

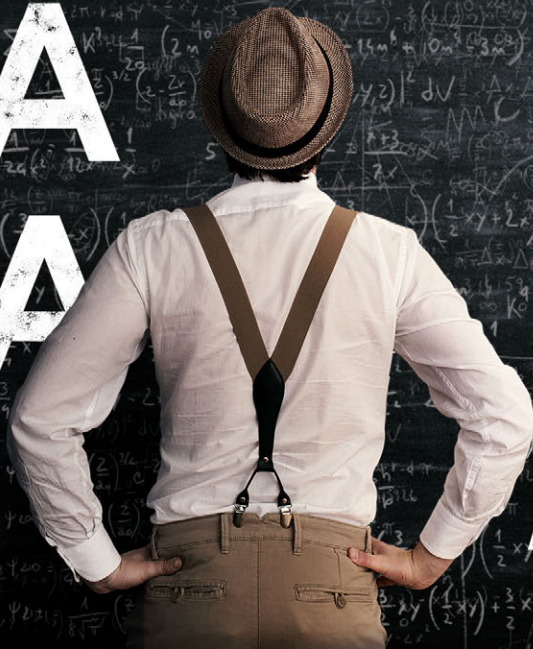
ЭДУАРД ФРЕНКЕЛЬ

ЛЮ БОВЬ

И Сердце
скрытой
реальности



МАТЕ МА ТИКА



Династия



EDWARD FRENKEL



LOVE and MATH



The Heart of Hidden Reality

BASIC BOOKS

A Member of the Perseus Books Group

New York

ЭДУАРД ФРЕНКЕЛЬ

ЛЮ
БОВЬ

И

Сердце
скрытой
реальности



МАТЕ
МА
ТИКА



Санкт-Петербург · Москва · Екатеринбург · Воронеж
Нижний Новгород · Ростов-на-Дону
Самара · Минск

2020

Э. Френкель

Любовь и математика. Сердце скрытой реальности

Серия «New Science»

Перевела с английского *Е. Шикарева*

| | |
|-------------------------|---------------------------------|
| Заведующая редакцией | <i>Ю. Сергиенко</i> |
| Ведущий редактор | <i>Н. Римицан</i> |
| Литературный редактор | <i>О. Лапина</i> |
| Художественный редактор | <i>А. Михеева</i> |
| Корректоры | <i>С. Беляева, М. Молчанова</i> |
| Верстка | <i>А. Шляго</i> |

ББК 24.632

УДК 524.882

Френкель Э.

Ф86 Любовь и математика. Сердце скрытой реальности / Пер. с англ. Е. Шикарева. — СПб.: Питер, 2020. — 352 с.: ил. — (Серия «New Science»). ISBN 978-5-4461-1578-5

Представьте, что вы хотите научиться живописи, а вам объясняют, как красиво и хорошо покрасить забор, вместо того чтобы показать картины Ван Гога, Пикассо или других великих художников, и даже не говорят вам о том, что они существуют. К сожалению, изучение математики в школах порой напоминает процесс наблюдения за тем, как сохнет и трескается краска на деревянной доске.

В этой книге известный математик Эдуард Френкель открывает доселе скрытые стороны математики, позволяя нам увидеть в ней красоту и элегантность, свойственные только величайшим шедеврам. «Математика, — говорит он, — это портал в неизведанный мир, ключ к пониманию глубинных тайн Вселенной и нас самих». Великий математик приглашает всех нас в этот таинственный мир.

16+ (В соответствии с Федеральным законом от 29 декабря 2010 г. № 436-ФЗ.)

ISBN 978-0465050741 англ.

ISBN 978-5-4461-1578-5

© Edward Frenkel (October 1, 2013)

© Перевод на русский язык ООО Издательство «Питер», 2020

© Издание на русском языке, оформление

ООО Издательство «Питер», 2020

© Серия «New Science», 2020

На обложке использована фотография Elizabeth Lippman.

Права на издание получены по соглашению с BasicBooks. Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав.

Изготовлено в России. Изготовитель: ООО «Прогресс книга». Место нахождения и фактический адрес: 194044, Россия, г. Санкт-Петербург, Б. Сампсониевский пр., д. 29А, пом. 52. Тел.: +78127037373.

Дата изготовления: 11.2019. Наименование: книжная продукция. Срок годности: не ограничен.

Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции ОК 034-2014, 58.11.12.000 —

Книги печатные профессиональные, технические и научные.

Импортер в Беларусь: ООО «ПИТЕР М», 220020, РБ, г. Минск, ул. Тимирязева, д. 121/3, к. 214, тел./факс: 208 80 01.

Подписано в печать 13.11.19. Формат 70x100/16. Бумага офсетная. Усл. п. л. 28,380. Тираж 2000. Заказ 0000.



Династия

Фонд некоммерческих программ

«Династия»

основан в 2002 году

Дмитрием Борисовичем Зиминым,

почетным президентом компании «Вымпелком».

Приоритетные направления деятельности Фонда —
поддержка фундаментальной науки и образования в России,
популяризация науки и просвещение.

«Библиотека Фонда «Династия» — проект Фонда
по изданию современных научно-популярных книг,
отобранных экспертами-учеными.

Книга, которую вы держите в руках, выпущена
под эгидой этого проекта.

Более подробную информацию о Фонде «Династия»
вы найдете по адресу

www.dynastyfdn.com

Содержание

| | |
|---|-----|
| Предисловие к русскому изданию..... | 8 |
| Введение..... | 9 |
| Глава 1. Загадочное чудовище..... | 20 |
| Глава 2. Суть симметрии..... | 27 |
| Глава 3. Пятая проблема..... | 43 |
| Глава 4. Керосинка..... | 57 |
| Глава 5. Нити решения..... | 64 |
| Глава 6. Ученик математика..... | 77 |
| Глава 7. Теория Великого Объединения..... | 94 |
| Глава 8. Волшебные числа..... | 105 |
| Глава 9. Розеттский камень..... | 124 |
| Глава 10. В петле..... | 138 |
| Глава 11. Покорение вершины..... | 158 |
| Глава 12. Древо знаний..... | 166 |
| Глава 13. Гарвард зовет..... | 178 |
| Глава 14. Сплетая пучки мудрости..... | 192 |
| Глава 15. Изысканный танец..... | 209 |
| Глава 16. Квантовый дуализм..... | 228 |
| Глава 17. В поисках скрытых связей..... | 253 |
| Глава 18. В поисках формулы любви..... | 284 |
| Эпилог..... | 301 |
| Благодарности..... | 303 |
| Глоссарий..... | 304 |
| Примечания..... | 309 |

Посвящается моим родителям

Предисловие к русскому изданию

Я очень рад, что моя книга «Любовь и математика» теперь увидит свет и на русском языке. Меня многое связывает с Россией — страной, где я родился и вырос.

Хочу выразить благодарность издательству «Питер», и особенно ведущему редактору Юлии Сергиенко и переводчику Екатерине Шикаревой за подготовку русского издания.

Мы живем в мире, в котором математика играет все большую роль — как положительную, так и отрицательную. За примерами последнего далеко ходить не надо: тотальная слежка, финансовый кризис, корпорации, которые цинично воруют нашу информацию, а потом нам же ее и продают... Одновременно нам внушают, что жизнь — это просто алгоритм, а человек — не более чем последовательность нулей и единичек. Как выгодно будет для властей предрержащих, если мы в это поверим!

Поэтому нам особенно важно сегодня, с одной стороны, знать, что такое математика и как она используется, а с другой — не потерять нашу человечность в этом «дивном новом мире», как назвал его Олдос Хаксли.

Любовь и математика — это две основы, на которых держится мир. И ни одна из них не заменит другую. Да этого и не нужно! Гораздо лучше будет их соединить, ведь противоречие между ними только кажущееся.

Моя цель не в том, чтобы вас чему-то научить. Я хочу дать вам возможность почувствовать, что существует целый мир, который от нас старательно скрывается, — мир математики. Это портал в неизведанную реальность, ключ к пониманию глубинных тайн Вселенной и нас самих. Математика не единственный портал, есть и другие. Но в некотором смысле он самый очевидный. И именно поэтому он так закамуфлирован, как будто бы на нем прибита доска с надписью: «Вам сюда не надо». А на самом деле надо. И когда мы входим в него, мы вспоминаем, кто мы: не маленькие винтики большой машины, не одинокие души, прозябающие на отшибе Вселенной. Мы — Творцы этого мира, способные дарить друг другу красоту и любовь.

Добро пожаловать в этот мир!

Введение

Рядом с нами существует тайный мир — скрытая параллельная Вселенная, полная красоты и гармонии, тесно переплетенная с нашей. Это мир математики. И для большинства из нас он остается невидимым. Моя книга — приглашение в этот волшебный мир.

Задумайтесь о следующем парадоксе. С одной стороны, математика вплетена в полотно нашей повседневной жизни. Каждый раз, совершая покупку в Интернете или пытаясь найти в сети необходимую информацию, отправляя текстовое сообщение или используя GPS-устройства, мы прибегаем к помощи математических формул и алгоритмов. С другой стороны, математика повергает большинство людей в трепет. Она превратилась, по словам поэта Ганса Магнуса Энциенсбергера, в «слепое пятно в нашей культуре — чуждую территорию, на которой лишь элита, лишь несколько посвященных сумели укрепиться». Очень редко, считает он, случается нам «встретить человека, который с пеной у рта будет доказывать, что одна лишь мысль о том, чтобы прочитать роман, полюбоваться картиной или посмотреть кино, вызывает у него нестерпимые мучения»; при этом «разумные, образованные люди» частенько заявляют, «демонстрируя удивительную смесь презрения и гордости», что математика — это «чистая пытка» или «кошмар», который «наводит на них скуку».

Чем же объясняется эта аномалия? На мой взгляд, на это есть две причины. Во-первых, математика более абстрактна, чем другие предметы, и, следовательно, менее доступна. Во-вторых, то, что мы изучаем в школе, — это лишь крохотная часть математики, разработанная в основном более тысячи лет назад. С тех пор математика невероятно продвинулась вперед, однако большинство из нас даже не подозревает о том, какие сокровища от нас скрывают.

Представьте себе, что в школе вас заставляли посещать «уроки искусства», где вас учили только лишь как покрасить забор и никогда не показывали произведения Леонардо да Винчи и Пикассо. Смогли бы вы при этом научиться ценить искусство? Захотели бы вы узнать о нем побольше? Сомневаюсь. Скорее всего, вы отзывались бы о подобных уроках примерно так: «Эти уроки искусства

в школе были пустой тратой времени. Ведь если мне понадобится покрасить забор, я просто найму подходящего человека». Разумеется, это звучит нелепо, но именно так математика преподается сегодня, так что в представлении большинства из нас она стала интеллектуальным эквивалентом наблюдения за сохнувшей краской. При этом, в то время как произведения величайших мастеров живописи доступны для всех, математика великих мастеров остается тайной за семью печатями.

Однако волшебство математики кроется не только в ее эстетической красоте. Всем известно знаменитое изречение Галилео: «Книга Природы написана на языке математики». Математика — это способ описания реальности, путь к выяснению того, как работает наш мир, универсальный язык, ставший золотым стандартом истины. В нашем мире, где важнейшую роль в развитии общества играют наука и технология, математика становится все более явственным источником власти, богатства и прогресса. Следовательно, на передовой прогресса оказываются те из нас, кто способен бегло говорить на этом новом языке.

Одно из распространенных заблуждений, касающихся математики, заключается в том, что ее можно использовать только лишь как «инструмент». Так, например, биолог ставит эксперименты, собирает данные, а затем пытается построить математическую модель, соответствующую этим данным (возможно, при участии математика). Хотя такой формат сотрудничества важен, математика в действительности предлагает нам *намного больше*: она позволяет совершать фундаментальные прорывы, делать открытия, означающие полную смену парадигмы, которые без ее помощи были бы попросту невозможны. Например, когда Альберт Эйнштейн понял, что гравитация вызывает искривление пространства, он не пытался описать с помощью уравнений какие-то данные. На самом деле, таких данных вовсе не было. В то время никто даже представить себе не мог, что наше пространство искривлено: все «знали», что мы живем в плоском мире! Однако Эйнштейн понял, что это единственный способ обобщить его специальную теорию относительности на безынерционные системы в сочетании с его догадкой о том, что гравитация и ускорение оказывают одинаковое влияние. Это был интеллектуальный скачок высочайшего уровня в сфере математики, который Эйнштейн мог совершить, только лишь полагаясь на работу математика Бернарда Рима-

на, сделанную пятьюдесятью годами ранее. Человеческий мозг запрограммирован таким образом, что мы не в состоянии вообразить искривленные пространства размерностью больше двух; единственный способ изучения и описания их — посредством математики. И что вы думаете? Эйнштейн оказался прав! Наша Вселенная *действительно* искривлена; более того, она расширяется. Вот она, мощь математики, о которой я веду речь!

Можно привести множество подобных примеров, относящихся не только к физике, но и к другим научным областям (некоторые из них мы обсудим далее). История показывает, что математические идеи преобразуют науку и технологию с большей и большей скоростью; даже математические теории, первоначально считавшиеся исключительно абстрактными и эзотерическими, часто становятся впоследствии незаменимыми для решения прикладных задач. Чарльз Дарвин, чья работа на первых порах не опиралась на математику, позднее написал в своей автобиографии: «Я глубоко сожалел о том, что не продвинулся в математике, по крайней мере, настолько, чтобы уметь хотя бы немного разбираться в ее великих руководящих началах, ибо люди, овладевшие ею, кажутся мне наделенными каким-то дополнительным орудием разума». Я считаю это превосходным наставлением последующим поколениям: мы должны научиться пользоваться безграничным потенциалом математики.

Когда я рос, я не знал о существовании скрытого мира математики. Как и большинство людей, я полагал, что математика — сухой, скучный предмет. Однако мне повезло: учась в выпускном классе школы, я познакомился с профессиональным математиком, который открыл для меня этот волшебный мир. Я узнал о том, что математика полна бесконечных возможностей, что по элегантности и красоте она не уступает поэзии, живописи и музыке. Я влюбился в математику.

Дорогой читатель, с помощью этой книги я хочу сделать для вас то, что мои учителя и наставники сделали для меня: открыть для вас силу и красоту математики, помочь вам войти в этот волшебный мир, как когда-то удалось сделать мне, даже если вы из тех людей, кто никогда бы не использовал слова «математика» и «любовь» в одном предложении. Математика проникнет под вашу кожу так же, как она проникла под мою, и ваша картина мира изменится навсегда.

* * *

Математическое знание не похоже ни на какое другое. Наше восприятие физического мира всегда может быть искажено, но восприятие математических истин не допускает искажений. Это объективные, вечные, незыблемые истины. Математическая формула или теорема означает одно и то же для кого угодно и где угодно независимо от пола, религии и цвета кожи. Она будет нести тот же самый смысл и через тысячу лет. Однако еще поразительнее то, что все это принадлежит нам. Никто не вправе запатентовать математическую формулу — все эти формулы наши, общие. Нет ничего в этом мире, что, будучи настолько глубоким и изысканным, в то же время одинаково доступно для всех. В то, что такой резервуар знаний действительно существует, почти невозможно поверить. Это знание слишком ценно, чтобы отдать его лишь нескольким «избранным». Оно принадлежит каждому из нас.

Одна из ключевых функций математики — упорядочивание информации. Именно это отличает мазки кисти Ван Гога от простых пятен краски. Появление трехмерной печати ознаменует радикальную трансформацию привычной нам реальности: из сферы физических объектов все начинает перетекать в сферу информации и данных. Благодаря 3D-принтерам скоро мы сможем создавать материю из информации так же просто, как сегодня преобразуем PDF-файлы в книги, а MP3-файлы в музыкальные произведения. В этом дивном новом мире математика займет еще более важное, центральное место — как способ организации и упорядочения информации и как средство преобразования информации в физическую реальность.

В этой книге я расскажу об одной из величайших идей, возникших в математике за последние пятьдесят лет, — программе Ленглендса, которую многие считают теорией Великого Объединения математики. Эта увлекательнейшая теория сплетает паутину глубоких связей между областями математики, которые, казалось бы, должны находиться на расстоянии световых лет друг от друга: алгеброй, геометрией, теорией чисел, анализом и квантовой физикой. Если представлять себе эти области как континенты тайного мира математики, то программа Ленглендса — это как бы такое телепортационное устройство, способное мгновенно переносить нас с одного континента на другой и обратно.

Программа Ленглендса была инициирована в конце 1960-х годов Робертом Ленглендсом — математиком, который в настоящее время занимает кабинет Альберта Эйнштейна в Институте высших исследований в Принстоне. В корне этой программы лежит теория симметрий. При этом основы ее были заложены два столетия назад вундеркиндом французом незадолго до того, как в возрасте двадцати лет он был убит на дуэли. Впоследствии она была обогащена другим поразительным открытием, которое не только позволило сформулировать доказательство Великой теоремы Ферма, но и революционизировало наши представления о числах и уравнениях. И еще одна проницательная догадка продемонстрировала, что в математике существует собственный розеттский камень, полный загадочных аналогий и метафор. Следуя этим аналогиям как ручьям, текущим в зачарованной стране Математике, идеи программы Ленглендса перелились в сферы геометрии и квантовой физики, создавая порядок и гармонию из, казалось бы, неподдающегося приручению хаоса.

Я хочу рассказать вам обо всем этом, чтобы вы увидели те стороны математики, на которые редко кто обращает внимание: вдохновение, глубокие идеи, потрясающие откровения. Математика — это способ вырваться из стесняющих нас рамок привычного, безграничный полет фантазии в поисках истины. Георг Кантор, создатель теории бесконечности, написал: «Суть математики лежит в ее свободе». Математика учит нас анализировать реальность, исследовать факты, следовать за ними, куда бы они нас ни вели. Она освобождает нас от догматов и предубеждений, питает наш новаторский потенциал. Таким образом, то, что математика дарует нам, далеко выходит за пределы самого предмета.

Но этот дар может быть использован как во благо, так и во вред, поэтому мы всегда должны следить за тем, какое влияние математика оказывает на реальный мир. Например, глобальный экономический кризис был в значительной степени вызван широким использованием на финансовых рынках неадекватных математических моделей. Многие люди, ответственные за принятие решений, вследствие собственной математической безграмотности не до конца понимали суть этих моделей, но продолжали самоуверенно применять их, руководствуясь лишь своей алчностью, пока это практически не привело к краху всей системы. Они злоупотребляли преимуществами асимметричного доступа к ин-

формации в надежде, что никто не откроет их блеф, ведь остальные также особо не стремились узнать, как в действительности работают эти математические модели. Возможно, если бы больше людей понимали суть функционирования этих моделей и то, как на самом деле работает система, мы не позволили бы так долго морочить себе голову.

Приведем другой пример. В 1996 году комиссия, назначенная правительством США, на секретном совещании изменила формулу вычисления индекса потребительских цен, показателя инфляции, который определяет налогообложение, параметры социального обеспечения, медицинского страхования и других индексированных платежей. Затронуты были интересы десятков миллионов американцев, однако никакого публичного обсуждения новой формулы и ее последствий не было. А недавно была предпринята еще одна попытка воспользоваться этой формулой как «задней дверью», для того чтобы оказать закулисное влияние на экономику США.¹

Куда меньше секретных сделок подобного рода было бы возможно в математически грамотном обществе. Математика — это строгость плюс интеллектуальная честность, помноженные на опору на факты. В мире, главной движущей силой которого сегодня становится математика, у нас всех должен быть свободный доступ к математическому знанию, необходимому нам для того, чтобы защититься от произвольных решений, принимаемых небольшой кучкой властей предрержащих. Где нет математики, нет и свободы.

* * *

Математика в той же мере является частью нашего культурного наследия, что и искусство, литература, музыка. Мы, люди, обладаем врожденным стремлением к неизведанному, к достижению новых целей, к познанию Вселенной и нашего места в ней. К сожалению, нам уже не придется найти новый континент, подобно Колумбу, или же первыми ступить на поверхность Луны. Но что, если я скажу вам, что совсем не нужно переплывать океаны или отправляться в космос в поисках непознанных чудес нашего мира? Они здесь, прямо перед нами, переплетенные с волокнами нашей повседневной реальности. В каком-то смысле, они — часть нас. Математика направляет потоки Вселенной, скрывается за каждым ее изгибом и формой, держит узды всего сущего — от крохотных атомов до гигантских звезд.

Моя книга — приглашение в этот богатый, ослепительный мир. Я написал ее для людей, не имеющих математического образования. Если вы думаете, что математика слишком сложна и вы ничего не поймете, если математика пугает вас, но в то же время вам любопытно, а нет ли в ней чего-то, что действительно стоит знать, — тогда эта книга для вас.

Распространено заблуждение, что для того чтобы понимать математику, необходимо посвятить ее изучению много лет. Некоторые люди верят, что они с рождения лишены способности ее понять. Я не могу с этим согласиться: большинство из нас слышали о таких концепциях, как Солнечная система, атомы и элементарные частицы, двойная спираль ДНК и многие другие. Для того чтобы достичь элементарного понимания этих вещей, нам не требуются специальные курсы по физике и биологии. И никого не удивляет тот факт, что эти сложные идеи являются частью нашей культуры, нашего коллективного сознания. Точно так же каждому доступно понимание ключевых концепций и идей математики — нужно лишь, чтобы они были объяснены должным образом. Тогда не потребуется годами учить математику — во многих случаях можно сразу перейти к сути вопроса, пропустив скучные шаги.

Проблема заключается в том, что хотя весь мир обсуждает планеты, атомы и ДНК, практически никто не рассказывает вам об увлекательных идеях современной математики, таких как группы симметрии, нестандартные системы счисления, в которых «два плюс два» не всегда дает четыре, и прекрасных геометрических формах, как, например, так называемые римановы поверхности. Вам как бы показывают маленькую кошку, утверждая, что это тигр. Однако в действительности тигр — совсем другое животное. Я покажу вам его во всем великолепии, чтобы вы смогли оценить его «ошеломительную симметрию», как красноречиво выразился Уильям Блейк.

Не буду вас вводить в заблуждение: прочитав эту книгу, вы не станете сразу математиком. Но я и не утверждаю, что каждый должен стремиться к тому, чтобы стать математиком. Так, выучив несколько аккордов, вы сможете сыграть довольно много песен на гитаре. Это, конечно же, не сделает вас лучшим гитаристом мира, но это обогатит вашу жизнь. В этой книге я покажу вам аккорды современной математики, которые долгое время от вас скрывали. И я обещаю, что это обогатит вашу жизнь.

Один из моих учителей, великий Израиль Моисеевич Гельфанд, говорил так: «Люди думают, что не понимают математику, но все зависит от того, как объяснять. Если вы спросите пьяницу, какое число больше — $2/3$ или $3/5$, он вам не сможет сказать. Но если вы переформулируете вопрос: что лучше, две бутылки водки на троих или три бутылки водки на пятерых, то он сразу же найдется: конечно, две бутылки на троих».

Моя цель в этой книге — объяснить все в таких терминах, которые вы поймете.

Я расскажу вам также о своей жизни в Советском Союзе, где математика стала оплотом свободы перед лицом деспотичного режима. Меня не приняли в Московский государственный университет из-за действовавшей тогда в Советском Союзе политики дискриминации. Двери захлопнулись перед моим носом. Я был изгоем. Но я не сдался. Я тайком пробирался в Университет на лекции и семинары. Я самостоятельно штудировал учебники по математике, частенько засиживаясь до поздней ночи. В конце концов мне удалось обхитрить систему. Меня не пустили через дверь, но я влетел в окно. Ведь если человек влюблен, ничто его не остановит.

Два замечательных математика взяли меня под свое крыло и стали моими наставниками. Под их руководством я начал проводить собственные математические исследования. Я все еще был студентом института, но уже пытался пробиться через границы неизведанного. Это был самый волнующий период моей жизни, и я занимался любимым делом, несмотря на то что был уверен — дискриминационная политика не позволит мне получить работу по специальности в Советском Союзе.

Однако меня поджидал сюрприз: мои первые математические работы были контрабандно вывезены за границу и обрели известность; в результате я в возрасте двадцати одного года получил приглашение занять временный пост профессора в Гарвардском университете. Чудесным образом примерно в это же время в Советском Союзе началась перестройка, которая привела к падению железного занавеса, и у советских граждан появилась возможность выезжать за рубеж. И вот я, не защитивший еще даже кандидатской диссертации, стал гарвардским профессором, в очередной раз взломав систему. После этого я продолжил движение по научному пути, что привело меня к исследованиям на переднем

краю программы Ленглендса и позволило мне внести свой вклад в развитие этой области за последние двадцать лет. В этой книге вы найдете описание потрясающих результатов, полученных выдающимися учеными, а также сможете заглянуть за кулисы происходящего.

Но в первую очередь, эта книга о любви. Однажды у меня было такое видение: математик открывает «формулу любви», и это положило начало созданию фильма «Обряды любви и математики», о котором я расскажу ближе к концу книги. На каждом показе этого фильма кто-нибудь обязательно спросит: «А формула любви правда существует?»

Мой ответ: «Каждая формула, которую мы открываем, — это формула любви». Ведь математика — это источник вечного и необъятного знания, проникающего в самое сердце всего существующего и объединяющего нас сквозь культуры, континенты и века. Я мечтаю о том, чтобы каждый из нас был способен видеть, ценить и восхищаться волшебной красотой и изысканной гармонией этих идей, формул и уравнений, которые придают новый смысл нашей любви к этому миру и друг к другу.

Совет читателям

Я приложил все усилия, для того чтобы представить математические концепции в этой книге в самой элементарной и интуитивно понятной форме. Тем не менее я понимаю, что некоторые части могут показаться перегруженными математикой (в частности, отдельные фрагменты глав 8, 14, 15 и 17). Нет ничего страшного в том, чтобы при первом прочтении пропустить материал, кажущийся вам непонятным или скучным (я сам так частенько делаю). Вернувшись к нему позднее, вооруженные новыми знаниями, вы сможете обнаружить, что он стал гораздо проще для восприятия. Однако обычно для понимания того, о чем пойдет речь далее, это не требуется.

Думаю, чрезвычайно важно подчеркнуть, что *ситуация, когда вам что-то непонятно, совершенно нормальна*. Занимаясь математикой, я нахожусь под властью этого ощущения 90 процентов времени, так что добро пожаловать в мой мир! Замешательство (а порой даже отчаяние) — чувство, неизменно сопровождающее любого математика. Однако у этой ситуации есть и светлая сторона: представьте, насколько скучной была бы жизнь, если бы все было понятно и в любом вопросе можно было бы разобраться, почти не прикладывая усилий. То, что делает математику таким волнующим предметом — это наше желание преодолеть замешательство, понять непонятное, поднять вуаль над непознанным. И чувство личного триумфа, когда мы таки понимаем то, что хотели понять, оправдывает любые переживания и затраты.

В этой книге я фокусируюсь на общей картине и логических связях между различными концепциями и разными областями математики, а не на технических деталях. Более подробное обсуждение во многих случаях можно найти в примечаниях, которые также содержат ссылки на полезные материалы и рекомендации по дополнительному чтению. Тем не менее, хотя примечания могут помочь в понимании основного материала, вы можете со спокойной душой пропускать их (по крайней мере, при первом прочтении).

Я постарался минимизировать использование формул, сделав выбор, где возможно, в пользу словесного разъяснения. Но и ничего страшного, если несколько оказавшихся в книге формул вы тоже пропустите.

Небольшое предупреждение относительно математической терминологии: занимаясь написанием этой книги, я обнаружил, к своему удивлению, что определенные термины, которые используются математиками определенным образом, для нематематиков могут означать нечто совершенно иное. Это такие термины, как «соответствие», «представление», «композиция», «петля», «многообразие», «теория». Всякий раз, когда подобные недоразумения могли возникнуть, я давал дополнительное объяснение. Также по возможности я старался заменять некоторые математические термины другими, более понятными определениями. Если какое-то слово покажется вам непонятным, вы всегда можете заглянуть в глоссарий в конце книги.

Пожалуйста, заходите на мой веб-сайт по адресу <http://edwardfrenkel.com>. Здесь вы найдете дополнительные материалы, а также сможете отправить мне сообщение, если у вас возникнет желание поделиться впечатлением об этой книге (адрес моей электронной почты указан на сайте). Я буду благодарен за любые ваши отзывы.

Глава 1. Загадочное чудовище

Как человек становится математиком? Наверное, существует множество разных путей и способов. Позвольте рассказать, как это произошло со мной.

Вы, наверное, удивитесь, но в школе я ненавидел математику. Хотя нет, «ненавидел», пожалуй, слишком сильное слово. Скажем просто, я не очень-то ее любил. Мне казалось, что математика скучная. Я усердно выполнял все задания, но не понимал, зачем мне это. Материал, который мы разбирали в классе, казался мне бессмысленным и бесполезным. Меня восхищала физика, особенно квантовая физика. Я жадно проглатывал все научно-популярные книги по этой теме, которые только попадали мне в руки. Я рос в России, и достать подобную литературу не составляло никаких проблем.

Квантовый мир меня завораживал! С древнейших времен ученые и философы мечтали о том, чтобы дать описание фундаментальной природе Вселенной. Некоторые даже предполагали, что вся материя состоит из крохотных частиц, называемых атомами. Существование атомов было доказано в начале двадцатого века, и примерно в то же время ученые обнаружили, что каждый атом можно, в свою очередь, разделить на составляющие. Выяснилось, что атом представляет собой ядро, вокруг которого вращаются электроны. А само ядро состоит из протонов и нейтронов, как показано на рис. 1.1.

Ну, а что насчет этих частиц? В популярных книгах, которые мне довелось читать, утверждалось, что строительными кирпичиками для протонов и нейтронов являются элементарные частицы, называемые кварками.

Мне понравилось это название — кварки! А еще больше мне понравилась история его происхождения. Физик Марри Гелл-Ман, открывший эти частицы, позаимствовал слово «кварк» из романа Джеймса Джойса «Поминки по Финнегану». В одном из пародийных стихотворений романа встречаются такие строчки:

Three quarks for Muster Mark!
Sure he hasn't got much of a bark
And sure any he has it's all beside the mark.

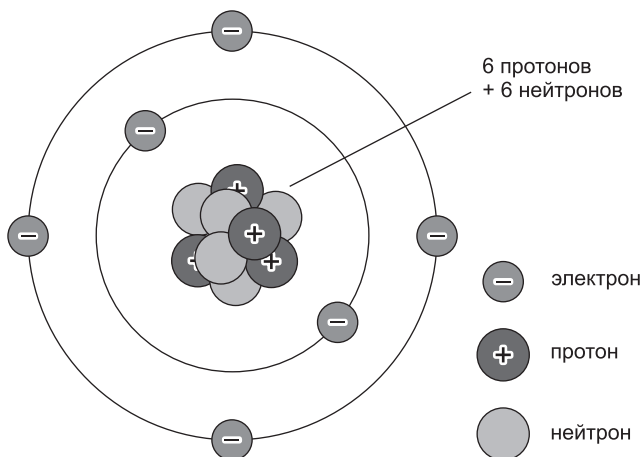


Рис. 1.1. Атом углерода

Я подумал, что это очень круто — физик назвал частицу в честь романа, да к тому же такого сложного и необычного, как «Поминки по Финнегану»! Мне тогда было около 13 лет, но я уже знал, что ученые должны быть нелюдимыми и немногословными созданиями, столь глубоко погруженными в свою работу, что заинтересоваться прочими жизненными аспектами, такими как искусство и гуманитарные науки, они не в состоянии. Я был совсем не таким. У меня была куча друзей, я любил читать и интересовался множеством других вещей, помимо науки. Мне нравилось играть в футбол, и мы с друзьями готовы были гонять мяч часами. Примерно в то же время я открыл для себя художников-импрессионистов (все началось с толстой книги об импрессионизме, обнаруженной в библиотеке родителей). Моим любимым художником был Ван Гог. Зачарованный его картинами, я даже сам пытался рисовать.

Такие разносторонние интересы заставляли меня сомневаться, что наука действительно может быть моей стезей. Поэтому я был счастлив узнать, что Гелл-Ман, лауреат Нобелевской премии, увлекался, помимо науки, и разными другими вещами (в том числе литературой, лингвистикой, археологией и не только).

Согласно Гелл-Ману, существуют два типа кварков — «верхние» и «нижние». Нейтроны и протоны образованы разными сочетаниями верхних и нижних кварков: нейтрон состоит из двух нижних и одного верхнего кварка (рис. 1.2), а протон — из двух верхних и одного нижнего (рис. 1.3).

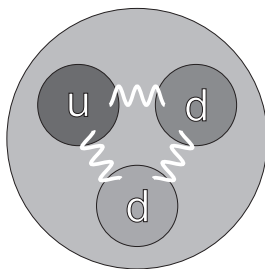


Рис. 1.2. Кварковая структура нейтрона

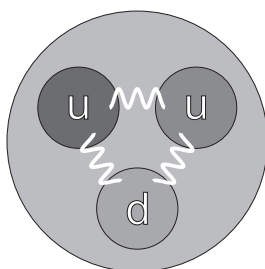


Рис. 1.3. Кварковая структура протона

Все это было довольно понятно. Однако как физики смогли догадаться о том, что протоны и нейтроны — это не цельные неделимые частицы, что они состоят из еще более мелких частиц, оставалось для меня загадкой.

В конце 1950-х годов ученые обнаружили большое количество, по всей видимости, элементарных частиц, которые получили название адронов. Нейтроны и протоны относятся к классу адронов и, являясь строительными кирпичиками вещества, играют огромную роль в повседневной жизни. Что же касается остальных адронов — их назначение было неочевидно. Ученые совершенно не понимали, для чего они нужны (или «кто их заказывал», как выразился один из исследователей). Во Вселенной оказалось так много различных типов адронов, что влиятельный физик Вольфганг Паули даже пошутил: мол, физика превращается в ботанику. Ученые отчаянно стремились навести порядок в классификации адронов, докопаться до основополагающих принципов, управляющих их поведением и способных объяснить это сводящее с ума многообразие.

Гелл-Ман и независимо от него Юваль Неэман предложили новаторскую классификацию элементарных частиц. Оба продемонстрировали, что адроны естественным образом подразделяются на небольшие семейства, каждое из восьми — десяти частиц. Эти семейства получили названия октетов и декуплетов. Принадлежащие к одному и тому же семейству частицы обладают схожими свойствами.

В популярных книгах, которыми я увлекался в то время, октеты изображались с помощью диаграмм (рис. 1.4).

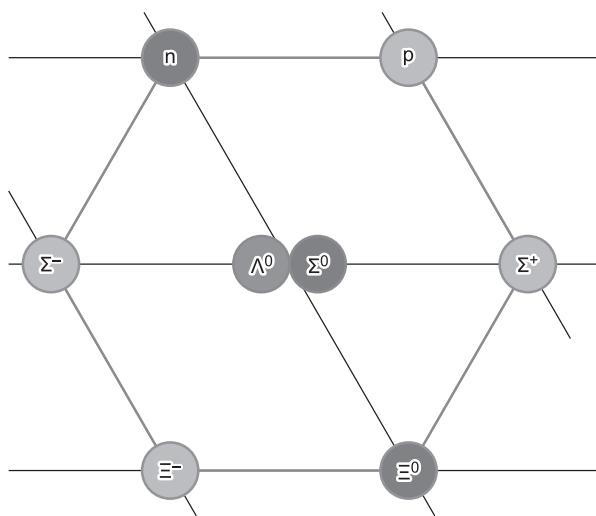


Рис. 1.4. Диаграмма октета

На диаграмме протон обозначен p^+ (знак «плюс» указывает на положительный электрический заряд), нейтрон — n^0 (ноль означает, что у этой частицы электрический заряд отсутствует), а остальные шесть частиц со странными названиями — буквами греческого алфавита.

Однако почему 8 и 10 частиц, а не, скажем, 7 и 11? В имеющихся в моем распоряжении книгах мне не удалось найти связного объяснения этому явлению. Там упоминалась загадочная теория, разработанная Гелл-Маном, — какой-то «восьмеричный путь» (по аналогии с Благородным Восьмеричным Путем в буддизме). Но нигде не говорилось о том, в чем же эта теория заключается.

Это непонимание меня удручало. Ключевые фрагменты истории оставались скрытыми от моих глаз. Мне хотелось распутать эту тайну, но я не знал, как.

По счастливой случайности помощь пришла со стороны старого друга нашей семьи. Я вырос в небольшом промышленном городке под названием Коломна, где проживало около 150 тысяч человек. Коломна находится примерно в 115 километрах от Москвы — чуть больше двух часов на электричке. Мои родители работали инженерами на большом заводе тяжелого станкостроения.

Коломна — древний город, построенный на месте слияния двух рек. Основан он был в 1177 году (всего лишь через тридцать лет после основания Москвы). К архитектурному достоянию Коломны относятся несколько прекрасных старых церквей, а стены коломенского кремля по сей день напоминают об историческом прошлом. Однако образовательным или интеллектуальным центром Коломну не назовешь. В то время в городе был только один небольшой институт, в котором готовили школьных учителей. Один из профессоров этого учебного заведения, математик Евгений Евгеньевич Петров, был большим другом моих родителей. Однажды моя мама повстречалась с ним на улице. Они долго не виделись и, конечно же, у них нашлось много тем для обсуждения. Мама всегда любила рассказывать обо мне своим друзьям, поэтому и меня они также не обошли в своем разговоре. Услышав, что я интересуюсь наукой, Евгений Евгеньевич сказал:

— Я должен встретиться с ним. Попробую обратить его в математику.

— О, нет, — возразила мама, — ему не нравится математика, он считает ее скучной. Он хотел бы заниматься квантовой физикой.

— Не беспокойся, — ответил Евгений Евгеньевич, — думаю, я знаю, как заставить его передумать.

Они договорились о встрече. Я был настроен не слишком оптимистично, но все же отправился к Евгению Евгеньевичу на работу.

Мне вот-вот должно было исполниться пятнадцать, и я заканчивал девятый — предпоследний — класс (я был на год младше своих одноклассников, так как перескочил через один класс). Евгений Евгеньевич в свои сорок с небольшим производил впечатление человека дружелюбного и непритязательного. В очках, давно не бритый, он был воплощением моего представления о математиках, и все же в оценивающем взгляде его широко распах-

нутых глаз было что-то, что моментально приковывало внимание. Они излучали любознательность — ему было интересно все, что происходило вокруг него.

Как оказалось, у Евгения Евгеньевича действительно был заготовлен хитрый план обращения меня в математическую веру. Как только я зашел в его кабинет, он ошарашил меня вопросом:

— Я слышал, тебе нравится квантовая физика. А доводилось ли тебе слышать о восьмеричном пути Гелл-Мана и кварковой модели?

— Да, я читал об этом в нескольких популярных книгах.

— Но знаешь ли ты, на чем основывается эта модель? Как ученым пришли в голову эти идеи?

— Ну...

— Тебе известно, что такое группа $SU(3)$?

— SU что?

— Как же ты сможешь разобраться в кварковой модели, если не знаком с группой $SU(3)$?

Он взял с полки пару книг, открыл их и продемонстрировал мне страницы, заполненные формулами. Я заметил знакомые диаграммы октетов, подобные той, что приведена выше, но это были не просто красивые картинки — диаграммы являлись частью какого-то связного и подробного изложения.

Конечно же, я ничего не понял в самих формулах, но мне сразу же стало ясно, что именно на этих страницах я найду ответы на столь серьезно занимающие меня вопросы. Это был момент прозрения. Формулы и слова завораживали, меня посетило доселе не знакомое чувство, которое невозможно выразить словами: я ощущал бурление энергии, вдохновение. Так чувствуешь себя, когда слушаешь музыку или рассматриваешь незнакомую картину, оставляющую неизгладимое впечатление. В голове крутилась одна мысль: «Вот это да!».

— Ты, наверное, думал, что математика — это то, что вам рассказывают в школе, — продолжил Евгений Евгеньевич. Он покачал головой. — Нет, вот, — он указал пальцем на формулы в книге, — истинная математика. Если ты хочешь по-настоящему понять квантовую физику, то начать тебе следует с этого. Гелл-Ман предсказал существование кварков с помощью красивой математической теории. На самом деле это было математическое открытие.

— Но это так сложно... Как во всем этом разобраться?

Формулы действительно выглядели пугающе.

— Не беспокойся. Первое, что ты должен изучить, — это «группа симметрии». С этого все начинается. На этом понятии основывается огромная часть математики, а также и теоретической физики. Я дам тебе несколько учебников. Начинай читать их и отмечай непонятные предложения. Мы можем встречаться с тобой раз в неделю и обсуждать прочитанное.

Он дал мне книгу о группах симметрии и еще пару томов. В них рассказывалось о так называемых p -адических числах (числовая система, совершенно не похожая на знакомые нам с детства обычные числа) и о топологии (науке о фундаментальных геометрических фигурах). У Евгения Евгеньевича оказался безупречный вкус: он нашел идеальное сочетание тем, заставивших меня посмотреть на это загадочное чудовище — *математику* — с совершенно новой точки зрения и полюбить ее.

В школе мы изучали такие вещи, как квадратные уравнения, немного дифференциального исчисления, простейшую евклидову геометрию и тригонометрию. Мне казалось, что вся математика так или иначе вращается вокруг этого — задачи со временем могут усложняться, но они всегда остаются в рамках все тех же общих концепций, с которыми я уже знаком. Однако книги Евгения Евгеньевича открыли передо мной абсолютно другой мир, о существовании которого я даже и не подозревал.

Я был обращен в ту же секунду.

Глава 2. Суть симметрии

В умах большинства людей математика неразрывно связана с числами. Математики для них — это люди, которые целыми днями просиживают над расчетами и оперируют числами: большими числами, огромными числами, числами с необычными, экстравагантными названиями. Я тоже так думал — по крайней мере, до тех пор, пока Евгений Евгеньевич не познакомил меня с концепциями и идеями современной математики. Одна из них оказалась ключом к обнаружению кварков. Это была концепция симметрии.

Что такое симметрия? На интуитивном уровне мы все это прекрасно знаем. Мы с первого взгляда распознаем симметрию в окружающих нас предметах, не требуя дополнительных пояснений. Если попросить человека привести пример симметричного объекта, то он вспомнит бабочку, снежинку или укажет на симметричность человеческого тела.



Рис. 2.1. Симметричные объекты

Однако на вопрос, что же он в действительности подразумевает, когда говорит, что предмет симметричен, большинство вразумительно ответить не может.

Вот как объяснил мне это Евгений Евгеньевич.

— Взглянем на эти два стола — круглый и квадратный, — он указал на столы в своем кабинете. — Какой из них более симметричный?

— Круглый, конечно. Разве это не очевидно?

— Но почему? Быть математиком означает не принимать ничего «очевидного» как должное, а пытаться обосновать каждое утверждение. Ты удивишься, но очень часто самый очевидный ответ оказывается неверным.

Заметив мое замешательство, Евгений Евгеньевич сжалился:

— Какое свойство круглого стола делает его более симметричным?

Я немного подумал, и меня озарило:

— Наверное, симметрия объекта заключается в том, что он сохраняет свою форму и позицию, даже если мы каким-то образом меняем его.

Евгений Евгеньевич кивнул.

— Так и есть. Давай рассмотрим возможные преобразования двух столов, при которых их формы и позиции будут сохраняться, — сказал он. — В случае круглого стола...

Я не дал ему закончить:

— Подойдет любое вращение вокруг центра. Мы получим тот же самый стол в той же самой позиции. Но если применить произвольное вращение к квадратному столу, то в большинстве случаев результат будет отличаться от исходной конфигурации. Сохранит форму и позицию стола только вращение на угол 90 градусов и кратные ему углы.

— Точно! Если ты на секунду выйдешь из моего кабинета и я поверну круглый стол на любой угол, то по возвращении ты не заметишь разницы. Однако если я проделаю то же самое с квадратным столом, то отличие будет очевидно — если только я не поверну его на 90 , 180 или 270 градусов.

Он продолжил:

— Такие преобразования называются симметриями. Теперь ты видишь, что у квадратного стола только четыре симметрии. У круглого стола их намного больше — в действительности бесконечно много. Именно поэтому мы говорим, что круглый стол более симметричный.

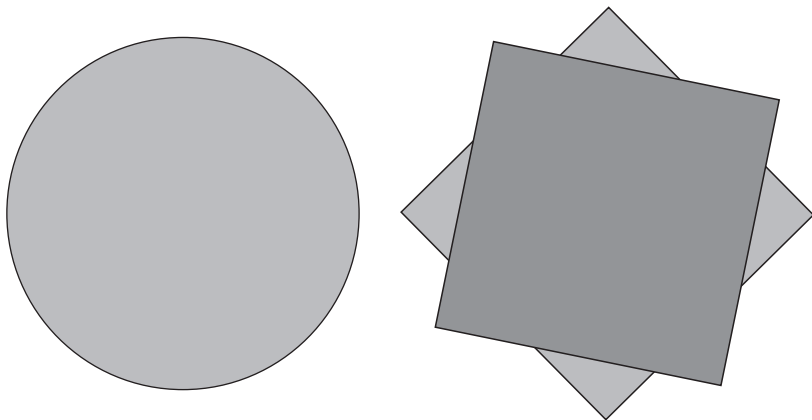


Рис. 2.2. *Круглый стол сохраняет позицию при вращении на любой угол, тогда как позиция квадратного стола при вращении на любой угол, не кратный 90 градусам, меняется.
Для обоих столов приведен вид сверху*

Это расставляло все по своим местам.

— Все это довольно очевидно, — продолжал Евгений Евгеньевич. — Не нужно быть математиком, чтобы заметить эти свойства. Настоящий же математик задаст такой вопрос: каковы *все* возможные симметрии конкретного объекта?

Взглянем на квадратный стол. Его симметрии¹ — это четыре вращения вокруг центра: на 90, 180, 270 и 360 градусов против часовой стрелки.² Математик скажет, что *множество* симметрий квадратного стола включает четыре элемента, соответствующих углам в 90, 180, 270 и 360 градусов. Мы сопоставим их четырем вершинам стола — каждое вращение переводит выбранную вершину (отмеченную кружком на рис. 2.3) в одно из угловых положений.

Одно из этих положений особенное, не похожее на другие, — это вращение на 360 градусов. По сути, это то же самое, что вращение на 0 градусов, то есть полный оборот соответствует полному отсутствию вращения. И действительно, после такого вращения каждая точка стола оказывается в точности в том же положении, где она была до этого. Это особая симметрия, никак не влияющая на позицию объекта. Ее называют *тождественной симметрией* или просто *тождеством*.³

Обратите внимание, что вращение на любой угол свыше 360 градусов эквивалентно вращению на угол между 0 и 360 градусами. Например, вращение на 450 градусов эквивалентно вращению на 90 градусов, так как $450 = 360 + 90$. Вот почему мы рассматриваем только вращение на углы от 0 до 360 градусов.

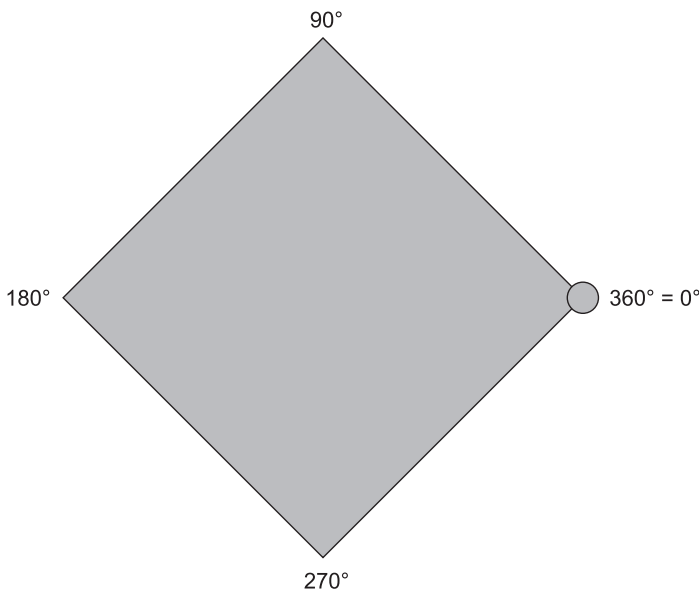


Рис. 2.3. Вращение квадратного стола

Это позволяет нам сделать важнейшее наблюдение: если последовательно применить к столу два вращения из списка $\{90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ\}$, то результат будет абсолютно таким же, как если бы мы применили другое вращение из того же самого списка. Другими словами, симметрии можно компоновать! Это также очевидно: любые две симметрии сохраняют позицию стола, следовательно, их композиция также сохранит ее. Таким образом, композиция симметрий также является симметрией. Например, если мы повернем стол на 90 градусов, а затем еще на 180 градусов, то в сумме получим вращение на 270 градусов. Давай посмотрим, что происходит со столом при применении этих симметрий. Когда мы поворачиваем его против часовой стрелки на 90 градусов, правая вершина стола (отмеченная кружком на рис. 2.3) перемещается в верхний угол картинке. Затем мы применяем вращение

на 180 градусов, и верхняя вершина стола переходит в нижний угол. Окончательный результат таков, что правая вершина стола перемещается в нижний угол рисунка. Это результат был бы достигнут и при единичном вращении против часовой стрелки на 270 градусов.

Вот еще один пример:

$$90^\circ + 270^\circ = 0^\circ.$$

Выполнив вращение на 90 градусов, а затем еще на 270 градусов, мы получаем суммарное вращение на 360 градусов. Однако результат вращения на 360 градусов абсолютно идентичен вращению на 0 градусов. Как мы уже говорили выше, это тождественная симметрия.

Другими словами, второе вращение (на 270 градусов) отменяет результат первого вращения (на 90 градусов).

Это действительно чрезвычайно важное свойство: любую симметрию можно *обратить*. Это означает, что для любой симметрии S существует другая симметрия S' , такая, что их композиция образует тождественную симметрию. S' называют обратной симметрией для S , или *инверсией*. Итак, мы увидели, что вращение на 270 градусов является инверсией вращения на 90 градусов.⁴

Мы убедились, что простой набор симметрий квадратного стола — четыре вращения $\{90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ\}$ — на самом деле совсем не так прост. Он обладает сложной внутренней структурой: существуют определенные правила, которым подчиняются взаимодействия членов этого множества.

Во-первых, мы можем скомпоновать или суммировать любые две симметрии.

Во-вторых, существует особая симметрия — тождественная. В нашем примере это вращение на 0 градусов. Если мы суммируем ее с любой другой симметрией, то в результате получим ту же самую симметрию в неизменном виде. Например,

$$90^\circ + 0^\circ = 90^\circ, 180^\circ + 0^\circ = 180^\circ \text{ и т. д.}$$

И, в-третьих, для любой симметрии S существует обратная (инверсная) симметрия S' , такая, что в сумме симметрии S и S' дают нам тождество.

А теперь — барабанная дробь! Множество вращений вместе с этими тремя правилами образуют пример того, что в математике называется *группой*.

Симметрии любого другого объекта также образуют группу. В общем случае группа включает намного больше элементов, чем рассматриваемые здесь четыре вращения, — их даже может быть бесконечно много.⁵

Давайте посмотрим теперь, как все это работает в случае круглого стола. Мы уже поднабрались опыта и поэтому понимаем, что множество симметрий круглого стола представляет собой набор абсолютно всех возможных вращений (причем не только на углы, кратные 90 градусам!), а визуализировать его мы можем как набор из *всех* точек окружности.

Каждая точка на этой окружности соответствует углу φ в диапазоне от 0 до 360 градусов и представляет вращение круглого стола на данный угол в направлении против часовой стрелки. В частности, есть особая точка, соответствующая вращению на 0 градусов. Она обозначена черным кружком на рис. 2.4, как и другая точка, соответствующая вращению на 30 градусов.

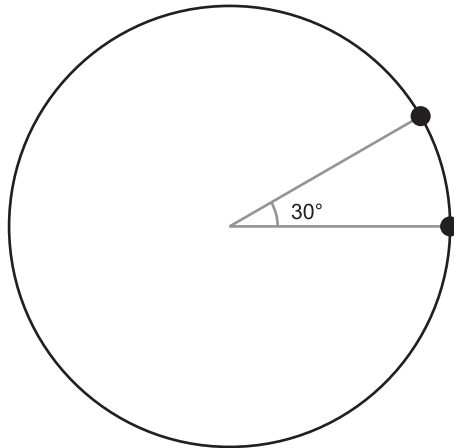


Рис. 2.4. Вращение на 0 градусов и вращение на 30 градусов

Теперь посмотрим, применимы ли перечисленные выше три правила к множеству точек на окружности.

Во-первых, композиция двух вращений — на φ_1 и φ_2 градусов — представляет собой вращение на $\varphi_1 + \varphi_2$ градусов. Если сумма $\varphi_1 + \varphi_2$ больше 360 градусов, то мы всего лишь вычитаем из нее «лишние» 360 градусов. В математике это называется *сложением*

по модулю 360. Например, если $\varphi_1 = 195^\circ$, а $\varphi_2 = 250^\circ$, то сумма двух углов составляет 445 градусов. Вращение на 445 градусов эквивалентно вращению на 85 градусов. Таким образом, в группе вращений круглого стола верно следующее:

$$195^\circ + 250^\circ = 85^\circ.$$

Во-вторых, на окружности есть особая точка, соответствующая вращению на 0 градусов. Это элемент тождественности данной группы.

И наконец, инверсия вращения на φ градусов против часовой стрелки — это вращение против часовой стрелки на $(360 - \varphi)$ градусов или, что то же самое, вращение на φ градусов по часовой стрелке (рис. 2.5).

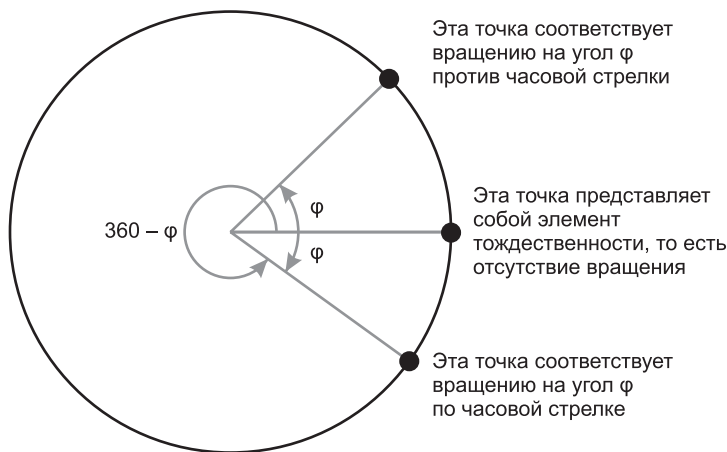


Рис. 2.5. Вращение на φ градусов и обратное ему

Итак, мы описали группу вращений круглого стола. Мы будем называть ее группой окружности. В отличие от группы симметрий квадратного стола, в которую входит четыре элемента, в этой группе бесконечно много элементов, так как между отметками 0 и 360 градусов помещается бесконечное число углов.

Теперь под наше интуитивное понимание симметрии мы подвели твердое теоретическое основание — по сути, мы превратили симметрию в математическую концепцию.

Прежде всего, мы объявили, что симметрия объекта — это преобразование, сохраняющее сам объект и его свойства. Затем мы сделали решающий шаг: перенесли внимание с объекта как такового на множество всех его симметрий. В случае квадратного стола это множество из четырех элементов (вращения на углы, кратные 90 градусам), а множество симметрий круглого стола бесконечно велико (все точки окружности). Наконец, мы описали точные правила, которые всегда выполняются в этих наборах симметрий: две симметрии можно сложить и получить в результате третью симметрию; обязательно должен существовать тождественный элемент; для каждой симметрии существует обратная. (Композиция симметрий также удовлетворяет свойству ассоциативности, описанному в примечании 4.) Таким образом, мы пришли к математической концепции группы.

Группа симметрий — это абстрактный объект, совершенно не похожий на те реальные объекты, о которых шла речь в начале нашего разговора. В отличие от самого стола, невозможно потрогать или подержать в руках множество его симметрий. Однако мы можем вообразить его, нарисовать его элементы, изучить и обсудить это множество. Кроме того, у каждого элемента такого абстрактного множества есть точное и конкретное значение: он представляет одно из возможных преобразований реального объекта — его симметрию.

Математика — это наука, изучающая подобные абстрактные объекты и концепции.

Опыт показывает, что симметрия — это основополагающий, руководящий принцип законов природы. Например, снежинка принимает форму идеального шестиугольника, потому что, как выясняется, это состояние с минимальной энергией, в котором способны кристаллизоваться молекулы воды.

Набор симметрий снежинки составляют вращения на углы, кратные 60 градусам, то есть на 60, 120, 180, 240, 300 и 360 градусов (последнее эквивалентно повороту на 0 градусов). Помимо этого, мы можем «перевернуть» снежинку относительно каждой из шести осей, соответствующих этим углам. Все эти вращения

и перевороты сохраняют форму и позицию снежинки; следовательно, они являются ее симметриями.*

Если перевернуть бабочку, то она будет лежать перед нами кверху лапками. Поскольку с одной стороны у нее растут лапки, а с другой их нет, то переворот, строго говоря, не является симметрией бабочки. Когда мы говорим, что бабочка симметрична, мы имеем в виду ее идеализированную версию, у которой передняя и задняя стороны абсолютно идентичны (в отличие от брюшка и спинки настоящей бабочки). В таком идеализированном представлении переворот бабочки попросту меняет местами левое и правое крылышки и, следовательно, становится симметрией. (Также можно представить замену правого крылышка на левое и наоборот без переворота бабочки кверху лапками.)

Это вынуждает нас поднять важный вопрос: в природе существует множество объектов, обладающих приблизительной симметрией. Настоящий стол не идеально круглый или квадратный, живая бабочка выглядит по-разному при взгляде на нее сверху и снизу, левая и правая стороны человеческого тела также различаются. Однако даже в подобных ситуациях бывает полезно абстрагироваться от несовершенства реального мира и рассматривать идеализированные версии или модели объектов: идеально круглый стол или изображение бабочки, на котором спинка ничем не отличается от брюшка. Это дает нам возможность исследовать симметрии идеализированных объектов, а полученные на основе такого анализа результаты мы затем можем скорректировать с учетом отличий реальных объектов от их моделей.

Не следует думать, что мы не ценим асимметрию, — конечно же, ценим и часто находим в ней красоту. Однако суть математической теории симметрии лежит не в эстетической плоскости. Она заключается в том, чтобы сформулировать концепцию симметрии в самых общих и — неизбежно — самых абстрактных терминах, для того чтобы сделать ее одинаково применимой к объектам из самых разных областей знания, будь то геометрия, теория чисел,

* Обратите внимание на то, что переворот стола не относится к числу симметрий: стол при этом оказывается столешницей вниз, а ножками кверху — давайте не забывать, что у этого предмета мебели есть ножки. Если бы мы рассматривали просто квадрат или круг (без ножек), то перевороты были бы самыми настоящими симметриями, и мы могли бы включить их в соответствующие группы симметрий.

топология, физика, химия, биология и т. п. После того как такая теория разработана, мы можем начинать говорить о механизмах нарушения симметрии — рассматривать возникновение асимметрии. Например, элементарные частицы набирают массу вследствие нарушения так называемой калибровочной симметрии. Этому способствует бозон Хиггса — трудноуловимая частица, которую ученые недавно открыли в ходе экспериментов на большом адронном коллайдере под Женевой.⁶ Изучение подобных механизмов нарушения симметрии позволяет нам получать бесценную информацию о поведении фундаментальных строительных кирпичиков природы.

Мне хотелось бы отдельно подчеркнуть некоторые базовые качества абстрактной теории симметрии, так как они великолепно иллюстрируют значимость математики.

Первое качество — это *универсальность*. Группа окружности служит группой симметрий не только круглого стола, но и других круглых объектов, таких как стакан, бутылка, колонна и т. п. На самом деле, назвать объект круглым и сказать, что группа его симметрий представляет собой группу окружности, — одно и то же. Это чрезвычайно сильное заявление: мы понимаем, что способны описать важный атрибут объекта («круглый»), всего лишь указав на его группу симметрий («окружность»). Точно так же заявление о «квадратном» объекте означает, что группа симметрий данного объекта представляет собой описанную выше группу из четырех элементов. Другими словами, один и тот же математический объект (например, группа окружности) описывает множество разнообразных конкретных предметов, указывая на общие для всех них универсальные свойства (такие, как «округлость»⁷).

Второе качество — *объективность*. Концепция группы несколько не зависит от нашей ее интерпретации. Кто бы ни решился исследовать ее, для всех она будет означать одно и то же. Разумеется, чтобы понять эту концепцию, необходимо знать язык, используемый для ее описания, — язык математики. Но его может выучить каждый. Человеку, желающему усвоить смысл знаменитого утверждения Рене Декарта: «*Je pense, donc je suis*», необходимо знать французский язык (по крайней мере, понимать слова, из которых состоит фраза) — и это тоже доступно каждому. Однако в случае философского утверждения, даже если относительно его буквального перевода разногласий не возникнет,

интерпретации могут быть самыми разными. Более того, одну и ту же интерпретацию кто-то будет считать истинной, а кто-то ложной. В противоположность этому смысл логически непротиворечивого математического утверждения не допускает двояких интерпретаций;⁸ точно так же его истинность всегда объективна. (В целом, истинность конкретного утверждения может зависеть от системы аксиом, в рамках которой оно рассматривается. Тем не менее даже в этом случае зависимость от аксиом также объективна.) Например, утверждение «группа симметрий круглого стола является окружностью» истинно для всех, всегда и везде. Другими словами, математические истины — необходимые истины. Мы подробнее поговорим об этом в главе 18.

Третье качество, тесно связанное с первыми двумя, — это *долговечность*. Теорема Пифагора, без сомнения, означала для древних греков то же самое, что и для нас сегодня, и нет никаких оснований опасаться, что ее смысл может измениться в будущем. Точно так же все истинные математические утверждения, о которых мы говорим в этой книге, останутся в силе навечно.

Факт наличия такого объективного и долговечного знания (к тому же принадлежащего в равной степени всем нам) — вовсе не чудо, как многие могут полагать. Считается, что математические концепции существуют в так называемом Платоническом мире — собственном пространстве, отдельном от физического и интеллектуального миров (мы подробнее поговорим об этом в последней главе книги). До сих пор так до конца и не понятно, что это в действительности такое и какие факторы подталкивают людей к тому, чтобы делать все новые и новые математические открытия. Очевидно лишь, что роль скрытой реальности в нашей жизни будет в дальнейшем лишь возрастать, особенно с учетом распространения новых компьютерных технологий и технологий трехмерной печати.

Четвертое качество — это *применимость* математических идей к реальному миру. Например, благодаря тому, что ученые взглянули на элементарные частицы и взаимодействия между ними с точки зрения концепции симметрии, в квантовой физике за последние пятьдесят лет произошел огромный скачок вперед. Частицы, такие как электроны или кварки, ничем, по сути, не отличаются от круглых столов или снежинок, чье поведение в огромной степени определяется их симметриями (какие-то симметрии точные, а какие-то приближительные).

Превосходной иллюстрацией служит история с открытием кварков. Из книг, которыми поделился со мной Евгений Евгеньевич, я узнал, что в основе классификации адронов Гелл-Мана и Неэмана, о которой я упоминал в предыдущей главе, лежит *группа симметрий*. Хотя математики уже исследовали эту группу раньше, они даже не догадывались о существовании какой-либо связи между ней и субатомными частицами или чем-то подобным. Математическое название группы — $SU(3)$. За буквами S и U скрывается выражение *special unitary* — «специальная унитарная». По своим свойствам эта группа напоминает группу симметрий сферы, которую мы в деталях обсудим в главе 10.

Представления группы $SU(3)$, то есть различные способы, позволяющие воплотить группу $SU(3)$ в виде группы симметрий, были уже описаны математиками ранее. Гелл-Ман и Неэман заметили сходство между структурой подобных представлений и закономерностями в обнаруженных ими моделях адронов и использовали эту информацию для составления классификации адронов.

Слово «представление» имеет в математике особый смысл, отличный от того, к которому мы привыкли в повседневной жизни. Позвольте мне отвлечься на минутку и пояснить, что этот термин означает в текущем контексте. Наверное, проще всего это сделать на примере. Вспомните группу вращений круглого стола, которую мы обсуждали чуть выше, — группу окружности. Теперь представьте, что наш стол начал расти вширь и теперь простирается бесконечно во все стороны. Растянув его таким способом, мы получили абстрактный математический объект — плоскость. Каждое вращение стола вокруг центра порождает поворот этой плоскости вокруг той же самой точки. Таким образом, мы сформировали правило, связывающее одну из симметрий (вращений) плоскости с каждым элементом группы окружности. Другими словами, каждый элемент группы окружности может быть представлен той или иной симметрией плоскости. Вот почему математики называют этот процесс *представлением* группы окружности.

Мы знаем, что плоскость двумерная, ведь у нее две оси координат, а значит, каждая точка также обозначается двумя координатами.

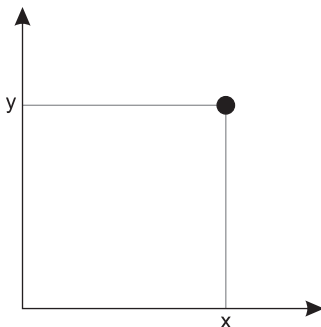


Рис. 2.6. Любая точка на плоскости обозначается двумя координатами

Следовательно, можно утверждать, что мы создали «двумерное представление» группы вращений. Это всего лишь означает, что каждый элемент группы вращений теперь воплощен в виде симметрии плоскости.⁹

Существуют не только двумерные пространства — плоскости, но и пространства с большим числом измерений. Например, мы с вами живем в трехмерном пространстве. Это означает, что у него три оси координат, и для того чтобы указать позицию любой точки, нам нужно сообщить три ее координаты (x, y, z) , как показано на рис. 2.7.

Невозможно вообразить четырехмерное пространство, но математика предоставляет нам универсальный язык, позволяющий рассуждать о пространствах любой размерности. На этом языке мы описываем точки четырехмерного пространства с помощью четверок чисел (x, y, z, t) — аналогично точкам трехмерного пространства, которые представляются тройками (x, y, z) . Точно так же можно описать точку любого n -мерного пространства (где n — натуральное число), используя набор из n чисел. Если вы когда-либо пользовались программами для работы с электронными таблицами, то вам знакомы такие наборы: один набор — это одна строка таблицы, а каждое из n чисел в строке соответствует одному конкретному атрибуту данных. Таким образом, каждая строка таблицы описывает одну точку в n -мерном пространстве. (В главе 10 мы подробнее поговорим о пространствах различной размерности.)

Если каждому элементу группы можно согласованным образом¹⁰ сопоставить одну из симметрий n -мерного пространства,

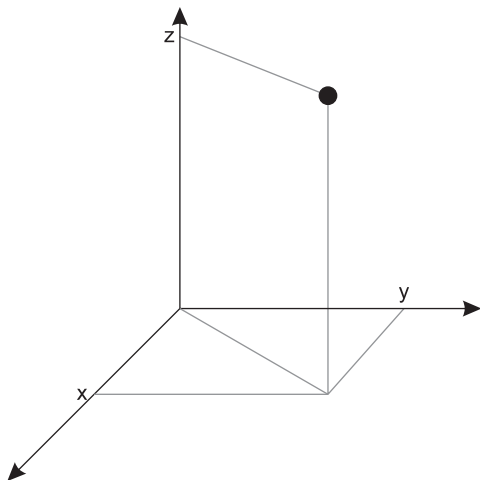


Рис. 2.7. Точка в трехмерном пространстве определяется тремя пространственными координатами

то можно сказать, что данная группа обладает « n -мерным представлением».

Оказывается, группа может обладать представлениями разной размерности. Вот почему элементарные частицы можно сгруппировать в семейства из восьми или десяти частиц: у группы $SU(3)$ есть как 8-мерные, так и 10-мерные представления. Восемь частиц в каждом октете из определенных Гелл-Маном и Нейманом (как тот, что изображен на рис. 1.4) взаимно однозначно соответствуют восьми осям координат 8-мерного пространства, являющегося представлением группы $SU(3)$. Аналогично и с декуплетами частиц. (В то же время частицы невозможно объединить в семейства из, скажем, семи или одиннадцати штук — математики доказали, что у группы $SU(3)$ нет 7- и 11-мерных представлений.)

Поначалу это считалось всего лишь удобным способом группировки частиц, обладающих схожими свойствами. Однако Гелл-Ман пошел дальше: он объявил о существовании веских причин, обосновывающих такую схему классификации. В сущности, он объяснил, что данная схема потому так хорошо и работает, что адроны состоят из еще более мелких частиц — кварков. Одни типы адронов состоят из двух кварков, другие — из трех. Независимо от Гелл-Мана схожее предположение выдвинул физик

Джордж Цвейг (предложивший для этих мелких частиц другое название — «тузы»).

Это было ошеломляющее заявление. Оно не только шло вразрез с бытовавшим в то время убеждением, будто протоны, нейтроны и другие адроны неделимы; подразумевалось также, что новые частицы должны обладать электрическими зарядами, по величине равными доле заряда электрона. Это предсказание взбудоражило все научное общество, ведь никому еще не удавалось обнаружить ничего подобного. Тем не менее существование кварков совсем скоро было подтверждено экспериментально, и в точном соответствии с прогнозами они действительно обладали дробными зарядами!

Что же натолкнуло Гелл-Мана и Цвейга на мысль о существовании кварков? Это была математическая теория представлений группы $SU(3)$, и в частности тот факт, что у группы $SU(3)$ есть два разных трехмерных представления (на самом деле, как раз поэтому в названии группы и присутствует цифра 3). Гелл-Ман и Цвейг предположили, что эти два представления должны описывать два семейства фундаментальных частиц: из трех кварков и трех антикварков. Кроме того, как оказалось, 8- и 10-мерные представления группы $SU(3)$ также легко конструируются на основе трехмерных. И это дает нам точную «схему сборки» адронов из кварков — прямо как в конструкторе «Лего».

Гелл-Ман назвал три этих кварка «верхним», «нижним» и «странным».¹¹ Протон состоит из двух верхних кварков и одного нижнего, а нейтрон — из двух нижних кварков и одного верхнего (см. рис. 1.2 и 1.3). Обе эти частицы принадлежат октету, показанному на рис. 1.4. Другие частицы в данном октете включают в себя и странный кварк. Существуют также октеты частиц, каждая из которых представляет собой ту или иную композицию из одного кварка и одного антикварка.

Открытие кварков — превосходный пример того, о чем мы уже говорили во введении: математика действительно играет первостепенную роль в истории научных открытий. Существование этих частиц было предсказано не на основе эмпирических данных — ученые отталкивались исключительно от математических моделей симметрий. Это было чисто теоретическое предположение, сделанное в рамках сложной математической теории представлений группы $SU(3)$. Для того чтобы овладеть

этой теорией, физикам потребовались годы (и, к слову, многие поначалу противились ее внедрению), однако сегодня развитие физики элементарных частиц без нее попросту немыслимо. Теория представлений не только предоставила удобный способ классификации адронов, но также привела к открытию кварков — событию, навеки изменившему наше представление о физической реальности.

Только представьте себе: казалось бы, доступная лишь немногим математическая теория позволила нам добраться до самой сути того, как и из чего построен наш мир. Невозможно не поддаваться очарованию волшебной гармонии этих крохотных фрагментов материи, не восхищаться умением математиков выявлять глубинные процессы, заставляющие крутиться шестеренки Вселенной!

Рассказывают, будто жена Альберта Эйнштейна, услышав, что для определения формы пространства — времени необходимо прибегнуть к помощи телескопа из обсерватории Маунт-Вилсон, обронила: «Надо же, а мой муж делает то же самое на обороте старого конверта».

Физикам, конечно, необходимо изощренное дорогое оборудование, например большой адронный коллайдер в Женеве. Тем более поразителен тот факт, что ученые, такие как Эйнштейн и Гелл-Ман, вскрывали глубочайшие секреты окружающего мира с помощью того, что, на первый взгляд, кажется исключительно теоретическим и совершенно абстрактным математическим знанием.

Не важно, кто мы такие и во что верим, — все мы являемся хранителями этого знания. Оно объединяет нас и открывает новые, доселе неизведанные стороны нашей любви к Вселенной.

Глава 3. Пятая проблема

План Евгения Евгеньевича сработал безупречно: я был «обращен» в математику. Я быстро учился, и чем глубже я погружался в эту науку, тем сильнее она меня очаровывала, тем больше мне хотелось узнать. Именно так все и происходит, когда вы влюбляетесь.

Я начал регулярно заниматься с Евгением Евгеньевичем. Он давал мне книги для самостоятельного изучения, и раз в неделю мы встречались с ним в Педагогическом институте, для того чтобы обсудить прочитанное. Евгений Евгеньевич регулярно занимался футболом, хоккеем и волейболом, но, как и многие мужчины в Советском Союзе в то время, был заядлым курильщиком. Из-за этого еще очень долгое время запах сигарет ассоциировался у меня с занятиями математикой.

Иногда мы засиживались далеко за полночь. Однажды нас даже умудрился запереть в аудитории ночной сторож, который и подумать не мог, что кто-то может оставаться внутри в такой поздний час. А мы настолько увлеклись обсуждением, что не услышали звука поворачивающегося ключа. К счастью, аудитория была на первом этаже, и нам удалось выбраться наружу через окно.

Это был 1984 год, мой последний год в школе. Мне нужно было решать, в какой университет подавать документы. В Москве было множество самых разных учебных заведений, но единственным местом, где я мог бы изучать чистую математику, был МГУ — Московский государственный университет. Его знаменитый Мехмат — механико-математический факультет — предлагал самую передовую программу по изучению математики во всем СССР.

В те времена вступительные экзамены в высшие учебные заведения России были не похожи на ЕГЭ и экзамены SAT, которые сдают студенты в Америке.

Для поступления на Мехмат нужно было сдать четыре экзамена: математика письменно, математика устно, сочинение и физика устно. Те абитуриенты, которые, подобно мне, окончили школу на отлично и получили золотую медаль, автоматически зачислялись в том случае, если получали пятерку на первом экзамене.

К тому времени я уже настолько продвинулся в изучении математики, что оставил школьный курс далеко позади, и мне казалось, что экзамены в МГУ не будут для меня проблемой.

Однако мой оптимизм был преждевременным. Первое предупреждение я получил в форме письма из школы заочного обучения, в которой числился студентом. Эта школа была открыта несколькими годами раньше, а одним из ее основателей был знаменитый советский математик Израиль Гельфанд (мы еще поговорим о нем чуть позже). Школа была призвана помочь ученикам, жившим, как и я, за пределами крупных городов, у которых не было возможности посещать специализированные математические школы. Каждый месяц нам присылали брошюры, в которых, помимо разъяснения школьного материала, содержалась дополнительная информация. Также нам предлагалось решить несколько задач — более сложных, чем те, что входили в школьную программу. Свои записи с решениями мы отсылали обратно в школу, а после проверки (чаще всего этим занимались студенты последних курсов Московского университета) нам возвращали их с оценками и пометками. Я занимался в этой школе, а также в другой, более ориентированной на физику, в течение трех лет. Они стали для меня бесценными источниками знаний, хотя материал их курсов и был очень похож на то, что мы проходили в обычной школе (в отличие от вещей, которые я изучал в частном порядке с Евгением Евгеньевичем).

Полученное мной письмо было очень коротким: «Если вы планируете поступать в Московский университет, зайдите к нам, мы поможем советом». Еще там был указан адрес в университетском городке МГУ и часы работы. Вскоре после получения письма я отправился в Москву; дорога на электричке занимала два часа. Кабинет, в котором располагалась школа, представлял собой большое помещение, заставленное столами. Несколько человек работали, печатали на машинках, что-то исправляли в бумагах. Я представился, показал письмо, и меня немедленно провели к какой-то небольшого роста женщине слегка за тридцать.

— Как вас зовут? — спросила она вместо приветствия.

— Эдуард Френкель.

— И вы собираетесь поступать в МГУ?

— Да.

— На какой факультет?

— Мехмат.

— Понятно, — она опустила глаза и задала очередной вопрос: — А кто вы по национальности?

- Русский, — ответил я.
- Правда? А ваши родители?
- Ну... Моя мама русская.
- А отец?
- Папа еврей.

Она кивнула. Этот диалог может показаться вам сюрреалистическим, и мне он тоже кажется сюрреалистическим сейчас, когда я пишу об этом. Однако в Советском Союзе образца 1984 года — помните Оруэлла?* — спросить у человека, какой он национальности, не считалось чем-то из ряда вон выходящим. Паспорт, который был у всех советских граждан, содержал даже специальную графу «национальность». Она стояла сразу за 1) именем, 2) отчеством, 3) фамилией и 4) датой рождения. По этой причине ее называли просто «пятая графа». Национальность ребенка также указывалась в свидетельстве о рождении — вместе с национальностями родителей. Если у родителей были разные национальности, как в моем случае, то они могли выбрать, какую национальность записать ребенку в свидетельстве о рождении.

Фактически, пятая графа была всего лишь удобным способом отделять евреев от неевреев (она позволяла выявлять и людей других национальностей, например татар и армян, которые также зачастую становились жертвами предубеждений и объектами преследований — хотя и не в таком масштабе, как евреи). У меня в пятой графе было написано, что я русский, но меня выдавала фамилия, которую я получил от отца и национальная принадлежность которой не вызывала сомнений.

Важно отметить, что моя семья отнюдь не была религиозной. Мой отец вырос в семье, не соблюдающей религиозные традиции; точно так же они никак не коснулись моего воспитания.

В те дни считалось, что религии в Советском Союзе не существует, хотя по факту, разумеется, она никуда не пропадала. Большинство христианских православных храмов были разрушены или закрыты. Внутри немногих сохранившихся церквей можно было встретить разве что старых бабушек, таких как, например,

* До прихода к власти Михаила Горбачева оставался еще целый год, и два года — до начала «перестройки». Во многих аспектах советский тоталитарный режим 1984 года казался пугающим отражением пророческой книги Джорджа Оруэлла.

моя бабушка по материнской линии. Она время от времени посещала службы в единственной работающей церкви в моем родном городе. Синагог было еще меньше. В нашем городе не было ни одной, а в Москве, население которой приближалось к десяти миллионам, официально существовала только одна синагога.¹ Ходить на службы в церкви и синагоги было опасно — тебя могли заметить агенты в штатском, и тогда проблем было не избежать. Таким образом, когда человека называли евреем, имелась в виду не религия, а этническая принадлежность — или «кровь».

Даже если бы я не носил отцовскую фамилию, мне бы не удалось скрыть от приемной комиссии свои еврейские корни: в заявлении на поступление в высшее учебное заведение обязательно требовалось указывать полные имена обоих родителей. Это означало, что я должен был указать их отчества, то есть имена моих дедушек. Отчество моего отца — Иосифович. В Советском Союзе того времени оно моментально выдавало еврейское происхождение, и это был еще один способ определить мою национальность (если позабыть о характерной фамилии). Система была построена так, чтобы безошибочно определять людей, в которых есть хотя бы четверть еврейской крови.

Выяснив, что согласно этому определению я еврей, женщина спросила:

— Вы знаете, что евреев не принимают в Московский университет?

— Что вы хотите сказать?

— Я хочу сказать, что вы можете даже не пытаться подавать туда документы. Не теряйте времени. Вас все равно не возьмут. Я не знал, что ответить.

— И поэтому вы послали мне то письмо?

— Да. Я просто пытаюсь вам помочь.

Я огляделся. Было ясно, что все присутствующие знали, о чем мы говорим, даже если они специально и не прислушивались к разговору. Такое наверняка случалось уже десятки раз, и все привыкли к подобным ситуациям. Люди отводили глаза, будто я был неизлечимо болен. У меня похолодело внутри.

Мне и раньше приходилось сталкиваться с проявлениями антисемитизма, но на личном, а не институциональном уровне. В пятом классе несколько моих одноклассников стали дразнить меня: «Еврей, еврей!». Не думаю, что они понимали значение этого

слова (например, многие путали его со словом «европеец»). Наверное, они слышали антисемитские высказывания своих родителей или других взрослых людей. (К сожалению, антисемитизм нередко встречается в русской культуре.) Я был достаточно силен, и мне повезло иметь пару настоящих друзей, которые ни секунды не колеблясь вступались за меня, поэтому до настоящей драки с этими хулиганами дело не дошло, и все же это был крайне неприятный опыт. Я был слишком горд, чтобы рассказывать об этом учителям или родителям, но однажды подобная ситуация возникла в присутствии учителя, который не замедлил вмешаться. Тех ребят немедленно вызывали к директору, и насмешки прекратились.

Мои родители слышали о дискриминации евреев на вступительных экзаменах в университеты, но не придавали этому особого значения. В нашем городе и евреев-то было совсем немного, а все случаи дискриминации, о которых было известно моим родителям, касались программ по физике. Типичным оправданием подобной избирательности служило то, что такие программы были связаны с ядерными исследованиями, а следовательно, с национальной безопасностью и государственными тайнами. Согласно этой логике, правительство не желало допускать евреев в эти области знаний, так как те могли эмигрировать в Израиль или другую страну. Однако тогда какое отношение к этому имели студенты, стремящиеся изучать чистую математику? Очевидно, кто-то считал иначе.

Все в этом разговоре, случившемся в МГУ, было странным. И я имею в виду вовсе не то, что ему самое место в одном из произведений Кафки. Конечно, можно было бы предположить, что женщина, с которой я беседовал, просто пыталась помочь мне и другим ученикам, заранее предупреждая о том, чего следует ожидать. Однако возможно ли это? Не забывайте, что мы говорим о 1984 году, когда все аспекты жизни в Советском Союзе все еще находились под жестким контролем Коммунистической партии и КГБ. Официальной политикой государства было равенство всех национальностей, и публично заявлять об обратном означало подвергать себя опасности. Тем не менее эта женщина спокойно говорила об этом со мной, незнакомцем, которого видела первый раз в жизни, и ее не волновало, что коллеги могут подслушать наш разговор.

Кроме того, вступительные экзамены в МГУ всегда проходили на месяц раньше, чем в других вузах. Это давало возможность

абитуриентам, которых не приняли в МГУ, подать документы в другое учебное заведение. Зачем пытаться отговорить человека даже попробовать поступить в университет? Складывалось впечатление, будто какие-то высшие силы пытались сделать так, чтобы в МГУ не ступила нога ни одного еврея — ни моя, ни чья-то еще.

Тем не менее это меня не отпугнуло. После долгого обсуждения ситуации с родителями мы пришли к выводу, что терять мне нечего. Мы решили, что я все равно подам документы в МГУ и буду надеяться на лучшее.

