МГЗПИ

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ГЕОМЕТРИИ

ЧАСТЬ II

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ЗАДАЧНИК-ПРАКТИКУМ ПО ГЕОМЕТРИИ

ЧАСТЬ II

Учебное пособие для студентов-заочников II курса физико-математических факультетов педагогических институтов

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1979

Б. И. Аргунов, И. В. Парнасский, О. Е. Парнасская, М. М. Цаленко

Редактор МГЗПИ *О. А. ПАВЛОВИЧ*

Рекомендовано к печати Главным управлением высших и средних педагогических учебных заведений Министерства просвещения РСФСР

Изучение любого математического курса немыслимо без выработки навыков решения задач, что приобретает особое значение для студентов-заочников, позволяя им самостоятельно контролировать степень усвоения материала. Предлагаемый сборник написан в соответствии с действующей программой курса «Геометрия» и содержит задачи по следующим разделам: метод координат в пространстве, прямые и плоскости, выпуклые многогранники, поверхности второго порядка.

Прежде чем приступить к разбору и решению задач, следует ознакомиться с необходимым теоретическим материалом (ссылки на который приводятся в начале каждого параграфа) по одному из следующих учебных пособий:

1. Атанасян Л. С. Геометрия. Ч. I. М., «Просвещение», 1973.
2. Базылев В. Т., Дуничев К. И., Иваницкая В. П. Геометрия. Ч. I. М., «Просвещение», 1974.

Авторы будут благодарны читателям за критические замечания и советы, которые просим прислать по адресу: 109004, Москва, В.Радищевская 18, МГЗПИ, Редакционно-издательский отдел.

$З \frac{60602 - 249}{103(03)-79}$ заказное

© Московский государственный заочный педагогический институт (МГЗПИ), 1979 г.

ГЛАВА I

МЕТОД КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ ВЕКТОРОВ И ТОЧЕК

Литература: [1], § 42; [2], раздел 2, § 1—3.

1.1. Изобразить прямоугольную декартову систему координат пространства и построить точку P $(-2;\ 1;\ \sqrt{3})$ по ее координатам.

Решение. Обычно прямоугольную декартову систему координат изображают следующим образом: оси Oy и Oz взаимно перпендикулярны, причем ось Oy горизонтальна, ось Ox образует с осями Oy и Oz углы, величины которых равны 135°. По осям Oy и Oz единичные векторы откладываются без изменения масштаба, по оси Ox — с уменьшением масштаба в два раза (рис. 1)*.

Согласно определению ([1], § 42, формула (1); [2], раздел 2, § 1),

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP}_2 + \overrightarrow{OP}_3,$$

где

$$\overrightarrow{OP}_1 = -2\vec{i},\ \overrightarrow{OP}_2 = \vec{j},\ \overrightarrow{OP}_3 = \sqrt{3}\,\vec{k}.$$

Заменяя вектор $\overrightarrow{OP}_2$ равным ему вектором $\overrightarrow{P_1P'_2}$, а вектор $\overrightarrow{OP}_3$ — вектором $\overrightarrow{P'_2P}$, получим:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{P_1P'_2} + \overrightarrow{P'_2P} = -2\vec{i} + \vec{j} + \sqrt{3}\vec{k}.$$

Откладывание векторов $\overrightarrow{OP}_1 = -2\vec{i}$ и $\overrightarrow{P_1P'_2} = \vec{j}$ выполняется непосредственно.

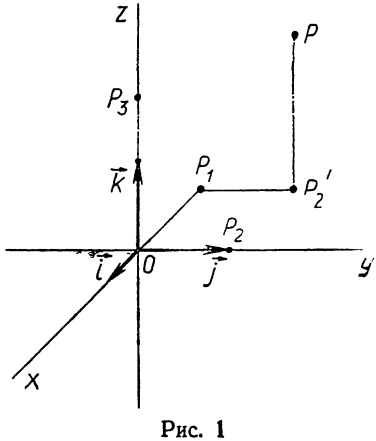

Рис. 1

* Описанный здесь способ изображения называется кабинетной проекцией. Вообще же прямоугольный декартов репер можно изобразить любой тройкой попарно неколлинеарных направленных отрезков с общим началом.

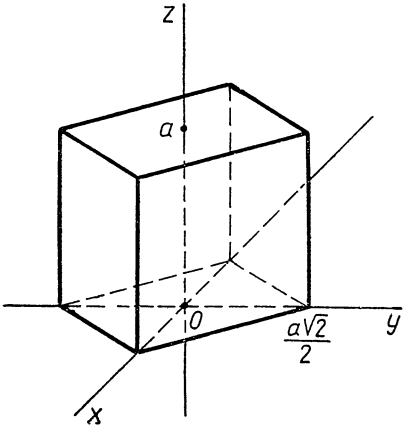

Рис. 2

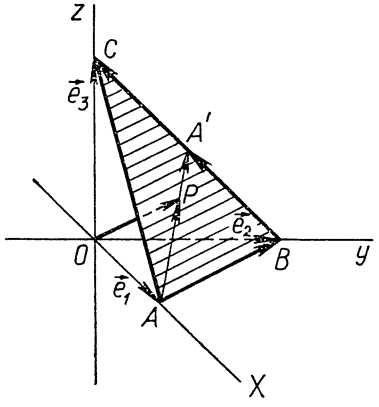

Рис. 3

При построении вектора $\overrightarrow{P_2'P} = \sqrt{3}\,\vec{k}$, длина которого равна $\sqrt{3}$, необходимо воспользоваться тем, что, как известно, ту же длину $\sqrt{3}$ имеет сторона правильного треугольника, вписанного в окружность радиуса 1.

1.2. Изобразить прямоугольную декартову систему координат пространства и построить точки по их координатам относительно этой системы: P (0; 2; —3), Q (2; 1; 4), S (—2; 3; 5), T (0; 3; —3).

1.3. Выбрать произвольный координатный репер $R = (O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ и построить точки: A (1; 0; 0), B (—1; 0; 1), C $(-1; -\frac{1}{2}; 1)$, D $(3; \frac{1}{2}; -2)$.

1.4. Изобразить тетраэдр $ABCD$ и построить точки: K (—1; 1; 0), L (—2; —1; —1), M (0; 2; 0), N (—2; 0; 0), рассматривая точку A как начало координат, а векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ как векторы базиса.

1.5. Куб стоит на плоскости Oxy. Центр его основания совпадает с началом координат, а боковые ребра лежат в координатных плоскостях. Найти координаты всех вершин куба, полагая, что ребро куба имеет длину a (рис. 2).

1.6. Центром тяжести треугольника называется точка пересечения его медиан. Найти координаты центра тяжести треугольника ABC с вершинами A (1; 0; 0), B (0; 1; 0), C (0; 0; 1) (рис. 3).

Решение. Для нахождения координат центра тяжести P треугольника ABC надо представить вектор $\overrightarrow{OP}$ в виде линейной комбинации базисных векторов $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$. Так как $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{OA} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$, где A' — середина $[BC]$, то остается выразить вектор $\overrightarrow{AA'}$ через базисные векторы.

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'},\ \overrightarrow{AB} = \vec{e}_2 - \vec{e}_1,\ \overrightarrow{BA'} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\ (\vec{e}_3 - \vec{e}_2).$$

Значит,

$$\overrightarrow{AA'} = (\vec{e}_2 - \vec{e}_1) + \frac{1}{2}\ (\vec{e}_3 - \vec{e}_2) = -\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\ \vec{e}_2 + \frac{1}{2}\vec{e}_3.$$

Далее:

$$\overrightarrow{AP} = -\frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3,\ \overrightarrow{OP} = \vec{e}_1 - \frac{2}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3 =$$

$$= \frac{1}{3}\vec{e}_1 + \frac{1}{3}\vec{e}_2 + \frac{1}{3}\vec{e}_3.$$

Следовательно, $P\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right)$.

1.7. Дан координатный репер $R = (O;\ \overrightarrow{OA}_1;\ \overrightarrow{OA}_2;\ \overrightarrow{OA}_3)$. Найти координаты вектора $\overrightarrow{A_1M}$, где M — середина отрезка A_2A_3.

1.8. Пусть $ABCD$ — некоторый тетраэдр, E — середина $[BC]$, F — центр тяжести треугольника BCD. Найти координаты векторов $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{EF}$ относительно базиса $(\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD})$.

1.9. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, E, F, G — соответственно середины его ребер $[AA_1]$, $[AD]$, $[CC_1]$. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{EC_1}$, $\overrightarrow{B_1C_1}$, $\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{GD}$, $\overrightarrow{A_1G}$ относительно базиса $(\overrightarrow{AA_1},\ \overrightarrow{AD},\ \overrightarrow{AB})$.

1.10. Точка A имеет координаты x, y, z относительно некоторой прямоугольной декартовой системы координат. Найти координаты точки, симметричной точке A относительно: а) начала координат; б) плоскости Oxy; в) оси Oz.

1.11. Проверить, что точка O' (1; 3; —1) и векторы

$$\vec{e}_1' = (4,\ 3,\ -2),\ \vec{e}_2' = (0,\ 1,\ 5),\ \vec{e}_3' = (-1,\ 0,\ 1)$$

определяют в пространстве аффинную систему координат. Найти координаты точек P (0; 3; 26), Q (6; 5; —22), S (2; 3; —2) в новой системе координат.

Решение. Покажем, что $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$ можно принять за базис новой аффинной системы координат. Для этого достаточно проверить, что определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

отличен от нуля (см. [2], раздел 1, § 7; раздел 2, § 3, 4). Так как $\Delta = -13 \neq 0$, то $R' = (O';\ \vec{e}_1';\ \vec{e}_2';\ \vec{e}_3')$ является аффинным репером. Если x, y, z и x', y', z' координаты произвольной точки M относительно старой и новой систем координат, то эти координаты связаны следующими формулами:

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + x_0, \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + y_0, \\ z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + z_0, \end{cases}$$

где $(c_{11}; c_{21}; c_{31})$, $(c_{12}; c_{22}; c_{32})$, $(c_{13}; c_{23}; c_{33})$ — координаты векторов $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$ соответственно относительно базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ и $(x_0; y_0; z_0)$ — координаты точки O' относительно репера $R = (O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$.

В нашей задаче эти формулы принимают следующий вид:

$$\begin{cases} x = 4x' + 0y' - 1z' + 1, \\ y = 3x' + y' + 0z' + 3, \\ z = -2x' + 5y' + 1z' - 1. \end{cases}$$

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 0 = 4x' - z' + 1, \\ 3 = 3x' + y' + 3, \\ 26 = -2x' + 5y' + z' - 1, \end{cases}$$

находим новые координаты точки P $(x'; y'; z')$: $x' = -2$, $y' = 6$, $z' = -7$. Аналогично находятся координаты точек Q и S.

1.12. Координаты произвольной точки относительно реперов $R = (O; \vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ и $R' = (O'; \vec{e}_1'; \vec{e}_2'; \vec{e}_3')$ связаны формулами:

$$\begin{cases} x = x' - 2y' + 3z' - 4, \\ y = 5x' - y' - z', \\ z = z' + 1. \end{cases}$$

Найти координаты точки O' относительно R и векторов $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$, $\vec{e}_3'$ относительно базиса $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

1.13. Пусть $ABCD$ — некоторый тетраэдр, точка M имеет координаты x, y, z относительно репера $R = (A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})$ и координаты x', y', z' относительно репера $R' = (B; \overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BD})$. Найти зависимость между теми и другими координатами точки M (рис. 4).

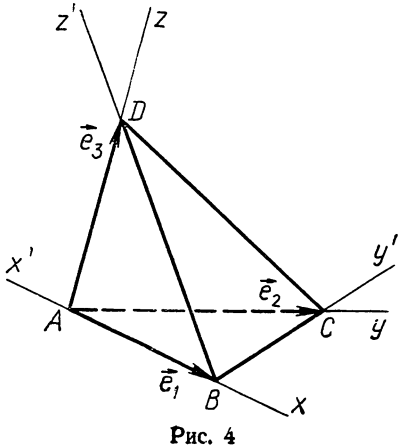

Рис. 4

Решение. Обратимся к формулам:

$$\begin{aligned} x &= c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + x_0, \\ y &= c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + y_0, \\ z &= c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + z_0, \end{aligned}$$

связывающим координаты одной и той же точки относительно двух различных реперов ([2], раздел 2, § 3).

В нашей задаче $\vec{e}_1' = \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB} = -\vec{e}_1$, так что $\vec{e}_1' = (-1;\ 0;\ 0)_R$. Следовательно, $c_{11} = -1$, $c_{21} = 0$, $c_{31} = 0$.

Далее:

$$\vec{e}_2' = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{e}_2 - \vec{e}_1,$$

так что $\vec{e}_2' = (-1;\ 1;\ 0)_R$. Следовательно, $c_{12} = -1$, $c_{22} = 1$, $c_{32} = 0$.

Наконец,

$$\vec{e}_3' = \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{e}_3 - \vec{e}_1,$$

так что $\vec{e}_3' = (-1;\ 0;\ 1)_R$. Следовательно, $c_{13} = -1$, $c_{23} = 0$, $c_{33} = 1$.

Кроме того, замечаем, что $B\ (1;\ 0;\ 0)_R$, так что $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$.

Таким образом, приходим к следующим формулам:

$$\begin{cases} x = -x' - y' - z' + 1, \\ y = y', \\ z = z'. \end{cases}$$

1.14. Репер R' получен параллельным переносом репера R. Точка M имеет координаты (1; 2; 3) относительно репера R и координаты (4; 0; —5) относительно репера R'. В какую точку было перенесено начало координат?

1.15. Пусть $\vec{e}_1' = (1;\ 0;\ 2)$, $\vec{e}_2' = (1;\ 0;\ -2)$, $\vec{e}_3' = (1;\ 1;\ 1)$ относительно некоторого базиса $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Найти координаты векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ относительно базиса $\vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3'$.

1.16. Написать формулы преобразования координат при переходе от репера $R = (A;\ \overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AD})$ к реперу $R' = (O;\ \overrightarrow{OA};\ \overrightarrow{OB};\ \overrightarrow{OC})$, где O — середина $[BD]$.

1.17. Пусть $R = (O;\ \vec{i};\ \vec{j};\ \vec{k})$ и $R' = (O;\ \vec{i}';\ \vec{j}';\ \vec{k}')$ — два прямоугольных декартовых репера, причем

$$\widehat{(\vec{i},\ \vec{i}')} = \alpha_1,\ \widehat{(\vec{i},\ \vec{j}')} = \alpha_2,\ \widehat{(\vec{i},\ \vec{k}')} = \alpha_3,$$

$$\widehat{(\vec{j},\ \vec{i}')} = \beta_1,\ \widehat{(\vec{j},\ \vec{j}')} = \beta_2,\ \widehat{(\vec{j},\ \vec{k}')} = \beta_3,$$

$$\widehat{(\vec{k},\ \vec{i}')} = \gamma_1,\ \widehat{(\vec{k},\ \vec{j}')} = \gamma_2,\ \widehat{(\vec{k},\ \vec{k}')} = \gamma_3$$

и $O'\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$. Найти зависимость между координатами x, y, z произвольной точки M относительно репера R и координатами x', y', z' той же точки M относительно репера R'.

Решение. Воспользуемся формулами:

$$\begin{cases} x = c_{11}x' + c_{12}y' + c_{13}z' + x_0, \\ y = c_{21}x' + c_{22}y' + c_{23}z' + y_0, \\ z = c_{31}x' + c_{32}y' + c_{33}z' + z_0. \end{cases}$$

В наших обозначениях $\vec{i'} = c_{11}\vec{i} + c_{21}\vec{j} + c_{31}\vec{k}$. Умножая обе части этого равенства на $\vec{i}$, получаем: $\vec{i'} \cdot \vec{i} = c_{11}$, потому что $\vec{i}^2 = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$, $\vec{i} \cdot \vec{k} = 0$. Следовательно,

$$c_{11} = |\vec{i'}| \cdot |\vec{i}| \cos(\widehat{\vec{i}, \vec{i'}}) = \cos(\widehat{\vec{i}, \vec{i'}}) = \cos\alpha_1.$$

Точно так же найдем, что

$$c_{12} = \cos\alpha_2,\ c_{13} = \cos\alpha_3,\ c_{21} = \cos\beta_1,\ c_{22} = \cos\beta_2 \text{ и т. д.}$$

Поэтому искомые формулы преобразования прямоугольной декартовой системы координат получают следующий вид:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha_1 + y'\cos\alpha_2 + z'\cos\alpha_3 + x_0, \\ y = x'\cos\beta_1 + y'\cos\beta_2 + z'\cos\beta_3 + y_0, \\ z = x'\cos\gamma_1 + y'\cos\gamma_2 + z'\cos\gamma_3 + z_0. \end{cases}$$

1.18. Репер R' получен из прямоугольного декартова репера R поворотом вокруг оси Oz на угол α (рис. 5). Написать соответствующие формулы преобразования координат.

Решение. В данном случае $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

Найдем углы, образованные осями указанных систем координат:

$$\alpha_1 = (\widehat{Ox, Ox'}) = \alpha,\ \alpha_2 = (\widehat{Ox, Oy'}) = \frac{\pi}{2} + \alpha,\ \alpha_3 = (\widehat{Ox, Oz'}) = \frac{\pi}{2},$$

$$\beta_1 = (\widehat{Oy, Ox'}) = \frac{\pi}{2} - \alpha,\ \beta_2 = (\widehat{Oy, Oy'}) = \alpha,\ \beta_3 = (\widehat{Oy, Oz'}) = \frac{\pi}{2},$$

$$\gamma_1 = (\widehat{Oz, Ox'}) = \frac{\pi}{2},\ \gamma_2 = (\widehat{Oz, Oy'}) = \frac{\pi}{2},\ \gamma_3 = (\widehat{Oz, Oz'}) = 0.$$

Подставляя эти значения углов в формулы, полученные в предыдущей задаче, находим:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \\ z = z'. \end{cases}$$

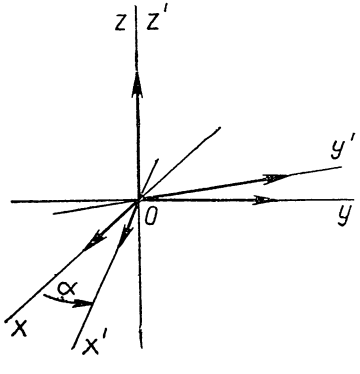

Рис. 5

1.19. Репер R' получен из прямоугольного декартова репера R поворотом вокруг оси Oy на угол 45° (считая по кратчайшему пути от оси Oz к оси Ox). Найти координаты точки M относительно репера R, если $M\ (0;\ 1;\ -\sqrt{2})_{R'}$.

1.20. Написать формулы преобразования координат точек при переходе от прямоугольной декар-

товой системы координат R к системе R', которая получена из R путем переноса начала координат в точку (0; 0; 1) и последующего поворота системы на 45° вокруг оси Ox (в направлении от Oy к Oz).

1.21. Написать формулы преобразования координат точек при переходе от репера R' к реперу R задачи 1.19. Найти координаты точки N относительно репера R', если $N\ (-1;\ 1;\ 1)_R$.

1.22. Написать формулы преобразования координат точек при переходе от репера R' к реперу R задачи 1.20. Найти координаты точки K относительно репера R', если $K\ (0;\ -1;\ 3)_R$.

§ 2. ОСНОВНЫЕ АФФИННЫЕ ЗАДАЧИ

Литература: [1], § 42, пп. 4, 6, 7; [2], раздел 2, § 1.

В задачах 1.23—1.35 координаты точек даны в произвольной аффинной системе координат.

1.23. Даны координаты четырех точек: $P_i\ (x_i;\ y_i;\ z_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$. Найти, при каких условиях четырехугольник $P_1P_2P_3P_4$ будет параллелограммом.

Решение. Для того чтобы четырехугольник $P_1P_2P_3P_4$ был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overrightarrow{P_1P_2}$ и $\overrightarrow{P_4P_3}$ были равными. А равенство двух векторов равносильно равенству их соответствующих координат. Таким образом, ([1], § 42.4) искомые условия состоят в том, что

$$x_2 - x_1 = x_3 - x_4,\ y_2 - y_1 = y_3 - y_4,\ z_2 - z_1 = z_3 - z_4.$$

1.24. Доказать, что точки $A\ (-3;\ 0;\ 2)$, $B\ (-2;\ 1;\ 3)$, $C\ (5;\ 0;\ 2)$, $D\ (4;\ -1;\ 1)$ являются вершинами параллелограмма.

1.25. Найти координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если известны координаты вершин $A\ (3;\ 2;\ -1)$, $B\ (-2;\ 1;\ 3)$, $C\ (5;\ 0;\ 2)$.

1.26. Доказать, что отрезки, соединяющие последовательно середины сторон произвольного четырехугольника, образуют параллелограмм.

1.27. Доказать, что точки $A\ (-3;\ 0;\ 2)$, $B\ (1;\ 2;\ 4)$, $C\ (6;\ 0;\ 2)$, $D\ (4;\ -1;\ 1)$ являются вершинами трапеции.

1.28. Даны точки $A\ (-2;\ 0;\ 5)$ и $B\ (4;\ 6;\ 11)$. Найти координаты точки C, делящей направленный отрезок AB в отношении λ, где 1) $\lambda = 2$; 2) $\lambda = -\frac{1}{2}$, 3) $\lambda = -2$.

1.29. Известны координаты вектора $\overrightarrow{AB} = (2;\ 2;\ 6)$ и координаты середины $C\ (-4;\ 0;\ 5) \in [AB]$. Найти координаты точек A и B.

1.30. Найти координаты точки C, симметричной точке $B\ (x_1;\ y_1;\ z_1)$ относительно точки $A\ (x_2;\ y_2;\ z_2)$.

1.31. Известны координаты двух точек $A\ (1;\ 2;\ 3)$ и $B\ (4;\ 0;\ 5)$ Найти точку пересечения прямой AB с плоскостью Oxy.

Решение. *1-й способ.* Пусть $P\ (x;\ y;\ z)$ — искомая точка. Так как она лежит в плоскости Oxy, то $z = 0$. Обозначим отношение,

в котором точка P делит отрезок AB через λ. Тогда, применяя формулу деления отрезка в данном отношении ([1], § 42.6 или [2], раздел 2, § 1) к аппликатам z точек A,B и P, получим:

$$0 = \frac{3 + 5\lambda}{1 + \lambda},$$

откуда следует, что $\lambda = -0{,}6$. Пользуясь теперь формулой для x, получим:

$$x = \frac{1 - 0{,}6 \cdot 4}{1 - 0{,}6} = -3{,}5.$$

Аналогично найдем, что $y = 5$.

2-й способ. Считая точку A первой, B — второй, P — третьей и используя условие коллинеарности трех точек ([1], § 42.7)

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

получим:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ x - 1 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ y - 2 & -3 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда: $x = -3{,}5$, $y = 5$.

1.32. Известны координаты точек A (2; —1; 7) и B (4; 5; —2). Найти отношения, в которых точки пересечения координатных плоскостей с прямой AB делят отрезок AB.

1.33. Даны точки A (x_1; y_1; z_1) и B (x_2; y_2; z_2). Доказать, что точка M (x; y; z) принадлежит отрезку AB тогда и только тогда, когда ее координаты выражаются через координаты данных точек формулами:

$$\begin{cases} x = (1 - t)\, x_1 + tx_2, \\ y = (1 - t)\, y_1 + ty_2, \\ z = (1 - t)\, z_1 + tz_2, \end{cases}$$

где $t \in [0, 1]$.

Решение. Точка M (x; y; z) принадлежит отрезку AB тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$. Отсюда ([2], раздел 1, § 7)

$$\begin{cases} x - x_1 = t\,(x_2 - x_1), \\ y - y_1 = t\,(y_2 - y_1), \\ z - z_1 = t\,(z_2 - z_1), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x = (1 - t)\, x_1 + tx_2, \\ y = (1 - t)\, y_1 + ty_2, \\ z = (1 - t)\, z_1 + tz_2. \end{cases}$$

1.34. Даны точки A (1; 0; —1) и B (6; 3; 2). Определить координаты еще нескольких точек, принадлежащих отрезку AB.

1.35. Отрезок AB разделен точками M_1, M_2, M_3, M_4 на пять равных частей. Найти координаты точек A, M_2, M_3, B, если известны координаты точек $M_1(3; -5; 7)$ и $M_4(-2; 4; -8)$.

1.36. Две параллельные силы 120 Н и 150 Н приложены соответственно в точках с координатами (0; 1; 2) и (— 3; 4; 5). Найти точку приложения равнодействующей силы, если а) данные силы направлены одинаково; б) данные силы направлены противоположно.

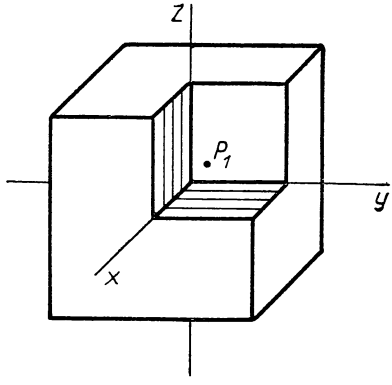

Рис. 6

1.37. Даны вершины треугольника $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$. Доказать, что точка $M(x; y; z)$ принадлежит треугольнику ABC тогда и только тогда, когда ее координаты выражаются через координаты данных точек формулами:

$$\begin{cases} x = \lambda x_1 + \mu x_2 + \nu x_3, \\ y = \lambda y_1 + \mu y_2 + \nu y_3, \\ z = \lambda z_1 + \mu z_2 + \nu z_3, \end{cases}$$

где $\lambda + \mu + \nu = 1$ и $0 \leqslant \lambda, \mu, \nu \leqslant 1$.

Указание. Точка $M(x; y; z)$ принадлежит треугольнику ABC тогда и только тогда, когда она лежит на некотором отрезке CD, где D — произвольная точка отрезка AB. Для решения задачи необходимо дважды воспользоваться формулами задачи 1.33, предварительно переписав их в виде:

$$\begin{cases} x = \lambda_1 x_1 + \mu_1 x_2, \\ y = \lambda_1 y_1 + \mu_1 y_2, \\ z = \lambda_1 z_1 + \mu_1 z_2, \end{cases}$$

где $\lambda_1 = 1 - t$, $\mu_1 = t$.

1.38. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер произвольного тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся в этой точке пополам.

Указание. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр. С помощью репера $R = (A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})$ найдите координаты сначала середин ребер, а затем середин отрезков, отвечающих условию задачи.

1.39. Центр куба, ребро которого равно 1, находится в начале прямоугольной декартовой системы координат, а ребра соответственно параллельны осям координат. Из куба удалена часть t, которая располагалась в первом октанте. Найти центр тяжести полученного тела T.

Решение. Центр тяжести куба находится в начале координат, центр тяжести его удаленной части t — в точке $P_1\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$ (см. рис. 6). Обозначим центр тяжести тела T через $P_2(x; y; z)$.

