

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ
ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КАБИНЕТ
ПО ЗАОЧНОМУ ОВУЧЕНИЮ УЧИТЕЛЕЙ

Н. А. ФРОЛОВ

**ОСНОВЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
АНАЛИЗА**

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ЗАОЧНИКОВ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ

учпедгиз • 1955

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ И СРЕДНИХ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Научно-методический кабинет по заочному обучению учителей

Н. А. ФРОЛОВ

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ-ЗАОЧНИКОВ
ПЕДАГОГИЧЕСКИХ ИНСТИТУТОВ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

Москва — 1955



ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга содержит основные понятия и наиболее важные вопросы математического анализа.

При выборе материала и его изложении я руководствовался разделом «Основы математического анализа» программы государственных экзаменов по математике для физико-математических факультетов педагогических институтов (специальность—математика).

Моей целью было также и освещение в книге выдающейся роли русских и советских учёных в развитии математического анализа.

Я надеюсь, что книга поможет студентам-заочникам лучше понять и усвоить идейно-логическую основу математического анализа и тем самым будет для них полезным пособием при подготовке к государственному экзамену.

Пользуюсь случаем, чтобы выразить глубокую благодарность проф. А. Ф. Леонтьеву и проф. В. И. Левину за ряд весьма ценных замечаний по рукописи этой книги.

Н. Фролов

ГЛАВА I

МНОЖЕСТВА

1. Понятие множества. Понятие *множество* является *первичным*. Оно не может быть дано путём *определения*, так как для этого потребовалось бы более простое понятие, чего не существует. Смысл понятия множества можно только *объяснить* при помощи различных примеров.

Мы можем говорить о множестве учащихся данной школы, о множестве сторон некоторого многоугольника, о множестве всех рациональных чисел и т. д.

Таким образом, множество мы себе представляем в виде собрания каких-либо предметов.

То, что вещь x принадлежит множеству A , выражается символом

$$x \in A,$$

и x называется *элементом* множества A . Если же x не содержится в A , то пишут

$$x \notin A.$$

Если x является общим обозначением любого элемента множества A , то пишут

$$A = \{x\}.$$

Так, обозначая произвольное натуральное число через n , а множество всех натуральных чисел через N , можно написать

$$N = \{n\}.$$

Иногда в фигурных скобках перечисляются все (или некоторые) элементы множества. Например, множество всех натуральных чисел можно записать так:

$$N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}.$$

Если каждый элемент множества A содержится в множестве B , то A называют *частью* множества B или *подмножеством* множества B и пишут

$$A \subset B.$$

Например, множество всех рациональных чисел есть часть множества всех действительных чисел.

Заметим, что всегда

$$A \subset A,$$

т. е. часть множества может совпадать со всем множеством.

Если $A \subset B$, но A не совпадает с B , то A называют *правильной частью* B .

Если A и B совпадают, т. е.

$$A \subset B \text{ и } B \subset A,$$

то пишут

$$A = B.$$

Различают множества конечные и бесконечные. Множество — *конечное*, если есть смысл ставить вопрос о том, сколько элементов содержится в этом множестве. Так, множество сторон данного многоугольника есть конечное множество. В частности, к конечным множествам относятся *одноэлементные* множества, т. е. множества, состоящие только из одного элемента, и *пустое* множество, т. е. множество, не имеющее ни одного элемента. Такие множества имеет смысл рассматривать. Если, например, обозначим через M множество действительных корней многочлена $P(x)$ и при дальнейшем рассмотрении окажется

$$P(x) = x + 1,$$

то множество M , очевидно, будет одноэлементным; если же окажется, что

$$P(x) = x^2 + 1,$$

то M — пустое множество.

Если данное множество не есть конечное, т. е. в нём можно найти элементов больше любого числа n , то оно называется *бесконечным*. Например, множество N всех натуральных чисел n есть бесконечное множество.

2. Мощность множества. Конечные множества можно сравнивать между собой по числу элементов. Если n_1 есть число элементов множества A , а n_2 — число элемен-

тов B , то имеет место одно и только одно из соотношений

$$n_1 = n_2, \quad n_1 < n_2, \quad n_1 > n_2.$$

Для бесконечных множеств такой способ сравнения не применим, так как нет смысла говорить о числе элементов бесконечного множества.

Но конечные множества можно сравнивать и другим способом. Пусть A и B — конечные множества, и пусть по некоторому правилу удалось каждому элементу $a \in A$ поставить в соответствие определенный элемент $b \in B$, причём каждый элемент $b \in B$ оказался поставленным в соответствие определенному элементу $a \in A$. В этом случае мы будем говорить, что между элементами множеств A и B установлено *взаимно однозначное соответствие*, а множества A и B будем называть *эквивалентными*, записывая это так:

$$A \sim B.$$

Очевидно, что взаимно однозначное соответствие между элементами конечных множеств A и B можно установить в том и только в том случае, когда число элементов A равно числу элементов B . Следовательно, для конечных множеств эквивалентность и равночисленность — совпадающие понятия.

Если для бесконечных множеств понятие равночисленности не имеет смысла, то понятие эквивалентности смысла не утрачивает, так как можно приводить во взаимно однозначное соответствие и элементы двух бесконечных множеств.

Например, если

$$A = \{1, 2, \dots, n, \dots\},$$

$$B = \{-1, -2, \dots, -n, \dots\},$$

то можно поставить во взаимное соответствие элементы $n \in A$ и $-n \in B$, и тогда между элементами множеств A и B будет установлено взаимно однозначное соответствие; следовательно, и в этом случае мы можем сказать, что

$$A \sim B.$$

Это приводит нас к следующему определению:

Если между элементами множеств A и B можно установить взаимно однозначное соответствие, то множества

A и B называются *эквивалентными*, или имеющими одинаковую *мощность*.

3. Кардинальные числа. Понятие равной мощности сводится в случае конечных множеств к понятию равного числа элементов; поэтому естественно выражать мощность конечного множества натуральным числом, именно числом его элементов. Тогда все множества, состоящие из одного и того же числа n элементов, а значит, эквивалентные между собой, будут иметь одну и ту же мощность, равную n .

Для выражения мощности бесконечного множества мы уже не можем воспользоваться каким-либо числом. Поэтому мы создаём особого рода «числа», так называемые *кардинальные числа*, вводя их следующим определением:

Возьмём класс всевозможных множеств, эквивалентных данному бесконечному множеству M , а значит, и эквивалентных между собой, и этому классу поставим в соответствие некоторый символ μ , который будем называть *мощностью* или *кардинальным числом* любого множества рассматриваемого класса, в частности множества M .

Таким образом, мощность множества есть то, что является общим у всех эквивалентных между собой множеств. У конечных эквивалентных между собой множеств общим является число элементов каждого множества, т. е. как раз то, что мы и приняли за мощность конечного множества.

Следовательно, понятие кардинального числа сводится к понятию числа элементов в случае конечного множества и является обобщением понятия числа элементов на случай бесконечных множеств.

4. Сравнение мощностей. Чтобы кардинальные числа были полезным обобщением понятия числа элементов, надо иметь возможность сравнивать их между собой, т. е. иметь возможность сравнивать множества по их мощности.

Пусть имеем два множества: M_1 и M_2 , и пусть μ_1 и μ_2 — соответственно их мощности. Между множествами M_1 и M_2 логически допустимы следующие соотношения:

1. $M_1 \sim M_2$.
2. $M_1 \sim M_2^*$, где M_2^* есть правильная часть M_2 , причём в M_1 нет части, эквивалентной множеству M_2 .
3. $M_1^* \sim M_2$, где M_1^* есть правильная часть M_1 , причём в M_2 нет части, эквивалентной множеству M_1 .

4. $M_1 \sim M_2^*$ и $M_1^* \sim M_2$, где M_1^* и M_2^* — правильные части соответственно множеств M_1 и M_2 .

5. В M_1 нет части, эквивалентной M_2 , и в M_2 нет части, эквивалентной M_1 .

В первом случае из самого определения понятия эквивалентности, или равной мощности, следует, что

$$\mu_1 = \mu_2.$$

Во втором случае, если бы множества M_1 и M_2 были конечными с числом элементов соответственно n_1 и n_2 , очевидно, имели бы $n_1 < n_2$. Поэтому для любых множеств M_1 и M_2 естественно положить в этом случае

$$\mu_1 < \mu_2.$$

Исходя из аналогичных соображений, в третьем случае будем считать

$$\mu_1 > \mu_2.$$

Для конечных множеств очевидно, что четвёртый и пятый случаи невозможны. Для бесконечных множеств, оказывается, пятый случай также не может иметь места, но четвёртый случай возможен. В самом деле, формула

$$x' = \frac{x-a}{b-a}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между числами x , удовлетворяющими неравенствам $a < x < b$, и числами x' , удовлетворяющими неравенствам $0 < x' < 1$; поэтому множество всех чисел, содержащихся между какой угодно парой действительных чисел a и b , имеет одну и ту же мощность независимо от a и b .

Отсюда следует, что множества

$$M_1 = \{0 < x < 2\}; \quad M_2 = \{1 < x < 5\}; \quad M_1^* = \{1 < x < 2\}; \\ M_2^* = \{2 < x < 4\}$$

чисел x , удовлетворяющих неравенствам, указанным в фигурных скобках, эквивалентны между собой. В частности,

$$M_1 \sim M_2^* \quad \text{и} \quad M_2 \sim M_1^*;$$

но M_2^* есть правильная часть M_2 , а M_1^* — правильная часть M_1 .

В теории множеств доказывается, что если каждое из двух данных множеств эквивалентно части другого, то данные множества эквивалентны.

Это утверждение известно под названием «теоремы Кантора—Бернштейна».

Наш пример согласуется с этой теоремой, так как

$$M_1 \sim M_2.$$

Итак, пятое соотношение невозможно, а из четвёртого вытекает первое. Но очевидно, что первое, второе и третье соотношения несовместимы. Отсюда следует, что между мощностями μ_1 и μ_2 множеств M_1 и M_2 всегда имеет место одно и только одно из трёх соотношений

$$\mu_1 = \mu_2, \mu_1 < \mu_2, \mu_1 > \mu_2.$$

5. Счётные множества. Среди бесконечных множеств важную роль играет множество всех натуральных чисел

$$N = \{1, 2, \dots, n, \dots, \}.$$

В теории множеств выделяются множества, имеющие ту же мощность, что и множество N . Это — так называемые счётные множества. Понятие счётного множества определяется так:

Всякое множество, эквивалентное множеству всех натуральных чисел, называется *счётным*.

Так, например, множество

$$M = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$$

счётное. В самом деле, поставив во взаимное соответствие элементы $2n \in M$ и $n \in N$, мы установим взаимно однозначное соответствие между элементами M и N ; следовательно,

$$M \sim N.$$

Можно дать другое определение понятия счётного множества, равносильное первоначальному определению, но часто более удобное для пользования.

Пусть A есть какое-нибудь счётное множество. Согласно определению, можно установить взаимно однозначное соответствие между элементами A и N . Пусть такое соответствие установлено и в результате этого некоторый элемент множества A и натуральное число n оказались во взаимном соответствии. Обозначим этот элемент мно-

жества A через a_n . Очевидно, что теперь каждый элемент множества A будет иметь свой номер — натуральное число, а каждое натуральное число будет номером некоторого элемента A . Значит, множество A примет вид

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

В этом случае мы будем говорить, что множество A представлено в виде *бесконечной последовательности* различных элементов.

Обратно, если некоторое множество A может быть представлено в виде бесконечной последовательности различных элементов, то множество A счётно, ибо нумерацию элементов A в последовательности можно рассматривать как приведение элементов A и N во взаимно однозначное соответствие.

Итак, счётные и только счётные множества могут быть представлены в виде бесконечной последовательности различных элементов. Это позволяет сформулировать понятие счётного множества так:

Множество A называется счётным, если его можно представить в виде бесконечной последовательности различных элементов

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}.$$

Теорема. Если множество A состоит из элементов $a_{k,i}$, различаемых двумя значками k и i , принимающими в качестве своих значений натуральные числа, то данное множество

$$A = \{a_{k,i}\}$$

счётно.

Доказательство. Положим $k + i = n$. Очевидно, что только конечное число элементов $a_{k,i}$ имеет суммой значков k и i одно и то же число n . Пусть наименьшее значение n есть n_0 . Тогда можно занумеровать все элементы $a_{k,i} \in A$, у которых $k - i = n_0$, так как таких элементов конечное число. После этого можно занумеровать все элементы $a_{k,i} \in A$, имеющие $k + i = n_0 - 1$, которых также конечное число, и т. д. Таким путём мы занумеруем в бесконечную последовательность *все* элементы множества A , ибо до любого элемента $a_{k,i} \in A$, имеющего сумму значков $k - i = n$, придётся занумеровать *конечное* число элементов, а затем дадим номер и этому элементу $a_{k,i} \in A$. Это и доказывает счётность множества $A = \{a_{k,i}\}$.

Следствие. Множество всех рациональных чисел счётно.

Действительно, все положительные рациональные числа, которые мы всегда можем мыслить в виде несократимых дробей вида $\frac{p}{q}$, можно рассматривать как элементы $a_{p,q}$, различаемые двумя значками p и q , принимающими в качестве своих значений натуральные числа, откуда и следует, что множество всех положительных рациональных чисел счётно, а поэтому представимо в виде бесконечной последовательности различных элементов

$$\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \dots$$

Но тогда всё множество R рациональных чисел будет охвачено последовательностью

$$0, \rho_1, -\rho_1, \rho_2, -\rho_2, \dots, \rho_n, -\rho_n, \dots$$

Обозначая $r_1 = 0$; $r_2 = \rho_1$; $r_3 = -\rho_1$; $r_4 = \rho_2$; $r_5 = -\rho_2$ и т. д., множество R всех рациональных чисел мы представим в виде бесконечной последовательности различных элементов

$$R = \{r_1, r_2, \dots, r_n, \dots\},$$

поэтому оно счётно.

ГЛАВА II

МНОЖЕСТВО ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

1. Иррациональные числа. Определение иррационального числа можно дать при помощи понятия сечения множества рациональных чисел.

Сечением множества R всех рациональных чисел называется всякое разбиение этого множества на два подмножества A и B , удовлетворяющее условиям:

1. Ни одно из множеств A и B не пустое.
2. Каждое рациональное число содержится в одном и только в одном из множеств A или B .

3. Каждое число, содержащееся во множестве A , меньше каждого числа, содержащегося во множестве B .

Множество A называется нижним, а множество B верхним классом. Сечение R обозначается символом (A, B) .

Очевидно, что в нижнем классе A нет наименьшего, а в верхнем классе B нет наибольшего числа. Что же касается наибольшего числа в классе A и наименьшего числа в классе B , то здесь логически возможны следующие четыре случая:

1. В нижнем классе A есть наибольшее число, а в верхнем классе B нет наименьшего числа.

2. В верхнем классе B есть наименьшее число, а в нижнем классе A нет наибольшего числа.

3. В нижнем классе A нет наибольшего числа и в верхнем классе B нет наименьшего числа.

4. В нижнем классе A есть наибольшее число и в верхнем классе B есть наименьшее число.

Докажем, что четвёртый случай невозможен.

В самом деле, пусть сечение (A, B) четвёртого вида, т. е. в классе A есть наибольшее число a_0 и в классе B есть наименьшее число b_0 . Так как всякое число класса A меньше каждого числа класса B , то $a_0 < b_0$. Но для рационального числа $r = \frac{a_0 + b_0}{2}$ имеем $a_0 < r < b_0$; поэтому r

не содержится ни в классе A , так как больше наибольшего числа a_0 в этом классе, ни в классе B , так как меньше наименьшего числа b_0 в этом классе. Это противоречит определению сечения множества всех рациональных чисел, ибо по определению сечения каждое рациональное число должно содержаться либо в A , либо в B . Полученное противоречие и доказывает, что сечения (A, B) четвёртого вида не существует. Чтобы доказать, что сечения первого, второго и третьего видов существуют, достаточно привести соответствующие примеры.

Пример 1. Возьмём какое-либо рациональное число r и все рациональные числа a , меньшие r , поместим в класс A , а рациональные числа b , бóльшие r , — в класс B . Число r поместим в класс A . Очевидно, получим сечение (A, B) первого вида. В самом деле, в классе A число r является наибольшим, а в классе B наименьшего числа нет, иначе получили бы сечение четвёртого вида, что невозможно.

Пример 2. Изменим предыдущий пример только тем, что число r отнесём в класс B . Очевидно, получим сечение второго вида.

Пример 3. Отнесём к классу A все отрицательные рациональные числа, число 0 и все положительные рациональные числа, квадрат которых меньше 2. Все остальные рациональные числа отнесём к классу B . Так как рационального числа, квадрат которого равняется 2, не существует, то класс B состоит из всех положительных рациональных чисел, квадрат которых больше 2. Очевидно, что множества A и B не пустые, каждое рациональное число содержится в одном из классов A или B и каждое число класса A меньше любого числа класса B . Следовательно, имеем сечение (A, B) . Докажем, что это сечение третьего вида, т. е. в классе A нет наибольшего, а в классе B нет наименьшего числа.

В самом деле, допустим, что a_0 — наибольшее из всех чисел, содержащихся в A . Ясно, что a_0 не может быть ни отрицательным, ни нулём, так как A содержит и положительные числа. Поэтому $a_0 > 0$ и $a_0^2 < 2$. Поставим теперь задачей найти такое натуральное число n , чтобы

$$\left(a_0 + \frac{1}{n}\right)^2 < 2,$$

или

$$a_0^2 + \frac{2a_0}{n} + \frac{1}{n^2} < 2.$$

Но последнее неравенство и подавно будет выполнено, если n удовлетворит неравенству

$$a_0^2 + \frac{2a_0}{n} + \frac{1}{n} < 2,$$

или

$$\frac{2a_0 + 1}{n} < 2 - a_0^2.$$

Отсюда, учитывая, что $2 - a_0^2 > 0$, имеем:

$$n > \frac{2a_0 + 1}{2 - a_0^2} = \rho.$$

Итак, при любом $n > \rho$ справедливо неравенство $\left(a_0 + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$, т. е. $a_0 + \frac{1}{n}$ содержится в классе A , а так как $a_0 < a_0 + \frac{1}{n}$, то это противоречит допущению, что a_0 — наибольшее из чисел класса A . Следовательно, в классе A наибольшего числа не существует.

Допустим теперь, что среди чисел класса B есть наименьшее число b_0 . Поставим целью найти такое натуральное число n , чтобы было

$$\left(b_0 - \frac{1}{n}\right)^2 > 2,$$

или

$$b_0^2 - \frac{2b_0}{n} + \frac{1}{n^2} > 2.$$

Но последнее неравенство и подавно будет выполнено, если только n удовлетворит неравенству

$$b_0^2 - \frac{2b_0}{n} > 2,$$

или

$$b_0^2 - 2 > \frac{2b_0}{n},$$

откуда, учитывая, что $b_0^2 - 2 > 0$, имеем:

$$n > \frac{2b_0}{b_0^2 - 2} = \rho'.$$

Итак, при любом $n > \rho'$ справедливо неравенство $\left(b_0 - \frac{1}{n}\right)^2 > 2$, т. е. $b_0 - \frac{1}{n}$ содержится в классе B , а так как $b_0 - \frac{1}{n} < b_0$, то это противоречит допущению, что b_0 есть наименьшее из всех чисел класса B . Следовательно, в классе B наименьшего числа не существует.

Таким образом, мы имеем пример сечения (A, B) множества всех рациональных чисел, когда среди чисел нижнего класса A нет наибольшего, а среди чисел верхнего класса B нет наименьшего, т. е. сечения третьего вида.

Доказательство невозможности четвёртого случая и рассмотренные здесь примеры позволяют формулировать следующую теорему.

Теорема. Сечения множества всех рациональных чисел могут быть трёх видов:

- 1) либо в нижнем классе A есть наибольшее число r , но нет наименьшего числа в верхнем классе B ;
- 2) либо в верхнем классе B есть наименьшее число r , но нет наибольшего числа в нижнем классе A ;
- 3) либо, наконец, ни в нижнем классе нет наибольшего, ни в верхнем классе нет наименьшего числа.

Если сечение (A, B) — первого или второго вида, то существует рациональное число r , которое является пограничным между классами A и B . В случае сечения (A, B) третьего вида такого рационального пограничного числа не существует; поэтому мы создаём новое *иррациональное* число, которое и считаем содержащимся между классами A и B . Таким образом, иррациональные числа мы вводим при помощи следующего определения:

Если сечение (A, B) множества всех рациональных чисел — первого или второго вида, то говорят, что сечение производится рациональным числом r или что сечение определяет рациональное число r . Если же сечение (A, B) — третьего вида, то говорят, что это сечение определяет некоторое *иррациональное* число α , и пишут:

$$\alpha = (A, B).$$

Все рациональные и иррациональные числа вместе составляют множество всех *действительных* (или *вещественных*) чисел.

2. Упорядоченность множества действительных чисел. Множество R всех рациональных чисел обладает свойством *упорядоченности*, которое заключается в том, что для любых двух рациональных чисел a и b имеет место одно и только одно из трёх соотношений:

$$a = b, \quad a < b, \quad a > b,$$

причём из неравенств $a < b$, $b < c$ следует неравенство $a < c$.

Нам надо позаботиться о том, чтобы и множество действительных чисел, полученное присоединением к рациональным числам новых, иррациональных чисел, также было упорядоченным.

Предварительно условимся всякое действительное число α выражать сечением множества всех рациональных чисел, причём если число α — иррациональное, то, конечно, сечением третьего вида, а если α — рациональное число, то сечением первого вида.

Пусть имеем два действительных числа:

$$\alpha = (A, B) \quad \text{и} \quad \alpha' = (A', B').$$

Примем по определению:

1) $\alpha = \alpha'$, если множества A и A' совпадают, а следовательно, совпадают и множества B и B' , т. е. (A, B) и (A', B') представляют одно и то же сечение;

2) $\alpha < \alpha'$, если множество A составляет правильную часть множества A' , т. е. $A \subset A'$, но $A \neq A'$ (тогда $B' \subset B$, но $B' \neq B$);

3) $\alpha > \alpha'$, если множество A' составляет правильную часть множества A , т. е. $A' \subset A$, но $A' \neq A$ (тогда $B \subset B'$, но $B \neq B'$).

Из этих определений, очевидно, следует, что для любых двух действительных чисел α и α' имеет место одно и только одно из трёх соотношений

$$\alpha = \alpha', \quad \alpha < \alpha', \quad \alpha > \alpha'.$$

Кроме того, можно доказать, что для любых действительных чисел α , β и γ из неравенств $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$ вытекает неравенство $\alpha < \gamma$.

В самом деле, пусть

$$\alpha = (A, B), \quad \beta = (A', B') \quad \text{и} \quad \gamma = (A'', B'').$$

Из неравенства $\alpha < \beta$ следует, что $A \subset A'$, но $A \neq A'$; из $\beta < \gamma$ имеем $A' \subset A''$, но $A' \neq A''$; следовательно, $A \subset A''$, но $A \neq A''$, т. е. $\alpha < \gamma$.

Таким образом, множество всех действительных чисел мы упорядочили.

Заметим, наконец, что из определения равенства и неравенств между действительными числами следует, что если число r рациональное а число $\alpha = (A, B)$ иррациональное, то $r < \alpha$, если $r \in A$, и $r > \alpha$, если $r \in B$.

3. Плотность множества действительных чисел. Множество всех действительных чисел обладает свойством *плотности*, которое заключается в том, что между любыми двумя действительными числами содержится действительное число, а следовательно, и бесконечное множество таких чисел.

Чтобы убедиться в этом, докажем следующую теорему, представляющую более сильное утверждение.

Теорема. Каковы бы ни были два действительных числа α и α' , всегда найдётся рациональное число r , заключённое между ними: $\alpha < r < \alpha'$, а значит, и бесконечное множество таких рациональных чисел.

Доказательство. Пусть

$$\alpha = (A, B), \quad \alpha' = (A', B').$$

Из условия $\alpha < \alpha'$ следует, что множество A составляет правильную часть множества A' ; поэтому в A' найдётся такое рациональное число r , которое не содержится в A , а значит, содержится в B . Но из $r \in B$ следует, что $r > \alpha$, и из $r \in A'$ имеем $r < \alpha'$, т. е.

$$\alpha < r < \alpha'.$$

4. Непрерывность множества действительных чисел. Аналогично понятию сечения множества R всех рациональных чисел, мы вводим понятие сечения множества Z всех действительных чисел следующим определением:

Сечением множества Z всех действительных чисел называется всякое разбиение этого множества на два подмножества X и Y , которые удовлетворяют условиям:

1. Ни одно из множеств X и Y не пустое.

2. Каждое действительное число содержится в одном и только в одном из множеств X или Y .

3. Каждое число, содержащееся в множестве X , меньше каждого числа, содержащегося в множестве Y .

Множество X называется нижним, а множество Y верхним классом. Сечение Z обозначается символом (X, Y) .

Докажем теорему, которая устанавливает, какого вида могут быть сечения (X, Y) .

Теорема (Дедекинда). Сечения (X, Y) множества Z всех действительных чисел могут быть двух видов:

- 1) либо в нижнем классе X есть наибольшее число, но нет наименьшего числа в верхнем классе Y ;
- 2) либо в верхнем классе Y есть наименьшее число, но нет наибольшего числа в нижнем классе X .

Доказательство. Прежде всего заметим, что не может быть такого сечения, когда и в нижнем классе X есть наибольшее число α , и в верхнем классе Y есть наименьшее число β . В самом деле, пусть такое сечение (X, Y) есть, и число α — наибольшее в X , а β — наименьшее в Y . Тогда $\alpha < \beta$, так как $\alpha \in X$, а $\beta \in Y$. Но в силу плотности множества всех действительных чисел найдётся число r , что будет $\alpha < r < \beta$. Число r не может содержаться в X , так как оно больше наибольшего из чисел класса X , но r не может содержаться и в Y , так как оно меньше наименьшего из чисел класса Y . Это противоречит тому, что, по определению сечения, каждое число r должно содержаться или в X , или в Y .

Возьмём произвольное сечение (X, Y) множества Z . Обозначим через A множество рациональных чисел, содержащихся в классе X , и через B — множество рациональных чисел, содержащихся в классе Y . Так как каждое рациональное число содержится либо в X , а значит, и в A , либо в Y , а значит, и в B , и, кроме того, любое число множества $A \subset X$ меньше каждого числа множества $B \subset Y$, то имеем сечение (A, B) множества R всех рациональных чисел.

Сечение (A, B) определяет некоторое рациональное или иррациональное число ξ . Это число ξ , как и любое действительное число, содержится либо в X , либо в Y .

Пусть $\xi \in X$. Докажем, что число ξ — наибольшее среди чисел класса X . Допустим, что это не так, что в классе X найдётся число $\alpha > \xi$. Тогда можно найти рациональное число r , что будет $\xi < r < \alpha$. Из неравенства $\xi < r$ следует, что $r \in B$, а неравенство $r < \alpha$, где $\alpha \in X$, показывает, что $r \in X$, а значит, и $r \in A$. Это противоречит тому,

что каждое рациональное число r содержится только в одном классе, либо в A , либо в B . Поэтому допущение, что в классе X есть число $\alpha > \xi$, не верно. Следовательно, если $\xi \in X$, то ξ есть наибольшее число в нижнем классе X , а так как одновременно с этим не может быть наименьшего числа в верхнем классе Y , то сечение (X, Y) — первого вида.

Аналогично доказывается, что если $\xi \in Y$, то число ξ — наименьшее среди чисел верхнего класса Y , а следовательно, сечение (X, Y) — второго вида.

Итак, сечение (X, Y) всегда будет либо первого, либо второго вида.

Таким образом, для любого сечения (X, Y) множества действительных чисел существует пограничное число ξ , определяющее сечение, так что каждое число, меньшее ξ , принадлежит классу X , а каждое число, большее ξ , принадлежит классу Y .

Это свойство множества действительных чисел называется *непрерывностью* множества действительных чисел, так как оно аналогично непрерывности, присущей в нашем представлении прямой и выражаемой аксиомой:

Если произведено сечение (X, Y) прямой, т. е. если точки прямой разделены на два класса X и Y таким образом, что каждая точка класса X левее каждой точки класса Y , то существует пограничная точка ξ , определяющая сечение, так что каждая точка, расположенная левее ξ , принадлежит классу X , а каждая точка, расположенная правее ξ , принадлежит классу Y .

Непрерывность является важнейшим свойством множества действительных чисел. Благодаря этому свойству удаётся установить взаимно однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством точек прямой, т. е. каждое действительное число можно изобразить точкой прямой так, что каждая точка прямой окажется изображением одного действительного числа. Это соответствие сохраняет порядок: чем больше число, тем правее на прямой точка, изображающая число.

Прямая, точки которой находятся во взаимно однозначном соответствии с действительными числами, называется *числовой прямой*, или *числовой осью*.

5. Континуум. Здесь мы убедимся, что мощность множества всех действительных чисел больше мощности счётных множеств.

Мощность континуума не есть наибольшая мощность. Можно показать, что среди кардинальных чисел нет наибольшего.

6. Точечные множества. Так как каждое действительное число можно изобразить точкой прямой, причём каждая точка прямой будет изображением определённого действительного числа, то вместо множества, состоящего из действительных чисел, мы можем рассматривать соответствующее множество точек числовой прямой, т. е. прямой, точки которой служат изображением действительных чисел. Мы, например, будем говорить *точки интервала* (a, b) вместо того, чтобы сказать *числа промежутка* (a, b) . Понятие промежутка мы уточним следующими определениями.

1. Множество всех точек x (чисел x), удовлетворяющих условию $a < x < b$, называется *интервалом*, или *промежутком*, и выражается символом

$$(a, b).$$

2. Множество всех точек x , удовлетворяющих условию $a \leq x \leq b$, называется *сегментом*, или *отрезком*, и выражается символом

$$[a, b].$$

Аналогично определяются *полуинтервалы* $a < x \leq b$ и $a \leq x < b$, которые выражаются соответственно символами

$$(a, b] \text{ и } [a, b).$$

Введём два понятия, связанные с точечными множествами:

1. Точка ξ называется *предельной точкой* множества E , если любой как угодно малый интервал δ , содержащий точку ξ , содержит бесконечное множество точек $x \in E$.

Так, например, множество

$$E = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$$

имеет одну предельную точку — 0.

2. Множество E называется *замкнутым*, если все предельные точки E содержатся в E .

Например, сегмент $[a, b]$ — замкнутое множество, так как предельные точки множества всех точек сегмента $[a, b]$ заполняют этот же сегмент $[a, b]$. Интервал (a, b)

уже не есть замкнутое множество, так как концы интервала a и b являются, очевидно, предельными точками для множества всех точек (a, b) , но уже интервалу (a, b) не принадлежат.

Рассмотрим ещё несколько понятий, относящихся к множествам точек прямой и множествам действительных чисел. Чтобы не формулировать каждое понятие дважды, мы одно понятие выразим в терминах геометрии, а сходное понятие — арифметическим языком.

1. Множество E называется *ограниченным снизу*, если существует такая точка a , что любая точка $x \in E$ лежит не левее точки a :

$$a \leq x.$$

Например, множество

$$N = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$$

ограничено снизу, так как

$$1 \leq n.$$

2. Множество E называется *ограниченным сверху*, если существует такое число b , что любое число $x \in E$ не больше b :

$$x \leq b.$$

Например, множество всех отрицательных чисел x ограничено сверху, так как

$$x < 0.$$

3. Множество E называется *ограниченным*, если оно ограничено снизу и сверху, т. е. если оно содержится на некотором сегменте $[a, b]$.

Например, множество

$$E = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$$

ограниченное, так как каждый элемент этого множества принадлежит сегменту $[0, 1]$.

4. Точка m называется *нижней гранью* множества E , если: 1) левее m нет ни одной точки множества E и 2) при любом как угодно малом $\epsilon > 0$ найдётся хотя бы одна точка $x \in E$, которая будет левее точки $m + \epsilon$.

5. Число M называется *верхней гранью* множества E , если: 1) больше M нет ни одного числа множества E и

2) при любом как угодно малом $\varepsilon > 0$ найдётся хотя бы одно число $x \in E$, которое будет больше числа $M - \varepsilon$.

