac{4-2i}{5}$; 3) $1\pm 2i$, $-4\pm 2i$; 4) $\pm 4\pm i$. **14.** Перепишем данное уравнение в виде:

$$a(ax^2+bx+c)=0.$$

Если $a(a\lambda^2+b\lambda+c)<0$, то λ лежит между корнями x_1 и x_2. Если $a(a\lambda^2+b\lambda+c)>0$ и $a(2a\lambda+b)<0$, то λ меньше меньшего корня, а если $a(a\lambda^2+b\lambda+c)>0$ и $a(2a\lambda+b)<0$, то λ больше большего корня. **15.** Пусть $q>0$; тогда $x_1<0<x_2<x_3$. 1) В этом случае $\lambda<x_1$ тогда и только тогда, когда $\lambda<0$ и $\lambda^3+p\lambda+q<0$; 2) условие $x_1<\lambda<x_2$ будет выполнено тогда и только тогда, когда или $\lambda\leqslant 0$ и $\lambda^3+p\lambda+q>0$, или, если $\lambda>0$, $\lambda^3+p\lambda+q>0$ и $3\lambda^2+p<0$; 3) условие $x_2<\lambda<x_3$ будет выполнено в случае $\lambda>0$, $\lambda^3+p\lambda+q<0$ и наконец 4) условие $\lambda>x_3$ будет выполнено, если $\lambda>0$, $\lambda^3+p\lambda+q>0$, $3\lambda^4+p>0$. **16.** $p^2\geqslant 4q$, $1\pm p+q>0$, $|p|<2$. **17.** Если корни мнимые, то $|q|<1$. **21.** 1) Если $p>0$, то функция $x^3+3px+q$ возрастающая на всей числовой оси; если $p<0$, то в полуинтервале $(-\infty, -\sqrt{-p}]$ эта функция возрастает, на сегменте $[-\sqrt{-p}, \sqrt{-p}]$ — убывает, на полуинтервале $[\sqrt{-p}, +\infty)$ — возрастает. В полуинтервале $(-\infty, 0]$ функция имеет выпуклость вверх, а в полуинтервале $[0, +\infty)$ — вниз. **22.** 1) $x<2$ и $x>3$; 2) $x<-2$, $x>1$; 3) $-3<x<-2$, $0<x<1$; 4) $x<-1$ и $x>1$; 5) $-2<x<2$; 6) $0<x<\frac{1}{3}$; 7) $-1<x<1-\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}<x<3$; 8) $\frac{1}{4}<x<\frac{5}{2}$, $x\neq 1$.

§ 4. Прогрессии. Суммирование

1. а) $\frac{2(2\cos x-1)}{5-4\cos x}$, б) $\frac{4\sin x}{5-4\cos x}$. **2.** Верны **3.** $|q|<1$.

4. $\frac{1}{(1-q)^2}$. **5.** $y=(a_2-a_1)x+a_1$, $x=0, 1, 2, \ldots$

6. $y=a_1\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^x$, $x=0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

7. $a_n=C_1+C_2\left(\frac{-1+i\sqrt{2}}{3}\right)^n+C_3\left(\frac{-1-i\sqrt{2}}{3}\right)^n$,

где C_1, C_2, C_3 определяются из системы уравнений:

$$C_1+C_2\frac{-1+i\sqrt{2}}{3}+C_3\frac{-1-i\sqrt{2}}{3}=a_1,$$

$$C_1+C_2\left(\frac{-1+i\sqrt{2}}{3}\right)^2+C_3\left(\frac{-1-i\sqrt{2}}{3}\right)^2=a_2,$$

$$C_1+C_2\left(\frac{-1+i\sqrt{2}}{3}\right)^3+C_3\left(\frac{-1-i\sqrt{2}}{3}\right)^3=a_3.$$

8. $a_{n+1}=2\cos x\cdot a_n-a_{n-1}$. 9. 1) $\lg\frac{n+2}{2(n+1)}$,

2) $\frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-\operatorname{ctg}x$, 3) $tg1-\operatorname{tg}\frac{1}{n+1}$; 4) $1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

§ 5. Логарифмы

1. $b>0$, $a>0$, $a\neq 1$. 2. $2\lg|a|+4\lg|b|$. 3. 1) $0<x<1$; 2) $-\frac{5}{2}<x<-2$, $x>-1$; 3) $x>1$, $x<-1$; 4) $x>1$; 5) $-1<x<1$; 6) $-1<x<1$; 7) $x<\frac{1}{10}$, $x>10$.

4. 1) $x>lg_2\frac{\sqrt{13}-1}{2}$. 2) $x>0$ причем $x\neq-3$; 3) неравенство решений не имеет, т. е. $\lg_{x^2+1}x^2<2$ при всех (действительных) значениях x. 5. Корней нет. 6. Геометрический смысл неравенства: график имеет выпуклость вниз.

§ 6. Тригонометрические уравнения, неравенства и тождества

10. $\alpha\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k — любое целое число, $\beta\neq(2s+1)\frac{\pi}{2}$, где s — любое целое число, $\alpha-\beta\neq(2p+1)\frac{\pi}{2}$, где p — любое целое число. При выполнении этих условий $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ существуют, $1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\neq 0$ и формула имеет место. Если же не выполнено хотя бы одно из указанных выше условий, то формула, указанная в условии задачи, не имеет места. 11. 1) Функция $y=\arcsin x$ определена на сегменте $[-1,1]$; на этом сег-

менте она возрастающая; на сегменте $[-1{,}0]$ она выпукла вверх, а на сегменте $[0{,}1]$ — вниз. 2) Функция $y = \arccos x$ определена на сегменте $[-1{,}1]$ и убывает на нем; она выпукла вниз на сегменте $[-1{,}0]$ и вверх на сегменте $[0{,}1]$. 3) Функция $y = \operatorname{arc\,tg} x$ определена на всей числовой оси, и эта функция возрастающая; на полуинтервале $(-\infty, 0]$ она выпукла вниз, на полуинтервале $[0, +\infty)$ — вверх. 4) Функция $y = \operatorname{arc\,ctg} x$ определена на всей числовой оси, и она убывающая, на полуинтервале $(-\infty, 0]$ она выпукла вверх, а на полуинтервале $[0, +\infty)$ — вниз.

12. Оба положения верны. **13.** Неверно. **14.** $\frac{\pi}{2} + k\pi$, где k — любое целое число. **22.** Достаточно исследовать данную функцию на сегменте $[0, \pi]$, т. е. в пределах одного периода π данной функции. Можно даже ограничиться исследованием функции на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, так как значения функции для значений x, симметричных относительно $x = \frac{\pi}{2}$, равны между собой. Полагая $\cos^2 x = z$ и считая $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, получим $y = 2z^2 - 3z + 1$, где $0 \leqslant z \leqslant 1$. Эта функция на сегменте $0 \leqslant z \leqslant \frac{3}{4}$ убывает от 1 до $-\frac{1}{8}$, а на сегменте $\frac{3}{4} \leqslant z \leqslant 1$ возрастает от $-\frac{1}{8}$ до 0. Учитывая, что $z = \cos^2 x$ и что при возрастании x от 0 до $\frac{\pi}{2}$, z убывает от 1 до 0, заключаем, что данная функция на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ $\left(\text{из } z = \frac{3}{4} \text{ следует } \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2},\ x = \frac{\pi}{6}\right)$ убывает от 0 до $-\frac{1}{8}$, а на сегменте $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$ возрастает от $-\frac{1}{8}$ до 1. На сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ имеются два корня данной функции $x = 0$ и $x = \frac{\pi}{4}$. Отсюда легко построить график.

§ 7. Трансцендентные уравнения и неравенства

1. $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \pm \arccos \frac{a^2}{\sqrt{2}}$. **2.** $x = 1$. **3.** $x = \sin 1$. **4.** $x = k\pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{8}$. **5.** Если считать основание логарифма всегда положительным, то $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$, $x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$. **6.** $x = k\pi \pm \arcsin \frac{\lg 3}{\lg(\sqrt{2} + \sqrt{3})}$. **7.** $\sin x = 2^{-\sqrt{\frac{1}{2}\lg_2 3}}$. **8.** $x_{1,2} =$

$= \pm \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{10}$, $x_3 = 0$, 9. $x = 10^{2k + \frac{1}{4}}$, где k — любое целое число. 10. Корнем является любое число, кроме $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$ и $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. 11. $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$. 12. $x = 2^{\frac{2}{3 + 2\lg_3 2}}$. 13. $x_1 = 0$, $x_2 = -1$.

14. $x_{1,2} = \operatorname{tg}\frac{\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 160a}}{4}$, если $10a \leqslant \frac{\pi^2}{16}$; если $10a > \frac{\pi^2}{16}$, уравнение не имеет корней. 15. 1. 16. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. 17. $x = 10^{\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}}$. 18. $x = (rk + 1)\pi$, где k — любое целое число. 19. $x = 2k\pi$, $x = k\pi + (-1)^u\frac{\pi}{6}$, где k — любое целое число. 20. $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$, где k — любое целое число. 21. $x = -3$. 22. $x = \frac{1}{2}\lg_5 3$. 23. *Решение.* $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{arctg} y) = 1$, $\pi \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $\operatorname{arctg} x = \frac{1}{4} + k$, k — целое число. Так как $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$, то k может принимать лишь следующие значения: $k = -1$, $k = 0$, $k = 1$; отсюда $x_1 = -\operatorname{tg}\frac{3}{4}$, $x_2 = \operatorname{tg}\frac{1}{4}$, $x_3 = \operatorname{tg}\frac{5}{4}$. 24. Данное уравнение имеет 10 корней: $x_1 = \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{1}{6}}$, $x_2 = \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{13}{6}}$,

$$x_3 = \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{25}{6}},\quad x_4 = \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{37}{6}},\quad x_5 = \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{49}{6}},$$

$$x_6 = \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{5}{6}},\quad x_7 = \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{17}{6}},\quad x_8 = \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{29}{6}},$$

$$x_9 = \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{41}{6}},\quad x_{10} = \operatorname{ctg}\sqrt{\frac{53}{6}}.$$

25. $0 < x < a^2$ или $1 < x < \frac{1}{a^3}$. 26. $2 < x < 3$. 27. $0 < x < 2 - \lg_2 3$ и $x > 1$.

28. $1 < x < 10$. 29. $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{\sqrt{a}}\right)$, $\left(\frac{1}{a^2}, \frac{1}{\sqrt[3]{a^4}}\right)$, $(1, +\infty)$.

30. $1 < x < 2$. 31. $-1 < x < 1$ или $3 < x < 5$. 32. $\lg_{x+p} 2 < \lg_x 4$,

$$0<p<\frac{1}{4}, \quad \frac{1}{\lg_2(x+p)}<\frac{2}{\lg_2 x}, \quad \frac{2}{\lg_2 x}-\frac{1}{\lg_2(x+p)}>0,$$

$$\frac{2\lg_2(x+p)-\lg_2 x}{\lg_2 x \lg_2(x+p)}>0, \quad \frac{\lg\frac{(x+p)^2}{x}}{\lg_2 x \lg_2(x+p)}>0.$$

Прежде всего должно быть $x>0$. Далее: 1) $\lg_2 x>0$, если $x>1$ и $\lg_2 x<0$, если $0<x<1$; 2) $\lg_2(x+p)>0$, если $x+p>1$, т. е. $x>1-p$ и $\lg_2(x+p)<0$, если $0<x+p<1$, т. е. $0<x<1-p$; 3) $\lg\frac{(x+p)^2}{x}>0$, если $\frac{(x+p)^2}{x}>1$, и так как $x>0$, то это неравенство эквивалентно следующему: $(x+p)^2>x$, $x^2+(2p-1)x+$ $+p^2>0$. Корни этого трехчлена $x_{1,2}=\frac{1}{2}-p\pm\sqrt{\frac{1}{4}-p}$ действительны и различны $\left(0<p<\frac{1}{4}\right)$. Далее $x_1x_2=p^2$, $x_1+x_2=$ $=1-2p$. Так как $x_1+x_2>0$ и $x_1x_2>0$, то оба корня положительны. Докажем, что оба они меньше, чем $1-p$. В самом деле: $x_1+x_2=1-2p=1-p-p<1-p$. Значит оба корня меньше, чем $1-p$. Пусть x_1 — меньший корень, а x_2 — больший. Тогда $\lg_2\frac{(x+p)^2}{x}>0$, если $0<x<x_1$ или $x>x_2$; $\lg_2\frac{(x+p)^2}{к}<0$, если $x_1<x<x_2$. Таким образом данное неравенство будет выполнено, если 1) $0<x<$ $<\frac{1}{2}-p-\sqrt{\frac{1}{4}-p}$ или 2) $\frac{1}{2}-p+\sqrt{\frac{1}{4}-p}<x<1-p$, или 3) $x>1$.

Глава IV

ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

§ 1. Алгебра

2. 1°. $y=\text{const}$, если $a=1$ или, если $b=0$, $a=-1$. 2°. y не меняет знака в двух случаях: или если числитель и знаменатель имеют мнимые корни, или если числитель и знаменатель обращаются в нуль при одних и тех же значениях x. В последнем случае $y=\text{const}$, что совпадает с исследованным уже случаем 1°.

В первом случае должно быть выполнено условие $b^2<4a$. 3°. $(a+1)^2-b^2>0$. 4°. $a=\frac{mc^2+1}{c^2+m}$, $b=\frac{-2c(m+c)}{c^2+m}$; ограничения на m таковы: $m\neq-c^2$ и $-1<m<1$. 3. 1°. На полуинтервале $(-\infty, 0]$ y возрастает от $-\infty$ до 0; на полуинтервале $[0, 1)$ y убывает от 0 до $-\infty$; на полуинтервале $\left(1, \frac{5}{2}\right]$ y убывает от $+\infty$ до $\frac{125}{4}$; на сегменте $\left[\frac{5}{2}, 4\right]$ y возрастает от $\frac{125}{4}$ до 32; на полуинтервале $[4, +\infty)$ y убывает от 32 до $-\infty$. 2°. $x_1 = 10$, $y_1 = 0$; система имеет еще два действительных решения, если $m^2 + 4m > 0$. Если $m = -4$ или $m = 0$ система имеет два действительных решения. 3°. Линия (P) есть парабола $Y = -2X(X-10)$. Вершина этой параболы $(5{,}50)$. 4°. *Указание:*

$$y = -x^2 + 9x + 9 - \frac{9}{1-x}.$$

Отсюда целые решения: (0, 0), (2, 32), (4, 32), (10, 0), (—2, —10) и (—8, —128). 4. 1°. Если $-\frac{1}{2} < a < 3$, то на интервале $(-\infty, -a)$ функция убывает, на интервале $(-a, +\infty)$ — тоже. Если или $a < -\frac{1}{2}$ или $a > 3$, то

в полуинтервале $\left(-\infty, -a - \sqrt{\frac{2a^2 - 5a - 3}{2}}\right]$ y убывает,

в полуинтервале $\left[-a - \sqrt{\frac{2a^2 - 5a - 3}{2}}, a\right)$ — возрастает,

в полуинтервале $\left(a, -a + \sqrt{\frac{2a^2 - 5a - 3}{2}}\right]$ — возрастает,

в полуинтервале $\left[-a + \sqrt{\frac{2a^2 - 5a - 3}{2}}, +\infty\right)$ — убывает.

При $x = -a - \sqrt{\frac{2a^2 - 5a - 3}{2}}$ функция имеет минимум равный 0, при $x = -a + \sqrt{\frac{2a^2 - 5a - 3}{2}}$ — максимум равный 0. При $a = -\frac{1}{2}$ или $a = 3$, $y = -2$ при всех x. Фиксированные точки, через которые проходят все кривые $(-3, 0)$ и $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. 2°. Если $a = -1$, то в полуинтервале $(-\infty, 1-\sqrt{2}]$ y убывает от $+\infty$ до $-9 + 4\sqrt{2}$; в полуинтервале $[1-\sqrt{2}, 1)$ y возрастает от $-9 + 4\sqrt{2}$ до $+\infty$; в полуинтервале $(1, 1+\sqrt{2}]$ y возрастает от $-\infty$ до $-9 - 4\sqrt{2}$; в полуинтервале $[1+\sqrt{2}, +\infty)$ y убывает от $-9 - 4\sqrt{2}$ до $-\infty$. 3°. $Y - y = \frac{4}{x-1} \to 0$ при $|x| \to +\infty$. 4°. Два корня, если $m < -9 - 4\sqrt{2}$; двойной корень $(x = 1 + \sqrt{2})$, если $m = -9 - 4\sqrt{2}$; действительных корней нет, если $-9 - 4\sqrt{2} < m < -9 + 4\sqrt{2}$; двойной корень $(x = 1 - \sqrt{2})$, если $m = -9 + 4\sqrt{2}$; два различных действительных корня, если $m > -9 + 4\sqrt{2}$ (для графического решения предварительно построить график функции $y = -2x - 7 - \frac{4}{x-1}$. 5. (Π_1) — прямая $y = 2x + 4$, проходящая через точки $A(-2, 0)$, $B(0, 4)$; (Π_3) — парабола $y = 2x^2 + 6x + 4$ с вершиной $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$; она проходит через точки A и B; (Π_{-1}) — парабола $y = -2x^2 - 2x + 4$ с вершиной $\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$; она также проходит через точки A и B, как и вообще все кривые (Π_m).

Если $m \neq 1$, то (Π_m) — парабола и она пересекает ось Ox в точке $\left(\frac{2}{1-m}, 0\right)$ и в точке $(-2, 0)$.

Кривая (Π_2) касается оси Ox в точке A (ее вершине).

Парабола (Π_m) с вершиной в B есть (Π_0).

Параболы (Π_0) и (Π_2) имеют уравнения

$$y = -x^2 + 4, \quad (\Pi_0)$$

$$y = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2. \quad (\Pi_2)$$

Их вершины B и A, а так как они равны и направлены выпуклостью одна вверх, другая вниз, то они симметричны относительно середины AB. 7. 1°. Или $m \leqslant -1$, или $m \geqslant 7$. 2°. $m < -2$. Если $(C') = (C'')$, то они совпадают. 3°. Окружности (C') и (C'') касаются внешне тогда и только тогда, когда $m < -2$. Сумма корней $s = m - 1$ тогда отрицательна, значит, если x' — положительный корень, а x'' — отрицательный, то $|x''| > |x'|$. Значит $OM'' > OM'$.

Ответ: $T'T'' = 2\sqrt{-m-2}$. Поверхность, полученная вращением $T'T''$ вокруг оси Ox, равна $\pi\Delta$, где Δ — дискриминант данного уравнения. 8. 1°. Дискриминант уравнения $\Delta' = 2x - y - 2$. Он равен нулю для точек прямой $2x - y - 2 = 0$; эта прямая (C_1) проходит, например, через точки $A(-1,4)$ и $B(1,0)$. Прямая (C_1) делит плоскость на две части; для полуплоскости, в которой лежит начало координат $\Delta' < 0$ и значит $\Delta' < 0$ для всех точек той полуплоскости (I) от прямой (C_1), где лежит начало координат; для точек другой полуплоскости (II), $\Delta' > 0$ и оба корня действительны. 2°. $y + x^2 + 3 = 0$ — парабола. Вершина $D(0, -3)$; выпуклость вверх; проходит через точку A. Так как для точек данной параболы (C_2) уравнение (1) имеет действительный корень $(z = 0)$, то вся парабола (C_2) расположена в области (II), а так как она проходит через A, то прямая (C_1) касается параболы (C_2) в точке A 3°. $2x - y - 2 \geqslant 0$, $1 + x = 0$. Линия (C_3) есть луч прямой $x + 1 = 0$, граничной точкой которого является точка A и который лежит в области (II). 4°. Вопрос сводится к исследованию знака дискриминанта $\Delta' = 2x - y - 2$, произведения $p = y + x^2 + 3$ корней и их суммы $s = 2(1 + x)$. Знак Δ' уже изучен. Далее: $p > 0$ для точек M, расположенных в той области относительно параболы (C_2), где лежит начало координат; $p < 0$ — для внутренних точек параболы. Далее, $s > 0$ для точек M, расположенных по ту сторону от прямой $x + 1 = 0$, где лежит начало координат.

Линии (C_2) и (C_3) делят область II на 4 части, которые мы занумеруем (слева направо) так: **1**, **2**, **3**, **4**. а) Если точка M лежит в области 1— корни мнимые. b) Если точка M лежит на части прямой (C_1), ограничивающей область 1, то $\Delta' = 0$, $p > 0$, $s < 0$ — уравнение имеет двойной отрицательный корень. c) Если M лежит в области 1, то $\Delta' > 0$, $p > 0$, $s < 0$ — уравнение имеет два отрицательных корня. d) Если M лежит на части параболы (C_2), отделяющей области 1 и 2, то $\Delta' > 0$, $p = 0$, $s < 0$ — уравнение имеет один корень равный нулю и один отрицательный корень. e) Если точка M лежит в области 2, то $\Delta' > 0$, $p < 0$, $s < 0$; уравнение имеет корни разных знаков, причем больший по абсолютной величине — отрицательный корень. f) Если M лежит на (C_3), то $\Delta' > 0$, $p < 0$, $s = 0$. Уравнение имеет действительные корни противоположных знаков. g) Если M лежит в области 3, то $\Delta' > 0$, $p < 0$, $s > 0$. Уравнение имеет действительные корни разных знаков. Бóльшую абсолютную величину имеет положительный корень. h) Если M лежит на части линии (C_2), отделяющей области 3 и 4, то $\Delta' > 0$, $p = 0$, $s > 0$. Уравнение имеет один корень равный нулю и один положительный корень. i) Если M лежит в области 4, то $\Delta' > 0$, $p > 0$, $s > 0$. Уравнение имеет два положительных корня. j) Если M лежит на части линии (C_1), являющейся границей области 4, то $\Delta' = 0$, $p > 0$, $s > 0$. Уравнение имеет двойной положительный корень. k) Если M совпадает с A, то $z' = z'' = 0$. 5°. Условие $z'' = -2z'$ приводит к уравнению:

$$y = -9x^2 - 16x - 11.$$

Обратно. Если $y = -9x^2 - 16x - 11$, то данное уравнение имеет корни $z' = -2(1 + x)$ и $z'' = 4(1 + x)$. Линия (C_4) есть парабола с вершиной $E\left(-\frac{8}{9}, -\frac{35}{9}\right)$, проходящая через A. Для точек этой параболы корни действительны, поэтому парабола (C_4) так же, как и (C_2), касается прямой (C_1) в точке A. 9. 1°. Последовательность u:

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34, \ldots$$

(«ряд» Фибоначчи).

Последовательность U:

$$a,\quad b,\quad a + b,\quad a + 2b,\quad 2a + 3b,\quad 3a + 5b,\quad 5a + 8b,\quad 8a + 13b,$$
$$13a + 21b,\quad 21a + 34b, \ldots$$

Для выражения U_n через u_{n-1}, u_n, a и b составим рекуррентное соотношение:

$$U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \quad (n = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$$

и соответствующее ему характеристическое уравнение:

$$x^2 - x - 1 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Отсюда *общее* решение:

$$U_n = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Так как $U_0 = a$, $U_1 = b$, то

$$C_1 + C_2 = a,$$

$$C_1 \frac{1+\sqrt{5}}{2} + C_2 \frac{1-\sqrt{5}}{2} = b,$$

следовательно,

$$C_1 = \frac{b}{\sqrt{5}} - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} a, \quad C_2 = -\frac{b}{\sqrt{5}} + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} a,$$

и значит,

$$U_n = \left(\frac{b}{\sqrt{5}} - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} a\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(-\frac{b}{\sqrt{5}} + \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} a\right) \times$$

$$\times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = b\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] +$$

$$+ a\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right].$$

В частности, при $a = 0$, $b = 1$:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

и следовательно, $U_n = bu_n + au_{n-1}$. 2°. Последовательность s:

$$0,\ 1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 12,\ 20,\ 33,\ 54,\ 88, \ldots$$

Из соотношения

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

имеем:

$$u_2 = u_1 + u_0,$$
$$u_3 = u_2 + u_1,$$
$$u_4 = u_3 + u_2,$$
$$\cdots\cdots$$
$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Складывая, получим:

$$s - u_0 - u_1 + u_{n+1} + u_{n+2} = s - u_0 + u_{n+1} + s;$$

отсюда

$$s = u_{n+2} - 1.$$

Соотношение $u_{n+1} u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$ следует из

$u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$. 3°. Последовательность r:

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{5}{8},\ \frac{8}{13},\ \frac{13}{21},\ \frac{21}{34},\ \frac{34}{55}, \ldots$$

или приблизительно:

$$\begin{gathered}0{,}0000;\\1{,}0000;\\0{,}5000;\\0{,}6667;\\0{,}6000;\\0{,}6250;\\0{,}6254;\\0{,}6190;\\0{,}6176;\\0{,}6182;\\\cdots\end{gathered}$$

Так как $r_{n-1}-r_n=\dfrac{u_{n+1}\,u_{n-1}-u_n^2}{u_n\cdot u_{n+1}}=\dfrac{(-1)^n}{u_n u_{n+1}}$, то разность $r_{n-1}-r_n$ для четного n положительна, а для нечетного — отрицательна.

Отсюда — последовательность $r_0,\ r_2,\ r_4,\ldots,$ — возрастающая (начиная с $r_0=0$), а последовательность $r_1,\ r_3,\ r_5,\ldots,$ —убывающая (начиная с $r_1=1$). С другой стороны, $r_1-r_0>0,\ r_3-r_2>0,\ r_5-r_4>0,\ldots$ и так как $\lim(r_{n-1}-r_n)=0$, то обе последовательности, следовательно, и последовательность r стремится к одному и тому же пределу. 4°. Из $r_{n-1}=\dfrac{u_{n-1}}{u_n}$ и $u_{n-1}+u_n=$ $=u_{n+1}$ находим

$$r_{n-1}=\frac{u_{n+1}-u_n}{u_n}=\frac{1-\dfrac{u_n}{u_{n+1}}}{\dfrac{u_n}{u_{n+1}}}=\frac{1-r_n}{r_n}.$$

Переходя к пределу ($n\to+\infty$), получим

$$z=\frac{1-z}{z},$$

где $z=\lim z_n\ (>0)$. Решая это уравнение (беря только положительный корень), найдем

$$z=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\cong 0{,}6180.$$

10. $x=8{,}905\pm\sqrt{56{,}736025}$;

так как

$$7{,}532<\sqrt{56{,}736025}<7{,}533,$$

то

$$1{,}372<x_1<1{,}373,$$
$$16{,}437<x_2<16{,}438.$$

11. 1°. *Существовиние действительных корней уравнения.* Если $m = -1$, то данное уравнение имеет один корень $x = 4$. Для всех остальных значений m уравнение имеет два различных действительных корня, если $m \neq 1$, $m \neq \sqrt{2}$ и $m \neq -\sqrt{2}$. При $m=1$, $x_1 = x_2 = 0$; при $m = \sqrt{2}$, $x_1 = x_2 = 3 - \sqrt{2}$; при $m = -\sqrt{2}$, $x_1 = x_2 = 3 + \sqrt{2}$. 2°. *Значения корней* α *и* β. Если $m \neq -1$, то $\alpha = (m-1)^2$, $\beta = \frac{m-1}{m+1}$; $\alpha \geqslant 0$ ($=0$ лишь при $m = 1$); $\beta > 0$, если $m > 1$ или $m < -1$; $\beta < 0$,если $-1 < m < 1$;$\beta = 0$, если $m=1$. 3°. График $\alpha = (m-1)^2$ — парабола с вершиной (1, 0); выпуклость вниз. График $\beta = \frac{m-1}{m+1}$ — равносторонняя гипербола с асимптотами $m = -1$ и $\beta = 1$. 4°. *Использование графика.* Точки, общие графикам (A) и (B), $C(-\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2})$, $D(1,\ 0)$, $E(\sqrt{2},\ 3-2\sqrt{2})$ (они находятся из условия $\alpha = \beta$, т. е. фактически уже были найдены в 1°).

Возьмем на оси Om точку M такую, что $\overline{OM} = m$ и обозначим через A и B точки пересечения (если они существуют) кривых (A) и (B) с прямой, проходящей через M, параллельно оси ординат. Тогда $\alpha = \overline{MA}$, $\beta = \overline{MB}$, и из графика легко усматриваются знаки α и β для различных значений m. **12.** 1°. $u + v = 4m$, $uv = 5m - 1$ и т. д. Если $m \leqslant \frac{1}{4}$ или $m \geqslant 1$, то система имеет два решения:

$$u_1 = 2m - \sqrt{(4m-1)(m-1)},$$
$$v_1 = 2m + \sqrt{(4m-1)(m-1)},$$
$$u_2 = 2m + \sqrt{(4m-1)(m-1)},$$
$$v_2 = 2m - \sqrt{(4m-1)(m-1)}.$$

Если $m = \frac{1}{4}$, то одно решение $u = v = \frac{1}{2}$. Если $m = 1$, то — одно решение $u = v = 2$. Если $\frac{1}{4} < m < 1$, то система имеет два мнимых решения. 2°. Решения данной системы будут заключены между -1 и 1, если оба корня уравнения $x^2 - 4mx + 5m - 1 = 0$ будут действительны и будут заключены между -1 и 1. Это будет при $0 < m \leqslant \frac{1}{4}$. **13.** 1°. Функция $f_m(x)$ принимает наименьшее значение $g(m) = -\frac{(m+3)^2}{4}$ при $x = -\frac{m-1}{2}$. Этот минимум $\leqslant 0$ и значит при $m \neq -3$ парабола $f_m(x)$ пересекает ось Ox в двух различных точках, т. е. уравнение $f_m(x) = 0$ при $m \neq -3$ имеет два действительных корня. Уравнение $f_m(x) = 0$ имеет два равных корня тогда и только тогда,когда $m=-3$; при этом $g(m)=0$; при $m = -3$ уравнение $f_{-3}(x) = 0$ имеет двойной корень $x = 2$. 2°. Графиком функции $g(m)$ является также парабола с вершиной в точке $(-3,\ 0)$; выпуклость вверх. 3°. Линии $f_a(x)$ и $f_b(x)$ получаются переносом одна другой, так как если в уравнении

$y = px^2 + qx + r$ менять q и r и фиксировать p, то все полученные при этом параболы будут равны параболе $y = px^2$.

Точка, общая параболам $y = f_a(x)$ и $y = f_b(x)$ находится так: решаем уравнение $f_a(x) = f_b(x)$, находим $x = 2$, а тогда $y = 0$. Это можно получить сразу, переписав $f_m(x)$ в виде

$$m(x-2) + x^2 - x - 2.$$

Отсюда видно, что при любом m и $x = 2$ будем иметь $y = 0$.

14. 1°. При возрастании x от 0 до $\frac{2}{3}$, y возрастает от 0 до $\frac{4}{27}$; при возрастании x от $\frac{2}{3}$ до 1, y убывает от $\frac{4}{27}$ до 0. На сегменте $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ дуга (S) выпукла вниз, а на сегменте $\left[\frac{1}{3}, 4\right]$ — вверх. 2°. Если $y = h$ уравнение прямой (D), то должно быть $0 < h < \frac{4}{27}$. Предполагая это условие выполненным, заключаем, что a и b суть корни уравнения $x^2 - x^3 = h$, заключенные между 0 и 1. Значит $a^2 - a^3 = h$, $b^2 - b^3 = h$, откуда $a + b = a^2 + ab + b^2$ или $a + b = (a+b)^2 - ab$. Далее, полагая $\frac{a+b}{2} = \lambda$, найдем $a + b = 2\lambda$, и значит, $ab = 4\lambda^2 - 2\lambda$, значит, a и b — корни уравнения $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda^2 - 2\lambda = 0$. Из условий $0 < a < 1$, $0 < b < 1$ находим $\frac{1}{2} < \lambda \leqslant \frac{2}{3}$. Экстремальные значения для $a + b$ суть 1 и $\frac{4}{3}$.
3°. $b = \frac{1 - a + \sqrt{(1-a)(1+3a)}}{2}$, $s = \frac{1 + a + \sqrt{(1-a)(1+3a)}}{2}$.
Для доказательства того, что s — возрастающая функция от a, следует заметить, что $0 < a < \frac{2}{3}$. 4°. $MA = \overline{AM} = \frac{2}{3} - a$ и $MB = \overline{BM} = b - \frac{2}{3}$, откуда $MA - MB = \frac{4}{3} - (a+b) \geqslant 0$, значит $MA \geqslant MB$.

Замечание. При доказательстве того, что s возрастающая функция a, следует, считая $0 < a_1 < a_2 < \frac{2}{3}$, представить $s(a_2) - s(a_1)$ в виде

$$(a_2 - a_1)\left(1 + \frac{2 - 3(a_2 + a_1)}{\sqrt{-3a_2^2 + 2a_2 + 1} + \sqrt{-3a_1^2 + 2a_1 + 1}}\right) =$$
$$= k\left[\sqrt{-3a_2^2 + 2a_2 + 1} + \sqrt{-3a_1^2 + 2a_1 + 1} + 2 - \right.$$
$$\left. - 3(a_2 + a_1)\right] > 2k\left(\sqrt{-3a_1^2 + 2a_1 + 1} + 2 - 6a_1\right) \text{ и т. д. } (k > 0);$$

рассмотреть два случая: $a < \frac{1}{3}$ и $a > \frac{1}{3}$. **15.** *Решение.* Данная функция не определена при $x=-1$ и $x=1$. Составим разность $y(x_2)-y(x_1)$, считая $x_1<x_2<-1$.

Получим:

$$y(x_2)-y(x_1)=\frac{(x_2-2)^2}{x_2^2-1}-\frac{(x_1-2)^2}{x_1^2-1}=$$

$$=\frac{(x_2-x_1)\left[4x_1x_2-5(x_1+x_2)+4\right]}{\left(x_2^2-1\right)\left(x_1^2-1\right)}>0,$$

значит, в интервале $(-\infty,-1)$ данная функция возрастает от 1 до $+\infty$.

Она возрастает и в полуинтервале $(-1, 0]$, ибо при $-1<x_1<x_2\leqslant 0$ следует, что $y(x_2)-y(x_1)>0$.

Исследуем теперь полуинтервал $[0,1]$.

Множитель

$$\frac{x_2-x_1}{\left(x_2^2-1\right)\left(x_1^2-1\right)}>0,$$

значит, знак $y(x_2)-y(x_1)$ определяется знаком выражения $4x_1x_2-5(x_1+x_2)+4$.

Если в выражении $z=4x_1x_2-5(x_1+x_2)+4$ положить $x_1=x_2$, то оно обратится в нуль при $x_1'=\frac{1}{2}$ и $x_2''=2$. Исследуем полуинтервал $\left(0, \frac{1}{2}\right]$ и докажем, что при $0<x_1<x_2\leqslant\frac{1}{2}$, $z>0$. В самом деле, очевидно $z>0$ при $x_1=0$ и x_2, изменяющемся на отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$; $z>0$ при $x_2=0$ и x_1, изменяющемся на отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Далее при $x_1=\frac{1}{2}$, $z=3\left(\frac{1}{2}-x_2\right)>0$, если x_2 изменяется на полуинтервале $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ и аналогично $z>0$ — при $x_2=\frac{1}{2}$ и x_1, изменяющемся в полуинтервале $\left[0, \frac{1}{2}\right)$. Окончательно: $z>0$ на сторонах квадрата в плоскости x_1Ox_2 с вершинами $O(0, 0)$, $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $C\left(0, \frac{1}{2}\right)$ (за исключением лишь вершины B, где $z=0$). Докажем, что $z>0$ в любой внутренней точке M квадрата $OABC$. Пусть x_1 и x_2 — координаты M. Проведем через точку M равностороннюю гиперболу и пусть P — точка, в которой она пересечет AB. В точке P, $z>0$, но в точке M сумма x_1+x_2 меньше, чем эта сумма в точке P, произведение же x_1x_2 одинаково для точек M и P, значит $z>0$ и в точке M. Итак, на сегменте $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ данная функция возрастает.

Исследуем полуинтервал $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$. Имеем:

$$4x_1 x_2 - 5(x_1 + x_2) + 4 < (x_1 + x_2)^2 - 5(x_1 + x_2) + 4 =$$
$$= (x_1 + x_2 - 4)(x_1 + x_2 - 1) < 0,$$

ибо $\frac{1}{2} \leqslant x_1 < x_2 < 1$, так что $1 < x_1 + x_2 < 2$.

На полуинтервале $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ данная функция убывает от -3 до $-\infty$. Остается исследовать интервал $(1, +\infty)$. Из предыдущего неравенства следует, что в полуинтервале $(1, 2]$ данная функция убывает от $+\infty$ до 0, для полуинтервала $[2, +\infty)$ проводим рассуждения, аналогичные случаю $0 \leqslant x_1 < x_2 \leqslant \frac{1}{2}$. Данная функция на полуинтервале $[2, +\infty)$ возрастает от 0 до $+1$.

Исследуем функцию на выпуклость вверх и вниз.

Во-первых, заметим, что данную функцию при исследовании ее на выпуклость вверх и вниз можно заменить функцией

$$z = y - 1 = \frac{5 - 4x}{x^2 - 1}.$$

Составляя выражение

$$u = z\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) - \frac{1}{2}\left[z(x_1) + z(x_2)\right] =$$
$$= \frac{5 - 4\,\frac{x_1 + x_2}{2}}{\frac{(x_1 + x_2)^2}{4} - 1} - \frac{1}{2}\left(\frac{5 - 4x_2}{x_2^2 - 1} + \frac{5 - 4x_1}{x_1^2 - 1}\right),$$

полагая затем $x_2 = x_1 + h$, производя упрощения и заменяя затем h на $x_2 - x_1$, получим:

$$u = \frac{4x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 20x_1 x_2 + 12(x_1 + x_2) - 5\left(x_1^2 + x_2^2\right) - 10}{2\left[(x_1 + x_2)^2 - 4\right]\left(x_1^2 - 1\right)\left(x_2^2 - 1\right)}(x_2 - x_1)^2.$$

Отсюда видно, что при $x_1 < -1$ и $x_2 < -1$ числитель отрицателен, знаменатель — положителен и $u < 0$ — выпуклость вниз.

Дальнейшее исследование выпуклости графика предоставляется читателю: в интервале $(-1, 1)$ график имеет выпуклость вверх, в интервале $(1, +\infty)$ — сначала вниз (до точки перегиба), затем — вверх.

Заметим еще, что при $x \to -\infty$, $y \to 1$, оставаясь больше 1, а при $x \to +\infty$, $y \to 1$, оставаясь меньше 1; при $x \to -1$ слева, $y \to +\infty$, а при $x \to -1$ справа, $y \to -\infty$; при $x \to 1$ слева, $y \to -\infty$ и при $x \to 1$ справа $y \to +\infty$. Все это дает возможность построить график.

2°. Полагая $y = m$, получим уравнение:

$$(m - 1)x^2 - 4x - m - 4 = 0.$$

Это уравнение имеет действительные корни, если $m \geqslant 0$ или $m \leqslant -3$ (это ясно и из графика). Если $m=1$, то $x=\frac{5}{4}$; мы получаем точку $\left(\frac{5}{4}, 1\right)$ пересечения графика с его асимптотой $y=1$ (вторая точка пересечения в бесконечности). Полагая $m \leqslant -3$ или $m \geqslant 0$ $(m \neq 1)$ для координаты середины M хорды AB, параллельной оси Ox, находим:

$$x=\frac{1}{2}(x_A+x_B)=-\frac{2}{m-1}, \quad y=m;$$

отсюда

$$y=\frac{x-2}{x}$$

— это равносторонняя гипербола. Геометрическим местом точек M будет часть этой гиперболы, лежащая вне полосы, ограниченной прямыми $y=0$ и $y=-3$. 17. $y=2m+1-2\frac{m^2+m-2}{x+m+3}$.

Отсюда видно, что изменение y определяется знаком трехчлена m^2+m-2.

Если $m=1$, $y=3$ — функция постоянна (если $x \neq -4$); неопределена при $x=-4$.

Если $m=-2$, $y=-3$ — функция постоянна (если $x \neq 1$ и неопределена при $x=-1$).

Если $m<-2$ или $m>1$, то y — возрастающая функция в интервалах $(-\infty, -m-3)$ и $(-m-3, +\infty)$. Если $-2<m<1$, то в тех же интервалах функция y — убывающая. 18. 1°. Рассмотрим разность $y(x)-y(\sqrt{2})$. Ее можно преобразовать к виду:

$$y(x)-y(\sqrt{2})=$$
$$=\frac{(2-4\sqrt{2}-\lambda)x^2+(12+2\lambda)x+2\lambda-2\sqrt{2}\lambda-4-4\sqrt{2}}{x^2-2x+2}.$$

Знаменатель положителен при всех (действительных) значениях x; числитель имеет, очевидно, корень $x=\sqrt{2}$, значит оба корня числителя всегда действительны (при $\lambda=2-4\sqrt{2}$ — только один корень!) и значит числитель может сохранять знак тогда и только тогда, когда и второй корень равен $\sqrt{2}$. Значит данная функция при $x=\sqrt{2}$ будет иметь наибольшее значение тогда и только тогда, когда $x_1=x_2=\sqrt{2}$; это дает

$$\sqrt{2}+\sqrt{2}=-\frac{12+2\lambda}{2-4\sqrt{2}-\lambda},$$

откуда $\lambda=2$. При этом значении λ:

$$y=\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}$$

и разность $y(x)-y(\sqrt{2})$ принимает вид

$$\frac{-4\sqrt{2}x^2+16x-8\sqrt{2}}{x^2-2x+2}=\frac{-4\sqrt{2}\,(x^2-2\sqrt{2}x+2)}{x^2-2x+2}=$$
$$=\frac{-4\sqrt{2}\,(x-\sqrt{2})^2}{x^2-2x+2}\leqslant 0,$$

причем знак равенства имеет место тогда и только тогда, когд. $x=\sqrt{2}$. Итак, данная функция имеет лишь при $\lambda=2$ наиболь шее значение при $x=\sqrt{2}$. Ни при каком другом значении данная функция при $x=\sqrt{2}$ не имеет наибольшего значения Вместе с тем не существует значений λ, при которых данна функция имеет наименьшее значение. 2°. Исследуем функцию

$$y=\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}. \qquad (1$$

Заметим, что $y>0$ при всех x. Далее, при замене x на $-x$ величина y заменяется на $\frac{1}{y}$. Значит при $x=-\sqrt{2}$ функция y принимает наименьшее значение.

К этому результату можно прийти и другим путем: будем придавать x лишь действительные значения; тогда y будет такж действительным; обозначим через x_0 какое-нибудь действительное значение x и соответствующее значение y обозначим через y_0. Составим разность

$$\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}-y_0=\frac{(1-y_0)x^2+2(1+y_0)x+2(1-y_0)}{x^2-2x+2}.$$

Квадратный трехчлен

$$(1-y_0)x^2+2(1+y_0)x+2(1-y_0)$$

(будем считать пока, что $y_0\neq 1$) имеет один действительный корень $x=x_0$, значит и второй его корень действителен и разность $y-y_0$ не будет менять, следовательно, знака тогда и только тогда, когда и второй корень равен x_0, т. е.

$$x_0^2=\frac{2(1-y_0)}{1-y_0}=2, \quad x_0=\pm\sqrt{2}.$$

Мы уже знаем, что при $x=\sqrt{2}$ функция y имеет максимум. При $x=-\sqrt{2}$ будем иметь

$$y-y_0=\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}-\frac{4-2\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}=$$
$$=\frac{4\sqrt{2}x^2+8x+4\sqrt{2}}{(4+2\sqrt{2})(x^2-2x+2)}=\frac{4\sqrt{2}\,(x+\sqrt{2})^2}{(4+2\sqrt{2})(x^2-2x+2)}\geqslant 0$$

и при $x=-\sqrt{2}$ функция y имеет наименьшее значение.

Теперь нетрудно установить, что в полуинтервале $(-\infty, -\sqrt{2}]$ функция y убывает от 1 до $(\sqrt{2}-1)^2$, на сегменте $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ возрастает от $(\sqrt{2}-1)^2$ до $(\sqrt{2}+1)^2$ и на полуинтервале $[\sqrt{2}, +\infty)$ убывает от $(\sqrt{2}+1)^2$ до 1 (при неограниченном возрастании $|x|$, y стремится к 1). Отсюда легко построить график. Возможно элементарное исследование выпуклости вверх и вниз. С этой целью рассмотрим разность

$$y\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\frac{1}{2}\left[y(x_1)+y(x_2)\right].$$

На сегментах, где эта разность отрицательна, график имеет выпуклость вниз, а на сегментах, где она положительна — вверх.

Для исследования выпуклости функции

$$y=\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}$$

заметим, что

$$y-1=\frac{4x}{x^2-2x+2},$$

$$\frac{y-1}{4}=\frac{x}{x^2-2x+2},$$

и таким образом вместо исследования выпуклости данной функции можно исследовать выпуклость функции

$$f(x)=\frac{x}{x^2-2x+2}.$$

Составим разность

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)-\frac{1}{2}\left[f(x_1)+f(x_2)\right]=$$

$$=\frac{\frac{x_1+x_2}{2}}{\frac{(x_1+x_2)^2}{4}-(x_1+x_2)+2}-\frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{x_1^2-2x_1+2}+\frac{x_2}{x_2^2-2x_2+2}\right)=$$

$$=\frac{4(x_1+x_2)\left(x_1^2-2x_1+2\right)\left(x_2^2-2x_2+2\right)}{2\left[(x_1+x_2)^2-4(x_1+x_2)+8\right]\left(x_1^2-2x_1+2\right)\left(x_2^2-2x_2+2\right)}-$$

$$-\frac{\left[(x_1+x_2)^2-4(x_1+x_2)+8\right]\left[x_1x_2(x_1+x_2)+2(x_1+x_2)-4x_1x_2\right]}{2\left[(x_1+x_2)^2-4(x_1+x_2)+8\right]\left(x_1^2-2x_1+2\right)\left(x_2^2-2x_2+2\right)}.$$

Знаменатель положителен при всех x_1 и x_2. Полагая $x_2=x_1+h$, представим (после ряда преобразований) числитель в виде:

$$h^2\left[-x_1h^2+\left(-3x_1^2+6\right)h-2x_1^3+12x_1-8\right]$$

(при преобразованиях располагать выражения в скобках по степеням h); так как $h^2>0$ $(x_1\neq x_2)$, то вопрос сводится к исследованию знака выражения

$$z=-x_1h^2+\left(-3x_1^2+6\right)h-2x_1^3+12x_1-8$$

или, заменяя h на x_2-x_1:

$$z=(6-x_1x_2)(x_1+x_2)-8.$$

Заметим, что при равных друг другу x_1 и x_2 — это выражение обращается в следующее:

$$z=\left(6-x_1^2\right)\cdot 2x_1-8=-2x_1^3+12x_1-8;$$

корни этой функции: $-1-\sqrt{3}$, $-1+\sqrt{3}$ и 2; естественно поэтому рассмотреть 4 случая:

$$\text{I.}\quad x_1\leqslant -1-\sqrt{3},\quad x_2\leqslant -1-\sqrt{3};$$

$$\text{II.}\quad -1-\sqrt{3}\leqslant x_1\leqslant -1+\sqrt{3},\quad -1-\sqrt{3}\leqslant x_2\leqslant -1+\sqrt{3};$$

$$\text{III.}\quad -1+\sqrt{3}\leqslant x_1\leqslant 2,\quad -1+\sqrt{3}\leqslant x_2\leqslant 2;$$

$$\text{IV.}\quad x_1\geqslant 2,\quad x_2\geqslant 2.$$

Докажем, что в каждом из этих случаев z сохраняет знак, точнее: в случае I $z>0$; в случае II $z<0$; в случае III $z>0$; в случае IV $z<0$. Отсюда следует, что в полуинтервале $(-\infty,-1-\sqrt{3}]$ кривая выпукла вверх, на сегменте $[-1-\sqrt{3},-1+\sqrt{3}]$ — вниз, на сегменте $[-1+\sqrt{3},2]$ — вверх, а на полусегменте $[2,+\infty)$ — вниз. I. Если $x_1\leqslant -1-\sqrt{3}$, $x_2\leqslant -1-\sqrt{3}$, то полагая

$$x_1=-x,\quad x_2=-y,$$

будем иметь

$$z=(xy-6)(x+y)-8,$$

причем $x\geqslant 1+\sqrt{3}$, $y\geqslant 1+\sqrt{3}$ (за исключением $x=y=1+\sqrt{3}$). Но $x+y\geqslant 2\sqrt{xy}$, значит,

$$z\geqslant(xy-6)\,2\sqrt{xy}-8=2\left(\sqrt{xy}+2\right)\left(\sqrt{xy}-1-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{xy}-1+\sqrt{3}\right).$$

Так как $x\geqslant 1+\sqrt{3}$ и $y\geqslant 1+\sqrt{3}$ (за исключением $x=y=1+\sqrt{3}$), то $\sqrt{xy}>1+\sqrt{3}$, и значит, $z>0$. II. Пусть

$$-1-\sqrt{3}\leqslant x_1\leqslant -1+\sqrt{3},\quad -1-\sqrt{3}\leqslant x_2\leqslant -1+\sqrt{3}$$

(исключаются значения $x_1=x_2=-1-\sqrt{3}$ и $x_1=x_2=-1+\sqrt{3}$). Имеем: $z=-x_2x_1^2+\left(6-x_2^2\right)x_1+6x_2-8$. Если $x_2<0$ (и разумеется $\geqslant -1-\sqrt{3}$), то квадратный трехчлен z относительно x_1 при $x_1=-1-\sqrt{3}$ и $x_1=-1+\sqrt{3}$ имеет значения:

$$z(-1-\sqrt{3})=(\sqrt{3}+1)\,x_2^2+(2-2\sqrt{3})\,x_2-14-6\sqrt{3}=$$
$$=\frac{2\left[x_2^2-2\,(2-\sqrt{3})\,x_2-2-4\sqrt{3}\right]}{\sqrt{3}-1}=$$
$$=\frac{2\,(x_2+1+\sqrt{3})\,(x_2-5+\sqrt{3})}{\sqrt{3}-1}<0$$

при всех x_2, $x_2<0$ (и конечно $x_2 \geqslant -1-\sqrt{3}$),

$$z(-1+\sqrt{3})=-(\sqrt{3}-1)\,x_2^2+2(\sqrt{3}+1)\,x_2+6\sqrt{3}-14=$$
$$=\frac{-2x_2^2+2(4+2\sqrt{3})\,x_2+4-8\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}=$$
$$=-\frac{2\,(x_2-\sqrt{3}+1)\,(x_2-5-\sqrt{3})}{\sqrt{3}+1}<0,$$

если $x_2<0$ (и $x_2 \geqslant -1-\sqrt{3}$).

