СБОРНИК
ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ К 28 МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1965

СБОРНИК ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ К 28-й МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1965

В марте — апреле 1965 г. Московский городской отдел народного образования, Московский городской институт усовершенствования учителей, Московский государственный университет, Московский городской Дворец пионеров и Московское математическое общество проводят традиционную, 28-ю математическую олимпиаду. В олимпиаде могут участвовать школьники 5—11 классов. Точные сроки олимпиады будут объявлены позднее.

Задачи олимпиады, кроме прочного знания школьного курса математики, требуют смекалки и сообразительности (особенно в старших классах). Поэтому, чтобы помочь школьнику в подготовке к олимпиаде, выпускается настоящий сборник. Школьникам, интересующимся математикой, можно также порекомендовать книги из серии «Библиотека математического кружка».

Задачи нашего сборника распределены по темам. После названия каждой темы (а в первой теме — после номера каждой задачи) в скобках указано, начиная с какого класса доступны эти задачи. Однако это деление задач по классам является условным: не исключено, что школьник младшего класса сможет решать задачи, отнесенные к более старшим классам. И во всяком случае старшеклассник должен порешать задачи младших классов.

В конце приведены задачи прошлогодней олимпиады (они по трудности соответствуют заключительным турам 28 олимпиады, в которых участвуют лишь школьники старших классов).

2 Зак. 478

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

1) (8) Прямоугольный участок требуется с трех сторон огородить забором длиной 300 *м*. Какую наибольшую площадь он может иметь?

2) (7) Уравнение $ax+by=ab$, где a и b — взаимно просты, не имеет решений в целых числах.

3) (5) Выписаны все целые числа подряд: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12.... Какая цифра стоит на 1965-м месте?

4) (7) Доказать, что дробь 0, 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 ... (после нуля выписаны подряд все целые числа) непериодическая.

5) (8) Найти 81-й знак после занятой числа $\sqrt{0,\underbrace{99\ldots9}_{81\text{ раз}}}$.

6) (7) Каких чисел больше среди первых 10^{10} натуральных чисел: таких, в записи которых есть единица, или таких, в записи которых ее нет?

7) (9) Вычислить сумму $7+77+777+\ldots+\underbrace{7\ldots7}_{n\text{ раз}}$.

8) (9) Доказать, что если $a+b=1$, то $a^4+b^4\geqslant\frac{1}{8}$.

9) (8) Доказать, что уравнение $15x^2-7y^2=9$ не решается в целых числах.

10) (7) На клетках бесконечной шахматной доски написаны положительные числа; каждое равно среднему арифметическому четырех своих соседей. Доказать, что все числа равны.

11) (5) Можно ли замостить шахматную доску, из которой вырезаны две клетки (a 1) и (h 8), костями домино, каждая из которых покрывает ровно две клетки?

12) (5) Обозначим через $M(a, b)$ наименьшее общее кратное чисел a и b, через $N(a, b)$ наибольший общий делитель. Доказать, что $ab=M(a,b)\,N(a,b)$.

13) (5) Число $\underbrace{11\ldots1}_{2n}-\underbrace{22\ldots2}_{n}$ — точный квадрат при любом n.

14) (10) Доказать, что для любого набора цифр конечной длины найдется такое целое число n, что 2^n начинается заданным набором.

15) (10) В каждой клетке бесконечного листа клетчатой бумаги сидит одинаковый и одинаково расположенный заяц. Один узел отметим, и из него стреляет охотник (пуля летит по прямой на бумаге).

Доказать, что охотник подстрелит зайца, даже если он очень плохо стреляет.

16) (5) $a_1, a_2, \ldots, a_m, \ldots, a_n$ — положительные числа.

Что больше: $1+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ldots+\cfrac{1}{a_m}}}}$ или

$\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ldots+\cfrac{1}{a_n}}}}$?

17) (5) Найти сумму $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!$, где $k!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\ \ldots\ \cdot(k-1)k$.

18) (8) Доказать, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ иррационально.

19) (9) Если уравнения с целыми коэффициентами

$$x^2+p_1x+q_1=0,$$

$$x^2+p_2x+q_2=0$$

имеют общий нецелый корень, то $p_1=p_2$ и $q_1=q_2$.

20) (5) Как должна двигаться ладья по шахматной доске, чтобы побывать на каждом поле ровно по разу и сделать наименьшее число поворотов?

21) (5) По шахматной доске двигается ладья. Может ли она вернуться в ту клетку, откуда начала движение, побывав на каждой клетке ровно 1 раз?

22) (7) Найти все целые числа m, для которых сумма $1!+2!+\ldots+m!$ является точным квадратом.

23) (5) Замкнутая самопересекающаяся ломаная пересекает каждое свое звено ровно 1 раз. Доказать, что число ее звеньев четно.

24) (9) Существует ли целое число p, что число $\dfrac{n!}{2^{n-p}}$ целое при всех n?