Например, у множества

$$E = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\}$$

нижняя грань $m = 0$, а верхняя грань $M = 1$. Очевидно, что для интервала (a, b) и сегмента $[a, b]$ гранями являются их концы: точка a — нижняя грань, а точка b — верхняя грань.

Ясно, что если множество не ограничено сверху, то оно не имеет верхней грани, а если не ограничено снизу, то не имеет нижней грани.

Следующая теорема показывает, что из ограниченности множества сверху (снизу) вытекает существование верхней (нижней) грани данного множества.

Теорема. Если множество E ограничено сверху, то оно имеет верхнюю грань, а если ограничено снизу, то имеет нижнюю грань.

Доказательство. Пусть множество

$$E = \{e\}$$

ограничено сверху, т. е. существует такое число b , что для всех $e \in E$ верно неравенство $e \leq b$. Докажем, что множество E имеет верхнюю грань. С этой целью разобьём множество всех действительных чисел на две части X и Y . При этом в подмножество X отнесём все числа $e \in E$, а также каждое число x , меньшее хотя бы одного числа $e \in E$; остальные числа, т. е. числа y , большие всех чисел e множества E , отнесём в подмножество Y . Подмножества X и Y не пустые. Так, все числа $e \in E$ содержатся в X , а Y содержит все числа, большие b . Кроме того, очевидно, что каждое число содержится в одном и только в одном подмножестве — либо в X , либо в Y , причём числа $x \in X$ меньше чисел $y \in Y$. Следовательно, мы получили сечение множества действительных чисел.

В силу непрерывности множества действительных чисел для сечения (X, Y) , которое мы построили, существует пограничное число M :

$$M = (X, Y).$$

Докажем, что M есть верхняя грань множества E . Прежде всего заметим, что первое условие в определении верхней грани $e \leq M$ выполнено, так как все элементы e

содержатся в X . Возьмём сколь угодно малое $\varepsilon > 0$ и составим число $M - \varepsilon < M$. Всегда найдётся такое число α , что $M - \varepsilon < \alpha < M$. Так как $\alpha < M$, то $\alpha \in X$, а поэтому найдётся такое число $e \in E$, что будет $\alpha \leq e$. Таким образом, имеем $M - \varepsilon < \alpha \leq e$, т. е. $M - \varepsilon < e$. Это означает, что M удовлетворяет и второму условию, содержащемуся в определении верхней грани. Следовательно, M есть верхняя грань множества E .

Доказательство существования нижней грани множества, ограниченного снизу, аналогично.

7. О работах советских математиков. Теория множеств, элементы которой изложены в этой главе, является основой современного математического анализа. В создании и развитии этой важнейшей области математики перво-степенное значение имели выдающиеся результаты, полученные русскими и советскими учёными. В 1915 г. была опубликована докторская диссертация Н. Н. Лузина — «Интеграл и тригонометрический ряд». Эта работа, полная новых идей, объединила вокруг Н. Н. Лузина большую группу талантливых московских математиков, давших замечательные исследования по теории множеств. Так, П. С. Александров в 1916 г. доказал, что среди так называемых B -множеств нет множества, мощность которого была бы больше мощности счётных множеств, но меньше мощности континуума. Этим самым П. С. Александров решил «проблему континуума» для класса B -множеств, установив, что в этом классе континуум является ступенью мощности, следующей сразу же за мощностью счётных множеств. В 1917 г. молодой математик М. Я. Суслин открыл новый чрезвычайно важный класс множеств, названных A -множествами. Рано умерший талантливый математик М. Я. Суслин только положил начало изучению A -множеств. Дальнейшим исследованием этих множеств занимались Н. Н. Лузин, П. С. Новиков и другие советские математики. Изучение A -множеств привело к более общим теориям. П. С. Александров образовал целую последовательность расширяющихся классов множеств. Н. Н. Лузин создал ещё более общую теорию так называемых проективных множеств. Эти результаты и работы других советских математиков означали быстрое развитие теории множеств, в то время как теории, созданные в первые десятилетия XX в. французскими учёными, оставались в неизменном состоянии.

ГЛАВА III

ЧИСЛОВАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ

1. Предел последовательности. Если мы расположим элементы множества всех натуральных чисел в порядке возрастания

$$1, 2, 3, \dots, n, \dots$$

и каждому элементу n этого множества по какому-нибудь закону поставим в соответствие некоторое действительное число a_n , то получим *числовую последовательность*

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

Элементы, или *члены* последовательности с различными номерами, могут и не быть различными. Вот примеры последовательностей:

1) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \quad (a_n = \frac{1}{n})$.

2) $2, 4, 6, \dots, 2n, \dots \quad (a_n = 2n)$.

3) $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots \quad (a_n = 1, \text{ если } n \text{ нечётное,}$
 $a_n = 0, \text{ если } n \text{ чётное}).$

Число a называется *пределом* последовательности

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

если для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что все a_n , у которых $n > N$, удовлетворяют неравенству

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Тот факт, что число a есть предел последовательности $\{a_n\}$, выражают символом

$$a = \lim a_n.$$

Последовательность называется *сходящейся*, если она имеет предел, и *расходящейся*, если предела не имеет.

Из приведённых выше примеров первая последовательность сходящаяся, она имеет пределом 0. Действительно, если $a_n = \frac{1}{n}$, то при любом $\varepsilon > 0$ будет верно неравенство $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$, если только $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Поэтому, взяв $N > \frac{1}{\varepsilon}$, для всех $n > N$ будет верно неравенство

$$|a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

т. е.

$$\lim \frac{1}{n} = 0.$$

Очевидно, что второй и третий примеры представляют расходящиеся последовательности.

Относительно пределов последовательностей верны следующие утверждения:

1) Если последовательность $\{a_n\}$ сходится к пределу a и $a > b$ ($a < b$), то существует такой номер N , что для всех $n > N$ верно неравенство $a_n > b$ ($a_n < b$).

2) Если последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходящиеся и всегда $a_n \geq b_n$, то $\lim a_n \geq \lim b_n$.

3) Если для последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ и $\{c_n\}$ всегда верны неравенства $a_n \leq b_n \leq c_n$ и $\lim a_n = \lim c_n = a$, то и $\lim b_n = a$.

Докажем хотя бы последнее утверждение. Из неравенств $a_n \leq b_n \leq c_n$ следуют неравенства

$$a_n - a \leq b_n - a \leq c_n - a.$$

Так как $\lim a_n = a$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N' , что для всех $n > N'$ верно неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon, \text{ или } -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon.$$

Аналогично из условия $\lim c_n = a$ получим, что

$$-\varepsilon < c_n - a < \varepsilon$$

для всех $n > N''$. Обозначая через N большее из чисел N' и N'' , для $n > N$ будем иметь одновременно

$$-\varepsilon < a_n - a \text{ и } c_n - a < \varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$-\varepsilon < a_n - a \leq b_n - a \leq c_n - a < \varepsilon,$$

поэтому

$$|b_n - a| < \varepsilon$$

для всех $n > N$, т. е.

$$\lim b_n = a.$$

2. Монотонные последовательности. Последовательность $\{a_n\}$ называется *неубывающей*, если

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \dots$$

Последовательность $\{a_n\}$ называется *невозрастающей*, если

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \dots$$

Неубывающие и невозрастающие последовательности называются *монотонными*.

Докажем теорему, которая даёт условия сходимости монотонных последовательностей.

Теорема. Если неубывающая (невозрастающая) последовательность ограничена сверху (снизу), то она имеет предел.

Доказательство. Пусть последовательность $\{a_n\}$ неубывающая и ограничена сверху. Из условия ограниченности сверху вытекает, что данная последовательность имеет верхнюю грань. Обозначим её через a . Докажем, что $a = \lim a_n$. Действительно, в силу определения верхней грани множества для всех n

$$a_n \leq a$$

и в то же время при любом как угодно малом $\varepsilon > 0$ найдётся такой элемент последовательности, пусть a_N , для которого будет верно неравенство

$$a - \varepsilon < a_N.$$

Но данная последовательность неубывающая, поэтому

$$a_N \leq a_{N+1} \leq \dots$$

Отсюда следует, что

$$a - \varepsilon < a_N \leq a_{N+1} \leq \dots \leq a,$$

т. е. для всех $n > N$

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

а это и означает, что

$$\lim a_n = a.$$

Доказательство теоремы для невозрастающей и ограниченной снизу последовательности аналогично.

3. Число e . Применим теорему о монотонных последовательностях к доказательству существования предела $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Воспользовавшись формулой бинома Ньютона и элементарными преобразованиями, мы можем написать

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{n^3} + \\ &+ \dots + \frac{n(n-1) \dots [n-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \frac{1}{n^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \\ &+ \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right). \end{aligned}$$

Замечая, что в правой части при увеличении n возрастают и число слагаемых, а они положительные, и сами слагаемые, содержащие множители $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$, \dots , $\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$, мы видим, что $a_n < a_{n+1}$. Следовательно, $\{a_n\}$ есть неубывающая (возрастающая) последовательность. Докажем теперь, что $\{a_n\}$ ограничена сверху. В самом деле, если в выражении a_n все множители $\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $\left(1 - \frac{2}{n}\right)$, \dots , $\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$ заменить единицей, а в знаменателях дробей $\frac{1}{3!}$, $\frac{1}{4!}$, \dots , $\frac{1}{n!}$ множители, бóльшие 2, заменить числом 2, то мы получим величину, бóльшую a_n , т. е.

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Но сумма геометрической прогрессии

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

меньше 2, поэтому

$$a_n < 3$$

при любом n , т. е. $\{a_n\}$ ограничена сверху.

Итак, последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ неубывающая и ограниченная сверху, а поэтому она имеет предел, который обозначают буквой e :

$$e = \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Число e имеет важное значение в математическом анализе. Оказывается, что это число является наиболее удобным в качестве основания логарифмов, хотя оно, как увидим дальше, иррационально. Пока видно, что $2 < e \leq 3$. Логарифмы по основанию e называются *натуральными*. Для обозначения натурального логарифма числа x пользуются символом $\ln x$.

4. Последовательность стягивающихся сегментов. Если в последовательности сегментов

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

каждый содержится в предыдущем, а последовательность длин этих сегментов

$$b_1 - a_1, b_2 - a_2, \dots, b_n - a_n, \dots$$

имеет предел, равный нулю:

$$\lim (b_n - a_n) = 0,$$

то данная последовательность сегментов называется *стягивающейся*.

Теорема. Если данные сегменты образуют стягивающуюся последовательность, то они имеют единственную общую точку.

Доказательство. Пусть

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

и

$$\lim (b_n - a_n) = 0.$$

Очевидно, что

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq \dots, \quad (1)$$

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n \geq \dots \quad (2)$$

Кроме того, так как $a_n < b_n$, для всех n имеем:

$$a_n < b_1 \text{ и } b_n > a_1.$$

Отсюда видно, что последовательности (1) и (2), как монотонные и ограниченные, являются сходящимися:

$$\lim a_n = a, \quad \lim b_n = b,$$

причём ясно, что

$$a_n \leq a \leq b \leq b_n$$

для всех n . Докажем, что $a = b$. Действительно, если бы две различные точки a и b принадлежали всем сегментам $[a_n, b_n]$, то для всех n имели бы

$$b_n - a_n \geq b - a > 0,$$

что противоречит условию $\lim (b_n - a_n) = 0$. Следовательно, $a = b$ и точка

$$a = \lim a_n = \lim b_n$$

есть единственная точка, принадлежащая всем данным сегментам $[a_n, b_n]$.

5. Предельные точки последовательностей. Точка ξ называется *предельной точкой последовательности*

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots,$$

если в любом как угодно малом интервале δ , содержащем точку ξ , содержится бесконечное множество членов данной последовательности (которые могут оказаться и равными между собой, а поэтому предельная точка последовательности может и не быть предельной точкой множества различных элементов этой последовательности).

Рассмотрим несколько примеров.

Последовательность

$$1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

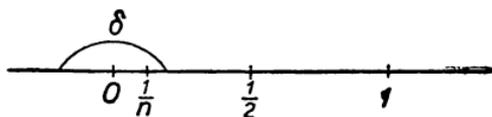
имеет предельную точку — 0. Действительно, каким бы малым интервал δ , содержащий 0, ни был, при доста-

точно большем n точка $\frac{1}{n}$, а значит, и все последующие точки $\frac{1}{n+1}$, $\frac{1}{n+2}$, ..., которых бесконечно много, будут содержаться в интервале δ . Других предельных точек у данной последовательности, очевидно, нет (черт. 1).

Для последовательности

$$1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, \dots$$

точка 1 — предельная, так как любой интервал δ , содержащий точку 1, содержит бесконечное множество членов данной последовательности, именно — все члены последовательности, стоящие на нечётных местах, так как все они равны 1, а δ содержит точку 1. Если же рас-



Черт. 1

сматривать множество различных элементов этой последовательности, то, очевидно, оно не имеет предельных точек. Здесь 1 — предельная точка данной последовательности, но не есть предельная точка соответствующего множества.

Совершенно ясно, что предельная точка множества различных элементов последовательности есть в то же время и предельная точка этой последовательности.

Теорема Больцано—Вейерштрасса. Всякая ограниченная последовательность имеет по крайней мере одну предельную точку.

Доказательство. Пусть последовательность $\{a_n\}$ ограниченная. Из этого следует, что существует такой сегмент $[\alpha, \beta]$, в котором содержатся все члены данной последовательности. Разобьём сегмент $[\alpha, \beta]$ пополам. Тогда по крайней мере одна половина $[\alpha, \beta]$ содержит бесконечное множество членов $\{a_n\}$, так как если бы каждая половина $[\alpha, \beta]$ содержала только конечное число членов $\{a_n\}$, то и в $[\alpha, \beta]$ было бы только конечное число членов $\{a_n\}$, тогда как по условию $[\alpha, \beta]$ содержит всю последовательность, состоящую из бесконечного множества членов. Пусть сегмент $[\alpha_1, \beta_1]$ есть та половина $[\alpha, \beta]$, в которой содержится бесконечное множество членов $\{a_n\}$, а если обе половины $[\alpha, \beta]$ таковы, то за $[\alpha_1, \beta_1]$ возьмём любую из них. Теперь разобьём пополам $[\alpha_1, \beta_1]$ и опять получим сегмент $[\alpha_2, \beta_2]$, содержащий бесконечное мно-

жество членов $\{a_n\}$ и представляющий половину сегмента $[\alpha_1, \beta_1]$. Продолжая этот процесс неограниченно, мы получим последовательность стягивающихся сегментов, так как

$$[\alpha, \beta] \supset [\alpha_1, \beta_1] \supset \dots \supset [\alpha_k, \beta_k] \supset \dots$$

и при неограниченном возрастании k

$$\lim (\beta_k - \alpha_k) = \lim \frac{\beta - \alpha}{2^k} = 0;$$

поэтому существует единственная точка ξ , принадлежащая всем сегментам $[\alpha_k, \beta_k]$.

Докажем теперь, что полученная точка ξ и будет предельной точкой последовательности $\{a_n\}$. В самом деле, для как угодно малого интервала δ , содержащего точку ξ , существует такой номер k , что сегмент $[\alpha_k, \beta_k]$ будет содержаться в интервале δ , так как $\xi = \lim \alpha_k = \lim \beta_k$. Но сегмент $[\alpha_k, \beta_k]$, а значит, и интервал δ содержит бесконечное множество членов последовательности $\{a_n\}$. Следовательно, ξ есть предельная точка данной последовательности $\{a_n\}$.

Из этой теоремы вытекает важное следствие, которым в дальнейшем будем часто пользоваться. До формулировки этого следствия введём понятие подпоследовательности.

Если из последовательности

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

выделить часть членов с номерами

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots,$$

то получится новая последовательность

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots,$$

которая называется *подпоследовательностью* данной последовательности $\{a_n\}$.

Следствие. Из всякой ограниченной последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому пределу.

В самом деле, пусть последовательность $\{a_n\}$ ограниченная, а поэтому она имеет хотя бы одну предельную точку ξ . Образум последовательность сегментов

$$[\alpha_1, \beta_1] \supset [\alpha_2, \beta_2] \supset \dots \supset [\alpha_k, \beta_k] \supset \dots,$$

содержащих ξ и стягивающихся к точке ξ . Это всегда можно сделать. Так как ξ есть предельная точка последовательности $\{a_n\}$, то любой сегмент $[\alpha_k, \beta_k]$ содержит бесконечное множество членов $\{a_n\}$. Пусть первый член $\{a_n\}$, содержащийся в $[\alpha_1, \beta_1]$, есть a_{n_1} , первый член $\{a_n\}$, стоящий за a_{n_1} и содержащийся в $[\alpha_2, \beta_2]$, есть a_{n_2} и т. д. Вообще обозначим через a_{n_k} первый за $a_{n_{k-1}}$ член $\{a_n\}$, содержащийся в $[\alpha_k, \beta_k]$. Тогда очевидно, что подпоследовательность

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k}, \dots$$

сходится к ξ , так как в силу выбора a_{n_k}

$$\alpha_k \leq a_{n_k} \leq \beta_k,$$

но $\lim \alpha_k = \lim \beta_k = \xi$, а поэтому и

$$\lim a_{n_k} = \xi.$$

6. Второе определение предела последовательности.

Здесь докажем теорему, которая позволит дать другое определение понятия предела последовательности, эквивалентное первоначальному определению.

Теорема. Для того чтобы последовательность $\{a_n\}$ имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была ограниченной и имела единственную предельную точку.

Необходимость. Пусть последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, равный некоторому числу a . Надо доказать, что она ограничена и имеет только одну предельную точку.

Так как по условию $\lim a_n = a$, то для любого $\varepsilon > 0$, например $\varepsilon = 1$, существует такой номер N , что для всех $n > N$ будет верно неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon = 1.$$

Учитывая, что $|a_n| - |a| \leq |a_n - a|$, имеем:

$$|a_n| < |a| + 1,$$

или, обозначая $|a| + 1$ через M' ,

$$|a_n| < M'$$

для всех $n > N$.

Если теперь обозначим через M наибольшее из чисел

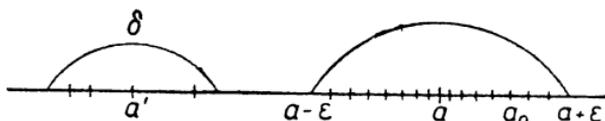
$$|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, M'$$

(которое существует, так как в конечном множестве всегда есть наименьший и наибольший элемент), то, очевидно, неравенство

$$|a_n| \leq M$$

будет верно для всех n , а это и означает, что последовательность $\{a_n\}$ ограниченная.

Докажем, что последовательность $\{a_n\}$ имеет единственную предельную точку. Для этого достаточно показать, что, кроме точки a , которая, будучи пределом $\{a_n\}$, очевидно, будет и предельной точкой $\{a_n\}$, не существует никакой другой предельной точки $\{a_n\}$. Допустим, что, кроме a , есть ещё одна предельная точка последовательности $\{a_n\}$. Обозначим её через a' (черт. 2). Возьмём интервал δ ,



Черт. 2

содержащий a' , и интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ настолько малыми, чтобы они не имели общих точек, что всегда возможно, так как $a \neq a'$. В силу того, что $a = \lim a_n$, найдётся такой номер N , что для всех $n > N$ будет верно неравенство

$$|a_n - a| < \varepsilon,$$

т. е. все члены последовательности $\{a_n\}$ с номерами $n > N$ будут находиться в интервале $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, а вне его могут быть только a_1, a_2, \dots, a_N . Отсюда следует, что в интервале δ может быть только конечное число членов $\{a_n\}$, а это противоречит допущению, что a' — предельная точка последовательности $\{a_n\}$. Следовательно, точка a есть единственная предельная точка последовательности $\{a_n\}$. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть последовательность $\{a_n\}$ ограниченная, т. е. существуют такие α и β , что $\alpha < a_n < \beta$ для всех n , и имеет единственную предельную точку, которую обозначим через a . Докажем, что число a есть предел данной последовательности.

В самом деле, если возьмём сколь угодно малое $\varepsilon > 0$, то вне интервала $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, т. е. на отрезках $[a, a - \varepsilon]$

и $[a + \varepsilon, \beta]$ будет только конечное число членов $\{a_n\}$, иначе там имели бы ещё хотя бы одну предельную точку последовательности $\{a_n\}$, т. е. точка a не была бы *единственной* предельной точкой $\{a_n\}$, что противоречит условию. Среди конечного числа членов $\{a_n\}$, находящихся вне $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, найдётся член $\{a_n\}$ с наибольшим номером. Пусть этот номер будет N . Тогда все a_n с номерами, большими N , находятся в интервале $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, т. е.

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

для всех $n > N$, а это означает, что

$$\lim a_n = a.$$

Теорема доказана.

Из этой теоремы вытекает следующее определение понятий сходимости и предела последовательности:

Последовательность $\{a_n\}$ называется *сходящейся к пределу a* , если она ограниченная и имеет единственную предельную точку a .

Из новой формулировки понятия предела последовательности непосредственно следует, что последовательность может иметь только *один* предел.

Отсюда же вытекает, что последовательность расходится в том случае, когда она неограниченная, либо ограниченная, но имеет более одной предельной точки.

7. Критерий Коши. Часто бывает важно установить, сходится ли данная последовательность к некоторому пределу, но не важно, чему равен этот предел. Поэтому мы должны иметь такой признак сходимости или существования предела последовательности, который был бы выражен только при помощи членов последовательности, т. е. при помощи только того, что мы имеем, когда нам дана последовательность. В качестве такого признака, очевидно, нельзя взять определение понятия предела последовательности, так как при его формулировке уже приходится пользоваться самим пределом, о существовании которого идёт речь. Следующая теорема даёт необходимое и достаточное условие существования предела последовательности, выраженное только при помощи самой последовательности. Это условие, или признак сходимости последовательности, обычно называют критерием Коши.

Теорема. Для того чтобы последовательность

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

была сходящейся к некоторому пределу, необходимо и достаточно, чтобы для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N , чтобы для всех $n > N$ и $m > N$ было верно неравенство

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

Необходимость. Пусть последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, равный некоторому числу a . Докажем, что условие, о котором говорится в теореме, выполнено.

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$ сколь угодно мало. В силу того, что по условию

$$\lim a_n = a,$$

найдётся такой номер N , что для всех $n > N$ будет верно неравенство

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для любых $n > N$ и $m > N$ будем иметь:

$$\begin{aligned} |a_m - a_n| &= |(a_m - a) + (a - a_n)| \leq \\ &\leq |a_m - a| + |a - a_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что для всех $n > N$ и $m > N$ верно неравенство

$$|a_m - a_n| < \varepsilon,$$

т. е. условие выполнено.

Достаточность. Пусть условие теоремы выполнено. Докажем, что данная последовательность имеет предел.

Прежде всего заметим, что из условия теоремы вытекает ограниченность данной последовательности. В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$, например $\varepsilon = 1$, найдётся такой номер N , что для всех $m > N$ и $n > N$ будет верно неравенство

$$|a_m - a_n| < \varepsilon = 1.$$

Взяв $n = N + 1$ и давая m последовательно значения $N + 2$, $N + 3$, ..., $N + p$, ..., мы получим ряд неравенств

$$|a_{N+p} - a_{N+1}| < 1 \quad (p = 2, 3, \dots),$$

откуда

$$|a_{N+p}| < |a_{N+1}| + 1 \quad (p = 2, 3, \dots).$$

Таким образом, обозначая число $|a_{N+1}| + 1$ через M' , имеем:

$$|a_n| < M'$$

для всех $n > N$. Пусть теперь M есть наибольшее число среди конечного множества чисел

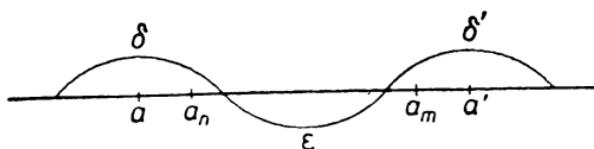
$$|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, M'.$$

Тогда очевидно, что для всех n верно неравенство

$$|a_n| \leq M,$$

т. е. последовательность $\{a_n\}$ ограниченная.

Отсюда следует, что данная последовательность имеет по крайней мере одну предельную точку a . Докажем, что,



Черт. 3

кроме a , нет других предельных точек последовательности $\{a_n\}$. Действительно, пусть $a' \neq a$ есть ещё одна предельная точка последовательности. Тогда возьмём интервалы δ и δ' , содержащие соответственно точки a и a' , настолько малыми, чтобы между ними остался промежуток, что всегда можно сделать, так как точки a и a' не совпадают. Обозначим расстояние между интервалами δ и δ' через ϵ (черт. 3). Заметим теперь, что каким бы большим номер N мы ни выбрали, всегда найдётся в интервале δ такая точка a_n , что будет $n > N$, так как в противном случае интервал δ содержал бы не более N членов $\{a_n\}$, т. е. конечное число, тогда как a есть предельная точка последовательности $\{a_n\}$, и поэтому интервал δ содержит бесконечное множество членов $\{a_n\}$. Аналогично можно показать, что в интервале δ' найдётся a_m с номером $m > N$. Отсюда следует, что при любом как угодно большом N

найдутся такие $n > N$ и $m > N$, что будет верно неравенство

$$|a_m - a_n| \geq \varepsilon.$$

Но это противоречит условию теоремы. Полученное противоречие доказывает, что, кроме a , нет другой предельной точки последовательности $\{a_n\}$.

Итак, данная последовательность $\{a_n\}$ ограниченная и имеет единственную предельную точку a ; следовательно, она сходится и

$$a = \lim a_n.$$

Теорема доказана.

ГЛАВА IV

ФУНКЦИИ

1. Понятие функции. Одним из основных понятий математического анализа является понятие функции. Наиболее общее определение этого понятия, которое утвердилось в науке, было дано гениальным русским математиком Н. И. Лобачевским. Оно формулируется так:

Если каждому элементу x множества E поставлен в соответствие некоторый определённый элемент y множества M , то говорят, что на множестве E определена функция $f(x)$ и пишут

$$y = f(x).$$

Здесь множества E и M могут быть любыми, состоящими из каких угодно элементов. Для нас наибольший интерес представляет тот случай, когда E и M — множества действительных чисел. В этом случае говорят, что на множестве E определена *действительная функция* (или просто функция) $f(x)$ *действительного переменного x* , причём x называют *аргументом*, или *независимым переменным*, в отличие от функции, или зависимого переменного y , так как в качестве значения x можно взять любое число из множества E , независимо ни от чего, тогда как значение функции y определяется выбранным значением x , зависит от значения аргумента x .

Хотя всегда пишут равенство $y = f(x)$, чтобы выразить, что y есть функция от x , однако это не означает, что функция всегда определяется формулой, где указаны те действия над аргументом x , которые надо выполнить, чтобы получить соответствующее значение функции y . Функция определена, если дано то соответствие между множествами $E = \{x\}$ и $M = \{y\}$, о котором говорится в понятии функции, а выражено это соответствие аналитически (формулой) или нет, это не существенно.

Нельзя смешивать функцию с аналитическим выражением этой функции, которого может и не быть, хотя функция определена. Например, функция, известная под названием функции Дирихле, определяется так:

$$f(x) = 1, \text{ если } x \text{ рационально;}$$

$$f(x) = 0, \text{ если } x \text{ иррационально.}$$

Ясно, что здесь мы имеем функцию, определённую на множестве всех действительных чисел, хотя аналитическое выражение этой функции нам не дано.

2. Предел функции. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве E , a — предельная точка этого множества, которая может и не принадлежать E .

Число A называется *пределом функции $f(x)$ в точке a* , если для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $x \in E$, удовлетворяющих условию

$$|x - a| < \delta, \text{ но } x \neq a,$$

верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Тот факт, что A есть предел $f(x)$ в точке a , выражают так:

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0,$$

т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из условия

$$|x - a| < \delta, \text{ но } x \neq a,$$

следует

$$|f(x)| < \varepsilon,$$

то говорят, что при стремлении x к a величина $f(x)$ *бесконечно малая*.

Легко заметить, что если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A,$$

то при стремлении x к a величина

$$\alpha(x) = f(x) - A$$

бесконечно малая, и, наоборот, если при стремлении x к a величина

$$\alpha(x) = f(x) - A,$$

где A — некоторое число, есть бесконечно малая, то

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Пользуясь этим замечанием, нетрудно доказать следующие утверждения, облегчающее задачу вычисления пределов функций.

Теорема. Если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \text{ и } \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = B,$$

то

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + \varphi(x)] = A + B.$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) - \varphi(x)] = A - B.$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \varphi(x)] = AB.$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B}, \text{ если } B \neq 0.$$

Докажем хотя бы равенство 3. Из условий $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ и $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = B$ следует, что при стремлении x к a величины

$$\alpha(x) = f(x) - A \text{ и } \beta(x) = \varphi(x) - B$$

бесконечно малые. Рассмотрим

$$f(x) \varphi(x) = [A + \alpha(x)][B + \beta(x)] = AB + B\alpha(x) + [A + \alpha(x)]\beta(x).$$

Пусть $\varepsilon > 0$ как угодно мало, во всяком случае меньше 1. Обозначим через C большее из чисел $|B|$ и $|A| + 1$. В силу того, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow a$ бесконечно малые, можно найти такое $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих условию

$$|x - a| < \delta, \text{ но } x \neq a,$$

выполняются неравенства

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2C} \text{ и } |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2C}.$$

(Если δ будет различным для $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, то за δ достаточно взять меньшее из них.) Но тогда, замечая, что $|A + \alpha(x)| \leq |A| + |\alpha(x)| < |A| + 1 \leq C$, имеем:

$$|f(x)\varphi(x) - AB| = |B\alpha(x) + [A + \alpha(x)]\beta(x)| \leq |B||\alpha(x)| + |A + \alpha(x)||\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$|f(x)\varphi(x) - AB| < \varepsilon,$$

если только

$$|x - a| < \delta, \text{ но } x \neq a,$$

а это означает, что

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)\varphi(x)] = AB.$$

Методом математической индукции можно распространить правило 1) на случай любого конечного числа слагаемых, а правило 3) — любого конечного числа множителей.

Наряду с понятием предела функции *в точке* в математическом анализе пользуются также и понятием предела функции *в бесконечности*. Это понятие вводится так:

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве E , причём E не ограничено ни снизу, ни сверху. Если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое число $N > 0$, что для всех $x \in E$, удовлетворяющих условию $|x| > N$, верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

где A — некоторое число, то A называют пределом функции $f(x)$ при стремлении x к бесконечности и пишут

$$A = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

Аналогично определяются понятия предела функции при стремлении x к плюс бесконечности и минус бесконечности, надо только условие $|x| > N$ заменить соответственно на $x > N$ или $x < -N$.

Правила 1) — 4) верны и для пределов функции в бесконечности.

Следует обратить внимание на то, что определение понятия числовой последовательности является определением функции на множестве натуральных чисел, а поэтому предел последовательности сводится к пределу функции в бесконечности. Отсюда вытекает, что для пределов последовательностей можно сформулировать правила, аналогичные правилам 1) — 4) для пределов функций.

Покажем, наконец, что и понятие предела функции сводится к понятию предела последовательности.

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве E , и a — предельная точка этого множества. Так как в любом как угодно малом интервале, содержащем точку a , содержится бесконечное множество точек $x \in E$, то всегда можно из множества E выделить последовательность точек

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, \quad (1)$$

отличных от a , которая была бы сходящейся к a , причём такую последовательность точек E , очевидно, можно образовать бесконечным множеством способов.

Пусть

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Докажем, что если последовательность (1) точек E сходится к a , то соответствующая последовательность

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots \quad (2)$$

сходится к A .

В самом деле, если возьмём как угодно малое $\varepsilon > 0$, то, в силу того, что $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, найдётся такое $\delta > 0$, что как только точка $x \in E$ удовлетворит условию

$$|x - a| < \delta, \text{ но } x \neq a,$$

так будет верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Но так как последовательность (1) сходится к a , то по δ найдётся такой номер N , что для всех $n > N$ будет верно неравенство

$$|x_n - a| < \delta, \text{ причём } x_n \neq a,$$

откуда, в свою очередь, вытекает неравенство

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon$$

для всех $n > N$, а это означает, что последовательность (2) сходится к A .