Но при $x_2<0$ коэффициент при x_1^2 в выражении

$$z=-x_2x_1^2+(6-x_2^2)\,x_1+6x_2-8$$

будет >0, и значит $-1-\sqrt{3}$ и $-1+\sqrt{3}$ лежат между корнями функции $z=z(x_1)$ и потому z будет <0 при всех x_1, заключенных между $-1-\sqrt{3}$ и $-1+\sqrt{3}$. Итак, $z<0$, если $-1-\sqrt{3}\leqslant x_2<0$ и $-1-\sqrt{3}\leqslant x_1\leqslant -1+\sqrt{3}$.

Аналогично доказывается,* что $z<0$ в «прямоугольнике» $-1-\sqrt{3}\leqslant x_1<0$ и $-1-\sqrt{3}\leqslant x_2\leqslant -1+\sqrt{3}$ (впрочем это следует и из того, что z есть симметричная функция от x_1 и x_2).

Остается рассмотреть «квадрат»

$$0\leqslant x_1\leqslant -1+\sqrt{3},\quad 0\leqslant x_2\leqslant -1+\sqrt{3}.$$

Заметим сначала, что $z<0$ на сторонах этого квадрата. В самом деле, если например $x_1=0$, то $z=6x_2-8<0$ при $0\leqslant x_2\leqslant -1+\sqrt{3}$ (аналогично $z<0$, если $x_2=0$, а $0\leqslant x_1\leqslant -1+\sqrt{3}$).

Далее, если $x_1=\sqrt{3}-1$, то

$$z=[6-(\sqrt{3}-1)\,x_2]\,[\sqrt{3}-1+x_2]-8=$$
$$=\frac{-2\,[x_2-(\sqrt{3}-1)]\,[x_2-(\sqrt{3}+5)]}{\sqrt{3}+1}<0,$$

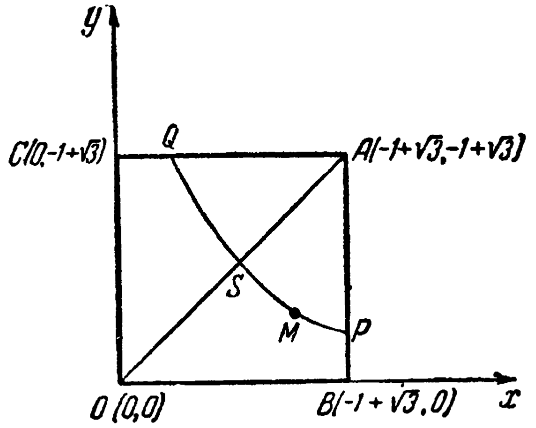
если $0\leqslant x_2\leqslant\sqrt{3}-1$.

Аналогично доказывается, что если $x_2 = \sqrt{3} - 1$, а $0 \leqslant x_1 \leqslant \sqrt{3} - 1$, то $z < 0$.

Докажем, наконец, что $z < 0$ в квадрате

$$0 \leqslant x_1 \leqslant \sqrt{3} - 1, \quad 0 \leqslant x_2 \leqslant \sqrt{3} - 1.$$

Возьмем внутри квадрата точку $M(x_1, x_2)$. Проведем через нее равнобочную гиперболу $x_1 x_2 = C$ и пусть эта гипербола пересекает стороны AB и AC в точках P и Q (черт. 33). В точках P и Q по доказанному $z < 0$; при движении же точки P по гиперболе в направлении к Q сумма $x_1 + x_2$ сначала убывает до точки S, затем возрастает, значит, при переходе от точки P к точке M произведение $x_1 x_2$ не изменится, а $x_1 + x_2$ в точке M будет меньше, чем в точке P, значит значение z в точке M будет меньше значения z в точке P, т. е. z в точке M будет отрицательно. III. Пусть



Черт. 33

$$-1 + \sqrt{3} \leqslant x_1 \leqslant 2,$$
$$-1 + \sqrt{3} \leqslant x_2 \leqslant 2.$$

В таком случае

$$z = (6 - x_1 x_2)(x_1 + x_2) - 8 > (6 - x_1 x_2) \cdot 2\sqrt{x_1 x_2} - 8 =$$
$$= -2\left(\sqrt{x_1 x_2} - 2\right)\left(\sqrt{x_1 x_2} + 1 + \sqrt{3}\right)\left(\sqrt{x_1 x_2} + 1 - \sqrt{3}\right) > 0,$$

ибо $-1 + \sqrt{3} < \sqrt{x_1 x_2} < 2$. IV. Пусть, наконец, $x_1 \geqslant 2$ и $x_2 \geqslant 2$. На лучах $x_1 \geqslant 2$, $x_2 = 2$ и $x_2 \geqslant 2$, $x_1 = 2$ сразу легко показать, что $z < 0$, а далее в области $x_1 \geqslant 2$, $x_2 \geqslant 2$ надо взять любую точку (x_1, x_2), провести через нее равностороннюю гиперболу, ввести в рассмотрение точки пересечения гиперболы с прямыми $x_1 = 2$ и $x_2 = 2$ и т. д. (как в случае II).

Таким образом произведено исследование линии на выпуклость и вогнутость, а вместе с тем находим и точки перегиба (при $x = -1 - \sqrt{3}$, $x = -1 + \sqrt{3}$ и $x = 2$):

$$M_1(-1 - \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}), \quad M_2(-1 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}), \quad M_3(2, 5).$$

3°. Уравнение $y = m$ имеет вид:

$$\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 - 2x + 2} = m$$

или

$$(m - 1)x^2 - 2(m + 1)x + 2(m - 1) = 0.$$

Легко установить аналитически, что корни этого уравнения будут действительны тогда и только тогда, когда

$$(\sqrt{2}-1)^2 \leqslant m \leqslant (\sqrt{2}+1)^2.$$

Впрочем это легко видеть и из графика [$(\sqrt{2}-1)^2$ и $(\sqrt{2}+1)^2$ — наименьшее и наибольшее значения функции y].

Пусть $M'(x', m)$ и $M''(x'', m)$ — точки, в которых прямая $y=m$ пересекает график; координаты середины отрезка $M'M''$ будут

$$x=\frac{x'+x''}{2}, \quad y=m$$

или

$$x=\frac{m+1}{m-1}, \quad y=m,$$

откуда

$$y=\frac{x+1}{x-1}$$

[при $m=1$ прямая $y=m$ будет асимптотой графика данной функции; эта асимптота пересекает график в одной только точке $(0, 1)$]. Линия $y=\frac{x+1}{x-1}$ есть равносторонняя гипербола.

Так как параметр m изменяется в пределах $(\sqrt{2}-1)^2$, до $(\sqrt{2}+1)^2$, то геометрическое место точек I есть две дуги гиперболы, заключенные между прямыми

$$y=(\sqrt{2}-1)^2 \quad \text{и} \quad y=(\sqrt{2}+1)^2.$$

Гипербола $y=\frac{x+1}{x-1}$ проходит естественно через точки максимума и минимума графика функции $y=\frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}$. **19.** Ответ. 1°. В полуинтервале $(-\infty, -5]$ y возрастает от $-\infty$ до 4; на сегменте $[-5, -1]$ y убывает от 4 до 1 и в полуинтервале $[-1, +\infty)$ y возрастает от 1 до $+\infty$. В полуинтервале $[-\infty, -3]$ выпуклость вверх, в полуинтервале $(-3, +\infty)$ выпуклость вниз. 2°. *Число значений и знаки x при заданном y.*

Если $y<1$, то имеется одно значение $x<0$.

Если $y=1$, то имеется два значения x; одно <0 другое равно -1.

Если $1<y<\frac{53}{32}$ — три отрицательных значения x.

Если $y=\frac{53}{32}$ — два отрицательных значения x и одно $x=0$.

Если $\frac{53}{32}<y<4$ — три значения для x, два отрицательных и одно положительное.

Если $y=4$ — два значения для x, одно отрицательное $x=-5$ (двойной корень) и одно положительное.

Если $y > 4$ — одно положительное значение для x. **20.** 1°. *Решение и исследование системы.* Складывая и вычитая почленно данные уравнения, получим систему, эквивалентную данной:

$$2(m^2+1)x-(m+1)^2y=0,$$

$$(m^2-1)y=2(m^2+1).$$

Если $m^2=1$, т. е. $m=\pm 1$, то система несовместна.

Если $m^2 \neq 1$, т. е. $m \neq 1$ и $m \neq -1$, то

$$x=\frac{m+1}{m-1}, \quad y=\frac{2(m^2+1)}{m^2-1}.$$

2°. *Прямые* (Δ_1) и (Δ_2). Переписывая данные уравнения в виде:

$$(m^2+1)(x+1)-m(m+1)y=0, \qquad (1')$$

$$(m^2+1)(x-1)-(m+1)y=0, \qquad (2')$$

видим, что все прямые (Δ_1) проходят через точку $A_1(-1, 0)$, а все прямые (Δ_2) — через точку $A_2(1, 0)$. При $m=-1$ уравнения прямых (Δ_1) и (Δ_2) будут $x=-1$ и $x=1$ — это прямые, проходящие через точки A_1 и A_2 параллельно оси Oy, а при $m=1$ уравнения прямых (Δ_1) и (Δ_2) будут $x-y=-1$ и $x-y=1$ — это прямые, также проходящие соответственно через A_1 и A_2 параллельно биссектрисе координатного угла xOy. 3°. *Соотношение между координатами точки P, не зависящее от m.*

Из соотношений $x=\frac{m+1}{m-1}$, $y=\frac{2(m^2+1)}{m^2-1}$ находим $m=\frac{x+1}{x-1}$, и затем, $y=x+\frac{1}{x}$. Эту линию точка P описывает в целом, ибо каждому значению x (кроме $x=0$ и $x=1$) соответствует значение $m=\frac{x+1}{x-1}$, откуда $x=\frac{m+1}{m-1}$ $\left(m \neq 1, \text{ ибо при } m=1 \text{ получаем } 1=\frac{x+1}{x-1},\ x-1=x+1\right)$; это значение $x \neq 0$ (по предположению), поэтому

$$y=\frac{m+1}{m-1}+\frac{m-1}{m+1}=\frac{2(m^2+1)}{m^2-1},$$

т. е. выбранная на линии $y=x+\frac{1}{x}$ точка, есть точка P. Далее, при $x=0$, $y=x+\frac{1}{x}$ — не определен, а при $x=1$, $y=2$; эта точка также является точкой пересечения прямых (Δ_1) и (Δ_2), а именно следующих: $x=1$ и $x-y+1=0$.

Построение графика $y=x+\frac{1}{x}$. График симметричен относительно начала координат. В полуинтервале $(0, 1]$ y убывает от $+\infty$ до 2, в полуинтервале $[1, +\infty)$ возрастает от 2 до $+\infty$; в интервале $(0, +\infty)$ график имеет выпуклость вниз.

21. 1°. *Значение отношений.* $\frac{\overline{BB'}}{d}$ и $\frac{\overline{CC'}}{d}$. Заметим, прежде всего, что точка B' не существует тогда и только тогда, когда B является серединой PR, а значит тогда и только тогда, когда θ — острый угол и $BC = PB$. В этом случае имеем:

$\overline{PC} = 2\overline{PB}\cos\theta$, следовательно, $m = 2\cos\theta$.

Так как $0 < m < 1$, то это равенство возможно тогда и только тогда, когда $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$. Аналогично. Точка C' не существует тогда и только тогда, когда угол θ острый и $BC = PC$. В этом случае: $\overline{PB} = 2\overline{PC}\cos\theta$ или $1 = 2m\cos\theta$ или $m = \frac{1}{2\cos\theta}$.

Отсюда $\theta < \frac{\pi}{3}$.

Предположим, что точки B' и C' существуют. Тогда

$$\frac{2}{\overline{BB'}} = \frac{1}{\overline{BP}} + \frac{1}{\overline{BR}},$$

$$\frac{2}{\overline{CC'}} = \frac{1}{\overline{CP}} + \frac{1}{\overline{CQ}}.$$

Отсюда

$$\overline{BB'} = 2\frac{\overline{BP}\cdot\overline{BR}}{\overline{BP}+\overline{BR}},$$

$$\overline{CC'} = 2\frac{\overline{CP}\cdot\overline{CQ}}{\overline{CP}+\overline{CQ}}.$$

Замечая, что

$$\overline{BP} = -d,\ \overline{CP} = -md,$$

$$\overline{BR} = \overline{BP} + \overline{PR} = -d + \frac{md}{\cos\theta},$$

$$\overline{CQ} = \overline{CP} + \overline{PQ} = -md + \frac{d}{\cos\theta},$$

находим

$$\frac{\overline{BB'}}{d} = 2\frac{\cos\theta - m}{m - 2\cos\theta},\quad \frac{\overline{CC'}}{d} = 2m\frac{m\cos\theta - 1}{1 - 2m\cos\theta}.$$

Эти выражения имеют смысл, если, как это было указано, m отлично от $2\cos\theta$ и $\frac{1}{2\cos\theta}$.

Полагая $\cos\theta = X$, имеем:

$\frac{\overline{BB'}}{d} = 2\frac{X-m}{m-2X}$, $\frac{\overline{CC'}}{d} = 2m\frac{mX-1}{1-2mX}$. II. 1°. α) (условие, при котором $\overline{BB'}=\overline{CC'}$) Предположим, что

$$\overline{BB'}=\overline{CC'},$$

тогда

$$(X-m)(1-2mX)=m(m-2X)(mX-1)$$

или

$$2mX^2(m-1)+X(1+2m^2-m^3-2m)+m(m-1)=0.$$

Сокращая на $m-1\neq 0$, получим:

$$2mX^2-X(1-m+m^2)+m=0$$

или

$$m(2X^2+X+1)=X(1+m^2),$$

и так как $m\neq 0$ и $X\neq 0$, то

$$m+\frac{1}{m}=2X+\frac{1}{X}+1. \qquad (1')$$

Производя выкладки в обратном порядке, получим $\overline{BB'}=\overline{CC'}$. Значит условие (1′) — необходимый и достаточный признак равенства $\overline{BB'}=\overline{CC'}$.

Замечание. Так как $m>0$, то

$$M=m+\frac{1}{m}=\left(\sqrt{m}-\frac{1}{\sqrt{m}}\right)^2+2\geqslant 2,$$

причем знак равенства имеет место лишь при $\sqrt{m}-\frac{1}{\sqrt{m}}=0$, т. е. при $m=1$. Отсюда и из равенства (1′) следует, что $X>0$, и значит θ — острый угол.

Далее: $Y=2X+\frac{1}{X}=\left(\sqrt{2X}-\frac{1}{\sqrt{X}}\right)^2+2\sqrt{2}\geqslant 2\sqrt{2}$, причем знак равенства имеет место лишь при $\sqrt{2X}-\frac{1}{\sqrt{X}}=0$, т. е. при $X=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Для упрощения последующих исследований изучим функции M и Y.

Изучение функции M. Пусть M_0 и M_1 — значения M, соответствующие значениям $m=m_0$ и $m=m_1$, заключенным между 0 и 1. Тогда

$$M_1-M_0=(m_1-m_0)\frac{m_1m_0-1}{m_1m_0},$$

значит

$$\frac{M_1-M_0}{m_1-m_0}=\frac{m_1m_0-1}{m_1m_0}<0$$

и значит функция $M(m)$ на полуинтервале $(0,1]$ — убывающая.
Далее:

$$\frac{M(m)_0+M(m_1)}{2}-M\left(\frac{m_0+m_1}{2}\right)=\frac{(m_1-m_0)^2}{m_0m_1(m_0+m_1)}>0,$$

и значит график функции

$$M=m+\frac{1}{m}$$

в полуинтервале $(0,1]$ имеет выпуклость вниз. Заметим еще (это понадобится в дальнейшем), что если m изменяется от 0 до $\frac{1}{2}$, то M убывает от $+\infty$ до $\frac{5}{2}$, а если m возрастает от $\frac{1}{2}$ до 1, то M убывает от $\frac{5}{2}$ до 2.

Изучение функции Y. Пусть Y_0 и Y_1 — значения функции Y, соответствующие значениям X_0 и X_1 переменной X таких, что или

$$0<X_0<\frac{1}{\sqrt{2}},\quad 0<X_1<\frac{1}{\sqrt{2}},$$

или

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<X_0<1,\quad \frac{1}{\sqrt{2}}<X_1<1.$$

Тогда

$$\frac{Y_1-Y_0}{X_1-X_0}=\frac{2X_1X_0-1}{X_1X_0}.$$

Если X_0 и X_1 лежат в полуинтервале $\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$, то это отношение отрицательно, и значит Y на полуинтервале $\left(0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ — убывающая функция. Если же X_0 и X_1 находятся в полуинтервале $\left[\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1\right)$, то $\frac{Y_1-Y_0}{X_1-X_0}>0$, и значит в этом полуинтервале функция Y — возрастающая.

Заметим, что если X возрастает от 0 до $\frac{1}{2}$, то Y убывает от $+\infty$ до 3; если X возрастает от $\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{\sqrt{2}}$, то Y убывает от 3 до $2\sqrt{2}$ и, наконец, если X возрастает от $\frac{1}{\sqrt{2}}$ до 1, то Y возрастает от $2\sqrt{2}$ до 3. Далее,

$$\frac{Y(X_1)+Y(X_0)}{2} - Y\left(\frac{X_1+X_0}{2}\right) =$$

$$= \frac{2X_1+\frac{1}{X_1}+2X_2+\frac{1}{X_2}}{2} - 2\frac{X_0+X_1}{2} - \frac{2}{X_0+X_1} =$$

$$= \frac{(X_0-X_1)^2}{X_0X_1(X_0+X_1)} > 0,$$

и значит функция $Y(X)$ в интервале (0,1) выпукла вниз.

Все это дает возможность построить графики функций $M(m)$ и $Y(X)$ (выполнить графики на одном чертеже, совмещая оси Om и OX, а также OM и OY).

Заметим, что линия $Y(X)$ лежит целиком выше линии $M(m)$, так как при $\alpha > 0$ мы имеем: $2\alpha + \frac{1}{\alpha} > \alpha + \frac{1}{\alpha}$. γ) *Определение m, если X дано.* Если X дано, то известен Y и значит m — корень уравнения: $f_1(m) \equiv m^2 - m(Y+1)+1 = 0$. Исследование. Построим на одном графике функции M, Y_1, $Y_1 = Y+1$. Кривая (Y_1) будет целиком выше (M). Возьмем на линии (Y_1) точку с координатами (X, Y_1) и пусть (D_1) — прямая, параллельная оси OX, проведенная через эту точку. Решить уравнение $f_1(m) = 0$ — это значит, найти абсциссу точки пересечения (D_1) и (M). Из графика видно (впрочем, это можно установить и чисто аналитически!), что каково бы ни было X такое, что $0 < X < 1$, существует и притом только одна точка M_1 пересечения (D_1) и (M) расположенная к оси ординат ближе, чем выбранная точка (X, Y_1); ее абсцисса m_1, следовательно, меньше X. Далее, ордината Y_1 больше или равна $2\sqrt{2}+1$, а так как $2\sqrt{2}+1 > \frac{5}{2}$, то точка M_1 ближе к оси OY, чем точка $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ линии (M). Поэтому $m_1 < \frac{1}{2}$. Окончательно. Для всякого значения X, заключенного между 0 и 1, имеется и притом только одно значение m $(0 < m < 1)$, удовлетворяющее уравнению (1′). Это значение m_1 меньше и X и $\frac{1}{2}$.

Так как произведение корней уравнения $f_1(m) = 0$ равно 1, то

$$m_1 = \frac{Y+1-\sqrt{Y^2+2Y-3}}{2} = \frac{Y+1-\sqrt{(Y-1)(Y+3)}}{2}.$$

β) *Определение X, если m дано.* Если m дано, то $M = m + \frac{1}{m}$ известно и X, есть корень уравнения $g_1(X) \equiv 2X^2 - (M-1)X +$

$+1=0$. Исследование. Воспользуемся предыдущим графиком. Пусть M_1 точка линии (M), абсцисса которой равна m и проведем через точку M_1 прямую (D_1), параллельную OX. Решить уравнение $g_1(X)=0$ — это значит, найти абсциссы точек, общих (D_1) и (Y_1). Пусть m_0 и m_0' — абсциссы точек линии (M), ординаты которых равны соответственно 4 и $2\sqrt{2}+1$. Из графиков получаем следующие выводы: если $m<m_0$, прямая (D_1) пересекает (Y_1) только в одной точке M_1, и значит уравнение $g_1(X)=0$ имеет только одно решение; оно больше m и меньше $\frac{1}{2}$. Значит это меньший корень уравнения $g_1(X)=0$, и так как произведение корней этого уравнения равно 1, то

$$X'=\frac{M-1-\sqrt{M^2-2M-7}}{4},$$

причем $m<X'<\frac{1}{2}<\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Если $m=m_0$, уравнение имеет два решения $X'=\frac{1}{2}$ и $X''=1$. Только одно решение $X'=\frac{1}{2}$ удовлетворяет условию задачи и из графика ясно, что $m_0<X'=\frac{1}{2}$. Если $m_0<m<m_0'$, имеется два решения X' и X''; при этом,

$$m<\frac{1}{2}<X'<\frac{1}{\sqrt{2}}<X''.$$

Если $m=m_0'$, имеется двойное решение $X'=X''=\frac{1}{\sqrt{2}}$, причем $m_0'<X'=X''$.

Наконец, если $m_0'<m$ — решений нет.

Значения m_0 и m_0' — это наименьшие корни уравнений:

$$m^2-4m+1=0 \text{ и } m^2-(2\sqrt{2}+1)m+1=0,$$

т. е.

$$m_0=2-\sqrt{3},\quad m_0'=\frac{2\sqrt{2}+1-\sqrt{5+4\sqrt{2}}}{2}.$$

2°. *а) Условие, при котором* $\overline{BB'}+\overline{CC'}=0$.

Пусть условие

$$\overline{BB'}+\overline{CC'}=0 \tag{2}$$

выполнено. Тогда

$$(X-m)(1-2mX)+m(m-2X)(mX-1)=0$$

или

$$-2mX^2(m+1)+X(1+2m^2+m^3+2m)-m(1+m)=0$$

и, сокращая на $m+1$:

$$2mX^2-(m^2+m+1)X+m=0$$

или

$$X(m^2+1)=m(2X^2-X+1),$$

и, так как $m\neq 0$ и $X\neq 0$, то

$$m+\frac{1}{m}=2X+\frac{1}{X}-1. \qquad (2')$$

Так как все проведенные выкладки обратимы, то полученное условие (2′) не только является необходимым условием соотношения $\overline{BB'}+\overline{CC'}=0$, но и достаточным. Заметим между прочим, что если $m>0$, то и $X>0$, и значит, θ — острый угол. β). *Определение m, если X дано.* Если X дано, то дано $Y=2X+\frac{1}{X}$ и m есть корень уравнения $f_2(m)\equiv m^2-m(Y-1)+1=0$. Исследование. Построим на одном и том же графике линию (M) и линию (Y_2), полученную из линии (Y) переносом $Y_2=Y-1$:

$$Y_2=Y-1=2X+\frac{1}{X}-1.$$

Эта линия целиком выше линии (M), так как если $0<\alpha<1$, то

$$2\alpha+\frac{1}{\alpha}-1=\alpha+\frac{1}{\alpha}-(1-\alpha)<\alpha+\frac{1}{\alpha}.$$

Мы можем провести все исследования на соответствующем графике вполне аналогично тому, как это было сделано в (п., 1°, β).

Таким образом можно получить, что если $X<\frac{1}{2}$, то

$$m_2=\frac{Y-1-\sqrt{(Y-3)(Y+1)}}{2},$$

причем $X<m_2$, а если $\frac{1}{2}<X$, то решений нет.

γ) *Определение X, если m задано.* В этом случае X — корень уравнения

$$g_2(X)\equiv 2X^2-(M+1)X+1=0.$$

Оперируя так же, как и в (п., 1°, γ) с помощью соответствующего графика, приходим к выводам: если $0<m<1$, то

$$X'=\frac{M+1-\sqrt{M^2+2M-7}}{4},$$

причем $X'<m$ и $X'<\frac{1}{2}$. III. 1°. *Изучение функций*

$$y=2\,\frac{x-m}{m-2x}\ \text{ и }\ z=2m\,\frac{mx-1}{1-2mx}.$$

Изучение этих функций не представляет никакого труда и с точки зрения их возрастания и убывания, ни с точки зрения выпуклости и вогнутости их графиков. Отметим лишь следующее: если x изменяется от $-\infty$ до 0, то y убывает от -1 до -2; если x возрастает от 0 до $\frac{m}{2}$, то y убывает от -2 до $-\infty$. Если x возрастает от $\frac{m}{2}$ до m, то y убывает от $+\infty$ до 0, и если x возрастает от m до $+\infty$, то y убывает от 0 до -1.

Далее, если x возрастает от $-\infty$ до 0, то z убывает от $-m$ до $-2m$. Если x возрастает от 0 до $\frac{1}{2m}$, то z убывает от $-2m$ до $-\infty$. Если x возрастает от $\frac{1}{2m}$ до $\frac{1}{m}$, то z убывает от $+\infty$ до 0 и, наконец, если x возрастает от $\frac{1}{m}$ до $+\infty$, то z убывает от 0 до $-m$.

Постройте соответствующие кривые (Γ) и (Δ) для $m=\frac{1}{4}$.

2°. *Точки, общие линиям* (Γ) *и* (Δ). Если эти две линии имеют общие точки, их абсциссы являются решением уравнения $y=z$. На основании (II, 1°, γ) это уравнение можно записать в виде:

$$g_1(x) \equiv 2x^2-(M-1)x+1=0,$$

где

$$M=m+\frac{1}{m}, \qquad x \neq \frac{m}{2},\ x \neq \frac{1}{2m}.$$

Дискриминант этого уравнения:

$$\delta_1=(M-1)^2-8=\left(M-1-2\sqrt{2}\right)\left(M-1+2\sqrt{2}\right).$$

Второй множитель положителен, значит, уравнение $g_1(x)=0$ имеет действительные корни тогда и только тогда, когда

$$M \geqslant 1+2\sqrt{2}$$

или

$$m^2-\left(1+2\sqrt{2}\right)m+1 \geqslant 0.$$

Корни этого трехчлена:

$$m_0'=\frac{2\sqrt{2}+1-\sqrt{5+4\sqrt{2}}}{2} \text{ и } \frac{1}{m_0'},$$

причем $0<m_0'<1<\frac{1}{m_0'}$. Если $0<m<m_0'$, уравнение $g_1(x)=0$ имеет два различных действительных корня, т. е. линии (Γ) и (Δ) имеют две общие точки [эти корни отличны от $\frac{m}{2}$ и $\frac{1}{2m}$, так

как $g_1\left(\frac{m}{2}\right)=\frac{m+1}{2}>0$ и $g_1\left(\frac{1}{2m}\right)=\frac{m+1}{2m}>0$]. Если $m=m_0$,

уравнение $g_1(x)=0$ имеет двойной корень $x=\frac{M-1}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и линии (Γ) и (Δ) касаются в соответствующей точке. Если $m_0<$ $<m<1$, уравнение не имеет корней, а линии не имеют общих точек.

Точки, общие линиями (Γ) *и* (Δ'). Линия (Δ') есть график функции $-z$. Линии (Γ) и (Δ') имеют следовательно, общие точки тогда и только тогда, когда уравнение $y=-z$ имеет действительные корни. На основании (II, 2°, γ) — это уравнение можно переписать в виде:

$$g_2(x)\equiv 2x^2-(M+1)x+1=0,$$

где $M=m+\frac{1}{m}$, причем $x\neq\frac{m}{2}$ и $x\neq\frac{1}{2m}$. Мы видели, что при $0<m<1$ это уравнение имеет всегда два решения. Одно из них заключено между 0 и $\frac{1}{2}$ (см. II, 2°, γ). Другое, следовательно, больше 1, ибо произведение корней равно $\frac{1}{2}$. Кроме того, эти корни отличны от $\frac{m}{2}$ и $\frac{1}{2m}$, ибо

$$g_2\left(\frac{m}{2}\right)=\frac{1-m}{2}>0,\quad g_2\left(\frac{1}{2m}\right)=\frac{m-1}{2m}<0.$$

Значит рассматриваемые линии имеют всегда две общие точки.

Рекомендуется построить на одном чертеже графики (Γ), (Δ) и (Δ'). IV. 1°. *Тип биссектрис BB' и CC'.*

Известно, что в треугольнике ABC сторона BC видна из центра окружности, вписанной в этот треугольник под тупым углом равным $\frac{\pi}{2}+\frac{A}{2}$, и эта же сторона видна из центров вневписанных окружностей под острыми углами $\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$ или $\frac{A}{2}$.

Значит, если $\cos\theta<0$, т. е. θ — тупой угол, P есть центр окружности, вписанной в треугольник ABC. В этом случае BB' и CC' — биссектрисы внутренних углов треугольника ABC.

Предположим теперь, что $\cos\theta>0$, т. е. что θ — острый угол. Точка P в таком случае — центр окружности, вневписанной в треугольник ABC. Далее, угол PBC — острый ($PB>PC$); так как $PBQ=\frac{\pi}{2}$, то точка C лежит между P и Q и, следовательно, Q — также центр окружности, вневписанной в треугольник ABC. Поэтому прямая CC', которая проходит через P и Q — также биссектриса внешнего угла.

Наконец, точка R — также центр вневписанной окружности, если P и R лежат по разные стороны от B, т. е. если $\overline{PR} > \overline{PB}$, значит $\frac{md}{\cos\theta} > d$ или $(\cos\theta > 0)$, $\cos\theta < m$.

Окончательно: если $\cos\theta < 0$, BB' и CC' биссектрисы внутренних углов; если $0 < \cos\theta < m$, то BB' и CC' биссектрисы внешних углов; если $m < \cos\theta < 1$, BB' — биссектриса внутреннего угла, а CC' — внешнего. 2°. *Треугольники PQR, PBC, AQC, ABR подобны.*

Четырехугольник $QRBC$, вписанный в окружность с диаметром QR. Точка P есть точка пересечения двух секущих PQC и PRB, а значит $\triangle PBC \sim \triangle PQR$, причем вершины этих треугольников записаны в порядке их соответствия.

Аналогично, используя вписанные четырехугольники $PRAC$ и $PQAB$, докажем, что $\triangle AQC \sim \triangle PQR$ и $\triangle ABR \sim \triangle PQR$, причем вершины записаны в порядке их соответствия. Из треугольника PBC находим:

$$BC^2 = PB^2 + PC^2 - 2\overline{PB}\cdot\overline{PC}\cos\theta$$

или

$$a^2 = d^2 + m^2 d^2 - 2md^2\cos\theta,$$

откуда

$$\frac{a^2}{d^2} = m^2 - 2m\cos\theta + 1.$$

Так как

$$\triangle AQC \sim \triangle PBC, \text{ то } AC\cdot BC = PC\cdot QC.$$

Выше (см. I) было доказано, что

$$QC = d\left|\frac{1 - m\cos\theta}{\cos\theta}\right|,$$

значит

$$ab = md^2\left|\frac{1 - m\cos\theta}{\cos\theta}\right|,$$

откуда

$$\frac{ab}{d^2} = m\left|\frac{1 - m\cos\theta}{\cos\theta}\right|.$$

Аналогично из подобия треугольников PBC и ABR находим:

$$AB\cdot BC = BR\cdot PB, \quad \text{где} \quad BR = d\left|\frac{m - \cos\theta}{\cos\theta}\right|,$$

и значит

$$ac = d^2\left|\frac{m - \cos\theta}{\cos\theta}\right|,$$

откуда

$$\frac{ac}{d^2} = \left|\frac{m - \cos\theta}{\cos\theta}\right|.$$

Выражения $\frac{a^2}{d^2}$, $\frac{ab}{d^2}$, $\frac{ac}{d^2}$ получаются умножением a, b, c на $\frac{a}{d^2}$ и потому эти числа можно рассматривать как длины сторон треугольника, подобного треугольнику ABC. 3°. *Характер BB' и CC', если выполнено одно из соотношений (1') или (2').*

Мы видели в части II, что если выполнено одно из соотношений (1') или (2'), то θ — острый угол. Отсюда следует, (см. IV, 1°), что CC' в этих случаях всегда биссектриса внешнего угла. Кроме того, соотношение (1') может быть выполнено лишь в случае $m < \cos\theta$, а соотношение (2') лишь в случае (см. II, 1° и 2°) $m > \cos\theta$.

Отсюда следует, что если выполнено соотношение (1'), то BB' есть биссектриса внутреннего угла, а если выполнено соотношение (2'), то BB' — биссектриса внешнего угла (см. IV, 1°).

Случай $AB = AC$. Треугольник ABC в этом случае равнобедренный и так как $PB > PC$, то точка P лежит на биссектрисе внешнего угла A. Следовательно, BB' и CC' биссектрисы разных типов. Только соотношение (1') может быть выполнено и $m < < \cos\theta < 1$. Стороны AB и AC соответственно пропорциональны $\cos\theta - m$ и $m(1 - m\cos\theta)$ и раз они равны, то

$$\cos\theta - m = m(1 - m\cos\theta)$$

или

$$(1 + m^2)\cos\theta = 2m.$$

Это соотношение можно записать и так

$$\frac{2}{X} = M,$$

где

$$X = \cos\theta, \quad M = m + \frac{1}{m}.$$

Вопрос сводится к решению системы:

$$2X + \frac{1}{X} + 1 = M, \quad \frac{2}{X} = M$$

или

$$2X^2 + X - 1 = 0, \quad \frac{2}{X} = M.$$

Корни первого уравнения: —(это решение не годится) и $\frac{1}{2}$. Значит

$$\cos\theta = X = \frac{1}{2} \text{ и } \theta = \frac{\pi}{3},$$

значит $M = 4$ и потому $m = m_0 = 2 - \sqrt{3}$ (см. II, 1°, γ)—меньший корень уравнения $m^2 - 4m + 1 = 0$.

Построение треугольника, подобного треугольнику ABC. На основании IV, 2° стороны a и $b = c$ треугольника ABC пропорциональны числам

$$m_0^2 - 2m_0\cos\theta + 1 = m_0^2 - m_0 + 1 = 3(2 - \sqrt{3})$$

и

$$\frac{-m_0+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=1-2m_0=2\sqrt{3}-3,$$

следовательно, числам $\sqrt{3}$ и 1. Поэтому в треугольнике ABC мы имеем: $\hat{B}=\hat{C}=30°$ и $\hat{A}=120°$. 4°. *Случай* $m=\frac{1}{2}$ *при условии выполнения соотношения (2).*

В этом случае (см. II, 2°, γ) $X=\cos\theta$ — меньший корень уравнения

$$2X^2-\frac{7}{2}X+1=0$$

или

$$4X^2-7X+2=0,$$

т. е.

$$\cos\theta=X=\frac{7-\sqrt{17}}{8}.$$

Результаты, полученные выше (см. IV, 2°), позволяют написать [заметим, что $\cos\theta<m$ (IV, 3°)]:

$$\frac{a^2}{d^2}=\frac{1}{4}-\frac{7-\sqrt{17}}{8}+1=\frac{3+\sqrt{17}}{8},$$

$$\frac{ab}{d^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{7-\sqrt{17}}-\frac{1}{2}\right)=\frac{5+\sqrt{17}}{8},$$

$$\frac{ac}{d^2}=\frac{4}{7-\sqrt{17}}-1=\frac{\sqrt{17}-1}{8},$$

и кроме того:

$$\frac{\overline{BB'}}{d}=-\frac{\overline{CC'}}{d}=2\,\frac{\frac{7-\sqrt{17}}{8}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-\frac{7-\sqrt{17}}{4}}=\frac{1+\sqrt{17}}{4}.$$

Построение треугольника, подобного треугольнику ABC. Стороны такого треугольника пропорциональны числам $3+\sqrt{17}$, $5+\sqrt{17}$ и $\sqrt{17}-1$.

Достаточно построить поэтому треугольник со сторонами $c=\sqrt{17}-1$, $a=c+4$, $b=c+6$, что, конечно, легко сделать с помощью циркуля и линейки.

§ 2. Алгебра с тригонометрией

1. Решение. 1° Линии (Γ_1) и (Γ_2) симметричны относительно начала координат. 2°. Если $a<1$, то в полуинтервале $\left(-\infty, \frac{a-1}{a+1}\right]$ функция y убывает от a до $-\frac{a^2+1}{2}$; на сегменте $\left[\frac{a-1}{a+1}, \frac{1+a}{1-a}\right]$ она возрастает от $-\frac{a^2+1}{2}$ до $\frac{a^2+1}{2}$; в полуинтервале $\left[\frac{1+a}{1-a}, +\infty\right)$ — убывает от $\frac{a^2+1}{2}$ до a. Если $a>1$, то в полуинтервале $\left(-\infty, \frac{1+a}{1-a}\right]$ функция y возрастает от a до $\frac{a^2+1}{2}$, на сегменте $\left[\frac{1+a}{1-a}, \frac{a-1}{a+1}\right]$ функция y убывает от $\frac{a^2+1}{2}$ до $-\frac{a^2+1}{2}$ и в полуинтервале $\left[\frac{a-1}{a+1}, +\infty\right)$ y возрастает от $-\frac{a^2+1}{2}$ до a. Если $a=1$, то $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$; в полуинтервале $(-\infty, 0]$ функция y убывает от 1 до -1; в полуинтервале $[0, +\infty)$ функция y возрастает от -1 до 1. *Замечание.* Каково бы ни было $a \neq 0$ функция обращается в нуль при $x=a$ и $x=-\frac{1}{a}$; при $x=0$, $y=-a$; наконец, она принимает значение $y=a$, при $x=\frac{2a}{1-a^2}$ и при $x \to \infty$, $y \to a$.

Частные случаи: 1) $a=0$, $y=\frac{x}{1+x^2}$; в полуинтервале $(-\infty, -1]$ y убывает от 0 до $-\frac{1}{2}$; на сегменте $[-1,1]$ y возрастает от $-\frac{1}{2}$ до $\frac{1}{2}$; в полуинтервале $[1, +\infty)$ y убывает от $\frac{1}{2}$ до 0.

Случаи $a=\frac{1}{2}$, $a=2$ следуют из общих рассмотрений.

3°. $y=\frac{1}{2\cos^2\alpha}\sin 2(\varphi-\alpha)$. 4°. $y_1=\frac{1}{2\cos^2\alpha}\sin 2(\varphi_1-\alpha)$,

$$y_2=\frac{1}{2\cos^2\alpha}\sin 2\left(\varphi_1+\frac{\pi}{3}-\alpha\right),$$

$$y_3=\frac{1}{2\cos^2\alpha}\sin 2\left(\varphi_1-\frac{\pi}{3}-\alpha\right).$$

Отсюда $y_1+y_2+y_3=0$, т. е. точка пересечения медиан треугольника $M_1M_2M_3$ всегда лежит на оси Ox.

Абсцисса центра тяжести (x — абсцисса M_1):

$$X=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=\frac{1}{3}\left(x+\frac{x+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{x}{\sqrt{3}}}+\frac{x-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{x}{\sqrt{3}}}\right)=$$

$$=\frac{1}{3}\left(x+2\frac{3x^2+1}{3-x^2}\right).$$

Отсюда и из соотношения $x=\operatorname{tg}\varphi$ заключаем, что в полуинтервале (для φ) $\left[0,\ \frac{\pi}{6}\right)$ y возрастает от 0 до $+\infty$, в интервале $\left(\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right)$ y возрастает от $-\infty$ до $+\infty$; в интервале $\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{6}\right)$ y возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ и в полуинтервале $\left(\frac{5\pi}{6},\ \pi\right]$ y возрастает от $-\infty$ до 0. 2. $\Delta=33m^2-36m+4$, $f(-1)=-(2m^2-3m-2)$, $f(1)=-(2m^2-m-6)$; Δ обращается в нуль при $m'=$ $=\frac{18-8\sqrt{3}}{33}$ и $m''=\frac{18+8\sqrt{3}}{33}$; $\Delta<0$, если

$$\frac{18-8\sqrt{3}}{33}<m<\frac{18+8\sqrt{3}}{33}.$$

Далее $f(-1)=0$ при $m=-\frac{1}{2}$ и $m=2$; $f(-1)>0$ при $-\frac{1}{2}<m<2$; $f(1)=0$ при $m=-\frac{3}{2}$ и $m=2$; $f(1)>0$ при $-\frac{3}{2}<m<2$.

Очевидно

$$\frac{18+8\sqrt{3}}{33}<2.$$

Таким образом надо рассмотреть последовательные интервалы

$$\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right),\ \left(-\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2},\ \frac{18-8\sqrt{3}}{33}\right),$$

$$\left(\frac{18-8\sqrt{3}}{33},\ \frac{18+8\sqrt{3}}{33}\right),\ \left(\frac{18+8\sqrt{3}}{33},\ 2\right),\ (2,\ +\infty)$$

и их граничные точки: а) если $m<-\frac{3}{2}$, корни уравнения действительны и различны, а числа -1 и 1 заключены между ними;

в) для $-\frac{3}{2}<m<-\frac{1}{2}$ корни уравнения действительны и различны; число -1 заключено между ними, число 1 не заключено между ними; c) для $-\frac{1}{2}<m<\frac{18-8\sqrt{3}}{33}$ корни уравнения действительны и различны; ни одно из чисел -1 и 1 не заключено между ними. Для того чтобы узнать будут ли оба корня меньше -1 или оба корня заключены между -1 и 1, или оба корня больше 1, рассмотрим их полусумму $\frac{s}{2}=\frac{m-2}{8}$; она <-1 для $m<-6$, заключена между -1 и 1 для $-6<m<10$ и больше 1, если $m>10$. Так как рассматриваемые сейчас значения для m заключены в интервале $(-6, 10)$, то $-1<\frac{s}{2}<1$, и значит, оба корня также заключены между -1 и 1; d) для $\frac{18-8\sqrt{3}}{33}<m<$ $<\frac{18+8\sqrt{3}}{33}$ корни уравнения мнимые; e) для $\frac{18+8\sqrt{3}}{33}<m<2$ те же выводы, что и для $-\frac{1}{2}<m<\frac{18-8\sqrt{3}}{33}$; f) для $m>2$ те же выводы, что и для $m<-\frac{3}{2}$; g) для $m=-\frac{3}{2}$ один из корней равен 1; другой, поэтому, равен произведению корней $p=$ $=-\frac{15}{8}$; h) для $m=-\frac{1}{2}$ один из корней равен -1, следовательно, другой равен произведению корней, взятому с обратным знаком, т. е. $-p=\frac{3}{8}$; i) для $m=\frac{18-8\sqrt{3}}{33}$ и $m=\frac{18+8\sqrt{3}}{33}$ уравнение имеет двойной корень. j) для $m=2$ корни уравнения -1 и 1. 2°. Если заменить $\cos u$ буквой x, то получим уже изученный квадратный трехчлен $f(x)$: a) для $m<-\frac{3}{2}$ уравнение (1) имеет корни x' и x'' такие, что $x'<-1<1<x''$, значит $f(x)<0$ для всех значений x таких, что $-1\leqslant x\leqslant 1$ и значит неравенство удовлетворяется при всех u, $0\leqslant u\leqslant\pi$; b) для $-\frac{3}{2}<m<-\frac{1}{2}$ уравнение (1) имеет действительные корни такие, что $x'<-1<x''<1$. Значения x, при которых $f(x)<0$, будут $-1<x<x''$ и значит неравенство удовлетворяется, если $\arccos x''<u<\pi$; c) для $-\frac{1}{2}<m<\frac{18-8\sqrt{3}}{33}$ уравнение (1) имеет действительные корни x' и x'' такие, что $-1<x'<x''<1$ и значит $f(x)<0$ при $x'<x<x''$, т. е. неравенство выполняется, если $\arccos x'>x>\arccos x''$; d) для $\frac{18-8\sqrt{3}}{33}<m<$

$< \frac{18+8\sqrt{3}}{33}$ — корни уравнения мнимые и значит неравенство не имеет решений; e) для $\frac{18+8\sqrt{3}}{33} < m < 2$ те же заключения, что и для $-\frac{1}{2} < m < \frac{18-8\sqrt{3}}{33}$; f) для $m > 2$ те же заключения, что и для $m < -\frac{3}{2}$; неравенство (2) выполняется при всех значениях u. 3°. $\arccos\frac{3}{16} < u < \frac{5\pi}{6}$. **3.** $y = x + 1$ прямая линия; эта прямая пересекает тригонометрический круг (круг радиуса 1 с центром в начале координат) в точках $B(0, 1)$ и $A'(-1,0)$; $x - y + 1 > 0$ или $y < x + 1$ для точек дуги $A'B$, расположенной под прямой BA' и $x - y + 1 < 0$ для точек дуги $\overset{\smile}{A'B}$, расположенных над этой прямой. Таким образом, $\cos\varphi - \sin\varphi + 1 > 0$, если $2k\pi - \pi < \varphi < 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi - \sin\varphi + 1 < 0$, если $2k\pi + \frac{\pi}{2} < \varphi < 2k\pi + \pi$.

§ 3. Планиметрия

1. Очевидно, прежде всего, должно быть $2l < a$, что мы и будем предполагать выполненным. 1° $BS = CS' = \frac{a}{2} - l$. 2°. Геометрическое место центров I вписанных окружностей есть хорда JK окружности, построенной на BC, как на диаметре, перпендикулярная к BC (за исключением ее концов); это следует из того, что угол BIS изменяется от π до $\frac{\pi}{2}$. Геометрическое место центров I' окружностей, вневписанных в угол A, есть часть прямой, проходящей через точку S' перпендикулярно BC за вычетом хорды $I'K'$, которую эта прямая высекает в окружности, построенной на BC, как на диаметре. 3°. $b = \frac{a}{2}\frac{\kappa^2+1}{\kappa^2-1} + l$, $c = \frac{a}{2}\frac{\kappa^2+1}{\kappa^2-1} - l$; так как $b + c > 0$, то $\kappa > 1$. Обратно. Если $k > 1$, то $b > 0$, $c > 0$ и $b - c < a < b + c$. 4°. $r = \frac{1}{\kappa}\sqrt{\frac{a^2}{4} - l^2}$; строим окружность на BC, как на диаметре. Зная $b - c = 2l$ и a можно построить точку S; полухорда SJ этой окружности, перпендикулярная BC, есть $\sqrt{\frac{a^2}{4} - l^2}$; затем, зная r, построим окружность, вписанную в треугольник (ее радиус SI). Условие возможности построения: $r < SI$ или $\kappa > 1$. **2.** 1°. Геометрическое место точек ω и ω' — медиатрисы (Δ) и (Δ') отрезков AB и $A'B$. Пусть K — точка пересечения $O\omega$ с (Δ); тогда $\overline{H\omega}\cdot\overline{HK}=-\overline{OH}^2$. С другой стороны, треугольники $OH'\omega'$ и OHK гомотетичны, значит

$$\frac{\overline{H'\omega'}}{\overline{HK}}=\frac{\overline{OH'}}{\overline{OH}};$$

отсюда $\overline{H\omega}\cdot\overline{H'\omega'}=-\overline{OH}\cdot\overline{OH'}=\text{const}$. 2°. Поляра точки ω относительно (O) вращается вокруг полюса P прямой (Δ) относительно (O); аналогично поляра точки ω' относительно (O) вращается вокруг полюса P' прямой (Δ) относительно (O); огибающие вырождаются в точки P и P'. Точка I пересечения поляр точек ω и ω' относительно (O) описывает целиком окружность построенную на PP', как на диаметре. 3°. В инверсии $(B, \overline{BA}\cdot\overline{BA'})$ окружности (ω) и (ω') переходят в AM и $A'M$.