25) (7) Найти все точки на земном шаре, такие, что если пройти из них 10 *км* на юг, затем 10 *км* на запад и 10 *км* на север, вы снова в них возвращаетесь. (Примечание. Таких точек бесконечно много.)

26) (8) Если $\frac{a}{b}$ — правильная дробь, она может быть представлена в виде $\frac{a}{b} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_1 q_2} + \frac{1}{q_1 q_2 q_3} + \ldots + \frac{1}{q_1 q_2 \ldots q_n}$, где $q_1, \ldots, q_n$ — целые числа, большие единицы. Доказать.

27) (5) Если две последние цифры целого числа нечетны, то это число не является точным квадратом.

28) (5) Доказать, что Москву можно обойти, проходя по всем улицам ровно 2 раза.

29) (5) Числа от 1 до 101 выписаны в произвольном порядке. Доказать, что из них можно выбрать 11 так, чтобы они следовали друг за другом в порядке возрастания или убывания.

30) (5) Сколько раз в сутки стрелки часов сливаются?

31) (8) Сколько решений в целых числах имеет неравенство $|x| + |y| \leqslant 100$ ($|x| = x$ при $x \geqslant 0$ и $|x| = -x$ при $x < 0$).

32) (8) Если $x+y=u+v$ и $x^2+y^2=u^2+v^2$ то $x^n+y^n=u^n+v^n$ (x, y, u, v — любые действительные числа).

33) (8) Если $a + \frac{1}{a}$ — целое число, то $a^n + \frac{1}{a^n}$ — также целое (a — любое положительное число).

34) (9) Среди членов арифметической прогрессии с целым 1-м членом и целой разностью найдется такой, десятичная запись которого начинается с единицы.

35) (8) Если a, $a+d$, $a+2d$, ..., $a+(n-1)\,d$ взаимно просты с n, то d не взаимно просто с n.

36) (9) Дана прямоугольная числовая таблица (матрица) $m \times n$. Одним ходом можно менять знаки всех чисел в каком-нибудь столбце или какой-нибудь строке.

Доказать, что за несколько ходов можно добиться того, чтобы сумма чисел любой строки и любого столбца была неотрицательна.

37) (10) В клетках таблицы 1965×1965 расставлены числа от 1 до 1965 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце каждое число встречается один раз. Кроме того, таблица симметрична относительно главной диагонали, т. е. на пересечении столбца номер m и строки номер n стоит то же число, что и на пересечении столбца n и строки m.

Доказать, что на диагонали таблицы все числа от 1 до 1965 встретятся ровно по одному разу.

38) (8) Линия называется уникурсальной, если ее можно начертить, не отрывая пера от бумаги и не проходя два раза один и тот же участок.

Доказать, что линия уникурсальная тогда и только тогда, когда число тех ее узлов, из которых выходит нечетное число кривых, не превосходит двух.

39) (8) У любой линии число узлов, из которых выходит нечетное число кривых, четно.

40) (7) Можно ли каждый из 77 телефонов соединить ровно с 15 другими?

41) (6) Не существует целых чисел, которые увеличивались бы вдвое от перестановки начальной цифры в конец. Доказать.

42) (5) Доказать, что любое целое число рублей, большее семи, можно уплатить без сдачи денежными билетами по 3 и 5 рублей.

43) (5) По кругу выписаны p плюсов и q минусов. Пусть r — число пар рядом стоящих полюсов, а s — число пар стоящих рядом минусов.

Доказать, что $r-s=p-q$.

44) (8) Найти сумму коэффициентов многочлена

$$(7x^3-13y^2+3x+4)^{1964}(y^3-8y^2+by+z)+(2x^2+18y^2-21)^{1965}.$$

45) (9) Если многочлен с целыми коэффициентами

$$p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$$

при $x=0$ и $x=1$ принимает нечетные значения, то уравнение $p(x)=0$ не имеет целочисленных решений.

46) (9) Из числа 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ... 9 8 9 9 1 0 0 вычерпнуть 100 цифр так, чтобы оставшееся число было наибольшим.

47) (10) Доказать, что $\cos\sqrt{2}x+\cos x$ — непериодическая функция.

48) (10) Сколькими способами можно разбить на 3 множителя число 10 000? (способы, получившиеся друг из друга перестановкой множителей, мы не различаем).

49) (6) Шестизначное число начинается с 1; если ее перенести на последнее место, число увеличится в 3 раза. Найти все такие числа.

50) (5) 30 студентов с пяти курсов придумали 40 задач для математической олимпиады, причем однокурсники придумали одинаковое число задач, а студенты с разных курсов — разное. Сколько студентов придумало ровно одну задачу?

51) (7) В клетках таблицы 7×7 записаны числа от 1 до 49

1	2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13	14
. .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
43	44	45	46	47	48	49

Выбирают одно число и вычеркивают строку и столбец, в которых оно стоит, затем выбирают еще одно число и т. д. Найти сумму всех выбранных чисел.