Первым, в начале июля, проходил письменный экзамен по математике. Он всегда состоял из пяти задач. Пятая задача считалась самой страшной, неразрешимой. Как пятый элемент экзамена. Однако я сумел решить все задачи, включая пятую. Понимая, что с большой вероятностью человек, которому выпадет проверять мою работу, будет настроен против меня и приложит все усилия к тому, чтобы найти в ней «дыры», я описал решения в мельчайших деталях. Затем я проверил и перепроверил все доказательства и вычисления, для того чтобы удостовериться, что не допустил ни одной ошибки. Все выглядело идеально! В превосходном настроении я сел на электричку и поехал домой. На следующий день я рассказал Евгению Евгеньевичу, как решил предложенные задачи, и он подтвердил, что я все решил правильно. Казалось, я на верном пути.

Следующим экзаменом была устная математика. Он был назначен на 13 июля — день оказался пятницей.

Я очень четко помню тот день во всех деталях. Экзамен должен был проходить после обеда, и мы вместе с мамой сели на утреннюю электричку. В кабинет в здании МГУ я зашел за несколько минут до начала экзамена. Это был обыкновенный учебный класс: внутри пятнадцать — двадцать абитуриентов и четыре или пять экзаменаторов. В начале экзамена каждый из нас должен был взять листок, на котором были написаны два вопроса. Эти листки лежали большой кучей на столе в передней части кабинета чистой стороной вверх. Процедура была похожа на вытаскивание лотерейного билета, поэтому мы и сами листочки тоже называли билетами. Всего заготовлено было, наверное, около ста вопросов. Я не волновался о том, какой билет вытащу, ведь я знал весь материал назубок. Взяв билет, абитуриент должен был сесть за

один из столов и подготовить ответ, используя только предоставленные чистые листы бумаги.

Мой билет содержал такие вопросы: 1) окружность, вписанная в треугольник, и формула вычисления площади треугольника через радиус окружности; 2) производная отношения двух функций (только формула). Я был полностью готов отвечать — я мог бы сдать этот экзамен во сне!

Я сел, написал несколько формул на листке бумаги и собрался с мыслями. На все про все мне потребовалось около двух минут. Больше тратить время смысла не было — я был готов. Я поднял руку. В комнате находилось несколько экзаменаторов. Они ждали, когда мы начнем поднимать руки, сигнализируя о своей готовности, но, к моему бескрайнему удивлению, меня они полностью игнорировали, будто я вовсе не существовал. Они смотрели прямо сквозь меня. Я посидел некоторое время с поднятой рукой — никакой реакции.

Затем, минут через десять, руки подняли пара других ребят, и как только это произошло, к ним поспешили экзаменаторы. Они садились рядом с абитуриентом и выслушивали его или ее ответы. Все это происходило прямо рядом со мной, и мне не приходилось напрягать слух. Экзаменаторы были чрезвычайно корректны и в основном только кивали головой, лишь изредка задавая уточняющие вопросы. Ничего необычного. Когда абитуриент заканчивал отвечать на вопросы из билета (на это уходило около десяти минут), экзаменатор давал ему или ей одну дополнительную задачу. Все эти задачи казались очень простыми, и большинство ребят сразу же их решали. И все!

Первые два абитуриента уже ушли со счастливыми улыбками, очевидно, получив пятерки, а я все так же продолжал сидеть. Наконец, я остановил одного из экзаменаторов, проходившего мимо, — молодого человека, явно свежеиспеченного кандидата наук — и с настойчивой интонацией спросил: «Почему вы не подходите ко мне?» Он отвел глаза и тихо проговорил: «Простите, нам не разрешено с вами говорить».

Примерно через час после начала экзамена в кабинет вошли двое мужчин среднего возраста. Они энергично прошагали к столу в передней части помещения и представились сидевшему там человеку. Он кивнул и указал на меня. Стало ясно, что это и есть те люди, которых я должен был дожидаться, — мои инквизиторы.

Они подошли к моему столу и представились. Один был худой, с нервными телодвижениями, а второй полноватый и с большими усами.

— Хорошо, — произнес худой (в основном со мной говорил именно он), — что у нас здесь? Какой у вас первый вопрос?

— Окружность, вписанная в треугольник, и...

Он прервал меня:

— Каково определение окружности?

Его поведение было довольно агрессивным, что совершенно не соответствовало тому, как дружелюбно другие экзаменаторы обращались с абитуриентами. Кроме того, они вообще не задавали дополнительных вопросов до тех пор, пока абитуриент полностью не ответит на вопрос из билета.

Я сказал:

— Окружность — это набор точек на плоскости, равноудаленных от данной точки.

Это было стандартное определение.

— Неправильно! — радостно воскликнул мужчина.

Как же это может быть неправильным?

Он подождал несколько секунд, после чего добавил:

— Это набор *всех* точек на плоскости, равноудаленных от данной точки.

Звучало это просто как придирка к грамматике — первый признак надвигающихся неприятностей.

— Хорошо, — повторил мужчина. — А каково определение треугольника?

Я дал определение, и он задумался, без сомнения, пытаюсь найти, к чему еще придраться, а потом продолжил:

— А каково определение окружности, вписанной в треугольник?

Это привело нас к определению касательной, затем просто прямой, затем к другим вещам, и вскоре он уже спрашивал меня о пятом постулате Эвклида о единственности параллельных прямых, что даже не входило в школьную программу! Мы обсуждали проблемы, никак не связанные с вопросами в билете и выходящие далеко за пределы того объема знаний, которыми я должен был обладать как выпускник школы.

Каждое мое слово вызывало шквал дополнительных вопросов. Каждому понятию я должен был дать определение, и если

в определении использовалось другое понятие, то и его я также должен был определить.

Само собой разумеется, что если бы у меня была фамилия Иванов, то мне бы никогда не задали таких вопросов. Оглядываясь назад, я понимаю, что самым правильным было бы сразу же заявить протест и сказать экзаменаторам, что они выходят за рамки дозволенного. Однако это сейчас легко говорить. Тогда же мне было шестнадцать лет, и со мной беседовали люди на двадцать пять лет старше меня. Они были официально уполномочены принимать экзамены в Московском государственном университете, поэтому мне казалось, что я обязан стараться отвечать на все их вопросы как можно лучше.

После почти часового допроса мы перешли ко второму вопросу в билете. К тому времени все остальные ребята уже ушли, и аудитория была пуста. Очевидно, я был единственным абитуриентом, требовавшим «особого обращения». Думаю, евреев специально распределяли так, чтобы в каждом кабинете оказалось не больше одного-двух.

Второй вопрос заключался в том, что я должен был написать формулу вычисления производной от отношения двух функций. От меня не требовалось приводить никакие определения или доказательства. Об этом четко говорилось в билете: только формула. Тем не менее, разумеется, экзаменаторы потребовали, чтобы я пересказал им целую главу из учебника по дифференциальному исчислению.

— Каково определение производной?

Стандартное определение, которое я дал, включало понятие предела.

— Каково определение предела?

Затем «Что такое функция?» и снова, и снова без конца.

Вопрос дискриминации по этническому признаку на вступительных экзаменах в МГУ был темой множества публикаций. Например, математик и педагог Марк Сол привел мою историю в качестве примера в своей важной и глубокой статье² в журнале *Notices of the American Mathematical Society*. Он провел удачную параллель между ситуацией на моем вступительном экзамене и допросом, который Алисе учинила Червонная Королева в сказке «Алиса в стране чудес». Я знал все ответы, но в этой игре, где каждое мое слово оборачивали против меня, у меня не было ни малейших шансов на выигрыш.

В другой статье³ на ту же тему в журнале *Notices* журналист Джордж Шпиро писал:

Евреи — или абитуриенты, чьи имена были похожи на еврейские, — проходили вступительные экзамены «в особом режиме»... На устном экзамене планка задиралась невозможно высоко. Нежелательным кандидатам задавали «вопросы на засыпку», требующие сложной аргументации и длительных вычислений. Некоторые задачи попросту невозможно было решить, либо они имели двусмысленную формулировку, либо правильного ответа на них не существовало. Эти вопросы предназначались не для проверки знаний и навыков кандидатов, а для того чтобы отсеять «неудобных». Утомительный, очевидно несправедливый допрос зачастую длился по пять-шесть часов, несмотря на то что по правилам на проведение экзамена отводилось не более трех с половиной часов. Даже если кандидат давал верные ответы, в его суждениях всегда можно было найти, за что зацепиться. Известен случай, когда абитуриенту заявили, что его определение окружности неверное. Он сформулировал его так: «набор точек, равноудаленных от данной точки». Правильным ответом, по мнению экзаменатора, было «набор всех точек, равноудаленных от данной точки». В другой ситуации ответ на тот же самый вопрос посчитали некорректным, так как кандидат забыл упомянуть, что расстояние должно быть ненулевым. При решении уравнения ответ «1 и 2» объявлялся неверным, так как верный ответ, по мнению экзаменатора, был «1 или 2» (примечательно, что тот же самый экзаменатор другому абитуриенту сказал ровно противоположное и счел ответ «1 или 2» неправильным).

Однако вернемся к моему экзамену. Прошло еще полтора часа. Затем один из экзаменаторов сказал:

— Хорошо, с вопросами мы закончили. Теперь решите эту задачу.

Задача, которую мне дали, оказалась довольно сложной. Для ее решения требовалось применить так называемый принцип Штурма, который в рамках школьной программы не изучается.⁴

Однако мне он был известен — спасибо школе заочного обучения, поэтому я сумел найти решение. Экзаменатор вернулся, когда я работал над последними вычислениями.

— Вы закончили?

— Почти.

Он взглянул на мои записи и, без сомнения, понял, что мое решение верно и что мне действительно осталось лишь подсчитать кое-что.

— Знаете, — сказал он, — давайте-ка лучше я дам вам другую задачу.

Забавно, что вторая задача оказалась вдвое сложнее. И все же я был в состоянии решить ее. Экзаменатор снова прервал меня на полпути.

— Еще не закончили? Попробуйте эту.

Если бы это был боксерский поединок, с одним из боксеров, зажатым в углу, окровавленным, отчаянно пытающимся выстоять против обрушившегося на него шквала ударов (многие из которых были ниже пояса), то третья задача была бы эквивалентом последнего, смертельного удара. На первый взгляд, она казалась совершенно бесхитростной: дана окружность и две точки на плоскости за пределами этой окружности. Требуется построить другую окружность, проходящую через эти две точки и касающуюся первой окружности ровно в одной точке.

В действительности решение этой задачи далеко не очевидно. Вряд ли даже профессиональный математик смог бы решить ее в отведенное мне короткое время. Для этого необходимо либо применить трюк под названием «инверсия», либо выполнить сложные геометрические построения. Ни один из этих способов в школе не проходят, следовательно, таких задач не должно было быть на вступительных экзаменах.

Я знал об инверсии и догадался, что ее можно было бы применить в данной ситуации. Я начал работать над решением задачи, но несколько минут спустя мои экзаменаторы вернулись и сели рядом. Один из них сказал:

— Знаете, я только что разговаривал с заместителем председателя приемной комиссии и рассказал ему о вас. Он спросил, почему мы продолжаем терять время... Смотрите, — он вытащил официального вида формуляр, на котором было что-то написано (я впервые увидел эту бумагу). — Вы не дали полного ответа на

первый вопрос в билете, и вы даже не смогли дать определения окружности. Поэтому нам пришлось поставить минус. Отвечая на второй вопрос, вы здорово плавали, но, ладно, мы поставили вам плюс-минус. Однако вы не справились с первой задачей, не решили вторую. И что насчет третьей? Ее вы тоже не решили. Сами понимаете, у нас нет другого выбора, кроме как поставить вам неудовлетворительную оценку.

Я взглянул на часы. С начала экзамена прошло более четырех часов. Я был совершенно вымотан.

— Могу я взглянуть на свою работу с письменного экзамена?

Второй мужчина сходил к главному столу и принес бумаги. Он положил их передо мной. Переворачивая страницы, я испытывал ощущение, будто попал в сюрреалистический фильм. Все ответы были правильными, все решения были правильными. Тем не менее вся работа была исписана замечаниями. Они были сделаны карандашом — видимо, для того чтобы в случае необходимости их можно было легко стереть. Все замечания выглядели просто нелепо, словно кто-то решил надо мной неуклюже подшутить. Одно из них я помню до сих пор: в ходе расчетов я написал « $\sqrt{8} > 2$ », и рядом стоял комментарий: «не доказано». Серьезно? Остальные замечания были не лучше. И какую оценку мне поставили за пять решенных задач — отмечу, решенных верно? Не пять, и даже не четыре. Это была тройка! Тройка за такое?

Я знал, что все кончено. Мне было не под силу бороться с системой. Я сказал:

— Хорошо.

Один из мужчин спросил:

— Вы планируете подавать апелляцию?

Я знал о существовании апелляционной комиссии. Но какой смысл был обращаться туда? Возможно, мне бы удалось убедить их поднять оценку за письменный экзамен до четверки, но опротестовать результаты устного экзамена было намного сложнее: это было бы слово экзаменаторов против моего. И даже если бы они согласились поставить мне тройку, что потом? Впереди были еще два экзамена, на которых они бы окончательно меня добились.

Вот, как Джордж Шпиро описывал это в журнале *Notices*:⁵

Даже если абитуриенту, несмотря ни на что, удавалось сдать и письменный, и устный экзамены, его или ее всегда

можно было «завалить» на сочинении по русской литературе с помощью стандартной фразы «недостаточно раскрыта тема». За очень редкими исключениями апелляции против неудовлетворительных оценок почти не имели шансов на успех. В лучшем случае их попросту игнорировали, а в худшем абитуриента отчитывали за демонстрацию «неуважения к экзаменаторам».

Я подумал, а стоило ли поступать в университет, сотрудники которого делали все, что было в их силах, чтобы не допустить меня туда. Так что я ответил:

— Нет. Вообще-то я бы хотел забрать заявление.

Их лица озарились улыбками. Отсутствие апелляции означало меньше трудностей для них, меньше возможностей для неприятностей.

— Конечно, — сказал разговорчивый. — Я сейчас принесу все бумаги.

Мы вышли из кабинета и зашли в лифт. Двери закрылись. Мы остались вдвоем. Экзаменатор явно пребывал в хорошем настроении. Он сказал:

— Вы отлично показали себя. Впечатляюще выступили. Я все гадал — вы, наверное, ходили в специальную математическую школу?

Я ответил, что вырос в небольшом городке, и у нас не было специальных математических школ.

— Правда? Наверное, ваши родители математики?

— Нет, они инженеры.

— Интересно... Мне впервые встречается такой сильный ученик, который не посещал специальную матшколу.

Я не верил своим ушам. Этот человек только что срезал меня на несправедливом, не соответствующем правилам, дискриминационном, изнурительном, почти пятичасовом экзамене. По сути, он на корню разрушил мою мечту стать математиком. Я был всего лишь 16-летним школьником, единственным недостатком которого было происхождение из еврейской семьи... И теперь он отвешивает мне комплименты, ожидая, что я раскроюсь перед ним?

Но что я мог сделать? Наорать на него? Врезать ему по лицу? Я просто стоял, ошеломленный, не произнося ни слова. Мужчина продолжил:

— Мой вам совет — поступайте в Московский институт нефти и газа. У них довольно хорошая программа прикладной математики. И они принимают *таких, как вы*.

Двери лифта открылись, и минуту спустя он уже вручал мне толстую папку с моими вступительными документами, из которой неуклюже торчали мои школьные грамоты и призы.

— Удачи вам, — попрощался он, но я был слишком утомлен, чтобы отвечать. Единственное, чего мне хотелось — убежать отсюда как можно скорее!

И вот я вышел наружу, на гигантскую лестницу, ведущую к колоссальному зданию МГУ. Снова вдохнул свежий летний воздух, услышал звуки большого города, доносившиеся издалека. Уже темнело, и вокруг почти никого не было. Я сразу же заметил моих родителей внизу лестницы — все это время они в волнении ждали меня на ступеньках. По выражению моего лица и большой папке, которую я держал в руках, они моментально догадались, что произошло.

Глава 4. Керосинка

В тот вечер после экзамена мы с родителями вернулись домой поздно. Мы все еще не могли отойти от первоначального шока и не верили, что все события сегодняшнего дня происходили на самом деле.

Для обоих моих родителей это был неопишимо мучительный опыт. Мы всегда были очень близки, и с самого детства они окружали меня абсолютной любовью и поддержкой. Они никогда не заставляли меня старательнее учиться или поскорее определиться с профессией — наоборот, подталкивали заниматься тем, что мне интересно, и стремиться к воплощению мечты. И, разумеется, они всегда гордились моими достижениями. Они были совершенно подавлены произошедшим на моем экзамене — как из-за явной несправедливости случившегося там, так и потому, что не в их силах было предпринять хотя бы что-то, чтобы защитить своего сына.

Тридцатью годами ранее, в 1954 году, мечта моего отца стать теоретическим физиком также была безжалостно разрушена, но по иной причине. Как и миллионы других ни в чем не повинных людей, его отец, мой дедущка, стал жертвой сталинских репрессий. В 1948 году его арестовали по фиктивному обвинению в подготовке взрыва на большом автомобильном заводе в городе Горький (ныне Нижний Новгород), где он работал начальником смежных производств. Единственным «доказательством» в предъявленном обвинении был тот факт, что на момент ареста у него при себе был коробок спичек. Его отправили в исправительно-трудовой лагерь на угольную шахту на севере России. Это место было частью архипелага ГУЛАГ, который годы спустя в красках опишут Александр Солженицын и другие авторы. Он считался «врагом народа», а мой отец, следовательно, был «сыном врага народа».

Отец обязан был написать об этом в заявлении на поступление на физический факультет Горьковского университета. В результате, несмотря на то что он окончил школу с отличием, что означало возможность автоматического зачисления в вуз, его «завернули» на собеседовании, единственной целью которого было выявление родственников «врагов народа». Вследствие этого отцу пришлось поступать в инженерный институт. (Его отца вместе с другими за-

ключенными реабилитировали и выпустили на свободу в 1956 году благодаря указу Никиты Хрущева, но дело уже было сделано, и отменить причиненный ущерб было невозможно.)

Теперь, тридцать лет спустя, подобная история повторилась и с его сыном.

Однако времени жалеть себя у нас не было. Нужно было без промедления решать, что делать дальше, и главное — в какой вуз поступать. Экзамены во все высшие учебные заведения проходили одновременно, в августе, — до них оставалось еще около двух недель, и подать документы я мог только в один.

На следующее утро мой отец встал рано и поехал в Москву. Он серьезно отнесся к рекомендации, данной моим экзаменатором в МГУ. Действительно, создавалось впечатление, что тот искренне старался помочь мне, возможно, в попытке хоть в небольшой степени компенсировать учиненную несправедливость. Итак, приехав в Москву, мой отец тут же направился в приемную комиссию Института нефти и газа.* Каким-то образом ему удалось найти там человека, согласившегося поговорить с ним один на один, и он описал ему мою ситуацию. Собеседник подтвердил, что ему известно о случаях антисемитизма в МГУ, но также заверил моего отца, что в Институте нефти и газа ничего подобного не происходит. Кроме того, он добавил, что конкурс на факультет прикладной математики довольно высок, поскольку таких абитуриентов, как я, — тех, кого не приняли в МГУ, очень много. Сдать вступительный экзамен спустя рукава точно не получится. Тем не менее надежда была: «Если ваш сын и в самом деле настолько талантлив, как вы говорите, его непременно к нам зачислят. У нас на вступительных экзаменах нет никакой дискриминации евреев».

«Должен также предупредить вас, — добавил этот человек в конце разговора, — что последипломным образованием у нас занимаются другие люди. Боюсь, что в аспирантуру вашего сына, к сожалению, не примут».

* В то время он был известен как Московский институт нефтехимической и газовой промышленности им. И. М. Губкина (он получил свое название в честь Ивана Михайловича Губкина, который долгое время возглавлял Государственное геологоразведочное управление Высшего совета народного хозяйства). Когда я уже был студентом, учебное заведение было переименовано в Московский институт нефти и газа им. И. М. Губкина, а позднее — в Российский государственный университет нефти и газа им. И. М. Губкина.

Однако об этом нам пока было беспокоиться рано — до аспирантуры оставалось еще пять лет учебы.

Отец заехал еще в пару московских институтов, предлагавших программу прикладной математики, но там его встретили далеко не так радушно, как в Институте нефти и газа. Поэтому тем же вечером, после того как отец рассказал нам с мамой новости, мы немедленно решили, что я буду подавать документы именно в этот вуз на факультет прикладной математики.

Этот институт был одним из десятков московских вузов, занимавшихся подготовкой технических специалистов для различных областей промышленности, таких как Институт металлургии, Институт инженеров железнодорожного транспорта... (Тогда еще не было моды на переименование институтов в академии и университеты.) Начиная с конца 1960-х антисемитизм в МГУ «способствовал формированию рынка возможностей для изучения математики студентами-евреями» — пишет Марк Сол в своей статье.¹ Институт нефти и газа «приспособился к этому рынку и старался извлечь максимум пользы от антисемитской политики других университетов, привлекая высококвалифицированных студентов». Марк Сол объясняет:

Его прозвище, «Керосинка», отражало [их] гордость и цинизм. Керосинка — это нагревательный прибор, работающий на керосине, низкотехнологичное, но эффективное решение в трудных ситуациях. К студентам и выпускникам института быстро пристала кличка «керосинщики», а сам вуз превратился в надежную гавань для студентов-евреев, влюбленных в математику.

По какой же прихоти судьбы Керосинка стала пристанищем такого количества талантов? На этот вопрос ответить не так просто. Мы знаем, что и другие институты выиграли от исключения евреев из МГУ. Мы также знаем, что внедрение этой дискриминационной политики было сознательным актом, наверняка поначалу встречавшим определенное сопротивление. Возможно, некоторым институтам было проще продолжать принимать студентов-евреев, чем обеспечивать соблюдение новой политики. Но почему это явление не было пресечено на корню, почему оно продолжило разрастаться, а Керосинке было позволено сформировать

крепкую команду еврейских студентов? Ходили слухи, что таким способом воплощает свой тайный план Комитет государственной безопасности (КГБ) — им удобно было держать студентов-евреев под наблюдением в одном-двух местах. Однако нельзя исключать и существование положительной мотивации: видя, какое хорошее влияние данная ситуация оказывает на работу и развитие факультетов, администрация института могла предпринимать особые меры для сохранения такого положения вещей.

Мне кажется, что второй вариант более вероятен. Ректор Института нефти и газа Владимир Николаевич Виноградов был прозорливым управленцем, известным тем, что набирал профессоров, следовавших инновационным практикам преподавания и исследований, а также применял новейшие технологии в учебных классах. Он ввел правило, согласно которому все экзамены (включая вступительные) должны были сдаваться *в письменном виде*. Разумеется, и при этом оставались определенные возможности несправедливо занижить оценку (как на моем письменном экзамене в МГУ), но такие катастрофы, как на моем устном экзамене в МГУ, были полностью исключены. Я бы не удивился, узнав, что запрет на дискриминацию абитуриентов-евреев был установлен лично Виноградовым, и если это действительно так, то такой поступок говорил бы об исключительном благородстве и храбрости этого человека.

Как и было обещано, никакой дискриминации на вступительных экзаменах мы не почувствовали. Меня приняли после первого экзамена (математика письменно), на котором я получил пятерку (если золотой медалист получал высший балл на первом экзамене, это означало его автоматическое зачисление в вуз). Однако, конечно же, и здесь не все прошло гладко. Эта пятерка досталась мне нелегко: очевидно, часть ответов из моей работы были введены в автоматическую систему оценки неверно, и в результате изначально моя работа была оценена на четверку. Мне пришлось пройти через весь процесс апелляции, а значит, отстоять многочасовую очередь, снова и снова прокручивая в голове всевозможные неприятные сценарии возможного развития события. Тем не менее, как только я поговорил с апелляционной комиссией, ошибка была тут же найдена и исправлена, извинен-

ния принесены, и моя эпопея со вступительными экзаменами наконец-то подошла к концу.

1 сентября 1984 года начался учебный год, и я встретил своих новых однокашников. Каждый год на эту программу принимали только пятьдесят студентов (сравните с пятьюстами, которые ежегодно зачислялись на Мехмат!). Многим из тех, с кем мне теперь предстояло учиться, пришлось пройти тот же путь, что и мне. Однако в результате на нашем направлении собрались одни из самых умных, самых талантливых студентов-математиков.

Все, за исключением меня и еще одного студента, Миши Смольяка из Кишинева, который стал моим соседом по комнате в общежитии, были из Москвы. Иногородние абитуриенты имели право подавать документы только в том случае, если они окончили школу с золотой медалью, — к счастью, со мной дело обстояло именно так.

Многие из моих однокашников учились в лучших московских школах с математическим уклоном: № 57, 179, 91 и 2. Некоторые из них в дальнейшем стали профессиональными математиками и занимают профессорские посты в лучших университетах мира. В моей группе учились одни из лучших математиков нашего поколения: Паша Этингф, ныне профессор в MIT; Дима Клейнбок, профессор Брандейского университета; Миша Финкельберг, профессор Высшей школы экономики в Москве. Это было очень стимулирующее окружение.

Математику в Керосинке преподавали на очень высоком уровне, и базовые курсы, такие как математический анализ, функциональный анализ и линейная алгебра, читались так же строго, как и в МГУ. Однако курсы по другим областям чистой математики, например геометрии и топологии, были нам недоступны. Керосинка предлагала только программу прикладной математики, поэтому наше обучение было направлено, скорее, на то, чтобы мы овладевали конкретными прикладными знаниями, в частности связанными с добычей и обработкой нефти и газа. Нам прочитали несколько курсов прикладной ориентации: оптимизация, численный анализ, теория вероятностей и математическая статистика. Также большое количество времени отводилось на изучение информатики и вычислительной техники.

Я рад, что мне довелось познакомиться с этими прикладными областями математики. Благодаря этому я понял, что между «чистой» и «прикладной» математикой нет четкой границы; в основе качественной прикладной математики всегда лежит нетриви-

альная чистая математика. Однако каким бы полезным ни был этот опыт, я не мог выбросить из головы свою истинную любовь. Я знал, что мне необходимо найти способ изучать разделы чистой математики, которые Керосинка не предлагала.

Такая возможность мне представилась, когда я подружился с другими студентами, включая тех, кто окончил престижные специальные математические школы в Москве. Мы рассказали друг другу свои истории. Тех из них, кто соответствовал определению «еврея» (согласно критериям, которые я описывал выше), срезали на экзаменах так же беспощадно, как и меня, в то время как их одноклассников других национальностей принимали в МГУ без каких-либо проблем. Благодаря этим счастливицам мы знали, что происходило на Мехмате, какие курсы считались хорошими и где и когда проходили лекции. Так, на второй неделе обучения в Керосинке ко мне подошел один из одногруппников (кажется, это был Дима Клейнбок) и сказал: «Слушай, мы собираемся на курс Кириллова в МГУ. Хочешь с нами?»

Кириллов уже тогда был знаменитым математиком; естественно, мне хотелось побывать на его лекциях! Но у меня не было ни малейшего представления о том, как это можно было бы проворачивать. Огромное здание МГУ охранялось милицией, и для того чтобы войти, нужен был специальный пропуск.

— Не беспокойся, — успокоил меня мой товарищ, — мы проберемся сквозь забор.

Это звучало так волнующе и пугающе, что я не мог не согласиться:

— Конечно!

Ограда сбоку от здания была довольно высокой — метров шесть, не меньше, однако в одном месте металлический прут был изогнут, что давало возможность пробраться на территорию. Но что потом? Мы вошли в здание через боковую дверь и, довольно долго пропетляв по коридорам, оказались в кухне. Оттуда, пытаясь не особо привлекать внимание персонала, мы прошли в буфет, а затем к главному входу. Лифт доставил нас на четырнадцатый этаж, где находилась аудитория.

Александр Александрович Кириллов (или Сан Саныч, как его с любовью называли студенты) был не только харизматичным лектором, но и прекрасным человеком, в чем я лично убедился через несколько лет, познакомившись с ним ближе. Кажется, он читал студентам начальных уровней стандартный курс теории представ-

лений по знаменитому учебнику своего же авторства. Кроме того, у него был семинар для аспирантов, который мы тоже посещали.

Нам удавалось проделывать все это благодаря добросердечию Кириллова. Его сын Шурик (ныне профессор в Университете Стони Брук) учился в специальной математической школе № 179 вместе с моими однокашниками Димой Клейнбоком и Сёмой Хавкиным. Само собой, Сан Санычу было известно о ситуации с поступлением в МГУ. Много лет спустя он рассказал мне, что ничего не мог с этим поделать — его и близко не подпускали к приемной комиссии, костяк которой составляли аппаратчики Коммунистической партии. Поэтому все, что он мог для нас сделать, — разрешить тайком посещать его лекции.

Кириллов прилагал все усилия для того, чтобы студенты Керосинки чувствовали себя на его лекциях как дома. Его лекции и семинары — неизменно оживленные и наполненные кипучей деятельностью — навсегда останутся одними из лучших воспоминаний моего первого года в институте. Кроме того, я ходил на семинар Александра Рудакова, и это также был бесценный опыт.

В то же время я продолжал прилежно учиться в Керосинке. Я жил в общежитии, наведываясь домой только по выходным, и каждые пару недель мы встречались с Евгением Евгеньевичем. Он советовал мне книги для дополнительного чтения, а я отчитывался ему о своих успехах. Однако я быстро приближался к уровню, когда для сохранения динамики — и мотивации — мне потребовался бы наставник, с которым мы могли бы встречаться более регулярно. Кроме того, мне нужно было не просто получать знания от более опытного человека — я должен был начать самостоятельно работать над математическими проблемами. Поскольку я не был студентом Мехмата, огромными возможностями, предлагаемыми этим факультетом, воспользоваться не мог. И я был слишком стеснителен, чтобы просто подойти к кому-то вроде А. А. Кириллова и попросить позаниматься со мной индивидуально или же придумать для меня задачу. Я чувствовал себя аутсайдером. К началу весеннего семестра 1986 года (мой второй год в Керосинке) я начал осознавать, что мной овладевают инертность и стагнация. Учитывая, что все обстоятельства были против меня, я начал вовсе сомневаться, что мне когда-либо удастся воплотить свою мечту стать математиком.

Глава 5. Нити решения

Я уже начал впадать в отчаяние, когда однажды в Керосинке во время перерыва в длинной лекции ко мне подошел в коридоре один из самых уважаемых профессоров математики Александр Николаевич Варченко. Бывший студент Владимира Арнольда, одного из ведущих советских математиков, он сам также был математиком мирового уровня.

— Тебе не хотелось бы поработать над математической задачей? — спросил он.

— Конечно, — ответил я. — А что за задача?

Как будто я не схватился бы с радостью за любую, лишь бы предложили!

— Я столкнулся с одним вопросом в своих исследованиях, и мне показалось, что такому способному студенту, как ты, было бы интересно с этой проблемой поработать. Главный специалист в этой области — Дмитрий Борисович Фукс (имя знаменитого математика я уже слышал раньше). Мы с ним поговорили, и он согласился курировать студента, который займется изучением этой темы. Вот номер его телефона. Позвони ему, и он расскажет, что делать дальше.

Ситуация, когда опытные математики, такие как Варченко, в своих исследованиях сталкиваются с разного рода нерешенными математическими задачами, была довольно распространенной. Если бы проблема Варченко была тесно связана с его собственной исследовательской программой, он попробовал бы справиться с ней самостоятельно. Однако ни один математик не делает всего абсолютно — до мельчайших деталей — в одиночку. По этой причине подобные нерешенные задачи (чаще всего, разумеется, те, которые ученым кажутся наиболее простыми) передаются в руки студентов. Случается, что такие проблемы оказываются за пределами актуальной сферы интересов профессора, но, тем не менее, вызывают любопытство — как в случае с задачей, которая досталась мне. Именно поэтому Варченко попросил Фукса, эксперта в данной области, курировать меня. По сути, это была типичная «сделка», характерная для социальной жизни математического мира.

Необычным было то, что Фукс формально не числился преподавателем ни в одном университете. Но в течение многих лет совместно с группой других математиков Фукс работал над тем, чтобы смягчить последствия дискриминации студентов-евреев. Его вклад заключался в том, что он в частном порядке занимался с талантливыми ребятами, которым было отказано в поступлении в МГУ.

Помимо этого, Фукс также преподавал в так называемом Еврейском народном университете — неофициальной вечерней школе, где он и его коллеги читали курсы лекций для студентов. Некоторые занятия даже проходили в помещениях Керосинки, но это было еще до моего поступления туда.

Основателем, душой и сердцем Еврейского народного университета была храбрая женщина — Белла Субботовская (в замужестве Мучник). К сожалению, эта организация быстро привлекла внимание КГБ — их беспокоило то, что в городе проходили несанкционированные собрания евреев. В конце концов, Беллу Субботовскую вызывали в Комитет и допросили, а вскоре после этого она попала под грузовик и погибла. Это произошло при загадочных обстоятельствах, давших многим людям основания подозревать, что несчастный случай был в действительности преднамеренным убийством.¹ Потеряв своего лидера, университет быстро развалился.

Я поступил в Керосинку спустя два года после завершения этой трагической цепочки событий. Несмотря на то что самой вечерней школы больше не существовало, небольшая группка профессиональных математиков продолжала регулярно заниматься с отверженными вроде меня. Они находили подающих надежды студентов и помогали им советами, оказывали поддержку, а в некоторых случаях становились полноценными наставниками и кураторами этих ребят. По этой причине Варченко передал свою задачу мне, студенту Керосинки, а не кому-то с Мехмата, где благодаря своим связям он без труда нашел бы помощника. По этой же причине Фукс был готов тратить свое личное время на то, чтобы обучать меня и помогать мне.

И я очень рад, что так случилось. Оглядываясь назад, я понимаю, что, если бы не доброта и щедрость Фукса, я никогда не стал бы математиком. Я изучал математику в Керосинке и ходил на лекции в МГУ, но этого было недостаточно. В действительно-

сти, у студента не было почти никаких возможностей провести собственное исследование без помощи и руководства со стороны. Иметь куратора было просто жизненно необходимо.

Однако в тот момент я знал только, что в руке у меня листок бумаги с телефоном Фукса, прославленного математика, и впереди меня ждет проект под его руководством. Это было невероятно! У меня не было ни малейшего представления о том, чем это все закончится, но я не сомневался, что вот-вот произойдет нечто удивительное.

Тем вечером, призвав на помощь всю свою храбрость, я позвонил Фуксу из уличного телефона и объяснил, кто я такой.

— Да, я знаю, — ответил Фукс. — У меня для тебя есть статья, которую ты должен будешь прочитать.

Мы встретились на следующий день. Фукс оказался настоящим гигантом — я представлял его совершенно не таким. Он сразу приступил к делу.

— Вот, — он протянул мне перепечатанную из журнала статью, — попробуй прочитать это и, как только тебе встретится любое непонятное слово, сразу звони мне.

Я чувствовал себя так, словно у меня в руках оказался святой Грааль.

Статья объемом около 12 страниц, написанная Фуксом несколькими годами ранее, была посвящена «группам кос». Читать ее я начал тем же вечером.

Предыдущие три года занятий с Евгением Евгеньевичем и самостоятельного обучения не прошли даром. Я не только понял все слова в заголовке, но сумел также осмыслить содержимое статьи. Я решил, что прочитаю ее сам, не обращая за помощью. Это было для меня делом чести. Я уже представлял, как поразится Фукс, когда я скажу, что во всем разобрался самостоятельно.

Раньше мне уже доводилось слышать о группах кос. Это превосходные образцы групп (концепцию групп мы с вами обсуждали во второй главе). Напомню, что Евгений Евгеньевич описал эту концепцию в терминах симметрии, и мы рассматривали элементы групп, представляющие собой симметричные отражения каких-то объектов. Например, группа окружности состоит из симметрий круглого стола (или любого другого «круглого» предмета), а группа четырех поворотов — это группа симметричных отражений квадратного стола (или любого другого «квадратного»

предмета). Получив представление о базовой концепции — группе, мы можем начать поиск других иллюстрирующих ее примеров. Но при этом неизбежно выяснится, что многие группы вообще никак не связаны с симметриями, из-за которых, собственно, мы с самого начала и решили ввести понятие группы. Это обычная история. К созданию математической концепции ученых могут подталкивать задачи или явления из какой-то одной области математики (или физики, биологии, техники), однако позже она нередко оказывается полезной и удобной для применения во многих других областях.

Итак, есть множество групп, в основе которых не лежат симметрии. Среди них — группы кос.

Я тогда еще не догадывался о практическом применении групп кос в таких областях, как криптография, квантовые вычисления и биология, которое мы обсудим далее. Однако я был абсолютно очарован природной красотой этих математических абстракций.

Для каждого натурального числа $n = 1, 2, 3$ и т. д. существует одна группа кос, поэтому мы можем воспользоваться числами, чтобы присвоить каждой группе кос уникальное имя. В общем случае назовем группу кос B_n ; таким образом, для $n = 1$ у нас будет группа B_1 , для $n = 2$ — группа B_2 и т. д.

Для того чтобы описать группу B_n , необходимо, в первую очередь, описать ее элементы, как мы это делали с симметриями вращения круглого и квадратного столов. Элементы группы B_n — это так называемые *косы на n нитях*. Например, на рис. 5.1 изображена коса на пяти нитях, то есть коса с $n = 5$. Вообразите две твердые прозрачные пластины с пятью шпильками в каждой и пять нитей, попарно соединяющих шпильки с разных пластин (поскольку пластины прозрачные, мы каждую нить видим целиком). Любая нить может как угодно оплести любые другие нити, но не должна при этом завязываться в узел. К каждой шпильке должна быть прикреплена в точности одна нить. Пластины закреплены раз и навсегда.

Одну косу составляет вся эта конструкция целиком — две пластины и требуемое число нитей — точно так же, как один автомобиль составляют четыре колеса, одна коробка передач, четыре двери и т. д. Мы не рассматриваем эти детали по отдельности; нас интересует лишь коса в целом.

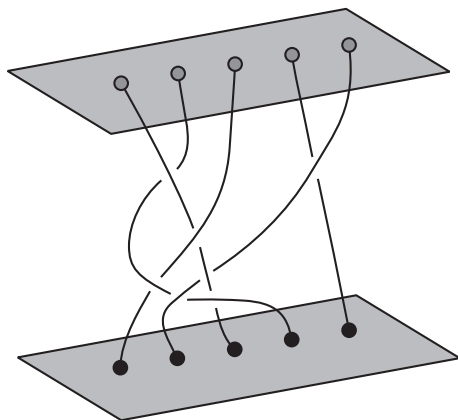


Рис. 5.1

Итак, мы дали определение косы на n нитях. Теперь нам необходимо показать, что все косы на n нитях образуют группу. Это означает, что мы должны описать процесс создания композиции двух таких кос. Другими словами, для каждой пары кос на n нитях нам нужно создать новую косу на n нитях — в точности так, как мы это делали с поворотами, когда композиция двух поворотов давала нам третий. А затем мы проверим, что получившаяся композиция действительно обладает свойствами, перечисленными в главе 2.

Предположим, что у нас есть две косы. Для того чтобы сделать из них новую, мы поставим одну косу на другую шпилька к шпильке, как показано на рис. 5.2, а после этого уберем средние пластины, присоединив верхние нити к соответствующим нижним.

Результирующая коса будет в два раза длиннее каждой из исходных, но это не проблема. Мы просто укоротим нити до первоначального состояния — главное только сохранить порядок их переплетения — и *вуаля!* Мы взяли две косы и сделали из них третью. Так в нашей группе кос выглядит правило составления композиции двух кос.

Поскольку группа кос основана не на симметриях, данную операцию все же лучше называть не «композицией» (прибережем этот термин для групп симметрии, где он смотрится более естественно), а «сложением» или «умножением», аналогично операциям, кото-

рые мы выполняем на числах. С этой точки зрения косы подобны числам — это такие «волокнистые числа», если угодно.

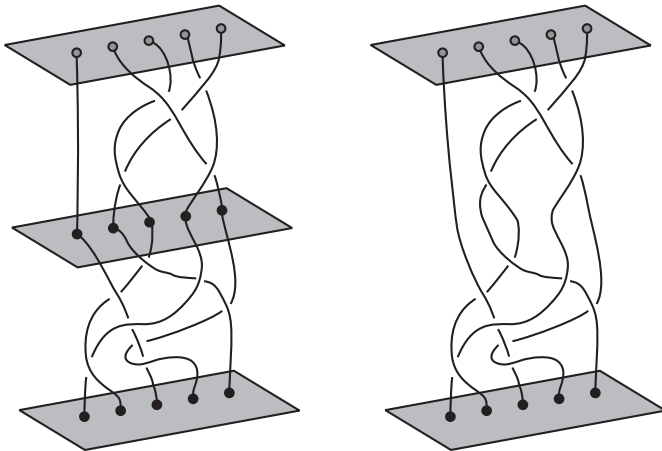


Рис. 5.2

Взяв два целых числа, мы можем сложить их и получить новое число. Схожим образом из двух кос мы можем сделать новую, следуя правилу, описанному выше. Следовательно, у нас есть все основания утверждать, что мы сформулировали правило «сложения» двух кос.

Теперь проверим, что такое «сложение» кос удовлетворяет всем аксиомам групп. Во-первых, нам нужно выделить единичный элемент (в группе круга это была точка, соответствующая повороту на 0 градусов). В нашем случае единичным элементом служит коса, в которой все нити следуют строго прямо, не переплетаясь между собой (рис. 5.3). Это что-то вроде «тривиальной», незаплетенной косы — как поворот на 0 градусов, который вовсе и не поворот.²

Далее мы должны найти обратный элемент для косы b (в группе круга обратным элементом служит поворот на тот же угол, но в обратном направлении). Согласно аксиомам группы, сложив такой обратный элемент с косой b по правилу, описанному выше, мы должны получить единичную косу.

Для косы b обратной косой будет отражение b относительно нижней пластины. Если мы сложим ее с исходной косой по нашему правилу, то, расправив нити, получим в результате единичную косу.

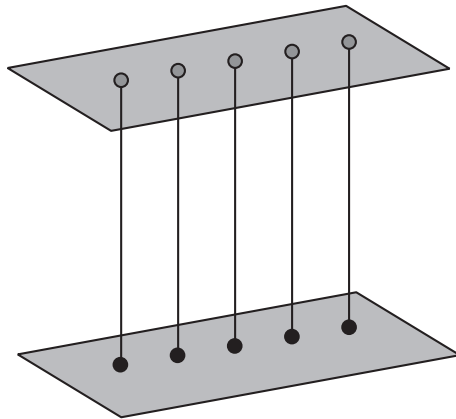


Рис. 5.3

Здесь необходимо остановиться и сделать важное замечание, которое пока что я как-то обходил стороной: мы не проводим различий между косами, которые получаются друг из друга путем таких преобразований, как перекладывание, растяжение или сокращение нитей при условии, что мы не обрезаем их и не меняем способ переплетения. Все эти косы для нас идентичны. Другими словами, должно сохраняться исходное прикрепление нитей к шпилькам, а также нити не могут проходить друг сквозь друга. За исключением этого мы можем поправлять нити любым способом. Просто представьте, будто мы расчесываем косу — она ведь при этом не меняется (только становится аккуратнее!). Именно это я имею в виду, говоря, что при сложении косы с ее зеркальным отражением мы получаем «ту же самую» единичную косу. Это не та же самая коса в буквальном смысле — но она становится абсолютно такой же, стоит нам расправить и причесать нити.³

Итак, мы убедились, что аксиомы группы — композиция (или сложение), существование единичного и обратного элементов — выполняются. Мы доказали, что косы на n нитях образуют группу.⁴

Для того чтобы лучше понять, что же такое группы кос, давайте внимательнее рассмотрим простейший вариант: группу B_2 , состоящую из кос на двух нитях (в группе B_1 есть только один элемент, поэтому обсуждать там особо нечего⁵). С каждой такой косой мы свяжем целое число N . Под «целым числом» я подра-

зумеваю натуральное число: 1, 2, 3, ... или 0, или натуральное число со знаком «минус»: -1, -2, -3,...

Прежде всего, с единичной косой мы сопоставим число 0. Затем, если нить, начинающаяся на левой шпильке верхней пластины, проходит под второй нитью, мы поставим в соответствие такой косе число 1. Если эта нить огибает вторую нить, то с такой косой мы сопоставим число 2, и т. д., как показано на рис. 5.4.

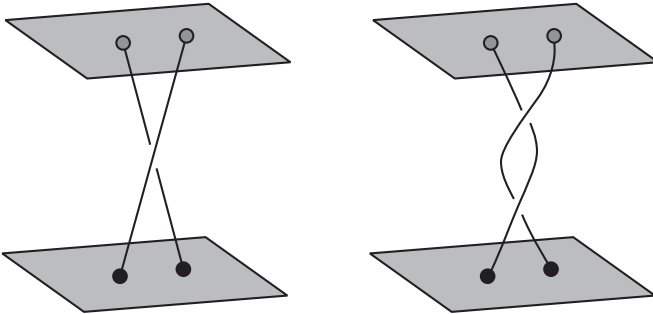


Рис. 5.4

Если же эта нить проходит поверх второй нити, то такой косе мы сопоставляем отрицательное число -1, а если она дополнительно огибает вторую нить, то этой косе соответствует число -2, и т. д. (рис. 5.5).

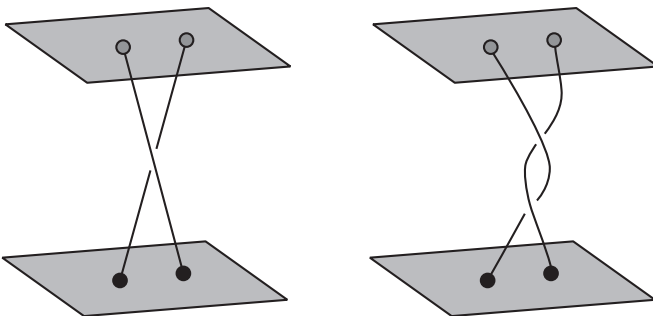


Рис. 5.5

Назовем число, сопоставленное с косой вышеописанным способом, «количеством перекрестов». Взяв две косы с одинаковым количеством перекрестов, мы можем преобразовать одну в другую,

«поправив» нити. Другими словами, количество перехлестов полностью определяет всю косу. Таким образом, мы показали, что существует взаимно однозначное соответствие между косами на двух нитях и целыми числами.

Полезно также сделать небольшой акцент на том, что мы всегда считаем само собой разумеющимся: множество из всех целых чисел также является группой! А именно — на нем определена операция сложения, роль «единичного элемента» играет число 0, а для любого целого N существует «инверсия» в виде числа $-N$. Получается, что все свойства группы, перечисленные в главе 2, удовлетворяются. И действительно, $N + 0 = N$, а $N + (-N) = 0$.

Мы только что установили потрясающий факт: группа кос на двух нитях обладает точно такой же структурой, что и группа целых чисел!⁶

Идем дальше. В группе целых чисел сумма двух чисел a и b не меняется, в каком бы порядке мы ни проводили эту операцию:

$$a + b = b + a.$$

Это условие выполняется и в группе кос B_2 . Группы, удовлетворяющие этому условию, называются «коммутативными» или «абелевыми» (в честь норвежского математика Нильса Хенрика Абеля).

В косах на трех или большем числе нитей возможны куда более сложные переплетения, чем в косе, состоящей всего лишь из двух нитей. Схему переплетения уже невозможно описать одним показателем — количеством перехлестов (взгляните выше на рисунок косы с пятью нитями), так как большую роль играет и то, в каком порядке и на каких нитях происходят перехлесты. Помимо этого, оказывается, что результат сложения двух кос на трех или более нитях зависит от порядка выполнения операции (то есть от того, какая коса окажется верхней на картинке, описывающей сложение кос). Другими словами, в группе B_n , где $n = 3, 4, 5, \dots$, в общем случае верно следующее:

$$a + b \neq b + a.$$

Про такие группы говорят, что они «некоммутативны» или «неабелевы».

Группы кос используются для решения множества важных прикладных задач. Например, они помогают конструировать

эффективные и надежные алгоритмы шифрования с открытым ключом.⁷

Еще одно многообещающее направление — это проектирование квантовых компьютеров, основанное на создании сложных кос из квантовых частиц, известных как анионы. Их траектории переплетаются, и эти перехлесты используются для построения «логического вентиля» квантового компьютера.⁸

Необходимо также упомянуть возможность применения этой теории в биологии. Возьмем произвольную косу на n нитях и пронумеруем шпильки на двух пластинах слева направо от 1 до n . Затем соединим концы нитей, присоединенные к шпилькам с одним и тем же номером на разных пластинах. В результате мы получим то, что математики называют «зацеплением» — множество петель, обвивающих друг друга (рис. 5.6).

В примере, представленном на рис. 5.6, мы видим только одно зацепление. Математическое название этой фигуры — «узел». В общем случае замкнутых нитей может быть несколько.

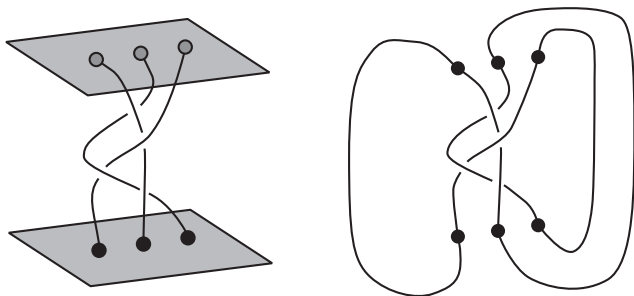


Рис. 5.6

Математическая теория зацеплений и узлов используется в биологии, например при изучении переплетений ДНК с энзимами.⁹ Мы рассматриваем молекулу ДНК как одну нить, а молекулу энзима как другую. Оказывается, при переплетении этих нитей могут возникать совсем нетривиальные соединения узлов, способные даже видоизменять ДНК. Следовательно, изучение способов переплетения таких молекул представляет собой вопрос чрезвычайной важности, а математический взгляд на исследование возможных вариантов зацепления проливает новый свет на механизмы рекомбинации ДНК.

В математике важную роль играет геометрическая интерпретация кос. Для того чтобы понять это, рассмотрим все возможные расположения n точек на плоскости. Будем считать, что все точки различны, то есть ни для каких двух точек их позиции на плоскости не совпадают. Подобных коллекций может существовать огромное множество. Выберем одну из возможных, а именно n точек, выстроенных в прямую линию с равными расстояниями между ними.

Представим, что каждая точка — это маленький жучок. Мы включаем музыку, жучки оживают и начинают перемещаться по плоскости. Если рассматривать время как направление по вертикали, то траектория каждого жучка на плоскости будет выглядеть как нить. Мы уже сказали, что позиции жучков на плоскости всегда различаются, то есть мы предполагаем, что жучки никогда не сталкиваются друг с другом. Таким образом, одна нить никогда не проходит сквозь другую. Пока музыка играет, жучки могут в своем танце огибать друг друга, как нити в косе. Однако мы требуем, чтобы, когда по прошествии фиксированного периода времени музыка смолкнет, жучки снова выстроились в прямую линию — как в начале. Единственное отличие заключается в том, что в конце жучкам разрешается занимать другие позиции в линии, а не те, на которых они стояли перед началом «танца». Тогда их коллективный путь будет выглядеть на плоскости, как коса на n нитях.

Следовательно, косы на n нитях можно рассматривать как пути в пространстве, оставленные коллекциями из n различных точек на плоскости.¹⁰

Задача, которую дал мне Варченко и над которой я должен был начать работать с Фуксом, касалась такой составляющей группы кос, как «подгруппа коммутаторов». Вспомните, что для косы на двух нитях мы определили понятие «количество перехлестов». Схожее значение можно связать с косой на любом количестве нитей.¹¹ На основании этого значения мы определим подгруппу коммутаторов B'_n группы кос на n нитях. Эта подгруппа включает в себя все те косы, общее количество перехлестов для которых равно нулю.¹²

Мне предстояло сделать следующее: вычислить так называемые числа Бетти группы B'_n . Эти числа отражают глубинные

свойства данной группы, важные для решения прикладных задач. Представьте себе в качестве аналогии физический объект, например дом. У него множество характеристик: одни более очевидные, такие как число этажей, комнат, дверей, окон и т. д., а другие далеко не такие наглядные, например пропорции материалов, использованных при его строительстве. Точно так же и группа обладает разными характеристиками, и одна из них — те самые числа Бетти.¹³ Фукс ранее уже нашел числа Бетти самой группы кос B_n . Он дал мне свою публикацию, для того чтобы я познакомился с основами.

Мне потребовалась неделя, чтобы самостоятельно разобраться с материалом в статье Фукса. Время от времени я заглядывал в свою весьма разросшуюся к тому времени библиотеку книг по математике, для того чтобы ознакомиться с ранее не известными мне понятиями и определениями. Затем я позвонил Фуксу.

— О, это ты, — поприветствовал он меня. — А я удивлялся, чего это ты не звонишь. Ты уже начал читать статью?

— Да, Дмитрий Борисович. На самом деле, я уже закончил.

— Закончил? — в голосе Фукса слышалось удивление. — Что ж, тогда нам стоит встретиться. Я хочу послушать, чему ты научился.

Фукс предложил сделать это на следующий день в МГУ после семинара, который он планировал посетить. Готовясь к встрече, я снова и снова перечитывал статью и тренировался отвечать на вопросы, которые, как мне казалось, Фукс может задать. Математик мирового уровня, такой как Фукс, не возьмет себе нового ученика просто из жалости. Планка была поставлена очень высоко. Я понимал, что мой первый разговор с Фуксом будет чем-то вроде собеседования, поэтому решил изо всех сил постараться произвести на него хорошее впечатление.

Мы встретились в назначенный час и пошли по коридорам Мехмата в поисках места, где нам никто не помешает. Мы уселись на уединенную скамейку, и я начал рассказывать Фуксу о том, что прочитал в его статье. Он внимательно слушал, изредка задавая мне уточняющие вопросы. Думаю, ему понравилось мое изложение. Он поинтересовался, откуда я знаю все эти вещи, и я рассказал ему о занятиях с Евгением Евгеньевичем, о дополнительной литературе, которую читал в огромных количествах, и о посещении лекций на Мехмате. Мы даже обсудили мой экзамен в МГУ (разумеется, для Фукса творившееся там не было новостью).

К счастью, наша встреча прошла успешно. Судя по всему, Фукс был впечатлен моими знаниями. Он подтвердил, что я готов к тому, чтобы взяться за проблему Варченко, и что он с радостью будет мне в этом помогать.

В тот вечер я покидал МГУ в приподнятом настроении. Мне предстояло начать работать над моей первой математической проблемой, и делать это я должен был под руководством лучших математиков в мире. Меньше двух лет прошло с того злосчастного вступительного экзамена на Мехмат, и вот я снова был в игре.

Глава 6. Ученик математика

Решать математическую задачу — это как складывать пазл, не зная наперед, какая картинка должна получиться. Пазл может оказаться сложным, а может — простым, а может случиться так, что его вообще невозможно будет сложить. Вы не знаете, чем все закончится, до тех самых пор, пока не решите задачу (или не поймете, что у нее нет решения). Подобная неопределенность, вероятно, — самый сложный аспект работы математика. В других дисциплинах можно импровизировать, придумывать разные решения, даже менять правила игры. Зачастую там нет даже четкого представления о том, что может считаться решением. Например, перед нами поставили задачу повысить производительность компании. Какие показатели мы будем использовать для оценки успеха? Будет ли повышение на 20 процентов считаться решением проблемы? А на 10 процентов? В математике задача всегда однозначно определена, и в вопросе о том, что значит «найти решение задачи», не может быть никакой двусмысленности. Вы либо решаете ее, либо нет.

Что касается задачи Фукса, то я должен был найти числа Бетти групп B'_n . Не было никаких сомнений в том, что это означает. Для любого человека, знакомого с математическим языком, это означает то же самое, что и для меня в 1986 году, когда я впервые услышал об этой задаче, и сотню лет спустя это будет означать то же самое.

Я знал, что Фукс уже решил схожую задачу, и знал, как. В качестве подготовки к работе над собственной задачей я разбирал схожие проблемы, решения для которых уже были найдены. Так я тренировал свою интуицию, прорабатывал навыки и набирал инструментарий методов. Однако я не мог *априори* знать, какой из методов сработает в моем случае — не знал даже, с какой стороны подойти к задаче! Более того, мне было непонятно, можно ли ее в принципе решить, не создавая совершенно новую технику или абсолютно не похожий на существующие новый метод.

Все математики в своей работе находятся в подобном положении. Давайте вспомним одну из самых знаменитых математических проблем — последнюю теорему Ферма. Это поможет

нам понять ход мыслей математика, столкнувшегося с задачей, которая легко формулируется, но решение которой далеко не очевидно. Возьмем натуральное число n , то есть 1, 2, 3, ..., и рассмотрим уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

на натуральных числах x , y и z .

Если $n = 1$, то мы получаем уравнение следующего вида:

$$x + y = z,$$

у которого, несомненно, есть множество решений среди натуральных чисел: просто возьмите любые x и y и такое z , чтобы $z = x + y$. Обратите внимание на то, что здесь мы используем операцию сложения на натуральных числах, о которой говорили в предыдущей главе.

Если $n = 2$, то уравнение выглядит так:

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

У этого уравнения также множество решений на натуральных числах, например:

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Все это было известно еще со времен античности. Неясным оставался лишь вопрос, есть ли у данного уравнения какие-нибудь решения для n , больших 2. Казалось бы, чего тут сложного? Неужели на этот вопрос так трудно ответить?

Что ж, выяснилось, что это действительно совсем нелегко. В 1637 году французский математик Пьер Ферма оставил на полях старой книги заметку, в которой говорилось, что если n больше 2, то не существует таких натуральных x , y , z , которые служили бы решением этого уравнения. Другими словами, невозможно найти три натуральных числа x , y , z , таких, что

$$x^3 + y^3 = z^3;$$

невозможно найти натуральные числа x , y , z , такие что

$$x^4 + y^4 = z^4;$$

и так далее.

Ферма писал, что он нашел простое доказательство этого утверждения для всех n , больших 2, но «на полях слишком мало места, чтобы его написать». Многие люди, как профессиональные математики, так и любители, принимали этот вызов и пытались воспроизвести «доказательство». В действительности это стало самой знаменитой математической задачей всех времен. За решение предлагались призы. Сотни доказательств были написаны и опубликованы, а позднее разнесены в пух и прах. И спустя 350 лет задача все так же оставалась нерешенной.

В 1993 году математик из Принстонского университета Эндрю Уайлс объявил, что ему удалось доказать последнюю теорему Ферма. На первый взгляд, его доказательство никак не было связано с исходной проблемой. Вместо того чтобы доказывать истинность последней теоремы Ферма, Уайлс взялся за так называемую гипотезу Симуры — Таниямы — Вейля, которая на самом деле описывает нечто совершенно иное; более того, она намного сложнее формулируется. Однако несколькими годами раньше математик из Беркли по имени Кен Рибет показал, что последняя теорема Ферма следует из данной гипотезы. Вот почему доказательство гипотезы также можно считать доказательством теоремы Ферма. Мы подробнее поговорим об этом в главе 8; сейчас же моей целью было лишь продемонстрировать, что у простой, на первый взгляд, задачи не обязательно будет примитивное решение.

Сегодня нам очевидно, что Ферма был не в состоянии доказать приписываемое ему знаменитое утверждение. Попытки разгадать эту загадку привели к созданию целых новых областей математической науки, и конечный результат стал плодом тяжелой работы многих поколений математиков.¹

Можно ли было предвидеть все это, взглянув на такое, казалось бы, простое и невинное уравнение:

$$x^n + y^n = z^n.$$

Совсем нет!

За какую бы математическую задачу вы ни взялись, вы не можете заранее знать, каким окажется решение. Вы надеетесь, что оно будет красивым и элегантным и что по ходу дела вы сделаете еще пару дополнительных интересных открытий. Разумеется, вы также надеетесь, что все это произойдет в разумные сроки, и вам не придется ждать 350 лет, для того чтобы сформулировать

окончательный вывод. Однако никогда нельзя быть ни в чем уверенным.

Мне с моей задачей повезло: элегантное решение действительно существовало, и я сумел найти его в относительно короткий срок — около двух месяцев. Но это далось мне нелегко. Ничто не дается легко. Я пробовал применять различные методы, и каждый очередной провал усиливал мои тревогу и отчаяние. Это была моя первая задача, и в голову неизбежно закрадывались мысли о том, могу ли я вообще стать математиком. Эта задача стала первой проверкой моих качеств и способностей.

Работа над задачей не избавляла меня от необходимости посещать занятия и сдавать экзамены в Керосинке, но в списке моих приоритетов она стояла на первом месте, и в размышлениях над ней я проводил все свободное время, все вечера и выходные. Я слишком многого требовал от себя. У меня появились проблемы со сном — раньше со мной ничего подобного не случалось. Бессонница, которую я заработал во время работы над этой задачей, оказалась первым «побочным эффектом» моих математических занятий. Потом она еще несколько месяцев отравляла мне жизнь, и тогда я твердо решил никогда не позволять себе слишком глубоко погружаться в математические проблемы.

С Фуксом мы встречались примерно раз в неделю в здании Мехмата, где я рассказывал ученому о своем прогрессе или отсутствии такового (к тому времени он сумел достать для меня пропуск, так что мне больше не приходилось пролезать сквозь забор). Фукс всегда поддерживал и ободрял меня и на каждой встрече рассказывал о новых математических трюках или предлагал новые идеи, которые я мог бы применить для решения задачи.

А потом внезапно это случилось. Я нашел решение, или, если быть точным, оно предстало передо мной во всем своем великолепии.

Я пытался воспользоваться одним из стандартных методов поиска чисел Бетти, которому меня научил Фукс, — он называется «спектральная последовательность». В определенном смысле, мне это удалось: я понял, как вычислить числа Бетти группы B'_n , но лишь при условии, что числа Бетти всех групп B'_m , $m < n$, уже известны. Как вы уже догадались, чисел Бетти для групп B'_m я не знал — в этом прежде всего и заключалась сложность.

Однако это частичное решение подсказало мне новый способ атаки на задачу: если бы я *угадал* правильный ответ, то с помощью данного метода смог бы восстановить путь *доказательства* того, что этот ответ действительно верен.

Звучит легко, но даже для того, чтобы угадать что-то, требовалось выполнить огромный объем пробных вычислений, которые раз от раза становились все сложнее. Очень долго я не мог разглядеть никакой структуры или шаблона.

Однако неожиданно, словно по мановению волшебной палочки, все прояснилось. Пазл сложился, и я увидел финальную картину, полную элегантности и очарования, — этот момент навсегда останется жить в моих воспоминаниях. Я испытал невероятный подъем, ведь все мои старания и бессонные ночи окупились сторицей.

Впервые в своей жизни я обладал чем-то, *чего не было больше ни у кого в мире*. Я узнал нечто новое о Вселенной. Это не было лекарство от рака, но, определенно, это также было ценное знание, и никто не мог отнять его у меня.

Единожды испытав это чувство, вы будете стремиться вернуть его снова и снова. Со мной такое случилось впервые, и, как и первый поцелуй, это был совершенно особенный, непередаваемый опыт. Я понял, что теперь могу называть себя математиком.

Ответ мой оказался довольно неожиданным и куда более интересным, чем Фукс или я могли предположить. Я обнаружил, что для каждого делителя натурального числа n (равного количеству нитей в косах, которые мы здесь рассматриваем) существует число Бетти группы B'_n , равное знаменитой функции Эйлера этого делителя.²

Функция Эйлера связывает любое натуральное число d с другим натуральным числом, которое называется $\varphi(d)$. Она представляет количество целых чисел от 1 до d , являющихся *взаимно простыми* с d , то есть не имеющих с d общих делителей (кроме 1, разумеется).

Например, возьмем $d = 6$. Тогда число 1 является взаимно простым с числом 6, число 2 — нет (так как это делитель шестерки), число 3 — также нет (это тоже делитель шестерки), число 4 — нет (у 4 и 6 есть общий делитель, а именно 2), число 5 является взаимно простым с числом 6, а число 6 — нет. Таким образом, на отрезке от 1 до 6 есть два натуральных числа, взаимно простых с числом

6: это 1 и 5. Следовательно, функция Эйлера для числа 6 равна 2. Это записывается так: $\varphi(6) = 2$.

У функции Эйлера много применений. Например, она используется в так называемом алгоритме RSA, с помощью которого при выполнении платежных транзакций в Интернете шифруются номера кредитных карт (подробнее об этом я расскажу в примечании 7 к главе 14). Свое название функция получила в честь жившего в восемнадцатом веке швейцарского математика Леонарда Эйлера.

Тот факт, что найденные мной числа Бетти определялись функцией Эйлера, подразумевал существование какой-то скрытой связи между группами кос и теорией чисел. Значит, мое решение потенциально могло сыграть важную роль и в других областях, лежащих далеко за границей первоначальной сферы рассмотрения.

Конечно же, мне не терпелось рассказать Фуксу о полученных результатах. Это был июнь 1986 года, и с нашей первой встречи прошло почти три месяца. К этому времени Фукс с женой и двумя маленькими дочками уехал из города, для того чтобы провести лето на даче в Подмосковье. К счастью, его дача находилась на железнодорожной ветке, ведущей к моему родному городу, — примерно на полпути, и мне было совершенно не сложно заехать к нему по дороге домой.

Предложив традиционную чашку чая, Фукс поинтересовался моими успехами.

— Я решил задачу!

Я не мог сдержать волнения и наверняка перескакивал с одного на другое и вообще довольно бессвязно излагал доказательство. Но это было нестрашно — Фукс быстро все понял. Было видно, что он доволен.

— Просто великолепно! — похвалил меня он. — Отличная работа! Теперь самое время приступать к статье.

Это была моя первая математическая статья. Как выяснилось, писать статьи ничуть не проще, чем заниматься математической работой, но, прямо скажем, куда менее увлекательно. Искать новые закономерности на границе неизведанного — захватывающее и вдохновляющее занятие. Совсем другое — сидеть за столом, пытаюсь упорядочить собственные мысли и оформить их в виде связного текста на бумаге. Позднее кто-то поделился со мной мудрой мыслью: написание статей — это неизбежное наказание,

которое уравнивает восторг от открытия новых математических знаний. Для меня это было первое такое наказание.

На следующую встречу с Фуксом я принес несколько черновиков. Он внимательно прочитал их, указывая на слабые места статьи и помогая мне ее усовершенствовать. Как всегда, он был чрезвычайно щедр на помощь и поддержку. В самом начале я поставил фамилию Фукса как соавтора, однако он наотрез отказался. «Это твоя статья», — объяснил он. Наконец, Фукс объявил, что статья готова, и сказал, что я должен отправить ее в математический журнал «Функциональный анализ и его приложения», главным редактором которого был Израиль Моисеевич Гельфанд, патриарх советской математической школы.

Небольшого роста, очень харизматичный — тогда ему было чуть за семьдесят — Гельфанд был легендой московского математического сообщества. Он председательствовал на еженедельном семинаре, который проводился в большой аудитории на четырнадцатом этаже главного здания МГУ. Каждый из них был важным математическим и социальным событием; семинары Гельфанда проводились на протяжении более чем пятидесяти лет и получили всемирную известность. Фукс был соавтором Гельфанда (широко известна их совместная работа над теорией, впоследствии получившей название «когомологии Гельфанда — Фукса») и одним из старейших членов семинара (среди прочих также были А. А. Кириллов, бывший студент Гельфанда, и М. И. Граев, сотрудничавший с Гельфандом в течение длительного времени).

Семинар Гельфанда был уникальным, не похожим ни на один другой семинар из тех, что мне довелось посетить. Обычно длительность семинара фиксирована — в США чаще всего проводятся часовые или полуторачасовые мероприятия, — а докладчик готовит выступление на заранее известную тему. Аудитории позволяет задавать вопросы. Но семинар Гельфанда был совершенно иным. Он проводился по понедельникам вечером, официальным временем начала считалось 19:00. Однако в действительности он редко начинался раньше 19:30 — чаще между 19:45 и 20:00. До начала выступлений в течение часа или около того участники семинара, включая самого Гельфанда (он обычно приходил около 19:00–19:30), прогуливались по аудитории и большому фойе снаружи, беседуя друг с другом. Очевидно, это и было главным

замыслом Гельфанда — светское мероприятие, а не только выступления с докладами на математические темы.

Большинство математиков, посещавших семинар Гельфанда, работали в других местах, не связанных с МГУ. Этот семинар был для них единственным местом, где они могли встретиться друг с другом, узнать о происходящем в математическом мире, поделиться идеями и договориться о совместной работе. Поскольку сам Гельфанд был евреем, его семинар считался одним из «надежных пристанищ» для евреев и даже провозглашался единственным мероприятием в городе (или одним из немногих), в котором могли принимать участие математики-евреи (справедливости ради надо заметить, что многие другие семинары в МГУ также были открыты для публики и проводились людьми, не имеющими предубеждений против каких-либо национальностей). Без сомнения, Гельфанд охотно эксплуатировал славу своего детища.

Антисемитизм, с проявлениями которого я столкнулся на вступительном экзамене в МГУ, был распространен на всех уровнях научной жизни в Советском Союзе. Ранее, в 1960-х и начале 1970-х годов, у студентов еврейского происхождения все же была возможность получить базовое образование на Мехмате, несмотря на существование строгих ограничений — «квот». (На протяжении 1970-х и в начале 1980-х годов ситуация постепенно ухудшалась, и к 1984 году, когда я подавал документы на Мехмат, у абитуриента-еврея почти не осталось шансов на поступление.)³ Однако аспирантура даже в те годы была для таких студентов практически недоступна. Единственным вариантом для еврейского студента, желавшего покорить очередную ступень обучения, была работа «по распределению» в течение трех лет после получения основного высшего образования. Затем его работодатель (чаще всего это должна была быть контора где-нибудь далеко в провинции) мог отправить его в аспирантуру. И даже если еврею удавалось преодолеть это препятствие и получить звание кандидата наук, возможности найти академическую работу по своей специальности в Москве (например, в МГУ) у него не было. Такому ученому приходилось либо довольствоваться работой где-нибудь в провинции, либо устраиваться в один из множества московских исследовательских институтов, никак или почти никак не связанных с математическими исследованиями. Для жителей других городов ситуация была еще сложнее, так как

у них не было московской прописки — в их внутреннем паспорте не было печати о постоянном местожительстве в Москве, а это было обязательное требование для трудоустройства в столице.

Подобной участи не смогли избежать даже самые выдающиеся студенты. Владимир Дринфельд, блестящий математик и будущий лауреат Филдсовской премии, о котором мы подробнее поговорим чуть позже, сумел поступить в аспирантуру Мехмата сразу же после завершения основного обучения (хотя я слышал, что организовать это было невообразимо сложно). Однако родом он был из города Харькова на Украине, поэтому найти работу в Москве ему так и не удалось. Он был вынужден взяться за преподавание в провинциальном университете в Уфе — промышленном городе на Урале. Позднее он получил место исследователя в Физико-техническом институте низких температур в Харькове.

Те же, кто принимал решение остаться в Москве, распределялись в такие места, как Институт сейсмологии или Институт обработки сигналов. Их каждодневная работа заключалась в выполнении однообразных вычислений, связанных с конкретной областью промышленности, к которой относился данный институт (хотя некоторым уникалам благодаря их разносторонним талантам удавалось совершить прорыв и в этих областях). Математическими исследованиями, которые были для них настоящей страстью, им приходилось заниматься самостоятельно, в свободное время.

Гельфанду и самому пришлось покинуть пост преподавателя Мехмата в 1968 году, после того как он поставил свою подпись под знаменитым письмом девяноста девяти математиков, требующих освобождения математика и борца за права человека Александра Есенина-Вольпина (сына поэта Сергея Есенина), который был по политическим причинам принудительно заключен в психиатрическую больницу. Письмо было так мастерски написано, что после трансляции его по радио «Би-би-си» гнев мировой общественности заставил руководство Советского Союза почти сразу же освободить Есенина-Вольпина.⁴ Однако это, естественно, сильно разгневало власти. Им потребовалось совсем немного времени для того, чтобы найти способы наказать каждого, кто подписал письмо. В частности, многие лишились преподавательской работы.⁵

Таким образом, Гельфанд уже не был профессором математики в МГУ, однако ему удалось сохранить свой семинар, который все так же проводился в главном здании МГУ. Официальным местом

работы ученого была биологическая лаборатория МГУ, которую тот основал для того, чтобы иметь возможность проводить исследования в области биологии — это была еще одна его страсть.* Фукс трудился в той же лаборатории.

Раньше Фукс уже предлагал мне начать посещать семинар Гельфанда, и я сходил на пару собраний в самом конце весеннего семестра. Они произвели на меня неизгладимое впечатление. Гельфанд вел свой семинар в самом авторитарном стиле. От его решения зависела каждая деталь мероприятия, и хотя неподготовленному человеку все происходящее на семинаре могло показаться совершенно хаотичным, в действительности Гельфанд прикладывал много усилий и тратил огромное количество времени на подготовку и проведение еженедельных встреч.

Тремя годами позднее, когда Гельфанд попросил меня выступить с рассказом о моей работе, мне представилась возможность увидеть всю «кухню» знаменитого мероприятия изнутри. Тогда же я наблюдал за происходящим с позиции семнадцатилетнего студента, находящегося в самом начале своей математической карьеры.

Во многих смыслах этот семинар был театром одного актера. Официально считалось, что на семинаре тот или иной ученый будет делать доклад на ту или иную тему, но чаще всего выступлениям посвящалась лишь часть семинара. Гельфанд поднимал другие темы и вызывал к доске других математиков, которых не просили подготовиться заранее, для того чтобы они дали свои пояснения. Однако в центре всегда оставался он сам. Он и только он управлял ходом семинара, и в его руках была абсолютная власть: в любой момент он мог прервать докладчика вопросом, предложением, комментарием. У меня в ушах до сих пор звучит его «Дайте определение!» — самое частое замечание в сторону докладчиков.

* Стоит также отметить, что до середины 1980-х годов Гельфанд не избирался полноправным членом Академии наук СССР. Причиной такой несправедливости было то, что математическое отделение Академии десятилетиями находилось под контролем директора Московского математического института имени Стеклова Ивана Матвеевича Виноградова, которого за глаза называли «Главным антисемитом СССР». Виноградов проводил в Академии и Институте Стеклова, который он возглавлял в течение почти пятидесяти лет, поистине драконовскую антисемитскую политику.

У него также была привычка произносить продолжительные речи на различные темы (зачастую даже не связанные с обсуждаемым материалом), рассказывать анекдоты, всевозможные истории, многие из которых действительно были весьма интересными. Именно там я услышал присказку, процитированную во введении: пьянчужка не знает, что больше — $2/3$ или $3/5$, но он знает, что две бутылки водки на троих — лучше, чем три бутылки водки на пятерых. Одной из отличительных особенностей Гельфанда было умение перефразировать вопрос, заданный другим человеком, так, чтобы ответ сразу же стал очевиден.

Также он любил рассказывать анекдот о беспроводном телеграфе: «На светском мероприятии начала двадцатого века физика просят объяснить, как это работает. Физик отвечает, что все очень просто. Сначала нужно понять, как работает обычный проводочный телеграф: представьте собаку, голова которой находится в Лондоне, а хвост — в Париже. Вы тянете за хвост в Париже, а собака лает в Лондоне. Беспроводный телеграф работает точно так же — только без собаки».

Рассказав анекдот и дождавшись, пока стихнет смех (смеялись все, даже те, кто уже тысячу раз слышал его до этого), Гельфанд возвращался к обсуждаемой математической проблеме. Если ему казалось, что ее решение требует радикально нового подхода, он добавлял: «Я хочу сказать, что нам нужно сделать это без собаки».

Очень часто он применял на семинарах такой прием, как назначение «контрольного слушателя». Обычно это был кто-то из наиболее молодых членов аудитории, и его обязанностью было периодически повторять, что только что сказал лектор. Если контрольный слушатель хорошо пересказывал услышанное, это означало, что выступающий хорошо делает свое дело. В противном случае лектор должен был сбавить темп и доступнее излагать материал. Бывало даже, что Гельфанд прогонял некомпетентного лектора, заклеив позором, и заменял его или ее другим ученым из аудитории. (Разумеется, Гельфанд не упускал случая подшутить и над контрольным слушателем.) Все это делало семинары довольно увлекательным времяпрепровождением.

Очень часто семинары проходят неспешно; люди в аудитории просто вежливо слушают (некоторые могут даже задремать), будучи слишком благодушными, слишком вежливыми или просто слишком робкими для того, чтобы задавать докладчику вопросы.

Вряд ли они много выносят из таких семинаров. Без сомнения, рваный ритм семинаров Гельфанда, как и авторитарный характер самого ученого, не только не позволяли людям заснуть (что само по себе было нетривиальным, учитывая, что семинары нередко заканчивались за полночь), но и служили для них огромным стимулом — этого попросту невозможно ожидать от других семинаров. Гельфанд предъявлял к докладчикам высокие требования. Они усердно работали — и он тоже. Как бы люди ни отзывались о стиле Гельфанда, никто никогда не уходил с его семинара с пустыми руками.

Тем не менее мне кажется, что подобный семинар мог существовать только в тоталитарном обществе — таком, как Советский Союз. Люди были привычны к диктаторским замашкам, характерным для Гельфанда. Он мог проявлять жестокость, даже оскорблять окружающих. Не думаю, что на Западе многие стали бы терпеть такое обращение. Однако в Советском Союзе это не считалось чем-то из ряда вон выходящим, и никто не протестовал. (Еще один знаменитый пример такого рода — семинар Льва Ландау по теоретической физике.)

Когда я только начал посещать семинар, у Гельфанда как раз выступал молодой физик Владимир Казаков. Он представлял серию докладов о своей работе над так называемыми матричными моделями. Казаков новаторским способом применил методы квантовой физики, для того чтобы получить фундаментальные математические результаты, которых математикам не удавалось достичь с использованием привычных методов. Гельфанд всегда интересовался квантовой физикой, и эта тема традиционно играла большую роль в его семинаре. Работа Казакова произвела на него огромное впечатление, и он активно продвигал ее в математическом сообществе. Как это бывало уже очень много раз, его прогнозы оправдались: несколько лет спустя эта работа стала очень знаменитой и популярной, а также привела к серьезным прорывам как в области физики, так и математики.

В своих лекциях на семинаре Казаков прилагал особенные усилия к тому, чтобы объяснить свои идеи математикам. Гельфанд относился к нему с большим почтением, чем обычно к докладчикам, и выступления Казакова подолгу не прерывались вопросами и комментариями.

Пока шел этот цикл лекций, была опубликована новая статья Джона Харера и Дона Цагира, в котором они представляли краси-

вое решение очень сложной задачи из области комбинаторики.⁶ Цагир имеет репутацию ученого, способного решать, казалось бы, абсолютно неразрешимые проблемы, и он также знаменит высоким темпом работы. Говорили, что поиск решения этой задачи занял у него шесть месяцев, и он очень гордился этим результатом. На следующем семинаре, когда Казаков продолжил свое сообщение, Гельфанд попросил его решить задачу Харера — Цагира с применением матричных моделей. У Гельфанда было предчувствие, что методы Казакова могут оказаться очень полезными для решения задач подобного рода, и он оказался прав. Казаков не знал о статье Харера — Цагира, и об этой задаче он услышал впервые. Стоя у доски, он поразмышлял в течение пары минут и тут же написал функцию Лагранжа квантовой теории поля, с помощью которой, используя методы Казакова, можно было прийти к требуемому ответу.

Все присутствующие в аудитории были поражены. Но не Гельфанд. Он с самыми невинными интонациями спросил Казакова:

— Володя, сколько лет вы работали над этой темой?

— Не помню точно, Израиль Моисеевич, наверное, лет шесть или около того.

— Так значит, вам потребовалось шесть лет плюс две минуты, а Дону Цагиру — шесть месяцев. Х-м-м-м... Видите, насколько он сильнее вас?

И это была еще достаточно безобидная «шутка» по сравнению с другими. Для того чтобы выжить в этой среде, нужно было обладать очень толстой кожей. К сожалению, многие докладчики принимали близко к сердцу, когда их вот так, публично ставили на место, и это причиняло им много мучений. Однако должен сказать, что Гельфанд всегда был острее на язык в отношении старших, заслуженных математиков, и достаточно мягко обращался с молодыми математиками, особенно студентами.

Гельфанд часто повторял, что рад видеть на своем семинаре всех студентов, талантливых аспирантов и только блестящих профессоров. Он понимал, что для того, чтобы эта научная область продолжала развиваться, очень важно готовить новое поколение математиков, и поэтому окружал себя молодыми талантами. В их компании он сам чувствовал себя моложе (и продолжал заниматься передовыми исследованиями, даже когда ему уже было далеко за восемьдесят). Зачастую он даже приглашал на свой семинар

учеников выпускных классов и усаживал их в первый ряд, чтобы быть уверенным, что они ничего не упустят. (Разумеется, это были не обычные школьники. Многие из них впоследствии стали всемирно известными математиками.)

По общему мнению, Гельфанд проявлял огромную щедрость по отношению к своим студентам. Он проводил регулярные встречи с учениками и готов был беседовать с ними часами. Очень мало кто из профессоров мог похвастаться этим. Ученикам Гельфанда приходилось нелегко. Он совершенно точно не был добрым наставником, и окружающим приходилось мириться с его разнообразными причудами и диктаторскими привычками. Тем не менее после общения со многими учениками Гельфанда у меня сложилось впечатление, что все они были привязаны к нему и чувствовали себя в долгу перед учителем.

Я не был учеником Гельфанда — я был его «внучатым учеником», поскольку оба моих учителя, Фукс и Фейгин (с которым мы к тому моменту еще не были знакомы), хотя бы отчасти могли считаться носителями этого звания. Я всегда считал себя частью «математической школы Гельфанда». Много позже, когда оба мы перебрались в Соединенные Штаты, Гельфанд спросил меня об этом напрямую, и, когда я ответил утвердительно, по выражению его лица стало ясно, насколько важен для него вопрос его школы и как приятно ему было осознавать, кто причислял себя к ней.

Эта школа, центральным элементом и окном в мир которой был семинар, оказала неимоверное влияние на развитие математической науки не только в Москве, но и по всему миру. Иностранцы математики приезжали в Москву только для того, чтобы встретиться с Гельфандом и посетить его семинар. Многие считали за честь прочитать свою лекцию на семинаре Гельфанда.

Большую роль в становлении репутации семинара сыграла завораживающая и экстравагантная личность Гельфанда. Несколько лет спустя после описанных выше событий он заинтересовался моей работой и попросил меня выступить на семинаре. В беседах с ним я провел много часов, и разговаривали мы не только о математике, но и о множестве других вещей. Он очень интересовался историей математики, в частности собственным наследием. Я живо помню свое первое посещение его московской квартиры (мне только что исполнился двадцать один год). Гельфанд объявил, что считает себя «Моцартом от математики».