Центр тяжести куба можно рассматривать как центр тяжести объединения материальных точек P_1 и P_2. Если массу тела t принять за 1, то масса тела T будет равна 7 единицам. В связи с этим центр тяжести полного куба, т. е. точка 0, будет делить отрезок P_1P_2 в отношении $\lambda = 7 : 1 = 7$, и потому

$$0 = \frac{\frac{1}{4} + 7x}{1+7}.$$

Следовательно, $x = -\frac{1}{28}$.

Аналогично найдем, что $y = -\frac{1}{28}$, $z = -\frac{1}{28}$.

1.40. Из проволочного каркаса кубической формы удалено одно ребро. Найти центр тяжести полученной фигуры.

Указание. См. задачу 1.39.

1.41. Найти центр тяжести проволоки, имеющей форму ломаной $ABCD$, где $|AB| = |BC| = |CD| = 1$, $(BC) \perp (AB)$ и (CD) перпендикулярна плоскости ABC.

§ 3. ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

Литература: [1], § 6, 7, 44, 45; [2], раздел 1, § 4, 9; раздел 2, § 4, 5.

В задачах этого параграфа координаты точек и векторов даны в прямоугольной декартовой системе координат.

1.42. Найти скалярное произведение векторов $\vec{u} = (1; -3; 4)$ и $\vec{v} = (4; 5; -2)$.

1.43. Скалярное произведение векторов $\vec{u} = (1; -2; 3)$ и $\vec{v} = (x; 4; 0)$ равно -10. Найти x.

1.44. Доказать, что векторы $\vec{u} = (1; 4; -2)$ и $\vec{v} = (2; -3; -5)$ взаимно перпендикулярны.

1.45. Вектор $\vec{u}$ перпендикулярен векторам $\vec{v}$ и $\vec{w}$. Доказать, что вектор $\vec{u}$ перпендикулярен любой линейной комбинации этих векторов.

Решение. Так как векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ перпендикулярны, то $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Аналогично $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$. Пусть $\vec{r} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{w}$. В силу свойств скалярного произведения ([2], раздел 1, § 9),

$$\vec{u} \cdot \vec{r} = \vec{u} \cdot (\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda\vec{u} \cdot \vec{v} + \mu\vec{u} \cdot \vec{w} = 0.$$

Отсюда следует, что векторы $\vec{u}$ и $\vec{r}$ перпендикулярны.

1.46. Используя понятие скалярного произведения векторов, доказать известную «теорему о двух перпендикулярах»: прямая, перпендикулярная двум непараллельным прямым плоскости, перпендикулярна каждой прямой этой плоскости.

Указание. Выбрать направляющие векторы данных прямых и представить направляющий вектор произвольной прямой плоскости в виде линейной комбинации выбранных векторов. Затем воспользоваться предыдущей задачей.

1.47. Доказать, что противоположные ребра правильной треугольной пирамиды попарно перпендикулярны.

Указание. Пусть $ABCD$ — правильная пирамида с вершиной A и пусть O—центр основания пирамиды. Представить вектор $\overrightarrow{AB}$ в виде линейной комбинации векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ и, воспользовавшись задачей 1.45, доказать, что $\overrightarrow{CD}$ перпендикулярен $\overrightarrow{AB}$.

1.48. Доказать, что для двух произвольных векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$ имеет место соотношение $(\vec{u}+\vec{v})^2+(\vec{u}-\vec{v})^2=2(\vec{u}^2+\vec{v}^2)$. Дать этому равенству геометрическое истолкование.

1.49. Доказать, что для любых четырех точек (пространства) A, B, C, D имеет место соотношение $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

Указание. Выразить данные векторы через векторы $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$.

1.50. Векторы $\vec{u}$ и $\vec{v}$ образуют угол $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{u}|=4$, $|\vec{v}|=7$, найти $|[\vec{u},\vec{v}]|$.

1.51. Найти $|[\vec{a},\vec{b}]|$, если $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=10$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-15$.

Указание. С помощью скалярного произведения найти сначала косинус угла между $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а затем, воспользовавшись определением векторного произведения, синус этого угла.

1.52. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=6$, $|\vec{b}|=4$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=12\sqrt{2}$.

1.53. Доказать, что для любых трех точек A, B, C справедливо соотношение

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC}]=[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}].$$

1.54. Доказать, что $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2+[\vec{a},\vec{b}]^2=\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$.

1.55. Найти векторное произведение векторов $\vec{u}=(4;-3;2)$, $\vec{v}=(-1;2;1)$.

1.56. $\vec{u}=(1;0;3)$, $\vec{v}=(4;0;z)$. При каком значении z вектор $[\vec{u},\vec{v}]$ коллинеарен оси Oy?

1.57. Даны векторы $\vec{a}=(0;1;2)$, $\vec{b}=(-2;-1;0)$. При каком значении z вектор $\vec{c}=(3;4;z)$ ортогонален вектору $[\vec{a},\vec{b}]$?

1.58. При каких значениях x и y вектор $\vec{c}=(x;y;24)$ коллинеарен вектору $[\vec{a},\vec{b}]$, где $\vec{a}=(1;-2;3)$, $\vec{b}=(-4;0;5)$?

1.59. Даны векторы $\vec{a} = (-4; 0; 3)$, $\vec{b} = (-4; 1; 1)$. Найти $[\vec{a}, \vec{b}]$, $[[\vec{a}, \vec{b}], [\vec{a}, \vec{b}]]$, $(\vec{a} \cdot \vec{b})[\vec{a}, \vec{b}]$, $|[\vec{a}, \vec{b}]|$.

1.60. Найти площадь треугольника ABC, если известны координаты его вершин A (1; 6; 4), B (3, 1, 0), C (4, —1, —6).

1.61. В прямоугольной декартовой системе координат заданы две точки A (1, 2, —3) и B (0, —4, 5). Найти на оси Ox такую точку C (x; 0; 0), чтобы площадь треугольника ABC была равна 1,5 квадратным единицам.

Решение. Как известно ([2], раздел 2, § 4), площадь треугольника ABC можно представить как $\frac{1}{2}\,|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]|$.

Так как $\overrightarrow{AB} = (-1; -6; 8)$ и $\overrightarrow{AC} = (x - 1; -2; 3)$, то вектор $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ имеет координаты:

$$X = \begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -2, \quad Y = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -1 & x-1 \end{vmatrix} = 8x - 5,$$

$$Z = \begin{vmatrix} -1 & x-1 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = 6x - 4.$$

Следовательно,

$$|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{4 + (8x-5)^2 + (6x-4)^2} = \\ = \sqrt{100x^2 - 128x + 45}.$$

Согласно условию,

$$\frac{1}{2}\sqrt{100x^2 - 128x + 45} = \frac{3}{2}.$$

Отсюда находим, что $x = \frac{1}{25}(16 \pm \sqrt{31})$, и, следовательно, задача имеет два решения: $\left(\frac{1}{25}(16 + \sqrt{31}); 0; 0\right)$ и $\left(\frac{1}{25}(16 - \sqrt{31}); 0; 0\right)$.

1.62. Найти длину высоты BD треугольника ABC, если известны его вершины A (—5; 6; —2), B (—1; 1; —2), C (—1; —3; 1).

1.63. Доказать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, удовлетворяющие условию $[\vec{a}, \vec{b}] + [\vec{b}, \vec{c}] + [\vec{c}, \vec{a}] = \vec{0}$, компланарны.

Указание. Необходимо скалярно умножить обе части данного равенства на один из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ или $\vec{c}$.

1.64. Векторы $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ образуют правую тройку, вектор $\vec{w}$ перпендикулярен векторам $\vec{u}$ и $\vec{v}$ и угол между векторами $\vec{u}$ и $\vec{v}$ равен 45°. Найти смешанное произведение $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, если $|\vec{u}| = 3$, $|\vec{v}| = 8$, $\vec{w} = \sqrt{2}$. Чему равно $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u})$?

1.65. Найти смешанное произведение векторов $\vec{u} = (1; 3; -1)$,

$\vec{v} = (-2; 0; 3)$, $\vec{w} = (4; 1; 0)$ и определить, правой или левой является тройка векторов $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. Какой тройкой является тройка векторов $\vec{v}, \vec{w}, -\vec{u}$?

Указание. Для вычисления смешанного произведения можно воспользоваться формулой (4), § 5, раздел 2 кн. [2].

1.66. Найти вектор $\vec{r} = [\vec{u}, \vec{v}] \cdot [(\vec{u}\vec{v}\vec{w})\,\vec{u}, \vec{w}]$, если $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{k}$, $\vec{w} = 3\vec{j} + \vec{k}$.

1.67. Даны векторы $\vec{u} = (1; 0; -4)$, $\vec{v} = (-1; 2; -3)$ и $\vec{w} = (-5; 6; 1)$. Найти $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $(\vec{v} \cdot \vec{w})\,\vec{u}$, $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$, $[\vec{u}, \vec{v}]$, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, $[\vec{u}, [\vec{v}, \vec{w}]]$, $[[\vec{u}, \vec{v}], \vec{w}]$.

1.68. Установить, компланарны ли векторы $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, если:

1) $\vec{u} = (4; -3; 2)$, $\vec{v} = (-2; 6; 8)$, $\vec{w} = (2; 3; 10)$;

2) $\vec{u} = (1; -2; 5)$, $\vec{v} = (-4; 3; 0)$, $\vec{w} = (3; -5; 8)$;

3) $\vec{u} = \vec{i}$, $\vec{v} = \vec{k}$, $\vec{w} = \overrightarrow{MN}$, где $\overrightarrow{OM} = (6; 3; 4)$, $\overrightarrow{ON} = (-2; 3; 1)$.

1.69. Дан тетраэдр $OABC$, A', B', C', O' — центры тяжести его граней OBC, OAC, OAB и ABC (рис. 7). Найти, какую часть объема тетраэдра $OABC$ составляет объем тетраэдра $O'A'B'C'$.

Решение. Обозначим $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$. Тогда объем V тетраэдра $OABC$ выражается формулой

$$V = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)\right|$$

([2], раздел 2, § 5 или [1], § 44.4). Аналогично объем v тетраэдра $O'A'B'C'$ равен:

$$v = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}, \overrightarrow{O'C'}\right)\right|.$$

Так как $\overrightarrow{O'A'} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OO'}$ и

$$\overrightarrow{OA'} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{3}, \quad \overrightarrow{OO'} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3},$$

то $\overrightarrow{O'A'} = -\dfrac{\vec{a}}{3}$.

Так же найдем, что $\overrightarrow{O'B'} = -\dfrac{\vec{b}}{3}$,

$$\overrightarrow{O'C'} = -\frac{\vec{c}}{3}.$$

Следовательно,

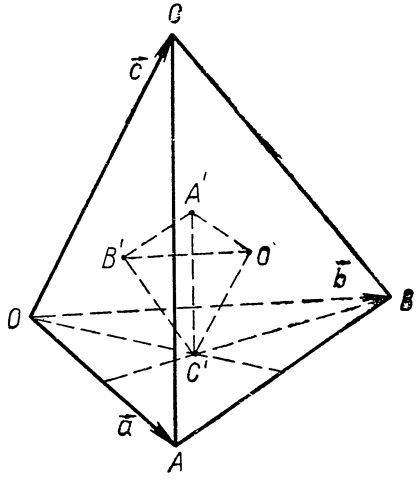

Рис. 7

$$v = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{27} \left| \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \right) \right| = \frac{1}{27} V.$$

1.70. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$. Найти, какую часть объема данного параллелепипеда составляет объем тетраэдра $AB'D'C$.

§ 4. ОСНОВНЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Литература: [1], § 7.2; § 42.5; § 44; [2], раздел 2, § 2, 4.

В задачах этого параграфа координаты точек и векторов даны в прямоугольной декартовой системе координат.

1.71. Найти расстояние между точками A (—5; 4; 3) и B (—4; 6; 5).

1.72. На оси Oz найти точки, удаленные от точки (0; 0; 1) на расстояние, равное 3.

1.73. Даны две точки A (1; 1; 0) и B (—2; 1; 0). Найти на оси Oz такую точку C, чтобы она была вершиной прямого угла ACB.

Решение. 1-*й способ*. Условие задачи будет выполнено тогда и только тогда, когда в треугольнике ABC

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2.$$

Положим, что C (0; 0; z). Тогда

$$|AC| = \sqrt{2 + z^2}, \ |BC| = \sqrt{5 + z^2}, \ |AB| = 3.$$

Из уравнения $2 + z^2 + 5 + z^2 = 9$ находим, что $z = \pm 1$.

Итак, задача имеет два решения: C_1 (0; 0; 1) и C_2 (0; 0; —1).

2-*й способ*. Точка C (0; 0; z) будет удовлетворять условию задачи тогда и только тогда, когда она будет принадлежать сфере, для которой отрезок AB служит диаметром. Центр этой сферы будет лежать в середине отрезка AB, т. е. в точке P $\left(-\frac{1}{2}; 1; 0\right)$. Радиус этой сферы будет равен $\frac{1}{2} |AB| = \frac{3}{2}$. Значит, требуемое условие будет выполнено, если расстояние PC будет равно $\frac{3}{2}$, т. е. если

$$\sqrt{\frac{1}{4} + 1 + z^2} = \frac{3}{2}.$$

Решая это уравнение, опять-таки получаем, что $z = \pm 1$.

3-*й способ*. Воспользуемся тем, что векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ должны быть ортогональными, т. е. тем, что их скалярное произведение должно обратиться в нуль. Так как $\overrightarrow{CA} = (1; 1; -z)$, $\overrightarrow{CB} = (-2; 1; -z)$, то $1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + (-z) \cdot (-z) = 0$, откуда получаем, что $z = \pm 1$.

1.74. Найти центр и радиус сферы, зная концы одного из ее диаметров: A (1; 2; 3) и A' (1; —2; 0).

1.75. Найти на оси Oy точку, равноудаленную от точек A (3; 0; 1) и B (—2; 4; 1).

1.76. Найти расстояние точки A (3; —4; 7) от оси Oz.

Указание. Следует показать, что расстояние от любой точки пространства A (x; y; z) до оси Oz равно расстоянию от A до точки A' (0; 0; z). Для этого достаточно показать, что $\overrightarrow{AA'} \cdot \vec{k} = 0$.

1.77. В плоскости Oxz найти точку, равноудаленную от трех данных точек: A (1; 1; 1), B (—1; 1; 0) и C (3; 1; —1).

1.78. Найти центр и радиус сферы, проходящей через четыре данные точки: A (0; 0; 0), B (0; 2; 0), C (1; 0; 0) и D (0; 0; 3).

1.79. Найти угол между векторами $\vec{a} = (-1; 1; 0)$ и $\vec{b} = (1; -2; 2)$.

Указание. См. [2], раздел 2, § 2.1.

1.80. Найти углы: 1) между вектором $\vec{v} = (2; -4; 4)$ и осями координат; 2) между вектором $\vec{v}$ и плоскостями координат.

Указание. См. [2], раздел 2, § 12.2.

1.81. Вектор образует с двумя осями координат углы по 60°. Какой угол образует он с третьей осью?

Указание. Следует воспользоваться тем, что сумма квадратов косинусов этих трех углов равна 1.

1.82. Найти угол φ между прямыми OA и OB, лежащими в плоскостях Oxy и Oxz и образующими с осью Ox соответственно углы α и β.

Указание. На прямых OA и OB отложите от начала координат единичные векторы $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$, определите координаты этих векторов. Тогда $\cos\varphi = \vec{e_1} \cdot \vec{e_2}$.

1.83. Найти углы, образованные диагональю куба с диагоналями граней этого куба, исходящими из той же вершины.

1.84. Дан трехгранный угол, все плоские углы которого прямые. Найти угол между любыми двумя биссектрисами плоских углов.

1.85. Даны вершины треугольника A (—9; —3; 0), B (—4; 2; 1) и C (—2; 8; —1). Найти угол между медианой AD и стороной BC.

1.86. Найти площадь треугольника ABC, зная его вершины A (1; 2; 0), B (3; 0; —3), C (5; 2; 6).

Указание. См. [2], раздел 2, § 4.2.

1.87. Даны три точки A (0; 0; 0), B (1; 1; 1) и C (2; —3; 4). Найти расстояние точки C от прямой AB.

Указание. Искомое расстояние равно длине высоты CD треугольника ABC, опущенной из вершины C. Для нахождения $|CD|$ необходимо определить площадь треугольника ABC и длину отрезка AB.

1.88. Найти полную поверхность тетраэдра $ABCD$, зная его вершины: A (1; 0; 0), B (0; 1; 0), C (0; 0; 1), D (1; 1; 1).

1.89. Найти полную поверхность параллелепипеда, построенного на векторах: $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (-5; 0; 4)$, $\vec{c} = (-1; 1; 1)$.

1.90. Зная вершину A (1; 1; 1) квадрата $ABCD$, его центр O (0; 0; 0) и вектор $\vec{a} = (2; -1; -1)$, перпендикулярный плоскости квадрата, найти остальные его вершины.

Решение. Так как вектор $\overrightarrow{OD}$ перпендикулярен как вектору $\overrightarrow{OA}$, так и вектору $\vec{a}$, то $\overrightarrow{OD}$ коллинеарен вектору $[\overrightarrow{OA}, \vec{a}]$. Кроме того, $|\overrightarrow{OD}| = |\overrightarrow{OA}|$ и $[|\overrightarrow{OA}, \vec{a}|] = |\overrightarrow{OA}|\,|\vec{a}|$. Следовательно,

$$\overrightarrow{OD} = \pm \frac{[\overrightarrow{OA}, \vec{a}]}{|\vec{a}|}.$$

Зная координаты вектора $\overrightarrow{OA} = (1; 1; 1)$, определим произведение

$$[\overrightarrow{OA}, \vec{a}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (0;\ 3;\ -3).$$

Так как $|\vec{a}| = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$, то $\overrightarrow{OD} = \left(\pm 0; \pm\sqrt{\frac{3}{2}}; \mp\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

Поэтому вершины D и B квадрата соответственно имеют координаты $\left(0; \sqrt{\frac{3}{2}}; -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $\left(0; -\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. Так как точка C симметрична точке A относительно начала координат O, то C (—1; —1; —1).

1.91. Даны точки A (7; 2; 4), B (4; —4; 2), C (6; —7; 8) и D (9; —1; 10). Доказать, что $ABCD$ — квадрат. Найти вершины куба, для которого квадрат $ABCD$ служит основанием.

Указание. Чтобы убедиться в том, что $ABCD$ — квадрат, достаточно проверить, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $|AB| = |AD|$ и $\overrightarrow{AB}$ перпендикулярен $\overrightarrow{AD}$.

Кроме того, можно проверить, что $\overrightarrow{AA'} = \frac{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}]}{|\overrightarrow{AB}|}$ (см. решение предыдущей задачи). Зная вектор $\overrightarrow{AA'}$, можно найти точку A' и, следовательно, остальные вершины куба.

1.92. Найти объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a} = (-2; 2; 1)$, $\vec{b} = (3; -2; 5)$, $\vec{c} = (7; -7; 21)$.

1.93. Найти объем параллелепипеда, определенного в задаче 1.89.

1.94. Даны вершины тетраэдра A (0; 0; 0), B (1; —3; 0), C (1; 2; 0), D (0; 0; 5). Найти длину высоты этого тетраэдра, проведенной из вершины A.

Решение. Согласно [1], § 42.4, $\overrightarrow{AB} = (1; -3; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (1; 2; 0)$, $\overrightarrow{AD} = (0, 0, 5)$. По формуле (5), приведенной в [1], § 44 и формуле (2) того же параграфа (или § 6 раздела 2 из [2]) находим объем тетраэдра $ABCD$:

$$V = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})| = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 4\frac{1}{6}.$$

Высоту $|AA'|$ тетраэдра $ABCD$ можно получить, поделив утроенный объем этого тетраэдра на площадь треугольника BCD. Площадь треугольника BCD согласно [1], § 45.1, можно найти, вычислив $\frac{1}{2}|[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}]|$. Но $\overrightarrow{BC} = (0; 5; 0)$, $\overrightarrow{BD} = (-1; 3; 5)$. Следовательно,

$$[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 5 & 0 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 25\vec{i} + 5\vec{k}.$$

По формуле (10) § 7.3 из [1] найдем, что

$$|[\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}]| = \sqrt{25^2 + 5^2} = 5\sqrt{26},$$

а следовательно, площадь S треугольника BCD равна $\frac{5}{2}\sqrt{26}$. Искомая высота

$$h = \frac{3V}{S} = \frac{3 \cdot 25 \cdot 2}{6 \cdot 5\sqrt{26}} = \frac{5\sqrt{26}}{26}.$$

1.95. Найти объем тетраэдра $ABCD$, зная координаты его вершин A (3; 7; 2), B (—1; 2; 5), C (4; —1; 10), D (6; 3; 5).

1.96. Найти объем тетраэдра, определенного в задаче 1.88.

1.97. Найти длины высот тетраэдра $ABCD$, зная координаты его вершины A (3; 2; —1), B (4; 1; 3), C (2; —1; 1), D (5; 5; 4).

1.98. Найти объем, полную поверхность и высоту призмы $ABCA'B'C'$, зная координаты вершин A (1; 5; —2), B (4; 1; 1), C (—3; 0; 1), A' (2; —1; 3).

§ 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ИСТОЛКОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Литература: [2], раздел 2, § 1, 6.

В задачах этого параграфа система координат предполагается прямоугольной декартовой.

1.99. Найти множества точек пространства, определяемые следующими уравнениями:

а) $x + 3 = 0$;
б) $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$;
в) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$;
г) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$;
д) $x^2 + y^2 = 0$.

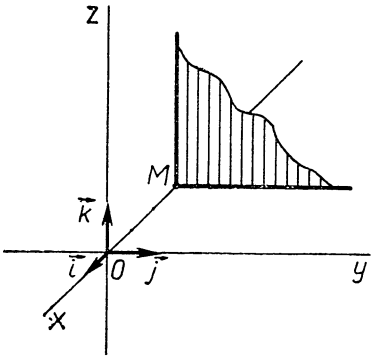

Рис. 8

Решение. Уравнение а) определяет плоскость, проходящую через точку M_0 (—3; 0; 0) параллельно координатной плоскости Oyz (рис. 8). Действительно, пусть точка M (—3; y; z) —произвольная точка заданного множества. Рассмотрим точку M_1 (0; y; z), принадлежащую координатной плоскости Oyz (см. [2], раздел 2, § 1.2). Обозначим через $\vec{r}_0$ вектор с координатами (—3; 0; 0). Тогда имеет место равенство

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_1 + \vec{r}_0,$$

которое показывает, что каждая точка M получена из соответствующей точки M_1 параллельным переносом на вектор $\vec{r}_0$. Очевидно, что точка M_1 пробегает всю координатную плоскость Oyz.

Уравнение б) определяет пустое множество точек, потому что при любых действительных значениях x, y, z сумма их квадратов неотрицательна.

Уравнение в) определяет единственную точку, именно точку O (0; 0; 0), потому что соотношение $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ равносильно условиям: $x = y = z = 0$.

Уравнение г) определяет сферу, центр которой находится в начале координат, а радиус равен 1. Действительно, расстояние точки M (x; y; z) от начала координат, т. е. от точки O (0; 0; 0), определяется формулой $|OM| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Исходное соотношение $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ равносильно соотношению $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$. Так как $|OM| = 1$, то уравнение г) определяет множество точек, удаленных от начала координат на расстояние 1.

Уравнение д) равносильно соотношению $x = y = 0$. Третья координата z может быть при этом произвольной. Поэтому данное уравнение определяет множество всех точек, лежащих на оси Oz.

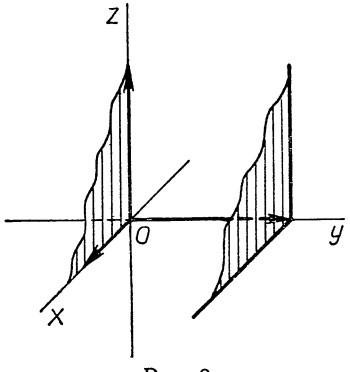

Рис. 9

1.100. Найти множество точек, определяемое уравнением

$$y^2 - y = 0.$$

Решение. Переписав данное уравнение в виде $y(y - 1) = 0$, получим, что оно удовлетворяется тогда и только тогда, когда $y = 0$ или $y - 1 = 0$. Уравнение $y = 0$ определяет координатную плоскость Oxz, уравнение $y - 1 = 0$ определяет плос-

кость, параллельную плоскости Oxz и проходящую через точку M_0 (0; 1; 0) (см. задачу 1.99, а). Следовательно, искомое множество является объединением указанных параллельных плоскостей (рис. 9).

1.101. Найти множество точек, определяемое уравнением

$$\frac{x}{|x|}+\frac{y}{|y|}+\frac{z}{|z|}=3.$$

Решение. Ни x, ни y, ни z не могут равняться нулю, так как деление на нуль не определено. При любых положительных значениях координат данное уравнение удовлетворяется, потому что модуль положительного числа равен этому числу и, значит, отношение этих чисел равно 1. Если хотя бы одно из чисел x, y, z отрицательно, то отношение такого числа к его абсолютной величине равно —1, и указанная сумма отношений не равна 3.

Итак, данное уравнение определяет множество точек, расположенных во внутренней области первого координатного октанта.

1.102. Найти множество точек, определяемое уравнением $x^2+y^2=1$.

Решение. Уравнение $x^2+y^2=1$ определяет в прямоугольной декартовой системе координат поверхность прямого кругового цилиндра, для которого направляющей линией служит окружность, лежащая в плоскости Oxy, с центром в начале координат радиуса 1, а образующие параллельны оси Oz.

Действительно, ортогональной проекцией произвольной точки M (x; y; z) на плоскость Oxy является точка $M'(x; y; 0)$. Точка M принадлежит цилиндру в том и только том случае, когда точка M лежит на указанной окружности, т. е. когда x и y удовлетворяют уравнению этой окружности в соответствующей системе координат на плоскости Oxy.

1.103. Исследовать особенности фигуры F, определяемой уравнением $F(x, y, z)=0$, где $F(x, y, z)$ — однородная функция*.

Решение. Покажем, что фигура F содержит начало координат. Действительно, по определению

$$F(0, 0, 0)=\lambda^n F(0, 0, 0),$$

откуда следует, что

$$(\lambda^n-1)\,F(0, 0, 0)=0.$$

Но так как λ может принимать любые значения, то последнее равенство должно выполняться и при $\lambda^n\neq 1$. Отсюда следует, что $F(0, 0, 0)=0$, что и требовалось доказать.

Допустим, что существует отличная от начала координат точка $M(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащая фигуре F. Тогда $F(x_0, y_0, z_0)=0$, а значит, и

$$F(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0)=\lambda^n F(x_0, y_0, z_0)=0.$$

---

* Функция $F(x, y, z)$ называется однородной функцией степени n, если при любых значениях x, y, z, λ выполняется равенство $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z)=\lambda^n F(x, y, z)$.