52) (9) На бесконечной шахматной доске стоит конь с ходом $1\times n$, т. е. он ходит на 1 клетку по вертикали и n по горизонтали или на 1 по горизонтали и n по вертикали (ход обычного коня —

1×3). При каких n он может пройти с данной клетки на любую другую?

53) (8) Доску размером $4\times n$ нельзя обойти ходом шахматного коня, побывав на каждой клетке по разу.

54) (8) Какие целые суммы денег можно уплатить как четным, так и нечетным числом денежных билетов достоинством в 1, 3, 5 и 10 рублей?

55) (8) В клетках таблицы 7×7 стоят числа $+1$ или -1. Берутся произведения чисел стоящих в каждом столбце и каждой строке. Сумма их не может быть равна нулю. Доказать.

56) (8) В таблице $m\times n$ числа расставлены таким образом, что сумма чисел строки, умноженная на сумму чисел столбца, равна числу, стоящему на их пересечении. Доказать, что сумма всех чисел таблицы равна 1.

57) (6) В классе 31 ученик, всем вместе 434 года. Можно ли выбрать 20 учеников, которым вместе не меньше 280 лет?

58) (9) В квадрате проведены диагонали, затем его разделили на 4 равных квадрата и снова провели диагонали, и так n раз. В момент времени $t=0$ в двух разных узлах оказались кошка и мышь. Кошка стала гоняться за мышью со скоростью $5\,v$ по сторонам квадратов, а мышь — убегать по диагоналям со скоростью v. Ни одна не может повернуть назад, не добежав до узла. Сможет ли кошка поймать мышь?

59) (7) Существует ли натуральное число a, такое, что $\frac{a}{2}$ — точный квадрат, $\frac{a}{3}$ — куб и $\frac{a}{5}$ — 5-я степень?

60) (9) Посылку можно послать, если сумма ее длины плюс площадь поперечного сечения не больше 72. Каким должно быть квадратное окно, в которое можно принимать эти посылки?

61) (9) Груз весом 13,5 *т* упакован в некоторое число ящиков. Вес каждого ящика не превосходит 350 *кг*. Доказать, что этот груз можно перевезти на 11 полуторатонках.

62) (10) Будем рассматривать последовательности из конечного числа букв русского алфавита. Пусть каким-либо образом эти последовательности разбиты на 2 сорта: «хорошие» и «плохие». Возьмем любую бесконечную последовательность букв.

Доказать, что можно, отбросив какое-то количество букв в начале этой последовательности, разбить остальную часть ее на конечные куски так, что либо все эти куски будут одновременно «плохими», либо все «хорошими» словами.

63) Существует ли такое множество точек на окружности, которое при повороте окружности на а) 1 градус б) 1 радиан «прячется в себя», т. е. переходит в свою часть?

64) (10) В турнире собираются принять участие 25 шахматистов. Все они играют в разную силу, и при встрече всегда побеждает

сильнейший. Какое наименьшее число партий требуется, чтобы определить двух сильнейших игроков (не обязательно узнавать, кто из них сильнее).

65) (10) На n карточках написаны с разных сторон числа: на первой — 0 и 1, на второй — 1 и 2, ... На n-й — $n-1$ и n. Один человек берет из стопки несколько карточек и показывает второму одну сторону каждой из них. Затем берет из стопки еще одну карточку и тоже показывает одну сторону.

Указать все случаи, при которых второй может определить число, написанное на обороте последней показанной ему карточки.

66) (10) Двое играют в такую игру. Один задумывает число, лежащее между единицей и тысячью (включительно), а другой угадывает его, задавая первому вопросы вида: «Содержится ли это число среди таких — то?» (Например, среди чисел от 1 до 500 включительно, среди четных чисел, среди чисел от 1 до 200, от 500 до 600 или от 955 до 957?). Первый имеет право дать один неправильный ответ.

Доказать, что второй может угадать число за

а) 21 вопрос,
б) 15 вопросов,
в) 14 вопросов.

67) (8) На необитаемом острове пират зарыл клад, руководствуясь следующими построениями. Пусть A, B — два камня, C_1, C_2, C_3—три пальмы. Построим точку A_1 так: $A_1C_1=AC_1$, $\angle AC_1A_1=90°$ и точку B так: $B_1C_1=BC_1$, $\angle BC_1B_1=90°$. Построим точку пересечения отрезков A_1B и AB_1 и обозначим ее P_1. В центре окружности, проведенной через P_1, P_2 и P_3 (точки P_2 и P_3 строятся также как P_1, только с использованием соответственно пальм C_2 и C_3) и был зарыт клад. Когда пират вернулся на остров, пальмы снесло штормом. Но все же он сумел найти клад. Как?

68) (8) Пятьдесят из клеток обыкновенной шахматной доски пронумерованы целыми числами 1, 2, 3, ..., 49, 50. На доске стоят 50 шашек, которые также перенумерованы. Каждая шашка стоит или на пустом поле, или на поле с номером, который может совпадать или не совпадать с номером шашки. На одном поле стоит не более одной шашки. За один ход можно одну шашку переставить на любое свободное место.