— Память о большинстве композиторов хранится благодаря конкретным написанным ими произведениям, — сказал он. — Но с Моцартом это не так. Что делает его гением, так это вся совокупность его работ.

Он помолчал и продолжил:

— То же самое можно сказать о моей математической работе.

Если отбросить всевозможные забавные вопросы, которые вызывает подобная самооценка, то, думаю, это на самом деле довольно меткое сравнение. Хотя Гельфанд и не доказал никакие гипотезы, долгое время считавшиеся неразрешимыми (такие, как последняя теорема Ферма), кумулятивное влияние, которое его идеи оказали на математику, действительно ошеломляет. Важнее всего, вероятно, то, что он обладал исключительным вкусом к красивой математике, а также тонким чутьем, безошибочно указывавшим ему наиболее интересные и многообещающие области математической науки. Он был настоящим оракулом, способным предсказывать, в каком направлении будет происходить развитие математики.

В дисциплине, становящейся все более раздробленной и специализированной, он оставался одним из последних людей эпохи Ренессанса, способных объединять, сводить вместе разные области. Он олицетворял единство математики. В отличие от большинства семинаров, фокусирующихся только на одной математической области, на семинаре Гельфанда мы могли вживую пронаблюдать, как все эти разные фрагменты соединяются между собой. Вот почему каждый понедельник вечером все мы собирались на четырнадцатом этаже главного здания МГУ и с нетерпением ожидали слов мастера.

И этот внушающий благоговейный ужас человек был тем самым адресатом, которому, по мнению Фукса, я должен был отправить свою первую математическую статью. Журнал Гельфанда «Функциональный анализ и его приложения» выходил четыре раза в год; объем каждого издания составлял около ста страниц (для подобного журнала такое число страниц — просто ничто, но издатель отказывался увеличивать объем, поэтому приходилось подстраиваться под его требования). Это был один из самых уважаемых научных журналов в мире. Он переводился на английский язык, и на него были подписаны многие научные библиотеки по всему миру.

Было очень трудно получить возможность опубликовать статью в этом журнале, отчасти из-за жесточайшего ограничения на объем. В действительности публиковались только два типа статей: исследовательские (каждая длиной обычно около десяти — пятнадцати страниц), содержащие подробные доказательства, и краткие анонсы, в которых печатались только результаты, без доказательств. Анонс должен был занимать не более двух страниц. Теоретически, вслед за подобной краткой статьей должна была в конечном итоге выходить полная версия, включающая все доказательства, но порой этого не происходило, так как опубликовать длинную статью было необычайно сложно. Вообще, для советского математика публикация за границей была чем-то из разряда недостижимого (для этого требовалось пройти всевозможные проверки по линии безопасности, что легко могло занять целый год и потребовать невероятных усилий). В то же время число математических изданий в Советском Союзе с учетом того, сколько в стране было математиков, было абсолютно ничтожным. К сожалению, многие издания контролировались отдельными группами, которые не допускали к печати работы конкурентов; ну а кроме того, не обходилось без антисемитизма.

Вследствие всего этого в СССР зародилась определенная субкультура написания математических статей, получившая название «русской традиции», — исключительно сжатое изложение, с минимумом подробностей. Многим математикам за пределами Советского Союза было невдомек, что чаще всего это делалось по необходимости, а не по прихоти авторов.

Именно поэтому Фукс и предполагал, что моя первая статья будет опубликована в формате подобного краткого анонса.

Каждая статья, отправленная в «Функциональный анализ и его приложения», включая краткие анонсы, должна была пройти проверку и быть одобрена самим Гельфандом. Если статья ему нравилась, то для нее запускался обычный процесс рецензирования. Это означало, что для того, чтобы мою статью рассмотрели, я должен был встретиться с Израилем Моисеевичем лично. Итак, перед началом одного из первых семинаров осеннего семестра 1986 года Фукс представил меня ему.

Гельфанд пожал мне руку, улыбнулся и сказал:

— Рад встрече с вами. Мне уже приходилось о вас слышать.

Я был совершенно потрясен встречей со знаменитым математиком. Клянусь, я видел сияние вокруг головы Гельфанда!

Затем тот повернулся к Фуксу и попросил показать мою статью. Фукс передал бумаги. Гельфанд принялся листать их, страница за страницей. Там было всего пять листов, которые я аккуратно напечатал (медленно, двумя пальцами) на печатной машинке, позаимствованной в Керосинке. Формулы я вписал от руки.

— Интересно, — одобрительно произнес Гельфанд, а затем повернулся к Фуксу, — но почему ты считаешь, что это важно?

Фукс начал объяснять что-то о дискриминанте многочлена порядка n с различными корнями и как полученные мной результаты могли бы помочь в описании топологии слоев дискриминанта, и... Гельфанд прервал его:

— Митя, — он использовал уменьшительную форму имени Фукса, — знаешь, сколько у этого журнала подписчиков?

— Нет, Израиль Моисеевич, не знаю.

— Больше тысячи (это было довольно большое количество, учитывая специализированную направленность журнала). — Я не могу приложить тебя к каждому экземпляру, для того чтобы ты каждому подписчику объяснил, что хорошего нам ждать от этих результатов. Ведь так?

Фукс покачал головой.

— Это должно быть ясно изложено в статье, хорошо? — Гельфанд подчеркнуто обращался именно к Фуксу, словно недостатки статьи были исключительно *его* виной. После этого он повернулся и сказал нам обоим: — А в целом, статья мне очень нравится.

С этими словами он еще раз улыбнулся мне и отошел, чтобы продолжить разговор с кем-то еще.

Вот это поворот! Фукс дождался, когда Гельфанд будет вне пределов слышимости, и проговорил:

— Не беспокойся. Он всего лишь хотел произвести на тебя впечатление.

(И ему это, безусловно, удалось!)

— Мы всего лишь добавим абзац с нужным описанием в начале статьи, и после этого он, скорее всего, опубликует ее.

Это было лучшим из возможных исходов. После добавления абзаца в соответствии с требованиями Гельфанда я официально представил ее на рассмотрение, и, в конечном счете, она была опубликована.⁷ Так закончился мой первый математический проект. Я преодолел первый порог и находился в начале пути, который привел меня в волшебный мир современной математики.

В этот мир я хочу пригласить и вас.

Глава 7. Теория Великого Объединения

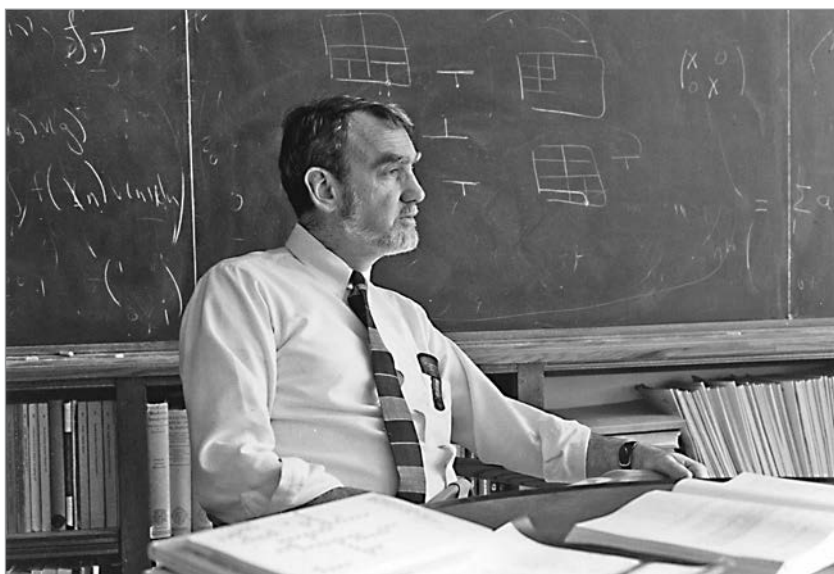
Решение первой задачи стало моим посвящением в храм математики. А дальше произошло настоящее чудо: благодаря следующему математическому проекту, которым я занялся совместно с Фуксом, я попал прямоком в программу Ленглендса, одну из глубочайших и самых поразительных математических теорий последних пятидесяти лет. О своем проекте я расскажу ниже, потому что главная моя цель при написании этой книги — описать нечто большее, чем просто мои опыт и впечатления. Я хочу помочь вам прочувствовать вкус современной математики, показать, что это мир, полный своеобразия, творчества и открывающих новые горизонты прозрений. Программа Ленглендса — превосходный тому пример. Мне нравится называть ее теория Великого Объединения Математики, поскольку она обнаруживает и выводит на поверхность загадочные структуры, существующие в разных областях математики, указывая таким образом на неожиданные глубинные взаимосвязи между ними.

Математика включает множество подобластей. Часто они производят впечатление разных континентов, и кажется, что математики, работающие в этих подобластях, говорят на разных языках. Вот почему идея «унификации», объединения теорий, происходящих из этих разнообразных сфер, осознания, что все это — части одной общей истории, обладает такой мощью. Как если бы вы внезапно поняли, что обрели способность понимать другой язык — тот, которым давно пытались овладеть, но без особого успеха.

Вообще говоря, математическую науку полезно представлять себе в форме гигантского пазла, относительно которого никто не знает, каким должно оказаться готовое изображение. Для того чтобы собрать пазл, требуются объединенные усилия тысяч людей. Они работают в группах: вот алгебраисты трудятся над своей частью головоломки, вот специалисты по теории чисел, вот геометры и т. д. Каждой группке удалось создать небольшой «островок» общей картины, но на протяжении практически всей истории математики у ученых не было почти никаких догадок

относительно того, как эти островки должны соединяться между собой и должны ли вообще. Таким образом, большинство людей продолжают работать над расширением этих островков. Но время от времени появляется человек, которому удастся разглядеть эти связи, и он соединяет те или иные части между собой. Когда это происходит, проявляются важные свойства общей картины, и это привносит новый смысл в отдельные области.

Именно таким человеком стал Роберт Ленглендс. Однако истинный его замысел был гораздо глубже — он не собирался довольствоваться простым соединением нескольких островков. Программа Ленглендса была запущена ученым в конце 1960-х годов в качестве попытки обнаружить механизмы, которые помогли бы построить мосты между множеством самых разных островков, даже если, на первый взгляд, между ними нет никакой связи.



*Рис. 7.1. Роберт Ленглендс в своем офисе в Принстонском университете, 1999 год.
Фотография Джеффа Моззочи (Jeff Mozzochi)*

Сейчас Ленглендс — профессор-эмерит математики Института высших исследований Принстонского университета. Он занимает офис, в котором раньше работал Альберт Эйнштейн. Человек удивительного таланта, умеющий видеть далеко вперед, он родился

в 1936 году и вырос в небольшом городке неподалеку от Ванкувера; его родители владели плотнической компанией. Одна из самых поразительных черт Ленглендса — его умение бегло разговаривать на многих языках: английском, французском, немецком, русском и турецком. И это несмотря на то, что до поступления в университет он не говорил ни на одном другом языке, кроме своего родного, английского.¹

Не так давно у меня была возможность поработать в тесном сотрудничестве с Ленглендсом, и мы часто переписывались по-русски. Однажды он прислал мне список русских писателей, произведения которых читал на языке оригинала. Список этот настолько обширен, что я совершенно не удивился бы, узнав, что Ленглендс прочитал больше русской литературы, чем я, родившийся в России. Я частенько задумывался, не связана ли уникальная способность Ленглендса к изучению иностранных языков с его умением сводить воедино разнообразные математические культуры.

Ключевая точка программы Ленглендса — это уже знакомая нам концепция симметрии. Мы обсуждали симметрию в геометрии: например, любое вращение будет симметрией круглого стола. Исследование подобных симметрий привело нас к понятию группы. Затем мы узнали, что группы в математике могут принимать самые разные обличья: группы вращения, группы кос и т. д. Также мы узнали, что группы послужили инструментом классификации элементарных частиц и помогли предсказать существование кварков. Группы, имеющие отношение к программе Ленглендса, связаны с теорией чисел.

Для того чтобы понять это, нам необходимо, в первую очередь, поговорить о числах, с которыми мы сталкиваемся в нашей повседневной жизни. Каждый из нас родился в определенном году, живет в доме под определенным номером, у нас есть номера телефонов, PIN-коды для доступа к банковским счетам через банкоматы и т. п. У всех этих чисел есть нечто общее: каждое из них получается путем сложения единицы с самой собой определенное число раз: $1 + 1$ равно 2, $1 + 1 + 1$ равно 3 и т. д. Такие числа называются натуральными.

Также у нас есть число 0 и отрицательные числа: -1 , -2 , -3 , ... Как уже говорилось в главе 5, общее название для этих чисел — «целые числа». Таким образом, целое число — это

натуральное число, либо число 0, либо натуральное число со знаком «минус».

Мы также оперируем числами более общего вида. Цену в долларах и центах часто записывают так: \$2.59, что означает два доллара и пятьдесят девять центов. Точно так же можно сказать, что это 2 плюс определенная доля целого — $59/100$, или 59 раз по $1/100$. Здесь $1/100$ — это значение, которое при сложении с самим собой 100 раз дает нам единицу. Числа подобного вида называются рациональными, или дробными, числами.

Хороший пример рационального числа — четвертак; математически это значение записывается в форме дроби: $1/4$. Вообще, из любых двух целых чисел m и n мы можем составить дробь m/n . Если у m и n есть общий делитель, предположим, d (то есть $m = dm'$ и $n = dn'$), то мы можем исключить d из обоих чисел и вместо m/n записать просто m'/n' . Например, $1/4$ можно представить в форме $25/100$, и именно поэтому американцы называют монету в 25 центов четвертаком.

Подавляющее большинство чисел, с которыми мы встречаемся в бытовых ситуациях, — это дроби, или рациональные числа. Однако существуют еще и другие числа, не относящиеся к рациональным. Пример такого числа — квадратный корень из 2, записывается как $\sqrt{2}$. Это число, которое при возведении в квадрат дает 2. Геометрически это длина гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами длиной 1 (рис. 7.2).

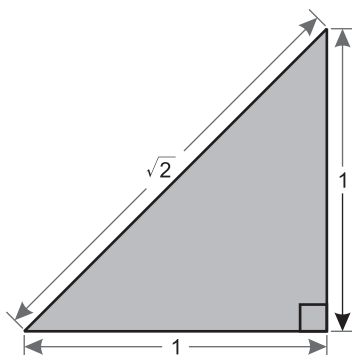


Рис. 7.2

Оказывается, это число невозможно представить в форме m/n , где m и n — два натуральных числа.² Тем не менее мы можем

аппроксимировать его с помощью рациональных чисел, если запишем первые несколько символов его десятичной формы: 1,4142, затем 1,41421, затем 1,414213 и т. д. Однако сколько бы десятичных знаков мы ни приводили, полученное значение все равно останется приблизительным — нам придется опустить бесконечное множество цифр после запятой. Никакое конечное десятичное число не способно должным образом представить значение $\sqrt{2}$.

Поскольку $\sqrt{2}$ — это длина гипотенузы показанного выше треугольника, мы знаем, что это число существует. Но его невозможно уместить в систему счисления, включающую только рациональные числа.

Есть множество других чисел, обладающих такими же характеристиками, например $\sqrt{3}$ или кубический корень из 2. И сейчас нам нужно разработать методiku присоединения этих чисел к рациональным числам. Думайте о рациональных числах как о чашке чая. Мы можем выпить ее саму по себе, а можем улучшить вкус чая, добавив сахар, молоко, мед, различные специи — эти роли будут исполнять числа, подобные $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и т. п.

Давайте попробуем примешать $\sqrt{2}$. Это будет эквивалентом добавления в чашку чая кубика сахара. Итак, мы бросаем $\sqrt{2}$ во множество рациональных чисел и смотрим, что за система счисления получается в результате. Определенно, мы хотим уметь умножать числа в этой новой системе счисления, поэтому должны учесть все числа, являющиеся произведениями рациональных чисел и $\sqrt{2}$. Это числа формата $\frac{k}{l}\sqrt{2}$. Таким образом, наша система счисления должна включать все дроби $\frac{m}{n}$ (это сами рациональные числа) и все числа в форме $\frac{k}{l}\sqrt{2}$. Однако нам также требуется возможность складывать их друг с другом, так что мы обязаны заодно включить и суммы

$$\frac{m}{n} + \frac{k}{l}\sqrt{2}.$$

Множество всех чисел такого формата уже «полно» в том смысле, что мы можем выполнять на них все привычные операции: сложение, вычитание, умножение, деление. Результатом также всегда будет число того же формата.³ Это наша чашка чая, в которой полностью растворился кубик сахара.

Оказывается, что у этой новой системы счисления есть скрытое свойство, которым рациональные числа не обладают. Это свойство будет служить нам порталом в волшебный мир чисел. Я говорю о том, что в этой системе счисления присутствуют симметрии.

Под «симметрией» я подразумеваю правило, связывающее с любым выбранным числом новое число. Иными словами, данная симметрия преобразует каждое число в другое число из той же системы счисления. Мы будем говорить, что симметрия — это правило, согласно которому каждое число «переходит» в какое-то другое. Это правило должно быть совместимо с операциями сложения, вычитания, умножения и деления. Пока что вам может быть непонятно, зачем вообще рассматривать симметрии системы счисления. Пожалуйста, потерпите минутку, и совсем скоро вы все узнаете.

В нашей системе счисления присутствует тождественная симметрия, то есть правило, согласно которому каждое число переходит само в себя. Это как поворот стола на 0 градусов, когда каждая точка стола остается на том же месте, на котором была в начале.

Однако оказывается, что в этой системе счисления есть и нетривиальная симметрия. Для того чтобы понять это, давайте взглянем на число $\sqrt{2}$ с новой точки зрения — как на решение уравнения $x^2 = 2$. Очевидно, если подставить вместо x значение $\sqrt{2}$, то равенство выполнится. Но в действительности у данного уравнения два решения: одно из них $\sqrt{2}$, а второе $-\sqrt{2}$. И когда мы конструировали нашу новую систему счисления, на самом деле мы добавили к рациональным числам оба этих значения. Подменяя одно решение другим, мы получаем симметрию данной системы счисления.

Для того чтобы проиллюстрировать это, снова воспользуемся аналогией с чашкой чая, немного ее модифицировав. Допустим, мы бросили в чашку кубик белого сахара и кубик коричневого сахара и тщательно размешали. Будем считать белым сахаром $\sqrt{2}$, а коричневым — его с минусом, $-\sqrt{2}$. Ясно, что если мы подменим одно другим, результирующая чашка нисколько не изменится. Точно так же замена $\sqrt{2}$ на $-\sqrt{2}$ дает нам симметрию нашей системы счисления.

При такой замене рациональные числа остаются неизменными.⁴ Следовательно, число в форме $\frac{m}{n} + \frac{k}{l}\sqrt{2}$ будет переходить в число $\frac{m}{n} - \frac{k}{l}\sqrt{2}$. Другими словами, в каждом числе мы всего лишь меняем знак перед $\sqrt{2}$, а остальное не трогаем.⁵

Вы видите, что наша новая система счисления подобна бабочке: числа $\frac{m}{n} + \frac{k}{l}\sqrt{2}$ — это как чешуйки ее крылышек, а симметрия этих чисел, получающаяся путем замены $\sqrt{2}$ на $-\sqrt{2}$ и наоборот, аналогична симметрии бабочки, когда мы меняем крылышки местами.

В более общем случае вместо $x^2 = 2$ мы могли бы рассмотреть и другие уравнения по переменной x , например кубическое уравнение $x^3 - x + 1 = 0$. Если решения такого уравнения не относятся к рациональным числам (как в случае показанных выше уравнений), то их можно присоединить к множеству рациональных чисел. Более того, мы могли бы присоединить к рациональным числам решения сразу нескольких подобных уравнений. Этот способ позволяет построить многие различные системы счисления, или, как их называют математики, *числовые поля*. Слово «поле» указывает на тот факт, что данная система счисления замкнута относительно операций сложения, вычитания, умножения и деления.

Так же как числовое поле, полученное посредством присоединения $\sqrt{2}$, общие числовые поля обладают симметриями, совместимыми с этими операциями. Симметрии любого числового поля можно применять одну за другой (то есть составлять композиции симметрий) — в точности, как с геометрическими объектами. Неудивительно, что эти симметрии также образуют группу. Она названа *группой Галуа* числового поля⁶ в честь французского математика Эвариста Галуа.



Рис. 7.3. Эварист Галуа

История Галуа — одна из самых романтических и захватывающих среди всех, что когда-либо рассказывались про математиков. Необычайно одаренный с детства, он сделал множество прогрессивных открытий в очень раннем возрасте. А затем, когда ему было всего лишь двадцать лет, погиб на дуэли. Высказываются разные предположения относительно причин дуэли, случившейся 31 мая 1832 года: некоторые говорят, что она была связана с романтическим увлечением, другие утверждают, что все дело в политической активности молодого ученого. Определенно, Галуа не стеснялся вслух говорить о собственных политических взглядах, и за свою короткую жизнь сумел обидеть многих людей.

Буквально в шаге от смертного ложа, лихорадочно работая пером глубокой ночью, при свечах, он закончил рукопись, содержащую наброски его идей о симметриях чисел. Это было, по сути, его любовное послание к человечеству, в котором он поделился с нами своими блистательными открытиями. Действительно, обнаруженные Галуа группы симметрий, носящие сегодня его имя, — это одно из чудес света, как египетские пирамиды или висячие сады Семирамиды. Отличие лишь в том, что для того, чтобы увидеть их, нам не нужно лететь на другой континент или путешествовать сквозь время. Они прямо здесь, перед нами, где бы мы ни находились. И пленяют нас они не только своей красотой, но и огромным потенциалом для практических приложений.

К сожалению, Галуа слишком далеко обогнал свое время. Его идеи были настолько радикальными, что современники их попросту не могли понять. Работы Галуа дважды отвергались Французской академией наук, и до их первой публикации и признания другими математиками прошло почти пятьдесят лет. Тем не менее сегодня он по праву считается одним из столпов современной математики.

Галуа перенес идею симметрии, интуитивно понятную нам из геометрии, на передний край теории чисел. Однако еще важнее то, что он продемонстрировал поразительную мощь симметрии.

До Галуа математики концентрировали свои усилия на поиске конкретных формул для решения уравнений, подобных $x^2 = 2$ или $x^3 - x + 1 = 0$, называемых полиномиальными уравнениями. Прискорбно, что этот стиль обучения до сих пор используется в наших школах, несмотря на то что со дня смерти Галуа прошло уже без

малого два века. Например, мы обязаны зазубрить формулу решения общего квадратного уравнения (то есть уравнения порядка 2)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

в терминах его коэффициентов a , b , c . Я не буду приводить ее здесь, чтобы не вызвать у читателя неприятных воспоминаний. Единственное, что нам надо помнить, это то, что решение включает извлечение квадратного корня.

Аналогично, существует похожая, но более сложная формула для поиска решений общего кубического уравнения (уравнения порядка 3)

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

в терминах его коэффициентов a , b , c , d , включающая кубический корень. Задача решения полиномиального уравнения в терминах радикалов (то есть квадратных корней, кубических корней и т. д.) по мере возрастания порядка уравнения быстро усложняется.

Общая формула решения квадратных уравнений была известна еще персидскому математику аль-Хорезми в девятом веке (слово «алгебра» происходит от арабского «аль-джабр», присутствующего в названии его книги). Формулы для решения кубического и биквадратного (порядка 4) уравнений были открыты в первой половине шестнадцатого века. Следующей целью вполне предсказуемо стало уравнение пятой степени. Еще до Галуа в течение почти 300 лет многие математики предпринимали отчаянные попытки найти формулу для его решения, но безрезультатно. Но Галуа понял, что все они задавали неправильный вопрос. Вместо этого, сказал он, мы должны сфокусироваться на группе симметрий числового поля, полученного путем присоединения решений этого уравнения к рациональным числам, — именно ее мы сегодня называем группой Галуа.

Оказывается, проблему описания группы Галуа решить куда проще, чем записать явную формулу решения. Более того, сказать что-то значимое об этой группе можно даже в том случае, если решения нам вовсе не известны. А затем исходя из этой информации сделать важные выводы уже о самих решениях. Действительно, Галуа удалось показать, что формула для решений в терминах радикалов (то есть квадратных корней, кубических корней и т. д.) существует тогда и только тогда, когда соответствующая группа

Галуа обладает определенной простой структурой: она является тем, что математики сегодня называют *разрешимой* группой. Для квадратных, кубических и биквадратных уравнений группы Галуа всегда разрешимы. Вот почему решения этих уравнений могут быть записаны в терминах радикалов. Однако Галуа показал, что группа симметрий типичного уравнения пятого порядка (или выше) неразрешима. Это подразумевает, что формул для решения таких уравнений в терминах радикалов просто не существует.⁷

Не буду вдаваться в детали доказательства, а вместо этого предлагаю рассмотреть пару примеров групп Галуа, для того чтобы вы прочувствовали идею. Мы уже описали группу Галуа для уравнения $x^2 = 2$. У этого уравнения два решения: $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$, которые мы присоединяем к множеству рациональных чисел. Группа Галуа результирующего числового поля,⁸ таким образом, состоит из двух элементов: тождественного и симметрии, заключающейся в замене $\sqrt{2}$ на $-\sqrt{2}$.

В качестве следующего примера рассмотрим указанное выше кубическое уравнение и предположим, что его коэффициенты рациональны, а все три решения — иррациональные числа. Составим новое числовое поле путем присоединения этих решений к рациональным числам. Это как добавить в нашу чашку чая три разных ингредиента; скажем, кубик сахара, порцию молока и чайную ложку меда. Никакая симметрия этого числового поля (чашки чая, в которую добавлены все три ингредиента) не меняет кубическое уравнение, так как его коэффициенты относятся к множеству рациональных чисел, а рациональные числа при применении симметрий сохраняются. Следовательно, каждое решение данного кубического уравнения (любой из трех ингредиентов) будет всегда переходить в другое решение. Это наблюдение позволяет нам описать группу Галуа симметрий этого числового поля в терминах перестановок этих трех решений. Самое главное здесь то, что мы получаем это описание, не записывая ни одной конкретной формулы поиска решения.⁹

Подобным образом группа Галуа симметрий числового поля, полученного путем присоединения всех решений произвольного полиномиального уравнения к рациональным числам, также может быть описана в терминах перестановок этих решений (у полиномиального уравнения порядка n , все решения которого различны и не являются рациональными, в точности n решений). Таким об-

разом, мы можем сделать множество важных выводов относительно уравнения, не выражая его решения в терминах коэффициентов.¹⁰

Работа Галуа — превосходный пример мощи математической догадки. Галуа не решал проблему поиска формулы решений полиномиальных уравнений в том смысле, как об этом было принято думать. Он *хакнул* ее! Переформулировал, согнул, скрутил и посмотрел на нее под совершенно новым углом. И его блестящая догадка навсегда изменила наш способ мышления о числах и уравнениях.

А потом, 150 лет спустя, Ленглендс подхватил его идеи и привнес в них невероятные усовершенствования. В 1967 году ему пришла на ум революционная мысль о взаимосвязи между теорией групп Галуа и другой сферой математической науки, которая называется гармоническим анализом. Казалось бы, от одной области до другой целые световые года, но выяснилось, что они тесно переплетены между собой. Ленглендс — тогда ему было слегка за тридцать — описал свои идеи в письме к выдающемуся математику Андре Вейлю. Копии этого послания широко разошлись в математическом мире.¹¹ Сопроводительная записка отличается поразительной скромностью:¹²

Профессор Вейль, в ответ на Ваше приглашение приехать и побеседовать я написал приложенное письмо. Закончив его, я понял, что не могу быть полностью уверенным ни в одном утверждении, содержащемся в нем. Если Вы пожелаете прочесть его как мои чисто умозрительные размышления, я это высоко оценю; если же нет — уверен, мусорная корзина у Вас находится недалеко.

То, что последовало за этим робким вступлением, оказалось принципиально новой теорией, перевернувшей с ног на голову все наши представления о математике. Так родилась программа Ленглендса.

Несколько поколений математиков посвятили свои жизни решению задач, предложенных Ленглендсом. Что их вдохновляло? Ответ вы найдете в следующей главе.

Глава 8. Волшебные числа

Когда мы впервые говорили о симметриях в главе 2, мы узнали, что представления группы под названием $SU(3)$ определяют поведение элементарных частиц. Программа Ленглендса также занимается представлениями группы — но на этот раз речь идет о группе Галуа симметрий числового поля того типа, который мы рассматривали в предыдущей главе. Оказывается, эти представления формируют «исходный код» числового поля и несут всю необходимую информацию о числах.

Ленглендс высказал блестящую идею: мы могли бы извлекать эту информацию из объектов совершенно иной природы — так называемых автоморфных функций, принадлежащих еще одной области математики, которая носит название гармонического анализа. Основу гармонического анализа составляет изучение гармоник, то есть простейших звуковых волн, частоты которых кратны друг другу. Суть идеи заключается в том, что обычная звуковая волна представляет собой суперпозицию гармоник, точно так же, как звучание симфонии определяется суперпозицией гармоник, соответствующих нотам, которые играют различные инструменты. В математическом смысле это означает представление рассматриваемой функции в форме суперпозиции функций, описывающих гармоники, таких как знакомые всем тригонометрические функции синуса и косинуса. Автоморфные функции — это более изощренная версия привычных гармоник. Существуют мощные аналитические методы для выполнения вычислений с автоморфными функциями. И удивительная догадка Ленглендса заключалась в том, что с помощью этих функций можно найти ответы на множество сложных вопросов теории чисел. Оказывается, что благодаря им мы можем обнаружить скрытую гармонию чисел.

Во введении я писал о том, что одна из главных функций математики заключается в упорядочении информации, или, как сформулировал сам Ленглендс, «создании порядка в кажущемся хаосе». ¹ В идее Ленглендса заложена такая мощь именно потому, что она позволяет преобразовывать, казалось бы, хаотичные данные теории чисел в регулярные структуры, полные симметрии и гармонии.

Если представлять себе разные области математики как континенты, то теория чисел будет, скажем, Северной Америкой, а гармонический анализ — Европой. С каждым годом, для того чтобы переместиться с одного континента на другой, нам требуется все меньше и меньше времени. Когда-то люди путешествовали по воде, затрачивая на это много дней, а сегодня перелет на самолете занимает лишь несколько часов. А теперь представьте себе, что была изобретена новая технология, позволяющая мгновенно переноситься из любой точки Северной Америки в желаемую точку в Европе. Вот это и было бы эквивалентом связей, обнаруженных Ленглендсом.

Я расскажу вам об одной из этих невероятных связей, имеющей много общего с последней теоремой Ферма, которую мы обсуждали в главе 6.

Формулировка последней теоремы Ферма обманчиво проста. Она утверждает, что не существует натуральных чисел x , y , z , таких, чтобы они были решениями уравнения

$$x^n + y^n = z^n$$

при условии, что n больше 2.

Как я уже говорил выше, эту догадку высказал французский математик Пьер Ферма в 1637 году, более 350 лет назад. Он написал об этом на полях старой книги, которую читал в то время. Запись гласит, что он обнаружил «поистине изумительное» доказательство этого утверждения, но «поля слишком малы, чтобы оно там поместилось». Читайте это «твитом» в стиле семнадцатого века: «Я обнаружил поистине изумительное доказательство этой теоремы, но, к сожалению, не могу привести его здесь, потому что оно длиннее ста сорок...» — простите, место закончилось.

Конечно же, Ферма, скорее всего, заблуждался. Ученым потребовалось более 350 лет, для того чтобы найти настоящее доказательство, и оно оказалось невероятно сложным. Это произошло в два этапа. Сначала, в 1986 году, Кен Рибет показал, что последняя теорема Ферма следует из так называемой гипотезы Симуры — Таниямы — Вейля.

(Вероятно, следует заметить, что математическая гипотеза — это утверждение, которое, согласно ожиданиям ученого, должно быть истинным, но пока не доказано. Как только доказательство обнаруживается, гипотеза превращается в теорему.²⁾

Кен Рибет показал, что если существуют натуральные числа x, y, z , решающие уравнение Ферма, то с использованием этих чисел можно сконструировать определенное кубическое уравнение, обладающее свойством, препятствующим выполнению гипотезы Симуры — Таниямы — Вейля (ниже я объясню, что это за уравнение и что за свойство). Если мы уже знаем, что гипотеза Симуры — Таниямы — Вейля истинна, то такое уравнение существовать не может. Но из этого следует, что и числа x, y, z , решающие уравнение Ферма, также не существуют.³

Давайте притормозим и еще раз проанализируем логику этого доказательства. Для того чтобы доказать последнюю теорему Ферма, мы сначала предполагаем, что она ложна; то есть мы говорим, что существуют натуральные числа x, y, z , удовлетворяющие уравнению Ферма. Затем мы связываем с этими числами кубическое уравнение, у которого обнаруживается определенное нежелательное свойство. Согласно гипотезе Симуры — Таниямы — Вейля, такое уравнение существовать не может. Но тогда и существование таких чисел x, y, z также невозможно. Следовательно, у уравнения Ферма нет решений, а значит, последняя теорема Ферма верна! Схематически поток рассуждений выглядит так (обозначим последнюю теорему Ферма ПТФ, а гипотезу Симуры — Таниямы — Вейля — ГСТВ):

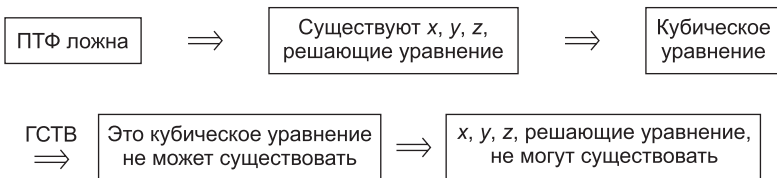


Рис. 8.1

Такой тип доказательства называется доказательством от противного. Мы начинаем с утверждения, прямо противоположного тому, что пытаемся доказать (в нашем случае мы заявляем о существовании натуральных чисел x, y, z , решающих уравнение Ферма, что противоречит тому, что мы хотим доказать). Если посредством цепочки умозаключений мы приходим к очевидно ложному утверждению (в нашем случае о том, что существует кубическое уравнение, которое, согласно гипотезе Симуры — Таниямы — Вейля, существовать не может), то делаем вывод,

что первоначальное утверждение было ложным. Следовательно, утверждение, которое мы планировали доказать (последняя теорема Ферма), истинно.

Для доказательства последней теоремы Ферма остается только продемонстрировать, что гипотеза Симуры — Таниямы — Вейля верна. Как только ученые это поняли (это произошло в 1986 году после публикации работы Рибета), начался поиск доказательства гипотезы Симуры — Таниямы — Вейля.

В течение нескольких лет были представлены многие доказательства, однако каждый раз последующий анализ выявлял в них ошибки или пробелы. В 1993 году Эндрю Уайлс объявил, что ему удалось доказать гипотезу, но все же через пару месяцев обнаружилось, что и в его рассуждениях крылась брешь. Какое-то время все считали, что его доказательство так и останется в одном ряду со многими другими «недоказательствами», в которых прорехи были найдены, но так и не закрыты.

К счастью, Уайлсу удалось заполнить брешь в течение года, а помог ему в этом другой математик, Ричард Тейлор. Вместе они завершили доказательство.⁴ В чудесном документальном фильме о последней теореме Ферма Уайлс по-настоящему расчувствовался, вспоминая этот момент. Невозможно представить, насколько сложным и мучительным был для него этот опыт.

Итак, гипотеза Симуры — Таниямы — Вейля — это ключ к доказательству последней теоремы Ферма. Ее можно рассматривать как специальный случай программы Ленглендса, и, следовательно, она служит превосходной иллюстрацией неожиданных связей, существование которых предсказывает программа.

Гипотеза Симуры — Таниямы — Вейля представляет собой утверждение об определенных уравнениях. Огромную часть математики составляет решение уравнений. Мы хотим знать, есть ли у данного уравнения решение в данной области определения, и если есть, то можно ли его найти. А если решений несколько, то сколько их точно? Почему у одних уравнений есть решения, а у других нет?

В предыдущей главе мы обсуждали полиномиальные уравнения от одной переменной, такие как $x^2 = 2$. Последняя теорема Ферма касается уравнений по трем переменным: $x^n + y^n = z^n$. А гипотеза Симуры — Таниямы — Вейля описывает класс алгебраических уравнений от двух переменных, таких как

$$y^2 + y = x^3 - x^2.$$

Решением этого уравнения будет пара чисел x, y , таких, что левая часть уравнения равна правой.

Однако какие это должны быть числа? Возможно несколько вариантов. Можно сказать, что x и y должны быть натуральными или целыми числами. Или же потребовать, чтобы это были рациональные числа. Мы также можем искать решения x и y , относящиеся к множеству вещественных или даже комплексных чисел — подробнее об этом варианте мы поговорим в следующей главе.

Оказывается, существует и еще один вариант, менее очевидный, но не менее важный: рассмотреть решения x и y «по модулю N » для какого-то фиксированного натурального числа N . Это означает, что мы будем искать целые числа x и y такие, чтобы левая сторона уравнения равнялась правой стороне уравнения с точностью до числа, делителем которого является N .

Например, попробуем найти решения по модулю $N = 5$. Самое очевидное решение: $x = 0, y = 0$. Но есть еще три других, не таких очевидных: $x = 0, y = 4$ — это также решение по модулю 5, поскольку в этом случае левая часть равна 20, а правая равна нулю. Разница между значениями, стоящими по обе стороны от знака равенства, составляет 20, а это число делится на 5 без остатка. Следовательно, найденные значения действительно представляют собой решение уравнения по модулю 5. Оставшиеся два решения — это $x = 1, y = 0$ и $x = 1, y = 4$, в чем можно убедиться, следуя той же схеме рассуждений.

Мы уже обсуждали такие типы вычислений в главе 2, когда говорили о группе вращений круглого стола. Мы узнали, что сложение углов выполняется «по модулю 360». Это означает, что если результат сложения двух углов превышает 360 градусов, то из этого значения нужно вычесть 360, приведя его, таким образом, к диапазону от 0 до 360. Например, поворот на 450 градусов — это то же самое, что поворот на 90 градусов, потому что $450 - 360 = 90$.

Тот же самый тип вычислений используется в США для чтения показаний часов. Допустим, человек начинает работать в 10 часов утра и работает 8 часов. Во сколько он заканчивает? $10 + 8 = 18$, поэтому совершенно естественно сказать, что человек заканчивает работу в 18 часов. Это нормально, например, для Франции, где при записи времени количество целых часов указывается как число от 0 до 24 (хотя на самом деле, не совсем нормально, потому что обычный рабочий день во Франции составляет семь часов). А в США

человек сказал бы, что закончил работу в 6 пополудни, или 6 pm. Как из 18 получается 6? Путем вычитания 12, то есть $18 - 12 = 6$.

Таким образом, с часами работает тот же принцип, что и с углами. В первом случае мы выполняем сложение «по модулю 360», а во втором — сложение «по модулю 12».

Точно так же мы можем складывать числа по модулю, равному любому другому натуральному числу N . Рассмотрим множество, представляющее собой последовательность целых чисел от 0 до $N - 1$:

$$\{0, 1, 2, \dots, N - 2, N - 1\}.$$

Если $N = 12$, то это множество всех возможных значений часа в показаниях времени. В общем случае роль числа 12 играет число N , поэтому нас возвращает к нулю не 12, а N .

Операцию сложения на этом множестве чисел мы определяем точно так же, как делали это со временем. Взяв любые два числа из множества, мы суммируем их, и если результат превышает N , то вычитаем N и получаем еще одно число из того же самого множества. Данная операция превращает это множество в группу. Тожественным элементом группы является число 0: прибавляя его к любому другому числу, мы не изменим его. Действительно, $n + 0 = n$. Для любого числа n из нашего множества его «инверсией относительно сложения» будет $N - n$, так как $n + (N - n) = N$, что, согласно нашим правилам, идентично 0.

Например, возьмем $N = 3$. Следовательно, у нас есть множество $\{0, 1, 2\}$ и операция сложения по модулю 3. К примеру, в этой системе

$$2 + 2 = 1 \text{ по модулю } 3,$$

потому что $2 + 2 = 4$, но поскольку $4 = 3 + 1$, то число 4 эквивалентно 1 по модулю 3.

Теперь, если кто-то в вашем присутствии заявит: «Два плюс два — четыре», ссылаясь на всем известный факт, вы можете возразить (если хотите, то даже со снисходительной улыбкой): «Вообще-то это не всегда так». А если вас попросят объяснить, то скажите: «Если выполнять сложение по модулю 3, то два плюс два равно единице».

Взяв любые два числа из указанного выше множества, мы также можем умножить их. Результат может оказаться за пределами интересующего нас диапазона (от 0 до $N - 1$), но внутри диапазона всегда найдется единственное число, которое будет отличаться от

результата умножения на значение, кратное N . Однако в общем случае множество $\{1, 2, \dots, N - 1\}$ не образует группу относительно операции умножения. Тожественный элемент у нас есть — это число 1. Но обратный элемент относительно умножения по модулю N имеется не у каждого элемента. Обратные элементы ко всем элементам относительно умножения существуют тогда и только тогда, когда N — простое число, то есть число, у которого среди натуральных чисел нет других делителей, кроме 1 и самого себя.⁵

Первые несколько простых чисел — это 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... (единицу принято исключать из этого списка). Четные натуральные числа, за исключением 2, к простым не относятся, так как они делятся на 2, а 9 не может быть простым, так как делится на 3 без остатка. В действительности простых чисел бесконечно много — какое бы большое простое число вы ни взяли, найдется другое простое число еще больше.⁶ Благодаря этому свойству неделимости простые числа в мире натуральных чисел играют роль элементарных частиц; более того, любое другое натуральное число можно единственным образом представить в форме произведения простых чисел. Например, $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Давайте зафиксируем простое число. По традиции обозначим его p . Теперь рассмотрим множество, представляющее собой последовательность всех целых чисел от 0 до $p - 1$, то есть

$$\{0, 1, 2, 3, 4, \dots, p - 2, p - 1\}.$$

Мы будем рассматривать две операции на этом множестве: сложение и умножение по модулю p .

Как мы уже убедились выше, это множество образует группу относительно операции сложения по модулю p . Однако у него есть еще одно примечательное свойство: если убрать из него число 0 и рассмотреть множество идущих подряд целых чисел от 1 до $p - 1$, то есть $\{1, 2, \dots, p - 1\}$, то это окажется группой относительно операции умножения по модулю p . Элемент 1 представляет собой мультипликативную единицу (или единичный элемент умножения) — это очевидно. Но я также утверждаю, что для любого натурального числа от 1 до $p - 1$ существует его обратный элемент относительно умножения.⁷

Например, если $p = 5$, то

$$2 \cdot 3 = 1 \text{ по модулю } 5,$$

а

$$4 \cdot 4 = 1 \text{ по модулю } 5.$$

Таким образом, обратным элементом к двойке относительно умножения по модулю 5 будет число 3, а число 4 само для себя служит инверсией по модулю 5. Оказывается, это правило выполняется всегда.⁸

В повседневной жизни мы чаще всего сталкиваемся с целыми или дробными числами. Иногда мы используем числа, подобные $\sqrt{2}$. Но теперь мы открыли систему счисления совершенно иной природы: конечное множество чисел $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$, где p — простое число, на котором определены операции сложения и умножения по модулю p . Оно называется *конечным полем* с p элементами. Подобные конечные поля формируют важный архипелаг в мире чисел — один из тех, о которых, к сожалению, большинство из нас никогда не слышали.

Несмотря на то что эти системы счисления кажутся совершенно не похожими на привычные для нас системы счисления, такие как множество рациональных чисел, они обладают теми же самыми основными свойствами: они замкнуты относительно операций сложения, вычитания, умножения и деления.⁹ Следовательно, все, что можно делать с рациональными числами, можно делать и с этими диковинками — конечными полями.

В действительности, на сегодняшний день это не такие уж и диковинки. Конечные поля нашли множество важных приложений, в частности в области криптографии. Когда мы совершаем в Интернете покупку и вводим номер кредитной карты, это число шифруется с использованием расчетов по модулям простых чисел, включающих уравнения, очень похожие на те, с которыми мы познакомились выше (см. описание алгоритма шифрования RSA в примечании 7 к главе 14).

Вернемся к кубическому уравнению

$$y^2 + y = x^3 - x^2,$$

с которым мы начали работать выше. Рассмотрим решения этого уравнения по модулю p для различных простых чисел p . Например, мы уже убедились, что для данного уравнения есть четыре решения по модулю 5. Однако обратите внимание на то, что решения по модулю $p = 5$ не обязательно также будут решениями по модулю других простых чисел (скажем, $p = 7$ или $p = 11$). Следовательно, то, какими будут конкретные решения, зависит от выбора простого числа p , по модулю которого мы будем выполнять вычисления.

Вопрос, на который мы хотим найти ответ, звучит таким образом: зависит ли количество решений этого уравнения, взятых по модулю p от самого числа p ? Для небольших p мы можем подсчитать количество решений «в лоб» путем явных расчетов (возможно, прибегнув к помощи компьютера) и составить табличку.

Математикам уже довольно давно известно, что число решений уравнения такого типа по модулю p приблизительно равно p . Обозначим «дефицит» — разницу между фактическим и ожидаемым количеством решений (а именно p) — как a_p . Это означает, что количество решений приведенного выше уравнения по модулю p равно $p - a_p$. Числа a_p для данного p могут быть положительными или отрицательными. Например, мы обнаружили, что для $p = 5$ есть четыре решения. Поскольку $4 = 5 - 1$, мы получаем, что $a_5 = 1$.

Числа a_p для небольших простых чисел мы можем найти с помощью компьютера. Создается впечатление, что они случайны. Кажется, что не существует никакой естественной формулы или правила, которые позволили бы нам быстро находить их. И что еще хуже — вычисления очень скоро становятся необычайно сложными.

Однако что, если я скажу вам, что на самом деле существует простое правило, позволяющее сгенерировать сразу все a_p ?

На случай, если вы задаетесь вопросом, что именно я имею в виду под «правилом» генерации этих чисел, давайте рассмотрим более знакомую последовательность, так называемые числа Фибоначчи:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

Получившие название в честь итальянского математика, описавшего их в своей книге в 1202 году (в контексте проблемы скрещивания кроликов — ни больше, ни меньше), числа Фибоначчи встречаются в природе повсеместно: от расположения цветочных лепестков до рисунков на поверхности ананаса. Они также имеют огромное число приложений, таких как, например, «коррекция Фибоначчи» в техническом анализе продажи акций.

Числа Фибоначчи определяются следующим образом. Первые два числа равны 1. Каждое последующее число равно сумме двух предыдущих чисел Фибоначчи. Например, $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, $5 = 3 + 2$ и т. д. Если обозначить n -е число Фибоначчи F_n , то $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ и

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n > 2.$$

Это правило позволяет найти n -е число Фибоначчи для любого n . Однако для того чтобы сделать это, сначала необходимо найти все числа Фибоначчи F_i для i от 1 до $n - 1$.

Тем не менее выясняется, что эти числа также можно генерировать, применяя изложенный далее метод. Рассмотрим последовательность

$$q + q(q + q^2) + q(q + q^2)^2 + q(q + q^2)^3 + q(q + q^2)^4 + \dots$$

Изыясняясь обычными словами, мы умножаем вспомогательную переменную q на сумму всех степеней выражения $(q + q^2)$. Раскрыв скобки, мы получим бесконечную последовательность, первые члены которой выглядят следующим образом:

$$q + q^2 + 2q^3 + 3q^4 + 5q^5 + 8q^6 + 13q^7 + \dots$$

Например, посмотрим, как получается член, содержащий q^3 . Он может появиться только среди q , $q(q + q^2)$, $q(q + q^2)^2$. (Действительно, все остальные выражения, присутствующие в определяющей сумме, такие как $q(q + q^2)^3$, могут содержать только степени q выше 3.) Первый из них не содержит q^3 , а в двух последующих q^3 появляется ровно по одному разу. Итого в сумме мы получаем $2q^3$. Остальные члены последовательности можно рассчитать аналогичным образом.

Анализируя первые члены последовательности, мы обнаруживаем, что для n от 1 до 7 коэффициент перед q^n равен n -му числу Фибоначчи F_n . Например, у нас есть член последовательности $13q^7$, а $F_7 = 13$. Оказывается, это верно для всех n . По этой причине математики называют данную бесконечную последовательность *порождающей функцией* чисел Фибоначчи.

Эта замечательная функция позволяет найти эффективную формулу вычисления n -го числа Фибоначчи, не включающую ни одного из предыдущих чисел Фибоначчи.¹⁰ Оценить ее преимущества можно даже без оглядки на вычислительные сложности, ведь вместо ссылающейся на саму себя рекурсивной процедуры мы без всякого промедления получаем сразу все числа Фибоначчи.

Вернемся к числам a_p , позволяющим узнать количество решений кубического уравнения по модулям простых чисел. Эти числа можно считать аналогами чисел Фибоначчи (будем игнорировать тот факт, что числа a_p нумеруются простыми числами p , тогда как числа Фибоначчи F_n нумеруются натуральными числами n).

Идея о том, что правило генерации таких чисел действительно может существовать, кажется совершенно невероятной. Тем не менее это так. В 1954 году такое правило обнаружил немецкий математик Мартин Эйхлер.¹¹ А именно — рассмотрим следующую порождающую функцию:

$$q(1 - q)^2(1 - q^{11})^2(1 - q^2)^2(1 - q^{22})^2(1 - q^3)^2 \times \\ \times (1 - q^{33})^2(1 - q^4)^2(1 - q^{44})^2 \dots$$

Проще говоря, здесь мы умножаем q на произведение степеней в виде $(1 - q^a)^2$, где a — это элементы списка чисел вида n и $11n$, а $n = 1, 2, 3, \dots$. Раскроем скобки, используя стандартные правила:

$$(1 - q)^2 = 1 - 2q + q^2, \quad (1 - q^{11})^2 = 1 - 2q^{11} + q^{22}, \dots$$

и перемножим члены, стоящие в скобках. После приведения подобных членов мы получим бесконечную сумму, начинающуюся следующим образом:

$$q - 2q^2 - q^3 + 2q^4 + q^5 + 2q^6 - 2q^7 - 2q^9 - 2q^{10} + \\ + q^{11} - 2q^{12} + 4q^{13} + \dots$$

Многоточие означает члены со степенями q выше 13. Несмотря на то что эта последовательность бесконечна, все коэффициенты определяются однозначно, так как в формировании каждого коэффициента участвует конечное число множителей представленного выше произведения. Давайте обозначим коэффициент перед q^m как b_m . Тогда $b_1 = 1, b_2 = -2, b_3 = -1, b_4 = 2, b_5 = 1$ и т. д. Это легко вычислить вручную или на компьютере.

Поразительная догадка Эйхлера состояла в том, что для всех простых чисел p коэффициент b_p равен a_p . Другими словами, $a_2 = b_2, a_3 = b_3, a_5 = b_5, a_7 = b_7$ и т. д.

Проверим, например, что это верно для $p = 5$. В этом случае, глядя на порождающую функцию, мы видим, что коэффициент перед q^5 равен $b_5 = 1$. В то же время мы уже убедились, что наше кубическое уравнение имеет четыре решения по модулю $p = 5$. Следовательно, $a_5 = 5 - 4 = 1$, так что равенство действительно выполняется: $a_5 = b_5$.

Мы начали с задачи, кажущейся бесконечно сложной: подсчитать количество решений кубического уравнения

$$y^2 + y = x^3 - x^2$$

по модулю p , для всех простых чисел p . А выяснилось, что вся информация об этой задаче содержится в одной строке:

$$q(1 - q)^2(1 - q^{11})^2(1 - q^2)^2(1 - q^{22})^2(1 - q^3)^2 \times \\ \times (1 - q^{33})^2(1 - q^4)^2(1 - q^{44})^2 \dots$$

Эта строка служит как бы секретным кодом, включающим всю информацию о количестве решений кубического уравнения по модулям всех простых чисел.

Удобная аналогия для кубического уравнения — сложный биологический организм. В этом случае индивидуальные характеристики организма играют ту же роль, что и решения уравнения. Мы знаем, что всевозможные характеристики закодированы в молекуле ДНК. Точно так же сложность нашего кубического уравнения оказывается закодированной в порождающей функции, которая подобна ДНК уравнения. Кроме того, оказывается, что эта функция определяется простым правилом.

Однако есть и еще более занимательный факт: если модуль числа q меньше 1, то вышеуказанная бесконечная сумма сходится к однозначно определяемому числу. Таким образом, мы получаем функцию по q , и оказывается, что эта функция обладает очень специфичным свойством, схожим со свойством периодичности, которое присуще всем давно нам знакомым тригонометрическим функциям — синусу и косинусу.

Функция синуса $\sin(x)$ является периодической с периодом 2π , то есть $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$. Однако тогда и $\sin(x + 4\pi) = \sin(x)$, и в общем случае $\sin(x + 2\pi n) = \sin(x)$ для любого целого n . Думайте об этом так: каждое целое число n порождает симметрию линии: каждая точка x на линии сдвигается на $x + 2\pi n$. Следовательно, группа всех целых чисел реализуется как группа симметрий линии. Периодичность функции синуса означает, что данная функция инвариантна относительно этой группы.

Аналогично, выясняется, что приведенная выше порождающая функция Эйхлера по переменной q инвариантна относительно определенной группы симметрий. Стоит оговориться, что здесь мы должны взять в качестве q не вещественное, а комплексное число (подробнее мы поговорим об этом в следующей главе). В таком случае q будет представлять не точку на линии, как в случае функции синуса, а точку внутри единичного круга на комплексной плоскости. Свойство симметрии же очень похоже: в этом круге

существует группа симметрий, и наша функция инвариантна относительно этой группы.¹² Функция, обладающая свойством инвариантности такого типа, называется *модулярной формой*.

Группа симметрий круга необычайно плодотворна. Для того чтобы получить некоторое представление о том, чем она способна нас одарить, взгляните на рис. 8.2, на котором представлен круг, разбитый на бесконечное число треугольников.¹³

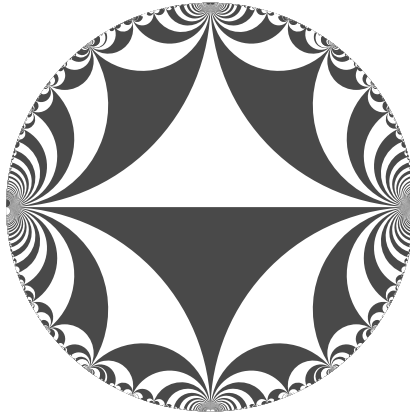


Рис. 8.2

Действие симметрий на этом круге заключается в перестановке этих треугольников. Действительно, симметрия, меняющая их местами, существует для любых двух треугольников. Хотя эти симметрии круга являются довольно изощренными, все это аналогично тому, как при действии группы целых чисел на прямой ее симметрии переставляют интервалы $[2\pi t, 2\pi(t + 1)]$. Функция синуса инвариантна относительно таких симметрий, тогда как порождающая функция Эйхлера инвариантна относительно симметрий круга.

Как я уже говорил в начале главы, функция синуса — это простейший пример «гармоники» (элементарной волны), используемой в гармоническом анализе линий. Точно так же функция Эйхлера, вместе с другими модулярными формами, служит гармоникой в гармоническом анализе единичного круга.

Просто поразительно, как Эйхлер догадался о том, что, казалось бы, случайные числа, представляющие число решений кубического уравнения по модулям простых чисел, могут происходить

из одной-единственной порождающей функции, подчиняющейся изысканной симметрии. Он сумел распознать скрытую гармонию и порядок в этих числах. Подобным образом, словно подчиняясь заклинанию черной магии, программа Ленглендса укладывает ранее недоступную информацию в регулярные схемы, сплетая утонченное кружево чисел, симметрий и уравнений.

Когда в начале книги я рассуждал о математике, вы, возможно, недоумевали, что же я имею в виду, называя математические результаты «красивыми» или «элегантными». Вот, именно это я и имел в виду. Изысканная гармония переплетений этих, казалось бы, совершенно абстрактных понятий попросту ошеломляет. Она наводит на мысль, что где-то там, в глубине, может скрываться нечто еще более роскошное и загадочное; она приподнимает занавес и позволяет нам уловить отблески реальности, которая многие тысячелетия оставалась скрытой от нашего взора. Это не что иное, как чудеса современной математики и современного мира.

Вы можете спросить, есть ли у этого результата какие-либо практические приложения или же единственное его достоинство — это внутренняя красота и выявление удивительной связи между областями математики, вроде бы, совершенно не связанными друг с другом. Хороший вопрос. В настоящее время мне ни о чем таком не известно. Однако кубические уравнения над конечными полями из p элементов, аналогичные тому, которое мы рассматривали выше (и порождающие так называемые эллиптические кривые), повсеместно используются в криптографии.¹⁴ Поэтому я не удивлюсь, если в один прекрасный день результаты, схожие с идеей Эйхлера, также найдут применение не менее важное и распространенное, чем алгоритмы шифрования.

Гипотеза Симуры — Таниямы — Вейля представляет собой обобщение результата Эйхлера. Она утверждает, что для *любого* кубического уравнения, подобного рассмотренному нами выше (с учетом некоторых не очень жестких условий), количество решений по модулям простых чисел совпадает с коэффициентами модулярной формы. Более того, существует взаимно однозначное соответствие между кубическими уравнениями и модулярными формами определенного типа.

Что имеется в виду под «взаимно однозначным соответствием»? Предположим, у нас есть пять ручек и пять карандашей.

С каждой ручкой мы можем сопоставить один из карандашей таким образом, чтобы каждый карандаш соответствовал одной и только одной ручке. Это называется однозначным соответствием.

Установить соответствие можно множеством разных способов. Скажем, пусть в нашей схеме длина каждой ручки будет в точности равна длине сопоставленного с ней карандаша. В этом случае мы можем называть длину «инвариантом» и говорить, что наше соответствие сохраняет данный инвариант. Если все ручки разной длины, то данное свойство будет единственным образом определять требуемое однозначное соответствие.

В случае же гипотезы Симуры — Таниямы — Вейля по одну сторону соответствия находятся кубические уравнения, аналогичные тому, которое мы рассматривали выше. Будем считать, что это ручки, к каждой из которых прикреплены свои инварианты — числа a_p . (Это как длина ручки, только теперь у нас не один инвариант, а целое множество, занумерованное простыми числами p .)

Объекты по другую сторону соответствия — это модулярные формы. Это наши карандаши, и для каждого из них инвариантами являются коэффициенты b_p («длина карандаша»).

Гипотеза Симуры — Таниямы — Вейля утверждает, что между этими объектами существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее эти инварианты:



Таким образом, для каждого кубического уравнения существует модулярная форма, такая, что $a_p = b_p$ для всех простых чисел p , и наоборот.¹⁵

Теперь я могу объяснить связь между гипотезой Симуры — Таниямы — Вейля и последней теоремой Ферма: отталкиваясь от решения уравнения Ферма, можно сконструировать кубическое уравнение определенного вида.¹⁶ И Кен Рибет показал, что значения, равные количеству решений этого кубического уравнения по модулю простых чисел, не могут быть коэффициентами модулярной формы, существование которой обуславливается гипотезой Симуры — Таниямы — Вейля. Если гипотеза доказана, можно с уверенностью заявлять, что такого кубического уравнения не существует. Следовательно, у уравнения Ферма нет решений.

Гипотеза Симуры — Таниямы — Вейля удивительна тем, что числа a_p происходят из исследования решений уравнения по модулю простых чисел, то есть из мира теории чисел, тогда как числа b_p , представляющие коэффициенты модулярной формы, принадлежат миру гармонического анализа. Казалось бы, между этими мирами пролегают световые года, но выясняется, что они описывают одну и ту же вещь!

Гипотезу Симуры — Таниямы — Вейля можно представить как специальный случай программы Ленглендса. Для этого необходимо заменить каждое из присутствующих в ней кубических уравнений определенным двумерным представлением группы Галуа. Это представление естественным образом происходит из кубического уравнения, и числа a_p можно связать напрямую с представлением (а не с кубическим уравнением). Следовательно, гипотеза легко выражается в виде соответствия между двумерными представлениями группы Галуа и модулярными формами.

(Как вы помните, двумерное представление группы — это правило, связывающее с каждым элементом группы определенную симметрию двумерного пространства (то есть плоскости). Мы говорили об этом во второй главе; в частности, мы обсуждали двумерные представления группы окружности.)

В еще более общем случае гипотезы из программы Ленглендса совершенно неожиданными и принципиальными способами связывают n -мерные представления группы Галуа (обобщение двумерных представлений, соответствующих кубическим уравнениям в гипотезе Симуры — Таниямы — Вейля) с так называемыми *автоморфными функциями* (которые обобщают модулярные формы из гипотезы Симуры — Таниямы — Вейля):



Хотя сомнений в истинности этих гипотез практически не остается, большинство из них, несмотря на усилия, затраченные за последние сорок пять лет несколькими поколениями математиков, на сегодняшний день еще не доказаны.

Вы наверняка удивляетесь: как человек в принципе может придумать гипотезу подобного рода?

В действительности это вопрос о природе математической интуиции. Способность видеть схемы и взаимосвязи, которые до этого никому заметить не удавалось, легко не приходит. Обычно это результат многих месяцев, если не лет, тяжелой работы. Мало-помалу проявляются намеки на новое явление или теорию, и сначала вы не верите себе. Но внезапно вы решаетесь: «А что, если это правда?» Вы проводите пробные расчеты для того, чтобы проверить идею. Иногда они оказываются довольно сложными, и вам приходится прокладывать свой путь сквозь непроходимые дебри формул. Вероятность сделать ошибку очень высока, и, если с первого раза у вас ничего не получается, пробуете снова и снова.

Чаще всего всё заканчивается тем, что под конец дня (или месяца, или года) вы осознаете, что первоначальная идея была ошибочной и нужно попробовать что-то другое. Такие моменты наполнены отчаянием и разочарованием. Вам кажется, что вы впустую потратили кучу времени и ничего не добились. С этим чувством трудно справиться. Но сдаваться ни в коем случае нельзя! Вы возвращаетесь к планшету или доске, анализируете дополнительные данные, извлекаете уроки из предыдущих ошибок и пытаетесь придумать новую идею. И время от времени, абсолютно неожиданно, идея «выстреливает». Это как провести целый день на доске для серфинга и внезапно поймать волну: конечно, вы будете стараться удержаться на ней как можно дольше. В такие минуты необходимо освободить воображение и отдаться на волю стихии. Даже если идея сначала кажется совершенным безумием.

Формулировка гипотезы Симуры — Таниямы — Вейля наверняка казалась безумной даже ее авторам. А как же иначе? Да, ее корни лежали в результатах, полученных ранее, таких как рассмотренные выше наработки Эйхлера (которые впоследствии были обобщены Симурой). Это доказывало, что для *некоторых* кубических уравнений количество решений по модулю p равно коэффициенту модулярной формы. Однако мысль о том, что это может выполняться для *любого* кубического уравнения, в то время многим наверняка казалась попросту возмутительной. Это был прыжок в неизвестность, впервые сделанный японским математиком Ютака Таниямой в форме вопроса, который он поставил на международном симпозиуме по алгебраической теории чисел, проводившемся в Токио в сентябре 1955 года.

Я уже много лет задаюсь вопросом: что произошло, каким образом он сумел *поверить*, что это не безумие, что все это реально? Откуда он взял силы и решимость, чтобы заявить об этом публично?

Об этом мы никогда не узнаем. К сожалению, вскоре после того, как было сделано это великое открытие, в ноябре 1958 года, Танияма покончил жизнь самоубийством. Ему был всего тридцать один год. Но это был не конец трагедии: совсем скоро женщина, с которой они планировали пожениться, также лишила себя жизни, оставив записку следующего содержания:¹⁷

Мы обещали друг другу, что что бы ни случилось, мы всегда будем вместе. Теперь, когда он ушел, я тоже должна уйти, чтобы присоединиться к нему.

Впоследствии гипотеза была уточнена другим японским математиком, другом и коллегой Таниямы Горо Симурой. Большую часть жизни Симура проработал в Принстонском университете, и в настоящее время занимает там должность профессора-эмерита. Он внес огромный вклад в развитие математики, активно работал над программой Ленглендса, и несколько фундаментальных концепций в этой области названы его именем (например, «отношение конгруэнтности Эйхлера — Симуры» и «многообразие Симуры»).

В глубокомысленном эссе Симуры, посвященном Танияме, можно найти такой удивительный комментарий:¹⁸

Он ни в коем случае не был неряшлив, однако обладал особым даром — делать множество ошибок, и большинство из них — в правильном направлении. Я завидовал этой его способности и даже пытался подражать ему. Но тщетно. Я обнаружил, что делать хорошие ошибки чрезвычайно сложно.

В описании Симуры Танияма «был не слишком аккуратен в формулировке задачи» на токийском симпозиуме в сентябре 1955 года.¹⁹ Пришлось внести некоторые поправки. И все же это было революционное предположение, проложившее дорогу одному из наиболее значительных математических достижений двадцатого века.

Третий человек, чье имя присутствует в названии гипотезы, — это Андре Вейль, о котором я уже упоминал выше. Это один из столпов математики двадцатого века. Известный не только своими исключительными способностями, но и вспыльчивым нравом, он родился во Франции и переехал в Соединенные Штаты в период Второй мировой войны. Отработав в нескольких американских университетах, в итоге Вейль остановил свой выбор на Институте перспективных исследований в Принстоне, где занимал должность с 1958 года и до самой смерти в 1998 году, в возрасте 92 лет.



Рис. 8.3. *Андре Вейль. Фотография Германа Ландсхоффа. Из архивного центра Шелби Уайта и Леона Леви, Институт перспективных исследований, Принстон*

С программой Ленглендса Вейля связывает очень многое — не только адресованное ему знаменитое письмо, в котором Роберт Ленглендс впервые обрисовал свои идеи, и гипотеза Симуры — Таниямы — Вейля. Программу Ленглендса лучше всего рассматривать сквозь призму «общей картины» математики, описанную Андре Вейлем в письме к его сестре. Мы поговорим об этом в следующей главе. Это станет нашей отправной точкой для проникновения через программу Ленглендса в царство геометрии.

Глава 9. Розеттский камень

В 1940 году, во время войны, Андре Вейль был заключен в тюрьму во Франции за отказ служить в армии. После его смерти в некрологе, опубликованном в журнале *The Economist*,¹ в частности, писалось:

[Вейль] был глубоко потрясен... уроном, который нанесла математическому миру Франции Первая мировая война, когда «ошибочное понятие о равноправии перед лицом самопожертвования» привело к безжалостному уничтожению молодой научной элиты страны. В свете этого он чувствовал, что его первоочередной долг — и не только перед самим собой, но перед цивилизацией — посвятить свою жизнь математике. Фактически, он утверждал, что было бы настоящим грехом позволить себе отвлечься от этой дисциплины. Когда другие возражали: «но если каждый начнет вести себя так...», он отвечал, что вероятность этого кажется ему настолько ничтожной, что он не считает нужным принимать ее в расчет.

Находясь в тюрьме, Вейль написал письмо своей сестре Симоне Вейль, известному философу и гуманисту. В этом весьма примечательном документе он пытается в самых примитивных терминах (доступных даже философу — шучу, шучу!) описать свой взгляд на «общую картину» математики. Сделав это, Вейль подал превосходный пример остальным. Иногда я даже в шутку предлагаю посадить в тюрьму некоторых ведущих математиков, чтобы заставить их научиться выражать свои идеи в доступной форме — как Вейль.

В своем письме Вейль рассуждает о роли аналогии в математике, иллюстрируя свои мысли аналогией, которая вызывала у него наибольший интерес: между теорией чисел и геометрией.

Эта аналогия сыграла чрезвычайно важную роль в развитии программы Ленглендса. Как уже говорилось выше, корни программы Ленглендса лежат в теории чисел. Ленглендс предположил,

что некоторые сложные задачи теории чисел, такие как подсчет количества решений уравнений по модулям простых чисел, можно решить с помощью методов гармонического анализа, а именно применяя знания об автоморфных функциях. Это просто поразительно! Во-первых, мы получаем новый способ решения задач, которые ранее казались совершенно недоступными. А во-вторых, это указывает на глубокие фундаментальные связи между разными областями математики. Нет ничего удивительного в том, что мы хотим понять, что же здесь происходит, почему подобные связи, в принципе, могут существовать. Однако, к сожалению, пока что мы еще не сумели полностью разобраться в этом. На доказательство одной гипотезы Симуры — Таниямы — Вейля потребовалось огромное количество времени, а это всего лишь один специальный случай общих гипотез Ленглендса. Существуют сотни и тысячи аналогичных утверждений, которые по сей день остаются недоказанными.

Так с какой же стороны подступаться к подобным сложным гипотезам? Один из вариантов — просто продолжать усердно работать, надеясь на новые идеи и озарения. Такое уже случилось, и это позволило добиться существенного прогресса. Другой вариант — пытаться расширить охват программы Ленглендса. Мы знаем, что она указывает на определенные фундаментальные структуры в теории чисел и гармоническом анализе, а также на существующие между ними взаимосвязи. Значит, высока вероятность того, что подобные структуры и связи можно обнаружить и между другими сферами математики.

И это действительно так. Постепенно ученые стали осознавать, что подобные загадочные схемы можно наблюдать и в других областях математики, таких как геометрия, и даже в квантовой физике. Мы изучаем существующие закономерности на одном участке, а получаем подсказки относительно того, что они могли бы значить в других областях исследований. Как я уже говорил, я называю программу Ленглендса Теорией Великого Объединения математики. Под этим я подразумеваю, что программа Ленглендса выявляет некоторые универсальные явления и связи между ними в совершенно разных сферах. Я абсолютно уверен, что она способна дать нам ключ к пониманию того, что же на самом деле представляет собой математика, и эти знания будут выходить далеко за пределы исходных гипотез Ленглендса.

Программа Ленглендса весьма обширна. Над ней работает огромное сообщество ученых, специализирующихся в самых разных областях: теория чисел, гармонический анализ, геометрия, теория представлений, математическая физика. Несмотря на такое различие в интересах, все они в своей работе наблюдают схожие явления. И благодаря подсказкам, которые дают эти явления, прорисовываются взаимосвязи между этими разнообразными областями — мы начинаем видеть, как крепятся друг к другу частички этой гигантской головоломки.

Для меня точкой входа в программу Ленглендса стала моя работа, связанная с алгебрами Каца — Мути, о которой я подробно расскажу в следующих нескольких главах. Чем больше я узнавал о программе Ленглендса, тем сильнее меня восхищала ее вездесущность — она буквально насквозь пронизывает математику!

Представьте, что различные области современной математики — это разные языки. У нас есть несколько предложений на этих языках, и мы думаем, что они означают одно и то же. Мы записываем их одно рядом с другим, и мало-помалу у нас начинает вырисовываться словарь, позволяющий переводить предложения с одного языка на другой — трансформировать их между разными областями математики. Андре Вейль сумел обеспечить нас надежной базой для понимания взаимосвязей между теорией чисел и геометрией, своего рода «розеттским камнем» современной математики.

С одной стороны, у нас есть объекты теории чисел: рациональные числа и прочие числовые поля, которые мы обсуждали в предыдущих главах, например поле, полученное присоединением корня из двух, и соответствующие группы Галуа.

С другой стороны, существуют так называемые римановы поверхности, простейшим примером которых является сфера (рис. 9.1).²

Другой пример — тор, поверхность в форме пончика (рис. 9.2). Хочу подчеркнуть, что здесь мы рассматриваем только *поверхность* пончика, но не его внутренность.

Еще один пример римановой поверхности — это поверхность датской булочки, показанная на рис. 9.3 (возможно, кому-то она покажется больше похожей на крендель).

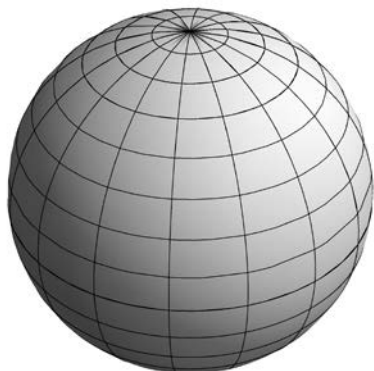


Рис. 9.1

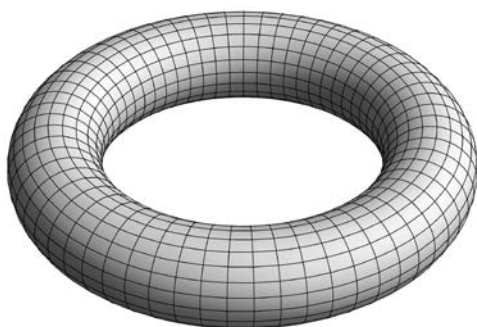


Рис. 9.2

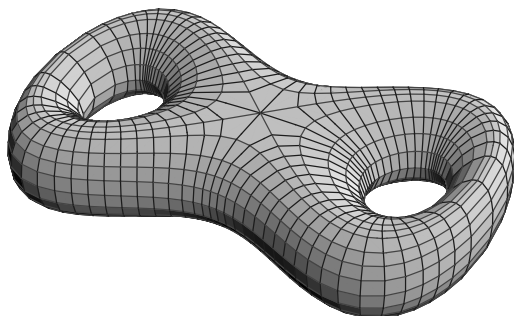


Рис. 9.3

У тора только одно отверстие, а у датской булочки — два. Также есть другие поверхности, имеющие n отверстий, где $n = 3, 4, 5, \dots$ Математики называют число отверстий *родом* римановой поверхности.* Свое название такие поверхности получили в честь немецкого математика Бернарда Римана, жившего в девятнадцатом веке. Его работы открыли несколько важных направлений развития математической науки. Теория Римана об искривленных пространствах, которая сегодня называется римановой геометрией, служит краеугольным камнем общей теории относительности Эйнштейна. Уравнения Эйнштейна описывают силу гравитации в терминах так называемого риманова тензора, выражающего кривизну пространства — времени.

На первый взгляд, кажется, что у теории чисел не может быть ничего общего с римановыми поверхностями. Тем не менее выясняется, что между ними существует множество аналогий. И ключевая точка здесь — наличие еще одного класса объектов между этими двумя сущностями.

Для того чтобы увидеть его, необходимо, в первую очередь, осознать, что риманову поверхность можно описать алгебраическим уравнением. Например, снова рассмотрим кубическое уравнение, такое как

$$y^2 + y = x^3 - x^2.$$

Как мы уже говорили выше, при обсуждении решений подобного уравнения важно явно указывать, какой системе счисления они должны принадлежать. Вариантов очень много, и в зависимости от выбора результаты могут обуславливать разные математические теории.

В предыдущей главе мы исследовали решения по модулям простых чисел, и это одна из возможных теорий. Однако мы также можем поискать решения среди множества *комплексных чисел*. Это еще одна теория, которая подводит нас к вопросу римановых поверхностей.

Люди часто приписывают комплексным числам чуть ли не мистические свойства, словно это объекты невероятной сложности. В действительности же они не сложнее, чем числа, которые

* Мой редактор сообщил мне, что в немецком баре рядом с его домом в Нью-Йорке продаются крендели рода 3 (и они очень вкусные).

мы изучали в предыдущей главе, когда пытались понять, что же такое корень из двух.

Позвольте мне объяснить. В прошлой главе мы присоединили к рациональным числам два решения уравнения $x^2 = 2$, которые мы обозначили $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$. Теперь вместо уравнения $x^2 = 2$ мы просто возьмем уравнение $x^2 = -1$. Выглядит ли оно более сложным по сравнению с предыдущим? Вовсе нет. У него нет решений среди рациональных чисел, но нас это не пугает. Давайте присоединим два решения этого уравнения к множеству рациональных чисел, обозначив их $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$. Эти значения решают уравнение $x^2 = -1$, то есть

$$\sqrt{-1}^2 = -1, \quad (-\sqrt{-1})^2 = -1.$$

По сравнению с предыдущим случаем отличие лишь одно: число $\sqrt{2}$ не рациональное, но это *вещественное* число, поэтому, присоединяя его к множеству рациональных чисел, мы не покидали мир вещественных чисел.

Геометрически вещественные числа можно представлять себе так: нарисуйте линию и отметьте на ней две точки. Обозначьте их 0 и 1. Теперь отметьте точку справа от 1 на расстоянии, равном расстоянию между 0 и 1. Эта точка будет представлять число 2. Все остальные целые числа можно нанести на линию точно таким же образом. Теперь отметим рациональные числа, разделив интервалы между точками, соответствующими целым числам. Например, число $\frac{1}{2}$ находится точно посередине между 0 и 1, число $\frac{7}{3}$ — между 2 и 3 на расстоянии одной третьей интервала от двойки и т. д. (рис. 9.4). Тогда интуитивно понятно, что вещественные числа соответствуют всем точкам на этой линии по принципу «один к одному».³

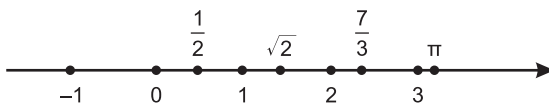


Рис. 9.4

Как вы помните, число $\sqrt{2}$ в повседневной жизни мы встречаем в форме длины гипотенузы прямоугольного треугольника

с единичными катетами. Таким образом, для того чтобы отметить значение $\sqrt{2}$ на оси вещественных чисел, мы находим справа от 0 точку, находящуюся от нуля на расстоянии, равной длине гипотенузы. Следуя такому же принципу, мы можем отметить⁴ на оси число π , равное длине окружности диаметром 1.

У уравнения $x^2 = -1$ нет решений среди рациональных чисел, но у него также нет решений и среди множества вещественных чисел. Действительно, квадрат любого вещественного числа должен быть больше или равен нулю, и это значение никак не может быть равно -1 . Поэтому, в отличие от чисел $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$, числа $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$ не являются вещественными. Но какая разница? Мы следовали той же процедуре и ввели их в рассмотрение точно так же, как сделали это ранее с числами $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$. И для выполнения вычислений на этих новых числах мы можем применять те же самые арифметические правила.

Давайте вспомним, как мы рассуждали выше. Мы заметили, что у уравнения $x^2 = 2$ нет решений во множестве рациональных чисел. Поэтому мы определили два решения данного уравнения, назвали их $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ и присоединили к рациональным числам, создав новую систему счисления (которую мы назвали числовым полем). Точно так же теперь мы берем уравнение $x^2 = -1$ и замечаем, что у него тоже нет решений среди рациональных чисел. Так что мы создаем два решения данного уравнения, обозначаем их $\sqrt{-1}$ и $-\sqrt{-1}$ и присоединяем к множеству рациональных чисел. Процедура совершенно не изменилась! С чего нам беспокоиться о том, что эта новая система счисления окажется сложнее старой — той, в которой фигурирует $\sqrt{2}$?

Причина исключительно психологическая: мы можем визуализировать $\sqrt{2}$ как длину одной из сторон прямоугольного треугольника, но такого же наглядного геометрического представления $\sqrt{-1}$ у нас нет. Тем не менее совершать алгебраические операции с $\sqrt{-1}$ можно не менее эффективно, чем с $\sqrt{2}$.

Элементы новой системы счисления, полученной путем присоединения $\sqrt{-1}$ к множеству рациональных чисел, называются комплексными числами. Каждое из них можно записать в следующей форме:

$$r + s\sqrt{-1},$$

где r и s — рациональные числа. Сравните с формулой на с. 98, выражающей общий вид элементов числовой системы, полученной посредством присоединения $\sqrt{2}$. Для того чтобы сложить два числа в такой форме, нужно по отдельности сложить их r -составляющие и s -составляющие. Также мы можем умножить любые два подобных числа, раскрыв скобки и пользуясь тем фактом, что $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$. Аналогичным образом выполняется вычитание и деление таких чисел.

Наконец, мы расширяем определение комплексных чисел, допуская использование в качестве r и s в приведенной выше формуле любых произвольных вещественных чисел (а не только рациональных). Таким образом, мы приходим к самой общей форме комплексных чисел. Обратите внимание, что значение $\sqrt{-1}$ принято обозначать i (от слова *imaginary* — мнимый), но я специально не делаю так, для того чтобы подчеркнуть алгебраический смысл данного числа: в действительности это всего лишь квадратный корень из -1 , ни больше ни меньше. Это такое же конкретное значение, как и квадратный корень из 2 . И ничего мистического в нем нет.

Убедиться в том, насколько конкретны эти числа, просто — их всего лишь нужно представить геометрически. Точно так же, как вещественные числа можно изобразить в виде точек на линии, комплексные числа соответствуют точкам на плоскости. А именно комплексное число $r + s\sqrt{-1}$ мы представляем на плоскости как точку с координатами r и s (рис. 9.5).⁵

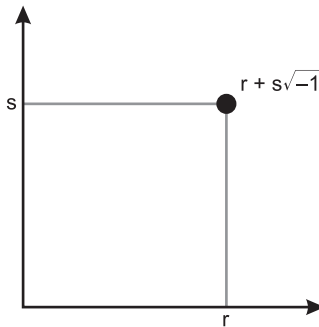


Рис. 9.5

Теперь вернемся к нашему кубическому уравнению

$$y^2 + y = x^3 - x^2$$

и попробуем найти такие решения x и y , которые относились бы к множеству комплексных чисел.

Примечательно, что множество всех подобных решений в точности совпадает с множеством точек показанного выше тора. Другими словами, с каждой точкой тора можно связать одну и только одну пару комплексных чисел x , y , решающих это кубическое уравнение, и наоборот.⁶

Если вы никогда раньше не имели дела с комплексными числами, не исключено, что сейчас вы почувствовали признаки надвигающейся мигрени. Это совершенно нормально. Уложить в голову даже одно такое понятие, как комплексное число, уже нелегко; что же говорить о паре комплексных чисел, выступающих в роли решений какого-то уравнения. Совершенно неочевидно, каким образом все эти пары можно было бы однозначным образом поставить в соответствие точкам на поверхности пончика, так что не переживайте, если все это пока что кажется вам китайской грамотой. В действительности доказательство этого удивительного и нетривиального результата является непростой задачей даже для профессиональных математиков.⁷

Для того чтобы убедиться в том, что решения алгебраических уравнений на самом деле порождают геометрические фигуры, давайте рассмотрим более простую ситуацию: решение в вещественных, а не в комплексных числах. Например, возьмем уравнение

$$x^2 + y^2 = 1$$

и отметим его решения на плоскости как точки с координатами x и y . Множество всех таких решений образует окружность единичного радиуса, центр которой совпадает с началом координат. Точно так же решения любого другого алгебраического уравнения по двум *вещественным* переменным x и y образуют кривую на этой плоскости.⁸

Но комплексные числа в каком-то смысле являются двойниками вещественных (как вы помните, каждое комплексное число определяется парой вещественных чисел). Поэтому неудивительно, что решения подобных алгебраических уравнений в *комплексных* переменных x и y образуют римановы поверхности. (Кривая

одномерна, а риманова поверхность двумерна в том смысле, который объясняется в главе 10.)

