В. Н. Литвиненко

# ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

## ГЕОМЕТРИЯ

Московский государственный заочный
педагогический институт

В. Н. ЛИТВИНЕНКО

# ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

## ВЫПУСК IV

## ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для студентов-заочников
V курса физико-математических факультетов
педагогических институтов

МОСКВА ПРОСВЕЩЕНИЕ 1982

*Рекомендовано к печати Главным управлением высших и средних педагогических учебных заведений Министерства просвещения РСФСР*

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент *С. Л. Певзнер* (пединститут Комсомольска-на-Амуре),
кандидат физико-математических наук, доцент *И. В. Парнасский* (Орловский пединститут),
кандидат физико-математических наук, доцент *К. И. Дуничев* (МГПИ им. В. И. Ленина)

Редактор МГЗПИ *Павлович О. А.*

Л $\frac{4309020400—701}{103\ (03) — 82}$ заказное

© Московский государственный заочный педагогический институт (МГЗПИ), 1982 г.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие представляет собой четвертый выпуск «Практикума по решению задач школьной математики». Оно написано в соответствии с действующей программой и предназначено для студентов-заочников физико-математических факультетов педагогических институтов.

Приемы решения геометрических задач, и в частности задач школьного курса, рассматриваются в различных разделах курса геометрии, изучаемого в педагогических институтах, где подробно разбираются, например, такие способы решения, которые используют параллельный перенос, поворот, симметрию, гомотетию, аффинное и проективное преобразования, координатный и векторный методы. Значительно меньше внимания уделяется традиционным методам. Это не могло не отразиться на подборе вошедших в практикум задач, которые в соответствии с программой относятся к следующим темам:

1. Геометрические задачи на плоскости.
2. Конструктивные задачи в пространстве.
3. Многогранники. Взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве. Двугранные, многогранные углы на многогранниках. Сечения многогранников.
4. Тела вращения. Комбинации геометрических тел.

Пособие содержит три главы. В первой главе затрагиваются вопросы общего характера, относящиеся к решению геометрических задач школьного курса математики. Здесь кратко напоминаются некоторые сведения о построении изображений фигур в параллельной проекции в связи с понятиями полного и метрически определенного изображений, приводятся примеры, иллюстрирующие подсчет параметрического числа полного изображения, примеры аффинных и метрических построений, рассматривается ряд общих приемов решения геометрических задач.

Глава вторая посвящается решению планиметрических задач, а в третьей рассматриваются задачи из стереометрии.

Структура пособия и его содержание во многом определяются спецификой заочного обучения, стремлением оказать студентам-заочникам действенную помощь в овладении практическими навыками решения геометрических задач. Дается необходимый теоретический материал, приводятся подробно разобранные типовые примеры и, наконец, предлагаются задачи для самостоятельного решения.

Практикум по геометрии изучается на заочных отделениях в девятом семестре. Программой предусмотрено проведение конт-

рольной работы и зачета. Варианты контрольных работ даются в Приложении 1. Указываемый в скобках номер, которым снабжены некоторые из задач, предлагаемых для самостоятельного решения,— это номер варианта контрольной работы.

При написании пособия была использована следующая литература:

1. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. 5-е изд. М., Наука, 1976.

2. Сборник задач по математике для конкурсных экзаменов во втузы/ Под общ. ред. М. И. Сканави. 2-е изд. М., Высш. школа, 1973.

3. Вересова Е. Е., Денисова Н. С., Полякова Т. Н. Практикум по решению математических задач. М., Просвещение, 1979.

Для подбора задач использовались также различные школьные учебные пособия и задачники, журналы «Математика в школе» и «Квант».

Некоторые задачи составлены автором.

Теоретические сведения в настоящем практикуме, естественно, не систематизированы и приводятся лишь при необходимости. Более подробные разъяснения по теоретическим вопросам студент может найти, например, в следующих книгах:

1. Базылев В. Т., Дуничев К. И. Геометрия. М., Просвещение, 1975, ч. II.

2. Атанасян Л. С., Гуревич Г. Б. Геометрия. М., Просвещение, 1976, ч. II.

3. Четверухин Н. Ф. Изображения фигур в курсе геометрии. М., Учпедгиз, 1958.

# ГЛАВА I

# ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Если геометрическая задача не является задачей на построение, то ее решение, как правило, может быть выполнено по следующему плану:

1) построение изображения данной фигуры,

2) краткая запись условия задачи,

3) нахождение искомых величин (зависимостей) или доказательство некоторого утверждения,

4) исследование.

Рассмотрим более подробно содержание пунктов этого плана.

## § 1. Построение изображения данной фигуры

**1°.** В планиметрии изображением данной фигуры $\Phi_0$, называемой оригиналом, считается любая фигура $\Phi$, подобная фигуре $\Phi_0$.

Так, если данная фигура $\Phi_0$ — прямоугольный треугольник с катетами, равными 5 и 30 см, то его изображением можно считать любой прямоугольный треугольник с катетами, отношение длин которых равно 5 : 30, например прямоугольный треугольник с катетами, равными 1 и 6 см.

Заметим, что на практике построить изображение данной фигуры даже с точностью до подобия не всегда просто. Так, если для решения задачи требуется построить изображение прямоугольного треугольника по заданным гипотенузе и биссектрисе одного из острых углов, то, так как ни один из острых углов треугольника не известен, для построения изображения с точностью до подобия потребовалось бы выполнение некоторого вспомогательного построения, т. е., по существу, решение новой задачи. В таких случаях естественно попытаться решить поставленную задачу на «приближенном» чертеже и после того, как решение будет найдено, выполнить чертеж с точностью до подобия.

**2°.** Сложнее обстоит дело с построением изображения данной фигуры в стереометрии.

В начертательной геометрии детально разработаны различные методы построения изображений, в частности различные виды параллельного проектирования. Однако выполнение чертежей в какой-либо определенной параллельной проекции на уроках геометрии в средней школе по большей части просто не оправдано. При решении геометрических задач построение изображений фигур выполняется в произвольной параллельной проекции, т. е. положение оригинала относительно плоскости, на которую выполняется проектирование, и направление самого проектирования относительно этой

плоскости оставляются неопределенными. Возможность применения такого способа построения проекционного изображения следует из теоремы Польке — Шварца, в соответствии с которой *любой плоский четырехугольник $ABCD$ вместе с его диагоналями может быть принят за параллельную проекцию тетраэдра, подобного тетраэдру $A_0B_0C_0D_0$ произвольной формы.* По изображению, полученному при таком произвольном параллельном проектировании, оригинал восстановить нельзя, но при решении задач школьного курса геометрии этого делать и не требуется.

**3°.** К проекционным чертежам, выполняемым при решении задач в средней школе, предъявляются следующие требования:

1) изображение должно быть *верным*, т. е. должно представлять собой фигуру, подобную параллельной проекции оригинала;

2) изображение должно быть по возможности *наглядным*, т. е. должно вызывать пространственное представление о форме оригинала (в некоторых случаях от этого требования отступают. Об этом будет сказано ниже);

3) изображение должно быть *легко выполнимым*, т. е. правила построения должны быть максимально просты; обилие вспомогательных построений лишь затрудняет понимание содержания задачи.

Необходимо четко различать понятие верного и понятие наглядного изображения.

Верность изображения является строго определяемым математическим понятием, а понятие наглядности относится к числу субъективных, так как оно связано с индивидуальным восприятием изображаемой фигуры.

Так, все представленные на рисунке 1 (*а*, *б*, *в*, *г*) изображения —

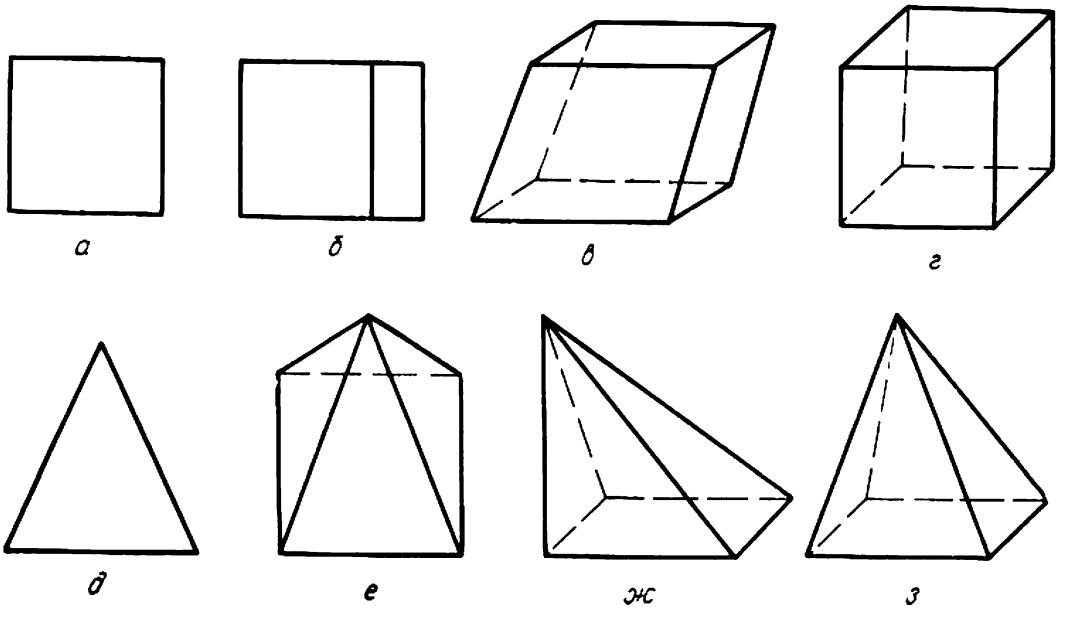


**Рис. 1**

это верные изображения куба. Однако наглядным нам представляется только изображение, показанное на рисунке 1, *г*. На рисунках 1 (*д*, *е*, *ж*, *з*) все изображения — это верные изображения правильной четырехугольной пирамиды. Наглядным же нам представляется только изображение на рисунке 1, *з*.

Чтобы изображение было верным, достаточно строить это изображение в соответствии с законами параллельного проектирования.

**4°.** С понятием верного изображения тесно связано понятие позиционной полноты изображения (или, короче, полноты изображения). Изображение фигуры $\Phi_0$ называется *полным*, если каждая точка $A_0 \in \Phi_0$ является заданной на проекционном чертеже.

Напомним кратко, как определяется это понятие.

Плоскость $\alpha$, на которую проектируются изучаемые фигуры, называют *проекционной плоскостью* или *плоскостью изображения* (фактически это плоскость чертежа), а само проектирование на плоскость $\alpha$ называют *внешним*. Для построения изображения некоторой фигуры может быть выполнено либо центральное, либо параллельное проектирование. Говоря о внешнем проектировании, мы в дальнейшем будем иметь в виду только параллельное проектирование.

Рассмотрим в пространстве некоторую плоскость $\pi_0$, отличную от $\alpha$, и некоторое непараллельное $\pi_0$ новое направление параллельного проектирования; проектирование в этом направлении будем называть *вспомогательным* (параллельным). Для каждой точки $A_0$ пространства построим точку $A_0'$ — проекцию точки $A_0$ на плоскость $\pi_0$ (вспомогательную проекцию), а затем обе точки: $A_0$ и $A_0'$ — спроектируем на плоскость $\alpha$ (рис. 2, *а*).

Получим точки $A$ и $A'$, которые называют соответственно *проекцией* и *вторичной проекцией* точки $A_0$.

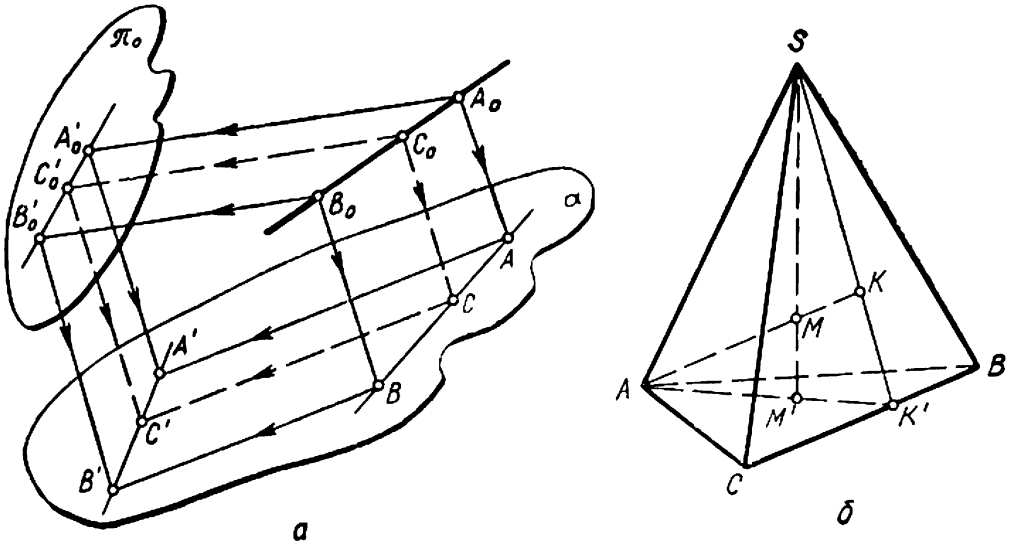


Рис. 2

Соответствие $A \to A'$ на проекционной плоскости можно (разумеется, условно) рассматривать как некоторый род проектирования; его называют *внутренним параллельным* проектированием, так как оно осуществляется внутри плоскости изображения. Очевидно, что каковы бы ни были точки $A_0$, $B_0$, $C_0$, ... в пространстве, в плоскости изображения будет: $(AA') \parallel (BB') \parallel (CC') \parallel \ldots$ .

Под проекцией (изображением) пространственной фигуры понимают совокупность проекций всех ее точек.

Для получения проекции пространственной фигуры $\Phi_0$ (оригинала) в общем случае не является обязательным проектирование каждой из ее точек. Так, если $\Phi_0$ — многогранник, то он ограничен конечным числом граней (плоских фигур), каждая же грань ограничена ломаной, звенья которой — это ребра многогранника (отрезки). Каждое ребро, в свою очередь, ограничено парой вершин многогранника. Если найти проекции всех вершин многогранника, то тем самым будут определены проекции и всех его ребер, и граней, т. е. вообще проекция многогранника.

Точка $A_0 \in \Phi_0$ называется заданной на проекционном чертеже (короче: *заданной*), если известны ее проекция и вторичная проекция, т. е. пара точек: $A$ и $A'$.

Таким образом, две пары точек: $A$, $A'$ и $B$, $B'$ — при условии, что $(AA') \parallel (BB')$, определяют полное изображение прямой $A_0B_0$.

Аналогично, если $(AA') \parallel (BB') \parallel (CC')$, то пары точек $A$, $A'$; $B$, $B'$ и $C$, $C'$ определяют полное изображение плоскости $A_0B_0C_0$.

Для обоснования полноты изображения некоторых фигур целесообразно бывает рассмотреть также центральное вспомогательное проектирование точек $A_0$, $B_0$, $C_0$, ... фигуры-оригинала $\Phi_0$ на плоскость $\pi_0$. Выполнив это проектирование, а затем, как обычно, внешнее проектирование (параллельное) точек $A_0$ и $A_0'$, $B_0$ и $B_0'$, $C_0$ и $C_0'$,... на плоскость $\alpha$, мы получим проекции и вторичные проекции точек $A_0$, $B_0$, $C_0$, ... . Соответствие $A \to A'$ в этом случае называют (естественно, условно) *внутренним центральным* проектированием. Очевидно, каковы бы ни были точки $A_0$, $B_0$, $C_0$, ... в пространстве, прямые $AA'$, $BB'$, $CC'$, ... в плоскости изображения пересекаются в одной точке.

Покажем теперь, что если задать проекции вершин пирамиды $S_0A_0B_0C_0$ — точки $S$, $A$, $B$ и $C$ (без вторичных проекций), то изображение пирамиды будет полным. Действительно, выбрав в качестве центра вспомогательного проектирования точку $S_0$, а в качестве плоскости $\pi_0$ плоскость $A_0B_0C_0$, мы можем для каждой точки $M_0$ пирамиды по ее проекции $M$ построить вторичную проекцию $M'$. На рисунке 2, *б* это построение выполнено для точки $M_0 \in (S_0A_0K_0)$. Вторичной проекцией точки $S$ можно при этом считать в принципе любую точку треугольника $ABC$.

Изображение конуса в виде фигуры, состоящей из эллипса и пары касательных к эллипсу, проведенных из некоторой внешней точки, является полным. Чтобы в этом убедиться, можно рассмотреть конус совместно с вписанной в него пирамидой.

**5°.** Если изображение фигуры $\Phi_0$ является полным, то на нем разрешима любая позиционная задача, т. е. задача о построении инциденций заданных фигур (например, задача о нахождении точки пересечения заданной прямой и заданной плоскости).

**6°.** С понятием верного изображения связано также понятие его метрической определенности.

Изображение фигуры $\Phi_0$ называется *метрически определенным*, если по нему можно (в принципе) восстановить фигуру $\Phi_0$ с точностью до подобия.

Полное изображение в общем случае еще не является метрически определенным, однако при определенных условиях оно может стать метрически определенным. Так, если указать, что призма, изображенная на рисунке 1, *в*, правильная, то изображение еще не будет метрически определенным. Если же добавить, что боковое ребро призмы вдвое больше стороны основания, то метрическая определенность изображения будет обеспечена.

Изображение, сопровождаемое условиями, позволяющими восстановить оригинал с точностью до подобия, называют *условным*. Именно условные изображения применяются на уроке математики в средней школе.

Эти условия (их обычно указывают в краткой записи данных, — об этом мы будем говорить ниже) весьма разнообразны и зависят, в частности, от того, какая фигура изображается.

Так, если в оригинале фигура $\Phi_0$ — куб, то ее изображение достаточно сопроводить условием: фигура $\Phi$ — куб. Действительно, при таком условии, наложенном на фигуру $\Phi$, восстановить оригинал с точностью до подобия можно, так как все кубы подобны между собой.

Если же фигура $\Phi_0$ — правильная четырехугольная пирамида, то сопроводить ее изображение условием, что фигура $\Phi$ — правильная четырехугольная пирамида, недостаточно, так как в данном случае мы еще не сможем восстановить оригинал с точностью до подобия. Чтобы изображение в этом примере стало метрически определенным, следует указать еще, например, отношение высоты пирамиды к стороне основания, или угол между боковым ребром и плоскостью основания, или угол между боковой гранью и плоскостью основания и т. д.

**7°.** Построения, выполняемые на проекционном чертеже, могут быть позиционными и метрическими. *Позиционные* построения передают свойства оригинала, сохраняющиеся при параллельном проектировании (внешнем).

*Метрические* построения, как правило, передают свойства оригинала, не сохраняющиеся при параллельном проектировании.

Некоторые построения, которые на первый взгляд кажутся метрическими, в конкретной задаче могут оказаться позиционными. Так, построение высоты треугольника в общем случае — построение метрическое, поскольку свойство прямых быть перпендикулярными при параллельном проектировании не сохраняется.

Однако если в оригинале стороны $A_0B_0$ и $B_0C_0$ треугольника $A_0B_0C_0$ конгруэнтны, то в оригинале высота $B_0D_0$ является и медианой, а свойство отрезка быть медианой треугольника при параллельном проектировании сохраняется, поэтому изображением высоты $B_0D_0$ этого треугольника будет медиана $BD$ треугольника $ABC$. Таким образом, в рассматриваемом случае построение изображения высоты является позиционным.

$8^0$. Для обоснования метрической определенности полного изображения необходимо различать аффинные и метрические свойства фигур. Напомним некоторые из них.

*Аффинные* (сохраняющиеся при параллельном проектировании):

1) свойство фигуры быть точкой, прямой, плоскостью;

2) свойство фигур иметь пересечение;

3) деление отрезка в данном отношении;

4) свойство прямых, плоскостей, прямой и плоскости быть параллельными;

5) свойство фигуры быть треугольником, параллелограммом, трапецией;

6) отношение длин параллельных отрезков;

7) отношение площадей двух фигур и др.

*Метрические* (не сохраняющиеся при параллельном проектировании, но сохраняющиеся при преобразовании подобия):

1) свойство прямых, плоскостей, прямой и плоскости образовывать между собой угол определенной величины (в частности, быть перпендикулярными между собой);

2) отношение длин непараллельных отрезков;

3) отношение величин углов между прямыми (в частности, свойство прямой быть биссектрисой угла);

4) отношение величин двугранных углов;

5) отношение величин углов между прямыми и плоскостями и др.

Таким образом, основание правильной четырехугольной призмы, являющееся в оригинале квадратом, может быть изображено произвольным параллелограммом, так как отношение длин непараллельных сторон квадрата (равное единице) и перпендикулярность его смежных сторон являются метрическими свойствами, а параллельность противоположных сторон является свойством аффинным.

Вообще произвольный параллелограмм может быть изображением и параллелограмма, и прямоугольника, и ромба, и квадрата.

$9^0$. На изображении, построенном по правилам параллельного проектирования, естественно, не просматриваются метрические условия, указанные в тексте задачи. Эти условия обычно указывают отдельно, сопровождая ими чертеж. Дополняя чертеж метрическими условиями, мы, как говорят, расходуем параметры.

Так, если $\Phi_0$ — ромб $A_0B_0C_0D_0$ и параллелограмм $ABCD$ — его изображение, то, сопровождая чертеж словами «$ABCD$ — ромб», мы тем самым налагаем на изображение одно метрическое условие,

или, как говорят, расходуем один параметр. Действительно, в оригинале $|A_0B_0| = |B_0C_0|$, т. е. $|A_0B_0| : |B_0C_0| = 1$, но отношение длин непараллельных отрезков при параллельном проектировании не сохраняется и, следовательно, равенство $|A_0B_0| = |B_0C_0|$ выражает одно метрическое свойство оригинала. Аналогично, построив на чертеже параллелограмм и добавив при этом запись, что изображен квадрат, мы расходуем два параметра.

При изображении фигуры $\Phi_0$ некоторой фигурой $\Phi$, обладающей всеми аффинными свойствами оригинала, параметры не расходуются, так как аффинные свойства оригинала при параллельном проектировании сохраняются.

**10°.** *Если при выполнении проекционного чертежа на изображение плоской фигуры $\Phi_0$ израсходовано два параметра, то тем самым однозначно определено изображение каждой точки, лежащей в плоскости этой фигуры* (и, таким образом, дальнейшие метрические построения в плоскости фигуры $\Phi_0$, которые могут потребоваться для решения задачи, уже нельзя выполнять произвольно).

Аналогично, *если при выполнении проекционного чертежа на изображение пространственной фигуры $\Phi_0$ израсходовано пять параметров, то тем самым однозначно определено изображение каждой точки этой фигуры пространства* (и, следовательно, метрические построения на этом чертеже уже нельзя больше выполнять произвольно).

**11°.** В процессе решения стереометрической задачи приходится выполнять и различные дополнительные построения. Например, построение линейного угла данного двугранного угла, угла между данной прямой и данной плоскостью, биссектрисы некоторого угла и т. д. При выполнении вспомогательных построений следует учитывать не только параметрическое число изображения (число израсходованных параметров), но и область «допустимых расположений».

Так, изображение центра окружности, вписанной в треугольник $A_0B_0C_0$, не может быть выбрано без учета области изображения этого центра, которая, как известно из начертательной геометрии, представляет собой часть плоскости, находящуюся внутри треугольника $DEF$, стороны которого — средние линии треугольника $ABC$.

Пример 1. Одна из боковых граней треугольной пирамиды перпендикулярна плоскости основания. Эта боковая грань и основание пирамиды — правильные треугольники. Приняв произвольный четырехугольник $SBAC$ с его диагоналями за изображение пирамиды, найдем параметрическое число изображения.

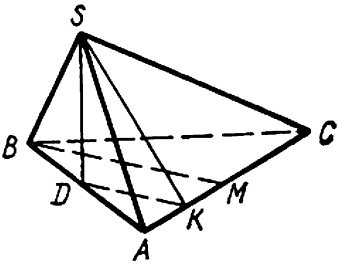

Рис. 3

Решение (рис. 3). Изображение правильного треугольника, лежащего в основании пирамиды, произвольным треугольником влечет за собой расход двух параметров. Изображение боковой грани, являющейся в оригинале правильным треугольником, с помощью произвольного тре-

угольника (одна сторона этого треугольника, естественно, является и стороной треугольника, лежащего в основании пирамиды) влечет за собой расход еще двух параметров. И наконец, считая, что построенные треугольники являются изображением треугольников, плоскости которых в оригинале перпендикулярны, мы накладываем на изображение еще одно метрическое условие, т. е. расходуем еще один параметр.

Итак, на изображение данной пирамиды израсходовано пять параметров, т. е. параметрическое число изображения $p$ равно 5, и, таким образом, никаких других метрических построений на этом изображении выполнять произвольно уже нельзя.

Пусть далее в этом примере сторона основания данной пирамиды равна $a$ и требуется найти площадь боковой поверхности пирамиды. Опуская для краткости слова «изображение пирамиды», «изображение треугольника» и т. д.[1], будем говорить, что дана пирамида $SABC$, у которой боковая грань $SAB$ и основание $ABC$ — правильные треугольники, причем $(SAB) \perp (ABC)$.

Ясно, что

$$S_{\triangle SAB} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Чтобы найти $S_{\triangle SAC}$, нужно найти высоту $SK$ треугольника $SAC$.

Для решения задачи требуется выполнить дополнительные построения, причем, так как изображение является метрически определенным (на него были израсходованы все пять параметров), высота $SK$ не может быть построена произвольно, т. е. нельзя, взяв на $AC$ произвольную точку $K$, утверждать: «пусть $(SK) \perp (AC)$».

Требуемое дополнительное построение можно выполнить следующим образом. Проведем медиану $BM$ треугольника $ABC$. Так как треугольник $ABC$ правильный, то медиана $BM$ является и высотой, т. е. $[BM] \perp [AC]$. Аналогично, проведя медиану $SD$ треугольника $SAB$, имеем: $[SD] \perp [AB]$. Нетрудно доказать, что $[SD] \perp (ABC)$. Проведем $(DK) \parallel (BM)$, тогда $(DK) \perp (AC)$. Соединим точку $S$ с точкой $K$. Так как $[SD] \perp (ABC)$, то $[DK]$ — проекция $[SK]$ на плоскость $ABC$ и, следовательно, $[SK] \perp [AC]$. Теперь осталось выполнить несложные подсчеты. Находим, что

$$|SD| = |BM| = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad |DK| = \frac{|BM|}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \quad \text{и} \quad |SK| = \frac{a\sqrt{15}}{4}.$$

Таким образом,

$$S_{\text{бок}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}(1 + \sqrt{5}).$$

---

[1] Для краткости в словосочетании «дано изображение фигуры» часто опускается слово «изображение» и пишется просто «дана фигура».

Пример 2. Из вершины $B$ равностороннего треугольника $ABC$ к плоскости $ABC$ восставлен перпендикуляр $BK$, причем $|BK| = |AB|$. Найдем тангенс острого угла между прямыми $AK$ и $BC$.

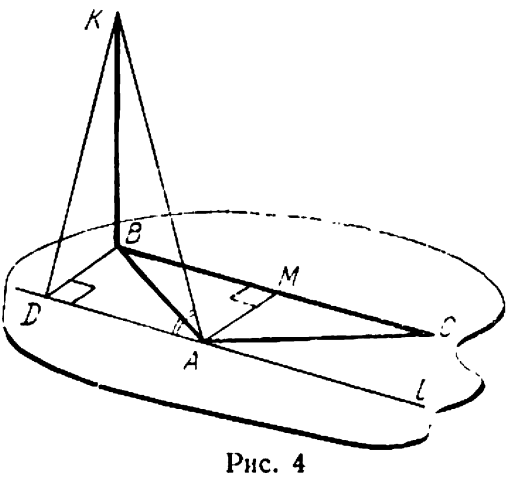

Рис. 4

Решение. Построим изображение данной фигуры и найдем его параметрическое число (рис. 4).

Считая произвольный треугольник $ABC$ изображением равностороннего треугольника, мы расходуем два параметра. Считая отрезок $BK$ изображением перпендикуляра к плоскости $ABC$, также расходуем два параметра, и, наконец, считая, что $|BK| : |AB| = 1 : 1$, расходуем еще один параметр; таким образом, $p = 5$. Итак, заданное изображение метрически определено и произвол в выполнении дальнейших метрических построений недопустим.

Выполним следующие дополнительные построения: в плоскости $ABC$ через точку $A$ проведем прямую $l \parallel (BC)$. Тогда угол между прямыми $AK$ и $BC$ равен углу между прямыми $AK$ и $l$. Чтобы найти угол между прямыми $AK$ и $l$, очевидно, целесообразно включить его в какой-нибудь прямоугольный треугольник. Прямую $DK \perp l$ можно построить как наклонную, проекция которой перпендикулярна прямой $l$. Для проведения этой проекции — прямой $BD$ — можно использовать тот факт, что треугольник $ABC$ равносторонний и, следовательно, его медиана $AM$ является и перпендикуляром к отрезку $BC$. Таким образом, построив медиану $AM$ треугольника $ABC$, а затем $(BD) \parallel (AM)$ и $[DK]$, мы получим прямоугольный треугольник $ADK$. Отношение $|DK| : |AD| = \operatorname{tg} \widehat{DAK}$ будет искомым.

Положив $|AB| = a$, найдем:

$$|BK| = a,\ |BD| = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ |DK| = \frac{a\sqrt{7}}{2},\ |AD| = |BM| = \frac{a}{2}$$ и,

таким образом, $\operatorname{tg} \widehat{DAK} = \sqrt{7}$, а следовательно, и тангенс угла между прямыми $AK$ и $BC$ равен $\sqrt{7}$.

Пример 3. Один катет равнобедренного прямоугольного треугольника лежит в плоскости $\alpha$, а другой — образует с ней угол, равный 45°. Построим изображение заданной фигуры, найдем его параметрическое число, а затем величину угла, который образует гипотенуза с плоскостью $\alpha$.

Решение. Считая произвольный треугольник $ABC$ (рис. 5) изображением прямоугольного треугольника, расходуем на изображение один параметр; считая, что $[AC]$ и $[BC]$ — изображения конгруэнтных отрезков, расходуем еще один параметр; считая далее, что $(BC)$ является изображением

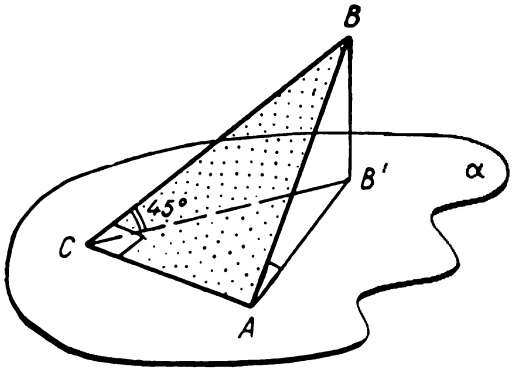


Рис. 5

прямой, образующей с плоскостью $\alpha$ угол, равный 45°, расходуем на изображение также один параметр; таким образом, $p = 3$. Поэтому для последующих метрических построений на этом изображении еще имеется некоторая свобода.

Определим теперь величину угла, который образует гипотенуза $AB$ с плоскостью $\alpha$. В плоскости $\alpha$ возьмем некоторую точку $B'$ и будем считать, что $(BB')$ — это изображение перпендикуляра к плоскости $\alpha$. Таким образом, мы израсходовали имевшиеся в запасе два свободных параметра. Изображение стало метрически определенным, и поэтому последующие метрические построения на полученном изображении произвольно выполнять нельзя. Впрочем, в данном случае этого и не потребуется. Построим $[B'C]$ и $[B'A]$.

Положив $|AC| = a$, находим: $|BC| = a$, $|BB'| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ и $|AB| = a\sqrt{2}$.

Таким образом, в прямоугольном треугольнике $ABB'$ имеем:

$$|BB'| : |AB| = 1 : 2, \text{ т. е. } \widehat{BAB'} = 30°.$$

Но $(BB') \perp \alpha$, т. е. $\widehat{BAB'}$ — это величина угла, который образует гипотенуза $AB$ с плоскостью $\alpha$.

Замечание. Выбирая точку $B'$, принадлежащую плоскости $\alpha$, произвольно мы, руководствуясь соображениями наглядности получаемого изображения, подобрали ее таким образом, чтобы прямая $BB'$ была параллельна краю страницы. Такое изображение вызывает представление о том, что в оригинале $(B_0B_0') \perp \alpha_0$. Заметим, что произвол в выборе точки $B'$ все-таки небезграничен. Так, прямая $BB'$ не должна оказаться параллельной прямой $AC$ (в этом случае прямая $BB'$ была бы изображением прямой $B_0B_0'$, параллельной плоскости $\alpha_0$).

Пример 4. В правильной четырехугольной пирамиде угол между двумя смежными боковыми гранями равен $2\alpha$. Найдем угол, образованный боковым ребром пирамиды с плоскостью ее основания.

Решение. Ясно, что фигура $SABCD$ (рис. 6) является полным изображением заданной пирамиды. Подсчитаем параметрическое число этого изображения. Изображение квадрата, лежащего в основании данной пирамиды, произвольным параллелограммом $ABCD$ влечет за собой расход двух параметров; изображение высо-

ты пирамиды отрезком $SO$, где $O$ — точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$, влечет за собой расход еще двух параметров, так как мы считаем, что отрезок $SO$ — это изображение перпендикуляра к плоскости $ABC$. Итак, $p = 4$, т. е. для выполнения дальнейших метрических построений, которые могут потребоваться в процессе решения задачи, в нашем распоряжении остается всего один свободный параметр. Для решения поставленной задачи построим на изображении линейный угол данного двугранного угла. Это можно сделать, например, следующим образом: на ребре $SC$ возьмем произвольную точку $M$ и будем считать отрезок $OM$ изображением перпендикуляра, опущенного из точки $O_0$ на ребро $S_0C_0$. Соединяя теперь точку $M$ с точками $B$ и $D$, получим угол $BMD$, являющийся, как нетрудно показать, изображением линейного угла (двугранного угла $S_0C_0$ в оригинале).

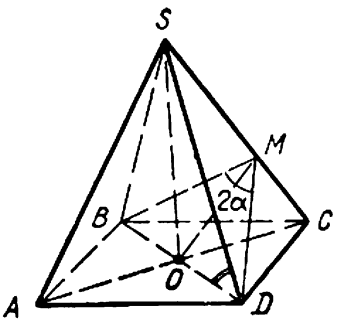

Рис. 6

В чертеж теперь можно внести обозначение $2\alpha$. Так как отрезок $SO$ — изображение высоты пирамиды, то отрезок $OD$ является изображением проекции бокового ребра на плоскость основания пирамиды, а поэтому угол $SDO$ — это изображение угла, величина которого является искомой. Нетрудно подсчитать, что величина этого угла равняется $\arcsin(\operatorname{ctg}\alpha)$, где $0° < \alpha < 45°$.

**12°.** При решении некоторых стереометрических задач более удобными оказываются не полные метрически определенные изображения, а упрощенные. Так при решении задач на комбинации многогранников и круглых тел можно, выбрав удобное для изображения сечение комбинации тел, показать на этом изображении с точностью до подобия фигуру, полученную в таком сечении.

Так, вместо изображения правильной четырехугольной пирамиды и вписанного в нее шара можно дать изображение фигуры, полученной в сечении этой комбинации тел плоскостью, проходящей через высоту пирамиды параллельно стороне основания. Это сечение является равнобедренным треугольником, боковые стороны которого — это апофемы пирамиды. Так как центр шара лежит на высоте пирамиды, то сечение шара этой плоскостью будет окружностью большого круга. Так как шар касается граней пирамиды, то его центр лежит в биссекторной плоскости плоскостей противоположных граней. Но биссекторная плоскость пересекает две другие боковые грани по апофемам.

Таким образом, окружность, полученная в сечении, касается боковых сторон равнобедренного треугольника. Аналогично эта окружность касается и основания треугольника. Итак, в сечении мы получим равнобедренный треугольник с вписанной в него окружностью.

**13°.** Иногда при построении чертежа к решению задачи целесо-

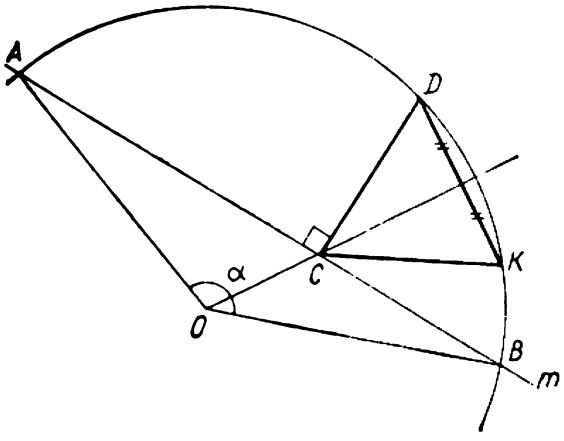


Рис. 7

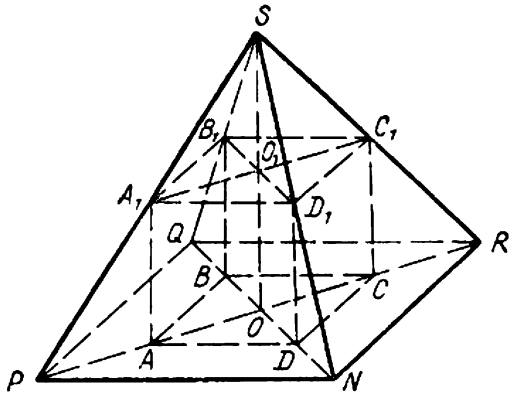


Рис. 8

образно выполнить нужное построение «с конца». Рассмотрим сначала пример из планиметрии.

Пример 5. Дана окружность радиуса $R$. Из ее центра проведены два радиуса $OA$ и $OB$, образующие между собой угол, равный $\alpha$. В меньший сегмент круга, отсекаемого хордой $AB$, вписан равносторонний треугольник, одна из сторон которого перпендикулярна к хорде $AB$. Построим изображение заданной фигуры.

Решение. Если начать с построения окружности $(O, |OA|)$, после чего провести в ней хорду $AB$, то при таком порядке построения мы столкнемся с необходимостью вписать правильный треугольник в сегмент. Гораздо легче выполнить построения «с конца». Построим равносторонний треугольник $CDK$ (рис. 7). На серединном перпендикуляре к отрезку $DK$ выберем точку $O$ (вне треугольника $CDK$, по ту же сторону от отрезка $DK$, что и точка $C$). Опишем окружность $(O, |OD|)$ и через точку $C$ проведем $m \perp (DC)$. Точки пересечения прямой $m$ с окружностью $(O, |OD|)$ обозначим $A$ и $B$. Изображение фигуры построено.

Рассмотрим пример из стереометрии.

Пример 6. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины лежат в основании пирамиды, а четыре другие — на боковых ребрах. Построим изображение заданной фигуры.

Решение. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — изображение куба (рис. 8). Найдем центры оснований куба: $O = (AC) \cap (BD)$, $O_1 = (A_1C_1) \cap (B_1D_1)$. Проведем $(OO_1)$ и возьмем точку $S \in (OO_1)$ (вне куба). Проведем далее $(SA_1)$, $(SB_1)$, $(SC_1)$, $(SD_1)$ и найдем точки $P$, $Q$, $R$, $N$: $P = (SA_1) \cap (AC)$, $Q = (SB_1) \cap (BD)$, $R = (SC_1) \cap (AC)$, $N = (SD_1) \cap (BD)$. Эти точки — вершины основания пирамиды. Тогда $SPQRN$ — изображение заданной пирамиды.

**14°.** В заключение настоящего параграфа отметим следующее. Если в задаче речь идет о фигуре, построение которой требует

расхода не более пяти параметров, то в процессе решения построение изображения не описывается (однако построить это изображение, естественно, необходимо). В таких случаях убеждаются лишь в полноте построенного изображения и подсчитывают его параметрическое число. Подсчет параметрического числа необходим, так как в процессе решения могут потребоваться дополнительные построения метрического характера, которые при наличии свободных параметров можно выполнять произвольно (с учетом конкретных ограничений в выполнении этих построений).

Если в задаче речь идет о фигуре, построение которой требует расхода более пяти параметров, то та часть построения изображения, осуществление которой требует расхода пяти параметров, не описывается; дальнейшие же необходимые построения обязательно описываются в первой части решения и выполняются в соответствии с законами параллельного проектирования.

Если в задаче оговаривается, что некоторые элементы данной фигуры требуется построить (например, сечение в данной пирамиде), то построение изображения этих элементов заданной фигуры описывается обязательно. Разумеется, по ходу построения ведется подсчет параметрического числа получаемого изображения (такие примеры будут рассмотрены в § 12 главы III). В некоторых случаях описание этого построения выполняется по полной схеме решения задачи на построение (анализ, построение, доказательство, исследование), в некоторых же случаях ограничиваются описанием отдельных этапов этой схемы, например описанием построения и доказательства или построения и исследования и т. д.

## § 2. Краткая запись условия задачи

После того как выполнено построение изображения данной фигуры (без тех дополнительных построений, необходимость которых выясняется лишь в процессе решения), на чертеже проставляются нужные обозначения, выполняется краткая запись условия задачи. Краткая запись сопровождается словами «дано», «найти» («доказать»).

Элементы данной фигуры, изображение которых может появиться на чертеже лишь после дополнительных построений, естественно, в этой краткой записи не отмечаются.

Приведем краткую запись условия к примерам из § 1.

К примеру 3 (с. 13).

Дано: $\triangle ABC$, $\widehat{BCA}=90°$, $|AC|=|BC|$, $[AC]\subset\alpha$, $(\widehat{[BC]},\alpha)=45°$.

Найти: $(\widehat{[AB]},\alpha)$.

К примеру 4 (с. 14).

Дано: $SABCD$ — правильная пирамида, $S$ — вершина, $(\widehat{(SBC)},\widehat{(SDC)})=2\alpha$.

Найти: $(\widehat{(SD)},\widehat{(ABC)})$.

К примеру 5 (с. 16).

Дано: $(O, |OA|)$, $[AB]$ — хорда, $(\widehat{(AO), (BO)}) = \alpha$, $\triangle DCK$ — правильный, $B \in (O, |OA|)$, $D \in (O, |OA|)$, $K \in (O, |OA|)$, $C \in [AB]$, $[CD] \perp [AB]$.

Найти: $|DK|$.

К примеру 6 (с. 16).

Дано: $SPQRN$ — правильная пирамида, $S$ — вершина, $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб, $\{A, B, C, D\} \subset (PQR)$, $A_1 \in [SP]$, $B_1 \in [SQ]$, $C_1 \in [SR]$, $D_1 \in [SN]$.

Найти: отношение объема куба к объему пирамиды.

Если текст задачи содержит все необходимые обозначения, то краткую запись условия можно опустить.

В противном случае краткая запись условия обязательна: с ее помощью содержание задачи увязывается с введенными на чертеже обозначениями, благодаря ей удается использовать символику.

## § 3. Решение задачи

Под решением задачи понимается цепь логических рассуждений, математических преобразований и вычислений, последним звеном в которой является ответ на вопрос задачи.

В этой цепи рассуждений не должно быть ничего лишнего и ни одно из необходимых рассуждений не должно быть опущено.

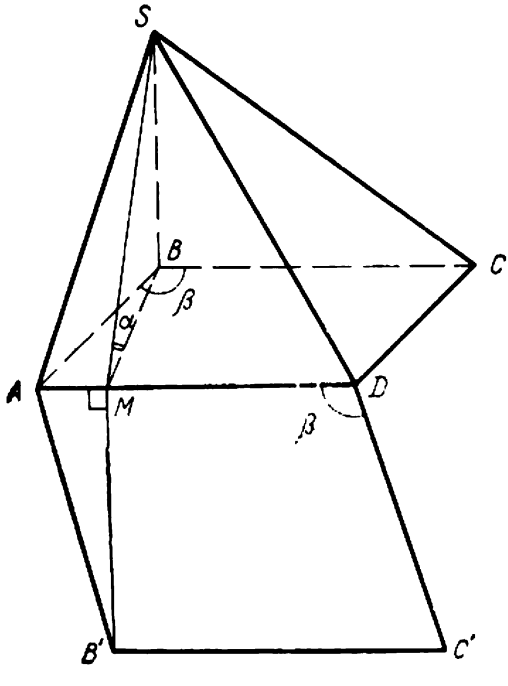

Рис. 9

Ссылаясь при решении задач на определения, аксиомы и теоремы, их формулировки приводить не обязательно.

Пример 7. Основанием пирамиды служит ромб со стороной, равной $a$; две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания и образуют между собой тупой угол $\beta$. Угол между плоскостью одной из боковых граней и плоскостью основания равен $\alpha$. Найдем боковую поверхность пирамиды.

Построение изображения. Пусть фигура $SABCD$ – изображение заданной пирамиды (рис. 9). Это изображение полное. Найдем параметрическое число. Параллелограмм $ABCD$ мы считаем изображением ромба (со стороной $a$) —

один параметр, треугольники $SBC$ и $SAB$ — изображениями граней, перпендикулярных плоскости основания, — два параметра. Угол между плоскостями $SAB$ и $SBC$ — изображение двугранного угла, равного $\beta$, — один параметр, и, наконец, двугранный угол при ребре $AD$ — изображение двугранного угла, равного $\alpha$, — один параметр. Таким образом, $p = 5$ (т. е. изображение является полным и метрически определенным, и, следовательно, никакие новые метрические построения на этом изображении не могут быть выполнены произвольно).

Д а н о: $SABCD$ — пирамида, $S$ — вершина, $ABCD$ — ромб, $|AB| = a$, $(SAB) \perp (ABC)$, $(SBC) \perp (ABC)$, $\widehat{((SAB), (SBC))} = \beta$, $\widehat{((SAD), (ABC))} = \alpha$.

Н а й т и: $S$ — площадь боковой поверхности пирамиды.

Р е ш е н и е.

1. $S_{\text{бок}} = S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SBC} + S_{\triangle SAD} + S_{\triangle SCD}$.

2. $(SAB) \perp (ABC)$ и $(SBC) \perp (ABC) \Rightarrow (SB) \perp (ABC)$.

3. $(SB) \perp (ABC)$ и $(AB) \subset (ABC)$, $(BC) \subset (ABC) \Rightarrow (SB) \perp (AB)$ и $(SB) \perp (BC)$. Тогда треугольники $SAB$ и $SBC$ прямоугольные, имеют общий катет $SB$ и, кроме того, $|AB| = |BC|$, т. е. $\triangle SAB \cong \triangle SBC$, и поэтому $S_{\triangle SAB} = S_{\triangle SBC}$.

Из конгруэнтности треугольников $SAB$ и $SBC$, у которых $\widehat{ABS} = \widehat{CBS} = 90°$, следует, что $|SA| = |SC|$. Треугольники $SAD$ и $SCD$ имеют по две соответственно конгруэнтные стороны и общую сторону $SD$, поэтому $\triangle SAD \cong \triangle SCD$, и тогда $S_{\triangle SAD} = S_{\triangle SCD}$.

Итак,

$$S_{\text{бок}} = 2(S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SAD}).$$

4. $(AB) \perp (SB)$ и $(BC) \perp (SB)$, поэтому угол $ABC$ — линейный угол двугранного угла $SB$; следовательно, $\widehat{ABC} = \beta$.

5. Построим ромб $AB'C'D$ со стороной, длина которой равна $|AD|$, и углом между прямыми $AD$ и $DC'$, равным $\beta$. Тогда ромб $AB'C'D$ имеет форму оригинала ($A_0B_0C_0D_0$ — ромб), и поэтому в его плоскости можно выполнить построения с точностью до подобия. Опустим из точки $B'$ на прямую $AD$ перпендикуляр $B'M$. В родственном преобразовании с осью $AD$ и парой соответственных точек $B'$ и $B$ отрезок $BM$ соответствует отрезку $B'M$. (Таким образом, отрезок $BM$ является изображением перпендикуляра, опущенного в оригинале из точки $B_0$ на сторону $A_0D_0$ ромба.) Соединим теперь точку $M$ с точкой $S$. Тогда, так как $(SB) \perp (ABC)$, $(BM)$ — проекция $(SM)$ на плоскость $ABC$. Следовательно, $(SM) \perp (AD)$.

Так как $(BM) \perp (AD)$ и $(SM) \perp (AD)$, то угол $SMB$ — линейный угол двугранного угла $AD$, т. е. $\widehat{SMB} = \alpha$.

6. $S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |SB|$, где $|AB| = a$.

Найдем $|SB|$. Из прямоугольного треугольника $ABM$ имеем:

$$|BM| = |AB| \sin \widehat{BAM} = a \sin (180^\circ - \beta) = a \sin \beta.$$

Из прямоугольного треугольника $SBM$ находим:

$$|SB| = |BM| \operatorname{tg} \alpha = a \sin \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Таким образом,

$$S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2} a^2 \sin \beta \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

7. $S_{\triangle SAD} = \frac{1}{2} |AD| \cdot |SM|$. Из прямоугольного треугольника $SBM$ получим:

$$|SM| = \frac{|BM|}{\cos \alpha} = \frac{a \sin \beta}{\cos \alpha}.$$

Таким образом,

$$S_{\triangle SAD} = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin \beta}{\cos \alpha}.$$

8. $$S_{\text{бок}} = 2\left(\frac{1}{2} a^2 \sin \beta \operatorname{tg} \alpha + \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin \beta}{\cos \alpha}\right) = \frac{2a^2 \sin \beta \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos \alpha}.$$

Замечание. При решении задач с обобщенным условием сохраняется известный произвол в метрических построениях на изображении. Так, в рассмотренном примере точку $M$ можно было выбрать достаточно произвольно (учитывая, что $M \in [AD]$). В этом случае изображение стало бы метрически переопределенным, но оставалось бы верным. Однако в этом примере точка $M$ строилась довольно легко и поэтому от переопределения изображения можно было отказаться, что мы и сделали. Ниже (см. примеры 76 и 82), где переопределение изображения было предпочтительней, чем точное построение, мы рассмотрели изображение, на которое израсходовано 6 параметров.

## § 4. О некоторых методах решения геометрических задач

В данном практикуме мы будем придерживаться следующей классификации геометрических задач.

К типу $F$ отнесем все те задачи, в которых геометрическая фигура определена условием с точностью до перемещения.

К типу $M$ отнесем все те задачи, в которых геометрическая фигура определена с точностью до подобия.

Замечание. Ясно, что если в условии задачи среди данных величин имеются либо длина отрезка, либо длина дуги, либо площадь фигуры, либо объем тела, т. е. величины, сохраняющиеся при перемещениях, то эти задачи являются задачами типа $F$.

При традиционном решении задач типа $F$ используют следующие способы:

1) чисто геометрический,
2) алгебраический,
3) комбинированный (на некоторых этапах решение ведется чисто геометрически, на других — алгебраически).

При решении задач алгебраическим способом, естественно, используются геометрические свойства фигур. Нахождение искомых величин и доказательство требуемых утверждений могут быть выполнены либо прямым счетом, либо с помощью составления уравнения (или системы уравнений).

Сущность метода, который называют прямым счетом, состоит в том, что заданные и искомые величины связывают цепочкой промежуточных величин, каждая из которых последовательно определяется (подсчитывается или выражается) через предыдущие.

Определяя промежуточные величины, для сокращения дальнейших записей можно вводить краткие обозначения этих величин. Так, если для решения задачи необходимо найти величину угла $BAC$, то можно положить для краткости $\widehat{BAC} = \alpha$. Аналогично можно положить для краткости длину некоторого отрезка, например $BH$, равной $h$ и т. д. Величины $\alpha$, $h$ и т. д. — это промежуточные неизвестные.

Решение прямым счетом является синтетическим решением.

При решении задач с помощью уравнений заданные и искомые величины связывают уравнением или системой уравнений. Иногда к числу искомых бывает целесообразно присоединить так называемые вспомогательные неизвестные, введение которых упрощает нахождение искомых величин. Иногда в процессе решения уравнения (или системы уравнений) вспомогательные неизвестные удается исключить. В таких случаях вспомогательное неизвестное выступает в роли так называемого опорного элемента. Выражая его двумя способами, составляют уравнение, в которое входят заданные и искомые величины. Такой способ составления уравнения иногда называют методом опорного элемента, и, в частности, если опорным элементом является площадь, то этот способ называют методом площадей (см. пример 9, с. 23).

Решение с помощью составления уравнения или системы уравнений является аналитическим решением.

После решения уравнения (или системы уравнений) необходимо отобрать из числа полученных решений только те, которые удовлетворяют условию задачи.

Рассмотрим примеры.

Пример 8. В параллелограмме, стороны которого равны $a$ и $b$, а угол между этими сторонами равен $\alpha$, проведены биссектрисы четырех углов. Найдем площадь четырехугольника, ограниченного биссектрисами.

Дано (рис. 10): $ABCD$ — параллелограмм, $l_A$, $l_B$, $l_C$, $l_D$ — биссектрисы углов $A$, $B$, $C$, $D$; $l_A \cap l_B = P$, $l_A \cap l_D = M$, $l_B \cap l_C = K$, $l_C \cap l_D = E$, $|AB| = a$, $|BC| = b$, $\widehat{BAD} = \alpha$.

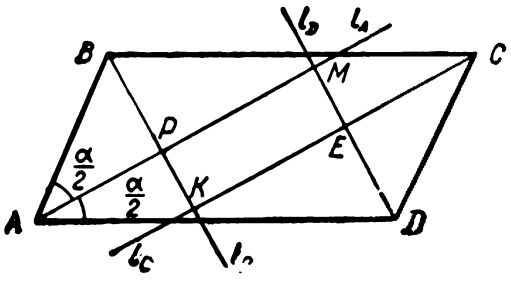


Рис. 10

Найти: $S$ — площадь четырехугольника $PMEK$.

Решение. Выясним прежде всего вид четырехугольника $PMEK$. Так как $(AD) \parallel (BC)$, $\widehat{MAD} = \frac{\alpha}{2}$ и $\widehat{BCK} = \frac{\alpha}{2}$, то $(AM) \parallel (CK)$. Аналогично $(BK) \parallel (DM)$, т. е. $PMEK$ — параллелограмм.

Далее, так как $\widehat{BAM} = \frac{\alpha}{2}$ и $\widehat{ABK} = \frac{180° - \alpha}{2}$, то в $\triangle ABP$ $\widehat{APB} = 180° - \frac{\alpha}{2} - \frac{180° - \alpha}{2} = 90°$, а следовательно, и $\widehat{MPK} = 90°$. Тогда $PMEK$ — прямоугольник. Поэтому

$$S = |PM| \cdot |PK|.$$

Теперь используем прямой счет.

Из прямоугольных треугольников $ABP$ и $AMD$ имеем соответственно:

$$|AP| = a\cos\frac{\alpha}{2}, \quad |AM| = b\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Тогда

$$|PM| = ||AM| - |AP|| = |a - b|\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Аналогично из прямоугольных треугольников $ABP$ и $BKC$:

$$|BP| = a\sin\frac{\alpha}{2} \text{ и } |BK| = b\sin\frac{\alpha}{2}, \text{ т. е.}$$

$$|PK| = ||BP| - |BK|| = |a - b|\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Таким образом,

$$S = |a - b|\cos\frac{\alpha}{2} \cdot |a - b|\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{|a - b|^2 \sin\alpha}{2}.$$

Но $|a - b|^2 = (a - b)^2$, следовательно,

$$S = \frac{(a - b)^2 \sin\alpha}{2}.$$

Пример 9. Угол между сторонами треугольника, длины которых $a$ и $b$, равен $\varphi$. Найдем длину отрезка биссектрисы этого угла, лежащего внутри треугольника.

Дано (рис. 11): $\triangle ABC$, $|AC| = b$, $|BC| = a$, $\widehat{ACB} = \varphi$, $\widehat{ACD} = \widehat{BCD}$.

Найти: $|CD|$.