Доказать, что для того чтобы все шашки поставить на свои места, потребуется не больше 75 ходов.

69) (8) На 25 полях, расположенных в ряд, стоят в произвольном порядке 24 фишки, на которых написаны номера 1, 2, ..., 24, одно поле свободно. За один ход разрешается любую фишку переставить на свободное поле.

Доказать, что за 36 таких ходов можно расставить фишки в порядке номеров. Придумать пример начального расположения, при котором за 35 ходов это сделать нельзя.

70) (9) В таблицу из m строк и n столбцов записаны произвольные числа. Разрешается изменять знак одновременно у всех чисел одной строки или одного столбца.

Доказать, что повторив эту операцию несколько раз, можно добиться того, что сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце таблицы будет положительна или равна 0.

ЗАДАЧИ НА «ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ» (5—11)

Принцип Дирихле можно формулировать так: если в n ящиках находится $n+1$ предмет, то обязательно найдутся два предмета, лежащие в одном ящике.

1) В Москве 7 млн. жителей, на голове у каждого не более 400 тыс. волос. Доказать, что найдутся два москвича с одинаковым числом волос на голове.

2) Доказать, что из 73 различных натуральных чисел можно выбрать два, разность которых делится на 72.

3) Доказать, что из 100 целых чисел можно выбрать несколько, сумма которых делится на 100.

4) Из 52 чисел можно выбрать два таких, что либо их сумма либо их разность делится на 100. Доказать.

5) Доказать, что для любого натурального числа n найдется число, делящееся на n, в десятичной записи которого участвуют только нули и единицы.

6) Найдется степень числа 29, оканчивающаяся цифрами 00001.

7) Три женщины купили к празднику кусок мяса весом 9 *кг* и стали его делить. Первая разделила его на три части и сказала, что, по ее мнению, они одинаковы. Вторая взвесила их на своих весах и получила, что куски весят соответственно 2,5 *кг*, 3 *кг* и 3,5 *кг*. Третья не согласилась ни с одной из них. Как им разделить между собой куски, ничего не отрезая от них (каждая будет довольна, если получит кусок, составляющий, по ее мнению, не менее трети всего мяса).

ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ (8—11)

Большое количество интересных сведений, связанных с геометрией на плоскости, можно найти в книгах: И. М. Яглом и А. М. Яглом «Геометрические преобразования», тт. 1, 2; Шклярский и др. «Избранные задачи и теоремы элементарной математики», ч. 2; И. Александров «Геометрические задачи на построение и методы их решения».

1) На окружности взяты произвольно 4 точки A, B, C, D. Рассмотрим середины образовавшихся 4-х дуг M, N, P, Q. Доказать, что среди отрезков, соединяющих точки M, N, P, Q есть 2 перпендикулярных между собой.

2) Вершины произвольного выпуклого пятиугольника соединены через одну. Доказать, что сумма пяти углов при вершинах полученной пятиконечной звезды равна 180°.

3) В треугольник ABC вписано 3 квадрата: у одного — две вершины лежат на стороне AB, у другого — на стороне BC, у третьего—на стороне AC. Оказалось, что все 3 квадрата равны. Доказать, что треугольник ABC — равносторонний.

4) 6 кругов расположены на плоскости так, что некоторая точка O лежит внутри каждого из них. Доказать, что один из этих кругов содержит центр некоторого другого.

5) В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке K, KH — диаметр вписанной окружности, P — точка пересечения прямых CH и AB. Доказать, что $AK=PB$.

6) На сторонах AB и BC данного треугольника ABC построить точки X и Y, такие, что $AX=XY=YC$.

7) Разбить прямоугольник:

а) на 6 попарно неподобных прямоугольных треугольников,

б) на 5 попарно неподобных прямоугольных треугольников.

8) Дан треугольник ABC. Построить точку M так, чтобы четырехугольник $ABCM$ был одновременно вписанным и описанным.

9) а) Разбить 2 данных квадрата на такие части, чтобы из них можно было сложить один квадрат.

б) Та же задача для 10 данных квадратов.

10) Все стороны пространственного четырехугольника касаются некоторой сферы. Доказать, что 4 точки касания лежат в одной плоскости.

11) Дана точка A и угол BCD на плоскости. Провести через A прямую, отсекающую от угла треугольник данного периметра.

12) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Середины его сторон обозначим через M, N, P, Q соответственно. Доказать, что отрезки AC, BD, MP, NQ пересекаются в одной точке.

13) Построить окружность, проходящую через данную точку A и касающуюся данной прямой l в точке B.

14) Доказать, что в произвольном треугольнике ABC биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины, что и биссектриса.

15) Зафиксируем на окружности точки A и B, а точку C будем перемещать по окружности. Найти г. м. т. точек пересечения:

а) медиан треугольника ABC,

б) биссектрис треугольника ABC,

в) высот треугольника ABC.