Помимо вещественных и комплексных решений, мы также можем поискать решения x , y этих уравнений, принимающие значения из конечного поля $\{0, 1, 2, \dots, p-2, p-1\}$, где p — простое число. Это означает, что при подстановке таких значений x и y в уравнение, например приведенное выше, левая и правая его части сводятся к целым числам, которые равны с точностью до целого числа, кратного p . Такое решение дает нам объект, который математики называют «кривой над конечным полем». Разумеется, это не настоящие кривые. Такая терминология зародилась вследствие того, что при поиске решений в вещественных числах мы получаем кривые на плоскости.⁹

Гениальная догадка Вейля состояла в том, что определяющим объектом здесь служит алгебраическое уравнение, такое как кубическое уравнение, приведенное выше. В зависимости от выбора области определения, в которой мы ищем решения, одно и то же уравнение может порождать поверхность, кривую или набор точек. Однако все это — не более чем *аватары* невыразимой сущности, которой является само уравнение; точно так же в индуизме у бога Вишну десять аватаров, или воплощений. Интересно, что в своем письме к сестре Андре Вейль обращался к *Бхагавад-гите*,¹⁰ священному тексту индуизма, в котором, как считается, впервые была описана доктрина аватаров Вишну.¹¹ Вейль чрезвычайно поэтично описал то, что происходит, когда намек на аналогию между двумя теориями превращается в твердое знание:¹²

Исчезают две теории, исчезают их изъяны и восхитительные отражения друг в друге, их тайные ласки, их необъяснимые размолвки; увы, нам остается одна лишь теория, чья величественная красота более неспособна будоражить нас. Нет ничего более плодородного, чем эти недозволенные связи; ничто не может доставить знатоку большего удовольствия... Удовольствие происходит от иллюзии и воспламенения чувств; стоит нам обрести знание, а иллюзии раствориться, как мы скатываемся в безразличие; в Гите ты найдешь немало красивых строф, посвященных этому. Но давай таки вернемся к алгебраическим функциям.

Связь между римановыми поверхностями и кривыми над конечными полями должна быть теперь очевидна: и те и другие описываются уравнениями одного и того же типа. Просто мы ищем решения в разных областях определения — либо в конечных полях, либо в комплексных числах. С другой стороны, «любое доказательство или результат в теории чисел можно перевести, слово в слово», в кривые над конечным полем, как написал Вейль в своем письме.¹³ Таким образом, идея Вейля заключалась в том, что кривые над конечными полями — это объекты-посредники между теорией чисел и римановыми поверхностями.

Итак, мы нашли мост — или «вращающийся стол», как называл его Вейль, — между теорией чисел и римановыми поверхностями, и в роли этого моста выступает теория алгебраических кривых над конечными полями. Другими словами, у нас есть три параллельных дорожки или столбца:

| | | |
|---------------------|------------------------------------|-----------------------------|
| <i>Теория чисел</i> | <i>Кривые над конечными полями</i> | <i>Римановы поверхности</i> |
|---------------------|------------------------------------|-----------------------------|

Вейль видел следующий вариант использования этого открытия: можно взять любое утверждение в одном из трех столбцов и перевести его на язык утверждений в оставшихся двух. Он писал сестре:¹⁴

Моя работа заключается в расшифровке текста на трех языках. В каждом из трех столбцов мне доступны лишь разрозненные фрагменты; у меня есть некоторые идеи относительно всех трех языков, но я также знаю, что между утверждениями в разных столбцах могут существовать огромные различия, о которых невозможно догадаться заранее. За те несколько лет, что я посвятил работе над ними, я нашел лишь несколько фрагментов словаря.

Вейлю удалось обнаружить одно из самых наглядных применений своего розеттского камня — то, что сегодня мы зовем гипотезами Вейля. Доказательство этих гипотез¹⁵ значительным образом стимулировало развитие математической науки во второй половине двадцатого века.

Однако вернемся к программе Ленглендса. Исходные идеи Ленглендса фокусировались вокруг левого столбца розеттского камня Вейля, то есть теории чисел. Ленглендс установил связь между представлениями групп Галуа числовых полей — объектами изучения теории чисел — и автоморфными функциями, которые изучаются в гармоническом анализе — области математики, весьма далекой от теории чисел (а также от остальных столбцов розеттского камня). И теперь мы можем задать вопрос: получится ли у нас обнаружить подобную связь, если мы заменим группы Галуа какими-то объектами из среднего и правого столбцов розеттского камня Вейля?

Формулировка открытой Ленглендсом связи на языке среднего столбца не вызывает трудностей, ведь все необходимые ингредиенты уже в наличии. Группы Галуа числовых полей заменяются группами Галуа, связанными с кривыми над конечными полями. Кроме того, есть такое ответвление гармонического анализа, которое занимается изучением подходящих автоморфных функций. Уже в первой работе Ленглендса можно найти описание связи между представлениями групп Галуа и автоморфными функциями на языке среднего столбца.

Но пока что совсем непонятно, однако, как перевести эту связь на язык третьего столбца розеттского камня, ведь для этого нам потребовалось бы найти в теории римановых поверхностей геометрические аналоги групп Галуа и автоморфных функций. Когда Ленглендс впервые сформулировал свои идеи, о первой компоненте уже было известно, но вторая оставалась загадкой. Соответствующее понятие было найдено лишь в 1980-х годах с подачи новаторской работы блестящего русского математика Владимира Дринфельда. Это позволило найти формулировку соответствия Ленглендса на языке третьего столбца розеттского камня.

Давайте сперва обсудим геометрический аналог группы Галуа. Это так называемая *фундаментальная группа* римановой поверхности.

Фундаментальная группа — одна из важнейших концепций в таком разделе математики, как топология, который фокусируется на наиболее важных характеристиках геометрических фигур (например, числе «дыр» в римановой поверхности).

Рассмотрим, к примеру, тор. Выберем точку на его поверхности — обозначим ее P — и попробуем найти замкнутые пути,

начинающиеся и заканчивающиеся в данной точке. Два из таких возможных путей показаны на рис. 9.6.

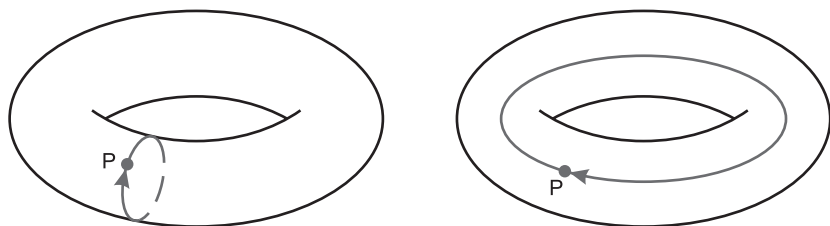


Рис. 9.6

Фундаментальная группа любой римановой поверхности состоит из замкнутых путей на этой поверхности, начинающихся и заканчивающихся в некоторой фиксированной точке P .¹⁶

Взяв два пути, начинающихся и заканчивающихся в точке P , мы можем сконструировать третий путь следующим образом: сначала мы будем двигаться вдоль первого пути, а затем — вдоль второго. Таким образом, мы получим новый путь, тоже начинающийся и заканчивающийся в точке P . Выясняется, что такое «сложение» замкнутых путей удовлетворяет всем свойствам группы, которые мы перечисляли в главе 2. Следовательно, эти пути действительно образуют группу.¹⁷

Вы, вероятно, заметили, что правило сложения путей в фундаментальной группе очень похоже на правило сложения кос в группах кос, которое мы определили в главе 5. И это не случайно. Как я уже объяснял в главе 5, косы на n нитях можно рассматривать как пути в пространстве наборов из n различных точек на плоскости. И действительно, группа кос B_n представляет собой фундаментальную группу данного пространства.¹⁸

Оказывается, два пути на поверхности тора, показанные на рис. 9.6, коммутируют друг с другом; это означает, что, складывая их двумя возможными способами, мы получаем один и тот же элемент фундаментальной группы.¹⁹ Таким образом, для того чтобы получить самый общий элемент фундаментальной группы тора, необходимо сначала M раз пройти вдоль первого пути, а затем — N раз вдоль второго, где M и N — два целых числа (если M отрицательное, то мы проходим вдоль первого пути $-M$ раз в противоположном направлении; точно так же справляемся

с ситуацией отрицательного N). Поскольку два базовых пути коммутируют друг с другом, порядок, в котором мы будем проходить эти пути, совершенно неважен — результат все равно останется тем же самым.

Для других римановых поверхностей структура фундаментальной группы оказывается сложнее.²⁰ Разные пути не всегда коммутируют друг с другом. Подобным образом, как мы говорили в главе 5, не коммутируют друг с другом косы более чем на двух нитях.

Уже довольно давно известно, что между группами Галуа и фундаментальными группами существует глубокая аналогия.²¹ Это дает ответ на наш первый вопрос: что может считаться аналогией группы Галуа в правом столбце розеттского камня Вейля? Это фундаментальная группа римановой поверхности.

Наша следующая задача — найти подходящие аналоги автоморфных функций, объектов, находящихся в противоположной части соответствия Ленглендса. И здесь нам придется совершить квантовый скачок. Оказывается, старые добрые функции недостаточно хороши для этого. Их нужно заменить более изощренными объектами современной математики под названием *пучки*, подробное описание которых вы найдете в главе 14.

Это предложение внес Владимир Дринфельд в 1980-х годах. Он по-новому сформулировал программу Ленглендса, связав средний и правый столбцы, то есть кривые над конечными полями и римановы поверхности соответственно. Сегодня эта формулировка известна как геометрическая программа Ленглендса. В частности, Дринфельд нашел аналоги автоморфных функций, подходящие для правого столбца розеттского камня Вейля.

Я познакомился с Дринфельдом в Гарвардском университете весной 1990 года. Он не только пробудил во мне интерес к программе Ленглендса, но и убедил меня в том, что я должен сыграть определенную роль в ее развитии. Дринфельд увидел связь между геометрической программой Ленглендса и работой, которую я проделал, будучи студентом московского вуза. Результаты этой работы стали неотъемлемой частью нового подхода Дринфельда, и это, в свою очередь, определило мою математическую карьеру: с тех самых пор программа Ленглендса играет в моих исследованиях определяющую роль.

Поэтому давайте вернемся в Москву, и я расскажу вам, чем занимался после завершения своей первой статьи о группах кос.

Глава 10. В петле

Москва, осень 1986 года. Я — студент третьего курса Керосинки. Статья о группах кос закончена и отправлена на публикацию, и Фукс спрашивает меня: «Чем тебе хочется заняться теперь?».

Мне хотелось, чтобы Фукс дал мне новую задачу. Фукс сказал, что вот уже несколько лет вместе со своим бывшим студентом Борисом Фейгиным работает над представлениями «алгебр Ли». По словам Фукса, это активная область исследований, предлагающая множество нерешенных задач. Кроме того, она тесно связана с квантовой физикой.

Это не могло не заинтересовать меня. Несмотря на то что Евгений Евгеньевич «обратил» меня в математику и что я был очарован математикой, я так и не избавился от детского восхищения физикой. И такое сближение миров математики и квантовой физики не могло не вызывать у меня восторга.

Фукс протянул мне восьмидесятистраничную рукопись с описанием проведенного им совместно с Фейгиным исследования.

— Сначала я хотел дать тебе учебник по алгебрам Ли, — сказал он. — Но затем подумал, почему бы тебе сразу не ознакомиться с этими записями?

Я бережно положил рукопись в рюкзак. Тогда она еще не была опубликована, и вследствие жесткого контроля советских властей за использованием фотокопировальных аппаратов (из опасения, что люди начнут копировать запрещенную литературу, такую как книги Солженицына или «Доктор Живаго») во всем мире существовало лишь несколько ее копий. Увидеть эту рукопись удалось совсем немногим, — позже Фейгин даже шутливо замечал, что я, вероятно, единственный человек, прочитавший ее от начала и до конца.

Рукопись была написана на английском языке и должна была войти в сборник, публикация которого готовилась в США. Однако по вине издательства выход книги в свет был отсрочен почти на пятнадцать лет. К тому времени большинство результатов уже были воспроизведены в других источниках, так что даже после публикации ее мало кто читал. Тем не менее статья получила известность, а Фейгин и Фукс — заслуженную славу. Их рукопись

часто цитировалась в литературе (под названием «Московский препринт»), и даже появился и получил распространение новый термин — «представления Фейгина — Фукса», обозначающий новые представления алгебр Ли, рассмотренные в статье.

Стоило мне приняться за чтение, как у меня возник вопрос: что же это за объекты с таким странным именем — «алгебры Ли»? Текст рукописи, которую я получил от Фукса, предполагал, что читатель обладает определенными знаниями по этой теме. Однако я никогда раньше с данной тематикой не сталкивался, поэтому отправился в магазин и скупил все учебники по алгебрам Ли, какие только смог найти. А что не смог найти, то взял в библиотеке в Керосинке. Все эти книги я читал параллельно со статьей Фейгина — Фукса. Этот опыт определил мой стиль обучения, и с тех пор я никогда не позволяю себе ограничиваться одним источником; я стараюсь найти все доступные ресурсы и жадно поглощаю их.

Для того чтобы объяснить, что такое алгебры Ли, сначала мне необходимо ознакомить вас с «группами Ли». Оба объекта обязаны своими названиями норвежскому математику Софусу Ли, который и придумал их.

Математические концепции населяют царство математики так же, как виды животных населяют царство животных: между ними существуют связи, они формируют семейства и подсемейства, и зачастую две разные концепции скрещиваются и дают потомство.

Концепция группы — это очень хороший пример. В царстве животных аналогом групп можно считать птиц, которые формируют отдельный класс. Этот класс делится на двадцать три отряда; каждый отряд, в свою очередь, подразделяется на семейства, а те — на рода. Например, орлан-крикун принадлежит к отряду соколообразных, семейству ястребиных, роду орланов (по сравнению с этими названиями «алгебра Ли» уже не кажется какой-то экзотикой!). Подобным образом группы формируют крупный класс математических концепций, в котором можно найти различные «отряды», «семейства» и «рода».

Например, существует отряд конечных групп, включающий все группы с конечным множеством элементов. Группа симметрий квадратного стола, которую мы рассматривали в главе 2, состоит из четырех элементов, поэтому она также относится к конечным группам. Точно так же группа Галуа числового поля, полученного путем присоединения решений полиномиального уравнения

к рациональным числам, является конечной (скажем, в случае квадратного уравнения в ней два элемента). Отряд конечных групп дополнительно подразделяется на семейства, такие как семейство групп Галуа. Еще одно семейство состоит из кристаллографических групп, то есть групп симметрий разнообразных кристаллов.

Есть и другой отряд — бесконечных групп. Например, группа целых чисел бесконечна; точно так же для каждого фиксированного $n = 2, 3, 4, \dots$ бесконечна группа кос B_n , о которой мы говорили в главе 5 (B_n состоит из кос на n нитях; таких кос может быть бесконечно много). Группа вращений круглого стола, состоящая из всех точек окружности, тоже относится к бесконечным группам.

Несмотря на то что группа целых чисел и группа окружности принадлежат одному отряду, между ними существует важное различие. Группа целых чисел дискретна; это означает, что ее элементы естественным образом не образуют непрерывную геометрическую фигуру. Невозможно плавно «перетечь» из одного целого числа в другое; находясь на одном целом числе, мы можем лишь перепрыгнуть в следующее. В противоположность этому, угол вращения можно менять непрерывно в диапазоне от 0 до 360 градусов, а все вместе эти углы образуют геометрическую фигуру — окружность. Математики называют такие фигуры *многообразиями*.

Группы целых чисел и группы кос принадлежат семейству дискретных бесконечных групп в царстве математики. А группа окружности принадлежит другому семейству — семейству групп Ли. Проще говоря, группа Ли — это группа, элементы которой являются точками многообразия. Таким образом, эта концепция стала плодом брачного союза двух других математических концепций — группы и многообразия (рис. 10.1).

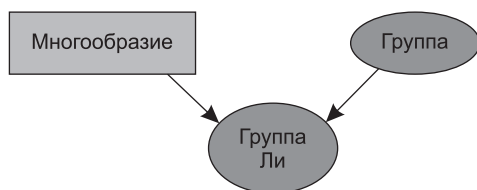


Рис. 10.1

То, что вы видите далее (рис. 10.2), — это дерево концепций, связанных с понятием группы, которое мы будем изучать в этой главе (о некоторых из этих концепций я еще не упоминал, но совсем скоро вы познакомитесь с ними).

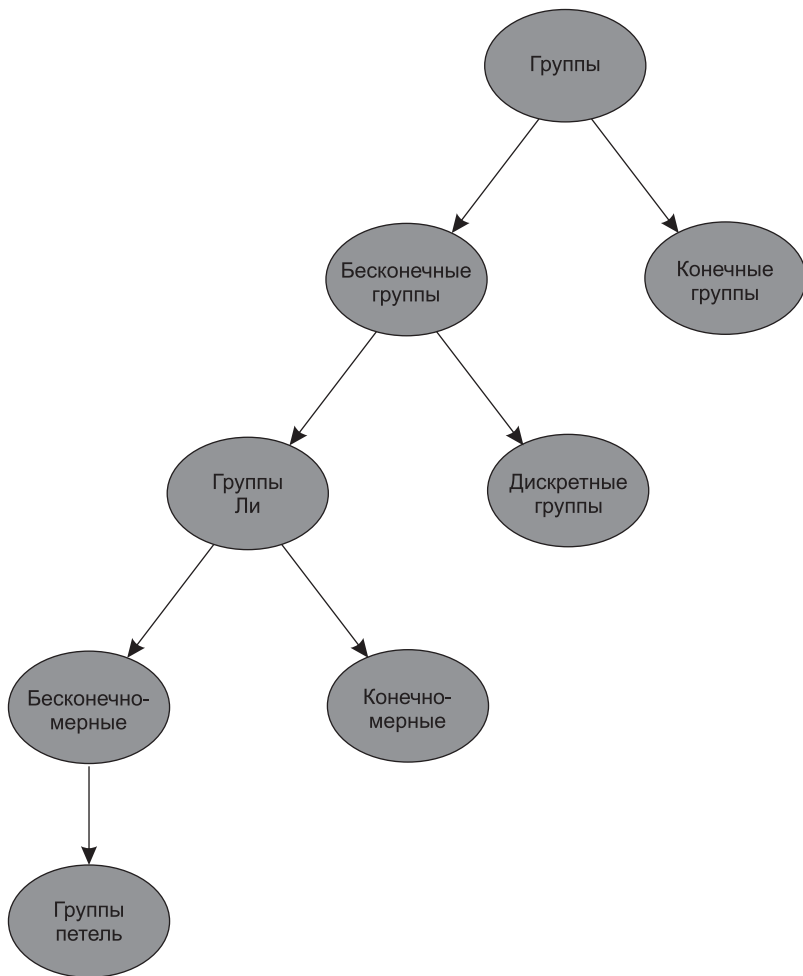


Рис. 10.2

Многие симметрии, встречающиеся в природе, можно описать с помощью групп Ли, и именно это делает их такими важными объектами для изучения. Например, группа $SU(3)$ из главы 2, которая

используется для классификации элементарных частиц, — это тоже группа Ли.

Вот еще один пример группы Ли: группа вращений сферы. Вращение круглого стола определяется углом поворота. Однако в случае сферы свободы больше: нам приходится указывать не только угол поворота, но и ось вращения (рис. 10.3). В роли оси может выступать любая линия, проходящая через центр сферы.

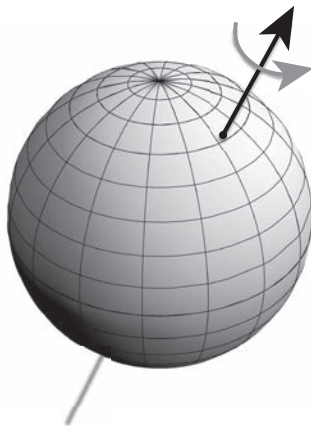


Рис. 10.3

У группы вращений сферы в математике есть собственное имя: специальная ортогональная группа трехмерного пространства, или, как его часто записывают в сокращенном виде, $SO(3)$. Симметрии сферы можно представить себе как преобразования трехмерного пространства, в пределах которого пребывает сфера. Это ортогональные преобразования, то есть они сохраняют все расстояния.¹ К слову, они дают нам трехмерное представление группы $SO(3)$ (с этой концепцией мы познакомились в главе 2).

Аналогично, группа вращений круглого стола, уже упомянутая выше, называется $SO(2)$; эти вращения представляют собой особые ортогональные преобразования плоскости (а плоскость, как известно, двумерна). Таким образом, мы получаем двумерное представление группы $SO(2)$.

$SO(2)$ и $SO(3)$ — не только группы, но и многообразия (то есть геометрические фигуры). Группа $SO(2)$ — это окружность, а окружность — многообразие. Таким образом, можно смело говорить о $SO(2)$ как о группе и как о многообразии. Вот почему

мы называем ее группой Ли. Точно так же элементы группы $SO(3)$ являются точками другого многообразия, которое, однако, визуализировать несколько сложнее (обратите внимание, что это многообразие — *не* сфера). Вспомните, что каждое вращение сферы определяется осью и углом поворота. Также необходимо заметить, что каждая точка на сфере порождает ось вращения — линию, соединяющую эту точку с центром сферы. А угол поворота — это то же самое, что точка на окружности. Следовательно, элемент группы $SO(3)$ определяется точкой на сфере (она задает ось вращения) в сочетании с точкой на окружности (которая задает угол поворота).

Возможно, следует для начала попытаться найти ответ на более простой вопрос: какова размерность группы $SO(3)$? Для этого необходимо обсудить понятие размерности с более строгой точки зрения. В главе 2 мы говорили о том, что живем в трехмерном мире. Это означает, что для задания позиции точки в пространстве нам нужно перечислить три числа или координаты: (x, y, z) . В то же время плоскость обладает только двумя измерениями: позиция на плоскости описывается двумя координатами (x, y) . А прямая одномерна: на ней достаточно задать одну координату.

Однако какова размерность окружности? На первый взгляд, кажется, что ответ очевиден: у окружности два измерения, потому что обычно мы рисуем ее на плоскости, а плоскость двумерная. Каждая точка окружности, если рассматривать ее как точку на плоскости, описывается двумя координатами. Но в математическом определении размерности геометрического объекта (такого, как окружность) учитывается только число независимых координат, необходимых для точного указания любого местоположения на самом объекте. Это никак не связано с ландшафтом, на котором располагается объект (например, с плоскостью). И действительно, окружность вполне можно вписать в трехмерное пространство (представьте себе кольцо на пальце) или пространство с еще большим количеством измерений. Важно лишь то, что на этой конкретной окружности позицию любой точки можно описать одним числом, а именно углом. Это и есть одна-единственная требуемая координата на окружности. Вот почему мы говорим, что окружность одномерна.

Разумеется, о величине угла невозможно говорить, не выбрав на окружности точку отсчета, соответствующую нулевому углу.

Схожим образом, для того чтобы связать координату x с каждой точкой на прямой, мы должны выбрать на ней точку отсчета, соответствующую $x = 0$. Систему координат на данном объекте можно определить множеством разных способов. Но в любой такой системе координат число координат будет одним и тем же, и это как раз и есть то число, которое мы называем *размерностью* объекта.

Интересно, что, увеличивая масштаб и рассматривая все более мелкие окрестности точки на окружности, мы замечаем практически полное исчезновение кривизны (рис. 10.4). Крошечная окрестность точки на окружности почти не отличается от крошечной окрестности той же самой точки на касательной к окружности (прямой, представляющей собой наилучшее приближение окружности в окрестности этой точки). Это подтверждает, что размерность окружности совпадает с размерностью прямой.²

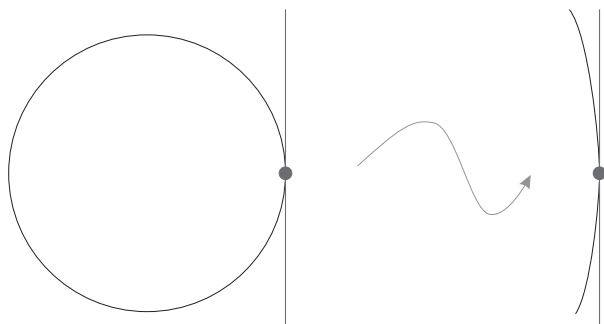


Рис. 10.4. При увеличении масштаба мы замечаем, что окружность и касательная становятся все ближе и ближе друг к другу

Аналогично, сферу можно легко вписать в трехмерное пространство, но ее собственная размерность равна двум. И действительно, на поверхности сферы имеются две независимые координаты: широта и долгота. Нам всем они известны, так как мы используем их для определения местоположения на поверхности Земли, форма которой близка к сферической. Сетка на сфере, представленная на рис. 10.3, составлена из «параллелей» и «меридианов», соответствующих фиксированным значениям широты и долготы. Тот факт, что у сферы две независимые координаты, и свидетельствует о том, что эта фигура двумерна.

А что насчет группы Ли $SO(3)$? Каждая точка $SO(3)$ представляет вращение сферы, поэтому мы оперируем тремя координа-

тами: для описания оси вращения (которую можно указать с помощью точки, в которой ось пронзает сферу) мы используем две координаты, а угол поворота порождает третью. Следовательно, размерность группы $SO(3)$ равна трем.

Представить себе группу Ли или любое другое многообразие размерностью больше трех довольно непросто. Наш мозг запрограммирован так, что мы способны вообразить геометрическую фигуру или многообразие, у которого не более трех измерений. Даже мыслить в терминах четырехмерной комбинации пространства и времени — уже невероятно трудная задача, ведь мы не воспринимаем время (образующее то самое четвертое измерение) как эквивалент пространственного измерения. А если размерность становится еще выше? Как проанализировать пяти-, или шести-, или стомерное многообразие?

Прибегнем к такой аналогии: живопись — это, по сути, двумерное представление трехмерных объектов. Художники рисуют двумерные проекции этих объектов на холсте и применяют техники, такие как перспектива, для создания иллюзии глубины, или третьего измерения, на своих полотнах. Подобным образом мы можем представлять себе четырехмерные объекты, анализируя их трехмерные проекции.

Другой, более эффективный способ представить себе четвертое измерение сводится к тому, чтобы рассматривать четырехмерный объект как набор его трехмерных «срезов». Это как нарезать буханку хлеба — трехмерную — на ломти настолько тонкие, что их можно считать двумерными.

Если четвертое измерение представляет время, то такой четырехмерной «нарезкой» служит кинематограф. Делая снимок движущегося человека, мы получаем трехмерный срез четырехмерного объекта, представляющего данного человека в четырехмерном пространстве — времени (этот срез затем проецируется на плоскость). Несколько снимков, сделанных подряд, дают нам набор подобных срезов. Если мы быстро просмотрим эту последовательность, то увидим движение. Как вы уже догадались, это суть того, что нам известно под названием «кино».

Впечатление движения можно также создать путем наложения изображений. Эта идея очень заинтересовала художников в начале двадцатого века, и они начали применять ее, стараясь включить в свои картины четвертое измерение и сделать их динамичными.

Важной вехой на этом пути стала картина Марселя Дюшана «Обнаженная, спускающаяся по лестнице (No. 2)», написанная им в 1912 году (рис. 10.5).

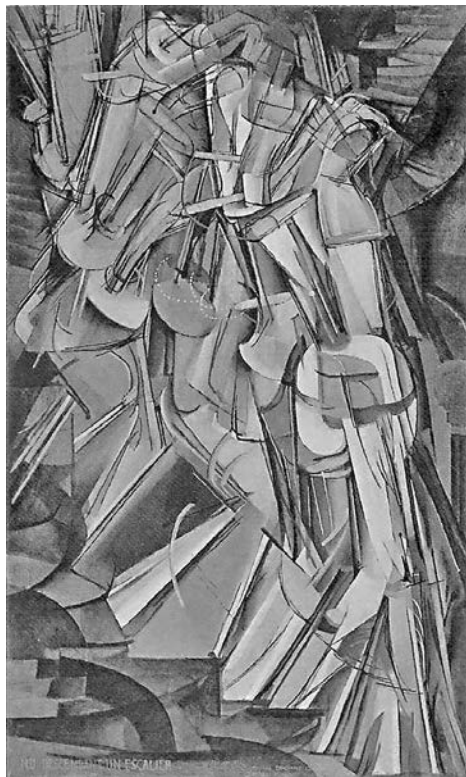


Рис. 10.5

Интересно отметить, что теория относительности Эйнштейна, демонстрирующая, что пространство и время нельзя отделить одно от другого, появилась примерно в это же время. Благодаря этому понятие четырехмерного пространственно-временного континуума заняло в физике важнейшее место. Параллельно математики, такие как Анри Пуанкаре, пытались глубже проникнуть в загадки многомерной геометрии и вырваться за пределы евклидовой парадигмы.

Идея четвертого измерения, так же как и неевклидова геометрия, завораживала Дюшана. Читая книгу Э. П. Жоффре «Элементарный трактат о четырехмерной геометрии и введение

в геометрию n измерений» (*E. P. Jouffret. Elementary Treatise on Four-Dimensional Geometry and Introduction to the Geometry of n Dimensions*), в которой, в частности, были представлены передовые идеи Пуанкаре, Дюшан оставил заметку следующего содержания:³

Тень, отбрасываемая четырехмерной фигурой на наше пространство, — это трехмерная тень (см. *Jouffret – Geom. of 4-dim.*, с. 186, последние три строки)... аналогично тому, как архитекторы изображают план каждого этажа дома, четырехмерная фигура может быть представлена (каждым из своих этажей) с помощью трехмерных сечений. Разные этажи тогда будут связываться друг с другом четвертым измерением.

По словам искусствоведа Линды Далримпл Хендерсон,⁴ «Дюшан находил нечто изысканно-провокационное в том, как новые геометрии бросали вызов множеству устоявшихся “истин”». Интерес Дюшана и других художников того времени к четвертому измерению, писала она, стал одним из элементов, которые привели к рождению абстрактного искусства.

Таким образом, математика вдохновила искусство; она позволила художникам увидеть скрытые измерения и подтолкнула их к тому, чтобы обнажить — в провоцирующей эстетичной форме — глубокие истины о нашем мире. Созданные ими произведения современного искусства помогли обострить наше восприятие реальности, оказав влияние на массовое сознание. Это, в свою очередь, стало одним из факторов формирования научных взглядов следующих поколений математиков. Вот как красноречиво изложил это научный философ Джеральд Холтон:⁵

Безусловно, для поддержания жизни культурного общества необходимо взаимодействие всех его частей. Его прогресс — это алхимический процесс, в котором множество разнообразных ингредиентов, соединяясь, образуют новые сокровища. И поэтому мне представляется, что Пуанкаре и Дюшан разделяют мое мнение и уже несомненно повстречались где-то в том самом гиперпространстве, которое они оба — хоть и каждый на свой лад — так сильно любили.

Математика позволяет нам воспринимать геометрию во всех ее проявлениях, формах и образах. Это универсальный язык, одинаково хорошо работающий в пространствах с любым числом измерений, независимо от того, возможно визуализировать соответствующие объекты или нет. Он вывозит нас из тюрьмы нашего ограниченного воображения; не зря Чарльз Дарвин писал, что математика наделяет нас «дополнительным чувством».⁶

Например, мы не в состоянии вообразить четырехмерное пространство, но ничто не мешает нам воссоздать его математически. Мы просто представим точки этого пространства в форме четверок чисел (x, y, z, t) — точно так же, как для трехмерного пространства использовали тройки (x, y, z) . Таким образом можно представить точки любого n -мерного пространства для любого натурального числа n в виде наборов из n чисел (а думать о них можно как о строках электронной таблицы — мы уже говорили об этом в главе 2).

Вероятно, мне следует разъяснить, почему я называю эти пространства плоскими. Прямая, несомненно, плоская, и то же самое мы можем сказать о плоскости. Однако совершенно не очевидно, почему трехмерное пространство также считается плоским (обратите внимание, что я говорю не о разнообразных искривленных многообразиях, заключенных в трехмерное пространство, таких как сфера или тор; речь идет о самом трехмерном пространстве). Причина в том, что у него отсутствует кривизна. Точное математическое определение кривизны — штука довольно непростая (его дал Бернард Риман, создатель римановых поверхностей), и мы не будем углубляться в детали, так как они несущественны для наших целей. Для того чтобы понять, что в действительности означает утверждение «трехмерное пространство — плоское», просто заметим, что в трехмерном пространстве присутствуют три бесконечные координатные оси, перпендикулярные друг другу, точно так же, как на плоскости существуют две такие перпендикулярные координатные оси. Аналогично, n -мерное пространство с n перпендикулярными координатными осями не обладает кривизной и, следовательно, является плоским.

В течение многих веков физики пребывали в уверенности, что мы живем в плоском трехмерном пространстве, но, как мы говорили во введении, Эйнштейн с помощью своей общей теории относительности доказал, что сила гравитации заставляет пространство искривляться (его кривизна чрезвычайно мала, поэтому в своей

повседневной жизни мы ее совершенно не замечаем, и все же она отлична от нуля). Следовательно, наше пространство на самом деле служит примером искривленного трехмерного многообразия.

Это поднимает вопрос о том, может ли искривленное пространство существовать само по себе, не будучи вложенным в плоское пространство более высокой размерности — то есть не как сфера в плоском трехмерном пространстве. Мы привыкли думать, что живем в плоском пространстве, и в нашей повседневной жизни искривленные фигуры присутствуют только в рамках этого плоского пространства. Однако это ошибочная точка зрения, порожденная ограниченностью нашего восприятия реальности. Математика дает нам подсказку, как выбраться из этой ловушки: благодаря Риману мы знаем, что искривленные пространства в действительности существуют как совершенно автономные объекты, не нуждающиеся в «оболочке» из плоского пространства. И для того чтобы дать характеристику такому пространству, нам нужно только правило измерения расстояний между любыми двумя его точками (это правило должно обладать определенными естественными свойствами). Такое правило в математике зовется *метрикой*. Математические концепции метрики и тензора кривизны, введенные Риманом, — краеугольные камни общей теории относительности Эйнштейна.⁷

Искривленные фигуры, или многообразия, могут обладать любой произвольно высокой размерностью. Вспомните, что окружность определяется как множество точек на плоскости, равноудаленных от данной точки (или, как утверждал мой экзаменатор в МГУ, множество *всех* таких точек!). Аналогично, сфера — это множество всех точек трехмерного пространства, равноудаленных от данной точки. Аналог сферы более высокой размерности — некоторые называют это гиперсферой — можно определить как набор точек в n -мерном пространстве, равноудаленных от данной точки. Это условие дает нам одно ограничение на n координатах. Следовательно, размерность гиперсферы в n -мерном пространстве равна $(n - 1)$. Кроме того, мы можем исследовать группу Ли вращений данной сферы.⁸ Она обозначается $SO(n)$.

С точки зрения таксономии групп в царстве математики семейство групп Ли подразделяется на два рода: конечномерных групп Ли (таких, как группа окружности и группа $SO(3)$) и бесконечномерных групп Ли. Обратите внимание на то, что любая

конечномерная группа Ли уже бесконечна в том смысле, что содержит бесконечно много элементов. Например, группа окружности включает бесконечное множество элементов (все точки окружности), но она одномерна, так как любой из ее элементов можно описать с помощью одной координаты (угла). Для описания элементов бесконечномерной группы Ли требуется бесконечное множество координат. Такой тип «двойной бесконечности» чрезвычайно сложно себе представить. Тем не менее подобные группы встречаются в природе, так что они также требуют внимательного изучения. Я расскажу вам об одной из бесконечномерных групп Ли, известной под названием *группы петель*.

Для того чтобы понять, что это такое, для начала рассмотрим петли в трехмерном пространстве. Говоря простым языком, петля — это замкнутая кривая, такая, например, как на рис. 10.6 слева. Мы уже встречались с петлями, когда обсуждали группы кос (тогда мы называли их «узлами»)⁹. Хочу особо подчеркнуть, что незамкнутые кривые, такие как на рис. 10.6 справа, петлями не считаются.

Следуя такому же принципу, мы можем рассмотреть петли (то есть замкнутые кривые) внутри любого многообразия M . Пространство, состоящее из всех таких петель, называется пространством петель M .

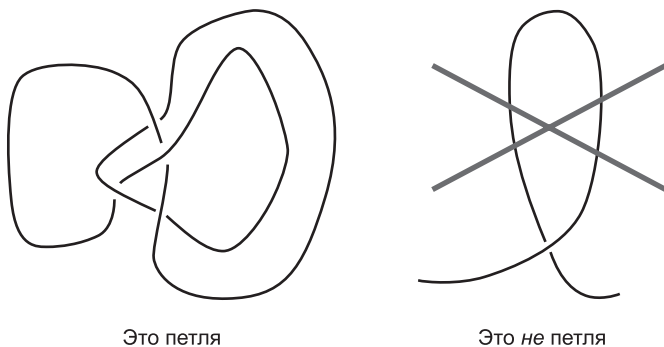


Рис. 10.6

Подобные петли играют важную роль в теории струн, как мы с вами убедимся в главе 17. Фундаментальные объекты традиционной квантовой физики — это элементарные частицы, такие как электроны или кварки. Это точечные объекты, не имеющие

внутренней структуры, то есть они нульмерные. В теории струн постулируется, что фундаментальными объектами природы являются одномерные струны.¹⁰ Замкнутая струна — это не что иное, как петля, заключенная в многообразии M (пространство — время). Вот почему пространство петель — краеугольный камень теории струн.

Теперь рассмотрим пространство петель группы Ли $SO(3)$. Ее элементы — это петли в $SO(3)$. Пристальнее взглянем в одну из этих петель — что же мы увидим? Во-первых, она очень похожа на петлю, изображенную выше. Действительно, группа $SO(3)$ трехмерна, поэтому в небольшом масштабе она выглядит как трехмерное плоское пространство. Во-вторых, каждая точка на этой петле — это один из элементов $SO(3)$, то есть какое-либо вращение сферы. Следовательно, наша петля представляет собой довольно изоциранный объект: это однопараметрическое семейство вращений сферы. Взяв две такие петли, мы можем сделать третью, скомпоновав соответствующие вращения сферы. Таким образом, пространство петель $SO(3)$ становится группой. Назовем ее группой петель $SO(3)$.¹¹ Это хороший пример бесконечномерной группы Ли: ее элементы действительно нельзя описать, используя конечное число координат.¹²

Группа петель любой другой группы Ли (например, группа $SO(n)$ вращений гипersферы) также представляет собой бесконечномерную группу Ли. Эти группы петель в теории струн возникают как группы симметрии.

Второй концепцией, которую мне пришлось изучить в связи с рукописью Фейгина и Фукса, была концепция алгебры Ли. Каждая алгебра Ли в каком-то смысле является упрощенной версией соответствующей группы Ли.

Термин «алгебра Ли» не очень удачный, поскольку может создать неразбериху и недопонимание. Когда мы слышим слово «алгебра», мы вспоминаем то, что изучали под этим названием в школе, например решение квадратных уравнений. Однако теперь слово «алгебра» используется в совершенно ином значении: как часть неделимого понятия «алгебра Ли», указывающего на математические объекты, обладающие специфическими свойствами. Несмотря на такое название, эти объекты не образуют семейство в классе всех алгебр — в этом их отличие от групп Ли, которые образуют семейство в классе всех групп. Тем не менее

нам ничего другого не остается, кроме как жить с этим несоответствием терминологии.

Для того чтобы объяснить, что такое алгебра Ли, сначала я должен рассказать вам о концепции *касательного пространства*. Не беспокойтесь, я не собираюсь уйти «по касательной» в дебри, не касающиеся изначальной темы нашего разговора; это всего лишь продолжение одной из ключевых идей математического анализа под названием «линеаризация», то есть приближение искривленных фигур линейными, или плоскими.

Например, касательное пространство окружности в точке — это прямая линия, проходящая через данную точку и ближайшая к окружности среди всех прямых, которые также проходят через эту точку. Выше мы уже встречались с этим понятием, когда говорили о размерности окружности. Касательная всего лишь касается окружности в определенной точке, тогда как все остальные линии, проходящие через ту же точку, обязательно пересекают окружность где-то еще (рис. 10.7).

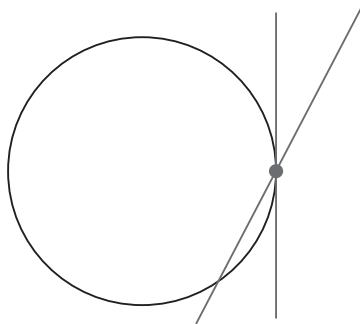


Рис. 10.7

Аналогично, любую кривую (то есть одномерное многообразие) можно аппроксимировать в окружности данной точки касательной линией. Рене Декарт, изложивший описание эффективного метода расчета подобных касательных в опубликованном им в 1637 году труде *Géométrie*, писал:¹³ «Осмелюсь заявить, что это не только наиболее практичная и универсальная задача геометрии из тех, что я знаю, но и из тех, о которых я желал бы знать». Например, сферу в данной точке можно аппроксимировать касательной плоскостью. Представьте себе баскетбольный мяч: если положить его

на пол, то он будет касаться пола ровно в одной точке, и в этом случае пол будет играть роль касательной плоскости в данной точке.¹⁴ Точно так же n -мерное многообразие можно аппроксимировать в данной точке плоским n -мерным пространством.

Напомним, что в любой группе Ли есть специальная точка, служащая единичным элементом данной группы. Мы берем касательное пространство к группе Ли в этой точке — и вуаля! — у нас получается алгебра Ли данной группы Ли. Таким образом, у каждой группы Ли появляется своя алгебра Ли — младшая сестренка этой группы Ли.¹⁵

Например, группа окружности — это группа Ли, а единичным элементом в этой группе служит определенная точка на окружности,¹⁶ соответствующая нулевому углу. Следовательно, касательная прямая к этой точке — это алгебра Ли данной группы окружности. К сожалению, у нас не получится нарисовать картинку, изображающую группу $SO(3)$ и ее касательное пространство, так как оба этих объекта трехмерны. Однако математическая теория для описания касательных пространств построена так, что она одинаково хорошо работает для объектов любой размерности. Для того чтобы представить, как что-то работает, нужно смоделировать это на одно- или двумерных примерах (таких, как окружность или сфера). Таким образом мы используем многообразия меньшей размерности как метафоры более сложных, обладающих более высокой размерностью многообразий. Но это совсем не обязательно; язык математики позволяет выходить за рамки нашего ограниченного визуального восприятия. Математически алгебра Ли n -мерной группы Ли представляет собой n -мерное плоское пространство, также известное под названием «векторное пространство».¹⁷

Однако это еще не все. Операция умножения в группе Ли порождает операцию в ее алгебре Ли: взяв любые два элемента алгебры Ли, мы можем сконструировать третий. Свойства этой операции описать сложнее, чем свойства умножения в группе Ли, и для нас они сейчас несущественны.¹⁸ Примером может служить операция *перекрестного умножения* в трехмерном пространстве, знакомая тем из читателей, кому довелось изучать векторное исчисление.¹⁹ Если вы знаете, как выглядит эта операция, то наверняка задавались вопросом, откуда у нее взялись такие странные свойства. И знаете, что? Эта операция на самом деле превращает трехмерное пространство в алгебру Ли!

На самом деле это есть не что иное, как алгебра Ли группы Ли $SO(3)$. А заумная операция перекрестного умножения — всего лишь наследие правила композиции вращений сферы.

Возможно, вы задаетесь вопросом, почему нас так интересуют алгебры Ли, если операции на них выглядят так странно и пугающе. Почему бы не придерживаться старых добрых групп Ли? Основная причина состоит в том, что в отличие от группы Ли, которая чаще всего обладает определенной кривизной (как окружность), алгебра Ли представляет собой плоское пространство (как прямая, плоскость и т. д.). Благодаря этому изучать алгебры Ли становится намного проще, чем группы Ли.

Например, мы можем обсудить алгебры Ли групп петель.²⁰ Такие алгебры Ли, которые следует рассматривать как упрощенные версии групп петель, называются *алгебрами Каца — Муди* в честь двух математиков: Виктора Каца (профессора Массачусетского технологического института, родившегося в России и эмигрировавшего в США) и Роберта Муди (профессора Университета Альберты, эмигрировавшего в Канаду из Великобритании). Независимо друг от друга они приступили к исследованию этих алгебр Ли в 1968 году. С тех самых пор теория алгебр Каца — Муди остается одной из самых актуальных и быстроразвивающихся областей математики.²¹

Именно эти алгебры Каца — Муди Фукс и предложил мне взять в качестве темы следующего исследовательского проекта. Начав разбираться в этой новой для себя области, я понял, что мне придется очень много читать и изучать, прежде чем я смогу добиться каких-либо самостоятельных результатов. Однако эта тема по-настоящему захватила меня.

Фукс жил на северо-востоке Москвы, недалеко от железнодорожной станции, через которую проходила электричка в мой родной город. Я ездил домой каждые выходные, и Фукс предложил совместить эти поездки с нашими встречами. Мы договорились, что я буду приезжать к нему каждую пятницу к пяти, а после наших занятий уезжать на электричке домой. Каждое занятие продолжалось около трех часов (в течение которых Фукс также успевал покормить меня ужином), а затем я бежал на последнюю электричку и приезжал к родителям около полуночи. Эти встречи сыграли огромную роль в моем математическом образовании. Мы встречались каждую неделю на протяжении всего осеннего семестра 1986 года, а также весеннего семестра 1987 года.

Лишь к январю 1987 года, закончив чтение длинной рукописи Фейгина и Фукса, я почувствовал, что готов к работе над собственным исследованием. К тому времени у меня появилась возможность получить пропуск в Московскую научную библиотеку — огромное хранилище книг и журналов не только на русском языке (большая часть из которых была доступна и в библиотеке Керосинки), но и на многих других. Я начал регулярно посещать эту библиотеку, сосредоточенно изучая десятки математических журналов в поисках статей об алгебрах Каца — Муди и на смежные темы.

Мне не терпелось узнать об их применении в квантовой физике — эта тема меня чрезвычайно привлекала. Я уже упоминал выше о том, что алгебры Каца — Муди играют важную роль в теории струн, но, помимо этого, они также служат симметриями моделей двумерной квантовой физики. Мы живем в трехмерном пространстве, поэтому реалистичные модели, описывающие наш мир, должны быть трехмерными. Если добавить время, то мы получим все четыре измерения. Однако с математической точки зрения ничто не мешает нам строить и анализировать модели, описывающие миры иной размерности. Модели с числом измерений меньше трех гораздо проще, и у нас больше шансов их решить. А полученные знания можно затем применять для проработки более сложных трех- и четырехмерных моделей.

Действительно, одна из основных идей, лежащих в основе математической дисциплины, известной под названием «математическая физика», заключается в том, что надо изучать модели различных размерностей, которые не связаны напрямую с нашим физическим миром, но разделяют характерные черты реалистичных моделей.

Часть подобных моделей низкой размерности имеют вполне реальные применения. Например, очень тонкий металлический лист можно рассматривать как двумерную систему и эффективно описывать с помощью двумерной модели. Один из самых известных примеров — так называемая модель Изинга взаимодействия частиц, расположенных в вершинах двумерной кристаллической решетки. Точное решение модели Изинга, найденное Ларсом Онсагером, стало источником весьма ценных догадок относительно природы таких явлений, как спонтанный магнетизм, или ферромагнетизм. В основе расчетов Онсагера лежала скрытая

симметрия данной модели, и это в очередной раз подчеркивает первостепенную роль, которую симметрия играет в понимании физических систем.

Впоследствии было установлено, что эту симметрию можно описать с помощью так называемой алгебры Вирасоро, близкой родственницы алгебр Каца — Муди.²² (Действительно, главной темой рукописи Фейгина и Фукса, которую я должен был изучить, была как раз алгебра Вирасоро.) Также существует большой класс моделей такого типа, в которых симметрии описываются алгебрами Каца — Муди в узком смысле этого понятия. Математическая теория алгебр Каца — Муди — это определяющий фактор для понимания таких моделей.²³

В библиотеке Керосинки была оформлена подписка на «Реферативный журнал». Это ежемесячное издание состояло из кратких рецензий на все новые статьи на всех языках, сгруппированных по темам. Я взял себе за привычку регулярно читать этот журнал, и он оказался поистине бесценным источником знаний! Каждый месяц приходил новый том с информацией о математических статьях, и я тщательно просматривал интересующие меня разделы в поисках того, что могло бы оказаться мне полезным. Обнаружив многообещающую рецензию, я выписывал выходные данные, для того чтобы получить полный текст при следующем визите в Московскую научную библиотеку. Таким образом я открыл для себя массу увлекательных вещей.

Однажды, перелистывая страницы «Реферативного журнала», я наткнулся на упоминание статьи японского математика Минору Вакимото, опубликованной в одном из журналов, которому я уделял особое внимание, — *Communications in Mathematical Physics*. Рецензия оказалась не очень информативной, но в заголовке статьи упоминалась алгебра Каца — Муди, связанная с группой вращений сферы $SO(3)$, поэтому я записал нужные сведения и при очередном визите в Московскую научную библиотеку прочитал статью полностью.

Статья была посвящена построению новых представлений алгебры Каца — Муди, связанной с $SO(3)$. Чтобы передать суть работы, я воспользуюсь языком квантовой физики (что в данном случае вполне уместно, так как алгебры Каца — Муди описывают симметрии моделей квантовой физики). Реалистичные квантовые модели, например модели, описывающие взаимодействие

элементарных частиц, чрезвычайно сложны. Однако у нас есть возможность изучать намного более простые, идеализированные «модели свободного поля», в которых взаимодействие отсутствует или незначительно. Квантовые поля в этих моделях «свободны» друг от друга, отсюда и название.²⁴ Внутри той или иной модели свободного поля очень часто удается реализовать другую сложную и, следовательно, более интересную квантовую модель. Это позволяет нам анализировать и разбирать сложные модели, выполняя вычисления, которые в противном случае были бы нам недоступны. Таким образом, подобные реализации чрезвычайно полезны. Однако для квантовых моделей, в которых симметриями служат алгебры Каца — Муди, известные примеры подобных реализаций на свободном поле долгое время были известны только в частных случаях.

Читая статью Вакимото, я сразу же заметил, что в случае простейшей алгебры Каца — Муди (алгебры, связанной с $SO(3)$) полученный им результат мог бы служить базой для широчайшей из всех возможных реализаций на свободном поле. Поняв, насколько важен этот результат, я задумался. Откуда же взялась эта реализация? Можно ли распространить ее на другие алгебры Каца — Муди? Я почувствовал, что готов взяться за поиск ответов на эти вопросы.

Как описать ощущения, охватившие меня, когда я прочитал эту замечательную работу и осознал ее потенциал? Наверное, схожее чувство испытывает альпинист, перед которым внезапно после долгого восхождения открывается горный пик во всей своей красе. У вас перехватывает дыхание от этой величественной красоты, и все, что вы можете сказать: «Вот это да!» Это момент озарения. Вы еще не достигли вершины, еще не знаете, какие препятствия ожидают вас впереди, но вы уже полностью во власти ее чар, и вы уже представляете себя наверху. Вершина ждет своего завоевателя. Но хватит ли у вас сил и упорства, чтобы туда взойти?

Глава 11. Покорение вершины

К лету я почувствовал, что готов поделиться своими находками с Фуксом. Я знал, что статья Вакимото заинтересует его не меньше меня. По традиции, я отправился на дачу к Фуксу. Однако, когда я прибыл туда, Фукс сообщил мне, что произошла небольшая накладка: он назначил встречу со мной и со своим коллегой и бывшим учеником Борисом Фейгиным на одно и то же время — по его словам, совершенно случайно, чему я, конечно, не поверил (и много позже Фукс подтвердил, что, действительно, сделал это намеренно).

Фукс представил меня Фейгину несколькими месяцами ранее. Это случилось перед одним из семинаров Гельфанда, вскоре после того, как я закончил свою статью о группах кос и приступил к чтению статьи Фейгина и Фукса. По совету Фукса я попросил Фейгина порекомендовать дополнительную литературу, с которой мне стоило бы ознакомиться. Борису Львовичу — так я к нему тогда обращался — на тот момент было тридцать три года, но он уже считался одной из ярчайших звезд московского математического сообщества. Одетый в джинсы и пару поношенных кроссовок, он выглядел скромным, даже застенчивым человеком. На носу у него сидели толстые очки, и большую часть нашего разговора он смотрел в пол, избегая зрительного контакта. Само собой, я тоже был не слишком уверен в себе — всего лишь начинающий студент, которому выпала честь пообщаться со знаменитым математиком. В общем, это была не слишком увлекательная беседа. И все же время от времени Фейгин поднимал глаза и бросал на меня быстрый взгляд, сопровождая его широкой обезоруживающей улыбкой. Это растопило лед, и у меня не осталось сомнений в том, что в действительности он искренний и доброжелательный человек.

Однако первая рекомендация Фейгина меня поставила в тупик: он посоветовал мне прочесть книгу Ландау и Лифшица под названием «Статистическая физика». Такая перспектива меня по-настоящему встревожила — отчасти из-за сходства (по размеру и весу) между этим толстым томом и учебниками по истории Коммунистической партии, которые нам приходилось штудировать в институте.

В защиту Фейгина скажу, что совет оказался дельным. Это важная и полезная книга; более того, мои собственные исследования повернулись как раз в ту сторону (хотя к стыду своему должен признать, что книгу я все же так и не дочитал). Однако в тот момент идея ознакомиться с этим монументальным трудом меня нисколько не вдохновила, и, думаю, отчасти поэтому наша первая беседа довольно быстро заглохла. Фактически я больше не разговаривал с Фейгиным до того дня на даче Фукса, если не считать традиционного «здравствуйте» при встрече на семинарах Гельфанда.

Вскоре после моего прибытия на дачу Фукса я увидел в окно Фейгина — он приехал на велосипеде, поскольку жил на даче неподалеку. Мы поздоровались, немного поговорили о том о сем и уселись за круглый стол на кухне. Фукс спросил меня:

— Итак, что нового?

— Ну... я нашел одну интересную статью японского математика Вакимото.

— Хммм... — Фукс повернулся к Фейгину: — Вы слышали об этом?

Фейгин отрицательно покачал головой, и Фукс снова обратился ко мне:

— Он всегда обо всем знает... Хорошо, что ему не попадалась эта статья — значит, ему тоже будет интересно тебя послушать.

Я принялся описывать все то, о чем узнал из работы Вакимото. Как я и думал, это очень заинтересовало их обоих. Тогда в первый раз нам с Фейгиным довелось побеседовать о математических концепциях, и я сразу же почувствовал, что мы настроены на одну волну. Он внимательно слушал и задавал правильные вопросы. Было совершенно очевидно, что он понимал важность этой информации, и, несмотря на то что с виду он оставался спокойным и расслабленным, услышанное его явно взволновало. Фукс по большей части просто наблюдал за нами и, подозреваю, про себя потирал руки от радости: его секретный план познакомить нас с Фейгиным поближе так чудесно сработал. Это был поистине вдохновляющий разговор. Я не сомневался, что нахожусь в одном шаге от какого-то чрезвычайно важного открытия.

Фукс явно разделял мою уверенность. Когда я уходил, он сказал мне:

— Молодец! Жаль, что не ты написал эту статью. Но, думаю, ты готов к тому, чтобы поднять эту работу на новый уровень.

По возвращении домой я продолжил думать о вопросах, поднятых в статье Вакимото. Поскольку Вакимото не давал никаких объяснений приведенным в работе формулам, мне пришлось выступить в роли своеобразного эксперта-криминалиста, чтобы отследить связь между этими формулами и общей картиной.

Несколькими днями позже картина начала вырисовываться. Я в задумчивости мерил шагами свою комнату в общежитии, когда внезапно меня озарило: формулы Вакимото родом из геометрии! Это было удивительное и неожиданное открытие, ведь подход Вакимото был полностью алгебраическим — ни намека на геометрию.

Для того чтобы объяснить мою геометрическую интерпретацию, нам потребуется снова навестить группу Ли $SO(3)$ симметрий сферы и ее группу петель. Как я объяснял в предыдущей главе, каждый элемент группы петель $SO(3)$ представляет собой набор элементов $SO(3)$, по одному элементу $SO(3)$ на каждую точку петли. Каждый из элементов $SO(3)$ действует на сфере как определенное вращение. Это подразумевает, что каждый элемент группы петель $SO(3)$ порождает симметрию пространства петель сферы.¹

Я понял, что эту информацию можно использовать для поиска представления алгебры Каца — Муди, связанной с $SO(3)$. Но это еще не давало нам формулы Вакимото. Для того чтобы получить их, необходимо было модифицировать формулы определенным весьма радикальным способом — проделать с ними операцию, аналогичную выворачиванию пальто наизнанку. Мы можем проделать это с любым пальто, но в большинстве случаев носить его после этого уже не получится — по крайней мере, на людях. Однако некоторые пальто специально шьются так, чтобы их можно было надевать любой стороной вверх. Как оказалось, это было справедливо и для формул Вакимото.

Вооружившись этой идеей, я немедленно попробовал распространить формулы Вакимото на другие, более сложные алгебры Каца — Муди. Первый, геометрический шаг мне удался без каких-либо сложностей — все было так же, как в случае с $SO(3)$. Однако следующий этап — выворачивание формул «наизнанку» — дал какую-то ерунду. Результат попросту не имел смысла. Я принялся вертеть формулы и так, и эдак, но никакие ухищрения не помогли решить проблему. Я начал всерьез рассматривать возможность того, что данное построение работает только для $SO(3)$, но не для

алгебр Каца — Муди более общего вида. У меня не было никакой возможности узнать, решается ли эта задача в принципе, и если да, то можно ли прийти к решению, используя имеющиеся в нашем распоряжении инструменты. Мне оставалось только упорно трудиться и надеяться на лучшее.

Прошла неделя, и подошло время нашей очередной встречи с Фуксом. Я планировал продемонстрировать ему свои расчеты и попросить совета. Когда же я приехал на дачу, Фукс сказал, что его жене пришлось отправиться в Москву по каким-то срочным делам, и он должен присматривать за их двумя маленькими дочками.

— Но знаешь что, — продолжил Фукс, — вчера здесь был Фейгин, и он в полном восторге от того, что ты нам рассказал на прошлой неделе. Почему бы тебе не съездить к нему? До его дачи всего пятнадцать минут. Я предупредил его, что отправлю тебя к нему, так что он тебя ждет.

Он объяснил мне дорогу, и я пошел на дачу к Фейгину.

У Фейгина меня действительно ждали. Борис Львович тепло поприветствовал меня и познакомил со своей очаровательной женой Инной и тремя детьми: двумя бойкими мальчишками Ромой и Женей восьми и десяти лет и прелестной двухлетней дочуркой Лизой. Тогда я еще не знал, что с этой чудесной семьей меня на долгие годы свяжет самая теплая дружба.

Жена Фейгина предложила мне чашку чая и кусок пирога, и мы с ним устроились на веранде. Был прекрасный летний вечер, лучи солнца пробивались сквозь густую листву деревьев, щебетали птицы — настоящая идиллия. Однако, разумеется, наш разговор быстро перешел на построения Вакимото.

Фейгин признался, что он также немало времени посвятил размышлениям о них, и ход его мысли был аналогичен моему. С самого начала разговора мы то и дело заканчивали друг за друга предложения. Это было удивительно: он полностью понимал меня, а я — его.

Я принялся рассказывать о неудаче, которую потерпел при попытке распространить построение на другие алгебры Каца — Муди. Фейгин с большим вниманием выслушал меня, помолчал немного обдумывая проблему, и затем обратил мое внимание на одну важную вещь, которую я упустил. Один из шагов процесса обобщения построения Вакимото — это поиск подходящего

обобщения сферы — многообразия, на котором $SO(3)$ действует симметриями. В случае $SO(3)$ выбор, по сути, однозначен. Однако для других групп может существовать намного больше вариантов. В своих расчетах я исходил из того, что естественными обобщениями сферы являются так называемые проективные пространства. Я принимал это как должное. Но вполне возможно, что я ошибался; не исключено, что у меня ничего не получалось именно вследствие неправильного выбора пространств.

Как я уже объяснял выше, в конечном счете, мне нужно было вывернуть формулы «наизнанку». Все мое построение основывалось на ожидании, что каким-то чудесным образом формулы, которые получатся в результате выворачивания, останутся в силе. У Вакимото для простейшей группы $SO(3)$ все так и получилось. Мои расчеты показали, что для проективных пространств это не выполняется, и все же это не означало, что не существует другого, лучшего построения. Фейгин предложил мне попробовать рассмотреть так называемые флаговые многообразия.²

Флаговое многообразие для группы $SO(3)$ — это давно знакомая нам сфера, поэтому для других групп подобные пространства можно рассматривать как естественные заменители сферы. При этом флаговые многообразия богаче и разностороннее проективных пространств, так что можно было надеяться, что на них аналог построения Вакимото действительно сработает.

Темнело, и мне нужно было торопиться домой. Мы договорились встретиться еще раз через неделю, я попрощался с семьей Фейгина и пошел к железнодорожной станции.

На пути домой в пустом вагоне, сквозь открытые окна которого проникал теплый летний воздух, я продолжал размышлять о задаче. Я должен был попробовать решить ее — здесь и сейчас. Я вытащил ручку и блокнот и стал записывать формулы для простейшего флагового многообразия. Старый вагон электрички с шумом подпрыгивал на стыках рельсов и покачивался из стороны в сторону. Мне не удавалось держать ручку ровно, и формулы расплзались по всей странице — я и сам с трудом мог разобрать свои записи. Однако посреди всего этого хаоса явно зарождалась какая-то система. В отличие от проективных пространств, которые я безуспешно пытался укротить всю неделю до этого, с флаговыми многообразиями у меня действительно начало что-то вырисовываться.

Еще несколько строк расчетов, и... Эврика! Получилось! «Вывернутые наизнанку» формулы работали так же четко и стройно, как в статье Вакимото. Построение было обобщено самым изящным образом. Меня переполнила радость: у меня получилось! Я решил задачу, я нашел новые реализации алгебр Каца — Муди на свободном поле!

Следующим утром я тщательно проверил свои расчеты. Все сходилось. На даче у Фейгина не было телефона, поэтому я не мог позвонить ему и немедленно рассказать о своих находках. Для начала я изложил все в форме письма, и рассказал Фейгину о новых результатах на следующей неделе, когда мы встретились снова.

Так началась наша многолетняя совместная работа. Фейгин стал моим учителем, наставником, руководителем, другом. Поначалу я обращался к нему по имени и отчеству, Борис Львович. Но позже он настоял, чтобы я использовал более неформальное обращение — Боря.

В моей жизни мне невероятно повезло с учителями. Евгений Евгеньевич открыл мне красоту математики и помог мне влюбиться в нее. Он же научил меня основам. Фукс спас меня после катастрофы на вступительном экзамене в МГУ и обеспечил стремительный старт моей неуверенной до того момента математической карьеры. Он курировал меня на протяжении моего первого серьезного математического проекта, благодаря чему я поверил в свои силы, и подвел меня к восхитительной области исследований на стыке математики и физики. Наконец-то я был готов к большой игре. На этом этапе моего путешествия я не смог бы найти лучшего научного руководителя, чем Боря. Моя математическая карьера стала набирать обороты, словно подгоняемая мощью реактивного двигателя.

Без сомнения, Боря Фейгин — один из самых оригинальных и выдающихся математиков своего поколения во всем мире, провидец, обладающий врожденным чутьем к математике. Он стал моим проводником в удивительный мир современной математики, полный волшебной красоты и величественной гармонии.

Теперь, когда у меня появились свои ученики, я еще больше ценю все то, что для меня сделал Боря (а также Евгений Евгеньевич и Фукс до него). Учить других совсем непросто! Наверное, во многих отношениях это схоже с родительским опытом. Вам приходится многим жертвовать, ничего не прося взамен. Разумеется,

и награда может оказаться огромной! Однако как решить, какое направление указать студентам, когда стоит протянуть им руку помощи, а когда разумнее столкнуть их с лодки в озеро, чтобы научились выплывать самостоятельно? Это настоящее искусство. Никто не сможет научить этому.

Боря по-настоящему заботился обо мне и о моем развитии как математика. Он никогда не указывал мне, что делать, но общаясь с ним и учась у него, я всегда был уверен, в каком направлении следует двигаться дальше. Каким-то образом он делал так, что я всегда знал, чем надо заниматься. И, чувствуя, что он всегда рядом и всегда поддержит меня, я не сомневался, что выбрал правильный путь. Мне ужасно повезло, что моим учителем был такой потрясающий человек.

Начался осенний семестр 1987 года; это был мой четвертый год в Керосинке. Мне было девятнадцать, и моя жизнь никогда не была интересней и увлекательней. Я все так же жил в общежитии, встречался с друзьями, влюблялся... Но и не забывал об учебе. К тому времени я пропускал большинство занятий, а к экзаменам готовился самостоятельно (бывало и так, что за учебник я впервые брался всего лишь за пару дней до экзамена). По всем предметам у меня были только пятерки. Единственным исключением была четверка по марксистской политической экономии (позор мне).

Тот факт, что на самом деле у меня была «вторая жизнь» — математическая работа с Борей, занимавшая большую часть моего времени и требовавшая наибольших усилий, я от большинства людей в своем окружении скрывал.

Как правило, мы встречались с Борей дважды в неделю. Официально он занимал должность в Институте физики твердого тела, но там у него было не слишком много дел, поэтому ему было достаточно показываться в институте раз в неделю. В остальные дни он работал в квартире своей матери, до которой от его дома было десять минут пешком. До Керосинки и моего общежития было также недалеко. Это было наше традиционное место встречи. Я приходил поздним утром или сразу после полудня, и мы работали над нашими проектами, иногда засиживаясь до самой ночи. Мама Бори приходила с работы вечером и кормила нас ужином, и очень часто мы с Борей уходили вместе около девяти или десяти часов.

Первым делом мы составили краткую статью о наших результатах и отправили ее в журнал «Успехи математических наук».

Она была опубликована примерно через год — довольно быстро по стандартам математических журналов.³ Разобравшись с этим вопросом, мы сфокусировались на дальнейшей разработке нашего проекта. Мы использовали полученные результаты для того, чтобы лучше понять представления алгебр Каца — Муди. Также наша работа позволила нам обнаружить реализацию двумерных квантовых моделей на свободном поле. Благодаря этому мы получили возможность выполнять в этих моделях вычисления, которые ранее были абсолютно недоступны. Вследствие этого к нашим исследованиям вскоре начали проявлять интерес и ученые-физики.

Это было потрясающее время. В те дни, когда я не встречался с Борей, я работал самостоятельно — на неделе в Москве, а по выходным дома. Я продолжал посещать Научную библиотеку и заглатывал все больше и больше книг и статей. Математика была моей жизнью, моей пищей и водой. Я словно переселился в прекрасную параллельную Вселенную, и мне хотелось остаться там навсегда, погружаясь все глубже в этот сон. С каждым новым открытием, с каждой новой идеей этот волшебный мир становился мне все ближе и роднее.

Однако к осени 1988 года, когда начался пятый, последний год моего обучения в институте, мне пришлось вернуться к жестокой реальности. Я должен был задуматься о будущем. Несмотря на то что на курсе я был одним из лучших, перспективы меня ожидали совсем нерадостные. Антисемитизм царил не только в аспирантуре, но и во всех учреждениях, где выпускник мог бы получить хорошую работу. Усложняло дело еще и то, что у меня не было московской прописки. Близился день расплаты.

Глава 12. Древо знаний

Хотя прекрасно понимал, что мне не стоит питать ни малейшей надежды на карьеру в научном сообществе, я все же продолжал заниматься математикой. Марк Сол писал об этом в своей статье:¹

Что побуждало Эдика и других продолжать движение вперед, подобно лососю, упрямо стремящемуся против течения? Все говорило о том, что в своей профессиональной жизни они постоянно будут сталкиваться с проявлениями дискриминации — такими же, с какими им пришлось познакомиться на уровне университета. Зачем вопреки всему тратить столько сил на подготовку к профессии математика?

Я не ожидал получить взамен ничего, кроме чистой радости и азарта, которые дарует интеллектуальный труд. Мне хотелось посвятить свою жизнь математике, просто потому что мне нравилось заниматься ею.

Инертный строй советского государства не позволял молодым талантам проявлять свои способности в коммерции; частный сектор в экономике отсутствовал. Вся хозяйственная деятельность находилась под жестким контролем правительства. Точно так же коммунистическая идеология контролировала интеллектуальную деятельность в гуманитарной, экономической и социальной сферах. Каждая книга или учебная статья на эти темы должна была начинаться с цитат из Маркса, Энгельса и Ленина и недвусмысленно поддерживать марксистскую точку зрения на предмет. Единственным способом написать статью, скажем, по зарубежной философии был осудить в ней философов «реакционных буржуазных взглядов». Те же, кто не следовал этим строгим правилам, сами подвергались осуждению и преследованиям. Аналогичная ситуация наблюдалась в сферах искусства, музыки, литературы и кино. Все, что хотя бы отдаленно могло намекать на критику советского общества, политики или стиля жизни — либо попросту отступало от канонов «социалистического реализма», — без долгих рассуждений безжалостно вырезалось цензурой. Писате-

ли, композиторы и дирижеры, осмелившиеся следовать своему собственному творческому видению, подвергались запретам, а их работы отправлялись «в стол» или попросту уничтожались.

Развитие многих областей науки также зависело от линии партии. Например, генетика многие годы находилась под запретом, поскольку открытия ученых противоречили учению марксизма. Не пощадили даже лингвистику: после того как Сталин, считавший себя экспертом в этой области (как и во многих других), написал свое печально известное эссе «К некоторым вопросам языкознания», целый раздел науки был сведен к интерпретированию этого по большей части лишнего смысла трактата. Тех же, кто отказывался следовать «линии партии», подвергали репрессиям.

В такой обстановке математика и теоретическая физика были настоящими оазисами свободы. Несмотря на то что коммунистические аппаратчики стремились к тому, чтобы контролировать каждый аспект жизни общества, эти области оставались для них слишком сложными и абстрактными — они их попросту не понимали. Сталин, например, никогда не высказывался по поводу математики. В то же время советские лидеры понимали важность этих сложных и эзотерических областей науки для разработки ядерного оружия, поэтому не стремились их «прижучить». Математиков и теоретических физиков, которые работали над проектом атомной бомбы (необходимо заметить, что многие делали это против своей воли), терпели, а некоторых Большой Брат даже отмечал особой благодарностью.

Таким образом, с одной стороны, математика была абстрактной и недорогостоящей, а с другой — была полезна в областях, имевших для советских лидеров огромную ценность, в частности для «оборонки», которая обеспечивала существование режима. Вот почему математикам позволялось заниматься своими исследованиями, и на них не налагались ограничения, с которыми приходилось мириться специалистам в других научных сферах (разумеется, так продолжалось до тех пор, пока ученые не начинали вмешиваться в политику, как в случае с «Письмом девяноста девяти», о котором я упоминал ранее).

Мне кажется, что именно по этой причине многие талантливые молодые студенты выбирали для себя карьеру математика. В этой области они могли по-настоящему заниматься свободным интеллектуальным трудом.

Однако какую бы радость мне ни приносила математика и как бы я ее ни любил, мне нужно было найти работу. Поэтому параллельно с основными математическими исследованиями, которые я проводил в сотрудничестве с Борей в глубочайшем секрете от всех, мне приходилось заниматься и «официальной» исследовательской деятельностью в Керосинке.

Моим научным руководителем в Керосинке был Яков Исаевич Хургин, профессор факультета прикладной математики, один из самых харизматичных и наиболее почитаемых членов преподавательского состава. Бывшему ученику Гельфанда, Якову Исаевичу тогда было уже под семьдесят, и все же для нас он был едва ли не самым «крутым» профессором. Благодаря увлекательному стилю изложения и чувству юмора он неизменно собирал полные аудитории. Начиная с третьего курса я перестал ходить на большинство лекций, но, несмотря на это, посещение лекций Хургина по теории вероятностей и математической статистике считал для себя обязательным. На третьем году в институте мы стали работать с ним вместе.

Яков Исаевич всегда был очень добр ко мне. Он следил за тем, чтобы ко мне хорошо относились, и при необходимости всегда приходил на помощь. Например, когда у меня возникли проблемы в общежитии, он разрешил их, используя свои связи. Яков Исаевич был очень умным человеком, который хорошо понимал, как извлекать пользу из системы. Будучи евреем, он все же занимал в Керосинке престижную должность полного профессора и главы лаборатории, проводившей исследования в самых разных областях — от нефтеразведки до медицины.

Кроме того, он был популяризатором математики и автором нескольких получивших широкую известность книг о математике для неспециалистов. Мне особенно нравилась одна из них, под названием «Ну и что?». В ней он делится своим опытом сотрудничества с учеными, инженерами и врачами. Через диалоги с этими людьми он самым доступным и занимательным образом объясняет различные интересные математические концепции (в основном связанные с вероятностью и статистикой — его главными научными интересами) и рассказывает об областях их приложения. Название книги отражает любознательность ученого-математика, с которой тот подходит к любым проблемам реальной жизни. Эти книги и стремление Якова Исаевича сделать математические

концепции доступными для широкой публики были источником вдохновения для меня.

В течение многих лет Яков Исаевич сотрудничал с врачами, в основном урологами. Его интерес был продиктован личными мотивами. Сразу же после зачисления на Мехмат ему пришлось уйти на фронт — в разгаре была Великая Отечественная война. Там в холодных окопах у него развилось серьезное заболевание почек. Ему повезло — его быстро доставили в госпиталь, и это спасло ему жизнь. Большинство его однокашников, вместе с которыми он был призван в армию, погибли на войне. Однако проблемы с почками сопровождали его на протяжении всей жизни. В Советском Союзе медицина была бесплатной, но качество медицинского обслуживания было низким. Для того чтобы получить хорошее лечение, нужно было либо иметь связи с врачом, либо предложить ему взятку. Но Яков Исаевич мог предложить нечто более интересное, даже уникальное: свой опыт математика. Благодаря ему он подружился с лучшими московскими специалистами в области урологии.

Для него это была отличная сделка: стоило его почкам забарахлить, как на помощь ему приходили самые высококлассные специалисты лучшей больницы Москвы. И у врачей была своя выгода: Хургин помогал им анализировать медицинские данные, что зачастую позволяло обнаружить ранее незамеченные интересные явления. Яков Исаевич частенько говорил, что у врачей мышление хорошо адаптировано для анализа состояния отдельных пациентов и принятия индивидуальных решений. Однако из-за этого им подчас бывает сложно охватить всю картину в целом, и это затрудняет поиск общих схем и принципов. Здесь помощь математиков становится неоценимой, ведь мы мыслим совсем по-другому: нас специально учат отыскивать и анализировать подобные типы общих схем. Друзья Якова Исаевича из врачебной среды высоко это ценили.

Когда я стал его студентом, Яков Исаевич включил меня в свои медицинские проекты. Всего примерно за два с половиной года нашей совместной работы мы завершили три разных проекта по урологии. Три молодых врача-уролога использовали эти результаты в своих кандидатских диссертациях. Я стал соавтором публикаций в медицинских журналах и даже указан как соавтор в одном патенте.

Я очень хорошо помню, как начинал работать над первым проектом. Мы с Яковом Исаевичем отправились на встречу с молодым урологом Алексеем Великановым, сыном одного из корифеев урологии Москвы. Яков Исаевич был старым другом (и пациентом) старшего Великанова; тот и попросил Якова Исаевича помочь его сыну. Алексей показал нам огромный лист бумаги, содержащий разнообразные данные примерно о сотне пациентов. Всем им была сделана операция по удалению аденомы простаты (это доброкачественная опухоль простаты, часто встречающаяся у пожилых мужчин). Данные включали самые разные характеристики, такие как кровяное давление и результаты множества анализов, взятых до и после операции. Алексей надеялся с помощью этих данных сделать полезные выводы о том, при каких условиях операция обещает быть наиболее успешной. Это позволило бы ему сформулировать набор рекомендаций относительно того, в какой момент следует удалять опухоль.

Ему нужна была помощь с анализом всех этих данных, и он надеялся, что это будет нам под силу. Впоследствии я узнал, что такая ситуация очень типична. Врачи, инженеры и специалисты из многих других областей верят, что у математиков есть секретная волшебная палочка, позволяющая им быстро делать осмысленные выводы на основе любых предоставленных им данных. Разумеется, люди просто выдают желаемое за действительное. У нас есть мощные методы статистического анализа, но очень часто бывает так, что использовать их невозможно, потому что данные неточные или же принадлежат к разным типам: часть данных объективные, а часть субъективные (например, они описывают, как пациент «себя чувствует»); или же в одном и том же наборе количественные показатели, такие как кровяное давление и частота сердечных сокращений, смешаны с качественными, такими как ответы «да» и «нет» на определенные конкретные вопросы. Чрезвычайно сложно, если вообще возможно, использовать такие разнородные данные в одной статистической формуле.

В то же время иногда, задав правильные вопросы, можно понять, что часть данных вообще не относится к делу, и их можно безболезненно отбросить. Мой опыт показывает, что лишь около 10–15 процентов информации, собранной врачами, используется для постановки диагноза или выдачи рекомендаций по лечению. Однако если спросить врачей об этом напрямую, они никогда

в этом не признаются. Они будут настаивать, что все данные одинаково полезны и необходимы, и даже приводить примеры ситуаций, в которых вся эта информация могла бы им пригодиться. Вам придется затратить очень много сил и времени для того, чтобы убедить их в том, что в действительности они проигнорировали большую часть данных и приняли решение на основании небольшого набора наиболее существенных критериев.

Разумеется, иногда нам задавали вопросы, ответы на которые можно было найти, просто скормив данные какой-либо статистической программе. Однако, работая над подобными проектами, я постепенно пришел к осознанию того факта, что наша, математиков, польза заключается не в умении работать со статистическими программами (в конце концов, это совсем несложно и под силу каждому), а в способности формулировать правильные вопросы и находить верные ответы путем проведения точного и беспристрастного анализа. Именно наше «математическое мышление» придает нам наибольшую ценность в глазах тех, кого не учили думать как математик.

В моем первом проекте этот подход помог нам отбросить не-существенные данные и обнаружить некоторые нетривиальные взаимосвязи, или корреляции, между оставшимися параметрами. Сделать это оказалось непросто, и работа заняла несколько месяцев, но результаты нас очень порадовали. Мы описали свои находки в совместной статье, и Алексей использовал их в своей диссертации. Нас с Яковом Исаевичем и еще одним студентом Керосинки, Александром Лифшицем, пригласили на защиту диссертации. Александр, мой хороший друг, также работал вместе с нами над этим проектом.

Помню, во время защиты один из докторов попросил назвать компьютерную программу, с помощью которой удалось получить эти результаты, и Яков Исаевич ответил, что программа называется «Эдуард и Александр». Это было правдой: мы не использовали компьютер, а все вычисления выполняли вручную или на простейшем калькуляторе. Вычисления вовсе не были центром исследования (на самом деле это была самая простая его часть) — главное было задать правильные вопросы. Именитый хирург, присутствовавший на защите, отметил, что его чрезвычайно впечатлило использование математики на пользу медицине и что он уверен — выгода от применения математических методов в деле

анализа медицинских данных с годами будет лишь возрастать. Нашу работу хорошо приняли в медицинском сообществе, и Яков Исаевич остался доволен.

Вскоре после этого он попросил меня взяться за другой проект по урологии, на этот раз связанный с опухолями почек (для другой кандидатской диссертации). Этот проект я также завершил успешно.

Третий, и последний, мой медицинский проект оказался самым занимательным. Мы отлично сработались с молодым врачом Сергеем Арутюняном, которому также потребовался анализ данных для кандидатской диссертации. Сергей работал с пациентами, чья иммунная система отвергала донорские почки после пересадки. В подобной ситуации врачу приходится быстро принимать решение, стоит ли бороться за почку или же ее следует удалить. Это решение имеет важнейшие последствия: сохранение почки может привести к смерти пациента, а в случае ее удаления пациент снова попадает в очередь на трансплантацию, и неизвестно, как долго ему придется дожидаться нового донорского органа.

Сергею хотелось понять, основываясь на количественных данных ультразвуковой диагностики, какая из рекомендаций статистически более жизнеспособна. У него был большой опыт в этой области, и он собрал огромный объем данных. Он надеялся, что мы поможем ему проанализировать данные и выделить содержательные объективные критерии, на основе которых другие врачи смогут принимать обоснованные решения. Сергей сказал мне, что пока что никому не удалось этого сделать. Большинство врачей полагали, что это невозможно, и предпочитали принимать решение в зависимости от конкретной ситуации.

Я просмотрел данные. Как и в наших предыдущих проектах, они включали около сорока различных параметров, определенных для каждого пациента. Во время наших регулярных встреч я задавал Сергею целенаправленные вопросы, пытаюсь понять, какие из этих данных могут нам пригодиться, а какие нет. Но это было очень сложно. Как и другие врачи, в своих ответах он отталкивался от конкретных случаев, что не слишком нам помогало.

Я решил попробовать другой подход. Я подумал: «Этот человек каждый день принимает подобные решения и, очевидно, ему это хорошо удается. Как бы мне научиться “быть им”? Пусть я не знаком с медицинскими аспектами проблемы, но я мог бы изучить

методологию, лежащую в основе принятия решений, а затем на основе этого знания сформулировать набор правил».

Я предложил ему сыграть в игру.² Сергей собрал данные приблизительно по 270 пациентам. Я случайным образом выбрал данные по тридцати из них и отложил остальные. После этого я стал по очереди брать историю каждого из случайно выбранных пациентов, а Сергей, который находился в противоположном углу кабинета, должен был расспросить меня о нем. Ответы я давал исходя из информации, приведенной в истории болезни. Моей целью было понять, укладываются ли вопросы в какую-либо схему (даже если я, не будучи врачом, не мог до конца осмыслить их суть). Например, иногда Сергей задавал какой-то новый вопрос или те же вопросы, что и раньше, но в другом порядке. В таком случае я перебивал его: «В прошлый раз вы этого не спрашивали. Почему сейчас вы задали этот вопрос?»

Он объяснял: «Потому что у предыдущего пациента объем почки был таким-то и таким-то и это исключало подобный сценарий. Но у этого пациента показатели такие-то и такие-то, поэтому данный сценарий вполне возможен».

Я старательно записывал все объяснения и пытался как можно лучше усвоить эту информацию. Даже сегодня, спустя много лет, в моей памяти жива эта картина: Сергей сидит в кресле в углу своего кабинета, в задумчивости помахивая сигаретой (он был заядлым курильщиком). Меня завораживал процесс проникновения в его голову: я как будто разбирал пазл в попытке понять, как выглядели исходные фрагменты.