Окружности (ω) и (ω') равны тогда, когда точка M лежит на перпендикуляре к AA' в его середине. 3. 1°. (C_0) — окружность, построенная на AB, как на диаметре. 2°. Окружность (C) можно определить как геометрическое место точек M таких, что $(MA, MB)=\theta\ (\mathrm{mod}\,\pi)$, где θ — какой-нибудь угол, который можно считать заключенным между 0 и π и который, в силу того, что (C) не совпадает с (C^0) отличен от $\frac{\pi}{2}$.

Если M' — образ M в указанном преобразовании, то

$$(M'A,\ M'B)=(M'A,\ MA)+MA,\ M'B)(\mathrm{mod}\pi)$$

$$=(M'A,\ MA)+(MA,\ MB)\ (\mathrm{mod}\pi)\ =\frac{\pi}{2}+\theta.$$

Значит точка M' также находится на некоторой окружности (C'), проходящей через A и B; точка M' описывает целиком (C') в то время, как M описывает целиком (C). Окружности (C) и (C') соответственно касаются в точке B лучей Bz и Bz', определенных условием: $(\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{Bz})=\theta$, $(\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{Bz'})\ =\theta+\frac{\pi}{2}$, а так как эти лучи Bz и Bz' перпендикулярны, то (C) и (C') — ортогональны. Окружность (C') можно получить из окружности (C) при помощи подобия, полученного в результате поворота вокруг точки A на угол $\frac{\pi}{2}$, при котором центр O окружности (C) перейдет в Ω) и последующей гомотетии, которая Ω переведет в центр O' окружности (C). Точка M окружности (C) при этом перейдет в точку M' окружности (C') такую, что $MA\perp MA'$, значит, если M описывает (C), то соответствующая точка M' в *данном* преобразовании получается из M указанным подобием, она описывает (C'). 3°. Пусть E — точка (Γ), диаметрально противоположная A. Точка E может лежать и на отрезке AB и вне его (причем на продолжениях за точку A или за точку B).

Во всех этих случаях $ME \parallel AM'$ и значит

$$\frac{\overline{BM'}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{BA}}{\overline{BE}}.$$

Значит точка M' получится из M гомотетией $\left(B, \frac{\overline{BA}}{\overline{BE}}\right)$. Если M

описывает (Γ), то M' описывает (Γ'), полученную из (Γ) указанной гомотетией. Очевидно (Γ') проходит через A (A есть образ E в указанной гомотетии). 4°. Так как A и B — центры гомотетий (Γ) и (Γ'), то их центры O и O' делят гармонически пару точек A и B. Значит

$$\frac{1}{\overline{AO}}+\frac{1}{\overline{AO'}}=\frac{2}{\overline{AB}},$$

откуда

$$x'=\frac{ax}{2x-a}$$

и значит

$$y=\overline{OO'}=x'-x=2\frac{x(a-x)}{2x-a}.$$

Эта функция убывает в интервале $\left(-\infty, \frac{a}{2}\right)$ и в интервале $\left(\frac{a}{2}, +\infty\right)$. На первом интервале она выпукла вверх, на втором — вниз;

$$\lim_{x\to\frac{a}{2}-0} y=-\infty. \qquad \lim_{x\to\frac{a}{2}+0} y=+\infty.$$

График $z=OO'$ получится отражением частей графика $y=\overline{OO'}$, расположенных ниже оси Ox в этой оси. 4. Построение (C) всегда возможно и единственно. Исключением является случай, когда точка (O) совпадает с I. В этом случае окружность (C) вырождается в прямую FH. Для определения геометрического места точек G заметим, что

$$(GH, GO)=(HO, HF)(\mathrm{mod}\,\pi).$$

Обозначим через H' точку, симметричную точке относительно (D). Тогда

$$(HO, HF)=-(H'O, H'F)=-(H'O, H'H)=(H'H, H'O).$$

Значит $(GH, GO)=(H'H, H'O)$ и потому точки G, H, O, H' лежат на одной окружности. Отсюда следует, что

$$\overline{FO}\cdot\overline{FG}=\overline{FH}\cdot\overline{FH'}=-\overline{FS^2},$$

где S — одна из точек встречи прямой, проходящей через F перпендикулярно FH с окружностью, построенной на HH', как на диаметре.

Таким образом, точки O и G соответствуют друг другу в инверсии $(F, -\overline{FS^2})$ и значит точка G лежит на окружности (Γ), в которую переходит прямая (D) при этой инверсии. Пусть I — основание поляры прямой FS относительно окружности, построенной на HH', как на диаметре. Тогда $\overline{FI}\cdot\overline{FI}=-\overline{FS^2}$ и значит (Γ) — это окружность, построенная на FJ, как на диаметре. Если точка O описывает (D), за исключением I, то точка G описывает окружность (Γ) за исключением J. 5. 1°.

$$y - \frac{x^2 - 2ax\cos\alpha + a^2}{x^2 + 2ax\cos\alpha + a^2}.$$

Если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то на сегменте $[0, a]$ y убывает, на полуинтервале $[a, +\infty)$ возрастает; если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то наоборот. В первом случае $y_{\min} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$, во втором $y_{\max} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. 2°. *Указание:* геометрическое место точек A таких, что $\frac{AB}{AC} = \kappa$ есть окружность (γ) пучка с предельными точками B и C. Степень точки O относительно любой окружности (γ) равна a^2. Поэтому, если (γ) касается OL в точке T, то $OT = a$. Если α острый угол, значение κ, при котором происходит касание, таково: $\kappa = \frac{TB}{TC} = $

$= \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Если $\kappa < \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ — решений нет; если $\kappa = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, то OL и (γ) касаются (одно решение). Если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < \kappa < 1$, то OL и (γ) пересекаются в двух точках (два решения). Если $\kappa > 1$, то (γ) и OL расположены по разные стороны от перпендикуляра к Ox в точке O — решений снова нет. Если α тупой угол, то задача имеет два решения, при $1 < \kappa < \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Графики, построенные выше, подтвердят это. *Замечание.* Случай $\alpha = \frac{\pi}{2}$ не представляет интереса. 3°. *Указание.* Так как степень O относительно (γ) равна a^2, то в случае существования двух точек A и A' имеем: $\overline{OA}\cdot\overline{OA'} = a^2 = OB^2 = OC^2$, значит окружности (ABA') и (ACA') касаются Ox в точках B и C и их центры лежат на перпендикулярах (Δ) и (Δ') к Ox в точках B и C. 1-й случай: α дано, κ — переменное. В этом случае A и A' меняются на фиксированном луче OL, оставаясь гармонически сопряженными с точкой T и T', симметричной T относительно O (следует из $OT = a$, $\overline{OA}\cdot\overline{OA'} = a^2$). Поэтому середина m хорды AA' описывает продолжение отрезка OT за точку T, а центры I и I' окружностей (Γ) и (Γ') описывают полупрямые, отсекаемые от прямых (Δ) и (Δ') прямой, проходящей через T перпендикулярно OL. 2-й случай: κ — дано, α — переменное. Пусть, например, $\kappa < 1$. Тогда центр ω фиксированной окружности (γ) лежит на луче Bx. В этом случае геометрическое место точек m есть полуокружность, построенная на $O\omega$, как на диаметре, а геометрическое место центров (Γ) и (Γ') — полупрямые, отсекаемые от (Δ) прямой OT [T — точка прикосновения касательной из O к (γ)]. 4°. AA', BB', CC' — радикальные оси пар соответствующих окружностей.

В инверсии $(Q, \overline{QB'}\cdot\overline{QC'})$ окружность (Γ) переходит в (Γ'), значит Q — их центр гомотетии. Для решения последнего вопроса полезно заметить, что BC' и CB' проходят через точки C_1 и B_1, диаметрально противоположные точкам C и B на окружностях (Γ') и (Γ). 6. 1,011 радиан (приблизительно 1 радиан) 7. 1°. $\frac{AM}{AM'} = \sqrt{\frac{a}{a'}}$. Геометрическое место точек P есть дуга полуокружности радиуса AB' с центром A, одна из граничных точек которой лежит на прямой (D) по другую сторону от A, чем точки B и B', а другая является точкой пересечения этой полуокружности с перпендикуляром (D) в точке B. 8. Если M — точка пересечения (IIa) с (O), то M — середина отрезка IIa. Отсюда построение: строим окружность (Γ) с центром M и радиусом $MI = MIa$ и окружность (O) с центром O и радиусом OM. Точки пересечения окружностей (Γ) и (O) суть B и C. Вторая же точка пересечения (IIa) с (O) есть A. Исследование. Пусть O, I, Ia не лежат на одной прямой. Точка A должна лежать на прямой IIa с той же стороны от точки M, что и точка I, значит точка O должна лежать по ту же сторону от медиатрисы отрезка IM, где лежит точка I. Отметим, что при этом окружности (Γ) и (O), наверное, пересекутся, так как условие их пересечения

$$\left|OM - \frac{IIa}{2}\right| < OM < OM + \frac{IIa}{2}$$

будет при этом выполнено (доказать). Аналогично исследуется случай расположения точек I, I_a, O на одной прямой. 9. 1°. x и y — корни уравнения $z^2 - (2p - a)z + 2p(p - a) = 0$. Условие возможности решения $a < p \leqslant a\,\frac{\sqrt{2}+1}{2}$.

2°. $AB = \frac{2p(p-a)}{a}$, $s = p(p - a)$; при изменении p от a до $a\,\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ точка (p, s) описывает дугу параболы $s = p\,(p - a)$, ограниченную точками:

$$(a,\ 0) \text{ и } \left(a\,\frac{\sqrt{2}+1}{2},\ \frac{a^2}{4}\right).$$

$$3°.\ \alpha)\ x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad p = a\,\frac{3+\sqrt{3}}{4};$$

$$\beta)\ x = \frac{a\sqrt{5}}{5}, \quad y = \frac{2a\sqrt{5}}{5}, \quad p = a\,\frac{5+3\sqrt{5}}{10};$$

$$\gamma)\ x = \frac{3}{5}a, \quad y = \frac{4}{5}a, \quad p = \frac{6a}{5}.$$

10. 2°. Геометрическое место точек P есть касательная к окружностям (O) и (O') в точке A [ибо эта точка есть радикальный центр окружностей (O), (O') и (C)]. 3°. Задача возможна, если точка M лежит внутри серпа, ограниченного окружностями (O) и (O'), или на одной из этих окружностей. Точка H, в которой EE' пересекает Ax, есть центр отрицательной гомотетии окружностей

(O) и (O') (из подобия треугольников). Отсюда следует, что, если B и B' — точки, в которых луч Ax пересекает вторично окружности (O) и (O'), то $\overline{HA}^2 = \overline{HB} \cdot \overline{HB'}$. Далее выводим отсюда: $\overline{HE} \cdot \overline{HE'} = \overline{HA}^2$.

Значит точки E и E' друг другу соответствуют в инверсии $(H, \overline{AH}^2)$. (Эта инверсия (O) переводит в (O') и обратно). Обозначая вторую точку пересечения HM с (C) через M', имеем $\overline{HM} \times \times \overline{HM'} = \overline{HE} \cdot \overline{HE'} = \overline{HA}^2$ и таким образом точка M' будет построена. Вопрос сводится к известной задаче: построить окружность (C), проходящую через две точки M и M' и касающуюся одной из окружностей (O) [или (O')]. Эта задача имеет или одно, или два решения, или совсем не имеет решений; построение, например, таково: точку M' можно определить как вторую точку пересечения HM с окружностью (Γ), проходящей через A и касающейся Ax в точке A. Пусть I точка пересечения радикальной оси окружностей (Γ) и (O) с HM. Пусть IE_1' и IE_2' — касательные из I к (O'). Точки E_1' и E_2' — точки прикосновений искомой окружности (C) к (O'). *Исследование*: так как окружность (O) переходит в (O') (и обратно) в инверсии $(H, \overline{AH}^2)$, то точка M, лежащая внутри указанного выше серпа, остается внутри него и значит в этом случае задача имеет два решения; в случае же, если точка M лежит на (O) или (O') — одно решение. *Замечание*. Задача может быть решена также рассмотрением или инверсии $(A, \overline{AB} \cdot \overline{AB'})$ или $(M, \overline{MA}^2)$. 4°. На основании предыдущего, общая касательная в точке касания к двум касающимся окружностям (C) проходит через H, значит $HA = HT$ и геометрическое место точек T есть окружность с центром H и радиусом HA. Из $\overline{HE} \cdot \overline{HE'} = \overline{HT}^2$ следует, что указанная окружность ортогональна всем окружностям (C).

Вычислить AH проще всего из того, что H есть центр отрицательной гомотетии окружностей (O) и (O'), т. е. (A, H, O', O) — гармоническая четверка,
откуда

$$\frac{2}{\overline{AH}} = \frac{1}{\overline{AO}} + \frac{1}{\overline{AO'}},$$

$$AH = \frac{2RR'}{R + R'}.$$

Наконец, геометрическое место оснований поляр точки A относительно (C) совпадает с геометрическим местом точек T (окружность). 11. 1°. Точка R расположена на поляре (D) точки F относительно параллельных прямых (D') и (D''). Точка I гармонически сопряжена с точкой F относительно A и A'. Отсюда следует, что точка Q, в которой прямая (d') пересекает (D), гармонически сопряжена с точкой F относительно P и P'. Отсюда следует, что прямые RP', RP, RF, PQ — образуют гармоническую четверку. Отсюда следует, что прямая RF пересекает (D') в точке J такой, что J — середина MP. Точка J на прямой (D') может занимать любое положение; в самом деле: возьмем на прямой (D') произвольную точку J_1 и построим окружность с центром J_1, проходящую через F. Пусть эта окружность пересечет (D') в точках M_1 и P_1; тогда $FM_1 \perp FP_1$; эти прямые можно принять за (d) и (d') и тогда точка J совпадает с J_1. Отсюда следует, что точка J описывает всю прямую (D'), и значит R — всю прямую (D). 2°. Пусть H — проекция F на MP'. Четырехугольники $FAMH$ и $FA'P'H$ могут быть вписаны в окружность, значит $\llcorner FAH + \llcorner FA'H = \llcorner FMH + \llcorner FP'H = 90°$. Значит AHA' — прямоугольный треугольник и значит точка H расположена на окружности с диаметром AA'. На той же окружности расположена проекция H' точки F на $M'P$. Так как направления прямых (d) и (d') произвольны, то H и H' описывают всю эту окружность. 12. А. а) Построим какую-нибудь окружность, проходящую через точки A и B и пересекающую (Γ), затем их радикальную ось; пусть J точка пересечения этой радикальной оси с прямой AB; из точки J проводим касательные JC' и JC'' к (Γ); окружности (ABC') и (ABC'') касаются (Γ) в точках C' и C''. б) Построим какую-нибудь окружность, касающуюся прямой (D) в точке A и пересекающей (Γ), затем их радикальную ось. Пусть J — точка пересечения этой радикальной оси и прямой (D). Проводим из точки J касательные JC' и JC'' к (Γ); C' и C'' — точки прикосновения этих касательных к (Γ) суть также точки прикосновения искомых окружностей с (Γ).

В. Обозначим через A точку, ближайшую к F (следует сделать два чертежа — один, когда точка F лежит между точками A и A', другой, когда точка F лежит вне отрезка AA'; случай $AF = A'F$ исключаем, ибо тогда прямой (D) не существует). а) Окружность с диаметром FP ортогональна (C), ибо F и P гармонически сопряжены относительно (C), следовательно, окружность, построенная на FP, как на диаметре, будет ортогональна и (γ_1), так как окружность (γ_1) касается FP в точке F; на окружности (γ_1) и (C) касаются в точке K_1, а окружность, построенная на FP, как на диаметре, их пересекает ортогонально, значит степени центра J окружности, построенной на FP, как на диаметре, относительно окружностей (γ_1) и (C), равны между собой, а потому J лежит на радикальной оси этих окружностей, т. е. на их общей касательной в точке K_1. Так как $JK_1 = JF$, то окружность, построенная на FP, как на диаметре, проходит через K_1 (аналогично и через K_2). б) Из $PF^2 = \overline{PK_1} \cdot \overline{PM_1}$ следует $\frac{PF}{\overline{PM_1}} = \frac{\overline{PK_1}}{PF}$ и значит $\triangle PFK_1 \sim \triangle PM_1F$. Отсюда и из того, что

$\llcorner FK_1P = 90°$ следует, что $\llcorner M_1FP = 90°$ (аналогично и $\llcorner M_2FP = 90°$). Отсюда точки M_1 и M_2 диаметрально противоположны F на окружностях (γ_1) и (γ_2). в) В инверсии (P, PF^2) окружности (γ_1) и (γ_2) инвариантны; окружность с диаметром M_1M_2 касается (γ_1) в точке M_1, и (γ_2) в точке M_2 переходит в окружность, касающуюся (γ_1) в точке K_1 и (γ_2) — в точке K_2, т. е. в окружность (C). Наконец, окружность с диаметром FQ также переходит в себя. Но окружности с диаметром FQ ортогональны (C) значит и окружности с диаметром M_1M_2. С. Четыре точки M_1, M_2, F, Q образуют гармоническую четверку, значит четыре луча IM_1, IM_2, IF, IQ также образуют гармоническую четверку, но $IF \perp IQ$, значит IF — биссектриса угла M_1IM_2 (для построения удобно взять $\lambda < 0$). Так как $FM \cdot FM' = FI \cdot FI'$ $(= |\lambda|)$, то $FM \cdot FI = FI' \cdot FM'$ и значит $\triangle FIM \sim \triangle FM'I'$. Угол I первого $\triangle$ равен углу M' — второго, угол M треугольника HIM равен углу I' треугольника $K'M'I'$, значит и эти треугольники подобны. Из подобия треугольников FIM и $FM'I'$ следует $FM : FI' = MI : I'M'$; из подобия треугольников HIM и $K'M'I'$ следует $MI ; I'M' = MH : I'K'$, значит $MF : MH = FI' : I'K'$. Если $MF : MH = \mathrm{const}$, то и $FI' : I'K' = \mathrm{const}$, и поскольку точки F и I' фиксированы $I'K' = \mathrm{const}$, т. е. прямая (γ') касается фиксированной окружности с центром I'. Отсюда следует, что окружность (γ) остается касательной к фиксированной окружности, полученной в результате указанной инверсии (F, λ) из предыдущей. Так как в результате инверсии (F, λ) точка I' переходит в I, а с другой стороны, точка I' переходит в основание поляры точки F относительно окружности с центром I' [касающейся (γ')], то (D) — поляра F относительно указанной фиксированной окружности, которой касаются все окружности (γ). D.

Образ (γ) в инверсии с центром F и сохраняющей (C) есть прямая, касающаяся (C) в точке K' окружности (C), лежащей на прямой KF. Точка I гармонически сопряжена точке F относительно точек A и A', в которых IF пересекает (C); ее образ I', следовательно, гармонически сопряжен относительно точек A и A' с бесконечно удаленной точкой AA' и значит I' совпадает с O. Далее $\triangle FMI \sim \triangle FI'M'$ (или FOM'). Пусть K' проекция I' на прямую (γ); тогда $\triangle MIH \sim \triangle OM'K'$ и значит $FM : FI' = MI : I'M' = MH : IK'$, откуда $MF : MH = FI' : I'K'$. Так как точки F и I фиксированы так же как $I'K'$, то $FI' : I'K' = \mathrm{const}$ и значит $FM : MH = \mathrm{const}$ (при изменении γ).
14. 1°. *Указание*: MR — медиана прямоугольного треугольника ARP. Поляра M — прямая AR, поляра Q — прямая BM. Так как точки M и Q гармонически сопряжены относительно (O), то окружность с диаметром MQ ортогональна (O). 2°. Центр Ω окружности (Γ) лежит на прямой FF'. Так как окружность (Γ) ортогональна (O), то она делит этот диаметр FF' гармонически. Значит окружность (Γ) принадлежит пучку окружностей с предельными точками F и F' и значит она ортогональна любой окружности, проходящей через F и F'.

Окружность (MFF') ортогональна (Γ), значит касательная к (MFF') в точке M есть $M\Omega$. 3°. Прямые BQ, BM, BP, BA — образуют гармоническую четверку, ибо прямая (D) $\parallel$ (Δ) и $MP = MA$; значит $(MQST) = -1$. Наконец, окружность (SFF') ортогональна (Γ) и значит делит гармонически MQ, поэтому проходит через T. 15. 1° (α), (β), (γ) — окружности, построенные на ID, IE и IF, как на диаметрах, их радиусы равны $\frac{r}{2}$. Углы, под которыми они пересекаются, равны углам данного треугольника. 2°. $\angle IA'E = \angle IA'F = 90°$, значит их сумма равна 180° и значит $FA'E$ — прямая. Далее, $\triangle IA'B'$ подобен треугольнику IAB. Отсюда $\angle IA'B' = \frac{B}{2}$, $\angle IA'C' = \frac{C}{2}$, значит $A' = \frac{B+C}{2}$; аналогично $B' = \frac{C+A}{2}$, $C' = \frac{A+B}{2}$. Далее, $B'C' = r \cos \frac{A}{2}$, $C'A' =$

$= r\cos\dfrac{B}{2}$, $A'B' = r\cos\dfrac{C}{2}$. Радиус окружности, описанной около треугольника $A'B'C'$ равен $\dfrac{r}{2}$ (окружность Эйлера!). 3°. $(A'ID)$, $(B'IE)$, $(C'IF)$ получаются инверсией AD, BE и CF, но эти прямые имеют общую точку K', значит указанные окружности имеют общую точку K, полученную из K' инверсией (J). 4°. (AID), (BIE), (CIF) в инверсии переходят в медианы $A'D$, $B'E$, $C'F$ треугольника DEF; пусть g' — их общая точка, тогда указанные окружности имеют общую точку g, полученную из g' инверсией (J). В треугольнике DEF точка g', точка I и центр ω окружности $(A'B'C')$ лежат на одной прямой, значит, на одной прямой лежат точки ω, g g' и I. Но ω получается из O инверсией J, значит O, I и ω лежат на одной прямой. Так как окружности (AID), (BIE), (CIF) проходят через точки I и g, и точка O лежит на прямой Ig, то точка O имеет одну и ту же степень относительно этих окружностей. 16. Пусть α и β — точки пересечения прямой AB с данными прямыми (d_α) и (d_β); обозначения введем так, чтобы векторы $\overrightarrow{\alpha\beta}$ и $\overrightarrow{AB}$ имели бы одинаковое направление. Обозначим через (Δ_0) прямую, проходящую через O параллельно AB. Рассмотрим два случая: 1) (Δ) лежит в той же полуплоскости от (Δ_0), где AB; 2) (Δ) лежит в другой полуплоскости от (Δ_0). В первом случае [прямую (Δ) обозначим тогда через (Δ_1)] точку C надо выбрать на (d_β), а точку D на (d_α) (чтобы получить выпуклую трапецию $ABCD$). Во втором случае [прямую (Δ) обозначим тогда через (Δ_2)] точку C надо выбрать на (d_α), а точку D на (d_β). И в том и в другом случае $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ противоположно направлены.

Рассмотрим 1-й случай. Пусть M — точка пересечения AC и BD и пусть OM пересекает AB в точке I, а CD — в точке J. Тогда $\dfrac{\overline{AI}}{\overline{IB}} = \dfrac{\overline{CJ}}{\overline{JD}}$ и $\dfrac{\overline{CJ}}{\overline{JD}} = \dfrac{\overline{\beta I}}{\overline{I\alpha}}$, откуда $\overline{IA}\cdot\overline{I\alpha} = \overline{IB}\cdot\overline{I\beta}$. Значит I лежит на радикальной оси двух окружностей, одна из которых проходит через A и α, другая — через B и β. Значит I — фиксированная точка. Если C описывает луч $O\beta$, точка M описывает отрезок OP, где P — точка пересечения OI с прямой, проходящей через A параллельно (d_β). Аналогично рассматривается второй случай. Геометрическое место точек M есть совокупность двух отрезков OP и OQ.

Для решения второго вопроса заметим, что середина отрезка, соединяющего середины диагоналей, совпадает с серединой отрезка, соединяющего середины непараллельных сторон, и совпадает с серединой отрезка, соединяющего середины оснований. Пусть S— середина AB, S' — середина CD, T — середина SS'. Геометрическое место точек S' есть прямая $O\gamma$, где γ — середина $\alpha\beta$, а геометрическое место точек T получается из прямой $O\gamma$ гомотетией $\left(S, \dfrac{1}{2}\right)$. 17. *Решение.* Положим $(D_1 D_2) = \alpha$, $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Пусть M — какая-нибудь точка плоскости, а M_1 и M_2 — точки, симметричные с M относительно (D_1) и (D_2). От точки M_1 к точке M_2 можно перейти, производя поворот вокруг точки O на угол 2α.

Если I — середина $M_1 M_2$, то $OI \perp M_1 M_2$, следовательно $OI \perp OA$, и значит точка I лежит на окружности с диаметром OA. Обратно. Если $\angle M_1OM_2 = 2\alpha$ и середина M_1M_2 лежит на этой окружности, то точки M_1 и M_2 являются симметричными некоторой одной и той же точки M относительно (D_1) и (D_2). От точки I к точке M_1 можно перейти при помощи поворота на угол $-\alpha$ и последующей гомотетией $\left(O, \frac{1}{\cos\alpha}\right)$, точка же M из M_1 получается симметрией в (D_1); в результате этих преобразований окружность, построенная на OA, как на диаметре, перейдет в некоторую окружность, являющуюся геометрическим местом точек M.

18. 1°. Пусть I — середина BC, а J — середина AH. Тогда $\omega I \parallel NC$ и аналогично $\omega J \parallel MN$. Отсюда следует, что $\angle I\omega J = 90°$ и значит ω лежит на окружности, построенной на IJ, как на диаметре (окружность Эйлера). Если прямая (Δ) делает полный оборот вокруг A, то прямая ωJ, которая параллельна (Δ), также делает полный поворот вокруг J и значит ω описывает окружность Эйлера целиком. Далее, четырехугольник $AA'CN$ — вписанный, значит $(A'N, A'A) = (CN, CA)$ $(\mathrm{mod}\ \pi)$. Аналогично, четырехугольник $A'BQH$ также вписанный, значит

$$(A'A,\ A'Q) = (BH,\ BQ) = (BH,\ CN) \quad (\mathrm{mod}\ \pi).$$

Следовательно,

$$(A'N,\ A'A) + (A'A, A'Q) = (CN, CA) + (BH, CN) = (BH, CA),$$

т. е. $(A'N, A'Q) = \frac{\pi}{2}$, т. е. точка A' лежит на окружности с диаметром NQ. 2°. Четырехугольник $AMBB'$ — вписанный, значит $(B'M,\ B'B) = (AM, AB)$ $(\mathrm{mod}\ \pi)$. Четырехугольник $CPB'H$ также вписанный, значит

$$(B'P, B'B) = (B'P, B'H) = (CP,\ CH) \quad (\mathrm{mod}\ \pi).$$

Но $AM \perp CP$ и $AB \perp CH$, значит

$$(AM, AB) = (CP, CH) \quad (\mathrm{mod}\ \pi).$$

Следовательно,

$$(B'M, B'B) = (B'P, B'B),$$

а это и значит, что точки M, P и B' лежат на одной прямой.

19. 1°. Степень точки H относительно окружности (O) равна $OH^2 - R^2 = \frac{9}{16}R^2$, а так как $AH = \frac{3R}{4}$, то $AH^2 = \frac{9}{16}R^2$. Значит (D) есть радикальная ось (O) и A и потому $MT = MT' = MA$. 2°. Точка I [полюс (D)] находится на отрезке OH, причем $OI = \frac{4}{5}R$. 3°. $\angle OTM = \angle OT'M = 90°$ и окружность, описанная около треугольника TMT', есть окружность с диаметром OM (эта окружность проходит еще и через H). Прямая OM—медиатриса TT', поэтому ортоцентр K треугольника MTT' лежит на OM. Точка, симметричная K относительно TT', лежит на окружности (MTT') и значит совпадает с O. Поэтому $\vec{OK} = 2\vec{OJ}$ (J — середина TT'). Далее, $\angle OJI = 90°$, значит точка J лежит на ок-

ружности с диаметром OI и точка J описывает эту окружность целиком в то время, как точка M описывает целиком (D). Соотношение $\vec{OK} = 2\,\vec{OJ}$ позволяет утверждать, что геометрическое место точек K есть окружность, полученная из геометрического места точек J гомотетией $(O,\ 2)$; это—окружность с центром I и радиусом $IO = \frac{4R}{5}$. 4°. Точка ω, пересеченная OM и (O), и есть центр окружности, вписанной в $\triangle MTT'$. Если M описывает (D), то ω описывает полуокружность, ограниченную диаметром (O), параллельным (D) и расположенным по ту же сторону от этого диаметра, что и (D). Легко доказать, что вторую полуокружность описывает центр окружности, вневписанной в угол M треугольника MTT'. 5°. Точка M имеет одну и ту же степень относительно (C) и (C') (так как $MT = MT'$); прямая MI есть, следовательно, их радикальная ось и проходит через вторую точку S их пересечения. Имеем

$$\overline{MI}\cdot\overline{MS} = MT^2.$$

Треугольник OTM — прямоугольный (в T), значит

$$\overline{MJ}\cdot\overline{MO} = \overline{MT}^2$$

и значит

$$\overline{MI}\cdot\overline{MS} = \overline{MJ}\cdot\overline{MO},$$

т. е. точки I, S, J, O лежат на окружности с диаметром OI. Эта окружность описывается точкой S целиком, так как прямая ISM делает полный поворот вокруг I. *Замечание.* $\angle OSI = \angle OSM = 90^\circ$ и значит точка S лежит также и на окружности с диаметром OM. 20. 1°. Пусть A, B, B', A — точки встречи (в указанном порядке) окружностей (C) и (C') с линией центров CC'. Каковы бы ни были точки M и M', лежащие соответственно на окружностях (C) и (C'), будем иметь $BB' \leqslant MM' \leqslant AA'$ или $a - R \leqslant k \leqslant a+R$ — таково необходимое условие, наложенное на k.

Далее, необходимое и достаточное условие существования треугольника $C'MM'$ таково: $|2k - R| \leqslant C'M \leqslant 2k + R$. Искомые точки M лежат между двумя окружностями (Γ) и (Γ') радиусов $2k + R$ и $|2k - R|$ с центром C'. Следует рассмотреть два случая: α) $2k \geqslant R$. В этом случае разность радиусов окружностей (Γ) и (Γ') равна $2R$ и значит только одна из них пересекает (Γ), [или же обе эти окружности касаются (C)]. Это будет окружность, если $C'B \leqslant 2k + R \leqslant C'A$ или $a - R \leqslant k \leqslant a$; соответствующая дуга (C) та, которая содержит B. Это будет (Γ'), если $C'B \leqslant 2k - R \leqslant C'A$ или $a \leqslant k \leqslant a + R$; соответствующая дуга (C) та, которая содержит A. Если, наконец, $k = a$, то геометрическое место точек M — вся окружность (C). β) $2k < R$. В этом случае разность радиусов окружностей (Γ) и (Γ') равна $4k < 2R$. Окружность (Γ') не пересекает (C), так как для этого необходимо, чтобы $R - 2k \geqslant 2a - R$, откуда $k < R - a < 0$, что не имеет места. Окружность же (Γ) пересекает (C), если $a - R \leqslant k \leqslant a$ $\left(\text{этот случай может представиться лишь в случае } R \leqslant \frac{2a}{3}\right)$. Из всего этого анализа следует, что условия $a - R \leqslant k \leqslant a + R$ необходимы и достаточны для существования хотя бы одного отрезка MM'. В частности, если $k=a-R$, то MM' совпадает с BB', а если $k=a+R$, то MM' совпадает с AA'. Если $a-R<k<<a+R$, каждой точке M соответствуют две точки M' и они совпадают с A' или B', если M занимает на соответствующем своем геометрическом месте граничное положение. Из предыдущего также следует, что (C) и (C') описываются точками M и M' в целом, если $k=a$. 2°. $a-R=3$, $a+R=11$; $k=\frac{15}{2}$, значит $a<k<a+R$ и соответствующее геометрическое место точек M — дуга (C), содержащая точку A. Границы этой дуги — точки μ_1 и μ_2 окружности (C) пересечения с окружностью радиуса $2k-R=11 \text{ см}$ с центром C'. Геометрическое место точек M' — дуга $\mu'_1 A' \mu'_2$, симметричная дуге $\mu_1 A \mu_2$ относительно O: а) два решения; б) пусть $MM'=15$ *см* и ω — точка такая, что $\overrightarrow{C'\omega}=\overrightarrow{M'M}$. Фигура $C'M'M\omega$ — параллелограмм, $\omega M=R=4$ *см*. Точка M лежит, следовательно, на окружности с центром ω и радиусом 4 *см*. Отсюда построение. Строим $\angle CC'\omega=90°$, $C'\omega=15$ *см* и окружность (ω, 4 *см*.). Эта окружность пересекает геометрическое место точек M в двух искомых точках M_1 и M_2. Всего — 4 решения; в) два решения; г) медиатриса xx' отрезка CC' есть ось симметрии окружностей (C) и (C'). Поэтому если точки M и M' этих окружностей симметричны относительно точки I, лежащей на медиатрисе xx', то они сами симметричны относительно этой медиатрисы. Искомые отрезки MM' параллельны CC'. Построение просто (два решения). д) пусть MM' — искомый отрезок, N — точка, симметричная M' относительно O. Тогда $MN \parallel CC'$. Если J — середина MN, то $OJ=7{,}5$ *см*. Отсюда построение: строим окружность с центром O и радиусом 7,5 *см*, находим точки J_1 и J_2 пересечения этой окружности с медиатрисой отрезка AB и т. д. Всего получаем 4 решения. 3°. Случай б) пусть $\angle CC'\omega=u$, $C'\omega=2k$ и (Ω) окружность с центром C' и радиусом $2R$ (A'' и B'' точки пересечения (Ω) и (C')). Здесь мы не будем считать, что $a>R$. Рассмотрим два случая: α) окружности (C) и (C') имеют общие точки, т. е. $a\leqslant R$. Единственное условие существования MM' тогда таково: $k\leqslant a+R$. Точка C' расположена внутри (Ω). Значит, если $C'\omega\leqslant C'B''$, т. е. $k\leqslant R-a$, окружность (ω, R) пересекает всегда (C) и построение возможно при любом u. Если же $C'B''<C'\omega\leqslant C'A''$ или $R-a<k<R+a$, построение возможно тогда и только тогда, если ω лежит на хорде $\omega'\omega''$ окружности Ω высекаемой из нее прямой $C'\omega$, иначе, если степень точки ω относительно (Ω) отрицательна; т. е.

$$\omega C^2-4R^2=CC'^2+C'\omega^2-2CC'\cdot C'\omega\cos u-4R^2=4(k^2-$$
$$-2ak\cos u+a^2-R^2)<0;$$

так как $a<R$, то это будет выполнено, если $k\leqslant a\cos u+ +\sqrt{R^2-a^2\sin^2 u}$. β) (C) и (C') не имеют общих точек, т. е. $a>R$. Пусть $C'T$ — касательная из C' к (Ω), проведенная с той же стороны от CC', что и $C'\omega$. Для того чтобы окружность (ω, R пересекала (C) необходимо, чтобы полупрямая $C'\omega$ прошла внутри угла $CC'T$, т. е. $u\leqslant\angle CC'T$ и так как $\angle CC'T$ — острый [ибо

C' — вне (Ω)], то $\sin u \leqslant \frac{R}{a}$. Кроме того необходимо еще, чтобы точка ω лежала на отрезке $\omega'\omega''$, т. е. как и выше

$$k^2 - 2ak\cos u + a^2 - R^2 \leqslant 0,$$

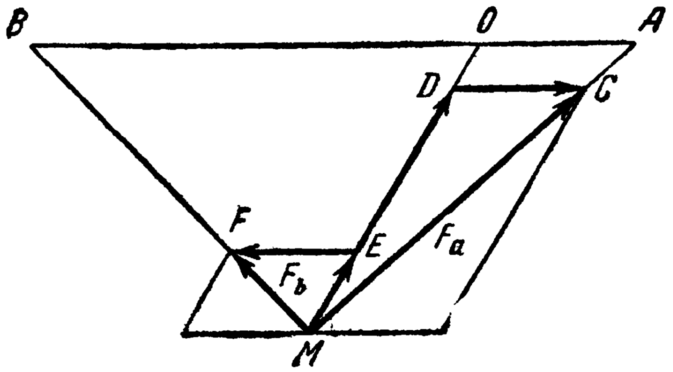
т. е.

$$a\cos u - \sqrt{R^2 - a^2\sin^2 u} \leqslant k < a\cos u + \sqrt{R^2 - a^2\sin^2 u}.$$

Замечание. Следует еще изучить, в скольких точках окружность (ω, R) пересечет геометрическое место точек M.

Случай д). Пусть E и F—точки пересечения окружности (C) с медиатрисой ее диаметра AB. Необходимое и достаточное условие существования решения

$OC \leqslant k \leqslant OE$ или $a \leqslant k \leqslant \sqrt{a^2 + R^2}$. 21. (черт. 34). 1°. $\overline{F}_a = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}, \overline{F}_в = \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = \overline{F}_a + \overline{F}_в, \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{EF} = 0$.



Черт. 34

Далее. $\triangle MAO \sim \triangle MCD$ и $MBO \sim \triangle MFE$; отсюда

$$\frac{\overline{MC}}{\overline{MA}} = \omega_a = \frac{\overline{DC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{MD}}{\overline{MO}},$$

$$\frac{\overline{MF}}{\overline{MB}} = \omega_в = \frac{\overline{EF}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{ME}}{\overline{MO}};$$

отсюда легко получить, что $\omega_a\overline{AO} = \omega_в \cdot \overline{OB}$ и $\overline{F}_a + \overline{F}_в = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} = \overrightarrow{MO}(\omega_a + \omega_в)$. 2°. а) На точку M действуют две силы F_a, $F_в$ и еще сила тяжести $\overrightarrow{mg}$. Значит MO также вертикальна и так как

$$\omega_a = 2m\frac{g}{a},\quad \omega_в = k\,\omega_a, \text{ то}$$

$$2m\frac{g}{a}(1 + k)\,MO = mg,$$

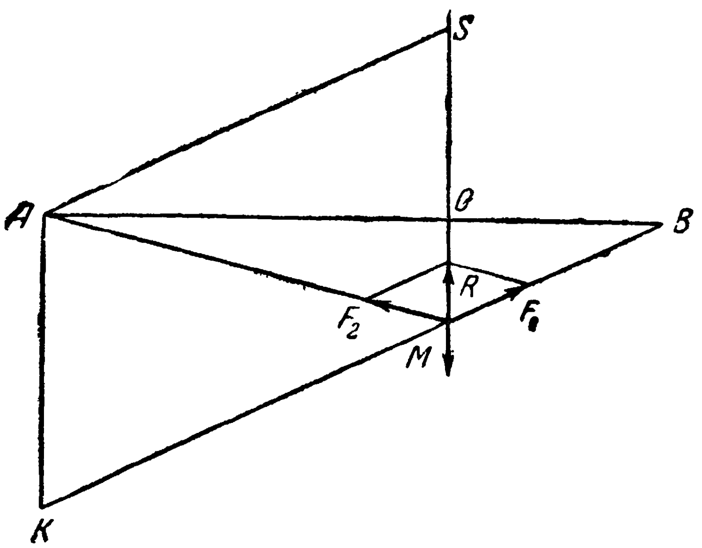
откуда

$$MO = \frac{a}{2(1+k)}.$$

Имеется, следовательно, лишь одно положение равновесия для M — на вертикали, проходящей через точку O, которая делит AB в отношении k.

Если k меняется, то точка O перемещается по AB и MO также меняется. Построим $\triangle\ MAS \sim \triangle\ MF_2R$ (черт. 35).
Тогда

$$\frac{MF_2}{MA} = \frac{MR}{MS} = 2m\frac{g}{a} = \frac{MS}{mg},$$



Черт. 35

откуда $MS = \frac{a}{2}$. Но $AS \parallel MB$. Значит $\triangle\ OAS \sim \triangle\ OBM$ и потому

$$\frac{OA}{OS} = \frac{OB}{OM} = \frac{OA+OB}{OS+OM} = \frac{a}{\frac{a}{2}} = 2,$$

откуда $\angle\ MBA = \text{const}$ и значит точка M описывает отрезок BMK полупрямой, выходящей из B.

Алгебраическое решение. Проекции вектора $\overrightarrow{MB}$ пусть будут $-x$ и $-y$, проекции силы $\overline{F}_в = 2km\frac{g}{a}\overrightarrow{MB}$ суть $-2\,km\frac{g}{a}x$ и $-2km\frac{g}{a}y$.

Проекции вектора $\overrightarrow{MA}$ суть $a-x$ и $-y$, проекции $\overline{F_a}$, следовательно, $2m\frac{g}{a}(a-x)$ и $-2m\frac{g}{a}y$.

Проекции же силы тяжести О и mg. Условие равновесия дает

$$x=\frac{a}{k+1} \qquad y=\frac{a}{2(k+1)}$$

— единственное положение равновесия. в) Если AB не горизонтальна — выводы аналогичны. 3°. Для того чтобы точка M оставалась в равновесии на окружности (Γ) (без трения) необходимо и достаточно, чтобы равнодействующая сил $\overline{F}_a$ и $\overline{F}_в$ была нормальна к окружности (Γ). Прямая, на которой лежит эта равнодействующая, должна проходить через O и через Ω [центр (Γ)]. Если O и Ω различны, то положения равновесия M суть две диаметрально противоположные точки (Γ), в которых (Γ) пересекается с прямой $O\Omega$. Если же O и Ω совпадают, то точка M будет находиться в равновесии в любом положении на (Γ). 4°. Если есть трение, то условие равновесия заключается в том, что угол между MO и нормалью к окружности (Γ) не превосходил φ. Геометрическое место точек M, из которых отрезок ΩO виден под углом φ, есть дуги двух окружностей (C) и (C'), проходящих через O и Ω и симметричных относительно $O\Omega$. Геометрическое место точек M, для которых угол φ между прямыми MO и $M\Omega$ будет меньше φ, состоит из точек, внешних по отношению к обеим окружностям, (C) и (C') и из точек области, покрываемой одновременно этими окружностями. Положения равновесия точки M суть дуги окружности (Γ), проходящие в этой области. Если радиус R окружности (Γ) больше диаметра (C) [и (C')], то C и (C') лежат внутри (Γ) — все точки (Γ) суть точки равновесия M. Условием этого будет $R\geqslant\frac{O\Omega}{\sin\varphi}$. Если $\frac{O\Omega}{\sin\varphi}>R>OM$, то (Γ) пересекает (C) в точках P и Q, а (C') — в точках P' и Q'. Положения равновесия суть дуги PP' и QQ' окружности (Γ) (середины этих дуг M_1 и M_2 — суть положения равновесия M и без трения). Если $R=O\Omega$, дуга PP' стягивается в точку O; положения равновесия состоят из дуги QQ' и точки O. Если $R<O\Omega$ — положения равновесия состоят снова из дуг PP' и QQ'. 22. 1°. а) $(PB,\ PM)=(BA,\ BM)=(AB,\ AC)$ и аналогично $(PM,\ PC)=(CM,\ CA)=(BC,\ CA)$.

Отсюда $(PB,\ PC)=(PB,\ PM)+(PM,\ PC)=(AB,\ BC)+(BC,\ CA)=(AB,\ CA)=(AB,\ AC)$. б) Из равенства $(PB,\ PC)=(AB,\ AC)$ следует, что точка P лежит на окружности (Γ), описанной около треугольника ABC. То, что P описывает ее целиком, будет показано ниже. в) Пусть PM пересекает (Γ) в точке A'. Так как $B,\ C,\ P,\ A'$ лежат на одной окружности, то

$$(PB,\ PA')=(CB,\ CA'). \tag{1}$$

Но [см. а)] $(PB, PM)=(AB, AC)$ или $(PB, PM)=-(BC, BA)$. (2) Из равенств (1) и (2) следует, что углы $(CB,\ CA')$ и $(BC,\ BA)$ равны по модулю, но отличаются знаком, следовательно, прямые CA' и BA одинаково наклонены к BC, но в противоположных направлениях; они образуют с BC поэтому равнобедренный треугольник (BC — основание) или иначе: CA' и BA симметричны относительно медиатрисы (Δ) отрезка BC, значит относительно этой медиатрисы симметричны точки A и A'. Прямая PM проходит через фиксированную точку A' окружности (Γ). 2°. а) В инверсии $(M,\ \overline{MB},\ \overline{MC})$ точки B и C переходят друг в друга.

Известно, что если линии K и K' соответствуют друг другу в инверсии, то касательные к ним в соответствующих точках будут симметричны относительно медиатрисы отрезка, соединяющего эти точки. Отсюда следует, что окружность (O) перейдет в прямую, симметричную CA относительно (Δ), а окружность (O') — в прямую, симметричную BA относительно (Δ). Отсюда следует, что точка P пересечения окружностей (O) и (O') перейдет в точку A', симметричную точке A относительно (Δ). Кроме того, так как образом точки P является A', то P, M и A' лежат на одной прямой [см. 1°, в)].

Далее, так как точки P и A' соответствуют друг другу в указанной инверсии, то

$$\overline{MP}\cdot\overline{MA'}=\overline{MB}\cdot\overline{MC}.$$

Отсюда следует, что P, A', B и C лежат на одной окружности, описанной около треугольника ABC. Точка P пересечения прямой $A'M$ с (Γ) описывает (Γ) в целом, когда M описывает всю прямую, значит геометрическое место точек P есть *вся* окружность (Γ). 3°. а) Точка O лежит на перпендикуляре (D) к AB в точке B; точка O является точкой пересечения (D) с медиатрисой BM. Когда точка M описывает BC, середина BM также описывает BC в целом и значит точка O описывает (D) целиком. Аналогично — геометрическим местом точек O' является прямая (D'), проходящая через C перпендикулярно CA. Для определения угла, образованного прямыми ωO и $\omega O'$, заметим, что они перпендикулярны PB и PC, а потому:

$$(\omega O,\ \omega O')=(PB,\ PC)=(AB,\ AC),$$

откуда, обозначая через I точку пересечения (D) и (D') [I лежит на (Γ)]:

$$(\omega O,\ \omega O')=(AB,\ AC)=(IB,\ IC)=(IO,\ IO').$$

Отсюда следует, что окружность, описанная около треугольника $O\omega O'$, проходит через фиксированную точку I, диаметрально противоположную точке A на окружности (Γ). б) $(\omega O,\ \omega O')=(PB,\ PC)=(AB,\ AC)$; так как $O\omega\perp PB$, $OO'\perp PM$, то $(O\omega,\ OO')=(PB,\ PM)=(BA,\ BC)$. Значит $\triangle\, O\omega O'$ подобен и одинаково ориентирован с треугольником BAC. Точка O' может быть получена из точки O подобием с центром ω и с таким же углом поворота и коэффициентом гомотетии, которая при выборе за центр A переводит C в B. 23. Часть первая. 1°. Если задан x, то вычисление y зависит от характера касания окружностей (S), (D) и (D'). Пусть (Δ) и (Δ') — касательные к (S) в точках A и B. Пусть C_0 — центр окружности (D_0), касающейся (S) в точке A и касающейся (Δ'); C_0' — центр окружности (D_0'), касающейся (S) в точке B и касающейся (Δ) (эти две окружности симметричны относительно биссектрисы угла AOB). Треугольник $O\omega C_0$ — прямоугольный (ω — прямой угол), значит $AC_0=BC_0'=R\,\mathrm{tg}^2\alpha$. Заметим, наконец, что ω — радикальный центр окружностей (S), (D) и (D') и значит точка M прикосновения (D) и (D') ни что иное как точка прикосновения второй касательной с (D), проведенной к (D) из ω. Обозначим прямые OA и OB так: $x'OAx$, $y'OBy$, и рассмотрим четыре случая положения точки C на прямой $x'x$.

а) C на луче C_0x. Окружность (D) лежит вне (S) и пересекает прямую (Δ'). Точка M прикосновения (D) и (D') лежит, следовательно, по отношению к (Δ') в той полуплоскости, которая не содержит A. Значит (D') внешне касается и с (D), и с (S). В этом случае C' лежит на луче $C'y$. *б) C на отрезке AC_0.* Окружность (D) по-прежнему лежит вне (S), но по отношению к (Δ') с той же стороны, что и (S). Окружность (D'), следовательно, касается (S) и (D) внутренне. В этом случае C' лежит на луче Oy'. *в) C на отрезке OA.* (D) — внутри (S), следовательно, и (D') — внутри (S), но вне (D). В этом случае C' лежит на отрезке OB. *г) C на луче Ox'.* (S) — внутри (D) и, следовательно, (D') касается (S) внешне, а (D) и (D') — внутренне. В этом случае C' лежит на отрезке BC_0'.