Верно и обратное утверждение. Если любой последовательности (1) точек x_n множества E , сходящейся к a , всегда соответствует сходящаяся к A последовательность (2) значений функции $f(x)$, то

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Применим метод рассуждений от противного. Допустим, что A не будет пределом функции $f(x)$ в точке a . Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что при любом $\delta > 0$ можно найти такую точку $x' \in E$, отличную от a , что хотя и будет

$$|x' - a| < \delta,$$

однако окажется

$$|f(x') - A| \geq \varepsilon_0.$$

Возьмём в качестве значений δ последовательность чисел

$$\delta_1 > \delta_2 > \dots > \delta_n > \dots,$$

сходящуюся к нулю. Тогда для каждого δ_n найдётся точка $x'_n \in E$, отличная от a , и такая, что будет

$$|x'_n - a| < \delta_n,$$

но, однако,

$$|f(x'_n) - A| \geq \varepsilon_0.$$

Очевидно, что последовательность

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_n, \dots$$

сходится к a , так как $\lim \delta_n = 0$, но соответствующая последовательность значений функции $f(x)$

$$f(x'_1), f(x'_2), \dots, f(x'_n), \dots$$

не будет сходиться к A , так как в силу выбора точек x'_n имеем $|f(x'_n) - A| \geq \varepsilon_0$ для всех n . Это противоречит условию, что для любой последовательности (1), сходящейся к a , соответствует последовательность (2), сходя-

щаяся к A . Следовательно, допущение не верно, т. е. верно, что

$$A = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Доказанные здесь прямое и обратное утверждения позволяют дать второе определение понятия предела функции, эквивалентное первому определению:

Если при сходимости к a любой последовательности

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

точек $x_n \in E$, отличных от a , соответствующая последовательность значений функции $f(x)$

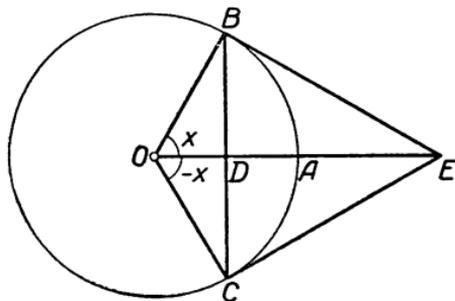
$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$$

сходится к A , то A называется пределом функции $f(x)$ в точке a .

3. Два замечательных предела. Воспользуемся первым определением понятия предела функции и докажем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

С этой целью возьмём круг, радиус которого равен 1, и в нём построим острый угол AOB , радианную величину которого обозначим через x . Построим угол AOC , симметричный углу AOB . Точки B и C соединим хордой. Наконец, проведём касательные к окружности в точках B и C (черт. 4).



Черт. 4

Теперь, учитывая, что длина хорды меньше длины соответствующей дуги, а длина дуги меньше длины описанной около неё ломаной, можно написать неравенства

$$\overline{BC} < \widetilde{BC} < BEC,$$

или

$$2DB < 2\widetilde{AB} < 2BE.$$

Отсюда, замечая, что DB есть линия синуса, а BE — линия тангенса угла AOB , и учитывая, что радиус круга равен 1, получим:

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x.$$

Разделив каждый член этого неравенства на $\sin x$, считая при этом $0 < x < \frac{\pi}{2}$, а значит, $\sin x > 0$, будем иметь:

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

откуда следует

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Вычитая каждый член последнего неравенства из 1, получим:

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

Но

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \sin \frac{x}{2} < 2 \frac{x}{2} = x;$$

поэтому

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x.$$

Отсюда следует, что

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < |x|,$$

причём, очевидно, это неравенство остаётся верным, если x заменить на $-x$, т. е. оно верно для всех x , удовлетворяющих условию $|x| < \frac{\pi}{2}$, но $x \neq 0$.

Теперь ясно, что каким бы $\varepsilon > 0$ мы ни выбрали, всегда найдётся такое $\delta > 0$, что будет верно неравенство

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon,$$

если только

$$|x| < \delta, \text{ но } x \neq 0.$$

Действительно, взяв $\delta = \varepsilon$, если $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$, будем иметь:

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < |x| < \delta = \varepsilon,$$

а если $\varepsilon \geq \frac{\pi}{2}$, то положим $\delta = \frac{\pi}{2}$, тогда

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < |x| < \delta = \frac{\pi}{2} \leq \varepsilon.$$

Следовательно, по первому определению понятия предела функции имеем:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Этот важный результат будет использован в дальнейшем.

Воспользуемся вторым определением предела функции и докажем, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

В третьей главе мы определили число e как предел последовательности $\left\{ a_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$, которую можно рассматривать как последовательность значений функции $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$, соответствующую одной определённой последовательности значений аргумента $\left\{ x_n = \frac{1}{n} \right\}$, сходящейся к нулю. Теперь же надо доказать, что из сходимости к нулю *любой* последовательности

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

где $x_n \neq 0$, вытекает сходимость соответствующей последовательности значений $f(x)$

$$(1+x_1)^{\frac{1}{x_1}}, (1+x_2)^{\frac{1}{x_2}}, \dots, (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}, \dots$$

к числу e .

Пусть x пробегает пока какую-нибудь последовательность $\{x_k\}$ положительных значений, сходящуюся к нулю. Обозначим через n_k такое натуральное число, что

$$n_k \leq \frac{1}{x_k} < n_k + 1.$$

Очевидно, n_k неограниченно возрастает, когда $x_k \rightarrow 0$. Одновременно с предыдущими неравенствами имеем:

$$\frac{1}{n_k} \geq x_k > \frac{1}{n_k + 1}.$$

Теперь очевидно, что

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1} \right)^{n_k} < (1+x_k)^{\frac{1}{x_k}} < \left(1 + \frac{1}{n_k} \right)^{n_k + 1}.$$

Эти же неравенства можно представить так:

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1}}{1 + \frac{1}{n_k + 1}} < (1 + x_k)^{\frac{1}{x_k}} < \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right).$$

Замечая, что последовательности $\left\{\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k}\right\}$ и $\left\{\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1}\right\}$ сходятся к e в силу первоначального определения числа e , а последовательности $\left\{\left(1 + \frac{1}{n_k}\right)\right\}$ и $\left\{\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)\right\}$ имеют пределом 1, из последней цепочки неравенств видим, что последовательность $\left\{(1 + x_k)^{\frac{1}{x_k}}\right\}$ имеет предел, равный числу e .

Пусть теперь $\{x_k\}$ есть произвольная последовательность отрицательных чисел, сходящаяся к нулю. Положим

$$1 + x_k = \frac{1}{1 + y_k}.$$

Тогда будем иметь

$$y_k = \frac{-x_k}{1 + x_k},$$

откуда видно, что если $x_k \rightarrow 0$, то и $y_k \rightarrow 0$, причём, когда значения x_k , отрицательные по условию, будут достаточно близкими к нулю, тогда значения y_k будут положительными. Учитывая это и замечая, что

$$(1 + x_k)^{\frac{1}{x_k}} = \left(\frac{1}{1 + y_k}\right)^{-\frac{1 + y_k}{y_k}} = (1 + y_k)^{\frac{1}{y_k} + 1} = (1 + y_k)^{\frac{1}{y_k}} (1 + y_k),$$

мы видим, что и в этом случае последовательность $\left\{(1 + x_k)^{\frac{1}{x_k}}\right\}$ сходится к числу e , так как очевидно

$$1 + y_k \rightarrow 1,$$

а

$$(1 + y_k)^{\frac{1}{y_k}} \rightarrow e$$

по ранее доказанному, ибо y_k можно считать стремящимся к нулю по положительным значениям.

Отсюда ясно, что $\{x_k\}$ может содержать и положительные, и отрицательные числа, важно только, чтобы она сходилась к нулю.

Итак, всегда из сходимости последовательности $\{x_k\}$ к нулю вытекает сходимость последовательности $\{(1+x_k)^{\frac{1}{x_k}}\}$ к числу e . Следовательно,

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

4. Непрерывность функции. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве E , и $a \in E$.

Если для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для всех $x \in E$, удовлетворяющих условию

$$|x - a| < \delta,$$

верно неравенство

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

то функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a (в смысле Коши).

Если принять во внимание определение предела функции в точке на языке $\varepsilon - \delta$, то непрерывность функции можно выразить так:

Если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

то функция $f(x)$ непрерывна в точке a .

Если же воспользуемся теперь определением предела функции на языке последовательностей, то получим следующую формулировку понятия непрерывности функции.

Если для любой последовательности точек

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

сходящейся к a , соответствующая последовательность

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$$

сходится к $f(a)$, то функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a (в смысле Гейне).

Функция $f(x)$, непрерывная в каждой точке множества E , называется непрерывной на этом множестве E .

Теорема. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке a , то в этой точке непрерывны и функции

$$f(x) + \varphi(x); f(x) - \varphi(x); f(x)\varphi(x); \frac{f(x)}{\varphi(x)}, \text{ если } \varphi(a) \neq 0.$$

Если пользоваться определением непрерывности функции при помощи понятия предела функции, то доказательство теоремы сведётся к простому повторению соответствующей теоремы о пределах функций (правил 1—4). Кроме того, очевидно, теорема для сложения и умножения будет верна не только в случае двух данных функций, но и для случая любого конечного числа функций (слагаемых или множителей).

5. Свойства непрерывных функций. Здесь мы докажем несколько теорем, выражающих свойства непрерывных функций на замкнутом ограниченном множестве.

Теорема 1 (Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве F , то она на этом множестве ограниченная, т. е. существует такое $c > 0$, что для всех $x \in F$ верно неравенство

$$|f(x)| < c.$$

Доказательство. Воспользуемся методом рассуждений от противного. Допустим, что $f(x)$ на множестве F не ограниченная. Это означает, что для любого натурального числа n найдётся в множестве F такая точка x_n , в которой будет верно неравенство

$$|f(x_n)| > n.$$

Беря за n последовательно 1, 2, 3, ..., мы получим последовательность точек множества F

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (1)$$

Последовательность (1) ограниченная, так как содержится в ограниченном множестве F ; поэтому, в силу следствия из теоремы Больцано — Вейерштрасса, из неё можно выделить подпоследовательность

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots \quad (2)$$

сходящуюся к некоторой точке a . Предел a последовательности (2) либо совпадает с некоторым членом x_{n_k} этой

последовательности, и тогда $a \in F$, либо является предельной точкой множества точек, образующих последовательность (2), а значит, и предельной точкой множества F , но по условию F замкнуто, и поэтому опять же $a \in F$. Так как функция $f(x)$ непрерывна на множестве F , то она непрерывна и в точке $a \in F$. Поэтому из сходимости последовательности (2) к a вытекает сходимость последовательности

$$f(x_{n_1}), f(x_{n_2}), \dots, f(x_{n_k}), \dots \quad (3)$$

к пределу $f(a)$, чего быть не может, так как $f(a)$ есть определённое число, а по выбору точек x_n имеем:

$$|f(x_{n_k})| > n_k,$$

где n_k может быть как угодно большим, и значит, последовательность (3) конечного предела не имеет. Полученное противоречие показывает, что наше допущение о неограниченности $f(x)$ на множестве F не верно. Следовательно, теорема доказана.

Условия теоремы — ограниченность и замкнутость множества F , где данная функция $f(x)$ непрерывна, — существенные. Так, например,

$$f(x) = x$$

непрерывна на всей числовой прямой, но не ограниченная на этой прямой. Точно так же функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}$$

в полуинтервале $0 < x \leq 1$ непрерывна, так как $x \neq 0$, но не ограничена. В первом примере не выполнено условие ограниченности, а во втором — замкнутости множества, на котором рассматривалась непрерывная функция.

Теорема 2 (Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве F , то она среди своих значений, принимаемых на этом множестве, имеет как наименьшее, так и наибольшее значения.

Доказательство. В силу предыдущей теоремы $f(x)$ ограниченная, а поэтому множество всех значений $f(x)$, соответствующих всем значениям $x \in F$, имеет нижнюю и верхнюю грани. Обозначим их соответственно через m и M . Докажем, что в множестве F найдётся такая точка a , в которой значение $f(x)$ равно M .

Действительно, по определению верхней грани для всех $x \in F$ имеем:

$$f(x) \leq M,$$

но при любом как угодно малом $\varepsilon > 0$ найдётся такая точка $x_0 \in F$, что будут верны неравенства

$$M - \varepsilon < f(x_0) \leq M.$$

Беря за ε числа $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$, получим последовательность таких точек множества F

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, \quad (1)$$

для которых верны неравенства

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M,$$

а значит,

$$|f(x_n) - M| < \frac{1}{n}. \quad (2)$$

Последовательность (1) ограниченная, так как содержится в ограниченном множестве F , а поэтому из неё можно выделить подпоследовательность

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots,$$

сходящуюся к некоторой точке α . В силу замкнутости F точка α содержится в F , а так как $f(x)$ непрерывна на множестве F , то она непрерывна и в точке α . Из этого следует, что последовательность

$$f(x_{n_1}), f(x_{n_2}), \dots, f(x_{n_k}), \dots \quad (3)$$

сходится к числу $f(\alpha)$. Но, с другой стороны, из неравенства (2) имеем:

$$|f(x_{n_k}) - M| < \frac{1}{n_k},$$

а это означает, что последовательность (3) сходится к числу M . Следовательно,

$$f(\alpha) = M.$$

Аналогично можно доказать существование такой точки $\beta \in F$, в которой имеем:

$$f(\beta) = m.$$

Так как $f(x)$ не имеет значений, меньших m и больших M , а эти грани, как мы доказали, $f(x)$ принимает в точках множества F , то m и M и есть соответственно наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ на множестве F .

Условия теоремы — ограниченность и замкнутость множества F , где рассматривается данная непрерывная функция, — являются существенными. Например, функция

$$f(x) = e^x$$

непрерывна на множестве $-\infty < x \leq 0$, имеет на этом множестве верхней гранью 1, а нижней гранью 0, причём верхнюю грань на множестве $-\infty < x \leq 0$ принимает, так как $f(0) = e^0 = 1$, а нижнюю грань не принимает, ибо $f(x) = e^x \neq 0$ ни при каком x . Здесь нарушено условие теоремы, так как $(-\infty, 0]$ есть замкнутое, но не ограниченное множество. Функция

$$\varphi(x) = x$$

непрерывна в интервале $0 < x < 1$, но ни в одной точке этого интервала $f(x)$ не равна 1 — своей верхней грани, и не равна 0 — своей нижней грани. Здесь также нарушено условие теоремы, — интервал $(0, 1)$ есть ограниченное, но не замкнутое множество.

Заметим, что вторая теорема Вейерштрасса развивает первую. Она показывает, что функция $f(x)$, непрерывная на замкнутом ограниченном множестве F , не только ограниченная на этом множестве, как утверждает первая теорема, но и имеет среди своих значений наименьшее и наибольшее значения: m и M . В этих теоремах в качестве множества F можно, в частности, взять любой сегмент $[a, b]$, так как сегмент есть замкнутое и ограниченное множество. И вот в этом частном случае, когда рассматривается непрерывная функция $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, можно, оказывается, развить дальше и вторую теорему, доказав, что и все промежуточные числа между m и M функция $f(x)$ также принимает в качестве своих значений в точках сегмента $[a, b]$, т. е. что если значения аргумента x заполняют сегмент $[a, b]$, то и соответствующие значения непрерывной функции $f(x)$ также заполняют сегмент $[m, M]$, где m и M — соответственно нижняя и верхняя грани функции $f(x)$. Это утверждение известно под названием теоремы Коши.

Теорема 3 (Коши). Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то на нём она принимает в качестве своих значений все числа, содержащиеся между наименьшим и наибольшим её значениями на этом сегменте.

Предварительно докажем две леммы.

Лемма 1. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) > A$ ($f(x_0) < A$), где A есть некоторое число, то существует такое число $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta,$$

верно неравенство

$$f(x) > A \quad (f(x) < A).$$

Доказательство. Пусть для определённости $f(x_0) > A$. Тогда

$$f(x_0) = A + h,$$

где $h > 0$. В силу непрерывности $f(x)$ в точке x_0 существует такое $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta,$$

верно неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{h}{2},$$

или

$$-\frac{h}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{h}{2},$$

откуда получим:

$$f(x) > f(x_0) - \frac{h}{2} = A + h - \frac{h}{2} = A + \frac{h}{2}.$$

Следовательно,

$$f(x) > A,$$

если только

$$|x - x_0| < \delta.$$

Лемма 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и в концах его имеет значения, противоположные по знаку, то она равна нулю по крайней мере в одной точке интервала (a, b) .

Доказательство. Пусть для определённости $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Обозначим через E множество всех точек x сегмента $[a, b]$, в которых верно неравенство $f(x) \leq 0$.

Множество E не пустое; оно содержит, например, точку a , а в силу леммы 1 также и те точки, которые достаточно близки к a . Множество E ограничено сверху, так как для всех $x \in E$ имеем $x < b$. Поэтому множество E имеет верхнюю грань. Обозначим её через α . Очевидно, $a < \alpha < b$, так как точки $[a, b]$, достаточно близкие к b , не входят в E . Теперь докажем, что $f(\alpha) = 0$. В самом деле, допустим, что $f(\alpha) < 0$. Тогда в силу леммы 1 найдётся такое $\delta > 0$, что для всех x , удовлетворяющих условию

$$|x - \alpha| < \delta,$$

будет верно неравенство

$$f(x) < 0.$$

Возьмём $x' > \alpha$, но такое, что $|x' - \alpha| < \delta$, а поэтому

$$f(x') < 0.$$

Но, с другой стороны, $x' > \alpha$, где α — верхняя грань множества E ; поэтому $x' \notin E$, т. е.

$$f(x') > 0.$$

Получили противоречие. Следовательно, допущение $f(\alpha) < 0$ не верно. Допустим теперь, что $f(\alpha) > 0$. Опять в силу леммы 1 найдётся $\delta > 0$ такое, что для всех x , удовлетворяющих условию

$$|x - \alpha| < \delta,$$

верно неравенство

$$f(x) > 0.$$

Но так как α — верхняя грань множества E , то найдётся такая точка $x' \in E$, для которой будут верны неравенства $\alpha - \delta < x' < \alpha$, а значит, и $|x' - \alpha| < \delta$, что даёт

$$f(x') > 0.$$

С другой стороны, $x' \in E$, а поэтому

$$f(x') \leq 0.$$

Полученное противоречие показывает, что и допущение $f(\alpha) > 0$ не верно. Следовательно,

$$f(\alpha) = 0,$$

т. е. лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. В силу второй теоремы Вейерштрасса $f(x)$ на $[a, b]$ принимает наименьшее значение m и наибольшее значение M . Возьмём теперь произвольное число c , удовлетворяющее условию

$$m < c < M,$$

и докажем, что на сегменте $[a, b]$ существует хотя бы одна такая точка ξ , в которой

$$f(\xi) = c.$$

Для этого обозначим через α и β такие точки сегмента $[a, b]$, в которых

$$f(\alpha) = M, \quad f(\beta) = m.$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x) = f(x) - c.$$

Она, очевидно, непрерывна на сегменте с концами в точках α и β , как разность непрерывных функций. Кроме того, в концах этого сегмента $\varphi(x)$ имеет значения, противоположные по знаку, так как

$$\varphi(\alpha) = f(\alpha) - c = M - c > 0,$$

$$\varphi(\beta) = f(\beta) - c = m - c < 0.$$

Поэтому, согласно лемме 2, между α и β есть такая точка ξ , что

$$\varphi(\xi) = 0.$$

Но

$$\varphi(\xi) = f(\xi) - c.$$

Следовательно,

$$f(\xi) - c = 0,$$

т. е.

$$f(\xi) = c.$$

Этим теорема доказана, так как c есть любое число, содержащееся между m и M .

Заметим, что в условии теоремы Коши нельзя заменить сегмент $[a, b]$ произвольным замкнутым ограниченным множеством, как это было в теоремах Вейерштрасса.

В этом можно убедиться хотя бы на следующем примере: Положим

$$\begin{aligned} f(x) &= 1, & \text{если } 0 \leq x \leq 1, \\ f(x) &= -1, & \text{если } 2 \leq x \leq 3. \end{aligned}$$

Здесь множество F , состоящее из двух сегментов $[0, 1]$ и $[2, 3]$, очевидно, замкнутое и ограниченное. Кроме того, функция $f(x)$ на F непрерывна. Действительно, если x_0 принадлежит, например, сегменту $[0, 1]$, то в любой последовательности точек F , сходящейся к x_0 , по крайней мере с некоторого номера все члены будут точками того же сегмента $[0, 1]$, а значит, в соответствующей последовательности значений функции $f(x)$ с этого номера все члены будут равны 1; поэтому она будет иметь пределом 1, т. е. число $f(x_0) = 1$. Это и доказывает непрерывность $f(x)$ в любой точке x_0 сегмента $[0, 1]$, если учесть определение непрерывности по Гейне. То же самое можно повторить для всех точек сегмента $[2, 3]$.

Итак, наша функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве F , но она на этом множестве принимает только два значения: -1 и 1 , и уже не принимает ни одного значения, содержащегося между -1 и 1 .

6. Равномерная непрерывность. Если функция $f(x)$ непрерывна на множестве E , то это означает, что в любой точке $x \in E$ для любого как угодно малого $\epsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x' \in E$, удовлетворяющих условию

$$|x' - x| < \delta,$$

верно неравенство

$$|f(x') - f(x)| < \epsilon.$$

Здесь очевидно, что δ зависит от ϵ . Но, кроме того, следует заметить, что при одном и том же ϵ в разных точках $x \in E$ число δ может оказаться также разным. Для непрерывности $f(x)$ в данной точке $x \in E$ надо, чтобы для $\epsilon > 0$ существовало соответствующее $\delta > 0$, но это число δ может быть меньшим, чем то, которое соответствует тому же ϵ в какой-либо другой точке непрерывности $f(x)$. Вполне может оказаться, что среди значений δ для различных точек $x \in E$, соответствующих одному и тому же ϵ , нет наименьшего значения δ . Требовать, чтобы такое наименьшее δ для точек множества E суще-

ствовало, это значит требовать от функции $f(x)$ больше, чем непрерывность на множестве E . Если $f(x)$ на множестве E удовлетворяет этому большему требованию, т. е. если она такова, что можно по $\varepsilon > 0$ найти общее для всех $x \in E$ значение δ , то говорят, что $f(x)$ на множестве E *равномерно* непрерывна.

Точное определение этого нового понятия следующее:

Функция $f(x)$, определённая на множестве E , называется равномерно непрерывной на этом множестве, если для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для любых $x' \in E$ и $x'' \in E$, удовлетворяющих условию

$$|x' - x''| < \delta,$$

верно неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Например, функция $f(x) = x$ равномерно непрерывна на всей числовой оси. Здесь достаточно взять $\delta = \varepsilon$.

Очевидно, что если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве E , то она непрерывна в каждой точке $x \in E$. Обратное утверждение не верно. Так, например, в полуинтервале $(0, 1]$ функция

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

непрерывна, но не равномерно непрерывна.

Действительно, возьмём из $(0, 1]$ точки x и $x' = x + \Delta x$. Тогда

$$|f(x') - f(x)| = \left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{\Delta x}{x^2 + x\Delta x} \right|.$$

Очевидно, что при каждом определённом значении x из полуинтервала $(0, 1]$ имеем:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta x}{x^2 + x\Delta x} \right| = 0;$$

поэтому в любой точке $x \in (0, 1]$ по заданному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что будет верно неравенство

$$|f(x') - f(x)| = \left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x} \right| = \left| \frac{\Delta x}{x^2 + x\Delta x} \right| < \varepsilon,$$

если только

$$|x' - x| = |\Delta x| < \delta.$$

Это и доказывает непрерывность $f(x) = \frac{1}{x}$ в каждой точке x полуинтервала $(0, 1]$.

Возьмём теперь из $(0, 1]$ точки x' и $x'' = x' + \Delta x$. Тогда

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x' + \Delta x} \right| = \left| \frac{\Delta x}{x'^2 + x' \Delta x} \right|.$$

Очевидно, что если значение Δx как угодно малое, но уже выбранное, то при $x' \rightarrow 0$ величина

$$\left| \frac{\Delta x}{x'^2 + x' \Delta x} \right|$$

неограниченно возрастает; поэтому для $\varepsilon > 0$, каким бы малым $\delta > 0$ ни было, всегда можно найти в полуинтервале $(0, 1]$ настолько близкие к 0 точки x' и $x'' = x' + \Delta x$, что будет

$$|x' - x''| = |\Delta x| < \delta;$$

тем не менее окажется

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right| = \left| \frac{\Delta x}{x'^2 + x' \Delta x} \right| > \varepsilon.$$

Это и доказывает, что $f(x) = \frac{1}{x}$ не равномерно непрерывна в полуинтервале $(0, 1]$.

Тем более интересна следующая теорема, которая показывает, что если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве, то она на этом множестве, наряду с замечательными свойствами, установленными выше, обладает и свойством равномерной непрерывности.

Теорема (Кантора). Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве F , то она равномерно непрерывна на этом множестве.

Доказательство. Воспользуемся методом рассуждений от противного. Допустим, что $f(x)$ на множестве F не равномерно непрерывна. Это означает, что не для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, чтобы из неравенства

$$|x' - x''| < \delta$$

вытекало неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Поэтому существует такое $\varepsilon > 0$, что каким бы малым $\delta > 0$ мы ни выбрали, всегда найдутся такие точки $x' \in F$ и $x'' \in F$, что хотя и будет

$$|x' - x''| < \delta,$$

тем не менее окажется, что

$$|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon.$$

Зафиксируем это ε . Если теперь брать в качестве δ последовательно числа

$$1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots,$$

то для каждого $\delta = \frac{1}{n}$ найдутся такие точки $x'_n \in F$ и $x''_n \in F$, для которых хотя и будет

$$|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}, \quad (1)$$

однако окажется, что

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon. \quad (2)$$

Рассмотрим последовательность

$$x'_1, x'_2, \dots, x'_n, \dots$$

Она ограниченная, так как содержится в ограниченном множестве F , а поэтому из неё можно выделить подпоследовательность

$$x'_{n_1}, x'_{n_2}, \dots, x'_{n_k}, \dots, \quad (3)$$

сходящуюся к некоторому пределу a . Точка a содержится в F в силу замкнутости F , а значит, $f(x)$ определена и непрерывна в точке a . Отсюда следует, учитывая определение непрерывности функции по Гейне, что последовательность

$$f(x'_{n_1}), f(x'_{n_2}), \dots, f(x'_{n_k}), \dots \quad (4)$$

сходится к пределу $f(a)$, как соответствующая последовательности (3), сходящейся к a .

Из неравенства (1) видно, что вместе с последовательностью (3) будет сходиться к a и последовательность

$$x''_{n_1}, x''_{n_2}, \dots, x''_{n_k}, \dots,$$

откуда вытекает, что последовательность

$$f(x'_{n_1}), f(x''_{n_2}), \dots, f(x''_{n_k}), \dots$$

сходится тоже к $f(a)$, как и последовательность (4). Но тогда найдётся такой номер N'' , что для всех $n_k > N''$ будет верно неравенство

$$|f(x'_{n_k}) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad (5)$$

и номер N'' , что для всех $n_k > N''$ будет

$$|f(a) - f(x''_{n_k})| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6)$$

Если обозначим через N то из двух чисел N' и N'' , которое из них больше, то для $n_k > N$ будут верны оба неравенства (5) и (6). Учитывая это, для $n_k > N$ получим:

$$\begin{aligned} |f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| &= |[f(x'_{n_k}) - f(a)] + [f(a) - f(x''_{n_k})]| \leq \\ &\leq |f(x'_{n_k}) - f(a)| + |f(a) - f(x''_{n_k})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Итак, для $n_k > N$ имеем:

$$|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| < \varepsilon,$$

тогда как по самому выбору точек x'_n и x''_n , как показывает неравенство (2), должно быть

$$|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geq \varepsilon.$$

Полученное противоречие показывает, что наше допущение, будто $f(x)$ на F не равномерно непрерывна, не верно. Следовательно, функция $f(x)$ на множестве F равномерно непрерывна.

Условия теоремы — замкнутость и ограниченность множества F , на котором рассматривается данная непрерывная функция $f(x)$, являются существенными. Так, например, рассмотренная выше функция

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

непрерывна, но не равномерно непрерывна в полуинтервале $(0, 1]$, представляющем ограниченное, но не замкнутое множество.

Рассмотрим другой пример. Пусть на множестве всех действительных чисел определена функция

$$f(x) = x^2.$$

Очевидно, что данная функция непрерывна в каждой точке числовой прямой (хотя бы потому, что $x^2 = xx$ можно принять за произведение двух непрерывных функций). Докажем, что в $(-\infty, +\infty)$ она не равномерно непрерывна.

Действительно, возьмём точки x' и $x'' = x' + \Delta x$. Тогда

$$|f(x') - f(x'')| = |x'^2 - (x' + \Delta x)^2| = |2x'\Delta x + \Delta x^2|.$$

Так как при фиксированном, хотя бы и как угодно малом, значении Δx величина

$$|2x'\Delta x + \Delta x^2|$$

неограниченно возрастает при возрастании $|x'|$, то для $\epsilon > 0$, каким бы малым $\delta > 0$ ни выбрали, найдутся такие (достаточно далёкие от 0) точки x' и $x'' = x' + \Delta x$, что будет

$$|x' - x''| = |\Delta x| < \delta;$$

тем не менее окажется

$$|f(x') - f(x'')| = |2x'\Delta x + \Delta x^2| > \epsilon,$$

т. е. данная функция в $(-\infty, +\infty)$ не равномерно непрерывна. Здесь нарушено одно из условий теоремы Кантора: множество действительных чисел, на котором рассматривалась функция, есть замкнутое, но не ограниченное множество.

7. О работах русских и советских математиков. Глубокие исследования функций содержатся в многочисленных работах русских и советских математиков. Существование самого понятия функции, заключающееся в соответствии между элементами двух множеств, впервые было раскрыто ещё в прошлом веке Н. И. Лобачевским. В начале XX в., когда для изучения функций стали широко применять теорию множеств, русские учёные получили выдающиеся результаты, вошедшие в число самых основных положений теории функций действительного переменного, которая тогда только ещё создавалась. К этим результатам прежде всего относятся две знаменитые тео-

ремы: теорема Д. Ф. Егорова о последовательностях так называемых измеримых функций, доказанная в 1911 г., и теорема Н. Н. Лузина, доказанная в 1912 г., в которой показывается сущность понятия измеримой функции путём сопоставления её с понятием непрерывности функции. А. Я. Хинчин, известный крупными работами в различных областях математики, посвятил большую работу изучению общих свойств измеримых функций. Позже советскими математиками получено много ценных результатов в области изучения функций.

ГЛАВА V

ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

1. Производная функции. Пусть мы имеем функцию $y = f(x)$ и пусть она задана для определённости на отрезке $[a, b]$. Возьмём какое-нибудь значение x из этого отрезка. Затем возьмём новое значение аргумента $x + \Delta x$, изменив первоначальное значение x на некоторую величину Δx (положительную или отрицательную), которую будем называть *приращением аргумента* или *приращением независимой переменной*. Этому новому значению аргумента соответствует и новое значение функции $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. Величину изменения функции Δy , которую мы будем называть *приращением функции*, можно выразить так:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Теперь составим отношение приращения функции Δy к приращению аргумента Δx

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Это отношение, очевидно, есть функция от Δx .

Если существует предел отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению независимой переменной Δx , когда Δx стремится к нулю, то этот предел называется *производной* функции $y = f(x)$ по независимой переменной x в данной точке x .

Производная функции $y = f(x)$ обозначается через $f'(x)$, или $\frac{dy}{dx}$. Таким образом, имеем по определению

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в каждой точке x отрезка $[a, b]$, то $f'(x)$ сама будет функцией

от x . Может оказаться, что и $f'(x)$ имеет свою производную, которую обозначают символом $f''(x)$ или $\frac{d^2y}{dx^2}$ и называют *производной второго порядка* от функции $y = f(x)$. Таким образом, имеем по определению

$$f''(x) = [f'(x)]'.$$

Аналогично вводятся понятия производных более высоких порядков. Производная n -го порядка функции $y = f(x)$ обозначается через $f^{(n)}(x)$ или $\frac{d^ny}{dx^n}$.