В ответах Сергея я нашел чрезвычайно полезную информацию. Для постановки диагноза ему никогда не приходилось задавать более трех или четырех вопросов. После этого я сравнивал его предположение с фактическими сведениями в карте пациента. Сергей всегда попадал в самую точку.

Рассмотрев пару десятков случаев, я уже и сам мог поставить диагноз, следуя простому набору правил, которые сформулировал на основе предыдущего опроса. Еще полдюжины карт — и я начал предсказывать результат почти с такой же точностью, что и Сергей. В действительности, в большинстве случаев он действовал по довольно простому алгоритму.

Конечно же, всегда найдутся несколько случаев, в которых алгоритм окажется бесполезным. Однако если врач будет способен

быстро и эффективно устанавливая пациенту диагноз в 90–95 процентах случаев, это уже будет огромным достижением. Сергей рассказывал, что в существующей литературе по ультразвуковой диагностике ничего подобного не описано.

По завершении нашей «игры» я вывел явный алгоритм, изображенный ниже в форме дерева принятия решений (рис. 12.1). От каждого узла дерева отходят два ребра, соединяющие его с двумя другими узлами уровнем ниже. От ответа на вопрос в первом узле зависит, по какому из ребер вы должны переместиться вниз. Например, первый вопрос относится к индексу периферического сопротивления (PR) кровеносных сосудов в трансплантате. Этот параметр Сергей сам придумал в ходе своего исследования. Если значение параметра превышает 0,79, это указывает на высокую вероятность отторжения почки, и, следовательно, пациент нуждается в срочной операции. В этом случае мы переходим к черному узлу справа. В противном случае мы переходим к узлу слева и задаем следующий вопрос: каков объем (V) почки? И так далее. Таким образом, информацию о каждом пациенте можно представить в виде определенного пути вниз по этому дереву. Каждый путь включает до четырех шагов (нам сейчас неважно, что обозначают оставшиеся два параметра, TP и MPI). Заключение определяется конечным узлом: черный узел означает «оперировать», а белый — «операция не требуется».

Я прогнал через этот алгоритм данные по оставшимся 240 пациентам. Уровень совпадения результатов оказался просто поразительным. Примерно в 95 процентах случаев мой алгоритм приводил к правильному диагнозу.

Алгоритм в самых простых терминах описывает ключевые точки мыслительного процесса врача, которому необходимо принять решение, а также явно демонстрирует параметры состояния пациента, имеющие наибольшее значение для постановки диагноза. Таких параметров оказалось всего четыре — сравните с первоначальным списком, включающим около сорока показателей. Например, алгоритм доказал значимость разработанного Сергеем индекса периферического сопротивления, который описывает поток крови через почку. То, что данный параметр играет настолько важную роль в процессе принятия решения, само по себе оказалось важным открытием. Все эти результаты могут быть использованы и в дальнейших исследованиях в этой области. Другие

врачи могли бы применять наш алгоритм при работе со своими пациентами и проведении своих обследований. Возможно, это помогло бы точнее настроить его и сделать более эффективным.

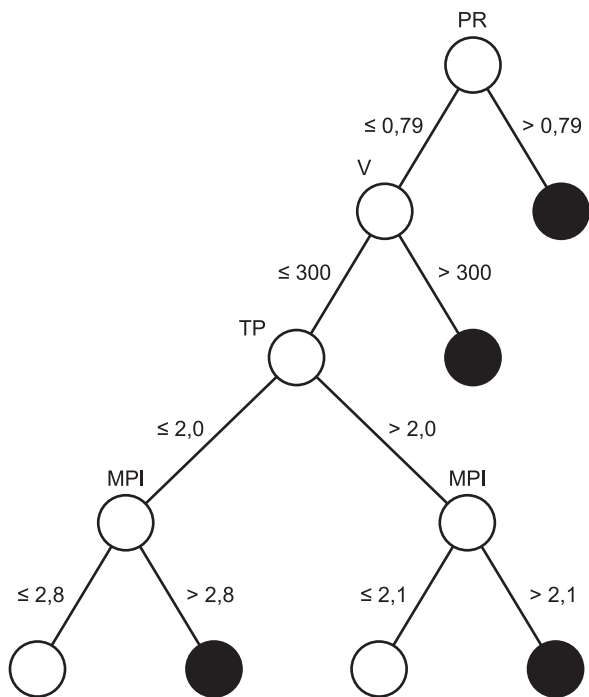


Рис. 12.1

Мы описали свои результаты в статье, которая легла в основу диссертации Сергея. Также мы подали заявку на патент, и годом позже она была одобрена.

Я был чрезвычайно горд нашими с Яковом Исаевичем достижениями, и Яков Исаевич гордился мной. Однако несмотря на сложившиеся между нами хорошие отношения, свою «вторую» математическую жизнь — работу с Фуксом и Фейгиным — я от него скрывал (впрочем, как и от большинства других людей). Как будто прикладная математика была моей супругой, а чистая математика — тайной любовницей.

Тем не менее, когда для меня настало время поиска работы, Яков Исаевич заверил меня, что попытается выбить мне место ассистента в своей лаборатории в Керосинке. Это позволило бы

мне на следующий год стать аспирантом и открыло бы дорогу к удачному трудоустройству в обозримом будущем. Это был великолепный план, но на пути к его осуществлению оставалось множество препятствий, среди которых было и то, о чем моего отца предупреждали в Керосинке еще до моего поступления, — что мне в очередной раз придется столкнуться с проявлениями антисемитизма.

Конечно же, Якову Исаевичу все это было хорошо известно. Он работал в Керосинке несколько десятилетий и прекрасно знал, как работает система. Сам он попал в институт по личному приглашению ректора Виноградова, о котором был самого высокого мнения.

Вопрос же о моем назначении решался бы, конечно, не самим Виноградовым, а чиновниками среднего звена. А эти товарищи прилагали максимум усилий для того, чтобы закрыть все двери перед теми, чья фамилия напоминала еврейскую. Однако Яков Исаевич знал, как обойти систему. В начале весеннего семестра моего последнего года в Керосинке, когда стало ясно, что вопрос о работе нужно решать безотлагательно, он напечатал приказ о назначении меня сотрудником его лаборатории. Он всегда носил эту бумагу в своем портфеле, чтобы, выпади ему шанс поговорить обо мне лично с Виноградовым, быть во всеоружии.

Такая возможность скоро представилась. Однажды он столкнулся с Виноградовым у входа в Керосинку. Виноградов обрадовался этой встрече:

— Как поживаете, Яков Исаевич?

— Ужасно, — хмуро ответил тот (из него получился бы неплохой актер).

— Что случилось?

— В нашей лаборатории мы делали такие потрясающие вещи, но больше нам это не удастся. Мне нужны молодые таланты. И в этом году у меня на выпускном курсе есть один прекрасный студент, но взять его не получается.

Вероятно, Виноградову захотелось продемонстрировать Якову Исаевичу, кто хозяин положения, — а это и было тайной целью моего научного руководителя, — поэтому он сказал:

— Не беспокойтесь, я об этом позабочусь.

Тут Яков Исаевич вытащил приказ о моем назначении, и Виноградову ничего не оставалось, кроме как подписать его.

Обычная процедура предполагала, что до того как попасть на стол к Виноградову, приказ должен быть подписан десятком других людей: главами комсомольской организации и представителями коммунистической партии, а также чиновниками всех мастей. Определенно, они нашли бы способ затормозить процесс до такой степени, чтобы мы никогда не дождались ответа. Однако теперь на бумаге стояла подпись самого Виноградова! Разве они могли что-нибудь этому противопоставить? Виноградов был хозяином положения, и никто не смел ему перечить. Конечно, они придирались к разным мелочам и им удавалось ненадолго приостанавливать процесс, но, в конечном счете, им все равно приходилось сдаваться и подписывать приказ, стиснув зубы и кипя от негодования. Видели бы вы их лица, когда они видели подпись Виноградова внизу приказа! Яков Исаевич обыграл систему блестящим образом.

Глава 13. Гарвард зовет

Посреди всего этого стресса и неопределенности в марте 1989 года из Соединенных Штатов Америки приходит письмо на печатном бланке Гарвардского университета.

Уважаемый доктор Френкель,

На основании рекомендаций факультета математики я хотел бы пригласить вас посетить Гарвардский университет осенью 1989 года в качестве получателя почетной стипендии Гарварда.

С уважением, Дерек Бок,
Президент Гарвардского университета

Раньше мне уже доводилось слышать о Гарвардском университете, но, должен признаться, в то время я не понимал его значимости в научном мире. Тем не менее я был очень польщен. Приглашение в Америку в качестве лауреата стипендии было для меня большой честью. Президент университета лично написал мне! И он обратился ко мне «доктор», хотя я даже еще не получил высшего образования (шел последний семестр моего обучения в Керосинке).

Как это произошло? Весть о нашей с Борей работе распространилась по всему миру. Краткое изложение наших результатов уже было опубликовано, и мы заканчивали работу над тремя длинными статьями (все на английском). Шведский физик Ларс Бринк во время своего визита в Москву попросил у нас разрешения опубликовать один из них в сборнике статей, который должен был выйти под его редакцией. Мы дали ему нашу статью, а также попросили сделать около двадцати его копий и разослать зарубежным математикам и физикам, которые, как мы полагали, могли заинтересоваться нашей работой. Я взял адреса из опубликованных статей, которые можно было найти в Московской научной библиотеке, и дал этот список Ларсу. Он любезно согласился помочь, так как понимал, насколько сложно было бы нам самим разослать нашу статью по всему миру. В результате наша статья

получила широкую известность, в частности благодаря возможностям приложений в области квантовой физики.

Об Интернете тогда еще не слышали, однако существовавшая в то время система распространения научной литературы работала довольно эффективно: еще до официальной публикации авторы рассылали перепечатанные рукописи своих статей (они назывались препринтами). Получатели часто копировали эти статьи и отправляли их дальше своим коллегам, а также в университетские библиотеки. Те двадцать или около того человек, которым Ларс Бринк переслал нашу статью, вероятно, сделали именно это.

Тем временем в Советском Союзе настало время огромных перемен: Михаил Горбачев запустил программу перестройки. Одним из результатов этого стала возможность свободно выезжать за границу. И до этого математикам, таким как Фейгин и Фукс, приходило множество приглашений посетить конференции и университеты на Западе, но они не могли ими воспользоваться, так как зарубежные поездки строго регламентировались правительством. Прежде чем обращаться за обычной въездной визой в другую страну, советскому гражданину нужно было получить выездную визу, то есть документ, позволяющий ему покинуть пределы Советского Союза. Таких виз выдавали очень мало из-за опасения, что люди попросту не станут возвращаться (и, действительно, многие из тех, кому удавалось выбить себе поездку в другую страну, оставались там навсегда). Почти все запросы отклонялись, чаще всего по надуманным причинам. Фукс как-то сказал мне, что прошло уже много лет с тех пор, как он прекратил свои попытки.

Однако совершенно неожиданно осенью 1988 года несколькими ученым, в том числе Гельфанду, разрешили выехать за границу. Также поездка в Соединенные Штаты была запланирована у талантливого молодого математика и Бориного друга Саши Бейлинсона. Он собирался посетить своего бывшего соавтора Иосифа Бернштейна, эмигрировавшего несколькими годами ранее, который теперь занимал должность профессора в Гарварде.

Западные ученые также замечали происходящие изменения и старались не упустить возможность заполнить стипендиатов из Советского Союза. Одним из таких ученых был Артур Джаффе, известный математик и физик, в то время занимавший должность декана факультета математики в Гарварде. Он принял решение

открыть новые места для приглашенных профессоров — как раз с прицелом на талантливых математиков из России. Когда Гельфанд, который был почетным доктором Гарварда, прибыл в университет с визитом в 1988 году, Джаффе прибегнул к его помощи, чтобы убедить президента Дерека Бока, с которым Гельфанд был лично знаком, предоставить для этой программы финансирование и поддержку (частично финансирование также предоставлялось Лэндоном Клэем, который впоследствии организовал Математический институт Клэя). Джаффе дал программе название «Почетная стипендия Гарварда».

Когда с организационными вопросами было покончено, встал вопрос, кого же именно следует пригласить, и Джаффе обратился за рекомендациями к знакомым математикам. Очевидно, мое имя было названо несколькими из них (включая Бейлинсона), и это стало причиной, почему я оказался среди четырех первых приглашенных стипендиатов.

Вскоре после письма от президента Бока пришло еще одно, на этот раз от самого Джаффе, в котором тот подробно описывал условия предоставления стипендии. Я мог приехать на срок от трех до пяти месяцев; я буду занимать должность приглашенного профессора, но единственным формальным обязательством будет прочесть несколько лекций о моей работе; Гарвард оплатит мой перелет, проживание и текущие расходы. По сути, единственным, о чем мне нужно было позаботиться самостоятельно, была выездная виза. К счастью и к огромному моему удивлению, я получил ее всего лишь через месяц.

В своем письме Артур Джаффе писал, что я могу приехать в любой момент начиная с конца августа и остаться до конца января, однако я решил, что пробуду в Америке три месяца — минимальный срок, указанный в приглашении. Почему? У меня не было намерения эмигрировать в США — я планировал вернуться домой. Кроме того, меня не оставляло чувство вины из-за необходимости временно оставить в Керосинке должность, которую с таким трудом удалось выбить для меня Якову Исаевичу.

Когда я наконец получил выездную визу и последние сомнения в том, что эта поездка реальна, развеялись, настало время идти к Якову Исаевичу с повинной. Я рассказал ему о своих «похождениях на стороне»: математической работе с Фейгиным и приглашении из Гарварда. Разумеется, Яков Исаевич был чрезвычайно

удивлен. Он был уверен в том, что я все свои силы и время отдаю нашим совместным медицинским проектам. Первая его реакция была резко отрицательной:

— А кто будет работать в моей лаборатории, если ты уедешь в Гарвард? — спросил он.

Однако тут на помощь мне пришла жена Якова Исаевича Татьяна Алексеевна — она всегда относилась ко мне очень хорошо и тепло принимала в своем доме.

— Яша, ты говоришь глупости, — сказала она. — Мальчика пригласили в Гарвард. Это отличная новость! Конечно же, он должен ехать, а когда вернется, продолжит работать с тобой.

Яков Исаевич неохотно согласился.

Лето пролетело незаметно, и вот настал день моего отъезда, 15 сентября 1989 года. Из Москвы я отправился в аэропорт имени Джона Кеннеди в Нью-Йорке, а там пересел на рейс до Бостона. Джаффе не мог лично встретить меня и отправил в аэропорт одного из своих аспирантов. Меня привезли в квартиру с двумя спальнями, которую факультет математики снял для меня и еще одного стипендиата Гарварда Николая Решетихина (он должен был приехать несколькими днями позже). Квартира находилась в принадлежащем Гарварду жилом комплексе, располагавшемся менее чем в десяти минутах ходьбы от Гарвардской площади. Все здесь казалось необычным и восхитительным.

До квартиры я добрался уже поздно ночью. Разница во времени давала о себе знать, я был совершенно без сил и отправился спать. Следующим утром я сходил на фермерский рынок неподалеку и купил кое-какие продукты. Однако дома, начав резать салат, я понял, что у меня нет соли. В квартире не оказалось никаких запасов, и мне пришлось есть салат несоленым.

Как только я закончил свою трапезу, в дверь позвонили. Это оказался Артур Джаффе. Он предложил мне совершить небольшую ознакомительную экскурсию на его автомобиле. С ума сойти — двадцатидвухлетнего студента возит по городу декан математического факультета Гарварда! Я посмотрел Гарвард и его окрестности, реку Чарльз, красивые соборы и небоскребы в центре Бостона. Погода была великолепная, и город произвел на меня огромное впечатление.

На пути домой после двухчасовой прогулки я сказал Артуру, что мне нужно купить соли, и он ответил: «Без проблем, заедем в супермаркет поблизости».

Мы подъехали к огромному магазину; Артур сказал, что пождет меня в машине.

Я впервые в своей жизни оказался в супермаркете, и это было незабываемое впечатление. В то время в России уже начались перебои с продуктами. В моем родном городе, Коломне, можно было купить лишь хлеб да молоко, а из овощей и фруктов была только картошка. За остальными продуктами нужно было ехать в Москву, но даже там пределом мечтаний оставались низкокачественные колбаса и сыр. Каждые выходные, приезжая домой из Москвы, я привозил своим родителям немного продуктов. Теперь же, глядя на бесконечные проходы супермаркета, набитые всевозможными товарами, я просто не мог поверить своим глазам.

Но как же здесь вообще можно что-нибудь найти? Я начал обходить проход за проходом в поисках соли, но обнаружить мне ее не удалось. Наверное, у меня случилось легкое помутнение сознания от обилия еды и прочих товаров, но висящие над головой указатели я не замечал. Я обратился к какому-то человеку с вопросом, где найти соль, но не смог понять ни слова в его ответе. Мой английский был достаточно хорош для того, чтобы прочитать лекцию по математике, но я совершенно не умел вести повседневные разговоры на бытовые темы. Сильный бостонский акцент также не облегчал понимание.

По прошествии получаса я уже начал впадать в отчаяние. Я потерялся в Star Market, как в гигантском лабиринте! Наконец, мне на глаза попала пачка соли, ароматизированной чесноком. «Сойдет и такая, — сказал я сам себе. — Надо выбираться отсюда». Я оплатил покупку и вышел из магазина. Бедный Артур не находил себе места от беспокойства — что можно было делать в супермаркете целых сорок пять минут? — и уже собирался отправиться на мои поиски.

«Ну вот, окунулся в капиталистическое изобилие», — подумал я.

Моя адаптация к Америке началась.

Осенью должны были приехать еще два получателя почетной стипендии Гарварда: Николай Решетихин, с которым мы жили в одной квартире (он прибыл неделей позже) и Борис Цыган.* Оба были на десять лет меня старше и уже внесли значительный

* Четвертый стипендиат, Вера Серганова, приехала весной.

вклад в развитие математики. Я слышал об их работах, но лично с ними никогда не встречался. За время первого семестра мы очень сблизились и стали близкими друзьями на всю жизнь.

Николай приехал из Санкт-Петербурга. Уже тогда он был известен как один из открывателей так называемых квантовых групп, представляющих собой обобщение обычных групп. Точнее, под квантовыми группами понимаются определенные деформации групп Ли — математических объектов, о которых мы говорили выше. Сегодня квантовые группы повсеместно встречаются в самых разных областях математики и физики; они настолько же вездесущи, как уже знакомые вам группы Ли. Например, Коля с еще одним математиком, Владимиром Тураевым, использовали квантовые группы для построения инвариантов узлов и трехмерных многообразий.

Боря Цыган, родом из Киева, в течение долгого времени сотрудничал с моим учителем Борисом Фейгиным. Будучи всего лишь зеленым выпускником вуза, он сформулировал гениальную идею, которая в итоге привела к важнейшему прорыву в области «некоммутативной геометрии». Ему, как и другим математикам-евреям, дорога в аспирантуру была закрыта, поэтому по окончании университета он вынужден был пойти работать на киевский завод по производству тяжелого оборудования. Весь день ему приходилось проводить в окружении больших шумных машин. И все же даже в таких далеких от идеала условиях он сумел сделать потрясающее открытие.

Люди часто думают, что математики работают в стерильных условиях, сидя в тишине и спокойствии в чистом офисе, глядя на экран компьютера или рассматривая потолок. Однако в действительности лучшие идеи чаще всего приходят в самых неожиданных ситуациях, возможно даже прорываясь сквозь промышленные шумы.

Прогуливаясь по гарвардскому двору, разглядывая старомодную архитектуру кирпичных зданий, памятник Гарварду, шпили старинных соборов, я не мог не почувствовать исключительный дух этого места, пропитанный многолетними традициями стремления к знанию и бесконечным очарованием научных открытий.

Факультет математики Гарварда располагался в Научном центре — современном здании неподалеку от Гарвардского сада. Здание производило впечатление гигантского космического корабля

пришельцев, которые случайно приземлились в Кембридже, штат Массачусетс, и решили остаться здесь навсегда. Математическому факультету отводились три этажа. Кабинеты чередовались с зонами общего пользования, где были установлены кофейные автоматы и можно было устроиться на удобных диванах. Также здесь были своя тщательно подобранная математическая библиотека и даже стол для настольного тенниса. Все это создавало уютную домашнюю атмосферу. В любое время, даже поздней ночью, на факультете можно было встретить множество людей, молодых и пожилых, — они работали, читали в библиотеке, нервно мерили шагами коридоры, оживленно что-то обсуждали, а кто-то дремал на кушетке... В этом месте хотелось остаться навсегда! (И, казалось, некоторые на самом деле никогда не покидали пределов факультета.)

По сравнению с другими факультетами математический считался довольно маленьким: не больше пятнадцати постоянных профессоров и около десяти научных сотрудников, занимающих преподавательские должности по трехлетнему контракту после защиты диссертации. В то время преподавательский состав факультета включал такие громкие имена из мира математики, как Иосиф Бернштейн, Рауль Ботт, Дик Гросс, Хэйсукэ Хиронака, Давид Каждан, Барри Мазур, Джон Тейт и Шинтан Яу. Возможность познакомиться с ними и поучиться у них — это был шанс, выпадающий раз в жизни. Я до сих пор с улыбкой вспоминаю, как Рауль Ботт, харизматичный и дружелюбный седовласый гигант, которому тогда было уже под семьдесят, преградив мне дорогу, хватал меня за руку и громогласно вопрошал: «Ну как дела, молодой человек?»

Также на факультете числилось около тридцати аспирантов, каждому из которых для работы была отведена крошечная отгороженная кабинка на среднем этаже.

Троих россиян — Колю, Борю и меня — тепло принимали все члены факультета. Волна российских ученых, хлынувшая в американские университеты в последующие годы, тогда только начинала подниматься, и гости из Советского Союза пока что были в диковинку. Мне хватило всего лишь недели, чтобы полностью освоиться в Кембридже. Я чувствовал себя как дома — все было совершенно естественно, привычно и очень-очень здорово. Я приобрел крутейшие джинсы и плеер Sony (не забывайте, шел

1989 год!) и гулял по городу в наушниках, слушая самую модную музыку. Со стороны я казался самым обычным студентом двадцати одного года от роду. Мой разговорный английский, правда, пока еще оставлял желать лучшего. Для того чтобы подтянуть его, я ежедневно покупал газету *The New York Times* и читал ее со словарем, затрачивая на это не меньше часа в день (и знакомясь с самыми заумными английскими словами, какие только можно придумать). Также я пристрастился к ночному телевидению.

Шоу Дэвида Леттермана (в то время оно начиналось в 12:35 по NBC) стало моим любимым. Включив его в первый раз, я не смог разобрать ни слова. Но каким-то образом я сразу почувствовал, что это *мое* шоу и что я буду с удовольствием смотреть его — нужно только научиться понимать речь ведущего. Это стало для меня дополнительной мотивацией. Я упрямо включал шоу ночь за ночью и постепенно начал понимать шутки, контекст, подоплеку. Через это шоу я открывал для себя американскую поп-культуру, жадно впитывая все ее аспекты и проявления. В те дни, когда мне нужно было пораньше лечь спать, я записывал шоу на видеокассету и просматривал утром за завтраком. Просмотр шоу Леттермана стал для меня чем-то вроде религиозного ритуала.

Хотя у стипендиатов не было никаких формальных обязательств, каждый день мы приходили на факультет, чтобы продолжать работу над нашими проектами, общаться с людьми и посещать семинары, коих там предлагалось великое множество. Два профессора, с которыми я беседовал чаще всего, были эмигрантами из России: Иосиф Бернштейн и Давид Каждан. Великолепные математики, бывшие ученики Гельфанда, близко дружившие между собой, они были совершенно не похожи друг на друга и обладали абсолютно противоположными темпераментами.

Иосиф — тихий, скромный человек. Если задать ему вопрос, он внимательно вас выслушает, подумает, а затем, скорее всего, скажет, что не знает точного ответа, но может поделиться своими мыслями на эту тему. Его объяснения всегда исключительно просты и понятны и зачастую содержат подробнейшие ответы на те самые вопросы, от которых он только что отрещивался. Беседы с ним всегда вселяли в меня веру в то, что для того, чтобы разобратся во всех этих далеко не простых вещах, вовсе не нужно быть гением — очень вдохновляющее ощущение для честолюбивого молодого математика.

Давид же, напротив, — это настоящий ураган: чрезвычайно энергичный, остроумный и находчивый. Энциклопедическими познаниями, щегольским стилем и нередкими проявлениями нетерпеливости он напоминает своего учителя, Гельфанда. Если на семинаре ему покажется, что докладчик недостаточно качественно объясняет материал, он запросто может выйти к доске, вырвать мел из рук выступающего и занять его место — конечно же, при условии, что эта тема ему интересна. В противном случае он будет спокойно дремать на своем месте. Фразу «я не знаю» от него услышать практически невозможно, и, действительно, создается впечатление, что он знает обо всем на свете. За годы нашего знакомства я провел немало часов в беседах с ним и многому научился. Впоследствии мы даже поучаствовали в совместном проекте, и это стало весьма полезным опытом для меня.

Еще одна судьбоносная встреча произошла на вторую неделю моего пребывания в Гарварде. Помимо Гарварда, в Кембридже есть еще одно, менее известное учебное заведение, для обозначения которого чаще всего используют аббревиатуру... МИТ (я шучу, конечно же!). Между Гарвардом и Массачусетским технологическим институтом всегда существовало серьезное соперничество, но на самом деле математические факультеты этих двух школ тесно связаны между собой. Так, например, нет ничего необычного в том, что научным руководителем гарвардского студента становится профессор из МИТ, и наоборот. Независимо от того, к какой школе они принадлежат, студенты часто посещают лекции, предлагаемые обоими учебными заведениями.

Саша Бейлинсон, друг и соавтор Бори Фейгина, получил должность профессора в МИТ, и я ходил на его лекции в этом институте. На самой первой лекции кто-то указал мне на статного мужчину лет сорока с небольшим, сидевшего за пару рядов от меня: «Это Виктор Кац». Невероятно! Это же сам создатель алгебр Каца — Муди и множества других вещей, работы которого я внимательно изучал вот уже несколько лет.

Нас представили друг другу после лекции. Виктор тепло поприветствовал меня и сказал, что ему было бы интересно поближе познакомиться с моими исследованиями. Я был чрезвычайно польщен, когда он пригласил меня выступить на своем еженедельном семинаре. Все закончилось тем, что я прочитал целых три доклада на его семинаре — три пятницы подряд. Это были

мои первые семинары на английском языке, и, думаю, я неплохо выступил: аудитория была заполнена, меня с интересом слушали и задавали много разных вопросов.

Виктор взял меня под свое крыло. Мы часто встречались в его просторном кабинете в MIT и беседовали о математике; а также он часто приглашал меня к себе домой поужинать. Позднее мы вместе написали несколько статей.

Примерно через месяц после моего приезда в Кембридж туда приехал и Боря Фейгин. Саша Бейлинсон отправил ему двухмесячное приглашение в MIT. Я был счастлив встретиться с Борей в Кембридже: он был не только моим учителем — мы к тому времени стали близкими друзьями. Кроме того, мы находились в процессе работы над несколькими математическими проектами, и это была отличная возможность продолжить трудиться над ними. Тогда я еще не знал, что его приезд перевернет мою жизнь с ног на голову.

Новость о том, что двери на Запад теперь открыты и что математики получили возможность свободно посещать университеты Соединенных Штатов, а также любых других стран, быстро распространилась в московском математическом сообществе. Многие решили использовать этот удобный момент для того, чтобы навсегда перебраться в Америку. Они рассылали заявления в различные университеты и звонили своим коллегам в Штатах, рассказывая о том, что ищут работу. Поскольку никто не мог предсказать, как долго будет действовать эта политика «открытости» (люди ожидали, что через несколько месяцев границы снова закроют), атмосфера в Москве царил лихорадочная — все разговоры сводились к одному и тому же вопросу: «Как удачнее отсюда выбраться?»

Да и могло ли быть иначе? Большинству из этих людей пришлось мириться с антисемитизмом и различными другими сложностями жизни в Советском Союзе. Они не могли устроиться на хорошую научную должность, поэтому математикой занимались в свободное время. Кроме того, несмотря на то что математическое сообщество в Советском Союзе было очень сильным, оно по большей части было изолировано от остального мира. Запад предлагал великолепные возможности для профессионального роста, которых в Советском Союзе попросту не было. Как можно было ожидать от этих людей преданности стране, которая отвергала их, запрещала работать в области, которую они искренне любили,

когда перспективы лучшей жизни за границей были настолько очевидны?

Прибыв в США, Боря Фейгин сразу же понял, что грядет великая «утечка мозгов» и ничто не в состоянии будет ее остановить. Советская экономика разваливалась, повсеместно наблюдался дефицит продуктов, а политическая ситуация становилась все более нестабильной. Качество жизни в Америке было намного выше, полки магазинов изобиловали товарами, и жизнь ученых казалась приятной и комфортной. Контраст был разителен! Попробуй, убеди человека, на себе испытавшего все прелести западной жизни, вернуться обратно в Советский Союз! Бегство подавляющего большинства ведущих российских математиков — да и людей любых других профессий, способных найти себе работу, — казалось неизбежным, и, судя по всем признакам, это должно было произойти очень быстро.

Тем не менее Боря принял решение вернуться в Москву, несмотря на то что всю жизнь ему приходилось бороться с проявлениями антисемитизма, и никаких иллюзий относительно ситуации в Советском Союзе он не питал. Ему удалось поступить в Московский университет (в 1969 году, когда он подавал заявление, некоторым студентам-евреям еще удавалось туда пробиться), но защитить кандидатскую диссертацию в Москве ему не позволили. Для этого ему пришлось подать документы в университет Ярославля. Потом он долго и безуспешно искал работу, пока наконец не сумел получить место в Институте физики твердого тела. И все же Боре не по душе был этот массовый исход. Ему казалось, что это неправильно с точки зрения морали — скопом покидать Россию в момент великих перемен, как крысы, бегущие с тонущего корабля.

Борю чрезвычайно печалил тот факт, что великая московская математическая школа вскоре прекратит свое существование. Тесно спаянное сообщество математиков, частью которого он был так много лет, распадалось на глазах. Он понимал, что скоро останется в Москве практически в одиночестве и будет лишен главной радости в жизни — возможности заниматься математикой вместе с друзьями и коллегами.

Естественно, это стало одной из главных тем наших с Борей разговоров. Он убеждал меня, что я должен вернуться, что не следует поддаваться массовой истерии, захватившей людей, всеми силами пытающихся сбежать на Запад. Кроме того, он беспокоился, что

у меня не получится стать хорошим математиком в американском «обществе потребления», способном, по его мнению, задушить мотивацию и трудовую этику любого человека.

— Послушай, у тебя есть талант, — говорил он мне, — но его нужно развивать. Ты должен старательно работать — так, как ты работал в Москве. Только тогда ты сможешь реализовать свой потенциал. Здесь, в Америке, это невозможно. Слишком много искушений, слишком много отвлекающих факторов. Здесь жизнь — это сплошное веселье, люди гонятся за удовольствиями и немедленным вознаграждением. Как можно в такой атмосфере сосредоточиться на работе?

Однако я не разделял его убеждения — по крайней мере, не полностью. Я знал, что у меня есть огромный стимул заниматься математикой. Но мне был всего двадцать один год, а Боря, старше меня на пятнадцать лет, был моим наставником. Я был обязан ему всем, чего сумел достичь как математик. Его слова заставили меня задуматься: а что, если он прав?

Приглашение в Гарвард стало поворотным моментом в моей жизни. Всего лишь за пять лет до этого меня «потопили» на экзамене в МГУ, и казалось, что моей мечте стать математиком не суждено сбыться. Приезд в Гарвард стал своеобразным реваншем, вознаграждением за усердный труд, которому я посвятил эти пять лет в Москве. Однако мне хотелось двигаться дальше, совершать новые открытия. Как математик я хотел взойти на самую высокую ступень. Приглашение в Гарвард было для меня всего лишь очередным этапом длинного путешествия. Несомненно, это был огромный шаг вперед: Артур Джаффе и другие поверили в меня и подарили мне эту возможность. Я не имел права подводить их.

В Кембридже мне посчастливилось заручиться поддержкой великолепных математиков, таких как Виктор Кац, которые поддерживали меня и оказывали мне всестороннюю помощь. Но я не мог не ощущать зависть со стороны некоторых моих коллег: с чего это на такого юнца сваливается столько благ? Что он сделал, чтобы заслужить их? Я чувствовал, что обязан исполнить свое обещание, доказать всем, что мои первые математические работы не были случайной удачей и что я способен на куда более значительные свершения в математике.

Математическое сообщество невелико, и, как и все остальные люди, математики перебивают друг друга косточки, обсуждая,

кто чего стоит. За тот недолгий период, что я пребывал в Гарварде, я наслушался достаточно историй о звездах, которые ярко зажигались, но очень быстро сгорали. Мне доводилось слышать безжалостные ремарки о некоторых дарованиях: «Помнишь такого-то? Его первые работы были хороши. Но все то, что он делал в последние три года, и близко к ним не стоит. Вот бедняга!»

Меня ужасала мысль о том, что через три года так могли начать говорить обо мне, и я постоянно ощущал на себе этот стресс. Я должен был творить и добиваться успеха.

Тем временем экономическая ситуация в Советском Союзе стремительно ухудшалась, и будущее страны представлялось весьма туманным. Наблюдая все это изнутри и не сомневаясь, что для меня в Советском Союзе перспектив нет, мои родители стали регулярно звонить мне в Штаты, уговаривая *не* возвращаться. Тогда дозвониться в США из Советского Союза было чрезвычайно трудно (и дорого); к тому же родители опасались, что домашний телефон прослушивается. Они ездили на центральный почтамт в Москву, чтобы воспользоваться общественным таксофоном, и такая поездка занимала почти целый день. Конечно же, они ужасно по мне скучали, и все же не оставляли намерения убедить меня остаться в Штатах. Они были абсолютно уверены, что так для меня будет лучше.

Боря также руководствовался моими интересами, но для него была чрезвычайно важна моральная основа любых поступков. Он упрямо шел против течения, и я восхищался этой его способностью. Однако при этом я был вынужден признать, что Боря мог позволить себе подобный «протест» благодаря относительно комфортной ситуации, сложившейся для него в Москве (тогда никто еще не представлял, что эта ситуация вскоре изменится, и для того чтобы обеспечить семью, ему придется проводить по несколько месяцев в году за границей, в основном в Японии). Моя же ситуация была совершенно иной: в Москве мне негде было жить, и у меня была лишь временная московская прописка. Яков Исаевич обеспечил мне временную должность в качестве своего ассистента в Керосинке, но зарплата там полагалась настолько мизерная, что ее едва хватило бы на аренду комнаты в Москве. Из-за антисемитских настроений поступление в аспирантуру превратилось бы для меня в нескончаемую битву, а перспектив на будущее трудоустройство особо не было.

В конце ноября Артур Джаффе вызвал меня в свой офис и предложил продлить приглашение на пребывание в Гарварде до конца мая. Я должен был быстро принять решение, но меня разрывало на части. Мне нравилась жизнь в Бостоне. Я чувствовал, что это мой город. Гарвард и МИТ делали Кембридж одним из главных математических центров планеты. Там работали математики с мировым именем, и я мог запросто обратиться к ним, задать вопрос, узнать что-то новое. Также там проводилось множество семинаров, на которых обо всех потрясающих открытиях рассказывали практически сразу же после того, как они совершались. Меня окружали талантливейшие студенты. Это было самое плодотворное окружение для молодого целеустремленного математика, какое только можно себе представить. Когда-то и Москва была таким местом, но теперь все изменилось.

В то же время я впервые так надолго уехал из дома. Я скучал по семье и друзьям. А Боря, мой учитель, самый близкий мне в Кембридже человек, настаивал на том, что мне следует вернуться на родину в декабре, как и планировалось с самого начала.

Каждое утро я просыпался в панике с одной мыслью: «Как же мне поступить?». Сегодня, оглядываясь назад, я понимаю, что ответ был очевиден. Но тогда принять решение было совсем не просто — слишком много обстоятельств нужно было учесть. Наконец, после мучительных раздумий, я решил последовать совету родителей и остаться. Я сообщил об этом Джаффе. Мои друзья Решетихин и Цыган поступили так же.

Боря был недоволен происходящим, и меня не оставляло ощущение, что я его предал. Когда в середине декабря я провожал его на рейс в Москву в аэропорту Логан, было ощущение печали и неопределенности. Мы не знали, что каждому из нас уготовано, не знали даже, когда сможем встретиться в очередной раз. Я не последовал совету Бори. Но я боялся, что его опасения сбудутся.

Глава 14. Сплетаая пучки мудрости

Весенний семестр принес Гарварду новых гостей, один из которых, Владимир Дринфельд, изменил направление не только моего исследования, но и всей моей математической карьеры. И все это произошло благодаря программе Ленглендса.

Мне уже доводилось слышать о Дринфельде. Тогда ему было всего лишь тридцать шесть лет, но он уже успел стать легендой. Через полгода после нашей встречи он стал лауреатом Филдсовской премии, одной из самых престижных наград, которую многие считают эквивалентом Нобелевской премии для математиков.

Свою первую математическую работу Дринфельд опубликовал в возрасте семнадцати лет, а к двадцати годам уже прокладывал новые пути в программе Ленглендса. Родом из Харькова, сын известного профессора математики, Дринфельд учился в Московском университете в начале 1970-х годов (в то время абитуриентам-евреям было нелегко поступить в МГУ, но определенный процент все же зачисляли). К моменту получения диплома в МГУ он уже был автором прогрессивных на весь мир работ, и его приняли в аспирантуру, что для студента-еврея было исключительным явлением. Его научным руководителем стал Юрий Иванович Манин, один из самых оригинальных и влиятельных математиков на планете.

Однако и Дринфельду не удалось избежать проявлений антисемитизма. Став кандидатом наук, он не смог найти работу в Москве, и ему пришлось провести три года в Уфе, промышленном городе в Уральских горах. Дринфельду совершенно не хотелось переезжать туда в немалой степени потому, что там не было математиков, работавших в интересующих его областях. Однако за время пребывания в Уфе в сотрудничестве с местным математиком Владимиром Соколовым он написал важную работу по теории интегрируемых систем — области, далекой от его первоначальных интересов. Сегодня открытые ими интегрируемые системы носят название систем Дринфельда — Соколова. После трех лет в Уфе Дринфельду наконец-то удалось найти работу в родном городе — в Харьковском физико-техническом институте низких температур. Это было относительно удобное место, позволившее

ему не расставаться с семьей. Но в Харькове Дринфельд был изолирован от советского математического сообщества, представители которого были сконцентрированы в Москве и, в меньшей степени, в Ленинграде.

Несмотря на все это, работая практически в полном одиночестве, Дринфельд выдавал один за другим поразительные результаты в самых разных областях математики и физики. Помимо доказательства важных гипотез в рамках программы Ленглендса и создания в сотрудничестве с Соколовым новой главы в теории интегрируемых систем, он также разработал общую теорию квантовых групп (первоначально открытых Колей Решетихиным и его соавторами) и сделал множество других потрясающих открытий. Широта его научных интересов была воистину ошеломительной.

Было предпринято несколько попыток трудоустроить Дринфельда в Москве. Мне рассказывали, например, что физик Александр Белавин пробовал выбить для него место в Институте теоретической физики имени Ландау под Москвой. Для того чтобы повысить его шансы на успех, Белавин и Дринфельд совместно решили важную задачу классификации решений «классического уравнения Янга — Бакстера», которая в то время интересовала многих физиков. Опубликованная в журнале Гельфанда «Функциональный анализ и его приложения» статья имела огромный успех (мне кажется, это была самая длинная статья из всех, когда-либо опубликованных Гельфандом, что явно свидетельствует о ее значимости). Именно эта работа привела Дринфельда к теории квантовых групп, которая произвела настоящую революцию во многих областях математики. К сожалению, ни один из планов по трудоустройству не сработал. Антисемитизм и отсутствие у Дринфельда московской прописки были абсолютно проигрышной комбинацией. Дринфельд остался в Харькове и лишь изредка приезжал в Москву.

Визит Дринфельда в Гарвард планировался на весну 1990 года, и для меня он стал настоящим даром небес. Дринфельд прибыл в конце января. Я успел послушаться о нем таких невероятных, полных восхищения рассказов, что поначалу побаивался к нему подойти, однако он оказался очень милым и щедрым человеком. С негромким голосом, тщательно взвешивающий каждое слово, он был образцом ясности, когда говорил о математике. Объясняя что-либо, он не пытался произвести впечатление, не делал вид,

будто раскрывает вам огромную тайну, в которую без его помощи вам никогда не удалось бы проникнуть (как очень часто, к сожалению, поступают некоторые другие мои коллеги, имена которых лучше не упоминать). Его формулировки всегда были предельно простыми и ясными, и если он объяснял вам что-то, у вас возникало ощущение, будто вы и так всегда это знали.



Рис. 14.1. Владимир Дринфельд

Однако, главное, Дринфельд сразу сказал мне, что его очень заинтересовала наша с Фейгиным работа и он хотел бы использовать ее в своем новом проекте, связанном с программой Ленглендса.

Давайте вспомним три столбца розеттского камня Андре Вейля, о котором мы говорили в главе 9:

| | | |
|---------------------|------------------------------------|-----------------------------|
| <i>Теория чисел</i> | <i>Кривые над конечными полями</i> | <i>Римановы поверхности</i> |
|---------------------|------------------------------------|-----------------------------|

Программа Ленглендса первоначально охватывала левый и средний столбцы: теорию чисел и кривые над конечными полями.

Смысл программы Ленглендса в том, чтобы установить взаимосвязь между представлениями группы Галуа и автоморфными функциями. Концепция группы Галуа не вызывает вопросов в контексте левого и среднего столбцов розеттского камня; кроме того, подходящие автоморфные функции также существуют — их можно обнаружить в другой области математики, называемой гармоническим анализом.

До появления работы Дринфельда, однако, было неясно, есть ли аналог программы Ленглендса для правого столбца — теории римановых поверхностей. Методы, позволяющие включить в исследования римановы поверхности, начали появляться в начале 1980-х годов в работах Дринфельда. Эстафету подхватил французский математик Жерар Ломон, и двое ученых пришли к выводу о том, что программу Ленглендса можно переформулировать с геометрической точки зрения и что это позволит выявить связь между средним и правым столбцами розеттского камня Андре Вейля.

Если рассматривать левый и средний столбцы розеттского камня, то программа Ленглендса связывает между собой группы Галуа и автоморфные функции. Оказывается, что подходящие аналоги групп Галуа и автоморфных функций можно также найти и в геометрической теории римановых поверхностей. В главе 9 мы уже убедились, что в геометрической теории роль групп Галуа играют фундаментальные группы римановой поверхности. Однако в исследовании геометрических аналогов автоморфных функций мы пока что не углублялись.

Выясняется, что подходящими геометрическими аналогами являются не функции, а то, что математики называют *пучками*.

Для того чтобы разобраться, что это такое, давайте поговорим о числах. У нас есть натуральные числа: 1, 2, 3, ..., и, разумеется, они применяются для решения самых разных задач. Одна из них — подсчет количества измерений. Как мы говорили в главе 10, прямая одномерна, плоскость двумерна и для любого натурального числа n существует n -мерное плоское пространство, также известное как векторное пространство.¹ Теперь вообразите мир, в котором место натуральных чисел заняли векторные пространства: вместо числа 1 используется прямая, вместо числа 2 — плоскость и т. д.

Сложение чисел в этом новом мире заменяется операцией, которую математики называют прямой суммой векторных про-

странств. Взяв два векторных пространства, каждое с собственной системой координат, мы создаем новое пространство, объединяющее координаты двух исходных векторных пространств. Следовательно, размерность получившегося векторного пространства равна сумме размерностей слагаемых. Например, на прямой существует только одна координата, а на плоскости — две. Складывая их, мы получаем векторное пространство с тремя координатами. Это наше трехмерное пространство.

На смену умножению натуральных чисел приходит другая операция на векторном пространстве: взяв два векторных пространства, мы создаем третье, известное как тензорное произведение первых двух. Я не буду приводить здесь точное определение тензорного произведения; для нас важно только то, что если размерности исходных двух векторных пространств равны m и n , то их тензорное произведение обладает размерностью $m \times n$.

Таким образом, мы определили на векторных пространствах операции, аналогичные операциям сложения и умножения натуральных чисел. Однако этот параллельный мир векторных пространств куда богаче мира натуральных чисел! Возьмите любое число — у него нет внутренней структуры. К примеру, если взять число 3 само по себе, то мы не обнаружим у него никаких симметрий. А у трехмерного пространства они есть. Мы уже убедились, что любой элемент группы Ли $SO(3)$ порождает вращение трехмерного пространства. Число 3 — всего лишь бледная тень трехмерного пространства, отражающая единственный его атрибут, а именно размерность. Имея на руках лишь одно это число, мы не сможем по достоинству оценить все остальные аспекты векторных пространств, такие как их симметрии.

Современная математика — это сотворение нового мира, в котором числа оживают в образе векторных пространств. У каждого из них богатая и насыщенная личная жизнь, и взаимоотношения между ними слишком выразительны и многозначны, чтобы их можно было свести к простому сложению и умножению. Действительно, существует только один способ вычитания единицы из двойки. А встроить прямую в плоскость можно множеством разных способов.

В отличие от натуральных чисел, которые образуют множество, векторные пространства формируют более сложную структуру — *категорию*, как называют ее математики. В любой

категории присутствуют «объекты», такие как векторные пространства, а в дополнение к ним — «морфизмы» между любыми двумя объектами.² Например, морфизмы из любого объекта в себя в любой заданной категории являются, по сути, симметриями этого объекта, допустимыми в рамках данной категории. Таким образом, язык категорий позволяет нам отвлечься от вопроса, что такое эти объекты и из чего они состоят, а вместо этого сфокусироваться на том, как они взаимодействуют друг с другом. Именно поэтому математическая теория категорий оказывается особенно удобной для использования в информатике и программировании.³ Развитие функциональных языков программирования, таких как Haskell, — один из множества примеров современных приложений теории категорий.⁴ Я почти не сомневаюсь, что следующее поколение компьютеров составят машины, базирующиеся не на теории множеств, а на теории категорий, а сами категории мало-помалу станут частью нашей повседневной жизни.

Сдвиг парадигмы с множеств на категории — это также одна из движущих сил современной математики. Этот процесс называется *категорификацией*. По сути, мы создаем новый мир, в котором знакомые концепции поднимаются на новый уровень. Например, на смену числам приходят векторные пространства. Однако тогда возникает следующий вопрос: какой облик в этом новом мире примут функции?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, давайте вспомним определение функции. Предположим, у нас есть геометрическая фигура, такая как сфера, окружность или поверхность пончика. Назовем ее S . Как мы уже говорили выше, математики называют подобные фигуры многообразиями. Функция f на многообразии S — это правило, сопоставляющее с каждой точкой s из S число, называемое значением функции f в этой точке s . Обозначим его $f(s)$.

Примером функции может служить температура. В этом случае многообразием S будет обыкновенное трехмерное пространство, в котором мы все живем. В каждой точке s мы можем измерить температуру, представляющую собой некое число. Это дает нам правило сопоставления числа с каждой точкой, то есть мы получаем функцию. Точно так же функцией является атмосферное давление.

Рассмотрим более абстрактный пример: пусть S будет окружностью. Каждая точка окружности определяется углом, который мы, как и раньше, обозначим φ . Пусть f будет функцией синуса.

Тогда значение данной функции в точке окружности, соответствующей углу φ , равно $\sin(\varphi)$. Например, если $\varphi = 30^\circ$ (или $\pi/6$, если мы измеряем углы в радианах), то значение функции синуса равно $1/2$. Если $\varphi = 60^\circ$ (или $\pi/3$), то оно равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$, и т. д.

Теперь заменим числа векторными пространствами. При таких условиях роль функции будет играть правило, сопоставляющее с каждой точкой s многообразия S не число, а векторное пространство. Такое правило называется *пучком*. Обозначим пучок символом F . Тогда векторное пространство, сопоставленное точке s , будет обозначаться $F(s)$.

Таким образом, различие между функциями и пучками заключается в том, какой объект мы сопоставляем с каждой точкой нашего многообразия S : для функций это числа, а для пучков векторные пространства. Для заданного пучка векторные пространства, сопоставленные разным точкам s , могут обладать разной размерностью. Например, на рис. 14.2 большинство векторных пространств представляют собой плоскости (то есть двумерные векторные пространства), однако есть одно, являющееся прямой (то есть одномерным векторным пространством). Пучки — это категорификации функций, так же как векторные пространства — это категорификации чисел.

Хотя это для нас сейчас не так важно, отмечу, что пучок — это вовсе не произвольный набор векторных пространств, сопоставленных точкам нашего многообразия. Между слоями заданного пучка в разных точках должны существовать связи, удовлетворяющие точному набору правил.⁵

Для нас в данный момент важнее всего то, что между функциями и пучками существует глубокая аналогия, открытая великим французским математиком Александром Гротендиком.

Гротендик оказал беспрецедентное влияние на современную математику. Если вы спросите, кто был наиболее значительным математиком второй половины двадцатого века, многие математики без колебаний назовут его фамилию. Он не только практически собственноручно создал современную алгебраическую геометрию — он перевернул все наше представление о математике с ног на голову. Словарь, с помощью которого мы осуществляем перевод с языка функций на язык пучков и обратно, без которого геометрическая переформулировка программы Ленглендса была

бы попросту невозможной, — это лишь один из примеров важнейших и поразительнейших озарений, которыми была наполнена работа Гротендика.

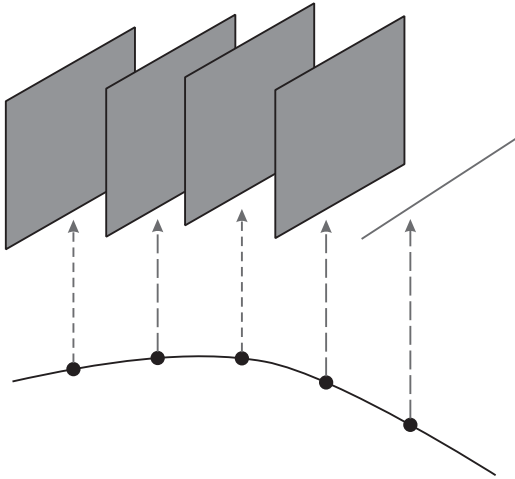


Рис. 14.2

Для того чтобы вы получили представление об идее Гротендика, давайте вспомним определение конечного поля, которое мы дали в главе 8. Для каждого простого числа p существует конечное поле с p элементами: $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$. Как мы уже говорили выше, эти p элементов составляют систему счисления, включающую операции сложения, вычитания, умножения и деления по модулю p , которые подчиняются тем же правилам, что и соответствующие операции на рациональных и вещественных числах.

Но у этой системы счисления есть одна особенность. Если взять любой элемент конечного поля $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ и возвести его в p -ю степень (в том смысле, как выполняются любые вычисления по модулю p — мы это обсуждали выше), то в результате получится то же самое число! Другими словами,

$$a^p = a \text{ по модулю } p.$$

Эту формулу доказал Пьер Ферма — математик, придумавший теорему Ферма. В отличие от его теоремы, однако, доказать эту формулу относительно несложно. Доказательство уместилось бы даже на полях книги. Я поместил его в конце этой книги.⁶ Для

того чтобы отличать этот результат от теоремы Ферма (которую иногда также называют великой теоремой Ферма), ему дали название малой теоремы Ферма.

Например, пусть $p = 5$. Тогда наше конечное поле выглядит как $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Возведем каждый из элементов в пятую степень. Как известно, 0 в любой степени равен 0, а число 1 в любой степени равно 1 — здесь нас не поджидают никакие сюрпризы. Теперь возведем 2 в 5-ю степень: мы получим 32. Но $32 = 2 + 5 \times 6$, то есть результат по модулю 5 равен 2 — как и обещалось, мы снова получили ту же двойку, с которой начинали. Возведем в пятую степень число 3: результат равен 243, но это $3 + 5 \times 48$, то есть 3 по модулю 5. И снова мы возвращаемся к тому числу, с которого начали. И наконец, сделаем то же самое с 4: его пятая степень равна 1024, то есть 4 по модулю 5. Бинго! Попробуйте самостоятельно убедиться, что $a^3 = a$ по модулю 3 и $a^7 = a$ по модулю 7 (чтобы проверить малую теорему Ферма для следующих простых чисел, вам может потребоваться калькулятор).

Примечательно, что похожее уравнение формирует базис алгоритма шифрования RSA, который широко используется для осуществления онлайн-платежей.⁷

Формула $a^p = a$ — это не просто полезное открытие. Она означает, что операция возведения чисел в p -ю степень, преобразование a в a^p , — это элемент группы Галуа конечного поля. Она носит название симметрии Фробениуса, но иногда для краткости ее называют просто *Фробениусом*. Выясняется, что группа Галуа конечного поля из p элементов порождается этим Фробениусом.⁸

Однако вернемся к идее Гротендика. Мы начинаем со среднего столбца розеттского камня Вейля, затем исследуем кривые над конечными полями и многообразия более общего вида над конечными полями. Эти многообразия определяются системами полиномиальных уравнений, таких как

$$y^2 + y = x^3 - x^2,$$

о котором мы говорили в главе 9.

Предположим, что у нас есть пучок на таком многообразии. Это правило, связывающее некое векторное пространство с каждой точкой многообразия и обладающее при этом сложной внутренней структурой. Понятие пучка определяется таким образом, что любая симметрия системы счисления, над которой определено

многообразие — в данном случае речь идет о конечном поле, — порождает симметрию этого векторного пространства. В частности, Фробениус, являющийся элементом группы Галуа конечного поля, обязательно порождает симметрию (такую, как поворот или гомотетия) векторного пространства.

В дополнение к этому из симметрии векторного пространства можно вывести число. Для этого существует стандартная техника. Например, если наше векторное пространство представляет собой прямую, то симметрия данного пространства, которую мы получим из Фробениуса, будет гомотетией: каждый элемент z будет преобразован в Az для какого-то числа A . Тогда числом, которое мы свяжем с данной симметрией, будет просто A . В случае же векторных пространств, размерность которых превышает единицу, мы берем то, что называется следом симметрии.⁹ Взяв след Фробениуса на пространстве $F(s)$, мы связываем число с точкой s .

В простейшем случае Фробениус действует как тождественная симметрия на векторном пространстве. При этом его след равен размерности векторного пространства. Получается, что в этой ситуации, взяв след Фробениуса, мы связываем с векторным пространством число, равное его размерности. Однако если Фробениус — это не тождественное преобразование, то при таком построении с векторным пространством связывается более общее значение, которое не обязательно будет натуральным числом.

Из этого следует вывод: если у нас есть многообразие S над конечным полем $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ (то есть ситуация, соответствующая центральному столбцу розеттского камня Вейля), а также на S определен пучок F , тогда с каждой точкой s из S можно связать число. Это дает нам функцию на S . Следовательно, мы видим, что средний столбец розеттского камня Вейля показывает нам способ перехода от пучков к функциям.

Гротендик называл это «пучково-функциональным словарем». И это довольно странный словарь. Процедура, описанная выше, обеспечивает возможность перехода от пучков к функциям. Более того, естественные операции на пучках параллельны естественным операциям на функциях. Например, операция взятия прямой суммы двух пучков, определяемая аналогично прямой сумме двух векторных пространств, параллельна операции взятия суммы двух функций.

Однако естественного способа вернуться от функций обратно к пучкам не существует.¹⁰ Оказывается, это возможно только для

некоторых функций, далеко не для всех. Но если это все же возможно, то результирующий пучок содержит множество дополнительной информации, которой функция не обладает. С помощью этой информации можно пробраться к самому сердцу функции. Примечательно, что большинство функций, присутствующих в программе Ленглендса (во втором столбце розеттского камня Вейля), происходят от пучков.

Вот уже многие сотни лет математики занимаются изучением функций — одного из центральных понятий всей математической науки. Эту концепцию можно понять интуитивно, достаточно вспомнить температуру или атмосферное давление. Однако что до Гротендика было совсем неочевидно — так это то, что, находясь в контексте многообразий над конечными полями (таких, как кривые над конечным полем), мы можем сделать шаг вперед и вместо функций начать работать с пучками.

Функции были, если можно так выразиться, концепциями архаичной математики, а пучки — это концепции современной математики. Гротендик продемонстрировал, что во многих отношениях пучки — объекты куда более фундаментальные, чем функции. Старые добрые функции — всего лишь их бледные тени.

Это открытие значительно подтолкнуло развитие математики во второй половине двадцатого века. Причина заключается в том, что пучки — намного более интересные и разносторонние объекты, обладающие сложной внутренней структурой. Например, у пучка могут быть свои симметрии. Если повысить функцию до пучка, то можно начать использовать эти симметрии, и это позволит нам узнать намного больше, чем если бы мы в своих исследованиях были ограничены только функциями.

Особенно важно для нас то, что пучки имеют смысл не только в среднем, но и в правом столбце розеттского камня Вейля. Это открывает возможности для переноса программы Ленглендса из среднего столбца в правый.

В правом столбце розеттского камня мы рассматриваем многообразия, определенные над комплексными числами. Например, это могут быть римановы поверхности, такие как сфера или поверхность пончика. В таких условиях автоморфные функции, присутствующие в левом и среднем столбцах розеттского камня Вейля, не имеют особого смысла. Пучки же не теряют своей акту-

альности. Итак, замена функций пучками в среднем столбце (а мы в состоянии это сделать благодаря словарю Гротендика) — это способ провести аналогию между средним и правым столбцами розеттского камня Вейля.

Подведем итог: переход из среднего столбца розеттского камня Вейля в правый требует внесения определенных корректировок в обе части соответствия, предусмотренного программой Ленглендса. Это необходимо, потому что у таких понятий, как группа Галуа и автоморфные функции, нет непосредственных эквивалентов в геометрии римановых поверхностей. Аналогом группы Галуа является фундаментальная группа римановой поверхности, как мы узнали в главе 9. А с помощью словаря Гротендика мы переходим от автоморфных функций к пучкам, которые обладают свойствами, аналогичными свойствам автоморфных функций. Мы называем их автоморфными пучками.

Этот переход иллюстрирует следующая диаграмма, на которой изображены три столбца розеттского камня, а в двух строках каждого столбца указаны названия объектов для каждой из частей соответствия Ленглендса, характерного для этого столбца.

| Теория чисел | Кривые над конечными полями | Римановы поверхности |
|---------------------|---|-----------------------------|
| Группа Галуа | Группа Галуа | Фундаментальная группа |
| Аutomорфные функции | Аutomорфные функции или автоморфные пучки | Аutomорфные пучки |

Следующий вопрос — это как построить автоморфные пучки. Это оказалось чрезвычайно сложной задачей. В начале 1980-х годов Дринфельд предложил первое подобное построение для простейшего случая (основанное на ранее неопубликованной работе Пьера Делиня). Развитием идей Дринфельда через несколько лет занялся Жерар Ломон.

Когда я встретился с Дринфельдом, он рассказал о придуманном им радикально новом методе построения автоморфных пучков. Однако новая конструкция, которую он хотел проделать, зависела от истинности определенных гипотез, которые, как он

предполагал, я должен суметь доказать, основываясь на наших с Фейгиным исследованиях алгебр Каца — Муди. Я не верил своим ушам: моя работа может пригодиться в программе Ленглендса?

Возможность сделать что-то полезное для программы Ленглендса подтолкнула меня к тому, чтобы узнать о ней как можно больше. Той весной я наведывался в кабинет Дринфельда в Гарварде почти каждый день и засыпал его вопросами о программе Ленглендса, на которые он терпеливо отвечал. Он, в свою очередь, расспрашивал меня о моей работе с Фейгиным, детали которой были критически важны для задачи, которую он пытался решить. Остаток дня я проводил в библиотеке Гарварда, жадно поглощая любые издания, в которых хоть что-то говорилось о программе Ленглендса. Эта тема меня настолько захватила, что каждый вечер я старался побыстрее заснуть, чтобы скорее настало утро и я мог еще глубже окунуться в эту программу. Я знал, что вскоре мне предстоит взяться за один из самых важных проектов в моей жизни.

Ближе к концу весеннего семестра произошло событие, снова всколыхнувшее мои воспоминания о бессмысленно-кошмарном опыте вступительных экзаменов в Московский университет.

Однажды Виктор Кац позвонил мне домой в Кембридж и сообщил, что кто-то пригласил Анатолия Логунова, ректора Московского университета, прочитать лекцию на физическом факультете МИТ. Кац и многие его коллеги были вне себя от негодования из-за того, что МИТ собирался предоставить площадку для выступления человеку, несущему самую непосредственную ответственность за дискриминацию абитуриентов-евреев на вступительных экзаменах в МГУ. Кац и многие другие считали, что его действия были сродни преступлению и подобное приглашение было попросту возмутительным.

Логунов был очень могущественным человеком: он был не только ректором МГУ, но также директором Института физики высоких энергий, членом Центрального комитета Коммунистической партии СССР и обладателем множества званий и привилегий. Однако зачем кому-то в МИТ могло понадобиться приглашать его? Как бы то ни было, Кац и несколько его коллег заявили свой протест и потребовали отменить визит и лекцию. Путем упорных переговоров было достигнуто компромиссное решение:

Логунов приедет и прочитает лекцию, но после лекции состоится публичное обсуждение ситуации в МГУ, где у желающих будет возможность напрямую высказать ему свое мнение и претензии относительно дискриминации. Должно было состояться что-то вроде народного вече.

Естественно, Кац попросил меня как непосредственного участника событий, происходивших в МГУ под предводительством Логунова, прийти на встречу и рассказать свою историю. Я не был уверен, стоит ли это делать. Я не сомневался, что Логунова будут сопровождать «помощники», фиксирующие каждое слово. Шел май 1990 года, и до неудавшегося путча августа 1991 года, с которого начался развал Советского Союза, оставалось еще более года. Я же планировал на лето приехать домой. Если я скажу что-то нелестное о такой высокопоставленной персоне, каковой был в Советском Союзе Логунов, проблем будет не избежать. Как минимум, мне могут запретить покидать СССР, и я не смогу вернуться в Гарвард. И все же я был не в силах отказать Кацу. Я знал, насколько важными мои свидетельства будут на этой встрече, поэтому передал Виктору свое согласие. Кац пытался успокоить меня:

— Не беспокойтесь, Эдик, — говорил он, — если они посадят вас за это в тюрьму, я сделаю все, что в моих силах, чтобы вытащить вас оттуда.

Молва о предстоящем событии быстро распространилась, и конференц-зал, в котором должна была состояться лекция Логунова, был забит до отказа. Люди пришли не для того, чтобы узнать из этого выступления что-то новое. Все знали, что Логунов — слабый физик, построивший свою карьеру на попытках опровергнуть теорию относительности Эйнштейна (интересно, почему). Как и ожидалось, его лекция — о его «новой» теории гравитации — оказалась малосодержательной. Однако во многих отношениях она была довольно необычна. Во-первых, Логунов не говорил по-английски. Он читал лекцию на русском языке, а синхронный перевод осуществлял высокий мужчина в черном костюме и галстуке, чей английский был безупречен. С тем же успехом ему можно было написать на лбу «КГБ» большими печатными буквами. Его клон (как в фильме «Матрица») сидел в зале и внимательно осматривал присутствующих.

До начала выступления один из сотрудников МІТ, ведущий мероприятие, представил Логунова весьма специфическим образом. Он показал с помощью проектора первую страницу опубликованной за десятилетие до этого статьи на английском языке, авторами которой, помимо Логунова, были еще несколько человек. Вероятно, он ставил целью продемонстрировать нам, что Логунов не полный идиот и что его перу действительно принадлежат публикации в рецензируемых научных журналах. Я никогда не видел, чтобы кого-нибудь представляли подобным образом. Было очевидно, что Логунова пригласили в МІТ не в знак признания его научных талантов.

Во время лекции никаких возгласов протеста не раздавалось, хотя Кац распространил среди аудитории копии некоторых компрометирующих документов. Одним из них был табель успеваемости студента с еврейской фамилией, который учился в МГУ лет за десять до этого. По всем предметам у него были пятерки, и все же там было написано, что на последнем курсе его отчислили «за неуспеваемость». В короткой записке, прикрепленной к табелю, говорилось, что этот студент был замечен в московской синагоге специально отправленными туда агентами.

После лекции участники дискуссии перешли в другое помещение и расселись вокруг большого прямоугольного стола. Логунов сидел у одного из углов, защищенный с обоих флангов двумя «помощниками» в штатском, выполнявшими также функцию переводчиков. Кац и другие обвинители выбрали места прямо напротив него. Я с несколькими друзьями тихонько сидел у другого края на той же стороне, что и Логунов, поэтому тот не обращал на нас особого внимания.

Первыми слово взяли Кац и его коллеги. Они заявили, что слышали много историй о том, как абитуриентам еврейской национальности отказывают в зачислении в МГУ, и попросили Логунова как ректора Московского университета прокомментировать это. Разумеется, тот решительно отрицал все обвинения, какие бы примеры ни приводили его оппоненты. В какой-то момент один из людей в штатском сказал по-английски:

— Знаете, профессор Логунов — очень скромный человек, поэтому я скажу вам то, в чем он сам никогда бы не признался. На самом деле, он помог многим евреям построить карьеру.

Другой человек в штатском обратился к Кацу и остальным:

— Либо представьте доказательства, либо давайте расходиться. Если у вас есть конкретные случаи, которые вы хотите обсудить, мы слушаем. В противном случае давайте закончим это обсуждение, поскольку профессор Логунов очень занятой человек и у него есть другие дела.

Естественно, Кац ответил:

— У нас действительно есть конкретный случай, и я хотел бы поговорить о нем, — он указал рукой на меня.

Я поднялся. Все повернулись ко мне, включая Логунова и его «помощников», на лицах которых появились следы беспокойства. Я смотрел прямо на Логунова.

— Очень интересно, — сказал Логунов по-русски. Эти слова предназначались для всех присутствующих, и их должны были перевести. А затем он добавил, обращаясь лишь к своим помощникам (совсем тихо, но все же я расслышал): — Не забудьте записать его фамилию.

Признаться, я немного испугался, но отступить было некуда — мы достигли точки невозврата. Я представился и сказал:

— Меня завалили на вступительных экзаменах на Мехмат шесть лет назад.

Затем я кратко описал произошедшее на экзамене. В комнате повисла тишина. Это был тот самый «конкретный» случай, представленный из первых рук реальной жертвой политики Логунова, и у ректора не было никаких шансов опровергнуть мои слова. Два помощника бросились на помощь шефу, чтобы как-то исправить ситуацию.

— Значит, вас завалили в МГУ. И куда вы подали документы после этого? — спросил один из них.

— Я пошел в Институт нефти и газа.

— Он пошел в Керосинку, — перевел помощник Логунову. Тот ответил энергичным кивком — конечно же, он знал, что это было одно из немногих мест в Москве, куда принимали абитуриентов вроде меня.

— Что ж, — продолжил человек в штатском, — возможно, конкурс в Институте нефти и газа был не таким высоким, как в МГУ. Потому-то вы туда и поступили, а в МГУ не прошли.

Это было неправдой: я достоверно знал, что среди тех, кто не подвергся дискриминации, конкурс на Мехмат был совсем небольшим. Мне говорили, что для поступления достаточно было получить одну четверку и три тройки на экзаменах. Конкурс на

вступительных экзаменах в Керосинку, наоборот, был очень высоким.

В этот момент снова заговорил Кац:

— Будучи студентом, Эдуард достиг значительных успехов в своей математической работе, и его позвали в Гарвард в качестве приглашенного профессора, когда ему был всего двадцать один год — и пяти лет не прошло с того провального экзамена. Или вы предполагаете, что конкурс на место в Гарварде также был ниже, чем на вступительных экзаменах в МГУ?

Продолжительное молчание. Затем внезапно Логунов ожил:

— Я возмущен этим! — завопил он. — Я проведу расследование, и виновные будут наказаны! Я не позволю, чтобы подобное происходило в стенах МГУ!

И так он бушевал в течение нескольких минут.

Что можно было сказать в ответ? Никто из сидевших за столом не поверил, что гнев Логунова искренен и что он на самом деле предпримет какие-то действия. Логунов был хитрым человеком. Инсценировав негодование из-за одного случая, он избежал ответа за куда большую проблему: тысячи других студентов были безжалостно отвергнуты в результате тщательно продуманной политики дискриминации, очевидно, одобряемой всем высшим руководством МГУ, включая самого ректора.

У нас не было возможности представить все эти случаи на той встрече и доказать, что на вступительных экзаменах на Мехмат царил официальная политика антисемитизма. Хотя я чувствовал определенное удовлетворение: мне удалось лицом к лицу встретиться со своим обидчиком и заставить его признать, что я незаслуженно пострадал от действий его подчиненных, все мы знали, что главный вопрос остался без ответа.

Людам, пригласившим Логунова, которых негативная огласка, очевидно, поставила в самое неловкое положение, хотелось по-быстрее разделаться с этим. Они объявили перерыв в обсуждении и попросили его удалиться. Больше его не приглашали.

Глава 15. Изысканный танец

Осенью 1990 года я стал аспирантом в Гарварде. Это было необходимо для того, чтобы сменить должность приглашенного профессора на нечто более постоянное. Иосиф Бернштейн согласился стать моим официальным научным руководителем. К тому времени я наработал достаточно материала для кандидатской диссертации, и Артур Джаффе уговорил декана факультета в качестве исключения позволить мне сократить срок обучения в аспирантуре (которое обычно занимает 4 или 5 лет, и в любом случае не менее 2 лет, согласно правилам) до одного года, для того чтобы я мог защититься уже через год. Благодаря этому мое «понижение в должности» с профессора до аспиранта продлилось совсем немного.

Моя кандидатская диссертация была посвящена новому проекту, который я только что завершил. Все началось с обсуждения с Дринфельдом программы Ленглендса весной того года. Вот пример одной из наших бесед, оформленный в виде сценария.

ДЕЙСТВИЕ 1

СЦЕНА 1

КАБИНЕТ ДРИНФЕЛЬДА В ГАРВАРДЕ

Дринфельд меряет шагами комнату вдоль стены, на которой висит классная доска.

Эдуард, сидя в кресле, делает заметки (на столе рядом с ним стоит чашка чая).

Дринфельд

Итак, гипотеза Симуры – Таниямы – Вейля открывает связь между кубическими уравнениями и модулярными формами, однако Ленглендс пошел еще дальше. Он предсказал существование более общего соответствия, в котором роль модулярных форм играют автоморфные представления группы Ли.

Эдуард

Что такое автоморфное представление?

Дринфельд (*после долгой паузы*)

Точное определение нам сейчас неважно. В любом случае, ты можешь найти его в учебнике. Важно для нас то, что это представление группы Ли G , например группы $SO(3)$ вращений сферы.

Эдуард

Хорошо. А с чем эти автоморфные представления связаны?

Дринфельд

Вот это самое интересное. Ленглендс предсказал, что они должны быть связаны с представлениями группы Галуа в другой группе Ли.¹

Эдуард

Понятно. Вы имеете в виду, что эта группа Ли – это не та же самая группа G ?

Дринфельд

Нет! Это другая группа Ли, которая называется двойственной группой Ленглендса для G .

Дринфельд пишет на доске символ ${}^L G$.

Эдуард

Буква L в честь Ленглендса?

Дринфельд (с легкой улыбкой)

Первоначально Ленглендсом двигало стремление понять объекты, называемые L -функциями, потому он и назвал эту группу L -группой...

Эдуард

То есть для каждой группы Ли G существует другая группа Ли, которая называется ${}^L G$, правильно?

Дринфельд

Да. И она присутствует в соответствии Ленглендса, которое схематически выглядит так.

Дринфельд рисует на доске схему²



Эдуард

Я не понимаю... по крайней мере пока что. Но позвольте задать вопрос попроще: как будет выглядеть, например, двойственная группа Ленглендса для $SO(3)$?

Дринфельд

Это довольно просто – двойное накрытие $SO(3)$. Ты видел фокус с чашкой?

Эдуард

Фокус с чашкой? Ах, да, припоминаю...

СЦЕНА 2

ДОМАШНЯЯ ВЕЧЕРИНКА АСПИРАНТОВ ГАРВАРДА

Десяток или около того студентов, всем немного за двадцать, разговаривают, пьют пиво и вино. Эдуард беседует с аспиранткой.

Аспирантка

Вот как это делается.

Аспирантка берет пластиковый стаканчик с вином и ставит его на открытую ладонь правой руки. Затем она начинает вращать ладонью, поворачивая руку как на последовательности фотографий на с. 213. Она совершает один полный оборот (360 градусов), и ее рука выворачивается локтем вверх. Все так же удерживая стаканчик вертикально, она продолжает вращение, и после еще одного полного оборота – сюрприз! – ее рука и чашка возвращаются в исходное нормальное положение.³

Другой аспирант

Я слышал, что на Филиппинах есть традиционный танец с вином, в котором они проделывают этот трюк обеими руками.⁴

Он берет два стакана пива и пытается повернуть обе ладони одновременно. Но уследить за руками не получается, и он тут же проливает пиво из обоих. Все смеются.

СЦЕНА 3

СНОВА КАБИНЕТ ДРИНФЕЛЬДА

Дринфельд

Этот фокус иллюстрирует тот факт, что на группе $SO(3)$ существует нетривиальный замкнутый путь, двойное прохождение которого, однако, дает нам тривиальный путь.⁵

Эдуард

О, понимаю. Первое полное вращение чашки поворачивает руку под необычным углом – это и есть аналог нетривиального пути на $SO(3)$.

Он берет со стола чашку чая и проделывает первую часть фокуса.

Эдуард

Казалось бы, второй поворот должен заставить вас еще больше вывернуть руку, но вместо этого рука возвращается в обычное положение.

Эдуард завершает движение.

Дринфельд

Точно.⁶

Эдуард

Но что общего между этим и двойственной группой Ленглендса?

Дринфельд

Двойственная группа Ленглендса для $SO(3)$ – это двойное накрытие $SO(3)$, так что...



Рис. 15.1. Фокус с чашкой (последовательность фотографий — слева направо, сверху вниз). Фотографии Андреа Янг (Andrea Young)

Эдуард

Так что каждому элементу группы $SO(3)$ соответствуют два элемента из двойственной группы Ленглендса.

Дринфельд

Вот почему в этой новой группе⁷ уже нет нетривиальных замкнутых путей.

Эдуард

То есть переход к двойственной группе Ленглендса – это способ избавиться от того вывиха?

Дринфельд

Правильно.⁸ На первый взгляд кажется, что различие минимально, но в действительности последствия более чем значительны. Это например, объясняет разницу в поведении строительных кирпичиков материи, таких как электроны и кварки, и частиц, переносящих взаимодействия между ними, таких как фотоны. Для групп Ли более общего вида различие между самой группой и ее двойственной группой Ленглендса еще сильнее. По сути дела, во многих случаях между двумя двойственными группами даже не существует видимой связи.

Эдуард

Почему двойственная группа вообще появилась в соответствии Ленглендса? Волшебство какое-то...

Дринфельд

Это неизвестно.

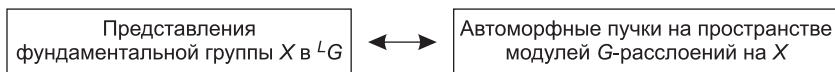
Двойственность Ленглендса устанавливает парное взаимосоотношение между группами Ли: для каждой группы Ли G существует двойственная группа Ли Ленглендса ${}^L G$, а двойственной к ${}^L G$ является сама G .⁹ То, что программа Ленглендса связывает объекты двух разных типов (один из теории чисел, а второй из гармонического анализа), удивительно само по себе, но то, что две двойственные группы, G и ${}^L G$, присутствуют в разных частях этого соответствия (см. схему на с. 211) — это просто уму непостижимо!

Мы говорили о том, что программа Ленглендса соединяет разные континенты в мире математики. Продолжим аналогию: пусть это будут Европа и Северная Америка и пусть существует способ сопоставить каждому человеку в Европе человека из Северной Америки, и наоборот. Более того, предположим, что это соответствие подразумевает идеальное совпадение различных атрибутов,

таких как вес, рост и возраст, за единственным исключением: каждому мужчине сопоставляется женщина, и наоборот. Эта ситуация — аналог замены группы Ли на ее двойственную группу, согласно соответствию, предсказанному программой Ленглендса.

Действительно, эта замена — один из самых загадочных аспектов программы Ленглендса. Нам известно несколько механизмов, описывающих, как появляются двойственные группы, но мы до сих пор не понимаем, *почему* это происходит. Такое неведение стало одной из причин, почему ученые пытаются распространить идеи программы Ленглендса на другие области математики (посредством розеттского камня Вейля) и даже на квантовую физику, как мы узнаем в следующей главе. Мы стараемся найти больше примеров феномена двойственных групп Ленглендса в надежде, что это даст нам дополнительные подсказки относительно того, почему они возникают и что это значит.

Давайте пока что сфокусируем наше внимание на правом столбце розеттского камня Вейля, который посвящен римановым поверхностям. Как мы установили в предыдущей главе (см. схему на с. 203), в версии соответствия Ленглендса, актуального для данного столбца, действующими лицами являются «автоморфные пучки». Они играют роль автоморфных функций (или автоморфных представлений), связанных с группой Ли G . Оказывается, эти автоморфные пучки «живут» в определенном пространстве, присоединенном к римановой поверхности X и группе G , которое носит название пространства модулей G -расслоений на X . Нам в данный момент не важно, что это такое.¹⁰ В противоположной части соответствия, как мы видели в главе 9, роль групп Галуа играет фундаментальная группа данной римановой поверхности. Из схемы, приведенной на с. 211, следует, что геометрическое соответствие Ленглендса должно схематически выглядеть следующим образом:



Это означает, что у нас должна быть возможность сопоставить автоморфный пучок каждому представлению фундаментальной группы в ${}^L G$. И у Дринфельда была радикально новая идея относительно того, как это можно сделать.

ДЕЙСТВИЕ 2

СЦЕНА 1

КАБИНЕТ ДРИНФЕЛЬДА В ГАРВАРДЕ

Дринфельд

Итак, нам нужно найти методику построения этих автоморфных пучков. И мне кажется, что представления алгебр Каца – Муди могли бы нам помочь.

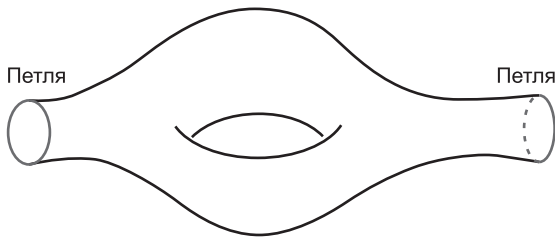
Эдуард

Почему?

Дринфельд

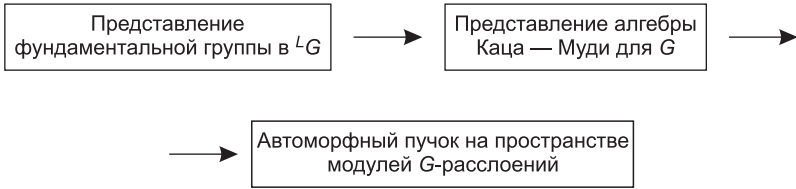
Сейчас мы в мире римановых поверхностей. У такой поверхности может присутствовать граница, состоящая из петель.

Дринфельд рисует на доске картинку.

**Дринфельд**

Посредством петель римановы поверхности можно связать с группами петель и, следовательно, с алгебрами Каца – Муди. И эта связь дает нам возможность преобразовывать представления алгебры Каца – Муди в пучки на пространстве модулей \mathcal{G} -расслоений на нашей римановой поверхности. Давай пока что не будем углубляться в детали. Как я ожидаю, схематически это должно выглядеть так.

Дринфельд рисует на доске схему.

**Дринфельд**

Вторая стрелка мне понятна. Главный вопрос заключается в том, как сконструировать первую стрелку. Фейгин рассказал мне о вашей работе, посвященной представлениям алгебр Каца – Муди. Думаю, ее как раз нужно применить здесь.

Эдуард

Но тогда представлениям алгебры Каца – Муди для G должно быть каким-то образом «известно» о двойственной группе Ленглендса $L G$.

Дринфельд

Именно так.

Эдуард

Но как это возможно?

Дринфельд

А это вопрос, на который ты должен дать ответ.

ЗАНАВЕС.

Мне кажется, я чувствовал себя немножко как Нео, разговаривающий с Морфеусом в фильме «Матрица». Это было потрясающе, но и в то же время немного страшновато. Неужели я действительно смогу сказать свое слово в этой области?

Для того чтобы объяснить, как я подошел к решению этой задачи, сперва мне необходимо познакомить вас с эффективным методом построения представлений фундаментальной группы

римановой поверхности. Мы делаем это, применяя дифференциальные уравнения.

Дифференциальное уравнение — это уравнение, связывающее функцию с ее производными. К примеру, взглянем на машину, движущуюся по прямой дороге. Для указания любой точки на дороге требуется ровно одна координата; обозначим ее x . Позиция машины в момент времени t кодируется функцией $x(t)$. Например, возможно, что $x(t) = t^2$.

Скорость машины — это отношение расстояния, пройденного за небольшой период времени Δt , к величине этого периода:

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

Если машина движется с постоянной скоростью, то не важно, какой период Δt мы возьмем для рассмотрения. Однако если скорость машины меняется, то меньшее значение Δt даст более точное приближение скорости в момент времени t . Для того чтобы узнать точное мгновенное значение скорости в этот момент, необходимо взять предел данного отношения при Δt , стремящемся к 0. Этим пределом и является производная от $x(t)$. Она обозначается как $x'(t)$.

Например, если $x(t) = t^2$, то $x'(t) = 2t$, и, в самом общем случае, если $x(t) = t^n$, то $x'(t) = nt^{n-1}$. Эти формулы несложно вывести, но их доказательство для нас сейчас несущественно.

Многие законы природы могут быть выражены в форме дифференциальных уравнений, то есть уравнений, включающих функции и их производные. Например, уравнения Максвелла для описания электромагнетизма, о которых мы поговорим в следующей главе, — это дифференциальные уравнения, так же как уравнения Эйнштейна, описывающие гравитацию. В действительности большинство математических моделей (относящихся к физике, биологии, химии, финансовым рынкам или любой другой области) включают в себя дифференциальные уравнения. Даже самые простые вопросы о потребительском кредитовании — например, как вычислить сложный процент — быстро приводят нас к дифференциальным уравнениям.