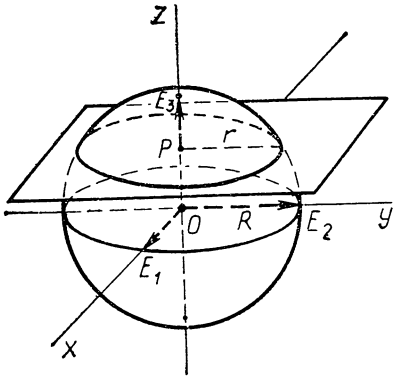

Рис. 10

Следовательно, точка $M'(\lambda x_0; \lambda y_0; \lambda z_0) \in F$ при любом значении λ. Множество точек M' при всевозможных значениях λ образует прямую OM, потому что $\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM}$. Таким образом, фигура F состоит из прямых, проходящих через одну точку 0 (0, 0, 0). Такая фигура называется конической поверхностью с вершиной в начале координат.

1.104. Найти множество точек, определяемое уравнением

$$y^2 + z^2 - 2x^2 = 0.$$

Указание. Функция $F(x, y, z) = y^2 + z^2 - 2x^2$ является однородной функцией степени 2. Использовать решение задачи 1.103.

1.105. Найти множества точек пространства, определяемые следующими уравнениями:

а) $x = 0$;
б) $x - 1 = 0$;
в) $y + 5 = 0$;
г) $x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 0$;
д) $x^2 + y^2 = 0$;
е) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 6 = 0$;
ж) $y^2 - 2x = 0$;
з) $xyz = 0$;
и) $(y^2 - 5y + 6 = 0$;
к) $y^2 + z^2 = 4$;
л) $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 16$;
м) $x^3 + xy^2 + xz^2 - x^2 - y^2 - z^2 - x + 1 = 0$;
н) $x^2 - 3x = 0$;
о) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

Изобразить соответствующие фигуры.

1.106. Указать несколько точек, принадлежащих фигуре, определяемой уравнением $x^2 - 2x - y - z = 1$.
Назвать несколько точек, не принадлежащих этой фигуре.

1.107. Найти, в каких точках фигура, определяемая уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6z - 16 = 0$, пересекается с осями координат.

1.108. Дать геометрическое истолкование системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0, \\ 2z - 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. Координаты некоторой точки удовлетворяют системе уравнений тогда и только тогда, когда эта точка принадлежит пересечению поверхностей, определяемых уравнениями системы. В рассматриваемом случае первое уравнение определяет сферу радиуса 1 с центром в начале координат (рис. 10), второе — плоскость, параллельную плоскости Oxy (см. задачу 1.99, а). Пересечением

этих поверхностей является окружность, центр которой, в силу перпендикулярности плоскости $z = \frac{1}{2}$ и оси Oz, имеет координаты $\left(0;\ 0;\ \frac{1}{2}\right)$, а радиус равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (поскольку $z = \frac{1}{2}$, координаты x и y любой точки этой окружности удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$).

1.109. Изобразить линии, по которым пересекается с координатными плоскостями фигура, определяемая уравнением $2x^2 + y^2 - 3z^2 - 6 = 0$.

1.110. Выяснить, какие фигуры определяются следующими системами уравнений:

а) $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 5 = 0, \\ z + 4 = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 2y - 1 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ y - 3 = 0; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2 - z = 0, \\ y - 3 = 0. \end{cases}$

Изобразить эти фигуры.

1.111. Геометрически истолковать неравенство $|y| \leqslant 1$.

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} y \leqslant 1, \\ y \geqslant -1. \end{cases}$$

Первое неравенство системы задает замкнутое полупространство, ограниченное плоскостью $y = 1$ и содержащее начало координат (см. [2], раздел 2, § 6). Второе неравенство системы задает замкнутое полупространство, ограниченное плоскостью $y = -1$ и содержащее начало координат. Поэтому система неравенств определяет пересечение этих полупространств, т. е. трехмерную полосу, ограниченную параллельными плоскостями $y = 1$ и $y = -1$ (рис. 11).

1.112. Геометрически истолковать систему неравенств

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 < 1, \\ z > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Решение. Первое неравенство системы показывает, что искомые точки удалены от начала координат на расстояние, меньшее 1, и, значит, принадлежат внутренности сферы радиуса 1 с центром в начале координат. Второе неравенство системы задает открытое полупространство, ограниченное плоскостью $z = \frac{1}{2}$ и не содержащее

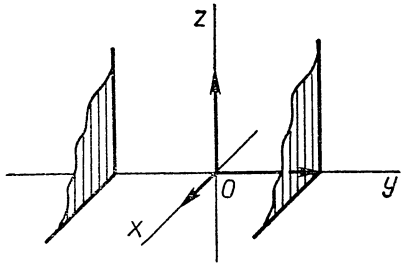

Рис. 11

начала координат. Следовательно, заданная система неравенств определяет внутреннюю область шарового сегмента (см. рис. 10).

1.113. Геометрически истолковать следующие неравенства:

а) $x > 0$; б) $y \leqslant 1$;
в) $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 1$; г) $x^2 + y^2 < 1$.

1.114. Геометрически истолковать следующие системы неравенств и уравнений:

а) $\begin{cases} |x| \leqslant 2, \\ |y| \leqslant 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 < 1, \\ x > 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 \leqslant z \leqslant 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 < 1, \\ z = 1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 + y^2 \geqslant 1, \\ x = 1; \end{cases}$ е) $\begin{cases} -1 \leqslant z \leqslant 1, \\ y = 1. \end{cases}$

1.115. Составить уравнение сферы, проходящей через четыре данные точки O (0; 0; 0), A (1; 0; 0), B (0; 1; 0), C (1; 1; 1).

Решение. Точка M (x; y; z) принадлежит сфере с центром P (x_0; y_0; z_0) и радиусом r тогда и только тогда, когда $|PM| = r$, т. е. когда

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Этому уравнению должны удовлетворять, в частности, координаты заданных точек O, A, B, C. Подставляя эти координаты в уравнение искомой окружности, получим систему уравнений относительно x_0, y_0, z_0 и r:

$$\begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = r^2, \\ (x_0 - 1)^2 + y_0^2 + z_0^2 = r^2, \\ x_0^2 + (y_0 - 1)^2 + z_0^2 = r^2, \\ x_0^2 + y_0^2 + (z_0 - 1)^2 = r^2, \end{cases}$$

решая которую получим:

$$x_0 = y_0 = z_0 = \frac{1}{2},$$

$$r = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, уравнение искомой сферы имеет вид:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}.$$

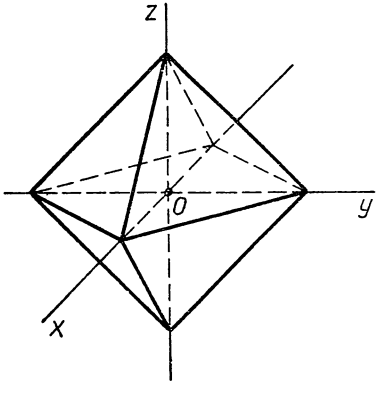

Рис. 12

1.116. Составить уравнение поверхности правильного октаэдра, оси которого совпадают с осями координат (рис. 12).

Решение. Рассмотрим сначала ту грань октаэдра, которая расположена в первом октанте. Пусть $M(x; y; z)$ — произвольная точка этой грани ABC. Соединив точку M с вершинами A, B и C и с началом координат O, разобъем тетраэдр $OABC$ на три треугольные пирамиды: $MOAC$, $MOBC$ и $MOAB$, основаниями которых будем считать соответственно треугольники OAC, OBC и OAB. Сумма объемов этих пирамид равна объему тетраэдра $OABC$.

Обозначим площади каждого из этих треугольников через s, а расстояния $|OA| = |OB| = |OC|$ через a. Тогда, с одной стороны, сумма объемов рассматриваемых пирамид будет равна:

$$\frac{1}{3}sy + \frac{1}{3}sx + \frac{1}{3}sz = \frac{1}{3}(x + y + z),$$

а с другой — объем всего тетраэдра $OABC$ (если принять за его основание $\triangle AOB$, площадь которого равна s, а за высоту — расстояние $|OC| = a$) будет равен $\frac{1}{3}sa$.

Приравнивая эти значения объемов, получаем, что для любой точки $M(x; y; z)$ грани ABC при $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$

$$x + y + z = a.$$

При составлении уравнений поверхности для других октантов, где координаты точек могут иметь и отрицательные значения, ход рассуждений остается тем же при условии использования не самих координат, а их абсолютных величин.

В результате получаем, что каждая точка $M(x; y; z)$ октаэдра удовлетворяет уравнению $|x| + |y| + |z| = a$, каждое решение которого, в свою очередь, определяет точку октаэдра. Следовательно, это и есть уравнение поверхности.

1.117. Составить уравнение объединения всех координатных плоскостей.

1.118. Составить уравнение объединения всех осей координат.

1.119. Составить уравнение множества точек, для которых сумма квадратов расстояний от точек $A(0; 0; 0)$, $B(1; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$ и $D(0; 0; 1)$ равна 16. Какую фигуру определяет искомое уравнение?

Решение. Пусть $M(x; y; z)$ — произвольная точка искомой фигуры. Характеристическое свойство искомой фигуры состоит по условию в том , что

$$|AM|^2 + |BM|^2 + |CM|^2 + |DM|^2 = 16.$$

Переходя к координатам, получаем:

$$x^2 + y^2 + z^2 + (x - 1)^2 + y^2 + z^2 + x^2 + \\ + (y - 1)^2 + z^2 + x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 16.$$

Приводя подобные члены, получим уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 4.$$

Чтобы выяснить геометрический смысл этого уравнения, представим его в следующей форме:

$$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+\left(z-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{67}{16}.$$

Видим, что искомая фигура является сферой с центром в точке с координатами $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right)$ и радиусом $\frac{1}{4}\sqrt{67}$.

1.120. Составить уравнение множества точек, для которых модуль разности расстояний от точек A_1 $(-a; 0; 0)$ и A_2 $(a; 0; 0)$ есть постоянная величина, равная $2b$.

1.121. Составить уравнение поверхности, в которую преобразуется сфера $x^2+y^2+z^2=r^2$ при сжатии по направлению оси Oz с коэффициентом сжатия $k=\frac{1}{2}$.

Указание. См. [2], раздел 2, § 19.

1.122. Составить неравенство, определяющее внутренность сферы единичного радиуса с центром в точке P (1; 2; 3).

1.123. Составить систему неравенств, определяющую множество внутренних точек шара единичного радиуса с центром в начале координат, абсциссы которых неотрицательны.

1.124. Составить систему уравнений, определяющую эллипс, центр которого совпадает с началом координат, а оси лежат соответственно на прямых Ox и Oy.

1.125. Составить систему уравнений траектории точки, которая движется в плоскости Oxz так, что остается равноудаленной от начала координат и точки A (5; —3; 1).

1.126. Какой фигурой является множество точек, для которых разность квадратов расстояний от двух данных точек A и B имеет постоянное значение c?

Решение. Выберем точку A за начало координат и примем прямую AB за ось абсцисс. Тогда точка B будет иметь координаты $(b, 0; 0)$.

Пусть теперь M $(x; y; z)$ — произвольная точка искомого множества. Тогда

$$|MA|^2-|MB|^2=c$$

или

$$x^2+y^2+z^2-(x-b)^2-y^2-z^2=c.$$

Откуда:

$$x=\frac{c+b^2}{2b}.$$

Следовательно, искомая фигура является плоскостью, перпендикулярной прямой AB и отстоящей от точки A на расстояние $\left|\frac{c+b^2}{2b}\right|$.

1.127. Какой фигурой является множество точек M, равноудаленных от двух данных точек A и B?

1.128. Доказать, что множество точек, для которых сумма квадратов расстояний от двух данных точек имеет постоянное значение, есть сфера, точка или пустое множество.

Указание. Примите одну из данных точек за начало координат и проведите одну из осей координат через другую данную точку.

1.129. Какой фигурой является множество середин всех отрезков, соединяющих попарно всевозможные точки, лежащие соответственно в двух параллельных плоскостях?

Указание. Одну из данных плоскостей примите за координатную.

1.130. Какой фигурой является множество точек, равноудаленных от данной точки A и от данной прямой p, если: а) $A \in p$; б) $A \overline{\in} p$?

Указание. Примите прямую p за одну из осей координат. Другую ось координат проведите через точку A.

ГЛАВА II

ПЛОСКОСТИ И ПРЯМЫЕ

§ 6. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ

Литература: [1], § 47—49; [2], раздел 2, § 7, 8, 15.

2.1. Выяснить, какие из точек A (4; 0; 0), B (1; 1; 1), C (1; 2; 3), D (6; 1; 0) принадлежат плоскости

$$x - 2y + 3z - 4 = 0.$$

Указание. Для ответа на вопрос задачи необходимо проверить, обращается ли в верное числовое равенство уравнение плоскости после подстановки в него координат соответствующей точки.

2.2. На каждой из следующих плоскостей найти по три различные точки:

а) $x - 2y + 3z - 6 = 0$; б) $x - 2y + 3z = 0$;
в) $x - 2y - 6 = 0$; г) $x - 6 = 0$.

Указание. Задача решается подбором. Например, при решении уравнения а) значения x и y можно выбрать произвольно, а затем уже с помощью уравнения найти соответствующие значения z.

2.3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A (0; 2; 3) параллельно векторам $\vec{p}_1 = (1; 0; 4)$ и $\vec{p}_2 = (2; 1; 3)$.

Указание. Воспользуйтесь уравнением плоскости, заданной точкой и направляющими векторами ([1], § 47.3 или [2], раздел 2, § 7.2).

2.4. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A $(x_1; y_1; z_1)$ и B $(x_2; y_2; z_2)$ параллельно оси Oy.

Указание. Искомая плоскость должна проходить через точку A, параллельно вектору $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$ и направляющему вектору $\vec{e}_2 = (0; 1; 0)$ оси Oy. Если $\overrightarrow{AB}$ и $\vec{e}_2$ коллинеарны, то задача имеет бесконечно много решений.

2.5. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Ox параллельно вектору $\vec{p} = (p_1; p_2; p_3)$.

2.6. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A (1; —2; 3) и B (4; 5; —6) параллельно оси Ox.

2.7. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A (1; —3; 5), B (2; 1; —3) и C (—4; 0; 1).

Указание. Воспользуйтесь уравнением плоскости, проходящей через три данные точки ([1], § 47.4, [2], раздел 2, § 7.3).

2.8. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку (1; —1; 2).

2.9. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной вектору $\vec{n} = (1; 1; 1)$. Система координат — прямоугольная декартова.

Указание. Воспользуйтесь уравнением плоскости, заданной точкой и нормальным вектором ([1], § 49.3; [2], раздел 2, § 8.1).

2.10. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AB, зная, что A (1; 3; —2), B (7; —4; 4). Система координат прямоугольная декартова.

Указание. Вектор $\overrightarrow{AB}$ является нормальным вектором искомой плоскости.

2.11. Написать уравнение плоскости в прямоугольной декартовой системе координат, зная, что точка P (2; —3; 1) служит основанием перпендикуляра, проведенного к плоскости из начала координат.

2.12. Изобразить плоскость, заданную уравнением $2x - y - 3z = 0$.

Решение. Так как свободный член данного уравнения равен нулю, то данная плоскость проходит через начало координат.

Такую плоскость удобно изобразить посредством двух ее следов, т. е. посредством двух линий пересечения этой плоскости с какими-либо двумя координатными плоскостями, например с плоскостями Oxy и Oyz.

Для точек, лежащих в плоскости Oxy, $z = 0$ так, что $2x - y = 0$. Это прямая, проходящая через начало координат, так что для ее построения достаточно найти на ней еще одну какую-либо точку. Полагая, например, $x = 1$, получим $y = 2$. Строим в плоскости Oxy точку A (1; 2; 0). Прямая OA является следом данной плоскости на плоскости Oxy. (Чтобы найти ее след на плоскости Oyz, положим $x = 0$.) Получим $y - 3z = 0$. Полагая $z = 1$, найдем $y = 3$, так что плоскость проходит через точку B (0; 3; 1). Прямая OB представляет след данной плоскости на плоскости Oyz (рис. 13).

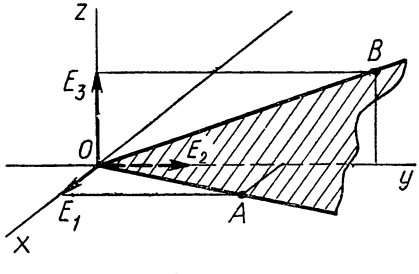

Рис. 13

2.13. Изобразить плоскости, заданные следующими уравнениями:

$$x - 2y + 3z - 6 = 0,\ y - 2z + 3 = 0,\ 2x + 3z = 0.$$

2.14. Указать особенности

расположения плоскостей, заданных следующими уравнениями:

а) $3x - 5z + 1 = 0$; б) $9y - 2 = 0$;
в) $8y - 3z = 0$; г) $2x + 3y - 5z = 0$.

2.15. Доказать, что четыре точки $A_0(x_0; y_0; z_0)$, $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_3(x_3; y_3; z_3)$ принадлежат одной плоскости тогда и только тогда, когда определитель

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Решение. Данные точки принадлежат одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{A_0A_1}$, $\overrightarrow{A_0A_2}$, $\overrightarrow{A_0A_3}$ компланарны. Указанное в условии задачи равенство как раз и является условием компланарности этих векторов.

2.16. Проверить, какие из следующих четверок точек лежат в одной плоскости:

а) $A_0(1; 2; -1)$, $A_1(0; 7; 7)$, $A_2(-2; 0; 6)$, $A_3(-2; -6; 0)$;
б) $B_0(0; 0; 0)$, $B_1(-4; 0; 0)$, $B_2(0; -3; 2)$, $B_3(1; 5; 0)$;
в) $C_0(0; -6; -3)$, $C_1(10; 8; 9)$, $C_2(1; 3; 2)$, $C_3(-5; 7; 1)$.

2.17. При каком значении z точки $O(0; 0; 0)$, $A(1; -5; 3)$, $B(2; 4; 4)$ и $C(1; -1; z)$ лежат в одной плоскости?

2.18. Доказать, что вектор $\vec{v} = (0; 6; 4)$ параллелен плоскости, определяемой уравнением $x + 2y - 3z + 1 = 0$.

Указание. Воспользуйтесь условием параллельности вектора и плоскости ([1], § 47.8; [2], раздел 2, § 8.1).

2.19. Даны две точки $A(2; 3; 0)$ и $B(1; -1; -1)$. Подобрать какую-либо третью точку C так, чтобы плоскость ABC была параллельна оси Oz.

2.20. Составить параметрические уравнения плоскости

$$3x + 2y - z + 4 = 0.$$

Решение. *1-й способ.* Любые две из трех переменных x, y, z можно принять за независимые параметры. Положив, например, $x = t_1$, $y = t_2$, из уравнения плоскости найдем $z = 3t_1 + 2t_2 + 4$. Искомые параметрические уравнения можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} x = t_1, \\ y = t_2, \\ z = 4 + 3t_1 + 2t_2. \end{cases}$$

2-й способ. Найдем какую-либо точку на плоскости, например точку $M_0(-2; 0; -2)$. Затем найдем пару неколлинеарных векторов, параллельных данной плоскости. Для этого запишем условие параллельности вектора и плоскости

$$3p_1 + 2p_2 - p_3 = 0.$$

Такими векторами являются, например, векторы $\vec{l} = (2; -3; 0)$, $\vec{m} = (1; 0; 3)$.

Зная точку M_0 и два направляющих вектора $\vec{l}$ и $\vec{m}$, составляем параметрические уравнения заданной плоскости:

$$\begin{cases} x = -2 + 2t_1 + t_2, \\ y = -3t_1, \\ z = -2 + 3t_2 \end{cases}$$

(см. [2], раздел 2, § 7.1).

2.21. Составить параметрические уравнения следующих плоскостей:

а) $2x - y + 3z + 1 = 0$; б) $x - 9y - 5z + 2 = 0$;
в) $3x + 3y - z - 4 = 0$.

2.22. Составить общее уравнение плоскости, заданной параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 3t_1 - 2t_2, \\ y = 4 + t_1 + t_2, \\ z = 1 + t_1. \end{cases}$$

Решение. Для решения задачи надо исключить параметры t_1 и t_2. Это можно сделать, например, следующим образом: так как из последнего уравнения $t_1 = z - 1$, то

$$\begin{cases} x = 3z - 2t_2 - 3, \\ y = z + t_2 + 3. \end{cases}$$

Исключая из полученной системы параметр t_2, получим:

$$x + 2y = 5z + 3$$

или

$$x + 2y - 5z - 3 = 0.$$

Последнее уравнение есть общее уравнение заданной плоскости.

2.23. Составить общие уравнения следующих плоскостей, заданных своими параметрическими уравнениями:

а) $\begin{cases} x = -1 + 2t_1 - 3t_2, \\ y = 2 + 4t_1 + 5t_2, \\ z = -6t_1 + 10t_2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 4 + t_1 - 2t_2, \\ y = -1 + 5t_1 + 5t_2, \\ z = 5 - 3t_1 - t_2. \end{cases}$

§ 7. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ

Литература: [1], § 47, 48; [2], раздел 2, § 7, 8, 9.

2.24. Выяснить взаимное расположение следующих плоскостей:

а) $3x - 2y + 7z = 0$ и $-6x + 4y - 14z - 2 = 0$;
б) $-x + 10y - 2z + 6 = 0$ и $3x - 30y + 6z - 18 = 0$;
в) $x - 2y + 4z - 3 = 0$ и $2x + y - 4z + 3 = 0$;
г) $3x + 5y + z - 5 = 0$ и $8x + 7y + 4z - 1 = 0$.

Указание. Воспользуйтесь результатами § 9.1 раздела 2 из [2].

2.25. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $P(x_0; y_0; z_0)$ и параллельной данной плоскости

$$A_0x + B_0y + C_0z + D_0 = 0.$$

Решение. Уравнение любой плоскости, проходящей через точку P, можно записать в виде:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Коэффициенты данной и искомой плоскостей должны быть пропорциональны. Следовательно, можно положить $A = A_0$, $B = B_0$, $C = C_0$ и записать уравнение искомой плоскости в виде:

$$A_0(x - x_0) + B_0(y - y_0) + C_0(z - z_0) = 0$$

или

$$A_0x + B_0y + C_0z - (A_0x_0 + B_0y_0 + C_0z_0) = 0.$$

2.26. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(3; -5; 1)$ и параллельной плоскости, определяемой уравнением $x - 2y + 4z = 0$.

2.27. Даны уравнения плоскостей трех граней параллелепипеда: $2x + 3y + 4z - 12 = 0$, $x + 3y - 6 = 0$ и $z + 5 = 0$. Известна одна из вершин параллелепипеда $A(6; -5; 1)$. Составить уравнения плоскостей остальных трех граней.

2.28. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат и через линию пересечения двух плоскостей, заданных уравнениями $x + y - 5 = 0$ и $x - 2z + 1 = 0$.

Решение. Искомая плоскость принадлежит пучку плоскостей, проходящих через линию пересечения данных плоскостей. Уравнение этого пучка плоскостей имеет вид:

$$\alpha(x + y - 5) + \beta(x - 2z + 1) = 0,$$

причем коэффициенты α и β определены с точностью до пропорциональности. Так как начало координат должно принадлежать искомой плоскости, то

$$-5\alpha + \beta = 0.$$

Положим, например, $\alpha = 1$, $\beta = 5$. Тогда уравнение

$$6x + y - 10z = 0$$

есть уравнение искомой плоскости.

2.29. Составить уравнение пучка плоскостей, осью которого служит линия пересечения плоскостей, заданных уравнениями $x - y - z - 1 = 0$ и $2x + 3y + 4z - 5 = 0$. Написать уравнения нескольких плоскостей, принадлежащих этому пучку.

2.30. Составить уравнение пучка плоскостей, проходящих через ось Ox.

2.31. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (3; 1; —2) и линию пересечения плоскости $3x - 2y - 5z + 1 = 0$ с координатной плоскостью Oyz.

2.32. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 $(x_0; y_0; z_0)$ и линию пересечения плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

2.33. Доказать, что плоскость, определяемая уравнением $11x - 2y + 5z - 2 = 0$, проходит через линию пересечения плоскостей, заданных уравнениями $x - 2y + 3z = 0$ и $5x + z - 1 = 0$.

Решение. 1-*й способ*. Найдем ранг r матрицы коэффициентов при неизвестных уравнений трех данных плоскостей:

$$\begin{pmatrix} 11 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Этот ранг равен 2.

Так же найдем, что ранг r' матрицы

$$\begin{pmatrix} 11 & -2 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

равен 2.

Согласно [2], раздел 2, § 9.2, равенство $r = r' = 2$ равносильно принадлежности трех данных плоскостей одному пучку.

2-*й способ*. Согласно [2], раздел 2, § 14, плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ принадлежит пучку, определяемому плоскостями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

тогда и только тогда, когда многочлен $Ax + By + Cz + D$ можно представить в виде:

$$\alpha (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta (A_2x + B_2y + C_2z + D_2).$$

В нашем случае это условие приводит к равенству

$$\alpha (x - 2y + 3z) + \beta (5x + z - 1) = 11x - 2y + 5z - 2,$$

или

$$(\alpha + 5\beta)x - 2\alpha y + (3\alpha + \beta)z - \beta = 11x - 2y + 5z - 2.$$

Приравняв коэффициенты левой и правой частей этого равенства, получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + 5\beta = 11, \\ -2\alpha = -2, \\ 3\alpha + \beta = 5, \\ \beta = 2. \end{cases}$$

Эта система совместна и имеет единственное решение: $\alpha = 1$, $\beta = 2$. Следовательно, плоскость $11x - 2y + 5z - 2 = 0$ проходит через линию пересечения двух данных плоскостей.

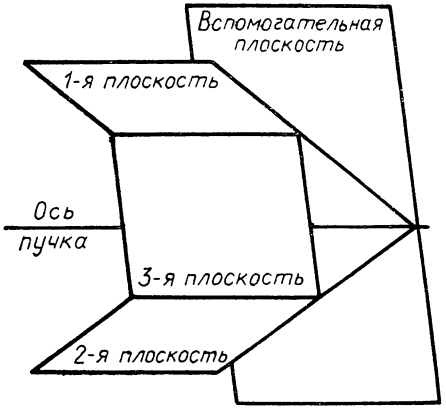

Рис. 14

2.34. При каких значениях A и D плоскости, определяемые уравнениями $2x + y - z + 3 = 0$, $x - 3y + 5 = 0$ и $Ax + y - 2z + D = 0$, принадлежат одному пучку?

2.35. Выяснить, какая из координатных плоскостей принадлежит пучку, заданному уравнением $4x - y + 2z - 6 + \alpha(6x + 5y + 3z - 9) = 0$.

Указание. Воспользуйтесь условиями совпадения двух плоскостей и учтите, что в уравнении координатной плоскости свободный член равен нулю.

2.36. При каких условиях плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ принадлежит пучку $x + 2y + z + \lambda(y - z + 1) = 0$?

2.37. Привести пример таких трех плоскостей, которые пересекаются попарно по трем параллельным прямым.

Решение. Уравнения двух плоскостей можно написать произвольно, избегая только случая их параллельности, т. е. не выбирая их коэффициенты соответственно пропорциональными. Составим, например, такие два уравнения $x + y + z + 1 = 0$ и $x + 2y + 3z - 1 = 0$.