Р е ш е н и е. Положим $|CD| = x$. Так как $S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} bx \sin\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2} ax \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} x(a+b) \cdot \sin\frac{\varphi}{2}$ и $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin\varphi$, то получаем следующее уравнение:

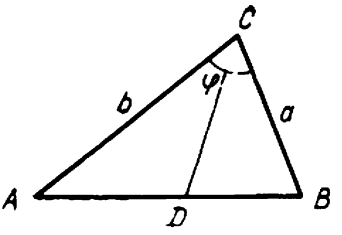

Рис. 11

$$\frac{1}{2} x(a+b) \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} ab \sin\varphi,$$

или

$$x(a+b) \sin\frac{\varphi}{2} = 2ab \sin\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{2}.$$

Поскольку $\sin\frac{\varphi}{2} \neq 0$, то $x = \frac{2ab}{a+b} \cos\frac{\varphi}{2}$. По смыслу задачи $x > 0$. Найденное решение уравнения этому условию удовлетворяет.

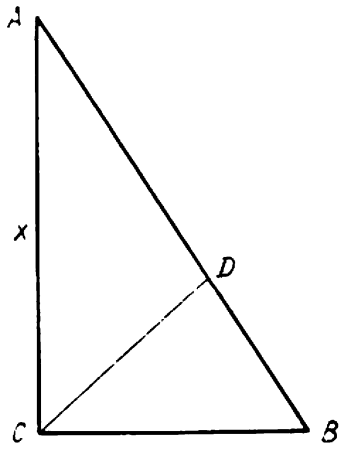

Рис. 12

П р и м е р 10. Точка, взятая на гипотенузе прямоугольного треугольника и одинаково удаленная от его катетов, делит гипотенузу на отрезки, длины которых равны 40 и 30 см. Найдем катеты треугольника.

Д а н о (рис. 12): $\triangle ABC$, $\widehat{ACB} = 90°$, $D \in [AB]$, $|AD| = 40$ см, $|BD| = 30$ см, точка $D$ одинаково удалена от $[AC]$ и $[BC]$.

Н а й т и: $|AC|$ и $|BC|$.

Р е ш е н и е. Так как точка $D$ одинаково удалена от катетов $AC$ и $BC$, то $[CD)$ — биссектриса угла $ACB$. Тогда $\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{40}{30} = \frac{4}{3}$. Так как $|AB| = 70$ см, то положив $|AC| = x$, получим: $|BC| = \sqrt{70^2 - x^2}$ и тогда запишем уравнение:

$$\frac{x}{\sqrt{70^2 - x^2}} = \frac{4}{3},$$

откуда $x_1 = 56$, $x_2 = -56$.

По смыслу задачи $0 < x < 70$. Этой системе удовлетворяет только $x_1$. Таким образом, $|AC| = 56$ см, а тогда $|BC| = 42$ см.

Рассмотрим теперь пример, где вводится вспомогательное неизвестное, причем в процессе решения оно исключается.

П р и м е р 11. В равнобедренном треугольнике $ABC$ ($|AB| = |BC|$) проведена биссектриса $AD$. Площади треугольников $ABD$ и $ADC$ равны соответственно $S_1$ и $S_2$. Найдем длину основания $AC$.

Р е ш е н и е. Пусть $\triangle ABC$ — данный треугольник (рис. 13).

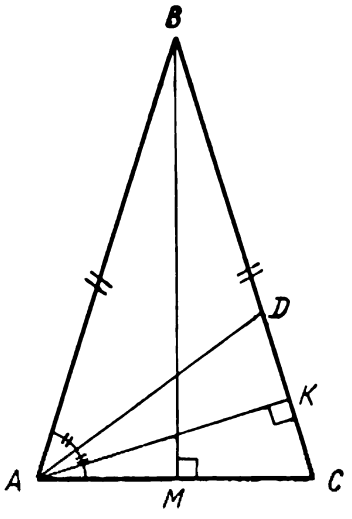

Рис. 13

Положим $|AC| = x$ и введем вспомогательное неизвестное: $|AB| = y$. Пусть $[BM]$ — высота треугольника $ABC$. Так как

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|BM| \cdot |AC| = \frac{1}{2}\sqrt{y^2 - \frac{x^2}{4}} \cdot x$$

и

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CAD},$$

то получаем уравнение

$$\frac{\sqrt{4y^2 - x^2}}{4} \cdot x = S_1 + S_2.$$

Так как $[AD)$ — биссектриса угла $A$, то $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|}$. Выразим отношение $\frac{|BD|}{|DC|}$ через $S_1$ и $S_2$:

$$\frac{1}{2}|BD| \cdot |AK| = S_1 \text{ и } \frac{1}{2}|DC| \cdot |AK| = S_2,$$

где $[AK]$ — высота треугольника $ABC$,

$$\text{т. е. } \frac{|BD| \cdot |AK|}{|DC| \cdot |AK|} = \frac{S_1}{S_2}, \text{ откуда } \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{S_1}{S_2},$$

а тогда и $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{S_1}{S_2}$. А так как $|AB| = y$ и $|AC| = x$, то $\frac{y}{x} = \frac{S_1}{S_2}$, — это и есть второе уравнение, связывающее неизвестное $x$, вспомогательное неизвестное $y$ с данными величинами $S_1$ и $S_2$.

Таким образом, мы получили следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x\sqrt{4y^2 - x^2} = 4(S_1 + S_2), \\ \frac{y}{x} = \frac{S_1}{S_2}. \end{cases}$$

Из второго уравнения запишем: $y = \frac{S_1 x}{S_2}$. Подставляя это значение $y$ в первое уравнение, получим уравнение, содержащее только искомое неизвестное $x$:

$$x\sqrt{\frac{4S_1^2 x^2}{S_2^2} - x^2} = 4(S_1 + S_2).$$

Решая его, находим:

$$x = \frac{2\sqrt{S_2(S_1 + S_2)}}{\sqrt[4]{4S_1^2 - S_2^2}}.$$

По смыслу задачи $x$ — длина отрезка, т. е. $x > 0$. Выясним, удовлетворяет ли этому неравенству найденное решение. Ответ на

этот вопрос будет положительным, если мы докажем, что $4S_1^2 - S_2^2 > 0$.

Так как $4S_1^2 - S_2^2 = (2S_1 - S_2)(2S_1 + S_2)$, то достаточно показать, что $2S_1 - S_2 > 0$, или что $\frac{S_1}{S_2} > \frac{1}{2}$.

Так как $\frac{S_1}{S_2} = \frac{y}{x}$, то достаточно доказать, что $\frac{y}{x} > \frac{1}{2}$, или что $y > \frac{x}{2}$. Но это неравенство справедливо. Итак,

$$|AC| = \frac{2\sqrt{S_2(S_1+S_2)}}{\sqrt[4]{4S_1^2 - S_2^2}}.$$

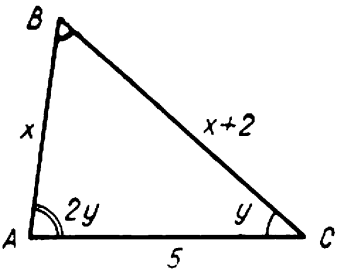

Рис. 14

Рассмотрим теперь пример, в котором вспомогательным неизвестным является величина угла.

Пример 12. В треугольнике $ABC$ $|AC| = 5$ см, $|BC| - |AB| = 2$ см и $\widehat{BAC} : \widehat{ACB} = 2$. Найдем длины сторон $AB$ и $BC$.

Решение (рис. 14).

Положим $|AB| = x$, тогда $|BC| = x + 2$. Введем вспомогательное неизвестное: $\widehat{ACB} = y$. Тогда $\widehat{BAC} = 2y$.

По теореме синусов имеем:

$$\frac{x}{\sin y} = \frac{x+2}{\sin 2y} = \frac{5}{\sin(180^\circ - 3y)},$$

или

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\sin y} = \dfrac{x+2}{\sin 2y}, & (12.1) \\ \dfrac{x}{\sin y} = \dfrac{5}{\sin 3y}. & (12.2) \end{cases}$$

Эту систему решить легче, если исключить из нее $x$.

Из уравнения (12.1) $x = \frac{2}{2\cos y - 1}$, а из уравнения (12.2) $x = \frac{5\sin y}{\sin 3y}$. Таким образом,

$$\frac{2}{2\cos y - 1} = \frac{5\sin y}{\sin 3y}, \quad (12.3)$$

откуда

$$2\sin 3y = 10\cos y \sin y - 5\sin y,$$

или

$$4\sin\frac{3y}{2}\cos\frac{3y}{2} = 10\sin\frac{y}{2}\cos\frac{3y}{2}. \quad (12.4)$$

Очевидно, $\cos\frac{3y}{2} \neq 0$. В противном случае $\frac{3y}{2} = 90°$, т. е. $3y = 180°$, и, следовательно, $\widehat{ABC} = 0°$, что противоречит условию. Разделим обе части уравнения (12.4) на $g(y) = \cos\frac{3y}{2}$.

Обратите внимание на то, что, умножая обе части уравнения (12.3) на $\varphi(y) = (2\cos y - 1)\sin 3y$, мы не стали доказывать, что значения $y$, при которых $\varphi(y) = 0$, не удовлетворяют условию задачи. Дело в том, что при указанном преобразовании уравнения (12.3) могут лишь появиться посторонние решения, которые отсеются при последующей проверке по смыслу задачи. При делении же обеих частей уравнения (12.4) на $g(y) = \cos\frac{3y}{2}$ возникает опасность потери решений. Доказав, что $g(y) \neq 0$, мы показали, что потери решений при этом преобразовании не происходит.

Итак, получаем уравнение

$$5\sin\frac{y}{2} = 2\sin\frac{3y}{2},$$

или

$$\sin\frac{y}{2} - 8\sin^3\frac{y}{2} = 0.$$

А так как $\sin\frac{y}{2} \neq 0$ (в противном случае $y = 360°$, что противоречит условию), то $1 - 8\sin^2\frac{y}{2} = 0$; следовательно $\sin^2\frac{y}{2} = \frac{1}{8}$. Так как $x = \frac{2}{2\cos y - 1}$, то для нахождения $x$ достаточно найти значение $\cos y$. Но $1 - \cos y = 2\sin^2\frac{y}{2}$, поэтому $\cos y = \frac{3}{4}$, и тогда $x = 4$.

Так как значение $x = 4$ удовлетворяет условию задачи (убедитесь в этом самостоятельно), то получаем:

$$|AB| = 4 \text{ см}, \quad |BC| = 6 \text{ см}.$$

Удачный выбор вспомогательного неизвестного играет важную роль при решении задачи способом составления уравнений. В следующем примере мы рассмотрим два способа выбора вспомогательного неизвестного.

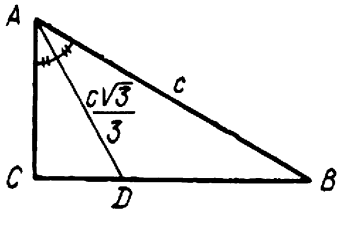

Рис. 15

Пример 13. В прямоугольном треугольнике биссектриса одного из острых углов равна $\frac{c\sqrt{3}}{3}$. Найдем катеты, если гипотенуза равна $c$.

Дано (рис. 15): $\triangle ABC$, $\widehat{ACB} = 90°$, $|AB| = c$, $\widehat{CAD} = \widehat{BAD}$, $|AD| = \frac{c\sqrt{3}}{3}$.

Найти: $|AC|$ и $|BC|$.

Решение. Положим $|AC| = x$ и $|BC| = y$. Тогда

$$x^2 + y^2 = c^2. \tag{13.1}$$

Введем вспомогательное неизвестное: $|CD| = z$. Тогда легко составляется следующая система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2, \\ x^2 + z^2 = \dfrac{c^2}{3}, \\ \dfrac{y - z}{z} = \dfrac{c}{x}. \end{cases}$$

Однако попытки решить эту систему наталкиваются на значительные затруднения. Попробуем выбрать другое вспомогательное неизвестное, положив, например, $\overset{\frown}{CAD} = \overset{\frown}{BAD} = t$. Получаемая система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2, & (13.1) \\ x = \dfrac{c\sqrt{3}}{3}\cos t, & (13.2) \\ y = c \cdot \sin 2t & (13.3) \end{cases}$$

решается довольно просто. Путем подстановки значений $x$ и $y$ в уравнение (13.1) последовательно получаем:

$$\frac{c^2}{3}\cos^2 t + c^2 \sin^2 2t = c^2,$$

$$\cos^2 t + 3\sin^2 2t = 3,$$

$$\frac{1 + \cos 2t}{2} + 3(1 - \cos^2 2t) = 3,$$

$$6\cos^2 2t - \cos 2t - 1 = 0.$$

Таким образом,

$$(\cos 2t)_1 = -\frac{1}{3};\ (\cos 2t)_2 = \frac{1}{2}.$$

По смыслу задачи $0° < 2t < 90°$, т. е. $0 < \cos 2t < 1$. Из найденных значений $\cos 2t$ только значение $\cos 2t = \frac{1}{2}$ удовлетворяет этой системе неравенств. Из уравнения $\cos 2t = \frac{1}{2}$ получим $t = 30°$, из уравнений (13.2) и (13.3) находим $x$ и $y$.

Итак, $|AC| = \frac{c}{2}$, $|BC| = \frac{c\sqrt{3}}{2}$.

Рассмотрим теперь пример, при решении которого используются метод прямого счета и метод составления уравнения.

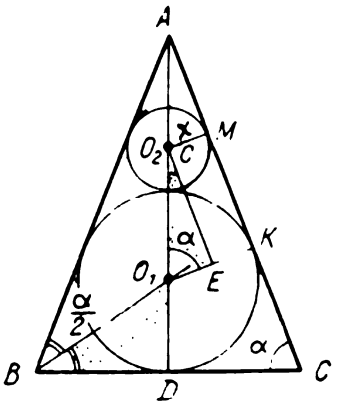

Рис. 16

Пример 14. В равнобедренный треугольник, основание которого равно $a$, а угол при основании равен $\alpha$, вписана окружность. Кроме того, построена вторая окружность, касающаяся боковых сторон треугольника и первой окружности. Найдем радиус второй окружности.

Дано (рис. 16): $\triangle ABC$, $|AB|=|AC|$, $|BC|=a$, $\widehat{ACB}=\alpha$, $\omega_1$ — первая вписанная окружность, точка $O_1$ — ее центр, $\omega_2$ — вторая вписанная окружность, точка $O_2$ — ее центр.

Найти: радиус окружности $\omega_2$.

Решение. Так как точка $O_1$ — центр окружности, вписанной в треугольник $ABC$, то $[BO_1)$ — биссектриса угла $ABC$, т. е. $\widehat{O_1BD}=\frac{\alpha}{2}$ и точка $O_1$ принадлежит также $[AD)$ — биссектрисе угла $BAC$. Так как точка $O_2$ — центр окружности, вписанной в угол $BAC$, то точка $O_2$ принадлежит $[AD)$.

Полагая для краткости $|O_1D|=R$, из прямоугольного треугольника $O_1BD$ находим: $R=\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ (это этап прямого счета, после которого переходим к составлению уравнения).

Опустим из точек $O_1$ и $O_2$ перпендикуляры $O_1K$ и $O_2M$ на сторону $AC$. Таким образом мы получим прямоугольную трапецию $O_1KMO_2$, в которой $\widehat{AO_1K}=\alpha$, $|O_1K|=R$. Введем неизвестное: $|O_2M|=x$, тогда $|O_1O_2|=R+x$. Опустив в этой трапеции из точки $O_2$ перпендикуляр $O_2E$ на отрезок $O_1K$, получим: $|O_1E|=R-x$, и тогда из прямоугольного треугольника $O_1O_2E$ получим уравнение

$$\frac{R-x}{R+x}=\cos\alpha,$$

откуда

$$x=R\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

После подстановки в последнее уравнение значения $R$ и выполнения необходимых преобразований получим:

$$x=\frac{a}{2}\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}.$$

Ясно, что по смыслу задачи $0<x<R$, т. е. $0<\frac{a}{2}\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}<R$,

или

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2} > 0, \\ \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2} < \frac{R}{\frac{a}{2}}. \end{cases}$$

А так как $\frac{R}{\frac{a}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, то получаем такую систему неравенств:

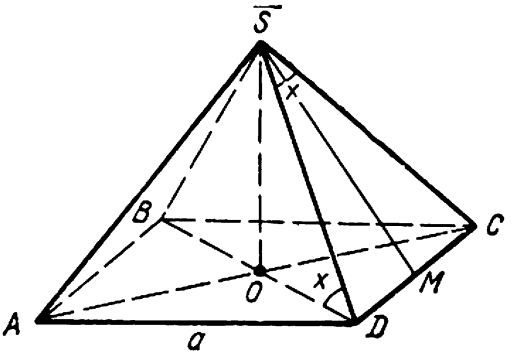


Рис. 17

$$\begin{cases} \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2} > 0, \\ \operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2} < \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} > 0, \\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - 1\right)\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + 1\right) < 0. \end{cases}$$

Но эта система неравенств справедлива, так как по смыслу задачи $0° < \alpha < 90°$, а тогда $0° < \frac{\alpha}{2} < 45°$, т. е. $0 < \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} < 1$.

Таким образом, длина искомого радиуса равна $\frac{a}{2}\operatorname{tg}^3\frac{\alpha}{2}$.

Пример 15. Найдем объем правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна $a$, а плоский угол при вершине конгруэнтен углу наклона бокового ребра к плоскости основания.

Построение изображения данной фигуры (рис. 17). Пусть фигура $SABCD$ — изображение данной пирамиды. Нетрудно подсчитать (сделайте это самостоятельно), что $p = 5$.

Дано: $SABCD$ — правильная пирамида, $S$ — вершина, $|CD| = a$, $\widehat{CSD} = (\widehat{[SD]}, \widehat{(ABC)})$.

Найти: $V$ — объем пирамиды.

Решение. Так как $[SO] \perp (ABC)$, то $[OD]$ — проекция отрезка $SD$ на плоскость $ABC$, поэтому угол $SDO$ — угол наклона ребра $SD$ к плоскости $ABC$. Введем вспомогательное неизвестное: $\widehat{SDO} = x$, тогда и $\widehat{CSD} = x$.

Выразим дважды длину бокового ребра $SD$ пирамиды, т. е. используем $|SD|$ в качестве опорного элемента. Для этого проведем $[SM]$ — апофему боковой грани $SDC$. Тогда из прямоугольных треугольников $SDM$ и $SOD$, где $|OD| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, имеем соответственно:

$$|SD| = \frac{a}{2\sin\frac{x}{2}} \text{ и } |SD| = \frac{a\sqrt{2}}{2\cos x}.$$

Таким образом, получаем уравнение

$$\frac{a}{2\sin\frac{x}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2\cos x}, \text{ или } \frac{1}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\cos x}. \qquad (15.1)$$

Так как $\cos x = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2}$, то уравнение (15.1) приводится к следующему виду:

$$2\sin^2\frac{x}{2} + \sqrt{2}\sin\frac{x}{2} - 1 = 0,$$

откуда

$$\left(\sin\frac{x}{2}\right)_{1,2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{10}}{4}.$$

По смыслу задачи $0° < x < 90°$, т. е. $0° < \frac{x}{2} < 45°$, а тогда $0 < \sin\frac{x}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Этой системе неравенств удовлетворяет только значение $\sin\frac{x}{2} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{10}}{4}$ (убедитесь в этом самостоятельно). Теперь можно найти объем пирамиды.

Имеем: $V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot |SO|$.

Но $S_{ABCD} = a^2$, и из прямоугольного треугольника $SOD$ получим:

$$|SO| = |SD| \cdot \sin x,$$

т. е.

$$|SO| = a\cos\frac{x}{2} = a\sqrt{1 - \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{a}{2}\sqrt{\sqrt{5}+1}.$$

Итак, $V = \frac{a^3}{6}\sqrt{\sqrt{5}+1}$.

Замечание. Обратите внимание, что при решении примера 13 (с. 26) мы нашли значение вспомогательного неизвестного (величину угла $t$, а при решении примеров 12 (с. 25) и 15 (с. 29) для нахождения требуемой величины оказалось достаточным знать значение тригонометрической функции угла, величина которого была принята в качестве вспомогательного неизвестного.

При решении задач алгебраическим методом использование тех или иных геометрических зависимостей сказывается и на способе решения задачи. Покажем это на следующем примере.

Пример 16. В окружность вписан равнобедренный треугольник, основание которого равно $a$, а угол при основании равен $\alpha$. Кроме того, построена вторая окружность, касающаяся первой окружности и основания треугольника, причем точка касания является серединой основания. Найдем радиус второй окружности.

Дано (рис. 18): $\triangle ABC$, $|AB| = |AC|$, $|BC| = a$, $\widehat{ACB} = \alpha$, $\omega_1$ ($O_1$, $|O_1A|$) — окружность, описанная около треугольника $ABC$, $\omega_2(O_2, |O_2D|)$ — окружность, вписанная в сегмент, отсекаемый хордой $BC$, $|BD| = |DC|$.

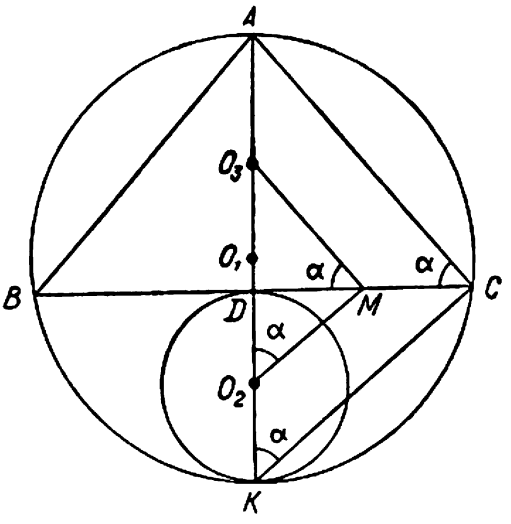

Рис. 18

Найти: $|O_2D|$.

Решение. *1-й способ.* Пусть $|O_2D| = x$. Положим для краткости $|O_1A| = R$. Пусть окружность $\omega_2$ касается окружности $\omega_1$ в точке $K$. Тогда $[AK]$ — диаметр окружности $\omega_1$. Соединим точку $K$ с точкой $C$. В треугольнике $ACK$ $\widehat{ACK} = 90°$, а $\widehat{AKC} = \alpha$. Тогда из прямоугольного треугольника $ACD$ имеем:

$$|AC| = \frac{a}{2\cos\alpha},$$

а из прямоугольного треугольника $ACK$ получим:

$$2R = \frac{|AC|}{\sin\alpha}$$

и, таким образом, $R = \dfrac{a}{2\sin 2\alpha}$.

Далее, так как $|AD| \cdot |DK| = |CD| \cdot |BD|$, то имеем уравнение

$$(2R - 2x)\,2x = \frac{a^2}{4}, \text{ или } x^2 - Rx + \frac{a^2}{16} = 0,$$

т. е.

$$x^2 - \frac{a}{2\sin 2\alpha}x + \frac{a^2}{16} = 0,$$

откуда $x_1 = \dfrac{a}{4}\operatorname{tg}\alpha$; $x_2 = \dfrac{a}{4}\operatorname{ctg}\alpha$.

*2-й способ.* Как и при первом способе решения, построим сначала прямоугольный треугольник $ACK$. А далее поступим следующим образом: через точку $O_2$ проведем прямую, параллельную прямой $CK$, точку ее пересечения с прямой $BC$ обозначим $M$. Через точку $M$ проведем прямую, параллельную прямой $AC$. Точку пересечения проведенной прямой с прямой $AK$ обозначим $O_3$. Ясно, что при таком построении $|DM| = |MC| = \dfrac{a}{4}$, $\widehat{O_3MO_2} = 90°$,

$\widehat{O_3MD} = \alpha$, $\widehat{MO_2D} = \alpha$. Тогда из прямоугольных треугольников $O_3DM$ и $O_2DM$ находим:

$$|O_3D| = \frac{a}{4}\operatorname{tg}\alpha \text{ и } |O_2D| = \frac{a}{4}\operatorname{ctg}\alpha.$$

Таким образом, существуют две окружности, удовлетворяющие поставленным в задаче условиям, причем если $\alpha = \frac{\pi}{4}$, то эти окружности конгруэнтны.

Замечание. При решении первым способом, используя геометрические соображения, мы пришли к уравнению относительно $x$ и $a$. При решении вторым способом геометрические соображения были использованы для нахождения $|O_3D|$ и $|O_2D|$ прямым счетом.

Значительная часть задач типа $M$ решается введением вспомогательного параметра (линейного), благодаря чему оказывается возможным применение алгебраического способа решения, о котором мы говорили выше. Рассмотрим примеры.

Пример 17. В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла проведены высота и медиана. Отношение их длин равно 40 : 41. Найдем отношение длин катетов.

Дано (рис. 19): $\triangle ABC$, $\widehat{ACB} = 90°$, $[CK]$ — высота, $[CM]$ — медиана, $|CK| : |CM| = 40 : 41$.

Найти: $|AC| : |BC|$.

Решение. Введем вспомогательный параметр, положив $|CK| = h$. Тогда $|CM| = \frac{41h}{40}$. Найдем искомое отношение прямым счетом.

Из прямоугольного треугольника $CMK$ имеем: $|MK| = \frac{9h}{40}$, и так как $[CM]$ — медиана прямоугольного треугольника $ABC$, то $|AM| = |BM| = |CM| = \frac{41h}{40}$.

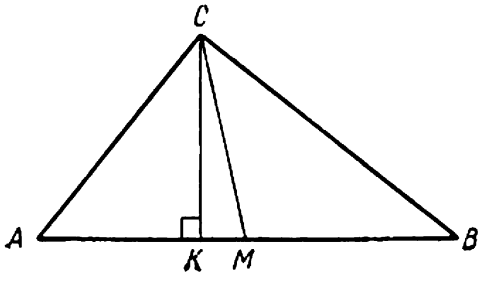


Рис. 19

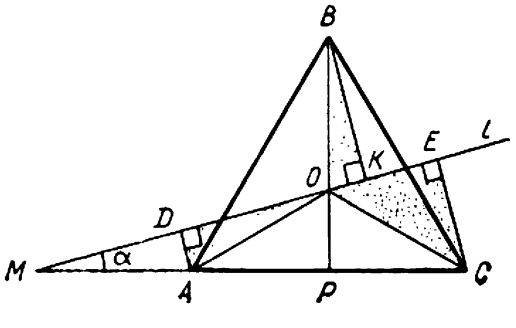


Рис. 20

Далее,

$$|AK| = \frac{41h}{40} - \frac{9h}{40} = \frac{32h}{40} \text{ и } |BK| = \frac{41h}{40} + \frac{9h}{40} = \frac{50h}{40}.$$

Так как

$$|AC|^2 = |AB| \cdot |AK| \text{ и } |BC|^2 = |AB| \cdot |BK|,$$

то $\frac{|AC|^2}{|BC|^2} = \frac{|AB| \cdot |AK|}{|AB| \cdot |BK|} = \frac{|AK|}{|BK|} = \frac{16}{25}$.

Таким образом, $|AC| : |BC| = 4 : 5$.

Замечание. Вспомогательный параметр можно ввести и следующим образом: $|CK| = 40t$. Тогда так как $|CK| : |CM| = 40 : 41$, то $|CM| = 41t$ и, далее, $|MK| = 9t$, $|AB| = 41t$, $|AK| = 32t$, $|BK| = 50t$.

Пример 18. Через центроид правильного треугольника в плоскости этого треугольника проведена прямая. Докажем, что сумма квадратов расстояний от вершин треугольника до этой прямой не зависит от выбора прямой.

Дано (рис. 20): $\triangle ABC$, $|AB| = |BC| = |AC|$. Точка $O$ — центроид $\triangle ABC$, $l \supset O$, $l \cap (AC) = M$, $[AD] \perp l$, $[BK] \perp l$, $[CE] \perp l$.

Доказать: $Q = |AD|^2 + |BK|^2 + |CE|^2$ не зависит от $\widehat{OMC}$.

Доказательство. Рассмотрим случай, когда прямая $l$ не содержит медиану $\triangle ABC$. Построим $[AO]$, $[BO]$ и $[CO]$. Так как $\triangle ABC$ правильный, то эти отрезки конгруэнтны. Введем вспомогательный параметр: $|AO| = a$. Тогда и $|BO| = |CO| = a$. В качестве вспомогательного параметра, естественно, можно было принять длину стороны $\triangle ABC$. Однако выбор вспомогательного параметра, сделанный нами, несколько сократит выкладки. Положим еще для краткости: $\widehat{OMC} = \alpha$.

Из треугольников $OAM$ и $AOP$ имеем соответственно:

$$\widehat{DOA} = 180° - (150° + \alpha) = 30° - \alpha, \quad \widehat{MOP} = 90° - \alpha,$$

тогда и $\widehat{BOK} = 90° - \alpha$, $\widehat{COE} = \widehat{COB} - \widehat{BOK} = 120° - (90° - \alpha) = 30° + \alpha$.

Подсчитаем теперь (прямым счетом) сумму квадратов длин требуемых отрезков.

Из прямоугольного треугольника $AOD$

$$|AD| = a \sin (30° - \alpha),$$

из прямоугольного треугольника $BOK$

$$|BK| = a \sin (90° - \alpha) = a \cos \alpha,$$

из прямоугольного треугольника $COE$

$$|CE| = a \sin (30° + \alpha).$$

Таким образом,

$$Q = a^2(\sin^2(30^\circ - \alpha) + \cos^2\alpha + \sin^2(30^\circ + \alpha)) =$$
$$= a^2\left(\frac{1-\cos(60^\circ - 2\alpha)}{2} + \cos^2\alpha + \frac{1-\cos(60^\circ + 2\alpha)}{2}\right) =$$
$$= a^2\left(1 + \cos^2\alpha + \frac{\cos(60^\circ - 2\alpha) + \cos(60^\circ + 2\alpha)}{2}\right) =$$
$$= a^2(1 - \cos 60^\circ \cos 2\alpha + \cos^2\alpha) =$$
$$= a^2\left(1 - \frac{1}{2}(2\cos^2\alpha - 1) + \cos^2\alpha\right) = \frac{3}{2}a^2.$$

Нетрудно убедиться, что в случае, когда прямая $l$ содержит медиану $\triangle ABC$, $Q = \frac{3}{2}a^2$ (докажите это самостоятельно).

Итак, мы доказали, что значение $Q$ от величины угла $OMC$ не зависит.

Пример 19. Через гипотенузу прямоугольного треугольника проведена плоскость, наклоненная к катетам треугольника под углами $\alpha$ и $\beta$. Найдем угол, образованный этой плоскостью с плоскостью треугольника.

Построим изображение данной фигуры (рис. 21). Это изображение является полным и для него $p = 4$ (убедитесь в этом самостоятельно).

Дано: $\triangle ABC$, $[AB]$ — гипотенуза, $P$ — плоскость, $[AB] \subset P$, $(\widehat{(AC), P}) = \alpha$, $(\widehat{(BC), P}) = \beta$.

Найти: $(\widehat{(ABC), P})$.

Решение. Построим $[CC_1] \perp P$, $[AC_1]$ и $[BC_1]$. Так как $[CC_1] \perp P$, то $[AC_1]$ — проекция $[AC]$ на $P$, $[BC_1]$ — проекция $[BC]$ на $P$.

Тогда $\widehat{CAC_1} = \alpha$ и $\widehat{CBC_1} = \beta$. Чтобы показать на изображении линейный угол искомого двугранного угла, требуется показать еще изображение перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу. (В нашем распоряжении оставался еще один свободный параметр.) Возьмем точку $K \in [AB]$ и будем считать, что отрезок $CK$ является изображением перпендикуляра к прямой $AB$. Теперь на изображение израсходованы все пять параметров, т. е. метрические построения на этом изображении выполнять произвольно больше нельзя. Соединим точку $K$ с точкой $C_1$. Тогда, так как $[CK] \perp (AB)$ и

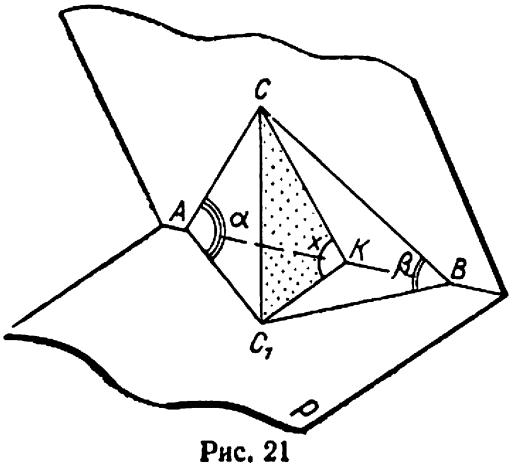

Рис. 21

$[C_1K]$ — проекция отрезка $CK$ на плоскость $P$, то и $[C_1K] \perp (AB)$ и, таким образом, $\widehat{CKC_1}$ — величина линейного угла между плоскостями $ABC$ и $P$.

Положим $\widehat{CKC_1} = x$ и введем вспомогательный параметр $|CC_1| = a$. Теперь прямым счетом найдем $x$.

Из прямоугольных треугольников $ACC_1$ и $BCC_1$ имеем соответственно:

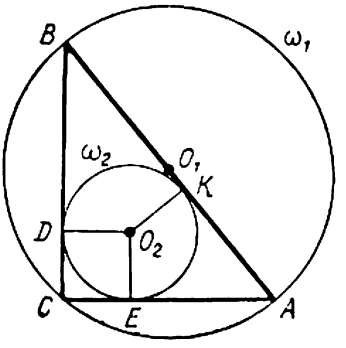

Рис. 22

$$|AC| = \frac{a}{\sin\alpha}, \quad |BC| = \frac{a}{\sin\beta}.$$

Тогда из прямоугольного треугольника $ABC$ получим:

$$|AB| = \sqrt{|AC|^2 + |BC|^2} = \frac{a}{\sin\alpha\sin\beta}\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta},$$

следовательно,

$$|CK| = \frac{|AC| \cdot |BC|}{|AB|} = \frac{a}{\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}}$$

Но из прямоугольного треугольника $CKC_1$ имеем:

$$\sin x = \frac{|CC_1|}{|CK|} = \sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta},$$

откуда

$$x = \arcsin\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}.$$

Таким образом, $(\widehat{(ABC)}, P) = \arcsin\sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}$.

Часто при решении задач типа $M$, кроме вспомогательного параметра, вводится еще и вспомогательное неизвестное, а затем составляется уравнение, связывающее вспомогательный параметр и вспомогательное неизвестное. Приведем примеры.

Пример 20. Радиус описанной около прямоугольного треугольника окружности относится к радиусу окружности, вписанной в этот треугольник, как 5 : 2. Найдем острые углы треугольника.

Дано (рис. 22): $\triangle ABC$, $\widehat{ACB} = 90°$, $\omega_1$ — описанная окружность, $\omega_2$ — вписанная окружность, отношение радиуса окружности $\omega_1$ к радиусу окружности $\omega_2$ равно 5 : 2.

Найти: $\widehat{ABC}$ и $\widehat{BAC}$.

Решение. Так как $\triangle ABC$ прямоугольный, то точка $O_1$ — центр описанной около него окружности $\omega_1$ — является серединой гипотенузы $AB$. Так как окружность $\omega_2$ вписана в треугольник $ABC$, то ее центр — точка $O_2$ — одинаково удалена от сторон

треугольника $ABC$, т. е., опустив из точки $O_2$ перпендикуляры $O_2D$, $O_2E$ и $O_2K$ на стороны треугольника $ABC$, получим: $|O_2D| = |O_2E| = |O_2K|$. Введем вспомогательный параметр, положив $|AB| = 2R$, тогда $|O_2E| = \frac{2}{5}R$. Так как по построению $[O_2E] \parallel [DC]$ и $[O_2D] \parallel [CE]$, то четырехугольник $O_2DCE$ — параллелограмм и даже, как нетрудно показать, квадрат, т. е. $|DC| = |CE| = |O_2D|$. Введем вспомогательное неизвестное, положив $|AE| = x$. Тогда и $|AK| = x$, так как $[AE]$ и $[AK]$ — отрезки касательных, проведенных из точки $A$ к окружности $\omega_2$. Составим теперь уравнение. В прямоугольном треугольнике $ABC$ имеем:

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2.$$

Переходя к вспомогательному параметру и вспомогательному неизвестному, получим уравнение:

$$\left(x + \frac{2}{5}R\right)^2 + \left((2R - x) + \frac{2}{5}R\right)^2 = 4R^2,$$

т. е. $25x^2 - 50Rx + 24R^2 = 0$,

откуда $x_1 = \frac{4}{5}R$; $x_2 = \frac{6}{5}R$.

Таким образом, $|AE| = \frac{6}{5}R$ или $|AE| = \frac{4}{5}R$.

Так как $|CE| = |O_2E| = \frac{2}{5}$, то получаем в первом случае: $|AC| = \frac{6}{5}R$, а во втором — $|AC| = \frac{8}{5}R$.

В первом случае $|BC| = \sqrt{4R^2 - \left(\frac{6}{5}R\right)^2} = \frac{8}{5}R$, а во втором — $|BC| = \sqrt{R^2 - \left(\frac{8}{5}R\right)^2} = \frac{6}{5}R$.

Таким образом, треугольники, полученные в первом и во втором случаях, конгруэнтны. Найдем острые углы одного из них, например полученного в первом случае. Получаем:

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{3}{5}, \quad \sin \widehat{BAC} = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{4}{5}.$$

Итак, острые углы треугольника равны: $\arcsin \frac{3}{5}$ и $\arcsin \frac{4}{5}$.

Замечание. Если принять в качестве вспомогательного неизвестного не длину отрезка $AE$, а длину катета $AC$, то полученное уравнение будет иррациональным.

Пример 21. Докажем, что если высота и медиана, проведенные из одной вершины неравнобедренного треугольника, лежат

внутри треугольника и образуют с боковыми сторонами треугольника конгруэнтные углы, то этот треугольник прямоугольный.

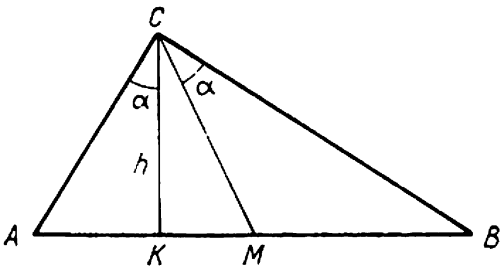

Рис. 23

Дано (рис. 23): $\triangle ABC$, $[CK]$ — высота, $[CM]$ — медиана, $\widehat{ACK} = \widehat{BCM}$.

Доказать: $\triangle ABC$ — прямоугольный.

Доказательство. Докажем, что $\widehat{ACB} = 90°$. Ясно, что предположение о том, что $\widehat{CAB} = 90°$, несостоятельно, так как тогда отрезок $CK$ совпадает со стороной $AC$ и поэтому должен совпадать со стороной $BC$, чтобы образовывались нужные конгруэнтные углы. Однако медиана не может совпадать со стороной треугольника.

Примем $\widehat{ACB} = x$. Это искомое неизвестное. Введем вспомогательное неизвестное: $\widehat{ACK} = \widehat{BCM} = \alpha$ — и вспомогательный параметр: $|CK| = h$. Тогда $\widehat{BCK} = x - \alpha$, $\widehat{MCK} = x - 2\alpha$. Так как $[CM]$ —медиана, то $|AM| = |BM|$, или $|AM| = |BK| - |MK|$. С другой стороны, $|AM| = |AK| + |MK|$ и, таким образом,

$$|BK| - |MK| = |AK| + |MK|,$$

или

$$2|MK| = |BK| - |AK|. \qquad (21.1)$$

Но из прямоугольных треугольников $ACK$, $MCK$ и $BCK$ имеем соответственно:

$$|AK| = h \operatorname{tg} \alpha, \quad |MK| = h \operatorname{tg} (x - 2\alpha), \quad |BK| = h \operatorname{tg} (x - \alpha).$$

Таким образом, равенство (21.1) примет вид:

$$2h \operatorname{tg} (x - 2\alpha) = h \operatorname{tg} (x - \alpha) - h \operatorname{tg} \alpha,$$

или

$$2 \operatorname{tg} (x - 2\alpha) = \operatorname{tg} (x - \alpha) - \operatorname{tg} \alpha.$$

Мы получили уравнение, связывающее искомое неизвестное $x$ и вспомогательное неизвестное $\alpha$. Решая это уравнение, получаем:

$$\frac{2 \sin (x - 2\alpha)}{\cos (x - 2\alpha)} = \frac{\sin (x - 2\alpha)}{\cos (x - \alpha) \cos \alpha}.$$

Так как $\triangle ABC$ неравнобедренный, то $x \neq 2\alpha$, т. е. $\sin (x - 2\alpha) \neq 0$, и тогда $2 \cos (x - \alpha) \cos (x - 2\alpha)$, или $\cos x + \cos (x - 2\alpha) = \cos (x - 2\alpha)$, т. е. $\cos x = 0$, и поэтому $x = 90°$. Таким образом, $\triangle ABC$ прямоугольный.

Замечание. В рассмотренном примере вспомогательным неизвестным является величина угла, а не длина отрезка, как в примере 20.

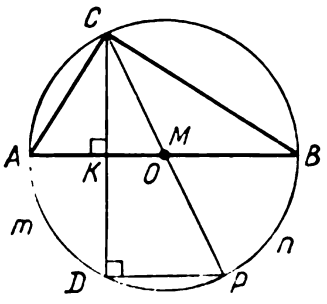


Рис. 24

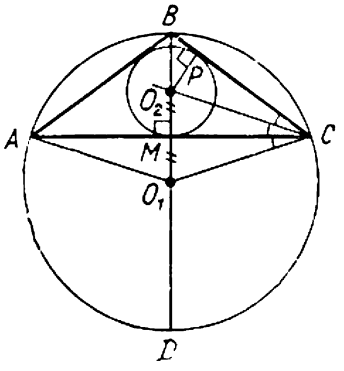


Рис. 25

Мы рассмотрели примеры, в которых при решении задач типа $M$ применялся алгебраический метод, что влекло за собой необходимость введения вспомогательного параметра. При решении задач этого типа иногда удается изыскать и чисто геометрический путь решения. В таких случаях введение вспомогательного параметра, естественно, не требуется.

Так, вернемся к рассмотренному выше примеру 21, который мы решили алгебраическим методом, введя вспомогательный параметр (длину высоты). Решим этот пример чисто геометрически.

Опишем около треугольника $ABC$ окружность $\omega\,(O, |OA|)$ (рис. 24). Если $O \in [AB]$, то $[AB]$ — диаметр окружности $\omega$, и тогда $\widehat{ACB} = 90°$.

Предположим, что $O \notin [AB]$. Пусть $(CK) \cap \omega = D$, $(CM) \cap \omega = P$.

Построим отрезок $DP$. (Точки $D$ и $P$ — различные, так как треугольник $ABC$ неравнобедренный, следовательно, его высота $CK$ не совпадает с медианой $CM$.) Так как $\widehat{ACD} = \widehat{BCP}$, то $\smile AmD \cong \smile BnP$, т. е. $(DP) \parallel (AB)$, и поэтому $\widehat{CDP} = \widehat{CKB} = 90°$. Таким образом, $[CP]$ — диаметр окружности $\omega$, причем $M \in [CP]$ и $|AM| = |BM|$.

Таким образом, диаметр $CP$ делит хорду $AB$ пополам, и поэтому $[CP] \perp [AB]$.

Но и $[CD] \perp [AB]$. Итак, из точки $C$ на прямую $AB$ опущены два перпендикуляра: $CK$ и $CM$, т. е. предположение, что $O \notin [AB]$, приводит к противоречию. Таким образом, мы доказали, что $\widehat{ACB} = 90°$, т. е. треугольник $ABC$ прямоугольный.

Рассмотрим еще один пример, являющийся задачей типа $M$, однако решаемый также без введения вспомогательного параметра.

Пример 22. Центры вписанной и описанной окружности симметричны относительно одной из сторон треугольника. Найдем углы треугольника.

Дано (рис. 25): $\triangle ABC$, $\omega_1\,(O_1, |O_1C|)$ — описанная окружность, $\omega_2\,(O_2, |O_2M|)$ — вписанная окружность, $(O_1O_2) \perp [AC]$, $|O_1M| = |O_2M|$, $M \in [AC]$.

Найти: $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$.

Решение. Докажем прежде всего, что треугольник $ABC$ равнобедренный. Действительно, так как точка $O_1$ — центр ок-

ружности $\omega_1$, то $|O_1A| = |O_1C|$. Так как $(O_1O_2) \perp (AC)$ и $|O_1M| = |O_2M|$, то $\widehat{O_2CM} = \widehat{O_1CM}$. Аналогично, $\widehat{O_2AM} = \widehat{O_1AM}$. Но точка $O_2$ — центр окружности $\omega_2$, т. е. $\widehat{BCO_2} = \widehat{O_2CM}$, и поэтому $\widehat{BCM} = 2\widehat{O_1CM}$. Точно так же $\widehat{BAM} = 2\widehat{O_1AM}$ и, таким образом, $\widehat{BCM} = \widehat{BAM}$.

Итак, каждая из точек $O_1$, $O_2$ и $B$ равноудалена от точек $A$ и $C$ и поэтому, если продолжить отрезок $O_1B$ до пересечения с окружностью $\omega_1$ в некоторой точке $D$, получим отрезок $BD$ — диаметр этой окружности, и тогда $\widehat{BCD} = 90°$. Кроме того, как нетрудно заметить, $\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = \widehat{BCA}$, $\widehat{O_1CD} = \widehat{BDC}$ и, как выяснено выше, $\widehat{O_1CM} = \frac{1}{2}\widehat{BCM}$.

Таким образом,

$$\widehat{BCM} + \widehat{O_1CM} + \widehat{O_1CD} = 90°,$$

или $\frac{5}{2}\widehat{BCM} = 90°$, откуда $\widehat{BCM} = 36°$.

Итак, мы получили: $\widehat{BCA} = \widehat{BAC} = 36°$ и, следовательно, $\widehat{ABC} = 108°$. (Заметим, что чертеж к этой задаче до выяснения величин углов треугольника $ABC$ можно выполнить лишь приблизительно.)

Мы решили этот пример чисто геометрически. Для сравнения наметим кратко алгебраическое решение.

Положим $\widehat{O_1CM} = x$. Тогда, как показано, $\widehat{BCO_2} = \widehat{O_2CM} = x$.

Введем вспомогательный параметр, положив $|O_1M| = a$, и заметим, что $|O_1C| = |O_1B|$. Из прямоугольных треугольников $O_1CM$ и $BO_2P$ имеем соответственно:

$|O_1C| = \frac{a}{\sin x}$, а $|O_1B| = |O_1M| + |MB|$, где $|O_1M| = a$,

$|MB| = |MO_2| + |O_2B| = a + |O_2B|$;

$|BO_2| = \frac{a}{\cos 2\alpha}$.

Таким образом,

$$|O_1B| = 2a + \frac{a}{\cos 2x},$$

и тогда равенство $|O_1C| = |O_1B|$ примет вид:

$$\frac{a}{\sin x} = 2a + \frac{a}{\cos 2x},$$

или

$$\cos 2x = 2 \sin x \cdot \cos 2x + \sin x.$$

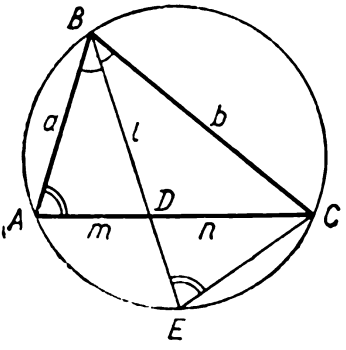

Рис. 26

Решая это уравнение (оно сводится к кубическому уравнению:

$4\sin^3 x - 2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$),

находим:

$$\sin x = \frac{-1+\sqrt{5}}{4},$$

откуда $x = \arcsin \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$. Есть еще два значения $\sin x$, посторонние по смыслу задачи. Обращаясь к таблицам, получим: $x = 18°$. Таким образом, $\widehat{BCA} = \widehat{BAC} = 36°$ и $\widehat{ABC} = 108°$.

Мы привели чисто геометрический и алгебраический способы решения в примерах 16 (с. 30) и 22. Выбор того или иного способа решения в известной мере — дело вкуса того, кто решает задачу.

Не высказываясь в пользу ни одного из этих способов решения, рассмотрим еще примеры.

Пример 23. Докажем, что квадрат длины биссектрисы, проведенной через вершину произвольного треугольника, равен произведению длин боковых сторон без произведения длин отрезков основания.

Дано (рис. 26): $\triangle ABC$, $[BD]$ — биссектриса.

Доказать: $|BD|^2 = |AB| \cdot |BC| - |AD| \cdot |CD|$.

Доказательство. *1-й способ (алгебраический).* Положим для краткости $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|AD| = m$, $|CD| = n$, $|BD| = l$, $\widehat{ADB} = \alpha$. Ясно, что тогда $\widehat{CDB} = 180° - \alpha$. Подсчитаем $a^2$ и $b^2$. По теореме косинусов для треугольников $ABD$ и $CBD$ имеем:

$$a^2 = l^2 + m^2 - 2lm\cos\alpha, \qquad (23.1)$$

$$b^2 = l^2 + n^2 + 2ln\cos\alpha. \qquad (23.2)$$

Умножим обе части равенства (23.1) на $n$, а обе части равенства (23.2) на $m$ и сложим полученные равенства (таким образом мы освободимся от параметра $\alpha$ и получим зависимость между требуемыми величинами):

$$a^2n + b^2m = l^2n + l^2m + m^2n + mn^2. \qquad (23.3)$$

Осталось привести равенство (23.3) к виду: $l^2 = ab - mn$. Получаем:

$$l^2(m+n) + mn(m+n) = a^2n + b^2m,$$

откуда после деления обеих частей на $m+n$, имеем:

$$l^2 + mn = \frac{a^2n + b^2m}{m+n},$$

Заметим еще, что так как $[BD)$ — биссектриса угла $ABC$, то $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$, т. е. $m = \frac{an}{b}$.
Но тогда

$$\frac{a^2n + b^2m}{m+n} = \frac{a^2n + b^2\frac{an}{b}}{\frac{an}{b} + b} = \frac{an(a+b)}{\frac{n(a+b)}{b}} = ab.$$

Итак, $l^2 + mn = ab$, или $l^2 = ab - mn$, что и требовалось доказать.

*2-й способ (геометрический).* Опишем вокруг треугольника $ABC$ окружность и продолжим биссектрису $BD$ до пересечения с этой окружностью в точке $E$ (см. рис. 26). Тогда так как $mn = l \cdot |DE|$, а из подобия треугольников $BCE$ и $ABD$ следует, что $\frac{l + |DE|}{a} = \frac{b}{l}$, т. е. $l^2 + l \cdot |DE| = ab$, то, заменяя в последнем равенстве произведение $l \cdot |DE|$ на $mn$, получим:
$l^2 + mn = ab$, откуда $l^2 = ab - mn$.

Решение задач типа *M* введением вспомогательного параметра может оказаться эффективным и в тех случаях, когда для решения применяются векторы.

Пример 24. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $|AB| = 2|BC|$, $|AA_1| = |BC|$. Найдем угол между прямыми $BD_1$ и $A_1C_1$.

Построение изображения (рис. 27). Пусть $ABCD$ — изображение прямоугольника (один параметр), $[AA_1]$ — изображение отрезка, в оригинале перпендикулярного к основанию параллелепипеда (два параметра), $|AB| : |BC| : |AA_1| = 2 : 1 : 1$ (два параметра).

Таким образом, изображение $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — полное и метрически определенное.

Решение. $\cos(\overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{A_1C_1}) = \frac{\overrightarrow{BD_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1}}{|\overrightarrow{BD_1}| \cdot |\overrightarrow{A_1C_1}|}$.

Из треугольника $BDD_1$ выразим $\overrightarrow{BD_1}$:

$$\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD_1}.$$

Но из треугольника $ABD$ имеем:

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}.$$

Таким образом,

$$\overrightarrow{BD_1} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1}.$$

Из треугольника $A_1B_1C_1$ имеем:

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C_1}.$$

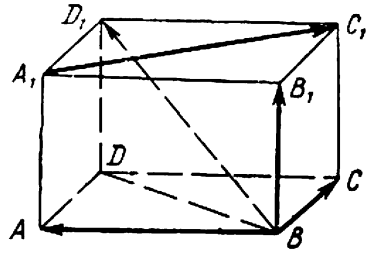

Рис. 27

Так как $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AA_1}$, то

$$\overrightarrow{BD_1} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA_1}$$

и аналогично

$$\overrightarrow{A_1C_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Таким образом,

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{A_1C_1}}) = \frac{(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA_1})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})}{\sqrt{(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AA_1})^2}\sqrt{(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2}}.$$

Введем теперь вспомогательный параметр, положив, например, $|\overrightarrow{BC}| = a$. Тогда $|\overrightarrow{AA_1}| = a$ и $|\overrightarrow{AB}| = 2a$.

Так как $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AA_1} \perp \overrightarrow{BC}$, то

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{A_1C_1}}) = \frac{-4a^2 + a^2}{\sqrt{4a^2 + a^2 + a^2}\sqrt{a^2 + 4a^2}} = -\frac{\sqrt{30}}{10},$$

откуда

$$(\widehat{\overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{A_1C_1}}) = \arccos\left(-\frac{\sqrt{30}}{10}\right).$$

Принимая теперь во внимание, что угол между прямыми $BD_1$ и $A_1C_1$ — это меньший из углов, определяемых этими прямыми, получаем:

$$(\widehat{\overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{A_1C_1}}) = \pi - \arccos\left(-\frac{\sqrt{30}}{10}\right), \text{ или } (\widehat{\overrightarrow{BD_1}, \overrightarrow{A_1C_1}}) = \arccos\frac{\sqrt{30}}{10}.$$

Естественно, что величину искомого угла можно было найти и не обращаясь к векторам. Приведем это решение.

Проведем через точку $B$ прямую $PQ$ параллельно диагонали $AC$ (рис. 28). Получим $P = (PQ) \cap (AD)$, $Q = (PQ) \cap (CD)$.

Тогда $(\widehat{(BD_1), (PQ)}) = (\widehat{(BD_1), (A_1C_1)})$. Проведем $[D_1P]$ и $[D_1Q]$.

Введем вспомогательный параметр, положив $|BC| = a$. Тогда $|AA_1| = a$ и $|AB| = 2a$. Из прямоугольного треугольника $ABC$ имеем: $|AC| = a\sqrt{5}$. Нетрудно доказать (проделайте это самостоятельно), что $[AC]$ — средняя линия треугольника $PDQ$ и что тогда $|BP| = |BQ| = |AC| = a\sqrt{5}$, а $|DP| = 2a$ и $|DQ| = 4a$.

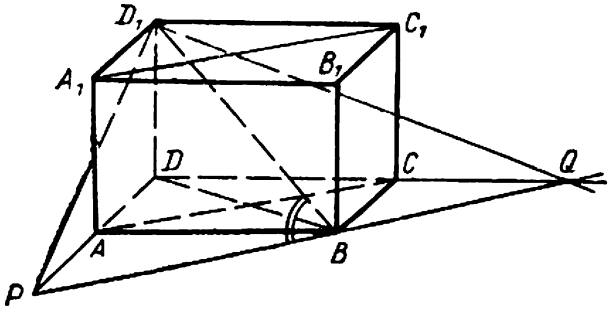

Рис. 28

Выясним, величину какого из углов $D_1BP$ или $D_1BQ$ нам требуется най-

ти. В треугольниках $BD_1P$ и $BD_1Q$ $|BD| = |BQ|$ и $[BD_1]$ — общая сторона. Подсчитаем длины третьих сторон этих треугольников.

Из прямоугольных треугольников $DD_1P$ и $DD_1Q$ имеем соответственно:

$$|D_1P| = a\sqrt{5}, \quad |D_1Q| = a\sqrt{17}.$$

Таким образом, $\widehat{D_1BP} < \widehat{D_1BQ}$, т. е. нам требуется найти $\widehat{D_1BP}$. По теореме косинусов имеем:

$$|D_1P|^2 = |BP|^2 + |BD_1|^2 - 2|BP| \cdot |BD_1| \cos \widehat{D_1BP},$$

или

$$a(\sqrt{5})^2 = (a\sqrt{5})^2 + (a\sqrt{6})^2 - 2a\sqrt{5} \cdot a\sqrt{6} \cdot \cos \widehat{D_1BP};$$

откуда $\cos \widehat{D_1BP} = \frac{\sqrt{30}}{10}$.