В частном случае, если C совпадает с C_0, окружность (D') вырождается в прямую (Δ'). Если C совпадает с O — все окружности, касающиеся (S) в точке B суть окружности (C'). Результаты исследования даны в таблице:

a) C на C_0x	(D) и (S) касаются внешне	(D') и (S) — касаются внешне	(D) и (D') касаются внешне
b) C на AC_0	(D) и (S) касаются внешне	(S) внутри (D')	(D) внутри (D')
c) C на OA	(D) внутри (S)	(D') внутри (S)	(D) и (D') касаются внешне
d) C на Ox'	(S) внутри (D)	(D') касается (S) внешне	(D') внутри (D)

Из Δ COC' находим: а) $y = R\ \mathrm{tg}^2\,\alpha \dfrac{x+R}{x-R\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}$,

в) $y = -R\,\mathrm{tg}^2\,\alpha \dfrac{x+R}{x-R\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}$, c) $y = -R\,\mathrm{tg}^2\,\alpha \dfrac{x-R}{x+R\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}$,

$$\text{d)}\ y = R\,\mathrm{tg}^2\,\alpha \frac{x-R}{x+R\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}.$$

Если ввести оси $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ и считать x и y соответственно координатами центров окружностей (D) и (D') на этих осях (так что радиусы будут $|x|$ и $|y|$), то эти четыре формулы можно объединить в одну

$$y = R\,\mathrm{tg}^2\,\alpha \frac{x+R}{x-R\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}.$$

Ниже мы будем под x и y подразумевать именно координаты центров окружностей (D) и (D'). 2°. $z = x^2 + \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$. Эта линия имеет параболическую асимптоту $z = x^2 + 1$; линия состоит из двух ветвей (сделать чертеж!). Условие $s_1 + s_2 = ms$ приводит к системе $x^2+y^2=m$, $xy-(x+y)=1$. Результат исследования таков: если $2(1-\sqrt{2})^2 < m < 2(1+\sqrt{2})^2$ — задача имеет два решения; если $m > 2(1+\sqrt{2})^2$ — четыре решения, если $m=2(1-\sqrt{2})^2$ — одно решение, если $m=2(1+\sqrt{2})^2$ — три решения; это все можно было получить и по построенному графику $z=x^2+y^2$. Число решений можно также установить, исследуя точки пересечения окружности $x^2+y^2=m$ с гиперболой $y=\frac{x+1}{x-1}$. Часть вторая 3°. Точка M принадлежит окружности (Ω) с центром ω (и радиусом ωA) пересечения касательных к (S) в точках A и B. Окружность (Ω) ортогональна (S), (D) и (D'). Прямая CC' касается (Ω) в точке M. Обратно. Пусть M — какая-нибудь точка (Ω), но отличная от точек A, B и от точек A' и B', им диаметрально противоположных на окружности (Ω). Пусть C и C' — точки встречи с OA и OB касательных к (Ω) в точке M. Тогда $CM=CA$, $C'M=C'B$ и окружности с центрами C и C', которые проходят через M, касаются друг друга в этой точке и касаются окружности (S) — первая в точке A, вторая — в точке B. Таким образом, все точки (Ω), за исключением пока точек A, A', B, B', суть точки M. Если M совпадает с A', точка C' — бесконечно удаленная, а точка C совпадает с C_0; окружность (C') вырождается в прямую (Δ'). Если M совпадает с B' — картина аналогичная. Если M совпадает с A, окружность (D') совпадает с (S) и окружность (D) есть любая окружность, касающаяся (S) в точке (A). Аналогично — если M совпадает с B. Окончательно: если не исключать 4 частных случая, то геометрическое место точек M есть вся окружность (Ω), эта окружность есть и огибающая CC'. Уточним результаты этого исследования: α) *M — на дуге AB, лежащей внутри* (S). Касательная в M к (Ω) пересекает тогда оба радиуса OA и OB, имеем случай в). β) *M — на дуге $A'B'$, симметричной AB относительно* ω. В этом случае касательная к (Ω) в M пересекает лучи C_0x, C'_0y, имеем случай а). γ) *M на дуге AB'*. Касательная в M к (Ω) пересекает AC_0 и Oy' — это случай б). δ) *M на дуге BA'*. Касательная в M к (Ω) пересекает BC'_0 и Ox' — случай г).

Окружности (D) и (D') имеют общие внешние касательные лишь в случаях α) и β), т. е. если M лежит на AB или $A'B'$. Эти касательные пересекаются в точке γ, лежащей на CC'; γ — центр положительной гомотетии (D) и (D'); так как A — центр гомотетии (S) и (D), а B — центр гомотетии (S) и (D'), то AB проходит через γ [AB — ось гомотетии окружностей (S), (D) и (D')]. Таким образом, γ — это точка пересечения прямой AB с касательной к (Ω) в точке M. Если M описывает дугу AB, точка γ описывает прямую AB за вычетом из нее отрезка AB. Если точка M описывает дугу $A'B'$, то точка γ описывает часть прямой AB за вычетом из нее отрезка $\gamma_0\gamma'_0$, где γ_0 и γ'_0 — точки пересечения AB с касательными к (Ω) в точках A' и B'.

Наконец, если M совпадает с A, γ — произвольная точка луча, полученного продолжением OA за точку A. Аналогично, если M совпадает с B. Окончательно: геометрическое место точек γ состоит из: 1) точек (Γ) прямой AB, внешних по отношению к отрезку AB и 2) точек (Γ') лучей, полученных продолжением OA и OB за точки A и B. *Замечание.* Для каждой точки γ, взятой на (Γ), но вне отрезка $\gamma_0 \gamma_0'$, соответствуют две пары окружностей, обладающих точкой γ пересечения общих внешних к ним касательных. Для одной пары точка касания M лежит на дуге AB, для другой — на дуге $A'B'$. Но для всякой точки γ, лежащей на любом из отрезков $A\gamma_0$ или $B\gamma_0'$, соответствует только одна пара окружностей (D), (D') и точка их касания лежит на дуге AB. 4°. Возьмем точку N на прямой AB такую, что точки M и M_1 прикосновения касательных, проведенных из нее к (Ω), лежат на дугах AB и $A'B'$. Центр I окружности, вписанной в треугольник NMM_1, есть точка пересечения (Ω) и ωN. Если точка N описывает всю прямую AB, за вычетом только отрезка AB, то геометрическое место точек I состоит из двух дуг (Ω), заключенных между прямой AB и прямой $C_0 C_0'$, параллельной AB и проходящей через ω. *Замечание.* Точка N при этом не обязательно будет точкой пересечения общих внешних касательных к окружностям (D) и (D') (но всегда центром гомотетии, может быть и отрицательным, для этих окружностей). Если мы хотим задавать для точки N положения лишь центра положительной гомотетии окружностей (D) и (D'), то N должна описывать прямую AB, за вычетом отрезка $\gamma_0\gamma_0'$. В этом случае геометрическое место точек I состоит из двух дуг (Ω), заключенных между диаметром этой окружности, параллельным AB, и хорды, соединяющей точки пересечения (Ω) с прямыми $\omega\gamma_0$ и $\omega\gamma_0'$.

Для определения геометрического места центров окружностей, описанных около треугольника NMM_1, заметим, что описанная окружность проходит через ω. Ее центр K, следовательно, середина ωN и значит геометрическое место точек K получается из геометрического места точек N в результате гомотетии $\left(\omega, \frac{1}{2}\right)$. Если K' и K'' середины ωA и ωB, то K описывает часть прямой $K'K''$, внешнюю по отношению к отрезку $K'K''$. *Замечание.* Если точка N должна быть центром положительной гомотетии (D) и (D'), то K описывает часть прямой $K'K''$, внешнюю по отношению к отрезку $K_0'K_0''$, где K_0' и K_0'' — середины $\omega\gamma_0$ и $\omega\gamma_0'$.

Далее, пусть H — ортоцентр треугольника NMM_1. Точки ω и H симметричны относительно MM_1; так как (S) и (Ω) — ортогональны, то MM_1 — поляра N относительно (Ω) и значит проходит через O. Значит MM_1 — медиатриса ωH и $OH = O\omega$; точка H лежит поэтому на окружности (H) с центром O и радиусом $O\omega$. Если N описывает (Γ) в целом, то точка H, которая расположена на прямой ωN, описывает дугу $H'H''$ окружности (H), содержащую ω и ограниченную прямыми ωA и ωB. *Замечание.* Если N — центр положительной гомотетии (D) и (D'), то геометрическое место точек H является дугой $H_0'H_0''$ окружности (H), содержащей ω и ограниченной прямыми $\omega\gamma_0$ и $\omega\gamma_0'$. *Замечание.* Мы не даем исследования последних вопросов для того случая, когда точка N лежит на продолжении радиусов ωA и ωB за точки A

и B. 24. Предварительное замечание. Пусть ABC — какой-нибудь треугольник. Построим во внешнюю сторону этого треугольника равнобедренные прямоугольные треугольники BAB_1 и CAC_1 ($\angle BAB_1 = 90°$, $\angle CAC_1 = 90°$). При повороте вокруг точки A на угол $\frac{\pi}{2}$ точки B_1 и C перейдут соответственно в точки B и C_1, значит вектор $\overrightarrow{B_1C}$ перейдет в вектор $\overrightarrow{BC_1}$ и потому $BC_1 = B_1C$, $(\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{BC_1}) = \frac{\pi}{2}$ или $(\overrightarrow{BC_1}, \overrightarrow{CB_1}) = \frac{\pi}{2}$. Пусть β и γ — середины отрезков CC_1 и BB_1 (β и γ — центры квадратов, построенных во внешнюю сторону треугольника ABC на его сторонах AC и AB) и O — середина BC. Тогда

$$\overrightarrow{O\beta} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC_1}, \quad \overrightarrow{O\gamma} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB_1}$$

и потому

$$O\beta = O\gamma,$$

$$(\overrightarrow{O\beta}, \overrightarrow{O\gamma}) = \frac{\pi}{2}.$$

Точка γ получается из точки β при повороте вокруг точки O на угол $\frac{\pi}{2}$. 1°. *Отрезки* $\omega_1\omega_3$ *и* $\omega_2\omega_4$. Предположим, что обход четырехугольника $ABCD$ совершается в положительном направлении. Применяя предыдущие результаты, с одной стороны, к треугольнику ABC и точкам ω_1 и ω_2, с другой стороны, к треугольнику ACD и точкам ω_3 и ω_4, будем иметь:

$$I\omega_1 = I\omega_2 \qquad I\omega_3 = I\omega_4$$

$$(\overrightarrow{I\omega_1}, \overrightarrow{I\omega_2}) = \frac{\pi}{2} \text{ и } (\overrightarrow{I\omega_3}, \overrightarrow{I\omega_4}) = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда следует, что вектор $\overrightarrow{\omega_2\omega_4}$ получается из вектора $\omega_1\omega_3$ поворотом вокруг I на угол $\frac{\pi}{2}$, т. е.

$$\omega_1\omega_3 = \omega_2\omega_4,$$

$(\overrightarrow{\omega_1\omega_3}, \overrightarrow{\omega_2\omega_4}) = \frac{\pi}{2}$. *Замечание.* Аналогично доказывается, что вектор $\overrightarrow{\omega_1\omega_3}$ получается из вектора $\overrightarrow{\omega_2\omega_4}$ поворотом вокруг точки J на угол $\frac{\pi}{2}$.

Четырехугольник $IKJH$. Точки H и K — середины отрезков $\omega_1\omega_3$ и $\omega_2\omega_4$. Поэтому при повороте вокруг точки I на угол $\frac{\pi}{2}$ точка H переходит в K. Значит $IK = IH$ и $(\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{IK}) = \frac{\pi}{2}$. Аналогично $JK = JH$ и $(\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{JH}) = \frac{\pi}{2}$. Поэтому $IKJH$ — квадрат. 3°. *Необходимое и достаточное условие, при котором $\omega_1\,\omega_2\,\omega_3\,\omega_4$ — квадрат.*

Диагонали $\omega_1\,\omega_3$ и $\omega_2\,\omega_4$ четырехугольника $\omega_1\,\omega_2\,\omega_3\,\omega_4$ равны и взаимно-перпендикулярны, поэтому этот четырехугольник будет квадратом тогда и только тогда, когда середины H и K этих диагоналей совпадают, иначе говоря (поскольку $IKJH$ квадрат) — тогда и только тогда, когда совпадают I и J, т. е. $ABCD$ — параллелограмм. 25. Пусть P — какая-нибудь точка радикальной оси окружностей (C) и (C'), а M и M' — вторые точки пересечения с (C) и (C') секущих PA и PA'; в инверсии $(P, \overline{PA} \cdot \overline{PM} = \overline{PM'} \cdot \overline{PA'})$ прямая MM' перейдет, вообще говоря, в окружность (Γ), описанную около треугольника PAA' [исключением является тот случай, когда прямая AA' перпендикулярна к (Δ), а точка P совпадает с точкой H пересечения AA' и (Δ). В этом случае прямая MM' совпадает с прямой AA' и сохраняется в рассматриваемой инверсии]. Во всех случаях точка P удовлетворяет условию вопроса тогда и только тогда, когда окружность, описанная около треугольника PAA' (или прямая PAA') ортогональна (Δ). Значит искомыми точками P будут точки пересечения с (Δ) окружности (Γ), имеющей центр на (Δ) и проходящей через точки A и A'. Исследование. Если прямая AA' не перпендикулярна (Δ), существует только одна такая окружность; задача имеет два решения. Если прямая AA' перпендикулярна (Δ), но точки A и A' не симметричны относительно (Δ), окружности (Γ) не существует и лишь одна точка P пересечения AA' с (Δ) дает решение вопроса.

Если, наконец, точки A и A' симметричны относительно (Δ), откуда, между прочим, следует, что окружности (C) и (C') равны, то всякая окружность с центром на (Δ), проходящая через A, пройдет и через A'; точка P в этом случае — любая точка прямой (Δ). 26. 1°. **QQ' и ST имеют общую середину.** Применяя теорему Менелая к треугольнику AQQ' и секущим SPP' и TMM', имеем:

$$\frac{\overline{SQ}}{\overline{SQ'}} \cdot \frac{\overline{P'Q'}}{\overline{P'A}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PQ}} = 1, \tag{1}$$

$$\frac{\overline{TQ}}{\overline{PQ'}} \cdot \frac{\overline{M'Q'}}{\overline{M'A'}} \cdot \frac{\overline{MA}}{\overline{MQ}} = 1. \tag{2}$$

Но так как $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PQ}$ и $\overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{P'Q'}$, то $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{P'A} = -\overrightarrow{M'Q}$, $\overrightarrow{P'Q'} = \overrightarrow{M'A}$ и из соотношения (1) следует:

$$\frac{\overline{SQ}}{\overline{SQ'}} \cdot \frac{\overline{M'A}}{\overline{M'Q'}} \cdot \frac{\overline{MQ}}{\overline{MA}} = 1, \tag{3}$$

Отсюда и из соотношения (2) получаем:

$$\overline{SQ} : \overline{SQ'} = \overline{TQ'} : \overline{TQ},$$

а это и означает, что QQ' и ST имеют общую середину I. 2°. **Построение касательной к линии $(Г)$ в точке M.**

По определению эта касательная есть предельное положение, к которому стремится секущая MM', когда точка M' по линии $(Г)$ неограниченно приближается к точке M, иначе, если точка P' по окружности (C) неограниченно приближается к точке P. Если $P' \to P$, то $Q' \to Q$ и I (середина QQ') $\to Q$; точка S пересечения (Δ) и PP' стремится к точке s, в которой (Δ) пересекается с касательной, проведенной к окружности в точке P.

На основании 1° точки T стремится к точке t, симметричной s относительно Q. Искомая касательная к линии $(Г)$ в точке M есть Mt. 27. 1°. **Геометрическое место центров окружностей, описанных около треугольника MIN.**

Пусть ω — центр окружности, описанной около треугольника MIN, и M_1 — точка, симметричная точке N относительно биссектрисы IA угла BAC (точка M_1 лежит на продолжении стороны AB за точку B). Очевидно $BM_1 = CN$ и соотношение $IB^2 = BM \cdot CN$, которое можно переписать так: $\overline{BI}^2 = \overline{BM} \cdot \overline{BM_1}$, показывает, что окружность, описанная около треугольника IMM_1, касается BC в точке I. Эта окружность будет, следовательно, симметрична относительно биссектрисы AI угла BAC, значит она проходит через N и поэтому является окружностью, описанной и около треугольника MIN. Таким образом, центр ω окружности, описанной около треугольника MIN, лежит на луче Iz — являющемся биссектрисой угла BAC. Точнее, пусть T — проекция ω на Bx и ω_0 — центр окружности, вневписанной в угол A треугольника ABC. Тогда $\omega T \leqslant \omega I$ и значит ω лежит на луче $\omega_0 z$.

Обратное положение. Пусть ω — какая-нибудь точка луча $\omega_0 z$, M и M_1 — точки пересечения с лучем Bx окружности (Ω) с центром ω и радиусом ωI (эти точки существуют в силу того, что ω лежит на луче $\omega_0 z$). Обозначим через N точку, симметричную точке M_1 относительно прямой AI. Точка N лежит на окружности (Ω), а так как $BM_1 = CN$, то из соотношения $\overline{BI}^2 = \overline{BM} \cdot \overline{BM_1}$ следует $IB^2 = BM \cdot CN$; точка ω, следовательно, центр окружности, описанной около треугольника MIN, удовлетворяющего условию задачи.

Окончательно. Геометрическое место точек ω есть луч $\omega_0 z$ в целом. 2°. *Геометрическое место точек H.* Точка I есть середина дуги M_1IN окружности (Ω), поэтому MI — биссектриса внутреннего угла AMN и значит I — центр окружности (H), вписанной в треугольник AMN. Точка H лежит на окружности (это точка касания с прямой MN). Пусть H_0 и H_1 — точки прикосновения окружности (H) с касательными, проведенными к ней из точек B и C (отличные от BA и CA). Если точка M описывает в целом луч Bx, то точка H — точка касания окружности (H) с касательной, проведенной к ней из точки M (касательной, отличной от MA), описывает меньшую дугу H_0H_1 окружности (H). Эта дуга и составляет геометрическое место точек H (она также — огибающая прямых MN). *Замечание.* Так как I — центр окружности, вписанной в треугольник MIN, то $MIN = \frac{\pi}{2} + \alpha$. *Геометрическое место точек D.* Пусть ω — центр окружности, описанной около треугольника IMN, и K — точка пересечения (H) с лучем Iz.

Прямые IH и $I\omega$—соответственно высота треугольника IMN и диаметр окружности, описанной около этого треугольника, поэтому ID — биссектриса угла MIN будет и биссектрисой внутреннего угла KIH. Значит, треугольники IDH и IDK симметричны относительно ID и значит точка D лежит на касательной к (H) в точке K. Если точка H описывает в целом дугу H_0KH_1 окружности (H), то точка D описывает в целом отрезок D_0D_1, концами которого являются точки пересечения касательной к (H) в точке K с касательными BH_0 и CH_1 к (H) в точках H_0 и H_1.

Этот отрезок D_0D_1 и есть геометрическое место точек D. *Замечание.* Результаты пунктов 1° и 2° можно было бы получить, доказав предварительно, что треугольники BIM, CNI и INM подобны. 3°. *Геометрическое место точек* J. Заметим прежде всего, что точка M' принадлежит окружности (β) с центром β, являющейся образом прямой AB в рассмотренной инверсии. Эта окружность проходит через точки I и B и касается в точке I полупрямой IX, параллельной Bx. Точно также: точка N' принадлежит окружности (γ) с центром γ, проходящей через I и C и касающейся в точке I полупрямой IY, параллельной Cy. Более точно: геометрические места точек M' и N' — образы в указанной инверсии лучей Bx и Cy, т. е. дуги BI и CI этих окружностей (β) и (γ), расположенные относительно BC в той же полуплоскости от прямой BC, где лежит луч Iz. Эти дуги симметричны относительно AI. Далее, прямая $M'N'$ есть образ в указанной инверсии окружности (Ω), описанной около треугольника MIN, а потому $M'N' \parallel BC$. Точки M' и N' не симметричны относительно AI (за исключением случая $BM = CN$), а потому $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{\beta\gamma} = \overrightarrow{BI}$, и, следовательно, $\overrightarrow{M'J} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BI}$. Геометрическое место точек I есть дуга окружности, полученная из дуги $\breve{BI}$ (геометрического места точек M') переносом определенным вектором $\frac{1}{2}\overrightarrow{\beta\gamma}$. Центр этой дуги — середина отрезка $\beta\gamma$; граничные точки этой дуги — середины J_0 и J_1 отрезков IB и IC. *Замечание.* Можно было также довольно просто установить параллелизм прямых BM' и IN' и если присоединить сюда, что $M'N' \parallel BC$, то получим, что $IBM'N'$—параллелограмм. Теперь геометрическое место точек I легко выводится из геометрического места точек M'. 4°. *Геометрическое место середин* L *отрезков* MN. Пусть IX и IY — полупрямые, выходящие из I параллельно Bx и Cy, M_1 — точка, симметричная N относительно AI, I' — середина NM и S' — середина BN. Отрезок $S'I'$ гомотетичен отрезку BM_1, в гомотетии $\left(N, \frac{1}{2}\right)$ и значит на этом отрезке лежит середина L отрезка MN, так что

$$\overline{S'L} = \frac{1}{2}\overline{BM}$$

или, обозначая через S ортогональную проекцию L на IX:

$$\overline{IS} = \frac{1}{2}\overline{BM}.$$

С другой стороны,

$$\overline{IS'} = \frac{1}{2}\,\overline{CN},$$

поэтому

$$\overline{IS} \cdot \overline{IS'} = \frac{1}{4}\,\overline{BM} \cdot \overline{CN} = \frac{\overline{IB}^2}{4} = \frac{a^2}{16}.$$

Это соотношение показывает, что точка L лежит на ветви равносторонней гиперболы (Γ) с асимптотами IX и IY. Эта ветвь гиперболы имеет вершину в точке L_0 оси Iz, определенную соотношением $IL_0 = \dfrac{a}{2\sqrt{2}}$ (эта точка есть ни что иное, как точка пересечения с Iz хорды касания M_0N_0 с прямыми AB и AC окружности, вневписанной в угол A треугольника ABC). Если точка N описывает полупрямую Cy в целом, то точка S' описывает в целом полупрямую IY и точка L описывает всю указанную ветвь гиперболы (Γ). Эта ветвь гиперболы (Γ) и будет, таким образом, геометрическим местом точек L. *Замечание.* В условии задачи в п. 3° предполагалось, что $\angle BAC = 90°$. Для решения вопроса п. 3° это несущественно. Приведенное рассуждение в принципе сохранится (только ортогональное проектирование заменится наклонным — см. выше построение точки S). 28. 1°. **Построение окружностей (C) и (C').** Хорда OM окружности (C) параллельна касательной (D') к (C), поэтому точка N касания (C) и (D') лежит на медиатрисе (Δ) отрезка OM; центр C окружности (C) есть точка, в которой медиатриса отрезка ON пересекает (Δ). Аналогично строится центр C' окружности (C').

Пересечение прямых MN и $M'N'$. Прямая (Δ) есть биссектриса внутреннего угла ONM, прямая (D') — биссектриса угла смежного с углом ONM. Прямая MN, будучи симметричной прямой ON относительно (D'), проходит через точку I, симметричную O относительно (D'). Аналогично устанавливаем, что и прямая $M'N'$ проходит через указанную фиксированную точку I.

Геометрическое место точек B. Точка A — середина MM', значит точка J, в которой прямая IA пересекает (D') — середина NN'; она имеет, следовательно, одну и ту же степень по отношению к окружностям (C) и (C') и значит лежит на их радикальной оси OB. Итак, переменная точка B расположена на фиксированной прямой OJ. Выражая двумя способами степень точки I относительно окружности (C), получим:

$$\overline{JO} \cdot \overline{JB} = \overline{JN}^2,$$

которое показывает, что точка B расположена по одну сторону с точкой J по отношению к O; с другой стороны, JN может изменяться от 0 до ∞, значит JB также изменяется от 0 до ∞. Таким образом точка B описывает полностью полупрямую, выходящую из I и проходящую через O. 2°. *Свойство касательных в M и M' к (C) и (C').* Точка N — середина дуги $\overset{\frown}{OM}$ окружности (C), значит прямая MN есть одна из биссектрис углов между прямыми (D) и MP; но точка I лежит на прямой MN, а потому она равноудалена от (D) и MP. Аналогично устанавливаем, что точка равноудалена от (D) и $M'P$. Значит точка I равноудалена от MP и $M'P$ и эти две прямые касаются постоянно окружности (Γ) с центром I и касающейся в точке O прямой (D).

Геометрическое место точек P. Точка O есть точка касания окружности (Γ) с тремя прямыми: (D), MP и $M'P$, поэтому точка A', симметричная точке O относительно середины A отрезка MM', есть точка касания с (D) другой окружности, также касающейся этих трех прямых. Эта окружность (Γ') имеет центром точку Ω, в которой прямая IP пересекает перпендикуляр к (D) в точке A'.

Если сделать чертеж, в котором $AM<AO$, то (Γ) и (Γ') будут двумя вневписанными окружностями для треугольника MPM', первая — в угол M', вторая — в угол M Если же взять $AM>AO$, то окружность (Γ) будет вписана в треугольник MPM', а (Γ') вневписана в угол P этого треугольника.

Во всех случаях окружности (Γ) и (Γ') соответствуют друг другу в гомотетии с центром P, в этой гомотетии точке A' касания (Γ') с (D) соответствует точка (Γ), в которой касательная параллельна (D); значит точке A' соответствует в указанной гомотетии точка I', диаметрально противоположная точке O на окружности (Γ); эти три точки: A' P и I' лежат, следовательно, на одной прямой. Но точки A' и I' фиксированы, значит точка P лежит на фиксированной прямой $A'I'$.

Точку P можно рассматривать, как точку пересечения фиксированной прямой $A'I'$ с касательной к (C) в точке M,— прямой, которая вместе с тем является касательной к фиксированной окружности (Γ). Отсюда следует, что геометрическое место точек P есть часть прямой $A'I'$, за исключением отрезка IE этой прямой, лежащего внутри окружности (Γ).

Угол между касательными в точке O к окружностям (C) и (C'). Касательная в точке O к (C) симметрична MP относительно (Δ), а касательная в точке O к (C') симметрична $M'P$ относительно (Δ'); эти две касательные симметричны относительно OI [а также и относительно (D)] двум прямым, проходящим через O, соответственно параллельно MP и $M'P$. Угол, который они образуют, следовательно, равен углу между прямыми MP и $M'P$.

Окружности (C) и (C') ортогональны. Для того чтобы окружности (C) и (C') были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы прямая PM была перпендикулярна прямой PM'. Значит точка P должна лежать на геометрическом месте точек, из которых окружность (Γ) видна под прямым углом; это — окружность с центром I и радиусом $IO\cdot\sqrt{2}$. Эта окружность пересекает геометрическое место точек P в двух точках. Касательные к (Γ), проведенные из любой этой точки пересекают (D) в двух точках M и M' таких, что соответствующие окружности (C) и (C') будут ортогональны. 3°. *Преобразование фигуры инверсией* (O, OI^2). В этой инверсии прямая (D') перейдет в окружность (Γ), а окружности (C) и (C') перейдут в две прямые, касающиеся (Γ) и соответственно параллельные касательным к (C) и (C') в точке O. Направления этих касательных (см. 2°) соответственно симметричны направлениям MP и $M'P$ относительно направления прямой (D) и значит точки прикосновения касательных к (Γ), в которые перейдут (C) и (C'), будут симметричны точкам T и T' прикосновения MP и $M'P$ к (Γ) относительно прямой $X'X$, проведенной через центр I окружности (Γ) параллельно (D), а сами касательные к (Γ), в которые перейдут (C) и (C'), будут симметричны MP и $M'P$ относительно $X'X$. Точка Q, в которой они пересекаются (которая и будет образом B в рассматриваемой инверсии), поэтому симметрична точке P относительно $X'X$.

Приложение к определению ортогональных окружностей (C) *и* (C').

Определив, как это было указано в п. 2°, положения точки P, при которых соответствующие окружности (C) и (C') будут ортогональны, можно получить симметрией в $X'X$ соответствующие положения точки Q. Далее, точки N_1 и N_1' касания, проведенные из Q к (Γ), являются образами точек N и N' касания (C) и (C') с (D). Таким образом, для того чтобы получить пару ортогональных окружностей (C) и (C') соответственно любой из найденных точек Q, достаточно провести из точки Q касательные к (Γ) и соединить точки касания с O; таким образом на прямой (D') будут определены точки прикосновения искомых окружностей (C) и (C').

29. 1°. A, M, P', Q' — гармоническая четверка, $\Delta APP' \sim \Delta AQQ'$, $\Delta MPP' \sim \Delta MQQ'$, следовательно, $\frac{PP'}{QQ'} = \frac{AP'}{AQ'}$ и $\frac{PP'}{QQ'} = \frac{MP'}{MQ'}$, и т. д. (если $PQ \perp Ax$, то P' и Q' совпадают с M). 2°. Проведем через точку M прямые, параллельные Ay и Ax. Пусть эти прямые пересекают лучи Ax и Ay соответственно в точках P_1 и Q_1. Точка P будет описывать луч P_1x, а точка Q — луч Q_1y; x и y изменяется от $\frac{a}{2}$ до $+\infty$ $\left(AP_1 = AQ_1 = \frac{a}{2}\right)$.

Далее, $y = \frac{ax}{2x-a}$ — равносторонняя гипербола с центром в точке $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$; решение задачи дает лишь одна ветвь этой гиперболы $\left(x > \frac{a}{2}, y > \frac{a}{2}\right)$. 3°. Полагая $s = x + y$ и $p = xy$, соотношения $a(x+y) = 2xy$ и $x^2+y^2=ma^2$ перепишем так: $s^2 - 2p = ma^2$, $as = 2p$. При этом надо найти лишь положительные значения для s и p.

Находим

$$s = \frac{a}{2}\left(1+\sqrt{1+4m}\right), \quad p = \frac{a^2}{4}\left(1+\sqrt{1+4m}\right).$$

Вычисление x и y. Исследование. x и y — корни уравнения

$$X^2 - sX + p = 0.$$

Должны быть выполнены следующие условия

$$\Delta = s^2 - 4p \geqslant 0,$$

$$f\left(\frac{a}{2}\right) > 0,$$

$$\frac{a}{2} < \frac{s}{2}.$$

Последнее условие выполнено, так как

$$s = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{1+4m} > a.$$

Кроме того, выполнено и предпоследнее условие

$$f\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{2} - \frac{as}{2} + p = \frac{a^2}{4} > 0.$$

Остается условие $\Delta \geqslant 0$. Оно приводится к виду:

$$s^2 - 2as \geqslant 0$$

и так как $s > 0$, то $s \geqslant 2a$.

Но так как s есть корень уравнения

$$g(s) = s^2 - as - ma^2 = 0,$$

то это условие ($s \geqslant 2a$) можно записать в виде:

$$g(2a) \leqslant 0$$

или $4a^2 - 2a^2 - ma^2 \leqslant 0$, откуда $m \geqslant 2$.

Таким образом, решение существует тогда и только тогда, когда $m \geqslant 2$.

Случай $m = \frac{45}{16}$. В этом случае $m > 2$; решение существует: или $x = \frac{3a}{2}$, $y = \frac{3a}{4}$, или $x = \frac{3a}{4}$, $y = \frac{3a}{2}$.

Значение u, при котором $\Delta\, APQ$ — прямоугольный.

1°. Если $u = 45°$. 2°. Если $u \neq 45°$; тогда $\frac{3a}{4} = \frac{3a}{2}\cos 2u$, $u = 30°$. **30.** 1°. *Свойства нормалей к* (C) *и* (C') *в соответствующих точках.* Положительное направление на прямой OM возьмем от O к M; будем считать $a > 0$ (так что точка M' лежит на продолжении отрезка OM за точку M). Пусть I — точка, общая медиатрисам отрезков M_1M_2 и $M_1'M_2'$, тогда $IM_1 = IM_2$ и $IM_1' = IM_2'$, а так как, с другой стороны, $M_1M_1' = M_2M_2'$, то $\Delta\, IM_1M_1' = \Delta\, IM_2M_2'$. Высоты этих треугольников, выходящие из I, следовательно, равны. Таким образом, точка I равноудалена от прямых M_1M_1' и M_2M_2' (которые и есть прямые OM_1 и OM_2) и потому расположена на одной из биссектрис углов, образованных этими прямыми. Если точка M_2 стремится по линии (C) к точке M_1, то прямая M_1M_2 стремится к касательной к линии (C) в точке M_1, а медиатриса отрезка M_1M_2 — к нормали к линии (C) в точке M_1. Точка M_2' при этом стремится к точке M_1', прямая $M_1'M_2'$ стремится к касательной к линии (C') в точке M_1'. Так как биссектрисы углов, образованных прямыми OM_1 и OM_2, стремятся соответственно к прямой OM_1 и к перпендикуляру (Δ_1) в точке O к прямой OM_1, то нормаль в точке M_1 к линии (C) пересекается с нормалью в точке M_1' к линии (C') в точке J, лежащей на прямой (Δ_1). Если поэтому дана касательная в точке M_1 к линии (C), то для построения касательной к линии (C') в точке M_1' проводим в точке M_1 нормаль к (C) и соединяем точку J, в которой эта нормаль пересекает (Δ_1), с точкой M_1'; в точке M_1' к последней прямой проводим перпендикуляр.

Это правило остается в силе, если точка J_1 совпадает с O или является бесконечно удаленной. Первый из этих случаев имеет место тогда, когда касательная в точке M_1 к линии (C) перпендикулярна OM_1; тогда и касательная в точке M_1' к линии (C') также перпендикулярна OM_1. Второй из этих случаев имеет место, если касательная в точке M_1 к линии (C) совпадает с OM_1, тогда и касательная в точке M_1' к линии (C') тоже совпадает с OM_1.

Свойство нормалей к линиям (C) и (C″) в соответствующих точках. Все, что мы говорили о нормалях в точках M_1 и M_1' к линиям (C) и (C'), справедливо и по отношению к нормалям в точках M_1 и M_1'' к линиям (C) и (C''). Здесь, однако, может случиться, что точка M_1'' совпадает с O. В этом случае, если точка J_1 не совпадает с O, касательная в точке M_1'' к (C'') совпадает с OM_1. Если же точка J_1 совпадает с O, то прямая J_1M_1'' становится неопределенной и предыдущие рассуждения дефектны. Но если мы заметим, что в этом случае предельным положением $M_1''M_2''$ при условии, что точка M_2'' по линии (C'') стремится к M_1'', есть OM_1, мы придем к выводу, что в этом случае касательной к (C'') в точке M_1'' будет OM_1. 2°. *Случай, когда (C) есть прямая (D), не проходящая через O.*

В этом случае эта прямая (D) играет роль и касательной к (C) в какой-нибудь из ее точек. Построение точек A, B, C, A', B', C', A'', B'', C'', касательных в точках A', B', C' к (C') и касательных в точках A'', B'', C'' к (C'') — предоставляется читателю. Рекомендуется «по точкам» вычертить линии (C') и (C''), (образующие вместе конхоиду прямой). Линия (C'') в точке O имеет «точку возврата» (точка H'' совпадает с O).

Пусть M — какая-нибудь точка прямой (D), а α — угол HOM. Проекции отрезков MM' и MM'' на OH обе равны $a\cos\alpha$. Если точка M неограниченно удаляется по прямой (D) от точки H, то $\cos\alpha$ стремится к нулю; это означает, что точки M' и M'', неограниченно удаляющиеся по линиям (C') и (C''), неограниченно приближаются к прямой (D), т. е. что прямая (D) асимптота линий (C) и (C'). 31. 1°. *Окружности (O) и (O′) касаются AC в одной и той же точке.* Так как $\triangle ABC = \triangle ADC$, то окружности (O) и (O') касаются прямой AC в точке I, лежащей на продолжении AC за точку C на расстояние $AI=\frac{1}{2}(AB+BC+$ $+CA)$. 2°. *C есть ортоцентр треугольника AOO'.* Стороны углов BAC и DCI соответственно параллельны, две из них (AB и DC) имеют противоположное направление, а две (AC и CI) — одинаковое. Значит их биссектрисы AO и $O'C$ перпендикулярны. Точка C принадлежит, следовательно, двум высотам AI и $O'C$ треугольника AOO' и потому является его ортоцентром.

Соотношение $IA\cdot IC=RR'$. Точка C', симметричная точке C относительно OO', лежит на окружности, описанной около треугольника AOO'. Значит $\overline{IA}\cdot\overline{IC'}=\overline{IO}\cdot\overline{IO'}$ и значит $\overline{IA}\cdot\overline{IC}=$ $=-\overline{IO}\cdot\overline{IO'}=RR'$ или $IA\cdot IC=RR'$. 3°. *Произведение расстояний от точек O и O' до прямой AM равно RR'.*

Заметим сначала, что из равенств $AT=AT'=AI$ следует, что AM — биссектриса угла TAT'. Так как, кроме того, отрезок AM есть диаметр окружности, описанной около четырехугольника $ATMT'$, то $\widehat{OAI}=\frac{1}{2}\widehat{TAI}=\frac{1}{2}(\widehat{TAT'}-\widehat{IAT'})=\widehat{T'AM}-$ $-\widehat{T'AO'}=\widehat{O'AM}$ и значит две прямые AI и AM — изогонали относительно AO и AO' (и так как AI — высота треугольника AOO', то AM проходит через центр окружности, описанной около этого треугольника). Пусть H и H' — проекции O и O' на AM. Из предыдущей изогональности следует, что $\triangle AOI\sim\triangle AO'H'$ и $\triangle AOH\sim\triangle AO'I$, значит $\frac{OI}{O'H'}=\frac{AO}{AO'}$ и $\frac{OH}{O'I}=\frac{AO}{AO'}$, откуда $\frac{OI}{O'H'}=\frac{OH}{O'I}$ или $OH\cdot O'H'=RR'$. *Замечание.* Из рассмотрения вписанных четырехугольников можно было бы установить сразу подобие треугольников IOH и $H'O'I'$, откуда сразу следует, что $OH\cdot O'H'=RR'$. 32. Ответ. 1°. $y=-\frac{x^2}{2R}+x+R$. 2°. $f(x)\equiv$ $\equiv x^2-2Rx+2R(l-R)=0,\ 0\leqslant x\leqslant R\sqrt{2}$.

Надо исследовать расположение чисел 0 и $R\sqrt{2}$ относительно корней этого уравнения (при условии, что они действительны): а) если $l<R$, то $x'<0<R\sqrt{2}<x''$ — решений нет; б) если $l=R$, то одно решение $x=0$ (точка M совпадает с точкой A); в) если $R<l<R\sqrt{2}$, то $0<x'<R\sqrt{2}<x''$. Одно решение: $x'=R-\sqrt{R(3R-2l)}$; г) если $l=R\sqrt{2}$, то два решения $x'=$ $=R\sqrt{2}$ и $x''=2R-R\sqrt{2}$; д) если $R\sqrt{2}<l<\frac{3R}{2}$, то $0<x'<$ $<x''<R\sqrt{2}$ — два решения $x=R\pm\sqrt{R(3R-2l)}$; е) если $l=\frac{3R}{2}$, то $x'=x''=R$ — одно решение; ж) если $l>\frac{3R}{2}$ — решений нет.

Итак, если $R\leqslant l<R\sqrt{2}$, то одно решение, если $R\sqrt{2}\leqslant$ $\leqslant l\leqslant\frac{3R}{2}$ — два решения. 3°. График функции $y=y(x)$ — дуга

параболы;

$$y=-\frac{1}{2R}(x-R)^2+\frac{3R}{2};$$

вершина параболы $(R, \frac{3R}{2})$, выпуклость вниз; граничные точки дуги: (O, R) и $(R\sqrt{2}, R\sqrt{2})$. 4°. Исходя из графика, легко получить результаты, указанные в 2°. 33. 1°. Окружности, вписанные в угол XOY и проходящие через данную точку.

Всякая окружность, вписанная в угол XOY и проходящая через данную точку A, может быть получена из (Γ_0) гомотетией с центром O. Точка A должна быть гомологична одной из двух точек B_1 и B_2, в которых прямая OA пересекает окружность (Γ_0). Радиус искомой окружности, проведенный в точку A, должен быть гомологичен одному из радиусов I_0B_1 и I_0B_2 окружности (Γ_0). Имеются, следовательно, две окружности, удовлетворяющие условию: их центры I_1 и I_2 являются точками пересечения биссектрисы угла XOY с прямыми, проходящими через A параллельно I_0B_1 и I_0B_2. 2°. *Окружности, вписанные в угол XOY и касающиеся данной окружности (C).*

Пусть (C) — данная окружность с центром C, расположенным на отрезке I_0H, перпендикулярном OX, и расположенная внутри (Γ_0); пусть α и β — соответственно центры положительной и отрицательной гомотетии окружностей (C) и (Γ_0) и пусть (Γ) — какая-нибудь окружность, вписанная в угол XOY. Точка O есть центр положительной гомотетии окружности (Γ) и (Γ_0). На основании свойств центров гомотетии трех окружностей, взятых по две, заключаем, что центр гомотетии окружностей (Γ) и (C) расположен на прямой $O\alpha$, которая проходит через центр O положительной гомотетии окружностей (Γ) и (Γ_0) и через центр α положительной гомотетии окружностей (C) и (Γ_0).

Центр отрицательной гомотетии окружностей (Γ) и (C) лежит на прямой $O\beta$, проходящей через центр O положительной гомотетии окружностей (Γ) и (Γ_0) и через центр β отрицательной гомотетии окружностей (C) и (Γ_0).

Итак, центры положительной и отрицательной гомотетии окружности (C) и переменной окружности (Γ) располагаются на фиксированных прямых $O\alpha$ и $O\beta$. Центры гомотетий двух окружностей, из которых одна лежит внутри другой, оба расположены внутри обеих окружностей и потому прямые $O\alpha$ и $O\beta$ обе пересекают (C). Если окружность (Γ) касается внутренне (C), то точка касания есть центр положительной гомотетии этих двух окружностей: эта точка касания, следовательно, есть одна из двух точек T_1 и T_2, в которых $O\alpha$ пересекает (C). Существует, следовательно, две окружности (Γ_1) и (Γ_2), вписанные в угол XOY и касающиеся внутренне (C); их центры I_1 и I_2 суть точки, в которых прямые CT_1 и CT_2 пересекают биссектрису угла XOY. Если окружность (Γ) касается окружности (C) внешне, то точка касания есть центр отрицательной гомотетии этих окружностей: это значит, одна из точек T_1' и T_2', в которых $O\beta$ пересекает (C). Существует, следовательно, две окружности (Γ_1') и (Γ_2'), вписанные в угол XOY и касающиеся внешне (C); их центры I_1' и I_2' —

точки пересечения прямых CT'_1 и CT'_2 с биссектрисой угла XOY. Существует, следовательно, всего четыре окружности, вписанные в угол XOY и касающиеся (C).

Соотношение между радиусами этих окружностей. В инверсии с полюсом O и со степенью инверсии p равной степени точки O относительно окружности (C), окружность (C) инвариантна. Окружность (Γ_1), вписанная в угол XOY и касающаяся окружности (C) в точке T_1, переходит в окружность, вписанную в угол XOY и касающуюся (C) в точке T_2, т. е. в окружность (Γ_2). Так как окружности (Γ_1) и (Γ_2) соответствуют друг другу в указанной инверсии, то их точки H_1 и H_2 касания с осью OY также соответствуют друг другу в этой инверсии, т. е.

$$\overline{OH_1}\cdot\overline{OH_2}=p.$$

Аналогично устанавливается, что и окружности (Γ'_1) и (Γ'_2) переходят друг в друга в той же инверсии и значит, обозначая через H'_1 и H'_2 точки их прикосновения с осью OY, будем иметь

$$\overline{OH'_1}\cdot\overline{OH'_2}=p.$$

Значит,

$$OH_1\cdot OH_2=OH'_1\cdot OH'_2.$$

Обозначая через R_1, R_2, R'_1, R'_2 радиусы окружностей (Γ_1), (Γ_2), (Γ'_1) и (Γ'_2), а через θ — половину угла XOY, будем иметь

$$R_1=OH_1\operatorname{tg}\theta,\quad R_2=OH_2\operatorname{tg}\theta,\quad R'_1=OH'_1\operatorname{tg}\theta,\quad R'_2=OH'_2\operatorname{tg}\theta.$$

Отсюда и из предыдущего соотношения находим:

$$R_1R_2=R'_1R'_2.$$

3°. *Другой способ отыскания окружностей, вписанных в угол XOY и касающихся (C).* Если окружность с центром J вписана в угол XOY и касается внутренне (C), то окружность с центром J, проходящая через точку C, вписана в угол $X_1O_1Y_1$, который лежит внутри угла XOY, стороны которого O_1X_1 и O_1Y_1 соответственно параллельны OX и OY и отстоят от них на расстоянии равном радиусу ρ окружности (C). Обратно. Всякой окружности, вписанной в угол $X_1O_1Y_1$ и проходящей через C, соответствует окружность с тем же центром, вписанная в угол XOY и касающаяся (C). Имеется, следовательно, столько окружностей, вписанных в угол XOY и касающихся внутренне (C), сколько имеется окружностей, вписанных в угол $X_1O_1Y_1$ и проходящих через точку C, а так как точка C лежит внутри угла $X_1O_1Y_1$, то на основании 1° имеется две таких окружности. Аналогично устанавливаем, что имеется столько окружностей, вписанных в угол XOY и касающихся внешне (C), сколько имеется окружностей, проходящих через C и вписанных в угол $X'_1O'_1Y'_1$, охватывающий угол XOY, стороны $O'_1X'_1$ и $O'_1Y'_1$ которого параллельны соответственно OX и OY и отстоят от OX и OY на расстоянии, равном радиусу ρ окружности (C); таких окружностей имеется две.

Мы снова получаем, что существует четыре окружности, вписанные в угол XOY и касающиеся (C) (две внутренние и две внешние). 4°. *Случай, когда C совпадает с I_0.*

В этом случае точки касания (C) с окружностью, вписанной в угол XOY и касающейся (C), могут быть только точками пересечения (C) с биссектрисой угла XOY [заметим, что в этом частном случае точки α и β совпадают с точкой I_0, полупрямые $O\alpha$ и $O\beta$ совпадают с прямой OI_0, точки T_1' и T_2' совпадают с одной из точек, в которой OI_0 пересекает (C), а точки T_2 и T_2' — со второй точкой пересечения OI_0 и (C)]. Пусть теперь A_1OB_1 и A_2OB_2 — треугольники, отсекаемые от угла XOY касательными в точках T_1 и T_2 к (C). Существуют две окружности, вписанные в угол XOY и касающиеся (C) в точке T_1 — это окружность, вписанная в треугольник A_1OB_1 и окружность, вневписанная в угол O этого треугольника. Аналогично существуют две окружности, вписанные в угол XOY и касающиеся (C) в точке T_2 — это окружность, вписанная в треугольник A_2OB_2, и окружность, вневписанная в угол O этого треугольника.

Мы видим, что и в рассматриваемом частном случае имеется четыре окружности, удовлетворяющие условию задачи.

§ 4. Планиметрия с тригонометрией

1. 1°. Из соотношения $\cos^2 A = \cos 2B$ следует, что $0 < \cos 2B < 1$, т. е. $B \leqslant \frac{\pi}{4}$ Если B удовлетворяет этому условию, то соотношение $\cos^2 A = \cos 2B$ даст для A два значения (между 0 и π), в сумме составляющие π; если A_1 — то из них, которое $\leqslant \frac{\pi}{2}$, то $B + A_1 < \pi$ и значит существует, по крайней мере, один треугольник, для которого $\cos^2 A = \cos 2B$ (или $a = b\sqrt{2}$). Отсюда также следует, что наибольшее значение для B есть $\frac{\pi}{4}$, тогда $A = \frac{\pi}{2}$ и $C = \frac{\pi}{4}$. 2°. Получаем уравнение $b^2 - (2\sqrt{2}c\cos B)\, b + c^2 = 0$. ($\alpha$). Его дискриминант: $\Delta = c^2 \cos 2B$ и $OH \geqslant 0$, если $B \leqslant \frac{\pi}{4}$. Если $B \leqslant \frac{\pi}{4}$, то уравнение ($\alpha$) имеет два положительных корня и по каждому из них найдем a из соотношения $a = b\sqrt{2}$ (β). Обратно: если дано $c > 0$ и $0 < B \leqslant \frac{\pi}{4}$, то указанным образом определенные a и b будут удовлетворять соотношениям (α) и (β), значит, и такому соотношению

$$b^2 - 2ac\cos B + c^2 = 0$$

или

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B,$$

откуда

$$(a - c)^2 < b^2 < (a + c)^2,$$

т. е. $|a-c| < b < |a+c|$ и значит для каждой пары значений a и b соответствует треугольник, удовлетворяющий условию задачи.