Уравнение пучка, определяемого двумя данными плоскостями, имеет следующий вид:

$$\alpha(x + y + z + 1) + \beta(x + 2y + 3z - 1) = 0.$$

Всякая плоскость, параллельная некоторой плоскости пучка и отличная от нее, пересечет данные плоскости по прямым, параллельным оси пучка, так что каждая такая плоскость будет вместе с данными плоскостями удовлетворять условиям задачи (рис. 14).

Чтобы получить какую-либо плоскость пучка, можно положить, например, $\alpha = \beta = 1$. Тогда из уравнения пучка получим:

$$2x + 3y + 4z = 0.$$

Чтобы получить уравнение плоскости, параллельной этой и отличной от нее, надо сохранить коэффициенты этого уравнения и изменить его свободный член. Таким образом, в качестве искомой плоскости можно взять, например, плоскость

$$2x + 3y + 4z + 1 = 0.$$

2.38. Составить уравнения каких-либо трех плоскостей: 1) имеющих единственную общую точку; 2) проходящих через

одну прямую; 3) попарно параллельных; 4) из которых две параллельны, а третья их пересекает.

2.39. Установить, при каких значениях λ три плоскости, определяемые соответственно уравнениями
$x + y + z + 1 = 0$, $x + 2y + 3z + 4 = 0$, $x - y + \lambda z - 1 = 0$, имеют единственную общую точку.

2.40. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy и через точку пересечения плоскостей, определяемых уравнениями $x - y = 0$, $x + y - 2z - 1 = 0$, $2x + z - 4 = 0$.

§ 8. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ПЛОСКОСТЬ

Литература: [1], § 49; [2], раздел 2, § 10.

В каждой задаче этого параграфа используется прямоугольная декартова система координат.

2.41. Найти расстояние от точки M (—2; 1; 3) до следующих плоскостей:

а) $3x - 6y - 2z - 3 = 0$; б) $2x + 2y - z - 6 = 0$;
в) $6x - 3y + 2z - 7 = 0$; г) $3x + 4z + 5 = 0$.

Указание. Воспользуйтесь формулой расстояния от точки до плоскости.

2.42. Найти расстояние от точки M (4; —6; 1) до плоскости, проходящей через начало координат параллельно плоскости $2x - 2y + z - 5 = 0$.

2.43. Через диагонали двух смежных граней куба проведена плоскость. Найти расстояния от вершин куба до этой плоскости, считая, что длина ребра куба равна 1.

2.44. Найти расстояние между параллельными плоскостями

$$6x - 18y - 9z - 28 = 0 \text{ и } 4x - 12y - 6z - 7 = 0.$$

2.45. Найти расстояние между параллельными плоскостями

$$Ax + By + Cz + D = 0 \text{ и } Ax + By + Cz + D' = 0.$$

2.46. Доказать, что множество точек, удаленных на данное расстояние от данной плоскости, является парой плоскостей, параллельных данной плоскости.

Решение. Пусть данная плоскость определяется уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Точка M (x; y; z) удалена от плоскости на расстояние $d > 0$ тогда и только тогда, когда имеет место равенство

$$\frac{|Ax + By + Cz + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = d,$$

т. е.

$$Ax + By + Cz + (D + d\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}) = 0$$

или

$$Ax + By + Cz + (D - d\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}) = 0.$$

Следовательно, точка M принадлежит одной из плоскостей, определяемых написанными уравнениями.

2.47. Составить уравнения плоскостей, удаленных от плоскости $x + y + z - 3 = 0$ на расстояние, равное $\sqrt{3}$.

2.48. Доказать, что множество точек, равноудаленных от двух параллельных плоскостей, является плоскостью.

2.49. Найти множество точек, расстояния которых от двух данных параллельных плоскостей находятся в данном постоянном отношении.

Указание. Одну из данных плоскостей следует принять за координатную плоскость.

2.50. Найти множество точек, расстояния которых от двух данных пересекающихся плоскостей находятся в данном постоянном отношении.

Указание. Одну из данных плоскостей примите за координатную плоскость, а линию их пересечения— за ось координат.

2.51. Найти уравнения плоскостей, проходящих через ось Ox на расстоянии 1 от точки P (1; 2; 3).

Решение. Так как ось Ox можно рассматривать как пересечение плоскостей Oxy и Oxz, т. е. плоскостей, определяемых соответственно уравнениями $z = 0$ и $y = 0$, то уравнение пучка плоскостей, проходящих через ось Ox, можно записать уравнением $\alpha y + \beta z = 0$.

Но так как плоскость Oxy заведомо не удовлетворяет условиям задачи, то надо считать, что $\alpha \neq 0$, и поэтому можно воспользоваться более простым уравнением $y + \lambda z = 0$.

По условию расстояние точки P (1; 2; 3) от искомой плоскости равно 1.

Согласно [1], § 49.5, формула 5, получаем, что

$$\frac{|2 + 3\lambda|}{\sqrt{1 + \lambda^2}} = 1.$$

Это соотношение приводит нас к уравнению

$$8\lambda^2 + 12\lambda + 3 = 0,$$

из которого следует, что

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{4}.$$

Следовательно, искомые плоскости представляются уравнениями

$$y - \frac{3 - \sqrt{3}}{4} z = 0 \text{ и } y - \frac{3 + \sqrt{3}}{4} z = 0.$$

2.52. На оси Oz найти точку, равноудаленную от точки P(2; 3; 4) и от плоскости $2x + 3y + z - 17 = 0$.

2.53. Составить уравнения плоскостей, проходящих через ось Oy и равноудаленных от точек P (2; 7; 3) и Q (—1; 1; 0).

2.54. Доказать, что плоскость, равноудаленная от двух данных точек, проходит через середину отрезка, соединяющего эти точки, или параллельна ему.

Указание. Одну из данных точек удобно принять за начало координат, а одну из осей координат провести через данные точки.

2.55. Доказать, что плоскость, равноудаленная от трех данных точек, не лежащих на одной прямой, параллельна плоскости, определяемой этими точками, или проходит через среднюю линию образуемого данными точками треугольника.

2.56. Найти уравнения плоскостей, проходящих через ось Ox и образующих с плоскостью $x - 2y + 3z - 4 = 0$ углы по 45°.

Решение. Запишем уравнение пучка плоскостей, проходящих через ось Ox, в виде $y + \lambda z = 0$ (ср. с задачей 2.51).

Воспользуемся формулой, выражающей косинус угла между двумя плоскостями:

$$\cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

([1], § 49.6 или [2], раздел 2, § 10). В данном случае можно положить: $A_1 = 1$, $B_1 = -2$, $C_1 = 3$, $A_2 = 0$, $B_2 = 1$, $C_2 = \lambda$. Так как угол φ между плоскостями должен быть равен 45°, то $\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, приходим к уравнению

$$\frac{|3\lambda - 2|}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{1 + \lambda^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда находим, что $\lambda = \frac{6 \pm \sqrt{42}}{2}$.

Таким образом, задача имеет два решения:

$$2y + (6 + \sqrt{42})z = 0 \text{ и } 2y + (6 - \sqrt{42})z = 0.$$

2.57. Найти уравнения плоскостей, проходящих через начало координат, перпендикулярных к плоскости $5x - 2y + 5z - 10 = 0$ и образующих с плоскостью $x - 4y - 8z + 12 = 0$ угол 45°.

2.58. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и перпендикулярной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$. Решение исследовать.

2.59. Найти угол между следующими плоскостями:

а) $x + y - 3 = 0$ и $2x - 2z + 1 = 0$;
б) $-x + 2y + z - 3 = 0$ и $x - y - 5 = 0$.

2.60. Найти косинусы углов, образованных плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ с координатными плоскостями.

2.61. Доказать, что множество точек, равноудаленных от двух данных пересекающихся плоскостей, образует плоскость, делящую угол между данными плоскостями пополам.

2.62. Шар радиуса 1 катится по желобу, образованному плоскостями, определяемыми уравнениями $y = 0$ и $x + y + z - 1 = 0$, так, что координаты его центра принимают положительные значения. В какую точку попадет центр шара в момент его касания с плоскостью Oxy?

Указание. Воспользуйтесь тем, что центр шара принадлежит плоскости, делящей пополам угол между данными плоскостями.

2.63. Найти формулы преобразования симметрии относительно плоскости, определяемой уравнением $x + y + z - 1 = 0$.

Решение. Пусть $M(x; y; z)$ — произвольная точка пространства, $M'(x'; y'; z')$ — ее образ при симметрии относительно данной плоскости. Задача состоит в том, чтобы выразить x', y', z' через x, y, z.

Симметрия относительно плоскости определяется двумя условиями: 1) вектор $\overrightarrow{MM'}$ перпендикулярен данной плоскости; 2) середина $[MM']$ лежит в данной плоскости.

Так как $\overrightarrow{MM'} = (x' - x;\ y' - y;\ z' - z)$, а коэффициенты уравнения данной плоскости $A = B = C = 1$, то условия перпендикулярности вектора и плоскости имеют следующий вид:

$$x' - x = t \cdot 1,\ y' - y = t \cdot 1,\ z' - z = t \cdot 1,$$

где t — произвольный коэффициент пропорциональности. Тогда

$$x' = x + t,\ y' = y + t,\ z' = z + t.$$

Середина отрезка MM' имеет координаты $\frac{x' + x}{2}$, $\frac{y' + y}{2}$, $\frac{z' + z}{2}$. Подставляя их в уравнение данной плоскости, получаем:

$$x + y + z + x' + y' + z' - 2 = 0.$$

Подставляя сюда выражения x', y', z', получим:

$$2x + 2y + 2z + 3t - 2 = 0.$$

Откуда следует, что

$$t = \frac{2 - 2x - 2y - 2z}{3}.$$

Значит,

$$\begin{cases} x' = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z, \\ y' = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{2}{3}z, \\ z' = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z. \end{cases}$$

2.64. Доказать, что формулы $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$ определяют симметрию относительно плоскости, заданной уравнением $y - z = 0$.

2.65. Составить формулы, выражающие симметрию относительно: а) координатной плоскости Oxy; б) плоскости, определяемой уравнением $x - 1 = 0$; в) плоскости, определяемой уравнением $x + y - 3 = 0$.

2.66. Найти точку, симметричную точке A (1; 2; —3) относительно плоскости $6x - y + 3z - 41 = 0$.

2.67. Найти ортогональную проекцию точки A (1; 2; —3) на плоскость $6x - y + 3z - 41 = 0$.

2.68. Найти точку, симметричную точке A (2; 7; 1) относительно плоскости $x - 4y + z + 7 = 0$.

2.69. Найти точку, симметричную точке A (3; —5; 2) относительно плоскости, заданной уравнением $x - 4y + 2z - 6 = 0$.

§ 9. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ

Литература: [1], § 51; [2], раздел 2, § 11.

2.70. Составить параметрические и канонические уравнения прямой, проходящей через точку A (—1; 3; —4) параллельно вектору $\vec{p} = (1; 3; -2)$. Представить эту прямую как пересечение двух плоскостей.

Решение. В соответствии с теорией получим следующие параметрические

$$\begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 3 + 3t, \\ z = -4 - 2t \end{cases}$$

и канонические

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-2}$$

уравнения данной прямой.

Канонические уравнения можно переписать в виде системы двух уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-3}{3}, \\ \dfrac{y-3}{3} = \dfrac{z+4}{-2} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 3x - y + 6 = 0, \\ 2y + 3z + 6 = 0. \end{cases}$$

2.71. Составить параметрические уравнения оси Oy. Записать уравнения этой прямой в виде системы уравнений двух плоскостей.

2.72. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей через точку A (0; 1; 0) параллельно оси Oz. Представить эту прямую как пересечение двух плоскостей.

2.73. Составить параметрические и канонические уравнения прямой: а) проходящей через две точки: (1; —3; 0,5) и (3; 4; 2,5); б) проходящей через две точки: (1; —3; 0,5) и (4, —3; 2); в) проходящей через точку (1; —4; 5) параллельно вектору $\vec{a} = (2; 1; -3)$; г) проходящей через начало координат и точку $(a; b; c)$; д) проходящей через точки (1; 1; 0) и (1; 1; 1); е) отсекающей на осях Ox и Oy единичные отрезки.

2.74. Написать параметрические уравнения следующих прямых: а) прямой, проходящей через начало координат параллельно прямой

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = 1 - t; \end{cases}$$

б) прямой, проходящей через точку (x_0, y_0, z_0) параллельно прямой

$$\begin{cases} x = x_1 + l_1 t, \\ y = y_1 + l_2 t, \\ z = z_1 + l_3 t; \end{cases}$$

2.75. Зная параметрические уравнения прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + l_1 t, \\ y = y_0 + l_2 t, \\ z = z_0 + l_3 t, \end{cases}$$

задать ее как пересечение двух плоскостей.

2.76. Составить параметрические уравнения прямой, заданной как пересечение двух плоскостей

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0, \\ 4x + 5y - 3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Чтобы написать параметрические уравнения прямой, надо знать координаты l_1, l_2, l_3 направляющего вектора и какую-либо точку $(x_0; y_0; z_0)$ на этой прямой. Для данных уравнений составим матрицу из коэффициентов при неизвестных:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Согласно [1], § 51, формула (8) или [2], раздел 2, § 11:

$$(l_1; l_2; l_3) = \left(\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \right) = (-5; 4; 22).$$

Осталось выбрать какую-либо точку на данной прямой. Найдем, например, точку пересечения прямой с плоскостью Oxy («след» прямой на плоскости Oxy), для чего положим $z_0 = 0$. Тогда из данной системы уравнений следует, что

$$\begin{cases} 2x_0 - 3y_0 = 0, \\ 4x_0 + 5y_0 - 3 = 0, \end{cases}$$

откуда находим:

$$x_0 = \frac{9}{22}, \quad y_0 = \frac{3}{11}.$$

Следовательно, параметрические уравнения данной прямой можно записать в таком виде:

$$\begin{cases} x = \frac{9}{22} - 5t, \\ y = \frac{3}{11} + 4t, \\ z = 22t. \end{cases}$$

2.77. Составить параметрические уравнения: а) прямой, заданной как пересечение плоскостей $x - 3y + z = 0$ и $y = 0$; б) прямой, заданной как пересечение плоскостей $2x - y - z = 0$ и $x + 2y - 3z + 4 = 0$; в) прямой, проходящей через точку A (1; —3; 4) параллельно прямой, заданной системой уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 3y - z - 1 = 0; \end{cases}$$

г) прямой, проходящей через точку A (1; 0; 2) параллельно плоскостям $x + y + z - 3 = 0$ и $x - 2y + z + 2 = 0$.

2.78. Записать канонические уравнения линии пересечения плоскости Oxy с плоскостью, заданной уравнением $2x - 3y + 5z - 11 = 0$.

2.79. Прямую, заданную как пересечение плоскостей $2x + y - 2z - 1 = 0$ и $3x - 2y + 3z - 2 = 0$, представить как пересечение таких двух плоскостей, из которых одна параллельна оси Ox, а другая — оси Oy.

2.80. Построить изображение прямой, заданной системой уравнений:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 6 = 0, \\ x + y - 1 = 0. \end{cases}$$

Указание. Можно построить сначала линии пересечения данных плоскостей с координатными плоскостями, а затем — линию их взаимного пересечения, а можно сначала построить точки пересечения заданной прямой с двумя координатными плоскостями, а затем провести через эти точки прямую.

2.81. Найти условия, при которых прямая

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

пересекает ось Ox.

Решение. Данная прямая пересекает ось Ox тогда и только тогда, когда обе определяющие ее плоскости пересекают ось Ox в общей точке. Условия пересечения плоскостей с осью Ox заключаются в выполнении неравенств $A_1 \neq 0$ и $A_2 \neq 0$. Найдем точки пересечения каждой из данных плоскостей с осью Ox и потребуем, чтобы эти точки совпали. На оси Ox, как известно, $y = 0$

и $z = 0$. Поэтому точку пересечения первой из данных плоскостей с осью Ox можно получить из уравнения этой плоскости при $y = 0$ и $z = 0$. Это дает:

$$A_1x + D_1 = 0,$$

откуда $x = -\frac{D_1}{A_1}$.

Аналогично, для второй плоскости найдем: $x = -\frac{D_2}{A_2}$. Точки пересечения совпадут в том и только том случае, если $-\frac{D_1}{A_1} = -\frac{D_2}{A_2}$ или $A_1D_2 - A_2D_1 = 0$.

Итак, искомые условия, при которых данная прямая пересекает ось Ox выражаются следующим образом:

$$A_1 \neq 0,\ A_2 \neq 0,\ A_1D_2 - A_2D_1 = 0.$$

2.82. Доказать, что прямая

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z - 6 = 0, \\ x + 5y - 7z + 10 = 0 \end{cases}$$

пересекает ось Oy.

2.83. Указать особенности расположения следующих прямых:

а) $\begin{cases} 2y - z + 1 = 0, \\ 3y + z + 4 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ 5x + y = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 2y + 3z + 4 = 0, \\ z - 5 = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - 2y + 3z = 0, \\ 2x + y - z = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 7x + 8y - 3z + 6 = 0, \\ 3x + y - 3z + 6 = 0. \end{cases}$

§ 10. АФФИННЫЕ ЗАДАЧИ НА ПРЯМУЮ И ПЛОСКОСТЬ

Литература: [1], § 52; [2], раздел 2, § 12, 13.

2.84. Показать, что следующие прямые и плоскости пересекаются, и найти точку их пересечения:

а) $\begin{cases} x = -1 + 3t, \\ y = 2 - t, \\ z = 4 - t \end{cases}$ и $4x + 3y + 2z + 18 = 0$;

б) $\frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{-2} = \frac{z-3}{5}$ и $x + 4y - z + 6 = 0$;

в) $\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ 3y + z + 4 = 0 \end{cases}$ и $x - z + 3 = 0$.

Решение. а) Согласно [2], раздел 2, § 12, плоскость и прямая пересекаются тогда и только тогда, когда

$$Al_1 + Bl_2 + Cl_3 \neq 0,$$

где A, B, C — коэффициенты при неизвестных в уравнении плоскости, l_1, l_2, l_3 — координаты направляющего вектора прямой.

В рассматриваемом случае $A = 4$, $B = 3$, $C = 2$, $l_1 = 3$, $l_2 = -1$, $l_3 = -1$, следовательно, $4 \cdot 3 + 3(-1) + 2 \cdot (-1) = 7 \neq 0$. Значит, прямая и плоскость пересекаются.

Для нахождения точки пересечения подставим в уравнение плоскости вместо x, y, z их выражения через параметр t:

$$4(-1 + 3t) + 3(2 - t) + 2(4 - t) + 18 = 0$$

или

$$7t = -28.$$

Отсюда $t = -4$, и точка пересечения имеет координаты $x = -13$, $y = 6$, $z = 8$.

Заметим, что для ответа на первый вопрос можно сразу искать значение параметра t; если это значение определяется однозначно, то прямая и плоскость пересекаются.

б) Указание. Сначала надо перейти к параметрическим уравнениям данной прямой, а затем решать задачу так же, как и а). Второй способ решения аналогичен решению задачи в).

в) Плоскость и прямая пересекаются тогда и только тогда, когда система уравнений:

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0, \\ 3y + z + 4 = 0, \\ x - z + 3 = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Решая эту систему, получим: $x = -19$, $y = 4$, $z = -16$.

2.85. Показать, что следующие прямые и плоскости не имеют общих точек:

а) $\begin{cases} x = t - 3, \\ y = -4t + 5, \\ z = 3t \end{cases}$ и $x + y + z - 1 = 0$;

б) $\dfrac{x+4}{-2} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-6}{4}$ и $4x + 2z - 3 = 0$;

в) $\begin{cases} 2x - y - 2z - 3 = 0, \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$ и $2x + 7y - 2 = 0$.

Решение. а) Согласно [2], раздел 2, § 12, плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ и прямая

$$\begin{cases} x = x_0 + l_1 t, \\ y = y_0 + l_2 t, \\ z = z_0 + l_3 t \end{cases}$$

не имеют общих точек тогда и только тогда, когда

$$Al_1 + Bl_2 + Cl_3 = 0,$$
$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0.$$

В рассматриваемом случае $A = B = C = 1$, $D = -1$, $l_1 = 1$, $l_2 = -4$, $l_3 = 3$, $x_0 = -3$, $y_0 = 5$, $z_0 = 0$, поэтому $1 \cdot 1 - -1 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 0$, а $1 \cdot (-3) + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 0 - 1 \neq 0$. Следовательно, данные прямая и плоскость не имеют общих точек.

б) Решается так же, как и задача а).

в) Плоскость и прямая не имеют общих точек тогда и только тогда, когда система уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y - 2z - 3 = 0, \\ 2x + 3y - z = 0, \\ 2x + 7y - 2 = 0 \end{cases}$$

не имеет решений. Найдем ранги r и r' основной и расширенной матриц:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & -2 \end{pmatrix}:$$

$r = 2$ и $r' = 3$. Так как $r \neq r'$, то система несовместна, поэтому прямая и плоскость не имеют общих точек.

2.86. Показать, что следующие прямые принадлежат указанным плоскостям:

а) $\begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = 1 - 4t, \\ z = -2 + t \end{cases}$ и $x + y + z = 1$;

б) $\begin{cases} 3x - y + 2z - 1 = 0, \\ 2x + 2y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$ и $4x - 4y + 7z - 3 = 0$.

Решение. а) Подставив в уравнение плоскости вместо x, y, z их выражения через параметр t, получим:

$$0 \cdot t + 0 = 0,$$

т. е. уравнение становится равенством при любом значении t. Следовательно, прямая принадлежит плоскости.

б) Прямая принадлежит плоскости тогда и только тогда, когда система уравнений:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 1 = 0, \\ 2x + 2y - 3z + 1 = 0, \\ 4x - 4y + 7z - 3 = 0 \end{cases}$$

имеет бесконечное множество решений. Найдем ранги r и r' матриц

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

$r = r' = 2$. Так как $r = r' = 2 < 3$, то система имеет бесконечное множество решений, поэтому прямая принадлежит плоскости.

2.87. Выяснить взаимное расположение следующих прямых и плоскостей:

а) $\begin{cases} x = -6 - 2t, \\ y = 1 + 3t, \\ z = 3 + t \end{cases}$ и $2x - 5y + 6z - 1 = 0$;

б) $\begin{cases} x = -4 + 5t, \\ y = 1 - 6t, \\ z = -5 + 3t \end{cases}$ и $3x + 2y - z + 5 = 0$;

в) $\begin{cases} x = 1 - 3t, \\ y = -5 + 3t, \\ z = 2 + 7t \end{cases}$ и $2x - 5y + 3z - 1 = 0$;

г) $\begin{cases} x = 3 - 5t, \\ y = 2 + t, \\ z = 1 - 4t \end{cases}$ и $2x - 2y - 3z - 5 = 0$;

д) $\begin{cases} x = 5 + 2t, \\ y = 1 - 3t, \\ z = 7 - 6t \end{cases}$ и $x - y + 2z = 0$.

2.88. Придумать примеры уравнений прямой и плоскости так, чтобы: а) прямая пересекала плоскость; б) прямая была параллельна плоскости; в) прямая лежала в плоскости.

2.89. При каком значении t прямая $x - 1 = \frac{y+3}{-8} = \frac{z-2}{t}$ параллельна плоскости $3x - 4y + 7z - 2 = 0$?

2.90. Доказать, что прямая, параллельная каждой из двух пересекающихся плоскостей, параллельна линии их пересечения.

Указание. Пусть

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ — общие уравнения данных плоскостей, $\vec{l} = (l_1; l_2; l_3)$ — направляющий вектор данной прямой. Следует показать, что тройка чисел l_1, l_2, l_3 является решением системы

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z = 0, \end{cases}$$

а затем сделать вывод, что вектор $\vec{l}$ коллинеарен линии пересечения заданных плоскостей.

2.91. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A (1; —2; 3) и через прямую, заданную каноническими уравнениями $\frac{x}{4} = \frac{y-5}{6} = z$.

Решение. 1-*й способ*. Одна из точек искомой плоскости — точка A (1; —2; 3). Другая точка указана на данной прямой: это точка B (0; 5; 0). Векторы $\overrightarrow{AB} = (-1; 7; -3)$ и $\vec{l} = (4; 6; 1)$ параллельны искомой плоскости. Остается воспользоваться уравнением плоскости по точке и двум векторам ([1], § 47, или [2], раздел 2, § 7):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z-3 \\ -1 & 7 & -3 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая полученный определитель по элементам 1-й строки, получим:

$$25x - 11y - 34z + 55 = 0.$$

2-*й способ*. Зададим прямую системой двух уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x}{4} = z, \\ \frac{y-5}{6} = z \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x - 4z = 0, \\ y - 6z - 5 = 0. \end{cases}$$

Составим уравнение пучка плоскостей, проходящих через эту прямую:

$$\alpha (x - 4z) + \beta (y - 6z - 5) = 0$$

или

$$\alpha x + \beta y - (4\alpha + 6\beta) z - 5\beta = 0.$$

Из этого пучка надо выбрать плоскость, которой принадлежит данная точка A. Должно выполняться равенство

$$\alpha - 2\beta - 3 (4\alpha + 6\beta) - 5\beta = 0,$$

откуда $11\alpha + 25\beta = 0$.

Полагая, например, $\alpha = 25$, $\beta = -11$, приходим к уравнению

$$25x - 11y - 34z + 55 = 0.$$

3-*й способ*. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A (1; —2; 3), B (0; 5; 0) и какую-нибудь точку данной прямой, например точку C (4; 11; 1).

2.92. Составить уравнение плоскости, проходящей: а) через начало координат и прямую

$$\begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 3 + 5t, \\ z = 2 - 7t; \end{cases}$$

б) через точку A (—4; 2; 5) и прямую

$$\begin{cases} 2x - y + z - 12 = 0, \\ x + 4y - 5z + 4 = 0; \end{cases}$$

в) через две параллельные прямые

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+5}{4} = \frac{z-2}{1} \text{ и } \begin{cases} x = 6t, \\ y = 2 + 8t, \\ z = -5 + 2t. \end{cases}$$

2.93. Составить уравнение плоскости, содержащей две пересекающиеся прямые:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 5 = 0, \\ x - 2y - 4z + 3 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 3x + y + 3z + 7 = 0, \\ 5x - 3y + 2z + 5 = 0. \end{cases}$$

Указание. Можно найти точку, принадлежащую одной из заданных прямых, и направляющие векторы этих прямых, а можно найти две точки на одной прямой и третью точку на другой.

2.94. Составить уравнение плоскости, проходящей через ось Oy параллельно прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + l_1 t, \\ y = y_0 + l_2 t, \\ z = z_0 + l_3 t. \end{cases}$$

Рассмотреть случаи: а) $l_1 \neq 0$, $l_3 \neq 0$; б) $l_1 = 0$, $l_3 \neq 0$; в) $l_1 \neq 0$, $l_3 = 0$; г) $l_1 = l_3 = 0$.