Итак, $\arccos \frac{\sqrt{30}}{10}$ — угол между прямыми $BD_1$ и $A_1C_1$.

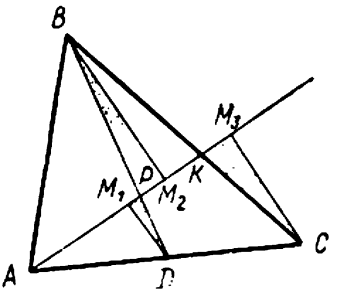

Рис. 29

Пример 25. В $\triangle ABC$ $[BD]$ — медиана, точка $P \in [BD]$ и $|BP| : |PD| = 3 : 1$; $(AP) \cap [BC] = K$. Найдем отношение площади $\triangle ABK$ к площади $\triangle ACK$.

Решение. Пусть $(AP) \cap (BC) = K$ (рис. 29). Требуется найти $S_{\triangle ABK} : S_{\triangle ACK}$. На прямую $AK$ опустим перпендикуляры $DM_1$, $BM_2$, $CM_3$. Из подобия треугольников $BPM_2$ и $DPM_1$ запишем: $|BM_2| : |DM_1| = 3 : 1$, а из подобия треугольников $CKM_3$ и $DPM_1$ имеем: $|CM_3| : |DM_1| = 2 : 1$. Тогда $|BM_2| : |CM_3| = 3 : 2$ и, следовательно,

$$\frac{S_{\triangle ABK}}{S_{\triangle ACK}} = \frac{0{,}5|AK| : |BM_2|}{0{,}5|AK| : |CM_3|} = \frac{3}{2}.$$

Замечание. В рассмотренном примере речь идет о зависимостях в треугольнике произвольной формы. В задачах же типа $M$ (и тем более типа $F$) заданными и искомыми могут являться свойства только такие, которые сохраняются при преобразовании подобия.

Поэтому задача, рассмотренная в примере 25, не является задачей типа $M$.

Вместе с тем свойство фигуры быть треугольником сохраняется при аффинном преобразовании. При аффинном преобразовании сохраняются и все другие свойства заданного в этом примере треугольника.

Таким образом, рассмотренная задача является аффинной. При изучении аффинной геометрии такие задачи решались применением аффинных преобразований. В курсе геометрии средней школы аффинные преобразования не изучаются. Тем не менее отдельные задачи аффинного содержания имеются и в школьном курсе геометрии. При этом, как и задача 25, они решаются без применения аффинных преобразований.

На этом мы закончим рассмотрение общих методов решения задач типа $F$ и типа $M$ и перейдем к последнему пункту плана решения геометрической задачи — к исследованию.

## § 5. Исследование решения

При решении геометрической задачи алгебраическим методом могут быть получены значения искомой величины, которые не удовлетворяют условиям задачи. Например, искомая длина некоторого отрезка может получиться выраженной отрицательным числом, искомый угол между двумя прямыми оказаться больше 180°, искомая величина радиуса окружности, вписанной в треугольник, может получиться больше стороны этого треугольника и т. д.

Значение искомой величины, не удовлетворяющее условиям задачи, называют *посторонним*. Выяснение того, какие из найденных значений искомой величины удовлетворяют условиям задачи, а какие — являются посторонними, проводят при исследовании решения.

В процессе решения геометрической задачи мы рассматриваем различные фигуры с учетом их взаимного расположения, выполняем некоторые построения (основные и дополнительные). При каких значениях параметров (буквенных данных) и при каких зависимостях между ними существуют рассматриваемые фигуры, выполнимы требуемые построения, каковы варианты взаимного расположения рассматриваемых фигур и каким образом все эти зависимости сказываются на существовании решения и количестве решений — ответы на все эти вопросы даются также в исследовании.

Так, в примере 9 (с. 22) $x$ — длина отрезка, т. е. $x > 0$. Решая уравнение, мы нашли, что $x = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\varphi}{2}$. Чтобы утверждать, что $|CD| = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\varphi}{2}$, необходимо убедиться в справедливости неравенства $\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\varphi}{2} > 0$. Получение этого неравенства и доказательство его справедливости и составляют содержание исследования решения данной задачи.

В исследовании к примеру 10 (с. 23) требовалось обнаружить, что по смыслу значение $x$ должно удовлетворять системе неравенств $0 < x < 70$, и убедиться в том, что полученное значение $x$ этой системе удовлетворяет.

В исследовании к примеру 12 (с. 25) необходимо было обнаружить, что по смыслу задачи $||AB| - |BC|| < |AC| < |AB| + |BC|$, т. е. значение $x$ должно удовлетворять системе неравенств

$$|x - (x + 2)| < 5 < x + (x + 2),$$

или неравенству $x > \frac{3}{2}$, и убедиться, что найденное значение $x$ этому неравенству удовлетворяет.

Посторонние решения могут быть получены и в процессе решения составленного уравнения (или системы уравнений) и даже в процессе его составления.

Так, при решении системы, составленной из уравнений (13.1), (13.2) и (13.3) (с. 27), мы получили уравнение

$$\frac{c^2}{3}\cos^2 t + c^2 \sin^2 2t = c^2.$$

Это уравнение совместно с уравнениями (13.2) и (13.3) образовало новую систему. Ее-то решения далее и искались. Однако эта новая система уравнений является лишь следствием первоначальной системы (т. е., возможно, имеет посторонние решения), и поэтому ее решения необходимо было проверить. Исследование позволило нам заметить, что значение $\cos 2t = -\frac{1}{3}$ является посторонним решением.

Иногда оказывается удобным исследовать найденное значение не основного, а вспомогательного неизвестного, как это было сделано в примере 13 (с. 26).

Вернемся теперь к примеру 15 (с. 29). Решая уравнение (15.1) $\frac{1}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\cos x}$, мы получили постороннее по смыслу задачи значение:

$$\sin x = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}.$$

Каким образом это значение было получено?

Дело в том, что фактически мы решили не одно уравнение (15.1), а систему уравнений:

$$\begin{cases} |SD| = \dfrac{a}{2\sin\frac{x}{2}}, \\ |SD| = \dfrac{a\sqrt{2}}{2\cos x}. \end{cases}$$

Исключая $|SD|$ из этой системы, т. е. уже в процессе составления уравнения (15.1), мы расширили область значений $\sin\frac{x}{2}$ и $\cos x$. Действительно, из уравнений

$$|SD| = \frac{a}{2\sin\frac{x}{2}} \text{ и } |SD| = \frac{a\sqrt{2}}{2\cos x}$$

ясно, что $\sin\frac{x}{2} > 0$ и $\cos x > 0$. Из уравнения же (15.1) получаем, что

$$\begin{cases} \sin\frac{x}{2} > 0, \\ \cos x > 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sin\frac{x}{2} < 0, \\ \cos x < 0. \end{cases}$$

Это расширение области значений $\sin\frac{x}{2}$ и $\cos x$, допущенное при составлении уравнения (15.1), и привело к появлению постороннего значения $\sin\frac{x}{2}$.

Для выполнения исследования находят в условии задачи те ограничения, которым должно удовлетворять значение искомой величины. При этом, если в задачах, содержащих лишь числовые данные, ограничения являются числовыми неравенствами (или системами неравенств), то в задачах с буквенными данными (параметрами) ограничения также содержат параметры, и, таким образом, в подобных случаях в процессе исследования приходится выяснять и допустимые по смыслу значения параметров, а иногда и допустимые зависимости между параметрами.

Решая уравнение (систему уравнений), составленное по условиям задачи, мы зачастую получаем несколько значений искомой величины. Так, в примере 16 (с. 30) были получены два значения $x$, т. е. возникает предположение, что кроме окружности $\omega_2$ существует еще «не учтенная» при составлении уравнения окружность $\omega_3$.

В существовании обеих этих окружностей можно убедиться, установив, что найденные значения $x$ должны удовлетворять системе неравенств $0 < x < R$, а затем показать, что найденные значения $x$ этой системе неравенств удовлетворяют.

В главах II и III мы еще приведем ряд примеров, где проведем подробно исследование, в данном же параграфе ограничимся рассмотрением двух примеров. Наметив решения, остановимся подробно лишь на их исследовании.

Пример 26. Отношение радиуса окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, к радиусу окружности, описанной около этого треугольника, равно $k$. Найдем косинус угла при основании треугольника.

Решение (рис. 30). Положим $\widehat{BCA} = x$ и введем вспомогательный параметр: $|MK| = r$. Тогда

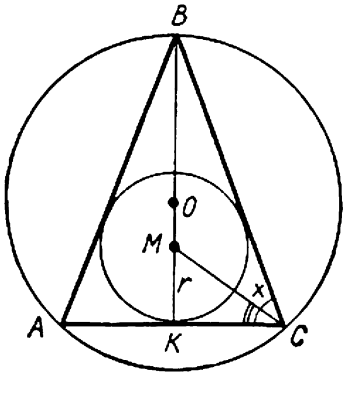

Рис. 30

$$|OB| = rk,\ \cos x = |CK| : |BC|.$$

Из треугольника $MCK$ имеем: $|CK| = r\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. По теореме синусов запишем:

$$|BC| = 2rk\sin x.$$

Таким образом, $\cos x = \dfrac{r\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{2rk\sin x}$,

откуда

$$\cos x = \frac{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{k \sin x},$$

$$\text{т. е. } (\cos x)_1 = \frac{1+\sqrt{1-2k}}{2},\ (\cos x)_2 = \frac{1-\sqrt{1-2k}}{2}.$$

Исследование. По смыслу задачи $0° < x < 90°$, т. е. из найденных значений $\cos x$ следует отобрать лишь такие, которые удовлетворяют системе неравенств $0 < \cos x < 1$. Чтобы сделать это, обратимся к параметру $k$.

Ясно, что $k > 0$. Кроме того, так как радиус окружности, вписанной в треугольник, достигает максимума, когда этот треугольник равносторонний, а в этом случае отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности равно 1 : 2, то по смыслу задачи значения параметра $k$ удовлетворяют системе неравенств $0 < k \leqslant \frac{1}{2}$.

Но тогда $0 > -2k \geqslant -1$, или $1 > 1 - 2k \geqslant 0$, т. е. $1 > \sqrt{1-2k} \geqslant 0$, и, следовательно,

$$2 > 1 + \sqrt{1-2k} \geqslant 1,$$

откуда

$$1 > \frac{1+\sqrt{1-2k}}{2} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Таким образом, при $\frac{1}{2} \leqslant (\cos x)_1 < 1$ будет тем более $0 < (\cos x)_1 < 1$, т. е. первое из найденных значений $\cos x$ удовлетворяет условию задачи.

Аналогично (убедитесь в этом самостоятельно) и значение $\cos x = \frac{1-\sqrt{1-2k}}{2}$ удовлетворяет условию задачи.

Пример 27. В правильной треугольной пирамиде через сторону основания проведена плоскость, перпендикулярная к противолежащему боковому ребру. Найдем площадь полученного сечения, если основание равно $a$, а высота пирамиды равна $h$.

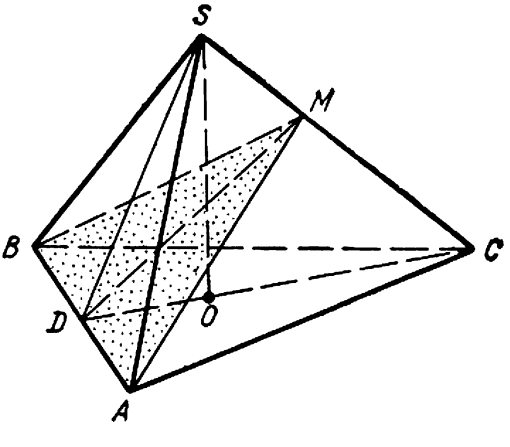

Рис. 31

Решение. Пусть $SABC$ — данная пирамида и $[SO]$ — ее высота (рис. 31). Проведем апофему $SD$ и точку $D$ соединим с точкой $C$ и с точкой $M$ — вершиной треугольника

$ABM$, являющегося заданным сечением. Из прямоугольного треугольника $SOC$ получим:

$$|SC| = \sqrt{\frac{3h^2 + a^2}{3}}.$$

Далее, $|DM| \cdot |SC| = |SO| \cdot |DC| = 2S_{\Delta SDC}$,

откуда $$|DM| = \frac{3ah}{2\sqrt{3h^2 + a^2}}.$$

Таким образом,

$$S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |DM| = \frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2 + 3h^2}}.$$

Исследование. Так как $S_{\Delta ABM} > 0$, то из найденных значений $S_{\Delta ABM}$ нужно отобрать только такие значения, которые удовлетворяют неравенству

$$\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2 + 3h^2}} > 0. \qquad (27.1)$$

Казалось бы, все просто. Ведь $a > 0$ и $h > 0$, и, таким образом, найденное значение $S_{\Delta ABM}$ удовлетворяет условию задачи. Однако это не так. Действительно, если пирамида $SABC$ очень «низенькая», то плоскость, проходящая через прямую $AB$ перпендикулярно прямой $SC$, может не пересечь отрезок $SC$. Выясним, при какой же зависимости между параметрами $a$ и $h$ сечение существует. Рассмотрим $\Delta CSD$. Имеем:

$$|CD| = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ |OD| = \frac{1}{3}|CD| = \frac{a\sqrt{3}}{6} \text{ и } |OC| = \frac{2}{3}|CD| = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Если $\widehat{CSD} = 90°$, то $h = |SO| = \sqrt{|OD| \cdot |OC|} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$, — в этом случае точка $M$ совпадает с вершиной $S$ и сечение не существует. Таким образом, ясно, что если $0° < \widehat{CSD} < 90°$, то $M \in [SC]$, т. е. сечение существует. Итак, если

$$\begin{cases} a > 0, \\ h > 0, \\ h > \frac{a\sqrt{6}}{6}, \end{cases} \quad \text{т. е. если} \quad \begin{cases} a > 0, \\ h > \frac{a\sqrt{6}}{6}, \end{cases}$$

то $S_{\Delta ABM} = \frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2 + 3h^2}}$.

В заключение настоящего параграфа отметим еще, что не следует смешивать исследование решения по смыслу задачи с исследованием полученного аналитического выражения искомой величины. Область допустимых по смыслу задачи значений параметров является подмножеством области допустимых для аналити-

ческого выражения искомой величины значений параметров. Так, в примере 27 множество значений $a$ и $h$, определяемое системой неравенств

$$\begin{cases} a > 0, \\ h > \frac{a\sqrt{6}}{6}, \end{cases}$$

является подмножеством множества, определяемого системой неравенств

$$\begin{cases} a \neq 0, \\ h > 0, \end{cases}$$

которой равносильно неравенство $\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}} > 0$.

В некоторых же случаях области допустимых значений параметров совпадают.

Так, в примере 26 допустимыми по смыслу задачи являются значения $0 < k \leqslant \frac{1}{2}$ и для аналитического выражения $\cos x = \frac{1 \pm \sqrt{1-2k}}{2}$ допустимыми являются также значения $0 < k \leqslant \frac{1}{2}$.

# ГЛАВА II

# ПЛАНИМЕТРИЯ

## § 6. Зависимости между элементами многоугольников

Пример 28. В прямоугольном треугольнике $ABC$ из вершины $C$ прямого угла проведены биссектриса $CK$ и медиана $CM$. Найдем катеты треугольника $ABC$, если $|KM| = a$, $|CM| = m$.

Решение (рис. 32). Это задача типа $F$. Решим ее алгебраически, составляя систему уравнений относительно $|AC| = x$ и $|BC| = y$. Положим для определенности, что $|AC| \leqslant |BC|$.

Так как $\triangle ABC$ — прямоугольный и $[CM]$ — медиана, проведенная к гипотенузе $AB$, то $|CM| = \frac{1}{2}|AB|$ и, следовательно, $|AB| = 2m$ и $|AM| = |BM| = m$. Тогда $|AK| = m - a$ и $|BK| = m + a$.

Так как $[CK)$ — биссектриса угла $ACB$, то

$$\frac{|AK|}{|BK|} = \frac{|AC|}{|BC|},$$

откуда

$$\frac{m-a}{m+a} = \frac{x}{y}.$$

Кроме того, по теореме Пифагора

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2, \text{ или } x^2 + y^2 = 4m^2.$$

Таким образом, мы получили систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{m-a}{m+a}, \\ x^2 + y^2 = 4m^2, \end{cases}$$

решая которую, находим:

$$x = \frac{m(m-a)\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+a^2}}, \quad y = \frac{m(m+a)\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+a^2}}.$$

Исследование. По смыслу задачи $x > 0$ и $y > 0$. Так как $[CK)$ — биссектриса угла $ACB$, то точка $K$ — внутренняя точка отрезка $AB$. Поскольку $|AC| \leqslant |BC|$, то $|AK| \leqslant |BK|$ и потому либо $K = M$, либо $K$ — внутренняя точка отрезка $AM$. Но тогда $|AM| > |KM|$, или $m > a \geqslant 0$, и, следовательно, $x > 0$ и $y > 0$, т. е. найденные значения $x$ и $y$ условию задачи удовлетворяют.

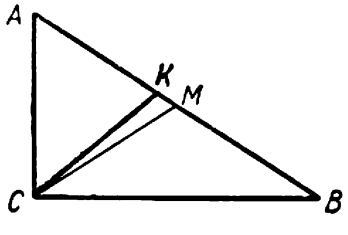

Рис. 32

Если предположить, что $|AC| > |BC|$, то из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x}{y} = \dfrac{m+a}{m-a}, \\ x^2 + y^2 = 4m^2 \end{cases}$$

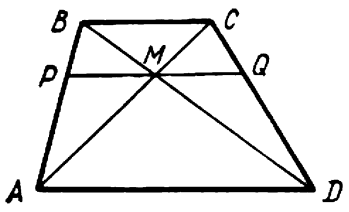

Рис. 33

найдем значения

$$x = \frac{m(m+a)\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+a^2}}, \quad y = \frac{m(m-a)\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+a^2}},$$

которые также удовлетворяют условию задачи. Итак, катеты треугольника $ABC$ равны:

$$\frac{m(m-a)\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+a^2}} \text{ и } \frac{m(m+a)\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+a^2}}.$$

Пример 29. В трапеции, основания которой соответственно равны $a$ и $b$ $(a > b)$, через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найдем длину отрезка этой прямой, отсекаемого боковыми сторонами трапеции.

Дано (рис. 33): $ABCD$ — трапеция, $|AD| = a$, $|BC| = b$, $[AC]$ и $[BD]$ — диагонали, $(PQ) \parallel (AD)$, $M \in (PQ)$, $M = [AC] \cap [BD]$, $P \in [AB]$, $Q \in [CD]$.

Найти: $|PQ|$.

Решение. Найдем $|PQ|$ прямым счетом. Из $\triangle BCM \sim \triangle AMD$ имеем:

$$\frac{|BM|}{|MD|} = \frac{b}{a},$$

откуда по свойству производной пропорции запишем:

$$\frac{|BM|}{|BM|+|MD|} = \frac{b}{a+b}, \text{ или } \frac{|BM|}{|BD|} = \frac{b}{a+b}.$$

Из $\triangle BPM \sim \triangle BAD$ имеем:

$$\frac{|PM|}{|AD|} = \frac{|BM|}{|BD|} = \frac{b}{a+b}.$$

Таким образом,

$$\frac{|PM|}{a} = \frac{b}{b+a}. \tag{29.1}$$

Аналогично из $\triangle DQM \sim \triangle DCB$ получим:

$$\frac{|MQ|}{|BC|} = \frac{a}{a+b},$$

т. е.

$$\frac{|MQ|}{b} = \frac{a}{a+b}, \text{ или } \frac{|MQ|}{a} = \frac{b}{a+b}. \tag{29.2}$$

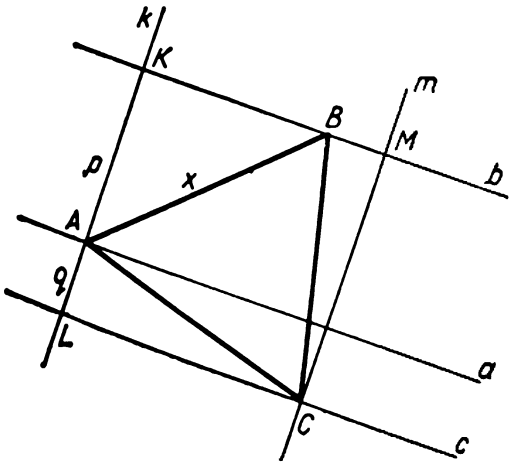


Рис. 34

Складывая почленно равенства (29.1) и (29.2), находим, что

$$|PQ| = \frac{2ab}{a+b}.$$

Исследование. По смыслу задачи $b < |PQ| < a$. Но так как $a > b$, то $2a > a + b$, т. е. $2ab > (a + b)\, b$, откуда

$$\frac{2ab}{a+b} > b, \text{ или } |PQ| > b.$$

Аналогично получим, что $|PQ| < a$. Таким образом, $b < |PQ| < a$, т. е. найденное значение $|PQ|$ удовлетворяет условию задачи.

Пример 30. Прямые $a$, $b$, $c$ параллельны, причем расстояния от прямой $a$, содержащейся в полосе, ограниченной прямыми $b$ и $c$, до этих прямых равны $p$ и $q$. Найдем сторону равностороннего треугольника $ABC$, если $A \in a$, $B \in b$, $C \in c$.

Решение (рис. 34). Построим $m \subset C$, $m \perp b$ и $k \subset A$, $k \perp b$. Пусть $m \cap b = M$, $k \cap b = K$ и $k \cap c = L$. Ясно, что треугольники $BCM$, $ABK$ и $ACL$ будут прямоугольными. Тогда так как $|LC| = |BK| + |BM|$, то, положив длину стороны $\triangle ABC$ равной $x$, получим уравнение

$$\sqrt{x^2 - q^2} = \sqrt{x^2 - p^2} + \sqrt{x^2 - (p+q)^2}.$$

Для решения этого уравнения целесообразно сначала переписать его следующим образом:

$$\sqrt{x^2 - (p+q)^2} = \sqrt{x^2 - p^2} - \sqrt{x^2 - q^2},$$

откуда после двукратного возведения в квадрат и проведения необходимых упрощений, найдем, что $x^2 = \frac{4}{3}(p^2 + q^2 + pq)$, откуда

$$x = \frac{2\sqrt{3(p^2 + q^2 + pq)}}{3}.$$

Исследование. По смыслу задачи $\begin{cases} x > p, \\ x > q, \\ x \geqslant p + q, \end{cases}$ т. е. $x \geqslant p + q$.

Тогда $x^2 \geqslant p^2 + 2pq + q^2$, или $\frac{4}{3}(p^2 + q^2 + pq) \geqslant p^2 + 2pq + q^2$, откуда

$$(p - q)^2 \geqslant 0.$$

Итак, при любых положительных значениях $p$ и $q$

$$|AB| = \frac{2\sqrt{3(p^2+q^2+pq)}}{3},$$

и, в частности, если $p = q$, то $|AB| = 2p$.

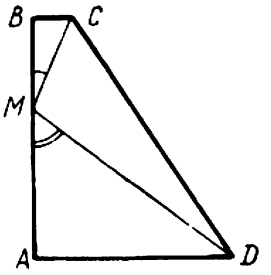

Рис. 35

Пример 31. В трапеции $ABCD$ $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°$, $|AB| = 5$ см, $|BC| = 1$ см, $|AD| = 4$ см. На стороне $AB$ взята точка $M$, такая, что $2\widehat{BMC} = \widehat{AMD}$. Найдем отношение $|AM| : |BM|$.

Решение (рис. 35). Пусть $|BM| = x$, тогда $|AM| = 5 - x$ и, следовательно,

$$\frac{|AM|}{|BM|} = \frac{5-x}{x}. \tag{31.1}$$

Введем вспомогательное неизвестное $\widehat{BMC} = \alpha$, тогда $\widehat{AMD} = 2\alpha$.

Из прямоугольного треугольника $BCM$ имеем:

$$x = |BC| \operatorname{ctg} \alpha, \text{ или } x = \operatorname{ctg} \alpha,$$

а из прямоугольного треугольника $ADM$ запишем:

$$5 - x = |AD| \operatorname{ctg} 2\alpha, \text{ или } 5 - x = 4\operatorname{ctg} 2\alpha,$$

откуда $x = 5 - 4\operatorname{ctg} 2\alpha$.

Таким образом, получим уравнение

$$\operatorname{ctg} \alpha = 5 - 4\operatorname{ctg} 2\alpha. \tag{31.2}$$

Решим его:

$$5 - \frac{4(\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1)}{2\operatorname{ctg} \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha, \text{ или } 3\operatorname{ctg}^2 \alpha - 5\operatorname{ctg} \alpha - 2 = 0,$$

откуда получаем:

$$(\operatorname{ctg} \alpha)_1 = 2; \ (\operatorname{ctg} \alpha)_2 = -\frac{1}{3}.$$

Ясно, что $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{3}$ — постороннее решение.

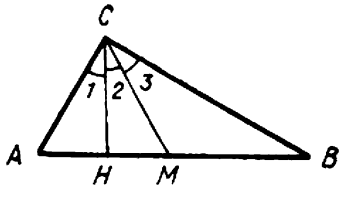

Рис. 36

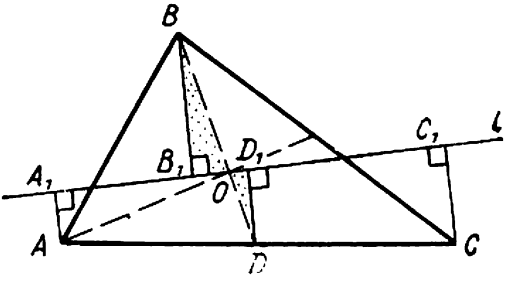

Рис. 37

Возвращаясь к уравнению (31.1), находим, что $\frac{|AM|}{|BM|} = \frac{3}{2}$.

Пример 32. Найдем углы треугольника, в котором высота и медиана, проведенные из одной вершины, делят угол при этой вершине на три конгруэнтные угла.

Дано (рис. 36): $\triangle ABC$, $[CH]$ —высота, $[CM]$ — медиана, $\angle 1 \cong \angle 2 \cong \angle 3$.

Найти: $\widehat{CAB}$, $\widehat{ACB}$, $\widehat{ABC}$.

Решение. Приведем чисто геометрическое решение. Так как прямоугольные треугольники $ACH$ и $MCH$ имеют общий катет $CH$ и $\widehat{1} = \widehat{2}$, то $\triangle ACH \cong \triangle MCH$ и, следовательно, $|AH| = |MH|$, а поэтому $|MH| = \frac{1}{2}|AM|$, или $|MH| = \frac{1}{2}|BM|$, т. е. $|MH| : |BM| = 1 : 2$.

Так как в $\triangle BCH$ $\widehat{2} = \widehat{3}$, то $[CM)$ — биссектриса этого треугольника. Тогда

$$\frac{|CH|}{|BC|} = \frac{|MH|}{|BM|} = \frac{1}{2},$$

а поэтому в прямоугольном треугольнике $BCH$ угол $CBH$ равен $30°$, а далее нетрудно найти, что $\widehat{ABC} = 30°$, $\widehat{ACB} = 90°$ и $\widehat{CAB} = 60°$.

Так как эта задача является задачей типа $M$, то можно решить ее способом введения вспомогательного параметра. Примем $|CH| = h$, а в качестве неизвестного выберем $\widehat{1}$, т. е. $\widehat{ACH} = x$. Ясно, что $|AH| + |MH| = |BH| - |MH|$, т. е.

$$h \operatorname{tg} x + h \operatorname{tg} x = h \operatorname{tg} 2x - h \operatorname{tg} x.$$

Из этого уравнения после сокращения на $h$ и несложных преобразований находим, что $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, откуда $x = 30°$. Следовательно, $\widehat{ACB} = 90°$, $\widehat{CAB} = 60°$ и $\widehat{CBA} = 30°$.

Пример 33. Через центроид треугольника $ABC$ проведена прямая $l$, пересекающая стороны $AB$ и $BC$. Докажем, что сумма расстояний от точек $A$ и $C$ до прямой $l$ равна расстоянию от точки $B$ до этой прямой.

Дано (рис. 37): $\triangle ABC$, $O$ — центроид $\triangle ABC$, $l \cap [AB]$, $l \cap [BC]$, $(AA_1) \perp l$, $(BB_1) \perp l$, $(CC_1) \perp l$, $\{A_1, B_1, C_1\} \in l$.

Доказать: $|AA_1| + |CC_1| = |BB_1|$.

Доказательство. Рассмотрим чисто геометрическое доказательство.

Проведем медиану $BD$ треугольника $ABC$. Так как точка $O$ — центроид $\triangle ABC$, то $O \in [BD]$. Из точки $D$ опустим перпендикуляр $DD_1$ на прямую $l$. Так как $(AA_1) \perp l$ и $(CC_1) \perp l$, то $(AA_1) \parallel (CC_1)$,

т. е. четырехугольник $AA_1CC_1$ — либо прямоугольник (если $l \parallel (AC)$), либо трапеция (если $l \nparallel (AC)$).

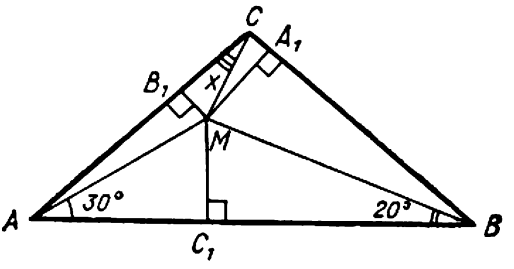

Рис. 38

Если $l \parallel (AC)$, то из подобия треугольников $OBB_1$ и $ODD_1$ следует, что $|BB_1| = 2|DD_1|$. Так как в рассматриваемом случае $|DD_1| = |AA_1| = |CC_1|$, то $|AA_1| + |CC_1| = |BB_1|$.

Если $l \nparallel (AC)$, то так как $|AD| = |DC|$ и $(DD_1) \parallel (AA_1)$, то $[DD_1]$ — средняя линия трапеции $AA_1C_1C$, т. е.

$$|DD_1| = \frac{|AA_1| + |CC_1|}{2}. \tag{33.1}$$

Так как $(DD_1) \perp l$, $(BB_1) \perp l$ и $\widehat{BOB_1} = \widehat{DOD_1}$, то $\triangle BOB_1 \sim \triangle DOD$ и потому

$$\frac{|DD_1|}{|BB_1|} = \frac{|OD|}{|OB|} = \frac{1}{2},$$

следовательно,

$$|DD_1| = \frac{1}{2}|BB_1|. \tag{33.2}$$

Сравнивая выражения $|DD_1|$ из равенств (33.1) и (33.2), получаем:

$$|AA_1| + |CC_1| = |BB_1|.$$

Пример 34. В равнобедренном треугольнике $ABC$, в котором угол $C$ при вершине равен 100°, построены два луча: один с началом в точке $A$ под углом в 30° к лучу $AB$, а другой с началом в точке $B$ под углом в 20° к лучу $BA$. Построенные лучи пересекаются в точке $M$, принадлежащей треугольнику $ABC$. Найдем углы $ACM$ и $BCM$.

Решение (рис. 38). Приведем алгебраическое решение.

Построим $[CM]$, $[MA_1] \perp (BC)$, $[MB_1] \perp (AC)$, $[MC_1] \perp (AB)$.

Пусть $\widehat{ACM} = x$, тогда $\widehat{BCM} = 100° - x$. Введем вспомогательный параметр, положив $|CM| = k$, и подсчитаем $|MC_1|$ двумя способами, т. е. используем $|MC_1|$ как опорный элемент.

Из треугольников $CMB_1$ и $CMA_1$ имеем соответственно:

$$|MB_1| = k \sin x, \quad |MA_1| = k \sin (100° - x).$$

Так как угол $C$ тупой, а треугольник $ABC$ равнобедренный, то

$$\widehat{A} = \widehat{B} = \frac{180° - 100°}{2} = 40°.$$

Поскольку $\widehat{MAC_1} = 30°$, а $\widehat{MBC_1} = 20°$, то $\widehat{CAM} = 10°$ и $\widehat{CBM} = 20°$.

Итак, в прямоугольных треугольниках $A_1BM$ и $C_1BM$ $[BM]$ — общая гипотенуза и $\widehat{CBM} = \widehat{ABM}$, т. е. $\triangle A_1BM \cong \triangle C_1BM$, и тогда $[MC_1] \cong [A_1M]$, или

$$|MC_1| = k \sin (100° - x). \tag{34.1}$$

Из $\triangle AB_1M$ имеем:

$$|AM| = \frac{|MB_1|}{\sin 10°} = \frac{k \sin x}{\sin 10°}$$

и, следовательно,

$$|MC_1| = |AM| \cdot \sin 30°,$$

откуда

$$|MC_1| = \frac{k \sin x}{2 \sin 10°}. \tag{34.2}$$

Сравнивая значения $|MC_1|$ из (34.1) и (34.2), приходим к уравнению

$$k \sin (100° - x) = \frac{k \sin x}{2 \sin 10°},$$

или

$$2 \sin 10° \sin (100° - x) = \sin x,$$

откуда находим: $x = 20°$.

Исследование. Так как точка $M$ принадлежит $\triangle ABC$, то

$$\begin{cases} \widehat{ACM} < \widehat{ACB}, \\ \widehat{BCM} < \widehat{BCA}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x < 100°, \\ 100° - x < 100°, \end{cases}$$

т. е. $0° < x < 100°$. Найденное значение $x$ этой системе удовлетворяет. Таким образом, $\widehat{ACM} = 20°$, $\widehat{BCM} = 80°$.

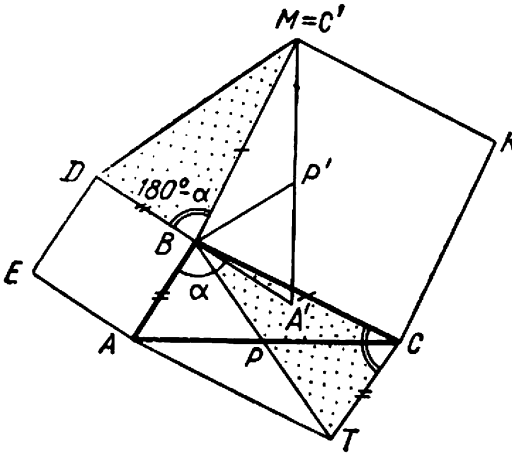

Рис. 39

Пример 35. Но сторонах $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$ построены (вне его) квадраты $ABDE$ и $BCKM$. Докажем, что отрезок $DM$ в два раза больше медианы $BP$ треугольника $ABC$.

Доказательство (рис. 39). Это задача типа $M$, решим ее чисто геометрически. Положим для краткости $\widehat{ABC} = \alpha$, тогда $\widehat{DBM} = 180° - \alpha$.

На прямой $BP$ отложим отрезок $PT$ такой, что $|PT| = |BP|$, а точку $T$ соединим с точками $C$ и $A$.

Так как в четырехугольнике $ABCT$ диагонали, пересекаясь, делятся пополам, то $ABCT$ — параллелограмм, а тогда $\widehat{BCT} = 180° - \alpha$ и $|CT| = |AB|$.

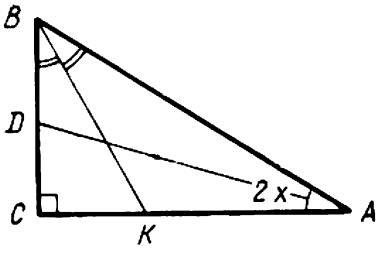

Рис. 40

Так как в треугольниках $BCT$ и $DBM$ $|CT| = |BD|$, $|BC| = |BM|$, $\widehat{BCT} = \widehat{DBM}$, то эти треугольники конгруэнтны и потому $|DM| = |BT|$. Так как $|BT| = 2\,|BP|$, то $|DM| = 2\,|BP|$, что и требовалось доказать.

Замечание. Эту задачу нетрудно решить и с помощью преобразования поворота. А именно, если повернуть треугольник $ABC$ вокруг точки $B$ на 90°, то отрезок $BP'$ будет медианой в $\triangle A'BC'$ и средней линией в $\triangle A'DC'$, где $C' = M$, что и доказывает требуемое соотношение.

Пример 36. В треугольнике $ABC$ $\widehat{C} = 90°$, $[AD)$ и $[BK)$ — биссектрисы внутренних углов. Найдем $\widehat{BAC}$ и $\widehat{ABC}$, если $2\,|AD| \cdot |BK| = |AB|^2$.

Решение (рис. 40). Введем вспомогательный параметр, положив $|AB| = c$, и примем $\widehat{DAC} = x$. Тогда $\widehat{BAC} = 2x$, $\widehat{ABC} = 90° - 2x$ и $\widehat{CBK} = 45° - x$.

Из прямоугольного треугольника $ABC$ находим, что $|AC| = c \cos 2x$. Из прямоугольного треугольника $ADC$ имеем:

$$|AD| = \frac{|AC|}{\cos x}.$$

Подставляя найденное значение $|AC|$, получаем:

$$|AD| = \frac{c \cos 2x}{\cos x}.$$

Аналогично из прямоугольного треугольника $ABC$ находим, что $|BC| = c \sin 2x$, а из прямоугольного треугольника $BCK$ получим:

$$|BK| = \frac{|BC|}{\cos (45° - x)} = \frac{c \sin 2x}{\cos (45° - x)}.$$

В соответствии с условием задачи запишем следующее уравнение:

$$\frac{2c \cos 2x}{\cos x} \cdot \frac{c \sin 2x}{\cos (45° - x)} = c^2,$$

или

$$\frac{2 \sin 2x \cos 2x}{\cos x \cos (45° - x)} = 1.$$

Так как $\cos 2x = \sin (90° - 2x) = 2 \sin (45° - x) \cos (45° - x)$, а $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$, то получаем:

$$8 \sin (45° - x) \sin x = 1,$$

откуда

$$4 (\cos (45° - 2x) - \cos 45°) = 1.$$

Следовательно,

$$\cos (2x - 45°) = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}.$$

Таким образом,

$$2x = 45° + \arccos \frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}.$$

Исследование. По смыслу задачи $0° < 2x < 90°$. Найденное значение $2x$ этой системе неравенств удовлетворяет, так как

$$\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{1 + 2\sqrt{2}}{4} < 1,$$

т. е.

$$0° < \arccos \frac{1 + 2\sqrt{2}}{4} < 45°.$$

Итак, мы получили:

$$\widehat{BAC} = 45° + \arccos \frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}, \quad \widehat{ABC} = 45° - \arccos \frac{1 + 2\sqrt{2}}{4}.$$

**Задачи для самостоятельного решения**

**1.** Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника и делящая угол в отношении 1 : 2, равна $m$. Найти стороны треугольника.

**2.** Параллелограмм, периметр которого равен 44 см, разделен диагоналями на четыре таких треугольника, что разность между периметрами смежных треугольников равна 6 см. Определить стороны параллелограмма.

**3.** Диагональ прямоугольной трапеции конгруэнтна ее боковой стороне и равна 4 см. Найти длину средней линии трапеции, если ее высота равна 2 см.

**4.** Большее основание трапеции равно 24 см, расстояние между серединами ее диагоналей равно 4 см. Найти меньшее основание трапеции.

**5.** Высота ромба делит его сторону на отрезки длиной $m$ и $n$. Найти диагонали ромба.

**6.** Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 4 см,

медиана, проведенная к боковой стороне, равна 3 см. Найти основание.

**7.** Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$, медиана, проведенная к боковой стороне, равна 5 см. Найти боковую сторону.

**8.** В прямоугольной трапеции основания и меньшая боковая стороны равны соответственно $a$, $b$ и $c$. Найти расстояния от точки пересечения диагоналей до оснований и меньшей боковой стороны.

**9.** В прямоугольный треугольник, катеты которого равны $a$ и $b$, вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найти периметр квадрата.

**10(1).** В прямоугольный треугольник вписан ромб, причем так, что все его вершины лежат на сторонах треугольника, а угол, равный 60°, является общим углом ромба и треугольника. Найти стороны треугольника, если сторона ромба равна 6 см.

**11.** В треугольник вписан ромб, причем так, что один угол у них общий, а противоположная вершина ромба делит сторону треугольника на отрезки, отношение длин которых равно 2 : 3. Найти стороны треугольника, между которыми лежит общий угол треугольника и ромба, если диагонали ромба равны $m$ и $n$.

**12(2).** Один из углов трапеции равен 30°, боковые стороны при их продолжении пересекаются под прямым углом. Найти меньшую боковую сторону трапеции, если ее средняя линия и одно из оснований равны соответственно 10 и 8 см.

**13.** В треугольнике $ABC$ $|AC| = b$, $|AB| = c$, а биссектриса угла $BAC$ пересекается со стороной $BC$ в точке $D$ так, что $|AD| = |BD|$. Найти сторону $BC$.

**14(3).** Из вершины прямого угла треугольника проведена биссектриса, делящая гипотенузу на отрезки, длины которых равны $m$ и $n$. Найти высоту, опущенную из вершины прямого угла.

**15(4).** В треугольнике $ABC$ $|BC| = a$, $|AC| = b$, $\widehat{ACB} = \gamma$. Найти высоту $CD$.

**16.** Высота треугольника, длина которой равна 6 см, делит угол в отношении 2 : 1, а противоположную сторону на отрезки, меньший из которых равен 3 см. Найти стороны треугольника.

**17(5).** Основание равнобедренного треугольника равно $a$, угол при противоположной вершине равен $2\alpha$. Найти биссектрису, проведенную к боковой стороне.

**18.** Острый угол параллелограмма равен $\alpha$, а стороны равны $a$ и $b$. Найти тангенсы острых углов, которые образует со сторонами параллелограмма диагональ, выходящая из вершины острого угла.

**19(6).** Высота равнобедренной трапеции равна $h$, острый угол между диагоналями равен $2\alpha$. Найти длину средней линии трапеции.

**20.** Основание треугольника и проведенная к нему высота равны соответственно $a$ и $h$. Найти сумму боковых сторон, если угол между ними равен $\alpha$.

**21.** Доказать, что если в четырехугольнике диагонали являются биссектрисами, то этот четырехугольник — ромб.

**22.** Найти острые углы прямоугольного треугольника, если медиана, проведенная на его гипотенузу, делит прямой угол в отношении 1 : 2.

**23.** В треугольнике $ABC$ угол $B$ равен $115^\circ$. Из середины стороны $AC$ восставлен перпендикуляр до пересечения со стороной $BC$ в точке $D$. Отрезок $AD$ делит угол $A$ в отношении 5 : 3, считая от стороны $AC$. Найти два других угла треугольника.

**24.** Высота, медиана и биссектриса, проведенные из одной вершины треугольника, делят угол при этой вершине на четыре конгруэнтные угла. Найти углы треугольника.

**25.** Доказать, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла делит пополам угол между медианой и высотой, проведенными на гипотенузу.

**26.** На сторонах квадрата (вне его) построены правильные треугольники, вершины которых последовательно соединены. Найти отношение периметра полученного четырехугольника к периметру квадрата.

**27(7).** В прямоугольнике $ABCD$ $|AD| = 3\,|AB|$. На основании $AD$ взяты точки $M$ и $N$ так, что $|AM| = |MN| = |ND|$. Найти $\widehat{AMB} + \widehat{ANB} + \widehat{ADB}$.

**28.** На сторонах параллелограмма (вне его) построены квадраты. Доказать, что центроиды этих квадратов являются вершинами некоторого квадрата.

**29.** Диагонали $AC$ и $BD$ равнобедренной трапеции с основанием $AD$ пересекаются в точке $O$ под углом $AOD$, величина которого равна $60^\circ$. Доказать, что середины отрезков $AO$, $BO$ и $DC$ являются вершинами правильного треугольника.

**30(8).** В трапеции $ABCD$ сумма углов между боковыми сторонами и основанием $AD$ равна $90^\circ$. Доказать, что длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна полуразности длин оснований.

**31(9).** В треугольнике $ABC$ один угол равен $\alpha$, а другой — $\beta$. Найти угол между высотой и медианой, проведенными из вершины третьего угла.

**32.** В равнобедренном треугольнике угол при основании равен $\alpha$. Найти отношение медианы, проведенной к боковой стороне, к основанию.

**33(10).** В треугольнике $ABC$ $|AB| = |AC|$, $\widehat{A} = 110^\circ$. Внутри треугольника взята точка $M$ такая, что $\widehat{MBC} = 30^\circ$, $\widehat{MCB} = 25^\circ$. Найти $\widehat{AMC}$.

**34.** Доказать, что сумма квадратов длин диагоналей трапеции равна удвоенному произведению длин ее оснований, сложенному с суммой квадратов длин ее боковых сторон.

**35.** Доказать, что во всяком треугольнике разность между

суммой квадратов длин любых двух его сторон и произведением длин этих сторон, умноженным на косинус угла между ними, есть величина постоянная (для данного треугольника).

**36.** Диагональ прямоугольника делит его угол в отношении $m : n$. Найти отношение периметра прямоугольника к длине его диагонали.

**37(11).** В прямоугольник $ABCD$ вписан треугольник $AEK$. Точка $E$ лежит на стороне $BC$, а точка $K$ — на стороне $CD$. Найти тангенс угла $EAK$, если

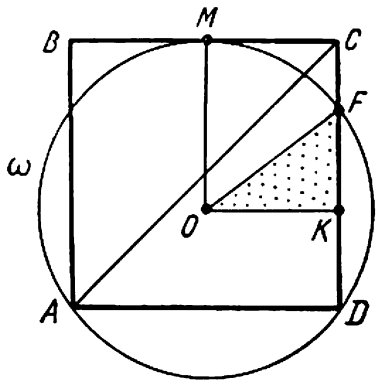

Рис. 41

$$\frac{|AB|}{|BC|} = \frac{|BE|}{|CE|} = \frac{|CK|}{|DK|} = m.$$

**38(12).** Величины углов треугольника $ABC$ удовлетворяют соотношению: $\widehat{A} : \widehat{B} : \widehat{C} = 4 : 2 : 1$. Доказать, что длины сторон такого треугольника удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{|BC|} + \frac{1}{|AC|} = \frac{1}{|AB|}.$$

## § 7. Окружность

Пример 37. Найдем длину диагонали квадрата, две вершины которого лежат на окружности радиуса $R$, а две другие — на касательной к этой окружности.

Дано (рис. 41): $\omega(O, |OA|)$ — окружность, $|OA| = R$, $ABCD$ — квадрат, $A \in \omega$, $D \in \omega$, $(BC)$ — касательная к $\omega$, $[AC]$ — диагональ квадрата.

Найти: $|AC|$.

Решение. Ясно, что это задача типа $F$. Применим алгебраический способ решения. Пусть прямая $BC$ касается окружности $\omega$ в точке $M$, а прямая $CD$ пересекает ее в точке $F$. Проведем $[OM]$, $[OF]$ и $[OK]$, причем $[OK] \perp [CD]$. Заметим, что

$$|CF| \cdot |CD| = |CM|^2. \qquad (37.1)$$

Положим $|CD| = 2x$. Так как $OMCK$ — прямоугольник, то $|MC| = |OK| = x$, а $|CK| = |OM| = R$.

Из прямоугольного треугольника $OFK$ находим:

$$|FK| = \sqrt{R^2 - x^2}.$$

Поскольку $|CF| = |CK| - |FK|$, то

$$|CF| = R - \sqrt{R^2 - x^2}.$$

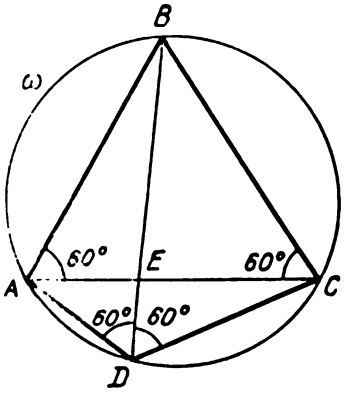


Рис. 42

Подставляя значения $|CF|$, $|CD|$ и $|CK|$ в равенство (37.1), получим уравнение

$$(R - \sqrt{R^2 - x^2})\, 2x = x^2,$$

решая которое найдем $x_1 = 0$ и $x_2 = \frac{4}{5}R$.

Исследование. По смыслу задачи $0 < x < R$, поэтому $|CD| = \frac{8}{5}R$. Следовательно, $|AC| = \frac{8\sqrt{2}}{5}R$.

Пример 38. В окружность радиуса $R$ вписан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке $E$ так, что $|AE| : |EC| = 2 : 3$. Найдем сторону $CD$, если известно, что треугольник $ABC$ равносторонний.

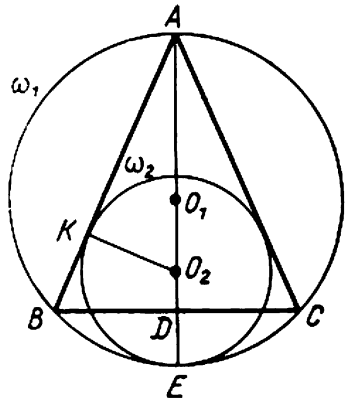


Рис. 43

Решение. Так как треугольник $ABC$ равносторонний (рис. 42), то $|AC| = R\sqrt{3}$.

Поскольку углы $BDC$ и $BAC$ являются вписанными углами, опирающимися на одну и ту же дугу окружности $\omega$, то $\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = 60°$. Аналогично $\widehat{BDA} = \widehat{BCA} = 60°$. Следовательно, в треугольнике $ADC$ $\widehat{ADC} = 120°$, а $[DE)$ — биссектриса угла $ADC$, поэтому $|AD| : |CD| = |AE| : |EC|$, т. е. $|AD| : |CD| = 2 : 3$. Положим $|CD| = x$, тогда $|AD| = \frac{2}{3}x$.

По теореме косинусов для треугольника $ACD$ имеем:

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 - 2\,|AD| \cdot |CD| \cdot \cos \widehat{ADC}.$$

Подставляя в это равенство значения $|AC|$, $|AD|$, $|CD|$ и $\cos \widehat{ADC} = \cos 120° = -\frac{1}{2}$, получим уравнение

$$3R^2 = \frac{4}{9}x^2 + x^2 + \frac{2}{3}x^2,$$

решая которое найдем:

$$x_{1,2} = \pm \frac{3R\sqrt{57}}{19}.$$

Исследование. По смыслу задачи $0 < x < R\sqrt{3}$. Поэтому $x = \frac{3R\sqrt{57}}{19}$.

Итак, $|CD| = \frac{3R\sqrt{57}}{19}$.

Пример 39. В окружность вписан равнобедренный треугольник, основание которого равно $a$, а угол при основании равен $\beta$. Найдем радиус окружности, касающейся боковых сторон треугольника и первой окружности.

Дано (рис. 43): $\omega_1(O_1, |O_1A|)$, $\triangle ABC$, $\{A, B, C\} \subset \omega_1$, $|AB| = |AC|$, $|BC| = a$, $\widehat{ABC} = \beta$, $\omega_2$ — окружность, касающаяся $[AB]$, $[AC]$ и $\omega_1$.

Найти: радиус окружности $\omega_2$.

Решение. Построим точку $D$ — середину основания $BC$ треугольника $ABC$. Так как $|AB| = |AC|$, то $(AD)$ — серединный перпендикуляр отрезка $BC$. Поскольку $\omega_1$ описана около $\triangle ABC$, то ее центр — точка $O_1 \in (AD)$.

Ясно, что биссектриса угла $BAC$ лежит на прямой $AD$. Центр окружности $\omega_2$ — точка $O_2$ — принадлежит биссектрисе угла $BAC$, т. е. $O_2 \in (AD)$. Таким образом, точки $O_1$ и $O_2$ принадлежат прямой $AD$.

Пусть окружность $\omega_2$ касается окружности $\omega_1$ в точке $E$. Тогда точки $O_1$, $O_2$ и $E$ принадлежат одной прямой. Следовательно, $E \in (AD)$ и $|O_2E|$ — длина радиуса окружности $\omega_2$.

Так как по теореме синусов $\dfrac{|BC|}{\sin \widehat{BAC}} = 2|O_1A|$, то

$$|O_1A| = \frac{a}{2 \sin \widehat{BAC}}.$$

Поскольку $\widehat{BAC} = 180^\circ - 2\beta$, то

$$|O_1A| = \frac{a}{2 \sin (180^\circ - 2\beta)}, \text{ или } |O_1A| = \frac{a}{2 \sin 2\beta}.$$

Пусть $\omega_2$ касается $[AB]$ в точке $K$, тогда $[O_2K] \perp [AB]$ и $|O_2K|$ — длина радиуса окружности $\omega_2$. Положим $|O_2E| = |O_2K| = x$.

Так как $\widehat{BAD} = 90^\circ - \beta$, то из прямоугольного $\triangle AO_2K$ получаем: $x = |AO_2| \sin (90^\circ - \beta)$. Учитывая, что

$$|AO_2| = |AE| - |O_2E| = 2|O_1A| - |O_2E| = \frac{a}{\sin 2\beta} - x,$$

составляем уравнение

$$x = \left(\frac{a}{\sin 2\beta} - x\right) \cos \beta,$$

решая которое находим:

$$x = \frac{a}{4 \cos^2 \frac{\beta}{2} \sin \beta}.$$

Исследование. По смыслу задачи $0 < x < |O_1A|$. Подставляя значения $x$ и $|O_1A|$, получаем систему неравенств

$$0 < \frac{a}{4 \cos^2 \frac{\beta}{2} \sin \beta} < \frac{a}{2 \sin 2\beta},$$

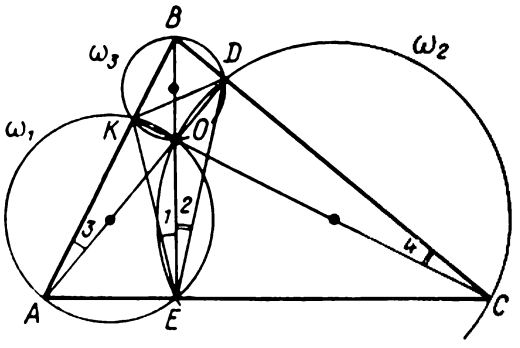


Рис. 44

которая, поскольку $a > 0$ и $0° < \beta < 90°$, равносильна системе

$$0 < \frac{1}{\cos^2 \frac{\beta}{2}} < \frac{1}{\cos \beta},$$

в свою очередь, равносильную системе $0 < \cos \beta < \cos^2 \frac{\beta}{2}$, или $0 < \cos \beta < \frac{1 + \cos \beta}{2}$,

т. е.

$$0 < 2 \cos \beta < \cos^2 \frac{\beta}{2}, \text{ или } 0 < \cos \beta < 1,$$

откуда $0° < \beta < 90°$.
Итак,

$$|O_2K| = \frac{a}{4 \cos^2 \frac{\beta}{2} \sin \beta}, \text{ где } 0° < \beta < 90°.$$

Пример 40. Докажем, что высоты остроугольного треугольника являются биссектрисами треугольника, вершинами которого служат основания высот первого треугольника.

Дано (рис. 44): $\triangle ABC$ остроугольный, $[AD]$, $[BE]$ и $[CK]$ — высоты $\triangle ABC$.

Доказать: $[DA)$, $[EB)$ и $[KC)$ — биссектрисы углов $\triangle DEK$.

Доказательство. Это задача типа $M$. Проведем доказательство чисто геометрическим способом. Для сокращения выкладок введем следующие обозначения: $\angle BEK \cong \angle 1$, $\angle DEB \cong \angle 2$, $\angle DAB \cong \angle 3$, $\angle KCB \cong \angle 4$. Около четырехугольника $AKOE$ опишем окружность $\omega_1$. (Это возможно, так как $\widehat{AKO} + \widehat{AEO} = 180°$.) $\widehat{1} = \widehat{3}$, как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу.

Поскольку $\widehat{CDO} + \widehat{CEO} = 180°$, то можно описать окружность $\omega_2$ около четырехугольника $CDOE$ и с ее помощью доказать, что $\widehat{4} = \widehat{2}$.