Итак, если $B \leqslant \frac{\pi}{4}$, задача имеет два решения $\left(\text{совпадающие при } B = \frac{\pi}{4}\right)$. 3°. Откладываем на прямой отрезок $AB = c$, строим точку B' такую, что $\angle BAB' = 90°$ и $AB' = AB$ (точка B' над прямой AB). Вершина C должна лежать на полуокружности, построенной на ED, как на диаметре, где E и D точки пересечения биссектрисы внутреннего и внешнего угла B' треугольника BAB'.

Условие возможности построения состоит в том, чтобы луч BX ($\angle XBA = B$) пересекал бы указанную полуокружность, т. е. проходил бы внутри угла $B'BA$ (ибо BB' — касательная к полуокружности, B' — точка касания). Мы снова приходим к условию $B \leqslant \frac{\pi}{4}$.

Отсюда также сразу следует, что площадь s будет иметь максимальную величину, если точка C будет занимать наивысшее положение на указанной полуокружности; отсюда найдем

$$s_{\max} = \frac{c^2}{\sqrt{2}}.$$

$$4°.\ s = \frac{c^2}{\sqrt{2}}\ \frac{\sin C}{3-2\sqrt{2}\cos C}$$

и снова

$$s_{\max} = \frac{c^2}{\sqrt{2}},\quad \text{при}\quad \sin C = \frac{1}{3}$$

$\left(\text{угол } C \text{ при этом близок к } \frac{\pi}{8}\right)$. Построение графика $s = s(C)$ предоставляется читателю $\left(\text{на сегменте } \left[0,\ \arcsin\frac{1}{3}\right] \text{ функция } s = s(C) \text{ возрастает, а на сегменте } \left[\arcsin\frac{1}{3},\ \pi\right] \text{ — убывает}\right)$.

2. 1°. $OA' = 3a\cos x$, $OB' = 4a\sin x$, $OM = \frac{a}{2}$ $(3\cos x + 4\sin x)$.

2°. $mt^2 - 4t + m - 3 = 0$; 1) если $0 < m < 3$, задача имеет одно решение; 2) если $m = 3$, задача имеет два решения; одно из положений прямой OZ есть OX; 3) если $3 < m < 4$ — задача имеет два решения; 4) если $m = 4$ — задача имеет одно решение; 5) если $m > 4$ — задача не имеет решений. 3°. s принимает наибольшее значение $4a^2$ при $m = 4$; при этом $t_1 = \frac{1}{2}$.

Обозначая угол от OX до биссектрисы угла $M'OM''$ через u, имеем $u = \frac{x' + x''}{2}$,

$$\operatorname{tg} 2u = \frac{\operatorname{tg} x' + \operatorname{tg} x''}{1 - \operatorname{tg} x' \operatorname{tg} x''} = \frac{t' + t''}{1 - t't''} = \frac{\frac{4}{m}}{1 - \frac{m-3}{m}} = \frac{4}{3}.$$

Отсюда находим $\operatorname{tg} u = \frac{1}{2}$. 3. 1°. $MA = 2a \sin x$; $MB = 2a\sqrt{1 + \sin^2 x - 2\sin x \cos x}$. 2°. Если $\kappa \neq \sqrt{2}$, то $(2 - \kappa^2) \times \operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x + 1 = 0$. Отсюда: 1) если $1 < \kappa < \sqrt{2}$, задача имеет два решения, причем обе точки M расположены по одну сторону от AA', именно по ту, где лежит точка B; 2) если $\kappa > \sqrt{2}$, для точки M имеется два положения, но по разные стороны от AA'; 3) если $\kappa = 1$, то $x = \frac{\pi}{4}$ (одно решение); 4) если $\kappa < 1$, задача не имеет решений. Пусть $\kappa = \sqrt{2}$. Тогда одно из положений точки M есть A', другое — определяется углом $x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$. 3°. Геометрическое решение: геометрическое место точек M, для которых $\frac{MB}{MA} = \kappa$ есть окружность (Апполония), пересекающая прямую AB в точках I и J (I — лежит на отрезке AB, J — вне его) таких, что точки I, J делят отрезок AB — гармонически:

$$\frac{\overline{AI}}{\overline{AB}} = \kappa, \quad \frac{\overline{AJ}}{\overline{JB}} = -\kappa.$$

Если $\kappa < 1$, точки I и J расположены относительно середины O отрезка AB по ту же сторону, что и B и окружность (Γ), построенная на IJ, как на диаметре — не пересекает (C). Если $\kappa = 1$, окружность (Γ) вырождается в медиатрису AB, касающуюся (C) — одно решение. Если $\kappa > 1$, то точки I и J расположены относительно точки O с той же стороны, что и A и по разные стороны от A. Окружности (C) и (Γ) в таком случае непременно пересекаются, так как окружность (C) проходит через точку A, лежащую внутри (Γ), и касается прямой (Δ), которая лежит вне (Γ). Если κ изменяется от 1 до $+\infty$, то точка I (сначала совпадавшая с O) и точка J (сначала находящаяся в бесконечности) движутся навстречу друг другу, приближаясь к точке A, и расстояние AP от точки A до точки P, в которой (Γ) пересекает AA', убывает. Поэтому до тех пор, пока P не дойдет до A' обе точки пересечения (C) и (Γ) будут по одну сторону от AA' — с той же стороны, где и B; как только точка P перейдет через A' и окажется на отрезке AA', окружность (Γ) будет пересекать (C) в точках, расположенных по разные стороны от AA'. Но если точки P и A' совпадают, то

$$\kappa = \frac{PB}{PA} = \frac{A'B}{A'A} = \sqrt{2},$$

и отсюда легко получаются результаты предыдущего исследования. 4. 1°. $\cos A = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\sin A = \frac{1}{\sqrt{10}} = \sin (B+C)$, $\cos (B+C) = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, 2°. $\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = -\frac{1}{2}$; или B, или C — тупой угол. 3°. $2t^2 + t - 1 = 0$; $t_1 = -1$, $t_2 = \frac{1}{2}$, один из углов B или C равен $\frac{3\pi}{4}$. 4°. $a = \frac{2R}{\sqrt{10}}$, $b = R\sqrt{2}$, $C = \frac{2R}{\sqrt{5}}$, $h_a = \frac{R\sqrt{10}}{5}$, $h_b = \frac{R\sqrt{2}}{5}$, $h_c = \frac{R\sqrt{5}}{5}$, $r = \frac{R\sqrt{10}}{5(1+\sqrt{5}+\sqrt{2})}$. 5. Пусть H, G, O — ортоцентр, точка пересечения медиан и центр описанной окружности. Точки O и m получаются из H и A гомотетией $\left(G, -\frac{1}{2}\right)$, значит $\overrightarrow{mO} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{HA}$. Значит можно построить O, а затем окружность (Γ), описанную около искомого треугольника; она пересечет перпендикуляр из m на AH в точках B и C. Пересечение произойдет, если $OA > Om$ или $mF > FA$. А. 1°. Воспользоваться формулами $bc = 2Rh$, $b = 2R \sin B$ и т. д. 2°. $B = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} + \frac{1}{2}\arccos(1-\cos A)$, $C = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} - \frac{1}{2}\arccos(1-\cos A)$; решение возможно, если A — острый угол.

Если $A = \frac{\pi}{3}$, то $B = \frac{\pi}{2}$, $C = \frac{\pi}{6}$. 3°. Прямая. В. 1°. $\sin B \sin C = \frac{\kappa}{2}$. Отсюда $\kappa < 2$. Геометрически, если $h_a = \kappa R$, то $\kappa < 2$, так как $h_a < AB < 2R$. 2°. Окружность. 6. 1°. $\sin B \cos B = m \sin\left(\frac{3\pi}{4} - B\right)$. 2°. Если $m < \frac{1}{2}$, имеется лишь одно решение; если $m > \frac{1}{2}$ — решений нет. 3°. В случае $m = \frac{1}{2}$, $B = \frac{\pi}{4}$ — треугольник равнобедренный и прямоугольный. 7. Если $0 \leqslant s \leqslant a$, решений нет; если $a < s < a\sqrt{2}$, два решения; если $s = a\sqrt{2}$, два угла B равных 45°; если $s > a\sqrt{2}$, решений нет. 8. 1° $2p = 4R\cos\alpha(1+\sin\alpha)$, $s = 4R^2 \sin\alpha\cos^3\alpha$. 2°. $r = 2R\sin\alpha(1-\sin\alpha)$, $r_{\max} = \frac{R}{2}$ (при $\alpha = 30°$); $\Delta MAM'$ при этом равносторонний. 3°. $y = R(1-2\sin\alpha)$. Если α изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, y убывает от R до $-R$. 4°. Из $2R\sin\alpha(1-\sin\alpha) = l$ находим условие существования решения $l \leqslant \frac{R}{2}$. 5°. Продолжим AB за точку B так, чтобы $BC = l$. На отрезке AC строим, как на диаметре, полуокружность; пусть перпендикуляр к AC в точке B пересекает эту полуокружность в точке T; тогда прямая, проходящая через точку T

параллельно AC, пересекает данную окружность в искомой точке M. Решение возможно, если произойдет пересечение, т. е. если $BT \leqslant R$, откуда $l \leqslant \frac{R}{2}$. **9.** 1°. $s = a^2\left(\sin x - \sqrt{3}\cos x + \frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$. Если $s = ka^2$, то в случае $\frac{\sqrt{3}}{4} < k < \frac{9\sqrt{3}}{4}$ задача имеет одно решение, в случае $\frac{9\sqrt{3}}{4} < k < 2 + \frac{5\sqrt{3}}{4}$ — два решения; для остальных значений k — задача не имеет решений. $s_{\max} = a^2\left(2 + \frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$ $\left(\text{при } k = 2 + \frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$. 2°. Геометрическое место точек B — полуокружность (β) с центром O радиуса a, через граничные точки которой проходит прямая OA; геометрическое место (γ) точек C получается из геометрического места точек B вращением $\left(O, -\frac{\pi}{3}\right)$ — это, следовательно, полуокружность (γ) с центром O' ($\Delta OO'A$ — равносторонний). Угол OAC достигает максимума, если AC — касательная к полуокружности (γ); $\max \angle OAC = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$. Точки O, B и C лежат на одной прямой, если $\angle OBA = \frac{2\pi}{3}$; отсюда легко построить O. Далее, пусть (P) — трапеция; сторона BC не может быть параллельна OA, ибо в противном случае $\angle BAO = \frac{\pi}{3}$, что не может быть. Значит, если (P) трапеция, то основаниями ее могут быть только OB и AC; это будет тогда и только тогда, когда $\angle OBA = \frac{\pi}{3}$. Соответствующее положение точки B совпадает с пересечением (β) и окружности, описанной около треугольника $OO'A$. 3°. $s = a^2\left(\frac{2h}{a} - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$; s будет максимально, если h будет максимально, и это будет тогда, когда C находится в точке пересечения (γ) и медиатрисы отрезка OA. **11.** 1°. $AD = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$, $AE = \frac{2bc}{b-c}\sin\frac{A}{2}$. 2°. $B - C = \frac{\pi}{2}$. 3°. а) *Указание*: $\Delta\ DAE$ в случае $B - C = \frac{\pi}{2}$ — прямоугольный и равнобедренный, в) $a = \frac{b^2 - c^2}{\sqrt{b^2 + c^2}}$. **12.** 1°. Для того чтобы около трапеции можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы она была равнобедренной. Предположим, например, что угол BAx острый и пусть BH — перпендикуляр, опущенный из B на Ax. Для того чтобы трапеция $ABB'A'$ была равнобедренной, *необходимо*, чтобы ее сторона $A'B'$ была параллельна прямой BC, симметричной прямой BA относительно BH, значит прямая Sz должна быть параллельна BC. Но так как эта прямая должна пересекать *по-*

лупрямые Ax и By, решение возможно лишь тогда, когда точка S лежит вне угла ABC. Аналогично исследуется случай, когда угол BAx — тупой. *Замечание.* Если $Ax \perp AB$ и $Ay \perp AB$, то трапеция будет вписанной, если только она вырождается в прямоугольник ($Sz \parallel AB$). Задача имеет решение при любом положении S (по ту же сторону от AB, что и данные лучи). 2°. Пусть O' — середина $A'B'$; тогда $OO' \cdot h = m^2$; это дает возможность построить точку O'. Решение возможно, если только точка S не лежит внутри угла, образованного продолжениями BO' и AO' за точку O', ибо прямая SO' должна пересекать лучи Ax и By. Так как S не должна лежать по условию и между Ax, и Ay, то точка S не должна лежать внутри двух углов (сделать чертеж). 3°. $2m^2 \sin(x + \alpha) = (a^2 - b^2)\sin\alpha \sin x$

В частном случае $x = \frac{\pi}{6}$. 4°. Прямая проходит через точку J прямой AB, гармонически сопряженную с точкой S относительно A и B. 13. 1°. Пусть I и I' — центры вписанной окружности и вневписанной в угол A ($B \geqslant C$, следовательно, $b \geqslant c$), T и T' точки прикосновения окружностей (I) и (I') к стороне BC, S и S' точки прикосновения окружностей (I) и (I') к прямой AC. Тогда $AS = p - a$, $AS' = p$, откуда $SS' = a$, $BT = CT' = p - b$, $BT' = ET = p - c$.

Из треугольников $AS'I'$ и ASI: $r' = p\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}$, $r = (p-a)\,\mathrm{tg}\frac{A}{2}$, откуда $\mathrm{tg}\frac{A}{2} = \frac{d}{a}$, $b + c = \frac{as}{d}$.

Далее:

$$r' = I'T' = (p-c)\,\mathrm{tg}\frac{\pi - C}{2} = (p-c)\,\mathrm{ctg}\frac{C}{2},\quad r = IT = (p-b)\,\mathrm{tg}\frac{C}{2}\cdot$$

значит

$$rr' = \frac{1}{4}\,[a^2 - (b-c)^2]$$

и значит

$$b - c = \sqrt{a^2 + d^2 - s^2}.$$

Далее.

$$\sin A = \frac{2ad}{a^2 + d^2},\quad \sin B + \sin C = \frac{2as}{a^2 + d^2},$$

$$\cos\frac{B - C}{2} = \frac{s}{\sqrt{a^2 + d^2}}.$$

$$b = \frac{as}{2d} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + d^2 - s^2},\ c = \frac{sa}{2d} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + d^2 - s^2}.$$

Исследование Условие $b - c < a < b + c$ и условие действительности радикала дает

$$d < s < \sqrt{a^2 + d^2}.$$

Площадь

$$S = \frac{a(s^2 - d^2)}{4d}.$$

Углы B и C:

$$B=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{d}{a}+\arccos\frac{s}{\sqrt{a^2+d^2}}\ (s\leqslant\sqrt{a^2+d^2}),$$

$$C=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{d}{a}-\arccos\frac{s}{\sqrt{a^2+d^2}}.$$

Очевидно $B>0$; для того чтобы было и $C>0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\arccos\frac{s}{\sqrt{a^2+d^2}}<\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg}\frac{d}{a}$$

или

$$\frac{s}{\sqrt{a^2+d^2}}>\sin\operatorname{arc\,tg}\frac{d}{a}\ \text{ и т. д.},$$

и в результате опять $s>d$. 3°. $r'=\frac{s+d}{2}$, $r=\frac{s-d}{2}$. На прямой откладываем отрезок $SS'=a$. Строим окружности с радиусами r и r', касающиеся SS' в точках S и S', и проводим общую внутреннюю касательную к ним.

Исследование. $r>0$, т. е. $s>d$. Далее, условие возможности проведения общей внутренней касательной $s\leqslant II'$ или $s\leqslant\sqrt{a^2+d^2}$.

14. 1°. $u=\frac{\sin B\sin C}{\sin(B+C)}$.

Если заданы A и u, то

$$B=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}+\frac{1}{2}\arccos(2u\sin A-\cos A),$$

$$C=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\arccos(2u\sin A-\cos A).$$

Условие возможности решения: $B>0$ и $C>0$; первое неравенство всегда выполнено; условие $C>0$ дает

$$2u\sin A-\cos A>-\cos A,$$

откуда

$$u\leqslant\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}.\ 2°.\ A=\frac{5\pi}{12},\ B=\frac{5\pi}{12},\ C=\frac{\pi}{6}.\ 3°.\ (4u^2+1)a^4-$$
$$-2(b^2+c^2)a^2+(b^2-c^2)^2=0;$$

если корни этого уравнения действительны, то они и положительны; отсюда найдем

$$u\leqslant\frac{bc}{|b^2-c^2|}.$$

Заменим для удобства букву C буквой x и рассмотрим функцию

$$v=\frac{bx}{|b^2-x^2|},\quad x>0.$$

Сначала следует построить график функции

$$y=\frac{bx}{b^2-x^2},\quad x>0,$$

а потом заметить, что $y=|v|$. Функция же $y=y(x)$ на интервале $(0,\ b)$ возрастает от 0 до $+\infty$, на интервале $(b,+\infty)$ возрастает от $-\infty$ до 0. 4°. $\frac{AH}{BC}=\frac{AB\cdot AC}{|AC^2-AB^2|}$; но $AC^2-AB^2=CH^2-$ $-BH^2=\overline{CH}^2-\overline{BH}^2=(\overline{CH}+\overline{BH})(\overline{CH}-\overline{BH})=(\overline{HB}+\overline{HC})(\overline{BH}+$ $+\overline{HC})=2\overline{HO}\cdot\overline{BC}$ и значит $\frac{AH}{BC}=\frac{AB\cdot AC}{2HO\cdot BC}$, т. е. $AB\cdot AC=$ $=2AH\cdot OH$.

Далее, $AB\cdot AC=2R\cdot AH$, откуда $OH=R$. a) Отсюда следует, что AH касается описанной окружности (Ω) и что точка A есть конец диаметра (Ω), параллельного BC. b) Точка O имеет одинаковую степень относительно окружностей (Γ) и (Ω), а так как $A\Omega \parallel BC$, то искомая радикальная ось окружностей (Γ) и (Ω) есть медиатриса отрезка BC. **15.** Полагая $\angle BAP=x\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$, получим уравнение:

$$f(t)=k\cos\alpha\, t^2-t\cos\alpha+k\cos\alpha-1-\sin\alpha=0, \tag{1}$$

где $t=\operatorname{tg}x$. Учитывая условие $0<x<\frac{\pi}{2}$, заключаем, что задача имеет столько решений, сколько положительных корней имеет уравнение (1).

Если $k<\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$, то задача имеет одно решение.

Пусть $k>\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Сумма корней уравнения равна $\frac{1}{k}$, их произведение $\frac{k\cos\alpha-1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$ положительно, поэтому если еще $\Delta'=\cos^2\alpha-4k\cos\alpha\,(k\cos\alpha-1-\sin\alpha)>0$, то оба корня уравнения (1) будут действительны и положительны, и задача имеет два решения. Условие $\Delta'>0$ можно переписать в виде:

$$f(k)\equiv k^2\cos\alpha-(1+\sin\alpha)k-\frac{1}{4}\cos\alpha<0.$$

Так как $0<\cos\alpha<1$, то корни $f(k)$ действительны и разных знаков, а так как

$$f\left(\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=-\frac{1}{4}\cos\alpha<0, \text{ то}$$

$\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$ лежит между корнями $f(k)$. Таким образом, если

$$\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} < k < k',$$

где k' — положительный корень уравнения $f(k)=0$, т. е.

$$k' = \frac{1+\sin\alpha+\sqrt{2(1+\sin\alpha)}}{2\cos\alpha},$$

то задача имеет два решения. Наконец, если $k > k'$, решений нет. 1°. В частности при $AC = 2BC$ имеем: одно решение, если $k < \sqrt{3}$; два решения, если $\sqrt{3} < k < 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$; нет решений, если $k > 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. 2°. Если $AC = 2AB$, то одно решение, если $k > 2+\sqrt{3}$; два решения, если

$$2+\sqrt{3} < k < \frac{2+\sqrt{3}+2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{3},$$

и нет решений, если

$k > \frac{2+\sqrt{3}+2\sqrt{2+\sqrt{3}}}{3}$. 3°. Если $AB = BC$, то одно решение, если $k < 1+\sqrt{2}$; два решения, если

$$\sqrt{2}+1 < k < \frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};$$

нет решений, если

$$k > \frac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Геометрическое решение. Продолжим отрезок AQ за точку Q и отложим на продолжении от точки Q отрезок $QM = QP$. Тогда $AQ+QP = AM$. Соединим точки M и P и продолжим прямую MP до пересечения в точке U с прямой, касательной к полуокружности в точке A; тогда $AU = AM = AQ+QP$. Следовательно, для построения точки P достаточно на луче AU отложить от точки A отрезок $AU = kAB$ и провести через точку U прямую, перпендикулярную к биссектрисе угла CAU. Точки P, удовлетворяющие условию — суть точки пересечения указанной прямой с полуокружностью. Если прямая MPU пересекает AB между A и B, то она пересекает в одной точке P и полуокружность. Проведем касательную λ к полуокружности, перпендикулярную к биссектрисе угла CAU и через точку B проведем прямую μ, параллельную λ. Пусть прямые μ и λ пересекают луч AU в точках U_1 и U_2. Если точка U лежит на прямой AU между U_1 и U_2, то имеются две точки пересечения прямой UPM с полуокружностью, — задача имеет два решения. Решений нет, если прямая MPU пересекает AU в точке U, лежащей на продолжении луча AU_2 за точку U_2. Читателю предлагается вычислением установить тождественность результатов этого вычисления с данным выше алгебраическим решением. **16.** 1°. Геометрическое место точек A находится из условий $b=c$ или $b^2+c^2=2a^2$; оно состоит, следовательно, из медиатрисы отрезка BC и окружности (Γ) с центром в середине M отрезка AB и радиусом $r=a\frac{\sqrt{3}}{2}$. Треугольник ABC прямоугольный в следующих трех случаях: 1) $\angle A=90°$, если точка A лежит на медиатрисе BC на расстоянии $\frac{a}{2}$ от BC; 2) $\angle B=90°$, если точка A лежит в точке пересечения (Γ) с перпендикуляром к BC в точке B; 3) $\angle C=90°$, если точка A лежит в точке пересечения (Γ) с перпендикуляром к BC в точке C. 2°. $b^2+c^2-2a^2=0$, $b\neq c$, откуда $\sin^2 B+\sin^2 C-2\sin^2 A=0$, $B\neq C$ и т. д.

Если задан угол A, то (считаем $B>C$)

$$B=\frac{1}{2}\left(\pi-A+\arccos\frac{1-2\cos^2 A}{\cos A}\right),$$

$$C=\frac{1}{2}\left(\pi-A-\arccos\frac{1-2\cos^2 A}{\cos A}\right).$$

Исследование:

$$\left(\frac{1-2\cos^2 A}{\cos A}\right)^2<1,$$

$$(1-2\cos^2 A)^2<\cos^2 A,$$

$$4\cos^4 A-5\cos^2 A+1<0,$$

$$\frac{1}{4}<\cos^2 A<1,$$

значит $\cos^2 A>\frac{1}{4}$ (и только!), значит угол A не должен быть заключен между $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$. Пусть это условие выполнено; еще должны быть выполнены условия: $B>0$ и $C>0$; условие $B>0$, очевидно, выполнено; условие $C>0$ эквивалентно следующему:

$$\frac{1-2\cos^2 A}{\cos A}>-\cos A$$

или

$$\frac{1-\cos^2 A}{\cos A}>0.$$

Значит $\cos A>0$. Итак, A не может быть тупым углом и притом $A<\frac{\pi}{3}$.

Если $A = \frac{\pi}{4}$, то $B = \frac{5\pi}{8}$, $C = \frac{\pi}{8}$. 3°. $\cos\theta = \frac{|b^2 - c^2|}{2bc\sqrt{3}}$ (при вычислении использовать теорему: $|a^2 - c^2| = 2by$, где y — проекция медианы BB' на сторону AC);

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{3}\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Если x изменяется от 0 до $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, то θ убывает от $\frac{\pi}{2}$ до 0. 4°. Построим лишь треугольники ABC, для которых вершина A расположена над прямой BC. Вершина A должна быть прежде всего расположена на окружности (Γ). С другой стороны, точка B' — середина AC, должна быть расположена на одной из дуг окружностей, расположенных над BC, с граничными точками B и C и вмещающими угол θ или $\pi - \theta$. Значит, точка A должна быть расположена на одной из дуг, полученных из предыдущих гомотетий $(C, 2)$. Это дуги с концами C и B' $(\overrightarrow{CB'} = 2\overrightarrow{CB})$, вмещающими те же углы θ и $\pi - \theta$. Так как точки B' и C расположены— первая вне (Γ), вторая — внутри (Γ), то задача имеет всегда два решения, т. е. существуют 2 треугольника, удовлетворяющие условию задачи. 17. $\sin B + \sin C = k\sin A$ и т. д. Находим $B = \frac{\pi}{3} + \arccos\frac{k}{2}$, $C = \frac{\pi}{3} - \arccos\frac{k}{2}$. *Исследование*: $\frac{k}{2} \leqslant 1$ и $\frac{\pi}{3} - \arccos\frac{k}{2} > 0$ или $k > 1$. Итак, $1 \leqslant k \leqslant 2$.

Зная B и C, находим $b = \frac{a\sin B}{\sin A}$, $c = \frac{a\sin C}{\sin A}$. 2°. Построим два луча Ax и Ay, образующих угол $\frac{\pi}{3}$. Далее, $2p = a + ka = a(k+1)$. На лучах Ax и Ay откладываем отрезки $AD' = AE' = p$ и строим окружность, вписанную в угол xAy и касающуюся его сторон в точках D' и E' — это окружность (I'), вневписанная в угол A треугольника ABC. Пусть D и E — точки прикосновения вписанной окружности (I) в искомый треугольник ABC. Тогда $D'D = E'E = a$. Значит точки D и E можно построить, затем строим (I); BC будет общей внутренней касательной к (I) и (I'). *Исследование*: точки D' и E' должны быть расположены на отрезках AD' и AE', значит, должно быть $a < p$, $a < (1 + k)\frac{a}{2}$, $k > 1$. С другой стороны, для существования общей касательной к (I) и (I') необходимо и достаточно, чтобы $II' \geqslant r + r'$, где r и r'—радиусы (I) и (I'). Но $II'\cos\frac{\pi}{6} = EE' = a$ и т. д. и условие $II' \geqslant r + r'$ приведет к условию $k \leqslant 2$. 3°. $y = 2a\cos\left(\frac{\pi}{3} - C\right)$. Угол C может изменяться от 0 до $\frac{2\pi}{3}$. При этом на полуинтервале $\left(0, \frac{\pi}{3}\right]$ y возрастает от a до $2a$, а на полуинтервале $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ убывает от $2a$ до a. Отсюда следует, что условие $y = b + c = ka$ возможно тогда и только тогда, когда $a < ka \leqslant 2a$ или $1 < k \leqslant 2$. 18. Если A — острый угол, то точка D расположена с той же стороны от BC, что и A; мы имеем $u < \angle DOB$ и если D' — точка, диаметрально противоположная D на окружности (O), то $\angle DOB = \pi - \angle D'OB = \pi - \frac{BOC}{2} = \pi - A$ и так как угол A — острый, то из $a = 2R\sin v = 2R\sin A$ следует $v = A$ (v — всегда острый угол по условию). Таким образом $u < \pi - v$. Если A — тупой угол, то точка D расположена с точкой A по разные стороны от BC, угол u — тупой (сделать чертеж!) и $u > \angle DOB$. Но $\angle DOB$ равен половине центрального угла, на который опирается вписанный угол A, значит $\angle DOB = A$ и $u > A$. Но из равенства $a = 2R\sin v = 2R\sin A$ и того, что v — острый, а A — тупой угол, следует, что $A = \pi - v$ и значит $u > \pi - v$.

Таким образом надо рассмотреть два случая: A — острый угол; A — тупой угол. В первом случае:

$$B - C = u,\ B = \frac{\pi}{2} - \frac{v-u}{2},\ C = \frac{\pi}{2} - \frac{v+u}{2},$$

$$b = 2R\cos\frac{v-u}{2},\quad c = 2R\cos\frac{v+u}{2},$$

$$s = R^2 \sin v\,(\cos v + \cos u),\quad 2p = 4R\cos\frac{v}{2}\left(\sin\frac{v}{2} + \cos\frac{u}{2}\right),$$

$$r = 2R\sin\frac{v}{2}\left(\cos\frac{u}{2} - \sin\frac{v}{2}\right).$$

Во втором случае:

$$A = \pi - v,\ B - C = \pi - u,\quad B = \frac{\pi}{2} - \frac{u-v}{2},$$

$$C = -\left(\frac{\pi}{2} - \frac{u+v}{2}\right),\ b = 2R\cos\frac{u-v}{2},$$

$$c = -2R\cos\frac{u+v}{2},\quad s = -R^2\sin v\,(\cos u + \cos v),$$

$$2p = 4R\sin\frac{v}{2}\left(\cos\frac{v}{2} + \sin\frac{u}{2}\right),$$

$$r = -2R\cos\frac{v}{2}\left(\cos\frac{v}{2} - \sin\frac{u}{2}\right).$$

В первом случае при изменении u от 0 до $\pi - v$, s убывает от $R^2\sin v\cos v$ до 0, r убывает от $2R\sin\frac{v}{2}\left(1 - \sin\frac{v}{2}\right)$ до 0.

Во втором случае u может изменяться от $\pi - v$ до π. При этом s возрастает от 0 до $R^2 \sin v\,(1-\cos v)$, а r возрастает от 0 до $2R\cos\frac{v}{2}\left(1-\cos\frac{v}{2}\right)$. **19·1°**, а) $2p = \frac{r}{s-1}$.

б) $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{p}\right)$. Неизвестный угол x острый и, когда x изменяется от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то $x+\frac{\pi}{4}$ изменяется от $\frac{\pi}{4}$ до $\frac{3\pi}{4}$ и $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ принимает по два раза каждое из значений, заключенных между $\frac{1}{\sqrt{2}}$ и 1. Уравнение $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{p}\right)$ даст, следовательно, для $x+\frac{\pi}{4}$ два значения, в сумме дающие π, и значит для x — два значения, в сумме дающие $\frac{\pi}{2}$. Это будет при условии

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{1}{p}\right) < 1$$

или $p > \sqrt{2}+1$. 2°. а) AB — ось симметрии (OAB), значит (OAB) проходит через точку O', симметричную O относительно (D). б) В инверсии $(O, 1)$ точки A и B перейдут в точки A_1 и B_1 такие, что $\overline{OA_1}\cdot\overline{OA} = \overline{OB_1}\cdot\overline{OB} = 1 = OH^2$. Отсюда следует, что A_1 и B_1 — основания перпендикуляров, опущенных из H на OA и OB. Окружность (OAB) перейдет в прямую A_1B_1. Но так как четырехугольник OA_1HB_1 — прямоугольник, то A_1B_1 проходит через середину O_1' отрезка OH; значит (OAH) проходит через точку O' прямой OH такую, что $\overline{OO_1'}\cdot\overline{OO'} = 1$, но $\overline{OO_1'} = \frac{1}{2}$, значит $\overline{OO'} = 2$.

3°. В инверсии $(O, 1)$ точки M и N перейдут в основания M_1 и N_1 перпендикуляров, опущенных из H на OM и ON, а образом (OMN) будет прямая M_1N_1. Если угол MON вращается вокруг своей вершины O, точки M_1 и N_1 перемещаются на окружности с диаметром OH. Так как $u = \text{const}$, то и хорда M_1N_1 сохраняет постоянную длину и значит касается окружности (C_1) с центром I (середина OH) и радиусом $r_1 = IM_1\cos u = \frac{1}{2}\cos u$. Значит окружность (OMN) остается касательной к окружности (C), являющейся образом (C_1) в инверсии $(O, 1)$. Пусть E_1 и F_1 — точки, в которых (C_1) пересекает OH. Тогда $\overline{OE_1} = \overline{OI} + \overline{IE_1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos u$, $\overline{OF_1} = \overline{OI} + \overline{IF_1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos u$. Отсюда $\overline{OE} = \frac{2}{1-\cos u}$, $\overline{OF} =$

$= \dfrac{2}{1+\cos u}$ (E и F — образы E_1 и F_1 в указанной инверсии) и далее без труда находим

$$\overline{OC} = \frac{\overline{OE}+\overline{OF}}{2} = \frac{2}{\sin^2 u},$$

$$y = \frac{2}{\sin^2 u} \text{ и } z = \frac{2\cos u}{\sin^2 u}.$$

4°. Если u возрастает от 0 до $\frac{\pi}{2}$, то y убывает от $+\infty$ до 2, а z убывает от $+\infty$ до 0. Так как $z = y\cos u$, то второй график расположен ниже первого. Заметим, что для $u = \frac{\pi}{2}$ $y = 2$, а $z = 0$, т. е. окружность (C) вырождается в точку C такую, что $\overline{OC} = 2$ [см. выше 2°]. **20.** Решение.

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OC}{OB} = \frac{OD}{OC} = \ldots = \frac{OL}{OK} = \sqrt[n]{\frac{OB}{OA}\cdot\frac{OC}{OB}\cdots\frac{OL}{OK}} = \sqrt[n]{\frac{OL}{OA}}$$

и так как $OA = 1$, то $OL = \left(\frac{OB}{OA}\right)^n = \left[\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\lambda)}\right]^n$;

OL будет убывать с возрастанием n, если

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\lambda)} < 1.$$

Отсюда

1°. $\frac{\pi+\lambda}{2} < \alpha < \pi$. 2°. $\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}\lambda - \frac{1}{q\sin\lambda}$. 3°. а) $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \ldots + \overrightarrow{KL}$; проектируя на $\overrightarrow{AB}$, получим:

$\overline{P} = AB + BC\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \ldots + KL\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{KL}) = AB + AB \times q\cos\lambda + AB\,q^2\cos 2\lambda + \ldots + AB\,q^{n-1}\cos(n-1)\lambda$. Но $AB = \frac{\sin\lambda}{\sin(\alpha-\lambda)}$, значит $\overline{P} = \frac{\sin\lambda}{\sin(\alpha-\lambda)}[1 + q\cos\lambda + q^2\cos 2\lambda + \ldots + q^{n-1}\cos(n-1)\lambda]$. б) С другой стороны, $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OA}$ и значит

$$\overline{P} = OL\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OL}) - OA\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OA}) = q^n\cos(n\lambda - \alpha) - \cos\alpha,$$

$$\lim_{n\to\infty}\overline{P} = -\cos\alpha.$$

Замечание. Сравнивая результаты, получим:

$$1+q\cos\lambda+q^2\cos 2\lambda+\ldots+q^{n-1}\cos(n-1)\lambda=$$
$$=\frac{\sin(\alpha-\lambda)}{\sin\lambda}\left[q^n\cos(n\lambda-\alpha)-\cos\alpha\right]$$

и если $n\to\infty$, а $0<q<1$, то

$$1+q\cos\lambda+q^2\cos 2\lambda+\ldots+q^{n-1}\cos(n-1)\lambda+\ldots=$$
$$=-\frac{\cos\alpha\sin(\alpha-\lambda)}{\sin\lambda}\cdot 4^\circ.\ s=-\frac{\cos\alpha\sin(\alpha-9^\circ)}{\sin 9^\circ},$$

где α — решение уравнения

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-9^\circ)}=\frac{1}{10\sqrt{10}}(0<\alpha<\pi).$$

21. 1°. *Выражения CM, CN и MN в функции a и t:*

$CM=a\ (1-t)$, $CN=\frac{2\,at}{1+t}$, $MN=a\frac{1+t^2}{1+t}$. 2°. *Значение* t, *соответствующее данной длине l отрезка MN*. Имеется два решения:

$$t_{1,2}=\frac{l\pm\sqrt{l^2+4al-4a^2}}{2a}$$

тогда и только тогда, когда

$$2a\left(\sqrt{2}-1\right)\leqslant l\leqslant a.$$

В этом случае

$$\operatorname{tg}(x_1+x_2)=\frac{\operatorname{tg}x_1+\operatorname{tg}x_2}{1-\operatorname{tg}x_1\operatorname{tg}x_2}=\frac{t_1+t_2}{1-t_1t_2}=\frac{\frac{l}{a}}{1-\frac{a-l}{a}}=1,$$

а так как $0<x_1+x_2<90^\circ$, то $x_1+x_2=45^\circ$. Этот результат можно было установить и геометрически: если отрезок M_1N_1 имеет данную длину l, то отрезок M_2N_2, ему симметричный относительно диагонали AC, имеет ту же длину, но тогда $\angle M_2AB=\angle DAN_1=45^\circ-\angle M_1AB$. 3°. Выражение площади треугольника MAN в функции a и t:

$$\text{пл. }\Delta\ MAN=\frac{a^2}{2}\ \frac{t^2+1}{2(1+t)};$$

отсюда и из 1° следует, что расстояние от A до MN не зависит от t. 22. 1°. *Функция $y=y(x)$*

$$y=-\frac{(a-x)(b-x)}{x^2}=-\frac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2}.$$

При изменении x от a до $\frac{2ab}{a+b}$, y — возрастает от 0 до $\frac{(a-b)^2}{4ab}$;

при изменении x от $\frac{2ab}{a+b}$ до b, y — убывает от $\frac{(a-b)^2}{4ab}$ до 0 (сделать чертеж, полагая, например $a=1$, $b=5$).

$$\textit{Соотношение } \frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}+\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}=0.$$

Из соотношения $x=\frac{2ab}{a+b}$ или $\overline{OM'}=\frac{2\overline{OA}\cdot\overline{OB}}{\overline{OA}+\overline{OB}}$ следует $\frac{2}{\overline{OM'}}=\frac{1}{\overline{OA}}+\frac{1}{\overline{OB}}$, т. е. M' гармонически сопряжена с точкой O относительно A и B; значит,

$$\frac{\overline{M'A}}{\overline{M'B}}=-\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}.$$

Геометрическое решение. Обозначим через (Γ) одну из двух полуокружностей, ограниченных диаметром AB, а через P — точку (Γ), проектирующуюся в M. Так как $\overline{MA}\cdot\overline{MB}=MP^2$, то $y=\frac{MP^2}{MO^2}=\operatorname{tg}^2\alpha$, где $\alpha=\angle AOP$. Функция y изменяется в том же направлении, что и $\operatorname{tg}\alpha$, следовательно, в том же направлении, что и $\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$. Если P' — точка прикосновения касательной к (Γ), проведенной из O, а M' — ее проекция на $x'x$, то y принимает максимальное значение равное $\operatorname{tg}^2\alpha'$, где $\alpha'=\angle P'OM'$, иначе $y=\frac{(a-b)^2}{4ab}$. Если точка M описывает отрезок AM', y возрастает от 0 до $\frac{(a-b)^2}{4ab}$ и т. д.

$$2^\circ.\ z=-\frac{\overline{MA}\cdot\overline{MB}}{OM^2+OC^2}=-\frac{(a-x)(b-x)}{x^2+h^2}=$$
$$=-\frac{x^2-(a+b)x+ab}{x^2+h^2}.$$

Если x изменяется от a до

$$x'=\frac{ab-h^2+\sqrt{(h^2+a^2)(h^2+b^2)}}{a+b},$$

то z возрастает от 0 до

$$z'=-\frac{ab+h^2-\sqrt{(h^2+a^2)(h^2+b^2)}}{2h^2};$$

если x изменяется от x' до b, то z убывает от z' до 0.

CM'' — биссектриса угла ACB. Легко найти, что

$$\frac{M'A}{M'B}=\sqrt{\frac{h^2+a^2}{h^2+b^2}}=\frac{CA}{CB}$$

(M' — точка оси $x'x$, имеющая на этой оси координату x', значение которой указано выше).

Геометрическое решение. Пусть (C) — окружность, описанная около треугольника ABC, M — произвольная точка отрезка AB, N — вторая точка пересечения CM с (C) и H — проекция N на $x'x$. Тогда

$$z=-\frac{\overline{MA}\cdot\overline{MB}}{MC^2}=\frac{MA\cdot MB}{MC^2}=\frac{MC\cdot MN}{MC^2}=\frac{MN}{MC}=\frac{HN}{OC}=\frac{HN}{h}$$

и значит z меняется в том же направлении, что и HN. Обозначим через N'' середину дуги $\smile{AB}$ окружности, которая расположена в полуплоскости, не содержащей C, через H'' — ее проекцию на $x'x$ и через M'' — точку пересечения CN'' с $x'x$. Ясно, что CN'' — биссектриса угла ABC. Если точка M описывает отрезок OM'', то z возрастает от 0 до $\frac{H''N''}{h}$, а если точка M описывает $M''B$, то z убывает от $\frac{H''N''}{h}$ до 0. 3°. *Вычисление u.*

$$MA=2\sin\frac{x-\alpha}{2}\text{ и т. д.}$$

$$u=\frac{\sin\frac{x-\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta-x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}}$$

или

$$u=-\sin\frac{\alpha}{2}\,\sin\frac{\beta}{2}\left(t-\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\left(t-\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right),\quad t=\operatorname{ctg}\frac{x}{2};$$

$$u_{\max}=\frac{\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}\text{ при }t=\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right).$$

При изменении t от $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$ до $\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)$, u возрастает от 0 до $u_{\max}$, при изменении t от $\frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)$ до $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, u убывает от $u_{\max}$ до 0 [читателю рекомендуется построить соответствующие графики дуги параболы для трех случаев: 1) $0 < \alpha < \pi < \beta < 2\pi$; 2) $0 < \alpha < \beta < \pi$; 3) $\pi < \alpha < \beta < 2\pi$].

Свойство прямых SA, SB и SM'''. Пусть A_1, B_1 и M_1''' — точки пересечения прямых SA, SB и SM''' с прямой, проходящей через O перпендикулярно $x'x$. Тогда

$$\overline{OA_1} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},\ \overline{OB_1} = \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2},$$

$$\overline{OM_1'''} = \operatorname{ctg}\frac{x'''}{2} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\overline{OA_1} + \overline{OB_1}\right).$$

Геометрическое решение. Произведем инверсию $(S, 2)$. Тригонометрическая окружность перейдет в прямую $z'z$, проходящую через O перпендикулярно $x'x$, точки A, B, M перейдут в точки A_1, B_1, M_1 пересечения SA, SB, SM с $z'z$. На основании свойства инверсии:

$$MA = M_1A_1\frac{2}{SM_1\cdot SA_1},\ MB = M_1B_1\frac{2}{SM_1\cdot SB_1},\ SM\cdot SM_1 = 2.$$

Следовательно,

$$MA\cdot MB = \frac{4}{SM_1^2\cdot SA_1\cdot SB}\cdot M_1A_1\cdot M_1B_1 = \frac{SM^2}{SA_1\cdot SB_1}M_1A_1\cdot M_1B_1.$$

Следовательно,

$$u = \frac{MA\cdot MB}{SM^2} = M_1A_1\cdot M_1B_1\frac{1}{SA_1\cdot SB_1}.$$

Таким образом функция u лишь постоянным множителем $\frac{1}{SA_1\cdot SB_1}$ отличается от $M_1A_1\cdot M_1B_1$. Точка M расположена на дуге $\breve{AB}$ (от A к B в положительном направлении), значит луч SMM_1 проходит внутри угла $(\overrightarrow{SA_1}, \overrightarrow{SB_1})$ и значит точка M_1 лежит на отрезке A_1B_1. Поэтому $M_1A_1 + M_1B_1 = A_1B_1 = \mathrm{const}$, следовательно, произведение $M_1A_1\cdot M_1B_1$ будет максимально, если точка M_1 будет серединой M_1''' отрезка A_1B_1 и это максимальное произведение будет равно $\frac{A_1B_1^2}{4}$. Произведение $M_1A_1\cdot M_1B_1$ возрастает от 0 до $\frac{1}{4}A_1B_1^2$, если точка M_1 описывает отрезок A_1M_1''' и убывает от $\frac{1}{4}A_1B_1^2$ до 0, если точка M_1 описывает отрезок $M_1'''B$. Если M''' — точка пересечения SM_1''' с дугой $\breve{AB}$, то из предыдущего следует, что если точка M описывает дугу $\overset{\smile}{AM'''}$, то u изменяется от 0 до $\frac{1}{4}\frac{A_1B_1^2}{SA_1\cdot SB_1}=\frac{AB^2}{4SA\cdot SB}$, а если точка M описывает дугу $\overset{\smile}{M'''B}$, то u убывает от $\frac{AB^2}{4SA\cdot SB}$ до 0.

Наконец, остается получить, что

$$\frac{AB^2}{4SA\cdot SB}=\frac{1}{4}\frac{\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}.$$

23. Ответ 2°.

$$B=\frac{\pi}{4}+\arccos\left(\frac{l^2}{2a^2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$C=\frac{\pi}{4}-\arccos\left(\frac{l^2}{2a^2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Единственное условие возможности решения задачи заключается в том, что

$$\frac{l^2}{2a^2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant 1 \text{ или } l<\sqrt{2-\sqrt{2}}\,a$$

(тогда очевидно $B>0$ и $C>0$). 24. 1°. *Вычисление углов* B *и* C. Из соотношения

$$(a+b+c)\,r=ah,$$

заменяя a, b, c на $\sin A$, $\sin B$ и $\sin C$ и учитывая, что $A+B+$ $+C=180°$, получим

$$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{h-r}{r}\sin\frac{A}{2}.$$

В силу условия $h>2r$ имеем $\frac{h-r}{r}>1$ и значит положительное число $\frac{h-r}{r}\sin\frac{A}{2}$ может быть >1. Таким образом для решения задачи необходимо, чтобы

$$\frac{h-r}{r}\sin\frac{A}{2}\leqslant 1.$$

В таком случае

$$\frac{B-C}{2}=\arccos\left(\frac{h-r}{r}\sin\frac{A}{2}\right),$$

$$\frac{B+C}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}$$

и значит

$$B=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}+\arccos\left(\frac{h-r}{r}\sin\frac{A}{2}\right),$$

$$C = \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} - \arccos\left(\frac{h-r}{r}\sin\frac{A}{2}\right).$$

Этим значениям B и C будет соответствовать треугольник ABC, удовлетворяющий условию задачи, если B и C получат положительные значения. Ясно, что $B > 0$. Мы будем иметь, что и $C > 0$ тогда и только тогда, когда

$$\arccos\left(\frac{h-r}{r}\sin\frac{A}{2}\right) < \frac{\pi}{2} - \frac{A}{2},$$

или

$$\frac{h-r}{r}\sin\frac{A}{2} > \sin\frac{A}{2},$$

или $\dfrac{h-r}{r} > 1$, т. е. $h > 2r$, что имеет место по условию.

Итак, задача разрешима, если $\dfrac{h-r}{r}\sin\dfrac{A}{2} \leqslant 1$. 2°. Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC, и K — его проекция на BC. Так как BI и CI — биссектрисы углов B и C, то углы IBC и ICB, соответственно равные $\dfrac{B}{2}$ и $\dfrac{C}{2}$ — острые, а потому точка K лежит на отрезке BC и значит

$$a = BC = KB + KC = r\operatorname{ctg}\frac{B}{2} + r\operatorname{ctg}\frac{C}{2} =$$

$$= r\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = r\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\frac{1}{2}\left(\cos\frac{B-C}{2} - \cos\frac{B+C}{2}\right)} =$$

$$= 2\frac{r^2}{h-2r}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}.$$

Выражения для R и p:

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{1}{2}\,\frac{r^2}{h-2r}\,\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}},$$

$$p = \frac{ah}{2r} = \frac{rh}{h-2r}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}.$$

Вычисление r' в функции r, a, p. Пусть T и T' — точки прикосновения прямой AC к окружности, вписанной в треугольник ABC, и к окружности, вневписанной в угол A, а I и I' — центры этих окружностей. Так как $\triangle AI'T' \sim \triangle AIT$, то

$$\frac{I'T'}{IT} = \frac{AT'}{AT} \quad \text{или} \quad \frac{r'}{r} = \frac{p}{p-a},$$

откуда

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{r'}=\frac{a}{pr}=\frac{2}{h}$$

(классическое соотношение, вытекающее из того, что I и I' делят гармонически отрезок, ограниченный вершиной A треугольника и точкой, в которой биссектриса внутреннего угла A пересекается с BC). 2°. Случай $h=3r$. В этом случае соотношение

$$(\sin A+\sin B+\sin C)\, r = h\sin A \qquad \text{(см. 1°)}$$

примет вид

$$\sin B+\sin C=2\sin A,$$

откуда

$$b+c=2a$$

или

$$a=\frac{b+c}{2},$$

т. е. сторона a есть полусумма сторон b и c, значит стороны треугольника образуют арифметическую прогрессию.