2.95. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ 2x - 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

параллельно прямой

$$\begin{cases} x - y - z - 2 = 0, \\ x + y - 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. Вторая из данных прямых имеет направляющий вектор ([1], § 51; [2], раздел 2, § 11)

$$\vec{l} = \left(\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (3;\ 1;\ 2).$$

Искомая плоскость принадлежит пучку плоскостей

$$x - y + 3 + \lambda (2x - 3y - z - 2) = 0$$

и имеет уравнение

$$(1 + 2\lambda)x + (-1 - 3\lambda)y - \lambda z + 3 - 2\lambda = 0.$$

Так как нормальный вектор этой плоскости ортогонален вектору $\vec{l}$, то $(1 + 2\lambda) \cdot 3 + (-1 - 3\lambda) \cdot 1 + (-\lambda) \cdot 2 = 0$, откуда $3 + 6\lambda - 1 - 3\lambda - 2\lambda = 0$, $\lambda = -2$.

Следовательно, искомое уравнение имеет вид:

$$-3x + 5y + 2z + 7 = 0$$

или

$$3x - 5y - 2z - 7 = 0.$$

2.96. Исследовать взаимное расположение прямых, заданных системами уравнений:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y + z + 1 = 0, \\ y - 3z = 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем направляющие векторы данных прямых ([1], § 51; [2], раздел 2, § 11)

$$\vec{l} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-4;\ 4;\ 4);$$

$$\vec{l'} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-4;\ 3;\ 1).$$

Так как координаты векторов $\vec{l}$ и $\vec{l'}$ не пропорциональны, то прямые не параллельны, т. е. они пересекаются или скрещиваются. Для ответа на вопрос задачи надо вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_0 - x_0' & l_1 & l_1' \\ y_0 - y_0' & l_2 & l_2' \\ z_0 - z_0' & l_3 & l_3' \end{vmatrix},$$

где $(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и $(x_0';\ y_0';\ z_0')$ — произвольно выбранные точки данных прямых. В качестве таких точек удобно взять, например, точки пересечения этих прямых с плоскостью Oxy.

Полагая $z_0 = 0$ из уравнений первой прямой, найдем, что

$$\begin{cases} x_0 - 2y_0 = 4, \\ x_0 + 2y_0 = -1, \end{cases}$$

откуда: $x_0 = \frac{3}{2}$, $y_0 = -\frac{5}{4}$. Таким же путем для второй прямой получим: $x_0' = -1$, $y_0' = 0$, $z_0' = 0$.

Следовательно,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{5}{2} & -4 & -4 \\ -\frac{5}{4} & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -5.$$

Так как $\Delta \neq 0$, данные прямые скрещиваются.

2.97. Исследовать взаимное расположение следующих двух прямых (в тех случаях, когда прямые пересекаются, найти координаты точки пересечения):

а) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{-2}$ и $\frac{x}{-4} = \frac{y+1}{-6} = \frac{z+3}{4}$;

б) $\begin{cases} 7x + 3y + z - 5 = 0, \\ 5y - 2z - 1 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ 11x - 3z + 6 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = 9t, \\ y = 5t, \\ z = -3 + t \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - 3y - 3z - 9 = 0, \\ x - 2y + z + 3 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x = -2 + t, \\ y = 4 + 3t, \\ z = -6 + 5t \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 2t, \\ y = 2 + t, \\ z = -1 + 2t. \end{cases}$

2.98. Придумать примеры уравнений двух прямых, которые: а) параллельны; б) пересекаются; в) скрещиваются.

2.99. Составить уравнения прямой, проходящей через точку P (1; 0; 5) и пересекающей каждую из прямых

$$x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \text{ и } x - 1 = y - 2 = z.$$

Решение. 1-*й способ*. Запишем канонические уравнения искомой прямой:

$$\frac{x-1}{l_1} = \frac{y}{l_2} = \frac{z-5}{l_3}.$$

Так как коэффициенты l_1, l_2, l_3 определены с точностью до пропорциональности, то можно считать, что $l_3 = 1$, так что уравнение искомой прямой имеет вид:

$$\frac{x-1}{l_1} = \frac{y}{l_2} = \frac{z-5}{1}.$$

Воспользуемся условием пересечения двух прямых ([1], § 52; [2], раздел 2, § 13). Применяя это условие к искомой прямой и к первой из заданных прямых, получим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $5l_1 - l_2 - l_3 = 0$.

Применяя то же условие к искомой прямой и ко второй прямой, получим:

$$\begin{vmatrix} 0 & -2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{vmatrix} = 0,$$

откуда $7l_1 - 5l_2 - 2l_3 = 0$.

Найдем какое-либо ненулевое решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5l_1 - l_2 - l_3 = 0, \\ 7l_1 - 5l_2 - 2l_3 = 0. \end{cases}$$

Так как $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$, то можно положить $l_3 = 1$. Тогда $l_1 = \frac{1}{6}$, $l_2 = -\frac{1}{6}$.

Следовательно, уравнения искомой прямой можно написать в виде:

$$\frac{x-1}{\frac{1}{6}} = \frac{y}{-\frac{1}{6}} = \frac{z-5}{1}$$

или

$$x - 1 = -y = \frac{z-5}{6}.$$

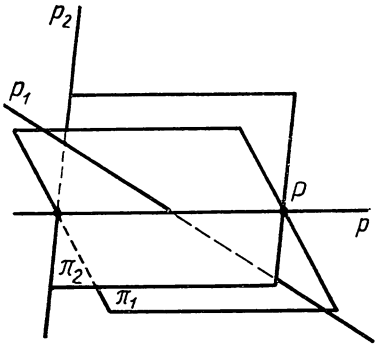

Рис. 15

2-й способ. Искомую прямую можно представить себе как линию пересечения двух плоскостей π_1 и π_2, каждая из которых проходит через данную точку P (1; 0; 5) и одну из данных прямых (рис. 15). Пользуясь любым из способов, указанных в задаче 2.91, получим для плоскостей π_1 и π_2 соответственно уравнения $5x - y - z = 0$ и $7x - 5y - 2z + 3 = 0$. Следовательно, уравнения искомой прямой можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ 7x - 5y - 2z + 3 = 0. \end{cases}$$

Проверьте, что прямые, найденные первым и вторым способами, совпадают.

3-й способ. Будем опять рассматривать искомую прямую как пересечение $\pi_1 \cap \pi_2$, но для составления уравнений этих плоскостей воспользуемся уравнением пучка плоскостей, проходящих через данную прямую. Первую прямую можно представлять как пересечение плоскостей, определяемых уравнениями $2x - y = 0$ и $3x - z = 0$. Следовательно, плоскость π_1 принадлежит пучку

$$2x - y + \lambda (3x - z) = 0.$$

Так как эта плоскость должна проходить через точку P (1; 0; 5), то $\lambda = 1$. Следовательно, плоскость π_1 определяется уравнением

$$5x - y - z = 0.$$

Точно так же можно получить уравнение плоскости π_2.

2.100. Составить уравнения прямой, проходящей через точку A (—1; 3; 4) и пересекающей каждую из прямых:

а) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z-4}{-1}$ и $\begin{cases} x = 3t, \\ y = -2 + 5t, \\ z = 1 + t; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = -1 - 3t, \\ y = 2 + t, \\ z = 3 + 6t \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x - y - z = 0, \\ x + 3y + z + 6 = 0. \end{cases}$

2.101. Составить уравнения прямой, проходящей через начало координат, пересекающей прямую $\begin{cases} x = 1 - t, \\ y = 2 + 2t, \\ z = 3 - 3t \end{cases}$ и параллельной плоскости $x + y + z + 1 = 0$.

2.102. Найти прямую, лежащую в плоскости Oxy и пересекающую прямые

$$\begin{cases} x = l_1 t, \\ y = l_2 t, \\ z = l_3 t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 1 + l_1' t, \\ y = l_2' t, \\ z = l_3' t, \end{cases}$$

$$(l_3 \neq 0,\ l_3' \neq 0).$$

2.103. Выяснить вопрос о взаимном расположении следующих трех плоскостей:

а) $\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 5, \\ 2x + y + 3z &= 11, \\ 2x + 3y + z &= 1; \end{aligned}$ б) $\begin{aligned} x + y - z - 1 &= 0, \\ x - y + 2z + 4 &= 0, \\ x + 3y - 4z + 3 &= 0; \end{aligned}$

в) $\begin{aligned} x - 2y + 4z - 6 &= 0, \\ x + 3y - 2z - 1 &= 0, \\ 4x - 3y + 10z - 19 &= 0; \end{aligned}$ г) $\begin{aligned} 4x - y + 5z - 1 &= 0, \\ 2x + y + z - 4 &= 0, \\ -8x + 2y - 10z + 7 &= 0; \end{aligned}$

д) $\begin{aligned} x + y + 2z &= -1, \\ -2x + y - 2z &= 4, \\ 4x + y + 4z &= -2; \end{aligned}$ е) $\begin{aligned} 3x - 10y + 7z - 1 &= 0, \\ 3x - 10y + 7z + 6 &= 0, \\ -21x + 70y - 49z + 7 &= 0. \end{aligned}$

Указание. Воспользуйтесь результатами [2], раздел 2, § 9.2.

§ 11. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ПРЯМУЮ И ПЛОСКОСТЬ

Литература: [1], § 53; [2], раздел 2, § 12, 13.

В каждой задаче этого параграфа используется прямоугольная декартова система координат.

2.104. Найти угол между следующими прямыми:

а) $\dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z+4}{-6}$ и $\begin{cases} x = -4t, \\ y = 5 + 2t, \\ z = -2 + 4t; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = 2, \\ y = 1 - t, \\ z = -4 + 3t \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y - z + 3 = 0, \\ 2x - y - z - 1 = 0; \end{cases}$

в) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+4}{5} = \dfrac{z+16}{-6}$ и $\begin{cases} x = 4 + 3t, \\ y = -10, \\ z = 5 + t. \end{cases}$

2.105. Найти углы между осями координат и прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + l_1 t, \\ y = y_0 + l_2 t, \\ z = z_0 + l_3 t. \end{cases}$$

2.106. Найти косинус угла между диагоналями куба.

2.107. Найти канонические уравнения всех прямых, проходящих через начало координат и образующих данный угол α с осью Ox ($\alpha \neq 90°$).

2.108. Найти угол между прямой

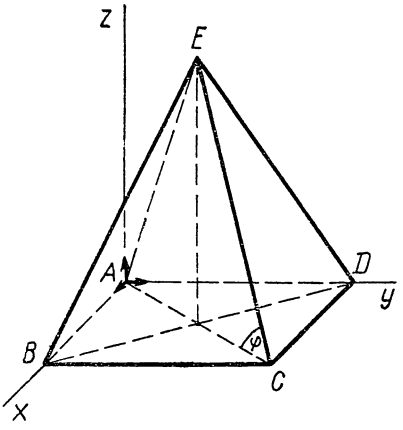

Рис. 16

$$\begin{cases} x = 5 + 6t, \\ y = 1 - 3t, \\ z = 2t \end{cases}$$

и плоскостью $4x + y - 8z + 16 = 0$.

Указание. Воспользуйтесь формулами, указанными в [1], § 53 или [2], раздел 2, § 12.

2.109. Найти углы, образованные прямой

$$\frac{x-a}{l_1} = \frac{y-b}{l_2} = \frac{z-c}{l_3}$$

с координатными плоскостями.

2.110. Ребро основания правильной четырехугольной пирамиды имеет длину 10 см, высота равна 12 см. Найти угол между боковым ребром и плоскостью основания.

Решение. Направим векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ прямоугольной декартовой системы координат по ребрам AB и AD пирамиды $ABCDE$ (рис. 16). Тогда точка A получит координаты (0; 0; 0), а точка E — координаты (5; 5; 12). Составим уравнения прямой AE:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{5} = \frac{z}{12}.$$

Остается найти угол между этой прямой и плоскостью основания $ABCD$, т. е. плоскостью, уравнение которой $z = 0$.

Применяя формулу для синуса угла между прямой и плоскостью, получим:

$$\sin\varphi = \frac{|0 \cdot 5 + 0 \cdot 5 + 1 \cdot 12|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{5^2 + 5^2 + 12^2}} = \frac{6\sqrt{194}}{97} \approx 0{,}8202.$$

С помощью таблиц тригонометрических функций найдем $\varphi \approx 55°6'$.

2.111. Доказать, что все прямые, проходящие через данную точку и перпендикулярные данной прямой, лежат в одной плоскости.

2.112. Составить уравнения прямой, лежащей в плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и пересекающей прямую $\frac{x-a}{l_1} = \frac{y-b}{l_2} = \frac{z-c}{l_3}$ под прямым углом. Решение исследовать.

2.113. Выяснить, сколько прямых можно провести через данную точку перпендикулярно каждой из двух данных прямых.

2.114. Составить уравнения прямой, проходящей через точку A (—1, 4, —6) перпендикулярно плоскости $2x - 5y + 6z - 1 = 0$.

Указание. Направляющий вектор искомой прямой совпадает с нормальным вектором плоскости.

2.115. Составить уравнение плоскости, которая проходит: а) через начало координат перпендикулярно прямой

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+6}{2}=\frac{z-5}{-4};$$

б) через точку C, делящую отрезок AB в отношении, равном $-\frac{1}{3}$, где A $(-1;\ 2;\ 4)$, B $(15;\ 12;\ -6)$, перпендикулярно прямой:

$$\begin{cases} 3x-5y+3z-6=0, \\ x+3y-5z+1=0. \end{cases}$$

2.116. Найти условия, при которых через прямую p можно провести плоскость, перпендикулярную прямой q.

2.117. Доказать, что расстояние от произвольной точки M $(x;\ y;\ z)$ до оси Ox равно $\sqrt{y^2+z^2}$.

2.118. На прямой $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-4}{2}$ найти точки, удаленные от оси Ox на расстояние 10.

Решение. Расстояние от произвольной точки M $(x;\ y;\ z)$ до оси Ox равно $\sqrt{y^2+z^2}$ (см. задачу 2.117).

Запишем параметрические уравнения прямой $\begin{cases} x=1-t, \\ y=3+5t, \\ z=4+2t. \end{cases}$

Координаты искомых точек должны удовлетворять соотношению

$$\sqrt{y^2+z^2}=10 \quad \text{или} \quad y^2+z^2=100.$$

Подставив вместо y и z их выражения через параметр t, получим: $29t^2+46t+25=100$, откуда $t_1=1$, $t_2=-\frac{75}{29}$. Следовательно, искомые точки M_1 и M_2 имеют координаты: $x_1=0$, $y_1=8$, $z_1=6$ и $x_2=3\frac{17}{29}$, $y_2=-4\frac{22}{29}$, $z_2=-1\frac{5}{29}$.

2.119. Найти длину высоты AP треугольника ABC, зная его вершины A $(2;\ -3;\ 4)$, B $(0;\ 0;\ 0)$, C $(2;\ 2;\ 2)$.

Решение. Длину отрезка AP можно рассматривать как расстояние точки A от прямой BC, определяемой, как легко видеть, уравнением

$$x=y=z.$$

Проведем через точку A плоскость $\pi \perp (BC)$ (рис. 17), уравнение которой имеет следующий вид:

$$x+y+z-3=0.$$

Решая систему уравнений:

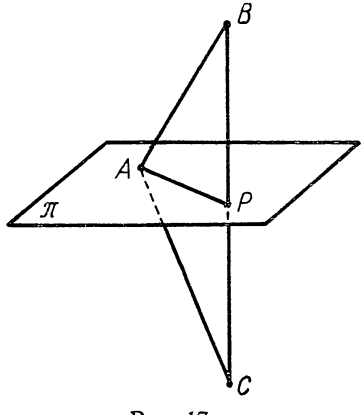

Рис. 17

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0, \\ x = y = z, \end{cases}$$

найдем точку P (1; 1; 1) пересечения плоскости π с прямой BC. Длина отрезка AP будет искомой высотой треугольника ABC. Так как A (2; —3; 4), P (1; 1; 1), то

$$|AP| = \sqrt{(2-1)^2 + (-3-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{26}.$$

Эту задачу можно решать и другим способом (см. решение задачи 1.87 в гл. I).

2.120. Найти ортогональную проекцию точки A (1; —2; 3) на прямую p, заданную уравнениями

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -2 + 2t, \\ z = 2 + 3t. \end{cases}$$

Указание. Ортогональная проекция точки A есть пересечение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно заданной прямой, с этой прямой (см. решение предыдущей задачи).

2.121. Найти расстояние от точки A (7; 9; 7) до прямой p, заданной уравнением

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}.$$

Указание. Первый способ решения состоит в том, что ищется проекция A' точки A на прямую p, а затем $|AA'|$. Полезно воспользоваться и другим приемом. Зная точку P (2; 1; 0) прямой p и вектор $\vec{v} = (4; 3; 2)$, параллельный прямой p, можно искомое расстояние вычислить как

$$\frac{|[\overrightarrow{PA}, \vec{v}]|}{|\vec{v}|}.$$

2.122. Найти расстояние между параллельными прямыми:

а) $\dfrac{x-4}{3} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z+2}{-4}$ и $\begin{cases} x = 5 - 6t, \\ y = -6 - 2t, \\ z = 3 + 8t; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = 1 - t, \\ z = 3 + t \end{cases}$ и $\begin{cases} x - y - 2z - 1 = 0, \\ 2x + y - z + 7 = 0. \end{cases}$

2.123. Найти расстояние между скрещивающимися прямыми:

$$\begin{cases} x = -4t, \\ y = -1 + 3t, \\ z = -2 - t \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 4 - 2t, \\ y = 1 - t, \\ z = 1 - 3t. \end{cases}$$

Указание. Через одну из данных прямых проведите плоскость, параллельную другой прямой, и найдите расстояние от произвольной точки второй прямой до построенной плоскости (рис. 18).

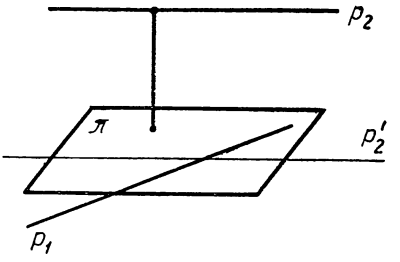

Рис. 18

2.124. Найти точку, симметричную точке (4; 3; 10) относительно прямой, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = 2 + 4t, \\ z = 3 + 5t. \end{cases}$$

2.125. Составить формулы, выражающие симметрию относительно прямой, заданной уравнением

$$\frac{x+5}{2} = \frac{y-1}{3} = z.$$

Решение. Пусть $M(x; y; z)$ — произвольная точка пространства, $M'(x'; y'; z')$ — ее образ при симметрии относительно данной прямой. Симметричность точек M и M' относительно данной прямой выражается двумя условиями: 1) вектор $\overrightarrow{MM'} = (x' - x; y' - y; z' - z)$ перпендикулярен этой прямой; 2) середина $[MM']$ принадлежит прямой.

Так как вектор $\vec{v} = (2; 3; 1)$ параллелен прямой и $MM' \perp \vec{v}$, то $\vec{v} \cdot \overrightarrow{MM'} = 0$, т. е.

$$2(x' - x) + 3(y' - y) + z' - z = 0. \qquad (*)$$

Так как середина отрезка MM' имеет координаты $\frac{x'+x}{2}$, $\frac{y'+y}{2}$, $\frac{z'+z}{2}$ и эта середина принадлежит данной прямой, то

$$\frac{x'+x+10}{2} = \frac{y'+y-2}{3} = \frac{z'+z}{1}.$$

Обозначая эти равные отношения через t, получим:

$$\begin{cases} x' = 2t - x - 10, \\ y' = 3t - y + 2, \\ z' = t - z. \end{cases} \qquad (**)$$

Подставляя эти выражения в уравнение $(*)$, получим:

$$14t = 4x + 6y + 2z + 14,$$

откуда:

$$t = \frac{2x + 3y + z + 7}{7}.$$

Подставляя найденное выражение t в формулы (**), получим искомые выражения координат x', y', z' через x, y, z:

$$\begin{cases} x' = -\frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z - 8, \\ y' = \frac{6}{7}x + \frac{2}{7}y + \frac{3}{7}z + 5, \\ z' = \frac{2}{7}x + \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z + 1. \end{cases}$$

2.126. Составить формулы, выражающие симметрию относительно: а) оси Ox; б) прямой, заданной уравнениями $\begin{cases} y = 0, \\ z = 1; \end{cases}$ в) прямой, заданной уравнениями: $\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 2t, \\ z = 3 - t. \end{cases}$

2.127. Найти точки, отстоящие от плоскости $2x - 2y + z + 1 = 0$ на расстояние, равное 1, и лежащие на прямой

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{3}.$$

2.128. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\frac{x - x_0}{l_1} = \frac{y - y_0}{l_2} = \frac{z - z_0}{l_3}$$

перпендикулярно плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

Указание. Используйте уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 $(x_0; y_0; z_0)$ параллельно нормальному вектору плоскости $\vec{n} = (A; B; C)$ и направляющему вектору прямой $\vec{l} = (l_1; l_2; l_3)$.

2.129. Доказать, что все плоскости, проходящие через данную точку и перпендикулярные данной плоскости, проходят через одну прямую, перпендикулярную данной плоскости.

ГЛАВА III

ВЫПУКЛЫЕ МНОГОГРАННИКИ

§ 12. НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГОГРАННИКОВ

Литература: [1], § 58, 59; [2], раздел 2, § 43—45.

3.1. Доказать, что не существует многогранника с нечетным числом граней, каждая из которых содержала бы нечетное число ребер.

Решение. Так как каждое ребро многогранника принадлежит в точности двум его граням, то общее число ребер многогранника можно найти, подсчитав число ребер, принадлежащих каждой из граней, сложив эти числа и разделив полученную сумму на 2. Поскольку сумма нечетного числа нечетных чисел есть нечетное число, то она не может быть нацело разделенной на 2. Следовательно, не существует многогранника, удовлетворяющего условию задачи.

3.2. Доказать, что: а) у любого многогранника число граней с нечетным числом сторон четно; б) у любого многогранника число вершин, из которых выходит нечетное число ребер, четно.

3.3. Доказать, что число ребер каждого многогранника не менее 6.

Указание. Подсчитайте наименьшее число ребер, проходящих через вершины одной грани.

3.4. Доказать, что не существует многогранника, имеющего 7 ребер.

3.5. Доказать, что существуют многогранники с любым числом ребер, большим 7.

Указание. Рассмотрите n-угольную пирамиду или ее объединение с тетраэдром.

3.6. Доказать, что каждая треугольная пирамида обладает бесконечным множеством плоских сечений, имеющих форму параллелограмма.

Указание. Плоскости сечений параллельны двум противоположным ребрам тетраэдра.

3.7. Доказать, что каждая треугольная пирамида обладает плоскими сечениями, имеющими форму ромба.

Указание. Чтобы параллелограмм $MNPQ$ ($M \in [AD]$, $N \in [DB]$) был ромбом, необходимо и достаточно, чтобы

$|AM| : |MD| = |AB| : |CD|$. Для доказательства этого надо рассмотреть подобные треугольники.

3.8. Доказать, что правильная треугольная пирамида обладает квадратным плоским сечением.

3.9. Группа симметрий правильного тетраэдра $ABCD$ содержит, как известно ([2], раздел 2, § 45.5), 24 элемента. Обозначим эти элементы соответственно

через S_1 тождественное отображение,
» S_2 поворот вокруг высоты AA', отображающий B на C,
» S_3 -»- -»- -»- B на D,
» S_4 -»- BB' -»- A на C,
» S_5 -»- -»- -»- A на D,

. . . . . .

через S_{10} поворотное отражение с осью, проходящей через середины $[AB]$ и $[CD]$, углом $\frac{\pi}{2}$ и плоскостью, проходящей через центр тетраэдра (перпендикулярно оси), через S_{11} поворотное отражение с осью, проходящей через середины $[AB]$ и $[CD]$, углом $\frac{3}{2}\pi$ и плоскостью, проходящей через центр тетраэдра,

. . . . . .

через S_{16} симметрию относительно прямой, проходящей через середины $[AC]$ и $[BD]$,

. . . . . .

через S_{24} симметрию относительно плоскости, проходящей через $[CD]$ и середину $[AB]$.

а) Найти образы всех вершин тетраэдра при каждой из 24 симметрий; б) продолжить заполнение таблицы композиций:

	S_1	S_2	S_3	. . .	S_{24}
S_1	$S_1 \circ S_1 = S_1$	$S_2 \circ S_1 = S_2$	$S_3 \circ S_1 = S_3$	. . .	$S_{24} \circ S_1 = S_{24}$
S_2	$S_1 \circ S_2 = S_2$	$S_2 \circ S_2 = S_3$	$S_3 \circ S_2 = S_1$	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
S_{24}	$S_1 \circ S_{24} = S_{24}$	. . .	. . .	. . .	. . .

Решение.

а) S_1: $A \to A$, $B \to B$, $C \to C$, $D \to D$,
S_2: $A \to A$, $B \to C$, $C \to D$, $D \to B$,
S_3: $A \to A$, $B \to D$, $C \to B$, $D \to C$,
S_4: $A \to C$, $B \to B$, $C \to D$, $D \to A$,

. . . . . .

S_{16} : $A \to C$, $B \to D$, $C \to A$, $D \to B$,

. . . . . .

б) Для примера рассмотрим композицию $S_4 \circ S_2$. Согласно а) $S_4 \circ S_2$: $: A \to C,\ B \to D,\ C \to A,\ D \to B$. Просматривая строки, выписанные в первой части задачи, замечаем, что $S_4 \circ S_2 = S_{16}$. Можно установить, что $S_4 \circ S_2 \neq S_2 \circ S_4$.

3.10. Доказать, что периметр сечения поверхности правильного тетраэдра плоскостью, параллельной двум противоположным ребрам и не проходящей через ребро тетраэдра, не зависит от того, как именно проведена такая плоскость.

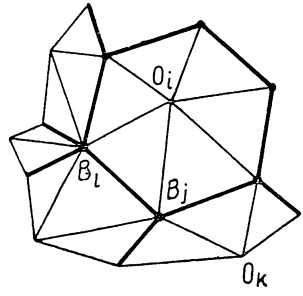

Рис. 19

3.11. По двум данным скрещивающимся прямым скользят соответственно отрезки AB и CD, каждый из которых имеет постоянную длину. Доказать, что объем тетраэдра $ABCD$ сохраняет при этом постоянное значение.

Указание. Дополните тетраэдр $ABCD$ до параллелепипеда. Необходимо учесть, что одна из высот этого параллелепипеда является расстоянием между данными прямыми, а площадь соответствующего ей основания постоянна.

3.12. Доказать, что поверхность куба нельзя рассечь плоскостью так, чтобы в сечении образовался: а) семиугольник; б) прямоугольный треугольник.

3.13. Доказать, что восемь центров граней правильного октаэдра служат вершинами куба.

3.14. Найти угол между: а) противоположными ребрами правильного октаэдра; б) непересекающимися диагоналями двух смежных граней куба.

3.15. Доказать, что не существует выпуклого многогранника, каждая грань которого имела бы более пяти сторон.

Решение. Выберем внутри каждой грани точку O_i и соединим ее со всеми вершинами грани. Так как каждой вершине многогранника принадлежит не менее трех граней, а каждая грань разбита указанным способом на треугольники, то каждая точка O_i и каждая вершина многогранника будут теперь служить общей вершиной не менее чем шести треугольников (рис. 19). Число точек O_i, очевидно, равно числу Γ граней многогранника. Следовательно, общее число треугольников не меньше числа

$$\frac{6(B+\Gamma)}{3} = 2(B+\Gamma),$$

где B — число вершин многогранника (знаменатель равен 3 потому, что каждый треугольник имеет три вершины).