16) В некотором треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные из одной вершины, делят угол при вершине на 4 равные части. Найти углы треугольника ABC.

17) Даны 2 пересекающиеся окружности. Провести через точку пересечения прямую так, чтобы хорды, высекаемые на ней окружностями, были равны.

18) Известно, что диагонали выпуклого шестиугольника $ABCDEF$, соединяющие вершины A и D, B и E, C и F, делят его площадь пополам.

Доказать, что эти диагонали пересекаются в одной точке.

19) На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты: $ABFS$ и $BCDK$. Доказать, что продолжение медианы BE треугольника ABC является высотой в треугольнике BFK.

20) Доказать, что если отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон четырехугольника, равен полусумме двух других сторон, то этот четырехугольник — трапеция.

21) Сумма углов при основании трапеции 90°. Доказать, что длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна их полуразности.

22) Доказать, что в произвольном треугольнике биссектриса делит пополам угол между высотой и радиусом описанного круга, проведенного в ту же вершину.

23) Восстановить треугольник по центру тяжести и серединам 2-х его средних линий.

24) Построить треугольник, если дана прямая, на которой лежит его основание и 2 точки, являющиеся основаниями высот, опущенных на боковые стороны.

25) Дана прямая l и точки A и B. Найти точку X на прямой, чтобы:

а) $AX+BX$ была наименьшей возможной;

б) $|AX-BX|$ была наибольшей возможной.

26) По одну сторону от прямой AB даны точки M и N. Найти на прямой точку X такую, чтобы $2\angle MXA=\angle NXB$.

27) Доказать, что выпуклый тринадцатиугольник нельзя разрезать на параллелограммы. Можно ли найти невыпуклый тринадцатиугольник, для которого это не верно?

28) Выпуклый четырехугольник с площадью больше $\frac{1}{2}$ заключен в квадрат со стороной 1. Доказать, что найдется отрезок с концами на границе четырехугольника, параллельный данной стороне квадрата и длины больше $\frac{1}{2}$.

29) Параллелограмм разбит на 4 части прямыми, параллельными сторонами и проходящими через точку A диагонали. Доказать, что части, расположенные по разные стороны от диагонали, равновелики.

30) На плоскости даны 27 точек, причем известно, что среди любых трех из них найдутся 2 такие, что расстояние между ними меньше 1. Доказать, что существует круг радиуса 1, внутри которого находится не менее 14 данных точек.

31) В треугольнике ABC взята произвольная точка O. Построены точки A', B', C', симметричные с точкой O относительно середин сторон BC, AC, AB. Доказать:

а) треугольник $A'B'C'$=треугольнику ABC.

б) Прямые AA', BB', CC' пересекаются в одной точке.

32) На сторонах BC и AB треугольника ABC откладываются равные отрезки произвольной длины AD и CE. Найти геометрическое место середины отрезков DE.

33) Построить прямоугольный треугольник по радиусам вписанной и описанной окружностей.

34) Дан угол и точка внутри его. Провести через эту точку прямую, отсекающую от сторон угла треугольник наименьшей площади.

35) Концы отрезка постоянной длины скользят по сторонам прямого угла. Какую линию при этом описывает его середина?

36) В треугольник вписаны окружность, вокруг нее описан квадрат. Доказать, что внутри треугольника находится больше половины периметра квадрата.

37) Дана полуокружность AB. Пусть X — точка на этой полуокружности. На полупрямой XA строим точку Y так, чтобы $XY=XB$. Найти г. м. точек Y, когда точка X пробегает все точки полуокружности.

38) Построить треугольник ABC, если даны длины высот, опущенных из точек A и B и длина медианы, проведенной из точки A.

39) Построить треугольник ABC, если известны точки пересечения его описанной окружности с высотой, медианой и биссектрисой, проведенными из вершины A.

40) Внутри квадрата дана точка O. Всякая прямая, проходящая через O, разрезает квадрат на 2 части. Провести прямую через точку O так, чтобы разность площадей этих двух частей была наибольшей.

ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ С ОГРАНИЧЕННЫМИ СРЕДСТВАМИ (8—11)

Под этими задачами понимаются такие, в которых построения производятся не циркулем с произвольным раствором и линейкой, как обычно в задачах на построение, а одной линейкой, одним циркулем, циркулем с постоянным раствором (т. е. можно проводить окружности только одного радиуса), двусторонней линейкой (т. е. можно проводить 2 параллельные прямые, расстояние между которыми нельзя менять) и т. д. Задачи этого типа можно найти в литературе, указанной к разделу планиметрии, а также в брошюрах «Линейка в геометрических построениях» Смогоржевского и «Геометрические построения одним циркулем» Костовского.

1) Даны 2 параллельных отрезка AB и CD. С помощью обычной линейки разделить их пополам.

2) Пользуясь только двусторонней линейкой:

а) разделить угол пополам;

б) провести через данную точку прямую, параллельную данной прямой;

в) опустить из данной точки перпендикуляр на данную прямую.