Можно заметить, что если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет производную $f'(x_0)$, то она в этой точке непрерывна.

Действительно, если существует $f'(x_0)$, то это значит, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

или, обозначая $x_0 + \Delta x$ через x ,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Отсюда следует, что при $x \rightarrow x_0$ величина

$$\alpha(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$$

есть бесконечно малая. Замечая, что

$$f(x) - f(x_0) = [f'(x_0) + \alpha(x)](x - x_0),$$

имеем:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0,$$

откуда получим:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

что и означает непрерывность $f(x)$ в точке x_0 .

Обратное утверждение не верно. Из того, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , ещё не следует, что в этой точке обязательно существует производная $f'(x_0)$. Так, например, функция

$$f(x) = |x|$$

непрерывна во всех точках числовой прямой, в том числе в точке 0, но при $x=0$ не имеет производной. Действительно, отношение

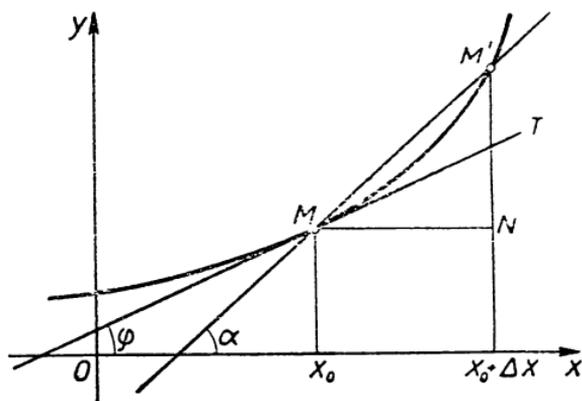
$$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

равно 1 при $\Delta x > 0$ и -1 при $\Delta x < 0$; поэтому оно при $\Delta x \rightarrow 0$ не имеет предела.

2. Геометрический смысл производной. Пусть имеем кривую на плоскости xOy , заданную уравнением

$$y = f(x),$$

которое выражает зависимость между координатами x и y произвольной точки этой кривой. Возьмём на данной кривой (черт. 5) точку M с координатами $(x_0, f(x_0))$ и точку M' с координатами $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. Замечая, что



$$MN = \Delta x,$$

$$M'N = \Delta y,$$

ВИДИМ, ЧТО

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha,$$

Черт 5

где α есть угол, образованный секущей, проходящей через точки M и M' , и положительным направлением оси ox . Учитывая затем, что касательной к данной кривой в точке M называется предельное положение MT секущей MM' , когда точка M' стремится по кривой к точке M , получим:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{M' \rightarrow M} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \varphi.$$

Тангенс угла, образованного прямой и положительным направлением оси ox , называется угловым коэффициентом данной прямой. Пользуясь этим термином, мы можем геометрический смысл производной сформулировать так:

Производная $f'(x)$ функции $f(x)$ есть угловым коэффициент касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x .

Отсюда следует, что задача проведения касательной к данной кривой в данную точку сводится к задаче отыскания производной заданной функции.

3. Физический смысл производной. Пусть

$$s = f(t)$$

есть уравнение движения материальной точки. Это уравнение выражает путь s , пройденный точкой, как функцию времени t . В этом случае Δt есть некоторый промежуток времени, а соответствующее Δs — путь, пройденный точкой за время Δt от t до $t + \Delta t$. Отношение

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}$$

есть средняя скорость точки за время от t до $t + \Delta t$. Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получают скорость v точки в данный момент t :

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Но

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

Следовательно,

$$v = \frac{ds}{dt}.$$

Таким образом, производная имеет следующий физический смысл:

Скорость v движущейся точки есть производная от пути s по времени t .

Если теперь скорость v рассматривать как функцию времени, то аналогичным образом получим, что ускорение a есть производная скорости v по времени t : $a = \frac{dv}{dt}$,

а так как производная от $v = \frac{ds}{dt}$ означает производную от производной пути s по времени t , то имеем:

Ускорение a движущейся точки есть производная второго порядка от пути s по времени t

$$a = \frac{d^2s}{dt^2} .$$

В этом заключается физический смысл второй производной.

Таким образом, задача отыскания скорости и ускорения, когда известно уравнение движения точки, сводится к задаче вычисления производных первого и второго порядков от данной функции.

4. Правила для вычисления производных. Непосредственно из определения производной легко получить следующие правила, облегчающие вычисление производных:

1. Производная постоянной величины c равна 0:

$$c' = 0.$$

2. Производная независимой переменной x по этой переменной равна 1:

$$x' = 1.$$

3. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$, то

a) $[f(x) + \varphi(x)]' = f'(x) + \varphi'(x)$;

b) $[f(x) - \varphi(x)]' = f'(x) - \varphi'(x)$;

c) $[f(x)\varphi(x)]' = f'(x)\varphi(x) + f(x)\varphi'(x)$;

d) $\left\{ \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right\}' = \frac{f'(x)\varphi(x) - f(x)\varphi'(x)}{[\varphi(x)]^2}$, если $\varphi(x) \neq 0$.

Правило а) для производной суммы верно в случае любого конечного числа слагаемых, а правило с) для производной произведения конечного числа n множителей примет вид:

$$4. \quad [f_1(x)f_2(x)\dots f_n(x)]' = f_1'(x)f_2(x)\dots f_n(x) + f_1(x)f_2'(x)f_3(x)\dots f_n(x) + \dots + f_1(x)\dots f_{n-1}(x)f_n'(x).$$

Отсюда при $f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_n(x) = f(x)$ получим:

5. $\{[f(x)]^n\}' = n[f(x)]^{n-1}f'(x)$.

В частности

$$5'. (x^n)' = nx^{n-1}.$$

Докажем хотя бы правило 3, с) для произведения двух функций. Пусть

$$u = f(x), \quad v = \varphi(x), \quad y = uv.$$

Дадим независимой переменной x приращение Δx . Тогда и функции u и v получают приращения соответственно Δu и Δv . Функция y также получит приращение Δy , причём

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v).$$

Отсюда

$$\Delta y = (u + \Delta u)(v + \Delta v) - uv = \Delta u \cdot v + u \cdot \Delta v + \Delta u \cdot \Delta v,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} v + u \frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v.$$

Переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ и учитывая, что функции u и v имеют производные $u' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$ и $v' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$, а также замечая, что при $\Delta x \rightarrow 0$ u и v , не содержащие Δx , не меняются, а $\Delta v \rightarrow 0$, ибо функция v , имеющая производную, непрерывна, получим:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v + u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta v = \\ &= u'v + uv'. \end{aligned}$$

Следовательно, функция $y = uv$ имеет производную y' и

$$y' = u'v + uv'.$$

Остальные правила, приведенные здесь, доказываются аналогично. Заметим, наконец, что формулы 5 и 5', выведенные здесь для целого положительного n , верны для любого постоянного n .

5. Производные элементарных функций. Вычислим производные некоторых элементарных функций. Полученные при этом результаты мы можем рассматривать как формулы, которые вместе с правилами, приведёнными выше, позволяя быстро находить производные более сложных функций.

1. Показательная функция $y = e^x$. Дадим x приращение Δx , тогда y получит приращение Δy , причём

$$\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x (e^{\Delta x} - 1),$$

а значит,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Положим

$$\alpha = e^{\Delta x} - 1.$$

Тогда

$$\Delta x = \ln(1 + \alpha).$$

Поэтому

$$\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \frac{\alpha}{\ln(1 + \alpha)} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha} \ln(1 + \alpha)} = \frac{1}{\ln(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

Заметим, что при $\Delta x \rightarrow 0$ и α стремится к нулю, а $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e$, как было показано раньше. Если, кроме того, учтём, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \ln(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \ln \lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

в силу непрерывности логарифмической функции, то получим:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}} = \frac{1}{\ln e} = 1.$$

Поэтому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = e^x.$$

Следовательно, функция $y = e^x$ имеет производную y' и $y' = e^x$.

Итак, имеем формулу:

$$(e^x)' = e^x.$$

2. Логарифмическая функция $y = \ln x$. Дадим x приращение Δx , тогда получим:

$$\Delta y = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln \frac{x + \Delta x}{x} = \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right).$$

Отсюда имеем:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right) = \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Замечая, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \ln \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \ln e = 1,$$

получим:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}.$$

Следовательно, функция $y = \ln x$ имеет производную y' и

$$y' = \frac{1}{x}.$$

Получили формулу

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

3. *Тригонометрические функции.* Рассмотрим функцию $y = \sin x$. Приращению Δx здесь соответствует

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Поэтому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right).$$

Учитывая, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1,$$

как было установлено раньше, а также и то, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = \cos \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right),$$

так как функция $\cos x$ непрерывна, получим:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos x.$$

Следовательно, функция $y = \sin x$ имеет производную y' и

$$y' = \cos x.$$

Таким образом, имеем формулу

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Аналогично можно получить формулу

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Чтобы найти производные других тригонометрических функций, достаточно выразить их через синус и косинус, а затем воспользоваться уже имеющимися правилами и формулами.

Можно было бы получить ещё ряд формул, вычислив производные других элементарных функций, но мы ограничимся выведенными, которых для дальнейших целей нам достаточно.

6. Дифференциал функции. Пусть функция $y = f(x)$ задана для определённости на отрезке $[a, b]$. Исходя из некоторой точки x этого отрезка, дадим независимой переменной приращение Δx ; тогда и функция y получит некоторое приращение Δy .

Если приращение функции Δy , соответствующее приращению независимой переменной Δx , можно представить в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где A не зависит от Δx , а $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая при $\Delta x \rightarrow 0$, то функция $y = f(x)$ называется *дифференцируемой* в данной точке.

Та часть приращения дифференцируемой функции, которая зависит от приращения независимой переменной Δx линейно, т. е. $A \Delta x$, называется *дифференциалом* функции $y = f(x)$ и обозначается символом dy или $df(x)$:

$$dy = A \Delta x.$$

Поставим себе задачей найти A , т. е. выразить A при помощи функции $f(x)$. С этой целью возьмём приращение дифференцируемой функции

$$\Delta y = A \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x$$

и составим отношение

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x).$$

Учитывая, что при $\Delta x \rightarrow 0$ $\alpha(\Delta x)$ есть бесконечно малая, мы видим, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A.$$

Но если при $\Delta x \rightarrow 0$ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ имеет предел, то этот предел есть производная $f'(x)$. Поэтому

$$A = f'(x),$$

а значит,

$$dy = f'(x) \Delta x.$$

Следовательно, если в точке x функция $y = f(x)$ дифференцируема, то она в этой точке имеет производную $f'(x)$.

Верно и обратное утверждение: если функция $y = f(x)$ в точке x имеет производную $f'(x)$, то она в этой точке дифференцируема.

Действительно, если существует производная $f'(x)$, то это означает, что при $\Delta x \rightarrow 0$ существует предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, и

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x);$$

поэтому при $\Delta x \rightarrow 0$ величина

$$\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x)$$

есть бесконечно малая. Но отсюда следует, что

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \alpha(\Delta x) \Delta x,$$

где, как видим, $f'(x) \Delta x$ зависит от Δx линейно, а значит, функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x и $f'(x) \Delta x$ есть её дифференциал.

Таким образом, дифференциал функции выражается формулой

$$dy = f'(x) \Delta x.$$

Замечая, что у величины Δx частью, зависящей от Δx линейно, является целиком Δx , мы можем сказать, что

дифференциал независимой переменной есть приращение этой переменной

$$dx = \Delta x.$$

Отсюда следует окончательная формула дифференциала функции:

$$dy = f'(x) dx.$$

Из этой формулы в свою очередь имеем:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Таким образом, производную от функции y по независимой переменной x удобнее выражать символом $\frac{dy}{dx}$, так как в случае надобности $\frac{dy}{dx}$ мы можем рассматривать и как частное от деления на дифференциал (приращение) независимой переменной dx соответствующего ему дифференциала функции dy .

Дифференциал функции dy , если он не равен нулю, имеет смысл называть главной частью приращения функции Δy , так как разность между Δy и dy может быть сделана сколь угодно малой даже по сравнению с самими Δy и dy , если только Δx взять достаточно малым. Действительно, если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x , то

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \varepsilon \Delta x,$$

где $f'(x) \Delta x = dy$, а ε стремится к нулю, когда $\Delta x \rightarrow 0$. Пусть $dy \neq 0$, а значит, и $f'(x) \neq 0$. Тогда

$$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{\varepsilon}{f'(x)};$$

поэтому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1.$$

Отсюда мы получаем возможность брать dy в качестве приближённого значения Δy , причём ошибка будет сколь угодно малой, если только Δx достаточно мало. Это обстоятельство очень важно, так как часто бывает трудно вычислить даже приближённое значение приращения функции Δy , рассматривая его как разность $f(x + \Delta x) - f(x)$, тогда

как dy находится легко при помощи известных правил и формул.

Пусть, например, требуется вычислить значение $\sqrt{3,9978}$. Возьмём функцию $y = \sqrt{x}$. Если теперь положим $x = 4$, $dx = -0,0022$, то получим $3,9978 = x + dx$. Учтывая, что

$$\sqrt{x + dx} = y + \Delta y = \sqrt{x} + \Delta y \approx \sqrt{x} + dy = \sqrt{x} + \frac{dx}{2\sqrt{x}},$$

получим:

$$\sqrt{3,9978} \approx \sqrt{4} + \frac{-0,0022}{2\sqrt{4}} = 2 - 0,00055 = 1,99945.$$

Если же $\sqrt{3,9978}$ вычислить по правилу извлечения квадратного корня, что гораздо более кропотливо, получим:

$$\sqrt{3,9978} = 1,9994492\dots$$

Геометрический смысл дифференциала функции легко усмотреть из его формулы.

Пусть мы имеем кривую, заданную уравнением

$$y = f(x),$$

где $f(x)$ — дифференцируемая функция. Проведём касательную к этой кривой в точке $M(x, y)$.

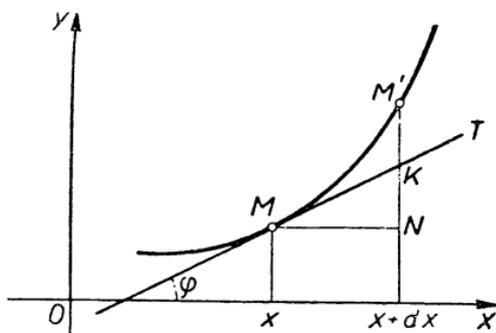
Нам известно, что производная $f'(x)$ есть угловой коэффициент касательной, т. е.

$$f'(x) = \operatorname{tg} \varphi.$$

Из чертежа 6 видно, что при изменении абсциссы x на $\Delta x = dx = MN$ ордината кривой изменится на $\Delta y = NM'$, а ордината касательной — на $NK = MN \cdot \operatorname{tg} \varphi = f'(x) dx = dy$. Отсюда следует:

Дифференциал $dy = f'(x) dx$ функции $f(x)$ есть приращение ординаты касательной, проведённой к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x , при переходе от точки касания в точку с абсциссой $x + dx$.

Операции отыскания производной или дифференциала данной функции, как видели, тесно связанные между собой,



Черт. 6

называются *дифференцированием* данной функции. Дифференцирование и связанные с ним вопросы составляют предмет *дифференциального исчисления*.

7. Основные теоремы дифференциального исчисления. Здесь мы рассмотрим теоремы, которые открывают путь к решению многих важных вопросов при помощи дифференцирования.

Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, имеет производную хотя бы в интервале (a, b) и на концах сегмента $[a, b]$ принимает равные значения, то в интервале (a, b) существует по крайней мере одна точка, в которой производная данной функции равна нулю.

Доказательство. Так как по условию $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то в силу второй теоремы Вейерштрасса она на этом сегменте принимает наименьшее и наибольшее значения. Обозначим их соответственно m и M . Если $M = m$, то это означает, что $f(x)$ есть постоянная, и поэтому $f'(x) = 0$ во всем интервале (a, b) , а значит, в этом случае теорема верна. Пусть $M \neq m$. Тогда функция $f(x)$ по крайней мере одно из двух своих значений m или M принимает в точке x_0 , содержащейся внутри интервала (a, b) , так как $f(a) = f(b)$ и поэтому не может быть одновременно m значением $f(x)$ на одном конце, а M на другом конце сегмента $[a, b]$. Пусть для определённости

$$M = f(x_0), \quad a < x_0 < b.$$

Так как по условию $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в каждой точке x интервала (a, b) , то существует и $f'(x_0)$, а поэтому

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} = f'(x_0).$$

Но $f(x_0) = M$, и поэтому $f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0$ и $f(x_0 - h) - f(x_0) \leq 0$. Отсюда имеем одновременно:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0, \quad \text{а значит, и } f'(x_0) \leq 0,$$

$$\frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{-h} \geq 0, \quad \text{а значит, и } f'(x_0) \geq 0.$$

Следовательно,

$$f'(x_0) = 0,$$

т. е. теорема верна и в этом случае.

Формула Тейлора. Пусть функция $f(x)$ на сегменте $[a, a+h]$ (или $[a+h, a]$, если $h < 0$) имеет непрерывные производные до $n-1$ -го порядка, а в интервале $(a, a+h)$ существует и производная n -го порядка. Поставим себе задачей выяснить, какая получится ошибка, если $f(a+h)$ заменим многочленом

$$f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1}.$$

Иначе говоря, требуется найти величину R_n , определённую равенством

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}h^{n-1} + R_n. \quad (1)$$

Будем искать R_n в форме $R_n = Mh^p$, где $1 \leq p \leq n$, а M неизвестно. С этой целью составим функцию

$$\varphi(x) = f(x) + f'(x)(b-x) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + M(b-x)^p, \quad (2)$$

где $b = a+h$.

Функция $\varphi(x)$ на сегменте $[a, b]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля. Она непрерывна на указанном сегменте, как сумма конечного числа непрерывных функций. На концах сегмента имеет равные значения: $\varphi(a) = f(b)$ в силу равенства (1), а то, что $\varphi(b) = f(b)$, очевидно из самой формулы (2), определяющей функцию $\varphi(x)$. Наконец, в интервале (a, b) $\varphi(x)$ имеет производную, так как каждый член суммы, выражающей функцию $\varphi(x)$, в точках (a, b) производную имеет. Следовательно, в интервале (a, b) есть такая точка ξ , что $\varphi'(\xi) = 0$. Дифференцируя $\varphi(x)$, получим после упрощений:

$$\varphi'(x) = \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - Mp(b-x)^{p-1},$$

а поэтому

$$\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!}(b-\xi)^{n-1} - Mp(b-\xi)^{p-1} = 0.$$

Отсюда получим:

$$M = \frac{(b-\xi)^{n-p}}{(n-1)!p} f^{(n)}(\xi).$$

Так как $a < \xi < b = a + h$, то $\xi = a + \theta h$, где $0 < \theta < 1$.
Поэтому

$$M = \frac{h^{n-p} (1-\theta)^{n-p}}{(n-1)! p} f^{(n)}(a + \theta h).$$

Следовательно, искомое R_n есть

$$R_n = \frac{h^n (1-\theta)^{n-n}}{(n-1)! p} f^{(n)}(a + \theta h). \quad (3)$$

Итак, равенство (1) верно, если под R_n в этом равенстве понимать то, что даёт формула (3). В этом случае равенство (1) называется формулой Тейлора, R_n — остаточным членом этой формулы. Из равенства (3), выражающего остаточный член формулы Тейлора в форме Шлёмильха, можно получить ещё другие более простые формы R_n . Так, полагая $p = 1$, мы получим R_n в форме Коши:

$$R_n = \frac{h^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(a + \theta h); \quad (4)$$

если же положим в (3) $p = n$, то получим R_n в форме Лагранжа

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h). \quad (5)$$

Если положим $a + h = x$, то формула Тейлора (1) примет вид

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} + R_n, \quad (1')$$

а остаточный член R_n в форме Шлёмильха —

$$R_n = \frac{(x-a)^n (1-\theta)^{n-p}}{(n-1)! p} f^{(n)}[a + \theta(x-a)], \quad (3')$$

откуда при $p = 1$ и $p = n$ опять получим R_n соответственно в форме Коши и в форме Лагранжа.

Если формулу Тейлора (1) развернуть только до $n = 1$ и R_1 записать в форме (5), то получим:

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a + \theta h),$$

или

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a + \theta h).$$

Полученная формула называется формулой Лагранжа, она доказывает справедливость следующей теоремы:

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и имеет производную хотя бы в интервале (a, b) , то в этом интервале существует по крайней мере одна такая точка ξ , что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

8. Приближённые значения элементарных функций. Формулой Тейлора пользуются для вычисления приближённых значений некоторых функций. Для этой цели часто бывает более удобна следующая формула, которая получается из формулы Тейлора, если взять $a = 0$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n, \quad (1)$$

где

$$R_n = \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(\theta x), \quad (2)$$

если записать в форме Лагранжа, и

$$R_n = \frac{x^n (1 - \theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\theta x), \quad (2')$$

если записать в форме Коши. Формулу (1) принято называть формулой Маклорена.

Рассмотрим несколько примеров, когда данную функцию с любой степенью точности можно заменить многочленом, представляющим сумму первых n членов формулы (1).

1) *Показательная функция.* Пусть $f(x) = e^x$. Тогда $f^{(n)}(x) = e^x$ и $f(0) = f^{(n)}(0) = 1$. Откуда, пользуясь формулами (1) и (2), имеем:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x}}{n!} x^n. \quad (3)$$

Если возьмём $x = 1$, то получим:

$$e = 2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{e^\theta}{n!}. \quad (4)$$

Здесь, очевидно,

$$0 < \frac{e^\theta}{n!} < \frac{3}{n!}, \text{ так как } 2 < e < 3 \text{ и } 0 < \theta < 1;$$

поэтому при достаточно большом n сумма

$$2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{(n-1)!}$$

будет сколь угодно близким приближением к числу e . Так, например, если надо вычислить e с точностью до $\frac{1}{10000}$, то достаточно взять $n=8$, так как $8! > 30000$, и поэтому

$$\frac{e^\theta}{8!} < \frac{3}{8!} < \frac{3}{30\,000} = \frac{1}{10\,000}.$$

Таким образом, сумма

$$2 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{7!}$$

даёт приближённое значение числа e с недостатком

$$e \approx 2,7182,$$

причём ошибка меньше 0,0001 (при большей точности $e \approx 2,71828$).

Из равенства (4) следует, что число e иррационально.

Действительно, допустим, что число e рационально.

Тогда

$$e = \frac{p}{q},$$

где p и q — натуральные числа. Возьмём n настолько большим, чтобы имели

$$n-1 > q \text{ и } 0 < \frac{e^\theta}{n} < 1,$$

и обе части равенства (4) умножим на $(n-1)!$. Тогда в левой части получится целое число, так как q содержится среди множителей числа $(n-1)!$, а поэтому сократится. То же самое можно сказать о результате умножения на $(n-1)!$ каждого из первых $n-1$ членов правой части (4). В итоге получим равенство вида

$$N = N_1 + \frac{e^\theta}{n},$$

где N и N_1 — целые числа, а $0 < \frac{e^\theta}{n} < 1$. Но прибавляя к целому числу N_1 положительное число $\frac{e^\theta}{n}$, меньшее 1,

нельзя получить целое число N . Полученное противоречие показывает, что допущение $e = \frac{p}{q}$ не верно. Следовательно, число e иррационально.

2) *Тригонометрические функции* $\sin x$ и $\cos x$. Пусть $f(x) = \sin x$. Тогда $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{IV}(x) = \sin x$. Так как $f^{IV}(x)$ совпадает с $f(x)$, то $f^V(x) = f'(x)$ и т. д. Но $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, поэтому коэффициентами в формуле (1) для $\sin x$ будут числа $0, 1, 0, -1$, которые будут повторяться в том же порядке. Следовательно, получим:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k}, \quad (5)$$

где

$$|R_{2k}| = \left| \frac{x^{2k}}{(2k)!} f^{(2k)}(\theta x) \right| \leq \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Аналогично получим:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k+1}, \quad (6)$$

где

$$|R_{2k+1}| = \left| \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} f^{(2k+1)}(\theta x) \right| \leq \left| \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right|.$$

Формулами (5) и (6) можно воспользоваться для вычисления приближённых значений $\sin x$ и $\cos x$ с любой степенью точности, так как остаточные члены этих формул стремятся к нулю при неограниченном возрастании их номера, причём это будет происходить особенно быстро при $|x| < 1$, а вычисление $\sin x$ и $\cos x$ при $|x| \geq 1$ всегда можно свести с помощью формул тригонометрии к вычислению значений этих функций при $|x| < 1$.

9. Условия монотонности функции. Если для любых точек x' и x'' отрезка $[a, b]$ из неравенства $x' < x''$ следует $f(x') \leq f(x'')$, то функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется *неубывающей*; если же из $x' < x''$ следует $f(x') \geq f(x'')$, то $f(x)$ называется *невозрастающей*.

Функция $f(x)$ называется *монотонной* на отрезке $[a, b]$, если она на этом отрезке неубывающая или невозрастающая.

Докажем теорему, которая даёт аналитические признаки монотонности функции.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и имеет производную $f'(x)$ по крайней мере в интервале (a, b) .

Для того чтобы данная функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ была неубывающей (невозрастающей), необходимо и достаточно иметь $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для всех точек x интервала (a, b) .

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ неубывающая. Тогда для любых точек x и $x + \Delta x$ интервала (a, b) верно неравенство

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Отсюда, переходя к пределу при $\Delta x \rightarrow 0$ и учитывая существование производной $f'(x)$ в любой точке $x \in (a, b)$, получим:

$$f'(x) \geq 0.$$

Пусть теперь дано, что $f'(x) \geq 0$ в каждой точке $x \in (a, b)$. Тогда для любых двух точек x' и x'' из отрезка $[a, b]$ по теореме Лагранжа имеем:

$$f(x'') - f(x') = (x'' - x') f'(\xi),$$

где ξ есть точка, содержащаяся между x' и x'' .

Так как по условию $f'(x) \geq 0$ в каждой точке интервала (a, b) , то $f'(\xi) \geq 0$.

Поэтому $f(x'') - f(x') \geq 0$, если только $x'' - x' > 0$. Следовательно, для любых точек x' и x'' отрезка $[a, b]$ из $x' < x''$ вытекает $f(x') \leq f(x'')$, а это означает, что функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ неубывающая.

Таким образом, для неубывающей функции теорема доказана.

Доказательство теоремы, относящейся к невозрастающей функции, аналогично.

Для дальнейшего полезно ввести ещё понятия возрастания и убывания функции в точке.

Функция $f(x)$ называется возрастающей (убывающей) в точке x_0 , если существует такой интервал, содержащий точку x_0 , в котором для всех $x < x_0$ верно неравенство

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0)),$$

а для $x > x_0$ верно

$$f(x) > f(x_0) \quad (f(x) < f(x_0)).$$

Следующая теорема выражает достаточные условия возрастания и убывания функции в точке.

Теорема. Пусть функция $f(x)$ в точке x_0 имеет производную $f'(x_0)$.

Если $f'(x_0) > 0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 возрастает; если $f'(x_0) < 0$, то $f(x)$ в точке x_0 убывает.

Доказательство. Пусть для определённости $f'(x_0) > 0$. Это означает, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0;$$

поэтому существует такое достаточно малое $\delta > 0$, что для всех $\Delta x \neq 0$, удовлетворяющих условию $|\Delta x| < \delta$, верно неравенство

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0.$$

Отсюда видно, что Δx и $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ имеют один и тот же знак; поэтому $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$, если $x_0 - \delta < x_0 + \Delta x < x_0$, и $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$, если $x_0 < x_0 + \Delta x < x_0 + \delta$. Следовательно, функция $f(x)$ в точке x_0 возрастает.

Аналогично доказывается, что при условии $f'(x_0) < 0$ функция $f(x)$ в точке x_0 убывает.

10. Экстремумы функций. Пусть функция $f(x)$ определена в некотором интервале, содержащем точку x_0 .

Точка x_0 называется *точкой максимума* (*точкой минимума*) функции $f(x)$, если существует такое $\delta > 0$, что для всех h , удовлетворяющих условию $|h| < \delta$, верно неравенство

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0 \quad (f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0).$$

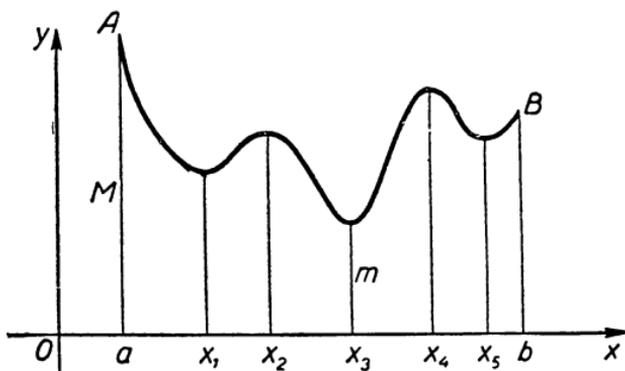
Точки максимума и минимума функции называются точками *экстремума* этой функции.

Значения функции в точках её максимума и минимума называются соответственно *максимумом* и *минимумом* данной функции.

Из определений точек экстремума следует, что $f(x_0)$ будет максимумом или минимумом функции $f(x)$, если $f(x_0)$ окажется соответственно наибольшим или наименьшим значением функции $f(x)$ в некотором достаточно малом интервале, содержащем точку x_0 , а не обязательно во всей области, где задана функция $f(x)$.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то, как известно, среди её значений, принимаемых на $[a, b]$, есть наибольшее и наименьшее значения. Если своё наибольшее значение M функция $f(x)$ принимает в точке x_0 , не являющейся концом отрезка $[a, b]$, то, очевидно, $M = f(x_0)$ есть максимум функции $f(x)$. Но может оказаться, что $M = f(a)$ или $M = f(b)$.

Следовательно, чтобы найти наибольшее значение M непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, надо найти



Черт. 7

все максимумы $f(x)$ на $[a, b]$ и значения $f(x)$ на концах отрезка $[a, b]$, т. е. $f(a)$ и $f(b)$, и среди них выбрать наибольшее число.

Ясно, что наименьшим значением m непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ будет наименьшее число среди всех минимумов $f(x)$ на $[a, b]$ и значений $f(a)$ и $f(b)$.

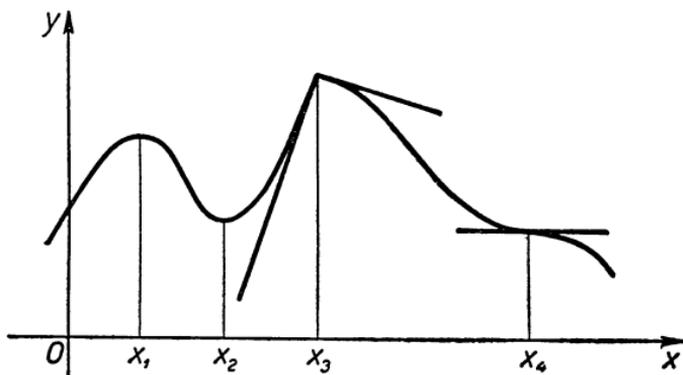
Функция, изображённая на чертеже 7, имеет максимумы: $f(x_2)$ и $f(x_4)$, минимумы: $f(x_1)$, $f(x_3)$ и $f(x_5)$; наибольшее значение функции $f(x)$ есть $M = f(a)$, а наименьшее значение $m = f(x_3)$ является наименьшим из минимумов $f(x)$.

Нетрудно заметить, что если точка x_0 есть единственная точка экстремума функции $f(x)$ на некотором отрезке или интервале, то там $f(x_0)$ будет наибольшим значением $f(x)$, если $f(x_0)$ — максимум, и $f(x_0)$ будет наименьшим значением $f(x)$, если $f(x_0)$ — минимум.

11. Необходимые условия экстремума. Следующая теорема устанавливает необходимые условия существования экстремума функции.