Условие, при котором $R=r'$. Так как

$$r'=\frac{rh}{h-2r},\quad R=\frac{1}{2}\,\frac{r^2}{h-2r}\,\frac{1}{\sin^2\frac{A}{2}},$$

то условие $R=r'$ принимает вид:

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{r}{2h}.$$

По условию $h>2r$, значит $\frac{r}{2h}<\frac{1}{4}$ и следовательно $\sin\frac{A}{2}<\frac{1}{2}$.

К этому условию надо еще добавить условие существования треугольника, найденное в 1°, которое примет вид:

$$\frac{h-2h\sin^2\frac{A}{2}}{2h\sin^2\frac{A}{2}}\cdot\sin\frac{A}{2}\leqslant 1$$

или

$$2\sin^2\frac{A}{2}+2\sin\frac{A}{2}-1\geqslant 0.$$

Отсюда

$$\sin\frac{A}{2}\geqslant\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$$

(ибо один из корней отрицателен).

Итак, условие, которому должен удовлетворять угол A для того, чтобы было возможно равенство $R=r'$ — таково:

$$\frac{\sqrt{3}-1}{2}\leqslant\sin\frac{A}{2}<\frac{1}{2}$$

или

$$2 \arcsin \frac{\sqrt{3}-1}{2} \leqslant A < \frac{\pi}{3}. \qquad (1)$$

Случай $R = r' = 3r$. Из соотношения $\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = \frac{2}{h}$ прежде всего находим $h = 3r$ и далее $\sin^2 \frac{A}{2} = \frac{r}{6r} = \frac{1}{6}$, откуда $\sin \frac{A}{2} = \frac{\sqrt{6}}{6}$. Это значение $\sin \frac{A}{2}$ удовлетворяет неравенствам (1). Таким образом равенства $R = r' = 3r$ возможны.

Выражение а через r:

$$a = 2r \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = 2r \sqrt{1 - \frac{1}{6}} : \sqrt{\frac{1}{6}} = 2r\sqrt{5}.$$

25. 1°. Окружность, вписанная в треугольник OMN, всегда касается Ox и (D) и ее диаметр равен $2a$. Центр этой окружности расположен на прямой (Δ), параллельной Ox и (D) и равноудаленной от этих прямых. Если, следовательно, существует треугольник OMN такой, что $\angle xOI = \varphi$, где I — центр окружности, вписанной в этот треугольник, то точка I должна быть точкой пересечения (Δ) с полупрямой Oz, образующей с Ox угол φ с той же стороны, где находится (D). Вписанная в треугольник OMN окружность — это окружность с центром I и радиусом a. Вершина M есть пересечение перпендикуляра, опущенного из I на Ox с касательной, отличной от Ox, проведенной из O к вписанной окружности. Так как окружность (I) вписана в треугольник OMN (а не вневписана), то точка M расположена по ту же сторону от Ox, что и (D), а потому окружность (I) не пересекает прямую Oy, перпендикулярную Ox. Отсюда следует, что точка I лежит на луче, лежащем на прямой (Δ), причем граничной точкой этого луча будет центр I_0 окружности, касающейся Ox, (D) и Oy. Так как $\angle xOI_0 = \frac{\pi}{4}$, то $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$. Обратно. Если $0 < \varphi < \frac{\pi}{4}$, то построение I, а затем треугольника OMN даст решение задачи. Таким образом геометрическое место точек I есть луч прямой (Δ), ограниченной точкой I_0. 2°. *Биссектриса внутреннего угла N треугольника OMN* проходит через точку Γ пересечения Oy и (D).

3°. $R = \frac{a}{2 \cos 2\varphi (1 - \cos 2\varphi)}$. Если $R = l$, то

$$2l \cos^2 2\varphi - 2l \cos 2\varphi + a = 0.$$

Это уравнение имеет действительные корни при $l > 2a$; при этом они будут различные, положительные и меньше 1 (два решения); при $l = 2a$, $\varphi = \frac{\pi}{6}$ — одно решение. 26. 1°. *Соотношение между* *элементами треугольника ABC.* Обозначим через β и γ длины медиан, выходящих из вершин B и C. По условию

$$\frac{\beta}{\gamma}=\frac{c}{b} \text{ или } b\beta=c\gamma. \qquad (1)$$

Применяя теорему о медиане сначала к сторонам c и a, затем к сторонам b и a треугольника ABC, получим

$$c^2+a^2=2\beta^2+\frac{b^2}{2},\quad b^2+a^2=2\gamma^2+\frac{c^2}{2}.$$

Отсюда

$$4b^2\beta^2=b^2(2c^2+2a^2-b^2),$$
$$4c^2\gamma^2=c^2(2b^2+2a^2-c^2)$$

так как $b\beta=c\gamma$ и $b\neq c$, то отсюда получаем $b^2+c^2=2a^2$.

Соотношение $bc=\dfrac{a^2}{2\cos A}$ получается из соотношения $b^2+c^2=$ $=2a^2$ и теоремы косинусов.

Замечание. Из каждого соотношения

$$b\beta=c\gamma,\ b^2+c^2=2a^2,\ bc=\frac{a^2}{2\cos A}$$

следует два других ($b\neq c$).

Из соотношения $bc=\dfrac{a^2}{2\cos A}$ следует, что A — острый угол.

2°. *Вычисление b и c.* Величины b^2 и c^2 — корни уравнения

$$x^2-2a^2x+\frac{a^4}{4\cos^2 A}=0.$$

Если корни этого уравнения действительны, то они и положительны. Условие действительности и различности корней:

$$a^4-\frac{a^4}{4\cos^2 A}>0,$$

откуда $A<\dfrac{\pi}{3}$.

Таково необходимое и достаточное условие того, что корни уравнения (3) действительны и различны. 3°. Величина $AH=h$:

$$h=\frac{a}{2}\operatorname{tg} A.$$

Построение треугольника. На прямой откладываем отрезок $BC=a$. Строим дугу (Γ) с концами B и C, вмещающую угол A, и проводим прямую (Δ), параллельную BC [в той же полуплоскости от BC, где лежит (Γ)] на расстоянии $\dfrac{a}{2}\operatorname{tg} A$ от BC. Для того чтобы прямая (Δ) пересекала дугу (Γ), необходимо и достаточно, чтобы $\frac{a}{2}\operatorname{tg} A < \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$ $\left(\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}\right.$ есть длина отрезка OI, где O — середина BC, а I — точка пересечения (Γ) с медиатрисой BC). Имеем:

$$\frac{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{A}{2}} < \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}$$

и так как A — острый угол, то отсюда легко получаем $A < \frac{\pi}{3}$.

4°. *Другое построение треугольника ABC.* Из соотношения $b^2+c^2 = 2a^2$ следует, что точка A лежит на окружности (C), которая является геометрическим местом точек, сумма квадратов каждой из которых до точек B и C равна $2a^2$. Это окружность с центром O и радиусом, определяемым из равенства

$$2\rho^2 + \frac{a^2}{2} = 2a^2,$$

откуда

$$\rho = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом точка A есть точка пересечения (Γ) и (C). Так как $\rho > \frac{a}{2}$, то точки B и C лежат внутри окружности (C); окружность (C) будет поэтому пересекать дугу (Γ), если $\rho < OI$, т. е. $\frac{a\sqrt{3}}{2} < \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$, откуда опять $A < \frac{\pi}{3}$. 27. 1°. *Соотношение* $\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{a}{h}$. Ориентируем сторону BC от точки B к точке C; тогда во всех случаях будем иметь:

$$\operatorname{ctg} B = \frac{\overline{BA'}}{\overline{AA'}},\ \operatorname{ctg} C = \frac{\overline{A'C}}{\overline{AA'}},$$

откуда

$$\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{\overline{BA'}+\overline{A'C}}{\overline{AA'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AA'}} = \frac{a}{h}.$$

2°. *Вычисление произведения* $\operatorname{ctg} B \cdot \operatorname{ctg} C$.

Из формулы

$$\operatorname{ctg}(B+C) = -\frac{\operatorname{ctg} B\cdot\operatorname{ctg} C - 1}{\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C}$$

находим

$$\operatorname{ctg} B\cdot\operatorname{ctg} C = 1 - \frac{a}{h}\operatorname{ctg} A.$$

Вычисление $\operatorname{ctg} B$ *и* $\operatorname{ctg} C$; $\operatorname{ctg} B$ и $\operatorname{ctg} C$ — корни уравнения

$$f(x) \equiv x^2 - \frac{a}{h}x + 1 - \frac{a}{h}\operatorname{ctg} A = 0.$$

Корни этого уравнения будут действительны, если

$$\frac{a^2}{h^2} - 4\left(1 - \frac{a}{h}\operatorname{ctg} A\right) \geqslant 0,$$

откуда

$$\operatorname{ctg} A \geqslant \frac{4h^2 - a^2}{4ah}.$$

Это условие можно переписать так:

$$\frac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{A}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}} \geqslant \frac{4h^2 - a^2}{4ah}$$

или (так как $\operatorname{tg}\frac{A}{2} > 0$):

$$\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \frac{2h}{a}\right)\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2} - \frac{a}{2h}\right) \leqslant 0$$

и так как $\operatorname{tg}\frac{A}{2} + \frac{2h}{a} > 0$, то

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} \leqslant \frac{a}{2h}.$$

Замечание. Мы придем сразу к этому условию, если будем рассматривать дискриминант уравнения $f(x) = 0$ как квадратный трехчлен относительно $\frac{a}{h}$. 3°. Построение треугольника и геометрическое исследование не представляет трудности, его предлагаем провести читателю самостоятельно. 4°. Будем рассматривать только те из треугольников ABC, которые расположены по одну сторону от BC. Обозначим через (Γ) дугу с концами B и C, вмещающую угол A. Обозначим через BT и CT' лучи, расположенные в полуплоскости от BC, где лежит (Γ), и касающиеся (Γ) соответственно в точках B и C.

Так как $\widehat{BB'C} = 90^\circ$ и $\widehat{BC'C} = 90^\circ$, то точки B' и C' лежат на окружности с диаметром BC. Если точка A описывает (Γ), прямая AB описывает внутренность угла CBT и ему вертикального, точка C' описывает целиком дугу CBC_0 окружности с диаметром BC, расположенную внутри угла CBT и внутри угла с ним вертикального (C_0 — точка пересечения окружности с диаметром BC с продолжением луча BT за точку T). Аналогично устанавливаем, что геометрическое место точек B' есть дуга BCB_0 окружности с диаметром BC, расположенная внутри угла BCT' и внутри угла, вертикального с углом BCT'. Эти дуги (геометрические места точек B' и C') симметричны относительно медиатрисы отрезка BC.

Изучение отрезков $B'C'$ *и* AH. Так как $\triangle BB'C'$ вписан в окружность с диаметром BC, то

$$B'C' = BC \sin B'BC' = a \sin B'BC'.$$

Для различных расположений точки A на дуге (Γ) будем иметь: или

$$B'\hat{B}C' = \frac{\pi}{2} - A,$$

или

$$B'\hat{B}C' = A - \frac{\pi}{2},$$

или

$$B'\hat{B}C' = \frac{\pi}{2} + A.$$

Во всех случаях $\sin B'BC' = |\cos A|$, так что

$$B'C' = a\,|\cos A| = \text{const}$$

при заданных A и a.

Четырехугольник $AB'HC'$ вписан в окружность с диаметром AH, значит $\frac{B'C'}{\sin A} = AH$, откуда

$$AH = a\frac{|\cos A|}{\sin A} = a\,|\operatorname{ctg} A| = \text{const}.$$

Замечание. Если O — центр дуги (Γ) и ω — середина BC, то легко подсчитать, что $O\omega = \frac{a}{2}\,|\operatorname{ctg} A|$ и значит $AH = 2\,O\omega$. Это соотношение, верное для любого треугольника, более точно записывается так: $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{O\omega}$. *$B'C'$ остается касательной к фиксированной окружности.* Хорда $B'C'$ окружности с диаметром BC сохраняет постоянную длину равную $a\,|\cos A|$ и потому остается касательной к окружности с центром ω и радиусом $\rho = \frac{a}{2}\sin A$.

Геометрическое место середины I отрезка AH. Соотношение $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{O\omega}$ показывает, что геометрическое место середины I отрезка AH есть дуга (Γ'), полученная из (Γ) переносом, определяемым вектором $\overrightarrow{O\omega}$. 28. 2°. $s = \frac{R^2}{2}\,\frac{(1+\cos 2\alpha)\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$, если $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{4}$ и $s = -\frac{R^2}{2}\,\frac{(1+\cos 2\alpha)\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$, если $\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$.

29. 1°. $s = \frac{1}{2}\,a\cdot ka = \frac{1}{2}ka^2$, $s = \frac{1}{2}\,bc\sin A$ и т. д. Соотношение $\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{1}{k}$ вытекает сразу из $\sin B \sin C = k \sin A$ (и обратно). 2°. Считая $k = \frac{1}{2}$, получим $2\sin B\sin C = \sin A$,

$\cos(B-C)-\cos(B+C)=\sin A$, откуда

$$\cos(B-C)=-\sqrt{2}\cos\left(A+\frac{\pi}{4}\right).$$

Вопрос сводится к решению следующей смешанной системы

$$B\geqslant C, \tag{1}$$

$$\cos(B-C)=-\sqrt{2}\cos\left(A+\frac{\pi}{4}\right), \tag{2}$$

$$B+C=\pi-A, \tag{3}$$

$$C>O. \tag{4}$$

Следствием соотношения (2) является

$$-1\leqslant\sqrt{2}\cos\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\leqslant 1,$$

откуда $A\leqslant\frac{\pi}{2}$. Если это условие выполнено, то

$$B-C=\arccos\left[-\sqrt{2}\cos\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

откуда

$$B=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc\,cos}\left[-\sqrt{2}\cos\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

$$C=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}-\frac{1}{2}\operatorname{arc\,cos}\left[-\sqrt{2}\cos\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

Условие $C>O$ эквивалентно следующему

$$\pi-\operatorname{arc\,cos}\left[-\sqrt{2}\cos\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\right]>A$$

или

$$\cos\left\{\pi-\operatorname{ars\,cos}\left[-\sqrt{2}\cos\left(A+\frac{\pi}{4}\right)\right]\right\}<\cos A,$$

или

$$\cos A-\sin A<\cos A-$$

условие, которое выполнено $\left(\text{при } 0<A\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

Окончательно. Задача имеет и притом только одно решение тогда и только тогда, когда $0<A\leqslant\frac{\pi}{2}\left(\text{если } A=\frac{\pi}{2},\ B=C=\right.$ $\left.=\frac{\pi}{4}\right)$.

Геометрически построение треугольника просто: строим отрезок BC длиной a и дугу (Γ) с концами B и C, вмещающую угол A (по одну сторону от BC); проводим прямую (Δ), параллельную BC и отстоящую от BC на расстоянии $\frac{a}{2}$ (по ту же сторону, где и указанная дуга). Пусть K — точка, в которой эта прямая пересекает медиатрису OS отрезка AB (точка O — середина AB, точка S — лежит на указанной дуге). Для того чтобы эта прямая имела с дугой (Γ), хотя бы одну общую точку, необходимо и достаточно, чтобы $OK \leqslant OS$. Но $OK = \frac{a}{2}$, $OS = OB \operatorname{ctg} \frac{A}{2} = \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$, $1 \leqslant \operatorname{ctg} \frac{A}{2}$,

откуда
$$A \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Если $A = \frac{\pi}{2}$, прямая (Δ) касается в точке S дуги (Γ), которая в этом случае есть полуокружность с диаметром BC. Соответствующий треугольник — равнобедренный прямоугольный.

Если $0 < A < \frac{\pi}{2}$, то прямая (Δ) пересекает (Γ) в двух точках A и A_1 и при условии $B > C$ лишь одна из них дает решение вопроса.

Мы видим, что результаты геометрического исследования совпадают с результатами аналитического исследования, данного выше. 30. 1°. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC, (Δ) — медиатриса стороны BC, ω — точка, в которой продолжение биссектрисы AA_1 за точку A_1 пересекает окружность (Γ), описанную около треугольника ABC, A' — точка, симметричная точке A относительно (Δ). Пусть, наконец, H — основание высоты, опущенной из вершины A на сторону BC. Имеем

$$\widehat{HA\omega} = \widehat{A\omega M} = \frac{1}{2}\widehat{A\omega A'} = \frac{1}{2}\widehat{ACA'} = \frac{1}{2}(\widehat{BCA'} - \widehat{BCA}) = \frac{B-C}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника HAA_1 находим

$$HA = \alpha \cos \frac{B-C}{2}.$$

Далее,

$$s = \frac{1}{2} a \alpha \cos \frac{B-C}{2} = \frac{1}{2} bc \sin A;$$

отсюда легко получить формулу (1).

Решение треугольника ABC по данным A, a, α. Из формулы (1) находим:

$$\alpha \cos\frac{B-C}{8}\sin A=\frac{1}{2}a\left[\cos(B-C)-\cos(B+C)\right]$$

или

$$\alpha \cos\frac{B-C}{2}\sin A=\frac{1}{2}a\left(2\cos^2\frac{B-C}{2}-1+\cos A\right).$$

Полагая $\cos\frac{B-C}{2}=x$, получим

$$f(x)\equiv a x^2-\alpha\sin A\cdot x-a\sin^2\frac{A}{2}=0.$$

Корни этого уравнения всегда действительны. Так как $\frac{B+C}{2}=\frac{\pi-A}{2}$, то $\frac{B-C}{2}<\frac{\pi-A}{2}$, а так как мы считаем, что $B\geqslant C$, то $0\leqslant\frac{B-C}{2}<\frac{\pi-A}{2}$ или $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}\right)<x\leqslant 1$, или $\sin\frac{A}{2}<x\leqslant 1$. Но так как $f\left(\sin\frac{A}{2}\right)=-\alpha\sin A\sin\frac{A}{2}<0$, то лишь один из корней уравнения $f(x)=0$ будет больше $\sin\frac{A}{2}$. Однако должно еще быть $f(1)\geqslant 0$, что дает

$$a-\alpha\sin A-a\sin^2\frac{A}{2}\geqslant 0,$$

откуда

$$\alpha\leqslant\frac{1}{2}a\operatorname{ctg}\frac{A}{2}.$$

Если это последнее условие выполнено, то уравнение $f(x)=0$ имеет только один корень, удовлетворяющий условию $\sin\frac{A}{2}<x\leqslant 1$; это, очевидно, больший корень уравнения $f(x)=0$, т. е.

$$x=\frac{\alpha\sin A+\sqrt{\alpha^2\sin^2 A+4a^2\sin^2\frac{A}{2}}}{2a}.$$

Отсюда

$$\frac{B-C}{2}=\arccos\frac{\alpha\sin A+\sqrt{\alpha^2\sin^2 A+4a^2\sin^2\frac{A}{2}}}{2a}$$

и так как

$$\frac{B+C}{2}=\frac{\pi-A}{2},$$

то

$$B=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}+\text{ars}\cos\frac{a\sin A+\sqrt{a^2\sin^2 A+4a^2\sin^2\frac{A}{2}}}{2a},$$

$$C=\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2}-\arccos\frac{a\sin A+\sqrt{a^2\sin^2 A+4a^2\sin^2\frac{A}{2}}}{2a}.$$

Так как

$$0\leqslant\arccos\frac{a\sin A+\sqrt{a^2\sin^2 A+4a^2\sin^2\frac{A}{2}}}{2a}<\frac{\pi}{2}-\frac{A}{2},$$

то $C>0$ и существует только один треугольник, удовлетворяющий условию задачи. Зная B и C, можно вычислить b и c из формул

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

Итак, при $\alpha\leqslant\frac{1}{2}a\operatorname{ctg}\frac{A}{2}$ решение существует и только одно.

2°. *Построение треугольника ABC, если даны A, a и α.* $\Delta\omega A_1B\sim\Delta\omega BA$, значит $\frac{\omega A_1}{\omega B}=\frac{\omega B}{\omega A}$, откуда $\omega A\cdot\omega A_1=\omega B^2$. Строим сторону $BC=a$ и окружность, описанную около треугольника ABC; для этого проводим луч CT такой, что $\angle BCT=A$; CT — касательная к описанной окружности в точке A; центр описанной окружности есть точка пересечения медиатрисы отрезка AB с перпендикуляром к CT в точке C. Пусть ω — середина дуги BC описанной окружности, расположенной по отношению к BC со стороны, противоположной A (эту вершину мы должны еще определить). Известна разность $\omega A-\omega A_1=\alpha$ и средняя пропорциональная ωB к ωA и ωA_1; отсюда можно построить ωA_1, а затем и точку A_1 как точку пересечения с отрезком BM окружности с центром ω и радиусом ωA_1. Построение возможно тогда и только тогда, когда

$$\omega M\leqslant\omega A_1<\omega B.$$

Но $\omega M=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{A}{2}$. Из соотношений $\omega A-\omega A_1=\alpha$, $\omega A\cdot\omega A_1=\omega B^2$ находим

$$\omega A_1=\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\omega B^2}}{2},$$

и так как

$$\omega B=\frac{a}{2\cos\frac{A}{2}},\ \text{то}$$

$$\omega A_1 = \frac{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 \frac{A}{2} + a^2} - \alpha \cos \frac{A}{2}}{2 \cos \frac{A}{2}}.$$

Неравенства $\omega M \leqslant \omega A_1 < \omega B$ принимают вид

$$\frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{A}{2} \leqslant \frac{\sqrt{\alpha^2 \cos^2 \frac{A}{2} + a^2} - \alpha \cos \frac{A}{2}}{2 \cos \frac{A}{2}} < \frac{a}{2 \cos \frac{A}{2}}$$

или

$$a \sin \frac{A}{2} \leqslant \sqrt{\alpha^2 \cos^2 \frac{A}{2} + a^2} - \alpha \cos \frac{A}{2} < a,$$

$$a \sin \frac{A}{2} + \alpha \cos \frac{A}{2} \leqslant \sqrt{\alpha^2 \cos^2 \frac{A}{2} + a^2} < a + \alpha \cos \frac{A}{2}.$$

Возводя в квадрат (все члены неравенств положительны), получим:

$$\left(a \sin \frac{A}{2} + \alpha \cos \frac{A}{2}\right)^2 \leqslant \alpha^2 \cos^2 \frac{A}{2} + a^2 < \left(a + \alpha \cos \frac{A}{2}\right)^2.$$

Первое неравенство

$$\left(a \sin \frac{A}{2} + \alpha \cos \frac{A}{2}\right)^2 \leqslant \alpha^2 \cos^2 \frac{A}{2} + a^2$$

приводится к виду

$$\alpha \leqslant \frac{1}{2} a \operatorname{ctg} \frac{A}{2}.$$

Второе:

$$\alpha^2 \cos^2 \frac{A}{2} + a^2 < \left(a + \alpha \cos \frac{A}{2}\right)^2$$

выполняется всегда. Итак, мы снова приходим к необходимому и достаточному условию существования треугольника с данными A, a, α:

$$\alpha \leqslant \frac{1}{2} a \operatorname{ctg} \frac{A}{2}.$$

3°. Решение треугольника ABC по данным A, a и $\beta\gamma$.

Прежде всего легко получить формулу (2). Из этой формулы в силу $\beta\gamma = ka^2$ находим

$$\sin B \cdot \sin C = k \cos \frac{C - A}{2} \cos \frac{B - A}{2}$$

или

$$\cos (B - C) - \cos (B + C) = k \left[\cos\left(\frac{B + C}{2} - A\right) + \cos \frac{C - B}{2}\right]$$

и так как $B+C=\pi-A$, то

$$2\cos^2\frac{B-C}{2}-1+\cos A=k\left(\sin\frac{3A}{2}+\cos\frac{B-C}{2}\right).$$

Полагая $\cos\frac{B-C}{2}=x$, находим

$$f(x)=2x^2-kx-k\sin\frac{3A}{2}-2\sin^2\frac{A}{2}=0.$$

Как и выше, устанавливаем, что решение дает лишь корень x, удовлетворяющий условию $\sin\frac{A}{2}<x\leqslant 1$. Но так как

$$f\left(\sin\frac{A}{2}\right)=-k\left(\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{3A}{3}\right)=-2k\sin A\cos\frac{A}{2}<0,$$

то уравнение $f(x)=0$ имеет всегда два действительных корня и только один из них

$$x=\frac{k+\sqrt{k^2+8k\sin\frac{3A}{2}+16\sin^2\frac{A}{2}}}{4}$$

будет больше, чем $\sin\frac{A}{2}$. Далее, этот корень будет $\leqslant 1$, если $f(1)\geqslant$ $\geqslant 0$, т. е.

$$2\cos^2\frac{A}{2}-k\left(1+\sin\frac{3A}{2}\right)\geqslant 0$$

и так как $1+\sin\frac{3A}{2}>0$, то

$$k\leqslant\frac{2\cos^2\frac{A}{2}}{1+\sin\frac{3A}{2}}.$$

Если это условие выполнено, то B и C находят, как и выше.

31. 1°. *Значения для AD и AD':*

$$AD=\frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c},\quad AD'=\frac{2bc\sin\frac{A}{2}}{b-c}.$$

2°. *Соотношение между $\hat{C}$ и $\hat{B}$* в случаях $AD=AD'$.

Из $AD=AD'$ получим:

$$\frac{b-c}{b+c}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\operatorname{ctg}\frac{B+C}{2}.$$

С другой стороны,

$$\frac{b-c}{b+c}=\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}\operatorname{ctg}\frac{B+C}{2},$$

значит $\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}=1$ и $B-C=\frac{\pi}{2}$ (верно и обратное: если $B-C=\frac{\pi}{2}$, то $AD=AD'$). II. 1°. *Значение A и B и границы изменения C*: $A=\frac{\pi}{2}-2C$, $B=\frac{\pi}{2}+C$, $0<C<\frac{\pi}{4}$. 2°. *Соотношение между сторонами a, b, c треугольника (T).*

Из соотношений $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$ находим

$$\frac{a}{\cos^2 C}=\frac{b}{\cos C}=\frac{c}{\sin C} \text{ и т. д.}$$

Окончательно. $a^2(b^2+c^2)=(b^2-c^2)^2$. 3°. *Вычисление углов треугольника (T), если известна высота $AH=h$ и $b+c=k$.*

Имеем $\widehat{HBA}=\pi-\left(\frac{\pi}{2}+C\right)=\frac{\pi}{2}-C$ и из прямоугольных треугольников ACH и ABH находим

$$AC=b=\frac{h}{\sin C},\quad AB=c=\frac{h}{\cos C},$$

откуда

$$b+c=\frac{2h(\sin C+\cos C)}{\sin 2C}.$$

Значения C являются решениями следующей смешанной системы:

$$k\sin 2C-2h(\cos C+\sin C),$$
$$0<C<\frac{\pi}{4}. \qquad (1)$$

Положим $C=\frac{\pi}{4}-\varphi$, тогда

$$\sin 2C=\cos 2\varphi,$$
$$\sin C+\cos C=\sqrt{2}\cos\varphi.$$

Система (1) примет вид:

$$k\cos 2\varphi-2h\sqrt{2}\cos\varphi=0,$$
$$0<\varphi<\frac{\pi}{4}$$

или

$$2k\cos^2\varphi-2h\sqrt{2}\cos\varphi-k=0,$$
$$0<\varphi<\frac{\pi}{4},$$

или

$$\cos\varphi = u,$$

$$f(u) \equiv 2ku^2 - 2h\sqrt{2}\,u - k = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < u < 1.$$

Так как $k > 0$, то уравнение $f(u) = 0$ имеет действительные корни разных знаков. Годится лишь положительный корень, притом тогда и только тогда, когда

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) f(1) < 0.$$

Это условие дает

$$k > 2h\sqrt{2}.$$

Если это условие выполнено, то

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{h + \sqrt{h^2 + k^2}}{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{h}{k} + \sqrt{\frac{h^2}{k^2} + 1}\right).$$

Отсюда

$$C = \frac{\pi}{4} - \arccos\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{h}{k} + \sqrt{\frac{h^2}{k^2} + 1}\right)\right],$$

$$A = 2\arccos\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{h}{k} + \sqrt{\frac{h^2}{k^2} + 1}\right)\right],$$

$$B = \frac{3\pi}{4} - \operatorname{ars}\cos\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{h}{k} + \sqrt{\frac{h^2}{k^2} + 1}\right)\right].$$

§ 5. Стереометрия

1. Точка M должна быть расположена или на дуге $\breve{AB}$ окружности (I), обращенной выпуклостью к вершине O угла xOy, или на дуге $\breve{A'B'}$, симметричной $\breve{AB}$ относительно точки I. Границы изменения α:

$-\varkappa < \alpha < -\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6} < \alpha < \pi$. 2°. $IK = 2\sqrt{2}R$. 3°. $OP = R(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)$, $OQ = R(2 - \sqrt{2} + \sqrt{6})$, $s = R^2(\sqrt{6} + 3)$, $v = \frac{2\sqrt{2}}{3}(\sqrt{6} + 3)R^3$. 2. *Указание*: все эти вопросы решаются на основании следующей теоремы: если даны два равных треугольника ABC и $A'B'C'$ ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$), то существует и притом только одно ортогональное преобразование первого рода, которое переводит точки A, B, C соответственно в точки A', B', C', а также существует и притом только одно ортогональное преобразование второго рода, которое точки A, B, C переводит соответственно в точки A', B', C'. А. 1°. Проведем через точку O плоскость (P), перпендикулярную (D). Тогда каждую точку M этой плоскости преобразование $S_D S_O$ (второго рода!) так же, как и симметрия относительно (P) (это преобразование также второго рода!) оставляет на месте. За треугольник ABC можно выбрать любой треугольник, лежащий в плоскости (P). Значит $S_D S_O = S_P$. Легко видеть, что и $S_O S_D = S_P$, так что в этом случае $S_D S_O = S_O S_D$. 2°. Проведем через точку O плоскость (P), перпендикулярную прямой (D), и пусть эта плоскость пересечет прямую (D) в точке Ω. Если M — произвольная точка плоскости (P), то ее образ M' в преобразовании $S_D S_O$ таков, что $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{O\Omega}$ (сделать чертеж). Поэтому преобразование $S_D S_O$ (второго рода) можно рассматривать как произведение симметрии Σ в плоскости (P) на перенос T, определяемый вектором $2\overrightarrow{O\Omega}$; это последнее произведение коммутативно, оно второго рода и каждую точку M плоскости (P) так же, как и $S_D S_O$ переводит в точку M' такую, что $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{O\Omega}$, поэтому $T\Sigma = \Sigma T = S_D S_O$. Однако $S_D S_O \neq S_O S_D$; преобразование $S_O S_D$ есть произведение $T_1 \Sigma$, где Σ — симметрия в указанной плоскости, а T_1 — перенос, определяемый вектором $2\overrightarrow{\Omega O}$. В. 1°. *Указание*: рассмотреть преобразование точек плоскости (P); $S_D S_P = S_P S_D$. 2°. Рассмотреть преобразование точек плоскости (P); оно сводится к симметрии относительно плоскости, проходящей через (D) перпендикулярно (P). В этом случае $S_D S_P = S_P S_D$. 3°. $S_D S_P = T\Sigma$, где Σ — симметрия в плоскости (P), а T — перенос, определяемый вектором $2\overrightarrow{BA}$, где A — любая точка прямой (D), а B — ее проекция на плоскость (P). В этом случае $\Sigma T \neq T\Sigma$. Далее, $S_P S_D = T_1 \Sigma$, где T_1 — перенос, определяемый вектором $2\overrightarrow{AB}$ [для доказательства достаточно рассмотреть преобразование точек плоскости (p)]. 4°. Пусть O — точка пересечения (D) и (P). Возьмем на прямой (D) произвольную точку A отличную от O. Пусть B' — проекция точки A на плоскость (P), а B точка, симметричная точке B' относительно (D); пусть, наконец A' — точка, симметричная точке A относительно (P). В преобразовании $S_P S_D$ точки O, A, B перейдут в точки O', A', B'. Этого можно достичь поворотом R вокруг оси, лежащей в плоскости (P) на угол AOA'; но поворот — преобразование первого рода; умножив его на симметрию Σ в плоскости AOA', мы оставим все точки этой плоскости неподвижными, но в произведении ΣR получим уже преобразование второго рода, которое так же как и $S_P S_D$ точки O, A, B переведет в точки O', A', B', значит $S_P S_D = \Sigma R$ $(= R\Sigma)$. Здесь, однако, $S_P S_D \neq S_D S_P$. 3. 1°. $BC = SB = a\sqrt{2}$, $SA = a\sqrt{2}\cos\alpha$, $AB = a\sqrt{2}\sin\alpha$, $AC = a\sqrt{2}\sqrt{1+\sin^2\alpha}$. Если $\angle ASC = 60°$, то $\alpha = 45°$. 2°. $v = \frac{a^3}{3\sqrt{2}}\sin 2\alpha$; $v_{\max} = \frac{a^3}{3\sqrt{2}}$ при $\alpha = 45°$. 3°. $y =$

$= -a^4(2x^2 - 3x - 1)\,(x = \cos^2\alpha)$; x изменяется от 0 до 1; при изменении x от 0 до $\frac{3}{4}$ y возрастает от 0 до $\frac{17}{8}a^4$; при изменении x от $\frac{3}{4}$ до 1 y убывает от $\frac{17}{8}a^4$ до $2a^4$.

Уравнение $y - l^4 = 0$ имеет вид: $f(x) = 2a^4x^2 - 3a^4x + l^4 - a^4 = 0$; его дискриминант $\Delta > 0$, если $l^4 < \frac{17a^4}{8}$; далее $f(0) = l^4 - a^4 > 0$, если $l^4 > a^4$ и $f(1) = l^4 - 2a^4 > 0$, если $l^4 > 2a^4$. Результаты этого исследования и выводы даны в следующей таблице:

l^4	$0 \qquad a^4$	$2a^4$	$\frac{17a^4}{8}$	$+\infty$
Δ	$+$	$+$	$+$	
$f(0)$	$- \qquad 0$	$+$	$+$	
$f(1)$	$-$	$- \qquad 0$	$+$	
	$x' < 0 < 1 < x''$ нет решений	$0 < x' < 1 < x''$ одно решение	$0 < x' < x'' < 1$ два решения	корни мнимые, решений нет

Замечание. Следует учесть (при выводах, помещенных в последней строке), что полусумма корней уравнения $f(x) = 0$ равна $\frac{3}{4}$ и она заключена между 0 и 1. Если $l^4 = a^4$, то уравнение имеет два корня 0 и $\frac{3}{4}$ и оба они должны быть отброшены. Если $l^4 = 2a^4$, то корни 1 (его надо отбросить) и $\frac{1}{2}$ (дает решение); если наконец $l^4 = \frac{17}{8}a^4$, то имеем двойной корень $\frac{3}{4}$ (дающий одно решение).

Если $l = \frac{13}{8}a^4$, то $\alpha = 60°$. 4. 1°. Пусть плоскость (P) пересекает ребро AA' в точке α. Прямые, проходящие через M, N, P, Q параллельно AA', пересекают AB, BC, CD и DA соответственно в точках m, n, p, q. Так как плоскость (P) параллельна плоскости основания $ABCD$, то $\vec{Mm} = \vec{Nn} = \vec{Pp} = \vec{Qq} = \vec{\alpha A}$. Значит, перенос, определяемый вектором $\vec{\alpha A}$ переводит $MNPQ$ в $mnpq$. Треугольник AmM подобен треугольнику ABB' и равнобедренный и значит $Am = mM = A\alpha$. Аналогично $Bn = Cq = Dq = A\alpha$. Таким образом, центр симметрии O ромба $ABCD$ является центром симметрии для пары точек m, p и для пары точек n, q. Четырехугольник $mnpq$, имеющий центр симметрии, есть параллелограмм. Значит $MNPQ$ также параллелограмм. Перенос, определяемый вектором $\overrightarrow{\alpha A}$, ставит в соответствие середине ω отрезка MP середину O отрезка mp, значит $\overrightarrow{\alpha A} = \overrightarrow{\omega O}$ и значит $\overrightarrow{\alpha\omega} = \overrightarrow{AO}$. Точка ω получается из α переносом, определяемым вектором $\overrightarrow{AO}$, и значит геометрическое место точек ω есть отрезок OO', полученный из AA' этим переносом (O' — центр $A'B'C'D'$). 2°. $y = \frac{8x^2 - 2ax\sqrt{10} + 5a^2}{5}$; x изменяется от 0 до $AB' = \frac{a\sqrt{10}}{2}$; при этих значениях x, y принимают значения соответственно равные a^2 и $3a^2$; $y_{\min} = \frac{3a^2}{4}$ при $x = \frac{a\sqrt{10}}{8}$ (вершина параболы).

Геометрически: $y = MP^2 = 4mO^2$. Пусть m_1 — основание перпендикуляра, опущенного из O на AB. Если точка M описывает AB', то m описывает AB; сначала $y = 4mO^2$ убывает от $4\left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$ до $4 \cdot m_1O^2$, затем возрастает от $4m_1O^2$ до $4\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3a^2$. Но $Om_1 = \frac{a\sqrt{3}}{4}$, значит $y_{\min} = \frac{3a^2}{4}$. Этот минимум достигается тогда, когда $Am = \frac{1}{4}AB$ и значит $AM = \frac{1}{4}AB'$.

3°. $x' = \frac{(a - \sqrt{4l^2 - 3a^2})\sqrt{10}}{8}$, $x'' = \frac{(a + \sqrt{4l^2 - 3a^2})\sqrt{10}}{8}$.

Если $l > a\sqrt{3}$, решений нет; если $\frac{a\sqrt{3}}{2} \leqslant l \leqslant a$, два решения ($x'$ и x''); если $a < l < a\sqrt{3}$, одно решение (x''). Если $\frac{a\sqrt{3}}{2} \leqslant l \leqslant a$, то соответствующие положения точек M' и M'' симметричны относительно M_1 (дающей для y минимум), ибо $x' + x'' = \frac{a\sqrt{10}}{4} = 2AM_1$. **5.** 1°. $SB = SD = a\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{3}$, $SC = 2a$. 2°. Если точка M лежит между C и O (O — точка пересечения диагоналей ромба), сечение есть треугольник EIF (E на BC, I на SC, F на CD); ΔEIF — равнобедренный и прямоугольный (I — прямой угол). Если M между O и A, то (F) есть ломаная $EE'IF'F$ (E на AB,E', на S,B,I, на SC,F', на SD и F на AD), причем $EE'F'F$—прямоугольник, а $E'IF'$ — прямоугольный равнобедренный треугольник.

Далее, x изменяется от 0 до $2a$. В сечении получается треугольник, если $x \leqslant a$ и пятиугольник, если $x > a$. В случае $x \leqslant a$, $EF = x$, $IE = IF = \frac{x}{\sqrt{2}}$, пл. $\Delta EIF = \frac{x^2}{4}$. В случае $x > a$, $E'F' = 2a - x$, $IE' = IF' = \frac{2a - x}{\sqrt{2}}$, $EE' = x - a$, площадь (F) равна

$\frac{1}{4}(2a-x)(3x-2a)$. 3°. s будет максимальна при $x=\frac{4}{3}a$, $S_{max}=$ $=\frac{a^2}{3}$. 6. 1°. $SK=a$; полная поверхность равна a^2. 2°. $MNPQ$— —трапеция ($MN \parallel PQ$), $MQ=x\sqrt{3}$, $NM=\frac{1}{2}(a-x)$, $PQ=\frac{a}{2}-$ $-x$, $NP=\frac{x\sqrt{13}}{2}$. 3°. $4x^2-ax+\frac{a^2}{4}-m^2=0$. Требуется исследовать, сколько действительных корней, заключенных между 0 и $\frac{a}{2}$, имеет это уравнение. Обозначая левую часть этого уравнения через $f(x)$, полезно составить таблицу знаков дискриминанта Δ, а также $f(0)$ и $f\left(\frac{a}{2}\right)$:

m	0	$\frac{a\sqrt{3}}{4}$	$\frac{a}{2}$		$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$
Δ	$-$	0	$+$	$+$		$+$
$f(0)$	$+$		$+$	0	$-$	$-$
$f\left(\frac{a}{2}\right)$	$+$		$+$	$+$	0	$-$

Отсюда. Если $m<\frac{a\sqrt{3}}{4}$, задача не имеет решений, если $\frac{a\sqrt{3}}{4}<m<\frac{a}{2}$, уравнение имеет два действительных корня и ни 0, ни $\frac{a}{2}$ не заключены между ними; а так как полусумма корней $\left(\frac{s}{2}=\frac{a}{8}\right)$ заключена между 0 и $\frac{a}{2}$, то задача имеет два решения; если $\frac{a}{2}<m<\frac{a\sqrt{3}}{2}$, уравнение имеет два действительных корня и 0 заключен между ними, но $\frac{a}{2}$ не заключено между корнями, задача имеет одно решение; если $m>\frac{a\sqrt{3}}{2}$, уравнение имеет два действительных корня, но 0 и $\frac{a}{2}$ не заключены между ними, задача не имеет решений. Наименьшее значение m будет $m=\frac{a\sqrt{3}}{4}$ при этом $MP=\frac{a\sqrt{3}}{4}$, $SC=\frac{a\sqrt{5}}{2}$, $SP=\frac{a\sqrt{5}}{8}$ и значит $MP^2+SP^2=MS^2$. 4°. $AI\perp SB$, $AI\perp SA$, следовательно, $AI \perp ASB$ и значит $AI \perp AB$, $\angle A = 90°$. Далее $AH = \frac{a}{\sqrt{5}}$, $IH = \frac{4a}{\sqrt{5}}$, $AI = a\sqrt{3}$. 7. 1°. $-1 \leqslant x \leqslant 1$. 2°. α) Полупрямая (δ), полученная из (Δ) гомотетий $\left(M, \frac{1}{3}\right)$. β) Если IJ — диаметр окружности (O), лежащий на OA, то геометрическое место точек G есть отрезок I_1J_1, полученный из IJ гомотетией $\left(N, \frac{2}{3}\right)$.

λ) Часть полосы, ограниченной полупрямыми, перпендикулярными плоскости (P), проходящими через I_1 и J_1 и отрезком соединяющим основания этих полупрямых. 3°. $y = -3x^2 + 4x + 8$ На сегменте $\left[-1, \frac{2}{3}\right]$, y возрастает от 1 до $\frac{28}{3}$, на сегменте $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$, y убывает от $\frac{28}{3}$ до 9; y принимает два равных значения для x из сегмента $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$. 4°. *Указание*: восставить в точке M перпендикуляр к плоскости (P) и отложить на нем отрезок $MP = \frac{1}{2}\, BC$. Тогда точка G пересечения MN и AP будет точкой пересечения медиан треугольника NBC. Ответ. Геометрическое место точек G будет полуокружность, построенная на отрезке $O\omega$, как на диаметре; плоскость этой полуокружности перпендикулярна плоскости (P), ω и O — точки, полученные из I и J в результате гомотетии $\left(A, \frac{2}{3}\right)$. 8. 1°. *Указание*: произвести поворот на 180° вокруг (Δ); тогда B перейдет в D (и наоборот), A в C (и наоборот), значит $AB = CD$, $AD = BC$; равенство же $AC = BD$ очевидно. Сумма плоских углов любого трехгранного угла, тетраэдра $ABCD$ равна 180°. 2°. $IKI'K'$, $IMI'M'$, $KMK'M'$ — ромбы. Отрезки II', MM', KK' попарно взаимно-перпендикулярны, пересекаются и в точке пересечения делятся пополам. 3°. $KK' \perp AC$ и $KK' \perp BD$ — по построению. Далее, $II' \perp KK'$, $II' \perp MM'$, следовательно $II' \perp$ пл. $KMK'M'$ и значит $II' \perp KM$, $II' \perp KM'$; но $KM \parallel BC$, $KM' \parallel AD$, значит $II' \perp BC$ и $II' \perp AD$. Выражения d, d' и d'' через a, b, c таковы:

$$d^2 = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, \quad d'^2 = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2}, \quad d''^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

4°. $v = \frac{1}{12} dd'd''$. Тот же объем имеют пирамиды $KIMI'M'$ $K'IMI'M'$, $MKIK'I'$, $M'KIK'I'$. 9. 1°. Центр сферы лежит в середине отрезка SC, радиус $R = 1$. 2°. $v = \frac{\sqrt{2}}{6} \sin 2a$; $v_{\max} = \frac{\sqrt{2}}{6}$ при $a = 45°$. 3°. $y = -2x^2 + 3x + 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. 4°. $x = \frac{1}{4}$, $\alpha = 60°$

10. 1°. Окружности, построенные на $A'B$ и AB', как на диаметрах; прямая MN описывает круглый цилиндр. 2°. Сумма квадратов ребер тетраэдра $ABMN$, равна $3l^2+d^2$. 3°. $v=\frac{1}{12}d(l^2-d^2)\sin 2\theta$, $v_{\max}=\frac{1}{12}d(l^2-d^2)$ при $\theta=45°$; этому значению θ соответствует два тетраэдра $ABMN$, симметричных относительно плоскости $AA'BB'$. 11. 1°. Если S лежит в плоскости (P), проходящей через середину AB, перпендикулярно к этому отрезку, то I' будет также в этой плоскости тогда и только тогда, когда прямая (Δ) проходит через S и лежит либо в плоскости (P), либо в плоскости (Q), проходящей через S перпендикулярно IS (в этом случае I' совпадает с S). Геометрическое место прямых (Δ) состоит из двух плоскостей (P) и (Q). 2°. Если точка S не лежит на плоскости (P), то прямая (Δ) должна пересекать плоскость (P) в точке окружности (σ), по которой плоскость (P) пересекается со сферой, построенной на IS, как на диаметре. Если H — проекция S на плоскость (P), то окружность (σ) плоскости (P) есть окружность, построенная на IH, как на диаметре. Геометрическое место прямых (Δ) есть конус с вершиной S и направляющей окружностью (σ).

12. 1°. $$MA=\sqrt{R(R+x)}+\sqrt{R(R-x)},$$
$$MB=\sqrt{R(R+x)}-\sqrt{R(R-x)},$$
$$SA=\sqrt{x^2+2R^2+2R\sqrt{R^2-x^2}},$$
$$SB=\sqrt{x^2+2R^2-2R\sqrt{R^2-x^2}}.$$

2°. Это верно даже и тогда, когда $SM\neq HM$. В случае $SM=x$, имеем $y=x^2+4R^2$; $0\leqslant x\leqslant R$ (дуга параболы). 3°. Описанная сфера пересекает (P) по окружности с диаметром AB. Ее центр ω лежит на перпендикуляре к (P) в середине AB; $d=\sqrt{x^2+4R^2}$. 4°. Точка S расположена на цилиндре с образующими, перпендикулярными (P), и направляющей — полуокружностью с диаметром AB, лежащей в плоскости (P). Точка S расположена также в полуплоскости SAB от прямой AB, образующей с плоскостью (P) угол 45°, значит S лежит на линии пересечения указанных поверхностей. 13. 1°. $v=\frac{\sqrt{3}}{12}ax(2a-x)$. 2°. $S=4x^2-9ax+10a^2$, $0<x<2a$; в полуинтервале $\left(0,\ \frac{9}{8}a\right]$, S убывает от $10a^2$ до $\frac{79}{16}a^2$; в полуинтервале $\left[\frac{9}{8}a,\ 2a\right)$, S возрастает от $\frac{79}{16}a^2$ до $8a^2$. Если $b^2<\frac{79}{16}a^2$ или $b^2>10a^2$, то решений нет; если $b^2=\frac{79}{16}a^2$, одно решение $\left(x=\frac{9}{8}a\right)$; если $\frac{79}{16}a^2 < b^2 \leqslant 8a^2$, два решения:

$$x'=\frac{9a-\sqrt{16b^2-79a^2}}{8}, \quad x''=\frac{9a+\sqrt{16b^2-79a^2}}{8}.$$

Если $8a^2 < b^2 < 10a^2$ — одно решение $x=x'$. 4°. Отложим на Ox и Oz соответственно $OB'=OC'=2a$ и пусть P — четвертая вершина прямоугольника со сторонами $OB=OC$. Треугольники PBB' и PCC' равнобедренные, так как $PB=OC=BB'$ и $PC=$ $=OB=CC'$. Значит, точка P лежит на одной прямой B' и C' и когда B описывает OB', то P описывает $B'C'$. Середина N отрезка BC также и OP описывает отрезок $B''C''$, гомотетичный $B'C'$ в гомотетии $\left(O, \frac{1}{2}\right)$.

Центр ω сферы, описанной около тетраэдра $OABC$, лежит в плоскости-медиатрисе (π) отрезка OA и проектируется в точку N (центр окружности, описанной около OBC). Отсюда геометрическое место точек ω — отрезок $\omega_1\omega_2$ плоскости (π), проектирующийся на плоскость xOz в отрезок $B''C''$ (B'' — середина OB', C'' — середина OC').