3) Дана окружность с центром. С помощью обычной линейки разделить данный отрезок пополам.

4) Пользуясь одним циркулем, построить точку пересечения

а) двух прямых,

б) прямой и окружности (считается, что прямая задана двумя своими точками).

Примечание. Из результата этой задачи вытекает, что любое построение, осуществимое циркулем и линейкой, можно выполнить одним циркулем.

5) Дана окружность и ее диаметр. Опустить из данной на плоскости точки перпендикуляр на этот диаметр (пользуясь только обычной линейкой).

6) Построить циркулем и линейкой биссектрису угла, вершина которого недоступна.

ЗАДАЧИ НА ДЕЛИМОСТЬ (5—11)

1) Доказать, что при простом $p>3$ число p^2-1 делится на 24.

2) Найти все целые l, при которых дробь $\frac{5l+6}{8l+7}$ сократима.

3) Доказать, что не существует двух различных 7-значных чисел, записываемых цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 в каком-то порядке, одно из которых делится на другое.

4) Делится ли число $\underbrace{111\ \ldots\ 111}_{81 \text{ цифра}}$ на 81?

5) Найти число N такое, что N^6 составлено из цифр 0, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 8, 9.

6) Доказать, что всякое целое число можно единственным способом записать в виде $a_1 \cdot 1! + a_2 \cdot 2! + \ldots + a_n \cdot n!$, где $0 \leqslant a_i \leqslant i$. $[n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n-1)n]$.

7) Как надо расположить цифры 0, 1, 2 ..., 9 на месте звездочек в числе

$5 * 383 * 8 * 2 * 936 * 5 * 8 * 203 * 9 * 3 * 76$, чтобы полученное число делилось на 396?

8) Остаток от деления простого числа на 30 — простое число. Доказать.

9) Найти все двузначные числа, которые делятся на произведение своих цифр.

10) Доказать, что n-значное число всегда больше произведения своих цифр ($n>1$).

11) Одна из цифр многозначного числа 0. При вычеркивании этого нуля число уменьшается в 9 раз.

а) На каком месте стоит этот нуль?

б) Найти все числа, удовлетворяющие условиям задачи.

12) Доказать, что число, записываемое с помощью 300 единиц и любого числа нулей, не может быть точным квадратом.

13) Доказать, что произведение четырех последовательных натуральных чисел, увеличенное на 1, всегда является квадратом целого числа.

14) Дана последовательность целых чисел $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Доказать, что произведение всех дробей вида
$\frac{a_i - a_j}{i-j}$, где $i > j$, — целое число.

15) Числа от 1 до 1964 выписаны подряд: 1234... 1962, 1963, 1964. Умножим первую цифру на 2, прибавим к произведению вторую цифру; полученное число опять умножим на 2, к произведению прибавим третью цифру и т. д.; наконец, прибавим последнюю цифру. С полученным числом проделаем то же самое, с результатом опять, и т. д., пока не получим однозначное число. Чему будет равно это число?

16) Какой остаток дает число 2^{100} при делении на 7?

17) Делится ли $2222^{5555} + 5555^{2222}$ на 7?

18) Доказать, что при любом целом положительном n и нечетном положительном $к$ сумма $1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k$ делится на $1 + 2 + \ldots + n$.

19) Доказать, что для любого целого n найдется такое целое x, что число $nx+1$ составное.

20) Доказать, что если общий наибольший делитель чисел a и b равен d, то найдутся такие целые k и l, что $ak + bl = d$.

ЗАДАЧИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ (9—11)

1) Доказать, что выпуклое тело, не являющееся шаром, не может иметь двух осей вращения (тело предполагается ограниченным, т. е. лежащим в конечном куске пространства).

2) Существует ли многогранник, все сечения которого треугольники?

3) Дан правильный тетраэдр $ABCD$ и точка внутри него. P, Q, R, S — проекции этой точки на высоты тетраэдра (т. е. перпендикуляры, опущенные из вершины на грани).

Доказать, что сумма $AP + BQ + RC + DS$ не зависит от выбора точки.

4) Дан тетраэдр $ABCD$. На его ребрах AB, AC и AD отмечаются точки M, P, Q, такие, что $AB = n \cdot AM$; $AC = (n+1) \cdot AP$; $AD = (n+2) \cdot AQ$. Плоскость, проведенная через M, P, Q обозначается P_n.

Доказать, что все плоскости P_1, P_2, ..., P_n, ... проходят через одну прямую.

5) Сумма квадратов расстояний вершин куба до любой прямой, проходящей через его центр, одна и та же. Доказать.

6) Каждый тетраэдр можно пересечь ровно тремя плоскостями так, чтобы в сечении получился ромб. Доказать это и то, что

а) если получившиеся три ромба подобны, то у тетраэдра все грани равны;

б) если эти ромбы суть квадраты, то тетраэдр правильный.