Так как прямоугольные треугольники $ABD$ и $CBK$ имеют общий угол $ABC$, то $\widehat{3} = \widehat{4}$. Итак, $\widehat{1} = \widehat{3}$, $\widehat{4} = \widehat{2}$, $\widehat{3} = \widehat{4}$, откуда следует, что $\widehat{1} = \widehat{2}$, т. е. $[EB)$ — биссектриса угла $DEK$.

Аналогично, описывая окружность $\omega_3$ около четырехугольника $BDOK$, можно доказать, что $[DA)$ и $[KC)$ — биссектрисы соответственно углов $KDE$ и $EKD$ треугольника $DEK$.

Пример 41. На окружности $\omega$ взяты точки $A$, $M$ и $B$, причем $\smile AM \cong \smile BM$. На дуге $AMB$ взята точка $K$. Точки $M$ и $K$ соединены с точками $A$ и $B$. Докажем, что

$$|AK| \cdot |BK| = |AM|^2 - |KM|^2. \quad (41.1)$$

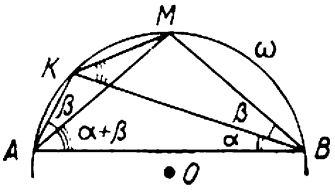

Рис. 45

Доказательство (рис. 45). Эту задачу типа $M$ решим алгебраически. Введем вспомогательный параметр, положив радиус окружности $\omega$ равным $R$. Для сокращения дальнейших выкладок примем $\widehat{ABK} = \alpha$, $\widehat{KBM} = \beta$.

Так как $\triangle ABK$ вписан в окружность $\omega$, то $\frac{|AK|}{\sin\alpha} = 2R$, откуда $|AK| = 2R \sin\alpha$. Аналогично из $\triangle BMK$ получаем:

$$|KM| = 2R \sin\beta,$$

а из $\triangle AMB$ имеем:

$$|AM| = 2R \sin(\alpha + \beta).$$

Так как $\smile AM \cong \smile BM$, то $\widehat{MAB} = \alpha + \beta$, а так как углы $MBK$ и $MAK$ — вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности, то $\widehat{MBK} = \widehat{MAK}$. Тогда $\widehat{BAK} = \alpha + 2\beta$.

Из $\triangle ABK$ получаем:

$$|BK| = 2R \sin(\alpha + 2\beta).$$

Подставляя значения $|AK|$, $|BK|$, $|AM|$ и $|KM|$ в равенство (41.1), приходим к равенству

$$2R \sin\alpha\,(2R \sin(\alpha + 2\beta)) = (2R \sin(\alpha + \beta))^2 - (2R \sin\beta)^2. \quad (41.2)$$

Докажем его путем преобразования левой и правой частей:

$$2R \sin\alpha\,(2R \sin(\alpha + 2\beta)) = 4R^2 \sin\alpha \sin(\alpha + 2\beta);$$

$$(2R \sin(\alpha + \beta))^2 - (2R \sin\beta)^2 = 4R^2(\sin^2(\alpha + \beta) - 4R^2 \sin^2\beta) =$$

$$= 4R^2\left(\frac{1 - \cos(2\alpha + 2\beta)}{2} - \frac{1 - \cos 2\beta}{2}\right) =$$

$$= 4R^2 \sin\alpha \sin(\alpha + 2\beta).$$

Таким образом, равенство (41.2) истинно; следовательно, истинно и равенство (41.1), что и требовалось доказать.

**Задачи для самостоятельного решения**

**39.** Найти радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$, если известно, что $|BC| = a$, $|AC| = b$ и $\widehat{ACB} = \gamma$.

**40.** Из внешней точки проведены к окружности секущая длиной 12 см и касательная, длина которой составляет $\frac{2}{3}$ длины внутреннего отрезка секущей. Найти длину касательной.

**41.** Две конгруэнтные окружности касаются друг друга и каждая из них, в свою очередь, касается внешним образом в точках $A$ и $B$ третьей окружности, радиус которой равен 8 см. Найти радиус каждой из двух первых окружностей, если расстояние между точками $A$ и $B$ равно 12 см.

**42.** В равнобедренный треугольник, основание которого равно $2a$, а высота $h$, вписана окружность, к которой проведена касательная, параллельная основанию. Найти радиус окружности и длину отрезка касательной, заключенного между сторонами треугольника.

**43.** Острый угол прямоугольного треугольника равен $\alpha$. Найти гипотенузу этого треугольника, если радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений катетов, равен $R$.

**44.** Общая хорда двух пересекающихся окружностей видна из их центров под углами 90° и 60°. Найти радиусы этих окружностей, если расстояние между их центрами равно $(\sqrt{3}+1)$ см.

**45.** Общая хорда двух пересекающихся окружностей равна $a$ и служит для одной из окружностей стороной правильного вписанного треугольника, а для другой — стороной вписанного квадрата. Найти расстояние между центрами окружностей.

**46.** В прямоугольный треугольник вписан полукруг так, что его диаметр лежит на гипотенузе, а центр делит ее на отрезки, длины которых равны 15 и 20 см. Найти длину дуги, заключенной между точками касания полукруга с катетами.

**47.** Из точки $A$, расположенной вне круга с центром в точке $O$, проведены две секущие, одна из которых пересекает окружность в точках $B$ и $C$ ($B$ лежит между $A$ и $C$), а другая, проходя через центр круга, пересекает окружность в точках $M$ и $K$ ($M$ лежит между $A$ и $K$). Найти $|BC|$, если $|AC| = a$, $\widehat{CAO} = \alpha$, а $\widehat{COK} = \beta$.

**48.** Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит каждую из двух других его сторон на отрезки, длины которых равны 2 и 23 см. Найти радиус окружности.

**49.** В равнобедренный треугольник, основание которого равно $a$, а угол при основании равен $\alpha$, вписана окружность. Найти радиус второй окружности, касающейся основания, одной из боковых сторон треугольника и вписанной в него окружности.

**50.** Окружность $\omega_1$ касается внутренним образом окружности $\omega_2$. $[AB]$ — хорда окружности $\omega_2$ — касается окружности $\omega_1$. Угол между прямой $AB$ и общей касательной данных окружностей равен $\alpha$. Найти длину хорды $AB$, если радиусы окружностей $\omega_1$ и $\omega_2$ равны соответственно $R_1$ и $R_2$.

**51(8).** Окружности, радиусы которых равны $R$ и $r$, касаются внешним образом. Найти основание равнобедренного треугольника, боковые стороны которого являются общими касательными данных окружностей, а основание касается одной из них.

**52(7).** Биссектрисы $AD$ и $CK$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $O$. Отрезок $KD$ равен 1 м, а вершина $B$ лежит на окружности, проходящей через точки $D$, $K$ и $O$. Найти углы и две другие стороны треугольника $KDO$.

**53.** Окружности, радиусы которых равны $R$ и $\frac{R}{2}$, касаются друг друга внешним образом. Из центра окружности меньшего радиуса проведен отрезок, равный $2R$, и образующий с линией центров угол, равный 30°. Найти длину той части отрезка, которая лежит вне окружностей.

**54(10).** К окружности, вписанной в треугольник, параллельно его основанию проведена касательная, длина отрезка которой, заключенного между боковыми сторонами, равна 2 см. Найти основание треугольника, если его периметр равен 18 см.

**55(9).** Концы отрезка длины $a$ являются центрами окружностей $\omega_1$ и $\omega_2$, радиусы которых конгруэнтны данному отрезку. В один из образовавшихся криволинейных треугольников вписана окружность $\omega_3$. Найти длину хорды, соединяющей точку касания окружностей $\omega_1$ и $\omega_3$ с точкой касания окружностей $\omega_2$ и $\omega_3$.

**56.** Из центра окружности проведены радиусы $OA$ и $OB$. В меньший сегмент круга, отсекаемый хордой $AB$, вписан равносторонний треугольник, одна из сторон которого перпендикулярна хорде $AB$. Найти сторону этого треугольника, если радиус окружности равен $R$, а $\widehat{AOB} = \alpha$.

**57(6).** Точки $A$, $B$, $C$ и $D$ делят окружность на части, отношение длин которых равно 1 : 3 : 5 : 6. Найти углы, образованные касательными, проведенными через эти точки.

**58(5).** Дан равнобедренный прямоугольный треугольник. Доказать, что радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений катетов, равен сумме длин гипотенузы и радиуса окружности, вписанной в треугольник.

**59(4).** Доказать, что сумма квадратов расстояний от точки $M$, взятой на диаметре окружности, до концов любой из параллельных этому диаметру хорд есть для данной окружности величина постоянная.

**60(3).** Дан правильный треугольник $ABC$. Точка $K$ делит сторону $AC$, а точка $M$ — сторону $AB$ на отрезки, отношения длин которых, считая от вершины $A$, соответственно равны 2 : 1 и 1 : 2. Доказать, что отрезок $KM$ конгруэнтен радиусу окружности, описанной около треугольника.

**61(2).** Две окружности пересекаются в точках $A$ и $B$. Через точку $A$ проведены хорды $AC$ и $AD$, каждая из которых, являясь хордой одной из данных окружностей, касается другой из них. Доказать, что $|AC|^2 \cdot |BD| = |AD|^2 \cdot |BC|$.

**62(1).** Через конец $A$ общей хорды $AB$ двух окружностей проведена прямая, пересекающая первую окружность в точке $C$, а вторую — в точке $D$. Касательная к первой окружности в точке $C$

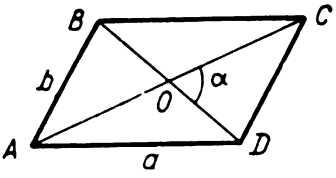

Рис. 46

и касательная ко второй в точке $D$ пересекаются в точке $M$. Доказать, что точки $M$, $C$, $B$ и $D$ лежат на одной окружности.

**63.** Точки $D$, $K$ и $M$ лежат соответственно на сторонах $AB$, $BC$ и $AC$ треугольника $ABC$. Доказать, что окружности, описанные около треугольников $ADM$, $BDK$ и $CKM$, пересекаются в одной точке.

**64(11).** Доказать, что основания перпендикуляров, опущенных на стороны треугольника или на их продолжения из произвольной точки окружности, описанной около этого треугольника, лежат на одной прямой.

**65(12).** Точка пересечения высот равнобедренного треугольника лежит на вписанной в него окружности. Найти косинус угла при основании треугольника.

**66.** Доказать, что если длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию, то центр окружности, вписанной в этот треугольник, и точка пересечения его медиан лежат на прямой, параллельной средней по длине стороне треугольника.

## § 8. Площади

Пример 42. Стороны параллелограмма равны $a$ и $b$ $(a > b)$. Найдем площадь параллелограмма, зная, что острый угол между его диагоналями равен $\alpha$.

Дано (рис. 46): $ABCD$ — параллелограмм, $|AD| = a$, $|AB| = b$, $\widehat{COD} = \alpha$.

Найти: $S_{ABCD}$.

Решение. Это задача типа $F$. Для нахождения $S_{ABCD}$ воспользуемся методом прямого счета. Запишем:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BD| \cdot \sin\alpha.$$

Полагая для краткости $|AC| = d_1$, $|BD| = d_2$, найдем $d_1 d_2$, применяя теорему косинусов к $\triangle AOD$ и $\triangle COD$.

В процессе вычислений последовательно получаем:

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 - 2\frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \cos(180^\circ - \alpha),$$

или

$$a^2 = \frac{d_1^2}{4} + \frac{d_2^2}{4} + \frac{d_1 d_2}{2} \cos\alpha, \qquad (42.1)$$

$$b^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 - 2\frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \cos\alpha,$$

или

$$b^2 = \frac{d_1^2}{4} + \frac{d_2^2}{4} - \frac{d_1 d_2}{2} \cos\alpha. \qquad (42.2)$$

Вычитая почленно равенство (42.2) из равенства (42.1), находим:

$$d_1 d_2 \cos\alpha = a^2 - b^2,$$

откуда $d_1 d_2 = \dfrac{a^2 - b^2}{\cos\alpha}$.

Таким образом,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)\operatorname{tg}\alpha.$$

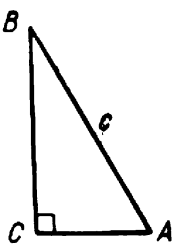

Рис. 47

Исследование мы опускаем.

Пример 43. Найдем площадь прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна $c$, а сумма синусов острых углов равна $q$.

Дано (рис. 47): $\triangle ABC$, $\widehat{C}=90°$, $|AB| = c$, $\sin\widehat{A} + \sin\widehat{B} = q$.

Найти: $S_{\triangle ABC}$.

Решение. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC|$. Но $|AC| = c\sin\widehat{B}$, а $|BC| = c\sin\widehat{A}$. Тогда

$$|AC| + |BC| = cq. \tag{43.1}$$

Кроме того,

$$|AC|^2 + |BC|^2 = c^2. \tag{43.2}$$

Возводя в квадрат обе части уравнения (43.1) и вычитая из результата почленно уравнение (43.2), найдем, что

$$2|AC| \cdot |BC| = c^2(q^2 - 1),$$

откуда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4}c^2(q^2 - 1).$$

Исследование. Так как $q = \sin\widehat{A} + \sin\widehat{B} = \sin\widehat{A} + \sin(90° - \widehat{A}) = 2\sin 45° \cos(\widehat{A} - 45°) = \sqrt{2}\cos(\widehat{A} - 45°)$, а $0 < \cos(\widehat{A} - 45°) \leqslant 1$, то

$$0 < q \leqslant \sqrt{2}. \tag{43.3}$$

Далее, так как $q = \sin\widehat{A} + \sin\widehat{B} = \dfrac{|BC|}{|AB|} + \dfrac{|AC|}{|AB|} = \dfrac{|BC| + |AC|}{|AB|}$, то

$$q > 1. \tag{43.4}$$

Решая систему, составленную из (43.3) и (43.4), приходим к выводу, что

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{4}c^2(q^2 - 1), \text{ если } 1 < q \leqslant \sqrt{2}.$$

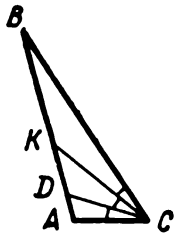

Рис. 48

**Пример 44.** В треугольнике $ABC$ отношение $|BC| : |AC| = 3$ и $\widehat{ACB} = \alpha$. На стороне $AB$ взяты точки $D$ и $K$ такие, что $\widehat{ACD} = \widehat{DCK} = \widehat{KCB}$. Найдем: $|CD| : |CK|$.

**Решение** (рис. 48). Рассматриваемая задача является задачей типа $M$. Решим ее, вводя вспомогательный параметр. Положим, например, $|AC| = b$, тогда $|BC| = 3b$.

Используя площадь $S_{\triangle ABC}$ как опорный элемент (см. пример 9, с. 22), выразим ее двумя способами. С одной стороны,

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACD} + S_{\triangle DCB} = \frac{1}{2}b|CD|\sin\frac{\alpha}{3} + \frac{1}{2}3b|CD|\sin\frac{2\alpha}{3} =$$

$$= \frac{1}{2}b|CD|\left(\sin\frac{\alpha}{3} + 3\sin\frac{2\alpha}{3}\right).$$

С другой стороны,

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ACK} + S_{\triangle KCB} = \frac{1}{2}b|CK|\sin\frac{2\alpha}{3} + \frac{1}{2}3b|CK|\sin\frac{\alpha}{3} =$$

$$= \frac{1}{2}b|CK|\left(\sin\frac{2\alpha}{3} + 3\sin\frac{\alpha}{3}\right).$$

Таким образом,

$$|CD| \cdot \frac{b}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{3} + 3\sin\frac{2\alpha}{3}\right) = |CK| \cdot \frac{b}{2}\left(\sin\frac{2\alpha}{3} + 3\sin\frac{\alpha}{3}\right),$$

откуда

$$\frac{|CD|}{|CK|} = \frac{\sin\frac{2\alpha}{3} + 3\sin\frac{\alpha}{3}}{\sin\frac{\alpha}{3} + 3\sin\frac{2\alpha}{3}} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{3}\cos\frac{\alpha}{3} + 3\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{3} + 6\sin\frac{\alpha}{3}\cos\frac{\alpha}{3}} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{3} + 3}{1 + 6\cos\frac{\alpha}{3}}.$$

**Исследование.** По смыслу задачи $b = |AC| < |CD| < |CK| < |BC| = 3b$; следовательно, $|CD| < |CK|$, или $|CD| : |CK| < 1$. Покажем, что найденное значение отношения $|CD| : |CK|$ удовлетворяет неравенству $|CD| : |CK| < 1$.

Действительно, неравенство

$$\frac{2\cos\frac{\alpha}{3} + 3}{1 + 6\cos\frac{\alpha}{3}} < 1$$

равносильно неравенству

$$\frac{2\cos\frac{\alpha}{3} + 3}{1 + 6\cos\frac{\alpha}{3}} - 1 < 0, \text{ или } \frac{2\cos\frac{\alpha}{3} + 3 - 1 - 6\cos\frac{\alpha}{3}}{1 + 6\cos\frac{\alpha}{3}} < 0,$$

т. е.

$$\frac{2-4\cos\frac{\alpha}{3}}{1+6\cos\frac{\alpha}{3}}<0, \text{ откуда}$$

$$\frac{(-4)\left(\cos\frac{\alpha}{3}-\frac{1}{2}\right)}{6\left(\cos\frac{\alpha}{3}+\frac{1}{6}\right)}<0,$$

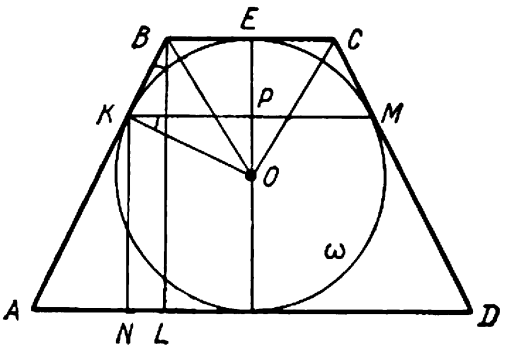


Рис. 49

или

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{3}-\frac{1}{2}}{\cos\frac{\alpha}{3}+\frac{1}{6}}>0.$$

Последнее неравенство справедливо, так как по смыслу задачи $0^\circ<\alpha<180^\circ$, т. е. $0^\circ<\frac{\alpha}{3}<60^\circ$, тогда $\frac{1}{2}<\cos\frac{\alpha}{3}<1$ и, следовательно,

$$\cos\frac{\alpha}{3}-\frac{1}{2}>0,\ \cos\frac{\alpha}{3}+\frac{1}{6}>0.$$

Итак,

$$|CD|:|CK|=\frac{2\cos\frac{\alpha}{3}+3}{1+6\cos\frac{\alpha}{3}}.$$

Пример 45. Около круга описана равнобедренная трапеция. Найдем отношение площади трапеции к площади круга, если известно, что расстояние между точками касания окружности с боковыми сторонами трапеции относится к радиусу круга, как $\sqrt{3}:1$.

Дано (рис. 49): $ABCD$—трапеция, $|AB|=|CD|$, $\omega\,(O,\ |OK|)$—окружность, вписанная в трапецию, $K$ и $M$ — точки касания $\omega$ с отрезками $AB$ и $CD$, $|KM|:|OK|=\sqrt{3}:1$.

Найти: $S_{ABCD}:S_{\omega}$.

Решение. Как и в примере 44, это задача типа $M$. Решим ее также с помощью введения вспомогательного параметра. Положим $|OK|=R$. Подсчитаем площадь трапеции $ABCD$, сделав предварительно некоторые дополнительные построения. Из точки $B$ опустим $[BL]\perp[AD]$, а из точки $K$ — $[KN]\perp[AD]$. Кроме того, проведем радиус $OE$ в точку касания $E$ окружности $\omega$ со стороной $BC$. Пусть $[KM]\cap[OE]=P$.

Так как $[BL] \| [KN]$, то $\triangle AKN \sim \triangle ABL$ и, следовательно, $\widehat{AKN} = \widehat{ABL}$. Поскольку $\widehat{AKN} = \widehat{ABL}$, а $\widehat{NKM} = \widehat{LBC} = 90°$, то $\widehat{AKM} = \widehat{ABC}$, вследствие чего $[BC] \| [KM]$.

Так как $[OE] \perp [BC]$, то $[OE] \perp [KM]$ и, следовательно, $\triangle OKP$ прямоугольный.

Поскольку $\angle ABL \cong \angle PKO$ (углы с взаимно перпендикулярными сторонами), то $\triangle ABL \sim \triangle OKP$ и

$$S_{ABCD} = \frac{|BC| + |AD|}{2} \cdot |BL|.$$

Так как в равнобедренной трапеции, описанной около круга, $|BC| + |AD| = 2|AB|$ и $|BL| = 2R$, то $S_{ABCD} = |AB| \cdot 2R$.

Из подобия $\triangle ABL$ и $\triangle PKO$ следует, что

$$\frac{|BL|}{|AB|} = \frac{|KP|}{|KO|} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

откуда

$$|AB| = \frac{2|BL|}{\sqrt{3}} = \frac{4R\sqrt{3}}{3}.$$

Получаем:

$$S_{ABCD} = \frac{8R^2\sqrt{3}}{3}.$$

Далее, так как $S_\omega = \pi R^2$, то $\frac{S_{ABCD}}{S_\omega} = \frac{8R^2\sqrt{3}}{3\pi R^2} = \frac{8\sqrt{3}}{3\pi}$.

Исследование. По смыслу задачи $\frac{S_{ABCD}}{S_\omega} > 1$. Покажем, что найденное отношение площадей этому неравенству удовлетворяет. Действительно, так как $8\sqrt{3} > 8 \cdot 1,7 = 13,6$, а $3\pi < 3 \cdot 4 = 12$, то $\frac{8\sqrt{3}}{3\pi} > 1$.

Итак, искомое отношение площадей равно $\frac{8\sqrt{3}}{3\pi}$.

**Задачи для самостоятельного решения**

**67.** В треугольнике $ABC$ $|AB| = 26$ см, $|BC| = 30$ см, $|AC| = 28$ см. Из вершины $B$ проведены высота $BH$ и биссектриса $BD$. Найти площадь треугольника $BHD$.

**68.** Катеты прямоугольного треугольника равны 2 и 3 см. Найти биссектрису, проведенную из вершины прямого угла.

**69.** Внутри правильного треугольника, сторона которого равна $a$, взята точка $M$. Найти сумму расстояний от этой точки до сторон треугольника.

**70.** Доказать, что сумма расстояний от любой точки, взятой внутри правильного многоугольника, до прямых, проходящих через стороны, есть величина постоянная.

**71.** Доказать, что в произвольном треугольнике $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$, где $r$ — радиус вписанной в треугольник окружности, а $h_a$, $h_b$, $h_c$ — высоты треугольника.

**72.** Доказать, что площадь треугольника равна $\frac{2}{3} m_a m_b \times \sin(\widehat{m_a m_b})$, где $m_a$ и $m_b$ — медианы треугольника, $(\widehat{m_a m_b})$ — угол между этими медианами.

**73.** Одна из медиан треугольника, площадь которого 16 см², равна 6 см, другая — 4 см. Доказать, что эти медианы взаимно перпендикулярны.

**74.** В равнобедренной трапеции средняя линия равна $a$, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найти площадь трапеции.

**75.** Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна $S$, высота трапеции в 2 раза меньше ее боковой стороны. Найти радиус вписанного в трапецию круга.

**76.** Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна $Q$. Найти боковую сторону трапеции, острый угол которой равен 30°.

**77.** На сторонах треугольника $ABC$ построены квадраты $ABDE$, $BCPT$ и $ACMN$, не перекрывающие друг друга. Площадь треугольника $ABC$ равна 9 см². Найти площадь треугольников $DBT$, $CPM$ и $AEN$.

**78.** В прямоугольном треугольнике один из острых углов равен $\alpha$, расстояние от вершины другого острого угла до центра вписанной в треугольник окружности равно $l$. Найти площадь треугольника.

**79(2).** Через точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, параллельные сторонам треугольника. Эти прямые делят площадь треугольника на шесть частей, из которых три части — треугольники с площадями $S_1$, $S_2$ и $S_3$. Найти площадь данного треугольника.

**80.** Площади треугольников, образованных отрезками диагоналей трапеции с ее основаниями, равны $S_1$ и $S_2$. Найти площадь трапеции.

**81(1).** В треугольнике $ABC$ угол при вершине $C$ равен 60°, а радиус круга, описанного около этого треугольника, равен $2\sqrt{3}$. На стороне $AB$ взята точка $D$ так, что $|AD| = 2|DB|$ и при этом $|CD| = 2\sqrt{2}$. Найти площадь треугольника $ABC$.

**82.** Хорда $AB$ стягивает дугу окружности, длина которой составляет $\frac{1}{3}$ длины всей окружности. На этой дуге взята точка $C$, а на хорде $AB$ взята точка $D$. При этом $|AD| = 2$ см, $|BD| = 1$ см, $|CD| = \sqrt{2}$. Найти площадь треугольника $ABC$.

**83(10).** Найти площадь треугольника, вписанного в окружность, если концы той стороны треугольника, длина которой равна 20 см,

удалены от касательной, проведенной через противолежащую вершину, на 25 и 16 см.

**84(7).** Большее основание трапеции является диаметром описанной около нее окружности, радиус которой равен $R$. Острый угол трапеции равен $\alpha$. Найти площадь трапеции.

**85.** В остроугольном треугольнике $ABC$ сторона $AB$ равна $c$. Из вершины $B$ на сторону $AC$ проведена медиана $BD$. Известно также, что $|BD| = m$, угол $BDA$ острый и $\widehat{BDA} = \beta$. Найти площадь треугольника $ABC$.

**86(5).** Биссектриса острого угла $B$ равнобедренного прямоугольного треугольника $ABC$ пересекает катет $AC$ в точке $M$. На отрезках $CM$ и $AM$, как на сторонах, построены квадраты. Доказать, что площадь одного из квадратов в 2 раза больше площади другого.

**87(4).** Через вершину угла, взятого при основании равнобедренного треугольника и имеющего величину $\alpha$, проведена прямая, пересекающая противолежащую боковую сторону и образующая с основанием угол, равный $\beta$ ($\beta < \alpha$). В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника?

**88(3).** В треугольнике $ABC$ проведены биссектрисы $AD$ и $CE$ соответственно углов $BAC$ и $ACB$. Найти отношение площадей треугольников $ABC$ и $AED$, если $|AB| : |AC| : |BC| = 21 : 28 : 20$.

**89(6).** Через центроид правильного треугольника проведена прямая, параллельная основанию. На этой прямой внутри треугольника взята точка $M$. Доказать, что расстояние от точки $M$ до основания есть среднее арифметическое расстояний от точки $M$ до боковых сторон треугольника.

**90(9).** В равносторонний треугольник вписан круг. С центром в одной из вершин треугольника описан второй круг, радиус которого равен половине длины стороны треугольника. Какую часть площади треугольника занимает площадь общей части кругов?

**91(8).** В трапецию, острые углы при основании которой равны $\alpha$ и $\beta$, вписан круг. Найти отношение площадей трапеции и круга.

**92.** Прямая $AD$ делит треугольник $ABC$ на два треугольника. Доказать, что радиус окружности, вписанной в треугольник $ABC$, меньше суммы радиусов окружностей, вписанных в треугольники $ABD$ и $ACD$.

**93(11).** Вершинами треугольника $MNP$ являются основания высот остроугольного треугольника $ABC$. Найти отношение площади треугольника $MNP$ к площади треугольника $ABC$, если углы треугольника $ABC$ равны соответственно $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$.

**94(12).** Внутри прямого угла взята точка $M$, через которую проводятся всевозможные прямые, пересекающие стороны этого угла. Доказать, что если отрезок, заключенный внутри угла, делится точкой $M$ на два конгруэнтных отрезка, то площадь отсекаемого треугольника будет наименьшей из всех площадей треугольников, отсекаемых прямыми, проходящими через точку $M$.

# ГЛАВА III
# СТЕРЕОМЕТРИЯ

## § 9. Геометрические построения в пространстве

### 1. ПРОСТЕЙШИЕ ПОСТРОЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пример 46. Через данную точку $A$ проведем плоскость, параллельную данной плоскости $P$.

Решение. *Анализ.* Пусть $Q$ — искомая плоскость (рис. 50), т. е. $Q \parallel P$ и $A \in Q$. Построим в плоскости $Q$ различные прямые $l$ и $m$, проходящие через точку $A$, а в плоскости $P$ возьмем произвольно точку $A'$. Построим плоскости $(A', l)$ и $(A', m)$. Так как $l \subset Q \parallel P$, то $l \parallel P$, и поэтому $(A', l) \cap P = l' \parallel l$. Аналогично $(A', m) \cap P = m' \parallel m$.

Так как $Q$ однозначно определяется прямыми $l$ и $m$, то задачу можно свести к построению прямых $l$ и $m$, проходящих через точку $A$ и параллельных $P$.

*Построение.* 1) $A' \in P$; 2) $l' \supset A'$, $m' \supset A'$, $l' \neq m'$; 3) $(A, l')$, $(A, m')$; 4) $m \parallel m'$, $m \supset A$, $l \parallel l'$, $l \supset A$; 5) $Q = (l, m)$.

*Доказательство.* Так как по построению $l \parallel l'$ и $l' \subset P$, то $l \parallel P$. Аналогично $m \parallel P$. Тогда $Q = (l, m) \parallel P$ и $Q \supset A$, т. е. $Q$ — искомая плоскость.

*Исследование.* Покажем, что задача имеет единственное решение. Допустим противное, т. е. что существует еще $Q' \neq Q$ и $Q' \parallel P$, $Q' \subset A$. Тогда $(A, l') \cap Q' = l'' \parallel l'$, и получается, что в плоскости $(A, l')$ через точку $A$ можно провести две прямые $l$ и $l''$, параллельные прямой $l'$, что противоречит аксиоме о параллельных. Полученное противоречие показывает, что задача имеет единственное решение. В частности, если $A \in P$, то $Q = P$.

**Задачи для самостоятельного решения**

**95.** Через данную прямую $l$ провести плоскость $Q$, параллельную другой данной прямой $m$.

**96.** Построить две параллельные плоскости $P$ и $Q$ так, чтобы $P \supset l$, $Q \supset m$, где $l$ и $m$ — данные скрещивающиеся прямые.

**97.** Через данную точку $A$ провести плоскость $Q$, параллельную данной плоскости $P$.

**98.** Через данную точку $A$ провести плоскость $Q$, перпендикулярную данной прямой $l$.

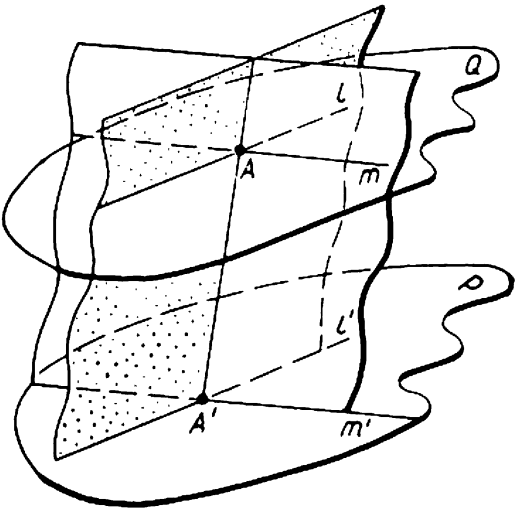


Рис. 50

**99.** Через данную точку $A$ провести прямую $q$, перпендикулярную данной плоскости $P$.

**100.** Через данную прямую $l$ провести плоскость $Q$, перпендикулярную данной плоскости $P$.

**101.** Провести прямую $q$, перпендикулярную каждой из двух данных скрещивающихся прямых $l$ и $m$ и пересекающую каждую из них.

## 2. ПОСТРОЕНИЕ ЗАДАННЫХ МНОЖЕСТВ ТОЧЕК В ПРОСТРАНСТВЕ

Пример 47. Найдем множество точек пространства, равноудаленных от двух данных пересекающихся плоскостей $P_1$ и $P_2$.

Решение. 1) Пусть точка $M$ равноудалена от $P_1$ и $P_2$ (рис. 51). Построим плоскость $Q$, проходящую через точку $M$ и перпендикулярную прямой $a = P_1 \cap P_2$. Для этого опустим из точки $M$ перпендикуляр $ML$ на прямую $a$, затем через точку $L$ проведем $l_1 \perp a$ в плоскости $P_1$. Плоскость, определяемая прямыми $LM$ и $l_1$, будет перпендикулярна $a$: $Q = (l_1, (LM))$.

Затем построим $l_2 = P_2 \cap Q$, т. е. $l_2 \perp a$. Далее, из точки $M$ опустим перпендикуляры $MM_1$ на $l_1$ и $MM_2$ на $l_2$. Так как $a \perp l_1$ и $a \perp (LM)$, то $a \perp (MM_1)$, или $(MM_1) \perp a$. Но из того, что $(MM_1) \perp a$ и $(MM_1) \perp l_1$, следует, что $(MM_1) \perp P_1$, т. е. $|MM_1|$ — расстояние от точки $M_1$ до $P_1$. Аналогично $|MM_2|$ — расстояние от точки $M$ до $P_2$. Тогда $|MM_1| = |MM_2|$ и, кроме того, в прямоугольных треугольниках $MM_1L$ и $MM_2L$ $[LM]$ — общая гипотенуза.

Таким образом, $\triangle MM_1L \cong \triangle MM_2L$, откуда следует, что $\widehat{MLM_1} = \widehat{MLM_2}$. Но по построению $\angle MLM_1$ — линейный угол двугранного угла $MaM_1$ и аналогично $\angle MLM_2$ — линейный угол двугранного угла $MaM_2$. Значит, $[LM)$ — биссектриса $\angle M_1LM_2$.

Итак, любая точка $M$, равноудаленная от $P_1$ и $P_2$, принадлежит биссектрисе угла, образованного пересечением $Q$ с $P_1$ и $P_2$, т. е. множество точек $M$, равноудаленных от $P_1$ и $P_2$, есть биссекторная полуплоскость двугранного угла, образованного плоскостями $P_1$ и $P_2$. Но пересекающиеся плоскости $P_1$ и $P_2$ образуют четыре двугранных угла, и, следовательно, множество точек $M$ есть пара плоскостей $S_1$ и $S_2$, где $S_1$ — объединение двух биссекторных полуплоскостей одной пары вертикальных углов, образованных плоскостями $P_1$ и $P_2$, а $S_2$—объединение двух биссекторных полуплоскостей другой пары вертикальных углов, образованных $P_1$ и $P_2$.

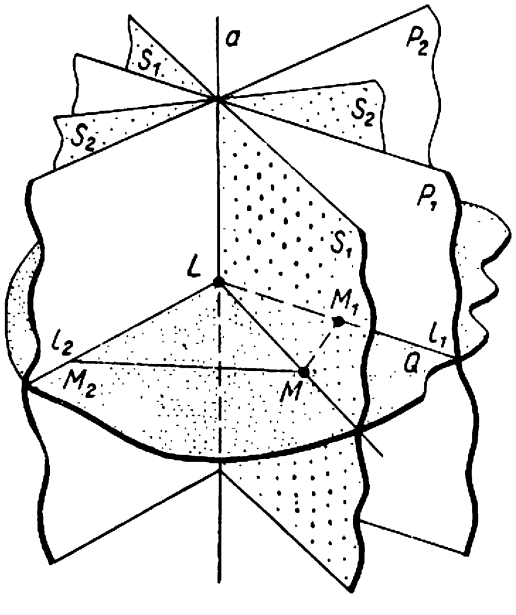


Рис. 51

2) Пусть точка $M$ принадлежит какой-нибудь биссекторной полуплоскости двугранных углов, образованных при пересечении $P_1$ и $P_2$. Построим плоскость $Q$, проходящую через $M$ и перпендикулярную $a$, для чего из точки $M$ опустим перпендикуляр $ML$ на $a$ и затем через точку $L$ проведем $l_1 \perp a$. Тогда плоскость $(l_1, (LM)) = Q$. Далее строим $l_2 \perp a$, $l_2 \supset L$ и из точки $M$ опускаем перпендикуляры $MM_1 \perp l_1$ и $MM_2 \perp l_2$. Рассматривая прямоугольные треугольники $MLM_1$ и $MLM_2$, у которых $\widehat{MLM_1} = \widehat{MLM_2}$, так как $[LM)$ — биссектриса линейного угла $M_1LM_2$ и $[LM]$ — общая гипотенуза, приходим к выводу, что $|MM_1| = |MM_2|$. Таким образом, если точка $M$ принадлежит биссекторной полуплоскости какого-нибудь из четырех двугранных углов, образованных плоскостями $P_1$ и $P_2$, то она одинаково удалена от этих плоскостей.

Итак, искомое множество точек есть объединение биссекторных полуплоскостей четырех двугранных углов, образованных плоскостями $P_1$ и $P_2$, т. е. объединение плоскостей $S_1$ и $S_2$.

Замечание. Нетрудно было бы показать, что $S_1 \perp S_2$. Мы предоставляем сделать это читателю.

**Задачи для самостоятельного решения**

**102.** Найти множество всех точек пространства, равноудаленных от двух различных точек $A$ и $B$.

**103.** Найти множество всех точек пространства, равноудаленных от трех данных неколлинеарных точек $A$, $B$ и $C$.

**104.** Найти множество всех точек пространства, равноудаленных от двух пересекающихся прямых $l_1$ и $l_2$.

**105.** Найти множество всех точек пространства, равноудаленных от четырех данных точек $A$, $B$, $C$ и $D$, не принадлежащих одной плоскости.

**106.** Найти множество всех точек пространства, равноудаленных от четырех данных точек $A$, $B$, $C$ и $D$, принадлежащих одной плоскости.

**107.** Найти множество всех точек пространства, равноудаленных от двух данных параллельных прямых $l_1$ и $l_2$.

**108.** Найти множество всех точек пространства, равноудаленных от трех данных прямых $l_1$, $l_2$ и $l_3$, проходящих через одну точку и не принадлежащих одной плоскости.

**109.** Найти множество всех точек пространства, равноудаленных от трех данных прямых $l_1$, $l_2$ и $l_3$, не лежащих в одной плоскости, если $l_1 \parallel l_2$, $l_1 \parallel l_3$.

**110.** Найти множество всех точек пространства, находящихся на данном расстоянии от данной плоскости $P$.

**111.** Найти множество всех точек пространства, равноудаленных от двух параллельных плоскостей $P_1$ и $P_2$.

**112.** Найти множество всех точек пространства, разность квадратов расстояний от которых до двух различных точек $A$ и $B$ есть величина постоянная.

**113.** Найти множество всех точек пространства, из которых данный отрезок $AB$ виден под прямым углом.

**114.** Найти множество всех точек пространства, сумма квадратов расстояний от которых до двух данных точек $A$ и $B$ есть величина постоянная.

**115.** Найти множество всех точек пространства, отношение расстояний от которых до двух данных точек $A$ и $B$ есть величина постоянная.

## 3. ПРИМЕНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ МНОЖЕСТВ ТОЧЕК И ПРЯМЫХ ПРИ ПОСТРОЕНИЯХ В ПРОСТРАНСТВЕ

Пример 48. Построим множество точек, принадлежащих данной плоскости $P$ и равноудаленных от данных точек $A$ и $B$, не лежащих в плоскости $P$.

Решение. *Анализ.* Пусть точка $M$ (рис. 52) принадлежит искомому множеству точек. Так как $|AM| = |BM|$, то точка $M$ принадлежит плоскости $Q$, проходящей через точку $C$ — середину отрезка $AB$ и перпендикулярной отрезку $AB$. Так как, кроме того, $M \in P$, то искомое множество точек — это $P \cap Q$.

Пусть $P \cap Q = l$. Из того, что $[AB] \perp Q$ и $l \subset Q$, следует, что $(AB) \perp l$. Пусть $(AA') \perp P$, $(BB') \perp P$ и $l \cap (A'B') = D$. Тогда $(AB) \perp (CD)$, а следовательно, и $(A'B') \perp l$, т. е. $l \perp (A'B')$. Таким образом, задачу можно свести к построению $l \subset P$, $l \perp (A'B')$, $l \supset D$.

*Построение.* 1) $(AA') \perp P$, $(BB') \perp P$; 2) $(A'B')$; 3) $C : |AC| = |BC|$; 4) $n : n \supset C$, $n \perp (AB)$, $n \subset (ABB')$; 5) $D : D = n \cap (A'B')$; 6) $l : l \supset D$, $l \perp (A'B')$, $l \subset P$; 7) $Q = (l, n)$.

*Доказательство.* Пусть $M \in l$, тогда $M \in P$. Построим $[AM]$, $[BM]$ и $[CM]$. Так как $(AB) \perp Q$ и $[CM] \subset Q$, то $(AB) \perp [CM]$. Кроме того, $|AC| = |BC|$. Тогда $\triangle ACM \cong \triangle BCM$ (по двум катетам), а поэтому $|AM| = |BM|$, и, таким образом, $l$ — искомое множество точек.

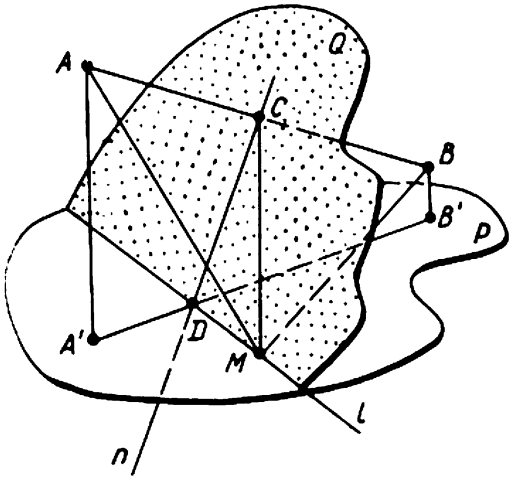

Рис. 52

*Исследование.* Существование решения зависит от взаимного расположения $P$ и $Q$. Если $P \nparallel Q$, то $l = P \cap Q$ — единственное решение, и если $P \parallel Q$, то решений нет. Но так как в случае, когда $P \parallel Q$ из $(AB) \perp Q$, будет следовать, что прямая $AB \perp P$, то приходим к выводу:

1) если $(AB)$ неперпендикулярна $P$, то решение единственное: прямая $l = P \cap Q$; 2) если $(AB) \perp P$, то решений нет.

**Задачи для самостоятельного решения**

**116.** Даны две скрещивающиеся прямые $l_1$ и $l_2$. Через данную точку $A$, не принадлежащую ни $l_1$, ни $l_2$, провести прямую $q$, пересекающую обе данные прямые.

**117.** Через данную точку $A$ провести прямую $q$, перпендикулярную двум данным скрещивающимся прямым $l_1$ и $l_2$.

**118.** Даны три попарно скрещивающиеся прямые $l_1$, $l_2$ и $l_3$. Провести прямую $q$, пересекающую данные прямые соответственно в точках $L_1$, $L_2$ и $L_3$, где $|L_1L_2| = |L_2L_3|$.

**119.** Через данную точку $A$ провести прямую $q$, параллельную данной плоскости $P$ и пересекающую данную прямую $l$.

**120.** Провести прямую $q$, пересекающую две данные прямые $l_1$ и $l_2$ и параллельную третьей данной прямой $l_3$.

**121.** Провести прямую $q$, пересекающую две данные скрещивающиеся прямые $l$ и $m$, перпендикулярно $l$ и параллельно данной плоскости $P$.

**122.** Провести прямую $q$, пересекающую две данные прямые $l_1$ и $l_2$, перпендикулярно третьей прямой $l_3$ и параллельно данной плоскости $P$.

**123.** Провести прямую $q$, принадлежащую данной плоскости $P_1$, параллельную другой данной плоскости $P_2$ и проходящую через точку пересечения данной прямой $l$ с данной плоскостью $P_1$.

**124.** В данной плоскости $P$ провести прямую $q$, перпендикулярную данной прямой $l$, не лежащей в $P$, и проходящую через данную точку $A$.

## 4. ПОСТРОЕНИЯ НА ИЗОБРАЖЕНИЯХ

Пример 49. Треугольник $ABC$ служит изображением треугольника $A_0B_0C_0$, у которого $|A_0B_0| : |B_0C_0| = 2 : 3$. Построим изображение биссектрисы угла $A_0B_0C_0$.

Решение. *1-й способ* (рис. 53). Найдем точки $K$ и $L$ такие, что $|BK| = \frac{1}{2}|AB|$ и $|BL| = \frac{1}{3}|BC|$. Тогда $\triangle BLK$ является изображением равнобедренного треугольника $B_0L_0K_0$, а поэтому медиана $BN$ треугольника $BLK$ является изображением биссектрисы угла $A_0B_0C_0$.

*2-й способ.* Найдя точки $K$ и $L$ (см. *1-й способ*), построим затем $(KM) \parallel (BC)$ и $(LM) \parallel (AB)$. Тогда параллелограмм $BLMK$ является изображением ромба, т. е. его диагональ $BM$ содержит изображение биссектрисы угла $A_0B_0C_0$.

*3-й способ.* Если $[BD)$ — изображение биссектрисы угла $A_0B_0C_0$, то $|AB| : |BC| = |AD| : |DC|$. Но $|AB| : |BC| = 2 : 3$. Таким образом, построив точку $D \in [AC]$

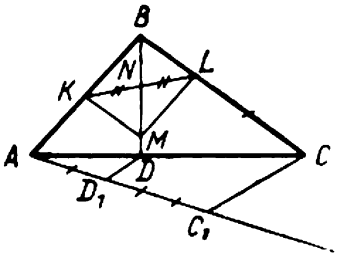

Рис. 53

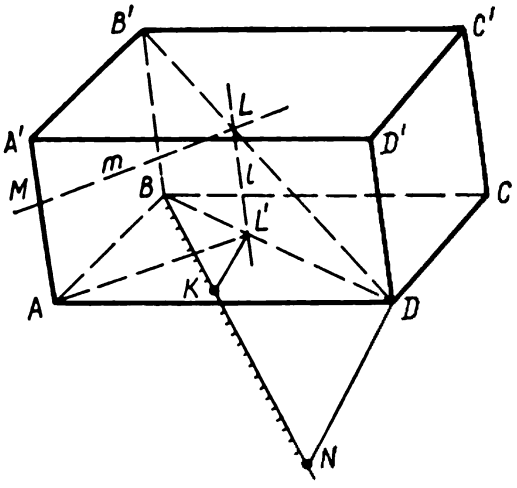


Рис. 54

такую, что $|AD| : |DC| = 2 : 3$, мы получим $[BD)$ — изображение биссектрисы угла $A_0B_0C_0$. (Построение точки $D$ показано на рисунке 53.)

Замечание. На изображение треугольника $A_0B_0C_0$ израсходован лишь один параметр ($|A_0B_0| : |B_0C_0| = 2 : 3$). Поэтому для выполнения метрических построений в принципе еще имеется некоторая свобода (в запасе один параметр). Однако при построении изображения биссектрисы угла $A_0B_0C_0$ нельзя, взяв на отрезке $AC$ произвольно точку $D$, сказать, что $[BD)$ — изображение биссектрисы угла $A_0B_0C_0$, а при изображении, например, биссектрисы угла $B_0A_0C_0$ можно, взяв на отрезке $BC$ произвольно точку $E$, считать $[AE)$ изображение биссектрисы угла $B_0A_0C_0$.

Пример 50. Дано изображение прямоугольного параллелепипеда $A_0B_0C_0D_0A_0'B_0'C_0'D_0'$, у которого отношение сторон основания $|A_0B_0| : |A_0D_0| = 3 : 4$. Построим изображение общего перпендикуляра диагонали $B_0'D_0$ и ребра $A_0A_0'$.

Решение (рис. 54). Пусть $[ML]$ — изображение искомого общего перпендикуляра. Построим $[LL'] \parallel [AA']$ и $[AL']$. Ясно, что так как $[M_0L_0] \perp [A_0A_0']$ и $[M_0L_0] \perp [B_0'D_0]$, а $[B_0B_0'] \parallel [A_0A_0']$, то $[M_0L_0] \perp (B_0B_0'D_0)$. Далее, так как $[L_0L_0'] \parallel [A_0A_0']$, то $[A_0L_0']$ — ортогональная проекция отрезка $M_0L_0$ на плоскость $A_0B_0D_0$. Таким образом, построив точку $L'$ — изображение основания перпендикуляра $A_0L_0'$, мы смогли бы затем найти точку $L$, а затем и точку $M$. Но при построении точки $L'$ следует учесть, что $\triangle ABD$ — изображение прямоугольного $\triangle A_0B_0D_0$, у которого $|A_0B_0| : |A_0D_0| = 3 : 4$. Поэтому, полагая $|A_0B_0| = 3a$, получаем, что $|A_0D_0| = 4a$, и тогда $|B_0D_0| = 5a$.

Далее, из того, что $\triangle A_0B_0L_0' \sim \triangle A_0B_0D_0$:

$$\frac{|B_0L_0'|}{|A_0B_0|} = \frac{|A_0B_0|}{|B_0D_0|},$$

откуда $|B_0L_0'| = \frac{9a}{5}$. Таким образом,

$$\frac{|B_0L_0'|}{|B_0D_0|} = \frac{\frac{9a}{5}}{5a} = \frac{9}{25}.$$

Следовательно, на изображении точка $L'$ будет делить отрезок $BD$ в отношении 9 : 25, считая от точки $B$.

Итак, построение можно выполнить следующим образом: 1) $L' : |BL'| : |BD| = 9 : 25$; 2) $l : l \supset L'$, $l \parallel [AA']$; 3) $L : L = l \cap [B'D]$; 4) $m : m \supset L$, $m \parallel (AL')$; 5) $M : M = m \cap [AA']$. $[ML]$ — изображение искомого общего перпендикуляра.

**Задачи для самостоятельного решения**

**125.** Дано изображение треугольника и двух его высот. Постройте изображение центра окружности, описанной около треугольника.

**126.** Дано изображение прямоугольного треугольника, длины катетов которого относятся, как 3 : 4. Постройте изображение центра, окружности вписанной в этот треугольник.

**127.** Дано изображение равнобедренного прямоугольного треугольника. Постройте изображение квадрата, лежащего в плоскости треугольника, если стороной квадрата служит: 1) катет данного треугольника, 2) гипотенуза данного треугольника.

**128.** Дано изображение правильного шестиугольника. Постройте изображение: 1) апофемы шестиугольника, 2) биссектрисы одного из его внешних углов, 3) перпендикуляра, проведенного через центр к одной из меньших диагоналей.

**129.** Дано изображение ромба, острый угол которого равен 45°. Постройте изображение высоты ромба.

**130.** Дано изображение правильного тетраэдра $A_0B_0C_0D_0$. Точка $K_0$ — середина ребра $B_0D_0$.

1) Постройте изображение прямых $K_0M_0$ и $K_0N_0$, перпендикулярных соответственно прямым $A_0D_0$ и $D_0C_0$ и пересекающих их в точках $M_0$ и $N_0$.

2) Постройте изображение точки пересечения плоскости $K_0M_0N_0$ с прямой, соединяющей $D_0$ и точку пересечения медиан противоположной грани.

**131.** Дано изображение прямоугольного параллелепипеда $A_0B_0C_0D_0A_0'B_0'C_0'D_0'$, у которого $|A_0B_0| : |B_0C_0| : |B_0B_0'| = 3 : 2 : 1$. Постройте изображение двух прямых, проходящих через точку $B_0'$ и соответственно перпендикулярных прямым $B_0C_0'$ и $B_0A_0'$.

**132.** Дано изображение куба $A_0B_0C_0D_0A_0'B_0'C_0'D_0'$. Постройте изображение точек, принадлежащих поверхности куба и равноудаленных:

1) от точек $M_0 \in [A_0B_0]$ и $N_0 \in [C_0D_0]$, 2) от концов одной из диагоналей куба, 3) от центроида грани $A_0A_0'D_0'D_0$ и середины ребра $B_0B_0'$, 4) от вершины $B_0'$ и центроида грани $A_0B_0C_0D_0$.

**133.** Дано изображение правильной треугольной призмы, длина бокового ребра которой относится к длине стороны основания, как 3 : 2. Построить изображение точек, равноудаленных от концов диагонали грани.

**134.** Дано изображение правильной треугольной пирамиды $S_0A_0B_0C_0$, высота которой конгруэнтна стороне основания. Постройте изображение сечения пирамиды плоскостью, перпендикулярной боковому ребру $S_0A_0$ и содержащей сторону основания $B_0C_0$.

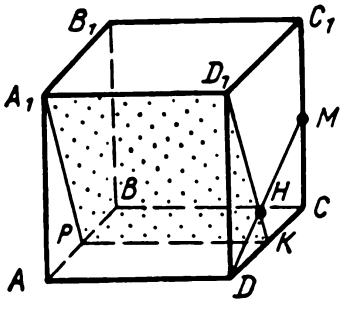

Рис. 55

## § 10. Скрещивающиеся прямые. Угол прямой с плоскостью

Пример 51. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно $a$. На ребре $DC$ взята точка $K$ так, что $|DK| = |KC|$. Найдем расстояния между следующими парами прямых:

а) $AA_1$ и $D_1K$,

б) $AD$ и $D_1K$,

в) $BD$ и $D_1K$.

Построение изображения (рис. 55). Пусть фигура $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — изображение куба. Это изображение полное и метрически определенное, поскольку при его построении израсходованы все пять параметров. Так как в стереометрии изображением фигуры-оригинала $\Phi_0$ можно считать любую фигуру $\Phi$, подобную параллельной проекции фигуры $\Phi_0$ на некоторую плоскость, то фигуру $ABCDA_1B_1C_1D_1$ мы можем считать изображением куба с ребром, длина которого равна $a$. На полученном изображении построим точку $K$ — середину отрезка $DC$ и отрезок $D_1K$.

Решение. а) Так как $(A_1D_1) \perp (A_1AB)$ и $[AA_1] \subset (A_1AB)$, то $(A_1D_1) \perp (AA_1)$. Аналогично $(A_1D_1) \perp (D_1K)$. Таким образом, $|A_1D_1| = a$ — искомое расстояние между прямыми $AA_1$ и $D_1K$. Более того, $[A_1D_1]$ — общий перпендикуляр скрещивающихся прямых $AA_1$ и $D_1K$.

б) Так как $K \in (A_1D_1K)$ и $K \in (ABC)$, то плоскости $A_1D_1K$ и $ABC$ пересекаются по прямой, проходящей через точку $K$. Пусть $(A_1D_1K) \cap (ABC) = (PK)$.

Так как $(A_1D_1) \parallel (ABC)$, то $(PK) \parallel (A_1D_1)$. Построим еще $[A_1P]$. Нетрудно показать, что $(AD) \parallel (A_1D_1K)$, и, таким образом, расстояние между прямыми $AD$ и $D_1K$ равно расстоянию от прямой $AD$ до плоскости $A_1D_1K$.

Так как построение перпендикуляра из точки $D$ к прямой $D_1K$ в плоскости $D_1DC$ должно быть выполнено на метрически определенном изображении, то точку $H$ нельзя взять на прямой $D_1K$ произвольно.

Построим отрезок $DM$, где точка $M$ — середина $[CC_1]$. Тогда из конгруэнтности треугольников $DD_1K$ и $DCM$ следует, что $\widehat{DKH} = \widehat{CMD}$, т. е. $\widehat{HDK} + \widehat{DKH} = 90°$, и, следовательно, в треугольнике $DKH$: $\widehat{DHK} = 90°$. Итак, $(DH) \perp (D_1K)$.

Покажем, что $(DH) \perp (A_1D_1K)$. Так как $(AD) \perp (DD_1C)$, то $(DH) \perp (AD)$ и $(DH) \perp (PK)$. Итак, $(DH) \perp (D_1K)$ и $(DH) \perp (PK)$, следовательно, $(DH) \perp (A_1D_1K)$, и, таким образом, $|DH|$ — искомое расстояние.

Выражая двумя способами площадь треугольника $DD_1K$, т. е.