Так как сумма углов каждого треугольника равна $2d$, то сумма углов всех треугольников нашей триангуляции

$$S_\triangle \geqslant 4d \cdot \Gamma + 4d \cdot B.$$

Чтобы оценить сумму S плоских углов данного многогранника, надо из $S_\triangle$ вычесть сумму углов при точках O_i, т. е. $4d \cdot \Gamma$. Следовательно,

$$S = S_\triangle - 4d \cdot \Gamma \geqslant 4d \cdot B.$$

Но, как известно, сумма плоских углов выпуклого многогранного угла $< 4d$, и потому

$$S < 4d \cdot B.$$

Полученное противоречие показывает, что многогранника, отвечающего условиям задачи, не существует.

3.16. Доказать, что для многогранника справедливы соотношения:

$$2P = 3\Gamma_3 + 4\Gamma_4 + \ldots = 3S_3 + 4S_4 + \ldots,$$
$$2P \geqslant 3\Gamma,\ 2P \geqslant 3B,$$

где P — число ребер многогранника, Γ — число граней многогранника, B — число вершин, Γ_i — число i-угольных граней, S_i — число i-гранных углов.

3.17. Доказать, что если точка перемещается внутри правильного многогранника, то сумма ее расстояний от плоскостей всех граней остается неизменной.

Указание. Используйте объем многогранника.

§ 13. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГОГРАННИКОВ

Литература: [1], § 37, 58, 59; [2], раздел 2, § 43—45.

Задачи этого параграфа рассматриваются в прямоугольной декартовой системе координат.

3.18. Построить изображение многогранника, определяемого системой неравенств:

$$\begin{cases} z \geqslant 0, \\ x - z \geqslant 0, \\ x - z - 1 \leqslant 0, \\ y - z \geqslant 0, \\ y + z - 2 \leqslant 0. \end{cases}$$

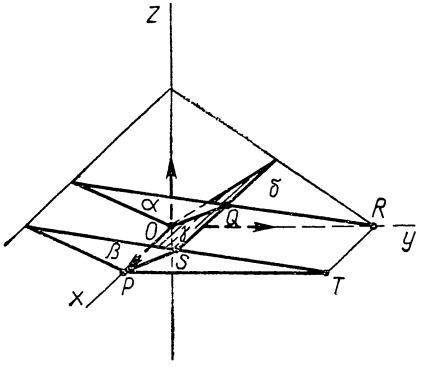

Рис. 20

Решение. Неравенство $z \geqslant 0$ определяет полупространство, ограниченное плоскостью Oxy и состоящее из точек с неотрицательными аппликатами.

Второе и третье неравенства определяют трехмерную полосу, ограниченную двумя параллельными плоскостями

$$\alpha\colon x - z = 0 \text{ и } \beta\colon x - z = 1.$$

Плоскость α проходит через ось Oy (рис. 20), так как в урав-

нении этой плоскости $B=0$ и $D=0$. Чтобы построить эту плоскость, строим ее след $\begin{cases} x-z=0, \\ y=0 \end{cases}$ на плоскости Oxz.

Плоскость β параллельна оси Oy и пересекает ось Ox в точке P (1; 0; 0). Следы ее на координатных плоскостях соответственно параллельны следам плоскости α, так как $\alpha \parallel \beta$.

Четвертое неравенство показывает, что искомый многогранник ограничен плоскостью

$$\gamma\colon\ y-z=0.$$

Эта плоскость проходит через ось Ox, так как здесь $A=0$ и $D=0$. Ее следами служат ось Ox и биссектриса угла между Oz и Oy. Неравенство $y-z \geqslant 0$ показывает, что рассматривается полупространство, содержащее точки оси Oy с положительными ординатами ($y-z>0$, например, при $y=2$, $z=0$, так что точка R (0; 2; 0) принадлежит этому полупространству).

Наконец, неравенство $y+z-2 \leqslant 0$ показывает, что рассматриваемый нами многогранник принадлежит полупространству, ограниченному плоскостью

$$\delta\colon\ y+z-2=0$$

и расположенному «влево» от этой плоскости.

Построив линии пересечения $\alpha \cap \gamma = (OQ)$, $\alpha \cap \delta = (RQ)$, $\beta \cap \gamma = (PS)$, $\beta \cap \delta = (ST)$ и $\gamma \cap \delta = (QS)$, получим изображение многогранника.

Так как $\alpha \parallel \beta$ и $(OP) \parallel (QS) \parallel (RT)$, то это — треугольная призма. На рисунке 20 изображена призма $ORQPTS$.

3.19. Изобразить многогранники, определяемые следующими системами неравенств:

а) $\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 \leqslant z \leqslant 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+z-2 \leqslant 0, \\ x-z \geqslant 0, \\ y-z \geqslant 0, \\ y+z-2 \leqslant 0, \\ z \geqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ z \geqslant 0, \\ x-y-z+1 \geqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y-1 \leqslant 0, \\ x+y+1 \geqslant 0, \\ x-y-1 \leqslant 0, \\ x-y+1 \geqslant 0, \\ 0 \leqslant z \leqslant 2. \end{cases}$

3.20. Определить системой неравенств каждый из следующих многогранников: а) куб с вершинами (2; 2; —1), (2; —2; —1), (—2; —2; —1), (—2; 2; —1), (2; 2; 3), (2; —2; 3), (—2; —2; 3), (—2; 2; 3); б) тетраэдр с вершинами (0; 0; —2), (4; 0; —2), (0; 2; —2), (0; 0; 2); в) четырехугольную пирамиду с вершинами (2; 1; 0), (2; —1; 0), (—2; —1; 0), (—2; 1; 0), (0; 0; 4); г) параллелепипед с вершинами (0; 0; 0), (4; 0; 0), (8; 2; 0), (4; 2; 0), (0; 0; 3), (4; 0; 3), (8; 2; 3), (4; 2; 3).

3.21. Найти координаты вершин тетраэдра, заданного неравенствами:

$$\begin{cases} y - z \leqslant 0, \\ 7x + y - z - 7 \leqslant 0, \\ 7x - 2y - 5z \geqslant 0, \\ 4y + 3z \geqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим четыре плоскости

$$\alpha\colon\ y - z = 0,\ \ \beta\colon\ 7x + y - z - 7 = 0,\ \ \gamma\colon\ 7x - 2y - 5z = 0,$$
$$\delta\colon\ 4y + 3z = 0.$$

Вершинами тетраэдра будут точки пересечения троек этих плоскостей. Каждая из плоскостей α, γ и δ проходит через начало координат; значит, одна из вершин данного тетраэдра расположена в начале координат O (0; 0; 0).

Рассмотрим тройку плоскостей α, β, δ. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} y - z = 0, \\ 7x + y - z - 7 = 0, \\ 4y + 3z = 0, \end{cases}$$

найдем, что $x = 1$, $y = z = 0$. Следовательно, вторая вершина данного тетраэдра находится в точке A (1; 0; 0).

Таким же путем найдем, что

$$(\alpha \cap \beta) \cap \gamma = B\ (1;\ 1;\ 1) \text{ и } (\beta \cap \gamma) \cap \delta = C\ (2;\ -3;\ 4).$$

Значит, мы нашли все вершины O, A, B, C данного тетраэдра.

3.22. Найти вершины многогранников, заданных в тексте задачи 3.19.

3.23. Даны четыре вершины A (0; 0; 1), B (1; 2; 3), C (4; —5; 6) и A' (7; 8; 9) параллелепипеда $ABCDA'B'C'D'$. Найти координаты остальных его вершин.

3.24. Задать параллелепипед, рассмотренный в задаче 3.23, системой неравенств.

3.25. Указать вершины какого-либо непрямого параллелепипеда, поставленного на плоскость Oxy.

3.26. Указать вершины какой-либо четырехугольной призмы, поставленной на плоскость $x + y + z - 1 = 0$.

3.27. Найти вершины какого-либо правильного тетраэдра, поставленного на плоскость $x + y + z - 1 = 0$.

3.28. Найти вершины одного из кубов, расположенных так, что одно из оснований лежит в плоскости $x + y - 1 = 0$ и одно из ребер совпадает с отрезком, соединяющим точки пересечения этой плоскости с осями Ox и Oy. Задать этот куб неравенствами. Сколько таких кубов можно построить?

3.29. Найти, при каких значениях параметра a прямая $x = 2y = az$, $a \neq 0$ содержит внутренние точки тетраэдра, рассмотренного в задаче 3.21.

Решение. Данная прямая проходит через начало координат, т. е. через одну из вершин данного тетраэдра. Она пройдет внутри

этого тетраэдра тогда и только тогда, когда пересечет противоположную грань тетраэдра в ее внутренней точке.

Составим уравнение плоскости по трем точкам A (1; 0; 0), B (1; 1; 1) и C (2; —3; 4) принадлежащим грани, противоположной началу координат

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{или } 7x + y - z - 7 = 0.$$

Найдем точку P пересечения этой плоскости с данной прямой, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} 7x + y - z - 7 = 0, \\ x = 2y = az. \end{cases}$$

Получаем:

$$x = \frac{14a}{15a-2}, \quad y = \frac{7a}{15a-2}, \quad z = \frac{14}{15a-2}.$$

Понятно, пересечение произойдет только при условии, что

$$a \neq \frac{2}{15}.$$

Точка P должна лежать по ту же сторону плоскости δ, что и вершина B (1; 1; 1). Но подстановка координат $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$ в левую часть уравнения плоскости δ дает число $7 > 0$. Следовательно, должно выполняться условие

$$\frac{28a}{15a-2} + \frac{42}{15a-2} > 0,$$

т. е. $\dfrac{2a+3}{15a-2} > 0.$

Точка P должна лежать по ту же сторону плоскости α, что и вершина C (2; —3; 4). Это приводит к неравенству

$$\frac{a-2}{15a-2} < 0.$$

Наконец, точка P должна лежать по ту же сторону плоскости γ, что и точка A (1; 0; 0). Это приводит к неравенству

$$\frac{6a-5}{15a-2} > 0.$$

Итак, задача сводится к решению системы трех неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{2a+3}{15a-2} > 0, \\ \dfrac{a-2}{15a-2} < 0, \\ \dfrac{6a-5}{15a-2} > 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим:

$$\frac{5}{6} < a < 2.$$

Так как число $\frac{2}{15}$ не принадлежит интервалу $\left]\frac{5}{6}; 2\right[$, то этот ответ и характеризует область допустимых значений параметра a.

3.30. Указать какую-либо внутреннюю точку для каждого из многогранников, перечисленных в задаче 3.19.

3.31. Найти какую-либо внутреннюю точку каждой грани каждого из многогранников, указанных в задаче 3.19.

3.32. Доказать, что точка A является единственной общей точкой оси Oz и параллелепипеда, приведенного в задаче 3.23.

3.33. Куб $ABCDA'B'C'D'$, длина диагонали которого равна $2a$, расположен так, что центр его грани $ABCD$ находится в начале прямоугольной декартовой системы координат, вершина A — на оси Ox, вершина B — на оси Oy, аппликаты вершин A', B', C', D' положительны. Составить формулы следующих преобразований: а) симметрии относительно центра куба; б) симметрии относительно прямой, соединяющей середины ребер AA' и CC'; в) поворота вокруг оси Oz на угол $\frac{\pi}{2}$; г) поворотного отражения с осью Oz плоскостью $z = \frac{1}{2} a\sqrt{2}$ и углом $\frac{\pi}{2}$. Показать, что эти преобразования отображают куб на себя.

Решение. а) Пусть $M(x; y; z)$ — произвольная точка пространства, $M'(x'; y'; z')$ — ее образ при данной симметрии. Задача состоит в том, чтобы выразить переменные x', y', z' через x, y, z.

Центр S симметрии куба имеет координаты $\left(0; 0; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, потому что длина ребра куба равна $a\sqrt{2}$. Следовательно,

$$\frac{x+x'}{2} = 0, \quad \frac{y+y'}{2} = 0, \quad \frac{z+z'}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2},$$

так что $x' = -x$, $y' = -y$, $z' = a\sqrt{2} - z$.

Вершины куба имеют следующие координаты: $A(a; 0; 0)$, $B(0; a; 0)$, $C(-a; 0; 0)$, $D(0; -a; 0)$, $A'(a; 0; a\sqrt{2})$, $B'(0; a; a\sqrt{2})$, $C'(-a; 0; a\sqrt{2})$, $D'(0; -a; a\sqrt{2})$. При рассматриваемой симметрии вершина A переходит в точку с координатами $(-a; 0; a\sqrt{2})$, т. е. в вершину C'. Аналогично проверяется, что и остальные вершины куба отображаются на вершины того же куба.

Решение задач б) — г) предоставляется читателю.

ГЛАВА IV

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 14. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ И КОНИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ. ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

Литература: [1], § 60—62; [2], раздел 2, § 16—18.

Задачи этого параграфа рассматриваются в прямоугольной декартовой системе координат.

4.1. Составить уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси Oz, а направляющей служит линия пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ с плоскостью $x + y + z = 1$.

Решение. Согласно [1], § 62 или [2], раздел 2, § 16, уравнение данной цилиндрической поверхности можно записать в виде:

$$f(x, y) = 0,$$

если система уравнений

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

задает направляющую цилиндра, лежащую в плоскости Oxy. Чтобы найти такую направляющую в нашем случае, необходимо спроецировать линию пересечения

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

на плоскость Oxy. Эта проекция отыскивается исключением z. Найдя из второго уравнения системы $z = 1 - x - y$ и подставив это выражение в первое уравнение системы, получим:

$$x^2 + y^2 + (1 - x - y)^2 = 9$$

или

$$x^2 + y^2 + xy - x - y = 4.$$

Искомая направляющая задается системой уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + xy - x - y = 4, \\ z = 0, \end{cases}$$

а уравнение цилиндрической поверхности имеет вид:

$$x^2 + y^2 + xy - x - y = 4.$$

4.2. Составить уравнение цилиндрической поверхности: а) образующие которой параллельны оси Oz, а направляющая определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1, \\ z = 0; \end{cases}$$

б) образующие которой параллельны оси Oz, а направляющая определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

4.3. Составить уравнение круговой цилиндрической поверхности по следующим данным: а) осью служит ось Ox, радиус направляющей окружности равен a; б) осью служит ось Oy, точка (4; 2; —3) принадлежит поверхности; в) осью служит прямая $\begin{cases} y = 0, \\ z = a, \end{cases}$ радиус направляющей окружности равен a.

4.4. Составить уравнение цилиндрической поверхности, направляющей которой служит окружность, определяемая системой уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$$

а образующие параллельны вектору $\vec{v} = (1; 1; 1)$.

Решение. Точка M $(x; y; z)$ принадлежит данной цилиндрической поверхности тогда и только тогда, когда прямая, проведенная через эту точку по направлению вектора $\vec{v}$, пересекает направляющую линию в некоторой точке N $(X; Y; Z)$. Такую прямую можно представить уравнениями:

$$\begin{cases} x = X + t, \\ y = Y + t, \\ z = Z + t. \end{cases}$$

Перепишем эти уравнения в следующем виде:

$$X = x - t,\ Y = y - t,\ Z = z - t.$$

Эти величины должны удовлетворять уравнениям направляющей линии и потому

$$x - t + y - t + z - t = 0,$$

откуда $t = \frac{x + y + z}{3}$.

Следовательно, $X = x - t = \frac{2x - y - z}{3}$,

$$Y = y - t = \frac{2y - x - z}{3},$$

$$Z = z - t = \frac{2z - x - y}{3}.$$

Подставляя эти выражения во второе уравнение системы, определяющей направляющую, получим искомое уравнение цилиндрической поверхности:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz - \frac{3}{2} = 0.$$

4.5. Составить уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны прямой $x = y = z$, а направляющей служит окружность

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

4.6. Составить уравнение цилиндрической поверхности, зная, что направляющей служит линия

$$\begin{cases} x = y^2 + z^2, \\ x = 2z, \end{cases}$$

а образующие перпендикулярны плоскости направляющей.

4.7. Найти образующие цилиндрической поверхности

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz - 16 = 0,$$

проходящей через точку A (0; 0; 4).

Указание. Запишите параметрические уравнения образующей, проходящей через данную точку A (0; 0; 4) с направляющим вектором $\vec{l} = (l_1; l_2; l_3)$, выразив x, y, z через параметр t. Подставьте в уравнение поверхности полученные выражения. Приравнивая нулю коэффициенты при t и t^2, можно получить два уравнения относительно l_1, l_2, l_3, которые определяются с точностью до пропорциональности.

4.8. Построить изображение цилиндрической поверхности, заданной уравнением $x - y^2 + 4 = 0$.

Решение. Уравнение с двумя переменными x и y определяет цилиндрическую поверхность, образующие которой параллельны оси Oz. За направляющую можно принять линию пересечения поверхности с плоскостью Oxy (см. [2], раздел 2, § 16, а также решение задачи 4.1).

Начнем с построения направляющей линии, которая задается системой уравнений:

$$\begin{cases} x - y^2 + 4 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Уравнение $x - y^2 + 4 = 0$ можно привести к каноническому виду путем параллельного переноса

$$\begin{cases} x = x' - 4, \\ y = y', \\ z = z', \end{cases}$$

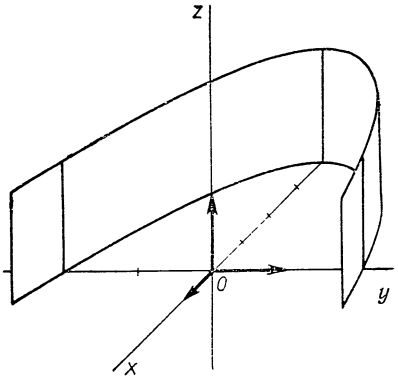

Рис. 21

при котором начало координат переходит в точку O' (—4; 0; 0). В новых координатах получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}(y')^2 = x,\\ z' = 0.\end{cases}$$

Такая система уравнений определяет параболу, у которой вершина расположена в точке O', а ось направлена по оси Ox', совпадающей с осью Ox (рис. 21). Ради уточнения чертежа полезно построить точки пересечения этой параболы с осью Oy. Решая систему уравнений

$$\begin{cases}x - y^2 + 4 = 0,\\ x = 0,\\ z = 0,\end{cases}$$

получим: $x = 0$, $y = \pm 2$, $z = 0$. Отметим на чертеже точки A (0; 2; 0) и B (0; —2; 0) и проведем через них направляющую параболу.

Чтобы получить наглядный чертеж, построим еще одну параболу, образуемую из направляющей параллельным переносом вдоль оси Oz. Проведем еще несколько образующих, соединяя точки этих двух парабол, расположенные на одной параллели к оси Oz.

4.9. Изобразить цилиндрические поверхности, заданные уравнением:

а) $x^2 + 4y = 0$;
б) $3x^2 + 2y^2 - 6 = 0$;
в) $x^2 + y^2 - 2y = 0$.

4.10. Составить уравнение конической поверхности, вершина которой находится в точке O (0; 0; 0), а направляющая определяется системой уравнений:

$$\begin{cases}x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,\\ 5x + 4y - z - 1 = 0.\end{cases}$$

Решение. Пусть M_0 (X; Y; Z) — некоторая точка направляющей. Параметрические уравнения образующей (OM_0) имеют вид: $x = tX$, $y = tY$, $z = tZ$,

откуда при $t \neq 0$ $X = \frac{1}{t}x$, $Y = \frac{1}{t}y$, $Z = \frac{1}{t}z$,

или $X = t'x$, $Y = t'y$, $Z = t'z$,

где $t' = \frac{1}{t}$.

Так как эти координаты должны удовлетворять уравнениям направляющей линии, то

$$5t'x + 4t'y - t'z - 1 = 0,$$

откуда

$$t' = \frac{1}{5x + 4y - z}.$$

Следовательно,

$$X = \frac{x}{5x + 4y - z}, \quad Y = \frac{y}{5x + 4y - z}, \quad Z = \frac{z}{5x + 4y - z}.$$

Подставляя эти выражения в первое из уравнений направляющей линии, получим:

$$\frac{x^2}{(5x + 4y - z)^2} + \frac{y^2}{(5x + 4y - z)^2} + \frac{z^2}{(5x + 4y - z)^2} - 1 = 0.$$

После соответствующих упрощений приходим к искомому уравнению конической поверхности:

$$24x^2 + 15y^2 + 40xy - 10xz - 8yz = 0.$$

4.11. Составить уравнение конической поверхности, зная ее вершину S (0; 0; 8) и направляющую линию

$$\begin{cases} z = 0, \\ y^2 = 4x. \end{cases}$$

Найти образующие этой поверхности, лежащие в плоскости Oxz.

4.12. Составить уравнение поверхности, образованной вращением параболы, заданной системой уравнений:

$$\begin{cases} z^2 = 2x, \\ y = 0, \end{cases}$$

вокруг оси Oz.

Решение. Чтобы получить уравнение поверхности вращения вокруг оси Oz, достаточно подставить вместо x в уравнение образующей линии $\sqrt{x^2 + y^2}$ ([1], § 61 или [2], раздел 2, § 18). Следовательно,

$$z^2 = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

или в равносильной форме

$$z^4 = 4x^2 + 4y^2.$$

4.13. Составить уравнение поверхности, образованной вращением прямой, заданной уравнениями

$$\begin{cases} x = 0, \\ z = 2y, \end{cases}$$

вокруг оси Oz. Указать вид этой поверхности, построить ее изображение.

4.14. Составить уравнение поверхности, образованной вращением окружности, заданной системой уравнений:

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = 1, \\ z = 0, \end{cases}$$

вокруг: а) оси Ox; б) оси Oy.

4.15. Составить уравнение конической поверхности, образованной прямыми, проходящими через начало координат и наклоненными к оси Oz под углом 45°.

Указание. Воспользуйтесь уравнением поверхности вращения.

4.16. Составить уравнение конической поверхности вращения по следующим данным: а) вершина находится в точке S (0; 0; 1), осью служит ось Oz, осевой угол 30°; б) вершина находится в начале координат, осью служит ось Ox, поверхность проходит через точку M (1; 3; —4); в) известны две образующие

$$\begin{cases} y = 0, \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y = 0, \\ x - z = 0 \end{cases}$$

и точка поверхности N (0; 1; 1).

§ 15. ИССЛЕДОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПО ИХ КАНОНИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ

Литература: [1], § 61, 63, 64; [2], раздел 2, § 6, 18—22.

4.17. Написать уравнение сферы, зная, что ее центр находится в точке A (1; —2; 3), а радиус равен 5.

Указание. Воспользуйтесь [1], § 61, формула (4), или [2], раздел 2, § 6.

4.18. Найти координаты центра и радиус сферы, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 12x + 4y - 6z = 0.$$

Указание. Выделите полные квадраты с x, y, z.

4.19. Выяснить, как расположена точка P (3; 1; 5) относительно сферы, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 4z = 0.$$

Указание. Сравните расстояние от точки P до центра с длиной радиуса сферы.

4.20. Составить уравнение сферы с центром в точке A (1; —2; 3), если известно, что сфера касается плоскости

$$x + 4y - 5z - 20 = 0.$$

Решение. Уравнение сферы с центром в точке A имеет вид:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2,$$

где a, b, c — координаты точки A, r — радиус сферы. Радиус r можно найти как расстояние от центра сферы до касательной плоскости. Используя формулу (5) из [1], § 49.5, получим:

$$r = \frac{|1 + 4 \cdot (-2) - 5 \cdot 3 - 20|}{\sqrt{1^2 + 4^2 + (-5)^2}} = \sqrt{42}.$$

Следовательно, искомое уравнение имеет вид:

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 42.$$

4.21. Выяснить, как расположена каждая из плоскостей

$$2x + 2y + z + 2 = 0,$$
$$2x + 2y + z + 5 = 0,$$
$$2x + 2y + z + 11 = 0$$

относительно сферы

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 4)^2 - 25 = 0.$$

Указание. Сравните расстояния от центра сферы до каждой из плоскостей с длиной радиуса сферы.

4.22. Доказать, что прямая, заданная системой уравнений

$$\begin{cases} 6x - 2y - 3z - 38 = 0, \\ x - 2y + 2z + 2 = 0, \end{cases}$$

касается сферы, определяемой уравнением

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 49.$$

Указание. Найдите расстояние от центра сферы до прямой и сравните его с длиной радиуса сферы (см. задачи 2.119—2.121).

4.23. Доказать, что сферы, определяемые уравнениями

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 7 = 0,$$

касаются одна другой внешним образом.

Решение. Центр первой сферы, радиус которой равен 1, находится в начале координат. Переписывая уравнение второй сферы в виде

$$(x - 4)^2 + y^2 + z^2 = 9,$$

видим, что ее центр C имеет координаты (4; 0; 0), а радиус равен 3.

Таким образом, расстояние между центрами данных сфер

$$d = |OC| = 4.$$

Поскольку сумма радиусов также равна 4, то сферы касаются одна другой внешним образом.

4.24. Составить уравнение плоскости, касающейся в точке P (7; —1; 5) сферы, заданной уравнением

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 2)^2 = 49.$$

Указание. Если C — центр сферы, то вектор $\overrightarrow{CP}$ — нормальный вектор искомой плоскости.

4.25. Составить уравнения плоскостей, проходящих через точку A (0; 0; —2), параллельных оси Oy и касающихся сферы, определяемой уравнением

$$(x + 1)^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 1.$$

4.26. Составить уравнения сфер, центры которых расположены в точке C (—12; 8; 9) и которые касаются сферы, заданной уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0.$$

4.27. Составить уравнения сфер, проходящих через окружность, определяемую системой уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 11 = 0, \\ z = 0 \end{cases}$$

и касающихся плоскости, заданной уравнением $x + y + z - 5 = 0$.

Указание. Центр искомой сферы лежит на прямой, проходящей через центр данной окружности перпендикулярно к плоскости этой окружности. Расстояния от центра сферы до данной плоскости и до какой-либо точки данной окружности одинаковы.

4.28. Составить уравнения сфер, вписанных в цилиндрическую поверхность, заданную уравнением $x^2 + y^2 = 1$, и касающихся плоскости, определяемой уравнением $z - 2 = 0$.

Указание. Центр сферы лежит на оси цилиндра и удален от данной плоскости на расстояние, равное 1.

4.29. Составить уравнения сфер, вписанных в цилиндрическую поверхность, заданную уравнением $x^2 + y^2 - 2x = 0$, и касающихся плоскости, уравнение которой имеет вид:

$$3x - 6y - 2z + 6 = 0.$$

4.30. Определить вид поверхности второго порядка, заданной уравнением

$$4x^2 + 4y^2 - z^2 - 16y + 20 = 0.$$

Построить ее изображение.

Решение. Выделив полный квадрат с y, запишем уравнение в следующем виде:

$$x^2 + (y - 2)^2 - \frac{1}{4} z^2 = -1.$$

Произведем параллельный перенос системы координат, поместив начало координат в точку O' (0; 2; 0). Такой перенос выражается формулами

$$\begin{cases} x = x', \\ y = y' + 2, \\ z = z'. \end{cases}$$

После этого переноса уравнение данной поверхности преобразуется к виду:

$$x'^2 + y'^2 - \frac{z'^2}{4} = -1.$$

Сравнивая его с уравнением (9), приведенным в [1], § 63.4, или с уравнением (4), приведенным в [2], раздел 2, § 20, заключаем, что оно определяет двуполостный гиперболоид вращения.