Вот пример дифференциального уравнения:

$$x'(t) = \frac{2x(t)}{t}.$$

Решением этого уравнения является функция $x(t) = t^2$. Действительно, $x'(t) = 2t$, а $2x(t)/t = 2t^2/t = 2t$, то есть, подставляя $x(t) = t^2$ в левую и правую части уравнения, мы получаем одно и то же выражение, $2t$. Более того, выясняется, что на самом деле у данного уравнения все решения имеют форму $x(t) = Ct^2$, где C — вещественное число, независимое от t (C — это первая буква слова *constant*, то есть «константа»). Например, $x(t) = 5t^2$ — это также одно из решений.

Подобным образом решения дифференциального уравнения

$$x'(t) = \frac{nx(t)}{t}$$

даются формулой $x(t) = Ct^n$, где C — произвольное вещественное число.

Ничто не запрещает нам здесь взять в качестве n отрицательное целое число. Уравнение все так же будет иметь смысл, и формула $x(t) = Ct^n$ все так же будет иметь смысл, за исключением того, что данная функция будет не определена при $t = 0$. Поэтому давайте исключим $t = 0$ из рассмотрения. Сделав это, мы можем брать в качестве n любое рациональное число, и даже произвольное вещественное число.

А теперь сделаем еще один дополнительный шаг. В исходной формулировке нашего дифференциального уравнения мы считали t показателем времени, поэтому подразумевалось, что это вещественное число. Однако теперь предположим, что t — комплексное число, то есть число в форме $r + s\sqrt{-1}$, где r и s — вещественные числа. Как уже говорилось в главе 9 (см. рис. 9.5), комплексные числа могут быть представлены точками на плоскости с координатами r и s . Сделав t комплексным, мы превращаем функцию $x(t)$ в функцию на плоскости — конечно же, на плоскости за исключением одной точки. Поскольку мы решили, что $x(t)$ не может быть определена в точке $t = 0$, соответствующей началу координат этой плоскости (в которой обе координаты, r и s , равны нулю), $x(t)$ в действительности определяется на плоскости, не включающей одну точку — начало координат.

Теперь добавим в котел следующий ингредиент — фундаментальную группу. Как мы узнали в главе 9, элементы фундаментальной группы — это замкнутые пути. Рассмотрим фундаментальную группу плоскости, из которой исключена

одна точка. В этом случае у каждого пути есть такой показатель, как «число оборотов», указывающий, сколько раз путь огибает удаленную точку. Если путь идет против часовой стрелки, то мы считаем данный показатель со знаком «плюс», а если по часовой стрелке — то со знаком «минус». ¹¹Замкнутые пути с числами оборотов, равными +1 и -1, показаны на рис. 15.2.

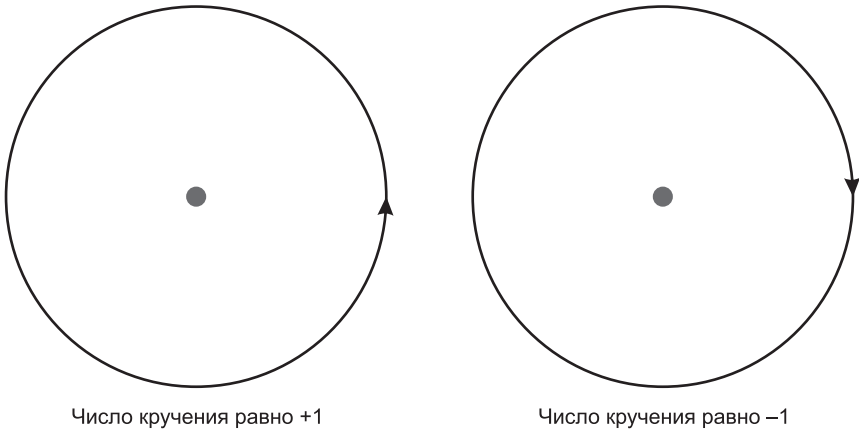


Рис. 15.2

Путь, дважды обходящий удаленную точку и пересекающий себя, для того чтобы снова вернуться в начальную точку, обладает числом оборотов +2 или -2, и т. д. для более сложных путей.

Вернемся к нашему дифференциальному уравнению:

$$x'(t) = \frac{nx(t)}{t},$$

где n — произвольное вещественное число, а t теперь принимает значения из множества комплексных чисел. У этого уравнения есть решение, а именно $x(t) = t^n$. Однако не все так просто: если n — не целое число, то, оценивая решение вдоль замкнутого пути на плоскости и возвращаясь к исходной точке, мы можем обнаружить, что значение решения в конечной точке не совпадает с тем, каким оно было в начальной точке. Оно отличается на некоторый коэффициент, представляющий собой комплексное число. В такой ситуации мы говорим, что решение подверглось *мондромии* вдоль пути.

Утверждение о том, что что-то меняется, когда мы обходим полный круг, может поначалу показаться противоречащим здравому смыслу. Однако все зависит от того, что мы подразумеваем под обходом круга. Мы можем пройти по замкнутому пути и вернуться в исходную точку в смысле *определенного* атрибута, такого как наша позиция в пространстве. Но другие атрибуты вполне могут подвергаться изменениям.

Рассмотрим такой пример. Рик встретил Ильзу на вечеринке 14 марта 2010 года и влюбился в нее с первого взгляда. На Ильзу он поначалу не произвел особого впечатления, однако она согласилась пойти с ним на свидание. А потом еще на одно. И еще. Рик начал нравиться Ильзе — он забавный, умный и заботится о ней. Не успеешь оглянуться, как Ильза тоже влюбляется; она даже меняет свой статус в Facebook на «встречается», и Рик делает то же самое. Время летит быстро, и вот уже снова 14 марта, первая годовщина их знакомства. С точки зрения календаря — если мы будем учитывать только месяц и день и отбросим год — Рик и Ильза обошли полный круг. Однако ситуация поменялась. В день их встречи Рик был влюблен, а Ильза нет. А годом позже они могут быть одинаково влюблены друг в друга, или даже у Ильзы все еще могут «бабочки порхать в животе», а Рик может начать разочаровываться в отношениях. Не исключено даже, что Рик мог разлюбить Ильзу и начать втайне от нее встречаться с кем-то еще. Нам это не известно. Для нас важно лишь то, что, хотя они вернулись к той же календарной дате, 14 марта, их чувства уже могли претерпеть изменения.

В этом месте мой папа говорит мне, что этот пример не совсем корректен, поскольку получается, как будто Рик и Ильза вернулись к той же самой точке во времени, что в принципе невозможно. Однако я фокусируюсь на конкретных атрибутах: месяце и дне. В этом смысле переход из 14 марта 2010 года в 14 марта 2011 года — это обход полной окружности.

И все же, наверное, лучше рассмотреть вместо этого какой-нибудь путь, замкнутый не во времени, а в пространстве. Итак, предположим, что, пока Рик и Ильза были вместе, они совершили кругосветное путешествие. Во время путешествия их отношения развивались, и когда они вернулись в исходную точку — свой родной город, — их чувства могли измениться.

В первом случае у нас был замкнутый путь во времени (точнее, в календаре, описываемом только месяцами и днями), а во втором — в пространстве. Вывод, тем не менее, один и тот же: отношения могут меняться за время обхода полного круга. Оба сценария иллюстрируют явление, которое мы могли бы назвать монодромией любви.

Математически, если бы мы могли представить любовь Рика к Ильзе в виде числа x , а любовь Ильзы к Рiku — в виде числа y , то состояние их отношений в каждый момент можно было бы описать с помощью точки на плоскости с координатами (x, y) . Например, в первом сценарии в день их первой встречи это была точка $(1, 0)$. Затем, по мере того как они перемещались вдоль замкнутого пути (во времени или в пространстве), позиция точки менялась. Следовательно, эволюция их отношений на $xу$ -плоскости представляется определенной траекторией. Монодромия — это всего лишь разница между исходной и конечной точками данной траектории.

Рассмотрим теперь менее романтичный пример. Предположим, вы взбираетесь по спиральной лестнице и совершаете полный оборот. С точки зрения проекции вашей позиции на пол вы обошли полный круг. Однако другой ваш атрибут — высота — поменялся, так как вы поднялись на следующий этаж. Это тоже монодромия. Этот пример можно связать с предыдущим, проведя аналогии между календарем и спиралью: 365 дней года — это окружность на полу, а год — высота над полом. Перемещение из заданной даты, такой как 14 марта 2010 года, в ту же самую дату годом позже — то же самое, что восхождение по лестнице.

Снова вернемся к решению нашего дифференциального уравнения. Замкнутый путь на плоскости аналогичен замкнутому пути, совпадающему с вашей проекцией на пол. Значение решения — аналог высоты вашей позиции на лестнице. Если смотреть на ситуацию с этой точки зрения, то становится совершенно очевидно, что значение решения после полного оборота вполне может меняться.

Взяв отношение этих двух значений, мы получаем монодромию решения вдоль пути. Оказывается, эту монодромию можно интерпретировать как элемент группы окружности.¹² Для того чтобы наглядно представить себе это, вообразите красно-белую карамельную палочку, согнутую так, что она приняла форму пончика. Затем проследите красную полоску на ее поверхности.

Движение вдоль конфеты аналогично движению вдоль замкнутого пути на нашей плоскости, а красная полоска — это наше решение. Мы видим, что, совершив полный оборот вокруг конфеты, полоска оказалась в другом месте — не в той точке, откуда мы начали отслеживать ее. Эта разница аналогична монодромии нашего решения. Она соответствует повороту карамельной палочки на какой-то угол.

Вычисления, представленные в примечании 12, демонстрируют, что монодромия вдоль замкнутого пути с числом кручения $+1$ является элементом группы окружности, соответствующим вращению на $360n$ градусов. (Например, если n равно $1/6$, то с этим путем мы сопоставляем вращение на $360/6 = 60$ градусов.) Аналогично монодромия вдоль пути с числом оборотов w — это вращение на $360wn$ градусов.

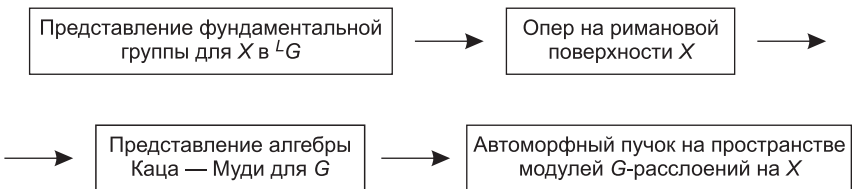
Из приведенного выше обсуждения необходимо, прежде всего, уяснить следующее. Монодромии вдоль разных путей на плоскости без одной точки порождают представление ее фундаментальной группы в группе окружности.¹³ В целом, мы можем построить представления фундаментальной группы любой римановой поверхности (возможно, даже с несколькими удаленными точками, как в нашем случае) путем оценки монодромии дифференциальных уравнений, определенных на этой поверхности. Эти уравнения, несомненно, будут гораздо более сложными, но локально, в пределах небольшой окрестности точки на поверхности, все они похожи на представленное выше. Используя монодромию решений еще более сложных уравнений, можно аналогичным способом построить представления фундаментальной группы заданной римановой поверхности в других группах Ли, отличных от группы окружности. Например, это можно сделать для представлений фундаментальной группы в группе $SO(3)$.

Вернемся к задаче, которая стояла передо мной. Мы начинаем с группы Ли G и берем соответствующую алгебру Каца — Мууди. Для доказательства гипотезы Дринфельда требовалось найти связь между представлениями этой алгебры Каца — Мууди и представлениями фундаментальной группы в двойственной группе Ленглендса ${}^L G$.

Первый шаг заключается в замене представлений фундаментальной группы подходящими дифференциальными уравнениями, монодромия которых принимает значения из ${}^L G$. Это делает

задачу более алгебраической, и, следовательно, она оказывается ближе к миру алгебр Каца — Муди. Типы дифференциальных уравнений, применимых в данном случае, были придуманы Дринфельдом и Соколовым ранее (по сути, для случая плоскости без точки они аналогичны приведенному выше). Ученые сделали это в период, когда Дринфельд находился в «ссылке» в Уфе. Бейлинсон и Дринфельд впоследствии обобщили данную работу для произвольных римановых поверхностей и назвали результирующие дифференциальные уравнения «операми». «Опер» — это сокращение слова «оператор», а также в нем можно распознать и дополнительный смысл.

В моей диссертации, основанной на работе, которую мы проделали в Москве с Борей, содержалось описание того, как построить представления алгебры Каца — Муди для G , параметризованные операми, соответствующим двойственной группе Ленглендса ${}^L G$. В существование связи между этими двумя объектами почти невозможно поверить: оказалось, что алгебра Каца — Муди, связанная с G , каким-то образом «знает» о двойственной группе Ленглендса ${}^L G$, и Дринфельд предсказал это совершенно точно. Таким образом, мы установили, что его план работает в соответствии со следующей схемой:¹⁴



Мое доказательство этого результата было довольно сложным технически. Мне удалось объяснить, *каким образом* появилась двойственная группа Ленглендса, но даже сейчас, более чем двадцать лет спустя, я все еще не знаю ответа на вопрос, *почему* она появляется. Я решил задачу, но мне доставляло дискомфорт ощущение, что нечто вот так появилось совершенно ниоткуда. С тех пор одной из движущих сил моих исследований остается стремление сформулировать более полное объяснение.

Так бывает довольно часто. Один человек приводит доказательство теоремы, другие проверяют и подтверждают его. Потом исследования в данной области успешно продвигаются вперед

благодаря этому новому результату, но истинное понимание его значимости может прийти лишь через много лет или даже десятилетий. Я понимаю, что, даже если мне не удастся найти ответ, мою эстафету подхватят будущие поколения математиков, которые, в конце концов, разгадают загадку. Но, конечно же, мне хотелось бы добраться до сути самому.

Бейлинсон и Дринфельд впоследствии использовали теорему из моей диссертации в своем красивом построении геометрического соответствия Ленглендса (в правом столбце розеттского камня Вейля, см. схему на с. 215). Их глубокая работа стала началом новой главы в программе Ленглендса; она породила множество свежих идей и глубоких прозрений и способствовала ее дальнейшему расширению.

Впоследствии я подвел итог проведенных в этой области исследований (над некоторыми мы работали совместно с Борей, а некоторые были также выполнены в сотрудничестве с Деннисом Гейтсгори) в своей книге «Langlands Correspondence for Loop Groups», опубликованной издательством Cambridge University Press.¹⁵ Она вышла в 2007 году, ровно через двадцать лет после того, как в ночной электричке, по пути домой с Бориной дачи, я записал первые формулы реализации алгебр Каца — Муди на свободном поле. Знал бы я тогда, что с этих вычислений начнется мое долгое путешествие по программе Ленглендса!

В качестве эпиграфа для своей книги я выбрал эти строки из стихотворения Э. Э. Каммингса, одного из моих любимых поэтов:

Concentric geometries of transparency slightly
joggled sink through algebras of proud
inwardlyness to collide spirally with iron arithmetics...

В моем понимании это поэтическая метафора того, чего мы стремимся достичь в программе Ленглендса: единства геометрии, алгебры и арифметики (то есть теории чисел). Современная алхимия, так сказать.

Работа Бейлинсона и Дринфельда позволила решить некоторые важные задачи, безуспешные попытки решения которых уже предпринимались длительное время. Но она же подняла множество новых вопросов. Так всегда происходит в математике:

каждый новый результат приподнимает вуаль над непознанным, но новые знания содержат не только ответы — они ведут нас к вопросам, которые мы даже не догадывались задать, к направлениям, об исследовании которых мы даже не помышляли. Каждое новое открытие вдохновляет нас продолжать погоню за знаниями, безостановочно шагать к новым целям, не позволяя себе расслабляться.

В мае 1991 года в Гарварде состоялся очередной торжественный выпуск. Для меня это мероприятие стало особым, так как речь для выпускников произносил Эдуард Шеварднадзе, один из архитекторов перестройки в Советском Союзе. Он незадолго до этого оставил пост министра иностранных дел в знак протеста против применения силы в прибалтийских республиках, предупреждая о надвигающейся диктатуре.

Это были беспокойные времена. Мы еще не знали о грядущих беспорядках — путче в предстоящем августе этого года, последующем развале Советского Союза, невероятных трудностях и лишениях, с которыми большинству жителей бывшего СССР придется столкнуться в ходе экономических реформ. Мы не могли предвидеть неоднозначные результаты пребывания Шеварднадзе в роли главы его родной Республики Грузия. Однако в тот прекрасный день на залитом солнцем гарвардском дворе мне хотелось сказать спасибо человеку, который помог мне и миллионам моих соотечественников сбросить оковы коммунистического режима.

После выступления я подошел к нему и рассказал, что только что получил докторскую степень в Гарварде, что было бы попросту невозможно без перестройки. Он улыбнулся и сказал по-русски с очаровательным грузинским акцентом: «Я очень рад это слышать. Желаю вам огромных успехов в работе». Затем замолчал на мгновение и добавил, будучи истинным грузином: «И счастья в личной жизни».

На следующее утро я улетел в Италию. Виктор Кац пригласил меня принять участие в конференции, организованной им в Пизе совместно с его итальянским коллегой Коррадо де Кончини. Из Пизы я отправился на остров Корсика, для того чтобы поучаствовать в другой встрече, а затем на еще одну конференцию в японском городе Киото. Эти конференции собирали вместе физиков

и математиков, интересующихся алгебрами Каца — Муди и их приложениями в области квантовой физики. Я рассказывал о своем только что завершеном проекте. Большинство участников конференций впервые слышали о программе Ленглендса, и мне показалось, что она многих заинтриговала. Мысленно возвращаясь к тем дням, я поражаюсь, как сильно все изменилось с тех пор. Сегодня программа Ленглендса считается краеугольным камнем современной математики, и о ней известно представителям самых разных научных дисциплин.

Тем летом мне впервые выпала возможность посетить другие страны. Я открывал для себя новые культуры и своими глазами видел, как сближает людей наш общий язык — математика. Все для меня было в новинку, все было волшебно и удивительно, а мир представлялся калейдоскопом бесконечных возможностей.

Глава 16. Квантовый дуализм

В предыдущих главах мы увидели, что влияние программы Ленглендса распространилось на самые разнообразные области математики — от теории чисел до кривых над конечными полями и римановых поверхностей. Даже представления алгебр Каца — Муди не остались в стороне. Программа Ленглендса позволяет нам увидеть в этих совершенно непохожих областях одни и те же схемы, одни и те же явления. Они могут проявляться по-разному, но определенные общие характеристики (такие, как появление двойственной группы Ленглендса) всегда легко узнаваемы. Эти сходства указывают на загадочную внутреннюю структуру — можно даже сказать, исходный код — всей математики. Именно в этом смысле мы говорим о программе Ленглендса как о теории Великого Объединения всей математики.

В ходе обсуждения мы также встречались с некоторыми самыми распространенными и интуитивно понятными математическими объектами, которые изучали еще в школе: числами, функциями, уравнениями. Однако теперь они предстали перед нами искаженными, деформированными, порой разбитыми вдребезги. Многие из них оказались совсем не такими нерушимыми, как мы думали раньше. В современной математике используются куда более глубокие и гибкие концепции и идеи: векторные пространства, группы симметрий, вычисления по модулю простых чисел, пучки. В математике далеко не все лежит на поверхности, и благодаря программе Ленглендса мы обрели возможность приоткрыть завесу тайны над тем, что никому раньше видеть не доводилось. Пока что нам удалось уловить лишь отблески этой скрытой реальности. И сегодня, словно археологи, обнаружившие разбитую мозаику, мы пытаемся сложить вместе разрозненные факты, которые удалось собрать. Каждый новый собранный кусочек головоломки дарует новые озарения, новые инструменты проникновения в тайну. И каждый раз нас ослепляет сияние, казалось бы, неистощимого потенциала открывающейся картины.

Для меня путь в этот волшебный мир был открыт Дринфельдом, который связал с программой Ленглендса мою работу, посвященную алгебрам Каца — Муди. Бескрайнее поле исследований и вездесущность идей программы Ленглендса навсегда заворачи-

ли меня. Мной овладело стремление узнать все больше и больше о различных направлениях программы — о них я рассказываю в этой книге, и большая часть моих исследований с тех самых пор либо посвящена программе Ленглендса, либо так или иначе вдохновлена ею. Эта программа заставила меня путешествовать по математическим континентам, изучая разные культуры и языки.

Как и любой другой путешественник, на своем пути я сталкиваюсь с множеством сюрпризов. Одним из самых больших сюрпризов для меня стало то, что программа Ленглендса неразрывно связана с квантовой физикой. Разгадка кроется в двойственности (или дуализме) — как в физике, так и в математике.

Идея искать двойственность в физике может показаться странной, но в каком-то смысле эта концепция нам уже знакома. Взять хотя бы электричество и магнетизм. Несмотря на то что эти две силы кажутся совершенно непохожими, их описание мы обнаруживаем в одной общей математической теории, называемой электромагнетизмом. В этой теории содержится скрытый дуализм, неразрывно связывающий между собой две силы: электрическую и магнитную (подробнее об этом мы поговорим чуть далее). В 1970-х годах физики предприняли попытку обобщить подобную двойственность в так называемых неабелевых калибровочных теориях. Эти теории описывают ядерные взаимодействия: «сильное», удерживающее кварки внутри протонов, нейтронов и других элементарных частиц, и «слабое», ответственное за такие явления, как радиоактивный распад.

В сердце каждой калибровочной теории находится группа Ли, называемая *калибровочной группой*. В определенном смысле электромагнетизм — простейшая из калибровочных теорий, а соответствующая калибровочная группа — наш старый друг, группа окружности (группа вращений любого круглого объекта). Это абелева группа: результат умножения любых двух элементов из группы не зависит от порядка, в котором выполняется операция: $a \cdot b = b \cdot a$. Однако для теорий сильного и слабого взаимодействий соответствующие калибровочные группы абелевыми не являются, то есть в этих калибровочных группах $a \cdot b \neq b \cdot a$. Отсюда и название — неабелевы калибровочные теории.

Итак, в 1970-х годах физики обнаружили в неабелевых калибровочных теориях аналог электромагнитного дуализма — а заодно и поразительный сюрприз. Выяснилось, что если рассмотреть калибровочную теорию с калибровочной группой G , то

двойственной теорией к ней будет калибровочная теория с другой калибровочной группой. И — о чудо! — эта группа оказывается не чем иным, как двойственной группой Ленглендса ${}^L G$, ключевым ингредиентом программы Ленглендса!

Попробуйте представить себе это следующим образом: математика и физика — это две разные планеты, скажем Земля и Марс. На Земле мы обнаружили взаимосвязь между разными континентами. В соответствии с ней каждому человеку из Европы сопоставляется человек из Северной Америки, с которым у него совпадают рост, вес и возраст. Единственное различие — пол: мужчине сопоставляется женщина, а женщине — мужчина (это аналогично подмене группы Ли двойственной группой Ли Ленглендса). И вот однажды мы встречаем гостя с Марса. Он рассказывает, что на Марсе между континентами также существует определенная взаимосвязь. Оказывается, с каждым марсианином с одного континента можно связать марсианина с другого континента так, что их рост, вес и возраст совпадут, но... эти два существа будут разного пола (кто знал, что у марсиан, как и у нас, два пола?). Мы не верим своим ушам: очевидно, что взаимосвязь, открытая на Земле, и взаимосвязь, существующая на Марсе, каким-то образом связаны. Но как так может быть?

Подобным же образом, поскольку двойственная группа Ленглендса присутствует как в математике, так и в физике, естественно предполагать существование связи между программой Ленглендса в математике и электромагнитным дуализмом в физике. Однако прошло почти тридцать лет, а никому так и не удалось ее обнаружить.

Мне довелось несколько раз обсуждать этот вопрос с Эдвардом Виттенем, профессором Института высших исследований в Принстоне, считающимся одним из величайших из ныне живущих теоретических физиков. Он обладает удивительной способностью делать поразительные открытия и формулировать гипотезы, относящиеся к чистой математике, применяя для этого самые сложные инструментариумы квантовой физики. Его работы послужили вдохновением для нескольких поколений математиков, и он стал первым физиком, награжденным Филдсовской премией — одной из самых престижных математических наград.

Виттена интересовала возможная связь между квантовыми дуализмами и программой Ленглендса, и он время от времени

осведомлялся у меня о новостях из этой области. Мы обсуждали их в моем кабинете в Гарварде, когда он приезжал в Гарвард или МИТ, или в его кабинете в Принстоне, когда я бывал там. Наши беседы всегда были чрезвычайно интересными, но не очень плодотворными. Было очевидно, что какие-то критически важные элементы все еще отсутствуют, дожидаясь, пока кто-нибудь откроет их.



Рис. 16.1. Эдвард Виттен

Помощь пришла из неожиданного источника.

В мае 2003¹ года, будучи в Риме на конференции, я получил электронное сообщение от моего старого друга и коллеги Кари Вилонена. Родом из Финляндии, Кари — один из самых общительных и компанейских математиков среди всех, кого я знаю. Когда я только приехал в Гарвард, он и его будущая жена Мартина взяли меня с собой в спортивный бар в Бостоне. Бейсбольная команда Red Sox играла в решающем матче. К сожалению, Sox проиграли, и все же вечер выдался незабываемый. С тех самых пор мы остаемся друзьями, и несколько лет спустя мы совместно опубликовали несколько статей по программе Ленглендса (при участии еще одного математика, Дэнниса Гейтсгори). В частности, мы втроем доказали важный случай соответствия Ленглендса.

В своем сообщении Кари (бывший тогда профессором университета Northwestern в городе Чикаго) писал, что с ним связались люди из DARPA и выразили желание выдать нам грант для поддержки исследований по программе Ленглендса.

DARPA — Defense Advanced Research Projects Agency (агентство передовых оборонных исследовательских проектов) — это агентство министерства обороны США, отвечающее за разработку новых технологий. Оно было создано в 1958 году в ответ на запуск спутника в Советском Союзе в 1957 году с целью поддержки научных и технологических исследований в Соединенных Штатах и предотвращения подобных неожиданностей в технологической сфере.

На веб-сайте DARPA я прочитал такой абзац:²

Для осуществления своей миссии Агентство полагается на широкий круг исследователей, применяющих многоплановые подходы как к наработке знаний посредством базовых исследований, так и к созданию инновационных технологий, позволяющих решать текущие практические задачи через прикладные исследования. Научные изыскания DARPA охватывают полный диапазон: от лабораторной работы до создания полнофункциональных технологических демонстрационных версий... Будучи главным инновационным ресурсом министерства обороны, DARPA реализует проекты, ограниченные по длительности, но несущие долгосрочные революционные перемены.

За годы своего существования агентство DARPA поучаствовало в финансировании множества проектов в сфере прикладной математики и вычислительной техники; например, оно спонсировало создание сети ARPANET, предшественницы Интернета. Однако, насколько мне известно, оно никогда не поддерживало проекты, касающиеся чистой математики. С чего бы им интересоваться исследованиями в программе Ленглендса?

Эта область представляется чистой и абстрактной, не имеющей прямых практических приложений. Тем не менее следует понимать, что фундаментальные научные исследования образуют основу всего технологического прогресса. Часто математические и физические открытия, кажущиеся абстрактными и недоступными для понимания, порождают инновации, без которых мы затем не мыслим повседневной жизни. Взять хотя бы вычисления по модулю простых чисел. Когда впервые сталкиваешься с ними, они кажутся настолько абстрактными, что невозможно представить их применение в задачах реального мира. Действительно,

широко известно заявление английского математика Г. Х. Харди о том, что «огромная часть высшей математики бесполезна».³ Однако в дураках остался он сам: многие эзотерические результаты в сфере теории чисел (его области знаний) сегодня распространены повсеместно, в том числе в интернет-торговле. Когда мы совершаем покупки в Сети, без вычислений по модулю N не обойтись (см. описание алгоритма шифрования RSA в примечании 7 к главе 14). Никогда не следует недооценивать потенциал математических формул или идей для практических приложений.

История доказывает, что всем важным технологическим прорывам предшествовали успехи в чистых исследованиях, достигнутые десятилетиями ранее. Следовательно, ограничивая поддержку фундаментальных наук, мы ограничиваем собственные прогресс и возможности.

Есть и еще один аспект данного вопроса: нас как общество в значительной степени определяют наши научные исследования и инновации. Это важная часть нашей культуры. Роберт Уилсон, первый директор Национальной лаборатории Ферми, в которой был создан крупнейший для своего времени ускоритель частиц, так сформулировал это в своей речи перед Объединенной комиссией конгресса по атомной энергии в 1969 году. На вопрос, поможет ли устройство стоимостью несколько миллионов долларов повысить безопасность страны, он ответил:⁴

Только с точки зрения перспектив развития технологии. Что касается остального, вопрос в том, можем ли мы считать себя хорошими художниками, хорошими скульпторами, великими поэтами? Я имею в виду всё, что мы действительно ценим и почитаем в нашей стране, всё, на чем основывается наш патриотизм. В этом смысле, разумеется, новое знание неотрывно связано с честью и Родиной. Но оно не имеет непосредственного отношения к защите нашей страны — лишь вносит вклад в создание того, ради чего эту страну стоит защищать.

Энтони Тетер, занимавший пост директора DARPA в период с 2001 по 2009 год, понимал важность фундаментальных исследований. Он поставил перед своими подчиненными задачу подобрать хороший проект в чистой математике. Один из них, Даг

Кокран, подошел к вопросу серьезно. У него был друг, Бен Манн, работавший в Государственном научном фонде США (National Science Foundation, NSF). Специалист в области топологии, Бен оставил должность в научном мире, для того чтобы занять в NSF пост директора программ в подразделении математических наук.

Когда Даг попросил Бена порекомендовать стоящий проект из области чистой математики, Бен сразу же подумал о программе Ленглендса. Хотя она и не относилась к сфере его научных интересов, предложения грантов в этой области, присылаемые в NSF, позволили ему сделать выводы о ее значимости. Качество проектов и тот факт, что одни и те же идеи получили распространение в самых разных математических дисциплинах, произвели на него большое впечатление.

Итак, Бен сказал Дагу, что DARPA могло бы поддержать исследования в программе Ленглендса, и поэтому с Кари, мной и двумя другими математиками связались и попросили написать заявку, которую Даг представил бы директору DARPA. Предполагалось, что одобрение директора позволит нам получить многомиллионный грант на проведение исследований в этой области.

Честно говоря, поначалу нас одолевали сомнения. Это была неизведанная территория: никто из известных нам математиков не получал ранее гранты такого размера. Обычно математики получают относительно небольшие индивидуальные гранты от NSF (немного денег на поездки, обеспечение для аспирантов, возможно, небольшая поддержка на время летних каникул). Мы же планировали координировать работу десятков математиков, для того чтобы предпринять концентрированные усилия в широчайшей области исследований. Поскольку объем гранта ожидался настолько внушительным, мы предполагали, что окажемся под пристальным вниманием со стороны общественности и, возможно, ощутим настороженное отношение, а может, даже и подозрительность и зависть со стороны коллег. Мы осознавали, что, если не продемонстрируем значительный прогресс в нашем проекте, то неизбежно подвергнемся насмешкам, и подобный провал может надолго закрыть возможности финансирования агентством DARPA других достойных проектов по чистой математике.

Несмотря на владевшее нами беспокойство, мы все же хотели оставить свой след в программе Ленглендса, а идея заменить традиционную консервативную схему финансирования математических исследований большим вливанием средств в много-

обещающую область звучала волнующе и привлекательно. Мы просто не могли сказать нет.

Однако прежде всего мы должны были решить, на чем будет фокусироваться наш проект. Как мы уже убедились, программа Ленглендса необычайно разносторонняя и связана со многими областями математики. Тематика настолько обширна, что по ней можно с легкостью написать полдюжины заявок. Нам нужно было сделать выбор, и мы решили сконцентрироваться на том, что казалось нам наиболее загадочным, — на возможной связи между программой Ленглендса и дуализмами в квантовой физике.

Неделей позже Даг представил нашу заявку директору DARPA и, судя по всему, она прошла на ура. Директор утвердил многомиллионное финансирование нашего проекта сроком на три года. Насколько нам было известно, это был самый большой грант, когда-либо выданный на исследования в чистой математике. Очевидно, что и ожидания были высоки. Мы все были необычайно взбудоражены, но и, конечно, было определенное беспокойство и ощущение большой ответственности.

К счастью, Бен Манн перешел из NSF в DARPA, заняв пост руководителя программ, и ему поручили вести наш проект. На первой же нашей встрече стало ясно, что Бен — самый подходящий человек для этой должности. Он обладает уникальными знаниями, исключительной проницательностью и смелостью, необходимыми для того, чтобы взяться за рискованный, но потенциально выигрышный проект, умением находить нужных людей для его реализации и способностью помогать им в полной мере реализовывать их идеи. Нам очень повезло, что нашу команду возглавил именно Бен. Мы не смогли бы достичь и доли тех результатов, которые сумели показать под его руководством и с его поддержкой.

Первым делом я отправил электронное сообщение Эдварду Виттону. В сообщении я рассказал ему о гранте и спросил, интересует ли его возможность присоединиться к нам. Учитывая уникальную позицию Виттона в физике и математике, мы просто обязаны были пригласить его на борт. К сожалению, первой реакцией Виттона был отказ. Он поздравил нас с получением гранта, но также дал понять, что у него на руках слишком много проектов и нам не следует рассчитывать на его участие.

Однако внезапно нам улыбнулась удача: Питер Годдард — один из физиков, ответственных за открытие электромагнитного дуализма в неабелевых калибровочных теориях, должен был вот-вот занять пост директора Института высших исследований в Принстоне. Тема его недавнего исследования была тесно связана с теорией представлений алгебр Каца — Мути, и поэтому мы часто встречались с ним на различных конференциях.

Одну из таких встреч я запомнил особенно хорошо. Она произошла в августе 1991 года, на крупном симпозиуме по математике и квантовой физике в Киотском университете в Японии. В середине симпозиума мы получили тревожные новости о путче в Советском Союзе. Всем казалось, что это означает возвращение авторитарного режима, а значит, у людей скоро отнимут даже ту ограниченную свободу, которая была дарована им перестройкой. Если же границы снова закроют, то я с большой вероятностью еще много лет не смогу увидеться с семьей. Родители сразу же позвонили мне и сказали, что при таком развитии событий я не должен беспокоиться о них и, главное, ни в коем случае не должен предпринимать попыток вернуться в Россию. Прощаясь друг с другом, мы готовились к худшему. Мы не знали даже, когда нам в следующий раз удастся поговорить по телефону.

Это были беспокойные дни. Однажды вечером мы с моим хорошим другом физиком Федей Смирновым сидели в комнате отдыха одного из гостевых домиков, смотрели японское телевидение и гадали, что в этот момент происходит в Москве. Все остальные в здании спали. Внезапно около трех ночи в комнату вошел Питер Годдард, сжимая в руке бутылку виски Glenfiddich. Он выспросил у нас последние новости, и мы выпили по рюмке. Затем он отправился спать, но настоял, чтобы бутылку мы оставили себе — в знак поддержки.

На следующий день, к нашему огромному облегчению, путч провалился. Наша с Борей Фейгиным фотография (он также присутствовал на этой конференции), на которой мы улыбались и потрясали кулаками в воздухе, была опубликована на первой странице *Yomiuri*, одной из крупнейших японских газет.

В своем электронном сообщении я напомнил Питеру об этом эпизоде и рассказал о гранте DARPA. Я предложил организовать для физиков и математиков встречу в Институте высших исследований, на которой они смогут обсудить программу Ленглендса

и дуализмы в физике. Если ученым удастся прийти к взаимопониманию, то совместными усилиями мы сможем приблизить разгадку тайны.

Ответ Питера превзошел все мои ожидания. Он предложил свою полную поддержку в организации встречи.

Институт был прекрасным местом для подобной встречи. Созданный в 1930 году в качестве независимого научно-исследовательского центра, он служил домом Альберту Эйнштейну (который провел там последние двадцать лет своей жизни), Андре Вейлю, Джону фон Нейману, Курту Гёделю и другим знаменитым ученым. Текущий состав не менее впечатляющ: список членов института включает такие имена, как сам Роберт Ленглендс, занимающий должность профессора с 1972 года (ныне эмерит), и Эдвард Виттен. Два других физика из профессорского состава — Натан Зайберг и Хуан Малдасена — работают в примыкающих областях квантовой физики, а несколько математиков, таких как Пьер Делинь и Роберт Макферсон, проводят исследования по темам, связанным с программой Ленглендса.

Результатом моей электронной переписки с Годдардом стал план по проведению пробного собрания в начале декабря 2003 года. Бен Манн, Кари Вилонен и я должны были приехать в Принстон, а Годдард пообещал принять участие. Мы пригласили Виттена, Зайберга и Макферсона; также к нам должен был присоединиться еще один принстонский математик, Марк Горески, совместно со мной и Кари занимавшийся управлением проектом DARPA. (Ленглендс, Малдасена и Делинь также были среди приглашенных, но они находились в поездках и не смогли присутствовать.)

Собрание должно было начаться в 11 утра в конференц-зале рядом с институтской столовой. Мы с Веном и Кари приехали чуть раньше, примерно за 15 минут до начала. Больше никого не было. Я нервно мерил шагами помещение, а в голове крутилась одна-единственная мысль: «Придет ли Виттен?» Он единственный из приглашенных не подтвердил свое участие.

За пять минут до начала встречи дверь открылась. Это был Виттен! В тот момент я понял, что наше предприятие непременно завершится успехом.

Несколько минут спустя прибыли и остальные участники. Мы расселись вокруг большого стола. После традиционных приветствий и обмена новостями наступила тишина. Все взоры обратились ко мне.

— Спасибо всем за то, что пришли, — начал я. — Уже довольно давно известно, что между программой Ленглендса и электромагнитным дуализмом есть нечто общее. Но точного понимания сути этого вопроса у нас нет, несмотря на многочисленные попытки разобраться. Думаю, пришло время наконец-то разгадать эту тайну. И теперь у нас есть необходимые ресурсы — ведь мы получили щедрый грант от DARPA для поддержки исследований в этой области.

Люди за столом согласно кивали. Питер Годдард спросил:

— И с чего же нам начать?

Перед встречей мы с Кари и Беном проигрывали разные сценарии, так что я был готов к всевозможным вопросам.

— Предлагаю организовать совещание здесь, в этом Институте. Мы пригласим физиков, работающих в смежных областях, и попросим математиков прочитать несколько лекций, для того чтобы ознакомить всех с текущим состоянием дел в программе Ленглендса. А затем мы все вместе обсудим возможные связи с квантовой физикой.

Теперь все посмотрели на Виттена, главу квантовых физиков. От его реакции зависело будущее проекта.

Высокий и внушительный, Виттен излучает огромную интеллектуальную мощь, такую, что некоторые начинают чувствовать неловкость в его присутствии. Он всегда говорит точными и понятными — иногда даже чрезмерно прозрачными — фразами, логика которых кажется нерушимой. Он не боится взять паузу, если ему требуется время на обдумывание ответа. В такие мгновения он часто закрывает глаза и опускает голову. Именно это он сделал в тот момент.

Все мы терпеливо ждали. Прошло не более минуты, но мне казалось, что молчание длилось целую вечность. Наконец Виттен заговорил:

— Мне кажется, что это хорошая идея. На какие даты вы планируете совещание?

Мы с Беном и Кари возбужденно переглянулись. Виттен в команде! Это была огромная победа для всех нас.

После краткого обсуждения мы согласовали даты, которые устраивали всех: 8–10 марта 2004 года. Затем кто-то задал вопрос об участниках и докладчиках. Мы назвали несколько имен и договорились окончательно согласовать список по электронной почте,

а затем сразу же разослать приглашения. На этом наше собрание завершилось. На все про все ушло не более пятнадцати минут.

Само собой разумеется, мы с Беном и Кари были довольны результатами. Виттен не только пообещал помочь с организацией мероприятия (что, естественно, сделает его еще привлекательнее для приглашенных), но также заверил нас, что примет в нем самое активное участие. Кроме того, мы ожидали увидеть среди участников совещания Ленглендса и других физиков и математиков из Института, интересующихся данной темой. Первая цель была достигнута.

Следующие несколько дней ушли на то, чтобы сформировать список участников, и неделей позже приглашения были разосланы. Текст сообщений гласил:

Обращаемся к Вам, для того чтобы пригласить Вас принять участие в неофициальном семинаре по программе Ленглендса и физике, который пройдет в Институте высших исследований с 8 по 10 марта 2004 года. Цель семинара — познакомить физиков с последними достижениями геометрической программы Ленглендса в интересах изучения потенциальных взаимосвязей между данной областью и квантовой теорией поля. Запланировано несколько ознакомительных лекций, которые будут прочитаны математиками; кроме того, у участников будет достаточно времени для неформального обсуждения. Поддержка семинара осуществляется из средств гранта, предоставленного DARPA.

Обычно подобные конференции собирают от пятидесяти до ста участников. Докладчики зачитывают тексты своих выступлений, а все остальные вежливо слушают. Пара участников может задать вопросы в конце выступления; другие обращаются к лектору в перерыве, для того чтобы уточнить заинтересовавшие их моменты. Мы же ожидали совершенно иного: это должно было быть динамичное событие, больше похожее на сеанс мозгового штурма, чем на типичную конференцию. Поэтому мы планировали скромную по масштабам встречу — не более двадцати участников. Мы надеялись, что такой формат подтолкнет людей к взаимодействию, что мы будем наблюдать свободное общение всех присутствующих.

Мы уже провели одну подобную встречу в ноябре 2003 года в Университете Чикаго. Участие ограничивалось небольшим кругом приглашенных математиков, включая Дринфельда и Бейлинсона (оба они несколькими годами ранее получили там должности профессоров). Встреча прошла с большим успехом, и мы убедились, что такой формат действительно работает.

Мы решили, что доклады прочитают Кари, Марк Горески и я, а также мой бывший аспирант Давид Бен-Цви, который к тому времени стал профессором в Техасском университете в Остине. Мы разбили материал на четыре части, по одной на каждого из нас. В своих выступлениях мы должны были рассказать об основных идеях программы Ленглендса физикам, пока что не знакомым с данной темой. Задача была не из легких.

В рамках подготовки к выступлению я решил исследовать вопрос электромагнитного дуализма, для того чтобы больше узнать об этом явлении. Нам всем знакомы электрическая и магнитная силы. Электрическая сила заставляет электрически заряженные объекты притягиваться или отталкиваться друг от друга в зависимости от знака их заряда. Например, электрон несет отрицательный электрический заряд, а протон — положительный (того же значения). Сила притяжения между ними заставляет электрон вращаться вокруг ядра атома. Электрические силы создают так называемое электрическое поле. Мы все видели его в действии во время удара молнии (рис. 16.2), которая порождается движением теплого влажного воздуха через электрическое поле.



Рис. 16.2. Фотография Шейн Лур (Shane Lear).
Библиотека фотоизображений NOAA

У магнитной силы другое происхождение. Это сила, создаваемая магнитами или движущимися электрически заряженными частицами. У магнита два полюса: северный и южный. Если магниты направлены друг к другу противоположными полюсами, они притягиваются, а одноименные полюса магнитов отталкиваются. Планета Земля — это гигантский магнит, и мы пользуемся его магнитной силой, когда применяем компас. Любой магнит создает магнитное поле (рис. 16.3).

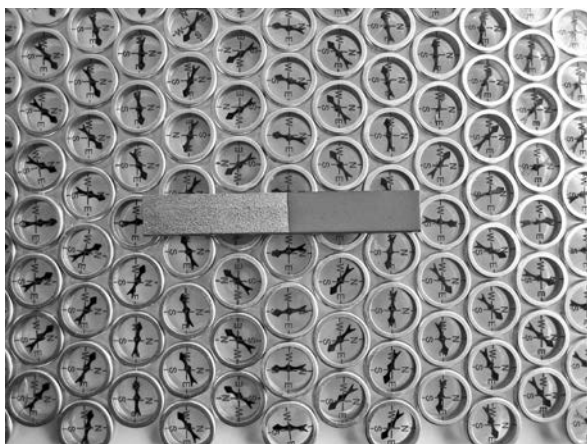


Рис. 16.3. Фотография Дайны Мейсон (*Dayna Mason*)⁶

В 1860-х годах британский физик Джеймс Клерк Максвелл разработал изысканную математическую теорию электрического и магнитного полей. Он описал их с помощью системы дифференциальных уравнений, которая сегодня носит его имя. У человека, не знакомого с ними, сразу же возникнет подозрение, что эти уравнения должны быть длинными и сложными, но в действительности они довольно просты. Их всего четыре, и они на удивление симметричны. Оказывается, если рассмотреть данную теорию в вакууме (то есть при отсутствии любой материи) и заменить электрическое поле магнитным и наоборот, то система уравнений не изменится.⁵ Другими словами, подмена полей — это симметрия уравнений. Это называется электромагнитным дуализмом, то есть отношение между электрическим и магнитным полями симметрично: влияние того и другого совершенно идентично.

Однако прекрасные уравнения Максвелла описывают *классический* электромагнетизм — в том смысле, что эта теория хорошо работает с большими расстояниями и низкими значениями энергии. Для небольших расстояний и высоких энергий поведение двух полей описывается *квантовой* теорией электромагнетизма. В квантовой теории эти поля переносятся элементарными частицами — фотонами, которые взаимодействуют с другими частицами. Название данной теории — квантовая теория поля.

Во избежание недопонимания хочу подчеркнуть, что у термина «квантовая теория поля» два значения. В широком смысле это общий математический язык, используемый для описания поведения и взаимодействия элементарных частиц. Однако кроме того, термин «квантовая теория поля» можно использовать для обозначения определенной модели такого поведения (например, квантовый электромагнетизм в этом смысле — это квантовая теория поля). Я в основном применяю его во втором смысле.

В любой подобной теории (или модели) одни частицы (такие, как электроны и кварки) играют роль строительных кирпичиков материи, а другие (такие, как фотоны) служат переносчиками сил. Каждая частица обладает множеством характеристик: часть из них всем знакомы, например масса и электрический заряд, а названия некоторых, таких как, например, «спин», могут показаться экзотичными. Определенная квантовая теория поля — это, по сути, рецепт, объединяющий разнообразные частицы в единое целое.

Слово «рецепт» подводит нас к удобной аналогии: квантовую теорию поля можно считать своеобразным кулинарным рецептом. Частицы — это ингредиенты блюда, которое мы собираемся приготовить, а то, как мы их сочетаем между собой, — аналог взаимодействия между частицами.

Например, возьмем рецепт всем известного борща — любимейшего супа большинства россиян. Моя мама готовит лучший в мире борщ (кто бы сомневался!) — вот ее кулинарное произведение (рис. 16.4, фотографию сделал мой отец):

Разумеется, я не выдам секретный рецепт моей мамы. Но вот другой рецепт, который я нашел в Сети:

- 8 чашек бульона (говяжьего или овощного),
- полукилограммовый кусок говядины на кости,
- 1 большая луковица,

- 4 большие очищенные от кожуры свеклы,
- 4 большие очищенные морковки,
- 1 большая очищенная картофелина,
- 2 чашки нарезанной капусты,
- $\frac{3}{4}$ чашки мелко порезанного свежего укропа,
- 3 столовые ложки красного винного уксуса,
- 1 чашка сметаны,
- соль,
- перец.



Рис. 16.4

Считайте этот рецепт «перечнем частиц» нашей квантовой теории поля. Что в этом контексте мог бы означать дуализм? Это просто-напросто замена одних ингредиентов («частиц») другими так, чтобы их общее содержание оставалось неизменным.

Вот как мог бы работать подобный дуализм:

- свекла → морковь,
- морковь → свекла,
- лук → картофель,
- картофель → лук,
- соль → перец,
- перец → соль.

Все прочие ингредиенты при таком дуализме остаются неизменными:

- бульон → бульон,
- говядина → говядина,
и так далее.

При замене ингредиентов их количество не меняется, а значит, в результате мы получаем тот же самый рецепт! Вот что значит дуализм.

Если же мы, например, поменяем свеклу на картофель, то получим совсем другой рецепт — в нем будет четыре картофелины и только одна свекла. Я не пробовал готовить такой борщ, но подозреваю, что он не очень вкусный.

Этот пример позволяет нам понять, что симметрия рецепта — это редкое свойство, позволяющее узнать нечто новое о блюде. Тот факт, что от замены моркови свеклой и наоборот результат не меняется, означает, что наш борщ симметричен относительно этих ингредиентов.

Вернемся к квантовому электромагнетизму. Утверждение о том, что в этой теории присутствует дуализм, означает, что существует такой способ поменять частицы местами, что в результате получится та же самая теория. Согласно условию дуализма, все «электрические штуки» должны становиться «магнитными штуками», и наоборот. Так, например, электрон (аналог свеклы в нашем супе) переносит электрический заряд, поэтому его нужно подменить частицей, переносящей магнитный заряд (аналогом моркови).

Существование такой частицы противоречит нашему житейскому опыту: у магнита всегда есть два полюса, которые невозможно разъединить! Если разбить магнит на два кусочка, то у каждого из них также будет по два полюса.

Тем не менее существование магнитно заряженной элементарной частицы, называемой магнитным монополюсом, было теоретически предсказано физиками; впервые — основателем квантовой физики Полом Дираком в 1931 году. Он продемонстрировал, что если допустить кое-что интересное в магнитном поле в позиции, где находится монополюс (математики называют это «сингулярностью» магнитного поля), то оно начнет переносить магнитный заряд.

К сожалению, экспериментально обнаружить магнитные монополи пока что не удается, поэтому мы не можем быть уверены в том, что они существуют в природе. Если они не существуют, то в природе не существует и точного электромагнитного дуализма на квантовом уровне.

Как дела обстоят на самом деле — этот вопрос до сих пор открыт. Независимо от того, каким окажется окончательный ответ, никто не мешает нам попытаться выстроить квантовую теорию поля, достаточно хорошо отражающую природные свойства, но также обладающую электромагнитным дуализмом. Возвращаясь к нашей кухонной аналогии, мы можем «готовить» новые теории, обладающие дуализмами, меняя ингредиенты и их количество в известных рецептах, избавляясь от ненужных составляющих, закидывая в кастрюлю что-то новое и т. д. Такой вариант «экспериментальной кухни» часто дает отличные результаты. Возможно, мы не захотим угощаться этими воображаемыми блюдами. Однако неважно, насколько они съедобны, — в любом случае стоит тщательно исследовать их свойства в наших игрушечных кухнях. Это может дать нам дельные подсказки относительно блюд, съедобность которых доказана (то есть моделей, которые позволили бы описать нашу Вселенную).

Многие десятилетия прогресс в квантовой физике (так же, как и в кулинарном искусстве) достигается методом проб и ошибок, путем построения одной модели за другой. И симметрия — это мощный руководящий принцип, традиционно применяемый при создании таких моделей. Чем симметричнее модель, тем проще ее анализировать.

Сейчас важно отметить, что существуют два типа элементарных частиц: фермионы и бозоны. Первые — это строительные кирпичики материи (электроны, кварки и т. п.), а вторые — частицы, переносящие силы (такие, как фотоны). Неуловимые частицы Хиггса, недавно открытые с помощью Большого адронного коллайдера под Женевой, также относятся к числу бозонов.

Между двумя типами частиц существует фундаментальное различие: два фермиона не могут одновременно находиться в одном и том же «состоянии», тогда как для любого числа бозонов это возможно. Такое кардинальное различие в поведении частиц разных типов долгое время заставляло физиков предполагать, что любая симметрия квантовой теории поля должна сохранять

отличительные особенности фермионных и бозонных секторов, что природа запрещает смешивать их. Однако в середине 1970-х годов несколько ученых выдвинули идею, казавшуюся на тот момент совершенно безумной: возможен новый тип симметрии, при котором происходит замена бозонов на фермионы и наоборот. Ее нарекли *суперсимметрией*.

Как Нильс Бор, один из создателей квантовой механики, сказал однажды Вольфгангу Паули: «Мы все согласны, что ваша теория безумна. Вопрос только в том, достаточно ли она безумна, чтобы оказаться верной».

Что касается суперсимметрии, мы до сих пор не знаем, существует ли она в природе, но сама идея завоевала популярность. Причина в том, что, введя понятие суперсимметрии, можно избавиться от множества вопросов, отравляющих существование традиционных квантовых теорий поля. В целом, суперсимметричные теории элегантнее и лучше поддаются анализу.

Квантовый электромагнетизм не суперсимметричен, но у него есть суперсимметричные расширения. Для того чтобы получить теорию, демонстрирующую свойство суперсимметрии, мы вводим дополнительные частицы — как бозоны, так и фермионы.

В частности, физики изучают расширение электромагнетизма с максимально возможным объемом суперсимметрии. И они доказали, что в этой расширенной теории электромагнитный дуализм действительно реализован.

Подведем итог: нам пока неизвестно, существует ли электромагнитный дуализм — в той или иной форме — в реальном мире. Но мы точно знаем, что это неотъемлемая составляющая идеализированного суперсимметричного расширения теории.

Необходимо упомянуть и еще один важный аспект этого дуализма, которому мы пока что не уделили внимания. В рассматриваемой квантовой теории поля — теории электромагнетизма — существует параметр, значение которого равно электрическому заряду электрона. Заряд отрицательный, поэтому обозначим этот параметр $-e$, где $e = 1,602 \cdot 10^{-19}$ кулона. Это очень маленькое значение. В максимальном суперсимметричном расширении электромагнетизма присутствует похожий параметр, который мы также обозначим e . Если, используя свойства электромагнитного дуализма, заменить все электрические штуки магнитными

и наоборот, то мы получим теорию, в которой заряд электрона будет равен не e , а обратному значению, $1/e$.

Если значение e мало, то значение $1/e$ очень велико. Таким образом, начав с теории с маленьким зарядом электрона (как в случае реального мира), мы затем получим двойственную теорию, в которой заряд электрона будет очень большим.

Это поразительно! Возвращаясь к нашей суповой аналогии, представим, что e — это температура супа. Тогда дуализм будет означать, что при замене ингредиентов, например моркови свеклой и наоборот, холодный борщ внезапно будет превращаться в обжигающе горячий.

Действительно, инверсия e — это ключевой аспект электромагнитного дуализма, имеющий далеко идущие последствия. Применяя квантовую теорию поля в том виде, в котором она существует в настоящее время, мы можем оперировать только небольшими значениями параметра, подобного e . У нас нет возможности узнать наперед, что эта теория также будет иметь смысл при больших значениях данного параметра. Однако благодаря электромагнитному дуализму мы убеждаемся, что она не просто будет иметь смысл — оказывается, двойственная теория эквивалентна теории с небольшими значениями параметра. Это означает, что мы получаем реальную возможность описать теорию для всех значений параметра. Вот почему такой тип дуализма — это настоящий святой Грааль квантовой физики.

На следующем этапе возникает вопрос, существует ли электромагнитный дуализм для квантовых теорий поля, отличных от электромагнетизма и его суперсимметричного расширения.

Помимо электрической и магнитной, известны еще три природные силы. Гравитацию мы все знаем и любим, а две ядерные силы (или два взаимодействия) имеют весьма приземленные названия: сильная и слабая. Сильное ядерное взаимодействие удерживает кварки внутри элементарных частиц, таких как протоны и нейтроны. Слабое ядерное взаимодействие ответственно за различные процессы, включающие преобразование атомов и элементарных частиц, такие как бета-распад атомов (эмиссия электронов или нейтрино) и зажигающий звезды синтез на изотопах водорода.

Все эти силы кажутся очень разными. Однако выясняется, что у теорий электромагнитного, слабого и сильного взаимодействия

есть нечто общее: все они относятся к так называемым калибровочным теориям (или теориям Янга — Миллса — в честь физиков Чжэньнина Янга и Роберта Миллса, опубликовавших в 1954 году фундаментальную работу на эту тему). Как я уже упоминал в начале этой главы, с калибровочной теорией связана группа симметрии, называемая калибровочной группой. Это группа Ли (данную концепцию мы обсуждали в главе 10). Калибровочная группа теории электромагнетизма — это группа, с которой я познакомил вас в самом начале книги, группа окружности (также известная как $SO(2)$ или $U(1)$). Это простейшая группа Ли, и она абелева. Мы уже знаем, что многие группы Ли являются неабелевыми, например группа $SO(3)$ вращений сферы. Идея Янга и Миллса состояла в том, чтобы построить такое обобщение электромагнетизма, в котором место группы окружности займет неабелева группа. Как оказалось, калибровочные теории с неабелевыми калибровочными группами точно описывают слабое и сильное ядерное взаимодействие.

Калибровочная группа теории слабого взаимодействия — это группа под названием $SU(2)$. Это двойственная группа Ленглендса для $SO(3)$, и она в два раза ее больше (мы говорили об этом в главе 15). Калибровочная группа сильного ядерного взаимодействия называется $SU(3)$.⁷

Таким образом, калибровочные теории обеспечивают универсальный формальный механизм описания трех из четырех фундаментальных сил природы (мы считаем электрическую и магнитную силы частями одной общей силы — электромагнетизма). Более того, впоследствии ученые установили, что это не просто три отдельные теории, а части единого целого. Существует одна теория, которую принято называть Стандартной моделью, тремя составляющими которой являются эти три силы. Следовательно, это та самая «единая теория», поисками которой безуспешно занимался Эйнштейн последние тридцать лет своей жизни (правда, в то время были известны только две силы: электромагнетизм и гравитация).

Выше мы с вами уже обсудили важность идеи унификации в математике. Например, программа Ленглендса — это единая теория в том смысле, что она в схожих терминах описывает широкий диапазон явлений, происходящих из разных математических дисциплин. Идея построения единой теории на базе как можно

меньшего числа основных принципов особенно привлекательна для физиков, и нет нужды объяснять, почему. Нам хотелось бы докопаться до самой сути происходящего в недрах Вселенной, и мы надеемся, что окончательная теория — если она вообще существует — окажется простой и элегантной.

Однако «просто и элегантно» не значит «легко». Например, уравнения Максвелла несут глубокий смысл, и для того чтобы понять, что они означают, необходимо приложить достаточно много усилий. Тем не менее они просты в том смысле, что позволяют в сжатом виде выразить истинную суть электрических и магнитных полей. Кроме того, они, без сомнения, элегантны. То же самое можно сказать об уравнениях Эйнштейна, описывающих гравитацию, и уравнениях неабелевой калибровочной теории, полученных Янгом и Миллсом. Единая теория должна их все сочетать, как симфония сплетает вместе голоса разных инструментов.

Стандартная модель — это шаг в желаемом направлении, и экспериментальное подтверждение ее истинности (включая недавнее открытие бозона Хиггса) стало настоящим триумфом. Однако это не окончательная теория Вселенной: как минимум, она не включает гравитационную силу, которая оказалась самой неуловимой. Общая теория относительности Эйнштейна дает хорошее представление о гравитации в классическом ее понимании, то есть при работе силы на больших расстояниях. Однако у нас нет поддающейся экспериментальной проверке квантовой теории, которая предоставляла бы описание действия гравитации на очень маленьком расстоянии. Даже если сосредоточиться на трех оставшихся силах природы, Стандартная модель тоже оставляет слишком много открытых вопросов и не учитывает огромный объем материи, наблюдаемой астрономами (которая называется «темной материей»). Из всего этого следует, что Стандартная модель — это пока что лишь отрывочный черновик окончательной симфонии.

Ясно одно: партитура окончательной симфонии будет написана на языке математики. Действительно, после того как Янг и Миллс опубликовали свою знаменитую статью, представляющую неабелевы калибровочные теории, физики, к своему удивлению, осознали, что математический инструментарий, необходимый для их теорий, был разработан математиками еще несколько десятилетий назад без всякой оглядки на физику. Янг, получивший

впоследствии Нобелевскую премию, такими словами описывал благоговейный трепет перед собственным открытием:⁸

Это была не просто радость. Было что-то еще, иное — более глубокое чувство. В конце концов, что может быть непостижимее, что может внушать большее благоговение, чем понимание того, что структура физического мира непосредственно связана с глубочайшими математическими концепциями — концепциями, которые были разработаны исключительно на основании логики и красоты формы?

Подобное восхищение сквозит и в словах Альберта Эйнштейна:⁹ «Как так может быть, что математика, будучи, в конце концов, продуктом человеческого разума, не зависящим от практического опыта, так восхитительно присуща объектам реального мира?»

Концепции, которые Янг и Миллс использовали для описания сил природы, появились в математике раньше по одной простой причине. Они естественным образом принадлежат парадигме геометрии, при разработке которой математики руководствуются внутренней логикой дисциплины. Это великолепный пример того, что другой лауреат Нобелевской премии физик Юджин Вигнер назвал «неоправданной эффективностью математики в естественных науках».¹⁰ Хотя ученые уже многие века пользуются такой «эффективностью», причины этого явления все еще недостаточно ясны. Математические истины существуют объективно и не зависят ни от физического мира, ни от человеческого мозга. Нет никакого сомнения в наличии глубоких связей между миром математических идей, физической реальностью и человеческим сознанием, и мы должны уделить их исследованию самое пристальное внимание. (Подробнее мы обсудим это в главе 18.)

Кроме того, для того чтобы выйти за рамки Стандартной модели, нам требуются новые идеи. Одна из таких идей — суперсимметрия. Действительно ли она существует в нашей Вселенной — тема бесчисленных научных споров и обсуждений. Пока что никаких ее следов обнаружить не удалось. Окончательный вердикт относительно истинности любой теории можно вынести только посредством эксперимента, поэтому пока ее существование не будет доказано на практике, суперсимметрия останется сугубо

теоретическим построением, какой бы красивой и привлекательной ни казалась идея. Однако даже если суперсимметрия в реальном мире не встречается, эта идея все же обеспечивает удобный математический аппарат, который мы можем применять для построения новых моделей в квантовой физике. Подобные модели не так уж сильно отличаются от моделей, описывающих физику реального мира, но их зачастую намного проще анализировать благодаря тому, что они намного более симметричны. Мы надеемся, что знания, полученные на основании этих теорий, окажутся полезными для развития реалистичных теорий нашей Вселенной, независимо от того, существует в ней суперсимметрия или нет.

Точно так же, как у теории электромагнетизма, у неабелевых калибровочных теорий есть максимальное суперсимметричное расширение. Для получения таких суперсимметричных теорий мы забрасываем в котел дополнительные частицы — как бозоны, так и фермионы, чтобы как можно сильнее приблизиться к идеальному балансу между ними. Следовательно, вполне естественным становится вопрос, обладают ли эти теории аналогом электромагнитного дуализма.

Физики Клаус Монтонен и Дэвид Олив занимались этим вопросом¹¹ в конце 1970-х годов. Основываясь на результатах более ранней работы¹² Питера Годдарда (будущего директора Института высших исследований), Джина Найдса и Дэвида Олива, они в своем исследовании пришли к поразительному заключению: да, в суперсимметричных неабелевых калибровочных теориях действительно существует электромагнитный дуализм, но, в целом, эти теории не являются самодвойственными сами по себе. Как мы уже говорили выше, если в электромагнетизме заменить все электрические штуки всеми магнитными штуками и наоборот, то мы получим ту же самую теорию, лишь заряд электрона изменится на обратный. Однако выясняется, что если то же самое проделать в общей суперсимметричной калибровочной теории с калибровочной группой G , то в результате получится *другая* теория. Она все так же будет калибровочной теорией, но с другой калибровочной группой (и также с одним инвертированным параметром, представляющим собой аналог заряда электрона).

И какой же будет калибровочная группа в этой двойственной теории? Оказывается, это ${}^L G$, двойственная группа Ленглендса для группы G .

Годдард, Найтс и Олив обнаружили это, выполнив скрупулезный анализ электрических и магнитных зарядов в калибровочной теории с калибровочной группой G . В электромагнетизме, то есть калибровочной теории, калибровочная группа которой является группой окружности, значения обоих зарядов целочисленные. Когда мы меняем их местами, один набор целых чисел заменяется другим набором целых чисел. Вследствие этого теория остается неизменной. Однако ученые продемонстрировали, что в общей калибровочной теории электрические и магнитные заряды принимают значения из двух разных множеств. Назовем их S_e и S_m . Математически их можно выразить в терминах калибровочной группы G (как именно — для нас в данный момент несущественно).¹³

Выясняется, что работа электромагнитного дуализма заключается в том, что S_e становится S_m , а S_m становится S_e . Так что вопрос таков: существует ли другая группа G' , для которой S_e — то же самое, что S_m для G , а S_m — то же самое, что S_e для G (и это также должно быть совместимо с некоторыми дополнительными данными, определяемыми G и G'). Совсем неочевидно, что группа G , в принципе, существует, но ученые доказали, что да, существует, и даже продемонстрировали способ ее построения. Тогда они еще не знали, что G' уже была построена Ленглендсом десятилетием раньше, причем очень похожим способом, несмотря на то что мотивы, которыми он руководствовался, были абсолютно иными. Эта группа G' — не что иное, как двойственная группа Ленглендса ${}^L G$.

Почему электромагнитный дуализм подводит нас к той же двойственной группе Ленглендса, которую математики открыли совсем в другом контексте, оставалось большим вопросом, на который мы и хотели попробовать найти ответ на встрече в Принстоне.

Глава 17. В поисках скрытых связей

Расположенный всего в часе езды на поезде от Нью-Йорка, Принстон выглядит типичным северо-восточным американским пригородом. Институт перспективных исследований, который в научном сообществе принято называть просто «Институтом», находится на окраине Принстона, в буквальном смысле в лесу. Это тихая живописная местность: в небольших прудах плавают утки, деревья отражаются в стоячей воде. Институт, представляющий собой комплекс из двух- и трехэтажных кирпичных зданий, создающих атмосферу 1950-х годов, излучает интеллектуальную мощь. Тихие коридоры и главная библиотека, в которой работал Эйнштейн и другие гиганты мира науки, буквально пропитаны богатой историей этого научного заведения.

Именно здесь мы провели нашу встречу в марте 2004 года. Несмотря на уведомление за довольно короткий срок, реакция на отправленные в декабре приглашения превзошла наши ожидания. Собралось около двадцати участников, поэтому, объявив начало собрания, я прежде всего попросил присутствующих по очереди представиться. Мне все время хотелось себя ущипнуть, чтобы убедиться в том, что это не сон: передо мной сидели бок о бок Виттен и Ленглендс, здесь же Питер Годдард и несколько его коллег из математической школы и школы естественных наук. Среди участников Дэвид Олив, соавтор знаменитых работ Монтонена — Олива и Годдарда — Найтса — Олива. И, разумеется, Бен Манн.

Все прошло согласно намеченному плану. По сути, мы обсудили все то же, о чем я рассказываю вам в этой книге: зарождение программы Ленглендса в теории чисел и гармоническом анализе и последующий переход к кривым над конечными полями и римановым поверхностям. Также мы уделили немало времени разъяснению построения Бейлинсона — Дринфельда и моей с Фейгиным работе, посвященной алгебрам Каца — Муди, а также ее связям с двумерными квантовыми теориями поля.

В отличие от типичной конференции наша встреча была построена на постоянном взаимодействии докладчиков и аудитории. Это было очень насыщенное мероприятие; обсуждение не прекра-

щалось ни на минуту, даже по пути из комнаты для совещаний в кафетерий и обратно.

В течение всей встречи Виттен принимал в происходящем самое активное участие. Он сидел в первом ряду, внимательно слушал и задавал вопросы, постоянно подбадривая докладчиков. На третий день утром он сказал мне: «Я бы хотел выступить во второй половине дня. Похоже, что у меня появилась дельная мысль относительно всего этого».

После обеда он в общих чертах описал, какие возможны связи между двумя областями. Это стало началом новой теории, объединяющей математику и физику, которую он вместе со своими коллегами и многими другими заинтересованными учеными продолжает разрабатывать и сегодня.

Как уже говорилось выше, в третьем столбце розеттского камня Вейля геометрическая версия программы Ленглендса вращается вокруг римановых поверхностей. Все эти поверхности двумерны. Например, как мы обсуждали в главе 10, на сфере — простейшей римановой поверхности — действуют две координаты: широта и долгота. Вот почему у нее два измерения. Все прочие римановы поверхности также двумерны: небольшая окрестность каждой их точки выглядит как фрагмент двумерной плоскости, и поэтому точка может быть описана двумя независимыми координатами.

В то же время калибровочные теории, в которых наблюдается электромагнитный дуализм, определяются в четырехмерном пространстве — времени. Виттен начал с применения «размерной редукции» четырехмерной калибровочной теории, для того чтобы сжать ее до двух измерений и тем самым связать ее с другой теорией.

Действительно, размерная редукция — это стандартный инструмент в физике: мы аппроксимируем заданную физическую модель, выбрав лишь определенные степени свободы и отбросив остальные. Например, представьте, что вы летите в самолете, а стюардесса, стоя в проходе, подает вам стакан воды. Предположим для простоты, что рука стюардессы движется перпендикулярно направлению движения самолета. У скорости стакана две составляющих: первая — это скорость самолета, а вторая — скорость руки стюардессы, подающей вам стакан. Однако первая намного больше второй, поэтому для описания движения стакана

в воздухе с точки зрения неподвижного наблюдателя на земле мы вполне можем игнорировать вторую составляющую скорости и просто считать, что стакан движется с той же скоростью, что и самолет. Таким образом, мы можем редуцировать двумерную задачу, включающую две составляющие скорости, до одномерной, включающей только доминирующую составляющую.

В нашем контексте размерная редукция реализуется следующим образом: мы рассматриваем геометрическую фигуру (или многообразие), являющуюся произведением двух римановых поверхностей. Здесь «произведение» означает, что мы оперируем новой геометрической фигурой, координаты которой — это координаты обеих этих поверхностей, взятые вместе.

В качестве простого примера рассмотрим произведение двух прямых. У каждой прямой одна координата, поэтому у их произведения будут две независимые координаты. Следовательно, это будет плоскость: каждая точка на плоскости представлена парой координат (рис. 17.1). Это и есть координаты двух прямых, взятые вместе.

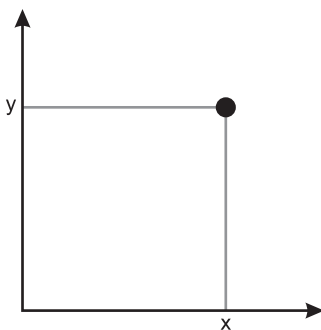


Рис. 17.1

Аналогично, произведением прямой и окружности будет цилиндр. У него также две координаты: одна линейная и одна на окружности (рис. 17.2).

Когда мы берем произведение, размерности складываются. В примерах, которые мы только что рассмотрели, все исходные объекты одномерны, а их произведения двумерны. Вот другой пример: произведением прямой и плоскости будет трехмерное пространство. Его размерность равна $3 = 1 + 2$.



Рис. 17.2

Подобно этому размерность произведения двух римановых поверхностей равна сумме их размерностей, то есть $2 + 2 = 4$. Мы можем нарисовать изображение римановой поверхности (несколько таких рисунков вы уже видели в предыдущих главах), но невозможно нарисовать четырехмерное многообразие. По этой причине мы изучаем многообразия математически, применяя те же методы, что и для фигур меньшей размерности, которые можно с легкостью представить в уме. Такая возможность — хорошая иллюстрация мощи математической абстракции, о чем мы уже говорили в главе 10.

Итак, предположим, что одна из двух римановых поверхностей — назовем ее X — по размеру намного меньше другой, которую мы назовем Σ . В этом случае эффективные степени сосредоточены в Σ , и мы сможем приблизительно описать четырехмерную теорию на произведении двух поверхностей с помощью лишь одной из них, а именно теории на Σ . Эту теорию физики называют «эффективной теорией», и она двумерна. Такое приближение будет становиться все лучше и лучше по мере того, как мы будем масштабировать X , делая ее размер все меньше и меньше, но сохраняя форму (обратите внимание, что эффективная теория все так же зависит от формы X). Таким образом мы переходим от четырехмерной суперсимметричной калибровочной теории на произведении X и Σ к двумерной теории, определенной на Σ .

Однако, прежде чем углубляться в подробное обсуждение природы этой теории, давайте поговорим о том, что мы подразумеваем под квантовой теорией поля в целом. Например, в электромагнетизме мы изучаем электрические и магнитные поля в трехмерном пространстве. Каждое из них представляет собой то, что математики называют векторным полем. Удобной аналогией будет векторное поле, описывающее ветровой режим: в каждой точке

пространства ветер имеет определенное направление и определенную скорость, и это изображается направленным отрезком линии, привязанным к данной точке, — математики называют его вектором. Набор таких векторов, привязанных ко всем точкам в пространстве, — это векторное поле. Всем нам доводилось видеть представление ветрового режима в форме векторного поля на метеорологических картах.

Аналогично у заданного магнитного поля есть определенные направление и сила в каждой точке пространства (см. рис. 16.3). Следовательно, это также векторное поле. Другими словами, у нас есть правило, сопоставляющее вектор с каждой точкой нашего трехмерного пространства. Неудивительно, что математики называют это правило «отображением» нашего трехмерного пространства на трехмерное векторное пространство. Если мы проследим, как заданное магнитное поле меняется с течением времени, то получим отображение четырехмерного пространства-времени на трехмерное векторное пространство (это как смотреть на непрерывно изменяющуюся метеорологическую карту на экране телевизора). Точно так же любое заданное электрическое поле, меняющееся во времени, может быть описано как отображение четырехмерного пространства-времени на трехмерное векторное пространство. Электромагнетизм — это математическая теория, описывающая эти два отображения.

В классической теории электромагнетизма нас интересуют только отображения, соответствующие решениям уравнений Максвелла. В противоположность этому в квантовой теории мы изучаем *все* отображения. Действительно, любые вычисления в квантовой теории поля включают суммирование по всем возможным отображениям, но каждое отображение при этом взвешивается, то есть умножается на определенный коэффициент. Коэффициенты определены таким образом, что отображения, соответствующие решениям уравнений Максвелла, вносят преобладающий вклад, и все же остальные отображения также имеют значение.

Отображения из пространства-времени на различные векторные пространства присутствуют во многих других квантовых теориях поля (например, в неабелевых калибровочных теориях). Однако не все квантовые теории поля основываются на векторах. Существует класс квантовых теорий поля, называемых сигма-моделями, в которых мы рассматриваем отображения из

пространства–времени на искривленную геометрическую фигуру, или многообразие. Такое многообразие называется целевым многообразием. Например, это может быть сфера. Подобные сигма-модели впервые были изучены для случая четырехмерного пространства–времени, но они также имеют смысл, если мы преобразуем пространство–время в многообразие любой другой размерности. Таким образом, какое бы целевое многообразие и какое бы пространственно-временное многообразие мы ни выбрали, для них существует сигма-модель. Например, в качестве нашего пространства–времени можно взять двумерную риманову поверхность, а в качестве целевого многообразия — группу Ли $SO(3)$. Тогда соответствующая сигма-модель будет описывать отображения из этой римановой поверхности на $SO(3)$.

Рисунок 17.3 иллюстрирует подобное отображение: слева находится риманова поверхность, а справа — целевое многообразие. Стрелочка представляет отображение первого на второе, то есть правило, сопоставляющее точку на целевом многообразии с каждой точкой римановой поверхности.

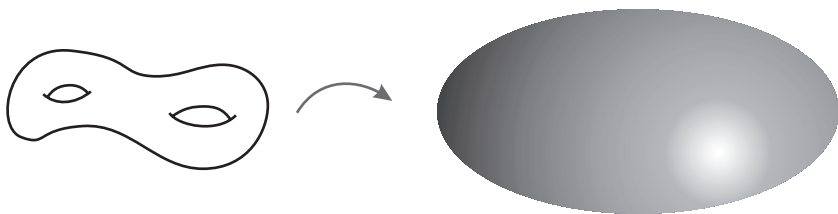


Рис. 17.3

В классической сигма-модели мы рассматриваем отображения из пространства–времени на целевое многообразие, решающие уравнения движения (которые представляют собой аналог уравнений Максвелла для электромагнетизма); такие отображения называются гармоническими. В квантовой сигма-модели все интересующие нас величины, например так называемые корреляционные функции, вычисляются путем суммирования по всем возможным отображениям с присвоением веса каждому отображению (то есть с умножением каждого отображения на определенный коэффициент).

Вернемся к нашей проблеме: какая двумерная квантовая теория поля описывает размерную редукцию четырехмерной

суперсимметричной калибровочной теории с калибровочной группой G на $\Sigma \times X$ при условии масштабирования X так, чтобы ее размер стал очень мал? Оказывается, что этой теорией является суперсимметричное расширение сигма-модели отображений из Σ на определенное целевое многообразие M , которое определяется римановой поверхностью X и калибровочной группой G исходной калибровочной теории. Условная запись должна отражать это, поэтому мы обозначим это многообразие $M(X, G)$.¹

Как и раньше, в ситуации с теорией групп (мы обсуждали это в главе 2), когда физики наткнулись на эти многообразия, они обнаружили, что математики здесь уже побывали. Действительно, у этих многообразий даже есть собственное название: *пространства модулей Хитчина*, в честь британского математика Найджела Хитчина, профессора Оксфордского университета, который открыл эти пространства и занимался их изучением в середине 1980-х годов. Почему физики заинтересовались этими пространствами, понятно: они появляются при выполнении размерной редукции четырехмерной калибровочной теории. Однако причины, по которым данными пространствами могут интересоваться математики, кажутся куда менее ясными.

К счастью, Найджел Хитчин представил подробный отчет² об истории этого открытия, и это превосходный пример утонченного взаимодействия математики и физики. В конце 1970-х годов Хитчин, Дринфельд и два других математика, Майкл Атья и Юрий Манин, изучали так называемые инстантонные уравнения, предложенные физиками в процессе исследования калибровочных теорий. Инстантонные уравнения были записаны в плоском четырехмерном пространстве-времени. После этого Хитчин занялся изучением дифференциальных уравнений в плоском трехмерном пространстве, так называемых монопольных уравнений, которые получают посредством размерной редукции инстантонных уравнений с четырех до трех измерений. Они представляли интерес с физической точки зрения, но также оказалось, что они обладают интригующей математической структурой.

На следующем этапе совершенно естественным шагом было взглянуть на дифференциальные уравнения, получаемые путем редукции уравнений инстантона с четырех до двух измерений. К сожалению, физики обнаружили, что у этих уравнений отсутствуют нетривиальные решения в плоском двумерном простран-

стве (то есть на плоскости), поэтому они не стали углубляться в дальнейшее их изучение. Хитчин же высказал идею о том, что эти уравнения можно записать на любой искривленной римановой поверхности, в том числе такой, как поверхность пончика или кренделька. Физики упустили этот момент, так как в то время (в начале 1980-х годов) они не слишком интересовались квантовыми теориями поля на подобных искривленных поверхностях. Однако Хитчин, будучи математиком, заметил, что решения на таких поверхностях обладают богатым потенциалом. Представив свое пространство модулей $M(X, G)$ как пространство решений этих уравнений на римановой поверхности X (для случая калибровочной группы G),* он обнаружил, что это весьма замечательное многообразие; в частности, оно обладает «гипер-Кэлеровой метрикой», примеров которой до того времени было известно совсем немного. Другие математики последовали по его стопам.

Прошло около десяти лет, и физики начали осознавать важность этих многообразий для квантовой физики, хотя интерес к ним и оставался довольно ограниченным до появления работы Виттена и его коллег, о которой я сейчас веду речь. (Также важно отметить, что пространствам модулей Хитчина, исходно появившимся в правом столбце розеттского камня Андре Вейля, недавно было найдено применение в программе Ленглендса, но уже в среднем столбце, где роль римановых поверхностей играют кривые над конечными полями.³)

Взаимодействие между математикой и физикой — это двухсторонний процесс, и каждая из этих областей вдохновляет другую и подпитывается от нее. В какие-то моменты одна из них может вырваться вперед в проработке определенной идеи, но стоит фокусу сместиться, как пальму первенства перехватывает другая. И вот так они и взаимодействуют в бесконечном плодотворном цикле взаимного влияния.

Итак, вооружившись идеями как математиков, так и физиков, применим правила электромагнитного дуализма к четырехмерной калибровочной теории с калибровочной группой G . Мы получим калибровочную теорию с калибровочной группой ${}^L G$, двойственной группой Ленглендса для G . (Вспомните, что, применив дуализм

* В этом отношении Хитчин цитирует великого немецкого поэта Гёте: «Математики подобны французам: что бы вы им ни сказали, они переводят это на свой язык, и тотчас это превратится в нечто совершенно иное».

дважды, мы возвращаемся к исходной группе G . Другими словами, двойственная группа Ленглендса для ${}^L G$ — это сама группа G .) Эффективные двумерные сигма-модели на Σ , связанные с G и ${}^L G$, также будут эквивалентны — или двойственны — друг другу. Для сигма-моделей такой тип дуализма носит название *зеркальной симметрии*. В одной из сигма-моделей мы рассматриваем отображения из Σ на пространство модулей Хитчина $M(X, G)$, соответствующее G ; в другой мы рассматриваем отображения из Σ на пространство модулей Хитчина $M(X, {}^L G)$, соответствующее ${}^L G$. Два пространства модулей Хитчина и их сигма-модели по идее никак не связаны друг с другом, поэтому зеркальная симметрия между ними — это такой же поразительный сюрприз, что и электромагнитный дуализм исходных калибровочных теорий в четырех измерениях.

Интерес физиков к двумерным сигма-моделям подобного типа объясняется, в частности, важной ролью, которую эти модели играют в теории струн. Как я упоминал в главе 10, теория струн постулирует, что фундаментальными объектами природы являются не точечные элементарные частицы (не обладающие внутренней геометрией и, следовательно, нульмерные), а одномерные протяженные объекты, называемые струнами, которые могут быть открытыми или замкнутыми. У открытых струн два конца, а закрытые струны представляют собой маленькие петли, подобные тем, с которыми мы встречались в главе 10 (рис. 17.4).

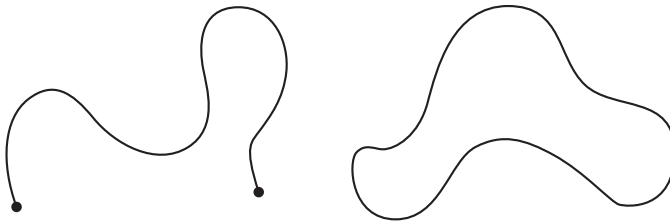


Рис. 17.4

Идея теории струн состоит в том, что вибрации этих крохотных струн, движущихся сквозь пространство-время, создают элементарные частицы и силы, действующие между ними.

Сигма-модели появляются в теории струн, когда мы начинаем задумываться о том, как же струны двигаются. В стандартной

физике, когда точечная частица движется сквозь пространство, ее траектория представляет собой одномерный путь. Позиции частицы в разные моменты времени могут быть представлены точками на этом пути (рис. 17.5).