Теорема. Для того чтобы функция $f(x)$ в точке x_0 имела экстремум, необходимо выполнение одного из двух условий: либо $f'(x_0) = 0$, либо производной от функции $f(x)$ в точке x_0 не существует.

Доказательство. Очевидно, теорема будет доказана, если докажем, что не может быть ни максимума, ни минимума функции $f(x)$ в такой точке, в которой производная от $f(x)$ существует, но не равна нулю. Поэтому пусть $f'(x_0) \neq 0$. Для определённости положим $f'(x_0) > 0$. Тогда функция $f(x)$ в точке x_0 будет возрастающей. Следовательно, найдётся такой интервал, содержащий точку x_0 ,



Черт. 8

в котором для всех $x < x_0$ верно неравенство $f(x) < f(x_0)$, а для $x > x_0$ верно $f(x) > f(x_0)$. Но это и показывает, что $f(x_0)$ не есть ни максимум, ни минимум функции $f(x)$, так как $f(x_0)$ не будет ни наибольшим, ни наименьшим среди значений $f(x)$ в интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, каким бы малым этот интервал мы ни выбрали.

Подобным же образом убеждаемся, что при $f'(x_0) < 0$ в точке x_0 нет экстремума $f(x)$.

Для функции $f(x)$, изображённой на чертеже 8, точки x_1 , x_2 и x_3 являются точками экстремума, причем $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$, а в точке x_3 производная от $f(x)$ не существует.

В точке x_4 необходимое условие экстремума также выполнено: $f'(x_4) = 0$ (касательная параллельна оси ox), но, как видно из чертежа, в этой точке нет ни максимума, ни минимума функции $f(x)$.

12. Достаточные условия максимума и минимума. Необходимые условия экстремума позволяют нам только найти точки, в которых *может быть* (но не обязательно есть) максимум или минимум данной функции. Чтобы до конца решить задачу отыскания точек экстремума, надо иметь достаточные условия максимума и минимума функции. Эти условия и дают следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ в точке x_0 удовлетворяет одному из необходимых условий экстремума: $f'(x_0) = 0$

или $f'(x_0)$ не существует. Пусть существует такой интервал $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, в котором для всех $x < x_0$ верно $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), а для $x > x_0$ верно $f'(x) < 0$ ($f'(x) > 0$). Тогда в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум (минимум).

Доказательство. Проведём рассуждения применительно к случаю максимума.

По условию в интервале $(x_0 - \delta, x_0)$ имеем $f'(x) > 0$, в силу чего в этом интервале функция $f(x)$ возрастающая. В интервале же $(x_0, x_0 + \delta)$ по условию $f'(x) < 0$; поэтому там функция $f(x)$ убывающая.

Следовательно, значение $f(x_0)$ есть наибольшее среди значений $f(x)$ в интервале $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, а это означает, что $f(x_0)$ есть максимум функции $f(x)$.

Эта теорема может служить нам правилом для отыскания точек максимума и минимума функций.

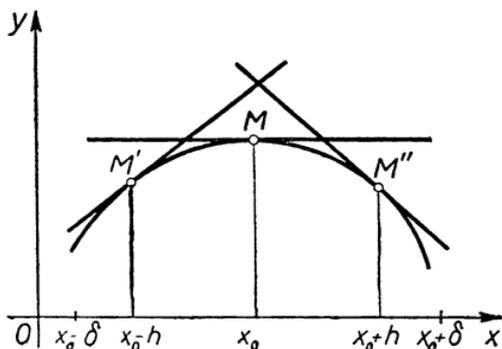
Чертежи 9 и 10 представляют геометрические иллюстрации к теореме ($f'(x_0 - h)$ и $f'(x_0 + h)$ являются угловыми коэффициентами касательных в точках M' и M'').

Пример 1. Найти точки экстремума функции

$$f(x) = 1 + (x - 2)^{\frac{2}{3}}.$$

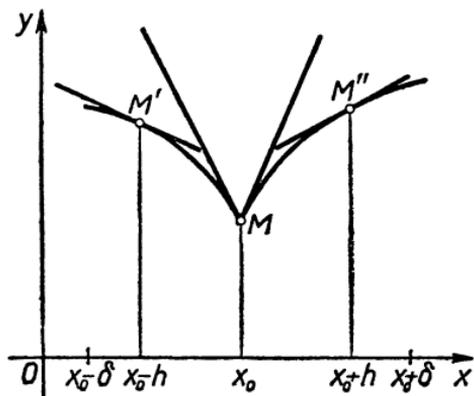
Решение. Находим производную

$$f'(x) = \frac{2}{3(x-2)^{\frac{1}{3}}}.$$



Черт. 9

Замечаем, что $f'(x) \neq 0$ при любом $x \neq 2$, а при $x = 2$ производная $f'(x)$ не существует. Следовательно, только точка $x = 2$ может быть точкой экстремума данной функции. Для дальнейшего исследования этой точки найдём знак



Черт. 10

производной $f'(x)$ слева и справа от точки $x = 2$:

$$f'(2-h) = \frac{2}{3(-h)^{\frac{1}{3}}} < 0;$$

$$f'(2+h) = \frac{2}{3h^{\frac{1}{3}}} > 0, \quad (h > 0).$$

Следовательно, при $x = 2$ данная функция имеет минимум, равный $f(2) = 1$.

Пример 2. Среди всех прямоугольников данного периметра $2p$ выбрать тот, у которого площадь наибольшая.

Решение. Обозначим длины сторон искомого прямоугольника через x и y (черт. 11). Тогда площадь прямоугольника будет

$$S = xy.$$

Но по условию

$$2x + 2y = 2p,$$

откуда

$$y = p - x;$$

поэтому

$$S = px - x^2.$$

Исследуем эту функцию на максимум и минимум. Для этого возьмём производную

$$S' = p - 2x$$

и приравняем её к нулю:

$$p - 2x = 0.$$

Решив полученное уравнение, найдём единственную точку

$$x = \frac{p}{2},$$

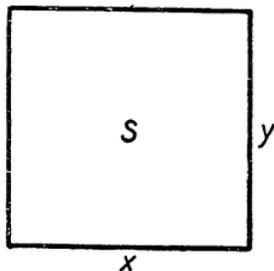
в которой $S' = 0$. Очевидно, нет ни одной точки, в которой производная S' не существует.

Исследуем знак производной

$$S' = 2\left(\frac{p}{2} - x\right)$$

слева и справа от точки $x = \frac{p}{2}$:

$$S'\left(\frac{p}{2} - h\right) > 0; \quad S'\left(\frac{p}{2} + h\right) < 0, \\ (h > 0).$$



Черт. 11

Следовательно, при $x = \frac{p}{2}$ для площади S прямоугольника имеем максимум, а так как точка экстремума единственная, то максимум S одновременно будет и наибольшим значением S . Учитывая, наконец, что при $x = \frac{p}{2}$ имеем $y = \frac{p}{2}$, можем сказать, что среди прямоугольников данного периметра наибольшую площадь имеет квадрат.

Докажем ещё одну теорему, которая даёт правило исследования функций на максимум и минимум при помощи второй, третьей и других высших производных.

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ в некотором интервале, содержащем точку x_0 , имеет производную n -го порядка, непрерывную в точке x_0 , причём

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда функция $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, если число n чётное, а именно: максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$ и минимум при $f^{(n)}(x_0) > 0$.

Если же число n — нечётное, то в точке x_0 нет ни максимума, ни минимума функции $f(x)$.

Доказательство. По формуле Тейлора имеем:

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \\ + \dots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta h),$$

где $0 < \theta < 1$. Но по условию в точке x_0 производные от $f(x)$ до $(n-1)$ -го порядка включительно равны нулю; поэтому

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0 + \theta h).$$

Так как по условию $f^{(n)}(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то существует такое $\delta > 0$, что для всех h , удовлетворяющих условию $|h| < \delta$, знак $f^{(n)}(x_0 + \theta h)$ совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$.

Следовательно, если число n чётное и $f^{(n)}(x_0) < 0$, то при $|h| < \delta$ верно неравенство

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \leq 0,$$

а это означает, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум.

Если число n чётное и $f^{(n)}(x_0) > 0$, то при $|h| < \delta$ верно

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0,$$

а это означает, что $f(x)$ в точке x_0 имеет минимум.

Если же число n нечётное, то знак разности $f(x_0 + h) - f(x_0)$ при $0 < h < \delta$ будет совпадать со знаком $f^{(n)}(x_0)$, а при $-\delta < h < 0$ — со знаком $-f^{(n)}(x_0)$, т. е. будет противоположным; поэтому $f(x_0)$ не будет ни максимумом, ни минимумом функции $f(x)$.

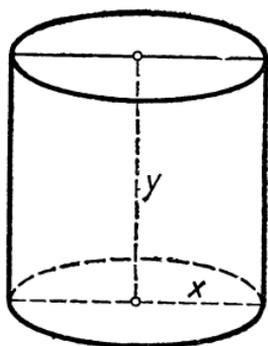
Пример 3. Среди всех круглых цилиндров, имеющих одну и ту же площадь поверхности, равную s , выбрать тот, у которого объём наибольший.

Решение. Пусть x — радиус основания, а y — высота искомого цилиндра (черт. 12). Тогда объём цилиндра будет

$$v = \pi x^2 y.$$

Но по условию площадь поверхности

$$2\pi xy + 2\pi x^2 = s,$$



Черт. 12

откуда

$$y = \frac{s}{2\pi x} - x;$$

поэтому

$$v = \frac{s}{2}x - \pi x^3.$$

Исследуем эту функцию на максимум и минимум.

Возьмём производную

$$v' = \frac{s}{2} - 3\pi x^2$$

и приравняем её к нулю. Решив полученное уравнение

$$\frac{s}{2} - 3\pi x^2 = 0,$$

найдем единственную в области $x > 0$ точку

$$x = \sqrt{\frac{s}{6\pi}},$$

в которой $v' = 0$. Очевидно, нет ни одной точки, где производная v' не существует. Для дальнейшего исследования воспользуемся теоремой 2. С этой целью возьмём производную второго порядка от v :

$$v'' = -6\pi x.$$

Замечая, что

$$v''\left(\sqrt{\frac{s}{6\pi}}\right) < 0,$$

убеждаемся, что при $x = \sqrt{\frac{s}{6\pi}}$ объём v имеет максимум, а значит, и наибольшее значение, так как в области $x > 0$ $v\left(\sqrt{\frac{s}{6\pi}}\right)$ есть единственный экстремум.

Учитывая, что при $x = \sqrt{\frac{s}{6\pi}}$ имеем $y = 2\sqrt{\frac{s}{6\pi}}$, можно сказать, что среди цилиндров, имеющих одну и ту же площадь поверхности, наибольшим объёмом обладает тот, у которого осевое сечение есть квадрат:

$$2x = y.$$

13. О работах русских и советских математиков. Даже по тем немногим вопросам, которые рассмотрены здесь, можно понять, насколько важным средством изучения функций и решения практических вопросов является дифференцирование. Этим объясняется стремление математиков расширить класс дифференцируемых функций путём обобщения понятий производной и дифференциала. Выдающиеся результаты в этом направлении были получены А. Я. Хинчиным, который дал наиболее общее определение понятия производной. К работам А. Я. Хинчина примыкают исследования В. В. Степанова, который получил весьма интересные выводы при изучении понятия дифференциала. Вопросами дифференцирования функций успешно занимался и ещё целый ряд советских математиков.

В этой главе мы видели, что иногда данную функцию можно с достаточной точностью заменить многочленом, являющимся наиболее простой функцией. В связи с этим следует отметить, что полиномам, наименее уклоняющимся от заданной функции, посвящены замечательные работы великого русского математика П. Л. Чебышева (1821—1894). Учёные всего мира признавали огромное влияние выдающихся работ П. Л. Чебышева, относящихся к различным областям математики, на дальнейший ход развития всей математики. Известный шведский математик Миттаг-Леффлер считал П. Л. Чебышева «одним из величайших учителей анализа всех времён, гением, так обогатившим математические науки своими бессмертными открытиями». Крупнейший французский математик Эрмит писал, что все члены Парижской Академии наук признали П. Л. Чебышева «гордостью науки в России, одним из первых геометров Европы, одним из величайших геометров всех времён».

Работы П. Л. Чебышева по вопросам приближения функцией положили начало особой ветви математического анализа — конструктивной теории функций, которая в дальнейшем развивалась также трудами русских и советских учёных.

ГЛАВА VI

ИНТЕГРАЛ

1. Теорема Дарбу. Пусть на сегменте $[a, b]$ задана функция $f(x)$, относительно которой будем предполагать только то, что она ограниченная т. е. существует такое достаточно большое положительное число M , что на всем сегменте $[a, b]$

$$|f(x)| < M.$$

В остальном функция $f(x)$ может быть какой угодно. Сегмент $[a, b]$ разобьём на n частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b.$$

Положим

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k.$$

Функция $f(x)$, ограниченная на всем сегменте $[a, b]$, ограничена и на каждом из элементарных сегментов $[x_k, x_{k+1}]$, поэтому имеет на этих сегментах верхнюю и нижнюю грани. Обозначим через m_k и M_k соответственно нижнюю и верхнюю грани $f(x)$ на сегменте $[x_k, x_{k+1}]$. Составим суммы:

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \quad \text{и} \quad S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k,$$

которые будем называть нижней и верхней суммами Дарбу. Очевидно, что суммы Дарбу зависят от разбиения сегмента $[a, b]$. Поставим себе задачей выяснить, как будут меняться суммы s и S , когда сегмент $[a, b]$ будем делить на всё более и более мелкие части. Вопрос этот решается следующей теоремой.

Теорема (Дарбу). Верхняя и нижняя суммы Дарбу S и s , составленные для ограниченной функции $f(x)$ на сег-

менте $[a, b]$, стремятся к определённым пределам \bar{I} и \underline{I} , когда число n точек разбиения сегмента $[a, b]$ неограниченно возрастает так, что длина наибольшего из элементарных сегментов $[x_k, x_{k+1}]$ стремится к нулю. Эти пределы \bar{I} и \underline{I} не зависят от способа разбиения сегмента $[a, b]$.

Доказательство. Подробно рассмотрим доказательство существования предела верхней суммы Дарбу S . Докажем существование такого числа \bar{I} , чтобы для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ можно было найти такое достаточно малое число $\delta > 0$, что будет верно неравенство

$$|S - \bar{I}| < \varepsilon,$$

если только для Δx , наибольшего из всех Δx_k , верно

$$\Delta x < \delta.$$

Это и будет означать, что

$$\bar{I} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} S.$$

Заметим прежде всего, что любое значение S , соответствующее какому угодно разбиению сегмента $[a, b]$, удовлетворяет неравенству

$$|S| < M(b - a).$$

Действительно,

$$|S| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k \right| < M \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = M(b - a).$$

Следовательно, множество всевозможных значений суммы S , соответствующих всевозможным разбиениям сегмента $[a, b]$, есть ограниченное множество, а поэтому оно имеет верхнюю и нижнюю грани. Обозначим через \bar{I} нижнюю грань множества значений верхней суммы Дарбу S .

Из определения нижней грани множества следует, что при любом дроблении сегмента $[a, b]$ имеем:

$$\bar{I} \leq S;$$

но вместе с тем для любого $\varepsilon > 0$ можно составить такое разбиение сегмента $[a, b]$:

$$a = x'_0 < x'_1 < x'_2 < \dots < x'_p = b, \quad (1)$$

что соответствующее значение верхней суммы Дарбу

$$S' = \sum_{i=0}^{p-1} M'_i \Delta x'_i \quad (2)$$

удовлетворит неравенствам:

$$\bar{I} \leq S' < \bar{I} + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3)$$

Рассмотрим произвольное разбиение сегмента $[a, b]$ на любое число n элементарных частей $[x_k, x_{k+1}]$, удовлетворяющее только одному условию:

$$\Delta x < \delta,$$

где Δx есть длина наибольшего из всех сегментов $[x_k, x_{k+1}]$ а число $\delta > 0$ меньше длины наименьшего из сегментов $[x'_i, x'_{i+1}]$ разбиения $[a, b]$, соответствующего значению S' верхней суммы Дарбу, и одновременно

$$\delta < \frac{\varepsilon}{2Mp}. \quad (4)$$

Составим для этого разбиения $[a, b]$ верхнюю сумму Дарбу:

$$S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k. \quad (5)$$

Представим эту сумму S в виде суммы двух сумм:

$$S = S_1 + S_2,$$

включив в сумму S_1 все те слагаемые из S , которые соответствуют сегментам $[x_k, x_{k+1}]$, содержащим внутри себя одну из точек x'_i ($i = 1, 2, \dots, p-1$) дробления (1) сегмента $[a, b]$, а в S_2 — все остальные, т. е. те, которые соответствуют сегментам $[x_k, x_{k+1}]$, целиком содержащимся на одном каком-нибудь сегменте $[x'_i, x'_{i+1}]$ дробления (1).

Ясно, что в сумме S_1 слагаемых меньше p , а каждое слагаемое $M_k \Delta x_k$ меньше, чем $M\delta$, так как $M_k < M$, а $\Delta x_k < \delta$. Поэтому

$$S_1 < M\delta p,$$

откуда, в силу выбора δ (неравенство (4)), имеем:

$$S_1 < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (6)$$

Сумму S_2 представим в виде:

$$S_2 = \sum_{x'_0}^{x'_1} M_k \Delta x_k + \sum_{x'_1}^{x'_2} M_k \Delta x_k + \dots + \sum_{x'_{p-1}}^{x'_p} M_k \Delta x_k, \quad (7)$$

где

$$\sum_{x'_i}^{x'_{i+1}} M_k \Delta x_k$$

есть сумма всех слагаемых в S_2 , которые соответствуют сегментам $[x_k, x_{k+1}]$, содержащимся на одном и том же сегменте $[x'_i, x'_{i+1}]$ дробления (1). Заметим, что

$$\sum_{x'_i}^{x'_{i+1}} M_k \Delta x_k \leq M'_i \Delta x'_i. \quad (8)$$

Действительно, в этой сумме каждое $M_k \leq M'_i$, а сумма всех Δx_k , входящих в эту сумму, не больше $\Delta x'_i$; поэтому

$$\sum_{x'_i}^{x'_{i+1}} M_k \Delta x_k \leq M'_i \sum_{x'_i}^{x'_{i+1}} \Delta x_k \leq M'_i \Delta x'_i.$$

Из соотношений (7) и (8) получим:

$$S_2 \leq \sum_{i=0}^{p-1} M'_i \Delta x'_i = S',$$

откуда, учитывая неравенство (6), имеем:

$$S = S_1 + S_2 < \frac{\epsilon}{2} + S',$$

а в силу неравенства (3):

$$\bar{I} \leq S < \bar{I} + \epsilon.$$

Итак, для любого $\epsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что

$$|S - \bar{I}| < \epsilon,$$

если только

$$\Delta x < \delta.$$

Следовательно,

$$\bar{I} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} S.$$

Подобным же образом можно доказать, что

$$I = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} s,$$

где \underline{I} есть верхняя грань множества значений нижней суммы Дарбу s . Так как при $\Delta x \rightarrow 0$ всегда S имеет пределом строго определённое число — нижнюю грань \bar{I} множества значений S , а s — верхнюю грань \underline{I} значений s , то отсюда и видно, что пределы сумм Дарбу не зависят от способа разбиения сегмента $[a, b]$.

2. Верхний и нижний интегралы. Определённый интеграл Римана. Пределы \bar{I} и \underline{I} верхней и нижней сумм Дарбу, которые по теореме Дарбу существуют для всякой ограниченной на сегменте $[a, b]$ функции $f(x)$, называются соответственно *верхним и нижним интегралами* от функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ и обозначаются символами

$$I = \int_a^{\bar{b}} f(x) dx \quad \text{и} \quad \underline{I} = \int_a^b f(x) dx.$$

Если верхний и нижний интегралы от функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ совпадают, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой (по Риману)* на этом сегменте, а общее значение верхнего и нижнего интегралов называется *определённым интегралом (Римана)* от функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ и обозначается символом

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Если для ограниченной функции $f(x)$, определённой на сегменте $[a, b]$, составим, кроме сумм Дарбу, ещё одну сумму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k,$$

где ξ_k есть произвольная точка сегмента $[x_k, x_{k+1}]$, то будем иметь неравенства:

$$s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k = S.$$

Ясно, что когда пределы сумм Дарбу совпадают, т. е.

$$\bar{J} = \bar{I} = I,$$

то и новая сумма σ имеет тот же предел I . Следовательно, если функция $f(x)$ интегрируема, то при $\Delta x \rightarrow 0$ сумма σ имеет предел, который не зависит ни от способа разбиения сегмента $[a, b]$, ни от выбора точек ξ_k в элементарных сегментах $[x_k, x_{k+1}]$, причём

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sigma = \int_a^b f(x) dx.$$

С другой стороны, если сумма σ имеет предел I , не зависящий ни от способа дробления сегмента $[a, b]$, ни от выбора точек ξ_k в элементарных сегментах $[x_k, x_{k+1}]$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что при $\Delta x < \delta$ будет справедливо неравенство

$$|\sigma - I| < \varepsilon,$$

а значит, и

$$|s - I| \leq \varepsilon, \quad |S - I| \leq \varepsilon,$$

так как m_k и M_k являются соответственно нижней и верхней гранями множества значений $f(x)$ на сегменте $[x_k, x_{k+1}]$, а $f(\xi_k)$ может быть любым из этого множества значений $f(x)$. Отсюда следует, что предел I суммы σ есть одновременно и предел сумм Дарбу:

$$I = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} s \quad \text{и} \quad I = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} S.$$

Следовательно, функция $f(x)$ интегрируема и

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sigma.$$

Всё это позволяет определить интеграл Римана не только как общий предел сумм Дарбу, но и как предел суммы σ :

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Сумма σ называется *интегральной суммой*

3. Условия интегрируемости. Основным вопросом здесь является выяснение условий, при которых ограниченная функция интегрируема, так как очевидно, что если функция $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ не ограниченная, то для неё

нельзя образовать суммы Дарбу, а сумма σ , которую можно составить, не будет иметь конечного предела. Следовательно, неограниченные функции не интегрируемы.

Пусть на сегменте $[a, b]$ имеем ограниченную интегрируемую функцию $f(x)$. Это означает, что для данной функции $f(x)$ существует общий предел I верхней и нижней сумм Дарбу:

$$I = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} s.$$

Отсюда имеем:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} S - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} s = 0.$$

Но когда S и s имеют пределы, справедливо равенство:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} S - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} s = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (S - s);$$

поэтому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k - \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \right) = 0,$$

или

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k = 0.$$

Итак, если функция $f(x)$ интегрируема, то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k = 0, \quad (*)$$

где $\omega_k = M_k - m_k$ есть колебание функции $f(x)$ на сегменте $[x_k, x_{k+1}]$.

Верно и обратное утверждение: если для ограниченной функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ имеет место равенство (*), то функция $f(x)$ интегрируема.

В самом деле, из справедливости равенства (*) следует,
что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k - \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \right) = 0,$$

или

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (S - s) = 0.$$

Но так как, по теореме Дарбу, S и s имеют определённые пределы \bar{I} и \underline{I} , то

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (S - s) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} S - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} s = \bar{I} - \underline{I}.$$

Следовательно,

$$\bar{I} - \underline{I} = 0,$$

т. е.

$$\bar{I} = \underline{I} = I,$$

а это и означает, что функция $f(x)$ интегрируема.

Всё это позволяет сформулировать условие интегрируемости функций следующим образом:

Для интегрируемости по Риману функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы она на этом сегменте была ограниченной и удовлетворяла условию

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k = 0.$$

4. Основные классы интегрируемых функций. Прежде всего убедимся, что к интегрируемым функциям относятся все непрерывные функции.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда она ограниченная на этом отрезке (теорема Вейерштрасса).

Возьмём любое $\varepsilon > 0$. Так как функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, равномерно непрерывна на этом отрезке (теорема Кантора), то существует такое число $\delta > 0$, что для любых двух точек x' и x'' отрезка $[a, b]$, удовлетворяющих условию

$$|x' - x''| < \delta,$$

верно неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Разобьём отрезок $[a, b]$ на элементарные части $[x_k, x_{k+1}]$ так, чтобы длина Δx наибольшего из отрезков $[x_k, x_{k+1}]$ была меньше δ , и рассмотрим для этого разбиения сумму $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k$.

Нетрудно заметить, что для всех k

$$\omega_k = M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

В самом деле, для непрерывной функции $f(x)$ имеем:

$$M_k = f(x'_k) \quad \text{и} \quad m_k = f(x''_k),$$

где x'_k и x''_k есть некоторые точки отрезка $[x_k, x_{k+1}]$.

Но $|x'_k - x''_k| \leq \Delta x < \delta$;

поэтому, в силу выбора δ ,

$$|f(x'_k) - f(x''_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon,$$

если только

$$\Delta x < \delta,$$

а это означает, что

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k = 0,$$

откуда и следует интегрируемость функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Таким образом, доказана

Теорема 1. Всякая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке.

Следующая теорема показывает, что к интегрируемым функциям относятся и некоторые разрывные функции.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ ограниченная и имеет лишь конечное множество точек разрыва, то она интегрируема на этом отрезке.

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ ограниченная,

$$|f(x)| < M,$$

и имеет лишь одну точку разрыва, которую обозначим через ξ .

Возьмём любое $\varepsilon > 0$. Точку ξ выделим интервалом $(\xi - \alpha, \xi + \alpha)$, выбрав $\alpha < \frac{\varepsilon}{12M}$.

Так как для ограниченной функции $f(x)$ пределы сумм Дарбу не зависят от способа дробления отрезка $[a, b]$, то и при рассмотрении вопроса о пределе суммы $\sum_k \omega_k \Delta x_k$ точки $\xi - \alpha$ и $\xi + \alpha$ всегда можно включить в число точек дробления $[a, b]$. Поэтому сумму $\sum_k \omega_k \Delta x_k$ всегда можно представить в виде

$$\sum_k \omega_k \Delta x_k = \sum_a^{\xi - \alpha} \omega_k \Delta x_k + \sum_{\xi - \alpha}^{\xi + \alpha} \omega_k \Delta x_k + \sum_{\xi + \alpha}^b \omega_k \Delta x_k,$$

где $\sum_{\xi - \alpha}^{\xi + \alpha} \omega_k \Delta x_k$ состоит из тех слагаемых, которые соответствуют элементарным отрезкам $[x_k, x_{k+1}]$, заполняющим отрезок $[\xi - \alpha, \xi + \alpha]$.

Очевидно, что

$$\begin{aligned} \sum_{\xi - \alpha}^{\xi + \alpha} \omega_k \Delta x_k &= \sum_{\xi - \alpha}^{\xi + \alpha} (M_k - m_k) \Delta x_k \leq 2M \sum_{\xi - \alpha}^{\xi + \alpha} \Delta x_k = \\ &= 4M\alpha < 4M \frac{\varepsilon}{12M} = \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Кроме того, существует такое $\delta > 0$, что

$$\sum_a^{\xi - \alpha} \omega_k \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad \sum_{\xi + \alpha}^b \omega_k \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{3},$$

если только $\Delta x < \delta$, так как функция $f(x)$ на отрезках $[a, \xi - \alpha]$ и $[\xi + \alpha, b]$ непрерывна и поэтому интегрируема.

Отсюда следует:

$$\sum_k \omega_k \Delta x_k < \varepsilon,$$

если только $\Delta x < \delta$, т. е.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_k \omega_k \Delta x_k = 0,$$

что и доказывает интегрируемость функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Очевидно, что на отрезке $[0, 1]$ данная функция $f(x)$ неубывающая (черт. 13) и имеет счётное множество точек разрыва*):

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

Рассмотренный пример показывает, что среди интегрируемых функций есть и такие, которые имеют бесконечное множество точек разрыва. Однако не следует думать, что всякая ограниченная разрывная функция интегрируема.

Например, функция Дирихле

$$f(x) = 1,$$

если x рационально;

$$f(x) = 0,$$

если x иррационально, органичена на любом отрезке $[a, b]$, но не интегрируема.

Действительно, при любом разбиении отрезка $[a, b]$ имеем:

$$M_k = 1, \quad m_k = 0, \quad \omega_k = 1.$$

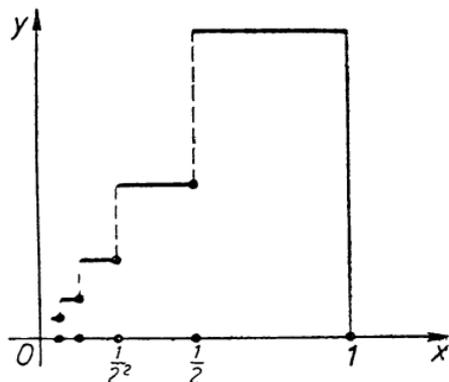
Поэтому

$$\sum_k \omega_k \Delta x_k = \sum_k \Delta x_k = b - a,$$

откуда видно, что функция Дирихле не удовлетворяет условию интегрируемости, и поэтому не интегрируема ни на каком отрезке.

В вопросе об интегрируемости ограниченной функции, оказывается, является существенным не мощность, а, так сказать, протяжённость множества точек разрыва данной функции.

Обобщая понятие длины, в теории множеств вводят понятие *меры* («длины») множества. Если множество E есть отрезок или интервал, то мера E есть длина E , т. е. длина отрезка или интервала.



Черт. 13

*) Доказывается, что монотонная функция не может иметь точек разрыва более счётного множества.

Оказывается, весь класс интегрируемых функций определяется следующими условиями:

Для того чтобы функция $f(x)$ была интегрируемой на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы на этом отрезке она была ограниченной и мера множества её точек разрыва равнялась нулю.

Функция Дирихле этому условию не удовлетворяет: она разрывна в каждой точке отрезка $[a, b]$, поэтому мера множества её точек разрыва есть мера-длина отрезка $[a, b]$, т. е. $b - a \neq 0$.

5. Вычисление определённого интеграла. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а $F(x)$ — любая функция, удовлетворяющая условию $F'(x) = f(x)$ для всех $x \in [a, b]$.

Разобьём отрезок $[a, b]$ на элементарные части $[x_k, x_{k+1}]$. Очевидно

$$F(b) - F(a) = [F(x_n) - F(x_{n-1})] + \\ + [F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] + \dots + [F(x_1) - F(x_0)],$$

где $x_0 = a$, $x_n = b$.

Пользуясь теоремой Лагранжа, находим:

$$F(x_{k+1}) - F(x_k) = (x_{k+1} - x_k) F'(\xi_k) = \Delta x_k f(\xi_k),$$

где $x_k < \xi_k < x_{k+1}$. Поэтому

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k,$$

а так как это равенство верно при любом разбиении отрезка $[a, b]$, то

$$F(b) - F(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Точки ξ_k здесь каждый раз мы должны были выбирать определённым образом, но нельзя было их брать произвольными. Однако, в силу интегрируемости непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, независимо от выбора точек ξ_k в элементарных отрезках $[x_k, x_{k+1}]$, имеем:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx.$$

Следовательно,

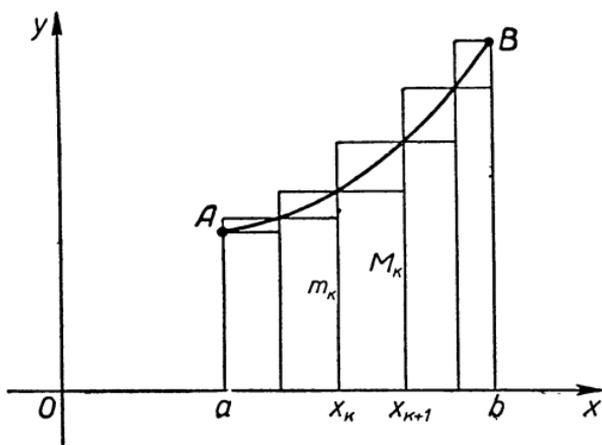
$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Это равенство, которое обычно записывают кратко

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$$

и называют формулой Ньютона — Лейбница, приводит вычисление определённого интеграла от непрерывной функции $f(x)$ к отысканию какой-либо функции $F(x)$, удовлетворяющей условию $F'(x) = f(x)$ и называемой *первообразной* по отношению к данной функции $f(x)$.