используя ее как опорный элемент, получаем равенство

$$|DH| \cdot |D_1K| = |DK| \cdot |DD_1|,$$

с помощью которого находим:

$$|DH| = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

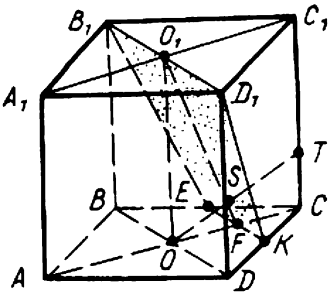

Рис. 56

в) (Рис. 56.) В плоскости $ABC$ построим прямую $EK$, проходящую через точку $K$ и через точку $E$ — середину ребра $BC$. Тогда $(BD) \parallel (EK)$. Построим плоскость $B_1EK$.

Так как $(BD) \parallel (EK)$, то $(BD) \parallel (B_1EK)$, и, таким образом, искомое расстояние равно расстоянию от прямой $BD$ до плоскости $B_1EK$. Чтобы найти это расстояние, проведем из точки $O$ перпендикуляр на плоскость $B_1EK$. Основание этого перпендикуляра — точка $S$ не может быть взята произвольно, так как изображение метрически определенное. Выполним построение следующим образом.

Построим $F = (OC) \cap (EK)$, $O_1 = (A_1C_1) \cap (B_1D_1)$ и $[O_1F]$. Возьмем далее на ребре $CC_1$ такую точку $T$, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{|CT|}{|OC|} = \frac{|OF|}{|OO_1|}.$$

Так как $|OC| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $|OF| = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ и $|OO_1| = a$, то $|CT| = \frac{a}{4}$. Построим отрезок $OT$ и точку $S = (OT) \cap (O_1F)$.

Так как по построению прямоугольные треугольники $OO_1F$ и $OCT$ подобны, то $\widehat{O_1FO} = \widehat{OTC}$ и $\widehat{OO_1F} = \widehat{COT}$, а тогда $\widehat{O_1FO} + \widehat{COT} = 90^\circ$ и, следовательно, $(OT) \perp (O_1F)$.

Докажем теперь, что $(OT) \perp (B_1EK)$. Так как $(B_1D_1) \perp (AA_1C)$ и $(OT) \subset (AA_1C)$, то $(OT) \perp (B_1D_1)$.

Итак, $(OT) \perp (B_1D_1)$ и $(OT) \perp (O_1F)$. Таким образом, $(OT) \perp (B_1EK)$. Тогда $|OS|$ — искомое расстояние.

Выражая двумя способами площадь треугольника $O_1OF$, получаем равенство

$$|OS| \cdot |O_1F| = |OF| \cdot |OO_1|,$$

откуда, так как $|OF| = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, $|OO_1| = a$, $|O_1F| = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$, находим, что $|OS| = \frac{a}{3}$.

Пример 52. Окружность радиуса $R$ и равносторонний треугольник со стороной, равной $R\sqrt{3}$, лежат во взаимно перпендикулярных плоскостях. Отрезок, соединяющий центр окружности с центроидом треугольника, образует с данными плоскостями углы,

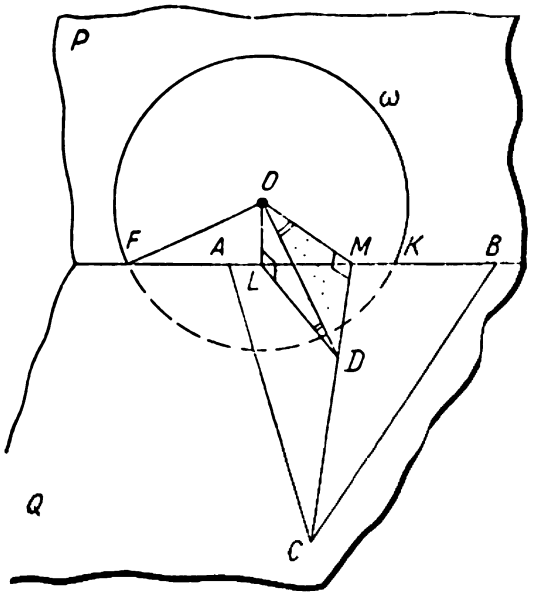


Рис. 57

равные 30°, и одна из сторон треугольника принадлежит плоскости окружности. Найдем длину той части стороны треугольника, которая лежит внутри окружности.

Построение изображения. Пусть изображение, представленное на рисунке 57, является изображением заданной фигуры ($[OF]$, $[LD]$, $[CM]$ и $[OM]$ получены в процессе дополнительных построений, т. е. при подсчете параметрического числа изображения их учитывать не следует).

За основную примем плоскость $P$, в которой лежит окружность $\omega$. Тогда каждая точка на изображении является заданной; следовательно, изображение полное. Найдем его параметрическое число. Считая треугольник $ABC$ изображением правильного треугольника, мы расходуем два параметра, считая плоскость $P$ изображением плоскости, перпендикулярной к плоскости данного треугольника, — расходуем один параметр. Пусть точка $O$ — изображение центра данной окружности, а точка $D$ — изображение центроида данного треугольника. Считая каждый из углов, образованных отрезком $OD$ с плоскостью $P$ и с плоскостью $Q$ ($Q$ —плоскость треугольника $ABC$), изображением углов, равных 30°, мы расходуем еще один параметр.

Действительно, пусть точка $L$ — середина хорды $FK$ и $[CM]$ — медиана треугольника $ABC$. Тогда $(OL) \perp (FK)$ и $(CM) \perp (FK)$. Построив прямые $LD$ и $OM$, мы легко обнаружим, что $[LD]$ — проекция отрезка $OD$ на плоскость $Q$, а $[OM]$ — проекция отрезка $OD$ на плоскость $P$. Но тогда $\widehat{ODL} = \widehat{DOM} = 30^\circ$, и поэтому $|OL| = \frac{1}{2}|OD|$ и $|DM| = \frac{1}{2}|OD|$. Таким образом, принятие того, что на изображении $\widehat{ODL} = \widehat{DOM} = 30^\circ$, налагает условие: $|OF| : |DM| = 1$, что, как известно, влечет за собой расход одного параметра.

Считая, наконец, что $|OF| : |AB| = R : R\sqrt{3}$, мы расходуем еще один параметр. Таким образом, $p = 5$.

Дано: $\omega(O, |OF|)$, $|OF| = R$, $\triangle ABC$, $|AB| = |BC| = |AC| = R\sqrt{3}$, $[AB] \in P$, $P \perp Q$, $D$ — центроид $\triangle ABC$, $[OD]$, $\omega \cap (AB) = \{F, K\}$.

Найти: $|AK|$.

Решение. Найдем $|AK|$ прямым счетом: $|AK| = |FK| - |AF|$. Но так как $|FK| = 2|FL|$, а $|AF| = |FL| - |AL|$, то $|AK| = |FL| + |AL|$.

Из треугольника $ABC$ находим:

$$|DM| = \frac{1}{3}|CM| = \frac{R}{2};$$

тогда из прямоугольного треугольника $ODM$ получаем, что $|OD| = R$, и, следовательно, $|OM| = \frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Так как $|OL| = |DM|$, то $|OL| = \frac{R}{2}$. Из прямоугольного треугольника $OLM$ имеем:

$$|LM| = \sqrt{|OM|^2 - |OL|^2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда, так как $|AM| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, то

$$|AL| = |AM| - |LM| = \frac{R}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

Далее, из прямоугольного треугольника $FOL$ запишем

$$|FL| = \sqrt{|OF|^2 - |OL|^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Таким образом,

$$|AK| = \frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{R}{2}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = \frac{R}{2}(2\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

Исследование. По смыслу задачи $|AK| > \frac{1}{2}|FK|$. Действительно, так как $|OM| = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, а $|OK| = R$, то $|OM| < |OK|$, и, следовательно, точка $M$ лежит внутри окружности $\omega$. Но $|OM| > |OL|$, т. е. $M \in [LK]$.

С другой стороны, точка $A$ является внутренней точкой отрезка $FL$, так как $|LM| = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, а $|AM| = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, т. е. $|AM| > |LM|$.

Убедимся в том, что найденное значение $|AK|$ удовлетворяет неравенству $|AK| > \frac{1}{2}|FK|$, т. е. что выполняется неравенство

$$\frac{R}{2}(2\sqrt{3} - \sqrt{2}) > \frac{R}{2}\sqrt{3},$$

$$\text{или } 2\sqrt{3} - \sqrt{2} > \sqrt{3},$$

$$\text{или } \sqrt{3} > \sqrt{2}.$$

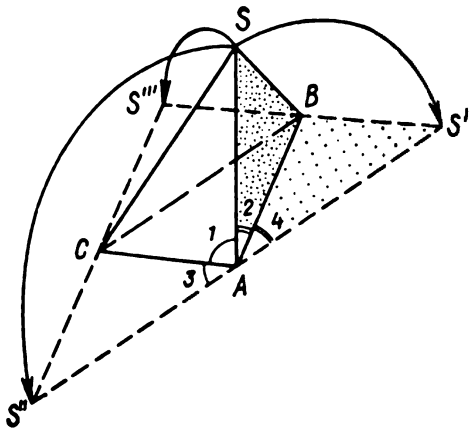


Рис. 58

Последнее неравенство истинно; следовательно,

$$|AK| = \frac{R}{2}(2\sqrt{3} - \sqrt{2}).$$

Пример 53. В треугольной пирамиде сумма трех плоских углов при каждой из вершин основания равна 180°. Найдем расстояние между скрещивающимися ребрами пирамиды, если стороны основания равны 4, 5 и 6 см.

Построение изображения. Пусть четырехугольник $SABC$ с его диагоналями — изображение заданной пирамиды с вершиной в точке $S$ (рис. 58). Изображение пирамиды полное, $p = 4$.

Действительно, считая, что

$$|BC| : |AC| : |AB| = 4 : 5 : 6,$$

мы расходуем два параметра.

Найдем число параметров, израсходованных на изображение плоских углов, сумма которых равна 180°. Если разрезать пирамиду по ребрам $SA$, $SB$, $SC$ и развернуть затем боковые грани, как показано на рисунке 58, то мы получим «большой» треугольник $S'S''S'''$. Действительно, так как при повороте величина угла сохраняется, то $\widehat{1} = \widehat{3}$, $\widehat{2} = \widehat{4}$, и, следовательно, $\widehat{3} + \widehat{BAC} + \widehat{4} = 180°$, т. е. $A \in (S'S'')$. Аналогично $C \in (S''S''')$ и $B \in (S'S''')$. В треугольнике $S'S''S'''$, как нетрудно убедиться, $[AB]$, $[AC]$ и $[BC]$ — средние линии, и поэтому треугольники $SAB$, $SBC$, $SAC$ и $ABC$ являются изображениями четырех конгруэнтных треугольников. Считая, что

$$|SA| : |SB| = 4 : 5 \text{ и } |SA| : |SC| = 4 : 6, \qquad (53.1)$$

мы расходуем два параметра. Таким образом, $p = 4$, и, следовательно, у нас в запасе остался еще один свободный параметр. При этом с учетом (53.1) и условия $|BC| : |AC| : |AB| = 4 : 5 : 6$ оказывается определенным с точностью до подобия каждый из четырех вышеуказанных конгруэнтных треугольников, а потому и пирамида $SABC$.

Дано: $SABC$ — пирамида, $S$ — вершина, $|BC| = 4$ см, $|AC| = 5$ см, $|AB| = 6$ см, $\widehat{SAB} + \widehat{SAC} + \widehat{BAC} = 180°$, $\widehat{SBA} + \widehat{SBC} + \widehat{ABC} = 180°$, $\widehat{SCA} + \widehat{SCB} + \widehat{ACB} = 180°$.

Найти: расстояния между $(BC)$ и $(SA)$, $(AC)$ и $(SB)$, $(AB)$ и $(SC)$.

**Решение.** Так как в $\triangle ABC$ $|BC| = 4$ см, $|AC| = 5$ см, $|AB| = 6$ см, то в $\triangle SAB$ $|SA| = 4$ см, $|SB| = 5$ см. Тогда $|SC| = 6$ см.

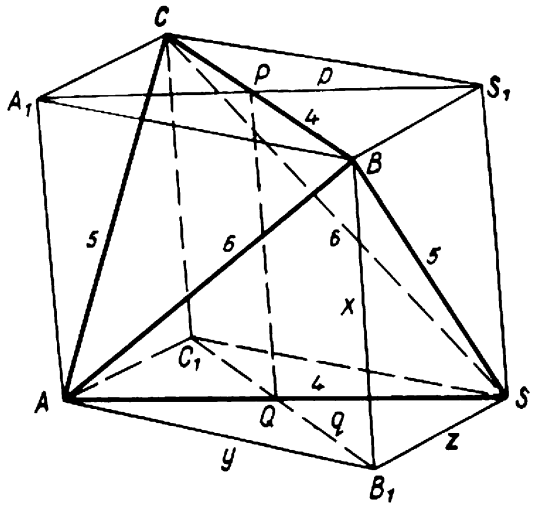

Рис. 59

Достроим пирамиду $SABC$ (рис. 59) до параллелепипеда, для чего выполним следующие построения. Пусть точка $P$ — середина ребра $BC$, а точка $Q$ — середина ребра $SA$. Построим $[PQ]$. Проведем далее в плоскости $BCQ$ через точку $Q$ $q \parallel (BC)$, а в плоскости $SAP$ через точку $P$ $p \parallel (SA)$ и затем через точки $B$, $C$, $A$ и $S$ прямые, параллельные прямой $PQ$. Пусть эти прямые пересекают $p$ и $q$ соответственно в точках $B_1$, $C_1$ и $A_1$, $S_1$. Построив, наконец, $[AB_1]$, $[SB_1]$, $[AC_1]$, $[SC_1]$ и $[A_1C]$, $[A_1B]$, $[S_1C]$, $[S_1B]$, мы, таким образом, получим параллелепипед $SB_1AC_1S_1BA_1C$, в который вписана данная пирамида $SABC$.

Из проведенного дополнительного построения ясно, что четырехугольник $AC_1SB_1$ — параллелограмм, причем так как в нем $|SA| = |B_1C_1|$, то этот параллелограмм — прямоугольник. Нетрудно показать, что четырехугольники $AA_1CC_1$ и $AA_1BB_1$ также прямоугольники. Таким образом, построенный нами параллелепипед прямоугольный, т. е. $|BB_1|$ — это расстояние между плоскостями $A_1BC$ и $AB_1C_1$, в которых лежат соответственно прямые $BC$ и $SA$, поэтому $|BB_1|$ — это расстояние также между скрещивающимися ребрами $BC$ и $SA$. Аналогично, $|AB_1|$ и $|SB_1|$ — это расстояния между двумя другими парами скрещивающихся ребер пирамиды.

Положив $|BB_1| = x$, $|AB_1| = y$ и $|SB_1| = z$, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, & (53.2) \\ x^2 + z^2 = 25, & (53.3) \\ y^2 + z^2 = 16. & (53.4) \end{cases}$$

Складывая почленно эти уравнения, получим: $2(x^2 + y^2 + z^2) = 77$, откуда

$$x^2 + y^2 + z^2 = 38{,}5. \qquad (53.5)$$

Решая далее совместно уравнения (53.2), (53.3), (53.4) и (53.5), находим, что

$$\begin{cases} x^2 = 22{,}5, \\ y^2 = 13{,}5, \\ z^2 = 2{,}5, \end{cases} \text{ откуда } \begin{cases} x_{1,2} = \pm\sqrt{22{,}5}, \\ y_{1,2} = \pm\sqrt{13{,}5}, \\ z_{1,2} = \pm\sqrt{2{,}5}. \end{cases}$$

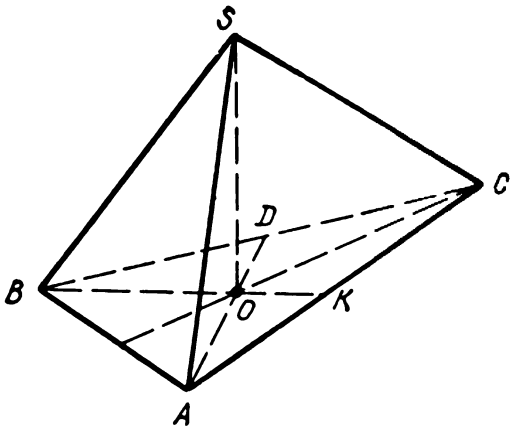


Рис. 60

Исследование. По смыслу задачи $x$, $y$ и $z$ — это расстояния, т. е. $x > 0$, $y > 0$ и $z > 0$. Таким образом, расстояние между ребрами $BC$ и $SA$ равно $\sqrt{22{,}5}$ см, между ребрами $AC$ и $SB$ $\sqrt{13{,}5}$ см и между ребрами $AB$ и $SC$ равно $\sqrt{2{,}5}$ см.

Рассмотрим теперь задачи типа $M$.

Пример 54. Плоские углы при одной из вершин треугольной пирамиды прямые. Докажем, что высота пирамиды, проведенная из этой вершины, проходит через точку пересечения высот противоположной грани.

Построение изображения. Пусть четырехугольник $SABC$ с его диагоналями является изображением данной пирамиды (рис. 60). Это изображение полное и, как нетрудно убедиться, метрически определенное ($p = 5$).

Дано: $SABC$ — пирамида, $S$ — вершина, $[SB] \perp [SC]$, $[SA] \perp [SB]$, $[SA] \perp [SC]$, $[SO]$ — высота пирамиды.

Доказать: $O$ — точка пересечения высот $\triangle ABC$.

Доказательство. Так как $[SA] \perp [SB]$ и $[SA] \perp [SC]$, то $[SA] \perp (SBC)$. Но $(BC) \subset (SBC)$, тогда $[SA] \perp [BC]$. Проведем через точку $O$ — основание высоты $SO$ — прямую $AD$. Так как $[SO] \perp (ABC)$, то $[AO]$ — проекция отрезка $SA$ на плоскость $ABC$. Но $[SO] \perp (ABC)$, т. е. $[SO] \perp (BC)$, и, следовательно, $[AO] \perp \perp [BC]$, или $[AD] \perp [BC]$. Таким образом, точка $O$ принадлежит высоте $AD$ основания пирамиды. Точно также можно убедиться в том, что точка $O$ принадлежит и высоте $BK$ $\triangle ABC$. Но тогда точка $O$ принадлежит и третьей высоте $\triangle ABC$. Итак, мы доказали, что точка $O$ — основания высоты данной пирамиды — является точкой пересечения высот ее грани $ABC$.

Замечание. Рассмотренный пример можно было решить и применяя векторы. Так, пусть $\vec{SA} = \vec{a}$, $\vec{SB} = \vec{b}$, $\vec{SC} = \vec{c}$, $O \in [AD]$. Докажем, что $[AD] \perp [BC]$.

Имеем: $\vec{BC} \cdot \vec{AD} = (\vec{c} - \vec{b}) \cdot \vec{AD} = (\vec{c} - \vec{b})(\lambda \vec{AO}) = \lambda(\vec{c} - \vec{b})\vec{AO} = \lambda(\vec{c} - \vec{b}) \times \times (\vec{SO} - \vec{a}) = \lambda(\vec{c} - \vec{b})\vec{SO} - \lambda \vec{c}\,\vec{a} + \lambda \vec{b}\,\vec{a} = \lambda(\vec{c} - \vec{b})\vec{SO} = 0$. Таким образом, $[AD] \perp [BC]$.

Пример 55. В правильном тетраэдре $SABC$ отрезок $DO$ соединяет середину $D$ ребра $SA$ с центроидом $O$ грани $ABC$, а точка $E$ — середина ребра $SB$. Найдем угол между прямыми $DO$ и $CE$.

Построение изображения. Пусть четырехуголь-

ник $SABC$ с его диагоналями (рис. 61) является изображением заданного тетраэдра. Как нетрудно убедиться, это изображение полное, $p = 5$.

Пусть точка $D$ — середина ребра $SA$, точка $E$ — середина ребра $SB$ и точка $O$ — центроид грани $ABC$. Построим прямые $OD$ и $CE$. (Эти построения не влекут за собой расхода параметров.)

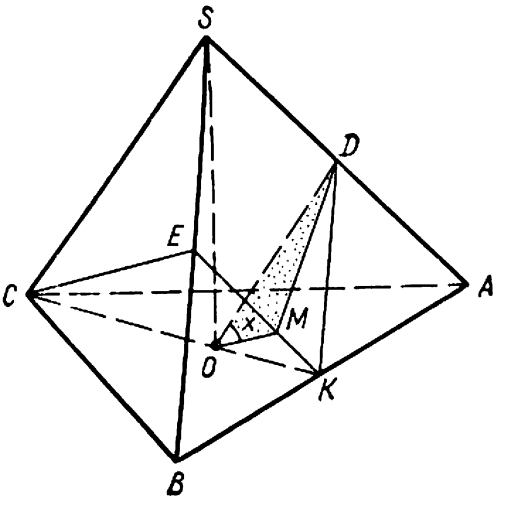

Рис. 61

Р е ш е н и е. Выполним сначала следующие дополнительные построения:

1) $K : |AK| = |KB|$; 2) $[KE]$;

3) $M : |KM| = \frac{1}{3}|KE|$; 4) $(OM)$; 5) $[DM]$.

Так как в $\triangle CEK$

$$|KM| = \frac{1}{3}|KE| \text{ и } |KO| = \frac{1}{3}|KC|,$$

то $(OM) \parallel (CE)$, и поэтому $\widehat{((OD), (CE))} = \widehat{MOD}$. Положим $\widehat{MOD} = x$.

Решим задачу алгебраически. Для определения $x$ подсчитаем стороны $\triangle MOD$. Введем с этой целью вспомогательный параметр, приняв длину ребра данного тетраэдра равной $a$.

Тогда из прямоугольного $\triangle SAO$ имеем:

$$|OD| = \frac{1}{2}|SA| = \frac{a}{2};$$

из подобия $\triangle KMO$ и $\triangle KEC$ запишем:

$$\frac{|OM|}{|CE|} = \frac{|KO|}{|KC|} = \frac{1}{3},$$

откуда

$$|OM| = \frac{1}{3}|CE| = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

Из $\triangle DKM$ получим:

$$|DM|^2 = |DK|^2 + |KM|^2 - 2|DK| \cdot |KM| \cos \widehat{DKM}.$$

Но точки $D$, $E$ и $K$ — середины сторон правильного $\triangle SAB$, т. е. $|DK| = \frac{a}{2}$ и $\widehat{DKE} = 60°$. Кроме того, $|KM| = \frac{1}{3}|KE| = \frac{a}{6}$.

Таким образом, получаем, что $|DM|^2 = \frac{7}{36}a^2$.

Так как $|DM|^2 < |OD|^2 + |OM|^2$, то в $\triangle MOD$ $\angle MOD$ острый (следовательно, величина именно его, а не смежного с ним угла, является искомой) и

$$|DM|^2 = |OM|^2 + |OD|^2 - 2\,|OM| \cdot |OD| \cos x,$$

или

$$\frac{7}{36}a^2 = \frac{3a^2}{36} + \frac{a^2}{4} - 2\frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{a}{2} \cos x,$$

откуда

$$\cos x = \frac{5\sqrt{3}}{18}.$$

Исследование. По смыслу задачи $0° < x < 90°$, т. е. $0 < \cos x < 1$. Найденное значение $\cos x$ этой системе неравенств удовлетворяет. Таким образом, угол между прямыми $OD$ и $CE$ равен $\arccos \frac{5\sqrt{3}}{18}$.

**Задачи для самостоятельного решения**

**135(3).** В точках $A$ и $B$, принадлежащих плоскости $P$, восставлены перпендикуляры $AC$ и $BD$ к плоскости $P$. Доказать, что прямые $BC$ и $AD$ пересекаются, и найти расстояние от точки их пересечения до плоскости $P$, если известно, что $|AC| = a$ и $|BD| = b$ $(a > b)$.

**136.** Высота правильной четырехугольной призмы равна $H$. Найти расстояние от стороны основания, длина которой равна $a$, до непересекающей ее диагонали призмы.

**137.** Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб со стороной, равной $a$, и острым углом $\varphi$. Найти расстояние от вершины $B_1$ верхнего основания до диагонали $A_1D$ боковой грани, если боковое ребро призмы равно $H$.

**138.** Найти расстояние между диагональю куба и непересекающим ее ребром, если ребро куба равно $a$.

**139 (4).** Найти расстояние между непересекающимися диагоналями смежных граней куба, ребро которого равно $a$.

**140.** В равностороннем цилиндре, радиус основания которого равен $R$, точка окружности верхнего основания соединена с точкой окружности нижнего основания. Проведенная прямая образует с плоскостью основания угол, равный $\alpha$. Найти расстояние между этой прямой и осью симметрии цилиндра.

**141(6).** Между двумя параллельными плоскостями проведены перпендикуляр и наклонная, образующая с каждой из плоскостей угол, равный $\alpha$. Найти расстояние между серединами отрезков наклонной и перпендикуляра, заключенных между данными плоскостями, если длина отрезка перпендикуляра равна $2a$, а расстояние между концами наклонной и перпендикуляра в каждой из плоскостей равно $b$.

**142.** Отрезок $AB$, длина которого равна $a$, параллелен плоскости $P$. Через точки $A$ и $B$ проведены прямые, перпендикулярные отрезку $AB$ и образующие с плоскостью $P$ углы, соответственно равные $\alpha$ и $\beta$. Расстояние между точками пересечения проведенных прямых с плоскостью $P$ равно $b$. Найти расстояние между отрезком $AB$ и плоскостью $P$.

**143.** Отрезок, длина которого равна $a$, имеет концы на двух взаимно перпендикулярных плоскостях и образует с одной из них угол, равный 30°, а с другой угол 45°. Найти расстояние между проекциями концов данного отрезка на линию пересечения плоскостей.

**144 (9).** В плоскости $P$ лежит равносторонний треугольник $ABC$, у которого $|AB| = a$. На перпендикуляре к плоскости $P$, проходящем через точку $A$, отложен отрезок $AK$ такой, что $|AK| = a$. Найти расстояние между прямыми $AB$ и $CK$.

**145.** Через верхний конец образующей цилиндра под углом, равным $\alpha$, проведена касательная к цилиндру. Найти расстояние от центров оснований цилиндра до этой касательной, если высота цилиндра и радиус его основания равны соответственно $H$ и $R$.

**146.** К плоскости угла через его вершину проведена наклонная, образующая с его сторонами конгруэнтные углы. Найти отношение величин углов, которые образует проекция наклонной на плоскость данного угла со сторонами этого угла.

**147.** Наклонная $AB$ образует с плоскостью $P$ угол, равный 45° и конгруэнтный углу между проекцией этой наклонной и прямой $AC$, лежащей в плоскости $P$. Найти $\widehat{BAC}$.

**148.** В правильной треугольной пирамиде высота равна стороне основания. Найти угол, образованный боковым ребром с плоскостью основания.

**149.** Прямая $AB$ лежит в плоскости $P$, по одну сторону от которой через точку $B$ проведены прямые $BC$ и $BD$, перпендикулярные прямой $AB$ и образующие с плоскостью $P$ углы, равные 50° и 15°. Найти $\widehat{CBD}$.

**150.** В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ диагонали $B_1D$ и $BD_1$ взаимно перпендикулярны. Найти угол между диагоналями $B_1D$ и $A_1C$.

**151.** Квадрат с проведенной в нем диагональю свернут в виде боковой поверхности правильной четырехугольной призмы, и, таким образом, диагональ квадрата стала неплоской ломаной. Найти углы между отрезками этой ломаной.

**152.** Диагональ правильной четырехугольной призмы образует с плоскостью основания угол, равный 45°. Найти угол, образованный этой диагональю с пересекающей ее диагональю боковой грани.

**153(5).** Точка $D$ — середина ребра $SA$, точка $E$ — середина высоты $SO$ правильного тетраэдра $SABC$. Найти угол между прямыми $OD$ и $CE$.

**154.** Доказать, что в правильной треугольной пирамиде пары непересекающихся ребер взаимно перпендикулярны.

**155 (8).** Доказать, что высота $SO$ треугольной пирамиды $SABC$ пересекает высоту $AD$ основания в том и только в том случае, когда $[SA] \perp [BC]$.

**156 (2).** Доказать, что если одна из высот треугольной пирамиды проходит через точку пересечения высот противоположной грани, то и другие высоты этой пирамиды обладают тем же свойством.

**157 (1).** Доказать, что если противоположные ребра треугольной пирамиды попарно перпендикулярны, то все высоты пирамиды пересекаются в одной точке.

**158.** В правильном тетраэдре $SABC$ $[AD]$ — медиана $\triangle ABC$, точка $E$ — середина ребра $SB$. Найти угол между прямыми $AD$ и $CE$.

**159 (7).** В тетраэдре $SABC$ $[SA] \perp (ABC)$, $[AB] \perp [AC]$ и $|SA| = |AB| = |AC|$. Найти угол между прямыми $OD$ и $CE$, если точка $D$ — середина ребра $SA$, точка $E$ — середина ребра $SB$, а точка $O$ — центроид основания $ABC$ тетраэдра.

**160 (11).** В основании прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$ с острым углом $DAB$, равным $\gamma$. Диагонали $AB_1$ и $BC_1$ боковых граней образуют с плоскостью основания углы, соответственно равные $\alpha$ и $\beta$. Найти угол между этими диагоналями.

**161 (12).** Правильный тетраэдр проектируется на плоскость, параллельную двум его несмежным ребрам. Доказать, что в плоскости изображения может получиться квадрат.

**162 (10).** Угол между скрещивающимися прямыми $a$ и $b$ равен $60°$. Расстояние от общего перпендикуляра прямых $a$ и $b$ до точки $A \in a$ равно расстоянию от него до точки $B \in b$ и равно расстоянию между прямыми $a$ и $b$. Найти угол между общим перпендикуляром и прямой $AB$.

## § 11. Двугранные и многогранные углы

Пример 56. Один из плоских углов трехгранного угла равен $60°$, а каждый из двух других содержит по $45°$. Найдем двугранный угол, противоположный плоскому углу, содержащему $60°$.

Построение изображения. Пусть фигура $SMNL$ (рис. 62) — изображение данного трехгранного угла. Это изображение полное, $p = 3$.

Дано: $SMNL$ — трехгранный угол, $\widehat{MSN} = 60°$, $\widehat{MSL} = 45°$, $\widehat{NSL} = 45°$.

Найти: $\widehat{SL}$.

Решение. На луче $SL$ выберем произвольно точку $A$ и в плоскости $MSL$ построим прямую $AB$, которую будем считать изо-

бражением перпендикуляра к прямой $SL$ (расходуем один параметр). Аналогично будем считать прямую $AC$ изображением перпендикуляра к прямой $SL$ (расходуем еще один параметр). Теперь на изображение израсходованы все пять параметров. Таким образом, $\angle BAC$ является линейным углом двугранного угла $SL$, и, следовательно, $\widehat{BAC}$ является искомой величиной.

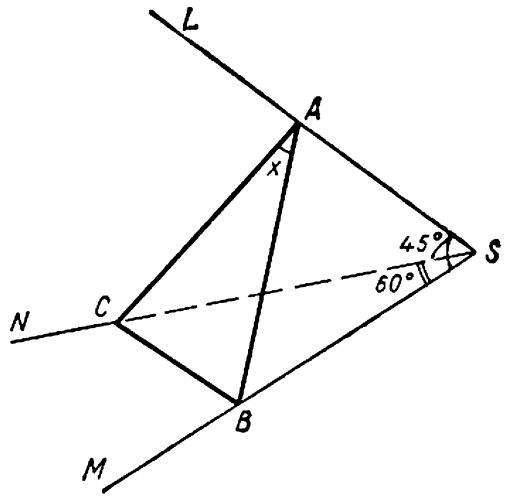


Рис. 62

Рассматриваемая задача является задачей типа $M$. Решим ее введением вспомогательного параметра. А именно положим, например, $|SA| = a$. Тогда из прямоугольных треугольников $SAB$ и $SAC$ находим, что $|AB| = a$ и $|AC| = a$, $|SB| = |SC| = a\sqrt{2}$. Поскольку в $\triangle SBC$ $|BC| = |SB| = |SC|$, то $|BC| = a\sqrt{2}$.

Убедимся в том, что выполняется равенство

$$|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2.$$

Действительно,

$|AB|^2 + |AC|^2 = 2a^2$ и $|BC|^2 = (a\sqrt{2})^2 = 2a^2$.

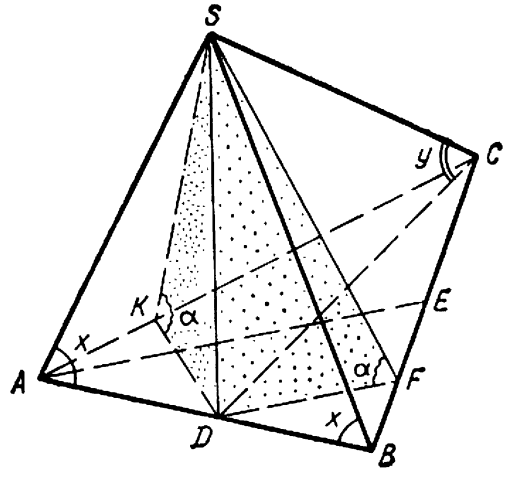


Рис. 63

Таким образом, в $\triangle ABC$ (по обратной теореме Пифагора) $\widehat{BAC} = 90°$. Итак, $\widehat{SL} = 90°$.

Замечание. Рассмотренную задачу можно было решить и не прибегая к введению вспомогательного параметра. Действительно, как нетрудно заметить, $\triangle ABC \cong \triangle ASB$, поэтому $\widehat{BAC} = \widehat{SAB} = 90°$.

Пример 57. В основании пирамиды лежит правильный треугольник. Одна из боковых граней перпендикулярна плоскости основания, две другие наклонены к нему под углами, равными $\alpha$. Найдем углы, образованные боковыми ребрами с плоскостью основания.

Построение изображения. Пусть четырехугольник $SABC$ с его диагоналями $SB$ и $AC$ является изображением

данной пирамиды (рис. 63). Это изображение полное (убедитесь в этом самостоятельно, приняв, например, плоскость $ABC$ за основную плоскость). Параметрическое число изображения (подсчитайте самостоятельно) равно 4.

Д а н о: $SABC$ — пирамида, $S$ — вершина, $|AB| = |AC| = |BC|$, $(\widehat{(SAB)}, \widehat{(ABC)}) = 90°$, $(\widehat{(SAC)}, \widehat{(ABC)}) = (\widehat{(SBC)}, \widehat{(ABC)}) = \alpha$.

Н а й т и: $(\widehat{(SA)}, \widehat{(ABC)})$, $(\widehat{(SB)}, \widehat{(ABC)})$, $(\widehat{(SC)}, \widehat{(ABC)})$.

Р е ш е н и е. Чтобы ввести в чертеж величины данных и искомых углов, выполним необходимые дополнительные построения. Построим $[SD]$ — высоту $\triangle SAB$.

Тогда так как $(SAB) \perp (ABC)$, то $(SD) \perp (ABC)$, и поэтому $[AD]$ — проекция ребра $SA$ на плоскость $ABC$, т. е. $\angle SAD$ — это угол, образованный ребром $SA$ с плоскостью $ABC$. Аналогично $\angle SBD$ — это угол, образованный ребром $SB$ с плоскостью $ABC$, $\angle SCD$ — это угол, образованный ребром $SC$ с плоскостью $ABC$. Заметим далее, что $[AE]$ — медиана треугольника $ABC$ — является и его высотой, поэтому, построив $(DF) \parallel (AE)$, заключаем, что $(DF) \perp (BC)$, и, следовательно, $[DF]$ — проекция отрезка $SF$ на плоскость $ABC$. Таким образом, $[SF] \perp (BC)$ и $\angle SFD$ является линейным углом двугранного угла $BC$, т. е. $\widehat{SFD} = \alpha$. Аналогично, построив $(DK) \perp (AC)$, заключаем, что $\widehat{SKD} = \alpha$. Более того, прямоугольные треугольники $SDF$ и $SDK$ имеют общий катет $SD$ и конгруэнтные между собой острые углы $SFD$ и $SKD$, т. е. эти треугольники конгруэнтны. Тогда $|DF| = |DK|$. Значит, точка $D$ равноудалена от сторон угла $ACB$. Таким образом, точка $D$ лежит на биссектрисе угла $ACB$ правильного треугольника $ABC$. Но биссектриса правильного треугольника является его медианой и высотой. Итак, $[CD]$ — медиана $\triangle ABC$, т. е. точка $D$ — середина стороны $AB$, и, следовательно, $[SD]$ — высота $\triangle SAB$ — является и его медианой. Это значит, что $\triangle SAB$ равнобедренный, т. е. $\widehat{SBD} = \widehat{SAD}$.

Решим задачу алгебраически.

Положим для краткости $\widehat{SBD} = x$ и $\widehat{SCD} = y$. Тогда $\widehat{SAD} = x$. Так как это задача типа $M$, то введем вспомогательный параметр $|AB| = a$. Перейдем к вычислениям. Имеем: $|BD| = \frac{a}{2}$. Так как $[AE]$ — медиана $\triangle ABC$, а $[FD]$ — средняя линия $\triangle ABE$, то

$$|DF| = \frac{1}{2}|AE| = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Из прямоугольного $\triangle SDF$ имеем:

$$|SD| = |DF| \operatorname{tg} \alpha = \frac{a\sqrt{3}}{4} \operatorname{tg} \alpha.$$

Таким образом, $\operatorname{tg} x = \frac{|SD|}{|BD|} = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha$,

откуда $x = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$.

Далее, $\operatorname{tg} y = \frac{|SD|}{|CD|} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$,

откуда $y = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$.

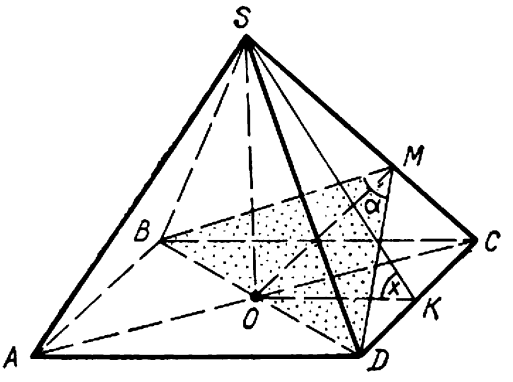

Рис. 64

Исследование. По смыслу задачи $0° < x < y < 90°$. Но так как $0° < \alpha < 90°$, то $0 < \operatorname{tg} x < \infty$, и, следовательно, $0 < \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha < \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha < \infty$. А тогда для найденных значений $x$ и $y$ система неравенств $0° < x < y < 90°$ является истинной.

Итак, $(\widehat{(SA)}, \widehat{(ABC)}) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$,

$(\widehat{(SB)}, \widehat{(ABC)}) = (\widehat{(SC)}, \widehat{(ABC)}) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$.

Пример 58. Угол при боковом ребре правильной четырехугольной пирамиды равен $\alpha$. Найдем двугранный угол при ребре основания этой пирамиды.

Построение изображения. Пусть фигура $SABCD$ является изображением данной пирамиды (рис. 64). Это изображение полное и метрически определенное (убедитесь в этом самостоятельно).

Дано: $SABCD$ — правильная пирамида, $S$ — вершина, $\widehat{SC} = \alpha$.

Найти: $\widehat{CD}$.

Решение. Для решения задачи необходимо выполнить некоторые дополнительные построения, позволяющие, в частности, ввести в чертеж величины данного и искомого углов. (На имеющемся изображении, метрически определенном, новые метрические построения в принципе нельзя выполнять произвольно. В рассматриваемом случае, однако, при выполнении метрических построений допустим некоторый произвол, так как величина угла при боковом ребре пирамиды задана параметром, значения которого, как нетрудно заметить, принадлежат интервалу $]90°; 180°[$. Этим обстоятельством мы и воспользуемся.) Возьмем на ребре $SC$ точку $M$ и будем считать, что $[OM]$ — изображение перпендикуляра к ребру $SC$. Построим далее отрезки $DM$ и $BM$. Так как $[BD] \perp [AC]$ и $[BD] \perp [SO]$, то $[BD] \perp (SC)$. Таким образом, $(SC) \perp [BD]$ и $(SC) \perp [OM]$, т. е. $(SC) \perp [DM]$ и $(SC) \perp [BM]$. Тогда $\angle BMD$ является линейным углом двугранного угла $SC$, и поэтому $\widehat{BMD} =$

$= \alpha$. Кроме того, как нетрудно показать, $[OM]$ — медиана треугольника $BMD$ — является также его высотой и биссектрисой. Поэтому $\widehat{BMO} = \widehat{DMO} = \frac{\alpha}{2}$ и $[OM] \perp [BD]$. Построим еще $[SK]$ — апофему грани $SDC$ и $[OK]$ — медиану треугольника $OCD$. Так как треугольники $SDC$ и $ODC$ равнобедренные, то $[SK] \perp \perp [CD]$ и $[OK] \perp [CD]$, т. е. $\angle SKO$ является линейным углом двугранного угла при ребре $CD$. Положим для краткости $\widehat{SKO} = x$ и введем вспомогательный параметр $|CD| = a$.

Так как в прямоугольном треугольнике $DOM$ $|DO| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, то $|DM| = \frac{a\sqrt{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Подсчитаем теперь $|SK|$.

Так как $\triangle SCK \sim \triangle CDM$, то $\frac{|SK|}{|SC|} = \frac{|DM|}{|CD|}$, где $|SC| = \sqrt{|SK|^2 + \frac{a^2}{4}}$, а $\frac{|DM|}{|CD|} = \frac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Таким образом,

$$|SK| = \sqrt{(SK)^2 + \frac{a^2}{4}}\,\frac{\sqrt{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}},$$

откуда $|SK| = \frac{a}{2\sqrt{-\cos\alpha}}$. Тогда из прямоугольного треугольника $SOK$ находим, что

$$\cos x = \frac{|OK|}{|SK|} = \sqrt{-\cos\alpha}, \text{ т. е. } x = \arccos\sqrt{-\cos\alpha}.$$

Исследование. По смыслу задачи $|OM| < |OC|$, т. е. $|OM| < |OD|$.

Но $|OM| = \frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, а $|OD| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Таким образом, $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} < 1$, и, следовательно, $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2}$, откуда $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Итак, $\widehat{CD} = \arccos\sqrt{-\cos\alpha}$, где $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

### Задачи для самостоятельного решения

**163.** Два плоских угла трехгранного угла равны по 45°, а двугранный угол между ними прямой. Найти третий плоский угол.

**164 (1).** Один из плоских углов трехгранного угла равен 90°, а два других — по 60°. Найти угол между плоскостью прямого угла

и плоскостью, отсекающей от ребер трехгранного угла конгруэнтные отрезки.

**165 (10).** В правильной четырехугольной пирамиде угол наклона бокового ребра к плоскости основания равен $\alpha$. Найти двугранный угол при боковом ребре.

**166 (9).** Основанием пирамиды служит квадрат. Найти двугранные углы, образуемые боковыми гранями с плоскостью основания и относящиеся друг к другу, как $1 : 2 : 4 : 2$.

**167 (8).** В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при ребре основания равен $\alpha$. Найти угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

**168 (7).** Угол при боковом ребре правильной треугольной пирамиды равен $\alpha$. Найти двугранный угол между плоскостью основания и боковой гранью пирамиды.

**169.** В правильной треугольной пирамиде двугранный угол между боковой гранью и плоскостью основания равен $\alpha$. Найти двугранный угол между боковыми гранями.

**170 (6).** В прямоугольнике $ABCD$ $|AB| : |BC| = a : b$. Через сторону $AD$ проведена плоскость $P$, с которой диагональ составляет угол, равный 30°. Найти двугранный угол между плоскостью прямоугольника и плоскостью $P$.

**171 (4).** Высота правильной $n$-угольной пирамиды вдвое меньше стороны основания. Найти угол между боковой гранью и плоскостью основания.

**172 (5).** В правильной $n$-угольной пирамиде угол между боковым ребром и смежным с ним ребром основания равен $\alpha$. Найти двугранный угол, образованный боковой гранью с плоскостью основания.

**173 (3).** В правильной $n$-угольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен $2\alpha$. Найти угол наклона бокового ребра к плоскости основания пирамиды.

**174 (2).** В правильной $n$-угольной пирамиде двугранный угол при боковом ребре равен $2\alpha$. Найти двугранный угол при ребре основания пирамиды.

**175 (12).** Плоские углы трехгранного угла равны соответственно $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$. Найти его двугранные углы.

**176 (11).** В плоскости основания равностороннего конуса (вне основания) взята точка, удаленная от окружности основания на расстояние, равное радиусу основания. Через эту точку проведены к конусу две касательные плоскости. Найти двугранный угол между ними.

## § 12. Сечения многогранников

Задачи, связанные с необходимостью изображать сечения, мы разобьем на два вида. К первому отнесем задачи, в которых требуется построить сечение, а ко второму виду — те из них, в

условии которых оговаривается (или подразумевается), что сечение проведено.

При решении задач первого вида построение сечения сопровождается описанием процесса построения, которое выполняется либо по полной схеме решения задачи на построение (анализ, построение, доказательство, исследование), либо, в более простых случаях, по несколько упрощенной (например, опускается анализ, построение совмещается с доказательством). Исследование задачи на построение сечения не следует смешивать с исследованием решения задачи на вычисление каких-либо величин, связанных с наличием сечения. Так, задача о построении диагонального сечения куба или прямоугольного параллелепипеда имеет шесть решений; задача же о вычислении площади диагонального сечения в случае куба имеет лишь одно решение, а в общем случае, в случае прямоугольного параллелепипеда, — три.

При решении задач второго вида поступают несколько иначе: если на изображение заданного многогранника и его сечения расходуется не более пяти параметров, то построение сечения, как и построение самого многогранника, не описывают (хотя для решения задачи построение изображения, естественно, необходимо выполнить); если же все пять параметров израсходованы еще до построения сечения, то построения, необходимые для изображения сечения, описывают. Это описание делают так же, как и описание любых других построений, выполняемых на метрически определенном изображении.

При решении задач как первого, так и второго видов необходимо убедиться в полноте изображения, на котором должно быть построено изображение сечения (для задач первого вида) или на котором сечение изображено (для задач второго вида). (Напомним, что на полном изображении разрешима любая позиционная задача.) Кроме того, поскольку, как правило, заранее неизвестно, удастся ли в процессе решения ограничиться лишь позиционными построениями или потребуется выполнять еще и метрические, то необходимо подсчитывать и параметрическое число изображения.

Перейдем к рассмотрению задач первого вида. Остановимся сначала на построении сечения *методом следа секущей плоскости.* (Следом секущей плоскости называют прямую, получаемую в пересечении секущей плоскости с какой-нибудь плоскостью, заданной на изображении.)

Пример 59. На ребрах куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны точки $P$, $Q$ и $R$ такие, что $|AP| = \frac{1}{3}|AA_1|$, $|B_1Q| = \frac{1}{2}|B_1C_1|$ и $|CR| = \frac{1}{3}|CD|$. Построим сечение куба плоскостью $PQR$.

Решение. Выясним сначала, разрешима ли эта задача. Пусть фигура $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является изображением куба (рис. 65). Это изображение полное. Ясно также, что, имея на изображении точки $P$, $Q$ и $R$ — проекции точек $P_0$, $Q_0$ и $R_0$, мы можем

найти и вторичные проекции точек $P_0$, $Q_0$ и $R_0$. Для этого достаточно выполнить в плоскости изображения внутреннее параллельное проектирование, например, в направлении, параллельном $(AA_1)$. Таким образом, мы найдем точки $P_1$, $Q_1$ и $R_1$ и придем к выводу, что изображение секущей плоскости является заданным. Тогда задача о нахождении пересечения плоскости, заданной точками $P$, $Q$ и $R$, с поверхностью куба разрешима. Нетрудно подсчитать, что параметрическое число изображения $p = 5$, т. е. все дальнейшие построения необходимо выполнять в соответствии с законами параллельного проектирования.

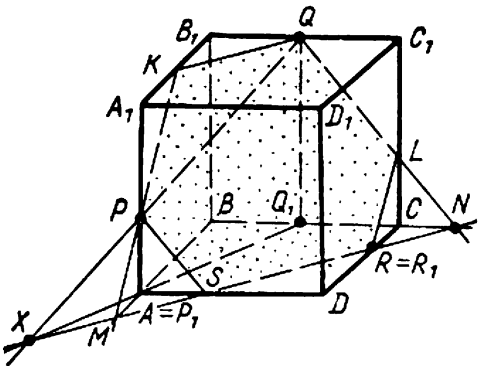

Рис. 65

Перейдем непосредственно к построению сечения (как обычно, говорим о построении сечения, хотя речь идет о построении изображения сечения). Первый этап общей схемы решения задачи на построение — анализ — в рассматриваемом примере опускается, а второй и третий этапы — построение и доказательство — проводятся одновременно.

Найдем прежде всего след секущей плоскости — линию пересечения плоскости $PQR$ с плоскостью $ABC$.

1) $X = (PQ) \cap (P_1Q_1)$.

Так как $X \in (PQ)$, а $(PQ) \subset (PQR)$, то $X \in (PQR)$. Так как $X \in (P_1Q_1)$, а $(P_1Q_1) \subset (ABC)$, то $X \in (ABC)$. Таким образом, точка $X$ является общей точкой плоскостей $PQR$ и $ABC$. Точка $R$ также является общей точкой этих плоскостей. Тогда $(XR)$ — прямая, по которой пересекаются плоскости $PQR$ и $ABC$, т. е.

2) $(XR)$ — след секущей плоскости.

Далее: 3) $S = (XR) \cap (AD)$,

4) $[PS]$,

5) $M = (XR) \cap (AB)$.

Так как $M \in (XR)$, а $(XR) \subset (PQR)$ и $(XR) \subset (ABC)$, то $M \in (PQR)$ и $M \in (ABC)$. Так как $M \in (AB)$, а $(AB) \subset (A_1AB)$, то $M \in (A_1AB)$. Таким образом, точка $M$ является общей точкой плоскостей $ABC$ и $A_1AB$. Точка $P$ также является общей точкой этих плоскостей. Поэтому $(MP)$ — прямая, по которой пересекаются секущая плоскость $PQR$ с плоскостью боковой грани $AA_1B_1B$ куба.

Итак,

6) $(MP) = (PQR) \cap (A_1AB)$,

7) $K = (MP) \cap (A_1B_1)$,

8) $[KQ]$.

Аналогично находим далее точку $N$ и выполняем дальнейшие построения:

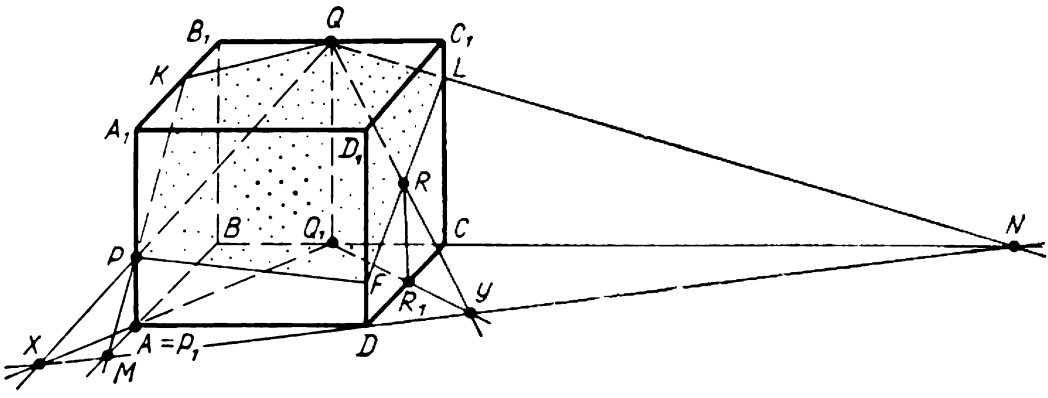


Рис. 66

9) $N = (XR) \cap (BC)$,
10) $L = (QN) \cap (CC_1)$,
11) $[LR]$.

Поскольку по построению вершины многоугольника $SPKQLR$ являются точками, лежащими в секущей плоскости $PQR$ и принадлежащими ребрам куба, то многоугольник $SPKQLR$ — искомое сечение.

Так как по смыслу задачи точки $P$, $Q$ и $R$ не лежат на одной прямой, то задача имеет единственное решение.

Изменим условие примера 59.

Пример 60. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точки $P$, $Q$ и $R$ такие, что $|AP| = \frac{1}{3}|AA_1|$, $|B_1Q| = \frac{1}{2}|B_1C_1|$, а точка $R$ — центроид грани $DD_1CC_1$.

Построим сечение куба плоскостью $PQR$.

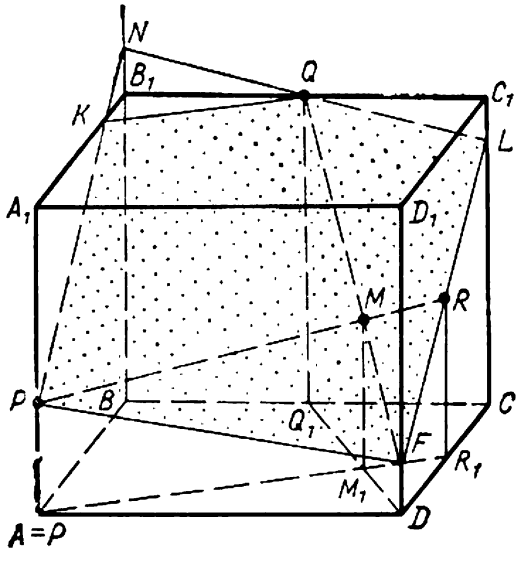


Рис. 67

Решение. Как и в предыдущем примере, находим точки $P_1 = A$, $Q_1$ и $R_1$ и показываем, что изображение является полным, а $p = 5$. Находя след секущей плоскости (рис. 66), получаем искомое сечение.

Рассмотрим на этом примере другой метод построения сечений, называемый *методом внутреннего проектирования*. (Полнота изображения установлена.) Выполним построение (рис. 67):

1) $(PR)$ и $(P_1R_1)$,
2) $M_1 = (P_1R_1) \cap (Q_1D)$,
3) $m \parallel (AA_1)$, $M_1 \in m$,
4) $M = m \cap (PR)$,
5) $F = (QM) \cap (DD_1)$.

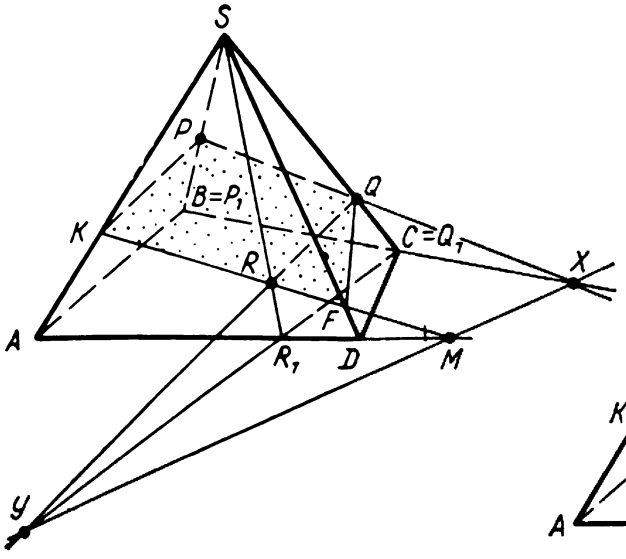


Рис. 68

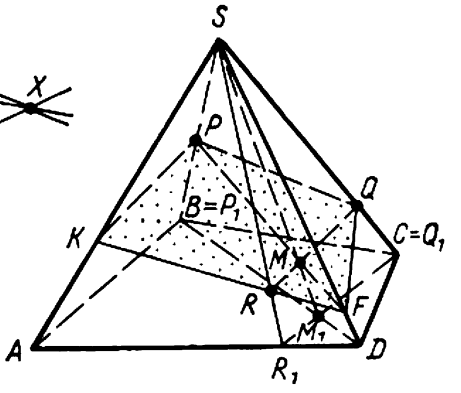


Рис. 69

Ясно, что $F \in (PQR)$. Действительно, $M \in (PR)$, т. е. $M \in (PQR)$, и потому $(QM) \subset (PQR)$. Но $F \in (QM)$, т. е. $F \in (PQR)$. После нахождения четвертой точки, принадлежащей и секущей плоскости, и поверхности сечения куба, построение можно выполнить следующим образом:

6) $[PF]$,
7) $L = (FR) \cap (CC_1)$,
8) $[QL]$, $N = (QL) \cap (BB_1)$,
9) $K = (NP) \cap (A_1B_1)$,
10) $[KQ]$.