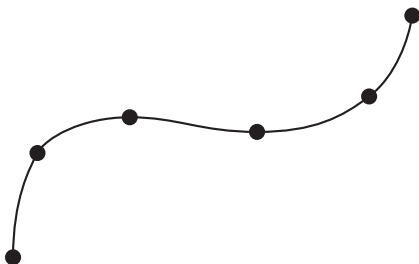


Рис. 17.5

В случае закрытой струны, однако, ее движение охватывает двумерную поверхность. Позиция струны в каждый конкретный момент времени — это петля на данной поверхности (рис. 17.6).

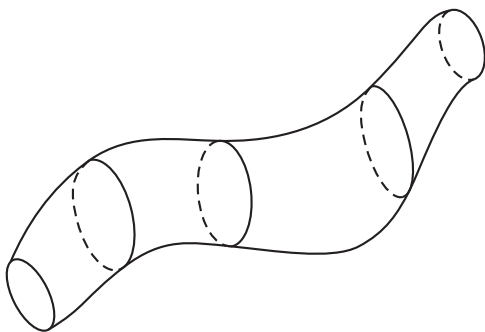


Рис. 17.6

Возможно также взаимодействие между струнами: струна может «расщепиться» на два или более фрагментов и эти фрагменты могут заново собраться вместе, как показано на рис. 17.7. Это дает нам риманову поверхность более общего вида, с произвольным числом «отверстий» (и с граничными окружностями). Она называется мировым листом струны.

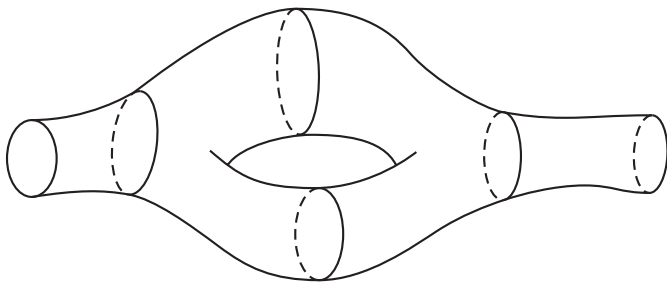


Рис. 17.7

Подобная траектория может быть представлена римановой поверхностью Σ , вложенной в пространство-время S , и, следовательно, отображением из Σ в S . Это в точности те типы отображений, которые наблюдаются в сигма-модели на Σ с целевым многообразием S . Однако сейчас по сравнению с традиционными квантовыми теориями поля, такими как электромагнетизм, у нас все поставлено с ног на голову: пространство-время S теперь является целевым многообразием этой сигма-модели, то есть адресатом отображений, а не их источником.

В теории струн существует идея о том, что, выполняя вычисления в этих сигма-моделях и суммируя результаты по всем возможным римановым поверхностям Σ (то есть по всем возможным путям распространения струн в фиксированном пространстве-времени S),⁴ мы можем с высокой точностью воспроизвести физические процессы, наблюдаемые в пространстве — времени S .

К сожалению, теория, которая при этом получается, страдает несколькими серьезными недостатками (в частности, она допускает существование «тахионов» — элементарных частиц, скорость движения которых превышает скорость света и существование которых запрещает теория относительности Эйнштейна). Однако если мы вместо этого возьмем суперсимметричное расширение теории струн, то ситуация резко улучшится. Мы получим так называемую *теорию суперструн*. Тем не менее, здесь тоже не все гладко: оказывается, что теория суперструн математически непротиворечива лишь в случае пространства-времени S с десятью измерениями, что расходится с размерностью нашего мира, пространство-время которого четырехмерно (три измерения пространства и одно измерение времени).

Однако вполне возможно, что наш мир в действительности представляет собой произведение — в том смысле как разъяснялось выше, — наблюдаемого нами четырехмерного пространства-времени и крошечного шестимерного многообразия M , которое настолько мало, что мы не можем увидеть его, применяя доступные инструменты. Если это действительно так, то мы оказываемся в ситуации, схожей с размерной редукцией (с четырех до двух измерений), которую мы обсуждали выше: десятимерная теория порождает эффективную четырехмерную теорию. Ученые надеются, что эта эффективная теория содержит описание нашей Вселенной, и в частности включает Стандартную модель и квантовую теорию гравитации. Обещание потенциальной унификации всех известных сил природы — это главная причина, по которой теория суперструн вызвала такой большой интерес в последние годы.⁵

Тогда сразу же возникает новый вопрос: что это за шестимерное многообразие M ?

Для того чтобы оценить, насколько сложен этот вопрос, предположим сначала, что теория суперструн математически непротиворечива в шести измерениях, а не в десяти. Тогда у нас только два дополнительных измерения, и нам нужно найти двумерное многообразие M . В этом случае выбор небогат: M должно быть римановой поверхностью, которая, как мы знаем, характеризуется родом, то есть числом «дырок». Помимо этого, известно, что для того, чтобы теория работала, многообразие M должно удовлетворять определенным дополнительным свойствам, например это должно быть так называемое многообразие Калаби — Яу, названное так в честь двух математиков — Эудженио Калаби и Шинтана Яу, которые первыми математически исследовали подобные пространства (к слову, задолго до того, как данной темой заинтересовались физики).⁶ Единственная риманова поверхность, обладающая нужным свойством, — это тор. Следовательно, если бы M было двумерным многообразием, мы были бы в состоянии его вычислить — это был бы тор.⁷ Однако по мере увеличения числа измерений многообразия M возрастает и число альтернатив. Если M — шестимерное многообразие, то, по некоторым оценкам, нам необходимо сделать выбор из 10^{500} вариантов — это невообразимо большое значение. Какое из этих шестимерных многообразий реализовано в нашей Вселенной и как проверить

это экспериментально? Это один из ключевых вопросов теории струн, остающийся пока без ответа.⁸

В любом случае из этого обсуждения должно быть очевидно, что сигма-модели играют ключевую роль в теории суперструн, а их зеркальная симметрия тесно связана с дуальностями в теории суперструн.⁹ Помимо этого, у сигма-моделей много приложений и за пределами теории струн. Физики занимаются их самым тщательным изучением, исследуя все возможные варианты, а не только сигма-модели, в которых целевое многообразие M шестимерно.¹⁰

Итак, в своем выступлении на конференции в 2004 году Виттен прежде всего применил технику размерной редукции (с четырех до двух измерений), для того чтобы понизить электромагнитный дуализм двух калибровочных теорий (с калибровочными группами G и ${}^L G$) до зеркальной симметрии двух сигма-моделей (целевыми многообразиями в которых служат пространства модулей Хитчина, связанные с двумя двойственными группами Ленглендса, G и ${}^L G$). После этого он задал вопрос: как мы могли бы связать эту зеркальную симметрию с программой Ленглендса?

Предложенный им ответ был весьма интересным. Обычно в квантовых теориях поля мы изучаем объекты, называемые корреляционными функциями, которые описывают взаимодействие частиц. Например, с помощью подобной функции можно описать вероятность появления определенной частицы вследствие столкновения двух других. Однако оказывается, что формальное математическое представление квантовой теории поля куда богаче: в дополнение к этим функциям оно также содержит намного более тонкие объекты, схожие с «пучками», которые мы обсуждали в главе 14 в приложении к словарю Гротендика. Эти объекты носят название «D-браны», или просто «браны».

Браны происходят из теории суперструн, а их название — это сокращение слова «мембрана». Браны естественным образом возникают при рассмотрении движения открытых струн на целевом многообразии M . Самый простой способ описать позиции обоих концов открытой струны — постановить, что одна из конечных точек принадлежит подмножеству M под названием B_1 , а вторая — другому подмножеству, B_2 . Это схематически изображено на рис. 17.8, на котором тонкая кривая представляет открытую струну с двумя конечными точками: одна из них на B_1 , а другая на B_2 .

Таким образом, подмножества (или, точнее, подмногообразия) B_1 и B_2 становятся действующими лицами в теории суперструн и в соответствующей сигма-модели. Эти подмножества являются прототипами общих бран, появляющихся в этих теориях.¹¹

Зеркальная симметрия между двумя сигма-моделями порождает определенное взаимоотношение между бранами в этих сигма-моделях. Предположение о его существовании первоначально сделал математик Максим Концевич в середине 1990-х годов; он назвал это отношение «гомологической зеркальной симметрией». Его подробнейшим образом изучали как физики, так и математики, особенно в последнее десятилетие.

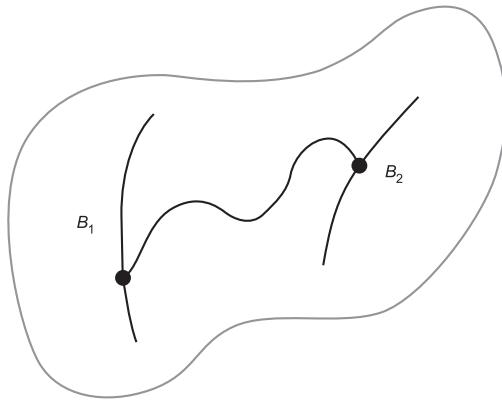
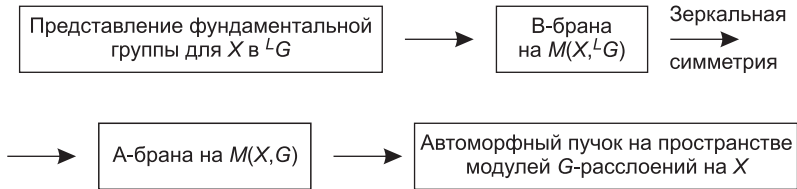


Рис. 17.8

Основная мысль выступления Виттена в Принстоне заключалась в том, что аналог соответствия Ленглендса мы найдем именно в этой гомологической зеркальной симметрии.

Сейчас важно отметить, что существуют две разновидности сигма-моделей, называемые «А-модель» и «В-модель». Они сильно различаются: та, где целевым многообразием является пространство модулей Хитчина $M(X, G)$, — это А-модель, а та, где в роли целевого множества выступает пространство модулей Хитчина $M(X, LG)$, — это В-модель. Браны в этих двух теориях носят названия «А-бран» и «В-бран» соответственно. Зеркальная симметрия подразумевает, что каждой А-бране на $M(X, G)$ соответствует В-брана на $M(X, LG)$, и наоборот.¹²

Напомним, что для того чтобы описать геометрическое отношение Ленглендса, необходимо связать автоморфный пучок с каждым представлением фундаментальной группы для X в ${}^L G$. Вот примерная схема, предложенная Виттеном и включающая построение с помощью зеркальной симметрии.



Хотя многие детали требовали пояснения, речь Виттена оказалась настоящим прорывом: в ней был продемонстрирован понятный способ поиска и описания связи между электромагнитным дуализмом и программой Ленглендса. В мир современной математики она привнесла целый букет новых идей, о которых математики не задумывались ранее (по крайней мере, не рассматривали их в связке с геометрической программой Ленглендса): категории бран, особая роль, которую модульные пространства Хитчина играют в программе Ленглендса, а также связь между А-бранами и автоморфными пучками. Физикам же она подарила математические идеи и догадки, благодаря которым понимание квантовой физики поднялось на более высокий уровень.

В течение следующих двух лет Виттен прорабатывал детали своего предложения в сотрудничестве с Антоном Капустиным — физиком из Калифорнийского технологического института, эмигрировавшим в США из России. Их совместная статья¹³ (объемом 230 страниц) была опубликована в апреле 2006 года и произвела фурор как в физическом, так и в математическом сообществе. Во вступительном абзаце статьи содержится описание многих концепций, которые мы с вами обсуждали в этой книге:

Программа Ленглендса для числовых полей объединяет многие классические и современные результаты в теории чисел и представляет собой широкое поле для исследований. У нее есть аналог для кривых над конечным полем — тема множества знаменитых и успешных работ. Помимо

этого проводились обширные исследования геометрической версии программы Ленглендса как для кривых над полем характеристики p , так и для обычных комплексных римановых поверхностей... В этой работе мы сосредоточили внимание на геометрической программе Ленглендса для комплексных римановых поверхностей. Наша цель — показать, что эта программа может рассматриваться как очередная глава в квантовой теории поля. Мы не предполагаем у читателя никакого предыдущего знакомства с программой Ленглендса; необходимым условием для ознакомления с содержанием статьи является понимание таких областей, как суперсимметричные калибровочные теории, электромагнитный дуализм, сигма-модели, зеркальная симметрия, браны и топологическая теория поля. Нашей задачей в этой работе было продемонстрировать, что появление программы Ленглендса — это естественное следствие применения знакомых физических инструментов для решения правильно поставленных задач.

Далее во введении Капустин и Виттен упоминают нашу встречу в Институте перспективных исследований (в частности, выступление моего бывшего ученика Давида Бен-Цви), ставшую точкой отсчета для этой работы.

В основной части доклада Капустин и Виттен представляют развернутое изложение идей, которые Виттен сформулировал на нашей принстонской встрече. В частности, они проливают свет на структуру возникающих в этой картине А-бран и В-бран и зеркальной симметрии между ними, а также на связь между А-бранами и автоморфными пучками.

Для того чтобы понять эти результаты, лучше всего начать с простого примера зеркальной симметрии. В работе Капустина и Виттена зеркальная симметрия наблюдается между двумя пространствами модулей Хитчина и соответствующими сигма-моделями. Но мы заменим эти пространства двумерными торами.

Такой тор можно считать произведением двух окружностей. Действительно, сетка на рис. 17.9 ясно показывает, что по своей структуре тор подобен ожерелью из бусин, нанизанных на цепочку.

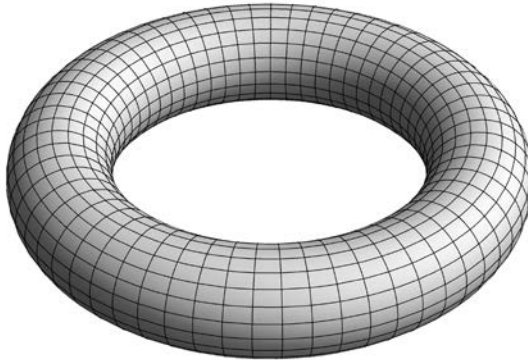


Рис. 17.9

Роль бусин играют вертикальные окружности на сетке, а роль струны, на которую они нанизаны, — горизонтальная окружность (представим, что она кроется внутри тора). Математик сказал бы, что ожерелье — это «расслоенное пространство», «слоями» которого служат бусины, а «базой» — струна. Точно так же тор представляет собой расслоенное пространство, слои которого — окружности и база — тоже окружность.

Обозначим радиус базовой окружности (струны) R_1 , а радиус окружностей слоев (бусин) — R_2 . Оказывается, зеркально двойственное многообразие для него — это тоже тор, который является произведением окружностей радиусом $1/R_1$ и R_2 . Такая инверсия радиуса схожа с инверсией электрического заряда, свойственной электромагнитному дуализму.

Итак, у нас есть два двойственных тора, являющихся зеркальным отражением друг друга. Радиусы одного из них, назовем его T , равны R_1 и R_2 , а радиусы второго, назовем его T^v , — $1/R_1$ и R_2 . Обратите внимание на то, что если базовая окружность тора T велика (то есть значение R_1 достаточно большое), то базовая окружность T^v будет маленькой (так как в этом случае $1/R_1$ мало), и наоборот. Подобный тип замены «большого» «маленьким» и наоборот характерен для всех дуализмов в квантовой физике.

Рассмотрим В-браны на T и А-браны на T^v . Соответствие между ними описывается зеркальной симметрией, и это отношение хорошо изучено (иногда его называют также «Т-дуальностью», где Т означает тор):¹⁴



Типичный пример В-браны на торе T — это так называемая нуль-брана, сконцентрированная в точке p на T . Оказывается, что ее двойственная А-брана на T^v , наоборот, «размазана» по всему тору T^v . Термин «размазана» требует дополнительного пояснения. Не вдаваясь в излишние детали, так как это может завести нас слишком далеко, укажем, что эта А-брана на T^v представляет собой сам тор T^v , снабженный дополнительной структурой, а именно представлением его фундаментальной группы в группе окружности (подобным тем, которые мы обсуждали в главе 15). Это представление определяется позицией исходной точки p на торе T , то есть в действительности между нуль-бранами на T и А-бранами, «размазанными» по T^v , существует взаимно однозначное соответствие.

У этого явления много общего с тем, что происходит при так называемом преобразовании Фурье, которое широко используется в обработке сигналов. Если применить преобразование Фурье к сигналу, сконцентрированному вокруг определенного момента времени, то мы получим сигнал, форма которого похожа на волну. Этот результирующий сигнал «размазан» по прямой, представляющей время, как показано на рис. 17.10.

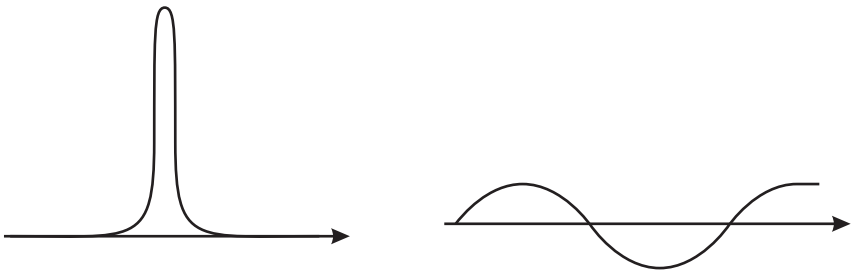


Рис. 17.10

Преобразование Фурье можно применять и ко многим другим типам сигналов; кроме того, существует обратное преобразование, позволяющее восстановить исходный сигнал. Необходимость трансформировать сложные сигналы в простые возникает довольно часто, и эту задачу можно решить с помощью преоб-

разования Фурье. Вот почему это такой важный прикладной инструмент. Аналогично, зеркальная симметрия означает, что сложным бранам на одном торе соответствуют простые на другом, и наоборот.

Выясняется, что с помощью зеркальной симметрии торов можно описать зеркальную симметрию между бранами на двух пространствах модулей Хитчина. Оказывается, что пространство модулей Хитчина — это расслоенное пространство с базой в виде векторного пространства и слоями, представляющими собой торы. Таким образом, все пространство — это набор торов, по одному для каждой точки базы. В простейшем случае и база, и тороидальные слои двумерны, а расслоение выглядит, как на рис. 17.11 (обратите внимание на то, что слои в разных точках базы могут быть разных размеров).

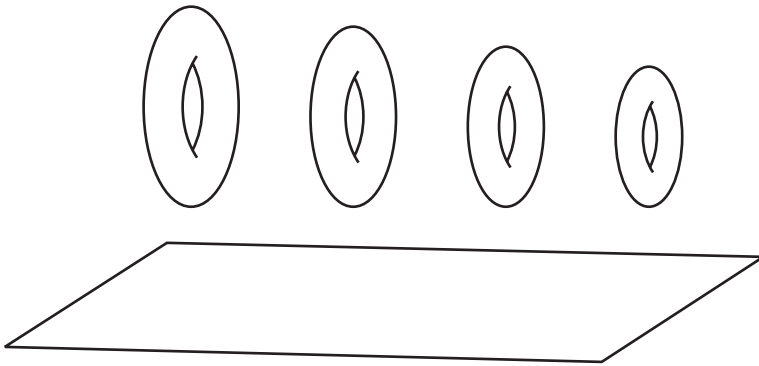


Рис. 17.11

Расслоение Хитчина можно представить себе как коробку с пончиками, причем пончики касаются не какой-то ограниченной сетки точек на дне картонной коробки — к *каждой* точке дна присоединен свой пончик. Таким образом, в коробке у нас бесконечно много пончиков — Гомер Симпсон был бы в восторге!

Оказывается, зеркальное двойственное модульное пространство Хитчина — то, которое связано с двойственной группой Ленглендса, — тоже выглядит как пончиковое/тороидальное расслоение, и база у него та же самая. («Пончики! Существует ли такая проблема, которая не решалась бы с помощью пончика?») Это означает, что над каждой точкой данной базы присутствуют два тороидальных

слоя: один в пространстве модулей Хитчина на стороне А-модели, а второй в пространстве модулей Хитчина на стороне В-модели. Более того, эти два тора являются зеркально двойственными друг к другу в том смысле, как описано выше (если радиусы одного равны R_1 и R_2 , то радиусы другого равны $1/R_1$ и R_2).

Это наблюдение дает нам возможность исследовать зеркальную симметрию между двумя двойственными пространствами модулей Хитчина в терминах расслоений, отталкиваясь от зеркальной симметрии между двойственными тороидальными слоями.

Например, пусть p — точка пространства модулей Хитчина $M(X, {}^L G)$. Рассмотрим нуль-брану, сконцентрированную в этой точке. Какова в этом случае зеркально двойственная А-брана на $M(X, G)$?

Точка p принадлежит тору, который представляет собой слой пространства $M(X, {}^L G)$ над точкой b базы (тор на рис. 17.12 слева, на стороне В-модели). Рассмотрим двойственный тор, являющийся слоем пространства $M(X, G)$ над той же точкой b (тор на рисунке справа, на стороне А-модели). Искомой двойственной А-браной на $M(X, G)$ будет А-брана, «размазанная» по двойственному тору. Это та же самая двойственная брана, которую мы встречаем в зеркальной симметрии между этими двумя торами.

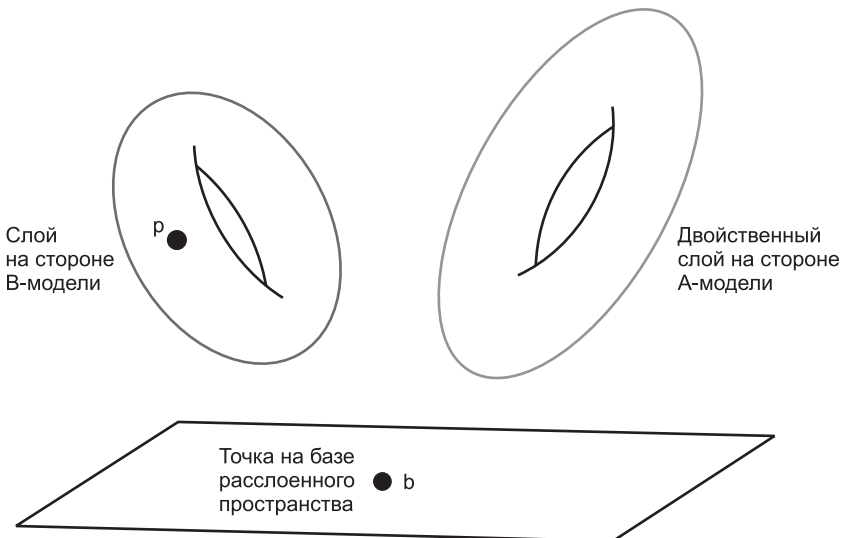
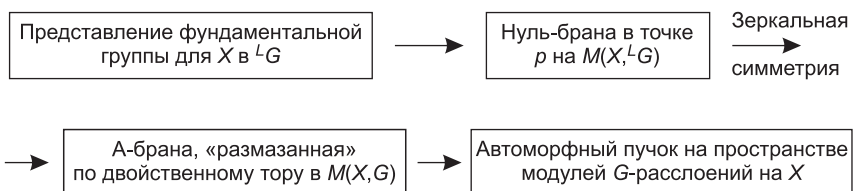


Рис. 17.12

Такой способ описания зеркальной симметрии через расслоения — с использованием двойственных тороидально расслоенных пространств — ранее был предложен Эндрю Строминджером, Шинтаном Яу и Эриком Заслоу для более общей ситуации. Сегодня он носит название SYZ-гипотезы или SYZ-механизма (от аббревиатуры, образованной первыми буквами фамилий ученых: Strominger, Yau и Zaslow).¹⁵ Это очень мощная идея: зеркальная симметрия для двойственных торов хорошо изучена, в то время как зеркальная симметрия для многообразий общего вида (таких, как пространства модулей Хитчина) все еще представляет для ученых определенную загадку. Таким образом, перейдя к случаю с торами, можно существенно упростить задачу. Разумеется, для того чтобы реализовать такой переход, необходимо представить два зеркальных двойственных многообразия в виде двойственных тороидальных расслоенных пространств над одной и той же базой (и их слои также должны удовлетворять определенным условиям). К счастью, в случае пространств модулей Хитчина у нас такие слои есть, поэтому мы можем смело применять SYZ-механизм (в общем случае размерность тороидальных слоев превышает два, но картинка от этого меняется не сильно).¹⁶

Теперь мы можем применить эту зеркальную симметрию для построения соответствия Ленглендса. Во-первых, выясняется, что точки пространства модулей Хитчина $M(X, {}^L G)$ — это в точности представления фундаментальной группы римановой поверхности X в ${}^L G$ (см. примечание 1 к этой главе). Возьмем нуль-брану, сконцентрированную в одной такой точке. Согласно SYZ-механизму, двойственная А-брана будет «размазана» по двойственному тору (слою двойственного пространства модулей Хитчина над той же самой точкой базы).

Капустин и Виттен не только дали детальное описание этих А-бран, но и объяснили, как преобразовывать их в автоморфные пучки геометрического соответствия Ленглендса. Таким образом, соответствие Ленглендса возникает согласно такой схеме:



Критически важный элемент этого построения — присутствие промежуточных объектов, а именно А-бран. Капустин и Виттен, таким образом, предложили построение соответствия Ленглендса в два шага. На первом шаге они конструируют А-брану, используя зеркальную симметрию, а затем из этой А-браны строят автоморфный пучок.¹⁷ Мы с вами пока что обсуждали только первый шаг — зеркальную симметрию. Однако и второй шаг представляет не меньший интерес. Идея о связи между А-бранами и автоморфными пучками действительно стала одним из главных прорывов в работе Капустина и Виттена — до них никто и не предполагал возможность ее наличия. Помимо этого, Капустин и Виттен предположили существование подобной связи в намного более общей ситуации. С тех пор эта идея породила огромный объем математических исследований.

Все это, как выразился мой папа, слегка тяжеловато: у нас тут и пространства модулей Хитчина, и зеркальная симметрия, А-браны, В-браны, автоморфные пучки... Пытаясь уследить за всеми ингредиентами, можно с легкостью заработать головную боль! Поверьте, даже в среде специалистов лишь немногие могут похвастаться пониманием всех аспектов этой конструкции. Но я отнюдь не пытаюсь заставить вас выучить все это наизусть. Мне лишь хочется указать на логические связи между этими объектами и продемонстрировать, каким творческим и многоплановым может быть процесс их изучения. Моя цель — рассказать, что движет учеными, как они делятся знаниями друг с другом и как применяют вновь обретенные знания для того, чтобы лучше понять ключевые вопросы.

Однако для того, чтобы все же немного облегчить восприятие, воспользуемся представленной ниже схемой, иллюстрирующей аналогии между объектами во всех трех столбцах розеттского камня Вейля (а также содержащей дополнительный столбец для квантовой физики). Я объединил левый и средний столбцы розеттского камня Вейля, так как присутствующие в них объекты чрезвычайно схожи.

| Теория чисел и кривые над конечными полями | Риманова поверхность X | Квантовая физика |
|--|---|--|
| Соответствие Ленглендса | Геометрическое соответствие Ленглендса | Зеркальная симметрия Электромагнитный дуализм |
| Группа Галуа | Фундаментальная группа для X | Фундаментальная группа для X |
| Представление группы Галуа в ${}^L G$ | Представление фундаментальной группы в ${}^L G$ | Нуль-брана на $M({}^L G, X)$ |
| Автоморфная функция | Автоморфный пучок | А-брана на $M(G, X)$ |

Взглянув на эту схему, мой папа поинтересовался, какой именно вклад внесли Капустин и Виттен таким образом в развитие программы Ленглендса. Это, конечно же, важный вопрос. Во-первых, привязка программы Ленглендса к зеркальной симметрии и электромагнитному дуализму означает возможность использования мощного арсенала этих областей квантовой физики для продвижения исследований в программе Ленглендса. И, наоборот, идеи программы Ленглендса, будучи перенесенными в физику, заставили физиков задать определенные вопросы относительно электромагнитного дуализма, которые никогда ранее не поднимались. Это уже привело ко многим потрясающим открытиям. Во-вторых, оказалось, что язык А-бран хорошо приспособлен для изучения программы Ленглендса. Структура многих из этих А-бран намного проще, чем у автоморфных пучков, известных своей сложностью. Следовательно, используя язык А-бран, мы можем распутать некоторые загадки программы Ленглендса.

Мне хотелось бы продемонстрировать конкретный пример применения этого нового языка. Для этого позвольте мне рассказать вам о нашей совместной с Виттеном работе,¹⁸ которую мы завершили в 2007 году. Для того чтобы объяснить, что мы сделали, мне необходимо познакомить вас с задачей, которую я пока что оставил на заднем плане, но которая тем не менее заслуживает внимания. В предыдущем обсуждении я исходил из того, что все слои в двух

модульных пространствах Хитчина — это привычные нам гладкие торы (как на рисунках выше: пончики идеальной формы). В действительности это верно не для всех слоев (хотя и верно для большинства). Существуют особые слои, внешний вид которых отличается: это вырожденные торы. Если бы вырожденных торов не было, SYZ-механизм дал бы нам полное описание зеркальной симметрии между бранами на двух пространствах модулей Хитчина. Однако присутствие вырожденных торов значительно усложняет ситуацию. Самая интересная и сложная часть зеркальной симметрии — это как раз то, что происходит с бранами, «живущими» на таких вырожденных торах.

При рассмотрении зеркальной симметрии Капустин и Виттен в своей статье ограничивались лишь гладкими торами. Таким образом, вопрос о вырожденных торах остался открытым. В нашей же работе с Виттеном мы объяснили, что происходит в случае простейших вырожденных торов, обладающих так называемыми «орбифолдными сингулярностями», таких как тор, сплюснутый в одной точке (рис. 17.13).

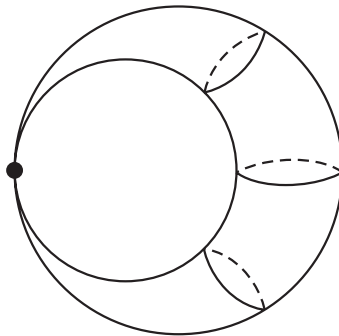


Рис. 17.13

Это изображение вырожденного тора, возникающего в том случае, когда наша риманова поверхность X сама по себе является тором, а группа ${}^L G$ — это $SO(3)$ (эта картинка взята непосредственно из нашей с Виттеном статьи). База расслоенного пространства Хитчина — это в данном случае плоскость. Для каждой точки данной плоскости, за исключением трех особых точек, слои представляют собой обычные гладкие торы. Таким образом, за пределами этих трех точек расслоение Хитчина — это всего лишь семейство

гладких торов/пончиков. Однако в окрестности каждой из трех специальных точек «шейки» тороидальных слоев/пончиков начинают сжиматься, как показано на рис. 17.14, где мы отслеживаем слой над точками, составляющими заданный путь на базе.

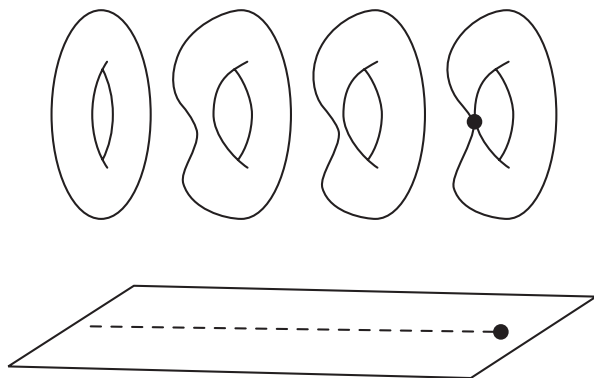


Рис. 17.14

Это как если бы Гомер Симпсон так обрадовался коробке с бесконечным запасом пончиков, что случайно наступил бы на нее, раздавив несколько штук (но не стоит переживать за Гомера — в коробке даже и после этого останется бесконечно много пончиков идеальной формы).

По мере приближения к отмеченной точке на базе (а это одна из трех особых точек, упомянутых выше) шейка тора в слое становится все тоньше и тоньше до тех пор, пока не схлопывается в отмеченной точке. На рис. 17.13 слой в отмеченной точке показан под другим углом. Теперь это уже не тор; это то, что мы называем «вырожденным» тором.

Вопрос, на который мы должны найти ответ, заключается в том, что происходит, когда нуль-брана на пространстве модулей Хитчина сконцентрирована в особой точке вырожденного тора, такой как точка, отмеченная на рис. 17.14, в которой шейка тора схлопывается. Математики называют это орбифолдной сингулярностью.

Оказывается, эта точка обладает дополнительной группой симметрии. В примере выше это та же группа, что и группа симметрий бабочки. Другими словами, она состоит из тождественного элемента и еще одного, соответствующего отражению крыльев

бабочки. Отсюда можно вывести, что в данной точке сконцентрирована не одна, а две разные нуль-браны. Спрашивается, каковы будут две соответствующие А-браны на зеркальном двойственном пространстве модулей Хитчина? (Обратите внимание на то, что в этом случае G будет группой $SU(2)$, являющейся двойственной группой Ленглендса к $SO(3)$.)

Мы с Витеном в нашей статье показали, что для каждой из трех особых точек на базе расслоенного пространства Хитчина вырожденный тор на зеркальной двойственной стороне будет выглядеть как на рис. 17.15 (изображение взято из нашей статьи).

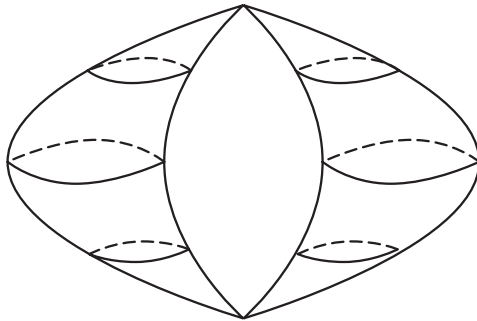


Рис. 17.15

Он появляется на расслоенном пространстве Хитчина почти так же, как показано на рис. 17.14; исключение заключается в том, что по мере приближения к одной из особых точек базы шейка тора в слое истончается в двух местах и при достижении особой точки на базе схлопывается в обоих.

Соответствующий вырожденный слой отличается от предыдущего тем, что теперь тор схлопывается в двух точках, а не в одной. Следовательно, этот вырожденный тор состоит из двух кусков. Математики называют их компонентами. Теперь мы можем дать ответ на наш вопрос: две искомые А-браны (зеркальные двойственные к двум нуль-бранам, сконцентрированным в точке сингулярности на первом вырожденном торе) — это А-браны, «размазанные» по каждой из двух компонент двойственного вырожденного тора.

Это является прототипом того, что происходит в общем случае. Когда мы рассматриваем два пространства модулей Хитчина как расслоенные пространства над одной и той же базой, мы на-

блюдаем вырожденные слои с обеих сторон. Однако механизмы вырождения различаются: если на стороне В-модели существует орбифолдная сингулярность с внутренней группой симметрии (как группа симметрий бабочки в примере выше), то слой на стороне А-модели состоит из нескольких компонент, аналогичных двум компонентам на рисунке выше. Выясняется, что этих компонент будет ровно столько, сколько элементов содержится в группе симметрии на стороне В-модели. Это гарантирует, что нуль-браны, сконцентрированные в точках сингулярности, в точности соответствуют А-бранам, «размазанным» по этим различным компонентам.

В нашей с Виттеном работе мы тщательно проанализировали это явление. Довольно неожиданным результатом стало то, что это породило новые идеи, относящиеся не только к геометрической программе Ленглендса для римановых поверхностей, но также к среднему столбцу розеттского камня Вейля, то есть к кривым над конечными полями. Это хороший пример того, как находки и достижения в одной области (в данном случае в квантовой физике) распространяются во всех направлениях, в том числе возвращая нас к корням программы Ленглендса.

В этом и кроется мощь этих связей. Теперь в розеттском камне Вейля не три, а четыре столбца: четвертым стал столбец, посвященный квантовой физике. Открывая что-то новое в четвертом столбце, мы прорабатываем, какими должны быть аналогичные результаты в остальных трех, и это зачастую становится источником новых идей и догадок.

Мы с Виттеном начали работу над этим проектом в апреле 2007 года, когда я находился с визитом в Институте в Принстоне, а закончили на Хэллоуин, 31 октября (я хорошо помню эту дату, так как после засылки статьи в Сеть я сразу же отправился на костюмированную вечеринку). В течение этих семи месяцев я трижды приезжал в Институт, каждый раз оставаясь там примерно на неделю. Каждый день мы с Виттеном встречались для продолжения нашей работы в его удобном институтском кабинете. Остальное время мы находились кто где: я в те дни в основном жил между Беркли и Парижем, но также пару недель провел в математическом институте в Рио-де-Жанейро. Однако мое физическое местоположение не имело никакого значения:

единственным условием для продолжения нашего сотрудничества было наличие подключения к Интернету. В самые напряженные периоды мы обменивались десятками электронных сообщений в день, обдумывая разнообразные вопросы, перебрасывая друг другу черновики глав статьи и т. п. Одинаковые имена порождали своеобразную зеркальную симметрию и в наших сообщениях: каждое начиналось с «Уважаемый Эдуард» и заканчивалось «Всего наилучшего, Эдуард».

Такое тесное сотрудничество позволило мне ближе узнать Виттена; меня поразила не только интеллектуальная мощь, но и высокая рабочая этика ученого. Я видел, с каким вниманием он относится к проблеме выбора задач. Ранее в этой книге я уже упоминал о том, что существуют задачи, поиск решения которых может занять 350 лет, и поэтому чрезвычайно важно правильно оценивать не только значимость задачи, но и вероятность достижения успеха в ее решении в некий разумный период времени. Я убедился в том, что Виттен обладает отличной интуицией и превосходным вкусом, позволяющими ему делать правильный выбор. Поставив перед собой задачу, он упрямо идет к ее разрешению, не останавливаясь и не сворачивая с намеченного пути, как герой Тома Круза в фильме «Соучастник». Его подход отличается тщательностью и методичностью: от его глаза не скроется ни одна деталь. Как и любой другой человек, временами он заходит в тупик, и бывает, что полученные результаты сбивают его с толку. Однако он всегда успешно справляется с трудностями и находит правильный выход. Наша совместная работа стала для меня очень вдохновляющим опытом и богатым источником новых идей и знаний в самых разных областях.

Исследования на стыке программы Ленглендса и электромагнитного дуализма вскоре завоевали широчайшую популярность, что вылилось в возникновение новой быстро развивающейся области исследований. Важную роль в этом процессе сыграли ежегодные конференции, которые мы проводили в Институте теоретической физики имени Кавли в Санта-Барбаре. Директор института, лауреат Нобелевской премии Дэвид Гросс, оказал нам неоценимую поддержку.

В июне 2009 года меня попросили выступить с рассказом о новых достижениях на семинаре Бурбаки — одном из самых старых математических семинаров в мире, пользующемся боль-

шим уважением и популярностью в математическом сообществе. Множество математиков собираются трижды в год в Институте имени Анри Пуанкаре в Париже, для того чтобы прослушать выступления участников семинара, который длится целые выходные. Семинар был основан вскоре после завершения Второй мировой войны группой молодых и амбициозных математиков, называвших себя — с использованием выдуманного имени — «Ассоциацией сотрудников Николая Бурбаки». Они поставили себе целью переписать основы математики, опираясь на новые дисциплинарные стандарты, которые вытекали из предложенной Георгом Кантором в конце девятнадцатого столетия теории множеств. Свой план им удалось воплотить лишь частично, однако их влияние на развитие математической науки оказалось поистине грандиозным. Андре Вейль был одним из членов — основателей семинара, и Александр Гротендик позднее тоже сыграл важную роль в жизни движения.

Цель семинара Бурбаки — рассказывать о самых поразительных достижениях в математике. Тайный комитет, занимающийся отбором тем и участников, с самого начала работает в соответствии со строгим правилом: его членами могут быть только математики не старше пятидесяти лет. Основатели движения Бурбаки верили, что его прогресс требует постоянного вливания свежей крови, и этот принцип оправдал себя. Комитет приглашает докладчиков, которые должны заранее подготовить конспекты лекций. Копии распространяются среди аудитории во время семинара. Поскольку выступление на семинаре считается большой честью, докладчики охотно подчиняются этому требованию.

Мой семинар имел название «Калибровочная теория и дуализм Ленглендса».¹⁹ Хотя мое выступление имело, скорее, технический характер и содержало множество формул и математической терминологии, в целом, по своей структуре оно не отличалось от той истории, которую я рассказываю в этой книге. Я начал с розеттского камня Андре Вейля, вкратце описав каждый из его трех столбцов. Поскольку Вейль был одним из основателей группы Бурбаки, я посчитал, что будет уместным обсудить его идеи на этом семинаре. После этого я сосредоточился на новейших разработках, связывающих программу Ленглендса и электромагнитный дуализм.

Мою лекцию приняли хорошо. Мне было приятно видеть в первом ряду еще одного ключевого члена группы Бурбаки Жана-Пьера Серра, который слывет легендой математического мира. В конце выступления он подошел ко мне. После нескольких технических вопросов он поделился со мной своим наблюдением:

— Мне показалось интересным, что вы называете квантовую физику четвертым столбцом розеттского камня Вейля, — сказал он. — Вы знаете, Андре Вейль не слишком-то любил физику. Но, думаю, если бы он сегодня был здесь, он бы согласился, что квантовая физика действительно играет важную роль в этой истории.

Для меня это был лучший комплимент.

За последние несколько лет в программе Ленглендса был достигнут значительный прогресс во всех столбцах розеттского камня Вейля. Мы все еще очень далеки от полного понимания глубочайших загадок, скрывающихся в программе, но одно не оставляет сомнений: она прошла проверку временем. Сегодня мы видим с особенной ясностью, что она подвела нас к одним из самых фундаментальных вопросов физики и математики.

Эти идеи так же актуальны сегодня, как и пятьдесят лет назад, когда Ленглендс написал свое знаменитое письмо Андре Вейлю. Не знаю, удастся ли нам найти все ответы в течение следующих пятидесяти лет, но совершенно ясно, что эти годы пройдут не менее увлекательно, чем предыдущие полвека. И, возможно, кому-то из читателей этой книги удастся внести свой вклад в этот потрясающий проект.

Программа Ленглендса является центральной темой этой книги. Я убежден, что она хорошо отражает панораму современной математики со своей глубокой концептуальной структурой, прогрессивными идеями, захватывающими гипотезами, глубокими теоремами и неожиданными связями между разными областями. Кроме того, она иллюстрирует тонкие взаимосвязи между математикой и физикой и взаимно обогащающий диалог между этими двумя предметами. Таким образом, программа Ленглендса обладает всеми четырьмя качествами математических теорий, которые мы обсуждали в главе 2: универсальность, объективность, долговечность и применимость к физическому миру.

Разумеется, существует еще много других увлекательных областей математики. Часть из них уже освещена в научно-

популярной литературе, но далеко не все области пока что фигурируют в книгах для неспециалистов. Как писал Генри Дэвид Торо,²⁰ «мы слышали о поэзии математики, но очень мало где она была воспета». К сожалению, его слова не потеряли актуальности и сегодня, более чем 150 лет спустя, что свидетельствует лишь об одном: мы, математики, должны прилагать больше усилий, для того чтобы демонстрировать мощь и красоту нашей науки самой широкой аудитории. И я надеюсь, что рассказанная мной история о программе Ленглендса подстегнет интерес читателей к математике, и им захочется узнать больше.

Глава 18. В поисках формулы любви

В 2008 году я в качестве получателя вновь учрежденной премии *Chaire d'Excellence*, присуждаемой Парижским фондом математических наук, был приглашен в Париж на длительный срок. Я занимался научной работой и периодически читал лекции о своих результатах.

Париж — один из мировых центров математики; кроме того, это столица кинематографии. Во время моего пребывания там мне пришла в голову мысль снять фильм, посвященный математике. В популярных художественных фильмах математиков обычно изображают как замкнутых чудаков, не умеющих вести себя в обществе, чуть ли не душевнобольных. Это лишь подпитывает стереотипные представления о математике как о скучной и холодной науке, не имеющей ничего общего с реальностью. Кто же захочет для себя такой жизни? Кто захочет заниматься работой, от которой нет никакой пользы?

По возвращении в Беркли в декабре 2008 года я почувствовал желание выразить мою творческую энергию. Мой сосед — Томас Фарбер, великолепный писатель и преподаватель писательского мастерства в Калифорнийском университете в Беркли. Я предложил ему совместно написать сценарий фильма, главными героями которого будут Писатель и Математик. Томасу эта идея понравилась, и он предложил в качестве места действия выбрать пляж на юге Франции. Мы решили, что фильм начнется так: прекрасным солнечным днем Писатель и Математик оказываются за соседними столиками в пляжном кафе на открытом воздухе. Они наслаждаются окружающими красотами, замечают друг друга, и между ними завязывается разговор. Что же произойдет дальше?

Мы начали писать. Процесс оказался очень похожим на мою совместную работу с математиками и физиками. Тем не менее были и определенные отличия: больших усилий требовал поиск правильных слов для описаний чувств и эмоций героев, позволяющих добраться до самой сути истории. Концепция была намного более гибкой и поддающейся изменениям по сравнению с тем, к чему я привык. При этом я с восторгом осознавал, что работаю один на

один с великим писателем, который вызывал у меня огромное восхищение и уважение. К счастью, Том не пытался навязывать мне свое мнение и обращался со мной как с равным, позволяя мне развивать мои писательские навыки. Подобно учителям, открывшим передо мной двери в мир математики, Том помог мне войти в мир литературного творчества, за что я буду всегда ему благодарен.

Согласно нашему сценарию, во время одной из бесед математик рассказывает писателю о «задаче двух тел». Она описывает два объекта (тела), взаимодействующих только между собой, таких как звезда и планета (мы игнорируем все остальные силы, действующие на них). Существует простая математическая формула, позволяющая точно предсказать траектории этих тел на протяжении бесконечного интервала времени, и для этого необходимо знать только силу притяжения между ними и их начальное положение. Как же сильно это отличается от взаимодействия двух человеческих тел — двух любовников или двух друзей. Здесь, даже если у задачи двух тел есть решение, оно не единственно.

Наш сценарий описывал столкновение реального мира с миром абстракции: для Ричарда, писателя, это мир литературы и искусства; для Филипа, математика, это мир науки и математики. Каждый из героев свободно говорит на языке своего абстрактного мира, но как это влияет на их поступки в мире реальном? Филип пытается смириться с двойственностью истины: математической истины, в которой он эксперт, и человеческой истины, в которой он неофит. Он узнает, что не всегда удается подойти к решению жизненных проблем так же, как это делается с математическими задачами.

Мы с Томом задавались вопросом о том, можно ли через призму истории и диалога двух людей разглядеть сходство и различия между искусством и наукой — «двумя культурами», как называл их Чарльз Перси Сноу.¹ Наш сценарий можно считать метафорическим представлением двух сторон одного героя — если хотите, левого и правого полушарий мозга. Они находятся в постоянном соперничестве, но в то же время неустанно подпитывают друг друга: две культуры сосуществуют в одном сознании.

В нашем сценарии герои делятся рассказами о своих прошлых романах, о любви, обретенной и утерянной, о жестоких разочарованиях. За тот день, пока мы наблюдаем за ними, им встречаются несколько женщин, и мы видим, как каждый мужчина исполь-

зует страсть к своей профессии в качестве орудия соблазна. При этом сами они все больше сближаются, но назревает и конфликт, который в итоге выливается в неожиданную развязку.

Мы назвали наш сценарий «Задача двух тел» и опубликовали его в виде книги.² Пьеса по нашему сценарию была поставлена в театре Беркли известным режиссером Барбарой Оливер. Это было моим первым путешествием в мир искусства, и реакция публики меня не только поразила, но и изрядно позабавила. Например, большинство людей посчитали, что все происходящее по сценарию с Математиком — это факты из моей биографии. Разумеется, при написании сценария я опирался на собственный жизненный опыт. Например, у меня была русская девушка в Париже, и некоторые примечательные качества Натальи, девушки Филипа по сценарию, были связаны с нею. Какие-то ситуации в сценарии были позаимствованы из моей жизни, а какие-то — из жизни Тома. Однако главное, чем руководствуется любой автор, — это желание создать увлекательные образы и захватывающую историю. Нашей с Томом задачей было сотворить героев, способных передать те идеи, ради которых мы взялись за эту работу. Поэтому наш жизненный опыт подвергся таким искажениям и был настолько видоизменен, что перестал быть нашим. Таким образом, главные герои «Задачи двух тел» стали совершенно независимыми персонажами, что и должно было произойти для того, чтобы наша работа имела право называться искусством.

Мы приступили к поиску продюсера, который помог бы нам воплотить в жизнь наши замыслы и снять по сценарию полнометражный фильм, и я подумал, что неплохо бы попробовать свои силы в более скромном кинематографическом проекте. Когда в апреле 2009 года я вернулся в Париж для продолжения своей *Chaire d'Excellence*, мой друг, математик Пьер Шапира, познакомил меня с молодым талантливым режиссером Рейн Грав. В прошлом она работала моделью в сфере высокой моды, а потом срежиссировала несколько оригинальных, смелых короткометражных фильмов (один из которых завоевал приз Пазолини на *Festival of Censored Films* в Париже). Мы с Рейн встретились за ланчем, организованным Пьером, и с первого взгляда поняли, что настроены на одну волну. Я предложил ей совместно поработать над короткометражным фильмом, посвященным математике, и Рейн с удовольствием согласилась. Месяцы спустя, когда ее

спросили об этом, она сказала, что, по ее мнению, математика — последняя область, где еще можно встретить истинную страсть.³

В процессе обдумывания, что же это будет за фильм, я показал Рейн несколько фотографий, сделанных мной ранее. На этих фотографиях я цифровым способом нанес татуировки математических формул на человеческие тела. Рейн понравились эти картинки, и мы решили, что в нашем фильме обязательно будет татуировка формулы.

Татуировка как форма искусства родом из Японии. Мне доводилось бывать в Японии десятки раз (для продолжения совместной работы с Фейгиным, который ежегодно проводил лето в университете Киото), и, признаюсь, меня завораживает культура этой страны. Неудивительно, что в поисках вдохновения мы с Рейн обратились к японскому кино. Одним из заинтересовавших нас фильмов стала картина великого японского писателя Юкио Мисима «Обряды любви и смерти», основанная на его собственном рассказе. Мисима сам поставил фильм и сыграл в нем главную роль.

Фильм снят на черно-белую пленку, действие разворачивается на простой до аскетичности стилизованной сцене типичного японского театра Но. В фильме нет диалогов, но действие происходит на фоне музыки из оперы Вагнера «Тристан и Изольда». Действующих лиц два: лейтенант Такеяма, молодой офицер императорской гвардии, и его жена Рейко. Друзья офицера пытаются осуществить переворот, но попытка их оканчивается провалом (в основе фильма лежат реальные события февраля 1936 года, оказавшие, по мнению Мисимы, огромное влияние на историю Японии). Лейтенант получает приказ казнить заговорщиков, но не может выполнить его: преступники — его друзья. Не может он и послушаться приказа, отданного императором. Единственный выход для него — это ритуальное самоубийство, *сеппуку* (или *харакири*).

Хотя этот фильм длится всего двадцать девять минут, он глубоко тронул меня. Я ясно ощущал энергию и чистоту видения Мисимы. Он подает свою идею мощно, рискованно, бесстрашно. Зритель может не соглашаться с его идеями (так, например, я не разделяю его взгляда на сокровенную связь между любовью и смертью), но невозможно не испытывать чувства безграничного уважения к автору за его силу и бескомпромиссность.

Фильм Мисимы идет наперекор традиционному кинематографу: это немое кино, в котором текст, объясняющий, что произойдет далее, появляется на экране между «главами» действия.

Фильм театрален; сцены тщательно сореографированы и в них почти нет движения. И все же скрытый в глубине его поток эмоций завораживает (тогда я еще не знал о мрачном сходстве между событиями, происходящими в фильме, и собственной смертью Мисимы).

Возможно, этот фильм произвел на меня такое сильное впечатление как раз потому, что мы с Рейн также хотели создать что-то необычное, поговорить о математике так, как никто до нас о ней не говорил. Я чувствовал, что Мисима создал именно ту художественную концепцию и тот язык, которые мы искали. Я позвонил Рейн:

— Я посмотрел фильм Мисимы, — сказал я, — и я просто потрясен. Я хочу сделать фильм в таком же стиле.

— Хорошо, — ответила она. — Но о чем же будет наш фильм?

Внезапно слова словно сами полились из моего рта, безо всяких усилий с моей стороны. Мне все было кристально ясно:

— Математик открывает формулу любви, — начал рассказывать я, — но затем обнаруживает, что у его формулы есть и обратная сторона: с помощью нее можно творить как добро, так и зло. Для того чтобы формула не попала в плохие руки, ее необходимо скрыть, и он решает вытатуировать ее на теле любимой женщины.

— Звучит неплохо. А название какое?

— Хммм... Как насчет такого: «Обряды любви и математики»? Так родилась идея нашего фильма.

Мы представляли его себе как аллегорию, показывающую, что математическая формула может быть прекрасной, как стихи, живопись, музыка. Аллегорией, затрагивающую не только ум, но и интуицию зрителя, его самые глубокие, внутренние струны. Иными словами, побуждающую зрителя *чувствовать*, а не *думать*. Мы хотели подчеркнуть человеческую и духовную стороны математики для того, чтобы заинтересовать зрителя, разжечь его любопытство.

Науку в целом и математику в частности часто представляют как холодный, стерильный предмет. На самом же деле процесс создания чего-то нового в математике — это вдохновенный поиск, глубоко личное переживание, в точности как создание произведения искусства или музыкального шедевра. Он требует любви и самоотверженности, заставляет бороться с неизведанным и самим собой и порождает бурю эмоций. Открытые вами формулы

поистине пронизывают вас насквозь, проникая под кожу, как чернила татуировки.

В нашем фильме математик открывает формулу любви. Разумеется, это метафора: мы всегда стремимся достичь полного понимания, окончательной ясности, хотим узнать все. Но в реальном мире приходится довольствоваться частичным знанием и пониманием. Однако если кто-то сумеет найти Высшую Истину, что если она может быть выражена математической формулой? Это тогда и была бы формула любви.

Американский писатель Дэвид Торо интересным образом высказался по этому поводу:⁴

Самое яркое и прекрасное изложение любой истины должно в конечном итоге принимать математическую форму. Мы могли бы настолько упростить правила моральной философии и арифметики, что они уместились бы в одной формуле.

Даже если не существует одной-единственной формулы, обладающей достаточной мощностью для того, чтобы объяснить все сущее, математические формулы, тем не менее, остаются одними из самых чистых, гибких и экономичных способов выражения истины. Они сообщают бесценное, вечное знание, не подверженное влиянию моды и преходящих увлечений, а передаваемая ими суть едина для всех, кто соприкасается с ними. Истины, выражаемые формулами, — это неизбежные истины. Они, как непоколебимые маяки реальности, направляют человечество на его пути, сквозь века и вехи.

Генрих Герц, доказавший существование электромагнитных волн, чье имя мы сегодня используем для обозначения единиц измерения частоты, так выразил свое восхищение:⁵ «Трудно избежать ощущения, что эти математические формулы ведут не зависимое от нас существование и имеют свой собственный интеллект, что они мудрее нас, мудрее даже своих создателей, что мы извлекаем из них больше, чем вначале было в них вложено».

Герц не одинок в своем мнении. Большинство специалистов-математиков уверены в том, что математические формулы и идеи населяют свой отдельный мир. Роберт Ленглендс пишет, что математика «зачастую является в форме знаков свыше — фраза, подразумевающая, что математика, и не только ее базовые кон-

цепции, существует независимо от нас. Это убеждение, которое трудно объяснить, но без которого профессиональному математику не обойтись». ⁶ Ему вторит другой именитый математик, Юрий Манин (научный руководитель Дринфельда), который говорит о «видении великого Замка Математики, возвышающегося в Платоническом Мире Идей, который [математики] почтительно и самозабвенно исследуют, открывая его для себя (а не изобретая)». ⁷

С этой точки зрения группы Галуа были *открыты* французским гением, а не *изобретены* им. До тех пор это понятие жило где-то в зачарованных садах идеального мира математики, ожидая того момента, когда его найдут. Даже если бы черновики Галуа были утеряны и он не получил бы заслуженного признания за свое открытие, в точности эти же группы были бы открыты кем-то другим.

Сравните с открытиями в других областях человеческого знания. Если бы Стив Джобс не вернулся в Apple, у нас могло бы не быть всех этих устройств: iPod, iPhone, iPad. Появились бы другие технологические инновации, но не следует думать, что в точности те же самые элементы были бы обнаружены другими изобретателями. В отличие от этого, математические истины неизбежны.

Мир, населенный математическими понятиями и идеями, часто называют платоническим миром математики в честь греческого философа Платона, который первым озвучил идею о том, что математические сущности не зависят от нашей рациональной деятельности. ⁸ В своей книге «Путь к реальности» известный физик и математик Роджер Пенроуз пишет, что математические утверждения, принадлежащие платоническому миру математики, — это те, «истинность которых объективна. Фраза “такое-то математическое утверждение обладает независимым платоническим существованием” означает всего-навсего, что утверждение это истинно в объективном смысле». Аналогично математические понятия «существуют в платоническом мире постольку, поскольку они объективны». ⁹

Как и Пенроуз, я верю в то, что платонический мир математики существует отдельно как от физического, так и от духовного мира. Например, вернемся еще раз к великой теореме Ферма. Пенроуз в своей книге задает риторический вопрос: «Итак, принимаем ли мы точку зрения, согласно которой утверждение Ферма было истинным всегда, в том числе и задолго до того момента, как Ферма

его высказал? Или же справедливость этого утверждения есть феномен исключительно культурный, зависящий от субъективных стандартов сообщества людей-математиков, какими бы эти стандарты ни были?»¹⁰ В очередной раз прибегая к проверенной временем традиции «доказательства от противного», Пенроуз затем демонстрирует, что попытка воспользоваться субъективной интерпретацией быстро приводит нас к утверждениям, которые иначе как «очевидно абсурдными» назвать невозможно, подчеркивая тем самым независимость математического знания от любой человеческой деятельности.

Курт Гёдель, чья работа, и в частности знаменитые теоремы о неполноте, произвела революцию в математической логике, был ярким сторонником этой точки зрения. Он писал, что математические концепции «сами по себе образуют объективную реальность, которую мы не в силах создать или изменить, а можем лишь воспринимать и описывать».¹¹ Другими словами, «математика описывает нечувственную реальность, существующую независимо как от действий, так и от распоряжений человеческого разума, которую человеческий разум лишь постигает и, вероятно, постигает далеко не в полной мере».¹²

Платонический мир математики также существует независимо от физической реальности. Например, как уже говорилось в главе 16, аппарат калибровочных теорий изначально был разработан математиками совершенно без оглядки на физику. В действительности оказалось, что только три из этих моделей описывают известные нам силы природы (электромагнитную, слабую и сильную). Они соответствуют трем конкретным группам Ли (группе окружности, $SU(2)$ и $SU(3)$ соответственно), несмотря на то что вообще-то калибровочная теория существует для *любой* группы Ли. Калибровочные теории, связанные с остальными группами Ли, помимо этих трех, прекрасно обоснованы математически, но ни о каких связях между ними и реальным миром нам не известно. Кроме того, мы говорили о суперсимметричных расширениях калибровочных теорий, которые мы анализируем математически, хотя в природе суперсимметрия обнаружена не была и высока вероятность того, что ее там попросту не существует. Схожие модели также имеют смысл с математической точки зрения в пространстве — времени, размерность которого отлична от четырех. Можно привести массу других примеров богатых

математических теорий, напрямую не связанных ни с какими объектами физической реальности.

В своей книге «Тени разума» Роджер Пенроуз говорит о следующем треугольнике: физический мир, духовный мир и платонический мир математики.¹³ Это независимые сущности, и все же они тесно переплетены друг с другом. У нас до сих пор нет полного понимания того, какие связи между ними существуют, но одно можно сказать точно: каждый из этих миров оказывает огромное влияние на наши жизни. Однако, хотя все мы признаём значимость физического и духовного миров, многие из нас пребывают в блаженном неведении относительно мира математики. Я убежден в том, что, когда мы в полной мере осознаем эту скрытую реальность и научимся использовать ее не познанные пока что силы, наше общество сделает рывок вперед, сопоставимый с индустриальной революцией.

В моем представлении источником безграничных возможностей математического знания служит именно его объективность. Это качество отличает математику от любых других видов человеческой деятельности. Я считаю, что понимание того, на чем основывается это качество, способно пролить свет на глубочайшие тайны физической реальности, сознания и взаимосвязей между ними. Другими словами, чем ближе мы к платоническому миру математики, тем большей способностью мы обладаем для понимания мира вокруг нас и нашего места в нем.

К счастью, ничто не может нам помешать погружаться все глубже и глубже в платоническую реальность и интегрировать ее в наши жизни. Одним из самых примечательных качеств математики является присущая ей демократичность: в то время как определенные составляющие физического и духовного миров могут разными людьми восприниматься или интерпретироваться по-разному, а что-то может быть вовсе недоступно некоторым из нас, математические концепции и уравнения воспринимаются всеми совершенно одинаково и *в равной степени* принадлежат всем нам. Никто не может стать единоличным собственником математического знания; никто не может объявить математическую формулу или идею своим изобретением; никто не в состоянии запатентовать формулу! Например, Альберт Эйнштейн не смог бы получить патент на свою формулу $E = mc^2$. Причина этого заключается в том, что математическая формула, если, ко-

нечно, она верна, описывает извечную истину нашей Вселенной. Следовательно, никто не может заявить на нее свои права — она наша, общая.¹⁴ Богач или бедняк, черный или белый, молодой или старик — никто не в силах отнять у нас эти формулы. В мире нет ничего настолько же совершенного и элегантного и, в то же время, настолько же доступного всем нам.

Как и у Мисимы, центральным элементом аскетичных декораций нашего фильма «Обряды любви и математики» служит большая каллиграфия на стене. В фильме Мисимы она изображала слово *shisei*: искренность. Его фильм был посвящен искренности и чести. Наш фильм об истине, поэтому совершенно естественно, что мы подумали о каллиграфии, изображающей это слово. Однако мы решили написать его не по-японски, а по-русски.

В русском языке в значении «истина» могут использоваться два слова. Более распространенное слово «правда» относится к фактической истине, такой как материал новостей (отсюда и название официальной газеты Коммунистической партии в СССР). Само же слово «истина» обозначает более глубокое, философское понятие. Например, утверждение о том, что группа симметрий круглого стола представляет собой окружность, — это правда, а формулировка программы Ленглендса (в тех случаях, в которых доказательство было найдено) — истина. Очевидно, что Математик жертвует собой во имя *истины*.

В нашем фильме мы также хотели отразить моральный аспект математических исследований: у формулы, обладающей подобной мощью, может оказаться и обратная сторона, позволяющая использовать ее во имя зла. Вспомните, как в начале двадцатого века группа теоретических физиков пыталась понять структуру атома. То, что казалось чистым и благородным научным стремлением, неожиданно привело к открытию атомной энергии. Это открытие принесло нам множество благ, но также привело к страшным последствиям, сея разрушения и смерть. Точно так же и математическая формула, открытая нами в погоне за знаниями, может обернуться чем-то губительным. Хотя никакие запреты не должны ограничивать ученых при разработке их идей, я также считаю, что мы несем ответственность за использование открываемых нами формул и должны следить за тем, чтобы они использовались во благо человечества, чтобы они не применялись в целях зла. Вот

почему в нашем фильме Математик готов умереть для того, чтобы предотвратить попадание формулы в недобрые руки. Татуировка — это способ спрятать формулу, но в то же время гарантировать, что она не будет утеряна навсегда.



Рис. 18.1

Поскольку у меня нет татуировок, мне пришлось узнать больше об этом процессе. Сегодня татуировки наносятся с помощью специальной машинки, но исторически (в Японии) для нанесения татуировок использовалась бамбуковая палочка, и это был намного более длительный и болезненный процесс. Мне говорили, что в Японии по сей день сохранились тату-салоны, в которых применяется эта древняя техника. Вот как мы представили ее в нашем фильме.

Вопрос о том, какая формула сыграет роль *формулы любви*, был одним из главных. Она должна быть достаточно сложной (в конце концов, это формула любви!), но также эстетически привлекательной. Мы стремились показать, что математическая формула может быть прекрасной как по содержанию, так и по форме. И я хотел, чтобы это была *моя* формула.

Во время «кастинга» формул я натолкнулся на следующую формулу:

$$\int_{\mathbb{C}P^1} \omega F(qz, \bar{q}\bar{z}) = \sum_{m, \bar{m}=0}^{\infty} \int_{|z| < \epsilon^{-1}} \omega z^m \bar{z}^{\bar{m}} dz d\bar{z} \cdot \frac{q^m \bar{q}^{\bar{m}}}{m! \bar{m}!} \partial_z^m \partial_{\bar{z}}^{\bar{m}} F \Big|_{z=0} +$$

$$+ q\bar{q} \sum_{m, \bar{m}=0}^{\infty} \frac{q^m \bar{q}^{\bar{m}}}{m! \bar{m}!} \partial_w^m \partial_{\bar{w}}^{\bar{m}} \omega_{w\bar{w}} \Big|_{w=0} \cdot \int_{|w| < q^{-1}\epsilon^{-1}} F w^m \bar{w}^{\bar{m}} dw d\bar{w}.$$



Рис. 18.2

Это одна из формул (под номером (5.7)) 100-страничной статьи *Instantons Beyond Topological Theory I*, которую я в 2006 году написал совместно с двумя моими хорошими друзьями — Андреем Лосевым и Никитой Некрасовым.¹⁵

Это уравнение выглядит достаточно устрашающе — настолько, что, если бы в нашем фильме я написал его на доске и начал рассказывать о его значении, большинство людей, скорее всего, сразу же покинули бы кинотеатр. Однако нанесенное на тело в форме татуировки, оно вызвало совершенно иную реакцию. В таком представлении это уравнение возбудило любопытство: сразу хочется узнать, что же оно означает.

Так что же оно означает? Наша статья была первой в целой серии статей, посвященных новому подходу к квантовым теориям поля с инстантонами — особыми конфигурациями полей, обладающими замечательными свойствами. Хотя квантовые теории поля

с успехом применяются для точного описания взаимодействия между элементарными частицами, существует множество других важных явлений, которые до сих пор очень плохо изучены. Например, согласно Стандартной модели, в состав протонов и нейтронов входят по три кварка, которые не могут быть отделены друг от друга. В физике это явление известно под названием «конфайнмент». У нас пока что нет его полноценного теоретического объяснения, и многие физики верят в то, что ключ к разгадке этой тайны может крыться в инстантонах. Однако в традиционном подходе к квантовым теориям поля ситуацию с инстантонами прояснить оказывается весьма сложно.

Мы предложили новый подход к квантовым теориям поля, который, как мы надеялись, поможет лучше понять инстантонные эффекты. Приведенная выше формула иллюстрирует неожиданное открытие: эквивалентность двух способов вычисления корреляционной функции в одной из наших теорий.¹⁶ Разумеется, когда мы обнаружили эту формулу, нам и в голову не могло прийти, что вскоре ей предстоит сыграть роль формулы любви.

Ориан Жиро, наша художница по спецэффектам, одобрила формулу, однако сказала, что такая запись слишком сложна для татуировки. Я внес несколько корректировок, и вот в каком виде формула предстала в нашем фильме:

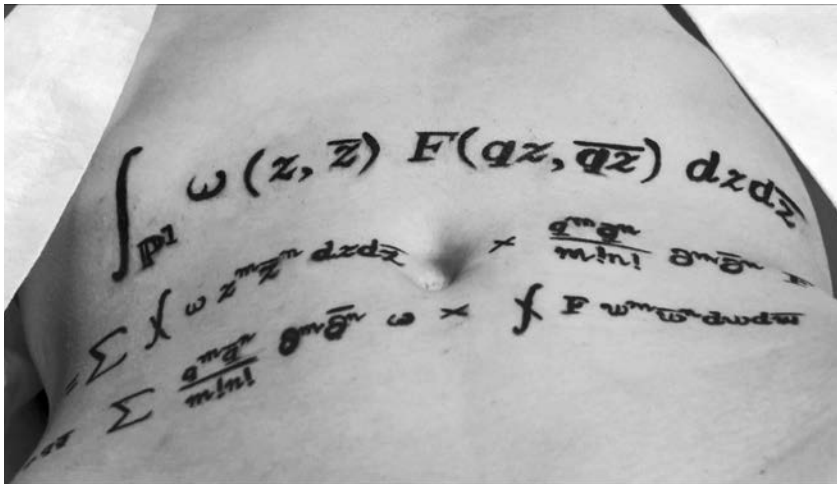


Рис. 18.3

Идея сцены с татуировкой — показать, каким эмоциональным может быть процесс математического творчества. Делая татуировку, Математик полностью отключается от внешнего мира. Формула становится для него вопросом жизни и смерти.

Съемка этой сцены растянулась на много часов — это был психологически и физически изнурительный процесс как для меня, так и для Кайшонн Инсисин Мей — актрисы, исполнившей роль Мариико. Мы закончили работу над этой сценой около полуночи в последний день съемок. Это был очень памятный момент для всей нашей съемочной группы, состоявшей из примерно тридцати человек, — после всего, через что нам всем вместе пришлось пройти.

Премьера фильма состоялась в апреле 2010 года в кинотеатре *Max Linder Panorama*, одном из лучших в Париже. Спонсором выступил Парижский фонд математических наук. Мероприятие прошло с большим успехом, и совсем скоро появились первые статьи о нашем фильме. В журнале *Le Monde* «Обряды любви и математики» назвали «ошеломительным короткометражным фильмом», который «представляет математиков в необычном романтическом свете». ¹⁷ А журнал *New Scientist* писал: ¹⁸

Это прекрасное зрелище... Если целью Френкеля было обратить больше людей в математику, то он может поздравить себя с отлично выполненной работой. Формулу любви, в действительности представляющую собой упрощенную версию уравнения, опубликованного им в 2006 году в статье о квантовых теориях поля под названием *Instantons beyond topological theory I*, вскоре увидит — даже если не поймет — куда более широкая аудитория, чем когда-либо можно было бы себе представить.

По мнению научно-популярного французского журнала *Tangente Sup*, ¹⁹ фильм «заинтересует тех, кто полагает, что математика — это абсолютная противоположность искусству и поэзии». На вкладке, сопровождающей статью, Эрвэ Ленинг пишет:

В математическом исследовании Эдуарда Френкеля огромную роль играют симметрия и дуализм. Они связаны с про-

граммой Ленглендса, цель которой — воздвигнуть мост между теорией чисел и представлениями определенных групп. У этого очень абстрактного предмета есть вполне реальные приложения, например в криптографии... Если идея дуализма настолько важна для Эдуарда Френкеля, то можно ли утверждать, что он видит дуализм между любовью и математикой, как подразумевает название его фильма? Его ответ на этот вопрос очевиден. Для него математическое исследование подобно любовной истории.

С тех пор фильм успел побывать на фестивалях во Франции, Испании и Калифорнии, а также в Париже, Киото, Мадриде, Санта-Барбаре, Бильбао, Венеции... Показы и последовавший за ними общественный резонанс позволили мне увидеть разницу между «двумя культурами». Поначалу это было для меня настоящим культурным шоком. Мою математику могут до конца понять лишь очень немногие люди — возможно, поначалу не более десятка человек во всем мире. Помимо этого, поскольку любая математическая формула представляет объективную истину, то, по сути, имеется только один способ интерпретации этой истины. Следовательно, все, кто разбирают мои математические работы, воспринимают их совершенно одинаково. В противоположность этому наш фильм предназначен для самой широкой аудитории: его уже посмотрели тысячи людей. При этом, разумеется, каждый интерпретировал его по-своему.

Благодаря этому я узнал, что зритель всегда остается важной частью художественного проекта; в конечном итоге, на вкус и цвет товарищей нет. Автор не в силах повлиять на то, как воспримут его работу зрители. Но это и хорошо, так как процесс взаимного обогащения подразумевает обмен мнениями.

В нашем фильме мы пытались объединить две культуры, рассказать о математике с чувственностью человека искусства. В начале фильма Марико пишет любовное стихотворение Математику.²⁰ Математик отвечает ей, нанося в конце фильма на ее тело татуировку формулы: для него формула — это выражение его любви. Эта формула может нести в себе такую же страсть и эмоциональный заряд, как стихотворение, так что это было нашей попыткой указать на сходство между математикой и поэзией. Ведь это дар любви Математика, его творение, плод его страсти и воображения.

Он словно бы пишет любовное послание — вспомните молодого Галуа, записывающего свои уравнения накануне смерти.

Однако кто она, его возлюбленная? В рамках концепции придуманного нами фантастического мира она являет собой олицетворение Математической Истины (отсюда и имя Марико — «истина» на японском, и поэтому слово «истина» выведено на каллиграфии, висящей на стене). Любовь Математика к ней — это его любовь к Математике и Истине, ради которых он пожертвовал собой. Но она должна выжить и сохранить его формулу, как выносила бы их дитя. Математическая Истина вечна.

Может ли математика быть языком любви? У некоторых зрителей идея «формулы любви» вызвала недоумение. К примеру, мне кто-то сказал после просмотра фильма: «Логика и чувства не всегда могут сосуществовать. Вот почему мы говорим, что любовь слепа. Так как же может работать формула любви?» Действительно, наши чувства и эмоции часто кажутся нам иррациональными (хотя ученые, занимающиеся исследованиями когнитивного процесса, скажут вам, что определенные аспекты этой кажущейся иррациональности в действительности могут быть описаны математически). Поэтому я не считаю, что существует формула, способная описать или объяснить любовь. Говоря о связи между любовью и математикой, я не имею в виду, что любовь можно свести к математике. Я хочу лишь сказать, что математика может играть намного более важную роль, чем большинство из нас привыкли считать. Помимо прочего, математика дает нам дополнительные причины и способности любить друг друга и мир вокруг нас. Математическая формула не может объяснить любовь, но она может нести заряд любви.

Как говорится в стихотворении Нормы Фарбер,²¹

Make me no lazy love...

Move me from case to case.

Математика переводит нас «от случая к случаю», и в этом заключается ее глубокое и по большей части непознанное духовное предназначение.

Альберт Эйнштейн писал:²² «Всякий, кто серьезно занимается наукой, приходит к осознанию того, что в законах Вселенной про-

является Дух, и этот Дух намного выше человеческого. Пред его лицом мы с нашими ограниченными силами должны ощущать собственную немощь». А Исаак Ньютон так выразил свои чувства:²³ «Себе самому я кажусь лишь ребенком, который играет на морском берегу и развлекает себя, находя время от времени более гладкий камешек или раковину попестрее, чем прочие, в то время как великий неизведанный океан истины расстилается предо мной».

Я мечтаю о том, что в один прекрасный день нам всем откроется эта скрытая реальность. Возможно, тогда мы сможем позабыть о различиях между нами и сконцентрироваться на глубоких истинах, объединяющих всех нас. И тогда все мы будем как дети, играющие на морском берегу: все вместе мы будем открывать для себя ослепительную красоту и гармонию этой реальности, все вместе будем восхищаться ею, хранить ее и лелеять.

Эпилог

Январь 2012 года. Мой самолет приземляется в Бостонском аэропорту. Я прибыл на ежегодное общее собрание Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Математической ассоциации Америки. Меня пригласили прочитать лекции на коллоквиуме AMS, традиция проведения которого зародилась еще в 1896 году. Просматривая список докладчиков на прошлых лекциях и темы их выступлений, вы словно заново погружаетесь в историю математики прошедшего века: Джон фон Нейман, Чжень Шэньшэнь, Майкл Атья, Рауль Ботт, Роберт Ленглендс, Эдвард Виттен и многие другие великие математики. Я польщен и надеюсь оправдать возложенные на меня надежды.

Возвращение в Бостон пробуждает воспоминания. Впервые я приземлился в этом аэропорту в сентябре 1989 года, когда приехал в Гарвард — перефразируя название знаменитого фильма — *«Из России с математикой»*. Тогда мне был двадцать один год, и я не знал, чего ожидать, не знал, что впереди. Три месяца спустя, быстро взрослея в те беспокойные времена, я снова был в аэропорту, на этот раз для того, чтобы проводить в дорогу моего учителя Бориса Фейгина. Он возвращался в Москву, а я задавался вопросом, когда же мы увидимся снова. К счастью, наше математическое сотрудничество и наша дружба продолжались и крепились.

Мое пребывание в Гарварде растянулось на значительно более долгое время, чем я поначалу ожидал: получение докторской степени на следующий год, избрание в Гарвардское общество, а впоследствии назначение профессором Гарвардского университета. Затем, через пять лет после первого приезда в Америку, я снова оказался в Бостонском аэропорту, с волнением ожидая прибытия моих родителей и семьи моей сестры, которые решили присоединиться ко мне и обосноваться в Америке. Они с тех пор так и живут в Бостоне, я же в 1997 году перебрался в другой штат, получив от Калифорнийского университета в Беркли предложение, от которого было невозможно отказаться.

Я бываю в Бостоне, чтобы повидаться с семьей. Как оказалось, дом моих родителей находится всего в нескольких кварталах от Конференц-центра Хайнс, где проводится собрание математическо-

го общества, а это значит, что они впервые смогут своими глазами увидеть меня в деле. Какой прекрасный подарок — возможность разделить этот опыт с самыми близкими людьми. «Добро пожаловать домой!»

Для участия в собрании зарегистрировалось более 7000 человек — вероятно, это самая крупная из всех когда-либо проходивших встреч математиков. Многие из них пришли послушать мои лекции, которые я читаю в огромном актовом зале. Мои родители, сестра и племянница — в первом ряду. Лекции посвящены моей недавней совместной работе с Робертом Ленглендсом и Нго Бао Чау. Это результат трехлетнего сотрудничества, посвященного дальнейшему развитию идей программы Ленглендса.¹

«А что, если бы мы решили снять фильм о программе Ленглендса? — спрашиваю я аудиторию. — Тогда, и это подтвердит вам любой сценарист, нам пришлось бы ответить на кучу вопросов: О чем пойдет речь? Кто будут главные герои? Какова сюжетная линия? Какие конфликты возникают? Как они разрешаются?»

Люди в зале улыбаются. Я рассказываю об Андре Вейле и его розеттском камне. Мы путешествуем по разным континентам мира математики, изучая загадочные связи между ними.

Каждый щелчок пульта дистанционного управления выводит следующий слайд моей презентации на четыре гигантских экрана. На каждом слайде — описание очередного небольшого шажка в нашем нескончаемом пути в поиске знаний. Мы задумываемся над извечными вопросами истины и красоты. И чем больше мы узнаем о математике — этой волшебной скрытой Вселенной, тем отчетливее понимаем, как мало мы знаем и сколько всего интересного нас ждет впереди. Наше путешествие продолжается.

Благодарности

Благодарю DARPA и Национальный научный фонд за частичную поддержку моих исследований, описанных в книге. Книга была завершена в период, когда я занимал пост миллеровского профессора в Институте фундаментальных научных исследований Миллера Калифорнийского университета в Беркли.

Хочу выразить благодарность моему редактору Т. Дж. Келлехеру (*T. J. Kelleher*) и редактору проекта Мелиссе Веронези (*Melissa Veronesi*) из *Basic Books* за их профессиональную редакторскую работу.

Работая над книгой, я получил большую пользу от плодотворных дискуссий с Сарой Берштель (*Sara Bershtel*), Робертом Бразеллом (*Robert Brazell*), Давидом Айзенбадом (*David Eisenbud*), Марком Джеральдом (*Marc Gerald*), Масако Кинг (*Masako King*), Сьюзан Рабинер (*Susan Rabiner*), Сашей Раскин (*Sasha Raskin*), Филибертом Шогтом (*Philibert Schogt*), Маргит Шваб (*Margit Schwab*), Эриком Вайнштэйном (*Eric Weinstein*) и Дэвидом Йеззи (*David Yezzi*).

Большое спасибо Алексу Фридлянду (*Alex Freedland*), Бену Глассу (*Ben Glass*), Клоду Левеску (*Claude Levesque*), Кэйвану Машайеху (*Kayvan Mashayekh*), Коринн Транг (*Corinne Trang*) за то, что ознакомились с фрагментами книги на разных этапах ее подготовки и дали полезные советы. Также я благодарен Андреа Янг (*Andrea Young*) за фотографии «фокуса с чашкой» для пятнадцатой главы.

Особую благодарность я хочу выразить Томасу Фарберу (*Thomas Farber*) за множество полезных соображений и профессиональных советов, а также Мари Левек (*Marie Levek*) за прочтение рукописи и пытливые расспросы, которые помогли мне улучшить повествование. Мой папа, Владимир Френкель, прочитал многочисленные черновики книги, и его отзывы были поистине бесценны.

Надеюсь, рассказанная мной история достаточно красноречиво свидетельствует о том, в каком долгу я нахожусь перед своими учителями и всеми теми, кто помог мне на моем пути.

И самая большая благодарность — моим родителям, Лидии и Владимиру Френкель, чья любовь и поддержка сделали возможным все то, чего я достиг. Я посвящаю эту книгу им.

Глоссарий

Абелева группа. Группа, в которой результат умножения любых двух элементов не зависит от порядка, в котором выполняется умножение. Например, группа окружности.

Автоморфная функция. Определенный тип функций, появляющихся в гармоническом анализе.

Автоморфный пучок. Пучок, заменяющий автоморфную функцию в геометрическом соответствии Ленглендса в правом столбце розеттского камня Вейля.

Алгебра Каца — Муди. Алгебра Ли группы петель заданной группы Ли, расширенная дополнительной прямой.

Алгебра Ли. Касательное пространство к группе Ли в точке, соответствующей единичному элементу данной группы.

Векторное пространство. Множество всех векторов заданного n -мерного плоского пространства, снабженное операциями сложения векторов и умножения векторов на числа. Эти операции удовлетворяют естественным свойствам.

Великая теорема Ферма. Утверждение о том, что для любого натурального числа n больше 2 не существует натуральных чисел x, y, z таких, что $x^n + y^n = z^n$.

Гармонический анализ. Раздел математики, изучающий разложение функций в терминах гармоник, например функций синуса и косинуса.

Гипотеза Симуры — Таниямы — Вейля. Утверждение о том, что существует взаимно однозначное соответствие между кубическими уравнениями и модулярными формами, удовлетворяющее определенным свойствам. Согласно ему, коэффициенты модулярной формы принимают значения, равные количеству решений кубического уравнения по модулю простых чисел.

Группа. Множество с операцией (которая может называться композицией, сложением или умножением), связывающей с любой парой элементов данного множества элемент из него же (например, это может быть множество всех целых чисел с операцией сложения). Операция должна обеспечивать выполнение следующих свойств: существование тождественного элемента,

существование обратного элемента для каждого элемента множества, а также ассоциативность.

Группа Галуа. Группа симметрий числового поля, сохраняющая операции сложения и умножения.