6. Геометрический смысл определённого интеграла. Пусть имеем положительную непрерывную функцию $f(x)$, определённую на отрезке $[a, b]$. Рассмотрим на плоскости $хоу$ фигуру, ограниченную отрезком $[a, b]$ оси $ох$, графиком данной функции $y = f(x)$ и по бокам перпендикулярами к оси $ох$ в точках a и b . Фигуру $aABb$ будем называть *криволинейной трапецией* (черт. 14).



Черт. 14

Легко заметить, что нижняя сумма Дарбу $s = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$ для данной функции $f(x)$ представляет площадь P_* ступенчатой фигуры, вписанной в криволинейную трапецию.

пенчатой фигуры, *содержащейся* в криволинейной трапеции и состоящей из прямоугольников, площади которых соответственно равны $m_0 \Delta x_0, m_1 \Delta x_1, \dots, m_k \Delta x_k, \dots, m_{n-1} \Delta x_{n-1}$. Точно так же верхняя сумма Дарбу

$S = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$ есть площадь P^* ступенчатой фигуры, которая *содержит* криволинейную трапецию и состоит из прямоугольников с площадями соответственно $M_0 \Delta x_0, M_1 \Delta x_1, \dots, M_k \Delta x_k, \dots, M_{n-1} \Delta x_{n-1}$.

Ясно, что наиболее естественным будет *определить* площадь P криволинейной трапеции $aABb$ как общий предел площадей P_* и P^* ступенчатых фигур при $\Delta x \rightarrow 0$

$$P = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P_* = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P^*,$$

если такой предел существует. Но когда данная функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, тогда такой общий предел P действительно существует, так как

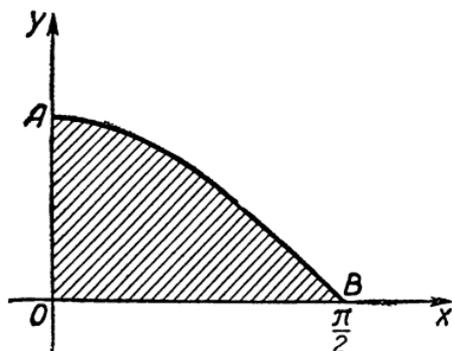
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} P_* = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} s = \int_a^b f(x) dx$$

и

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} P^* = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} S = \int_a^b f(x) dx.$$

Следовательно, площадь криволинейной трапеции $aABb$ выражается формулой

$$P = \int_a^b f(x) dx.$$



Черт. 15

В этом и заключается геометрический смысл интеграла непрерывной функции.

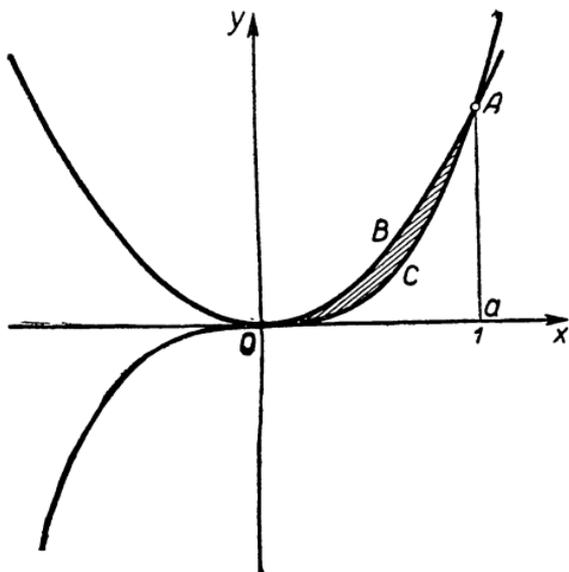
Пример 1. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривой $y = \cos x$ и осями координат.

Решение. Данную фигуру OAB (черт. 15) мы

можем рассматривать как криволинейную трапецию. Поэтому искомая площадь равна

$$P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$$

Пример 2. Найти площадь, содержащуюся между кривыми $y = x^2$ и $y = x^3$.



Черт. 16

Решение. Искомую площадь P мы можем рассматривать как разность площадей криволинейных трапеций $oBAa$ и $oCAa$ (черт. 16). Поэтому

$$P = \int_0^1 x^2 \, dx - \int_0^1 x^3 \, dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

7. Понятие длины кривой. Вопрос о длине произвольной кривой в элементарной геометрии не рассматривается. Он, как и вопрос о площади, связан с интегрированием.

Плоской кривой называется множество точек плоскости, координаты x и y которых определяются уравнениями

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные функции на некотором отрезке $t_0 \leq t \leq T$.

К определению длины кривой мы придём следующим путём, вполне естественным и исходящим из понятия длины отрезка прямой.

Пусть нам дана кривая AB уравнениями (1). Точке A соответствует значение параметра $t = t_0$, а точке B — значение $t = T$. Разобьём отрезок $[t_0, T]$ на n частей точками

$$t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots < t_n = T.$$

Обозначим через P_k точку кривой, где $t = t_k$. Образует вписанную ломаную, вершинами которой будут точки кривой

$$A = P_0, P_1, \dots, P_k, \dots, P_{n-1}, P_n = B.$$

Длину хорды $P_k P_{k+1}$ (k -го звена ломаной) обозначим через c_k . Тогда

$$p_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k$$

есть периметр построенной ломаной.

Положим $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ и обозначим через Δt наибольшее из всех Δt_k .

Будем неограниченно увеличивать число n элементарных частей отрезка $[t_0, T]$, или число звеньев ломаной, так, чтобы Δt , следовательно, и длины всех звеньев ломаной стремились к нулю.

Если при этом окажется, что периметр p_n вписанной в данную кривую ломаной стремится к определённому пределу s , то данная кривая называется *спрямляемой*, а

$$s = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} p_n$$

называется *длиной* данной кривой.

Рассмотрим кривую, заданную уравнением

$$y = f(x).$$

(Здесь за параметр взята абсцисса x точки кривой.)

Точками $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ выделим дугу AB данной кривой.

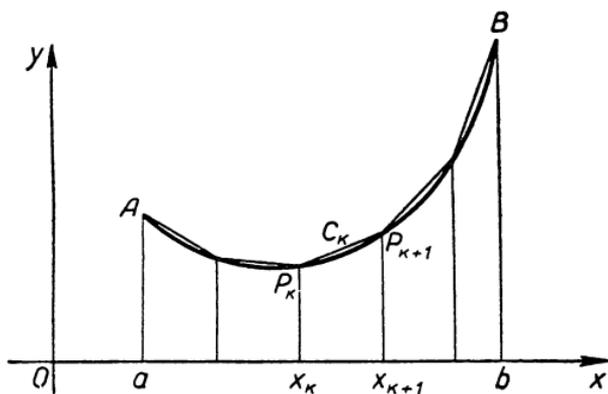
Докажем, что если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет непрерывную производную $f'(x)$, то дуга AB спрямляема.

Действительно, разобьём отрезок $[a, b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < \dots < x_n = b$$

на элементарные отрезки $[x_k, x_{k+1}]$. Затем построим вписанную ломаную, вершинами которой будут точки кривой

$$A = P_0(x_0, f(x_0)), P_1(x_1, f(x_1)), \dots, P_k(x_k, f(x_k)), \dots, P_n(x_n, f(x_n)) = B.$$



Черт. 17

Периметр ломаной равен

$$\rho_n = \sum_{k=0}^{n-1} c_k,$$

где c_k — длина хорды $P_k P_{k+1}$, причём (черт. 17)

$$c_k = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + [f(x_{k+1}) - f(x_k)]^2}.$$

Но, по теореме Лагранжа,

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = (x_{k+1} - x_k) f'(\xi_k),$$

где ξ_k — некоторая точка отрезка $[x_k, x_{k+1}]$. Отсюда, положив $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, находим

$$\rho_n = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k.$$

В правой части последнего равенства мы имеем интегральную сумму для непрерывной функции $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ на отрезке $[a, b]$; поэтому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} p_n = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + [f'(\xi_k)]^2} \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Следовательно, дуга AB данной кривой $y = f(x)$ спрямляема, и её длина s выражается формулой

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

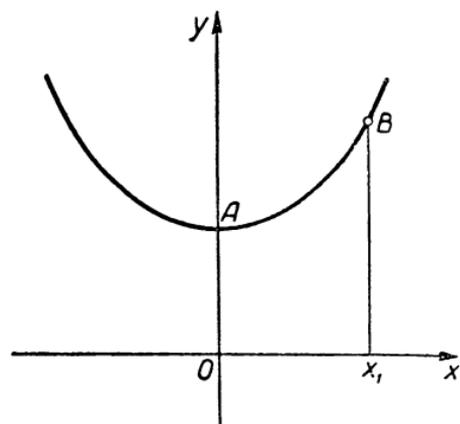
Пример. Вычислить длину цепной линии

$$y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$$

от точки $A(0, 1)$ до точки $B(x_1, y_1)$ (черт. 18)

Решение. Из уравнения цепной линии находим

$$y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$



Черт. 18

Поэтому

$$\sqrt{1 + y'^2} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Следовательно, длина дуги AB цепной линии равна

$$s = \int_0^{x_1} \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Big|_0^{x_1} = \frac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2}.$$

8. О работах русских и советских математиков. Изучением методов интегрирования важнейших классов функций и другими вопросами интегрального исчисления с большим успехом занимались учёные нашей страны. Здесь прежде всего следует назвать одного из первых академиков Петербургской Академии наук Л. Эйлера, автора

первого учебника по математическому анализу, и выдающегося русского математика М. В. Остроградского (1801—1861), многие из результатов работ которого стали классическими и вошли в учебники.

При помощи интегрирования решаются многочисленные вопросы как теории, так и приложения математического анализа к естествознанию и технике. Но если понятием интеграла в установленном здесь смысле можно пользоваться, когда имеем дело с непрерывными функциями, являющимися, как было доказано, интегрируемыми, то применять это понятие интеграла к разрывным функциям уже не всегда возможно. Так, например, мы видели, что функция Дирихле не интегрируема. Это обстоятельство поставило перед математиками задачу расширения, обобщения понятия интеграла, чтобы можно было прилагать понятие интеграла к более широкому классу функций. В этом направлении очень много сделано советскими учёными. П. С. Александров изучал интегралы, определённые до этого Данжуа и Перроном, и доказал их равносильность. А. Я. Хинчин дал определение интеграла, которое является более общим, чем определение Данжуа. Понятие интеграла было подвергнуто чрезвычайно глубокому исследованию А. Н. Колмогоровым. Пользуясь понятием функции множества, А. Н. Колмогоров дал общее определение интеграла. Специализируя эту функцию, из интеграла в смысле А. Н. Колмогорова получаются различные частные случаи, представляющие ранее определённые интегралы.

ГЛАВА VII

РЯДЫ

1. Числовой ряд. Если имеем последовательность чисел $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, то, соединяя их между собой знаком сложения в том порядке, в каком они содержатся в данной последовательности, мы получим выражение

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

которое называется *числовым рядом*.

Числа $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ называются *членами* ряда, n -й член u_n — *общим членом* ряда.

Сумма первых n членов ряда называется *n -й частичной суммой* ряда и обозначается через s_n :

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Если существует предел s частичной суммы s_n при неограниченном возрастании n , то ряд называется *сходящимся*, а число s — *суммой ряда*.

В этом случае можно написать

$$s = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

Если же s_n при $n \rightarrow \infty$ не имеет предела, то ряд называется *расходящимся*.

Так, например, ряд

$$u + uq + uq^2 + \dots + uq^{n-1} + \dots,$$

где $|q| < 1$, сходится, так как

$$s_n = \frac{u - uq^n}{1 - q},$$

а поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u - uq^n}{1 - q} = \frac{u}{1 - q}.$$

Ряды же

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

и

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

расходящиеся, так как в первом случае при $n \rightarrow \infty$ s_n возрастает неограниченно и не имеет предела, а во втором случае s_n принимает поочередно значения 1 и 0 и тоже не имеет предела.

Ряды

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

и

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+m} + \dots$$

сходятся или расходятся одновременно, так как частичная сумма s_m второго ряда всегда может быть представлена в виде частичной суммы S_{n+m} первого ряда минус посто-

янная величина $A = \sum_{k=1}^n u_k$, т. е.

$$s_m = S_{n+m} - A,$$

откуда и видно, что при $m \rightarrow \infty$ частичная сумма s_m имеет или не имеет предел одновременно с частичной суммой S_{n+m} . Если указанные ряды сходятся, то сумма второго ряда называется *n-м остаточным членом* первого ряда и обозначается через r_n :

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

Очевидно, что сумму сходящегося ряда всегда можно представить в виде

$$s = s_n + r_n,$$

откуда видно, что $r_n \rightarrow 0$, если $n \rightarrow \infty$.

Пользуясь определением суммы ряда и теоремами о пределах, легко доказать следующие предложения:

1. Если c есть некоторое число, а ряд

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

сходится и имеет сумму s , то ряд

$$cu_1 + cu_2 + \dots + cu_n + \dots$$

также сходится и имеет сумму cs .

2. Если ряды

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots,$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots$$

сходящиеся и имеют соответственно суммы U и V , то ряд

$$(u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + \dots + (u_n \pm v_n) + \dots$$

также сходится и имеет сумму $U \pm V$.

В случае сложения это утверждение верно для любого конечного числа сходящихся рядов.

2. Необходимое и достаточное условие сходимости. По определению сходимость ряда

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

заключается в существовании предела s частичной суммы ряда s_n при неограниченном возрастании номера n , т. е. в сходимости последовательности частичных сумм ряда

$$s_1, s_2, \dots, s_n, \dots; \quad (2)$$

поэтому условием сходимости ряда (1) является условие сходимости последовательности (2). В силу же критерия Коши существования предела последовательности мы можем сказать, что последовательность (2) сходится к пределу тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что для всех $n > N$ и $m > N$ верно неравенство

$$|s_m - s_n| < \varepsilon.$$

Положим для определённости $n < m = n + p$. Тогда имеем:

$$s_m - s_n = s_{n+p} - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p},$$

причём здесь p может быть любым натуральным числом, так как m и n должны быть только большими N , а между собой могут отличаться как угодно. Отсюда получим следующую формулировку условия сходимости ряда:

Для сходимости ряда

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовал такой номер N , что при всех $n > N$ верно не

равенство

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| < \varepsilon,$$

каким бы натуральное число p ни было.

Это условие обычно называют условием или критерием Коши. Отсюда при $p=1$, в частности, вытекает, что для сходимости ряда необходимо, чтобы при всех $n > N$ было верно неравенство

$$|u_{n+1}| < \varepsilon,$$

а это означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0.$$

Таким образом, приходим к выводу:

Для сходимости ряда необходимо чтобы общий член ряда стремился к нулю, когда его номер неограниченно возрастает.

Это условие, будучи необходимым, оказывается, не является достаточным для сходимости ряда. В этом нас убеждает ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots,$$

который называется *гармоническим*.

Здесь $u_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$; однако можно доказать, что гармонический ряд не удовлетворяет критерию Коши (который является не только достаточным, но и необходимым признаком сходимости), и поэтому не может быть сходящимся. Для этого заметим, что

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} > \frac{1}{2n} \cdot n = \frac{1}{2}.$$

Отсюда видно, что если $\varepsilon < \frac{1}{2}$, а $p=n$, то для гармонического ряда неравенство

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} < \varepsilon$$

не верно, каким бы большим номер n ни был. Следовательно, в случае гармонического ряда не для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такой номер N , о котором говорится в условии Коши; поэтому гармонический ряд расходится.

Это и доказывает, что условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

является необходимым, но не достаточным признаком сходимости ряда.

3. Абсолютная и условная сходимость. Введём ещё два понятия.

$$\text{Ряд} \quad u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots, \quad (2)$$

образованный из абсолютных значений членов данного ряда.

Очевидно, что при сходимости ряда (2) ряд (1) не может быть расходящимся, так как

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+p}| \leq |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \dots + |u_{n+p}|,$$

и поэтому, если условию Коши удовлетворяет ряд (2), то удовлетворяет и ряд (1).

Таким образом, когда ряд (2) сходится, тогда сходится и ряд (1), причём мы его в этом случае называем *абсолютно сходящимся*, желая этим подчеркнуть, что его сходимость обеспечивается достаточно быстрым стремлением к нулю абсолютного значения общего члена, а не обусловлена наличием членов разных знаков, которые при достаточно больших номерах начинают каким-то образом компенсировать друг друга, заставляя тем самым частичную сумму ряда стремиться к конечному пределу.

Ряд (1) называется *условно сходящимся*, если он сходится, а соответствующий ему ряд (2) расходится.

Рассмотрим некоторые свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.

Теорема 1. Если ряд

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

сходится абсолютно, то будут сходящимися и ряд

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k + \dots \quad (p)$$

положительных членов p_k , и ряд

$$q_1 + q_2 + \dots + q_k + \dots \quad (q)$$

абсолютных значений отрицательных членов $-q_k$ данного ряда, причём

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} p_k - \sum_{k=1}^{\infty} q_k.$$

Доказательство. По условию ряд (1) абсолютно сходящийся; поэтому ряд, образованный из абсолютных значений его членов, также сходится.

Пусть

$$\sigma = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (2)$$

Рассмотрим ряд (p) .

Частичная сумма P_n ряда (p) при возрастании n , очевидно, возрастает. Кроме того, всегда можно выбрать m настолько большим, чтобы среди m первых членов ряда (2) содержались первые n членов ряда (p) ; поэтому

$$P_n = \sum_{k=1}^n p_k \leq \sum_{k=1}^m |u_k| < \sigma.$$

Следовательно, сумма P_n , возрастающая и ограниченная сверху, имеет предел. Это означает, что ряд (p) сходится. Обозначим его сумму через P .

Таким же образом доказывается сходимость ряда (q) . Его сумму обозначим через Q .

Замечая, что

$$S_n = \sum_{k=1}^n u_k = \sum_{k=1}^{n_1} p_k - \sum_{k=1}^{n_2} q_k = P_{n_1} - Q_{n_2}, \quad (n_1 + n_2 = n),$$

и учитывая, что при $n \rightarrow \infty$ суммы P_{n_1} и Q_{n_2} стремятся к определённым пределам P и Q , имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n_1 \rightarrow \infty} P_{n_1} - \lim_{n_2 \rightarrow \infty} Q_{n_2},$$

т. е.

$$S = P - Q.$$

Теорема доказана.

Попутно заметим, что если ряд (1) условно сходится, то его ряды (p) и (q) расходящиеся.

Действительно, если бы для ряда (1) ряды (p) и (q) были сходящимися, то ряд (1) был бы абсолютно сходя-

щимся, так как

$$\sum_{k=1}^n |u_k| = P_{n_1} + Q_{n_2}, \quad (n_1 + n_2 = n),$$

причём P_{n_1} и Q_{n_2} в этом случае стремились бы при $n \rightarrow \infty$ к определённым пределам P и Q ; поэтому имели бы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n |u_k| = P + Q.$$

Если же для ряда (1) один из рядов (p) или (q) был бы сходящимся, а другой расходящимся, то ряд (1) был бы расходящимся, так как в этом случае при $n \rightarrow \infty$ имели бы

$$\sum_{k=1}^n u_k = P_{n_1} - Q_{n_2} \rightarrow \infty.$$

Теорема 2. Если в абсолютно сходящемся ряде произвести какую угодно перестановку членов, то получится ряд тоже абсолютно сходящийся и его сумма будет равна сумме исходного ряда.

Доказательство. Проведём сначала рассуждения для сходящегося ряда с положительными членами.

Пусть ряд

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

сходится и все $u_n > 0$.

Произвольной перестановкой членов в данном ряде образуем новый ряд

$$u'_1 + u'_2 + \dots + u'_m + \dots \quad (2)$$

Пусть

$$S'_m = u'_1 + u'_2 + \dots + u'_m.$$

Так как ряды (1) и (2) отличаются только порядком членов, то при любом m можно выбрать n настолько большим, чтобы среди n первых членов ряда (1) содержались m первых членов ряда (2). Поэтому для рядов с положительными членами имеем:

$$S'_m \leq S_n = \sum_{k=1}^n u_k < S.$$

Следовательно, при $m \rightarrow \infty$ частичная сумма S'_m ряда 2), возрастающая и ограниченная сверху, имеет предел:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S'_m = S' \leq S,$$

т. е. ряд (2) сходится и S' — его сумма.

Рассуждая аналогично, при любом n найдём такое l , что будет верно

$$S_n \leq S'_l = \sum_{k=1}^l u'_k < S',$$

откуда получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \leq S'.$$

Следовательно,

$$S' = S.$$

Таким образом, для сходящихся рядов с положительными членами теорема доказана.

Пусть теперь ряд (1) есть произвольный абсолютно сходящийся ряд. В этом случае имеем сходящийся ряд с положительными членами:

$$\sigma = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots \quad (1^*)$$

Перестановкой членов в ряде (1) составим новый ряд (2). Замечаем, что ряд

$$|u'_1| + |u'_2| + \dots + |u'_m| + \dots \quad (2)$$

сходится, так как представляет результат перестановки членов в ряде (1). Следовательно, ряд (2) сходится абсолютно. Обозначим его сумму через S' .

Докажем, что и в этом общем случае сумма S' ряда (2) совпадает с суммой S исходного ряда (1).

Действительно, по теореме 1 имеем:

$$S = P - Q,$$

где P — сумма ряда положительных членов p_k , а Q — сумма ряда абсолютных значений отрицательных членов $-q_k$ ряда (1). При составлении ряда (2) перестановкой членов в ряде (1) подвергнутся перестановке и члены в рядах

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \quad \text{и} \quad Q = \sum_{k=1}^{\infty} q_k,$$

но, по доказанному, это не изменит их суммы. Поэтому и сумма S' ряда (2), абсолютно сходящегося, тоже равняется $P - Q$.

Следовательно, $S' = S$.

Теорема доказана.

Теорема 3 (Римана). Перестановкой членов в условно сходящемся ряде можно получить ряд, имеющий заранее данную сумму и даже расходящийся ряд.

Доказательство. Пусть ряд

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

условно сходящийся. Тогда будут расходящимися как ряд

$$p_1 + p_2 + \dots + p_k + \dots \quad (p)$$

положительных членов p_k , так и ряд

$$q_1 + q_2 + \dots + q_k + \dots \quad (q)$$

абсолютных значений отрицательных членов $-q_k$ данного ряда (1).

Возьмём какое угодно число A .

Из положительных членов ряда (1) составим сумму

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k > A.$$

Это возможно, так как ряд (p) расходящийся, и поэтому его частичная сумма $\sum_{k=1}^n p_k$ при $n \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает, причём, составляя указанную сумму, мы остановимся на таком члене p_{n_1} , без которого сумма была бы не больше A .

Присоединяя к составленной сумме отрицательные члены ряда (1), образуем новую сумму

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k - \sum_{k=1}^{m_1} q_k < A.$$

Это возможно в силу расходимости ряда (q). Номер m_1 и здесь выбираем наименьшим, т. е. таким, что без последнего члена $-q_{m_1}$ сумма была бы ещё не меньше A .

Затем к новой сумме прибавляем те положительные члены ряда (1), которые следуют за p_{n_1} , взяв их столько,

сколько лишь необходимо, чтобы получить сумму бóльшую A :

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k - \sum_{k=1}^{m_1} q_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} p_k > A.$$

Такое n_2 найдётся, так как вместе с рядом (p) будет расходящимся и ряд $\sum_{k=n_1+1}^{\infty} p_k$.

После этого сумму дополняем отрицательными членами ряда (1), следующими за $-q_{m_1}$, взяв их столько, сколько лишь необходимо, чтобы получить сумму меньшую A :

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k - \sum_{k=1}^{m_1} q_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} p_k - \sum_{k=m_1+1}^{m_2} q_k < A.$$

Если продолжать этот процесс неограниченно, то получится ряд

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k - \sum_{k=1}^{m_1} q_k + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} p_k - \sum_{k=m_1+1}^{m_2} q_k + \dots, \quad (2)$$

представляющий результат только перестановок членов в данном ряде (1).

Докажем, что этот ряд сходится и имеет суммой число A .

Действительно, частичная сумма S'_n ряда (2) при $n \rightarrow \infty$ будет бесконечное множество раз принимать значения, бóльшие A , а также и меньшие A , так как при $n = n_1$, $n = n_1 + m_1$ и т. д. совпадает с суммами, рассмотренными выше. Кроме того, учитывая, что построенные выше суммы отклонялись от A в ту или другую сторону всегда за счёт последнего члена, замечаем, что при $S'_n > A$ имеем:

$$0 < S'_n - A < p_{n_k},$$

где p_{n_k} — последний положительный член суммы S'_n , а при $S'_n < A$ имеем:

$$0 < A - S'_n < q_{m_k},$$

где q_{m_k} — абсолютное значение последнего отрицательного члена в сумме S'_n .

Поэтому

$$|S'_n - A| < |u_l|,$$

причём $l \rightarrow \infty$, когда $n \rightarrow \infty$. Но

$$\lim_{l \rightarrow \infty} u_l = 0$$

в силу сходимости ряда (1). Отсюда имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_n = A.$$

Следовательно, ряд (2) сходится и его сумма равна числу A .

Чтобы получить расходящийся ряд, достаточно чередовать положительные и отрицательные члены ряда (1), например, так:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n_1} p_k > 1, & \quad \sum_{k=1}^{n_1} p_k - q_1, \\ \sum_{k=1}^{n_1} p_k - q_1 + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} p_k > 2, & \quad \sum_{k=1}^{n_1} p_k - q_1 + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} p_k - q_2, \\ \dots \end{aligned}$$

Действительно, если продолжать этот процесс неограниченно, то получится ряд

$$\sum_{k=1}^{n_1} p_k - q_1 + \sum_{k=n_1+1}^{n_2} p_k - q_2 + \dots,$$

представляющий результат только перестановки членов в данном условно сходящемся ряде (1), но этот ряд уже будет расходящимся, так как его n -я частичная сумма неограниченно возрастает, когда $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, условно сходящиеся ряды переместительным свойством не обладают и этим резко отличаются от абсолютно сходящихся рядов, близких по своим свойствам к конечным суммам.

4. Принцип сравнения рядов. На практике обычно бывает трудно решить вопрос о сходимости данного ряда при помощи критерия Коши. Поэтому важно иметь такие достаточные признаки сходимости и расходимости, которыми было бы удобно пользоваться при исследовании рядов. Один из таких приёмов исследования даёт следующий принцип сравнения рядов:

Пусть имеем два ряда с положительными членами:

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots, \quad (u)$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n + \dots \quad (v)$$

Если $u_n \leq v_n$ при любом n , то из сходимости ряда (v) вытекает сходимость ряда (u), а из расходимости ряда (u) следует расходимость ряда (v).

Действительно, пусть ряд (v) сходится и сумма его равна V . Тогда частичная сумма $\sum_{k=1}^n u_k$ ряда (u) при $n \rightarrow \infty$ будет монотонно возрастающей, так как члены ряда положительные, и ограниченной сверху, ибо

$$\sum_{k=1}^n u_k \leq \sum_{k=1}^n v_k < V,$$

а поэтому она имеет предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k = U,$$

т. е. ряд (u) сходится.

Пусть теперь ряд (u) будет расходящимся. Это означает, что его частичная сумма $\sum_{k=1}^n u_k$ неограниченно возрастает при $n \rightarrow \infty$. Но

$$\sum_{k=1}^n u_k \leq \sum_{k=1}^n v_k;$$

поэтому при $n \rightarrow \infty$ тем более неограниченно возрастает частичная сумма $\sum_{k=1}^n v_k$ ряда (v), т. е. ряд (v) расходится.

5. Признак Даламбера. Пользуясь принципом сравнения рядов, можно получить весьма простой признак абсолютной сходимости ряда.

Пусть для ряда

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (1)$$

выполнено условие

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < q < 1 \quad (2)$$

при всех n , начиная с некоторого номера n_0 . Докажем, что ряд (1) сходится абсолютно.

Действительно, в силу условия (2) имеем:

$$\left| \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}} \right| < q, \quad \left| \frac{u_{n_0+2}}{u_{n_0+1}} \right| < q, \quad \dots, \quad \left| \frac{u_{n_0+m}}{u_{n_0+m-1}} \right| < q, \quad \dots$$

Отсюда получим:

$$\begin{aligned} |u_{n_0+1}| &< |u_{n_0}| q, \quad |u_{n_0+2}| < |u_{n_0}| q^2, \quad \dots \\ \dots, \quad |u_{n_0+m}| &< |u_{n_0}| q^m, \quad \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Так как ряд

$$|u_{n_0}| q + |u_{n_0}| q^2 + \dots + |u_{n_0}| q^m + \dots,$$

образованный из геометрической прогрессии со знаменателем q , где $0 < q < 1$, сходится, то в силу принципа сравнения рядов и неравенств (3) сходится и ряд

$$|u_{n_0+1}| + |u_{n_0+2}| + \dots + |u_{n_0+m}| + \dots \quad (4)$$

Отсюда в свою очередь вытекает сходимость ряда

$$|u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots, \quad (5)$$

для которого ряд (4) является остаточным членом. Но сходимость ряда (5) и означает абсолютную сходимость данного ряда (1).

Заметим, что если для ряда (1)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = k < 1,$$

то условие (2) для него выполнено, а значит, ряд (1) сходится абсолютно.

Действительно, если возьмём некоторое число q , удовлетворяющее условию $k < q < 1$, то при достаточно большом n_0 для всех $n \geq n_0$ будет верно неравенство

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < q,$$

так как $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow k < q$, когда $n \rightarrow \infty$.

Если же для ряда (1) окажется, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = k > 1,$$

то при достаточном большом n_0 для всех $n \geq n_0$ будет верно неравенство

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1, \quad \text{или} \quad |u_n| > |u_{n+1}|,$$

откуда видно, что u_n не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, т. е. ряд (1) не удовлетворяет необходимому условию сходимости, и поэтому расходится.

Примеры показывают, что если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1,$$

то ряд может оказаться как сходящимся, так и расходящимся. Всё это доказывает справедливость следующего утверждения.

Признак Даламбера. Если для ряда

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = k,$$

то при $k < 1$ ряд сходится абсолютно, а при $k > 1$ ряд расходится. Если же $k = 1$, то вопрос о сходимости ряда нужно решать другими средствами.

6. Функциональные ряды. Здесь мы будем рассматривать ряды, членами которых являются функции одной действительной переменной.

Функциональный ряд

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (1)$$

называется *сходящимся на множестве E* , если он сходится при каждом значении x из множества E .

Если ряд (1) сходится на множестве E , то его сумма также будет функцией, определённой на множестве E . Обозначая её через $S(x)$, в этом случае можно написать:

$$S(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots \quad (1')$$

Кроме того, очевидно, в этом случае имеем:

$$S(x) = S_n(x) + R_n(x), \quad (2)$$

где, подобно числовым рядам,

$$S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x)$$

и называется n -й частичной суммой, а

$$R_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots$$

— остаточным членом ряда.

Из равенства (2) видно, что при каждом значении x из области сходимости ряда имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

и, следовательно, для как угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что для всех $n > N$ в этой точке x будет верно неравенство

$$|R_n(x)| < \varepsilon.$$

Здесь следует обратить внимание на то, что N для одного и того же $\varepsilon > 0$ может быть разным в разных точках x из области сходимости ряда. Требование, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовал номер N , общий для всех $x \in E$, является более сильным, чем требование сходимости ряда на множестве E .

Если для как угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , не зависящий от x , что при любом $n > N$ верно неравенство

$$|R_n(x)| < \varepsilon$$

для всех x из множества E , то данный функциональный ряд называется *равномерно сходящимся* на множестве E .

Приведём пример, подтверждающий, что ряд может быть сходящимся в некоторой области и не быть равномерно сходящимся в этой области.

Рассмотрим ряд

$$x + x(1-x) + \dots + x(1-x)^n + \dots$$

в полуинтервале $[0, 1)$.