Полученный многоугольник $PKQLF$ является искомым сечением.

Описанные выше методы следа секущей плоскости и внутреннего проектирования применяются и при построении сечений пирамиды. В этом случае осуществляется центральное проектирование. На рисунке 68 сечение пирамиды плоскостью $PQR$ построено с помощью следа $(XY)$ секущей плоскости, а на рисунке 69 — методом внутреннего проектирования.

Способы задания сечений многогранников весьма разнообразны. Так, секущая плоскость может быть задана двумя точками и некоторой прямой, которой заданное сечение параллельно или перпендикулярно, двумя точками и плоскостью, которой заданное сечение параллельно или перпендикулярно, и т. д.

Пример 61. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ проведем сечение, параллельное ребру $SB$ и проходящее через точки $D$ и $F$ — середины ребер $AB$ и $BC$ соответственно.

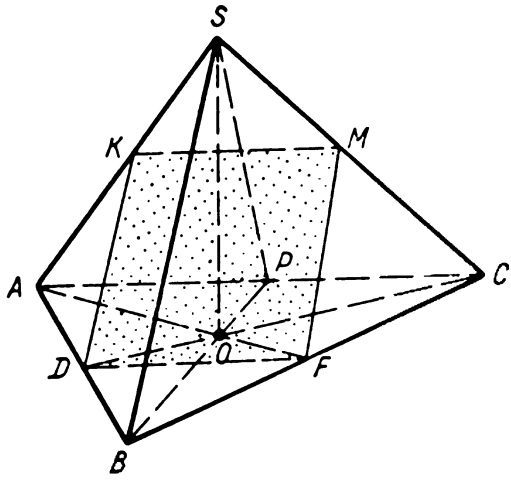


Рис. 70

Р е ш е н и е. Пусть четырехугольник $SABC$ с его диагоналями $AC$ и $SB$ является изображением заданной пирамиды (рис. 70). Это изображение полное. Ясно также, что двумя точками $D$ и $F$ и прямой $SB$ вполне определяется положение секущей плоскости. Таким образом, задача о построении сечения на этом изображении разрешима. Параметрическое число изображения $p = 4$. Перейдем к построению сечения. Для краткости обозначим секущую плоскость через $\beta$.

Так как $D \in [AB]$, $F \in [BC]$, $[AB] \in (ABC)$ и $[BC] \in (ABC)$, то $D \in (ABC)$ и $F \in (ABC)$. Но $D \in \beta$ и $F \in \beta$. Тогда $(DF) = \beta \cap (ABC)$. Итак,

1) $(DF)$.

Так как $(SB) \parallel \beta$, то плоскость $SAB$, проходящая через ребро $SB$, пересечет $\beta$ по прямой, проходящей через точку $D$ и параллельной ребру $SB$. Поэтому

2) $[DK] \parallel [SB]$. Аналогично

3) $[FM] \parallel [SB]$, а затем

4) $[KM]$.

Ясно, что четырехугольник $DKMF$ удовлетворяет условиям задачи и поэтому является искомым сечением. Нетрудно также убедиться, что требуемое сечение существует, и притом только одно.

З а м е ч а н и е. Разнообразие способов задания секущей плоскости не позволяет применять при построении сечения какой-нибудь один универсальный способ. Так, в примерах 59 (с. 98) и 60 (с. 100) можно было применить метод следа секущей плоскости и можно было применить метод внутреннего проектирования. В примере же 61 (с. 101) ни один из этих методов не был бы эффективным.

Пусть в примере 61 сторона основания пирамиды равна $a$, а боковое ребро равно $b$. Найдем площадь сечения. Для этого нам потребуется выяснить форму сечения (вид четырехугольника $DKMF$). Заметим, что построение сечения пирамиды не повлекло за собой нового расхода параметров, т. е. параметрическое число изображения пирамиды с построенным сечением равно 4. Считая, что $|AB| : |SA| = a : b$, мы накладываем на изображение еще одно условие метрического характера, т. е. расходуем еще один параметр. Таким образом, теперь $p = 5$; следовательно, никакие последующие метрические построения на имеющемся изображении уже нельзя выполнить произвольно. Впрочем, как мы увидим, все дальнейшие построения — это позиционные построения.

Так как по построению $[DK] \parallel [SB]$ и $[FM] \parallel [SB]$, то $[DK] \parallel [FM]$. Кроме того, $[DK]$ — средняя линия $\triangle SAB$, т.е.

$|DK| = \frac{1}{2}\,|SB| = \frac{b}{2}$. Аналогично $|FM| = \frac{b}{2}$. Поэтому $|DK| = |FM|$, и тогда четырехугольник $DKMF$ — параллелограмм, причем $|DK| = \frac{b}{2}$, $|DF| = \frac{a}{2}$. Для вычисления площади параллелограмма этих сведений, однако, недостаточно, поэтому уточним форму параллелограмма $DKMF$. Построим $[BP]$ — медиану $\triangle ABC$ (расхода параметров это построение не потребует). Ясно, что $O \in [BP]$, точка $O$ — основание высоты $SO$ пирамиды.

Так как $[OP] \perp [AC]$ и $[OP]$—проекция отрезка $SP$ на плоскость $ABC$, то $[SP] \perp [AC]$.

Таким образом, $[AC] \perp [OP]$ и $[AC] \perp [SP]$. Но тогда $[AC] \perp [SB]$. (Мы доказали, что скрещивающиеся ребра правильной треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны.)

Далее, так как $[DF] \parallel [AC]$ и $[DK] \parallel [SB]$, то и $[DF] \perp [DK]$, т. е. параллелограмм $DKMF$ — прямоугольник.

Таким образом, получаем: $S_{DKMF} = \frac{ab}{4}$.

Замечание. Эту задачу можно рассматривать как пример применения комбинированного метода решения. Действительно, построение сечения, определение вида полученной фигуры выполнено чисто геометрически и далее прямым счетом найдено $S_{DKMF}$.

Пример 62. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник $ABC$. Ребро $SA$ перпендикулярно плоскости основания, $|SA| = |AB| = |BC| = a$. Через середину ребра $AB$ перпендикулярно к ребру $SC$ проведем секущую плоскость и найдем площадь полученного сечения.

Построение изображения. Пусть четырехугольник $SABC$ с его диагоналями $SB$ и $AC$ является изображением данной пирамиды (рис. 71). Это изображение полное. Его параметрическое число $p = 5$. Перейдем теперь непосредственно к построению сечения.

1) $[AD]$ — медиана $\triangle SAB$,

2) точка $M$ — середина ребра $AB$,

3) $[MN] \parallel [AD]$,

4) $[BP]$ — медиана $\triangle ABC$,

5) $[MK] \parallel [BP]$.

Чтобы построить $[KL] \perp [SC]$, сначала построим $[AE] \perp [SC]$. Это метрическое построение, и его нельзя выполнять произвольно. Поступим следующим образом. Заметим, что в прямоугольном

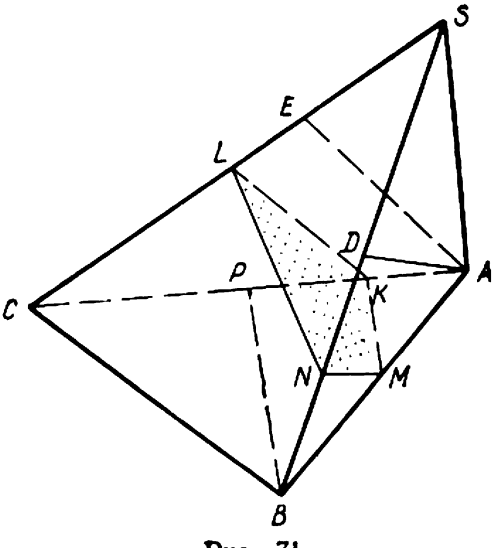

Рис. 71

$\triangle ABC$ $|AB| = |BC| = a$ и потому $|AC| = a\sqrt{2}$. Тогда из $\triangle SAC$, где $|SA| = a$, находим, что $|SC| = a\sqrt{3}$. Таким образом, для того чтобы отрезок $AE$ был изображением перпендикуляра к ребру $SC$, должно выполняться равенство:

$|SA|^2 - |SE|^2 = |AC|^2 - |CE|^2$, или $a^2 - |SE|^2 = 2a^2 - (a\sqrt{3} - |SE|)^2$, откуда находим, что $|SE| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, т. е.

$$|SE| : |SC| = 1 : 3.$$

Итак, дальнейшее построение мы выполним в таком порядке:

6) точка $E$ такая, что $|SE| : |SC| = 1 : 3$,
7) $[AE]$,
8) $[KL] \parallel [AE]$,
9) $[LN]$.

Докажем, что плоскость четырехугольника $MKLN$ перпендикулярна ребру $SC$. Действительно, $[SA] \perp (ABC)$, т. е. $[SA] \perp [MK]$, или $[MK] \perp [SA]$. Кроме того, по построению $[MK] \perp [AC]$. Тогда $[MK] \perp [LK]$ и $[MK] \perp [SC]$. Далее $[SC] \perp [LK]$ и $[SC] \perp [MK]$, т. е. $[SC] \perp (MKL)$. Таким образом, сечение $MKLN$ удовлетворяет условиям задачи и, следовательно, является искомым.

Ясно, что так как секущая плоскость перпендикулярна заданной прямой и проходит через заданную точку, принадлежащую поверхности пирамиды, то сечение пирамиды, определяемое этими условиями, существует, и притом только одно.

Итак, построение изображения закончено, и можно перейти к дальнейшим этапам решения.

Д а н о: $SABC$ — пирамида, $S$ — вершина, $[SA] \perp (ABC)$, $[AB] \perp [BC]$, $|SA| = |AB| = |BC| = a$, $|AM| = |BM|$, $(MKLN)$ — сечение пирамиды, $(MKL) \perp (SC)$.

Н а й т и: $S_{MKLN}$.

Р е ш е н и е. Чтобы подсчитать искомую площадь, определим сначала вид четырехугольника $MKLN$.

Из прямоугольных треугольников $ABP$ и $SAB$ имеем соответственно:

$$MK = \frac{1}{2}|BP| \text{ и } |MN| = \frac{1}{2}|AD|.$$

Но $|BP| = |AD| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Таким образом, $|MK| = |MN| = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Так как $[SA] \perp (ABC)$, то $[AB]$ — проекция ребра $SB$ на плоскость $ABC$. Но $[AB] \perp [BC]$. Тогда и $[SB] \perp [BC]$.

Из $\triangle SLN \sim \triangle SBC$

$$\frac{|LN|}{|BC|} = \frac{|SN|}{|SC|},$$

откуда находим $|LN| = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Из $\triangle CLK \sim \triangle CAE$

$$\frac{|LK|}{|AE|} = \frac{|CK|}{|AC|} = \frac{3}{4}, \quad \text{откуда } |LK| = \frac{3}{4}|AE|.$$

Но $|AE| \cdot |SC| = |SA| \cdot |AC|$, т. е. $|AE| = \frac{|SA| \cdot |AC|}{|SC|} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, а тогда $|LK| = \frac{a\sqrt{6}}{4}$.

Таким образом, четырехугольник $MKLN$ обладает той особенностью, что у него $|MK| = |MN|$, $|LK| = |LN|$.

Далее нетрудно обнаружить, что $\triangle MKL \cong \triangle MNL$ и поэтому $S_{MKLN} = 2S_{\triangle MKL}$. Но $[MK] \perp [AC]$ и $[MK] \perp [SA]$, т. е. $[MK] \perp [LK]$.

Следовательно, $S_{\triangle MKL} = \frac{1}{2}|MK| \cdot |LK| = \frac{a^2\sqrt{3}}{16}$, а значит, $S_{MKLN} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$.

Перейдем теперь к рассмотрению задач второго вида.

Пример 63. Основанием прямой призмы, высота которой равна 1 см, служит ромб со сторонами, равными 2 см, и острым углом, равным 30°. Через сторону основания проведена секущая плоскость, угол между которой и плоскостью основания равен 60°. Найдем площадь сечения.

Построение изображения. Пусть фигура $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является изображением данной призмы (рис. 72). Это изображение полное. Его параметрическое число $p = 5$ (подсчитайте самостоятельно).

Так как построение сечения в данном примере является метрической задачей, а $p = 5$, то нельзя, взяв произвольно точки $M \in (DD_1)$ и $L \in (CC_1)$ (естественно, такие, что $(ML) \| (AB)$), утверждать, что четырехугольник $AMLB$ — изображение заданного сечения. Однако если бы нам было известно положение точки $M$ — точки пересечения секущей плоскости с ребром $DD_1$, то мы без труда построили бы изображение сечения.

Если из точки $D$ опустить перпендикуляр $DK$ на ребро $AB$, то в полученном прямоугольном треугольнике $ADK$ будем иметь $|AD| = 2$ см, $|DK| = 1$ см и, следовательно, $|AK| = \sqrt{3}$ см. Таким образом, для построения $[DK] \perp [AB]$ точку $K$ следует выбрать таким

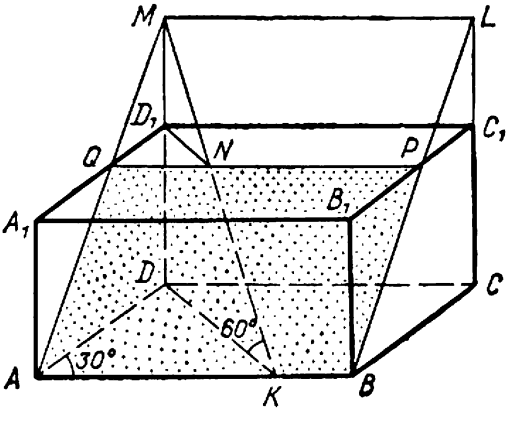

Рис. 72

образом, чтобы выполнялось равенство $|AK| : |AB| = \sqrt{3} : 2$.

Это построение можно выполнить, например, так. Построить вспомогательный прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной $|AB|$, и катетом, равным $\frac{1}{2}|AB|$. Тогда длина второго катета будет равна $\frac{\sqrt{3}}{2}|AB|$. А так как $\frac{\sqrt{3}}{2}|AB| : |AB| = \sqrt{3} : 2$, то $|AK|$ можно принять равной как раз длине второго катета вспомогательного треугольника.

Далее, так как $[DD_1] \perp (ABC)$, то для любой точки $M \in (DD_1)$ отрезок $DK$ будет служить проекцией отрезка $MK$ на плоскость $ABC$, т. е. $\angle MKD$ будет линейным углом двугранного угла при ребре $AB$.

Если точка $M$ такая, что $\widehat{MKD} = 60°$, то в прямоугольном $\triangle MKD$, где $|DK| = 1$ см, $|MK| = 2$ см, $|MD| = \sqrt{3}$ см. Таким образом, при построении точки $M$ необходимо учитывать равенство $|MD| : |DD_1| = \sqrt{3} : 1$.

Построение точки $M$ можно выполнить, например, так. Построим вспомогательный прямоугольный треугольник с катетом, равным $|DD_1|$, и гипотенузой, равной $2|DD_1|$. Тогда длина второго катета будет равна $\sqrt{3}|DD_1|$. А так как $\sqrt{3}|DD_1| : |DD_1| = \sqrt{3} : 1$, то $|MD|$ можно принять равной длине второго катета вспомогательного треугольника.

Построив точку $M$, проведем $(ML) \parallel (AB)$, где $L \in (CC_1)$. Построение прямой $AM$ позволяет найти точку $Q = (AM) \cap (A_1D_1)$, а построение прямой $BL$ — точку $P = (BL) \cap (B_1C_1)$. Четырехугольник $AQPB$ является изображением заданного сечения.

Д а н о: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — призма, $ABCD$ — ромб, $\widehat{BAD} = 30°$, $|AB| = 2$ см, $AQPB$ — сечение призмы, $(\widehat{(AQP)}, (ABC)) = 60°$.

Н а й т и: $S_{AQPB}$.

Р е ш е н и е. Ясно, что четырехугольник $AQPB$ — параллелограмм. Так как $[MK] \perp [AB]$, то $[NK]$ — высота этого параллелограмма, где $N = (MK) \cap (PQ)$. Таким образом, $S_{AQPB} = |AB| \cdot |NK|$. Найдем $|NK|$.

В прямоугольном $\triangle MDK$ имеем: $|MK| = 2$ см, $|MD| = \sqrt{3}$ см. Нетрудно показать, что $(DK) \parallel (D_1N)$, т. е.

$$\frac{|MK|}{|NK|} = \frac{|MD|}{|DD_1|}, \text{ или } \frac{2}{|NK|} = \frac{\sqrt{3}}{1},$$

откуда $|NK| = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ см.

Таким образом, $S_{AQPB} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ см$^2$.

Исследование мы опускаем.

Пример 64. В правильной треугольной пирамиде проведено сечение через среднюю линию боковой грани, параллельную боковому ребру, и через вершину пирамиды, не лежащую в этой грани. Определим угол наклона плоскости сечения к плоскости основания, если известно, что угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью ее основания равен $\alpha$.

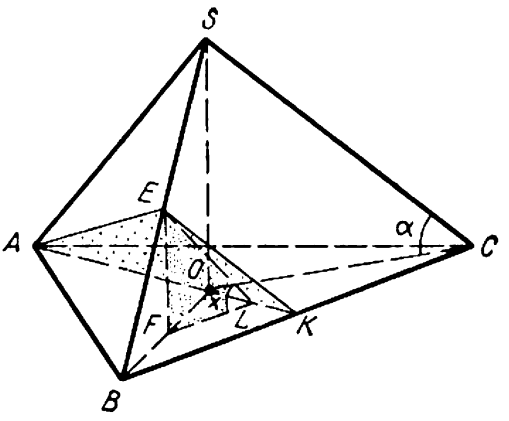


Рис. 73

Построение изображения. Пусть четырехугольник $SABC$ с его диагоналями является изображением данной пирамиды (рис. 73). Это изображение полное, $p = 5$. Построим точки $K$ и $E$ — середины ребер $BC$ и $SB$, а затем $\triangle AEK$ — изображение заданного сечения пирамиды (эти построения не повлекли за собой расхода параметров).

Дано: $SABC$ — пирамида, $[SO]$ — ее высота, $|AB| = |BC| = |AC|$, $|BK| = |CK|$, $[EK]$ — средняя линия $\triangle SBC$, $\triangle AEK$ — сечение пирамиды, $\widehat{SCO} = \alpha$.

Найти: $(\widehat{(AEK)}, (ABC))$.

Решение. Для определения искомого двугранного угла необходимо построить его линейный угол и найти его. Так как $p = 5$, то никакие метрические построения на имеющемся изображении уже нельзя выполнять произвольно. Нам же необходимо построить изображения двух перпендикуляров к ребру двугранного угла. Выполним необходимое построение следующим образом.

Построим $[OB]$ и в плоскости $SOB$ построим $[EF] \parallel [SO]$. Тогда, так как $[SO] \perp (ABC)$, то и $[EF] \perp (ABC)$, т. е. $[EF] \perp [OB]$. Так как $[AK]$ — медиана равностороннего $\triangle ABC$, то $[BC] \perp [AK]$. Проведем $(FL) \parallel [BC]$, тогда $(FL) \perp [AK]$. Наконец, построим $[EL]$. Таким образом, $[AK] \perp [FL]$ и $[AK] \perp [EF]$. Но тогда $[AK] \perp [EL]$, т. е. $\angle ELF$ является линейным углом искомого двугранного угла. Положим $\widehat{ELF} = x$. Заметив, что рассматриваемая задача является задачей типа $M$, введем вспомогательный параметр $|AB| = a$. Подсчитаем теперь $|EF|$ и $|FL|$.

Так как $[EK]$ — средняя линия $\triangle SBC$, то $|BE| = |SE|$. Но по построению $[EF] \parallel [SO]$. Следовательно, $[EF]$ — средняя линия $\triangle SOB$, поэтому $|EF| = \frac{1}{2}|SO|$.

Из прямоугольного $\triangle SOC$ находим, что $|SO| = |CO| \operatorname{tg}\alpha$, где $|CO| = \frac{2}{3}|CD| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Итак, $|EF| = \frac{a\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\alpha$. Далее без труда находим, что $|FL| = \frac{1}{2}|BK| = \frac{1}{4}a$.

Таким образом, $\operatorname{tg}x = \frac{|EF|}{|FL|} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\alpha$ и, следовательно, $x = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\alpha\right)$.

Исследование. По смыслу задачи $0° < x < 90°$, т. е. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\alpha > 0$, откуда $\operatorname{tg}\alpha > 0$, и, следовательно, $0° < \alpha < 90°$. Но по условию $\alpha$ — угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью ее основания, т. е. угол острый. Таким образом, из системы неравенств $0° < x < 90°$ дополнительных ограничений на $\alpha$ не последовало.

Замечание. В рассматриваемом примере на первый взгляд может показаться построение линейного угла искомого двугранного угла целесообразней выполнить так (проделайте это самостоятельно): 1) $[OM] \parallel [BC]$, 2) $[SM]$, 3) $P = [SM] \cap [AE]$, 4) $[OP]$. Действительно, при таком построении $\angle POM$ — линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями $AEK$ и $ABC$. Однако попытки определить $\widehat{POM}$ при таком его построении наталкиваются на значительные трудности.

С необходимостью построения сечения приходится иногда сталкиваться и при решении таких задач, в условиях которых о сечении даже не упоминается (см. пример 51, с. 82). В некоторых случаях построение сечения в принципе не является необходимым, однако с его помощью решение задачи может быть упрощено.

Пример 65. Одно ребро треугольной пирамиды равно $a$, а каждое из остальных равно $b$. Найдем объем пирамиды.

Решение. Не останавливаясь на построении изображения (рис. 74) и других этапах решения, отметим, что если решать этот пример, используя формулу $V = \frac{1}{3}S_{\text{осн}} \cdot H$, то при нахождении $H$ придется проделать довольно сложные выкладки. Мы пойдем по другому пути. Построим сечение пирамиды плоскостью, проходящей через ребро $AB$ перпендикулярно ребру $SC$. Принимая $|AB| = a$, получим:

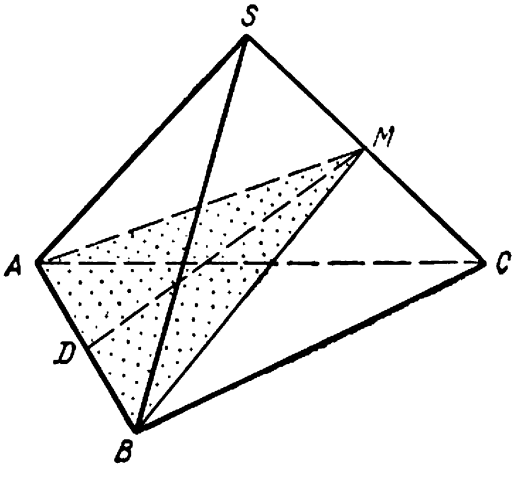

Рис. 74

$$V = \frac{1}{3}S_{\triangle ABM} \cdot |SM| + \frac{1}{3}S_{\triangle ABM} \cdot |CM| = \frac{1}{3}S_{\triangle ABM} \cdot |SC| = \frac{b}{3} \cdot S_{\triangle ABM} \cdot$$

(Заметим, что построение сечения в данном случае является позиционной задачей, так как $\triangle SAC$ и $\Delta SBC$ равносторонние, т. е. медианы $AM$ и $BM$ являются изображениями перпендикуляров к ребру $SC$, поэтому и $\triangle ABM$ является изображением сечения, перпендикулярного к ребру $SC$.)

Так как $S_{\Delta ABM} = \frac{1}{2} |AB| \cdot |MD|$, где $[MD]$ — медиана равнобедренного $\triangle ABM$, в котором $|AM| = |BM| = \frac{b\sqrt{3}}{2}$, то

$$S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} a \sqrt{\frac{3b^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a}{4} \sqrt{3b^2 - a^2}.$$

Следовательно, $V = \frac{ab}{12} \sqrt{3b^2 - a^2}$.

Исследование в этом примере мы опускаем (проделайте его самостоятельно).

**Задачи для самостоятельного решения**

**177.** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно $a$, точка $K$ — середина ребра $D_1C_1$. Найти расстояния от точек $A_1$, $A$, $C_1$ до плоскости, проходящей через точки $B$, $K$ и $D$.

**178.** Через диагональ нижнего основания куба, ребро которого равно $a$, и середину одной из сторон верхнего основания проведена секущая плоскость. Найти расстояние от центра куба до этой плоскости.

**179.** В правильной четырехугольной пирамиде провести плоскость через диагональ основания параллельно боковому ребру. Найти площадь полученного сечения, если стороны основания и боковые ребра равны соответственно $a$ и $b$.

**180.** Каждое из ребер правильной четырехугольной пирамиды равно $a$. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середины двух смежных сторон основания и середину высоты. Найти площадь этого сечения.

**181.** В правильной шестиугольной призме боковые грани — квадраты, стороны которых равны $a$. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через сторону нижнего основания и противолежащую ей сторону верхнего основания. Найти площадь этого сечения.

**182.** В прямом параллелепипеде острый угол основания равен $\alpha$. Сечение параллелепипеда, проведенное через сторону основания, длина которой равна $a$, и противоположное ей ребро, имеет площадь $S$ и образует с плоскостью основания угол, равный $90° - \alpha$. Найти длину другой стороны основания.

**183.** Высота правильной треугольной призмы равна $H$. Через одно из ребер основания и противоположную ему вершину другого основания проведена плоскость. Найти площадь треугольника,

полученного в сечении, если его угол при указанной вершине призмы равен $2\alpha$.

**184.** В основании пирамиды, длина каждого из боковых ребер которой равна $a\sqrt{3}$, лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами, равными $a$ и $2a$. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через диагональ $BD$ основания параллельно боковому ребру $SA$. Найти площадь сечения.

**185 (7).** Нижнее основание призмы — ромб $ABCD$, угол при вершине $A$ которого равен 60°. Вершина верхнего основания $A_1$ равноудалена от вершин $A, B, D$, ребро $|AA_1| = l$ и образует с плоскостью основания угол, равный $\alpha$. Построить сечение призмы плоскостью, проходящей через диагональ $A_1C$ параллелльно диагонали $BD$. Найти площадь сечения.

**186.** Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной $a$. Угол при основании треугольника равен $\alpha$, а каждое боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом, равным $\beta$. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через высоту пирамиды и вершину одного из углов, равного $\alpha$. Найти площадь сечения.

**187.** В правильном тетраэдре проведены два сечения, каждое из которых параллельно ребрам $AB$ и $SC$. Площадь части грани $SAC$, заключенной между секущими плоскостями, на $S$ см$^2$ больше площади части грани $SAB$, заключенной между этими плоскостями. На сколько площадь одного сечения больше площади другого?

**188.** Площадь основания прямоугольного параллелепипеда равна $S$. Через вершину $A_1$ верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, которая пересекает боковые ребра $BB_1$, $CC_1$ и $DD_1$ соответственно в точках $B_2$, $C_2$ и $D_2$. Найти объем той части параллелепипеда, которая расположена под секущей плоскостью, если известно, что $|CC_2| = c$, а высота параллелепипеда равна $H$.

**189.** Основанием пирамиды $SABCD$ является ромб $ABCD$, у которого $|AC| = a$, $|BD| = b$. Боковое ребро $SA$, длина которого равна $c$, перпендикулярно плоскости основания. Через точку $A$ и середину ребра $SC$ провести плоскость, параллельную диагонали $BD$. Найти площадь полученного сечения.

**190.** Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $a$. Через сторону основания и середину скрещивающегося с ней бокового ребра проведено сечение. Найти расстояние от плоскости сечения до вершины пирамиды, если ее высота равна $H$.

**191.** В правильной треугольной призме через сторону основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол, равный $\alpha$. Найти площадь получившегося треугольного сечения, если известно, что сторона основания равна $a$.

**192 (10).** Угол между боковой гранью правильной четырехугольной пирамиды и плоскостью ее основания равен $\alpha$. Апофема боковой грани равна $a$. Через одну из сторон основания проведено сечение пирамиды, образующее с плоскостью основания угол, равный $\beta$. Найти площадь этого сечения.

**193 (1).** Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $a$. Угол между боковым ребром и высотой пирамиды равен 30°. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через вершину основания перпендикулярно противоположному ребру. Найти площадь сечения.

**194 (2).** Основание призмы — квадрат $ABCD$, вершины которого находятся на одинаковом расстоянии от вершины $A_1$ верхнего основания, $|AA_1| = a$, угол между боковым ребром $AA_1$ и плоскостью основания равен 60°. Построить сечение призмы плоскостью, перпендикулярной ребру $AA_1$ и проходящей через вершину $C$. Найти площадь сечения.

**195.** В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $a$. Угол между смежными боковыми ребрами равен $2\alpha$. Построить сечение пирамиды плоскостью, проходящей через одну из сторон основания перпендикулярно противолежащему боковому ребру. Найти площадь сечения.

**196 (11).** В правильной треугольной пирамиде через ребро основания, длина которого равна $a$, проведено сечение, перпендикулярное противоположному боковому ребру. Найти площадь поверхности пирамиды, если секущая плоскость делит боковое ребро в отношении $m : n$.

**197 (12).** В треугольной пирамиде $SABC$ ребро $SA$ перпендикулярно плоскости $ABC$, $|AC| = |BC| = a$, $|AS| = |AB| = a\sqrt{2}$. Через середину ребра $AC$ проведена плоскость, перпендикулярная ребру $SB$. Найти расстояние от вершины $A$ до этой плоскости.

**198 (5).** В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ построить сечение, проходящее через точку $B$, точку $M$ — середину ребра $CC_1$ — и точку $K$ — середину ребра $AD$. Найти двугранный угол между плоскостью сечения и плоскостью $ABCD$.

**199 (4).** Построить сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через вершину $A$, середину ребра $CD$ и центроид грани $BCC_1B_1$. Найти двугранный угол между плоскостью сечения и плоскостью $ABCD$, если $|AB| : |AD| : |AA_1| = 2 : 3 : 4$.

**200 (3).** Построить сечение правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ плоскостью, проходящей через вершину $A$, точку $K$ — середину ребра $BB_1$ — и точку $M$ ребра $CC_1$, если $|CM| : |C_1M| = 1 : 2$ и $|AB| : |BB_1| = 1 : 3$. Найти двугранный угол между плоскостью сечения и плоскостью $ABC$.

**201 (8).** Построить сечение правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ ($S$ — вершина) плоскостью, проходящей через вершину $A$, точку $P$ — середину высоты $SO$ — и точку $K$ ребра $SD$, если $|SK| : |KD| = 2 : 1$ и $|SB| = |SD| = |BD|$. Найти двугранный угол между плоскостью сечения и плоскостью основания.

**202 (9).** Угол между боковым ребром и плоскостью основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ ($S$ — вершина) равен $\alpha$. Построить сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через точку $A$, точку $P$ — середину высоты $SO$ — и точку $K$ апофемы $SD$

грани $SAC$, если $|SK| : |KD| = 1 : 2$. Найти двугранный угол между плоскостью сечения и плоскостью основания пирамиды.

**203.** Правильная четырехугольная призма пересечена плоскостью так, что в сечении получился ромб, острый угол которого равен $2\alpha$. Найти двугранный угол между секущей плоскостью и плоскостью основания призмы.

**204 (6).** Основанием пирамиды является равнобедренный треугольник, угол между конгруэнтными сторонами которого равен $\alpha$. Каждое боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом, величина которого равна $\beta$. В этой пирамиде проведена секущая плоскость, проходящая через высоту пирамиды и вершину угла, величина которого равна $\alpha$. Найти отношение площади полученного сечения к площади основания пирамиды.

**205.** Основанием наклонного параллелепипеда является ромб $ABCD$, у которого $\widehat{BAD} = 60°$. Каждое боковое ребро параллелепипеда образует с плоскостью основания угол, равный 60°, а плоскость $AA_1C_1C$ перпендикулярна плоскости основания. Найти отношение площади сечения $BB_1D_1D$ к площади сечения $AA_1C_1C$.

**206.** В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм, отношение сторон которого $|AB| : |BC| = 1 : 2$, а угол при вершине $B$ равен 120°. Через точку $D$ и противоположную вершину верхнего основания провести секущую плоскость, параллельную диагонали $AC$. Найти угол, образуемый этой плоскостью с плоскостью основания, если отношение длины высоты параллелепипеда к длине меньшей стороны основания равно $\sqrt{3} : 1$.

**207.** В основании пирамиды лежит прямоугольник $ABCD$, а высота пирамиды проектируется в вершину $B$ основания. Длины сторон прямоугольника и высота пирамиды относятся, как $2 : 3 : 5$. Через диагональ $BD$ провести плоскость, параллельную одному из ребер пирамиды, не пересекающих диагональ $BD$. Найти угол наклона секущей плоскости к плоскости основания пирамиды.

**208.** Правильная треугольная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через вершину основания и середины двух боковых ребер. Найти отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади основания, если известно, что секущая плоскость перпендикулярна к одной из боковых граней.

**209.** В правильной четырехугольной призме проведены два параллельных друг другу сечения: одно проходит через середины двух смежных сторон основания и середину оси симметрии призмы, другое делит ось в отношении $1 : 3$. Найти отношение площади первого сечения к площади второго.

## § 13. Поверхности

Пример 66. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник, у которого $|AB| = |AC|$ и $\widehat{ABC} = \alpha$. Извест-

но также, что точка $D$ является серединой ребра $AA_1$, $\widehat{DCA} = \beta$ и $|CD| = b$. Найдем площадь боковой поверхности призмы.

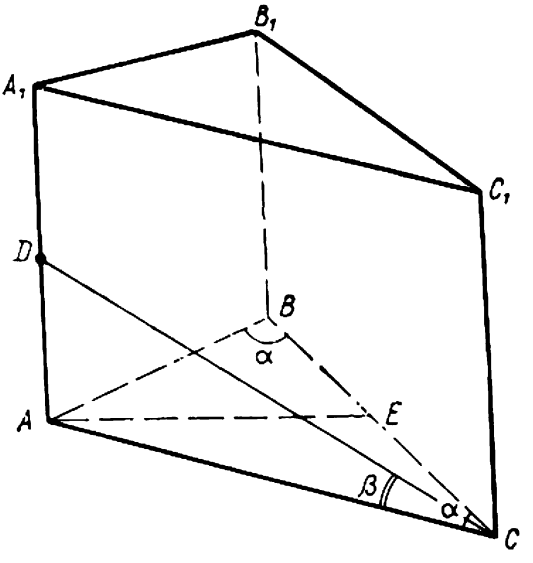


Рис. 75

Построение изображения. Пусть фигура $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 75) является изображением данной призмы. Это изображение полное. Его параметрическое число (подсчитайте самостоятельно) $p = 5$. Построим на этом изображении точку $D$ — середину ребра $AA_1$ — и будем считать $|CD| = b$ (новых параметров при этом не расходуем).

Решение. Ясно, что эта задача относится к типу $F$. Решим ее прямым счетом. Так как $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, то

$$S_{\text{бок}} = P \cdot H, \text{ где } P = 2|AC| + |BC|, \text{ а } H = |AA_1|.$$

Так как $\triangle ACD$ прямоугольный, то $|AC| = b\cos\beta$, $|AD| = b\sin\beta$, и потому $|AA_1| = 2b\sin\beta$.

Построим $[AE]$ — медиану $\triangle ABC$, $[AE] \perp [BC]$. Из прямоугольного $\triangle ACE$ находим: $|CE| = |AC|\cos\alpha = b\cos\beta\cos\alpha$, т. е. $|BC| = 2b\cos\alpha\cos\beta$.

Таким образом,

$$S_{\text{бок}} = (2b\cos\beta + 2b\cos\alpha\cos\beta) \cdot 2b\sin\beta = 4b^2\cos\beta(1+\cos\alpha)\sin\beta = 4b^2\sin 2\beta\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Исследование. Так как по смыслу задачи $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то найденное значение $S_{\text{бок}}$ удовлетворяет неравенству $S_{\text{бок}} > 0$.

Итак, $S_{\text{бок}} = 4b^2\sin 2\beta\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

Пример 67. Основание пирамиды — равносторонний треугольник со стороной, равной $a$. Одна из боковых граней, которая перпендикулярна плоскости основания, также является равносторонним треугольником. Найдем площадь боковой поверхности пирамиды.

Построение изображения. Пусть четырехугольник $SABC$ с его диагоналями является изображением данной пи-

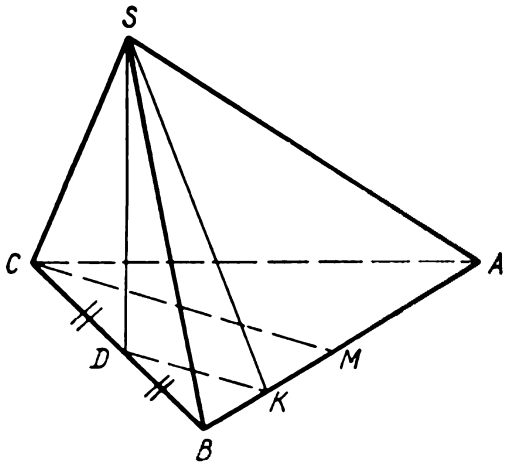

Рис. 76

рамиды (рис. 76). Это изображение полное, $p = 5$.

Дано: $SABC$ — пирамида, $S$ — вершина, $|AB| = |BC| = |AC| = |SB| = |SC| = a$, $(SBC) \perp (ABC)$.

Найти: $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности.

Решение. $S_{бок} = S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SAC} + S_{\triangle SBC}$. Но $\triangle SAB \cong \triangle SAC$ (по трем сторонам), т. е.

$$S_{бок} = 2S_{\triangle SAB} + S_{\triangle SBC}.$$

Так как $S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2}|AB| \times |SK|$, то найдем сначала $|SK|$ — длину высоты $\triangle SAB$. Построение перпендикуляра к данной прямой является, как известно, в общем случае метрическим построением. В рассматриваемом примере это построение требуется выполнить на метрически определенном изображении.

Построим высоту $SK$ следующим образом:

1) $[SD]$ — медиана $\triangle SBC$,
2) $[CM]$ — медиана $\triangle ABC$,
3) $[DK] \parallel [CM]$,
4) $[SK]$.

Так как $[SD]$ — медиана равностороннего треугольника, то $[SD] \perp [BC]$. Но $(SBC) \perp (ABC)$. Тогда $[SD] \perp (ABC)$, и, следовательно, $[DK]$ — проекция отрезка $SK$ на плоскость $ABC$. Но $[DK] \parallel [CM]$, а $[CM]$ — медиана равностороннего $\triangle ABC$, т. е. $[CM] \perp [AB]$.

Поэтому $[DK] \perp [AB]$, и, таким образом, $[SK] \perp [AB]$.

Из прямоугольного $\triangle SDK$ имеем:

$$|SK| = \sqrt{|SD|^2 + |DK|^2}, \text{ где } |SD| = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

$$|DK| = \frac{1}{2}|CM| = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Итак, $|SK| = \frac{a\sqrt{15}}{4}$. Получаем:

$$S_{\triangle SAB} = \frac{a^2\sqrt{15}}{8} \text{ и } S_{\triangle SBC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

поэтому $S_{бок} = \frac{a^2}{4}(\sqrt{15} + \sqrt{3})$.

Исследование. Ясно, что по смыслу задачи $|SK| > |SD|$ и поэтому $S_{бок} > 3S_{\triangle SBC}$, т. е. $\frac{a^2}{4}(\sqrt{15}+\sqrt{3}) > \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$. Как нетрудно убедиться, это неравенство истинно.

Итак,

$$S_{бок} = \frac{a^2}{4}(\sqrt{15}+\sqrt{3}).$$

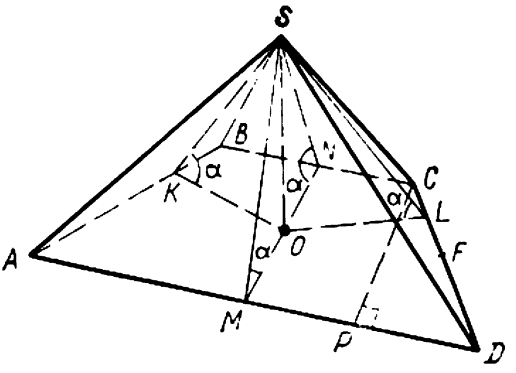

Рис. 77

Пример 68. В основании пирамиды лежит равнобедренная трапеция, параллельные стороны которой равны $a$ и $b$ $(a > b)$. Каждая боковая грань наклонена к плоскости основания под углом, равным $\alpha$. Найдем площадь поверхности пирамиды.

Построение изображения. Пусть фигура $SABCD$ (рис. 77) является изображением данной пирамиды. Это изображение полное. Найдем его параметрическое число. Четырехугольник $ABCD$ — изображение заданной равнобедренной трапеции (два параметра), $[SO]$ — изображение перпендикуляра к плоскости $ABC$ (два параметра). Считая $\angle AB$, $\angle BC$, $\angle CD$ и $\angle AD$ изображениями двугранных углов, имеющих в оригинале величину, равную $\alpha$, мы расходуем еще один параметр.

Действительно, построим точку $M$ — середину отрезка $AD$ и точку $N$ — середину отрезка $BC$. Пусть далее точка $F$ — середина отрезка $CD$. Возьмем на отрезке $CF$ произвольную, но отличную от точек $C$ и $F$ точку $L$ и будем считать, что $|DL| = |DM|$. Это допущение влечет за собой расход одного параметра. Ясно, что тогда треугольники $OMD$ и $OLD$ являются изображениями конгруэнтных треугольников. А так как $[OM]$ — изображение отрезка, перпендикулярного основанию трапеции, то $[OL]$ — изображение отрезка, перпендикулярного к боковой стороне трапеции, причем $[OM]$ и $[OL]$ — изображения конгруэнтных между собой отрезков. Тогда $[SM]$ и $[SL]$ — изображения отрезков, перпендикулярных соответственно основанию трапеции и ее боковой стороне, т. е. $\triangle SMO$ и $\triangle SLO$ — изображения прямоугольных треугольников, а $\angle SMO$ и $\angle SLO$ — изображения линейных углов двугранных углов $AD$ и $CD$, в оригинале имеющих величину $\alpha$. Таким образом, считая, что $[DM]$ и $[DL]$ — изображения конгруэнтных отрезков, мы вместе с тем получаем, что $\angle AD$ и $\angle CD$ — изображения конгруэнтных двугранных углов. Проводя затем $(LK) \parallel (AD)$, мы получим точку $K \in [AB]$, причем $[AK]$ — изображение отрезка, конгруэнтного в оригинале отрезку $AM$, т. е. $\angle SKO$ — изображение линейного угла двугранного угла, имеющего в оригинале величину $\alpha$. Далее нетрудно обнаружить, что и $\angle SNO$ является изображением линейного угла, имеющего в оригинале величину $\alpha$.

Таким образом, на изображение данной пирамиды израсходовано пять параметров.

Дано: $SABCD$ — пирамида, $S$ — вершина, $ABCD$ — трапеция, $|AB| = |CD|$, $|AD| = a$, $|BC| = b$, $a > b$, $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{AD} = \alpha$.

Найти: $S$ — площадь полной поверхности пирамиды.

Решение. Найдем $S$ прямым счетом: $S = S_{\text{бок}} + S_{ABCD}$. Из конгруэнтности прямоугольных треугольников $SMO$, $SLO$, $SNO$ и $SKO$ следует, что $|SM| = |SL| = |SN| = |SK|$.

Тогда

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(|AD| + |CD| + |BC| + |AB|) \cdot |SM| = \frac{1}{2}(a + b + 2|CD|) \cdot |SM|.$$

Но $|DL| = |DM| = \frac{a}{2}$, и $|CL| = |CN| = \frac{b}{2}$, т. е. $|CD| = \frac{a+b}{2}$.

Построим $[CP] \parallel [MN]$. Тогда $[CP] \perp [AD]$. Из прямоугольного $\triangle CDP$, где $|CD| = \frac{a+b}{2}$, а $|DP| = \frac{a-b}{2}$, находим:

$$|CP| = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}.$$

Следовательно, $|OM| = \frac{1}{2}\sqrt{ab}$.

Из прямоугольного $\triangle SOM$ имеем:

$$|SM| = \frac{|OM|}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt{ab}}{2\cos\alpha}.$$

Таким образом,

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(a + b + (a + b))\frac{\sqrt{ab}}{2\cos\alpha} = \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2\cos\alpha}.$$

Далее,

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}(a + b)\sqrt{ab}.$$

Итак,

$$S = \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2\cos\alpha} + \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2} = \frac{(a+b)\sqrt{ab}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

Исследование. По смыслу задачи $|AD| > |CD| > |BC|$, и поэтому

$$S_{\triangle SAD} > S_{\triangle SCD} > S_{\triangle SBC}.$$

Но тогда $S_{\text{бок}} > 4S_{\triangle SBC}$, и, таким образом, по смыслу задачи $S > 4S_{\triangle SBC} + S_{ABCD}$, т. е.

$$\frac{(a+b)\sqrt{ab}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha} > 4 \cdot \frac{1}{2}b\frac{\sqrt{ab}}{2\cos\alpha} + \frac{(a+b)\sqrt{ab}}{2}. \qquad (68.1)$$

Но $a > b > 0$ и, как легко заметить, $0° < \alpha < 90°$, поэтому неравенство (68.1) выполняется (убедитесь в этом самостоятельно).

Следовательно,

$$S = \frac{(a+b)\sqrt{ab}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

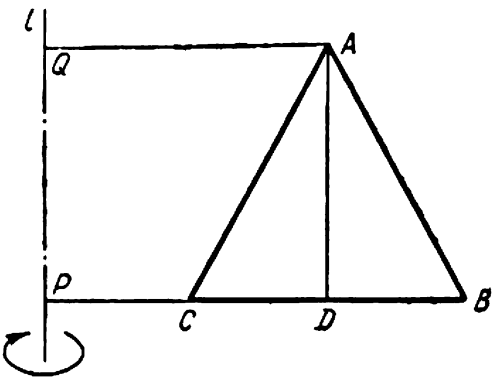

Рис. 78

Пример 69. Правильный треугольник, сторона которого равна $a$, вращается вокруг внешней оси, параллельной его высоте и удаленной от нее на расстояние, равное $\frac{3}{2}a$. Найдем площадь поверхности полученного тела вращения.

Построение изображения. Ясно, что так как ось вращения $l_0$ параллельна высоте треугольника, то она параллельна и плоскости треугольника и поэтому в сечении заданного тела вращения плоскостью $\pi_0$, проходящей через $l_0$, будет фигура $\Phi_0$, состоящая из пары правильных треугольников, симметричных относительно $l_0$.

Таким образом, в рассматриваемом примере мы можем ограничиться изображением плоской фигуры, вместо того чтобы изображать довольно сложное тело вращения. И именно можно построить изображение фигуры $\Phi_0$ (с точностью до подобия).

Впрочем для решения задачи можно ограничиться изображением оси $l_0$ и только одного из треугольников, получаемых в сечении заданного тела вращения плоскостью $\pi_0$ (рис. 78).

Дано: $\triangle ABC$ — правильный, $|AB| = a$, $[AD]$ — высота $\triangle ABC$, $l \parallel (AD)$, $[DP] \perp l$, $P \in l$, $|DP| = \frac{3a}{2}$.

Найти: $S_{[ABC]}$ — площадь поверхности тела вращения.

Решение. Обозначим площади поверхностей, образованных вращением отрезков $AB$, $AC$ и $BC$ вокруг оси $l$, соответственно $S_{[AB]}$, $S_{[AC]}$ и $S_{[BC]}$. Тогда $S_{[ABC]} = S_{[AB]} + S_{[AC]} + S_{[BC]}$.

Имеем:

$$S_{[AB]} = \pi(|BP| + |AQ|) \cdot |AB|.$$

Но $|BP| = |BD| + |DP| = 2a$, $|AQ| = |DP| = \frac{3}{2}a$ и $|AB| = a$.

Таким образом, $S_{[AB]} = \frac{7}{2}\pi a^2$.

Аналогично

$$S_{[AC]} = \pi(|CP| + |AQ|) \cdot |AC| = \frac{5}{2}\pi a^2.$$

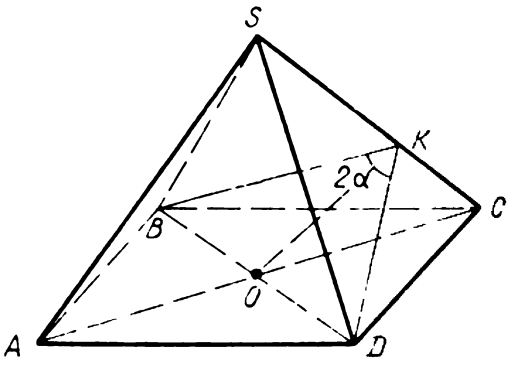


Рис. 79

И далее,

$$S_{[BC]} = \pi |BP|^2 - \pi |CP|^2 = \pi (4a^2 - a^2) = 3\pi a^2.$$

Итак, $S_{[ABC]} = 9\pi a^2$.

Замечание. Искомую площадь поверхности можно было подсчитать несколько проще, если воспользоваться первой теоремой Гюльдена, согласно которой $S = P \cdot 2\pi R$, где $P$ — периметр фигуры, вращающейся вокруг оси, а $R$ — расстояние от центроида этой фигуры до оси вращения. В рассматриваемом примере $P = 3a$, а $R = \frac{3}{2}a$.

В заключение настоящего параграфа рассмотрим задачи типа $M$.

Пример 70. В правильной четырехугольной пирамиде угол между смежными боковыми гранями равен $2\alpha$. Найдем отношение площади диагонального сечения пирамиды к площади ее боковой поверхности.

Построение изображения. Пусть фигура $SABCD$ является изображением заданной пирамиды (рис. 79). Это изображение полное, его параметрическое число $p = 5$ (убедитесь в этом самостоятельно).

Дано: $SABCD$ — правильная пирамида, $S$ — вершина, $\widehat{SC} = 2\alpha$.

Найти: $S_{\Delta SAC} : S_{\text{бок.}}$

Решение. Для проведения необходимых подсчетов построим сначала изображение линейного угла, например при боковом ребре $SC$. Для этого требуется опустить перпендикуляр из точки $D$ на ребро $SC$. Казалось бы, нельзя на ребре $SC$ произвольно взять точку $K$ и сказать, что пусть $[DK] \perp [SC]$, так как для имеющегося изображения $p = 5$. Однако в данном случае это не совсем так. Дело в том, что $\widehat{SC} = 2\alpha$ и, как нетрудно сообразить, $90° < 2\alpha < 180°$. Эта неопределенность и дает еще некоторую свободу для выполнения метрического построения. Итак, пусть $[DK]$ — изображение перпендикуляра к ребру $SC$. Таким образом, на изображение израсходован еще один параметр, и мы имеем дело теперь с так называемым переопределенным (и при этом верным) изображением. Построим далее $[BK]$ и $[OK]$. Тогда $\angle BKD$ — линейный угол двугранного угла $SC$, и, следовательно, $\widehat{BKD} = 2\alpha$. Нетрудно доказать, что $|BK| = |DK|$ и поэтому $[OK]$ — медиана треугольника $BDK$ — является его биссектрисой и высотой. Итак, $\widehat{DKO} = \alpha$.

Заметим теперь, что $S_{\Delta SAC} = 2S_{\Delta SOC} = |OK| \cdot |SC|$, а $S_{\text{бок}} = 4S_{\Delta SCD} = 2|DK| \cdot |SC|$.

Таким образом,

$$\frac{S_{\Delta SAC}}{S_{\text{бок}}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{|OK|}{|DK|}.$$

Но из прямоугольного $\Delta ODK$ имеем: $\frac{|OK|}{|DK|} = \cos\alpha$.

Получаем:

$$\frac{S_{\Delta SAC}}{S_{\text{бок}}} = \frac{\cos\alpha}{2}.$$

Исследование. По смыслу задачи $|OC| < |AC|$ и $|SO| < |SD|$, т. е. $S_{\Delta SOC} < S_{\Delta SDC}$ или $0 < \frac{S_{\Delta SOC}}{S_{\Delta SDC}} < 1$, а тогда

$$0 < \frac{2S_{\Delta SOC}}{4S_{\Delta SCD}} < \frac{1}{2},$$

или

$$0 < \frac{S_{\Delta SAC}}{S_{\text{бок}}} < \frac{1}{2}. \qquad (70.1)$$

Но $45° < \alpha < 90°$, т. е. $0 < \cos\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$, а следовательно, $0 < \frac{\cos\alpha}{2} < \frac{\sqrt{2}}{4}$. Ясно, что $\frac{\sqrt{2}}{4} < \frac{1}{2}$.

Таким образом, найденное значение отношения $\frac{S_{\Delta SAC}}{S_{\text{бок}}}$ удовлетворяет системе неравенств (70.1). Итак,

$$\frac{S_{\Delta SAC}}{S_{\text{бок}}} = \frac{\cos\alpha}{2}.$$

Пример 71. В правильной четырехугольной пирамиде секущая плоскость, проведенная через сторону основания, делит площадь боковой поверхности и двугранный угол при ребре основания пополам. Найдем угол между боковой гранью и плоскостью основания.

Построение изображения. Пусть фигура $SABCD$ (рис. 80) является изображением данной пирамиды. Это

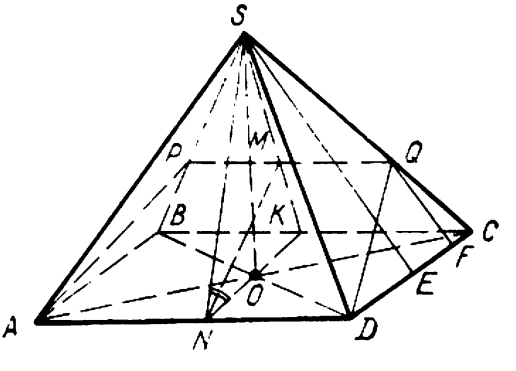

Рис. 80

изображение полное. Его параметрическое число (подсчитайте самостоятельно) $p=4$. В пирамиде задано сечение, удовлетворяющее метрическим условиям. Подсчитаем, как при изображении этого сечения расходуются параметры. Заметим прежде всего, что так как сечение проходит через ребро основания, пусть через ребро $AD$, то ввиду того, что $[AD] \parallel [BC]$, будет и $[AD] \parallel (SBC)$. А тогда секущая плоскость пересекает грань $SBC$ по $[PQ] \parallel [AD]$. Выполним далее еще некоторые построения. А именно: построим точку $M$ — середину отрезка $PQ$, проведем прямую $SM$ и отметим $K = (SM) \cap (BC)$. Ясно, что $|BK| = |CK|$. Построим еще прямую $KO$ и $N = (KO) \cap (AD)$. Так как $(KO) \parallel (AB)$, то точка $N$ — середина ребра $AD$. Построим теперь $[SN]$ и $[NM]$. Так как точка $N$ — середина ребра $AD$, то $[ON] \perp [AD]$. Но $[ON]$ — проекция отрезка $SN$ на плоскость $ABC$. Следовательно, $[SN] \perp [AD]$. Но тогда $\angle SNK$ — линейный угол двугранного угла $SADK$. Считая $[NM)$ изображением биссектрисы $\angle SNK$, мы вместе с тем считаем, что плоскость $APQD$ делит двугранный угол $SADK$ пополам, что отвечает условию задачи. Принимая же $[NM)$ за изображение биссектрисы $\angle SNK$, мы расходуем на изображение еще один параметр. Таким образом, теперь израсходованы все пять параметров. Мы же еще не учли, что плоскость сечения делит пополам боковую поверхность пирамиды. Как мы увидим ниже, допущение о том, что биссекторная плоскость $APQD$ является изображением как раз той плоскости, которая делит площадь боковой поверхности пирамиды пополам, влечет за собой допущение, что $|AD| : |SM| = \sqrt{2} : 1$. А это означает, что мы расходуем на изображение еще один (шестой) параметр. (Конечно, обнаружение этого факта можно было бы и не откладывать «на потом», а выполнить здесь же, при построении изображения. Мы, однако, из методических соображений, сделаем это лишь в процессе решения и, как и в предыдущем примере, решим пример на переопределенном изображении. Однако, в отличие от предыдущего примера, здесь изображение может быть сначала взято и «немного неверное», что, впрочем, не сказывается на последующих выкладках, а после обнаружения зависимости $|AD|:|SN| = \sqrt{2} : 1$ это изображение может быть выполнено уже таким образом, что на него израсходовано будет ровно пять параметров.)