Изображение такого гиперболоида приведено на рис. 22.

4.31. Определить вид поверхности второго порядка, заданной уравнением $x^2 + 2y^2 + z^2 - 2 = 0$. Построить ее изображение.

4.32. Определить вид поверхностей второго порядка, заданных следующими уравнениями:

а) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 24 = 0$;
б) $x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 0$;
в) $x^2 - 2y^2 + 3z^2 + 6 = 0$;
г) $2x^2 + y^2 - 8z = 0$;
д) $x^2 - 2y^2 - 3z^2 = 0$;
е) $2x^2 - 4y - z^2 = 0$;
ж) $x^2 = 6z$;
з) $9y^2 - 16x^2 - 144 = 0$.

Построить изображения этих поверхностей.

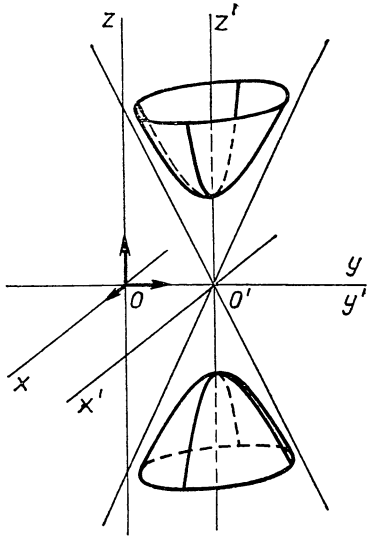

Рис. 22

4.33. Определить вид следующих поверхностей второго порядка:

а) $x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 2x + 4y - 6z = 0$;
б) $z = x^2 + 3y^2 - 6y - 1$;
в) $4x^2 - y^2 + 4z^2 + 4y + 32z + 56 = 0$.

Построить их изображения.

4.34. Определить вид поверхности второго порядка, заданной уравнением $z = xy$. Построить ее изображение.

Решение. Произведем поворот системы координат вокруг оси Oz на угол 45°. Такой поворот выражается формулами

$$\begin{cases} x = x'\dfrac{\sqrt{2}}{2} - y'\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ y = x'\dfrac{\sqrt{2}}{2} + y'\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ z = z'. \end{cases}$$

После такого преобразования системы координат уравнение данной поверхности получит вид:

$$\frac{x'^2}{2} - \frac{y'^2}{2} = z'$$

или, что то же:

$$\frac{x'^2}{1} - \frac{y'^2}{1} = 2z'.$$

Сравнивая его с уравнением (2), приведенным в [1], § 64, 2, или с уравнением (5), приведенным в [2], раздел 2, § 21, замечаем,

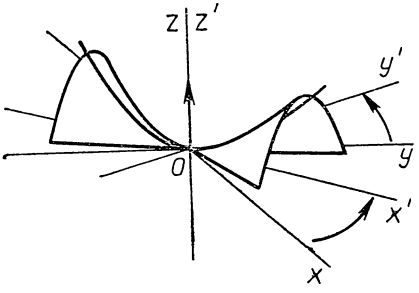

Рис. 23

что данное уравнение определяет гиперболический параболоид.

Изображение этой поверхности приведено на рисунке 23.

4.35. Установить вид поверхностей второго порядка, заданных следующими уравнениями:

а) $xz + z^2 + z = 0$,

б) $x^2 + xy - xz - yz - x + z = 0$.

Построить изображения этих поверхностей.

4.36. Построить сечения координатными плоскостями поверхностей, заданных следующими уравнениями:

а) $2x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 3 = 0$; б) $9y^2 + x^2 + 18z = 0$;
в) $4x^2 + y^2 - z^2 = 0$; г) $2x^2 - 3y^2 + 2z^2 + 12 = 0$;
д) $3x^2 - y^2 - 4z^2 + 12 = 0$; е) $x^2 + y^2 - z - 2 = 0$.

4.37. Найти радиус окружности, по которой плоскость, определяемая уравнением $z = a$, пересекает сферу $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

4.38. Найти полуоси и вершины эллипса, по которому плоскость $x - 2 = 0$ пересекает эллипсоид, определяемый уравнением

$$3x^2 + 4y^2 + 12z^2 - 48 = 0.$$

4.39. Найти вершину и фокальный параметр параболы, по которой плоскость $y + 6 = 0$ пересекает параболоид, определяемый уравнением

$$4x^2 - 5y^2 + 120z = 0.$$

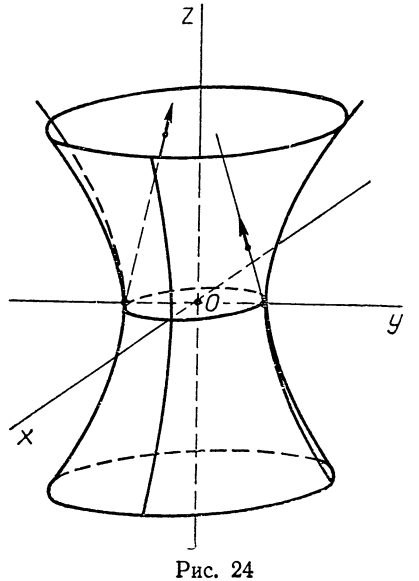

Рис. 24

4.40. Найти прямолинейные образующие однополостного гиперболоида, заданного уравнением $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$, перпендикулярные оси Oy.

Решение. Воспользуемся уравнениями прямолинейных образующих (см. рис. 24) этой поверхности первого вида, приведенными в [2], раздел 2, § 22:

$$\begin{cases} p_1\left(\frac{x}{3} + \frac{z}{4}\right) = q_1\left(1 + \frac{y}{2}\right), \\ q_1\left(\frac{x}{3} - \frac{z}{4}\right) = p_1\left(1 - \frac{y}{2}\right). \end{cases}$$

Перепишем эту систему уравнений в следующем виде:

$$\begin{cases} 4p_1x - 6q_1y + 3p_1z - 12q_1 = 0, \\ 4q_1x + 6p_1y - 3q_1z - 12p_1 = 0 \end{cases}$$

и найдем направляющий вектор $\vec{v}$ искомой образующей:

$$\vec{v} = \left(\begin{vmatrix} -6q_1 & 3p_1 \\ 6p_1 & -3q_1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 3p_1 & 4p_1 \\ -3q_1 & 4q_1 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 4p_1 & -6q_1 \\ 4q_1 & 6p_1 \end{vmatrix} \right),$$

откуда

$$\vec{v} = (3(q_1^2 - p_1^2); \ 4p_1q_1; \ 4(p_1^2 + q_1^2)).$$

По условию вектор $\vec{v}$ должен быть перпендикулярен оси Ox. Поэтому

$$\vec{v} \cdot \vec{i} = 0,$$

где $\vec{i} = (1; 0; 0)$, откуда $3(q_1^2 - p_1^2) = 0$.

Следовательно,

$$p_1 = \pm q_1.$$

Так как достаточно знать отношение чисел p_1 и q_1, которые не могут быть одновременно равными нулю, то полагаем $q_1 = 1$ и находим $p_1 = \pm 1$. Подставляя значения p_1 и q_1 в преобразованную систему уравнений, находим:

$$\begin{cases} 4x - 6y + 3z - 12 = 0, \\ 4x + 6y - 3z - 12 = 0 \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} 4x + 6y + 3z + 12 = 0, \\ 4x - 6y - 3z + 12 = 0. \end{cases}$$

Аналогично можно найти прямолинейные образующие второго вида:

$$\begin{cases} p_2\left(\frac{x}{3} - \frac{z}{4}\right) = q_2\left(1 + \frac{y}{2}\right) \\ q_2\left(\frac{x}{3} + \frac{z}{4}\right) = p_2\left(1 - \frac{y}{2}\right). \end{cases}$$

Соответствующие выкладки проведите самостоятельно.

4.41. Найти прямолинейные образующие гиперболоида, заданного уравнением $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{16} = 1$, проходящие через точку A (6; 2; 8).

Указание. См. [2], раздел 2, § 22.

4.42. Найти те прямолинейные образующие гиперболического параболоида $4y^2 - x^2 = z$, которые образуют с прямой $\begin{cases} x + y = 0, \\ z = 0 \end{cases}$ угол 45°.

4.43. Найти прямолинейные образующие гиперболического параболоида $x^2 - y^2 = 4z$, параллельные плоскости $x + y + z - 1 = 0$.

4.44. Найти множество точек, равноудаленных от двух перпендикулярных между собой скрещивающихся прямых.

Указание. Одну из данных прямых следует принять за ось координат; другой осью координат может служить общий перпендикуляр к данным скрещивающимся прямым.

ОТВЕТЫ

Глава I

1.7. $\overrightarrow{A_1M} = \left(-1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

1.8. $\overrightarrow{BC} = (-1;\ 1;\ 0)$, $\overrightarrow{BD} = (-1;\ 0;\ 1)$.
$\overrightarrow{CD} = (0;\ -1;\ 1)$, $\overrightarrow{AE} = \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 0\right)$.
$\overrightarrow{CF} = \left(\frac{1}{3};\ -\frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{EF} = \left(-\frac{1}{6};\ -\frac{1}{6};\ \frac{1}{3}\right)$.

1.9. $\overrightarrow{AC} = (0;\ 1;\ 1)$, $\overrightarrow{AE} = \left(\frac{1}{2};\ 0;\ 0\right)$, $\overrightarrow{EC_1} = \left(\frac{1}{2};\ 1;\ 1\right)$, $\overrightarrow{B_1C_1} = (0;\ 1;\ 0)$,
$\overrightarrow{FG} = \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 1\right)$, $\overrightarrow{GD} = \left(-\frac{1}{2};\ 0;\ -1\right)$, $\overrightarrow{A_1G} = \left(-\frac{1}{2};\ 1;\ 1\right)$.

1.11. $Q\ (2;\ -4;\ 3)$, $S\ (0;\ 0;\ -1)$.

1.12. $O'\ (-4;\ 0;\ 1)_R$, $\vec{e}_1' = (1;\ 5;\ 0)_R$, $\vec{e}_2' = (-2;\ -1;\ 0)_R$, $\vec{e}_3' = (3;\ -1;\ 1)_R$.

1.14. $O'\ (-3;\ 2;\ 8)_R$.

1.15. $\vec{e}_1 = \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2};\ 0\right)_{R'}$, $\vec{e}_2 = \left(-\frac{3}{4};\ 0;\ 1\right)_{R'}$, $\vec{e}_3 = (1,\ -1,\ 0)_{R'}$.

1.16. $$\begin{cases} x = \frac{1}{2}(-x' + y' - z' + 1), \\ y = z', \\ z = \frac{1}{2}(-x' - y' - z' + 1). \end{cases}$$

1.19. $M\ (-1;\ 1;\ -1)_R$.

1.20. $$\begin{cases} x = x', \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}y' - \frac{\sqrt{2}}{2}z', \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}y' + \frac{\sqrt{2}}{2}z' + 1. \end{cases}$$

1.21. $$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - z), \\ y' = y, \\ z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + z) \end{cases} \quad \text{и } N\ (-\sqrt{2};\ 1;\ 0)_{R'}.$$

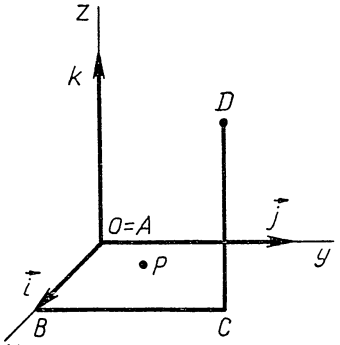

Рис. 25

1.22. $\begin{cases} x' = x, \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(y + z - 1), \\ z' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(z - y + 1) \end{cases}$

и $K\left(0;\ \dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{5\sqrt{2}}{2}\right)_{R'}$.

1.25. D (10; 1; —2).
1.28. C_1 (2; 4; 9), C_2 (—8; —6; —1), C_3 (10, 12, 17).
1.29. A (—5; —1; 2), B (—3; 1; 8).
1.30. C $(2x_2 - x_1;\ 2y_2 - y_1;\ 2z_2 - z_1)$.

1.32. $\lambda_1 = 3\dfrac{1}{2}$, $\lambda_2 = \dfrac{1}{5}$, $\lambda_3 = -\dfrac{1}{2}$.

1.35. $A\left(4\dfrac{2}{3};\ -8;\ 12\right)$, $M_2\left(1\dfrac{1}{3};\ -2;\ 2\right)$,

$M_3\left(-\dfrac{1}{3};\ 1;\ -3\right)$, $B\left(-3\dfrac{2}{3};\ 7;\ -13\right)$.

1.36. а) $\left(-1\dfrac{2}{3};\ 2\dfrac{2}{3};\ 3\dfrac{2}{3}\right)$; б) (—15; 16; 17).

1.40. Если оси координат направить по трем ребрам куба так, чтобы изъятое ребро располагалось в плоскости Oxy параллельно оси Oy, то центр тяжести будет находиться в точке $P\left(\dfrac{5}{11}a;\ \dfrac{1}{2}a;\ \dfrac{6}{11}a\right)$, где a — длина ребра куба.

1.41. Если принять точку A за начало координат и направить (AB) по оси Ox, а (BC) параллельно оси Oy (рис. 25), то центр тяжести будет в точке $P\left(\dfrac{5}{6};\ \dfrac{1}{2};\ \dfrac{1}{6}\right)$.

1.43. $x = -2$.
1.50. $14\sqrt{3}$.
1.51. $15\sqrt{3}$.
1.52. $12\sqrt{2}$.
1.55. $-7\vec{i} - 6\vec{j} + 5\vec{k}$.
1.56. При любом z.
1.57. $z = 5$.
1.58. $x = 30$, $y = 51$.
1.59. $-3\vec{i} - 8\vec{j} - 4\vec{k}$; 0;

$-57\vec{i} - 152\vec{j} - 76\vec{k}$; $\sqrt{89}$.

1.60. $\dfrac{3}{2}\sqrt{61}$.

1.62. $|BD| = \dfrac{25}{\sqrt{106}}$.

1.64. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 24$, $(\vec{w}, \vec{v}, \vec{u}) = -24$, если правый базис считать положительно ориентированным.

1.65. $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 35$. Если считать правый базис положительно ориентированным, то тройка векторов $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ — правая, а тройка векторов $\vec{v}, \vec{w}, -\vec{u}$ — левая.

1.66. $\vec{r} = 121\,(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$.

1.67. $11;\ 14\vec{i} - 56\vec{k};\ -55\vec{i} + 66\vec{j} + 11\vec{k};$
$8\vec{i} + 7\vec{j} + 2\vec{k};\ 4;$
$64\vec{i} - 84\vec{j} + 16\vec{k};\ -5\vec{i} - 18\vec{j} + 83\vec{k}.$

1.68. 1) Нет; 2) нет; 3) да.

1.70. $\frac{1}{3}$.

1.71. 3.

1.72. (0; 0; 4) и (0; 0; —2).

1.74. $\left(1;\ 0;\ 1\frac{1}{2}\right)$, $R = 2{,}5$.

1.75. $\left(0;\ 1\frac{3}{8};\ 0\right)$.

1.76. 5.

1.77. $\left(\frac{5}{6};\ 0;\ -1\frac{1}{6}\right)$.

1.78. $\left(\frac{1}{2};\ 1;\ 1\frac{1}{2}\right)$, $R = \frac{1}{2}\sqrt{14}$.

1.79. 135°.

1.80. 1) $\cos(\widehat{\vec{v}, Ox}) = \frac{1}{3}$, $\cos(\widehat{\vec{v}, Oy}) = -\frac{2}{3}$,
$\cos(\widehat{\vec{v}, Oz}) = \frac{2}{3}$;
2) $\sin(\widehat{\vec{v}, Oxy}) = \frac{2}{3}$, $\sin(\widehat{\vec{v}, Oxz}) = -\frac{2}{3}$,
$\sin(\widehat{\vec{v}, Oyz}) = \frac{1}{3}$.

1.81. 45° или 135°.

1.82. $\cos\varphi = \cos\alpha \cdot \cos\beta$ (см. рис. 26).

1.83. $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$.

1.84. 60°.

1.85. $\arccos\frac{3}{\sqrt{11}}$.

1.86. 14.

1.87. $\sqrt{26}$.

1.88. $2\sqrt{3}$.

1.89. $10\sqrt{21} + 2\sqrt{42} + 2\sqrt{26}$.

1.91. A' (1; 4; 7), B' (—2; —2; 5), C' (0; —5; 11), D' (3; 1; 13).

1.92. 49.

1.93. 17.

1.95. $12\frac{5}{6}$.

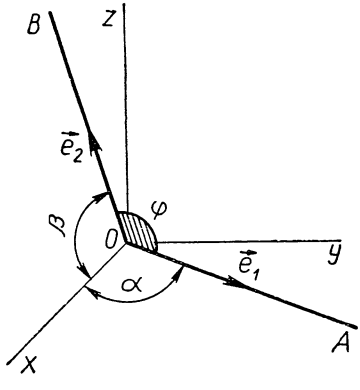

Рис. 26

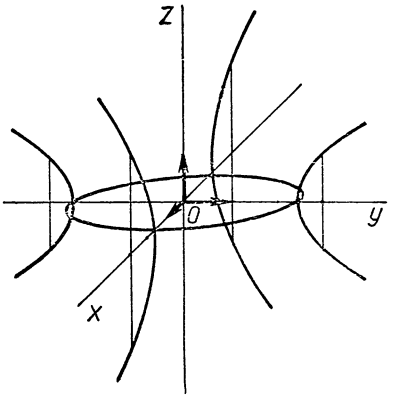

Рис. 27

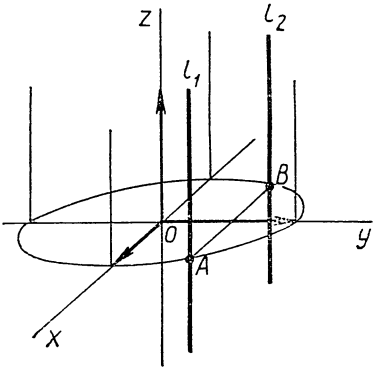

Рис. 28

1.96. $\frac{1}{3}$.

1.97. $h_A = \frac{6}{\sqrt{214}}$, $h_B = \frac{6}{\sqrt{59}}$, $h_C = \frac{18}{\sqrt{323}}$, $h_D = \frac{9}{\sqrt{38}}$.

1.98. $V = 13$, $S = \sqrt{1411} + \sqrt{86} + \frac{1}{2}\sqrt{3099} + \frac{1}{2}\sqrt{1419}$, $h = \frac{26}{\sqrt{1411}}$.

1.104. Коническая поверхность с вершиной в начале координат.

1.105. а) Плоскость Oyz; б) плоскость, проходящая через точку (1; 0; 0) параллельно плоскости Oyz; в) плоскость, проходящая через точку (0; —5; 0) параллельно плоскости Oxz; г) начало координат; д) ось Oz; е) пустое множество точек; ж) поверхность параболического цилиндра; з) объединение трех координатных плоскостей; и) объединение двух плоскостей, параллельных плоскости Oxz; к) поверхность кругового цилиндра с осью Ox радиуса $R = 2$; л) сфера радиуса $R = 4$ с центром в точке (1; 2; 3); м) объединение плоскости, проходящей через точку (1; 0; 0) параллельно плоскости Oyz и сферы радиуса $R = 1$ с центром в начале координат; н) объединение плоскости Oyz и плоскости, ей параллельной и проходящей через точку (3; 0; 0); о) коническая поверхность с вершиной в начале координат.

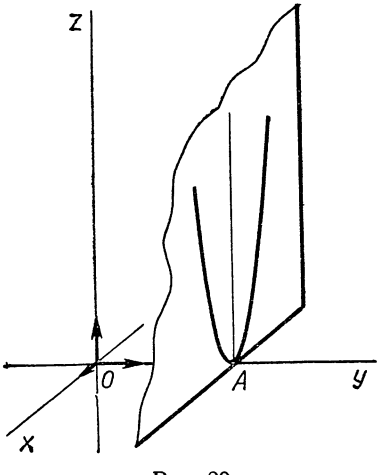

Рис. 29

1.107. $(2 \pm 2\sqrt{5}; 0; 0)$, $(0; \pm 4; 0)$, $(0; 0; 8)$, $(0; 0; -2)$.

1.109. См. рис. 27.

1.110. а) Ось Oz; б) прямая, проходящая через точку (5; 0;—4) параллельно оси Oy; в) пара прямых (рис. 28), параллельных оси Oz и проходящих соответственно через точки $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$ и $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$; г) (0; 3; 0) д) парабола, лежащая в плоскости $y - 3 = 0$ с вершиной $A(0; 3; 0)$ и осью, параллельной оси Oz (рис. 29).

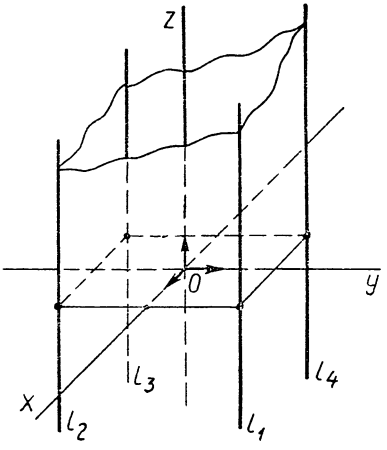

Рис. 30

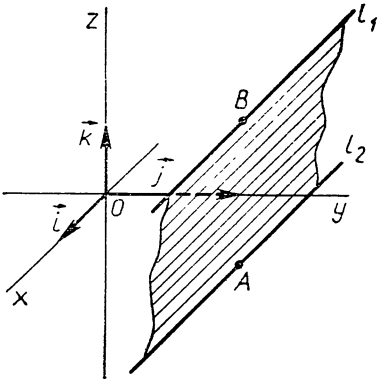

Рис. 31

1.113. а) Открытое полупространство, ограниченное плоскостью Oyz и включающее точку (1; 0; 0); б) замкнутое полупространство, ограниченное плоскостью $y = 1$ и включающее начало координат; в) множество точек, расположенных на сфере радиуса $R = 1$ с центром в начале координат и вне этой сферы; г) внутренняя область кругового цилиндра с осью Oz радиуса $R = 1$.

1.114. а) «Бесконечная призма» (рис. 30) с ребрами, параллельными координатной оси Oz и проходящими через точки (± 2; ± 2; 0); б) пустое множество точек; в) куб, ребра которого параллельны координатным осям; г) пустое множество точек; д) прямая, проходящая через точку (1; 0; 0) параллельно оси Oz; е) полоса (рис. 31), ограниченная прямыми, параллельными оси Ox и проходящими соответственно через точки (0; 1; —1) и (0; 1; 1).

1.117. $xyz = 0$.

1.118. $(x^2 + y^2)(x^2 + z^2)(y^2 + z^2) = 0$.

1.120. $\dfrac{x^2}{b^2} - \dfrac{y^2 + z^2}{c^2} = 1$, где $c^2 = a^2 - b^2$.

1.121. $\dfrac{x^2 + y^2}{r^2} + \dfrac{z^2}{\left(\dfrac{r}{2}\right)^2} = 1$.

1.123. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 < 1, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$

1.124. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \\ z = 0. \end{cases}$

1.125. $\begin{cases} 10x + 2y - 35 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

1.127. Плоскость, проходящая перпендикулярно отрезку AB через его середину.

1.129. Плоскость, параллельная данным плоскостям.

1.130. а) Плоскость, проходящая через точку A перпендикулярно к прямой p; б) поверхность параболического цилиндра.

2. 3. $4x - 5y - z + 13 = 0.$
2. 4. $(z_2 - z_1)\,x + (x_1 - x_2)\,z - x_1z_2 + x_2z_1 = 0.$
2. 5. $p_3y - p_2z = 0.$
2. 6. $9y + 7z - 3 = 0.$
2. 7. $8x + 44y + 23z + 9 = 0.$
2. 8. $x + y = 0.$
2. 9. $x + y + z = 0.$
2.10. $6x - 7y + 6z - 94 = 0.$
2.11. $2x - 3y + z - 14 = 0.$
2.14. Плоскость: а) параллельна оси Oy; б) параллельна плоскости Oxz; в) проходит через ось Ox; г) проходит через начало координат.
2.16. а) Лежат, б) не лежат, в) лежат.
2.17. $z = 2\frac{3}{7}.$
2.23. а) $35x - y + 11z + 37 = 0;$
б) $10x + 7y + 15z - 108 = 0.$
2.24. а) Плоскости различны и параллельны; б) плоскости совпадают; в) плоскости пересекаются; г) плоскости пересекаются.
2.26. $x - 2y + 4z - 17 = 0.$
2.27. $2x + 3y + 4z - 1 = 0,\ x + 3y + 9 = 0,\ z - 1 = 0.$
2.29. $\alpha\,(x - y - z - 1) + \beta\,(2x + 3y + 4z - 5) = 0.$
2.30. $\alpha y + \beta z = 0.$
2.31. $3x + 2y + 5z - 1 = 0.$
2.32. $(p_0A_1 - q_0A_2)x + (p_0B_1 - q_0B_2)y + (p_0C_1 - q_0C_2)\,z + (p_0D_1 - q_0D_2) = 0,$
где $p_0 = A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2,$
$q_0 = A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1.$
2.34. $A = 4\frac{1}{3},\ D = 7\frac{2}{3}.$
2.35. Плоскость Oxz.
2.36. $\begin{cases} A \neq 0, \\ B = 2A + D, \\ C = A - D. \end{cases}$
2.39. При $\lambda \neq -3.$
2.40. $2x - 3z = 0.$
2.41. а) 3; б) $3\frac{2}{3}$; в) $2\frac{2}{7}$; г) $2\frac{1}{5}$.
2.42. 7.
2.43. 0; $\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
2.44. $\frac{5}{6}.$
2.45. $\frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$
2.47. $x + y + z = 0$ и $x + y + z - 6 = 0.$
2.49. Пара плоскостей, параллельных данным плоскостям.
2.50. Пара плоскостей, проходящих через линию пересечения данных плоскостей.
2.52. (0; 0; 3).
2.53. $3x - z = 0$ и $x - z = 0.$
2.57. $x + 20y + 7z = 0$ и $x - z = 0.$
2.58. Пучок плоскостей $\alpha x + \beta y = 0$ при $A = B = 0$, но $C \neq 0$. Единственная плоскость $Bx - Ay = 0$, если либо $A \neq 0$, либо $B \neq 0$, либо одновременно $A \neq 0$ и $B \neq 0$.

2.59. а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{6}$.

2.60. $\cos\varphi_1 = \frac{|A|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$, $\cos\varphi_2 = \frac{|B|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$,

$\cos\varphi_3 = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

2.62. $(\sqrt{3}-1;\ 1;\ 1)$.

2.65. а) $\begin{cases} x' = x, \\ y' = y, \\ z' = -z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 2-x, \\ y' = y, \\ z' = z; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x' = 3-y, \\ y' = 3-x, \\ z' = z. \end{cases}$

2.66. (13; 0; 3).