При $x = 0$ все члены данного ряда равны 0, а поэтому ряд сходится, и его сумма тоже равна 0. При $0 < x < 1$ имеем: $0 < 1 - x < 1$, откуда следует, что данный ряд в $(0, 1)$ сходится, и его сумма, как сумма убывающей геометрической прогрессии, равна

$$\frac{x}{1-(1-x)} = 1.$$

Итак, данный ряд в $(0, 1)$ сходится, и его сумма есть функция

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } 0 < x < 1. \end{cases}$$

Докажем, что рассматриваемый ряд в полуинтервале $[0, 1)$ сходится не равномерно.

Действительно, для $x \in (0, 1)$ имеем:

$$R_n(x) = x(1-x)^n + x(1-x)^{n+1} + \dots = (1-x)^n,$$

откуда видно, что при любом, как угодно большом, но фиксированном n , верно

$$\lim_{x \rightarrow 0} R_n(x) = 1.$$

Следовательно, если $0 < \varepsilon < 1$, то каким бы большим номер n мы ни выбрали, неравенство

$$|R_n(x)| < \varepsilon$$

не будет верным для всех $x \in [0, 1)$, так как при любом фиксированном n найдутся точки $x \in [0, 1)$, достаточно близкие к 0, для которых $R_n(x)$ будет настолько близким к 1, что окажется большим $\varepsilon < 1$.

В этом примере полезно обратить внимание на то, что в полуинтервале $[0, 1)$ члены ряда были непрерывны, а сумма ряда оказалась разрывной. Следовательно, для рядов из непрерывности членов ещё не вытекает непрерывность суммы, как это было установлено для конечных сумм.

Следующая теорема показывает, что равномерная сходимость ряда, при непрерывности его членов, является достаточным условием непрерывности суммы ряда.

Теорема. Если члены функционального ряда

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

непрерывны на множестве E и ряд на этом множестве сходится равномерно, то сумма $S(x)$ данного ряда непрерывна на множестве E .

Доказательство. Пусть $x_0 \in E$. Возьмём как угодно малое $\varepsilon > 0$. Так как по условию данный ряд на множестве E сходится равномерно, то существует такой номер

N , что для остаточного члена ряда будет верно неравенство

$$|R_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

для всех $x \in E$, как только будет $n > N$.

Возьмём $n_0 > N$ и сумму $S(x)$ представим в виде

$$S(x) = S_{n_0}(x) + R_{n_0}(x).$$

Отсюда имеем:

$$\begin{aligned} |S(x) - S(x_0)| &= |S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0) + R_{n_0}(x) - R_{n_0}(x_0)| \leq \\ &\leq |S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| + |R_{n_0}(x)| + |R_{n_0}(x_0)|. \end{aligned}$$

Так как $S_{n_0}(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in E$, как конечная сумма непрерывных функций, то существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in E$, удовлетворяющих условию

$$|x - x_0| < \delta,$$

верно неравенство

$$|S_{n_0}(x) - S_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Кроме того, в силу выбора $n_0 > N$, имеем:

$$|R_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ и } |R_{n_0}(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Следовательно,

$$|S(x) - S(x_0)| < \varepsilon$$

для всех $x \in E$, удовлетворяющих неравенству

$$|x - x_0| < \delta,$$

что и доказывает непрерывность суммы $S(x)$ данного ряда в произвольной точке $x_0 \in E$.

Таким образом, в вопросе о непрерывности суммы равномерно сходящийся ряд не отличается от конечных сумм, чего нельзя сказать о каждом функциональном ряде, как это видно из рассмотренного выше примера.

Признак равномерной сходимости выражается следующей теоремой:

Теорема Вейерштрасса. Если на множестве E члены функционального ряда по абсолютному значению

не превосходят соответствующих членов сходящегося ряда положительных чисел, то данный функциональный ряд на множестве E сходится равномерно.

Доказательство. Пусть

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots \quad (u)$$

есть сходящийся ряд положительных чисел и для всех членов функционального ряда

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots$$

верно

$$|f_n(x)| \leq u_n$$

при любом $x \in E$. Тогда

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots| \leq u_{n+1} + u_{n+2} + \dots$$

для всех $x \in E$.

Но ряд (u) по условию сходится; поэтому для как угодно малого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N , что

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \dots < \varepsilon$$

для всех $n > N$.

Отсюда следует, что для всех $x \in E$ будет верно неравенство

$$|R_n(x)| = |f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots| < \varepsilon,$$

как только будет $n > N$, а это и означает, что данный функциональный ряд сходится на множестве E равномерно.

7. Степенные ряды. Функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots, \quad (1)$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — постоянные коэффициенты, называется *степенным рядом*.

Любой степенной ряд, очевидно, сходится при $x=0$.

Следующая теорема позволит выяснить, что собой представляет вся область сходимости, т. е. всё множество точек сходимости степенного ряда.

Теорема (Абеля). Если степенной ряд (1) сходится при $x=x_0$, то он абсолютно сходится при любом значении x , удовлетворяющем условию $|x| < |x_0|$.

Если же при $x=x_0$ степенной ряд расходится, то он расходится и при любом значении x , удовлетворяющем условию $|x| > |x_0|$.

Доказательство. Пусть ряд (1) при $x = x_0$, т. е. ряд

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n + \dots, \quad (1')$$

сходится. Тогда в силу необходимого условия сходимости ряда имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0,$$

откуда следует ограниченность последовательности членов ряда (1'):

$$|a_n x_0^n| \leq M \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Рассмотрим ряд

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \dots + |a_n x^n| + \dots \quad (2)$$

Так как

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left| \frac{x}{x_0} \right|^n \leq M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n$$

и при любом x , удовлетворяющем условию $|x| < |x_0|$, ряд

$$M + M \left| \frac{x}{x_0} \right| + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^2 + \dots + M \left| \frac{x}{x_0} \right|^n + \dots$$

сходится, как ряд, образованный из геометрической прогрессии со знаменателем $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$, то по принципу сравнения рядов сходится при $|x| < |x_0|$ и ряд (2), а это означает, что данный степенной ряд (1) сходится абсолютно для всех значений x , удовлетворяющих условию $|x| < |x_0|$. Что и утверждалось.

Пусть теперь ряд (1) при $x = x_0$ расходится. Тогда он расходится при всех значениях x , удовлетворяющих неравенству $|x| > |x_0|$.

Действительно, если бы при некотором значении $x = x_1$, удовлетворяющем неравенству $|x_1| > |x_0|$, ряд (1) был сходящимся, то по доказанному он был бы сходящимся и при $x = x_0$, что противоречит условию.

Теорема доказана.

Чтобы найти область сходимости степенного ряда (1), поступим следующим образом.

Разобьём множество всех точек числовой оси на два класса X и Y , поместив в классе Y те и только те точки $x > 0$, в которых степенной ряд (1) расходится, а все остальные точки числовой оси поместим в класс X .

Из теоремы Абеля следует, что если класс Y окажется пустым, то ряд (1) будет сходиться на всей числовой оси, т. е. область сходимости в этом случае будет интервал $(-\infty, +\infty)$.

Если же класс Y не будет пустым, то получим сечение (X, Y) множества всех действительных чисел, определяющееся некоторым пограничным числом $R \geq 0$. В этом случае, если $R \neq 0$, степенной ряд (1) абсолютно сходится в интервале $(-R, R)$ и расходится вне этого интервала. О сходимости в точках $-R$ и R никакого общего вывода, относящегося ко всем степенным рядам, мы не можем сделать. Эти точки для каждого ряда исследуются особо.

Число R называется *радиусом сходимости*, а интервал $(-R, R)$ — *интервалом сходимости* степенного ряда.

При $R = 0$ область сходимости представляет одну точку $x = 0$.

Если интервал сходимости будет $(-\infty, +\infty)$, то будем говорить, что $R = +\infty$.

Нетрудно заметить, что если для степенного ряда (1) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L,$$

то при L , не равном 0 и ∞ , радиус сходимости ряда (1) равен

$$R = \frac{1}{L}.$$

Действительно, в этом случае по признаку Даламбера имеем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = |x| L,$$

откуда видно, что ряд (1) сходится, причём абсолютно, при $|x| L < 1$ и расходится при $|x| L > 1$. Следовательно, интервал сходимости определяется неравенством:

$$|x| < \frac{1}{L} = R.$$

Если $L = 0$, то $R = +\infty$, так как в этом случае при любом x имеем $|x| L = 0$, и поэтому интервал сходимости ряда (1) есть $(-\infty, +\infty)$.

Если $L = \infty$, то $R = 0$, так как в этом случае при любом $x \neq 0$ ряд (1) расходится, и поэтому область сходимости представляет одну точку $x = 0$.

Рассмотрим теорему, касающуюся вопроса о равномерной сходимости степенного ряда.

Теорема. Степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке, содержащемся в его интервале сходимости.

Доказательство. Пусть $R > 0$ — радиус сходимости степенного ряда (1).

Возьмём любое число ρ , удовлетворяющее условию $0 < \rho < R$, и рассмотрим ряд (1) на отрезке $[-\rho, \rho] \subset (-R, R)$.

Обозначим через ξ какое-нибудь число из промежутка (ρ, R) :

$$\rho < \xi < R.$$

Так как ξ содержится в интервале $(-R, R)$, то при $x = \xi$ ряд (1) сходится абсолютно, т. е. сходится ряд

$$|a_0| + |a_1\xi| + |a_2\xi^2| + \dots + |a_n\xi^n| + \dots$$

Но для всех $x \in [-\rho, \rho]$

$$|a_n x^n| \leq |a_n \rho^n| < |a_n \xi^n|.$$

Поэтому, в силу признака Вейерштрасса, ряд (1) на отрезке $[-\rho, \rho]$ сходится равномерно.

Следствие. В каждой точке интервала сходимости степенного ряда (1) его сумма $S(x)$ непрерывна.

Действительно, если $x_0 \in (-R, R)$, то всегда можно выбрать отрезок $[-\rho, \rho]$, содержащий x_0 и содержащийся в интервале $(-R, R)$. Так как, по доказанному, ряд (1) на отрезке $[-\rho, \rho]$ сходится равномерно, а члены ряда непрерывны, то сумма ряда (1) непрерывна на всём отрезке $[-\rho, \rho]$, а следовательно, непрерывна и в точке x_0 .

8. Ряд Тейлора. Пусть функция $f(x)$ определена и имеет производные любого порядка на некотором отрезке. Пусть точки a и x принадлежат этому отрезку. Выразим данную функцию в точке x по формуле Тейлора

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} + R_n.$$

Если окажется, что $R_n \rightarrow 0$ при неограниченном возрастании n , то получим:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} \right\}.$$

а это означает, что $f(x)$ представляет сумму ряда, у которого частичная сумма есть выражение, содержащееся в фигурных скобках, т. е.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (1)$$

Ряд, записанный в правой части равенства (1), называется рядом Тейлора.

Следует обратить внимание на то, что ряд Тейлора можно образовать для всякой функции $f(x)$, у которой существуют производные любого порядка, но отсюда ещё не следует, что он непременно будет сходящимся к данной функции $f(x)$; он может оказаться расходящимся или сходящимся, но не к функции $f(x)$. Надо помнить, что равенство (1) верно тогда и только тогда, когда остаточный член в формуле Тейлора для $f(x)$ стремится к нулю при неограниченном возрастании его номера.

Следовательно, чтобы разложить в ряд Тейлора функцию $f(x)$, имеющую производные любого порядка, надо сначала формально составить этот ряд, затем выяснить, при каких значениях x он сходится и, наконец, найти те точки сходимости ряда, в которых остаточный член формулы Тейлора стремится к нулю при неограниченном возрастании n . Именно в этих точках и будет функция $f(x)$ суммой своего ряда Тейлора.

Ряд Тейлора, в котором $a = 0$, т. е. ряд

$$f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots,$$

принято называть рядом Маклорена.

Ясно, что функция $f(x)$, имеющая производные любого порядка, разложима в ряд Маклорена там, где остаточный член формулы Маклорена стремится к нулю при неограниченном возрастании его номера.

Рассмотрим несколько примеров.

Раньше была получена следующая формула Маклорена для $\sin x$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k},$$

причём

$$|R_{2k}| \leq \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Возьмём ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Он сходится при всех значениях x . В этом можно убедиться при помощи признака Даламбера. Отсюда следует в силу необходимого условия сходимости ряда, что для всех x

$$\frac{x^{2k}}{(2k)!} \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty,$$

а значит, и тем более

$$\lim_{k \rightarrow \infty} R_{2k} = 0.$$

Поэтому

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots \quad (2)$$

при любом значении x .

Аналогичным образом получим для всех x

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots \quad (3)$$

Для функции e^x по формуле Маклорена имеем:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x} x^n}{n!}$$

Очевидно,

$$\left| e^{\theta x} \frac{x^n}{n!} \right| < e^{|x|} \frac{|x|^n}{n!}.$$

Отсюда, замечая, что при каком угодно значении x ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{|x|}}{n!} x^n$$

сходится, получим:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\theta x} x^n}{n!} = 0.$$

Следовательно, имеем равенство

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad (4)$$

в котором x может быть любым действительным числом.

Пользуясь полученными равенствами (2), (3) и (4), выведем две формулы, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Пусть z — действительная переменная, а i — мнимое число, определенное равенством $i^2 = -1$. Функцию e^{iz} естественно определить при помощи ряда, который получится, если в разложении (4) функции e^x заменить x через iz , так как при этом получится сходящийся ряд, представляющий сумму двух сходящихся рядов, т. е.

$$e^{iz} = \left\{ 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots + (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \dots \right\} + \\ + i \left\{ z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{z^{2k-1}}{(2k-1)!} + \dots \right\}.$$

Отсюда, учитывая равенства (2) и (3), получим:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad (5)$$

а заменяя z в этом равенстве через $-z$, будем иметь:

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \quad (6)$$

Формулы (5) и (6), или равносильные им

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

называются формулами Эйлера.

9. Составление таблиц логарифмов. Разложим функцию $f(x) = \ln x$ по степеням $x - 1$, т. е. в ряд Тейлора. Для этого найдём производные всех порядков от $f(x) = \ln x$:

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{x^3}, \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}.$$

В точке $x = 1$ получим:

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 1, \quad f''(1) = -1, \quad f'''(1) = 2!, \dots, \\ f^{(n)}(1) = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

Следовательно, ряд Тейлора для $f(x) = \ln x$ будет

$$(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + \dots$$

Для того чтобы найти область сходимости полученного ряда, воспользуемся признаком Даламбера. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}}{\frac{(x-1)^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n(x-1)}{n+1} \right| = |x-1| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = |x-1|,$$

то искомая область сходимости определяется неравенством

$$|x-1| < 1, \text{ или } 0 < x < 2.$$

Исследуем в этой области остаточный член соответствующей формулы Тейлора. Взяв его в форме Коши, будем иметь:

$$\begin{aligned} |R_n| &= \left| \frac{(x-1)^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)} [1 + \theta(x-1)] \right| = \\ &= \frac{1}{|1 + \theta(x-1)|} |x-1|^n \left| \frac{1-\theta}{1 + \theta(x-1)} \right|^{n-1}. \end{aligned}$$

При $n \rightarrow \infty$ второй множитель в правой части стремится к нулю, так как R_n мы исследуем при $|x-1| < 1$, а первый и последний множители остаются ограниченными, потому что при любом n

$$\frac{1}{|1 + \theta(x-1)|} \leq \frac{1}{1 - |x-1|}, \quad \left| \frac{1-\theta}{1 + \theta(x-1)} \right|^{n-1} < 1.$$

Эти неравенства очевидны, если $0 \leq x-1 < 1$, а при $-1 < x-1 < 0$ следуют из того, что в этом случае

$$1 + \theta(x-1) = 1 - \theta|x-1|,$$

где $0 < \theta < 1$ и $|x-1| < 1$. Следовательно, при $|x-1| < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0,$$

а поэтому равенство

$$\begin{aligned} \ln x &= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \dots + \\ &+ (-1)^{n-1} \frac{(x-1)^n}{n} + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

верно при всех значениях x из интервала $(0, 2)$. Заметим, что вне интервала $(0, 2)$ ряд Тейлора, который мы составили для функции $\ln x$, расходится, и поэтому не может выражать $\ln x$. Очевидно, что этот ряд расходится и при $x=0$, а при $x=2$ можно доказать, что он сходится, хотя и не абсолютно.

Если теперь в равенстве (1) вместо x подставим $1+x$, то для x , удовлетворяющих условию $0 < 1+x < 2$, или $|x| < 1$, получим:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \quad (2)$$

Заменяя затем в равенстве (2) x на $-x$, получим:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots, \quad (3)$$

причём равенство (3) опять верно для x , удовлетворяющих условию $|x| < 1$. Нам известно, что разность двух сходящихся рядов есть опять сходящийся ряд, причём его сумма есть разность между суммами двух данных рядов. Учитывая это, а также то, что

$$\ln(1+x) - \ln(1-x) = \ln \frac{1+x}{1-x},$$

из (2) и (3) получим равенство

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left(x + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots \right), \quad (4)$$

которое будет верно для всех x , удовлетворяющих условию $|x| < 1$.

Если p и q — натуральные числа, то, очевидно,

$$\left| \frac{p-q}{p+q} \right| < 1,$$

а поэтому в равенстве (4) можно взять

$$x = \frac{p-q}{p+q}.$$

Так как в этом случае

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{p}{q},$$

то имеем:

$$\ln \frac{p}{q} = 2 \left\{ \frac{p-q}{p+q} + \frac{1}{3} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{p-q}{p+q} \right)^5 + \dots \right\} \quad (5)$$

Формулой (5) можно пользоваться для вычисления натуральных логарифмов. Так, например, взяв $p=2$ и $q=1$, получим:

$$\ln 2 = 2 \left\{ \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)3^{2n-1}} + \dots \right\},$$

где правая часть равенства есть быстро сходящийся ряд, удобный для вычисления приближённых значений $\ln 2$. Если $\ln 2$ уже вычислен с нужной степенью точности, то при $p=3$ и $q=2$ получим:

$$\ln 3 = \ln 2 + 2 \left\{ \frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)5^{2n-1}} + \dots \right\}.$$

Полагая $\ln n$ уже вычисленным, получим:

$$\ln(n+1) = \ln n + 2 \left\{ \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots \right\}.$$

Мы видим, что ряд в правой части этого равенства сходится тем быстрее, чем больше n ; поэтому с возрастанием n вычисления логарифмов становятся всё более и более простыми.

Составив таким путём таблицу натуральных логарифмов, легко перейти к таблице логарифмов с каким-либо другим основанием a . Действительно, пусть

$$x = \lg_a y.$$

Это означает, что

$$a^x = y.$$

Если теперь возьмём от обеих частей этого равенства натуральные логарифмы, то получим:

$$x \ln a = \ln y,$$

откуда

$$x = \frac{\ln y}{\ln a}.$$

Следовательно,

$$\lg_a y = \frac{1}{\ln a} \cdot \ln y,$$

т. е., умножая натуральные логарифмы чисел на один и тот же множитель

$$M = \frac{1}{\ln a},$$

называемый модулем перехода, мы получим соответствующие логарифмы с основанием a .

10. Разложение бинома. Поставим себе задачей разложить по степеням x бином $f(x) = (1+x)^m$. Если m — целое положительное число, то разложение $f(x)$ представляет конечную сумму и получается по формуле бинома Ньютона. Но здесь мы под m понимаем любое действительное число, а поэтому для решения задачи придётся данный бином разлагать в ряд Маклорена. Вычислим производные от функции $f(x) = (1+x)^m$:

$$f'(x) = m(1+x)^{m-1}, \quad f''(x) = m(m-1)(1+x)^{m-2}, \quad \dots, \\ f^{(n)}(x) = m(m-1) \dots [m-(n-1)](1+x)^{m-n}.$$

При $x = 0$ получим:

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = m, \quad f''(0) = m(m-1), \quad \dots, \\ f^{(n)}(0) = m(m-1) \dots [m-(n-1)].$$

Отсюда видно, что биному $(1+x)^m$ соответствует ряд Маклорена

$$1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \dots [m-(n-1)]}{n!} x^n + \dots$$

Найдём область сходимости этого ряда. Для этого воспользуемся признаком Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{m(m-1) \dots [m-(n-1)](m-n)}{(n+1)!} x^{n+1}}{\frac{m(m-1) \dots [m-(n-1)]}{n!} x^n} \right| = \\ = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m-n}{n+1} \right| = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{m}{n+1} - \frac{n}{n+1} \right| = |x|.$$

Следовательно, ряд сходится при $|x| < 1$ и расходится, когда $|x| > 1$. При $|x| = 1$ исследование сходимости ряда не проводим. Докажем теперь, что при $-1 < x < 1$ остаточный член R_n формулы Маклорена для бинома $(1+x)^m$ стремится к нулю, когда n неограниченно возрастает.

С этой целью составим R_n в форме Коши:

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{x^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(\theta x) = \\ &= \frac{x^n (1-\theta)^{n-1}}{(n-1)!} m(m-1) \dots [m-(n-1)] (1+\theta x)^{m-n}, \end{aligned}$$

откуда получим:

$$|R_n| = \left| \frac{m(m-1) \dots [m-(n-1)]}{(n-1)!} x^n \right| \left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right|^{n-1} |1+\theta x|^{m-1}.$$

При $n \rightarrow \infty$ в выражении $|R_n|$ последний множитель остаётся между $(1-|x|)^{m-1}$ и $(1+|x|)^{m-1}$, а второй — меньше единицы, так как

$$\left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right| < 1,$$

что при $0 \leq x < 1$ очевидно, а при $-1 < x < 0$ видно из того, что в этом случае

$$\frac{1-\theta}{1+\theta x} = \frac{1-\theta}{1-\theta|x|},$$

где $|x| < 1$. Легко заметить, что первый множитель в выражении $|R_n|$ стремится к нулю. Для этого достаточно убедиться при помощи признака Даламбера, что ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left| \frac{m(m-1) \dots [m-(n-1)]}{(n-1)!} x^n \right|$$

в интервале $-1 < x < 1$ сходится, а значит, его общий член, представляющий первый множитель в выражении $|R_n|$, стремится к нулю, когда $n \rightarrow \infty$.

Следовательно, при $|x| < 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0,$$

а поэтому

$$\begin{aligned} (1+x)^m &= 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \dots + \\ &+ \frac{m(m-1) \dots m-(n-1)}{n!} x^n + \dots \end{aligned}$$

для всех значений x из интервала $(-1, 1)$.

Если m — целое положительное число, то $f^{(m)}(x) = m!$, а $f^{(m+1)}(x) = 0$; поэтому ряд Маклорена для бинома $(1+x)^m$

в этом случае оборвётся на члене, содержащем x^m , так как остальные члены будут равны нулю, и мы получим известную формулу бинома Ньютона

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + x^m.$$

11. О работах советских математиков. В теории рядов важное место занимают тригонометрические ряды

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Основное содержание теории этих рядов в значительной мере состоит из результатов, полученных советскими математиками. Кроме Н. Н. Лузина, фундаментальная работа которого «Интеграл и тригонометрический ряд» уже упоминалась, в этой области работал целый ряд советских математиков. В вопросе об условиях сходимости тригонометрических рядов очень ценные результаты были получены А. Н. Колмогоровым, Г. А. Селиверстовым и А. И. Плеснером. В 1940 г. Д. Е. Меньшов решил проблему, поставленную за 25 лет до этого Н. Н. Лузиным, доказав, что для всякой измеримой функции на $[-\pi, \pi]$ существует тригонометрический ряд, сходящийся к ней почти везде. В вопросе о единственности тригонометрических рядов, т. е. в вопросе о том, сколько существует тригонометрических рядов, представляющих данную функцию, ценные результаты были получены Д. Е. Меньшовым и Н. К. Бари. Можно было бы назвать ещё много советских математиков, которые своими работами значительно обогатили теорию рядов.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

1. Основные понятия. Пусть имеем уравнение

$$F(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0, \quad (1)$$

где c_1, c_2, \dots, c_n — произвольные постоянные. Если в этом уравнении за постоянные c_1, c_2, \dots, c_n возьмём определённые числа, то получим уравнение определённой кривой на плоскости $хоу$. Если же за c_1, c_2, \dots, c_n брать различные системы чисел, то и кривые будут получаться различные. Таким образом, уравнение (1) выражает некоторое множество плоских кривых. Поставим себе задачей найти уравнение этого же множества кривых, но такое, которое не содержало бы произвольных постоянных c_1, c_2, \dots, c_n , а, следовательно, выражало бы общее свойство всех кривых этого множества. Поставленную задачу можно решить так. Продифференцируем обе части уравнения (1), считая при этом y функцией от x , определённой этим уравнением. В результате получим новое уравнение, которое будет содержать, кроме прежних x, y и c_1, c_2, \dots, c_n , еще и y' . Это уравнение можно записать так:

$$F_1(x, y, y', c_1, c_2, \dots, c_n) = 0.$$

Полученное уравнение снова дифференцируем и т. д. Продолжаем эту операцию n раз, полагая, конечно, при этом, что уравнение (1) таково, что n -кратное дифференцирование возможно. В результате получим систему уравнений

$$\left. \begin{aligned} F(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) &= 0 \\ F_1(x, y, y', c_1, c_2, \dots, c_n) &= 0 \\ \dots & \\ F_n(x, y, y', \dots, y^{(n)}, c_1, \dots, c_n) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

задачи требуется найти один конкретный ответ, то это означает, что надо найти не только общий интеграл, но и выделить из него частный интеграл, соответствующий условиям задачи, или, как говорят, *начальным условиям*. Так как для получения частного интеграла из общего надо знать, какие значения следует дать произвольным постоянным c_1, c_2, \dots, c_n , то математическое выражение начальных условий усматриваем из равенств (3). Эти условия заключаются в том, чтобы при некотором значении $x = x_0$ были даны значения искомой функции y и её первых $n - 1$ производных. Обозначая эти значения соответственно через $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, начальные условия для дифференциального уравнения n -го порядка выразятся равенствами:

$$x = x_0, y = y_0, y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}. \quad (5)$$

Так, например, если

$$f\left(t, s, \frac{ds}{dt}, \frac{d^2s}{dt^2}\right) = 0$$

есть уравнение движения материальной точки, то начальные условия

$$t = t_0, s = s_0, \frac{ds}{dt} = \left(\frac{ds}{dt}\right)_0$$

означают задание положения точки в начальный момент времени t_0 и скорости в этот момент, т. е. начальной скорости.

2. Однородные линейные уравнения. Одним из наиболее важных типов дифференциальных уравнений, имеющих большое практическое значение в естествознании и технике, является уравнение вида

$$L(y) \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + k_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + k_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + k_n(x) y = 0, \quad (1)$$

которое называется *однородным линейным* дифференциальным уравнением n -го порядка. Здесь $L(y)$ есть краткое выражение левой части уравнения (1), т. е. результат тех дифференциальных операций над функцией y , которые указаны в этой части уравнения. Коэффициенты $k_1(x), k_2(x), \dots, k_n(x)$ — функции от x . Пользуясь обозначением $L(y)$, уравнение (1) можно записать так:

$$L(y) = 0.$$

Следующие две теоремы выражают характерные свойства однородных линейных уравнений.

Теорема 1. Если функция y_1 является решением уравнения

$$L(y) = 0, \quad (1)$$

то и функция cy_1 , где c — произвольная постоянная, есть решение этого уравнения.

Доказательство. Из определения $L(y)$ непосредственно следует, что

$$L(cy_1) = cL(y_1).$$

Но

$$L(y_1) = 0,$$

так как по условию y_1 есть решение уравнения (1), а поэтому и

$$L(cy_1) = 0,$$

т. е. функция cy_1 уравнению (1) удовлетворяет.

Теорема 2. Если функции y_1, y_2, \dots, y_p являются решениями уравнения

$$L(y) = 0, \quad (1)$$

то и функция $y_1 + y_2 + \dots + y_p$ есть решение этого уравнения.

Доказательство. Из определения $L(y)$ следует, что

$$L(y_1 + y_2 + \dots + y_p) = L(y_1) + L(y_2) + \dots + L(y_p).$$

Но

$$L(y_1) = L(y_2) = \dots = L(y_p) = 0,$$

так как по условию y_1, y_2, \dots, y_p — решения уравнения (1). Следовательно,

$$L(y_1 + y_2 + \dots + y_p) = 0,$$

т. е. функция $y_1 + y_2 + \dots + y_p$ уравнению (1) удовлетворяет.

Следствие. Если y_1, y_2, \dots, y_p — решения уравнения (1), то $c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_py_p$, где c_1, c_2, \dots, c_p — произвольные постоянные, есть также решение этого уравнения.

Действительно, в силу теоремы 1 каждое слагаемое $c_i y_i$ есть решение уравнения (1), а в силу теоремы (2) сумма этих решений $\sum_{i=1}^p c_i y_i$ опять есть решение того же уравнения.

Отсюда мы получим направление, в каком следует искать общее решение однородного линейного уравнения. В самом деле, пусть мы нашли n частных решений y_1, y_2, \dots, y_n уравнения (1). Тогда

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n, \quad (2)$$

где c_1, c_2, \dots, c_n — произвольные постоянные, также есть решение уравнения (1). Помня, что общее решение уравнения n -го порядка есть такое решение, которое содержит n произвольных постоянных, у нас есть основания ожидать, что соотношение (2) выражает общее решение уравнения (1). Однако оказывается, что это не всегда так. Например, если возьмём $y_n = 2y_1$ (что возможно, так как, в силу теоремы 1, если y_1 есть решение уравнения (1), то и $2y_1$ будет решением этого уравнения), то соотношение (2) примет вид

$$y = (c_1 + 2c_n) y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_{n-1} y_{n-1}.$$

Здесь $c_1 + 2c_n$ есть произвольная постоянная, которая может быть обозначена просто через c_1 ; поэтому соотношение (2) можно записать так:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_{n-1} y_{n-1}.$$

Это показывает, что в данном случае соотношение (2) не выражает общего решения, так как в действительности содержит произвольных постоянных не n , а меньше. Отсюда следует, что нельзя составить общее решение уравнения (1) по формуле (2) из каких угодно частных решений этого уравнения. Но это, конечно, ещё вовсе не означает, что не существуют такие частные решения, из которых действительно можно образовать общее решение по формуле (2). Вполне законно поставить вопрос о том, каким условиям должны удовлетворять частные решения y_1, y_2, \dots, y_n уравнения (1), чтобы функция y , составленная из них по формуле (2), была общим решением этого уравнения.

Очевидно, что соотношение (2) тогда выражает общее решение, когда из него при помощи начальных условий

можно выделить любое частное решение, т. е. когда постоянные c_1, c_2, \dots, c_n можно выбрать таким образом, чтобы при частном значении x_0 независимой переменной x функция y и её первые $n - 1$ производные $y', y'', \dots, y^{(n-1)}$ имели любые заданные значения $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$. Но возможность выбрать такие c_1, c_2, \dots, c_n означает возможность решить относительно c_1, c_2, \dots, c_n следующую систему n линейных неоднородных уравнений

$$\left. \begin{aligned} c_1 y_{10} + c_2 y_{20} + \dots + c_n y_{n0} &= y_0 \\ c_1 y'_{10} + c_2 y'_{20} + \dots + c_n y'_{n0} &= y'_0 \\ \dots &\dots \\ c_1 y_{10}^{(n-1)} + c_2 y_{20}^{(n-1)} + \dots + c_n y_{n0}^{(n-1)} &= y_0^{(n-1)} \end{aligned} \right\}, \quad (3)$$

где для краткости положено $y_i(x_0) = y_{i0}$, $y_i^{(p)}(x_0) = y_{i0}^{(p)}$; поэтому детерминант этой системы должен быть отличным от нуля. Следовательно, если y_1, y_2, \dots, y_n таковы, что детерминант

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

который называется *детерминантом Вронского* и обозначается символом $W(y_1, y_2, \dots, y_n)$, не равен тождественно нулю, то, взяв за x_0 такое значение x , при котором этот детерминант отличен от нуля, система (3) может быть решена относительно c_1, c_2, \dots, c_n , а это означает, что соотношение (2) содержит любое частное решение, т. е. представляет общее решение.

Система n таких частных решений y_1, y_2, \dots, y_n однородного линейного уравнения n -го порядка, что детерминант Вронского, составленный из них, не равен тождественно нулю, т. е. таких решений, из которых общее решение можно составить по формуле (2), называется *фундаментальной системой* частных решений.