Итак, будем решать пример на изображении, для которого $p = 6$.

Д а н о: $SABCD$ — правильная пирамида, $S$ — вершина, $APQD$ — секущая плоскость, $S_{\text{бок}SAPQD} = S_{\text{бок}PQABCD}$, $\widehat{SADM} = \widehat{MADK}$.

Н а й т и: $\widehat{SADK}$.

Р е ш е н и е. Заметим, что так как пирамида правильная, то двугранные углы при ребрах основания конгруэнтны. Поэтому безразлично, какой из этих углов мы найдем. Ясно, что целесообразней искать величину двугранного угла при ребре $AD$, так как

через это ребро проходит и секущая плоскость. Мы уже доказали, что $\angle SNK$ — линейный угол двугранного угла $SADK$. Решим задачу алгебраически. Положим $\widehat{SNK} = x$. Тогда $\widehat{SNM} = \widehat{MNK} = \frac{x}{2}$. Введем теперь вспомогательный параметр, положив сторону основания равной $a$.

Из условия следует, что

$$S_{\triangle SAD} + 2S_{\triangle SQD} + S_{\triangle SPQ} = 2S_{\triangle DQC} + S_{BPQC}. \qquad (71.1)$$

Подсчитаем все площади, входящие в равенство (71.1). Для краткости положим длину апофемы боковой грани равной $l$.

1) $S_{\triangle SAD} = \frac{1}{2}al$.

2) Из прямоугольного $\triangle SON$ имеем: $\cos x = \frac{a}{2l}$. Далее,

$$\begin{cases} |SM| + |MK| = l, \\ \frac{|SM|}{|MK|} = \frac{|SN|}{|NK|} = \frac{l}{a}, \end{cases}$$

откуда $|MK| = \frac{al}{a+l}$ и $|SM| = \frac{l^2}{a+l}$.

Из $\triangle MNK$ ( по теореме синусов) имеем:

$$\frac{|MK|}{\sin\frac{x}{2}} = \frac{|NK|}{\sin\left(180° - \left(x + \frac{x}{2}\right)\right)},$$

откуда

$$\frac{l}{a+l}\sin\frac{3x}{2} = \sin\frac{x}{2}. \qquad (71.2)$$

3) Построим $[QF]$ — высоту $\triangle DQC$. Тогда $S_{\triangle DQC} = \frac{1}{2}a|QF|$. Построим $[SE]$ — апофему грани $SDC$. Найдем $|QF|$ из пропорции $\frac{|QF|}{|SE|} = \frac{|QC|}{|SC|}$. Но $\frac{|QC|}{|SC|} = \frac{|MK|}{|SK|}$, т. е. $\frac{|QF|}{|SE|} = \frac{|MK|}{|SK|}$, откуда

$$|QF| = |MK| = \frac{al}{a+l}.$$

Таким образом, $S_{\triangle DQC} = \frac{a^2l}{2(a+l)}$.

4) $S_{\triangle SQD} = S_{\triangle SCD} - S_{\triangle DQC} = \frac{1}{2}al - \frac{a^2l}{2(a+l)} = \frac{al^2}{2(a+l)}$.

5) $S_{\triangle SPQ} = \frac{1}{2}|SM| \cdot |PQ|$.

Но $\frac{|PQ|}{|BC|} = \frac{|SM|}{|SK|}$, откуда $|PQ| = \frac{al}{a+l}$.

Таким образом, $S_{\triangle SPQ} = \frac{al^3}{2(a+l)^2}$.

6) $S_{BPQC} = S_{\triangle SBC} - S_{\triangle SPQ} = \frac{1}{2}al - \frac{al^3}{2(a+l)^2} = \frac{a^2l(a+2l)}{2(a+l)^2}$.

7) Подставив в (71.1) найденные значения площадей, подсчитаем, что

$$a = l\sqrt{2}. \qquad (71.3)$$

(Отсюда следует зависимость $|AD| : |SN| = \sqrt{2} : 1$, о которой мы говорили при подсчете параметрического числа изображения.) Выразив значение $a$ из уравнения (71.2), получим:

$$a = \frac{l \sin \frac{3x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} - l.$$

Подставляя это значение $a$ в равенство (71.3), придем к уравнению

$$\frac{\sin \frac{3x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} - 1 = \sqrt{2},$$

откуда получим:

$$\sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2} = \sqrt{2} \sin \frac{x}{2},$$

или

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos x = \sqrt{2} \sin \frac{x}{2}.$$

Ясно, что $\sin \frac{x}{2} \neq 0$, поэтому из последнего уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = 45°$.

Исследование. По смыслу задачи $0° < x < 90°$. Найденное значение $x$ этой системе неравенств удовлетворяет. Таким образом, угол между боковой гранью пирамиды и плоскостью основания равен 45°.

**Задачи для самостоятельного решения**

**210.** В правильной четырехугольной призме диагональ длиной $d$ наклонена к плоскости боковой грани под углом, равным $\alpha$. Найти площадь боковой поверхности призмы.

**211.** Углы, образованные диагональю основания прямоугольного параллелепипеда, со стороной основания и диагональю параллелепипеда, равны соответственно $\alpha$ и $\beta$. Найти площадь боковой поверхности параллелепипеда, если его диагональ равна $d$.

**212.** Высота правильной четырехугольной призмы равна $H$, а угол между диагоналями, проведенными из одной вершины ос-

нования в двух смежных боковых гранях, равен $\alpha$. Найти площадь боковой поверхности призмы.

**213 (3).** Высота правильной треугольной призмы равна $H$. Прямая, проходящая через центроид верхнего основания и середину стороны нижнего основания, образует с плоскостью основания угол, равный $\alpha$. Найти площадь поверхности призмы.

**214 (4).** Площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна $S$. Двугранный угол при ребре основания равен $\alpha$. Найти сторону основания.

**215.** Найти площадь поверхности четырехугольной пирамиды, если ее высота равна $H$, а площадь боковой грани равна площади основания.

**216.** Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник, катеты которого равны соответственно 6 и 8 см. Угол наклона каждой из боковых граней пирамиды к плоскости основания равен 60°. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

**217.** Площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна $S$, а двугранный угол при ребре основания равен $\alpha$. Найти расстояние между центроидом основания и боковой гранью пирамиды.

**218.** Площадь поверхности правильной треугольной пирамиды равна $S$, а плоский угол при вершине пирамиды равен $\alpha$. Найти радиус окружности, описанной около основания.

**219.** Основанием пирамиды является квадрат, сторона которого равна $a$. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а каждая из двух других боковых граней образует с ней угол, равный $\alpha$. Найти площадь поверхности пирамиды.

**220 (8).** Основанием пирамиды является прямоугольник. Две смежные боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие образуют с ней углы, соответственно равные $\alpha$ и $\beta$. Высота пирамиды равна $H$. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

**221.** Основанием пирамиды является ромб, сторона которого равна $a$ и острый угол между его сторонами равен $\alpha$. Каждый из двугранных углов при ребрах основания равен $\varphi$. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

**222.** Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция, диагональ которой равна $d$, а угол между этой диагональю и большим основанием трапеции равен $\alpha$. Каждая из боковых граней пирамиды наклонена к плоскости основания под углом, равным $\varphi$. Найти площадь поверхности пирамиды.

**223.** Длина каждой стороны основания треугольной призмы равна $a$. Проекцией одной из вершин верхнего основания является центроид нижнего основания. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углами, каждый из которых равен $\alpha$. Найти площадь боковой поверхности призмы.

**224.** Основанием параллелепипеда, боковое ребро которого равно $b$, является квадрат со стороной, равной $a$. Одна из вершин

верхнего основания одинаково удалена от всех вершин нижнего основания. Найти площадь поверхности параллелепипеда.

**225 (9).** Основанием призмы является правильный треугольник, сторона которого равна $a$. Каждое боковое ребро призмы равно $b$, угол между одним из боковых ребер и прилежащими к нему сторонами основания равен 45°. Найти площадь боковой поверхности призмы.

**226.** Правильный треугольник, сторона которого равна $a$, вращается вокруг оси, которая параллельна стороне треугольника и проходит через вершину, противоположную этой стороне. Найти площадь поверхности полученного тела вращения.

**227 (5).** Прямоугольный треугольник, катеты которого равны 5 и 12 см, вращается вокруг внешней оси, параллельной большому катету и удаленной от него на расстояние, равное 3 см. Найти площадь поверхности полученного тела вращения.

**228.** Прямоугольник, стороны которого равны $a$ и $b$, вращается вокруг оси, перпендикулярной его диагонали и проходящей через один из ее концов. Найти площадь поверхности полученного тела вращения.

**229 (6).** Равнобедренный треугольник с основанием, равным $a$, и углом при основании, равным $\alpha$, вращается вокруг оси, проходящей через один из концов основания перпендикулярно к основанию. Найти площадь поверхности полученного тела вращения.

**230.** В прямоугольной трапеции, описанной около окружности, радиус которой равен $R$, острый угол равен $\alpha$. Найти площадь поверхности тела, полученного при вращении этой трапеции около меньшей из ее параллельных сторон.

**231.** Основанием пирамиды является треугольник, отношение длин сторон которого равно 13 : 14 : 15, а каждый из двугранных углов при ребре основания равен 45°. Найти отношение площади поверхности пирамиды к площади ее основания.

**232.** Основанием прямой призмы является равнобедренный треугольник, в котором угол между конгруэнтными сторонами равен $2\alpha$. Из вершины верхнего основания проведены две диагонали конгруэнтных боковых граней. Угол между этими диагоналями равен $2\beta$. Найти отношение площади боковой поверхности призмы к площади ее основания.

**233.** Центроид одной грани куба соединен с вершинами противоположной грани. Найти отношение площади поверхности образовавшейся пирамиды к площади поверхности куба.

**234.** Через сторону нижнего основания правильной треугольной призмы и середину непересекающегося с этой стороной бокового ребра проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол, равный $\alpha$. Найти отношение площади боковой поверхности образовавшейся при этом пирамиды к площади боковой поверхности данной призмы.

**235.** Угол между образующими в осевом сечении конуса ра-

вен $2\alpha$. Найти отношение боковой поверхности конуса к площади его осевого сечения.

**236 (1).** Наибольший угол между образующими конуса равен 120°. Доказать, что площадь боковой поверхности этого конуса равна площади боковой поверхности цилиндра, имеющего такие же, как у конуса, основание и высоту.

**237.** Боковая поверхность конуса — четверть круга, свернутая в коническую поверхность. Найти отношение площади поверхности конуса к площади его осевого сечения.

**238 (2).** Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна сумме площадей оснований, а длины радиусов оснований относятся, как 1 : 3. Найти угол наклона образующей к плоскости основания.

**239 (10).** В правильной четырехугольной пирамиде плоскость, проведенная через сторону основания, делит боковую поверхность и двугранный угол при ребре основания пополам. Найти угол, образованный боковым ребром с плоскостью основания.

**240.** Ромб, острый угол которого равен $\alpha$, вращается вокруг своей стороны. Найти отношение площади поверхности полученного тела вращения к площади ромба.

**241 (11).** Прямая отсекает от сторон прямоугольного треугольника, угол между которыми равен 60°, отрезки, длины которых составляют $\frac{1}{4}$ длины гипотенузы, считая от вершины этого угла. Найти отношение площади треугольника к площади поверхности тела, полученного вращением треугольника вокруг данной прямой.

**242 (12).** Равнобедренная трапеция с углом при основании, равным 60°, вращается вокруг биссектрисы этого угла. Найти отношение площади поверхности тела вращения к площади трапеции, если высота трапеции в $\sqrt{3}$ раз меньше полусуммы длин ее оснований.

**243 (7).** Во сколько раз расстояние от светящейся точки до центра шара больше, чем радиус шара, если площадь освещенной части поверхности шара в 2 раза меньше теневой?

## § 14. Объемы

Рассмотрим сначала несколько задач типа $F$.

Пример 72. В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм, стороны которого равны $a$ и $b$, а тупой угол равен $\varphi$. Найдем объем параллелепипеда, если меньшая диагональ параллелепипеда конгруэнтна большей диагонали основания.

Построение изображения. Пусть фигура $ABCD\,A_1B_1C_1D_1$ (рис. 81) является изображением данного параллелепипеда. Это изображение полное. Его параметрическое число $p=5$.

(Действительно, считая, что $[AA_1]$ — изображение отрезка, перпендикулярного плоскости основания, расходуем два параметра.

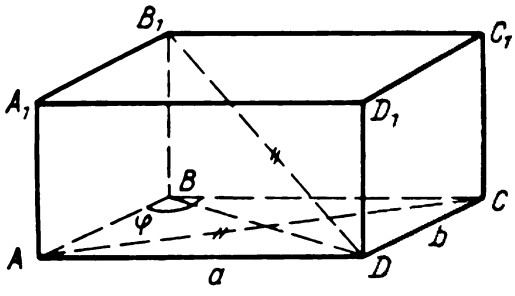


Рис. 81

Считая, что $|AD| : |CD| = a : b$, расходуем один параметр. Считая, что, например, $\angle ABC$ является изображением угла, величина которого в оригинале равна $\varphi$, расходуем еще один параметр. При этом, так как мы считаем $\angle ABC$ изображением тупого угла, то $[BD]$ и $[AC]$ мы должны считать изображениями соответственно меньшей и большей диагонали параллелограмма $ABCD$. Поэтому будем считать, что $|B_1D| : |AC| = 1 : 1$. Таким образом, расходуем еще один параметр.)

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, $[AA_1] \perp (ABC)$, $|AD| = a$, $|CD| = b$, $\widehat{ABC} = \varphi$, $|B_1D| = |AC|$.

Найти: $V$ — объем параллелепипеда.

Решение. Из $\triangle ACD$ имеем:

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |CD|^2 - 2|AD| \cdot |CD| \cos \varphi.$$

Но $|AC| = |B_1D|$. Таким образом,

$$|B_1D|^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi.$$

Из $\triangle ABD$ получим:

$$|BD|^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos (180^\circ - \varphi) = a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi.$$

А из прямоугольного $\triangle BB_1D$ имеем: $|BB_1|^2 = |B_1D|^2 - |BD|^2$, т. е. $|BB_1|^2 = (a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi) - (a^2 + b^2 + 2ab \cos \varphi) = -4ab \cos \varphi$,

и, следовательно, $|BB_1| = 2\sqrt{-ab \cos \varphi}$.

Так как $S_{ABCD} = ab \sin\varphi$, то получаем:

$$V = 2ab \sin \varphi \sqrt{-ab \cos \varphi}.$$

Исследование. По смыслу задачи $\varphi$ — величина тупого угла. Поэтому $-1 < \cos \varphi < 0$, а тогда $(-\cos \varphi)$ — величина положительная. Так как $\sin \varphi$ — величина также положительная, то найденное значение $V$ является положительным.

Таким образом, $V = 2ab \sin \varphi \sqrt{-ab \cos \varphi}$.

Пример 73. Боковые грани треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, а их площади равны $Q_1$, $Q_2$ и $Q_3$. Найдем объем пирамиды.

Построение изображения. Пусть четырехугольник $SABC$ с его диагоналями является изображением данной пирамиды (рис. 82). Это изображение полное. Его параметрическое число $p = 5$. (Действительно, так как боковые грани данной пирамиды взаимно перпендикулярны, то и боковые ребра ее также взаимно перпендикулярны друг другу. Считая $[SA]$ изображением ребра пирамиды, перпендикулярного боковым ее ребрам $SB$ и $SC$,

мы расходуем два параметра. Считая $[SB]$ изображением ребра, перпендикулярного ребру $SC$, расходуем еще один параметр. Таким образом, израсходовав три параметра, мы обеспечиваем взаимную перпендикулярность боковых граней пирамиды. Считая далее, что $\triangle SAB$ и $\triangle SBC$ — изображения боковых граней, отношение площадей которых равно $Q_1 : Q_2$, т. е. считая, что

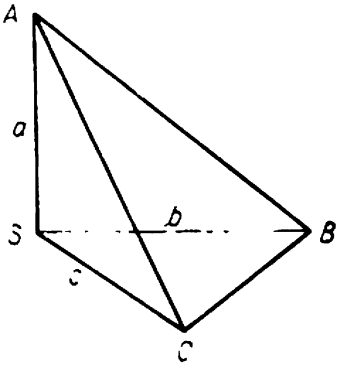

Рис. 82

$$\left(\frac{1}{2}|SA| \cdot |SB|\right) : \left(\frac{1}{2}|SB| \cdot |SC|\right) = Q_1 : Q_2,$$

или $|SA| : |SC| = Q_1 : Q_2$, мы расходуем один параметр. Аналогично, считая, что $\triangle SBC$ и $\triangle SAC$— изображения боковых граней, отношение площадей которых равно $Q_2 : Q_3$, мы расходуем также один параметр.

Дано: $SABC$ — пирамида, $S$ — вершина, $[SA] \perp [SB]$, $[SA] \perp [SC]$, $[SB] \perp [SC]$, $S_{\triangle SAB} = Q_1$, $S_{\triangle SBC} = Q_2$, $S_{\triangle SAC} = Q_3$.

Найти: $V$—объем пирамиды.

Решение. Считая по традиции $\triangle ABC$ основанием пирамиды, мы должны были бы сначала подсчитать $S_{\triangle ABC}$ и высоту пирамиды, проведенную из вершины $S$ на плоскость $ABC$.

В рассматриваемом примере можно, однако, произвести необходимые подсчеты проще, если догадаться «поставить» пирамиду на какую-нибудь из ее боковых граней. Так, заметив, что $[SA] \perp (SBC)$, мы примем за основание пирамиды $\triangle SBC$. Тогда

$$V = \frac{1}{3}|SA| \cdot S_{\triangle SBC} = \frac{1}{6}|SA| \cdot |SB| \cdot |SC|.$$

Или, полагая для краткости $|SA| = a$, $|SB| = b$ и $|SC| = c$, имеем:

$$V = \frac{1}{6}abc.$$

Из прямоугольных треугольников $SAB$, $SBC$ и $SAC$ получаем:

$$ab = 2Q_1, \quad bc = 2Q_2, \quad ac = 2Q_3.$$

Перемножив почленно эти три равенства, находим:

$$(abc)^2 = 8Q_1Q_2Q_3, \quad \text{откуда} \quad abc = 2\sqrt{2Q_1Q_2Q_3}.$$

Таким образом, $V = \frac{1}{3}\sqrt{2Q_1Q_2Q_3}$.

Исследование. Так как по смыслу задачи $Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$ и $Q_3 > 0$, то найденное значение $V$ является положительным.

Итак, $V = \frac{1}{3}\sqrt{2Q_1Q_2Q_3}$.

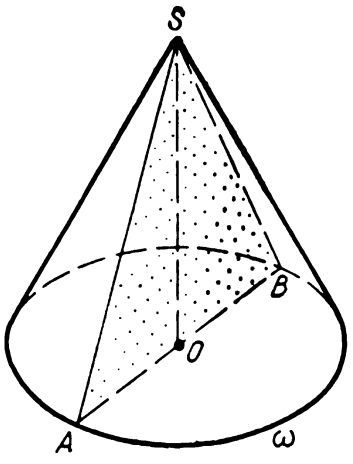

Рис. 83

Пример 74. Площадь боковой поверхности конуса, радиус основания которого $R$, равна сумме площадей основания и осевого сечения. Найдем объем конуса.

Построение изображения. Пусть эллипс $\omega$ вместе с парой касательных, проведенных к нему из внешней точки $S$, является изображением данного конуса (рис. 83). Это изображение полное. Считая эллипс $\omega$ изображением окружности, мы расходуем два параметра. Считая $[SO]$ изображением высоты конуса, расходуем два параметра. Построим на изображении $[AB]$ — диаметр эллипса (это изображение диаметра окружности), $[SA]$ и $[SB]$ — изображения образующих конуса. При этом параметров мы не расходуем. И, наконец, считая, что изображен такой конус, у которого $S_{бок} = S_{осн} + S_{\triangle SAB}$, мы расходуем еще один параметр. Итак, для построенного изображения $p = 5$.

Дано: $S_\omega$ — конус, $\omega\,(O, |AO|)$ — окружность, $[SO]$ — высота конуса, $|AO| = R$, $S_{бок} = S_{осн} + S_{\triangle SAB}$.

Найти: $V$ — объем конуса.

Решение. $V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot |SO|$, где $S_{осн} = \pi R^2$. Положим $|SO| = x$. Таким образом, для подсчета $V$ необходимо найти $x$.

Так как $S_{бок} = \pi R \cdot |SA|$, $S_{осн} = \pi R^2$ и $S_{\triangle SAB} = Rx$, то составляем уравнение

$$\pi R |SA| = \pi R^2 + Rx \quad \text{или} \quad \pi |SA| = \pi R + x.$$

Но из прямоугольного $\triangle SAO$ имеем:

$$|SA| = \sqrt{x^2 + R^2}.$$

Итак, мы получаем:

$$\pi \sqrt{x^2 + R^2} = \pi R + x. \tag{74.1}$$

Возведя в квадрат обе части уравнения (74.1), получим после необходимых упрощений:

$$(\pi^2 - 1)\, x^2 - 2\pi R x = 0, \text{ откуда } x_1 = \frac{2\pi R}{\pi^2 - 1},\ x_2 = 0.$$

Ясно, что второе решение не удовлетворяет условию. Следовательно,

$$V = \frac{2\pi^2 R^3}{3(\pi^2 - 1)}.$$

Исследование мы опускаем.

Пример 75. Прямоугольник со сторонами, равными $a$ и $b$, вращается вокруг оси, проходящей через его вершину параллельно диагонали, не проходящей через эту вершину. Найдем объем полученного тела вращения.

Построение изображения. Как и в примере 69 (с. 117), ограничимся изображением не тела вращения, а лишь фигуры, получающейся в сечении тела вращения полуплоскостью, границей которой является ось вращения. Ясно, что таким сечением является прямоугольник. Таким образом, пусть прямоугольник $ABCD$ с диагональю $BD$, с прямой $l$, параллельной диагонали $BD$ и проходящей через точку $A$, является изображением этого сечения (рис. 84). (В этом случае изображение выполняется с точностью до подобия, т. е. о расходе параметров речи идти здесь не может.)

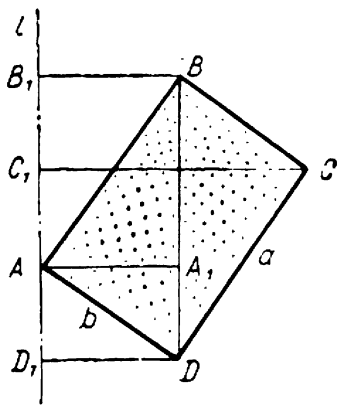

Рис. 84

Дано: $ABCD$ — прямоугольник, $|AB| = a$, $|AD| = b$, $l$ — ось вращения, $A \in l$, $l \parallel [BD]$.

Найти: $V_{ABCD}$ — объем тела вращения.

Решение. Из точек $B$, $C$ и $D$ опустим перпендикуляры $BB_1$, $CC_1$ и $DD_1$ на $l$, а из точки $A$ перпендикуляр $AA_1$ на прямую $BD$.

Ясно, что

$$V_{ABCD} = (V_1 + V_2) - (V_3 - V_4),$$

где

$$V_1 = V_{C_1B_1BC} = \frac{1}{3}\pi |B_1C_1| \left(|CC_1|^2 + |CC_1| \cdot |BB_1| + |BB_1|^2\right),$$

$$V_2 = V_{D_1C_1CD} = \frac{1}{3}\pi |C_1D_1| \cdot \left(|CC_1|^2 + |CC_1| \cdot |DD_1| + |DD_1|^2\right),$$

$$V_3 = V_{AB_1B} = \frac{1}{3}\pi |AB_1| \cdot |BB_1|^2,$$

$$V_4 = V_{AD_1D} = \frac{1}{3}\pi |AD_1| \cdot |DD_1|^2.$$

Но так как $l \parallel [BD]$, то $|BB_1| = |DD_1| = |AA_1|$. Из прямоугольного $\triangle ABD$ найдем, что

$$|BD| = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ и } |AA_1| = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Далее найдем, что $|CC_1| = 2|AA_1| = \dfrac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Тогда

$$V_1 + V_2 = \frac{1}{3}\pi \left(|CC_1|^2 + |CC_1| \cdot |AA_1| + |AA_1|^2\right) \times$$

$$\times \left(|B_1C_1| + |C_1D_1|\right) = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{4a^2b^2}{a^2 + b^2} + \frac{2ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}\right) \cdot \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{1}{3}\pi \frac{7a^2b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

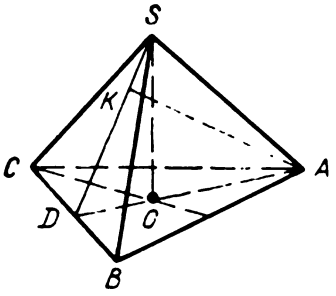

Рис. 85

Аналогично

$$V_3 + V_4 = \frac{1}{3}\pi |AA_1|^2 (|AB_1| + |AD_1|) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi \frac{a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Таким образом,

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}\pi \frac{6a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{2\pi a^2b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Замечание. Искомый объем тела вращения можно было подсчитать значительно проще, если воспользоваться второй теоремой Гюльдена, согласно которой $V = S \cdot 2\pi R$, где $S$ — площадь фигуры, вращающейся вокруг оси, а $R$ — расстояние от центроида этой фигуры до оси вращения. Нетрудно найти, что в рассматриваемом примере $S = ab$, а $R = |AA_1| = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Пример 76. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $a$; высота, опущенная из вершины основания на противоположную ей боковую грань, равна $b$. Найдем объем пирамиды.

Построение изображения. Пусть четырехугольник $SABC$ с его диагоналями является изображением данной пирамиды (рис. 85). Это изображение полное. Считая $\triangle ABC$ изображением правильного треугольника, расходуем два параметра, считая $[SO]$ изображением высоты пирамиды, расходуем также два параметра. Построим $[SD]$ — медиану $\triangle SBC$ — изображение апофемы боковой грани пирамиды. Пусть $[AK]$ — изображение перпендикуляра, опущенного из вершины $A$ данной пирамиды на апофему противоположной боковой грани. Как нетрудно показать, отрезок $AK$ будет тогда и изображением высоты, опущенной из вершины основания на боковую грань. Это метрическое условие, наложенное на изображение, влечет за собой расход еще одного параметра. Таким образом, на изображение израсходованы все пять параметров. Однако осталось неучтенным условие, согласно которому в оригинале $|A_0B_0| = a$ и $|A_0K_0| = b$. То, что эти данные буквенные, дает еще некоторую свободу; будем считать, что на построенном изображении $|AB| : |AK| = a : b$. Таким образом, мы налагаем на изображение еще одно метрическое условие и, следовательно, расходуем еще один параметр. Но тогда изображение становится метрически переопределенным. Тем не менее при выполнении определенной зависимости между $a$ и $b$ (мы получим эту зависимость в исследовании) построенное изображение является верным.

Так как по смыслу задачи высота $A_0K_0$ существует, то из $\triangle S_0A_0D_0$, где $|A_0K_0| = b$ и $|A_0D_0| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, можно подсчитать, что $|D_0K_0| : |S_0K_0| = \frac{3a^2 - 4b^2}{4b^2 - 2a^2}$.

Выбирая различные (допустимые) значения $a$ и $b$, мы будем получать различные значения отношения $|D_0K_0| : |S_0K_0|$, т. е. и различные положения точки $K_0$. Так, задав, например, $\begin{cases} a = 10, \\ b = 8, \end{cases}$ мы получили бы, что $\dfrac{3a^2 - 4b^2}{4b^2 - 2a^2} = \dfrac{11}{14}$. При таком конкретном задании значений $a$ и $b$, как мы видим, положение точки $K_0$ определится вполне, так как $|D_0K_0| : |S_0K_0| = 11 : 14$. Это значит, что произвол в изображении точки $K_0$ уже недопустим.

Д а н о: $SABC$ — правильная пирамида, $S$—вершина, $[AK]$— высота, опущенная на грань $SBC$, $|AB| = a$, $|AK| = b$.

Н а й т и: $V$ — объем пирамиды.

Р е ш е н и е. Так как $V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot |SO|$, где $S_{\triangle ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, то для определения объема достаточно подсчитать длину высоты $SO$.

Из подобия прямоугольных треугольников $SOD$ и $ADK$ получаем:

$$\frac{|SO|}{|AK|} = \frac{|OD|}{|DK|},$$

откуда $|SO| = \dfrac{|AK| \cdot |OD|}{|DK|}$, где $|AK| = b$, $|OD| = \frac{1}{3}|AD| = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $|DK| = \sqrt{|AD|^2 - |AK|^2} = \dfrac{\sqrt{3a^2 - 4b^2}}{2}$.

Таким образом,

$$|SO| = \frac{ab\sqrt{3}}{3\sqrt{3a^2 - 4b^2}}.$$

Тогда

$$V = \frac{a^3 b}{12\sqrt{3a^2 - 4b^2}}.$$

И с с л е д о в а н и е. По смыслу задачи $[AK]$ — высота, опущенная на грань $SBC$ (именно на грань, а не на плоскость грани!). Ясно, что если данная пирамида настолько «низенькая», что $\widehat{ASD} = 90°$, то $K = S$, и, следовательно, отрезки $AK$ и $SA$ совпадают. Если же пирамида еще «ниже», то высоты, опущенной на грань $SBC$, уже вообще не существует.

Полагая $\widehat{ASD} = 90°$, из прямоугольного $\triangle ASD$, где $|DO| = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$, $|AO| = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$, находим:

$$|SO| = \sqrt{\frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

Таким образом, для существования высоты $AK$ необходимо, чтобы значения $a$ и $b$ удовлетворяли неравенству

$$\frac{ab\sqrt{3}}{3\sqrt{3a^2 - 4b^2}} \geqslant \frac{a\sqrt{6}}{6},$$

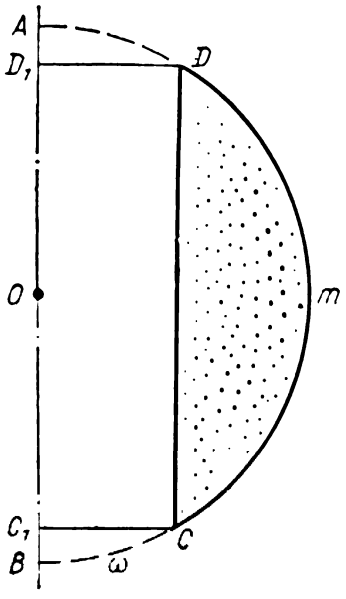

Рис. 86

или равносильной ему системе неравенств:

$$\frac{a\sqrt{2}}{2} \leqslant b \leqslant \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Вместе с тем ясно, что по смыслу задачи $|AK| < |AD|$, так как $[AK]$ — перпендикуляр к грани $SBC$, а $[AD]$ — наклонная к этой грани. Тогда $b < \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Эта зависимость между $a$ и $b$ уже обнаружена нами выше. Таким образом, если $\frac{a\sqrt{2}}{2} \leqslant b < \frac{a\sqrt{3}}{2}$, то высота $AK$ существует и $V > 0$.

Итак,

$$V = \frac{a^3 b}{12\sqrt{3a^2 - 4b^2}}, \text{ где } \frac{a\sqrt{2}}{2} \leqslant b < \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Пример 77. Докажем, что объем тела, полученного при вращении кругового сегмента, стягиваемого хордой, длина которой равна $a$, около параллельного хорде диаметра этого круга, не зависит от радиуса круга.

Построение изображения. Ограничимся изображением не тела вращения, а лишь фигуры, получающейся в сечении тела вращения полуплоскостью, границей которой является ось вращения.

Пусть сегмент $CmD$ круга $\omega$ является изображением этого сечения, а диаметр $AB$ круга — изображением оси вращения (рис. 86). (Все изображение является плоской фигурой, поэтому о полноте изображения и о подсчете параметров здесь речи быть не может: изображение должно быть выполнено с точностью до подобия.)

Дано: $\omega(O, |OA|)$ — окружность, $CmD$ — сегмент круга $\omega$, $[CD]$ — хорда, $[AB]$ — диаметр круга $\omega$, $(AB)$ — ось вращения, $[AB] \parallel [DC]$, $|CD| = a$.

Доказать: $V$ — объем тела вращения не зависит от $|OA|$.

Доказательство. Построим $[CC_1] \perp [AB]$ и $[DD_1] \perp [AB]$. Ясно, что $V = V_1 - V_2 - 2V_3$, где

$V_1$ — объем шара, радиус которого равен $|OA|$;

$V_2$ — объем цилиндра, в основании которого лежит окружность радиуса $|DD_1|$, а высота которого равна $|C_1D_1|$;

$V_3$ — объем шарового сегмента, в основании которого лежит окружность радиуса $|DD_1|$, а высота равна $|OA| - |OD_1|$.

Положим для краткости $|OA| = R$.

Тогда

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi R^3,$$

$$V_2 = \pi |DD_1|^2 \cdot |C_1D_1| = \pi \left(\frac{\sqrt{4R^2 - a^2}}{2}\right)^2 a,$$

$$V_3 = \pi |AD_1|^2 \left(|OA| - \frac{1}{3}|AD_1|\right) = \pi \left(R - \frac{a}{2}\right)^2 \times \left(R - \frac{1}{3}\left(R - \frac{a}{2}\right)\right) = \pi \left(R - \frac{a}{2}\right)^2 \left(\frac{2}{3}R + \frac{a}{6}\right).$$

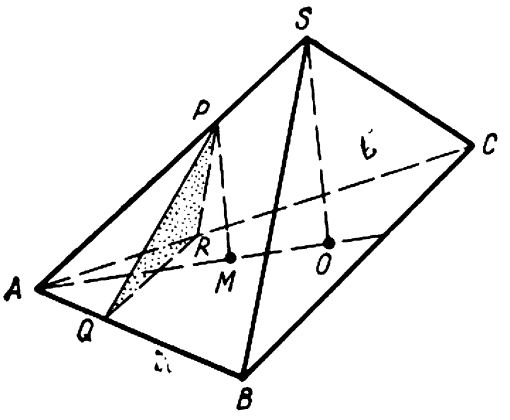

Рис. 87

Таким образом,

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4\pi R^2 a - \pi a^3}{4} - \frac{2\pi}{3}\left(R^2 - aR + \frac{a^2}{4}\right) \cdot \left(2R + \frac{a}{2}\right),$$

и после упрощений получаем: $V = \frac{\pi a^3}{6}$.

Так как выражение $\frac{\pi a^3}{6}$ не содержит $R$, то требуемое доказано.

В заключение настоящего параграфа рассмотрим задачи типа $M$.

Пример 78. Треугольная пирамида рассечена плоскостью на два многогранника. Найдем отношение объемов этих многогранников, если известно, что секущая плоскость делит ребра, сходящиеся в одной вершине пирамиды, в отношении 1 : 2, 1 : 2, 2 : 1, считая от этой вершины.

Построение изображения. Пусть четырехугольник $SABC$ с его диагоналями является изображением данной пирамиды (рис. 87), $\triangle PQR$ — изображение данного сечения. Это изображение полное, и, что довольно любопытно, на него не израсходовано ни одного параметра.

Дано: $SABC$ — пирамида, $S$ — вершина, $P \in [SA]$, $Q \in [AB]$, $R \in [AC]$, $|AQ| : |QB| = 1 : 2$, $|AR| : |RC| = 1 : 2$, $|AP| : |PS| = 2 : 1$, $(PQR)$ — секущая плоскость.

Найти: $V_1 : V_2$ — отношение объемов полученных многогранников.

Решение. Пусть $V$ — объем пирамиды $SABC$, а $V_1$ — объем пирамиды $PAQR$. Тогда $V_1 = V - V_2$.

Построим $[SO]$ и будем считать, что $[SO]$ — изображение высоты пирамиды $SABC$ (при этом расходуется два параметра). Построим $(AO)$ и $[PM] \parallel [SO]$. Тогда $M \in (AO)$. Чтобы придать выкладкам более простой вид, положим $|AB| = a$, $|AC| = b$, $|AS| = c$, $|SO| = H$.

Тогда $|AQ| = \frac{1}{3}a$, $|AR| = \frac{1}{3}b$, $|AP| = \frac{2}{3}c$, и из подобия

треугольников $APM$ и $ASO$ имеем: $|PM| = \frac{2}{3}H$. Подсчитаем теперь $V$ и $V_2$.

Имеем:

$$V = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot H = \frac{1}{6}\, ab \sin \widehat{BAC} \cdot H,$$

$$V_2 = \frac{1}{3}S_{\triangle AQR} \cdot \frac{2}{3}H = \frac{1}{81}ab \sin \widehat{BAC} \cdot H.$$

Тогда

$$V_1 = V - V_2 = \frac{25}{162}abH \sin \widehat{BAC}.$$

Таким образом,

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{25}{162}\, ab\, H \sin \widehat{BAC}}{\frac{1}{81}\, ab\, H \sin \widehat{BAC}} = \frac{25}{2}.$$

Исследование. По смыслу задачи $V > V_2$. Поэтому $V_1 = V - V_2 > 0$ и, следовательно, $\frac{V_1}{V_2} > 1$. Найденное значение $\frac{V_1}{V_2}$ последнему неравенству удовлетворяет.

Итак, $V_1 : V_2 = 25 : 2$.

**Задачи для самостоятельного решения**

**244.** Основание параллелепипеда — ромб $ABCD$, сторона которого равна $a$, а острый угол равен 60°. Найти объем параллелепипеда, если боковое ребро равно $a$, $\widehat{A_1AB} = \widehat{A_1AD} = 45°$.

**245.** Каждое ребро параллелепипеда равно $a$. Каждый из трех плоских углов при одной из вершин параллелепипеда равен $2\alpha$. Найти объем параллелепипеда.

**246.** Ребра параллелепипеда, длины которых равны $a$ и $b$, взаимно перпендикулярны, а ребро, длина которого равна $c$, образует с каждым из первых двух ребер угол, равный $\alpha$. Найти объем параллелепипеда.

**247 (7).** Площадь одной из боковых граней треугольной призмы равна $m^2$. Найти объем призмы, если расстояние от противолежащего ребра до плоскости этой грани равно $2a$.

**248.** Основанием прямой треугольной призмы является равнобедренный треугольник, конгруэнтные стороны которого равны $a$ и образуют между собой угол $\alpha$. Диагональ грани, противолежащей этому углу, образует с другой боковой гранью угол, равный $\varphi$. Найти объем призмы.

**249 (1).** Правильная четырехугольная призма, сторона основания которой равна $a$, усечена таким образом, что каждое из двух смежных боковых ребер равно $b$, а каждое из двух других ребер равно $c$. Найти объем этой усеченной призмы.

**250 (2).** Основание пирамиды — равнобедренный треугольник с боковыми сторонами, равными $a$, и углом при вершине $\alpha$. Боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания углы, каждый из которых равен 45°. Найти объем пирамиды.

**251.** В треугольной пирамиде все боковые ребра и два ребра основания равны $a$. Угол между конгруэнтными сторонами основания равен $2\alpha$. Найти объем пирамиды.

**252.** Площадь диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды равна $S$. Боковое ребро образует с плоскостью основания угол, равный $\alpha$. Найти объем пирамиды.

**253.** Высота правильной треугольной пирамиды равна $H$. Двугранный угол между боковыми гранями равен $\varphi$. Найти объем пирамиды.

**254.** Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно $b$. Двугранный угол между двумя смежными боковыми гранями равен $\varphi$. Найти объем пирамиды.

**255.** Найти площадь поверхности правильной треугольной пирамиды, объем которой равен $V$, а угол между боковой гранью и плоскостью основания равен $\alpha$.

**256.** В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна $c$, а острый угол равен $\alpha$. Каждое боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом, равным $\beta$. Найти объем пирамиды.

**257 (10).** Длина перпендикуляра, опущенного из центроида основания правильной треугольной пирамиды на ее боковое ребро, равна $l$. Найти объем пирамиды, если двугранный угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды равен $\alpha$.

**258.** Длина перпендикуляра, опущенного из центроида основания правильной треугольной пирамиды на боковую грань, равна $l$. Найти объем пирамиды, если угол между боковым ребром и плоскостью основания равен $\beta$.

**259.** В треугольной пирамиде, каждое из боковых ребер которой равно $b$, один из плоских углов при вершине прямой, а каждый из двух других равен 60°. Найти объем пирамиды.

**260.** В треугольной пирамиде площади двух взаимно перпендикулярных граней равны $P$ и $Q$, а длина их общего ребра — $b$. Найти объем пирамиды.

**261.** Высота пирамиды, основанием которой является квадрат, лежит вне пирамиды и равна $H$. Две противоположные боковые грани — равнобедренные треугольники, образующие с плоскостью основания углы, равные $\alpha$ и $\beta$. Найти объем пирамиды.

**262.** Основанием пирамиды является прямоугольник. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а две другие

образуют с ней углы, равные $\alpha$ и $\beta$. Найти площадь основания пирамиды, если ее объем равен $V$.

**263.** Основанием пирамиды является трапеция, боковые стороны и меньшее основание которой равны $a$, а угол между боковой стороной и основанием равен $\alpha$. Каждое боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом, равным $\beta$. Найти объем пирамиды.

**264.** Основанием пирамиды является равнобедренная трапеция, острый угол которой равен $\alpha$, а площадь равна $S$. Каждая боковая грань пирамиды образует с плоскостью основания угол, равный $\beta$. Найти объем пирамиды.

**265.** Треугольник $ABC$, у которого $|AC| = b$, $|AB| = c$ и $\widehat{BAC} = \alpha$, вращается вокруг оси, которая проходит через вершину $A$ вне треугольника и образует конгруэнтные углы со сторонами $AC$ и $AB$. Найти объем полученного тела вращения.

**266.** Равнобедренная трапеция, острый угол которой равен 45°, а боковая сторона конгруэнтна меньшему основанию, вращается вокруг боковой стороны. Найти объем полученного тела вращения, если боковая сторона трапеции равна $b$.

**267.** Прямоугольный треугольник вращается вокруг оси, проходящей через вершину прямого угла параллельно гипотенузе. Найти объем полученного тела вращения, если известно, что площадь треугольника равна $S$, а длина перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу, равна половине длины одного из катетов.

**268.** Стороны основания правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны $a$ и $b$ ($a > b$). Угол, образованный плоскостью боковой грани с плоскостью основания, равен $\alpha$. Найти объем пирамиды.

**269.** На двух скрещивающихся прямых взяты отрезки, длины которых равны $a$ и $b$. Доказать, что объем параллелепипеда, ребрами которого являются эти отрезки, не зависит от расположения отрезков на данных прямых.

**270.** Радиус основания конуса равен $R$. Две взаимно перпендикулярные образующие делят площадь боковой поверхности конуса в отношении 1 : 2. Найти объем конуса.

**271 (11).** Из круга, радиус которого равен $R$, вырезан сектор с центральным углом, равным $\alpha$. Сектор свернут в коническую воронку. Найти объем этой воронки.

**272 (12).** Основанием пирамиды является правильный треугольник, сторона которого равна $a$. Перпендикуляр, опущенный из середины меньшего бокового ребра на плоскость противоположной грани, равен $\frac{a}{4}$. Основание высоты, лежащей вне пирамиды, равноудалено от двух вершин треугольника—основания, а от третьей находится на расстоянии, вдвое меньшем, чем от двух первых. Найти объем пирамиды.

**273.** В цилиндре параллельно его оси на расстоянии $a$ от нее

проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу, величина которой равна $\alpha$. Площадь сечения равна $S$. Найти объем цилиндра.

**274.** Площадь осевого сечения шарового сектора в три раза меньше площади большого круга шара. Найти отношение объема этого сектора к объему шара.

**275.** Найти отношение объемов тел, полученных при вращении треугольника вокруг основания и вокруг прямой, параллельной основанию и проходящей через вершину треугольника.

**276.** Доказать, что объемы тел, полученных при вращении параллелограмма вокруг его смежных сторон, обратно пропорциональны отношению длин этих сторон.

**277.** Треугольник со сторонами, отношение длин которых равно $a : b : c$, вращается сначала вокруг одной стороны, затем вокруг другой и, наконец, вокруг третьей. Найти отношение объемов полученных тел вращения.

**278.** При вращении прямоугольного треугольника вокруг катетов и вокруг гипотенузы образуются тела вращения, объемы которых равны соответственно $V_1$, $V_2$ и $V_3$. Доказать, что

$$\frac{1}{V_3^2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}.$$

**279 (8).** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка $M$ — центроид грани $AA_1B_1B$, точка $N$ — середина ребра $CC_1$, точка $K$ лежит на ребре $DC$ и $|DK| = \frac{1}{4}|DC|$. Плоскость, проведенная через точки $M$, $N$ и $K$, делит куб на два многогранника. Найти отношение их объемов.

**280 (9).** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка $M$ — середина ребра $AA_1$, а точка $N$ — середина ребра $A_1B_1$. Плоскость, проведенная через точки $M$, $N$ и $C$, делит куб на два многогранника. Найти отношение их объемов.

**281 (6).** Дана треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. В каком отношении делит объем призмы секущая плоскость, пересекающая ребра $A_1B_1$, $B_1C_1$ и $BC$ соответственно в точках $M$, $N$ и $K$, если $|B_1M| : |A_1B_1| = 1 : 2$, $|B_1N| : |B_1C_1| = 2 : 3$, $|BK| : |CB| = 1 : 3$?

**282 (3).** Дана прямая треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, у которой $|AC| : |AA_1| = 3 : 4$. Найти, в каком отношении делит объем призмы плоскость, проведенная через вершину $A$ и пересекающая боковые ребра $BB_1$ и $CC_1$ соответственно в точках $M$ и $N$, если $|BM| = |MB_1|$, а $[AN)$ — биссектриса угла $CAC_1$.

**283 (4).** Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. В каком отношении делит объем пирамиды плоскость, проведенная через точки $A$ и $B$ и середину ребра $SC$?

**284.** Плоскость, проходящая через одно из ребер правильного тетраэдра, делит его объем в отношении 3 : 5. Найти тангенсы углов, на которые эта плоскость делит двугранный угол тетраэдра.

**285 (5).** Через каждое ребро тетраэдра проведена плоскость,

параллельная противоположному ребру. Найти отношение объема полученного параллелепипеда к объему тетраэдра.

**286.** Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка $E$ — середина ребра $DC$, точка $F$ — середина ребра $BB_1$. Какую часть объема куба занимает объем пирамиды $AFED_1$?

## § 15. Комбинации многогранников и круглых тел

Прежде чем перейти к рассмотрению примеров, заметим, что при решении задач, в которых идет речь о комбинации геометрических фигур, ввиду сложности выполнения чертежей часто приходится прибегать к их упрощению. В одних случаях оказывается достаточным иметь лишь изображение сечения фигур, участвующих в комбинации (таково большинство задач на комбинацию круглых тел), в других — изображение лишь одной из комбинируемых фигур; иногда одну из фигур бывает необходимо изобразить полностью, а другую — лишь частично. При решении некоторых задач представляется целесообразным воспользоваться эпюром канонических проекций комбинируемых фигур.

Пример 79. Шар касается основания правильной треугольной пирамиды $SABC$ в точке $B$ и ее бокового ребра $SA$. Найдем радиус шара, если $|AB| = a$ и $|SA| = b$.

Построение изображения. Пусть четырехугольник $SABC$ с его диагоналями (рис. 88) является изображением данной пирамиды. Это изображение полное и метрически определенное (убедитесь в этом самостоятельно). Построить изображение шара мы не можем, так как его радиус неизвестен (получается как бы «заколдованный круг»: чтобы построить изображение шара, необходимо знать его радиус, а чтобы найти радиус, желательно иметь изображение шара). Попытаемся решать задачу с помощью изображения, на котором шар не построен.

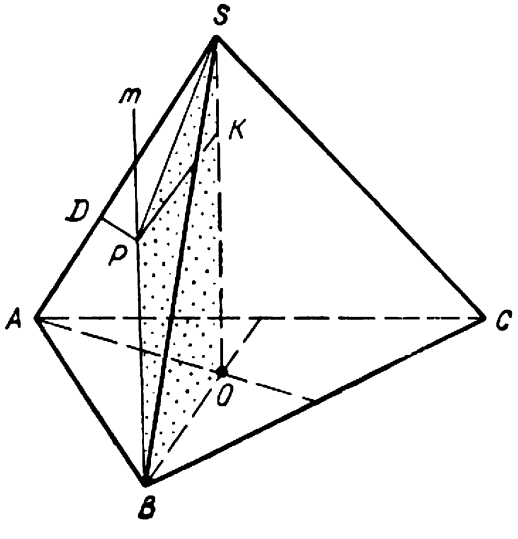


Рис. 88

Дано: $SABC$ — правильная пирамида, $S$ — вершина, $|AB| = a$, $|SA| = b$, $\Omega$ — шар, $B$ — точка касания шара $\Omega$ с плоскостью $ABC$, $\Omega$ касается $[SA]$.

Найти: радиус шара $\Omega$.

Решение. Заметим прежде всего, что если мы будем иметь изображение центра шара, точку $P$, то $|PB|$ будет искомой длиной радиуса шара $\Omega$. Таким образом, иметь изображение самого шара для подсчета его радиуса совсем не обязательно. Построение точки $P$ выполним, исходя из следующих соображений.

Так как шар $\Omega$ касается плоскости $ABC$ в точке $B$, то точка $P$ лежит на перпендикуляре к плоскости $ABC$, восставленном в точке $B$. На нашем чертеже уже есть изображение высоты пирамиды. Через точку $B$ проведем прямую $m \parallel (SO)$. Тогда так как $(SO) \perp \perp (ABC)$, то и $m \perp (ABC)$. Итак, $P \in m$ и $[PB]$ — радиус шара $\Omega$.

Если шар касается ребра $SA$ в некоторой точке $D$, то ясно, что $|AB| = |AD|$ (как длины отрезков касательных к шару $\Omega$, проведенных из одной точки). Но $|AB| = a$. Следовательно, для построения точки $D$ нужно на отрезке $SA$ отложить от точки $A$ отрезок $AD$ такой, что $|AD| = a$. Пользуясь тем, что длины ребер $AB$ и $SA$ заданы в общем виде, возьмем $D \in [SA]$ произвольно и будем считать, что $|AD| = |AB|$. (Если задать $a$ и $b$ конкретными числовыми значениями, то брать точку $D$ произвольно, конечно, нельзя. Так, если $a = 15$, $b = 20$, то $|AD| : |SA| = 15 : 20$, или $|AD| : |SA| = 3 : 4$, откуда ясно построение точки $D$.)

Построим далее $[PD]$. Так как ребро $SA$ касается шара $\Omega$, то $[PD] \perp [SA]$ и $[PD]$ — радиус шара $\Omega$, т. е. $|PD| = |PB|$. Для подсчета $|PB|$ выполним следующие построения:

1) $[SP]$,
2) $[OB]$ — отрезок медианы $\triangle ABC$,
3) $[PK] \parallel [OB]$.

Положим $|PB| = x$ и составим уравнение.

Так как $|SA| = b$ и $|AD| = a$, то $|SD| = b - a$.

Из прямоугольного $\triangle SDP$ имеем:

$$|SP|^2 = (b - a)^2 + x^2.$$

Из прямоугольного $\triangle SBO$ имеем:

$$|BO| = \frac{a\sqrt{3}}{3} \text{ и } |SO| = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}}.$$

Так как $m \parallel (SO)$ и $[PK] \parallel [OB]$, то $|OB| = |PK| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ и $|PB| = |KO| = x$. Тогда $|SK| = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} - x$.

Теперь из прямоугольного $\triangle SPK$ получим:

$$|SP|^2 = |SK|^2 + |PK|^2, \text{ или}$$

$$(b - a)^2 + x^2 = \left(\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{3}} - x\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2.$$

Решая это уравнение, находим:

$$x = \frac{\sqrt{3}\, a\,(2b - a)}{2\sqrt{3b^2 - a^2}}.$$

Исследование. По условию шар $\Omega$ касается ребра $SA$, т. е. $D \in [SA]$. Таким образом, по смыслу задачи $b > a$. Нетрудно убедиться, что при выполнении этого неравенства будет выполняться и неравенство $x > 0$.

Итак, $|PB| = \dfrac{\sqrt{3}\,a(2b-a)}{2\sqrt{3b^2-a^2}}$, где $b > a$.

Замечание. Обращаем еще раз внимание читателя на тот факт, что исследование проводится по смыслу задачи, а не по формуле, полученной для искомой величины. Так, в рассмотренном примере исследование найденного значения $x$ по полученной формуле свелось бы к решению системы неравенств:

$$\begin{cases} 2b - a > 0, \\ 3b^2 - a^2 > 0 \end{cases}$$

(неравенства $a > 0$ и $b > 0$ мы опустили как само собой разумеющиеся). Из этой системы мы получили бы, что $b > \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

Этой зависимости, однако, оказывается достаточно лишь для существования самой пирамиды: в прямоугольном треугольнике $SAO$ гипотенуза будет больше катета. Для существования же шара, касающегося ребра $SA$, зависимости $b > \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$ мало. Действительно, пусть $b = 0{,}8\,a$ $\left(\text{в этом случае } b > \dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right)$. Как отмечалось выше, $|AD| = a$. Таким образом, будет $|AD| > |SA|$, т. е. шар будет касаться не отрезка $SA$, а его продолжения.

Пример 80. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, ребро которого равно $a$. Через вершины $A$ и $C$ и через середины ребер $B_1C_1$ и $C_1D_1$ проведена сфера $\Omega$. Найдем радиус этой сферы.

Построение изображения. Пусть фигура $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 89) является изображением данного куба, а точки $F_1$ и $E_1$ — середины его ребер $B_1C_1$ и $C_1D_1$ соответственно. Это изображение полное и метрически определенное (убедитесь в этом самостоятельно). Как и в предыдущем примере, построить изображение заданной сферы весьма затруднительно, так как длина радиуса сферы неизвестна. Однако изображение сферы и не столь необходимо: ведь если на изображении будет показан центр этой сферы и какая-нибудь точка ее поверхности (у нас таких точек показано уже четыре), то, может быть, и будет можно подсчитать длину радиуса.

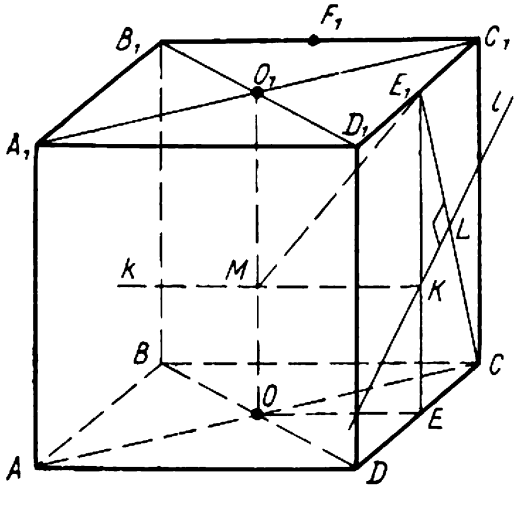

Рис. 89

Решение. Займемся прежде всего поиском точки $M$ — центра сферы $\Omega$. Так как $A \in \Omega$ и $C \in \Omega$ то точка $M$ принадлежит множеству точек, одинаково удаленных от точек $A$ и $C$. Нетрудно догадаться, что этим множеством точек является диагональная плоскость $BB_1D_1D$. Аналогично точка $M$ принадлежит диагональной плоскости

$AA_1C_1C$. Таким образом, точка $M$ принадлежит $(OO_1) = (ACC_1) \cap (BDD_1)$. И наконец, точка $M$ принадлежит плоскости $\alpha$, которая пересекает отрезок $CE_1$ в точке $L$ — середине отрезка $CE_1$, причем $\alpha \perp [CE_1]$.