2.67. (7; 1; 0).

2.68. (4; —1; 3).

2.69. (1; 3; —2).

2.71. $\begin{cases} x = 0, \\ y = t, \\ z = 0, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0, \\ z = 0. \end{cases}$

2.72. $\begin{cases} x = 0, \\ y = 1, \\ z = t, \end{cases}$ $\begin{cases} x = 0, \\ y - 1 = 0. \end{cases}$

2.73. а) $\begin{cases} x = 1+2t, \\ y = -3+7t, \\ z = 0{,}5+2t, \end{cases}$ $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{7} = \frac{z-0{,}5}{2}$;

б) $\begin{cases} x = 1+2t, \\ y = -3, \\ z = 0{,}5+t, \end{cases}$ $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-0{,}5}{1}$;

в) $\begin{cases} x = 1+2t, \\ y = -4+t, \\ z = 5-3t, \end{cases}$ $\frac{x-1}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-5}{-3}$;

г) $\begin{cases} x = at, \\ y = bt, \\ z = ct, \end{cases}$ $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$;

д) $\begin{cases} x = 1, \\ y = 1, \\ z = t, \end{cases}$ $\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{1}$;

е) $\begin{cases} x = 1-t, \\ y = t, \\ z = 0, \end{cases}$ $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$.

2.74. а) $\begin{cases} x = t, \\ y = 2t, \\ z = -t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = x_0 + l_1 t, \\ y = y_0 + l_2 t, \\ z = z_0 + l_3 t. \end{cases}$

2.75. $\begin{cases} l_3 x - l_1 z + (l_1 z_0 - l_3 x_0) = 0, \\ l_3 y - l_2 z + (l_2 z_0 - l_3 y_0) = 0, \text{ если } l_3 \neq 0. \end{cases}$

2.77. а) $\begin{cases} x = t, \\ y = 0, \\ z = -t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = t-0{,}8, \\ y = t-1{,}6, \\ z = t; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x = 1-2t, \\ y = -3+3t, \\ z = 4+7t; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = 1+t, \\ y = 0, \\ z = 2-t. \end{cases}$

2.78. $\frac{x-5{,}5}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{0}$.

2.79. $\begin{cases} 7x - z - 4 = 0, \\ 7y - 12z + 1 = 0. \end{cases}$

2.83. а) Прямая параллельна оси Ox; б) прямая совпадает с осью Oz; в) прямая параллельна плоскости Oxy; г) прямая проходит через начало координат; д) прямая пересекает ось Oz и все координатные плоскости.

2.87. а) Пересекаются; б) прямая принадлежит плоскости; в) не пересекаются; г) не пересекаются; д) пересекаются.

2.89. $t = -5$.

2.92. а) $31x + 3y + 11z = 0$, б) $x - 5y + 6z - 16 = 0$,
в) $7x - 4y - 5z - 17 = 0$.

2.93. $2x - 4y - z - 2 = 0$.

2.94. а) $l_3x - l_1z = 0$; б) $x = 0$; в) $z = 0$;
г) $\alpha x + \beta z = 0$, где α и β — любые действительные числа, одновременно не равные нулю.

2.97. а) Различные параллельные прямые; б) прямые пересекаются в точке (0; 1; 2); в) прямые совпадают; г) скрещивающиеся прямые.

2.100. а) $\dfrac{x+1}{7} = \dfrac{y-3}{5} = \dfrac{z-4}{-1}$;

б) $\dfrac{x+1}{0} = \dfrac{y-3}{1} = \dfrac{z-4}{1}$ или $\begin{cases} x + 1 = 0, \\ y - z + 1 = 0. \end{cases}$

2.101. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z}{3}$.

2.102. Прямая совпадает с осью Ox.

2.103. а) Плоскости имеют единственную общую точку (2; —2; 3);
б) плоскости не имеют общей точки и попарно пересекаются;
в) плоскости различны и пересекаются по одной прямой;
г) плоскости различны и не имеют общей точки; первая и третья плоскости параллельны, вторая их пересекает;
д) плоскости имеют единственную общую точку (1; 2; —2).

2.104. а) $\arccos\dfrac{16}{21}$; б) $\arccos\dfrac{4}{\sqrt{35}}$; в) $\dfrac{\pi}{2}$.

2.105. Прямая образует с осями Ox, Oy, Oz углы, косинусы которых соответственно равны:

$$\frac{|l_1|}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}}, \quad \frac{|l_2|}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}}, \quad \frac{|l_3|}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}}.$$

2.106. $\cos\varphi = \dfrac{1}{3}$.

2.107. $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{\pm\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha - p^2}} = \dfrac{z}{p}$, где —

p — параметр, принимающий любые действительные значения.

2.108. $\arcsin\dfrac{5}{63}$.

2.109. Прямая образует с плоскостями Oyz, Oxz, Oxy углы, синусы которых соответственно равны

$$\frac{|l_1|}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}}, \quad \frac{|l_2|}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}}, \quad \frac{|l_3|}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2}}.$$

2.112. Задача имеет решения в случаях, когда данная прямая пересекает данную плоскость или лежит на ней.

1) При $Al_1 + Bl_2 + Cl_3 \neq 0$ имеется единственная искомая прямая, она определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ l_1(x - x_0) + l_2(y - y_0) + l_3(z - z_0) = 0, \end{cases}$$

где через x_0, y_0, z_0 обозначены координаты точки пересечения данной прямой с данной плоскостью.

2) При $Al_1 + Bl_2 + Cl_3 = 0$ и $Aa + Bb + Cc + D = 0$ искомых прямых бесконечное множество; каждая из этих прямых определяется системой уравнений того же вида, но за x_0, y_0, z_0 принимаются координаты любой точки данной плоскости.

3) Если $Al_1 + Bl_2 + Cl_3 = 0$, но $Aa + Bb + Cc + D \neq 0$, то задача не имеет решения.

2.113. Одну прямую, если направляющие векторы данных прямых неколлинеарны, и бесконечное множество прямых, если эти векторы коллинеарны.

2.114. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-4}{-5} = \dfrac{z+6}{6}$.

2.115. а) $3x + 2y - 4z = 0$;
б) $8x + 9y + 7z + 36 = 0$.

2.120. $\left(1\dfrac{3}{14};\ -1\dfrac{4}{7};\ 2\dfrac{9}{14}\right)$.

2.121. $\sqrt{22}$.

2.122. а) 9; б) $\sqrt{38}$.

2.123. $\sqrt{3}$.

2.124. (2; 9; 6).

2.126. а) $\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y, \\ z' = -z; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y, \\ z' = 2 - z; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x' = \dfrac{1}{3}(8 - 2x + 2y - z), \\ y' = \dfrac{1}{3}(4 + 2x + y - 2z), \\ z' = \dfrac{1}{3}(16 - x - 2y - 2z). \end{cases}$

2.127. (3; 3; 2) и (—1; —1; —4).

2.128. $(Bl_3 - Cl_2)(x - x_0) + (Cl_1 - Al_3)(y - y_0) + (Al_2 - Bl_1)(z - z_0) = 0$.

Глава III

3.14. а) 0°; б) 60°.

3.19. а) Куб с вершинами (0; 0; 0), (1; 0; 0), (1; 1; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1), (1; 0; 1), (1; 1; 1), (0; 1; 1);
б) четырехугольная пирамида с вершинами (0; 0; 0), (2; 0; 0), (2; 2; 0), (0; 2; 0), (1; 1; 1); в) тетраэдр с вершинами (0; 0; 0), (—1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1);
г) параллелепипед с вершинами (±1; 0; 0), (0; ±1; 0), (±1; 0; 2), (0; ±1; 2).

3.20. а) $\begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ -2 \leqslant y \leqslant 2, \\ -1 \leqslant z \leqslant 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0, \\ z \geqslant -2, \\ x + 2y + z - 2 \leqslant 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} z \geqslant 0, \\ 2x + z - 4 \leqslant 0, \\ 2x - z + 4 \geqslant 0, \\ 4y + z - 4 \leqslant 0, \\ 4y - z + 4 \geqslant 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - 2y \geqslant 0, \\ x - 2y - 4 \leqslant 0, \\ 0 \leqslant y \leqslant 2, \\ 0 \leqslant z \leqslant 3. \end{cases}$

3.22. См. ответ к задаче 3.19.

3.23. D (3; —7; 4), B' (8; 10; 11), C' (11; 3; 14), D' (10; 1; 12).

3.24. $\begin{cases} 20x + 3y - 13z + 13 \geqslant 0, \\ 20x + 3y - 13z - 47 \leqslant 0, \\ 80x + 3y - 73z + 73 \leqslant 0, \\ 80x + 3y - 73z + 133 \geqslant 0, \\ y - z + 1 \leqslant 0, \\ y - z + 11 \geqslant 0. \end{cases}$

3.28. Существуют четыре куба, удовлетворяющих условиям задачи. Один куб имеет вершины A (1; 0; 0), B (0; 1; 0), C (1; 2; 0), D (2; 1; 0), A' (1; 0; $\sqrt{2}$), B' (0; 1; $\sqrt{2}$), C' (1; 2; $\sqrt{2}$), D' (2; 1; $\sqrt{2}$); этот куб определяется системой неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{2}, \\ x + y - 1 \geqslant 0, \\ x + y - 3 \leqslant 0, \\ x - y - 1 \leqslant 0, \\ x - y + 1 \geqslant 0. \end{cases}$$

3.33. б) $\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y, \\ z' = a\sqrt{2} - z; \end{cases}$

$A \to A'$, $B \to D'$, $C \to C'$, $D \to B'$,
$A' \to A$, $B' \to D$, $C' \to C$, $D' \to B$;

в) $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x, \\ z' = z; \end{cases}$

$A \to B$, $B \to C$, $C \to D$, $D \to A$,
$A' \to B'$, $B' \to C'$, $C' \to D'$, $D' \to A'$;

г) $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x, \\ z' = a\sqrt{2} - z; \end{cases}$

$A \to B'$, $B \to C'$, $C \to D'$, $D \to A'$,
$A' \to B$, $B' \to C$, $C' \to D$, $D' \to A$.

Глава IV

4.2. а) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1;$ б) $\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}} + \dfrac{\left(y - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}} = 1.$

4. 3. а) $y^2 + z^2 = a^2$; б) $x^2 + z^2 = 25$;
в) $y^2 + (z - a)^2 = a^2$.

4. 5. $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz - 13 = 0$.

4. 6. $4x^2 + 25y^2 + z^2 + 4xz - 20x - 10z = 0$.

4. 7. $x = y = z - 4$.

4. 9. а) См. рис. 32; б) см. рис. 33; в) см. рис. 34.

4.11. $2y^2 + xz - 8x = 0$. Искомые образующие определяются пересечением плоскости Oxz с конической поверхностью: $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} y = 0, \\ z - 8 = 0. \end{cases}$

4.13. $x^2 + y^2 - \dfrac{z^2}{4} = 0$ — коническая поверхность вращения (см. рис. 35).

4.14. а) $(x - 3)^2 + y^2 + z^2 = 1$ — сфера;
б) $x^4 + y^4 + z^4 + 2x^2y^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 - 20x^2 + 16y^2 - 20z^2 + 64 = 0$.

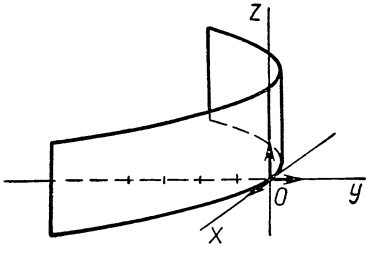

Рис. 32

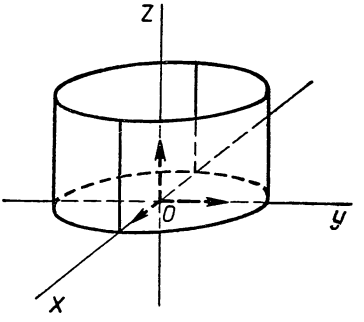

Рис. 33

4.15. $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

4.16. а) $3x^2 + 3y^2 - z^2 + 2z - 1 = 0$;
б) $25x^2 - y^2 - z^2 = 0$;
в) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

4.17. $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25$.

4.18. $(6; -2; 3)$, $R = 7$.

4.19. Точка P лежит внутри сферы.

4.21. Первая плоскость пересекает данную сферу, вторая плоскость касается ее, третья плоскость не имеет с ней общих точек.

4.24. $6x + 2y + 3z - 55 = 0$.

4.25. $x = 0$ и $12x + 5z + 10 = 0$.

4.26. $(x + 12)^2 + (y - 8)^2 + (z - 9)^2 = 361$
и
$(x + 12)^2 + (y - 8)^2 + (z - 9)^2 = 225$.

4.27. $x^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 12$
и
$x^2 + y^2 + (z + 4)^2 = 27$.

4.28. $x^2 + y^2 + (z - 3)^2 = 1$
и
$x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$.

4.29. $(x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1$
и
$(x - 1)^2 + y^2 + (z - 8)^2 = 1$.

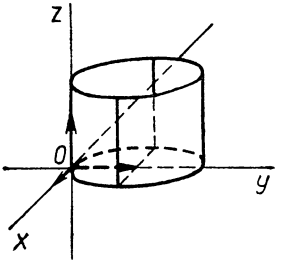

Рис. 34

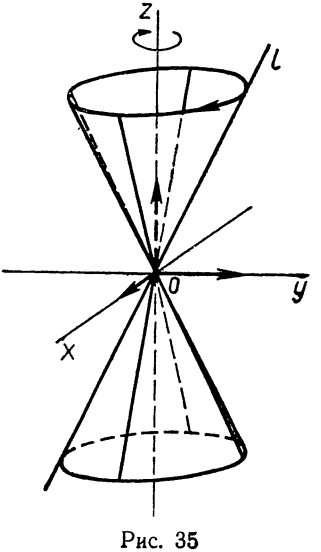

Рис. 35

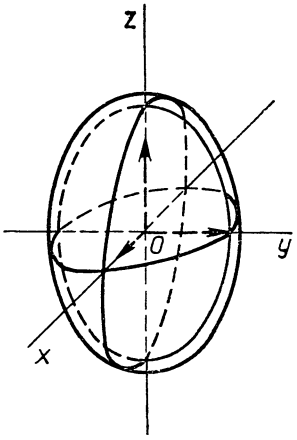

Рис. 36

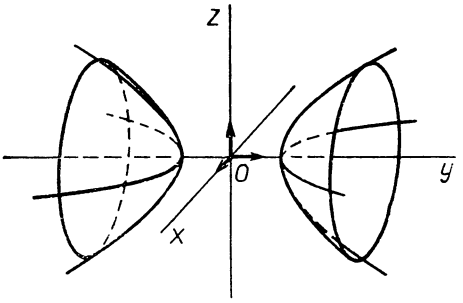

Рис. 37

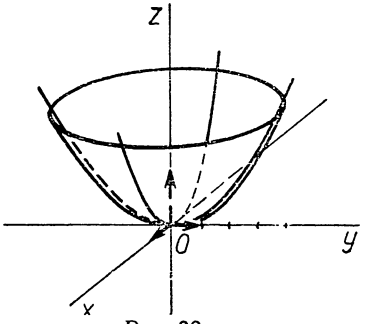

Рис. 38

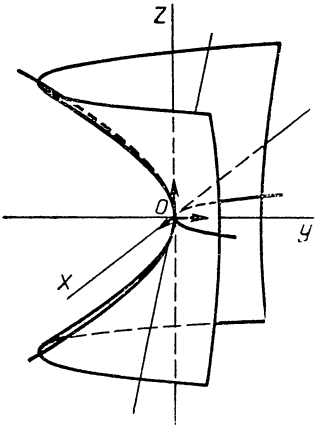

Рис. 39

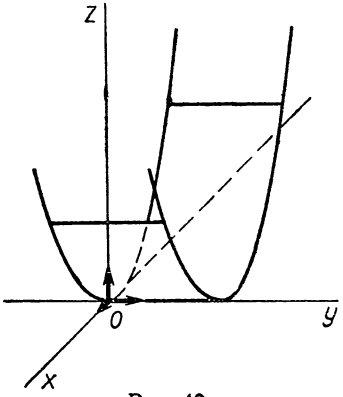

Рис. 40

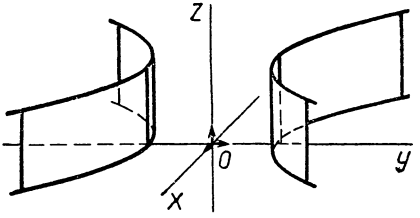

Рис. 41

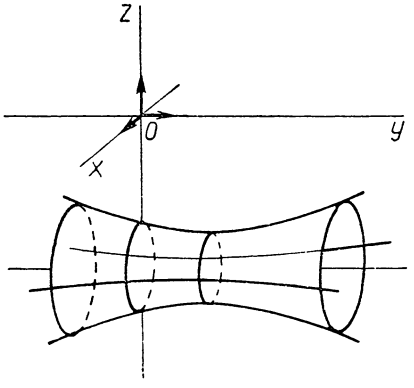

Рис. 42

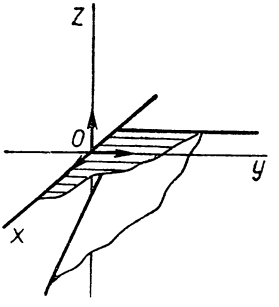

Рис. 43

4.31. Эллипсоид вращения (рис. 36).

4.32. а) Трехосный эллипсоид; б) конус второго порядка; в) двуполостный гиперболоид (рис. 37); г) эллиптический параболоид (рис. 38); д) конус второго порядка; е) гиперболический параболоид (рис. 39); ж) параболический цилиндр (рис. 40); з) гиперболический цилиндр (рис. 41).

4.33. а) Конус второго порядка с вершиной в точке (—1; —1; —1);
б) эллиптический параболоид с вершиной в точке (0; 1; —4);
в) однополостный гиперболоид вращения с центром в точке (0; 2;—4), его ось вращения параллельна оси Oy (рис. 42).

4.35. а) Объединение плоскости Oxy и плоскости $x + z + 1 = 0$, параллельной оси Oy (рис. 43); б) объединение двух плоскостей $x - z = 0$ и $x + y - 1 = 0$ (рис. 44).

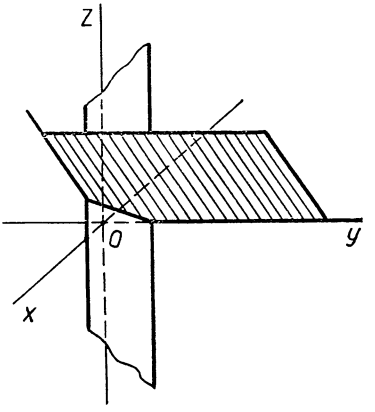

Рис. 44

4.37. $r = \sqrt{1 - a^2}$ при $|a| \leqslant 1$.

4.38. Полуоси эллипса 3 и $\sqrt{3}$, вершины (2; ± 3; 0) и (2; 0; $\pm\sqrt{3}$).

4.39. Вершина параболы $\left(0;\ -6;\ -1\frac{1}{2}\right)$, параметр параболы $p = 15$.

4.41. $\dfrac{x-6}{9} = \dfrac{y-2}{8} = \dfrac{z-8}{20}$ и

$$\begin{cases} 4x - 3z = 0, \\ y - 2 = 0. \end{cases}$$

4.42. $\begin{cases} x - 2y + 2z = 0, \\ 2x + 4y - 1 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x - 2y - 2z = 0, \\ 2x + 4y + 1 = 0. \end{cases}$

4.43. $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - y + 4 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + y = 0, \\ z = 0. \end{cases}$

4.44. Гиперболический параболоид.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Вариант 1: №№ 1.29; 1.97; 2.42 (а); 2.101; 2.114; 4.32 (д).
Вариант 2: №№ 1.30; 1.95; 2.42 (б); 2.93; 2.115 (а); 4.32 (е).
Вариант 3: №№ 1.32; 1.92; 2.43; 2.92 (б); 2.122; 4.32 (з).
Вариант 4: №№ 1.35; 1.94; 2.47; 2.92 (а); 2.123; 4.36 (д).
Вариант 5: №№ 1.26; 1.86; 2.52; 2.82; 2.120; 4.36 (е).
Вариант 6: №№ 1.27; 1.70; 2.53; 2.83 (а); 2.66; 4.35 (а).
Вариант 7: №№ 1.24; 1.74; 2.57; 2.83 (б); 2.67; 4.35 (б).
Вариант 8: №№ 1.25; 1.68; 2.58; 2.83 (в); 2.31; 4.33 (а).
Вариант 9: №№ 1.38; 1.58; 2.44; 2.83 (г); 2.111; 4.33 (б).
Вариант 10: №№ 1.40; 1.62; 2.69; 2.83 (д); 2.115 (б); 4.33 (в).

ПРИМЕРНЫЙ ОБРАЗЕЦ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Найти отношение, в котором каждая из координатных плоскостей делит отрезок AB: A (2; —1; 7), B (4; 5; —2).

Решение. Если точка M (x; y; z) лежит на прямой AB и делит отрезок AB в отношении λ, то ее координаты выражаются формулами $x = \frac{2+4\lambda}{1+\lambda}$, $y = \frac{-1+5\lambda}{1+\lambda}$, $z = \frac{7-2\lambda}{1+\lambda}$.

Если к тому же точка M лежит на плоскости xyO, то $z = 0$ и потому $\lambda = \frac{7}{2}$. Аналогично, если $y = 0$, то $\lambda = \frac{1}{5}$, а если $x = 0$, то $\lambda = -\frac{1}{2}$.

2. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках A (2; —1; —1), B (5; —1; 2), C (3; 0; —3), D (6; 0; —1).

Решение. Объем тетраэдра выражается формулой

$$V = \frac{1}{6}\,|(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD})|.$$

Так как $\overrightarrow{AB}$ (3; 0; 3), $\overrightarrow{AC}$ (1; 1; —2), $\overrightarrow{AD}$ (4; 1; 0), то

$$V = \frac{1}{6}\ \mathrm{mod}\begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

3. Составить уравнение плоскости, проходящей через точки A (1; —1; 3), B (1; 2; 4) и перпендикулярной плоскости $2x - 3y + z + 1 = 0$.

Решение. Искомая плоскость проходит через точку A (1; —1; 3) параллельно вектору $\overrightarrow{AB}$ (0; 3; 1) и нормальному вектору $\vec{n}$ (2; —3; 1) заданной плоскости. Так как уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (x_0; y_0; z_0), параллельно векторам $\vec{l}$ (l_1; l_2; l_3) и $\vec{m}$ (m_1; m_2; m_3), имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{vmatrix} = 0,$$

то уравнение искомой плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

или $3x + y - 3z + 7 = 0$.

4. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (0; 0; 1) и пересекающей каждую из прямых:

$$\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0, \\ 2x - y + 2z - 3 = 0 \end{cases} \text{ и } \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}.$$

Решение. Искомая прямая, если она существует, лежит в плоскости π, проходящей через данную точку и первую прямую, а также в плоскости π', проходящей через данную точку и вторую прямую. Следовательно, она является пересечением плоскостей π и π'. Обратно: пересечение плоскостей π и π' является искомой прямой, если только это пересечение непараллельно какой-нибудь из данных прямых.

Найдем уравнение плоскости π. Для этого возьмем точку, лежащую на первой прямой, например точку $M_0\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; 1\right)$, а в качестве направляющего вектора $\vec{l}$ — векторное произведение векторов

$$\vec{n_1}\,(1; -2; 1) \text{ и } \vec{n_2}\,(2; -1; 2):$$

$$\vec{l} = \vec{n_1} \times \vec{n_2} = \left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\right) = (-3; 0; 3).$$

Находим уравнение плоскости π:

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } x - 2y + z - 1 = 0,$$

и уравнение плоскости π'

$$\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } 4x - 5y + 2z - 2 = 0.$$

Таким образом, искомая прямая, если она существует, задается системой уравнений

$$\begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0, \\ 4x - 5y + 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

Направляющий вектор последней прямой

$$\left(\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -5 & 2\end{vmatrix}; -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}1 & -2\\ 4 & -5\end{vmatrix}\right) = (1;\ 2;\ 3)$$

неколлинеарен ни одной из данных прямых и потому найденная прямая является искомой.

5. Через точку M (1; 5; —1) провести прямую, перпендикулярную к прямым

$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{3} = \frac{z+2}{-1} \text{ и } \begin{cases} x = 2 - 3t, \\ y = -1 + t, \\ z = -2t. \end{cases}$$

Решение. Направляющий вектор $\vec{p}$ искомой прямой должен быть перпендикулярен к направляющим векторам $\vec{p_1}$ (—1; 3; 1) и p_2 (—3, 1, —2) данных прямых. Значит, можно принять

$$\vec{p} = [\vec{p_1}, \vec{p_2}] = \left(\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}; -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -3 & -2\end{vmatrix}; \begin{vmatrix}-1 & 3\\ -3 & 1\end{vmatrix}\right) = (-7;\ -5;\ 8).$$

Следовательно, канонические уравнения искомой прямой имеют вид:

$$\frac{x-1}{-7} = \frac{y-5}{-5} = \frac{z+1}{8}.$$

6. Определите вид поверхности второго порядка, заданной уравнением

$$x^2 + 3y^2 = z^2.$$

Указание. Задачу можно решить способами, описанными в решениях задач 4.30 и 4.34.

Ответ. Данное уравнение определяет коническую поверхность с вершиной в начале координат.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I

Метод координат в пространстве

§ 1. Декартовы координаты векторов и точек 3
§ 2. Основные аффинные задачи 9
§ 3. Произведения векторов 12
§ 4. Основные метрические задачи 16
§ 5. Геометрическое истолкование уравнений и неравенств 19

Глава II

Плоскости и прямые

§ 6. Уравнение плоскости 28
§ 7. Взаимное расположение плоскостей в пространстве 31
§ 8. Метрические задачи на плоскость 35
§ 9. Уравнения прямой 39
§ 10. Аффинные задачи на прямую и плоскость 42
§ 11. Метрические задачи на прямую и плоскость 51

Глава III

Выпуклые многогранники

§ 12. Наглядная геометрия многогранников 57
§ 13. Аналитическая геометрия многогранников 60

Глава IV

Поверхности второго порядка

§ 14. Цилиндрические и конические поверхности. Поверхности вращения. 65
§ 15. Исследование поверхностей второго порядка по их каноническим уравнениям 70

Ответы 77

Приложение 90

ИБ № 3975

ЗАДАЧНИК - ПРАКТИКУМ ПО ГЕОМЕТРИИ

Часть II

Редактор *Т. П. Руженская*
Технический редактор *М. М. Широкова*
Корректоры *О. С. Захарова* и *Р. Б. Штутман*

Сдано в набор 07.07. 78. Подписано к печати 22.11 78. 60×90¹/₁₆. Бумага типограф. №2. Литер. гарн. Высокая печать. Условн. печ. л. 6. Уч.-изд. л. 5,18. Тираж 27 000 экз. Заказ № 799. Цена 20 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Росглавполиграфпрома Государственного комитета РСФСР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.
Саратов, ул. Чернышевского, 59.