7) Дан тетраэдр. Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы его можно было разрезать плоскостью так, что из полученных кусков снова можно было сложить тетраэдр, приложив их другим способом (секущая плоскость пересекает тетраэдр по треугольнику).

8) Доказать, что не более одной вершины тетраэдра обладает тем свойством, что сумма любых двух плоских углов при этой вершине больше 180°.

ЗАДАЧИ 27-й МОСКОВСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

I тур

7 класс

1) В треугольнике ABC высоты, опущенные на стороны AB и BC, не меньше этих сторон соответственно. Найти углы треугольника.

2) На данной окружности выбраны диаметрально противоположные точки A и B и третья точка C. Касательная, проведенная к окружности в точке A, и прямая BC пересекаются в точке M.

Доказать, что касательная, проведенная к окружности в точке C, делит пополам отрезок AM.

3) Доказать, что сумма цифр числа, являющегося точным квадратом, не может равняться пяти.

4) На листе бумаги проведено 11 горизонтальных и 11 вертикальных прямых, точки пересечения которых называются «узлами», «звеном» мы будем называть отрезок прямой, соединяющий два соседних узла одной прямой. Какое наименьшее число звеньев надо стереть, чтобы после этого в каждом узле сходилось не более трех звеньев?

5) Последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ образована по закону: $a_0=a_1=1$; $a_{n+1}=a_n \cdot a_{n-1}+1$.

Доказать, что число a_{1964} не делится на 4.

8 класс

1) См. задачу № 1 для 7 класса.

2) Найти все такие натуральные числа n, что число $(n-1)!$ не делится на n^2.

3) Решить в целых числах уравнение: $\underbrace{\sqrt{n+\sqrt{n+\ldots\sqrt{n}}}}_{1964\text{ раза}}=m.$

4) В шестиугольнике $ABCDEF$ все углы равны.

Доказать, что длины сторон такого шестиугольника удовлетворяют соотношениям: $a_1—a_4=a_5—a_2=a_3—a_6$.

5) Рассмотрим суммы цифр всех чисел от 1 до 1 000 000 включительно. У полученных чисел снова рассмотрим сумму цифр и так далее, пока не получим миллион однозначных чисел. Каких чисел больше среди них — единицы или двоек?

9 класс

1) Решить в положительных числах систему:

$$x^y = z$$
$$y^z = x$$
$$z^x = y$$

2) Доказать, что произведение двух последовательных натуральных чисел не является степенью никакого целого числа.

3) Известно, что при любом целом $K \neq 27$ число $a—K^3$ делится без остатка на $27—K$. Найти a.

См. задачу № 4 для 8 класса. Кроме того, доказать, что если длины отрезков $a_1, \ldots, a_6$ удовлетворяют соотношениям $a_1—a_4=$ $=a_5—a_2=a_3—a_6$, то из этих отрезков можно построить равноугольный шестиугольник.

5) В четырехугольнике $ABCD$ из вершин A и C проведены перпендикуляры на диагональ BD, а из вершин B и D проведены перпендикуляры на диагональ AC. Доказать, что четырехугольники $ABCD$ и $MNPQ$ подобны. M, N, P, Q — основания перпендикуляров.

10—11 классы

1) Число N является точным квадратом и не оканчивается нулем. После зачеркивания у этого числа двух последних цифр снова получится точный квадрат. Найти наибольшее число N с таким свойством.

2) См. задачу № 3 для 8 класса.

3) Известно, что при любом целом $K \neq 27$ число $a—K^{1964}$ делится без остатка на $27—K$. Найти a (ср. задачу № 3 для 9 класса).

4) См. задачу № 4 для 8 класса.

5) На какое наименьшее число непересекающихся тетраэдров можно разбить куб?

II тур

7 класс

1) На отрезке AB выбрана произвольно точка C и на отрезках AB, AC и BC, как на диаметрах, построены окружности $O_1 O_2$ и O_3. Через точку C проводится произвольная прямая, пересекающая

окружность O_1 в точках P и Q, а окружности O_2 и O_3 в точках R и S соответственно. Доказать, что $PR = QS$.

2) Собрались $2n$ человек, каждый из которых знаком не менее чем с n присутствующими. Доказать, что можно выбрать из них четырех человек и рассадить их за круглым столом так, что при этом каждый будет сидеть рядом со своими знакомыми ($n \geqslant 2$).

3) В квадрате со стороны длины 1 выбрано 102 точки, из которых никакие три не лежат на одной прямой. Доказать, что найдется треугольник с вершинами в этих точках, площадь которого меньше, чем $^1/_{100}$.

4) Через противоположные вершины A и C четырехугольника $ABCD$ проведена окружность, пересекающая стороны AB, BC, CD и AD соответственно в точках M, N, P и Q. Известно, что $BM = BN = DP = OQ$, где R — радиус окружности.

Доказать, что в таком случае сумма углов B и D данного четырехугольника равна 120°.