Замечание. Точка ω_1 совпадает с B'' (почему?). **14.** *а*) 1°. $AA'\perp$ $\perp AA'P$; $A'P'P'\perp AA'P$, но OH лежит в плоскости $AA'P$ и $OH\perp$ $\perp A'P$, значит $OH\perp A'P'P$. 2°. $\angle OMP=90°$; одна его сторона (MP) лежит в плоскости $A'P'P$, значит, проекция HMP этого угла в плоскость $A'P'P$ также прямой угол и значит точка M лежит на окружности (γ), построенной в плоскости $A'P'P$, на HP, как на диаметре. Если P' описывает $y'y$ в целом, то M описывает (γ) в целом. 3°. $\angle OAP=\angle OHP=\angle OMP=90°$, значит A, H, M лежат на одной сфере (Σ) с диаметром OP. Степень точки A' относительно окружности (γ) равна $\overline{A'H}\cdot\overline{A'P}$ и она равна степени точки A' относительно сферы (Σ), т. е. $\overline{A'O}\cdot\overline{A'A}=$ $=2a^2$. Заметим, что (γ) есть сечение (Σ) плоскостью $A'P'P$. β) 1°. $\triangle OAP=\triangle OA'P'$, $OP=OP'$. 2°. M — середина PP'. 3°. Проведем через точку O оси OX и OY, соответственно параллельные осям $x'x$ и $y'y$ и имеющие одинаковые с ними направления. Обозначим через p и p' проекции P и P' соответственно на OX и OY. Очевидно $\overrightarrow{Pp}=\overline{p'P'}$ и значит середина M отрезка PP' будет и серединой отрезка pp'. Значит, если X и Y — координаты точки M в системе XOY, то $X=\frac{1}{2}\overline{Op}=\frac{1}{2}\overline{AP}$, $Y=\frac{1}{2}\overline{Op'}=\frac{1}{2}\overline{A'P'}$, откуда $X=Y$ и геометрическое место точек M есть биссектриса угла первой и третьей четвертей системы XOY. γ) 1°. $0\leqslant x\leqslant 2a$. 2°. $y=\frac{1}{3}ax(2a-x)$. При изменении x от 0 до a, y возрастает от 0 до $\frac{a^3}{3}$; при изменении x от a до $2a$, y убывает от $\frac{a^3}{3}$ до 0. **15.** 1°. Площадь параллелограмма равна произведению расстояния от точки E до FG на длину отрезка FG. Но $FG=\frac{1}{2}BC$, значит, вопрос сводится к изучению изменения расстояния от E до FG; это расстояние равно половине расстояния от D до прямой (Δ), проходящей через A параллельно BC. Пусть a, d и (l) — проекции A, D и (L) на плоскость, перпендикулярную (Δ); тогда расстояния от D до (Δ) спроектируются в натуральную величину ad [точка d описывает прямую (l) в то время, как D описывает (L)]; ad будет иметь наименьшее значение, если d совпадает с основанием d_0 перпендикуляра, опущенного из a на (l); в этот момент точка D находится в точке D_0, в которой прямая (L) пересекает (P). При удалении D от D_0 площадь монотонно растет; ее значения для точек D симметричных относительно D_0, равны между собой. 2°. $EFGH$ — прямоугольник тогда и только тогда, когда $\angle EFG=90°$, т. е. $DA\perp(\Delta)$. Отсюда построение точки D. Задача имеет или одно решение, или ни одного, или бесконечное множество [если прямая (L) лежит в плоскости, проходящей через A перпендикулярно (Δ)]. Далее $EFGH$ — ромб тогда и только тогда, когда $EF=FG$ или $AD=BC$. Значит D есть точка пересечения (L) и сферы $(A,\ BC)$. Решений два, одно или ни одного. 3°. $EFGH$ может быть квадратом, если (L) пересекает (в точке D) большой круг (σ) сферы (A, BC), лежащий в плоскости, проходящей через A перпендикулярно (Δ). В случае, если (L) и (σ) имеют общие точки, задача имеет одно или два решения. В противном случае — ни одного. **16.** 2°. $v=\pi h(r'^2-\frac{h^2}{12})$. Вывод: если дана окружность (B') радиуса r' и две плоскости (P) и (Q), симметричные относительно плоскости, в которой лежит окружность (B'), то объем тела, ограниченного этими плоскостями и любой сферой, проходящей через окружность (B') и пересекающей плоскости (P) и (Q), будет величиной постоянной.

Далее, необходимое и достаточное условие того, что существует, по крайней мере, одна сфера, удовлетворяющая условию, т. е. проходящая через окружность (B') радиуса r' и пересекающая обе плоскости окружностей (B) и (B'') имеет вид $h\leqslant 2r'$. Если $h=2r'$ сфера касается этих плоскостей и основания вырождаются в точки касания.

Теперь найдем границы изменения R. Прежде всего очевидно, что $R\geqslant r'$. Пусть I, I', I'' — центры окружностей (B), (B') и (B'') и O — центр сферы, проходящей через (B'). Всегда можно ввести обозначения так, что точка O расположена относительно I' с той же стороны, что и I и тогда необходимое и достаточное условие того, что сфера (Σ) пересекает плоскость окружности (B'') [а, следовательно, и плоскость окружности (B')], имеет вид:

$$OI''\leqslant R \text{ или } OI'+\frac{h}{2}\leqslant R,$$

т. е.

$$\sqrt{R^2-r'^2}+\frac{h}{2}\leqslant R \text{ или } \sqrt{R^2-r'^2}\leqslant R-\frac{h}{2}.$$

Из неравенств $h \leqslant 2r'$ и $R \geqslant r'$ следует, что $R \geqslant \frac{h}{2}$, и предыдущее условие можно переписать так:

$$R^2 - r'^2 \geqslant \left(R - \frac{h}{2}\right)^2$$

или, упрощая

$$R \leqslant \frac{r'^2}{h} + \frac{h}{4}.$$

Окончательно,

$$r' \leqslant R \leqslant \frac{r'^2}{h} + \frac{h}{4}.$$

3°. Предположим, например, что $B'' < B'$. Тогда

$$s = 2\pi Rh + \pi r''^2 \doteq 2\pi Rh + \pi (R^2 - \beta^2) = \pi (2Rh + R^2 - \beta^2)$$

(α и β — абсциссы точек I и I'' на оси, проходящей через O и содержащей точки I, I' и I'').

Но

$$\frac{\alpha +}{2} = \overline{OI'} = \sqrt{R^2 - r'^2} \quad \text{и} \quad \frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{h}{2},$$

следовательно

$$\beta = \frac{h}{2} + \sqrt{R^2 - r'^2},$$

$$s = \pi\left[2Rh + R^2 - \left(\frac{h}{2} + \sqrt{R^2 - r'^2}\right)^2\right] =$$

$$= \pi\left[r'^2 - \frac{h^2}{4} + h\left(2R - \sqrt{R^2 - r'^2}\right)\right].$$

Так как $r'^2 - \frac{h^2}{2} \geqslant 0$, то s будет иметь наименьшее значение, если наименьшее значение будет иметь выражение

$$y = 2R - \sqrt{R^2 - r'^2};$$

эта функция от R имеет наименьшее значение при

$$R = \frac{2r'}{\sqrt{3}}.$$

Остается установить, что при этом значении R сфера (Σ) пересечет плоскость основания (B'') [следовательно, и (B')].

Имеем:

$$OI'^2 = R^2 - r'^2 = \frac{R^2}{4}, \quad OI = \frac{R}{2}$$

и так как нам дано (см. условие задачи), что $h < \frac{2r'}{\sqrt{3}}$, то $\frac{h}{2} < \frac{R}{2}$, т. е. $I'I'' < \frac{R}{2}$ и сечение B'' действительно существует.

$$\text{Если}\quad R = \frac{2r'}{\sqrt{3}},\quad \text{то}\quad s = \pi\left(r'^2 - \frac{h^2}{4} + \frac{2hr'}{\sqrt{3}}\right),$$

$$v = \pi h\left(r'^2 - \frac{h^2}{12}\right).$$

Наконец,

$$\cos\varphi = \frac{OI'}{OA'} = \frac{1}{2},\qquad \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

17. 2°. Пусть (δ) и (δ') — проекции прямых (Δ) и (Δ') на плоскость, перпендикулярную к отрезку AA' в его середине. Тогда геометрическое место центров сфер с диаметром MM' состоит из двух биссектрис углов, образованных прямыми (δ) и (δ').

18. Решение. 1°. а) Пусть B' — проекция B на (P). Прямые BA и BE будут образовывать равные углы с (P) тогда и только тогда, когда $\triangle BB'A = \triangle BB'E$, т. е. если $B'A = B'E$. Отсюда построение: точка E есть точка пересечения, отличная от A, окружности (C) и окружности (B') с центром B' и радиусом $B'A$.

Исследование. Если прямая (D) не пересекает (Δ), точка B' не лежит на AC и окружности (C) и (B') всегда пересекаются в точках A и E (точка E симметрична A относительно CB'). Если прямая (Δ) пересекает (D), но B отлична от точки пересечения, то окружности (C) и (B') касаются, решений нет.

Если прямые (D) и (Δ) пересекаются и точка B есть точка их пересечения, то E — любая точка окружности (C). б) Необходимое и достаточное условие $\triangle BB'A = \triangle BB'E$ здесь примет вид $BA = BE$. Отсюда построение: B есть точка пересечения (D) с плоскостью-медиатрисой отрезка AE. Исследование. Если AE не перпендикулярна (D), то задача имеет и притом только одно решение. 2°. Так как B не лежит в плоскости (P), то существует сфера, проходящая через B и (C). Ее центр K есть точка пересечения (Δ) с плоскостью (Π), являющейся медиатрисой отрезка AB. Окружность, описанная около треугольника ABE есть сечение сферы (K) плоскостью ABE; ее центр ω расположен в плоскости (Π) и является проекцией K на плоскость ABE. Таким образом, если I середина AB, то $\angle I\omega K = 90°$ и значит точка ω лежит на окружности с диаметром IK, построенной в плоскости (Π). Пусть (M) — эта окружность, M — ее центр (середина IK).

Обратно. Если ω — какая-нибудь точка окружности (M), то плоскость $AB\omega$ вторично пересекает (C) в точке E. Этой точке E соответствует окружность (ABE), центр которой расположен с одной стороны в плоскости ABE, с другой — на (M) и значит совпадает с ω. Геометрическое место точек ω — вся окружность (M).

Теперь будем считать, что B — переменная точка. Пусть (Q) — плоскость, проходящая через (D) и ее проекцию (d) на плоскость (P). Обозначим через c, $к$, m, (δ) проекции C, K, M, (Δ) на плоскость (Q). Прямая (δ) параллельна (Δ); прямая (δ) проходит через c и пересекает (D) в точке O. Так как $IK \perp (D)$, то и проекция IK на (Q), т. е. Ik будет перпендикулярна (D). Медиана om прямоугольного треугольника oIk, следовательно, фиксирована и в то время, как I описывает (D), точка m описывает эту медиану, которую мы обозначим через (l). Так как m и M — середины отрезков kI и KI, то

$$\overrightarrow{mM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{kK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{cC}.$$

Если O — точка, определяемая условием $\overrightarrow{oO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{cC}$, то отсюда заключаем, что точка M описывает прямую (L), параллельную (l) и проходящую через O. 19. 3°. $x_0 = \frac{3a}{2}$. Если $x \leqslant x_0$, то $y = \frac{\sqrt{3}}{36}x(12a - 7x)$, если $x \geqslant x_0$, то $y = \frac{\sqrt{3}}{4}(2a - x)^2$.

20. 1°. $MN' \parallel BC'$. 2°. $\frac{MK'}{MN'} = m$. Точка K' описывает отрезок $U'V'$ прямой OV', заключенный между параллельными прямыми AD' и BC' (O — точка пересечения $C'D'$ и AB, V' — точка отрезка BC' такая, что $\frac{BV'}{BC'} = m$). Геометрическое место точек K есть отрезок $U'V'$ плоскости (P); точка U лежит на AD, точка V на BC. 3°. $y = a^2\left(m^2 - m + \frac{1}{2}\right)$, $0 \leqslant m \leqslant 1$. 21. 1°. Точка Q описывает отрезок UV плоскости Q, проектирующийся в отрезок SB. Геометрическое место точек H есть дуга окружности, лежащая в плоскости SPA, заключенная внутри угла SPA, причем окружность построена на KP, как на диаметре (K — проекция точки O на плоскость SPA; K — отроцентр треугольника SPA). 2°. Если M' — проекция M на плоскость основания, то кратчайшее расстояние между OS и PM равно расстоянию от точки O до PM'; оно непременно меньше расстояния от O до PA, значит $l \leqslant \frac{2R}{\sqrt{5}}$.

3°. Пусть $QQ' \parallel SA$ (Q' на PA,) тогда $\frac{PQ}{PM} = \frac{PQ'}{PA}$ меняется от 1 до $\frac{PB}{PA} = \frac{3}{5}$; условие возможности $\frac{3}{5} \leqslant k \leqslant 1$. 4°. $0 \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. 22. 2°. $OB' = a\sqrt{1 - \frac{a^2}{4x^2}}$, $y = \frac{a^2}{2x}$.

Условие возможности: $\frac{a}{2} \leqslant x \leqslant a$.

Далее, точка A описывает дугу A_1A_2 полуокружности с центром O [лежащей в плоскости (Q)], которую от нее отсекает медиатриса вертикального радиуса OM; граничные точки этой дуги отстоят от плоскости (P) на расстоянии $\frac{a\sqrt{3}}{2}$; при этом точка B' описывает отрезок $B_1'B_2'$, лежащий в плоскости (P) и перпендикулярный проекции $A_1'A_2'$ отрезка A_1A_2 на плоскость (P) [A_1' и A_2' — проекции точек A_1 и A_2 на плоскость (P)]; точка B описывает дугу B_1B_2 полуокружности, которую мы получим, повернув дугу A_1A_2 на 90° вокруг вертикального радиуса OM. 3°. x и y — корни уравнения $z^2 - uz + \frac{a^2}{2} = 0$. Возможность решения состоит в том, чтобы оба корня были заключены между $\frac{a}{2}$ и a; это будет в случае $a\sqrt{2} \leqslant u < \frac{3a}{2}$. В случае $A'B' = l$ приходим к условию $x+y = \sqrt{3a^2 - l^2}$; условие возможности: $\frac{a\sqrt{3}}{2} < l \leqslant a$.

4°. Если $OA' = OB'$, то $x = y = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $v_{OABA'B'} = \frac{a^3}{6\sqrt{2}}$, $\cos v = \frac{1}{\sqrt{3}}$. 23. 1°. $x = a$. 2°. Если N' проекция N на плоскость (P), то геометрическое место точек M есть, вообще говоря, окружность с диаметром AN' радиуса $\frac{b}{2}$. Это будет так, если N не совпадает с B. 3° Пусть S' — проекция S в плоскость (P). Геометрическое место точек M — окружность (Γ) с диаметром AS'. Геометрическое место точек N получается в результате гомотетии $G(S, 5)$ окружности (Γ).

24. 1°. *Положение точек G и G' относительно диагонали DD'.*

Плоскость $DB'D''$ пересекает параллелепипед (U) по параллелограмму $DB'D'B$, а плоскость $AB'C$ — по медиане $B'J$ треугольника $AB'C$, где J — центр грани $ABCD$. Точка G, в которой диагональ DD' пересекает плоскость семидиагонального треугольника $AB'C$, ассоциированного с точкой D в точке пересечения DD' и $B'J$. Так как $\overrightarrow{D'B'} = -2\overrightarrow{DJ}$, то вектор $\overrightarrow{D'B'}$ получается из вектора $\overrightarrow{DJ}$ и гомотетией $(G, -2)$, значит $\overrightarrow{GB'} = -2\overrightarrow{GJ}$ и $\overrightarrow{GD'} = -2\overrightarrow{GD}$. Первое из этих равенств показывает, что точка G — точка пересечения медиан треугольника $AB'C$. Второе соотношение показывает, что DG составляет одну треть от DD'. Аналогично доказывается, что DD' пересекает плоскость $A'BC'$ в центре тяжести этого треугольника и что $D'G'$ составляет одну треть от DD' 2°. *Сумма квадратов ребер и сумма квадратов диагоналей параллелепипеда* (U). Пусть S — середина DD', т. е. центр симметрии параллелепипеда (U). Из треугольника $DB'D'$ следует

$$DB'^2 + B'D'^2 = 2SB'^2 + 2SD^2,$$

откуда

$$2DB'^2 + 2B'D'^2 = BB'^2 + DD'^2.$$

Так как сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон, то

$$2AC'^2 + 2A'C'^2 = AA'^2 + CC'^2.$$

Складывая, получим:
$2(DB'^2+AC'^2+B'D'^2+A'C'^2)= AA'^2+BB'^2+CC'^2+DD'^2$. Так как $A'C'^2+B'D'^2=2B'C'^2+2B'A'^2$ и так как, с другой стороны, $DB'=AC'$, $B'C'=DA$, $B'A'=DC$, то окончательно: $4(DA^2+DB'^2+DC^2)=AA'^2+BB'^2+CC'^2+DD'^2$, т. е. сумма квадратов ребер параллелепипеда равна сумме квадратов его диагоналей 3°. *Услозие, при котором (U) — описанный параллелепипед.*

Если в параллелепипед (U) можно вписать сферу, то его центр S будет центром этой сферы и будет равноудален от всех его граней. Высоты параллелепипеда будут равны 2ρ — диаметру вписанной сферы; значит площадь каждой грани будет равна объему (U), деленному на 2ρ. Обратно. Если все площади граней параллелепипеда равны между собой, то центр параллелепипеда (U) равноудален от всех его шести граней. Таким образом, для того чтобы в параллелепипед можно было вписать сферу необходимо и достаточно, чтобы площади всех его граней были равны между собой .II. 1°. *Определение параллелепипеда (W)*

Пусть G — центр тяжести данного треугольника $AB'C$. Вершина D, ассоциированная с этим треугольником, и центр параллелепипеда связаны соотношением:

$$\vec{GD}=-2\vec{GS}.$$

Если, следовательно, одна из точек D или S — дана, то другая определяется. Используя симметрию относительно S, можно построить другие вершины параллелепипеда (W) и это можно сделать всегда, лишь бы точка D (или S) не лежала в плоскости треугольника $AB'C$ [в противном случае параллелепипед (W) вырождается].

Связь ребер параллелепипеда с указанными в условии задачи отрезками и их направлениями очевидно такова:

$$\vec{DA}=-2\vec{SI},\quad \vec{DB'}=-2\vec{SI},\quad \vec{DC}=-2\,\vec{SK},$$

где I, J, K соответственно середины $B'C$, CA и AB'. 2°. *Соотношение между длинами ребер и полудиагоналей* (W). Из треугольника $SB'C$ находим:

$$SB'^2+SC^2=2SI^2+2IB'^2$$

$$\beta^2+\gamma^2=\frac{p^2}{2}+\frac{a^2}{2}. \tag{1}$$

Круговой перестановкой букв α, β, γ; p, q, r получим еще два соотношения, из которых найдем:

$$\begin{aligned} p^2&=2(\beta^2+\gamma^2)-a^2,\\ q^2&=2(^2\gamma+\alpha^2)-b^2,\\ r^2&=2(\alpha^2+\beta^2)-c^2, \end{aligned} \tag{2}$$

На основании I, 2°:

$$4(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)=4(p^2+q^2+r^2)$$

и значит

$$\delta^2 = p^2 + q^2 + r^2 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 3(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \\ -(a^2+b^2+c^2). \qquad (3)$$

Складывая равенство (2) и учитывая (1), найдем:

$$\alpha^2 = \frac{q^2 + r^2 - p^2}{4} + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4},$$

$$\beta^2 = \frac{r^2 + p^2 - q^2}{4} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4}, \qquad (4)$$

$$\gamma^2 = \frac{p^2 + q^2 - r^2}{4} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4}.$$

Наконец,

$$\delta^2 = p^2 + q^2 + r^2 - (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = \frac{3}{4}(p^2 + q^2 + r^2) -$$

$-\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{4}$. III 1°. *Характеристические свойства параллелепипеда* (W_0). Грани (W) будут ромбы тогда и только тогда, когда $DA = DB' = DC$, а так как D не лежит в плоскости $AB'C$, то геометрическим местом точек D будет ось OX окружности, описанной около треугольника $AB'C$ за исключением точки O. Центр S параллелепипеда (W_0) получается из D гомотетией $\left(G, -\dfrac{1}{2}\right)$, значит геометрическое место точек S есть прямая, перпендикулярная плоскости треугольника $AB'C$, проведенная через центр окружности Эйлера этого треугольника, который и есть точка, гомотетичная O в гомотетии $\left(G, -\dfrac{1}{2}\right)$.

Вершина D' параллелепипеда (W_0) получается из D гомотетией (G, —2), значит геометрическое место точек D' есть прямая, перпендикулярная плоскости треугольника $AB'C$ и проходящая через ортоцентр H этого треугольника, который гомотетичен O в гомотетии (G, —2).

Так как проекция H точки D' на плоскость (V) треугольника $AB'C$ является его ортоцентром, то тетраэдр $D'AB'C$ — ортоцентрический (и обратно). Так как образом тетраэдра $DIJK$ в гомотетии (G, —2) является тетраэдр $D'AB'C$, то и $DIJK$ ортоцентрический, т. е. любые его противоположные ребра взаимноперпендикулярны.

Квадраты длин полудиагоналей (W_0). Используя формулы (4) и (5) и учитывая, что $p = q = r$, получим:

$$\alpha_0^2 = \frac{p^2}{4} + \frac{b_2 + c^2 - a^2}{4},$$

$$\beta_0^2 = \frac{p^2}{4} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{4},$$

$$\gamma^2 = \frac{p^2}{4} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4},$$

$$\delta_0^2 = \frac{9}{4}p^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4}.$$

Квадраты площадей грани (W_0). Пл. $DB'A'C = B'C \cdot DI$, следовательно, (пл. $DB'A'C)^2 = B'C^2 \cdot DI^2 = B'C^2 \cdot (DB'^2 - IB'^2) =$

$$= a^2\left(p^2 - \frac{a^2}{4}\right).$$

Аналогично находим площади двух других ромбов:

$$(\text{пл. } DCBA)^2 = b^2\left(p^2 - \frac{b^2}{4}\right),$$

$$(\text{пл. } DAC'B')^2 = c^2\left(p^2 - \frac{c^2}{4}\right).$$

2°. *Условие, при котором* (W_0) *описанный.*

На основании I, 3° параллелепипед (W_0) будет описанным тогда и только тогда, когда его грани имеют равные между собой площади, а так как эти грани являются ромбами, все стороны которых равны между собой, то эти ромбы должны быть равны. Стороны треугольника $AB'C$ являются диагоналями этих ромбов, значит две из сторон обязательно равны между собой.

Если $\Delta\, AB'C$ равносторонний, треугольники DAB', $DB'C$ и DCA будут равны и все грани (W_0) будут равны, (W_0) будут описанным.

Случай $a = c \neq b$ и $\angle AB'C = \theta$. В этом случае грани $DAC'B'$ и $DB'A'C$ будут равны, но для того чтобы они были равны третьей грани $DCBA$, необходимо и достаточно, чтобы $DJ = \frac{a}{2}$, так как только в этом случае ромбы $DAC'B'$ и $DCBA$, имеющие равные стороны и равные диагонали $(AB' = DB)$, будут равны. Таким образом дополнительное условие:

$$DA^2 = AJ^2 + DJ^2$$

или

$$p^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Этот результат можно было установить и из (III, 1°), записав равенство квадратов площадей граней.

Определение $OD = x$ *в функции* a и b. Из треугольника DOB' находим:

$$x^2 = DB'^2 - OB'^2 = p^2 - OB'^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} - OB'^2.$$

Так как четырехугольник $OICJ$ вписанный, то

$$B'O \cdot B'J = B'I \cdot B'C = \frac{B'C^2}{2}.$$

Отсюда

$$B'O^2 = \frac{B'C^4}{4B'J^2} = \frac{a^4}{4\left(a^2 - \frac{b^2}{4}\right)} = \frac{a^4}{4a^2 - b^2}$$

и значит

$$x^2 = \frac{b^2(3a^2 - b^2)}{4(4a^2 - b^2)}.$$

В треугольнике $AB'C$ основание b меньше суммы $2a$ двух других сторон. Поэтому должно быть только $b^2 < 3a^2$ или

$$\frac{b}{a} < \sqrt{3}.$$

Окончательно. Если $\frac{b}{a} < \sqrt{3}$ существует два положения точки D, симметричных относительно (V), лежащих на оси OX и отстоящих от плоскости (V) на расстоянии

$$x = \frac{b}{2}\sqrt{\frac{3a^2 - b^2}{4a^2 - b^2}}.$$

Определение $OD = x$ в функции R и $\cos\theta$

Воспользовавшись снова равенством

$$x^2 = \frac{a^2 + b^2}{4} - OB'^2$$

и замечая, что $OB' = R$, $a = 2R\cos\frac{\theta}{2}$, $b = 2R\sin\theta$,

найдем:

$$x^2 = \frac{R^2}{2}(1 - \cos\theta)(1 + 2\cos\theta).$$

Для того чтобы это выражение было положительным, необходимо и достаточно, чтобы

$$\cos\theta > -\frac{1}{2},$$

т. е.

$$0 < \theta < \frac{2\pi}{3};$$

тогда

$$x = \frac{R}{2}\sqrt{2(1 - \cos\theta)(1 + 2\cos\theta)};$$

мы приходим к результату уже полученному выше (два решения; условие $0 < \theta < \frac{2\pi}{3}$, конечно, эквивалентно неравенству $\frac{b}{a} < \sqrt{3}$).

Выражения для $\cos\varphi$, p *и* ρ *в функции* a *и* b

Треугольники AD_0C, AD_0B' и CD_0B' — половины равных ромбов, причем два последних соответствуют равным диагоналям, а первый — другой диагонали. Значит,

$$\angle AD_0B' = \angle CD_0B' = \pi - \angle AD_0C = \pi - \varphi.$$

Из треугольника AD_0C:

$$AC^2 = AD_0^2 + CD_0^2 - 2AD_0 \cdot CD_0 \cos\varphi.$$

или

$$b^2 = 2p^2 - 2p^2 \cos\varphi,$$

но так как

$$p^2 = \frac{a^2 + b^2}{4},$$

то

$$\cos\varphi = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Пусть ρ — радиус сферы, вписанной в тетраэдр (W_0). Выразим объем этого тетраэдра двумя способами:

объем $W_0 = 2\rho$. пл. $D_0ABC = 6$ объемам $D_0AB'C$. Так как диагонали ромба D_0ABC имеют длины $AC = b$ и $D_0B = AB' = a$, то

$$\text{пл. } D_0ABC = \frac{ab}{2}.$$

С другой стороны,

$$\text{объем } D_0AB'C = \frac{1}{3} OD_0 \cdot \frac{AC \cdot B'J}{2} = \frac{1}{6} xb \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} =$$
$$= \frac{1}{24} b^2 \sqrt{3a^2 - b^2}.$$

Отсюда

$$\rho = \frac{b}{4a}\sqrt{3a^2 - b^2}.$$

Для того чтобы выразить $\cos\varphi$ в функции $\cos\theta$ достаточно использовать его выражение в функции a и b и заметить, что из треугольника $AB'C$ следует

$$b^2 = 2a^2 - 2a^2\cos\theta,$$

следовательно

$$\frac{b^2}{a^2} = 2(1 - \cos\theta).$$

Отсюда легко находим

$$\cos\varphi = \frac{2\cos\theta - 1}{3 - 2\cos\theta}.$$

Замечание. Если b стремится к a, то $\cos\theta$ стремится к 0 и значит φ стремится к $\frac{\pi}{2}$, а потому (W_0) стремится к кубу с ребром $\frac{a}{\sqrt{2}}$. IV. 1°. *Геометрическое место центров S и вершин D параллелепипедов (W_1).*

По предположению $SA = SB' = SC$, значит, геометрическое место точек S есть ось OX окружности, описанной около треугольника $AB'C$, за исключением точки O.

Так как точка D получается из S гомотетией $(G, -2)$, то геометрическое место точек D есть прямая, проходящая через ортоцентр H треугольника $AB'C$ перпендикулярно к его плоскости. Отсюда следует, что тетраэдр $DAB'C$ ортоцентрический, ибо его противоположные ребра взаимно-перпендикулярны; обратно: если $DAB'C$ — ортоцентрический, то (W) есть параллелепипед (W_1).

Выражения для p^2, q^2, r^2 и δ^2 в функции a, b, c, α.

Из формулы (2) и (3) раздела II, 2°, заменяя β и γ на α, получим:

$$\delta^2 = 9\alpha^2 - (a^2 + b^2 + c^2),$$
$$p^2 = 4\alpha^2 - a^2,$$
$$q^2 = 4\alpha^2 - b^2,$$
$$r^2 = 4\alpha^2 - c^2.$$

Условие, при котором (W_1) будет описанным. Ребро CD ортогонально AB', значит, проекции точек A и B' на CD совпадают с одной и той же точкой C_1 прямой CD. Площади σ_1 и σ_2 треугольников $DB'C$ и DCA будут:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2} DC \cdot B'C_1,$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2} DC \cdot AC_1,$$

следовательно,

$$4\left(\sigma_1^2 - \sigma_2^2\right) = DC^2\left(B'C_1^2 - AC_1^2\right).$$

Разность квадратов расстояний от точек C_1, D и C до A и B равна между собой, так как CD ортогональна AB. Значит

$$4\left(\sigma_1^2 - \sigma_2^2\right) = r^2\,(q^2 - p^2) = r^2\,(a^2 - b^2).$$

Аналогично найдем:

$$4\left(\sigma_2^2 - \sigma_3^2\right) = p^2\,(b^2 - c^2),$$

и

$$4\left(\sigma_3^2 - \sigma_1^2\right) = q^2\,(c^2 - a^2).$$

Параллелепипед (W_1) будет описанный тогда и только тогда, когда $2\sigma_1 = 2\sigma_2 = 2\sigma_3$; отсюда и из предыдущих соотношений следует, что $a=b=c$. Значит (W_1) будет описанным тогда и только тогда, когда $\Delta AB'C$ — равносторонний. 2°. *Условие, при котором диагонали параллелепипеда* (W) *равны между собой.*

Если диагонали параллелепипеда (W) равны между собой, то D проектируется в ортоцентр H плоскости (V) треугольника $AB'C$, ибо в случае равенства всех диагоналей параллелепипед (W) является и параллелепипедом (W_1). Кроме того, из равенства диагоналей следует, что ребра DA, DB' и DC попарно взаимно-перпендикулярны. Следовательно, точка D расположена на сферах с диаметрами AB', $B'C$ и CA и значит точка H лежит внутри каждой из этих сфер; углы AHB', $B'HC$ и CHA поэтому тупые, а их дополнения ACB', $B'AC$ и $CB'A$ — острые.

Обратно. Если углы треугольника $AB'C$ острые, то H лежит внутри этого треугольника, угол $B'HC$ — тупой и перпендикуляр к плоскости (V) треугольника $AB'C$ в точке H пересекает сферу, построенную на $B'C$, как на диаметре. Если D одна из точек пересечения, то $\angle B'DC=90°$ и так как тетраэдр $DAB'C$ ортоцентрический, то триэдр $(D\cdot AB'C)$ триортогональный. Параллелепипед, определенный вершинами D, A, B', C — прямоугольный и значит его диагонали равны между собой.

Выражения для p^2, q^2, r^2, α^2 *в функции* a, b, c. Используя выражения, полученные в разделе IV, 1°, и замечая, что теперь $\delta=\alpha$, получим

$$\alpha^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{8},$$

откуда

$$p^2=\frac{b^2+c^2-a^2}{2},\quad q^2=\frac{c^2+a^2-b^2}{2},\quad r^2=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}.$$

3°. *Выражения для* p, α *и* δ *в функции* a *и* x *в случае* $a=b=c$.

В этом параграфе параллелепипед (W) мы будем предполагать одновременно и типа (W_0) и типа (W_1).

Из прямоугольного треугольника DOA, в котором

$$DA=p,\qquad OA=R=\frac{a}{\sqrt{3}},\qquad OD=x,$$

находим

$$p=\sqrt{\frac{3x^2+a^2}{3}}.$$

Из выражений, полученных в разделе IV, 1°, имеем:

$$\alpha^2=\frac{p^2+a^2}{4}=\frac{4a^2+3x^2}{12}\quad\text{и}\quad\delta^2=9\alpha^2-3a^2=\frac{9x^2}{4},$$

следовательно,

$$\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4a^2+3x^2}{3}},\qquad \delta=\frac{3x}{2}.$$

Выражение ρ *в функции* a *и* x.

Применяя тот же метод, что и в разделе III, 2°, будем иметь:

$$2\rho \text{ пл. } ABCD = 6 \quad \text{объемам } DAB'C,$$

$$\text{пл. } ABCD = AC \cdot DJ = a\sqrt{x^2 + \frac{a^2}{12}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{12x^2 + a^2}{3}},$$

$$\text{объем } DAB'C = \frac{1}{3}x \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Отсюда

$$\rho = \frac{3ax}{2\sqrt{12x^2 + a^2}}.$$

Найдем отсюда ρ^2 и представим ρ^2 в виде:

$$\rho^2 = \frac{3a^2}{16}\left(1 - \frac{\frac{a^2}{12}}{x^2 + \frac{a^2}{12}}\right).$$

Отсюда видно, что если x изменяется от 0 до $+\infty$, то $x^2 + \frac{a^2}{12}$ изменяется от $\frac{a^2}{12}$ до $+\infty$ и значит ρ^2 возрастает от 0 до $\frac{3a^2}{16}$. Значит, ρ изменяется от 0 до $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Выражение для $\cos\varphi$ *в функции* a *и* x.

Из равнобедренного треугольника $B'DC$ находим:

$$a^2 = 2\rho^2(1 - \cos\varphi),$$

откуда

$$\cos\varphi = 1 - \frac{a^2}{2\rho^2} = 1 - \frac{3a^2}{2(3x^2 + a^2)}.$$

Из этой формулы следует, что если x изменяется от 0 до $+\infty$, то $\cos\varphi$ возрастает от $-\frac{1}{2}$ до $+1$, следовательно, φ убывает от $\frac{2\pi}{3}$ до 0. 25. *Указание:* 1° $B_1C_1 \parallel BC$, $B_1'C_1' \parallel BC$; $B_1C_1' \parallel AD$, $B_1'C_1 \parallel AD$. Значит, плоскость $B_1C_1B_1'C_1'$ параллельна BC и AD и значит бивысота перпендикулярна к этой плоскости и т. д. 2°. Бимедианы A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1' пересекаются и делятся пополам центром тяжести G тетраэдра $(ABCD)$; если они попарно перпендикулярны, то все плоские углы триэдров $GA_1B_1C_1$, $GA_1C_1'B_1$, $GB_1C'A'$, $GC_1B_1'A'$ равны 90°; отсюда следует, что высоты этих четырех тетраэдров, опущенные из вершины G на плоскости их оснований, совпадают с центрами окружностей (BCD), (CDA), (DAB) и (ABD). Значит, на основании теоремы о трех перпендикулярах прямые GA_1 и GA_1', GB_1 и GB_1', GC_1 и GC_1' перпендикулярны ребрам BC и DA, CA и DB, AB и DC и значит A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1' — высоты.

Если бивысоты попарно ортогональны, то на основании 1° и бимедианы попарно ортогональны. Бивысоты должны на основании 1° или совпадать, или быть параллельными соответствующим бимедианам; однако последнее исключено, ибо в противном случае плоскость, проходящая через бимедиану и высоту, пересеклась бы соответствующими ребрами в двух точках (M и A_1, M' и A'_1 и т. д.), что невозможно. Значит, $M \equiv A_1$, $M' \equiv A'_1, \ldots$ Если указанные условия выполнены, то бимедианы $A_1 A'_1$, $B_1 B'_1$, $C_1 C'_1$ являются диагоналями ромбов $A_1 B_1 A'_1 B'_1$, $B_1 C_1 B'_1 C'_1$, $C_1 A_1 C'_1 A'_1$ и значит

$$\frac{CA}{2} = C'_1 A'_1 = A'_1 C_1 = \frac{DB}{2}.$$

Таким образом $CA = DB$ и аналогично $BC = DA$ и $AB = CD$; эти равенства характеризуют правильный тетраэдр. 3°. Применяя теорему о квадрате медианы к треугольникам QBC и QDA, получим:

$$QB^2 + QC^2 = 2QA_1^2 + \frac{a^2}{2}, \quad QD^2 + QA^2 = 2QA_1^2 + \frac{a'^2}{2},$$

откуда, вычитая и учитывая (1), получим:

$$BC^2 - DA^2 = 2\left(QA_1^2 - QA'^2\right) + \frac{1}{2}\left(a^2 - a'^2\right)$$

и значит

$$QA_1^2 - QA_1'^2 = \frac{1}{4}\left(a^2 - a'^2\right),$$

и значит Q лежит в плоскости, перпендикулярной $A_1 A'_1$.

Далее, рассматривая параллелограмм $OA'_1 \Omega A_1$, имеем:

$$\Omega A_1^2 - \Omega A_1'^2 = OA_1'^2 - OA_1^2 = R^2 - \frac{a'^2}{4} - \left(R^2 - \frac{a^2}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(a^2 - a'^2\right).$$

Значит Ω лежит в плоскости (Q) и т. д. **26.** Часть первая. 1°. Пусть ABC треугольник, в котором $AB \neq AC$. Рассмотрим плоскость (π), проходящую через BC. Если M точка этой плоскости такая, что $MB \cdot AC = MC \cdot AB$, то

$$\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC};$$

отсюда следует, что точка M лежит на окружности, построенной в плоскости (π) на EE', как на диаметре, где E и E' — основания биссектрис внутреннего и внешнего угла A треугольника ABC. Если плоскость (π) вращать вокруг BC, то окружность с диаметром EE' опишет сферу с тем же диаметром. Эта сфера проходит через точку A, (EAE') — ее большой круг. Треугольник EAE' — прямоугольный (A — прямой угол). Пусть ω_A — середина отрезка EE', т. е. центр указанной сферы; тогда $\omega_A A = \omega_A E = \omega_A E'$; отсюда можно получить, что $\omega_A A^2 = \omega_A B \cdot \omega_A C$ и значит точка ω_A лежит на касательной к окружности (ABC). 2°. Пусть $BC \neq CA$, $CA \neq AB$, $AB \neq BC$. Геометрическое место точек M таких, что $MB \cdot AC = MC \cdot AB$ есть сфера (EE') с диаметром EE'; геометрическое место точек M таких, что $MC \cdot AB = MA \cdot BC$ есть сфера (FF') с диаметром FF', где F и F' — основания внутренней и внешней биссектрис угла ABC. Если эти сферы пересекаются, то для любой точки M окружности пересечения будем иметь также $MA \cdot BC = MB \cdot CA$; геометрическое место точки M, удовлетворяющее одному этому условию, есть сфера (II'), построенная на II', как на диаметре, где I и I' — основания биссектрис угла C треугольника ABC; эта сфера таким образом проходит через окружность, по которой пересекаются сферы (EE') и (FF'). Сферы (EE') и (FF') пересекаются; в самом деле, пусть, например $a > b > c$; тогда сфера (EE') проходит через A, точка B внутри ее, а C — вне; сфера (FF') проходит через B, точка A — внутри ее, а C — вне, эти условия не могут иметь место, если (EE') и (FF') не пересекаются (сделать чертеж) [в случаях $a < b < c$, $b < a < c, \ldots$ приходим к тому же заключению: сферы (EE'), (FF'), (II') имеют общую окружность (Δ)]. Плоскость окружности (Δ) есть радикальная плоскость сфер (EE'), (FF') и (II'), а так как центры ω_A, ω_B, ω_C этих сфер лежат на сторонах BC, CA и AB треугольника ABC, то центр окружности (Δ) лежит на прямой $\omega_A \omega_B \omega_C$, которая является ее осью, плоскость же окружности перпендикулярна плоскости (V) треугольника. Пусть P и Q точки, в которых окружность (Δ) пересекает плоскость (V). Тогда

$$PA \cdot BC = PB \cdot CA = PC \cdot AB,$$
$$QA \cdot BC = QB \cdot CA = QC \cdot AB,$$

откуда

$$\frac{AP}{AQ} = \frac{BP}{BQ} = \frac{CP}{CQ}.$$

Отсюда следует, что PQ проходит через центр окружности (ABC), которая является для точек P и Q окружностью Аполлония и точки P и Q делят гармонически концы диаметра окружности (ABC), в которых ее пересекает прямая PQ.

Отметим также, что окружности (AEE'), (BFF'), (CII') ортогональны окружности (ABC) в точках A, B, C; отсюда следует, что их радикальная ось PQ проходит через центр (ABC). Если треугольник ABC равносторонний, то сферы (EE'), (FF'), (II') вырождаются в плоскости-медиатрисы сторон, а (Δ) — в прямую — ось окружности, описанной около треугольника ABC.

Итак, каков бы ни был треугольник ABC существует бесконечное множество тетраэдров (T), для которых ABC одна из граней. Геометрическое место четвертой вершины D есть окружность (Δ) или, в частности, прямая (Δ) — ось (ABC).

Часть вторая. 1°. Соотношение $AA_1^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AB_1} = \overline{AC} \times \overline{AC_1}$ может быть легко установлено элементарно или рассмотрением инверсии (A, AA_1^2).

Построим окружность (s), проходящую через B и C, но не проходящую через A; пусть AB и AC пересекают ее в точках B, B' и C, C'; касательные в точках A и A_1 к (ABC) параллельны; касательная к (ABC) в точке A_1 антипараллельна BC по отношению к AB и AC. Так как B, C, B', C' лежат на одной окружности (s), то BC и $B'C'$ также антипараллельны относительно AB и AC. Значит $B_1C_1 \parallel B'C'$.

Треугольники ABC и $A'B'C'$ подобны, но противоположно ориентированы. Значит

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{AB'}{AC}\left(= \frac{AB \cdot AB'}{AB \cdot AC}\right).$$

2°. Рассмотрим сферу $(ABCD)$, описанную около тетраэдра $ABCD$. Пусть A_1 — точка, диаметрально противоположная точке A на $(ABCD)$, (π) — плоскость, касательная в A_1 к $(ABCD)$, которая пересекает AB, AC и AD в точках B_1, C_1, D_1. Обозначим через A' точку, в которой AA_1 пересекает плоскость треугольника $B'C'D'$. На основании предыдущего $A'B'$ параллельна той касательной к сфере $(ABCD)$ в точке A, которая лежит в плоскости AA_1B. Точно так же $A'C'$ и $A'D'$ параллельны касательным в точке A к сфере $(ABCD)$ в плоскостях AA_1C и AA_1D. Плоскость $B'C'D'$, которая содержит, по крайней мере, две пересекающиеся прямые, соответственно параллельные двум касательным к сфере $(ABCD)$ в точке A, будет таким образом параллельна этой касательной плоскости. На основании предыдущего также имеем:

$$\frac{B'C'}{BC} = \frac{AB \cdot AB'}{AB \cdot AC},$$

откуда

$$\frac{B'C'}{AD \cdot BC} = \frac{AB \cdot AB'}{AB \cdot AC \cdot AD}.$$

Аналогичные соотношения можно записать для $C'D'$ и $D'B'$. Знаменатель $AB \cdot AC \cdot AD$ в правой части будет один и тот же; числители же $AB \cdot AB'$, $AC \cdot AC'$, $AD \cdot AD'$ — также равны между собой, так как каждое такое произведение есть степень точки A относительно сферы (S). Значит

$$\frac{B'C'}{BC \cdot AD} = \frac{C'D'}{CD \cdot AB} = \frac{B'D'}{BD \cdot AC}. \tag{2}$$

3°. $B'C' = C'D' = D'C'$; $\Delta B'C'D'$ — равносторонний, грани ACB, ACD и ADB пересекают плоскость, касательную к сфере $(ABCD)$, по трем прямым, образующим шесть углов по 60°.

Далее, соотношения (2) выполнены для любого тетраэдра; если $\Delta B'C'D'$ — равносторонний, то из (2) следует:

$$AD \cdot BC = CD \cdot AB = AC \cdot BD$$

Таким образом, *для того, чтобы тетраэдр $ABCD$ был тетраэдром (T) необходимо и достаточно, чтобы $\Delta B'C'D'$ был равносторонним.*

Аналогично получаем *другое характеристическое свойство тетраэдра (T): грани ABC, ACD и ADB пересекают плоскость, касательную к сфере $(ABCD)$, в точке A по прямым, образующим шесть углов по $60°$.*

Если заданы вершины A, B, C тетраэдра (T) и сфера (Σ), описанная около него, то сам тетраэдр (T) строится так: пусть (Δ) прямая пересечения плоскости ABC с плоскостью (π), касательной к сфере (Σ) в точке A; (Δ') и (Δ'') две другие прямые плоскости (π), образующие с прямой (Δ) угол в $60°$; тогда плоскости двух других граней тетраэдра (T) будут $\Delta' AB$, $\Delta'' AB$ или $\Delta'' AB$, $\Delta' AC$; эти плоскости пересекаются по прямой, которая в пересечении со сферой (Σ) дает точку D. Имеется, следовательно, два решения.

Часть третья. 1°. Пусть BCD — треугольник, A—точка, лежащая в его плоскости, но не на окружности (BCD); пусть прямые AB, AC, AD вторично пересекают (BCD) в точках B', C', D'. Установление соотношений

$$\frac{B'C'}{AD\cdot BC}=\frac{C'D'}{AB\cdot CD}=\frac{B'D'}{AC\cdot BD}$$

легко получается рассмотрением подобных треугольников.

Вернемся к начальной конфигурации. Соединим точку P с точками A, B, C и пусть PA, PB, PC пересекают (ABC) вторично в точках A', B', C'. На основании предыдущего

$$\frac{A'B'}{AB\cdot PC}=\frac{B'C'}{BC\cdot PA}=\frac{C'A'}{CA\cdot PB}.$$

Но так как точка P (как и Q) лежит на окружности (Δ), то

$$PC\cdot AB=PA\cdot BC=PB\cdot AC,$$

значит $A'B'=B'C'=C'A'$, т. е. $\Delta A'B'C'$ — равносторонний. Обратно. Если $\Delta A'B'C'$ — равносторонний для некоторой точки M, лежащей в плоскости ABC, то

$$MA\cdot BC=MB\cdot CA=MC\cdot AB$$

и значит M совпадает или с P, или с Q. 2°. Так как точка D может занимать по условию любое положение на окружности (Δ), то эта окружность и есть как раз та самая, которая выше была определена для грани ABC тетраэдра (T). Значит, плоскость ABC есть плоскость, проходящая через A и ось этой окружности; эта плоскость вполне определена, ибо A не лежит на оси. Пусть P и Q — точки, в которых плоскость, проходящая через A и ось окружности (Δ), пересекает эту окружность. Окружность (APQ) можно построить, затем можно построить и окружность (ABC) [ее центр на PQ и она ортогональна окружности (APQ) в точке A]. Пусть AP пересекает (ABC) вторично в A'. Строим точки B' и C' на окружности (ABC) такие, чтобы треугольник $A'B'C'$ был равносторонний, затем находим B и C в пересечении PB' и PC' с окружностью (ABC). Построение всегда возможно, решение единственно.