Пользуясь этим понятием, мы можем сказать, что интегрирование однородного линейного уравнения сводится к отысканию фундаментальной системы частных решений этого уравнения.

3. Неоднородные линейные уравнения. *Неоднородным линейным* уравнением n -го порядка называется уравнение вида

$$L(y) \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + k_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + k_{n-1}(x) \frac{dy}{dx} + k_n(x) y = f(x). \quad (1)$$

Если в уравнении (1) правую часть $f(x)$ заменим нулём, то получим однородное линейное уравнение $L(y) = 0$, которое мы будем называть соответствующим данному уравнению $L(y) = f(x)$. Докажем следующие две теоремы.

Теорема 1. Общее решение y данного неоднородного линейного уравнения есть сумма общего решения u соответствующего однородного линейного уравнения и частного решения v данного уравнения

$$y = u + v.$$

Доказательство. Так как

$$L(u + v) = L(u) + L(v),$$

причём $L(u) = 0$, а $L(v) = f(x)$, ибо u есть решение уравнения $L(y) = 0$, а v — решение уравнения $L(y) = f(x)$, то имеем:

$$L(u + v) = f(x).$$

Это означает, что $u + v$ есть решение уравнения (1). Так как u , будучи *общим* решением уравнения $L(y) = 0$, содержит n произвольных постоянных, то и сумма $u + v$ содержит n произвольных постоянных, а значит,

$$y = u + v$$

есть *общее* решение уравнения (1).

Теорема 2. Если v_1, v_2, \dots, v_p являются решениями соответственно уравнений

$$L(y) = f_1(x), \quad L(y) = f_2(x), \quad \dots, \quad L(y) = f_p(x),$$

то

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_p$$

есть решение уравнения

$$L(y) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_p(x).$$

Доказательство. Так как

$$L(v_1 + v_2 + \dots + v_p) = L(v_1) + L(v_2) + \dots + L(v_p),$$

и, кроме того, $L(v_i) = f_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, p$), ибо v_i есть решение уравнения $L(y) = f_i(x)$, то

$$L(v_1 + v_2 + \dots + v_p) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_p(x),$$

т. е.

$$v = v_1 + v_2 + \dots + v_p$$

уравнению

$$L(y) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_p(x)$$

удовлетворяет.

Первая теорема задачу интегрирования неоднородного линейного уравнения сводит к интегрированию соответствующего однородного линейного уравнения и отысканию какого-нибудь частного решения данного уравнения. Вторая теорема позволяет упростить задачу отыскания частного решения неоднородного линейного уравнения, когда его правая часть представляет сумму нескольких функций.

4. Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Здесь мы ограничимся рассмотрением уравнения второго порядка.

Пусть имеем уравнение

$$L(y) \equiv \frac{d^2y}{dx^2} + k_1 \frac{dy}{dx} + k_2 y = 0, \quad (1)$$

где k_1 и k_2 — любые действительные числа. Чтобы найти общее решение этого уравнения, нам надо, как было показано выше, найти его фундаментальную систему решений, т. е. такие два решения y_1 и y_2 , что детерминант Вронского $W(y_1, y_2)$, составленный из них, не равен тождественно нулю, а затем воспользоваться формулой

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad (2)$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Эйлер дал следующий способ отыскания частных решений уравнения (1).

Возьмём показательную функцию

$$y = e^{rx}$$

и число r постараемся выбрать так, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению (1). С этой целью подставим в уравнение (1)

$$y = e^{rx}, \quad \frac{dy}{dx} = r e^{rx}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = r^2 e^{rx}.$$

Тогда получим:

$$L(e^{rx}) = e^{rx}(r^2 + k_1 r + k_2) = 0,$$

откуда видно, что функция $y = e^{rx}$ будет удовлетворять уравнению (1) тогда и только тогда, когда r будет корнем уравнения

$$r^2 + k_1 r + k_2 = 0, \quad (3)$$

которое будем называть *характеристическим уравнением*.

Здесь возможны три случая.

Первый случай. Пусть корни r_1 и r_2 характеристического уравнения (3) различные: $r_1 \neq r_2$. В этом случае мы получим два решения уравнения (1):

$$y_1 = e^{r_1 x} \text{ и } y_2 = e^{r_2 x},$$

причём они образуют фундаментальную систему решений, так как

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + r_2)x} (r_2 - r_1) \neq 0.$$

Следовательно, общее решение уравнения (1) в этом случае будет

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x},$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные,

Второй случай. Пусть корни характеристического уравнения различные, но комплексные числа. Тогда они обязательно сопряжённые

$$r_{1,2} = a \pm bi,$$

так как коэффициенты уравнения k_1 и k_2 — действительные числа. В этом случае общее решение

$$y = c_1 e^{(a+bi)x} + c_2 e^{(a-bi)x}$$

можно преобразовать так, что в нём не будет мнимых величин. Действительно, мы имеем:

$$\begin{aligned} c_1 e^{(a+bi)x} + c_2 e^{(a-bi)x} &= e^{ax} (c_1 e^{ibx} + c_2 e^{-ibx}) = \\ &= e^{ax} [c_1 (\cos bx + i \sin bx) + c_2 (\cos bx - i \sin bx)] = \\ &= e^{ax} [(c_1 + c_2) \cos bx + i (c_1 - c_2) \sin bx]. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались формулами Эйлера

$$e^{\pm iz} = \cos z \pm i \sin z.$$

Положим

$$c_1 = \frac{A - Bi}{2}, \quad c_2 = \frac{A + Bi}{2},$$

где A и B — любые действительные числа. Тогда получим:

$$c_1 + c_2 = A, \quad i(c_1 - c_2) = B.$$

Следовательно, когда $r_{1,2} = a \pm bi$, общее решение уравнения (1) выразится формулой

$$y = e^{ax} (A \cos bx + B \sin bx),$$

где A и B — произвольные постоянные.

Третий случай. Пусть корни характеристического уравнения равные. Это значит, что

$$r_{1,2} = -\frac{k_1}{2}.$$

Очевидно, что в этом случае решения $y_1 = e^{r_1 x}$ и $y_2 = e^{r_2 x}$ уже не составляют фундаментальную систему, так как

$$W(y_1, y_2) = W(y_1, y_1) = 0.$$

Поэтому пока мы имеем только одно решение: $y_1 = e^{r_1 x}$. Второе, недостающее решение y_2 будем искать в виде функции $e^{r_1 x} z$, где z — неизвестная функция от x . Подставляя в уравнение (1) вместо y , y' и y'' соответственно

$$\begin{aligned} y_2 &= e^{r_1 x} z, \\ y_2' &= e^{r_1 x} (r_1 z + z'), \\ y_2'' &= e^{r_1 x} (r_1^2 z + 2r_1 z' + z''), \end{aligned}$$

получим:

$$L(y_2) \equiv e^{r_1 x} \{z'' + (2r_1 + k_1)z' + (r_1^2 + k_1 r_1 + k_2)z\} = 0. \quad (4)$$

Но так как r_1 есть корень характеристического уравнения, то

$$r_1^2 + k_1 r_1 + k_2 = 0.$$

Кроме того, из условия, что $r_{1,2} = -\frac{k_1}{2}$, имеем:

$$2r_1 + k_1 = 0.$$

Отсюда следует, что искомая функция должна удовлетворять уравнению

$$z'' = 0.$$

Но такой функцией будет, например,

$$z = x.$$

Поэтому за второе решение уравнения (1) можно взять

$$y_2 = e^{r_1 x}.$$

Частные решения $y_1 = e^{r_1 x}$ и $y_2 = x e^{r_1 x}$ составляют фундаментальную систему решений. Действительно,

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & x e^{r_1 x} \\ r_1 e^{r_1 x} & (1 + r_1 x) e^{r_1 x} \end{vmatrix} = e^{2r_1 x} \neq 0.$$

Следовательно, если $r_1 = r_2 = -\frac{k_1}{2}$, то общее решение уравнения (1) выразится формулой

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{r_1 x},$$

или

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{-\frac{k_1}{2} x}.$$

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$r^2 - 3r + 2 = 0.$$

Решая это уравнение, находим его корни

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 2.$$

Следовательно, общее решение данного уравнения есть

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$y'' + y' + y = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$r^2 + r + 1 = 0.$$

Решая это уравнение, находим, что его корни комплексные

$$r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Следовательно, искомое общее решение есть

$$y = e^{-\frac{x}{2}} \left(A \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + B \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right).$$

Пример 3. Решить уравнение

$$y'' + 4y' + 4y = 0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$r^2 + 4r + 4 = 0.$$

Находим его корни

$$r_{1,2} = -2.$$

Отсюда видим, что общее решение данного уравнения есть

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{-2x}.$$

5. Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами. Пусть имеем уравнение

$$L(y) \equiv y'' + k_1 y' + k_2 y = f(x),$$

где k_1 и k_2 — любые действительные числа. Выше было показано, что общее решение такого уравнения складывается из общего решения уравнения $L(y) = 0$ и частного решения уравнения $L(y) = f(x)$. Нам уже известно, что общее решение уравнения $L(y) = 0$ ищется при помощи характеристического уравнения. Следовательно, новым здесь является вопрос о том, как найти частное решение уравнения $L(y) = f(x)$. Этот же вопрос для некоторых частных видов $f(x)$ решается элементарными приёмами, в основе которых лежит метод неопределённых коэффициентов. Рассмотрим несколько типов таких уравнений.

1. Уравнение вида

$$L(y) = P_m(x), \quad (1)$$

где $P_m(x)$ есть многочлен m -й степени:

$$P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m.$$

Если в уравнении (1) $k_2 \neq 0$, то в многочлене

$$Q_m(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \dots + A_{m-1}x + A_m$$

коэффициенты A_0, A_1, \dots, A_m можно выбрать так, чтобы $Q_m(x)$ удовлетворяло данному уравнению. Для этого достаточно подставить в уравнение (1) функцию

$$y = Q_m(x),$$

считая пока A_0, A_1, \dots, A_m неопределёнными, а затем надо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в многочленах $L[Q_m(x)]$ и $P_m(x)$, что и даст нужную систему уравнений для вычисления неопределённых коэффициентов A_0, A_1, \dots, A_m .

Если в уравнении (1) $k_2 = 0$, но $k_1 \neq 0$, то $L[Q_m(x)]$ будет многочленом степени $m-1$, а значит, он не может совпасть с $P_m(x)$, какими бы коэффициенты $Q_m(x)$ ни были выбраны. Затруднение, очевидно, будет устранено, если в этом случае частное решение уравнения (1) будем искать в форме

$$y = xQ_m(x).$$

Если же $k_2 = 0$ и $k_1 = 0$, то достаточно взять

$$y = x^2Q_m(x).$$

Итак, если уравнение (1) содержит искомую функцию y , то его частное решение ищется в форме

$$y = Q_m(x),$$

а если в уравнении (1) y не содержится, то частное решение составляется в форме

$$y = x^p Q_m(x),$$

где p равен порядку низшей производной, входящей в данное уравнение.

Пример. Решить уравнение

$$y'' + y' = x.$$

Решение. Общим решением будет

$$y = u + v,$$

где u — общее решение соответствующего однородного линейного уравнения, а v — частное решение данного уравнения.

Так как корни характеристического уравнения

$$r^2 + r = 0$$

есть $r_1 = 0$, $r_2 = -1$, то

$$u = c_1 + c_2 e^{-x}.$$

Частное решение v данного уравнения надо искать в форме

$$v = x(Ax + B), \text{ или } v = Ax^2 + Bx.$$

Дифференцируя v , находим:

$$v' = 2Ax + B, \quad v'' = 2A.$$

Подставляя в данное уравнение вместо y' и y'' соответственно v' и v'' , получим:

$$2A + 2Ax + B = x.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x из левой и правой частей этого равенства, получим систему уравнений

$$\left. \begin{array}{l} 2A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{array} \right\},$$

откуда находим:

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = -1;$$

поэтому

$$v = \frac{x^2}{2} - x.$$

Следовательно, общее решение данного уравнения есть

$$y = \frac{x^2}{2} - x + c_1 + c_2 e^{-x}.$$

2. Уравнение вида

$$L(y) = e^{ax} P_m(x). \quad (2)$$

Частное решение данного уравнения будем искать в форме

$$y = e^{ax}z,$$

где z — пока неизвестная функция. Замечая, что в этом случае

$$\begin{aligned}y' &= e^{ax}(az + z'), \\y'' &= e^{ax}(a^2z + 2az' + z''),\end{aligned}$$

имеем:

$$L(e^{ax}z) = e^{ax}[(a^2 + k_1a + k_2)z + (2a + k_1)z' + z''].$$

Отсюда для определения z получим уравнение

$$z'' + (2a + k_1)z' + (a^2 + k_1a + k_2)z = P_m(x).$$

Но выше мы видели, что частное решение уравнения такого вида надо искать в форме:

$$z = Q_m(x),$$

если уравнение содержит искомую функцию z , т. е. $a^2 + k_1a + k_2 \neq 0$, что будет тогда, когда a не есть корень характеристического уравнения;

$$z = Q_m(x)x,$$

если $a^2 + k_1a + k_2 = 0$, но $2a + k_1 \neq 0$, что будет тогда, когда только *один* корень характеристического уравнения равен числу a ;

$$z = Q_m(x)x^2,$$

если $a^2 + k_1a + k_2 = 0$ и $2a + k_1 = 0$, т. е. когда оба корня характеристического уравнения равны числу a , так как тогда $r_{1,2} = -\frac{k_1}{2}$.

Отсюда следует, что частное решение уравнения (2) надо искать в форме

$$y = e^{ax}Q_m(x),$$

если нет корней характеристического уравнения, равных a , и в форме

$$y = e^{ax}Q_m(x)x^p,$$

если a окажется корнем характеристического уравнения, причём p надо взять равным числу корней, совпадающих с a .

Коэффициенты многочлена $Q_m(x)$ ищут тем же способом, что и в случае уравнения предыдущего типа.

Пример. Решить уравнение

$$y'' - 2y' + y = e^x.$$

Решение. Общим решением данного уравнения будет

$$v = u + \vartheta,$$

где u — общее решение соответствующего однородного линейного уравнения, а ϑ — частное решение данного уравнения.

Чтобы найти u , составим характеристическое уравнение

$$r^2 - 2r + 1 = 0,$$

откуда находим, что $r_{1,2} = 1$, а поэтому

$$u = (c_1 + c_2x) e^x.$$

Учитывая, что два корня характеристического уравнения равны 1, частное решение ϑ данного уравнения ищем в форме

$$\vartheta = Ax^2 e^x.$$

Дифференцируя ϑ , находим:

$$\vartheta' = (Ax^2 + 2Ax) e^x,$$

$$\vartheta'' = (Ax^2 + 4Ax + 2A) e^x,$$

Подставив в данное уравнение вместо y , y' и y'' соответственно ϑ , ϑ' и ϑ'' , а затем разделив обе части полученного равенства на e^x , будем иметь:

$$2A = 1,$$

откуда

$$A = \frac{1}{2};$$

поэтому

$$\vartheta = \frac{x^2}{2} e^x.$$

Следовательно, искомое общее решение есть

$$y = \left(c_1 + c_2x + \frac{x^2}{2} \right) e^x.$$

3. Уравнение вида

$$L(y) = P_m(x) e^{ax} \cos bx. \quad (3)$$

Из формул Эйлера следует, что

$$\cos bx = \frac{e^{ibx} + e^{-ibx}}{2},$$

поэтому данное уравнение можно представить в виде

$$L(y) = \frac{1}{2} P_m(x) e^{(a+bi)x} + \frac{1}{2} P_m(x) e^{(a-bi)x}. \quad (3')$$

Но в этом случае, как известно, решением уравнения будет

$$y = y_1 + y_2,$$

где y_1 есть решение уравнения

$$L(y) = \frac{1}{2} P_m(x) e^{(a+bi)x},$$

а y_2 — решение уравнения

$$L(y) = \frac{1}{2} P_m(x) e^{(a-bi)x}.$$

Оба эти уравнения имеют вид уравнения (2), а поэтому y_1 и y_2 надо искать в форме

$$\begin{aligned} y_1 &= Q_m(x) e^{(a+bi)x}, \\ y_2 &= R_m(x) e^{(a-bi)x}, \end{aligned}$$

если числа $a \pm bi$ не являются корнями характеристического уравнения; если же корни характеристического уравнения будут комплексными и один из них совпадёт с числом $a + bi$, а, следовательно, другой с числом $a - bi$, то будем иметь:

$$\begin{aligned} y_1 &= x Q_m(x) e^{(a+bi)x}, \\ y_2 &= x R_m(x) e^{(a-bi)x}. \end{aligned}$$

Здесь $Q_m(x)$ и $R_m(x)$ — многочлены m -й степени, коэффициенты которых пока неопределённые. Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} Q_m(x) e^{(a+bi)x} + R_m(x) e^{(a-bi)x} &= e^{ax} [Q_m(x) e^{ibx} + R_m(x) e^{-ibx}] = \\ &= e^{ax} [Q_m(x) (\cos bx + i \sin bx) + R_m(x) (\cos bx - i \sin bx)] = \\ &= e^{ax} \{ [Q_m(x) + R_m(x)] \cos bx + i [Q_m(x) - R_m(x)] \sin bx \} = \\ &= e^{ax} [A_m(x) \cos bx + B_m(x) \sin bx], \end{aligned}$$

где $A_m(x)$ и $B_m(x)$ — опять многочлены m -й степени с неопределёнными коэффициентами.

Отсюда следует, что частное решение уравнения (3'), а значит, и уравнения (3), надо искать в форме

$$y = e^{ax} [A_m(x) \cos bx + B_m(x) \sin bx],$$

если числа $a \pm bi$ не являются корнями характеристического уравнения; если же $r_{1,2} = a \pm bi$, то частное решение уравнения (3) составляют в форме

$$y = e^{ax} [A_m(x) \cos bx + B_m(x) \sin bx] x,$$

причём многочлены $A_m(x)$ и $B_m(x)$ берутся сначала с неопределёнными коэффициентами, а затем эти коэффициенты вычисляются приёмом, аналогичным тому, которым пользовались при решении уравнения (2).

Легко заметить, что полученной формой частного решения можно пользоваться и в случае уравнения вида

$$L(y) = P_m(x) e^{ax} \sin bx. \quad (4)$$

Заметим, наконец, что уравнения

$$L(y) = P_m(x) \cos bx,$$

$$L(y) = P_m(x) \sin bx$$

являются частными видами уравнений (3) и (4), соответствующими случаю $a = 0$.

Пример. Решить уравнение

$$y'' + 4y = \cos 3x.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$r^2 + 4 = 0.$$

Решая его, находим корни

$$r_{1,2} = \pm 2i.$$

Отсюда следует, что общее решение соответствующего однородного линейного уравнения есть

$$u = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x.$$

Частное решение данного уравнения ищем в форме

$$v = A \cos 3x + B \sin 3x.$$

Множителя x здесь не надо, так как корни характеристического уравнения, хотя они и мнимые, не равны числам $\pm 3i$. Дифференцируя v , находим:

$$v' = 3B \cos 3x - 3A \sin 3x,$$

$$v'' = -9A \cos 3x - 9B \sin 3x.$$

Подставляя в данное уравнение вместо y и y'' соответственно v и v'' , получим:

$$-5A \cos 3x - 5B \sin 3x = \cos 3x,$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} -5A &= 1 \\ -5B &= 0 \end{aligned} \right\},$$

а значит,

$$A = -\frac{1}{5}, \quad B = 0,$$

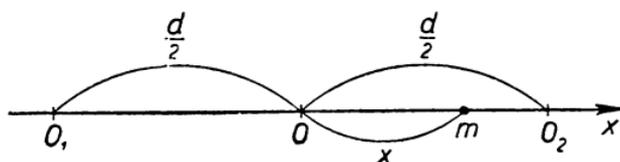
и поэтому

$$v = -\frac{1}{5} \cos 3x.$$

Следовательно, общее решение данного уравнения есть

$$y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{1}{5} \cos 3x.$$

6. Уравнение колебательного движения. Здесь мы рассмотрим задачу, которая позволит уяснить смысл однород-



Черт. 19

ного линейного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами и его решения с точки зрения механики.

Рассмотрим движение материальной точки массы m , находящейся на прямой, соединяющей два центра O_1 и O_2 , которые притягивают эту точку с силой, пропорциональной расстоянию. Коэффициент пропорциональности обозначим через $\frac{c}{2}$. Пусть сопротивление среды пропорцио-

нально скорости и b — коэффициент пропорциональности. Обозначим через x отклонение материальной точки от точки равновесия, т. е. от середины O отрезка (O_1, O_2) , считая при этом x положительным при отклонении вправо и отрицательным при отклонении влево (черт. 19). Требуется найти уравнение движения материальной точки, выведенной из положения равновесия. Для этого воспользуемся законом Ньютона, по которому произведение массы точки на ускорение равно сумме сил, действующих на материальную точку. Так как скорость есть производная пути (отклонения) по времени, т. е. $\frac{dx}{dt}$, то сила сопротивления среды равна $-b \frac{dx}{dt}$. Знак минус взят потому, что по направлению сопротивление всегда противоположно скорости. Сила притяжения центра O_1 равна $-\frac{c}{2} \left(\frac{d}{2} + x \right)$, где d — расстояние между центрами O_1 и O_2 , сила притяжения центра O_2 есть $\frac{c}{2} \left(\frac{d}{2} - x \right)$. Ясно, что эти силы противоположны по знаку. Наконец, учтем, что ускорение есть производная второго порядка от пути по времени, т. е. $\frac{d^2x}{dt^2}$. Отсюда получим

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - \frac{c}{2} \left(\frac{d}{2} + x \right) + \frac{c}{2} \left(\frac{d}{2} - x \right),$$

или

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{c}{m} x = 0.$$

Таким образом, движение материальной точки при данных условиях выражается однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Решим это уравнение. Для этого составим характеристическое уравнение

$$r^2 + \frac{b}{m} r + \frac{c}{m} = 0.$$

Найдем его корни

$$r_{1,2} = -\frac{b}{2m} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4mc}}{2m}.$$

Здесь возможны три случая.

1-й случай. Пусть $b^2 - 4mc > 0$. Тогда корни r_1 и r_2 действительные и разные, а поэтому искомого общее решение есть

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}.$$

Замечая, что в этом случае $r_1 < 0$ и $r_2 < 0$, видим, что x монотонно стремится к нулю, когда t неограниченно возрастает. Следовательно, в этом случае материальная точка, выведенная из положения равновесия, асимптотически стремится к положению равновесия. Объясняется это тем, что сопротивление среды (коэффициент сопротивления b) настолько велико: $b^2 > 4mc$, что силы притягивающих центров не могут вызвать колебательного движения.

2-й случай. Пусть $b^2 - 4mc = 0$. Тогда получим:

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{b}{2m} t}.$$

Легко заметить, что и в этом случае x монотонно стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, а поэтому характер движения материальной точки тот же, что и в первом случае. Здесь дело в том, что сопротивление среды (коэффициент b) всё ещё велико: $b^2 = 4mc$.

3-й случай. Пусть $b^2 - 4mc < 0$. Это означает, что корни характеристического уравнения комплексные:

$$r_{1,2} = \mu \pm \nu i,$$

где $\mu = -\frac{b}{2m}$ и $\nu = \frac{\sqrt{4mc - b^2}}{2m}$, а поэтому общее решение выразится соотношением

$$x = e^{-\frac{b}{2m} t} (A \cos \nu t + B \sin \nu t).$$

Взяв произвольные постоянные A и B в форме

$$A = a \cos \nu \delta, \quad B = a \sin \nu \delta,$$

где a и δ новые произвольные постоянные, общему решению придадим вид

$$x = e^{-\frac{b}{2m} t} (a \cos \nu \delta \cos \nu t + a \sin \nu \delta \sin \nu t),$$

или

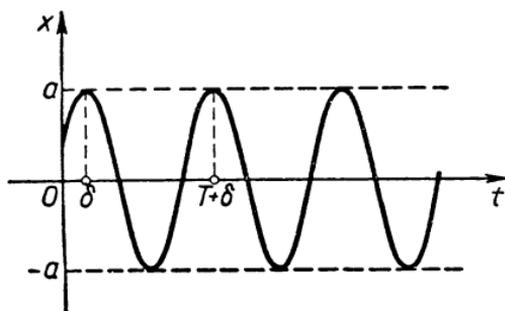
$$x = a e^{-\frac{b}{2m} t} \cos \nu (t - \delta).$$

Отсюда видно, что когда $b^2 < 4mc$, т. е. когда сопротивление среды достаточно мало, движение материальной точки представляет колебания около точки равновесия: при $t \rightarrow \infty$ x бесконечно много раз меняет свой знак.

Если $b = 0$, т. е. нет сопротивления среды, то движение материальной точки выражается уравнением

$$x = a \cos v(t - \delta)$$

и представляет *незатухающие гармонические колебания* (черт. 20), причём a есть наибольшее отклонение от точки равновесия, которое называется *амплитудой колебания*. Так как косинус есть периодическая функция, то всякое состояние точки повторяется через определённые промежутки времени T , т. е. в момент $t_1 + T$ точка будет находиться там же, где была в момент t_1 , и будет иметь



Черт. 20

то же направление движения, что и в момент t_1 . Учитывая, что период косинуса равен 2π , имеем

$$v(t_1 + T - \delta) = v(t_1 - \delta) + 2\pi,$$

откуда следует, что

$$T = \frac{2\pi}{v}.$$

T называется *периодом колебания*, а v — *частотой колебания*. Число v характеризует быстроту, с которой точка периодически возвращается в своё исходное состояние. Величина $v\delta$ называется *сдвигом фазы колебания*.

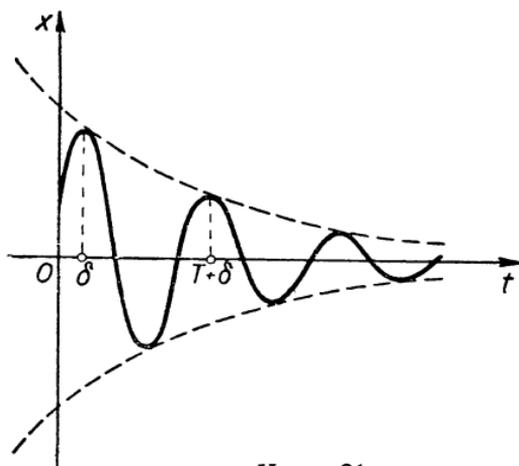
Если же $b \neq 0$, то движение материальной точки выражается уравнением

$$x = ae^{-\frac{b}{2m}t} \cos \nu(t - \delta)$$

и представляет *затухающие гармонические колебания* (черт. 21), так как амплитуда колебания в этом случае определяется функцией $ae^{-\frac{b}{2m}t}$, которая стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, причём тем быстрее, чем больше величина $\frac{b}{2m}$, называемая *логарифмическим декрементом*.

Значения постоянных a и δ определяются при помощи начальных условий, представляющих задание при некотором $t = t_0$ значений $x = x_0$ и $x' = x'_0$, т. е. начального положения точки и начальной скорости.

Если бы мы усложнили рассмотренную здесь задачу, допустив, что притягивающие центры O_1 и O_2 сами совершают движения вдоль прямой (O_1, O_2), то, выражая отклоне-



Черт. 21

нения O_1 от первоначального положения как функцию $f_1(t)$, а отклонения O_2 — как $f_2(t)$, получим уравнение

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -b \frac{dx}{dt} - \frac{c}{2} \left[\frac{d}{2} + x - f_1(t) \right] + \frac{c}{2} \left[\frac{d}{2} - x + f_2(t) \right],$$

откуда имеем:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = \frac{c}{2} [f_1(t) + f_2(t)],$$

или, обозначая $\frac{c}{2} [f_1(t) + f_2(t)]$ через $F(t)$, получим:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + cx = F(t).$$

Следовательно, при новых условиях движение материальной точки выражается неоднородным линейным уравнением.

7. О работах русских и советских математиков. Развитие важного отдела математического анализа — теории дифференциальных уравнений в значительной мере обязано трудам учёных нашей страны. Знаменитая С. В. Ковалевская, первая женщина-математик, которая долгое время была профессором Стокгольмского университета, а в 1889 г. была избрана членом-корреспондентом Российской Академии наук, получила фундаментальные результаты в вопросе о существовании решений дифференциальных уравнений с частными производными. В конце XIX и начале XX в. математиками рассматривались дифференциальные уравнения, связанные с различными вопросами физики, так называемые уравнения математической физики. Теория дифференциальных уравнений в частных производных в этот период состояла из решения различных задач, мало связанных между собой. Теперь эта теория перешла на новую, более высокую ступень развития благодаря выдающимся работам одного из крупнейших советских математиков — И. Г. Петровского, создавшего основы общей теории систем дифференциальных уравнений.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

	<i>Стр.</i>
<i>Предисловие</i>	2
Глава I. Множества	3
1. Понятие множества	3
2. Мощность множества	4
3. Кардинальные числа	6
4. Сравнение мощностей	6
5. Счётные множества	8
Глава 2. Множество действительных чисел	11
1. Иррациональные числа	11
2. Упорядоченность множества действительных чисел	15
3. Плотность множества действительных чисел	16
4. Непрерывность множества действительных чисел	16
5. Континуум	18
6. Точечные множества	21
7. О работах советских математиков	24
Глава III. Числовая последовательность	25
1. Предел последовательности	25
2. Монотонные последовательности	27
3. Число e	28
4. Последовательность стягивающихся сегментов	29
5. Предельные точки последовательностей	30
6. Второе определение предела последовательности	33
7. Критерий Коши	35
Глава IV. Функции	39
1. Понятие функции	39
2. Предел функции	40
3. Два замечательных предела	45
4. Непрерывность функции	49
5. Свойства непрерывных функций	50
6. Равномерная непрерывность	57
7. О работах русских и советских математиков	62
Глава V. Производная и дифференциал	64
1. Производная функции	64
2. Геометрический смысл производной	66

3. Физический смысл производной	67
4. Правила для вычисления производных	68
5. Производные элементарных функций	69
6. Дифференциал функции	72
7. Основные теоремы дифференциального исчисления	76
8. Приближённые значения элементарных функций	79
9. Условия монотонности функции	81
10. Экстремумы функций	83
11. Необходимые условия экстремума	84
12. Достаточные условия максимума и минимума	86
13. О работах русских и советских математиков	91
Глава VI. Интеграл	92
1. Теорема Дарбу	92
2. Верхний и нижний интегралы. Определённый интеграл Римана	96
3. Условия интегрируемости	97
4. Основные классы интегрируемых функций	99
5. Вычисление определённого интеграла	104
6. Геометрический смысл определённого интеграла	105
7. Понятие длины кривой	107
8. О работах русских и советских математиков	110
Глава VII. Ряды	112
1. Числовой ряд	112
2. Необходимое и достаточное условие сходимости	114
3. Абсолютная и условная сходимость	116
4. Принцип сравнения рядов	122
5. Признак Даламбера	123
6. Функциональные ряды	125
7. Степенные ряды	129
8. Ряд Тейлора	132
9. Составление таблиц логарифмов	135
10. Разложение бинорма	139
11. О работах советских математиков	141
Глава VIII. Дифференциальные уравнения	142
1. Основные понятия	142
2. Однородные линейные уравнения	144
3. Неоднородные линейные уравнения	148
4. Однородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами	149
5. Неоднородные линейные уравнения с постоянными коэффициентами	153
6. Уравнение колебательного движения	160
7. О работах русских и советских математиков	165

Николай Андрианович Фрелов
Основы математического анализа

Редактор *А. В. Игнатьева*

Технический редактор *Н. Н. Махова*

Корректор *А. А. Журавлёв*

Сдано в набор 9/V 1955 г. Подписано к печати
23 VII 1955 г. 84×108^{1/32} П л 10.5 (8.61)
Уч.-изд. л. 7.06. Тираж 20 тыс. экз А03764.

* * *

Учпедгиз, Москва, Чистые пруды, 6 Заказ № 949

16-я типография Главполиграфпрома
Министерства культуры СССР
Москва, Трёхпрудный пер., д. 9.

Цена 2 руб. 10 коп.