5) При каких натуральных a существуют такие натуральные числа x и y, что $(x+y)^2 + 3x + y = 2a$?

8 класс

1) В n стаканах достаточно большой вместительности налито поровну воды. Разрешается переливать из любого стакана в любой другой столько воды, сколько имеется в этом последнем. При каких n можно в конечное число шагов слить воду в один стакан?

2) Даны три точки A, B, C, лежащие на одной прямой, и точка O вне этой прямой. Обозначим через O_1, O_2, O_3 центры окружностей, описанных около треугольников OAB, OAC, OBC. Доказать, что точки O_1, O_2, O_3 лежат на одной окружности.

3) На квадратном поле размерами 99×99, разграфленном на клетки размерами 1×1, играют двое. Первый игрок ставит крестик на центр поля; вслед за этим второй игрок может поставить нолик на любую из восьми клеток, окружающих крестик первого игрока, т. д. Первый игрок выигрывает, если ему удастся поставить крестик на любую угловую клетку. Доказать, что при любой игре второго игрока первый всегда может выиграть.

4) Внутри равностороннего (не обязательно правильного) семиугольника $A_1, A_2, \ldots, A_7$ взята произвольно точка O. Обозначим через $H_1, H_2, \ldots, H_7$ основания перпендикуляров, опущенных из точки O на стороны $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_7A_1$ соответственно. Известно, что точки $H_1, H_2, \ldots, H_7$ лежат на самих сторонах, а не на их продолжениях. Доказать, что $A_1H_1 + A_2H_2 + \ldots + A_7H_7 = H_1A_2 + H_2A_3 + \ldots + H_7A_1$.

5) В квадрате со стороной длины 1 взята произвольно 101 точка, не обязательно лежащие внутри квадрата. Доказать, что существует треугольник с вершинами у этих точках, площадь которого не больше $^1/_{60}$.

9 класс

1) См. задачу № 4 для 8 класса.

2) См. задачу № 1 для 8 класса.

3) Доказать, что любое четное число $2n \geqslant 0$ может быть единственным образом представлено в виде $2n=(x+y)^2+3x+y$, где x и y — целые неотрицательные числа.

4) В треугольнике ABC сторона BC равна полусумме двух других сторон. Доказать, что биссектриса угла A перпендикулярна отрезку, соединяющему центры вписанной и описанной окружностей треугольника.

5) На клетчатой бумаге начерчена замкнутая ломаная с вершинами в узлах сетки, все звенья которой равны. Доказать, что число звеньев такой ломаной четно.

10 класс

1) В n мензурок налиты n разных жидкостей, кроме того, имеется одна пустая мензурка. Можно ли за конечное число операции составить равномерные смеси в каждой мензурке, т. е. сделать так, чтобы в каждой мензурке было равно $\frac{1}{n}$ от начального количества каждой жидкости, и при этом одна мензурка была бы пустой.

Примечание. Мензурка позволяет отмерять любой объем жидкости.

2) Дана система из n точек на плоскости, причем известно, что для любых двух точек данной системы можно указать движение плоскости, при котором первая точка перейдет во вторую, а система перейдет сама в себя. Доказать, что все точки такой системы лежат на одной окружности.

3) Дан треугольник ABC, причем сторона BC равна полусумме двух других сторон. Доказать, что в таком треугольнике вершина A, середины сторон AB и AC и центры вписанной и описанной окружностей лежат на одной окружности (ср. задачу № 4 для 9 класса).

4) См. задачу № 3 для 9 класса.

5) Имеется бесконечное количество карточек, на каждой из которых написано какое-то натуральное число. Известно, что для любого натурального числа n существуют ровно n карточек, на которых написаны делители этого числа. Доказать, что любое натуральное число встречается хотя бы на одной карточке.

11 класс

1) Из точки O на плоскости проведено несколько векторов, сумма длин которых равна 4. Доказать, что можно выбрать несколько векторов (или, быть может, один вектор), длина суммы которых больше 1.

2) См. задачу № 3 для 9 класса.

3) В треугольнике ABC сторона BC равна полусумме двух других сторон. Через точку A и середины сторон AB и AC проведена окружность и к ней из центра тяжести треугольника проведены касательные. Доказать, что одна из точек касания является центром вписанной окружности треугольника ABC.

4) Пирог имеет форму правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса 1. Из середин сторон проведены прямолинейные надрезы длины 1. Доказать, что при этом от пирога будет отрезан какой-нибудь кусок.

5) При дворе короля Артура собрались $2n$ рыцарей, причем каждый из них имеет среди присутствующих не более $n-1$ врага. Доказать, что Мерлин, советник Артура, может так рассадить рыцарей за круглым столом, что ни один из них не будет сидеть рядом со своим врагом.

Л-49084	Подписано к печати 23/II 1965 г.	Формат $60 \times 90^1/_{16}$
Заказ 478	Объем 1,25 п. л.	Тираж 20.000 экз.

Типография Изд-ва МГУ. Москва, Ленгоры