Часть четвертая. 1°. Пусть E и E' — основания на BC биссектрис углов BAC и BDC. Тогда $\frac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = -\frac{AB}{AC}$, $\frac{\overline{E'B}}{\overline{E'C}} = -\frac{DB}{DC}$, но правые части равны, значит E и E' совпадают. Аналогично — совпадают в точке F основания на AD биссектрис внутренних углов DBA и DCA. 2°. Пусть A_0, B_0, C_0, D_0 центры окружностей, вписанных в грани BCD, CDA, DAB и ABC. Будем обозначать точки E и F, которые мы ввели в предыдущем пункте и им аналогичные, этими же буквами, но с индексами: 1 для BC, 2 для CA и 3 для AB. И аналогичные индексы присвоим букве F для соответственно противоположных ребер. Прямая DD_0 общая для трех плоскостей DAE_1, DBE_2 и DCE_3; эти же плоскости пересекаются плоскостью ABF_3 по прямым AA_0, BB_0 и CC_0. Аналогично те же плоскости пересекаются плоскостью ACF_2 по прямым AA_0, E_2F_2 и CC_0. Наконец, те же плоскости пересекаются плоскостью BCF по прямым E_1F_1, BB_0 и CC_0. Отсюда и следует, что все прямые AA_0, BB_0, CC_0, DD_0, E_1F_1, E_2F_2, E_3F_3 имеют одну общую точку M. Обратно. Если прямые AA_0, BB_0, CC_0 и DD_0 имеют одну общую точку M, то плоскость MAD пересекает грани ABC и DBC по биссектрисам AD_0 и DA_0 внутренних углов, которые в свою очередь пересекаются в точке E_1 на BC. Отсюда сразу получаются характеристические соотношения (1) для тетраэдра (T). Таким образом наличие общей точки у прямых AA_0, BB_0, CC_0 и DD_0 есть характеристическое свойство тетраэдра (T). 2°. Соединим каждую вершину тетраэдра (T) с четырьмя центрами окружностей вписанных и вневписанных в противоположную грань (для грани BCD мы эти центры будем обозначать так: A_0, A_B, A_C, A_D и аналогично для других граней). D_B есть центр окружности, вневписанной в угол B грани ABC есть точка пересечения прямых BE_2, AE_1', CE_3' (две последние прямые — биссектрисы внешних углов A и C грани ABC); E_1' — также основание на BC биссектрисы внешнего угла D грани BCD и т. д. DD_B есть прямая, по которой пересекаются плоскости DBE_2, DAE_1', DCE_3'; эти плоскости в пересечении с плоскостью ABF_3 дают прямые BB_0, AA_0 и $E_3'F_3$; эти прямые пересекаются поэтому в некоторой точке J_B, лежащей на прямой DD_B. Указанные три плоскости в пересечении с плоскостью BCF_1 дают прямые $BB_0, E_1'F_1$, CC_B и в сечении с плоскостью ACF_2'—прямые D_2F_2', AA_B и CC_B. Значит, шесть прямых BB_0, AA_0, CC_B, DD_B, $E_1'F_1$, E_2F_2', $E_3'F_3$ проходят через одну точку J_B. Можно также пересечь те же три плоскости, например, такими плоскостями: ABF_3', BCF_1' и ACF_2, которые дадут следующие тройки прямых $(BB_0, AA_C, E_3'F_3')$, $(BB_0, E_1'F_1', CC_A)$, (E_2F_2, AA_C, CC_A) и значит прямые BB_0, AA_C, DD_B, $E_1'F_1'$, E_2F_2, $E_3'F_3'$ пересекаются также в одной точке J_B'.

Итак, всякая прямая, аналогичная BB_0, которая соединяет вершину тетраэдра (T) с центром окружности, вписанной в противоположную грань, имеет две точки M и J_B, в каждой из которых сходится по шесть прямых (указанных выше), а всякая прямая, аналогичная DD_B, т. е. прямая, соединяющая вершину D с центром окружности, вневписанной в противоположную грань, имеет две точки J_B и $J_{B'}$, в каждой из которых сходится по 6 прямых, указанных выше. 27. *1°. Построение точки P на (C'), $\angle APM = 90°$.* Пусть (Π) — плоскость, в которой лежит окружность (C), (C'') — проекция (C') на плоскость (Π); окружности (C'') и (C') равны; O — центр окружности (C''). Проекция точки P окружности (C') есть некоторая точка P' окружности (C''). Угол APM, одна из сторон которого параллельна плоскости (Π), будет прямым тогда и только тогда, когда угол $AP'O$ будет прямым. Отсюда построение точки P': это точка пересечения (C'') с окружностью, построенной на OA, как на диаметре. Перпендикуляр к плоскости (Π) в точке P' пересекает (Σ) в искомой точке P. Для всякого сечения (C') существует две точки P', следовательно, две точки P, удовлетворяющие условию вопроса; эти точки совпадают, если $OM = 0$ или $OM = R$. *2°. Соотношение между AP' и PP'. Положение AP. Геометрическое место точек P'.*

Прямоугольные треугольники PMO и $AP'O$ равны, ибо их гипотенузы OP и OA равны $(= R)$, а катеты PM и $P'O$ также равны. Значит $OM = PP' = AP'$.

Пусть Az — перпендикуляр в точке A к плоскости (Π); $\angle PAP' = 45°$, значит отрезок AP лежит на конусе вращения с осью Az, образующие которого наклонены к оси под углом 45°.

Геометрическое место точек P' есть окружность с диаметром OA. 3°. *Угол BOM — прямой: отрезки AP и BQ равны и ортогональны.* Q и B соответственно симметричны точкам P и A относительно прямой OM. Значит $\angle MQB = \angle MPA = 90°$ и $AP = BQ$. Пусть D — точка, в которой прямая AP' вторично пересекает (C). Так как P' — середина AD, то $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{P'O} = \overrightarrow{PQ}$. Значит, четырехугольник $DBQP$ — параллелограмм, и сторона BQ, параллельная PD, ортогональна AP, так как в треугольнике APD медиана PP' равна половине стороны AD. 4°. $OM = \sqrt{R^2 - r^2}$, $AP = BQ = \sqrt{2(R^2 - r^2)}$, $BP = \sqrt{2(R^2 + r^2)}$. 5°. Из $PQ = AP$ следует $r = \frac{R}{\sqrt{3}}$, $v = \frac{4\sqrt{3}}{27} R^3$. 28. 1°. $AA' = MA' = R\sqrt{x}$, $BB' = MB' = \frac{R}{\sqrt{x}}$ (предполагаем $x \neq 0$). 2°. $v_1 = \frac{2}{3}\pi R^3 \frac{x^2+x+1}{x}$, $v_2 = \frac{1}{3}\pi R^3 \frac{(x+1)^2}{x}$, $v_3 = \frac{2}{3}\pi \frac{R^3}{x}$. 3°. $y = \frac{v_1}{v_3} = x^2 + x + 1$. При изменении x от 0 до $+\infty$ y возрастает от 1 до $+\infty$ (построить график соответствующей дуги параболы). 4°. Уравнение $\frac{v_2}{v_1} = m$ приводится к виду:

$$(2m - 1)x^2 + 2(m - 1)x + 2m - 1 = 0.$$

Годятся лишь положительные корни. Задача разрешима, если $\frac{1}{2} < m < \frac{2}{3}$, при этом

$$x = \frac{1 - m \pm \sqrt{m(2-3m)}}{2m-1}.$$

Если $m = \frac{2}{3}$ — задача имеет одно решение; этому наибольшему значению m соответствует точка M, лежащая посредине дуги $\overset{\frown}{AB}$ $\left(\text{ибо при } m = \frac{2}{3},\ x = 1\right)$. **29.** 1°. $y = MN^2 = 3x^2 - 4ax\sqrt{2} + 4a^2$. Далее, если $l < \frac{a}{\sqrt{3}}$, решений нет; если $l = \frac{a}{\sqrt{3}}$, одно решение:

$$x' = x'' = \frac{2a\sqrt{2}}{3}.$$

Если $\frac{a}{\sqrt{3}} < l < \frac{a}{\sqrt{2}}$, то два решения:

$$x' = \frac{2}{3}\left(a\sqrt{2} - \sqrt{3l^2 - a^2}\right) \quad \text{и} \quad x'' = \frac{2}{3}\left(a\sqrt{2} + \sqrt{3l^2 - a^2}\right).$$

Если $l = \frac{a}{\sqrt{2}}$, два решения: $x' = \frac{a\sqrt{2}}{3}$, $x'' = a\sqrt{2}$. Если $\frac{a}{\sqrt{2}} < l < a$, одно решение: x'; если $l = a$, одно решение: $x' = 0$; если $l > a$, решений нет. 2°. График — дуга параболы

$$y = 3x^2 - 4ax\sqrt{2} + 4a^2;$$

$$0 \leqslant x \leqslant a\sqrt{2}; \quad y(0) = 4a^2, \quad y_{\min} = \frac{4}{3}a^2$$

при

$$x = \frac{2}{3}a\sqrt{2}, \quad y(a\sqrt{2}) = 2a^2.$$

3°. Из предыдущего следует, что если MN минимально, то $AM = \frac{2}{3}AC$ и $EN = \frac{2}{3}EG$. Опустим из точек M и N перпендикуляры MM' и MN' на AE. Очевидно $AM' = M'N' = N'E = \frac{2}{3}a$; отсюда следует, что $\Delta AMN'$ — прямоугольный ($\angle M = 90°$). Угол AMN, проектирующийся в прямой угол AMN', следовательно, также прямой. Аналогично доказывается, что $MN \perp GE$. Далее, проекции отрезков MN и CF на плоскость $ABCD$ параллельны ($MN' \parallel CE$). Аналогично проекции MN и CF на плоскость $BEFG$ также параллельны ($M'N \parallel BF$), следовательно, $MN \parallel CF$ и значит $MN \parallel BCM$.

Геометрическое место середин O отрезков MN. Точка B — середина $M'N'$, значит проекция O' точки O на плоскость $ABCD$ —

середина MN' и значит O' лежит на BC, причем $\overrightarrow{BO'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M'M}$. Аналогично $\overrightarrow{BO''} = \frac{1}{2}\overrightarrow{N'N}$, где O'' — проекция O на другую плоскость. Так как $M'M = N'N$, то $OO' = OO''$, значит точка O описывает отрезок BH, где H — середина CG.

Объем CEFDCG. Это призма, так как $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{FG}$; треугольник CBG — сечение, перпендикулярное к боковым ребрам; $v = \frac{1}{2}a^3$. 30. 1°. *Расстояние MN и его минимум.* Построим куб с ребрами AH, HK и KB и обозначим через I и J его вершины такие, что $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{KB}$, $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{HA}$; прямая (D) — это AI, прямая (Δ) — это BJ и т. д.

Находим: $MN^2 = (a-x)^2 + a^2 + (a-y)^2$; $MN_{\min} = a$, если M совпадает с I, а N — с J (это очевидно и геометрически). 2°. *Сфера* (Σ) *проходит через* I *и* J. *Расстояние* ωO. $\angle MIN = \angle MJN = 90°$; ω — находится в плоскости (π), проходящей через середину HK перпендикулярно HK; $O\omega^2 = \left(\frac{x+a}{2}\right)^2 + \left(\frac{y+a}{2}\right)^2$ (спроектировать все на указанную только что плоскость).

Условие, при котором (Σ) *касается* HK. *Геометрическое место точек* ω *для этого случая.*

$$O\omega = \frac{MN}{2} \text{ и т. д. Ответ. } x + y = \frac{a}{4}.$$

Обозначим через a_1, b, i проекции точек A, B и I на плоскость (π); геометрическое место точек ω в случае $O\omega = \frac{MN}{2}$ есть прямая, лежащая в плоскости (π), параллельная ba_1 и пересекающая ось Ob в точке K такой, что $\overline{OK} = \frac{9a}{8}$. Расстояние от O до этой прямой дает минимум для радиуса (Σ): $\frac{9a\sqrt{2}}{16}$. 3°. *Геометрическое место* (ω), *если* (Σ) *сохраняет радиус* R.

Очевидно должно быть $R \geqslant \frac{a}{2}$. Геометрическое место точек ω есть окружность, лежащая в плоскости (π) с центром i и радиусом $\sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$. 4°. *Направление MN в случае* $x = y$. В этом случае проекции m и n точек M и N на плоскость (π) симметричны относительно Oi и значит MN параллельна плоскости (P), проходящей через a_1, b параллельно HK, т. е. плоскости, проходящей через AB параллельно HK. Геометрическое место точек ω — прямая Oi; проекция прямой MN на плоскость (P) вращается вокруг точки пересечения прямой Oi с плоскостью (P). 31. 2°. Центр сферы (Σ) — середина SC; ее радиус $a\sqrt{2}$. Плоскость, касательная к (Σ) в точке B, перпендикулярна $B\omega$ [ω — центр (Σ)], значит, и плоскости SBC; пересечение этой касательной плоскости ABC перпендикулярно к плоскости SBC, а значит и BC. Аналогично находится прямая пересечения плоскости ABC с плоскостью касательной к (Σ) в точке C. 3°. Если $0 \leqslant x \leqslant a$, то $s = \frac{x(4a-3x)}{2}$, если $a \leqslant x \leqslant 2a$, то $s = \frac{1}{2}(2a-x)^2$. При изменении x от 0 до $\frac{2}{3}a$, s возрастает от 0 до $\frac{2}{3}a^2$; при изменении x от $\frac{2}{3}a$ до a, s убывает от $\frac{2}{3}a^2$ до $\frac{1}{2}a^2$; при изменении x от a до $2a$, s убывает от $\frac{1}{2}a^2$ до 0.

$$32.\ 1°.\ OK = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

$$CK = \sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2}}, \quad s = \frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{2}.$$

$$2°.\ b^2c^2 = \frac{36v^2}{a^2}, \quad b^2+c^2 = \frac{4(a^2s^2-9v^2)}{a^4};$$

b^2 и c^2 — положительные корни уравнения

$$a^4x^4 - 4(a^2s^2-9v^2)x^2 + 36a^2v^2 = 0. \tag{I}$$

Это уравнение имеет положительные корни тогда и только тогда, когда

$$\Delta \equiv 4[(a^2s^2-9v^2)^2 - 9a^6v^2] \geqslant 0, \tag{1}$$

$$a^2s^2 - 9v^2 > 0; \tag{2}$$

(1) можно переписать в виде:

$$(a^2s^2-9v^2+3a^3v)(a^2s^2-9v^2-3a^3v) \geqslant 0,$$

или в силу (2)

$$a^2s^2 - 9v^2 - 3a^3v \geqslant 0,$$

или

$$s^2 \geqslant \frac{9v^2}{a^2} + 3av.$$

Если это условие выполнено, задача имеет 2 решения: $b = b'$, $c = c'$ и $b = c'$, $c = b'$, где b' и c' — положительные корни указанного выше биквадратного уравнения. Эти два решения дают два тетраэдра, симметричных относительно биссекторной плоскости двугранного угла $C(AO)B$.

Частный случай $s^2 = \frac{9v^2}{a^2} + 3av$. В этом случае $\Delta = 0$ и в этом случае $b = c = \sqrt{\frac{6v}{a}}$. Треугольник BOC — прямоугольный, равнобедренный. 3°. *Вычисление* s_0. При $v_0 = \frac{a_0^2}{6}$, $s_0^2 + \frac{9v_0^2}{a_0^2} + 3a_0 v_0 = \frac{3a_0^4}{4}$, откуда $s_0 = \frac{a_0^2\sqrt{3}}{2}$.

Вычисление D в функции a и a_0

$$D = \frac{9v_0^2}{a^2} + 3av_0 - s_0^2 = \frac{a_0^3(a-a_0)^2}{4a^2}(2a+a_0).$$

Минимум для s при данном v_0. Если дано $v = v_0$, то тетраэдр существует тогда и только тогда, когда

$$s^2 \geqslant \frac{9v_0^2}{a^2} + 3av_0.$$

На основании вычисления, проведенного для D заключаем, что

$$\frac{9v_0^2}{a^2} + 3av_0 \geqslant s_0^2.$$

(равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a = a_0 = \sqrt[3]{\frac{v_0}{6}}$).

Итак, $s^2 \geqslant s_0^2$, откуда $s \geqslant s_0$. Итак, s, при данном $v = v_0$, имеет минимальное значение $s = s_0$ при $a = a_0 = \sqrt[3]{\frac{v_0}{6}}$, откуда $b = c = \sqrt{\frac{6v_0}{a_0}} = \sqrt[6]{36v_0^2} = \sqrt[3]{6v_0}$. **33.** 1°. *Если AA' и BB' пересекаются, то $AB \perp CD$.* Ребро CD — общее для двух граней BCD и ACD ортогонально высотам AA' и BB'. Если поэтому мы предположим, что эти высоты пересекаются, то отсюда будет следовать, что CD перпендикулярно плоскости, в которой они расположены и значит перпендикулярно ребру AB, которое расположено в этой плоскости. 2°. *Обратное положение.* Ребро CD ортогонально AA' и BB'; если $CD \perp AB$, то CD будет перпендикулярно двум плоскостям BAA' и ABB'. Но эти две плоскости имеют общую прямую AB, а потому совпадают. Таким образом прямые AA' и BB' расположены в одной и той же плоскости и значит пересекаются (они не могут быть параллельные; так как они перпендикулярны к двум пересекающимся плоскостям). 3°. *Изучение высот в случае $AC = AD = BC = BD$.* Точки A и B расположены в плоскости-медиатрисе отрезка CD, ибо $AC = AD$ и $BC = BD$. Таким образом, ребро AB лежит в плоскости-медиатрисе отрезка CD и потому $AB \perp CD$. Отсюда (см. 2°) следует, что AA' и BB' пересекаются в точке H. Аналогично устанавливаем, что CC' и DD' пересекаются в некоторой точке K. 4°. Точки H и K расположены в плоскостях-медиатрисах отрезков AB и CD и значит лежат на прямой IJ, соединяющей середины этих отрезков (в самом деле, плоскость-медиатриса отрезка AB есть плоскость CID, а плоскость-медиатриса отрезка CD есть плоскость

AJB). 34. 1°. $\Delta SAO = \Delta BOA$, $SO = a$. Полная поверхность пирамиды равна $a^2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. 2°. Плоскость $MNPQ$ перпендикулярна AB и значит перпендикулярна плоскости ABC. Пересечения MN и PQ этой плоскости с плоскостями SAB и SAC, перпендикулярными к ABC, будут также перпендикулярны к ABC, значит MN и PQ будут перпендикулярны MP. Значит, $MNPQ$ прямоугольная трапеция и т. д.

Ответ.

$$MQ = x\sqrt{3}, \quad MN = \frac{a-x}{2}, \quad NP = \frac{x\sqrt{13}}{2},$$

$$PQ = \frac{a-2x}{2}, \quad MP = \sqrt{4x^2 - ax + \frac{a^2}{4}}.$$

3°. График функции $y = 4x^2 - ax + \frac{a^2}{4}$ — дуга параболы $0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}$; при $x = 0$, $y = \frac{a^2}{4}$, при $x = \frac{a}{2}$, $y = \frac{3a^2}{4}$; наименьшее значение $y = \frac{3a^2}{16}$ принимает при $x = \frac{a}{8}$. Так как $MP \perp AB$, то MP есть расстояние от P до AB; минимальное значение MP соответствует кратчайшему расстоянию между AB и SC (в этом случае $MP \perp AB$ и $MP \perp SC$). 4°. $\angle IAH = 90°$), $AI = a\sqrt{3}$, $AH = \frac{a}{\sqrt{5}}$, $IH = \frac{4a}{\sqrt{5}}$, (заметить, что $\angle BAI = 90°$). Наконец $\cos \angle AHI = \frac{\text{пл. } \Delta SAB}{\text{пл. } \Delta SIB} = \frac{1}{4}$. 35. 1°. $\angle ABD = \angle ACD = 90°$, $BD \perp AB$, $BD \perp SA$, значит $BD \perp SAB$. Далее, $SC \perp CD$, $\angle SAD = \angle SBD = \angle SCD = 90°$, значит, точки S, A, B, C, D лежат на сфере, центром которой служит середина отрезка SD, а радиус этой сферы равен $\frac{a\sqrt{5}}{2}$. 36. 1°. *Положение* (P), *при котором* $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ *будут параллельны.* Ориентируем ребра OA, OB, OC (в направлениях от O к A, от O к B и от O к C) и обозначим через A' точку прямой OA, определенную равенством $\overline{OA'} = k\overline{OA}$, где k — данное число не равное нулю. Пусть плоскость (P), проходящая через A' и параллельная плоскости ABC, пересекает ребра OB и OC в точках B' и C'; тогда $\overline{OB'} = k\overline{OC}$, $\overline{OC'} = k\overline{CC}$. Из приведенных равенств следует, что $\overrightarrow{B'C'} = k\overrightarrow{BC}$ и так как, с другой стороны, $\overrightarrow{\beta\gamma} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, то $\overrightarrow{B'C'} = -2k\overrightarrow{\beta\gamma}$. Так как отрезки $B'C'$ и $\beta\gamma$ параллельны, то прямые $B'\beta$ и $C'\gamma$ будут параллельны тогда и только тогда, когда четырехугольник $B'C'\gamma\beta$ — параллелограмм, т. е. $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{\beta\gamma}$ и значит $k = -\frac{1}{2}$. В этом случае $\left(k = -\frac{1}{2}\right)$

легко видеть, что $\overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{\gamma\alpha}$ и значит прямые $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ параллельны. Итак, искомая плоскость (P_1) пересекает ребра OA, OB, OC в точках A_1', B_1', C_1', определенных равенствами $\overline{OA_1'} = -\frac{1}{2}\overline{OA}$, $\overline{OB'} = -\frac{1}{2}\overline{OB}$, $\overline{OC_1'} = -\frac{1}{2}\overline{OC}$. 2°. *Если плоскость* (P) *отлична от* (P_1), то прямые $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ *пересекаются в одной точке.*

Поскольку прямые $B'\beta$ и $C'\gamma$ расположены в одной плоскости и не параллельны, они пересекаются в точке M такой, что

$$\frac{\overline{MB'}}{\overline{M\beta}} = \frac{\overline{B'C'}}{\overline{\beta\gamma}} = -2k.$$

Аналогично, $A'\alpha$ и $B'\beta$ пересекаются в точке M' такой, что

$$\frac{\overline{M'B'}}{\overline{M'\beta}} = \frac{\overline{B'A'}}{\overline{\beta\alpha}} = -2k.$$

Поскольку точки M и M' делят вектор $\overrightarrow{B'\beta}$ в одном и том же отношении—они совпадают и значит $A'\alpha$, $B'\beta$ и $C'\gamma$ пересекаются в одной точке. 3°. *Геометрическое место точек* M. Пусть G—центр тяжести треугольника ABC. Если плоскость (P) меняется, прямая $A'\alpha$ описывает плоскость, проходящую через точку α и ребро OA; эта плоскость проходит через OG и, следовательно, точка M лежит в этой плоскости. Аналогично, точка M лежит в плоскости, проходящей через β и OB и в плоскости, проходящей через γ и OC. Точка M лежит, поэтому на прямой OG пересечения этих трех плоскостей. Обратно пусть M — какая-нибудь точка прямой OG; тогда прямая αM пересекает, вообще говоря, прямую OA в точке A'. Этой точке A' соответствует на основании прямого утверждения точка M, поскольку она лежит и на OG и на $A'\alpha$. Точка A' становится бесконечно удаленной, если она занимает положение M_2, определяемое равенством $\overline{GM_2} = -\frac{1}{2}\overline{GO}$. В самом деле равенства $\frac{\overline{G\alpha}}{\overline{GA}} = \frac{\overline{GM_2}}{\overline{GO}} = -\frac{1}{2}$ выражают, что OA и αM_2 параллельны.

Итак, геометрическое место точек M есть вся прямая OG, причем точка M_2 прямой OG соответствует бесконечно удаленной плоскости (P). 37. 1°. *Прямая* IJ *перпендикулярна* AB и CD. Так как точки A и B равноудалены от C и D, то плоскость AJB есть плоскость, перпендикулярная к отрезку AB в его середине I, значит $IJ \perp AB$; аналогично $IJ \perp CD$ (заметим, что IJ — ось симметрии тетраэдра $ABCD$). 2°. *Геометрическое место точек* I. Если плоскость (Q) изменяется, точка I все время лежит в плоскости, перпендикулярной отрезку CD в его середине, а так как угол $AIJ = 90°$, то точка I лежит на окружности (γ) с диаметром JA. Обратно. Пусть I—точка окружности (γ) и B—точка, симметричная точке A относительно I. Тогда $AC = AD = BC = BD$, так как BC и BD соответственно симметричны AD и AC относительно IJ.

Окончательно геометрическое место точек I есть вся окружность (γ). 3°. *Тетраэдр $ABCD$ в случае, если плоскости* (P) и (Q) *взаимно-перпендикулярны.* $AB=\sqrt{2(a^2-x^2)}$. Для определения центра O сферы, описанной около тетраэдра $ABCD$, ориентируем ось симметрии JI от J к I (на ней должна лежать точка O) и вычислим $\overline{JO}$. Достаточно записать, что равны длины отрезков OC и OA, т. е. $OJ^2+JC^2=OI^2+IA^2$, но $\overline{OI}=\overline{OJ}+\overline{JI}$ откуда $JC^2=2\overline{OJ}\times\times\overline{JI}+JI^2+IA^2$, $JC^2=2\overline{OJ}\cdot\overline{JI}+JA^2$, и значит $\overline{JO}=\dfrac{a^2-2x^2}{\sqrt{2(a^2-x^2)}}$.

Отсюда видно, что $\overline{JO}>0$, если $a>x\sqrt{2}$, т. е. $\angle CAD<\dfrac{\pi}{2}$ и $\overline{JO}<0$, если $\angle CAD>\dfrac{\pi}{2}$. Это можно было предвидеть, ибо точка O лежит на оси окружности, описанной около треугольника CAD; эта ось параллельна JB и пересекает IJ со стороны I относительно J, если центр ω окружности, описанной около треугольника CAD, лежит со стороны точки A относительно CD, т. е. если $C\hat{A}D<\dfrac{\pi}{2}$. Наконец, $C\,(AB)\,D=90°$, если $x=\dfrac{a}{\sqrt{3}}$. 38. 1°. $y=2x^2-2lx+l^2+a^2$. Если $y=m$, то при $m>l^2+a^2$ задача не имеет решения, при $m=\dfrac{l^2}{2}+a^2$ — одно решение $\left(x=\dfrac{l}{2}\right)$, если $\dfrac{l^2}{2}+a^2<m\leqslant l^2+a^2$ — два различных решения, $\dfrac{1}{2}\left(l\pm\sqrt{2m-l^2-2a^2}\right)$ (если $m=l^2+a^2$, то $x_1=0$, $x_2=l$). 2°. На сегменте $\left[0,\ \dfrac{l}{2}\right]$ y убывает от a^2+l^2 до $a^2+\dfrac{l^2}{2}$; на сегменте $\left[\dfrac{l}{2},\ l\right]$ y возрастает от $a^2+\dfrac{l^2}{2}$ до a^2+l^2; графиком является дуга параболы. 4°. Сечение гомотетично основанию с коэффициентом $\dfrac{a}{x}$; значит $p=\dfrac{a}{x}\cdot 2\times(a+l-x)=2a\dfrac{a+l}{x}-2a$. На сегменте $[a, l]$ p убывает от $2l$ до $\dfrac{2a^2}{l}$; график — дуга гиперболы. 39. 1°. Сумма s_1+s_2 площадей окружностей (O, OM) и $(O', O'M)$) будет равна $\pi(OM^2+O'M^2)$. Пусть Ω — середина OO'. Тогда

$$OM^2+O'M^2=2\Omega M^2+2\Omega O^2=2(\Omega M^2+a^2).$$

и условие $s_1+s_2=k^2$ дает

$$\Omega M^2=\frac{k^2-2\pi a^2}{2\pi}.$$

Если $k^2>2\pi a^2$, то геометрическое место точек M есть окружность с центром Ω и радиусом $\sqrt{\dfrac{k^2-2\pi a^2}{2\pi}}$. Если $k^2=2\pi a^2$, то имеется только одна точка M — середина Ω отрезка OO'. Если

$k^2 < 2\pi a^2$ — не существует точек M, удовлетворяющих условию задачи. 2°. Аналогично находим: если $k^2 > 8\pi a^2$, то геометрическое место точек, общих сферам (S) и (S') (или геометрическое место окружности, общей сферам S и S'), есть сфера с центром Ω $(\overline{O\Omega} = \overline{\Omega O'})$ и радиусом

$$\sqrt{\frac{k^2 - 8\pi a^2}{8\pi}}.$$

Если $k = 8\pi a^2$, имеется только одна точка, удовлетворяющая условию — это точка Ω. Если $k < 8\pi a^2$, то сферы (S) и (S') не имеют общих точек. 3°. Если $k = 16\pi a^2$, то $\sqrt{\dfrac{k^2 - 8\pi a^2}{8\pi}} = a^2$ и значит геометрическое место точек, общих сферам (S) и (S'), есть сфера (Σ) с диаметром OO'.

Если M есть точка, общая сферам (S) и (S'), то она лежит и на (Σ), значит $OM \perp OM'$ и значит сферы (S) и (S') ортогональны. 4°. Рассмотрим сечение пространственной фигуры плоскости OMO' и пусть (Δ) — пересечение этой плоскости с плоскостью (Π), касательной bM к (Σ); прямая (Δ) перпендикулярна к ΩM в точке M; пусть N и N' — точки, отличные от M, в которых (Δ) пересекает (S) и (S'); пусть H и H' — проекции O и O' на (Δ). Так как Ω — середина OO', то M — середина HH' и значит $MH = MH'$, а потому $MN = MN'$, но MN и MN' — диаметры (C) и (C'). Радиус MH каждой из окружностей (C) и (C') есть проекция на (Δ) отрезка $O\Omega$ и поэтому этот радиус будет максимальным, если $(\Delta) \parallel OO'$ иначе, если $\Omega M \perp OO'$.

Свойство сфер с диаметром HH'. $\widehat{OMH} = \widehat{OO'M}$. С другой стороны, пусть K — проекция M на OO'; тогда $\widehat{OO'M} = \widehat{OMK}$ и, следовательно, $\widehat{OMK} = \widehat{OMH}$. Отсюда следует, что $\Delta OMK = \Delta OMH$ и значит $MK = MH$. Сфера с центром M, проходящая через H, будет поэтому касаться прямой OO'. 40. 1°. $n = C_5^2 = 10$. 2°. *Два отрезка* IG и $I'G'$ пересекаются. Рассмотрим два случая: а) I и I' — середины отрезков, не имеющих общих граничных точек; в) I и I' — середины отрезков, имеющих общую граничную точку. а) Пусть I — середина AE, I' — середина CD; тогда G—центр тяжести треугольника BCD и G' — центр тяжести треугольника ABE. Точки G и G' расположены соответственно на медианах BI' и BI и

$$\frac{\overrightarrow{BG}}{\overrightarrow{BI'}} = \frac{\overrightarrow{BG'}}{\overrightarrow{BI}} = \frac{2}{3}.$$

Эти соотношения показывают, что вектор $\overrightarrow{GG'}$ получается из вектора $\overrightarrow{I'I}$ гомотетией $\left(B, \frac{2}{3}\right)$. Значит, отрезки IG и $I'G'$ пересекаются в точке O такой, что

$$\frac{\overrightarrow{OG}}{\overrightarrow{OI}} = \frac{\overrightarrow{OG'}}{\overrightarrow{OI'}} = \frac{2}{3}.$$

б) Пусть I — середина AE, I' — середина BE, G — центр тяжести треугольника BCD, G' — центр тяжести треугольника ACD и, наконец, пусть g и g' — середины BD и AD. Точки G и G' лежат соответственно на Cg и Cg' и $\overrightarrow{GG'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{gg'}$. С другой стороны,

$$\overrightarrow{gg'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}, \quad \overrightarrow{I'I} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA},$$

следовательно,

$$\overrightarrow{gg'} = \overrightarrow{I'I}.$$

и значит

$$\overrightarrow{GG'} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{II'}.$$

Отсюда следует, что отрезки IG и $I'G'$ пересекаются в точке O' такой, что

$$\frac{\overrightarrow{O'G}}{\overrightarrow{O'I}} = \frac{\overrightarrow{O'G'}}{\overrightarrow{O'I'}} = -\frac{2}{3}.$$

Эта точка O' совпадает с точкой O, определенной выше, так как

$$\frac{\overrightarrow{O'G}}{\overrightarrow{O'I}} = \frac{\overrightarrow{OG}}{\overrightarrow{OI}}.$$

3°. Отсюда и следует, что все 10 отрезков типа IG пересекаются в одной точке O такой, что

$$\frac{\overrightarrow{OG}}{\overrightarrow{OI}} = -\frac{2}{3}$$

(для каждого из десяти отрезков). **41.** 1°. *Длины ребра тетраэдра* $SABS: SA = AB = BC = a$, $SB = AC = a\sqrt{2}$, $SC = a\sqrt{3}$.

Величины двугранных углов

$S(AB)C = S(AC)B = C(SB)A = 90°$, $B(SA)C = S(BC)A = 45°$.

Для вычисления $A(SC)B$ заметим, что середина O отрезка AC есть проекция B на AC. Поэтому, полагая $A(SC)B = \alpha$, будем иметь: пл. $\Delta SOC =$ пл. $\Delta SBC \cos\alpha$. Но пл. $\Delta SOC = \frac{1}{2}$пл.ΔSBC, значит $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ и $\alpha = 60°$. 2°. *Положение IJ относительно AB* и SC; $\Delta SAC = \Delta SBC$, следовательно медианы AI и BI этих треугольников равны между собой и значит IJ — медиатриса AB. Далее $\Delta SAB = \Delta CAB$, значит, медианы SJ и CJ этих треугольников также равны между собой и значит IJ — медиатриса SC. Итак, $IJ \perp AB$ и $IJ \perp SC$, значит, IJ — кратчайшее расстояние между AB и SC; $IJ = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Кратчайшее расстояние между SA и BC равно a. 3°. *Площадь четырехугольника* $MDEF$. $y = ax - x^2$; $y_{\max} = \frac{a^2}{4}$ при $x = \frac{a}{2}$; точка M — середина AB, $MDEF$ — квадрат. **42.** 1°. *Прямая* MN *остается параллельной плоскости* (P). Обозначим через s и t проекции B и A соответственно на (d) и (d'). Существует точка S на (D) и точка T на (D'), которые проектируются на плоскость (P) соответственно в точки s и t. Поскольку прямые (D) и (D') не параллельны, точки S и T лежат по одну сторону от плоскости (P). Ориентируем прямую (D) от A к S, (D') — от B к T, (d) — от A к s и (d') — от B к t. Треугольники AMm и BNn — равнобедренные и прямоугольные; они равны, так как равны их гипотенузы. Значит, $Mm = Nn$ и четырехугольник $MNmn$—прямоугольник. Отсюда следует, что $MN \parallel mn$, значит, $MN \parallel (P)$.

Геометрическое место точек I. В связи с выбранными ориентациями имеем: $\overline{AM} = \overline{BN} = x$, откуда $\overline{Am} = \overline{Bn} = \frac{x}{\sqrt{2}}$. Четырехугольник $AmBn$, следовательно, параллелограмм и середина i его диагонали mn совпадает с серединой фиксированного отрезка AB. Так как точка i есть проекция на плоскость (P) середины I отрезка MN, то точка I расположена на перпендикуляре к плоскости (P), проходящем через i. А так как $\overrightarrow{iI} = \overrightarrow{mM}$, то точка I описывает этот перпендикуляр целиком.

2°. *Объем тетраэдра* $ABMN$. Прямая Ii — медиатриса AB и MN, значит, ось симметрии тетраэдра $ABMN$. Значит объем тетраэдра $ABMN$ равен удвоенному объему тетраэдра $ABIm$. Но объем тетраэдра $ABIM$ равен объему тетраэдра $ABIm$, так как $Mm \parallel Ii$; следовательно, $Mm \parallel ABI$. Окончательно. Объем $ABMN$ равен объему пирамиды с вершиной I, в основании которой лежит параллелограмм $AmBn$. Ответ. Объем $ABMN = \frac{1}{6}ax^2$.

Определение x таким образом, что противоположные ребра тетраэдра $ABMN$ равны.

Так как тетраэдр $ABMN$ симметричен относительно прямой Ii, то $AB = BN$, и $AN = BM$. Равенство $MN = AB$, будет иметь место тогда и только тогда, когда $mn = AB$, т. е. точка m совпадает с s, а n — с t. Отсюда находим $x = a\sqrt{6}$. Тетраэдр $ABMN$ в этом случае есть тетраэдр $ABST$. Длины ребер этого тетраэдра: $AB = ST = 2a$, $AS = BT = a\sqrt{6}$, $AT = BS = 2a$. Таким образом все четыре грани тетраэдра $ABST$ равны между собой, значит, равны и все высоты. Объем тетраэдра $ABST$ равен a^3 и т. д.

Величина каждой высоты равна $2a\sqrt{\frac{3}{5}}$. 3°. *Значение x, при котором ребра AB и MN ортогональны.*

Ребра AB и MN ортогональны тогда и только тогда, когда $AB \perp mn$, т. е., если точка m лежит на медиатрисе AB. Так как ASB—половина равностороннего треугольника, то $\overline{Am} = \frac{2}{3}$, $\overline{AS} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$, следовательно, $\frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$, откуда $x = \frac{2}{3}a\sqrt{6}$.

Ребра AN и BM также ортогональны.

Пусть C — точка, симметричная точке B относительно m. Так как $mA = mB = mC = mM$, то треугольник CMB — прямоугольный (угол M—прямой). Из равенств $\overrightarrow{nA} = \overrightarrow{Bm} = \overrightarrow{mC}$ и $\overrightarrow{mM} = \overrightarrow{nN}$ следует $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{NA}$, следовательно, $NA \parallel MC$ и значит $NA \perp MB$.

§ 6. Стереометрия с тригонометрией

1. *1 случай.* Точки P и P' находятся по одну сторону от плоскости окружности (C). Спроектируем окружность (C) из точки P' на плоскость экватора, т. е. в плоскость, перпендикулярную к отрезку PP' в его середине p. В силу свойств стереографической проекции получим в проекции снова окружность (C'), центр s которой есть проекция вершины S конуса, описанного около данной сферы и касающегося ее по окружности (C). Пусть Π — точка, в которой перпендикуляр, опущенный из p на плоскость окружности (C) пересекает данную сферу. Рассмотрим большой круг, проходящий через P, Π и P', и пусть он пересекает (C) в точках M и N, а экватор — в точках Q и Q'. Тогда проекции из точки P' точек M и N на плоскость экватора будут точки m и n, являющиеся диаметрально противоположными точками окружности (C'). Проекции a и b точек A и B будут пересечения прямых $P'A$ и $P'B$ с $pк$, где $к$ — точка пересечения (Γ) с экватором.

Из треугольников bpP' и apP' имеем:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{pa}}{\overline{pP'}}, \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\overline{pb}}{\overline{pP'}},$$

откуда

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\overline{pa}\cdot\overline{pb}}{\overline{pP'}^2}.$$

Но $\overline{pa}\cdot\overline{pb}$ есть степень точки p относительно окружности (C') и значит эта степень равна $\overline{pt}^2$, где pt длина касательной, проведенной из p к окружности (C'). Пусть далее pt пересекает экватор в точке $к$. В силу свойств стереографической проекции окружность, проходящая через точки P, $к'$ и P', касается окружности (C) (в точке T) и так как

$$\operatorname{tg} pP't = \frac{\overline{pt}}{\overline{pP'}} = \operatorname{tg}\frac{PpT}{2},$$

то

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \operatorname{tg}^2\frac{PpT}{2} = \text{const},$$

так как если фиксирована окружность (C), то фиксирована и точка T прикосновения к ней касательной окружности, проходящей через P и P'.

Случай, когда полюсы P и P' расположены по разные стороны от плоскости окружности (C) предоставляется рассмотреть читателю. В этом случае $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=-\operatorname{tg}^2\frac{PpT}{2}$; рассуждения меняются принципиально ввиду того, что точка p будет теперь внутри окружности (C'). Следует рассмотреть хорду tt' окружности, перпендикулярную mn. 2. 2°. a^3; полная поверхность $4a^2$. 3°. $A'C'=$ $=\frac{a\sqrt{2}}{\cos\theta}=a\sqrt{2}\operatorname{ctg}\alpha$. 4°. $\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$, в случае $\cos\theta=$ $=\sqrt{2}-1$, $\alpha=\frac{\pi}{8}$. 3. I. $\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos A$.

$$\text{II. } \sin A=\frac{2\sqrt{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{-a+b+c}{2}\sin\frac{a-b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}}{\sin b\sin c}$$

$$\text{III. } \frac{\sin A}{\sin a}=\frac{\sin B}{\sin b}=\frac{\sin C}{\sin c}=$$

$=\frac{1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c}{\sin^2 a\sin^2 b\sin^2 c}$. IV. $\sin a=\frac{\sin A}{\sin B}\times$ $\times\sin b$. 4. 1°. $OA=\frac{R}{\cos\alpha}$, $OB=\frac{R}{\sin\alpha}$, $AB=\frac{2R}{\sin 2\alpha}$, $AB_{\min}=$ $=2R$, при $\alpha=\frac{\pi}{4}$; при этом $OA=OB=R\sqrt{2}$. 2°. *Геометрическое место точек A' и B'.* Пусть A_0 и B_0 — граничные положения точки M, A_0' — точка плоскости xOz, соответствующая A_0, B_0' — точка плоскости yOz, соответствующая B_0. Геометрическое место точек A' есть луч с началом в точке A_0', лежащий на биссектрисе угла xOz. Геометрическое место точек B' есть луч с началом B_0', лежащий на биссектрисе угла yOz.

Величина угла $A'OB'$. $\angle A'OB'=\angle A_0'OB_0'$; но $\Delta A_0'OB_0'$ равносторонний, следовательно $\angle A_0'OB_0'=\frac{\pi}{3}$. 3°. *Изучение точек I.* Прямая $A'B'$ может быть параллельна плоскости xOy лишь в случае одного положения точки $M\left(\alpha=\frac{\pi}{4}\right)$. Исключая этот случай, и обозначая через I точку пересечения $A'B'$ с xOy, заметим прежде всего, что I лежит на AB, являющейся проекцией $A'B'$ на xOy. Далее,

$$\frac{IA}{IB}=\frac{AA'}{BB'}=\frac{OA}{OB}.$$

Таким образом точка I расположена вне отрезка AB на прямой AB и делит этот отрезок пропорционально сторонам OA и OB треугольника OAB, а потому лежит на биссектрисе внешнего угла O треугольника OAB. Пусть касательные к рассматриваемой четверти окружности пересекают эту биссектрису в точках I_1 и

I_2. Через точку I этой биссектрисы можно провести касательную к четверти рассматриваемой окружности тогда и только тогда, когда окружность с диаметром OI пересекает (K), значит, точка I должна лежать вне отрезка $I_1 I_2$. В таком случае касательная IM к (K) существует, пересекает Ox и Oy в точках A и B, отправляясь от которых мы построим точки A' и B'; прямая $A'B'$ пересечет плоскость xOy в выбранной точке K, ибо прямая $A'B'$, с одной стороны, должна пересечь плоскость xOy в точке биссектрисы внешнего угла O треугольника AOB, с другой стороны, в точках прямой AB. Окончательно: геометрическое место точек I есть биссектриса внешнего угла xOy, за исключением отрезка $I_1 I_2$.

Линейный угол двугранного угла A (OI) A'. Плоскость, проходящая через O перпендикулярно OI, содержит биссектрису OD угла xOy и прямую Oz. Это, следовательно, плоскость-медиатриса отрезка $A_0 B_0$, следовательно, и $A_0' B_0'$; она проходит поэтому через биссектрису угла $A'OB'$. 4°. *Вычисление угла $A'OB'$.*

$$A'B'^2 = OA'^2 + OB'^2 - 2OA' \cdot OB' \cos A'OB' = AB^2 + (AA' - BB')^2 \text{ и так как } OA' = OA\sqrt{2}, \quad OB' = OB\sqrt{2}, \text{ то}$$

$$2u^2 + 2v^2 - 4uv \cos \widehat{A'OB'} = u^2 + v^2 + (u - v)^2; \quad \text{отсюда}$$

$$2uv\,(1 - 2\cos \widehat{A'OB'}) = 0; \quad \text{так как } u \neq 0 \text{ и } v \neq 0, \text{ то}$$

$$\cos \widehat{A'OB'} = \frac{1}{2}, \quad \widehat{A'OB'} = \frac{\pi}{3}.$$

ЛИТЕРАТУРА

Арифметика

1. Андронов И. К. и Брадис В. М. — Арифметика. Книга представляет собою обстоятельное изложение курса элементарной арифметики; предназначена как пособие для учителей. Книга может быть прочитана с пользой учащимися старших классов средней школы, готовящимся к экзаменам в высшие учебные заведения.
2. Брадис В. М. — Теоретическая арифметика. Книга предназначена как пособие для пединститутов.
3. Филичев С. В. и Чекмарев Я. Ф. — Сборник задач по арифметике. Пособие для педагогических училищ.

Алгебра

1. Новоселов С. И. — Специальный курс элементарной алгебры, «Советская наука», 1958. Книга представляет собою подробный курс элементарной алгебры, предназначенный для студентов университетов и педагогических институтов. Изложение дано на высоком научном уровне. Книгу можно рекомендовать, в первую очередь, для поступающих на механико-математические, физические и физико-математические факультеты университетов и педагогических институтов.
2. Новоселов С. И. — Алгебра и элементарные функции. Учпедгиз, 1954. В книге изложены почти все принципиальные вопросы школьного курса алгебры и тригонометрии. Книга написана на высоком научном уровне и хотя предназначена как пособие для учителей, но может быть использована учащимися старших классов средней школы.
3. Моденов П. С. — Сборник задач по специальному курсу элементарной математики, «Советская наука», 1957. В книге дано большое число задач и вопросов (примерно 10 000) по всем разделам элементарной математики; даны многочисленные образцы методов решения.
4. Пржевальский Е. — Сборник алгебраических задач. Учпедгиз, 1941. Книга несколько устарела, однако в ней содержится большой набор задач на тождественные преобразования, на решение уравнений и неравенств.
5. Барыбин К. С. и Исаков А. К. — Сборник задач по элементарной математике. Пособие для учителей восьмых классов. В сборнике дан хороший задачный материал, распо-

ложенный в последовательности, предусмотренной школьно программой.

6. Баранова И. В. и Ляпин С. Е. — Задачи на доказательство по алгебре. Пособие для учителей. Учпедгиз, 1954. Книга может оказать существенную помощь при изучении темы «Неравенства».
7. Давыдов А. К. — Сборник задач по алгебре и элементарным функциям. Пособие для учительских и педагогических институтов. Книга приспособлена к теоретическому курсу С. И. Новоселова. Алгебра и элементарные функции.
8. Моденов П. С. — Сборник задач по математике (с анализом ошибок, допущенных поступавшими в высшие учебны заведения). «Советская наука», 1954. Книга содержит большой набор примеров и задач по всем разделам элементарной алгебры. Автор дает указания по ряду принципиально важных вопросов, связанных с решением и исследованием примеров и задач. Этот материал окажет существенную помощь при самостоятельном изучении предмета.
9. Обер П. и Папелье Г. — Упражнения по элементарной алгебре (перевод с французского). Учпедгиз, 1940. Книга содержит богатый задачный материал по следующим разделам тождественные преобразования рациональных и иррациональных выражений, решение и исследование уравнений. В сборнике содержится много текстовых задач. Упражнения и задачи снабжены подробными решениями. Весьма тщательно выполнены исследования решений примеров и задач с параметрическими данными. Книга окажет большую помощь пр самостоятельном изучении элементарной алгебры.

Геометрия

1. Перепелкин Д. И. — Курс элементарной геометрии, т. I Геометрия на плоскости. Гостехиздат, 1948; т. II — Геоме рия в пространстве. Гостехиздат. 1949. В книге дано подро ное и высоконаучное изложение элементарной геометри. Книга предназначена для студентов педагогических инст тутов, но может быть рекомендована также готовящимся экзаменам в высшие учебные заведения, в первую очеред поступающим на механико-математические, физические и фи зико-математические факультеты университетов и пединститутов.
2. Адамар Ж. — Элементарная геометрия, т. I — Планиметрия. Учпедгиз, 1952; т. II — Стереометрия. Учпедгиз, 1952. Книга является наиболее полным курсом элементарной геометрии. Может служить для справок. Готовиться по ней к экзаменам в высшие учебные заведения трудно, ввиду очень большого объема. Книга содержит, помимо очень большого фактического материала по геометрии, богатый набор интересных задач.
3. Делонэ Б. Н. и Житомирский О. К. — Задачник по геометрии. Гостехиздат, 1949. Очень интересная книга, содержащая помимо большого числа удачно подобранных задач и решения к ним. Очень хорошо представлены задачи по стереометрии.

Александров И. И. — Геометрические задачи на построение и методы их решения. Учпедгиз, 1954. В этой книге читатель найдет много трудных и интересных задач на построение (на плоскости); в книге изложены и методы решения. Книга очень полезна для развития навыков геометрии, однако в ней много трудных задач, решение которых потребует большого напряжения.

Дзык П. Г. — Сборник геометрических задач по комбинации геометрических тел. Учпедгиз, 1936. В книге предложены задачи по стереометрии, в основном на вычисление. Решение почти всех задач требует хорошего пространственного представления, так как комбинации геометрических тел, рассматриваемых автором, почти всегда сложны. Для решения многих задач нужно предварительно производить (во многих случаях) достаточно сложные построения в пространстве.

Адлер А. — Теория геометрических построений. Учпедгиз, 1940. Классическое руководство по теории геометрических построений.

Тригонометрия

Новоселов С. И. — Специальный курс тригонометрии, «Советская наука», 1957. В книге дано подробное и весьма полное изложение вопросов тригонометрии. Книга написана на высоком научном уровне и может быть, в первую очередь, рекомендована, поступающим на механико-математические, физические и физико-математические факультеты университетов и пединститутов.

Новоселов С. И. — Обратные тригонометрические функции. Учпедгиз, 1947. Книга содержит подробное изложение теории обратных тригонометрических функций, а также содержит много задач по этому вопросу. Ко многим задачам даны подробные решения.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Цена 7 р. 25 к.