Так как плоскость $\alpha$ имеет с плоскостью $DCC_1$ общую точку $L$, то эти плоскости пересекаются по прямой $l$, проходящей через точку $L$, причем так как $[CE_1] \perp \alpha$, то $[CE_1] \perp l$.

Построим точку $E$ — середину отрезка $CD$ и построим отрезок $EE_1$. Так как изображение, на котором мы осуществляем дополнительные построения, является метрически определенным, то провести через точку $L$ прямую $l$ произвольно и сказать, что пусть $l \perp [CE_1]$, нельзя. Вместе с тем прямая $l$ пересечет отрезок $EE_1$. Пусть $l \cap [EE_1] = K$. Тогда $\triangle KLE_1$ будет прямоугольным и подобным треугольнику $CEE_1$. Из подобия же этих треугольников последует, что $|KE_1| : |CE_1| = |LE_1| : |EE_1|$. А так как $|EE_1| = a$, $|CE| = \frac{a}{2}$, то

$$|CE_1| = \frac{a\sqrt{5}}{2}, \text{ а } |LE_1| = \frac{a\sqrt{5}}{4}.$$

Таким образом, мы найдем, что если $l \perp [CE_1]$, то $|KE_1| = \frac{5}{8}a$. Пользуясь этим равенством, и построим точку $K$.

Далее построим $[OE]$ и через точку $K$ проведем прямую $k \parallel [OE]$. Нетрудно убедиться, что $k \subset (OEK)$ и что $k \cap (OO_1)$. Пусть $M = k \cap (OO_1)$. Тогда, так как $(MK) \parallel [OE]$ и $[OE] \perp (DCC_1)$, то $(MK) \perp (DCC_1)$.

Итак, $[CE_1] \perp (LK)$ и $[CE_1] \perp (MK)$. Тогда $[CE_1] \perp (LKM)$. Другими словами, $(LKM) = \alpha$, и, таким образом, $M \in \alpha$, а поэтому $M$ — центр $\Omega$.

Подсчитаем $|ME_1|$ — длину радиуса сферы $\Omega$.

Из прямоугольного $\triangle MKE_1$ получим:

$$|ME_1| = \sqrt{|MK|^2 + |KE_1|^2} = \frac{a\sqrt{41}}{8}.$$

(Можно было, естественно, искать $|MC|$ — длину радиуса сферы $\Omega$ из прямоугольного треугольника $MCO$, где $|OM| = \frac{3}{8}a$, $|OC| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.)

Исследование. По смыслу задачи $|ME_1| > |MO_1| = |KE_1| = \frac{5}{8}a$. Но неравенство $\frac{a\sqrt{41}}{8} > \frac{5}{8}a$ истинно. Таким образом, радиус сферы $\Omega$ равен $\frac{a\sqrt{41}}{8}$.

Пример 81. Трехгранный угол образован плоскостями $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$, причем $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$ и $\widehat{\alpha\beta} = 2\varphi$. Сфера $\Sigma$ касается плоскости $\gamma$ в точке $B$, а плоскости $\alpha$ и $\beta$ пересекает по конгруэнтным ок-

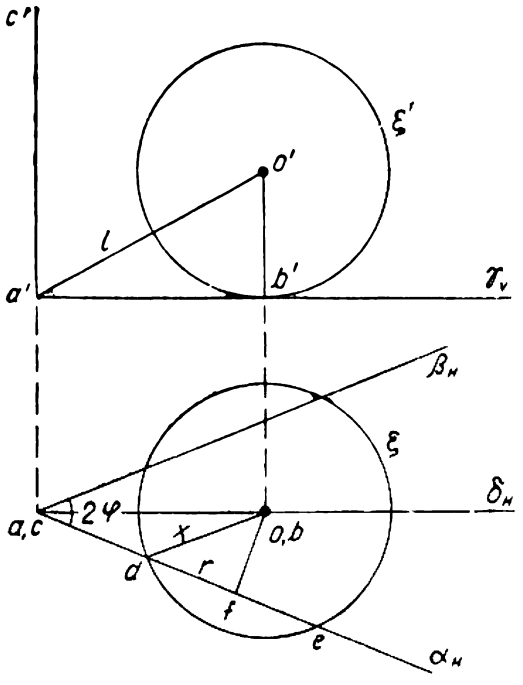


Рис. 90

ружностям $\omega_1$ и $\omega_2$, радиусы которых равны $r$. Расстояние от точки $O$ — центра сферы — до точки $A$ — вершины трехгранного угла — равно $l$. Найдем радиус сферы.

Построение изображения. Объемное изображение комбинации сферы $\Sigma$ и трехгранного угла $\alpha\beta\gamma$ является громоздким, и его довольно непросто выполнить. Поэтому для построения изображения применим метод ортогонального проектирования на пару взаимно перпендикулярных плоскостей проекций $H$ и $V$, которые выберем из следующих соображений.

Так как $\Sigma$ касается $\gamma$ в точке $B$, то $(OB) \perp \gamma$. Так как $\alpha \perp \gamma$ и $\beta \perp \gamma$, то $(\alpha \cap \beta) \perp \gamma$. Пусть $(\alpha \cap \beta) = (AC)$. Таким образом, $(OB) \parallel (AC)$. Прямыми $OB$ и $AC$ определяется некоторая плоскость $\sigma$, причем так как $\sigma \supset (OB)$, то $\sigma \perp \gamma$. Примем $\gamma$ за горизонтальную плоскость проекций ($\gamma = H$), а $\sigma$ за вертикальную плоскость проекций ($\sigma = V$).

Заметим еще, что так как $\omega_1 \cong \omega_2$ ($\omega_1 = \Sigma \cap \alpha$, $\omega_2 = \Sigma \cap \beta$), то точка $O$ одинаково удалена от $\alpha$ и $\beta$, а следовательно, $\sigma$ — биссекторная плоскость двугранного угла, образованного плоскостями $\alpha$ и $\beta$, и $\sigma$ пересекает $\Sigma$ по окружности большого круга. Эпюр канонических проекций комбинации $\Omega$ и трехгранного угла $\alpha\beta\gamma$ представлен на рисунке 90.

(Наблюдательный читатель, несомненно, обратит внимание на тот факт, что в вертикальной плоскости проекций не показаны эллипсы, являющиеся проекциями окружностей $\omega_1$ и $\omega_2$. Построение этих эллипсов не столь уж сложно, однако в дальнейшем они не только не нужны, но и излишне загромождают чертеж.)

Дано: $\angle \alpha\beta\gamma$ — трехгранный угол, $A$ — вершина, $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$, $\widehat{\alpha\beta} = 2\varphi$, $\Omega(O, |OB|)$ — сфера, $B$ — точка касания сферы $\Omega$ и плоскости $\gamma$, $\Omega \cap \alpha = \omega_1$, $\Omega \cap \beta = \omega_2$, $\omega_1$ и $\omega_2$ — окружности, радиус каждой из которых равен $r$, $|OA| = l$.

Найти: $|OB|$.

Решение. Ясно, что $|a'o'| = l$, $(\widehat{\alpha_H\beta_H}) = 2\varphi$ и $(\widehat{\alpha_H\delta_H}) = \varphi$, $[de]$ — горизонтальная проекция окружности $\omega_1$, т. е. $|de| = 2r$, и, наконец, длина радиуса сферы $\Omega$ равна длине ра-

диуса окружностей $\xi$ и $\xi'$ — соответственно горизонтальной и вертикальной проекций сферы $\Omega$.

В плоскости $H$ из точки $o$ опустим перпендикуляр $of$ на $\alpha_H$ ($[of]$ — изображение $[OF] \perp \alpha$). Тогда $|df| = r$. Положив искомую длину радиуса сферы $\Omega$, а значит и окружностей $\xi$ и $\xi'$, равной $x$, имеем: $|od| = x$ и $|o'b'| = x$.

Тогда из прямоугольного $\triangle o'a'b'$ получим:

$$|a'b'| = \sqrt{l^2 - x^2}.$$

Но, как нетрудно заметить, $[ao] \cong [a'b']$. Таким образом, и $|ao| = \sqrt{l^2 - x^2}$, а тогда, так как $\widehat{aof} = \varphi$, из прямоугольного треугольника $aof$ имеем:

$$|of| = |ao| \sin\varphi = \sqrt{l^2 - x^2} \sin\varphi$$

и, следовательно, из прямоугольного треугольника $odf$ имеем:

$$x^2 = r^2 + (l^2 - x^2) \sin^2\varphi.$$

Решая это уравнение относительно $x^2$, находим:

$$x^2 = \frac{r^2 + l^2 \sin^2\varphi}{1 + \sin^2\varphi}.$$

Отбрасывая сразу отрицательное значение $x$, как заведомо постороннее, получаем:

$$x = \sqrt{\frac{r^2 + l^2 \sin^2\varphi}{1 + \sin^2\varphi}}.$$

Исследование. По смыслу задачи ясно, что

$$\begin{cases} |of| < x < |ao|, \\ x > |df|, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \sqrt{l^2 - x^2} \sin\varphi < x < \sqrt{l^2 - x^2}, \\ x > r. \end{cases}$$

Подставляя в эту систему неравенств значение $x$ и решая полученную систему неравенств, находим, что $r < \frac{\sqrt{2}}{2} l \cos\varphi$.

Ясно также, что так как $2\varphi$ — величина угла между плоскостями ($\alpha$ и $\beta$), то $0° < 2\varphi < 90°$, т. е. $0° < \varphi < 45°$.

Итак,

$$|OB| = \sqrt{\frac{r^2 + l^2 \sin^2\varphi}{1 + \sin^2\varphi}},$$

где

$$\begin{cases} r < \frac{\sqrt{2}}{2} l \cos\varphi \\ 0° < \varphi < 45°. \end{cases}$$

Замечание. Казалось бы, в выражении, найденном для значения $x$, параметры $r$, $l$ и $\varphi$ могут принимать любые действительные значения (подкоренное выражение будет положительным), однако, как показало исследование, проведенное по смыслу задачи, это далеко не так.

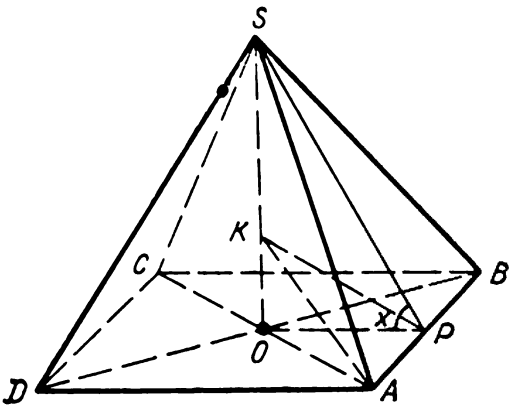


Рис. 91

Пример 82. Центр шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, совпадает с центром шара, описанного около этой пирамиды. Найдем двугранный угол при ребре основания пирамиды.

Построение изображения. Пусть фигура $SABCD$ — изображение правильной четырехугольной пирамиды (рис. 91). Это изображение полное и для него $p = 4$. Построим $[SP]$ — апофему боковой грани $SAB$ и $[OP]$ — проекцию апофемы $SP$ на плоскость $ABC$. Будем считать $[PK)$ изображением биссектрисы угла $SPO$, т. е. будем считать точку $K$ изображением центра вписанного шара $\Omega$. Таким образом, на изображение расходуется еще один параметр, и оно становится метрически определенным. Ввиду неоправданной с методической точки зрения сложности построения верного изображения наложим на изображение еще одно (шестое) метрическое условие: будем считать, что точка $K$ является также и изображением центра шара $\Sigma$, описанного около пирамиды (т. е. будем считать, что $|AK| : |SK| = 1 : 1$). Налагая на изображение это условие, оно становится метрически переопределенным ($p = 6$). Изображения шаров $\Omega$ и $\Sigma$ показывать не будем.

Дано: $SABCD$ — правильная пирамида, $S$ — вершина, $\Omega(K, |OK|)$ — шар, вписанный в пирамиду, $\Sigma(K\,|AK|)$ — шар, описанный около пирамиды.

Найти: $\widehat{AB}$.

Решение. Так как $[SP]$ — апофема $\triangle SAB$, в котором $[SA] \cong [SB]$, то $[SP] \perp [AB]$. Но $[OP]$ — проекция $[SP]$ на $(ABC)$. Тогда и $[OP] \perp [AB]$. Таким образом, $\angle SPO$ — линейный угол искомого двугранного угла $AB$.

Положим $\widehat{SPO} = x$. Рассматриваемая задача является задачей типа $M$, поэтому ее можно решать введением вспомогательного параметра. Положим $|AB| = a$ и подсчитаем $\operatorname{tg} x$.

Из прямоугольного $\triangle SOP$ находим, что $\operatorname{tg} x = \dfrac{|SO|}{|OP|}$, где $|OP| = \dfrac{a}{2}$. Так как $[PK)$ — биссектриса угла $SPO$, то $\widehat{KPO} = \dfrac{x}{2}$. Из прямоугольного $\triangle POK$ находим, что $|OK| = \dfrac{a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, а из прямоугольного $\triangle AOK$ находим, что $|AO| = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Тогда

$$|AK| = \sqrt{|AO|^2 + |OK|^2} = \frac{a}{2}\sqrt{2 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Но $|SK| = |AK|$, т. е. $|SK| = \frac{a}{2}\sqrt{2 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$.

Поэтому

$$|SO| = |OK| + |SK| = \frac{a}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \sqrt{2 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}\right).$$

Таким образом,

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \sqrt{2 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}. \qquad (82.1)$$

Решим уравнение (82.1), преобразованное к виду:

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \sqrt{2 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Так как $\frac{x}{2}$ — величина острого угла, то получаем:

$$\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos x \cdot \cos\frac{x}{2}} = \frac{\sqrt{1 + \cos^2\frac{x}{2}}}{\cos\frac{x}{2}},$$

или

$$\sin\frac{x}{2} = \cos x\sqrt{1 + \cos^2\frac{x}{2}}. \qquad (82.2)$$

Возведем в квадрат обе части уравнения (82.2):

$$\sin^2\frac{x}{2} = \cos^2 x\left(1 + \cos^2\frac{x}{2}\right).$$

Переходя к $\cos\frac{x}{2}$ и обозначая для краткости $\cos^2\frac{x}{2} = y$, получаем уравнение

$$1 - y = (2y - 1)^2(1 + y),$$

которое после ряда упрощений преобразуется в уравнение $4y^3 - 2y = 0$.

Таким образом, находим: $y_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_3 = 0$.

Отбрасывая заведомо посторонние значения $y_2$ и $y_3$, получаем:

$$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ или } \frac{1 + \cos x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

откуда $\cos x = \sqrt{2} - 1$ и, следовательно, $x = \arccos(\sqrt{2} - 1)$.

Исследование. По смыслу задачи $0 < x < \frac{\pi}{2}$, т. е. $0 < \cos x < 1$. Найденное значение $\cos x = \sqrt{2} - 1$ удовлетворяет последней системе неравенств.

Итак, $\widehat{AB} = \arccos(\sqrt{2} - 1)$.

**Задачи для самостоятельного решения**

**287.** Сторона ромба равна $a$. Сфера, радиус которой равен $R$, касается всех сторон ромба. Расстояние от центра сферы до плоскости ромба равно $d$. Найти площадь ромба.

**288 (2).** На поверхности сферы, радиус которой равен $R$, даны две конгруэнтные окружности, длина общей хорды которых равна $a$. Найти радиусы этих окружностей, если плоскости их взаимно перпендикулярны.

**289 (12).** Стороны равнобедренной трапеции касаются цилиндра, ось которого перпендикулярна параллельным сторонам трапеции. Найти угол между плоскостью трапеции и осью цилиндра, если основания трапеции равны $a$ и $b$ $(a > b)$, а высота ее равна $h$.

**290.** На прямоугольном листе бумаги, сторона которого равна $a$, построены окружности, радиус одной из которых равен $\frac{a}{12}$, а другой $\frac{a}{4}$. Расстояние между центрами окружностей равно $\frac{2a}{3}$, а линия их центров параллельна основанию прямоугольника. К окружностям проведена общая внутренняя касательная. Найти расстояние между точками касания после того, как лист свернут в круглую цилиндрическую поверхность, ось которой перпендикулярна линии центров окружностей.

**291 (1).** Даны куб и правильная четырехугольная пирамида, боковое ребро которой равно $b$. Вершины одной из граней куба являются серединами ребер основания пирамиды, а каждое ребро противолежащей грани куба пересекает одно из боковых ребер пирамиды. Найти объем части куба, находящейся вне пирамиды.

**292.** В кубе, ребро которого равно $a$, проведена диагональ. Ребра куба, сходящиеся на одном конце диагонали, разделены пополам. Полученные точки деления и другой конец диагонали приняты за вершины пирамиды. Найти объем этой пирамиды.

**293 (3).** Ребра треугольной пирамиды, выходящие за вершины $A$, попарно перпендикулярны, а их длины равны $a$, $b$ и $c$. Найти объем куба, вписанного в пирамиду так, что одна из его вершин совпадает с вершиной $A$.

**294.** Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно $b$ и образует с плоскостью основания угол, равный $\alpha$. В пирамиду вписан равносторонний цилиндр так, что его нижнее основание лежит в плоскости основания пирамиды. Найти высоту цилиндра.

**295 (5).** Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно $b$, а угол, образованный боковым ребром и плоскостью основания, равен $\alpha$. В эту пирамиду вписан равносторонний цилиндр так, что одна из его образующих расположена на диагонали основания пирамиды, а окружность основания касается двух смежных боковых граней пирамиды. Найти радиус основания цилиндра.

**296.** В цилиндр, высота которого равна $H$, вписана треугольная пирамида. Две грани пирамиды перпендикулярны плоскости ее основания, а два боковых ребра образуют с плоскостью основания углы, каждый из которых равен $\alpha$. Угол между этими ребрами равен $\beta$. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

**297 (8).** Ребро правильного тетраэдра равно $a$. Круглая цилиндрическая поверхность проходит через одно из его ребер и через все его вершины. Найти радиус основания цилиндра.

**298.** Основания шарового слоя и цилиндра совпадают. Объем тела, заключенного между их боковыми поверхностями, равен $36\pi$ см$^3$. Найти высоту цилиндра, равную высоте шарового слоя.

**299.** В конус с радиусом основания, равным $R$, вписана треугольная призма с конгруэнтными ребрами так, что ее основание лежит в плоскости основания конуса. Найти объем призмы, если угол между образующей конуса и плоскостью его основания равен $\alpha$.

**300 (10).** В куб, ребро которого равно $a$, вписан прямой круговой конус с углом между образующими в осевом сечении, равным $\alpha$. Найти длину образующей и радиус основания конуса, если его высота лежит на диагонали куба.

**301 (6).** Куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вписан в конус, радиус основания которого равен $R$, а высота $R\sqrt{2}$. Основание $ABCD$ куба находится на основании конуса, а точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ и $D_1$ — на его боковой поверхности. Найти площадь треугольника $A_1C_1M$, где $M$ — точка пересечения прямой $BD$ с окружностью основания.

**302.** Два конуса имеют концентрические основания и общую высоту, равную $H$. Разность величин углов, которые образующие составляют с осью, равна $\beta$; угол между образующей внутреннего конуса и плоскостью основания равен $\alpha$. Найти объем части пространства, заключенной между поверхностями конусов.

**303 (4).** В куб с ребром, длина которого равна $a$, вписан шар так, что его поверхность касается всех ребер куба. Найти объем части шара, заключенной внутри куба.

**304.** Ребро куба равно $a$. Найти радиусы двух конгруэнтных шаров, которые можно поместить в куб так, чтобы они не могли передвигаться внутри куба при его перемещениях.

**305.** В куб с ребром, длина которого равна $a$, вписан шар. Затем в один из трехгранных углов при вершине куба вписан второй шар, касающийся первого шара. Найти радиус второго шара.

**306.** Шар вписан в прямую призму, основанием которой служит прямоугольный треугольник, в котором перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, равен $h$ и составляет с одним из катетов угол, равный $\alpha$. Найти объем призмы.

**307.** Шар радиуса $R$ вписан в конус, образующая которого видна из центра шара под углом, равным $\alpha$. Найти объем конуса.

**308 (7).** В полушар радиуса $R$ вписан усеченный конус так, что его большее основание совпадает с основанием полушара, а образующая наклонена к плоскости основания под углом, равным $\alpha$. Найти площадь поверхности конуса.

**309.** В прямом круговом конусе даны площадь основания $S_1$ и площадь боковой поверхности $S_2$. Найти радиус шара, вписанного в конус.

**310 (9).** В конус вписан шар так, что радиус окружности его касания с конусом равен $R$. Прямая, проходящая через центр шара и точку, лежащую на окружности касания, образует с плоскостью основания конуса угол, равный $\alpha$. Найти объем конуса.

**311.** Найти радиус шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, если объем пирамиды равен $V$, а угол между двумя ее противоположными гранями равен $\alpha$.

**312.** Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, каждый из конгруэнтных углов которого равен $\alpha$, а общая сторона этих углов равна $a$. Каждая из боковых граней пирамиды наклонена к плоскости основания под углом, равным $\beta$. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду.

**313.** В шар радиуса $R$ вписана пирамида, в основании которой лежит квадрат. Одно из боковых ребер перпендикулярно плоскости основания, а наибольшее боковое ребро образует с ней угол, равный $\alpha$. Найти боковую поверхность пирамиды.

**314.** В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен $\alpha$, а высота пирамиды равна $H$ и служит диаметром шара. Найти длину линии пересечения поверхностей пирамиды и шара.

**315.** Из точки, взятой на поверхности шара, проведены три конгруэнтные хорды, угол между каждой парой из которых равен $\alpha$. Найти длины хорд, если радиус шара равен $R$.

**316.** Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, каждая из боковых сторон которого равна $a$, а угол между ними равен $\alpha$. Две боковые грани перпендикулярны плоскости основания, а третья образует с ней угол $\beta$. Найти радиус шара, вписанного в пирамиду.

**317.** Шар радиуса $R$ вписан в пирамиду, угол наклона каждой из граней которой равен $\alpha$. Найти объем пирамиды, если в ее основании лежит ромб, острый угол которого равен $\beta$.

**318 (11).** В правильной пирамиде $SABCD$ с вершиной $S$ сторона основания равна $a$, боковое ребро $b$. Первая сфера с центром в точке $O_1$ касается плоскостей $SAD$ и $SBC$ соответственно в точках $A$ и $B$, а вторая сфера с центром в точке $O_2$ касается плоскостей $SAB$ и $SCD$ в точках $B$ и $C$. Найти объем пирамиды $ABO_1O_2$.

**319.** В конус вписан цилиндр, площадь полной поверхности которого равна площади боковой поверхности конуса. Угол между образующими конуса в его осевом сечении равен 90°. Доказать, что

расстояние от вершины конуса до верхнего основания цилиндра равно половине длины образующей конуса.

**320 (7).** Два конуса имеют общее основание. В общем осевом сечении образующая одного из них перпендикулярна противоположной образующей другого. Объем одного из конусов вдвое меньше объема другого. Найти угол между образующей большого конуса и плоскостью оснований конусов.

**321 (5).** Около конуса описана треугольная пирамида. Боковая поверхность конуса делится линиями касания на части, площади которых относятся, как 5 : 6 : 7. В каком отношении делят те же линии площадь боковой поверхности пирамиды?

**322 (6).** Около шара описан прямой параллелепипед, объем которого в $m$ раз больше объема шара. Найти углы в основании параллелепипеда.

**323 (12).** Шар касается четырех ребер куба, принадлежащих одной из его граней, и противоположной грани. Найти отношение объема части шара, лежащей вне куба, к объему шара.

**324.** В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ через сторону $AB$ основания проведена плоскость, проходящая также через вершину $C_1$ другого основания. В пирамиду $C_1ABB_1A_1$ ($C_1$ — вершина) вписан шар. Найти угол между плоскостью $ABC_1$ и плоскостью основания призмы.

**325 (11).** Плоскость, параллельная основанию конуса и проходящая через центр вписанного в этот конус шара, делит конус на две части, объемы которых равны. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

**326 (10).** Шар касается всех боковых ребер правильной четырехугольной призмы и ее оснований. Найти отношение площади поверхности шара, лежащей вне призмы, к площади полной поверхности призмы.

**327 (9).** Все плоские углы при вершине $S$ пирамиды прямые. Доказать, что вершина $S$, центр шара, описанного около пирамиды, и точка пересечения медиан основания $ABC$ лежат на одной прямой.

**328.** В равносторонний конус вписан полушар так, что его большой круг находится в плоскости основания конуса. Найти отношение, в котором окружность касания делит площадь боковой поверхности полушара и боковой поверхности конуса.

**329.** В конусе помещены два шара так, что они касаются друг друга и поверхности конуса. Отношение длин радиусов этих шаров равно $m : n$ ($m > n > 0$). Найти угол при вершине осевого сечения конуса.

**330.** Доказать, что отношение объема конуса к объему вписанного в него шара равно отношению площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара.

**331 (3).** В усеченный конус вписан шар, объем которого составляет $\frac{6}{13}$ объема конуса. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его нижнего основания.

**332 (1).** В полушар вписан конус, вершина которого совпадает с центром окружности, являющейся основанием полушара. Плоскость основания конуса параллельна плоскости основания полушара; прямая, соединяющая центр основания конуса с произвольной точкой окружности большого круга полушара, составляет с плоскостью основания конуса угол, равный $\alpha$. Найти отношение объема полушара к объему конуса.

**333.** В конус вписан шар. Линией их касания площадь поверхности шара делится в отношении $m : n$. Найти угол между образующей конуса и его осью.

**334.** В куб вписана пирамида, одной из вершин которой является центроид грани куба, а четыре другие — вершины противоположной грани куба. В пирамиду вписан шар. В каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через центр шара параллельно основанию пирамиды?

**335.** Шар касается боковой поверхности конуса по окружности основания. Площадь поверхности шара делится при этом на части, из которых одна в $n$ раз больше другой. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

**336 (4).** Через середины боковых ребер куба проходит сфера, касающаяся одного из оснований куба. Какая часть объема куба лежит внутри сферы?

**337.** В правильную четырехугольную пирамиду помещены два шара, касающиеся друг друга и всех боковых граней пирамиды. Нижний шар касается и основания пирамиды. Отношение радиуса большего шара к радиусу меньшего шара равно $n$. Найти двугранные углы пирамиды.

**338.** В правильную треугольную пирамиду, плоский угол при вершине которой равен $\alpha$, вписан шар. На какие части делится площадь поверхности шара плоскостью, проведенной через точки касания шара с боковыми гранями пирамиды?

**339 (2).** Шар проходит через вершины нижнего основания куба и касается ребер его верхнего основания. Найти отношение длины ребра куба к длине радиуса шара.

**340 (8).** На листе бумаги, являющемся квадратом $PQML$, прорезано отверстие — равносторонний треугольник $ABC$ — так, что $[AB] \parallel [PL]$ и $|AB| : |PL| = 1 : 2$. Затем квадрат свернут в круглую цилиндрическую поверхность, ось которой перпендикулярна отрезку $AB$. Найти отношение площади квадрата к площади треугольника $ABC$, вершины которого лежат на цилиндрической поверхности.

## Примерные варианты контрольной работы

| Параграф / Вариант | § 6 | § 7 | § 8 | § 10 | § 11 | § 12 | § 13 | § 14 | § 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 10 | 62 | 81 | 157 | 164 | 193 | 236 | 249 | 291 332 |
| 2 | 12 | 61 | 79 | 156 | 174 | 194 | 238 | 250 | 288 339 |
| 3 | 14 | 60 | 88 | 135 | 173 | 200 | 213 | 282 | 293 331 |
| 4 | 15 | 59 | 87 | 139 | 171 | 199 | 214 | 283 | 303 336 |
| 5 | 17 | 58 | 86 | 153 | 172 | 198 | 227 | 285 | 295 321 |
| 6 | 19 | 57 | 89 | 141 | 170 | 204 | 229 | 281 | 301 322 |
| 7 | 27 | 52 | 84 | 159 | 168 | 185 | 243 | 247 | 308 320 |
| 8 | 30 | 51 | 91 | 155 | 167 | 201 | 220 | 279 | 297 340 |
| 9 | 31 | 55 | 90 | 144 | 166 | 202 | 225 | 280 | 310 327 |
| 10 | 33 | 54 | 83 | 162 | 165 | 192 | 239 | 257 | 300 326 |
| 11 | 37 | 64 | 93 | 160 | 176 | 196 | 241 | 271 | 318 325 |
| 12 | 38 | 65 | 94 | 161 | 175 | 197 | 242 | 272 | 289 323 |

*Приложение 2*

**Параметраж изображений некоторых пространственных фигур**

| Изображение | Оригинал | Расход параметров |
|---|---|---|
| Треугольник с данным отношением двух сторон (в частности, равнобедренный треугольник) | Произвольный треугольник | 1 |
| Треугольник с данным отношением трех сторон (в частности, равносторонний треугольник) | Произвольный треугольник | 2 |
| Треугольник с данным углом (в частности, прямоугольный треугольник) | Произвольный треугольник | 1 |
| Треугольник с двумя данными неконгруэнтными углами | Произвольный треугольник | 2 |
| Параллелограмм | Произвольный параллелограмм | 0 |
| Параллелограмм с данными сторонами | Произвольный параллелограмм | 1 |
| Параллелограмм с данным углом между сторонами | Произвольный параллелограмм | 1 |
| Параллелограмм с данными сторонами и данным углом между сторонами (или между диагоналями) | Произвольный параллелограмм | 2 |
| Прямоугольник | Произвольный параллелограмм | 1 |
| Прямоугольник с данными сторонами (или с данной диагональю) | Произвольный параллелограмм | 2 |
| Ромб | Произвольный параллелограмм | 1 |
| Ромб с данным углом между сторонами | Произвольный параллелограмм | 2 |
| Квадрат (а также квадрат с данной стороной или с данной диагональю) | Произвольный параллелограмм | 2 |
| Прямой параллелепипед | Произвольный параллелепипед | 2 |
| Прямой параллелепипед с данными сторонами основания | Произвольный параллелепипед | 3 |
| Прямой параллелепипед с данными сторонами основания и данным боковым ребром | Произвольный параллелепипед | 4 |
| Прямоугольный параллелепипед | Произвольный параллелепипед | 3 |
| Прямоугольный параллелепипед с данными сторонами основания | Произвольный параллелепипед | 4 |
| Прямоугольный параллелепипед с данными сторонами основания и с данным боковым ребром (в частности, куб) | Произвольный параллелепипед | 5 |
| Треугольная пирамида | Четырехугольник с его диагоналями | 0 |
| Треугольная пирамида, одно ребро которой перпендикулярно плоскости основания | Четырехугольник с его диагоналями | 2 |
| Правильная треугольная пирамида | Четырехугольник с его диагоналями | 4 |
| Правильная треугольная пирамида с данной стороной основания и данной высотой | Четырехугольник с его диагоналями | 5 |
| Правильный тетраэдр (и правильный тетраэдр с данным ребром) | Четырехугольник с его диагоналями | 5 |
| Конус с данным радиусом основания и данной высотой (или образующей) | Эллипс с двумя касательными к нему, проведенными из одной точки | 5 |

## § 6

1. $m$; $m\sqrt{3}$; $2m$. 2. 14 см; 8 см. 3. $3\sqrt{3}$ см. 4. 16 см. 5. $\sqrt{2n(m+n)}$; $\sqrt{2(2m^2+3mn+n^2)}$. 6. $\sqrt{10}$ см. 7. 6 см. 8. $\frac{ac}{a+b}$; $\frac{ab}{a+b}$; $\frac{bc}{a+b}$. 9. $\frac{4ab}{a+b}$. 10. 9 см; $9\sqrt{3}$ см; 18 см. 11. $\frac{5}{6}\sqrt{m^2+n^2}$; $\frac{5}{4}\sqrt{m^2+n^2}$. 12. 2 см. 13. $\sqrt{b(b+c)}$. 14. $\frac{(m+n)\,mn}{m^2+n^2}$. 15. $\frac{ab\sin\gamma}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}}$, где $0°<\gamma<180°$. 16. 11 см; 10 см; $3\sqrt{5}$ см. 17. $\frac{a\cos\alpha}{\sin\left(45°+\frac{3\alpha}{2}\right)}$, где $0°<\alpha<90°$. 18. $\frac{a\sin\alpha}{b+a\cos\alpha}$; $\frac{b\sin\alpha}{a+b\cos\alpha}$. 19. $h\operatorname{ctg}\alpha$. 20. $\sqrt{\frac{a^2\sin\alpha+2ah\cos\alpha+2ah}{\sin\alpha}}$. 22. 60°; 30°. 23. 40°; 25°. 24. 90°; 22°30'; 67°30'. 26. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. 27. 90°. 31. $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\alpha\sin\beta}\right)$. 32. $\frac{\sqrt{1+8\cos^2\alpha}}{4\cos\alpha}$, где $0°<\alpha<90°$. 33. 85°. 36. $2\sqrt{2}\cos\frac{\pi(m-n)}{4(m+n)}$. 37. $\frac{m^2+m+1}{(m+1)^2}$,

## § 7

39. $\frac{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}}{2\sin\gamma}$, где $0°<\gamma<180°$. 40. 6 см. 41. 24 см. 42. $r=\frac{ah}{a+\sqrt{a^2+h^2}}$; $l=\frac{2a(\sqrt{a^2+h^2}-a)^2}{h^2}$. 43. $\frac{R\sqrt{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}$. 44. $\sqrt{2}$ см; 2 см. 45. $\frac{a}{6}(3+\sqrt{3})$; $\frac{a}{6}(3-\sqrt{3})$. 46. $6\pi$ см. 47. $\frac{2a\sin\alpha\cos(\beta-\alpha)}{\sin\beta}$, где $0°<\alpha<\beta<90°$. 48. 17 см. 49. $\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)$. 50. $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{R_2^2(1-\cos\alpha)+2R_1R_2\cos\alpha-R_1^2(1+\cos\alpha)}$, где $0°<\alpha<90°$. 51. $\frac{2R^2}{\sqrt{Rr}}$. 52. 30°; 30°; 120°; $\frac{\sqrt{3}}{3}$ м; $\frac{\sqrt{3}}{3}$ м. 53. $\frac{8-\sqrt{7}}{4}$. 54. 6 см; 3см. 55. 0,6 $a$. 56. $R\left(\sqrt{1-\frac{1}{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)$, если $\frac{\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\pi$, $R\left(\sqrt{1-\frac{1}{3}\cos^2\frac{\alpha}{2}}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$, если $\pi\leqslant\alpha\leqslant\frac{5\pi}{3}$. 57. 36°; 60°; 108°; 156°. 65. $\frac{2}{3}$.

## § 8

67. 36 см². 68. $\frac{6\sqrt{2}}{5}$ см. 69. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 74. $a^2$. 75. $\frac{\sqrt{2S}}{4}$. 76. $\sqrt{2Q}$. 77. 9 см². 78. $l^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. 79. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3})^2$. 80. $(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2})^2$. 81. $3\sqrt{2}$. 82. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$. 83. 200 см². 84. $2R^2\sin 2\alpha\sin^2\alpha$, где $45^\circ<\alpha<90^\circ$. 85. $m\sin\beta(\sqrt{c^2-m^2\sin^2\beta}+m\cos\beta)$. 87. $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\beta\cos\alpha}$. 88. 4. 90. $\frac{5\sqrt{3}\,\pi-18}{54}$. 91. $\frac{4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\pi\sin\alpha\sin\beta}$. 93. $2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

## § 10

135. $\frac{ab}{a+b}$; $\frac{ab}{a-b}$. 136. $\frac{aH}{\sqrt{a^2+H^2}}$. 137. $a\sqrt{\frac{a^2\sin^2\varphi+H^2}{a^2+H^2}}$. 138. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. 139. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. 140. $\frac{R\sqrt{-\cos 2\alpha}}{\sin\alpha}$, где $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{3\pi}{4}$. 141. $\sqrt{b^2-a^2\operatorname{ctg}^2\alpha}$, где $\operatorname{arcctg}\frac{b}{a}<\alpha<\frac{\pi}{2}$. 142. $\frac{\sqrt{b^2-a^2}\sin\alpha\sin\beta}{|\sin(\alpha\pm\beta)|}$. 143. $\frac{a}{2}$. 144. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$. 145. $R$; $\sqrt{R^2+H^2\sin^2\alpha}$. 146. 1. 147. 60°. 148. 60°. 149. 115°; 35°. 150. 60°. 151. 1-й со 2-м, 3-м, 4-м — 120°, 90°, 60°; 2-й с 3-м и 4-м — 120°, 90°; 3-й с 4-м — 120°. 152. 30°. 153. 45°. 158. $\arccos\frac{1}{6}$. 159. $\arccos\frac{5\sqrt{102}}{102}$. 160. $\arccos(\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$, где $0^\circ<\alpha<90^\circ$, $0^\circ<\beta<90^\circ$. 162. 45°; 60°.

## § 11

163. 60°. 164. 90°. 165. $2\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)$, где $0^\circ<\alpha<90^\circ$. 166. 30°, 60°, 120°, 60°. 167. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$, где $0^\circ<\alpha<90^\circ$. 168. $\arccos\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{3}}$, где $60^\circ<\alpha<180^\circ$. 169. $2\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3+9\cos^2\alpha}}{3\sin\alpha}\right)$, где $0^\circ<\alpha<90^\circ$. 170. $\arcsin\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2a}$, где $a>b\sqrt{3}$. 171. $\frac{180^\circ}{n}$. 172. $\arccos\left(\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\cdot\operatorname{ctg}\alpha\right)$, где $0^\circ<\alpha<90^\circ$. 173. $\arcsin\left(\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}\cdot\operatorname{ctg}\alpha\right)$, где $90^\circ-\frac{180^\circ}{n}<\alpha<90^\circ$. 174. $\operatorname{tg}x=\frac{\cos\alpha}{\sqrt{-\cos\left(\frac{\pi}{n}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}-\alpha\right)}}$, где $\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{n}<\alpha<\frac{\pi}{2}$. 175. $\alpha_1=\arccos\frac{\cos\alpha-\cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$; $\beta_1=\arccos\frac{\cos\beta-\cos\alpha\cos\gamma}{\sin\alpha\sin\gamma}$; $\gamma_1=\arccos\frac{\cos\gamma-\cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$, где $|\alpha-\beta|<\gamma<\alpha+\beta$. 176. $2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}}{3}$.

## § 12

**177.** $\frac{3}{16}a(4+\sqrt{2})$, $\frac{1}{8}a(4+\sqrt{2})$ и $\frac{1}{16}a(4+\sqrt{2})$. **178.** $\frac{a}{6}$. **179.** $\frac{ab\sqrt{2}}{4}$. **180.** $\frac{5a^2\sqrt{2}}{16}$. **181.** $3a^2$. **182.** $\frac{S}{a}$. **183.** $\frac{H^2\sin 2\alpha}{8\sin(30^\circ+\alpha)\sin(30^\circ-\alpha)}$, где $0^\circ<\alpha<30^\circ$. **184.** $\frac{a^2}{8}\sqrt{51}$. **185.** $\frac{\sqrt{3}}{2}l^2\cos\alpha\sqrt{1+3\cos\alpha}$, где $0^\circ<\alpha<90^\circ$. **186.** $-\frac{a^2\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{2\cos 3\alpha}$, где $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$. **187.** На $\frac{2S\sqrt{3}}{3}$ см². **188.** $\frac{S}{a}(c+H)$. **189.** $\frac{b}{6}\sqrt{a^2+c^2}$. **190.** $\frac{2aH}{\sqrt{9a^2+4H^2}}$. **191.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{\cos\alpha}$, где $b\geqslant\frac{a\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $b$ — боковое ребро. **192.** $\frac{a^2\sin^2 2\alpha\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}$, где $0^\circ<\beta<\alpha<90^\circ$. **193.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$. **194.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **195.** $\frac{a^2}{2}\sqrt{\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)}$, где $0^\circ<\alpha<45^\circ$. **196.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{\frac{6n+3m}{m}}\right)$ или $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\left(1+\sqrt{\frac{6m+3n}{n}}\right)$, если $H>\frac{a\sqrt{6}}{6}$ ($H$ — высота пирамиды). **197.** $\frac{a}{4}$. **198.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{4}$. **199.** $\operatorname{arctg}\frac{4\sqrt{10}}{9}$. **200.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{21}}{3}$. **201.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{15}}{4}$. **202.** $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{tg}\alpha\right)$, где $0^\circ<\alpha<90^\circ$. **203.** $\arccos(\operatorname{tg}\alpha)$. **204.** $\frac{\operatorname{tg}\beta}{2\sin\alpha}$, где $\begin{cases}0^\circ<\alpha<90^\circ,\\0^\circ<\beta<90^\circ.\end{cases}$ **205.** 2 : 3. **206.** $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{7}}{2}$. **207.** $\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{13}}{6}$. **208.** $\sqrt{6}$. **209.** 11 : 12.

## § 13

**210.** $4d^2\sin\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}$, где $0^\circ<\alpha<45^\circ$. **211.** $\sqrt{2}\,d^2\sin 2\beta\cos(\alpha-45^\circ)$, где $\begin{cases}0^\circ<\beta<90^\circ,\\0^\circ<\alpha<90^\circ.\end{cases}$ **212.** $\frac{4H^2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\cos\alpha}}$, где $0^\circ<\alpha<90^\circ$. **213.** $\frac{6\sqrt{6}H^2\operatorname{ctg}\alpha\sin(45^\circ+\alpha)}{\sin\alpha}$, где $0^\circ<\alpha<90^\circ$. **214.** $\frac{\sqrt{2S\cos\alpha}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$, где $0^\circ<\alpha<90^\circ$. **215.** $\frac{4}{3}H^2$. **216.** 96 см²; 144 см²; 48 см²; 288 см². **217.** $\frac{\sqrt{S\cos\alpha}}{2}\sin\alpha$, где $0^\circ<\alpha<90^\circ$. **218.** $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2\sqrt{3}\,S\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}}$, где $0<\alpha<\frac{\pi}{3}$. **219.** $\frac{a^2}{\cos\alpha}(1+\sin\alpha+\cos\alpha)$, где $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. **220.** $\frac{2H^2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\alpha\sin\beta}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\beta}{2}\right)$, где $\begin{cases}0<\alpha<\frac{\pi}{2},\\0<\beta<\frac{\pi}{2}.\end{cases}$

221. $\dfrac{a^2 \sin\alpha}{\cos\varphi}$, где $\begin{cases} 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ 222. $\dfrac{d^2 \sin 2\alpha \cos^2\dfrac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$, где $\begin{cases} 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}, \\ 0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

223. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3\cos\alpha}\left(\sqrt{1+3\sin^2\alpha}+1\right)$, где $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. 224. $2a^2 + 2a\sqrt{4b^2 - a^2}$, где $a < b\sqrt{2}$. 225. $ab\left(\sqrt{2}+1\right)$. 226. $2\pi a^2\sqrt{3}$. 227. $270\pi$ см$^2$.

228. $2\pi(a+b)\sqrt{a^2+b^2}$. 229. $\dfrac{2\pi a^2}{\cos\alpha}\cdot\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$, где $0° < \alpha < 90°$.

230. $\dfrac{4\pi R^2}{\sin\alpha}(\cos\alpha + 3\sin\alpha + 2)$. 231. $1+\sqrt{2}$.

232. $\dfrac{2(1+\sin\alpha)}{\sin 2\alpha\cdot\sin\beta}\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}$, где $0 < \beta < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

233. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{6}$. 234. $\dfrac{1+2\sin\alpha}{12\sin\alpha}$, где $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. 235. $\dfrac{\pi}{\cos\alpha}$, где $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

237. $\dfrac{\pi\sqrt{15}}{3}$. 238. $\arccos\dfrac{4}{5}$. 239. $120°$. 240. $4\pi$. 241. $\dfrac{\pi(5+4\sqrt{3})}{2}$.

242. $4\pi : \sqrt{3}$. 243. в 3 раза.

## § 14

244. $\dfrac{a^3}{2}$. 245. $2a^3\sin\alpha\sqrt{\sin 3\alpha\cdot\sin\alpha}$, где $0° < \alpha < 60°$. 246. $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$, где $45° < \alpha < 90°$. 247. $am^2$. 248. $\dfrac{a^3\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\alpha}{\sin\varphi}\times$

$\times\sqrt{\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}+\varphi\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2}-\varphi\right)}$, где $\begin{cases} 0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}, \\ \dfrac{\alpha}{2}+\varphi < \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$ 249. $\dfrac{a^2(b+c)}{2}$, где $b < c$. 250. $\dfrac{a^3\sin 2\alpha\sin\alpha}{2\cos^2\left(45° - \dfrac{\alpha}{2}\right)}$, где $0 < \alpha < \pi$.

251. $\dfrac{a^3}{3}\sin\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{\sin(60°+\alpha)\sin(60°-\alpha)}$, где $0° < \alpha < 60°$. 252. $\dfrac{2}{3}S\sqrt{\dfrac{S}{\operatorname{tg}\alpha}}$, где $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. 253. $\sqrt{3}\,H^3\dfrac{\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}+30°\right)\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}-30°\right)}{\cos^2\dfrac{\varphi}{2}}$, где $60° < \alpha < 180°$.

254. $-\dfrac{2}{3}b^3\dfrac{\cos\dfrac{\varphi}{2}\cos\varphi}{\sin^3\dfrac{\varphi}{2}}$, где $\dfrac{\pi}{2} < \varphi < \pi$. 255. $\sqrt[3]{\dfrac{9V^2}{\operatorname{tg}^2\alpha}}\dfrac{\sqrt{3}(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}$,

где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. 256. $\frac{c^3}{24} \sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta$, где $\begin{cases} 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

257. $\frac{l^3 (\operatorname{tg}^2 \alpha + 4) \sqrt{3 \operatorname{tg}^2 \alpha + 12}}{8 \operatorname{tg}^2 \alpha}$, где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

258. $\frac{l^3 (1 + 4 \operatorname{tg}^2 \beta) \sqrt{1 + 4 \operatorname{tg}^2 \beta}}{4 \operatorname{tg}^2 \beta}$, где $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. 259. $\frac{b^3 \sqrt{2}}{12}$. 260. $\frac{2PQ}{3b}$.

261. $\frac{H^3 \sin^2 (\alpha - \beta)}{3 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}$, где $0 < \beta < \alpha < \frac{\pi}{2}$. 262. $\sqrt[3]{\frac{9V^2}{\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}}$, где $\begin{cases} 0^\circ < \alpha < 90^\circ, \\ 0^\circ < \beta < 90^\circ. \end{cases}$ 263. $\frac{2}{3} a^2 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \beta$, где $\begin{cases} 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

264. $\frac{S}{6} \operatorname{tg} \beta \sqrt{S \sin \alpha}$, где $\begin{cases} 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$ 265. $\frac{\pi bc (b + c) \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2}}{3}$, где $0 < \alpha < \pi$. 266. $\frac{\pi b^3}{6} (5 + 3\sqrt{2})$. 267. $2\pi S \sqrt[4]{\frac{4S^2}{27}}$. 268. $\frac{a^3 - b^3}{6 \cos \alpha} \sqrt{-\cos 2\alpha}$, где $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. 270. $\frac{\pi R^3 \sqrt{2}}{6}$. 271. $\frac{R^3 \alpha^2 \sqrt{4\pi^2 - \alpha^2}}{24\pi^2}$, где $0 < \alpha < 2\pi$.

272. $\frac{a^3}{48} (4\sqrt{2} + \sqrt{10})$. 273. $\frac{\pi a S}{\sin \alpha}$, где $0 < \alpha < \pi$. 274. 1 : 4. 275. 1 : 2.

277. $\frac{V_a}{V_b} = \frac{b}{a}$; $\frac{V_b}{V_c} = \frac{c}{b}$. 279. 97 : 191. 280. 25 : 47. 281. 7 : 29. 282. 7 : 17.

283. 3 : 5. 284. $\frac{\sqrt{2}}{3}$; $\frac{5\sqrt{2}}{7}$. 285. 3 : 1. 286. $\frac{5}{24}$.

## § 15

287. $2a \sqrt{R^2 - d^2}$, где $R > d$. 288. $\sqrt{\frac{a^2}{8} + \frac{R^2}{2}}$, где $a \leqslant 2R$. 289. $\arccos \frac{\sqrt{ab}}{h}$, где $ab < h^2$. 290. $\frac{a \sqrt{\pi^2 + 12}}{2\sqrt{3}\,\pi}$. 291. $\frac{b^3 \sqrt{2}}{81}$. 292. $\frac{5a^3}{48}$. 293. $\left(\frac{abc}{ab + bc + ac}\right)^3$.

294. $\frac{b\sqrt{2} \sin 2\alpha}{4 \sin (45^\circ + \alpha)}$, где $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. 295. $\sqrt{2}\, b \sin \frac{\alpha}{2} \sin\left(45^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)$, где $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

296. $\frac{H^2 \sin \frac{2\alpha + \beta}{2} \cos \frac{2\alpha - \beta}{2}}{\sin^2 \alpha}$, где $0^\circ < \beta < 180^\circ - 2\alpha$. 297. $\frac{3\sqrt{2}}{8} a$.

298. 6 см. 299. $\frac{9R^3 \operatorname{tg} \alpha}{4 (\sqrt{3} + \operatorname{tg} \alpha)^3}$, где $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. 300. $l = \frac{a\sqrt{3}}{\cos \frac{\alpha}{2} + \sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}}$, $R = \frac{a\sqrt{3}}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \sqrt{2}}$, где $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. 301. $\frac{R^2 \sqrt{6}}{4}$.

302. $\frac{\pi H^3 \sin(2\alpha-\beta)\sin\beta}{3\sin^2\alpha\sin^2(\alpha-\beta)}$, где $0^\circ<\beta<\alpha<90^\circ$. 303. $\frac{\pi a^3}{12}(15-8\sqrt{2})$.
304. $\frac{a}{4}(3-\sqrt{3})$. 305. $\frac{a}{2}(2-\sqrt{3})$. 306. $\frac{h^3}{\sqrt{2}\sin 2\alpha\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}$
где $0^\circ<\alpha<90^\circ$. 307. $-\frac{1}{3}\pi R^3\operatorname{tg}^3\alpha\operatorname{tg}2\alpha$, где $90^\circ<\alpha<112^\circ30'$.
308. $\pi R^2(1+\cos^2 2\alpha+2\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha)$, где $0^\circ<\alpha<90^\circ$.
309. $\sqrt{\frac{S_1(S_2-S_1)}{\pi(S_2+S_1)}}$, где $S_2>S_1$. 310. $\frac{\pi R^3\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^3\alpha}$, где $0^\circ<\alpha<90^\circ$.
311. $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)\sqrt[3]{6V\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, где $0<\alpha<\pi$. 312. $\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, где $0^\circ<$
$<\alpha<90^\circ$, $0^\circ<\beta<90^\circ$. 313. $2\sqrt{2}R^2\cos\alpha\left(\sin\alpha+\sqrt{1-\frac{1}{2}\cos^2\alpha}\right)$, где $0^\circ<$
$<\alpha<90^\circ$. 314. $\frac{\pi H\alpha\sqrt{\cos\alpha}}{45^\circ\cos\frac{\alpha}{2}}$, где $0^\circ<\alpha<90^\circ$. 315. $2R\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}}$,
где $0^\circ<\alpha<120^\circ$. 316. $\frac{a\sin\alpha}{2\left(\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+1\right)}$, где $\begin{cases}0^\circ<\alpha<180^\circ,\\ 0^\circ<\beta<90^\circ.\end{cases}$
317. $\frac{4}{3}R^3\frac{\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\varphi}{\sin\alpha}$, где $\begin{cases}0^\circ\le\alpha\le90^\circ,\\ 0^\circ<\varphi<90^\circ.\end{cases}$ 318. $\frac{a^4}{48\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}}$, где $b>\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
320. $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. 321. $\operatorname{ctg}40^\circ:\operatorname{ctg}30^\circ:\operatorname{ctg}20^\circ$. 322. $\arcsin\frac{6}{\pi m}$ и $\pi-\arcsin\frac{6}{\pi m}$,
где $m>\frac{6}{\pi}$. 323. 27:125. 324. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. 325. $\arccos(\sqrt[3]{2}-1)$. 326. $\frac{\pi}{7}(5\sqrt{2}-6)$.
328. 1 : 1; 9 : 7. 329. $2\arcsin\frac{m-n}{m+n}$. 331. $60^\circ$. 332. $\frac{2\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha\operatorname{tg}\alpha}$, где $0^\circ<\alpha<$
$<90^\circ$. 333. $\arcsin\frac{n-m}{n+m}$, где $n>m>0$. 334. $\sqrt{3}:1$. 335. $2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{n}}$, где
$n>1$. 336. $\frac{24+7\pi}{48}$. 337. При ребре основания $\arccos\frac{n-1}{n+2}$, где $n>1$; при
боковом ребре $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{n^2+1}{2n}}$, где $n>1$. 338. $\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)}$, где $0<$
$<\alpha<\frac{2\pi}{3}$. 339. $8:\sqrt{41}$. 340. $\frac{8\pi^2}{\sqrt{3\pi^2+4}}$.

## ОГЛАВЛЕНИЕ


Предисловие . . . . . 3

**Глава I. Общие сведения** . . . . . 5

§ 1. Построение изображения данной фигуры . . . . . —
§ 2. Краткая запись условия задачи . . . . . 17
§ 3. Решение задачи . . . . . 18
§ 4. О некоторых методах решения геометрических задач . . . 20
§ 5. Исследование решения . . . . . 44

**Глава II. Планиметрия** . . . . . 50

§ 6. Зависимости между элементами многоугольников . . . . . —
Задачи для самостоятельного решения (№ 1—38) . . . . . 58
§ 7. Окружность . . . . . 61
Задачи для самостоятельного решения (№ 39—66) . . . . 65
§ 8. Площади . . . . . 68
Задачи для самостоятельного решения (№ 67—94) . . . . 72

**Глава III. Стереометрия** . . . . . 75

§ 9. Геометрические построения в пространстве . . . . . —
Задачи для самостоятельного решения (№ 95—134) . . . —
§ 10. Скрещивающиеся прямые. Угол прямой с плоскостью . . . 82
Задачи для самостоятельного решения (№ 135—162) . . . 90
§ 11. Двугранные и многогранные углы . . . . . 92
Задачи для самостоятельного решения (№ 163—176) . . . 96
§ 12. Сечения многогранников . . . . . 97
Задачи для самостоятельного решения (№ 177—209) . . . 109
§ 13. Поверхности . . . . . 112
Задачи для самостоятельного решения (№ 210—243) . . . 122
§ 14. Объемы . . . . . 125
Задачи для самостоятельного решения (№ 244—286) . . . 134
§ 15. Комбинации многогранников и круглых тел . . . . . 138
Задачи для самостоятельного решения (№ 287—340) . . . 146
Приложение 1. Примерные варианты контрольной работы . . . . . 151
Приложение 2. Параметраж изображений некоторых пространственных фигур . . . . . 152

Ответы . . . . . 153

**Виктор Николаевич Литвиненко**

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ
ШКОЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

ГЕОМЕТРИЯ

Н/К

Редактор *Л. В. Туркестанская*
Художественный редактор *Е. Н. Карасик*
Технический редактор *Л. М. Абрамова*
Корректор *О. В. Ивашкина*

Сдано в набор 14.12.81. Подписано к печати 20.07.82. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бум. типограф. № 3. Гарн. лит. Печать выс. Усл. печ. л 10. Усл. кр. отт. 10,25. Уч.-изд. л. 9,65. Тираж 27000 экз. Заказ 277. Цена 30 коп. «заказное».

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Саратов, ул. Чернышевского, 59.