Группа Ли. Группа, также являющаяся многообразием, такая, что операция в группе порождает гладкое отображение.

Группа окружности. Группа вращений любого круглого объекта, такого как круглый стол. Это окружность, включающая особую точку, которая представляет собой единичный элемент данной группы. Группа окружности — простейший пример группы Ли.

Двойственная группа Ленглендса. Группа Ли, сопоставленная с любой заданной группой Ли G путем применения особой процедуры. Обозначается ${}^L G$.

Дуализм. Эквивалентность двух моделей (или теорий) при замене параметров и объектов согласно определенной процедуре.

Калибровочная группа. Группа Ли, появляющаяся в заданной калибровочной теории и определяющая, в частности, частицы и взаимодействия между ними в рамках этой теории.

Калибровочная теория. Физическая модель особого рода, описывающая определенные поля и взаимодействия между ними. Такая теория (или модель) существует для каждой группы Ли, называемой, в рамках этой теории, калибровочной группой. Например, калибровочная теория, соответствующая группе окружности, — это теория электромагнетизма.

Категория. Алгебраическая структура, состоящая из «объектов» и «морфизмов» между любыми парами объектов. Например, векторные пространства образуют категорию так же, как и пучки на многообразии.

Квантовая теория поля. У этого термина два значения. Во-первых, это раздел физики, занимающийся изучением моделей взаимодействия квантовых частиц и полей. Во-вторых, это любая конкретная модель такого типа.

Комплексное число. Число вида $a + b\sqrt{-1}$, где a и b — два вещественных числа.

Композиция (двух симметрий). Симметрия заданного объекта, полученная путем применения одной за другой двух симметрий данного объекта.

Конечное поле. Множество натуральных чисел от 0 до $p - 1$, где p — простое число, или расширение данного множества, полу-

ченное путем присоединения к нему решений полиномиального уравнения от одной переменной.

Кривая над конечным полем. Алгебраический объект, состоящий из всех решений алгебраического уравнения от двух переменных (такого, как кубическое уравнение) со значениями, принадлежащими конечному полю из p элементов, а также всем его расширениям.

Кубическое уравнение. Уравнение в форме $P(y) = Q(x)$, где $P(y)$ — многочлен второй степени, а $Q(x)$ — многочлен третьей степени. Например, в этой книге подробно рассматривается кубическое уравнение $y^2 + y = x^3 - x^2$.

Многообразие. Гладкая геометрическая фигура, такая как окружность, сфера или поверхность пончика.

Множество. Набор объектов, такой как множество $\{0, 1, 2, \dots, N - 1\}$ для заданного натурального числа N .

Модулярная форма. Функция на единичном круге, удовлетворяющая особым свойствам преобразования по подгруппе группы симметрий круга (называемой модулярной группой).

Натуральное число. Число 1 или любое другое число, полученное путем сложения единицы с собой несколько раз.

Неабелева группа. Группа, в которой результат умножения двух элементов зависит, в общем случае, от порядка, в котором выполняется умножение. Например, группа $SO(3)$.

Окружность. Многообразие, которое можно описать как множество всех точек на плоскости, равноудаленных от заданной точки.

Отображение из одного множества (или многообразия), M , в другое множество (или многообразие), N . Правило, сопоставляющее точку из N с каждой точкой из M (отображением называется как процесс, так и результат).

Петля. Замкнутая кривая, такая как окружность.

Полином (многочлен) от одной переменной. Выражение в форме $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, где x — переменная, а $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ — числа. Полиномы по нескольким переменным определяются аналогично.

Полиномиальное уравнение. Уравнение в форме $P = 0$, где P — полином от одной или нескольких переменных.

Представление группы. Правило, связывающее симметрию векторного пространства с каждым элементом заданной группы так, чтобы выполнялись некоторые естественные свойства. В более общем смысле, представление группы G в другой группе H — это правило, сопоставляющее элемент из H с каждым элементом из G так, чтобы выполнялись определенные естественные свойства.

Простое число. Натуральное число, которое не делится без остатка ни на какое другое натуральное число за исключением самого себя и единицы.

Пучок. Правило, сопоставляющее векторное пространство с каждой точкой заданного многообразия, удовлетворяющее некоторым естественным свойствам.

Размерность. Число координат, необходимое для описания точек заданного объекта. Например, размерность прямой и окружности равна единице, а размерность плоскости и сферы равна двум.

Расслоение. Предположим, что у нас есть два многообразия M и B и отображение из M в B . Каждой точке B соответствует множество точек из M , отображающихся на нее, и это множество называется «слоем» над данной точкой. M называется расслоением над «базой» B , если все эти слои могут быть отождествлены друг с другом (и у каждой точки из B есть окрестность U , чей прообраз в M может быть отождествлен с произведением U и слоя).

Симметрия. Преобразование заданного объекта, сохраняющее его свойства, такие как форма и позиция.

Соответствие. Отношение между объектами двух разных типов или же правило, сопоставляющее объекты одного типа объектам другого типа. Например, взаимно однозначное соответствие.

Соответствие Ленглендса. Правило, сопоставляющее автоморфную функцию (или автоморфное представление) с представлением группы Галуа.

Суперсимметрия. Тип симметрии в квантовой теории поля, при которой происходит замена бозонов фермионами и наоборот.

Сфера. Многообразиие, которое можно описать как множество всех точек плоского трехмерного пространства, равноудаленных от заданной точки.

Теория. Определенная область математики или физики (например, теория чисел), или конкретная модель, описывающая отношения между объектами (например, калибровочная теория с калибровочной группой $SO(3)$).

Фундаментальная группа. Группа всех непрерывных замкнутых путей на заданном многообразии, начинающихся и заканчивающихся в указанной точке.

Функция. Правило, связывающее число с каждой точкой заданного множества или многообразия.

Целое число. Число, являющееся либо натуральным числом, либо нулем, либо противоположным натуральному числу.

Числовое поле. Система счисления, полученная путем присоединения к множеству рациональных чисел всех решений конечного набора полиномов от одной переменной с рациональными коэффициентами.

$SO(3)$. Группа вращений сферы.

Примечания

Введение

1. Edward Frenkel. Don't Let Economists and Politicians Hack Your Math // Slate, February 8, 2013, <http://slate.me/128ygaM>.

Глава 2. Суть симметрии

1. В этом обсуждении мы используем выражение «симметрия объекта» в качестве специального термина, обозначающего особую трансформацию, которая сохраняет форму и положение объекта, — такую как вращение стола. Мы не используем это выражение в том смысле, что форма объекта симметрична.
2. Если мы выберем направление по часовой стрелке, то получим тот же самый набор вращений: поворот на 90 градусов по часовой стрелке абсолютно идентичен повороту против часовой стрелки на 270 градусов и т. д. В математической среде принято использовать вращение против часовой стрелки, но в действительности это не более чем вопрос личных предпочтений.
3. Может показаться, что такие подробности излишни, но это не простая педантичность. Если мы стремимся к сохранению последовательности изложения, то не должны опускать никакие детали. Мы сказали, что симметрией считается любое преобразование, сохраняющее объект, — и тождественное преобразование является таковым.

Во избежание недопонимания подчеркну, что в данном обсуждении нас интересует только конечный результат применения выбранной симметрии. Неважно, что мы делаем с объектом в процессе, — главное, на каких позициях точки объекта окажутся в конце. Например, когда мы поворачиваем стол на 360 градусов, все его точки оказываются ровно в тех позициях, где они находились изначально. Вот почему для нас вращение на 360 градусов и полное отсутствие вращения составляют одну и ту же симметрию. Точно так же поворот на 90 градусов против часовой стрелки совершенно аналогичен повороту на 270 градусов по часовой стрелке. Или же представьте, что мы передвинули стол на три метра в сторону, а затем обратно или перенесли его в другую комнату, а потом вернули на исходное место. Если в конце этого процесса объект возвращается на начальную позицию и каждая его точка занимает ровно ту позицию, в которой она находилась в начале, то это преобразование для нас будет тем же, что тождественная симметрия.

4. Композиция симметрий удовлетворяет еще одному важному свойству под названием *ассоциативность*: выполнив композицию трех симметрий S , S' и S'' в любом порядке — $(S \circ S') \circ S''$ или $S \circ (S' \circ S'')$, — мы получим один и тот же результат. Данное свойство входит в формальное определение группы в качестве дополнительной аксиомы. Мы не упоминаем его в тексте книги, потому что для тех групп, которые мы здесь рассматриваем, выполнение этого свойства очевидно.

5. Когда мы говорили о симметриях квадратного стола, нам было удобно идентифицировать четыре возможные симметрии с четырьмя углами стола. Однако подобный вариант привязки зависит от выбора одного особого угла — того, который будет представлять тождественную симметрию. После того как выбор сделан, мы действительно можем отождествить каждую симметрию с тем углом стола, в который особый угол будет переходить в результате применения этой симметрии. У этого подхода есть недостаток: если для представления тождественной симметрии мы выберем другой угол, то изменится весь набор привязок. Поэтому лучше все же проводить явное различие между симметриями стола и точками на его периметре.
6. См. Sean Carroll. *The Particle at the End of the Universe: How the Hunt for the Higgs Boson Leads Us to the Edge of a New World.* — Dutton, 2012.
7. Математик Феликс Клейн использовал идею о том, что формы объектов определяются свойствами их симметрий, в качестве отправной точки для Эрлангенской программы — доклада, сделанного им в 1872 году и оказавшего огромное влияние на дальнейшее развитие геометрии. В своем докладе Клейн заявил, что основополагающие свойства любого типа геометрии определяются соответствующей группой симметрий. Например, в евклидовой геометрии группа симметрий состоит из всех возможных преобразований евклидова пространства, сохраняющих расстояния. К таким преобразованиям относятся композиции вращений и переносов. С неевклидовыми геометриями связаны другие группы симметрий. Это позволяет нам классифицировать типы геометрий путем классификации соответствующих групп симметрий.
8. Это не означает, что однозначно будут интерпретироваться и любые другие аспекты подобного математического утверждения. Например, такие вопросы, как его значимость, широта применения, влияние на дальнейшее развитие математической науки и т. д., могут становиться предметами споров. Однако *смысл* утверждения — что именно оно говорит — не допускает противоречивых толкований при условии, что утверждение логически согласовано. (Логическая согласованность утверждения также не может быть оспорена, если нами выбрана система аксиом и утверждение сформулировано строго в ее пределах.)
9. Обратите внимание на то, что каждое вращение порождает также симметрию любого другого круглого объекта, например круглого стола. Таким образом, мы могли бы говорить о представлении группы вращений с помощью симметрий круглого стола, а не плоскости. Однако в математике термин «представление» связывается исключительно с ситуациями, когда выбранная группа порождает симметрии n -мерного пространства. Существует требование, согласно которому эти симметрии должны представлять собой то, что математики называют линейными преобразованиями, — объяснение данной концепции вы найдете в примечании 2 к главе 14.
10. Для каждого элемента g группы вращений обозначим соответствующую симметрию n -мерного пространства S_g . Для любого g это должно быть линейное преобразование, удовлетворяющее следующим свойствам: во-первых, для любой пары элементов группы g и h симметрия $S_{g \cdot h}$ должна быть равна композиции симметрий S_g и S_h . И, во-вторых, симметрия, соответствующая тождественному элементу группы, должна представлять собой тождественную симметрию плоскости.

11. Позднее было обнаружено еще три кварка — «очарованный», «прелестный» и «истинный», а также соответствующие антикварки.

Глава 3. Пятая проблема

1. Была еще маленькая полуофициальная синагога в Марьиной Роще. После перестройки ситуация значительно улучшилась: в Москве и других городах открылись новые синагоги и еврейские общества.
2. Mark Saul. Kerosinka: An Episode in the History of Soviet Mathematics // Notices of the American Mathematical Society. November 1999. Vol. 46. P. 1217–1220. Статья доступна в Интернете по адресу <http://www.ams.org/notices/199910/fea-saul.pdf>.
3. George G. Szpiro, Bella Abramovna Subbotovskaya. “Jewish People’s University” // Notices of the American Mathematical Society. November 2007. Vol. 54. P. 1326–1330. Статья доступна в Интернете по адресу <http://www.ams.org/notices/200710/tx071001326p.pdf>.
4. Александр Шень приводит примеры задач, которые давались абитуриентам-евреям на вступительных экзаменах в МГУ, в статье «Entrance examinations to the Mekh-Mat» (Mathematical Intelligencer. 1994. Vol. 16, No. 4. P. 6–10). Эта статья также перепечатана в книге М. Shifman (ed.) You Failed Your Math Test, Comrade Einstein. (World Scientific, 2005) (доступна в Интернете по адресу <http://www.ftpi.umn.edu/shifman/ComradeEinstein.pdf>). См. также другие статьи, упомянутые в этой книге, посвященные поступлению в МГУ, в частности авторов *I. Vardi* и *A. Vershik*.
5. Еще один список задач вы найдете в статье: *T. Khovanova, A. Radul*. Jewish Problems. Доступно по адресу <http://arxiv.org/abs/1110.1556>.
6. Джордж Шпиро, там же.

Глава 4. Керосинка

1. Mark Saul, там же.

Глава 5. Нити решения

1. История Еврейского народного университета и описание обстоятельств смерти Беллы Субботовской (Мучник) изложены в статье Д. Б. Фукса в книге под редакцией М. Шифмана (M. Shifman) You Failed Your Math Test, Comrade Einstein. — World Scientific, 2005. См. также George G. Szpiro, там же.
2. Если поместить единичную косу на другую и убрать средние пластины, то после укорочения нитей мы снова получим исходную косу. Это означает, что результатом сложения косы b с единичной косой является та же самая исходная коса b .
3. Результат сложения косы с ее зеркальным отражением представлен на рис. П.5.1.

Теперь в косе, которая на этом рисунке справа, возьмемся за нить, начинающуюся и заканчивающуюся на самых правых шпильках, и потянем ее вправо. В результате мы получим косу как на рис. П5.2 слева. Теперь сделаем то же

самое с нитью, начинающейся и заканчивающейся на третьей шпильке. Это даст нам косу, показанную на рис. П5.2 справа.

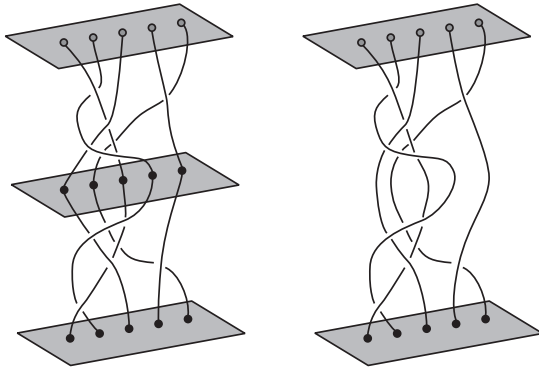


Рис. П5.1

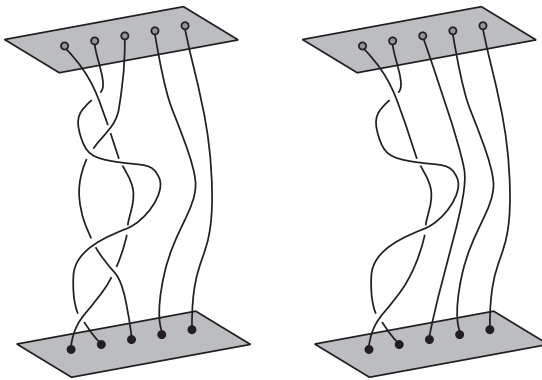


Рис. П5.2

После этого потянем влево нить, начинающуюся и заканчивающуюся на вторых шпильках. Кажется, что в результирующей косе нити скрутились, но в действительности это только иллюзия: потянув вторую нить вправо, мы устраним перехлест. Эти движения показаны на рис. П5.3. Итоговая коса (справа на рис. П5.3) представляет собой не что иное, как единичную косу, которую мы уже видели раньше. Разумеется, для того чтобы получить эту единичную косу, нам потребовалось выпрямить и подтянуть нити, но такие манипуляции допускаются нашими правилами (также нити следует укоротить, для того чтобы высота результирующей косы была такой же, как у исходных). Обратите внимание, что ни на одном шаге мы не разрезали и не связывали нити заново, а также не позволяли одной нити пройти сквозь другую.

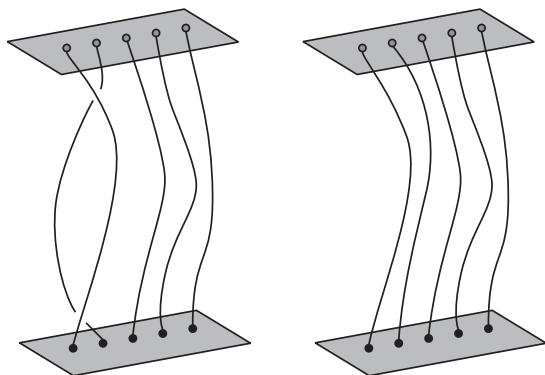


Рис. П.5.3

4. Это отличный момент для того, чтобы обсудить различие между «определением» и «теоремой». В главе 2 мы дали определение группы. А именно, мы сказали, что группой называется множество с определенной на нем операцией (которая в зависимости от обстоятельств может называться композицией, сложением или умножением), удовлетворяющее следующим свойствам (или аксиомам): среди элементов множества существует единичный элемент (в том смысле, как разъясняется в главе 2); у каждого элемента множества есть обратный ему элемент; операция, определенная на множестве, удовлетворяет свойству ассоциативности, описанному в примечании 4 главы 2. Как только мы сформулировали это *определение*, понятие группы для нас зафиксировано раз и навсегда. Отныне мы не вправе вносить в него никакие изменения.

Теперь мы можем взять произвольное множество и посмотреть, удастся ли определить на нем структуру, характерную для группы. Это означает, что нам нужно сконструировать операцию на этом множестве и доказать, что данная операция удовлетворяет всем перечисленным выше свойствам. В этой главе мы рассматриваем множество из всех кос на n нитях (как уже говорилось в тексте главы, мы не проводим различия между косами, которые получаются друг из друга путем обычного поправления нитей) и определяем операцию сложения любых двух таких кос согласно правилу, также описанному в тексте главы. После этого мы формулируем теорему о том, что эта операция удовлетворяет всем свойствам, указанным выше. Доказательство этой теоремы заключается в непосредственной проверке каждого из свойств. Мы проверили первые два свойства (см. выше примечания 2 и 3, соответственно), а последнее свойство (ассоциативность) выполняется автоматически на основании того, каким образом мы сконструировали операцию сложения двух кос.

5. Поскольку одно из наших правил гласит, что нить не может завязываться сама с собой в узел, у одной нити не остается других вариантов, кроме как напрямую соединять единственную шпильку на верхней пластине с единственной шпилькой на нижней. Конечно, от одной шпильки до другой она может добираться любым путем — например, пройти по изгибам горного серпантина или извилистой городской улицы, но нам достаточно всего лишь укоротить ее, чтобы получить обычную вертикальную нить. Другими словами, группа B_1 состоит

из одного элемента, который и есть единичный элемент этой группы (а также обратный элемент для самого себя и результат сложения его с самим собой).

6. На математическом жаргоне мы бы сказали, что «группа кос B_2 изоморфна группе целых чисел». Это означает, что между двумя группами существует взаимно однозначное соответствие — ведь с каждой косой мы связали целое число, равное количеству перехлестов, и, следовательно, сложение кос (в том смысле, как описано выше) соответствует обычному сложению целых чисел. Действительно, поместив одну косу поверх другой, мы получаем новую косу, в которой количество перехлестов равно сумме перехлестов, сопоставленных двум исходным косам. Кроме того, единичная коса, в которой перехлесты нитей отсутствуют, соответствует целому числу 0, а число перехлестов обратной косы — это число перехлестов исходной косы с обратным знаком.
7. См. David Garber. Braid Group Cryptography / In: Braids: Introductory Lectures on Braids, Configurations and Their Applications / A. Jon Berrick et al. (eds.). — World Scientific, 2010, p. 329–403. Доступно по адресу <http://arxiv.org/pdf/0711.3941v2.pdf>.
8. См., например: Graham P. Collins. Computing with Quantum Knots // Scientific American. April 2006. P. 57–63.
9. De Witt Sumners, Claus Ernst, Sylvia J. Spengler, Nicholas R. Cozzarelli. Analysis of the Mechanism of DNA Recombination Using Tangles // Quarterly Reviews of Biophysics. August 1995. Vol. 28. P. 253–313.

Mariel Vazquez, De Witt Sumners. Tangle Analysis of Gin Recombination // Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. 2004. Vol. 136. P. 565–582.

10. Более точное определение, которое мы обсудим в главе 9, гласит, что группа кос B_n является *фундаментальной группой* пространства n различных неупорядоченных точек на плоскости. Вот более практичная интерпретация коллекции из n различных неупорядоченных точек на плоскости в терминах многочленов степени n .

Рассмотрим единичный квадратный многочлен $x^2 + a_1x + a_0$, где a_0 и a_1 — комплексные числа («единичный» здесь означает, что коэффициент перед членом с самой высокой степенью x , то есть x^2 , равен 1). У него два корня, представляющих собой комплексные числа, которые, в свою очередь, однозначно определяют единичный квадратный многочлен. Комплексные числа могут быть представлены в виде точек на плоскости (см. главу 9), поэтому единичный квадратный многочлен с двумя различными корнями — это то же самое, что пара несовпадающих точек на плоскости.

Аналогично, единичный многочлен порядка n , $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ с n различными комплексными корнями, с этой точки зрения ничем не отличается от коллекции из n различных точек на плоскости — его корней. Давайте зафиксируем один подобный многочлен: $(x - 1)(x - 2)\dots(x - n)$ с корнями 1, 2, 3, ..., n . Путь в пространстве всех таких многочленов, начинающихся и заканчивающихся многочленом $(x - 1)(x - 2)\dots(x - n)$, можно визуализировать как косу на n нитях, где каждая нить представляет траекторию определенного корня. Следовательно, можно утверждать, что группа кос B_n представляет собой фундаментальную группу пространства многочленов порядка n с несовпадающими корнями (см. главу 14).

11. С каждым перехлестом двух нитей мы свяжем значение $+1$, если нить, начинающаяся на верхней пластине слева, проходит под нитью, чья шпилька на верхней пластине находится правее; если же верно обратное, то с этим перехлестом мы свяжем значение -1 . Рассмотрим, например, косу, представленную на рис. П5.4.

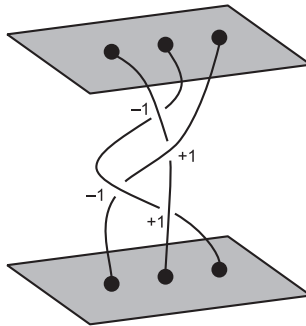


Рис. П5.4

- Сложив эти значения ($+1$ и -1) по всем перехлестам двух нитей, встречающимся в данной косе, мы получим для нее общее число перехлестов. Поправляя и передвигая нити косы, мы всегда будем добавлять или убирать такое же количество «плюсовых» перехлестов, что и «минусовых», поэтому общее количество перехлестов всегда будет оставаться неизменным. Это означает, что общее количество перехлестов *определено однозначно*: оно не меняется от того, что мы поправляем составляющие косу нити.
12. Обратите внимание на то, что общее количество перехлестов косы, полученной путем сложения двух других кос, равно сумме соответствующих характеристик двух исходных кос. Таким образом, результат сложения двух кос с нулевым общим количеством перехлестов также будет представлять собой косу, общее количество перехлестов которой равно нулю. Подгруппа коммутаторов B'_n включает в себя все такие косы. В некотором точном смысле, это максимальная неабелева часть группы кос B_n .
13. Концепция чисел Бетти берет свое начало в топологии — разделе математики, изучающем основополагающие свойства геометрических фигур. Числа Бетти определенной геометрической фигуры, такой как окружность или сфера, формируют последовательность: b_0, b_1, b_2, \dots , каждый член которой может быть либо нулем, либо натуральным числом. Например, для плоского пространства, такого как линия, плоскость и т. п., $b_0 = 1$, а все остальные числа Бетти равны нулю. В общем случае, b_0 — это количество связанных компонент геометрической фигуры. Для окружности $b_0 = 1, b_1 = 1$, а оставшиеся числа Бетти равны нулю. Тот факт, что b_1 — первое число Бетти — равно единице, отражает наличие нетривиального одномерного элемента. Для сферы $b_0 = 1, b_1 = 0, b_2 = 1$, а остальные числа Бетти равны нулю. Здесь b_2 отражает наличие нетривиального двумерного элемента.
- Числа Бетти группы кос B_n определяются как числа Бетти пространства единичных многочленов порядка n с n различными корнями. А числа Бетти

подгруппы коммутаторов B'_n — это числа Бетти тесно связанного пространства. Оно состоит из всех единичных многочленов порядка n с n различными корнями, обладающих дополнительным свойством: их дискриминант (квадрат произведения разностей между всеми парами корней) принимает фиксированное неотрицательное значение (например, пусть это будет значение, равное единице). Так, дискриминант многочлена $x^2 + a_1x + a_0$ равен $a_1^2 - 4a_0$ и похожие формулы существуют для всех n .

Из определения следует, что дискриминант многочлена равен нулю тогда и только тогда, когда многочлен имеет кратные корни. Следовательно, дискриминант задает отображение пространства всех единичных многочленов порядка n с n различными корнями на комплексную плоскость без точки 0 . Таким образом, мы получаем «расслоение» этого пространства над комплексной плоскостью без нулевой точки. Числа Бетти группы B'_n отражают топологию любого из этих слоев (топологически они ничем не отличаются друг от друга), тогда как числа Бетти группы B_n отражают топологию всего пространства. Именно стремление понять топологию слоев было основным мотивом, побудившим Варченко предложить эту задачу мне. Тем, кто желает ближе познакомиться с числами Бетти и связанными с ними концепциями гомологии и когомологии, я рекомендую следующие учебники начального уровня:

William Fulton. Algebraic Topology: A First Course. — Springer, 1995;

Allen Hatcher. Algebraic Topology. — Cambridge University Press, 2001.

Глава 6. Ученик математика

1. Неоднократно высказывалось предположение о том, что Ферма хитрил, оставляя на полях книги это примечание. Однако я так не думаю; мне кажется, это было добросовестное заблуждение. В любом случае, мы должны быть ему благодарны: сделанная им крохотная заметка определенно оказала положительное влияние на развитие математической науки.
2. Точнее, я доказал, что для каждого делителя d числа n , q -е число Бетти (где $q = n(d - 2)/d$) равно $\varphi(d)$, а также для каждого делителя d числа $n - 1$, q -е число Бетти (где $q = (n - 1)(d - 2)/d$) равно $\varphi(d)$. Все остальные числа Бетти группы B'_n равны нулю.
3. В 1985 году должность Генерального секретаря ЦК КПСС занял Михаил Горбачев. Вскоре им был инициирован ряд реформ, известных под общим названием «перестройка». Насколько я знаю, систематическая дискриминация еврейских абитуриентов на вступительных экзаменах на Мехмате — то, с чем в свое время пришлось столкнуться мне, — прекратилась около 1990 года.
4. Zdravkovska S., Duren P. Golden Years of Moscow Mathematics // American Mathematical Society. 1993. P. 221.
5. В своем интервью, опубликованном на веб-сайте Polit.ru 28 июля 2009 года под заголовком «The Black 20 Years at Mekh-Mat», математик Юлий Ильяшенко утверждает, что это событие послужило толчком к развертыванию политики антисемитизма на Мехмате (<http://www.polit.ru/article/2009/07/28/ilyashenko2>).
6. Вопрос был следующий: каким числом способов можно попарно склеить стороны правильного многоугольника с $4n$ сторон, для того чтобы получить

риманову поверхность рода n ? В главе 9 мы будем заниматься идентификацией противоположных сторон многоугольника, и тогда обсудим конкретный способ выполнения этого задания.

7. Frenkel E. Cohomology of the Commutator Subgroup of the Braid Group // Functional Analysis and Applications. 1988. Vol. 22. P. 248–250.

Глава 7. Теория Великого Объединения

1. Интервью с Робертом Ленглендсом для Mathematics Newsletter, University of British Columbia (2010); полная версия доступна по адресу http://www.math.ubc.ca/Dept/Newsletters/Robert_Langlands_interview_2010.pdf.
2. Предположим, что существуют такие натуральные числа m и n , что $\sqrt{2} = m/n$. Мы можем полагать без потери общности, что числа m и n взаимно простые, то есть у них нет среди натуральных чисел другого общего делителя, кроме единицы. В противном случае верно было бы следующее: $m = dm'$ и $n = dn'$, и тогда $\sqrt{2} = m'/n'$. Этот процесс при необходимости можно повторять до тех пор, пока мы не достигнем двух чисел, являющихся взаимно простыми.

Итак, предполагаем, что $\sqrt{2} = m/n$, где m и n взаимно простые. Возведя обе части уравнения $\sqrt{2} = m/n$ в квадрат, мы получим, что $2 = m^2/n^2$. Теперь умножим обе части на n^2 , и тогда $m^2 = 2n^2$. Из этого следует, что m — четное число, так как если бы оно было нечетным, то m^2 также было бы нечетным, а это противоречило бы данной формуле.

Если m четное, то $m = 2p$ для какого-то натурального числа p . Подставляя это равенство в предыдущую формулу, получаем, что $4p^2 = 2n^2$ и, следовательно, $n^2 = 2p^2$. Однако тогда n также должно быть четным — по той же самой причине, которая доказывает, что m — четное число. Таким образом, оба числа, m и n , четные, что противоречит нашему предположению о том, что они взаимно простые. Отсюда можно сделать вывод о том, что m и n не существуют.

Это хороший пример «доказательства от противного». Мы начинаем с утверждения, прямо противоположного тому, которое мы собираемся доказать (в нашем случае мы заявили, что $\sqrt{2}$ — рациональное число, тогда как наша цель — показать, что оно не может быть рациональным). Если из этого утверждения следует другое ложное утверждение (в нашем случае о том, что оба числа, m и n , четные, хотя мы с самого начала предположили, что они взаимно простые), то мы делаем вывод о том, что первоначальное утверждение ложно. Следовательно, истинно то утверждение, которое мы планировали доказать (что $\sqrt{2}$ — не рациональное число). Мы еще раз применим этот метод в главе 8 — сначала при обсуждении доказательства последней теоремы Ферма, а затем в примечании 6, когда приведем эвклидово доказательство существования бесконечного множества простых чисел.

3. Например, давайте умножим эти два числа одно на другое: $\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right) \times (3 - \sqrt{2})$. Просто раскроем скобки:

$$\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)(3 - \sqrt{2}) = \frac{1}{2} \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{2} \cdot 3 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} .$$

Однако $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$, поэтому, приведя подобные слагаемые, мы получим следующий результат:

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 2 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{2}.$$

Получилось число в том же самом формате; следовательно, оно также принадлежит нашей новой системе счисления.

4. Мы рассматриваем только те симметрии нашей системы счисления, которые совместимы с операциями сложения и умножения и при применении которых 0 переходит в 0, 1 переходит в 1, инверсия относительно сложения переходит в инверсию относительно сложения, а инверсия относительно умножения переходит в инверсию относительно умножения. При этом если 1 переходит в 1, то $2 = 1 + 1$ должно переходить в $1 + 1 = 2$. Аналогичным образом должны сохраняться все натуральные числа, а также соответствующие отрицательные и обратные им числа. Следовательно, подобные симметрии сохраняют все рациональные числа.
5. Очень легко проверить, что такая симметрия на самом деле совместима с операциями сложения, вычитания, умножения и деления. Давайте проделаем это для операции сложения. Рассмотрим два числа в нашей новой системе счисления:

$$x + y\sqrt{2} \text{ и } x' + y'\sqrt{2}.$$

где x, y, x', y' — рациональные числа. Сложим эти два числа:

$$(x + y\sqrt{2}) + (x' + y'\sqrt{2}) = (x + x') + (y + y')\sqrt{2}.$$

Применим нашу симметрию к обоим исходным числам. Вот что мы получим:

$$x - y\sqrt{2} \text{ и } x' - y'\sqrt{2}.$$

Теперь сложим их:

$$(x - y\sqrt{2}) + (x' - y'\sqrt{2}) = (x + x') - (y + y')\sqrt{2}.$$

Очевидно, что полученное число эквивалентно тому, которое мы бы получили, применив нашу симметрию к первой сумме:

$$(x + x') + (y + y')\sqrt{2} \mapsto (x + x').$$

Другими словами, симметрию можно применить к каждому из двух чисел по отдельности, а затем сложить их. Или же мы можем сначала сложить их, а потом применить симметрию. Результат будет один и тот же. Именно это мы имеем в виду, говоря, что наша симметрия *совместима* с операцией сложения. Точно так же можно проверить, что наша симметрия совместима с операциями вычитания, умножения и деления.

6. Например, для числового поля, полученного путем присоединения $\sqrt{2}$ к множеству рациональных чисел, группа Галуа состоит из двух симметрий: тождественной симметрии и симметрии, которая заключается в замене $\sqrt{2}$ на $-\sqrt{2}$ и наоборот. Обозначим тождественную симметрию I , а симметрию замены $\sqrt{2}$ на $-\sqrt{2}$ и наоборот — S . Явно распишем, как будет выглядеть композиция этих симметрий:

$$I \circ I = I, \quad I \circ S = S, \quad S \circ I = S,$$

И, что самое интересное,

$$S \circ S = I.$$

Действительно, если заменить $\sqrt{2}$ на $-\sqrt{2}$, а затем наоборот, то итоговым результатом будет тождественная симметрия I :

$$x + y\sqrt{2} \mapsto x - y\sqrt{2} \mapsto x - (-y\sqrt{2}) = x + y\sqrt{2}.$$

Мы полностью описали группу Галуа этого числового поля: она состоит из двух элементов, I и S , а их композиции определяются приведенными выше формулами.

- Несколькими годами ранее Нильс Хенрик Абель доказал существование уравнения пятой степени, неразрешимого в радикалах (Жозеф Луи Лагранж и Паоло Руффини также показали важные результаты в этом направлении). Однако доказательство Галуа оказалось более общим и более концептуальным. Подробнее о группах Галуа и богатой истории решения полиномиальных уравнений рассказывается в работе: Mario Livio. *The Equation That Couldn't Be Solved*. — Simon & Schuster, 2005.
- В качестве более общего примера рассмотрим квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ с рациональными коэффициентами a, b, c . Его решения x_1 и x_2 определяются формулами

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Если дискриминант $b^2 - 4ac$ не является квадратом рационального числа, то эти решения не относятся к множеству рациональных чисел. Следовательно, присоединив x_1 и x_2 к рациональным числам, мы получим числовое поле. Группа симметрий этого числового поля также состоит из двух элементов: тождественного и симметрии, заключающейся в замене одного из двух решений, x_1 и x_2 , другим. Иными словами, эта симметрия заменяет $\sqrt{b^2 - 4ac}$ на $-\sqrt{b^2 - 4ac}$ и наоборот.

Однако для того, чтобы описать эту группу Галуа, нам совсем не нужно записывать явные формулы для поиска решения. Действительно, поскольку степень многочлена равна 2, мы знаем, что решений ровно два, поэтому просто обозначим их x_1 и x_2 . Таким образом, мы имеем:

$$x^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Раскрывая скобки, находим, что $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ то есть $x_2 = -\frac{b}{a} - x_1$. Мы также знаем, что $(x_1)^2 = -\frac{c + bx_1}{a}$, так как x_1 — решение показанного выше уравнения. Таким образом, если дискриминант не является квадратом рационального числа, то числовое поле, полученное присоединением x_1 и x_2 к множеству рациональных чисел, состоит из всех чисел формата $\alpha + \beta x_1$, где α и β — два рациональных числа. Путем применения симметрии замены x_1 на x_2 число $\alpha + \beta x_1$ переходит в

$$\alpha + \beta x_2 = \left(\alpha - \beta \frac{b}{a} \right) - \beta x_1.$$

Эта симметрия совместима с операциями сложения и т. д., поскольку оба значения, x_1 и x_2 , являются решениями одного и того же уравнения с рациональными коэффициентами. Мы получили, что группа Галуа этого числового поля состоит из тождественной симметрии и симметрии замены x_1 на x_2 и наоборот. Я подчеркиваю, что при этом мы не использовали никакие сведения о том, как x_1 и x_2 выражаются через a , b и c .

9. Для того чтобы проиллюстрировать это утверждение, рассмотрим, например, уравнение $x^3 = 2$. Одно из его решений — это кубический корень из 2 ($\sqrt[3]{2}$). Есть еще два решения, представляющие собой комплексные числа: $\sqrt[3]{2} \omega$ и $\sqrt[3]{2} \omega^2$, где

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{-1}$$

(см. обсуждение комплексных чисел в главе 9).

Наименьшее числовое поле, включающее эти три решения, должно также содержать их квадраты: $\sqrt[3]{4} = (\sqrt[3]{2})^2$, $\sqrt[3]{4} \omega$ и $\sqrt[3]{4} \omega^2$ (возведенные в третью степень, они все дают 2) и отношения: ω и ω^2 . Итак, для того чтобы сконструировать данное числовое поле, к множеству рациональных чисел нам нужно присоединить восемь чисел. Однако существует соотношение

$$1 + \omega + \omega^2 = 0,$$

позволяющее выразить ω^2 в терминах 1 и ω :

$$\omega^2 = -1 - \omega.$$

Отсюда мы также имеем:

$$\sqrt[3]{2} \omega^2 = -\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2} \omega, \quad \sqrt[3]{4} \omega^2 = -\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{4} \omega.$$

Таким образом, для получения числового поля достаточно присоединить к рациональным числам только пять чисел: ω , $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{2} \omega$, $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[3]{4} \omega$. Следовательно, общим элементом этого числового поля, носящего название поля разложения уравнения $x^3 = 2$, будет комбинация шести членов: рациональное число плюс рациональное число, умноженное на ω , плюс рациональное число, умноженное на $\sqrt[3]{2}$, и т. д. Сравните это с полем разложения уравнения $x^2 = 2$, элементы которого включают только два члена: рациональное число плюс рациональное число, умноженное на $\sqrt{2}$.

Выше мы убедились, что элементы группы Галуа поля разложения уравнения $x^2 = 2$ меняют местами решения этого уравнения, $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$. Существуют два варианта перестановки: в первом происходит замена решений — одного на другое, а второй представляет собой тождественную перестановку.

Аналогично, для любого другого уравнения с рациональными коэффициентами мы определяем его поле разложения как поле, полученное путем присоединения всех его решений к рациональным числам. Используя те же аргументы, что и в примечании 4 выше, можно показать, что любая симметрия этого числового поля, совместимая с операциями сложения и умножения, сохраняет

рациональные числа. Следовательно, применение такой симметрии должно заставлять любое решение данного уравнения переходить в другое решение. То, что мы получаем, называется перестановками решений. У уравнения $x^3 = 2$ три решения, указанные выше. При любой перестановке происходит следующее: первое решение, $\sqrt[3]{2}$, переходит в любое из трех решений; второе, $\sqrt[3]{2} \omega$, переходит в одно из двух оставшихся решений; а третье, $\sqrt[3]{2} \omega^2$, обязано перейти в единственное оставшееся решение (для того, чтобы у перестановки существовала инверсия, она должна выполняться по правилу «один к одному»). Следовательно, существует $3 \cdot 2 = 6$ возможных перестановок этих трех решений. Эти перестановки образуют группу, и выясняется, что между этой группой и группой Галуа поля разложения уравнения $x^3 = 2$ существует взаимно однозначное соответствие. Таким образом, мы получили точное описание группы Галуа в терминах перестановок решений.

В приведенных выше вычислениях мы использовали явные формулы поиска решений уравнений. Но схожие доказательства можно сформулировать для любого произвольного кубического уравнения с рациональными коэффициентами, и нам не потребуется формула его решений в терминах коэффициентов. Выглядит это следующим образом. Обозначим решения уравнения x_1, x_2, x_3 . Предположим, что все они иррациональны. Однако легко видеть, что дискриминант уравнения, определяемый как

$$(x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2,$$

всегда будет рациональным числом. Оказывается, если квадратный корень из дискриминанта не является рациональным числом, то группа Галуа поля разложения этого уравнения представляет собой группу всех перестановок его решений (и состоит соответственно из шести элементов). Если же квадратный корень из дискриминанта — рациональное число, то группа Галуа включает только три перестановки: тождественную, циклическую ($x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_1$) и обратную к ней.

10. Например, нетрудно показать, что для типичного уравнения пятого порядка (то есть такого, для которого $n = 5$), имеющего пять решений, группа Галуа — это группа всех перестановок этих пяти чисел. Выполнить перестановку — значит перетасовать числа, сохранив, однако, соотношение «один к одному», как на рис. П7.1.

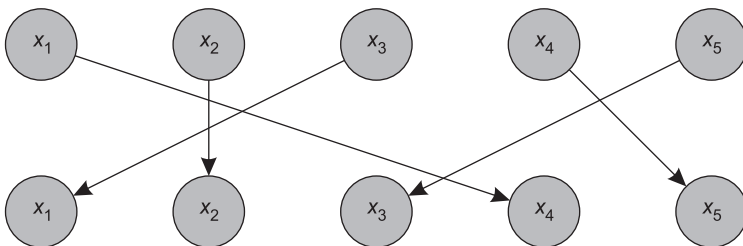


Рис. П7.1

При такой перестановке решение x_1 переходит в любое из пяти возможных решений (возможно, даже само в себя), то есть у нас на выбор есть пять чисел.

Решение x_2 переходит в одно из оставшихся четырех решений, x_3 — в одно из оставшихся трех и т. д. Итого возможно $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ перестановок, то есть группа Галуа состоит из 120 элементов.

(Группа перестановок множества из n элементов, также известная как симметрическая группа на n элементах, состоит из $n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ элементов.) В отличие от групп Галуа квадратных, кубических и биквадратных уравнений, это неразрешимая группа. Следовательно, согласно доводам Галуа, невозможно выразить решения общего уравнения пятого порядка в терминах радикалов.

11. Письмо доступно на веб-сайте Института перспективных исследований в Принстоне по адресу <http://publications.ias.edu/sites/default/files/weil1.pdf>.
12. Цитата с изображения, доступного в цифровой коллекции Института перспективных исследований, <http://cdm.itg.ias.edu/cdm/compoundobject/collection/coll12/id/1682/rec/1>.

Глава 8. Волшебные числа

1. Robert Langlands. *Is There Beauty in Mathematical Theories?* / In: *The Many Faces of Beauty* / Ed. Vittorio Hösle. — University of Notre Dame Press, 2013. Доступно по адресу <http://publications.ias.edu/sites/default/files/ND.pdf>.
2. Более подробный рассказ о гипотезах вы найдете в этой вдохновляющей статье: Barry Mazur. *Conjecture* // *Synthèse*. 1997. Vol. 111. P. 197–210.
3. Подробнее об истории последней теоремы Ферма см. в работе: Simon Singh. *Fermat's Enigma: The Epic Quest to Solve the World's Greatest Mathematical Problem*. — Anchor, 1998.
4. См.: Andrew Wiles. *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem* // *Annals of Mathematics*. 1995. Vol. 141. P. 443–551; Richard Taylor & Andrew Wiles. *Ring-Theoretic Properties of Certain Hecke Algebras* // *Annals of Mathematics*. 1995. Vol. 141. P. 553–572.

В этих работах было доказано, что гипотеза Симуры — Таниямы — Вейля представляет собой наиболее типичный (так называемый полустойчивый) случай, но для установления истинности последней теоремы Ферма этого оказалось достаточно. Спустя пару лет остальные случаи гипотезы были доказаны К. Брёнлем, Б. Конрадом, Ф. Даймондом и Р. Тейлором.

Поскольку доказательство уже найдено, правильнее было бы называть гипотезу Симуры — Таниямы — Вейля теоремой. В действительности, многие математики сегодня используют новое название — «Теорема о модулярности». Но привычка — вторая натура, и многие, как и я, все так же называют ее по-старому. Забавно, что последнюю теорему Ферма всегда называли теоремой, несмотря на то что в действительности это была гипотеза. Несомненно, первоначально это было сделано из уважения к заявлению Ферма о том, что доказательство уже обнаружено.

5. Если N не относится к простым числам, то мы можем выразить его в форме $N = xy$ для двух натуральных чисел x и y , принадлежащих отрезку от 1 до $N - 1$. Тогда у числа x отсутствует обратный относительно умножения по модулю N . Другими словами, не существует такого натурального числа z от 1 до $N - 1$, что

$$xz = 1 \text{ по модулю } N.$$

Действительно, если бы это равенство выполнялось, то мы бы могли умножить обе стороны на y , получив следующий результат:

$$xyz = y \text{ по модулю } N.$$

Однако $xy = N$, поэтому левую часть равенства можно записать как Nz , что означает, что y делится на N без остатка. Но тогда y не может принадлежать отрезку от 1 до $N - 1$.

6. Доказательство, авторство которого приписывается Евклиду, изложено ниже. Мы применяем метод под названием «доказательство от противного», который уже использовали в этой главе, когда обсуждали доказательство последней теоремы Ферма.

Предположим, что множество простых чисел конечно: p_1, p_2, \dots, p_N . Рассмотрим число A , полученное путем перемножения всех этих чисел и добавления единицы, то есть такое, что $A = p_1 p_2 \dots p_N + 1$. Я утверждаю, что это также простое число. Докажем это от противного: если это не простое число, то оно делится без остатка на какое-то другое натуральное число, отличное от 1 и самого себя. Следовательно, делителем A должно выступать одно из простых чисел, скажем p_i . Однако если A делится на p_i , то $A = 0$ по модулю p_i , тогда как из определения этого числа следует, что $A = 1$ по модулю p_i .

Мы пришли к противоречию. Это означает, что в роли делителя A не может выступать никакое другое натуральное число, кроме 1 и самого A . Следовательно, A — простое число.

Однако совершенно очевидно, что A больше любого из чисел p_1, p_2, \dots, p_N . Таким образом, это противоречит нашему предположению о том, что p_1, p_2, \dots, p_N — все возможные простые числа. Из этого мы делаем вывод о том, что наше первоначальное утверждение о конечности множества простых чисел ложно. Следовательно, простых чисел бесконечно много.

7. Давайте разложим все по полочкам: в конкретной системе счисления обратным числа a относительно умножения считается такое число b , что $a \cdot b = 1$. Например, в системе счисления, включающей все рациональные числа, обратным относительно умножения для рационального числа $\frac{3}{4}$ будет число $\frac{4}{3}$. В той системе счисления, с которой мы работаем в данный момент, обратным натурального числа a , принадлежащего отрезку от 1 до $p - 1$, является другое натуральное число b из того же самого отрезка, такое, что

$$a \cdot b = 1 \text{ по модулю } p.$$

Независимо от того, какую систему счисления мы рассматриваем, число 0 не может иметь обратного относительно умножения. Вот почему мы исключаем его из нашего множества.

8. Вот доказательство. Выберем натуральное число a от 1 до $p - 1$, где p — простое число. Умножим a на все остальные числа b из этого диапазона и рассмотрим результат по модулю p . Можно составить таблицу из двух столбцов: в первом будет число b , а во втором — результат умножения $a \cdot b$ по модулю p .

Например, если $p = 5$ и $a = 2$, то эта таблица будет выглядеть следующим образом:

| | |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 4 |
| 3 | 1 |
| 4 | 3 |

Очевидно, что каждое из чисел — 1, 2, 3, 4 — в правом столбце присутствует ровно один раз. Таким образом, умножая на двойку, мы получили тот же самый набор чисел, но подвергшийся определенной перестановке. В частности, число 1 оказалось в третьей строке. Это означает, что при умножении 3 на 2 мы получаем 1 по модулю 5. Другими словами, тройка представляет собой обратный элемент к двойке по модулю 5.

Это явление носит всеобщий характер: если составить таблицу, подобную приведенной выше, для каждого простого числа p и любого числа a из списка 1, 2, ..., $p - 1$, то каждое из чисел 1, 2, ..., $p - 1$ появится в правом столбце не более одного раза.

Давайте продемонстрируем истинность этого утверждения, снова применив трюк с доказательством от противного: предположим, что это неверно. Тогда одно из чисел, принадлежащих множеству 1, 2, ..., $p - 1$ — назовем его n , должно появиться в правом столбце как минимум два раза. Значит, множество 1, 2, ..., $p - 1$ включает два числа (назовем их c_1 и c_2 и предположим, что $c_1 > c_2$), таких, что

$$a \cdot c_1 = a \cdot c_2 = n \text{ по модулю } p.$$

Однако тогда

$$a \cdot c_1 - a \cdot c_2 = a \cdot (c_1 - c_2) = 0 \text{ по модулю } p.$$

Из последнего уравнения следует, что число $a \cdot (c_1 - c_2)$ делится на p без остатка. Но это невозможно, потому что p — простое число, а оба числа, a и $c_1 - c_2$, принадлежат множеству $\{1, 2, \dots, p - 1\}$.

Мы делаем вывод, что в правом столбце нашей таблицы каждое из чисел, 1, 2, ..., $p - 1$, может присутствовать не более одного раза. Однако поскольку этих чисел ровно $p - 1$ и в нашей таблице строк как раз $p - 1$, то единственная возможность, как это может быть реализовано, — присутствие каждого числа в точности один раз. Следовательно, одну из строк в правом столбце должно занимать число 1. Пусть соответствующим числом в левом столбце будет b . Тогда

$$a \cdot b = 1 \text{ по модулю } p.$$

Это завершает наше доказательство.

9. Например, мы можем разделить 4 на 3 в конечном поле из пяти элементов:

$$\begin{aligned} 4/3 &= 4 \cdot 3^{-1} = 4 \cdot 2 = 8 \text{ по модулю } 5 \\ &= 3 \text{ по модулю } 5 \end{aligned}$$

(здесь мы использовали тот факт, что число 2 является для 3 обратным относительно умножения по модулю 5).

10. Давайте проверим, что для любого числа a , по модулю меньшего 1, имеем

$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 + \dots = \frac{1}{1-a}.$$

В этом легко убедиться, умножив обе стороны на $1 - a$. Используя это тождество и обозначив $(q + q^2)$ как a , мы можем переписать порождающую функцию для чисел Фибоначчи

$$q(1 + (q + q^2) + (q + q^2)^2 + (q + q^2)^3 + \dots)$$

в следующей форме:

$$\frac{q}{1 - q - q^2}.$$

Теперь, записав $1 - q - q^2$ в виде произведения линейных множителей, мы обнаруживаем, что

$$\frac{q}{1 - q - q^2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(1 - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} q \right)^{-1} - \left(1 - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} q \right)^{-1} \right).$$

Снова прибегая к помощи вышеуказанного тождества и с учетом того, что

$a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} q$, мы получаем, что коэффициент перед q^n в нашей порождающей функции (который и определяет F_n) равен

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Таким образом, мы получили замкнутую формулу для n -го числа Фибоначчи, не зависящую от предыдущих чисел Фибоначчи.

Обратите внимание на то, что присутствующее в формуле число $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ представляет собой так называемое *золотое сечение*. Из приведенной выше формулы следует, что сечение F_n/F_{n-1} по мере возрастания n стремится к золотому сечению. Подробнее о золотом сечении и числах Фибоначчи см. Mario Livio. *The Golden Ratio*. — Broadway, 2003.

11. Я использую представление этого результата, данное Ричардом Тейлором (Richard Taylor. *Modular arithmetic: driven by inherent beauty and human curiosity* // *The Letter of the Institute for Advanced Study*. Summer 2012. P. 6–8.). Благодарю Кена Рибета за полезные замечания. Согласно книге Андре Вейля *Dirichlet Series and Automorphic Forms* (Springer-Verlag, 1971), кубическое уравнение, которое мы обсуждаем в этой главе, впервые рассмотрел Джон Тейт, а затем Роберт Фрике.
12. Речь идет об одной из так называемых «конгруэнтных подгрупп» группы под названием $SL_2(\mathbb{Z})$, состоящей из матриц размерности 2×2 с целыми коэффициентами и детерминантом, равным единице, то есть целочисленных массивов

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

таких, что $ad - bc = 1$. Умножение матриц выполняется по стандартной формуле

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}.$$

Итак, любое комплексное число q внутри единичного круга можно записать как $e^{2\pi i \sqrt{-1} \tau}$ для некоторого комплексного числа τ , мнимая часть которого больше нуля: $\tau = x + y\sqrt{-1}$, где $y > 0$ (см. примечания 12 к главе 15). Число q единственным образом определяется числом τ , и наоборот. Следовательно, мы можем описать действие группы $SL_2(\mathbb{Z})$ на q , описав соответствующее действие на τ . Последнее описывается следующей формулой:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}.$$

Группа $SL_2(\mathbb{Z})$ (а точнее, ее факторгруппа по двухэлементной подгруппе, состоящей из тождественной матрицы I и матрицы $-I$) — это группа симметрий круга, снабженного определенной неевклидовой метрикой, которая называется моделью Пуанкаре в круге. Наша функция представляет собой модулярную форму «веса 2», что означает, что она инвариантна относительно описанного выше действия конгруэнтной подгруппы группы $SL_2(\mathbb{Z})$ на круге при условии, что мы уточним это действие путем умножения функции на коэффициент $(c\tau + d)^2$.

См., например, работу: Henri Darmon. A Proof of the Full Shimura–Taniyama–Weil Conjecture is Announced // Notices of the American Mathematical Society. December 1999. Vol. 46. P. 1397–1401. Доступно в Сети по адресу <http://www.ams.org/notices/199911/comm-darmon.pdf>.

13. Автор этого изображения — Ларс Мадсен (Lars Madsen), и оно опубликовано с его разрешения. Благодарю Яна Эйгола за то, что показал мне его, и за содержательное обсуждение.
14. См., например, работы: Neal Koblitz. Elliptic curve cryptosystems // Mathematics of Computation. 1987. Vol. 49. P 203–209; I. Blake, G. Seroussi, N. Smart. Elliptic Curves in Cryptography. — Cambridge University Press, 1999.
15. Вообще говоря, это верно для всех простых чисел p за исключением некоторого конечного множества. Есть еще два инварианта: так называемый кондуктор, связанный с кубическим уравнением, и так называемый уровень, связанный с модулярной формой; эти инварианты тоже сохраняются при указанном соответствии. Например, для рассмотренного выше кубического уравнения они оба равны 11. Также хочу отметить, что во всех упомянутых модулярных формах постоянный член равен нулю, коэффициент b_1 перед q равен 1, а все остальные коэффициенты b_n , $n > 1$, определяются значениями b_p , соответствующими простым числам p .
16. А именно пусть a , b и c решают уравнение Ферма $a^n + b^n = c^n$, где n — нечетное простое число. Следуя рассуждениям Ива Эльгуарша и Герхарда Фрея, рассмотрим кубическое уравнение

$$y^2 = x(x - a^n)(x + b^n).$$

Кен Рибет доказал (исходя из предположения Фрея и некоторых частичных результатов, полученных Жаном-Пьером Серром), что это уравнение не удовлетворяет гипотезе Симуры — Таниямы — Вейля. Объединяя это со случаем

$n = 4$ (который был доказан самим Ферма), получаем доказательство последней теоремы Ферма. И действительно, любое целое число $n > 2$ можно записать в виде произведения $n = mk$, где m либо равно 4, либо представляет собой нечетное простое число. Следовательно, отсутствие решений уравнения Ферма для такого m подразумевает, что их нет и для любых $n > 2$.

17. Goro Shimura Yutaka Taniyama and His Time. Very Personal Recollections // Bulletin of London Mathematical Society. 1989. Vol. 21. P. 193. Цитата из статьи http://ru.wikipedia.org/wiki/Танияма,_Ютака.
18. Там же, с. 190.
19. См. примечание 1 на с. 1301–1303 в следующей работе, посвященной богатой истории гипотезы: Serge Lang. Some History of the Shimura–Taniyama Conjecture // Notices of the American Mathematical Society. 1995. Vol. 42. P. 1301–1307. Статья доступна в Сети по адресу <http://www.ams.org/notices/199511/forum.pdf>.

Глава 9. Розеттский камень

1. The Economist. August 20, 1998. P. 70.
2. Изображения римановых поверхностей, которые вы встретите в этой книге, созданы в программе Mathematica® с помощью кода, любезно предоставленного Стеном Вэгеном. Подробнее об этом см.: Wagon S., Mathematica® in Action: Problem Solving Through Visualization and Computation. — Springer-Verlag, 2010.
3. Это нельзя назвать точным определением, но оно позволяет прочувствовать суть вещественных чисел. Для того чтобы сформулировать точное определение, каждое вещественное число следует рассматривать как предел сходящейся последовательности рациональных чисел (также известной как последовательность Коши); например, подобную последовательность дают нам усечения бесконечного десятичного разложения числа $\sqrt{2}$.
4. Для того чтобы сделать это, нужно пометить точку на окружности и поставить окружность на ось так, чтобы отмеченная точка совпадала с точкой 0 на оси. Теперь вы должны катить окружность вправо до тех пор, пока отмеченная точка снова не соприкоснется с линией (это произойдет после одного полного оборота окружности). Точка соприкосновения окружности и линии тогда соответствует значению π .
5. Геометрия комплексных чисел (и других систем счисления) превосходно объясняется в работе: Barry Mazur. Imagining Numbers. — Picador, 2004.
6. Точнее, мы получим поверхность в форме пончика без одной точки. Эта точка соответствует «бесконечному решению», в котором оба значения (x и y) стремятся к бесконечности.
7. Для получения римановой поверхности рода g необходимо поставить в правую часть уравнения многочлен от x степени $2g + 1$.
8. Впервые связь между алгеброй и геометрией заметил Рене Декарт, и он описал это важнейшее наблюдение в *La Géométrie*, приложении к его книге *Discours de la Méthode*, опубликованной в 1637 году. Вот как Э. Т. Белл отзывается о методе

Декарта: «И здесь мы наблюдаем настоящую мощь метода. Мы берем уравнения любой желаемой или предполагаемой степени сложности и геометрически интерпретируем их алгебраические и аналитические свойства... Отныне алгебра и анализ будут нашими лоцманами в неизведанных морях “пространства” и его “геометрии”». (Е. Т. Bell. *Men of Mathematics*. — Touchstone, 1986, p. 54.) Обратите внимание, однако, что метод Декарта применяется к решениям уравнений в вещественных числах, тогда как в этой главе нас интересуют решения в конечных полях и комплексных числах.

9. Например, в главе 8 мы узнали, что у кубического уравнения $y^2 + y = x^3 - x^2$ четыре решения по модулю 5. Поэтому логично сделать тривиальное предположение о том, что соответствующая кривая над конечным полем из пяти элементов состоит из четырех точек. Однако в действительности ее структура намного сложнее, так как мы можем также рассматривать решения со значениями из различных расширений конечного поля из пяти элементов: например, из поля, полученного путем присоединения решений уравнения $x^2 = 2$, которое мы будем обсуждать в примечании 8 к главе 14. Эти расширенные поля включают 5^n элементов для $n = 2, 3, 4, \dots$, что дает нам иерархическую структуру решений со значениями из этих конечных полей.

Заметим, что кривые, соответствующие кубическим уравнениям, называются «эллиптическими кривыми».

10. *The Bhagavad-Gita. Krishna's Counsel in Time of War* / Translated by Barbara Stoler Miller. — Bantam Classic, 1986.

Стоит отметить, что в начале 1930-х Вейль провел два года в Индии, и, по его признанию, ощутил сильнейшее влияние религии индуизма.

11. См., например, Noel Sheth. *Hindu Avatāra and Christian Incarnation: A comparison*. *Philosophy East and West*. Vol. 52, No. 1. P. 98–125.
12. André Weil. *Collected Papers*. Vol. I — Springer-Verlag, 1979, p. 251 (мой перевод).
13. Там же, с. 253. Идея заключается в том, что, взяв кривую над конечным полем, мы рассматриваем на ней так называемые рациональные функции. Подобная функция выглядит как отношение двух многочленов (обратите внимание на то, что во всех точках на кривой, в которых многочлен, стоящий в знаменателе, равен нулю, у рациональной функции присутствует «полос», то есть ее значение в этих точках не определено). Оказывается, что множество всех рациональных функций на данной кривой по своим свойствам аналогично множеству рациональных чисел или даже более общему числовому полю, например, такому, о которых мы говорили в главе 8.

Для того чтобы лучше понять это, рассмотрим рациональные функции на римановых поверхностях; аналогия в этом случае сохранится. Например, возьмем сферу. Используя стереографическую проекцию, мы можем представить сферу как множество, состоящее из одной точки и всей комплексной плоскости (дополнительную точку можно рассматривать как бесконечность). Обозначим $t = r + s\sqrt{-1}$ координату на комплексной плоскости. Тогда все многочлены $P(t)$ с комплексными коэффициентами будут функциями на данной плоскости. Эти многочлены служат аналогами целых чисел, с которыми мы имеем дело в теории чисел. Рациональная функция на сфере — это отношение двух многочленов $P(t)/Q(t)$, не имеющих общих делителей. Эти рациональные

функции аналогичны рациональным числам, представляющим собой дроби m/n с целочисленными числителями и знаменателями, не имеющими общих делителей. Подобным образом рациональные функции на римановой поверхности общего вида аналогичны элементам более общего числового поля.

Мощь этой аналогии кроется в том факте, что для многих результатов, касающихся числовых полей, существуют аналогичные результаты, распространяющиеся на рациональные функции на кривых над конечными полями, и наоборот. Иногда бывает проще найти и/или доказать определенное утверждение для объектов какого-то одного рода. Тогда аналогия говорит нам, что соответствующее утверждение будет истинным и для объектов второго рода. Благодаря этому инструменту Вейль и другие математики получили многие важные результаты.

14. Там же, с. 253. Здесь я использую перевод Мартина Кригера (Martin H. Krieger) из *Notices of the American Mathematical Society*. 2005. Vol. 52. 340.
15. Существовали три гипотезы Вейля, и соответствующие доказательства были найдены Бернардом Дворком, Александром Гротендиком и Пьером Делинем.
16. В этом определении содержится некая избыточность. Для того чтобы понять это, давайте рассмотрим два пути на плоскости, показанной на рис. П9.1; один путь обозначен сплошной линией, а второй — штриховой. Очевидно, что эти пути можно без разрывов преобразовать один в другой. Логично и удобно объявить два замкнутых пути, которые поддаются подобной деформации, тождественными. Это позволит кардинально уменьшить число элементов в нашей группе.

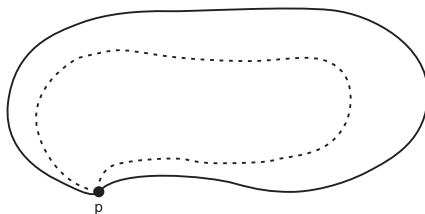


Рис. П9.1

Данное правило по сути аналогично правилу, которое мы использовали в определении групп кос в главе 5. Тогда мы тоже объявили, что если одну косу можно переделать в другую (и наоборот), не обрезая и не связывая нити, то эти косы тождественны.

Итак, мы определили фундаментальную группу нашей римановой поверхности как группу, элементы которой представляют собой закрытые пути, начинающиеся и заканчивающиеся в точке P . Помимо этого, мы добавляем требование о том, что пути, которые можно без разрывов преобразовывать друг в друга, считаются тождественными.

Обратите внимание на то, что если наша риманова поверхность является связной (что мы неявно подразумеваем во всех наших обсуждениях), то способ выбора контрольной точки P не имеет значения: фундаментальные группы,

связанные с разными контрольными точками P , будут находиться во взаимно однозначном соответствии (точнее, они будут «изоморфны» друг другу).

17. Тожественным элементом этой группы будет «постоянный путь». Он никогда не покидает выбранную точку P . Вообще, полезно думать о любых замкнутых путях как о траекториях частиц, начинающихся и заканчивающихся в одной и той же точке P . Постоянный путь — это траектория частицы, которая все время остается в точке P . Совершенно очевидно, что при добавлении любого пути к постоянному в том смысле, как это определено в тексте главы, мы снова получаем исходный путь.

Обратным путем к выбранному будет тот же самый путь, но пройденный в противоположном направлении. Для того чтобы убедиться в том, что таким способом мы на самом деле получаем обратный элемент, сложим прямой путь с обратным. Результатом будет новый путь, следуя вдоль которого, мы дважды пройдем по одному и тому же маршруту, просто в разных направлениях. Новый «двойной» путь можно без разрывов видоизменить таким образом, чтобы в итоге получить постоянный путь. Сначала мы просто немного сдвигаем один из путей. А результат легко сжимается до точки, как показано на рис. П9.2.

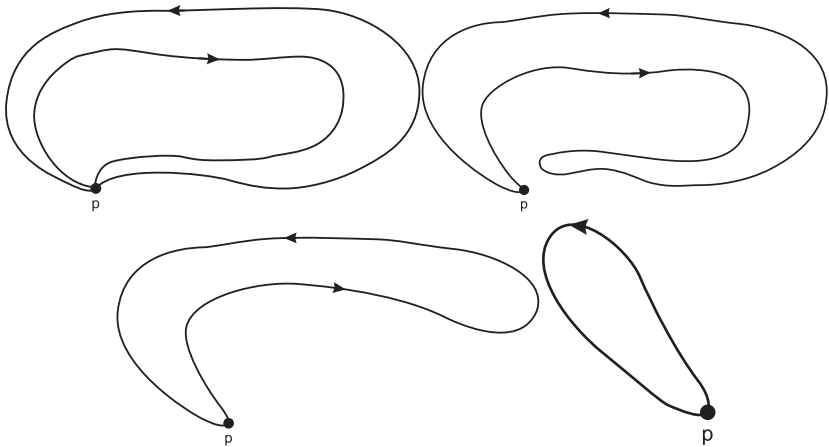


Рис. П9.2

18. Или же, как мы говорили в примечании 10 к главе 5, группу $\text{Kos } B_n$ можно интерпретировать как фундаментальную группу пространства единичных многочленов степени n с n различными корнями. В качестве контрольной точки P мы выбираем многочлен $(x - 1)(x - 2)\dots(x - n)$ с корнями $1, 2, \dots, n$ (это «шпильки» косы).
19. Для того чтобы понять, почему два пути коммутируют друг с другом, необходимо сначала убедиться в том, что модель тора можно сделать, склеив противоположные стороны квадрата (многоугольника с четырьмя вершинами). Итак, склеивая горизонтальные стороны a_1 и a'_1 , мы получаем цилиндр.

Склеивая окружности на противоположных концах цилиндра (это то, во что после первого склеивания превратились две вертикальные стороны квадрата

a_2 и a'_2), мы получаем тор. Мы видим, что стороны a_1 и a_2 стали двумя независимыми замкнутыми путями на торе. Обратите внимание на то, что все четыре угла квадрата на поверхности тора представляют одну и ту же точку, так что пути действительно замкнуты — они начинаются и заканчиваются в одной и той же точке P на поверхности тора. Кроме того, $a_1 = a'_1$, ведь мы склеили эти стороны, и точно так же $a_2 = a'_2$.

Если мы на квадрате пройдем по пути a_1 , а затем по пути a_2 , то придем из исходного угла в противоположный. Результирующим путем будет $a_1 + a_2$. Однако мы также можем пройти между этими углами по другому пути: сначала по a'_2 , потом по a'_1 , который идентичен a_1 . В этом случае результирующий путь выглядит как $a'_2 + a'_1$. После склеивания противоположных сторон квадрата a'_1 превращается в a_1 , а a'_2 — в a_2 . Таким образом, $a'_2 + a'_1 = a_2 + a_1$.

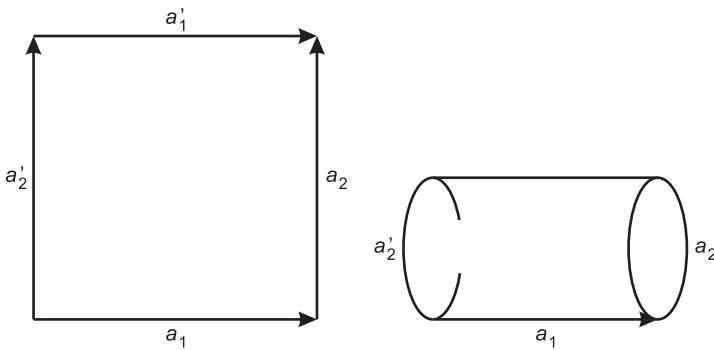


Рис. П9.3

Теперь убедимся, что оба пути, $a_1 + a_2$ и $a_2 + a_1$, можно деформировать в диагональный путь, то есть прямую линию, соединяющую два противоположных угла, как показано на рис. П9.4 (штриховая стрелка показывает направление деформации каждого из двух путей).

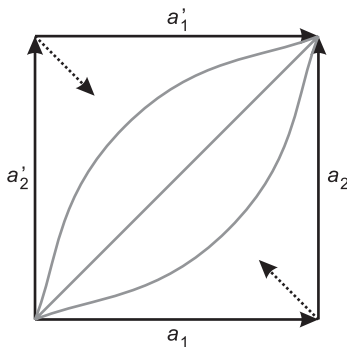


Рис. П9.4

Это означает, что пути $a_1 + a_2$ и $a_2 + a_1$ порождают один и тот же элемент фундаментальной группы тора. Тем самым мы доказали, что

$$a_1 + a_2 = a_2 + a_1.$$

Это показывает, что у фундаментальной группы тора очень простая структура: мы можем выразить ее элементы в виде $M \cdot a_1 + N \cdot a_2$, где a_1 и a_2 — две окружности на торе, показанные на рис. 9.6, а M и N — целые числа. Сложение в фундаментальной группе ничем не отличается от стандартной операции сложения подобных выражений.

20. Самый простой способ описать фундаментальную группу римановой поверхности рода g (где положительное число g указывает число отверстий) — снова удостовериться, что мы можем получить ее, склеивая противоположные стороны многоугольника. Только на этот раз это должен быть многоугольник с $4g$ вершинами. Например, давайте склеим противоположные стороны восьмигранника (многоугольника с восемью вершинами). В этом случае у нас есть четыре пары противоположных сторон; обозначим стороны в каждой паре соответствующим образом. Результат такого склеивания вообразить сложнее, чем в случае тора, но известно, что это риманова поверхность рода два (поверхность датской булочки).

Точно так же, как мы описывали фундаментальную группу тора, с помощью этого результата можно составить описание фундаментальной группы римановой поверхности общего вида. Как и в случае с тором, мы конструируем $2g$ элементов фундаментальной группы римановой поверхности рода g , проходя по путям вдоль $2g$ последовательно соединенных сторон многоугольника (каждая из оставшихся $2g$ сторон отождествляется с одной из сторон, по которым мы прошли). Обозначим эти пути a_1, a_2, \dots, a_{2g} . Они порождают фундаментальную группу нашей римановой поверхности — в том смысле, что любой элемент данной группы можно получить путем сложения перечисленных путей, возможно, взятых несколько раз. Например, элемент для $g = 2$ выглядит так: $a_3 + 2a_1 + 3a_2 + a_3$. (Обратите внимание, однако, на то, что этот путь нельзя записать, например, в виде $2a_3 + 2a_1 + 3a_2$, потому что a_3 не коммутирует с a_2 и a_1 , то есть самый правый элемент a_3 невозможно перенести влево.)

Как и в случае с тором, записывая путь, соединяющий два противоположных угла нашего многоугольника, двумя разными способами, мы получаем отношение между ними, обобщающее соотношение коммутативности для тора:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{2g-1} + a_{2g} = a_{2g} + a_{2g-1} + \dots + a_2 + a_1.$$

В действительности, выясняется, что это единственное возможное отношение между этими элементами, поэтому мы получаем явное определение фундаментальной группы: оно порождается элементами a_1, a_2, \dots, a_{2g} , для которых выполняется данное отношение.

21. Для того чтобы лучше разобраться в этом, нужно рассмотреть все рациональные функции на нашей римановой поверхности (определенные в том смысле, как описано выше, в примечании 9). Все эти функции представляют собой аналоги рациональных чисел. Соответствующая группа Галуа определяется как группа симметрий числового поля, полученного путем присоединения к множеству рациональных чисел решений полиномиального уравнения,

такого как $x^2 = 2$. Подобным образом мы можем присоединять решения полиномиальных уравнений к рациональным функциям на римановой поверхности X . Оказывается, что результатом этой операции становятся рациональные функции на другой римановой поверхности X' , «накрывающей» X , то есть у нас есть отображение $X' \rightarrow X$ с конечными слоями. В этом случае группа Галуа включает только те симметрии X' , которые оставляют все точки X в неизменном виде. Другими словами, эти симметрии действуют вдоль слоев отображения $X' \rightarrow X$.

Вернемся теперь к римановой поверхности. Если на римановой поверхности X есть замкнутый путь, начинающийся и заканчивающийся в какой-то точке P на X , то мы можем взять каждую точку X' в слое над P и «сопроводить» ее вдоль этого пути. В общем случае после возвращения обратно мы окажемся в другой точке слоя над P , то есть мы получим преобразование данного слоя. Это так называемое явление монодромии, о котором мы более подробно поговорим в главе 15. Такое преобразование слоя можно представить элементом группы Галуа. Таким образом, у нас в руках оказывается явная связь между фундаментальной группой и группой Галуа.

Глава 10. В петле

1. Слово «специальные» указывает на те ортогональные преобразования, которые сохраняют ориентацию, — а это в точности вращения сферы. Примером ортогонального преобразования, не сохраняющего ориентацию (и, следовательно, не принадлежащего $SO(3)$), служит отражение относительно одной из координатных плоскостей. Группа $SO(3)$ тесно связана с группой $SU(3)$, о которой мы говорили в главе 2 в связи с темой кварков (это специальная унитарная группа трехмерного пространства). Группа $SU(3)$ определяется аналогично $SO(3)$; только мы заменяем *вещественное* трехмерное пространство *комплексным* трехмерным пространством.
2. Еще один способ убедиться в том, что размерность окружности равна единице, — посмотреть на окружность как на множество всех вещественных решений уравнения $x^2 + y^2 = 1$ (мы обсуждали это в главе 9). Итак, окружность — это множество точек на плоскости, связанных одним уравнением. Ее размерность равна разнице между размерностью плоскости (два) и числом уравнений (одно).
3. Эта цитата присутствует в книге, составленной из заметок Дюшана, под названием *À l'Infinifitif* — как говорится в работе: Gerald Holton. Henri Poincaré, Marcel Duchamp and Innovation in Science and Art // Leonardo. 2001. Vol. 34. P. 130.
4. Linda Dalrymple Henderson. The Fourth Dimension and Non-Euclidean Geometry in Modern Art. — MIT Press, 2013, P. 493.
5. Gerald Holton, там же, P. 134.
6. Charles Darwin. Autobiographies. — Penguin Classics, 2002, p. 30.
7. Подробности вы найдете, например, в работе: Shing-Tung Yau, Steve Nadis. The Shape of Inner Space. — Basic Books, 2010.
8. Оказывается, размерность данной группы равна $n(n-1)/2$. Другими словами, для описания элемента этой группы требуется $n(n-1)/2$ независимых координат.

нат (в случае $n = 3$ это означает $3(3 - 1)/2 = 3$ координаты, как мы уже видели в тексте главы).

9. Математически любую петлю можно рассматривать как изображение конкретного «отображения» окружности на трехмерное пространство, то есть правило, связывающее с каждой точкой φ на окружности точку $f(\varphi)$ в трехмерном пространстве. Мы рассматриваем только «гладкие» отображения. Грубо говоря, это означает, что у петли нет острых углов или изгибов, то есть она выглядит как на рис. 10.6 в тексте главы.

В более общем случае отображением многообразия S на многообразие M называется правило, которое связывает с каждой точкой s в S точку из M , которую мы называем образом s .

10. См., например: Brian Greene. *The Elegant Universe*. — Vintage Books, 2003.
11. Точнее, петля в $SO(3)$ представляет собой множество $\{f(\varphi)\}$ элементов $SO(3)$, запараметризованное углом φ (который служит координатой на окружности). Возьмем вторую петлю, представляющую собой множество $\{g(\varphi)\}$, и составим композицию двух вращений, $f(\varphi) \circ g(\varphi)$, для каждого φ . Таким образом, мы получим новое множество $\{f(\varphi) \circ g(\varphi)\}$, которое представляет собой еще одну петлю из $SO(3)$. Итак, для каждой пары петель в $SO(3)$ мы можем создать третью петлю. Это правило умножения в группе петель. Тожественным элементом в группе петель служит петля, локализованная в единичном элементе $SO(3)$, то есть $f(\varphi)$ — это тождественный элемент $SO(3)$ для всех φ . Обратная петля к петле $\{f(\varphi)\}$ — это петля $\{f(\varphi)^{-1}\}$. Легко проверить, что все аксиомы группы выполняются. Следовательно, пространство петель $SO(3)$ действительно является группой.
12. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим простой пример: пространство петель на плоскости. На плоскости используются две координаты, x и y . Следовательно, петля на плоскости — это, по сути, множество точек плоскости с координатами $x(\varphi)$ и $y(\varphi)$, по одной точке для каждого угла φ от 0 до 360 градусов (например, формулы $x(\varphi) = \cos(\varphi)$ и $y(\varphi) = \sin(\varphi)$ описывают конкретную петлю: окружность единичного радиуса с центром в начале координат). Таким образом, для описания подобной петли нам необходим бесконечный набор из пар чисел $(x(\varphi), y(\varphi))$, по одной паре для каждого угла φ . Вот почему пространство петель на плоскости бесконечномерно. По той же самой причине пространство петель любого конечномерного многообразия также бесконечномерно.
13. Цитата приведена в работе: Langer R. E. René Descartes // *The American Mathematical Monthly*. 1937. Vol. 44, No. 8. P. 508.
14. Касательная плоскость — это ближайшая к сфере плоскость среди всех плоскостей, проходящих через данную точку. Она касается сферы в одной-единственной точке, и если мы хотя бы немного сдвинем ее (проследив, чтобы она все так же проходила через первоначальную фиксированную точку), то получим плоскость, пересекающую сферу во многих точках.
15. По определению, алгебра Ли рассматриваемой группы Ли — это плоское пространство (линия, плоскость и т. п.), находящееся к данной группе Ли ближе всего среди всех плоских пространств, проходящих через точку, соответствующую единичному элементу группы Ли.
16. В общем случае на окружности нет никаких специальных точек. Однако в группе окружности специальная точка есть: это единичный элемент данной

группы, представляющий собой особую точку на окружности. Для того чтобы превратить окружность в группу, его обязательно нужно указать.

17. Приведем более точное определение векторного пространства.

Выбрав систему координат в n -мерном плоском пространстве, мы можем отождествить точки этого пространства с наборами из n вещественных чисел (x_1, x_2, \dots, x_n) , где каждое из чисел x_i — это одна из координат точки. В частности, существует особая точка $(0, 0, \dots, 0)$, все координаты которой равны нулю. Это начало координат.

Теперь зафиксируем точку (x_1, x_2, \dots, x_n) в данном пространстве и определим на нем симметрию, преобразующую любую другую точку (z_1, z_2, \dots, z_n) в точку $(z_1 + x_1, z_2 + x_2, \dots, z_n + x_n)$. Геометрически эту симметрию можно представить как смещение нашего n -мерного пространства в ту сторону, куда указывает направленный отрезок, соединяющий начало координат с точкой (x_1, x_2, \dots, x_n) . Такая симметрия называется вектором, и для ее представления используется тот самый направленный отрезок. Обозначим этот вектор $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$. Между точками n -мерного плоского пространства и векторами существует взаимно однозначное соответствие. Следовательно, плоское пространство с фиксированной системой координат можно рассматривать как пространство векторов. Поэтому мы называем его *векторным пространством*.

Преимущество рассуждений в терминах векторов вместо обычных точек заключается в том, что на векторах определены две естественные операции. Первая — это сложение векторов, превращающее векторное пространство в группу. Как я уже рассказывал в главе 2, симметрии можно компоновать, поэтому они формируют группу. Композиция симметрий сдвига, описанных в предыдущем абзаце, дает нам следующее правило сложения векторов:

$$\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle + \langle y_1, y_2, \dots, y_n \rangle = \langle y_1 + x_1, y_2 + x_2, \dots, y_n + x_n \rangle.$$

Тожественным элементом в группе векторов служит вектор $\langle 0, 0, \dots, 0 \rangle$. Обратный элемент вектора $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ относительно операции сложения — это вектор $\langle -x_1, -x_2, \dots, -x_n \rangle$.

Вторая операция — это умножение векторов на вещественные числа. Результатом умножения вектора $\langle x_1, x_2, \dots, x_n \rangle$ на вещественное число k будет вектор $\langle kx_1, kx_2, \dots, kx_n \rangle$.

Таким образом, на векторном пространстве определены две структуры: сложение, удовлетворяющее свойствам группы, и умножение на числа. Эти структуры обладают естественными свойствами.

Кроме того, известно, что любое касательное пространство — это векторное пространство, поэтому любая алгебра Ли представляет собой векторное пространство.

Описание, приведенное выше, — это определение векторного пространства над вещественными числами. Действительно, координаты векторов — это вещественные числа, так что мы можем умножать вектора на вещественные числа. Заменяв в этом описании вещественные числа комплексными, мы получим определение векторного пространства над комплексными числами.

18. Операции на алгебре Ли обычно обозначаются с помощью квадратных скобок, то есть для двух векторов \vec{a} и \vec{b} из алгебры Ли (она является векторным

пространством, как мы узнали из предыдущего примечания) результат данной операции записывается как $[\vec{a}, \vec{b}]$. Она обладает следующими свойствами: $[\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{b}, \vec{a}]$, $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$, $[k\vec{a}, \vec{b}] = k[\vec{a}, \vec{b}]$ для любого числа k , а также выполняется так называемое тождество Якоби:

$$[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}], \vec{a}] + [\vec{c}, \vec{a}], \vec{b}] = 0.$$

19. Результатом перекрестного умножения двух векторов \vec{a} и \vec{b} в трехмерном пространстве будет вектор, традиционно обозначаемый $\vec{a} \times \vec{b}$, который перпендикулярен плоскости, содержащей \vec{a} и \vec{b} , и обладает длиной, равной произведению длин \vec{a} и \vec{b} на синус угла между ними, и при этом такой, что у тройки векторов \vec{a} , \vec{b} и $\vec{a} \times \vec{b}$ положительная ориентация (его можно изобразить с помощью так называемого правила буравчика).
20. Например, алгебра Ли группы Ли $SO(3)$ — это трехмерное векторное пространство. Таким образом, алгебра Ли группы петель $SO(3)$ состоит из всех петель данного трехмерного пространства. Перекрестное умножение в трехмерном пространстве определяет структуру алгебры Ли на этих петлях. Следовательно, взяв две петли, мы можем построить третью, хотя описать словами, как она будет выглядеть, совсем непросто.
21. Точнее, алгебра Каца — Муди — это расширение алгебры Ли группы петель одномерным пространством. Подробнее об этом рассказывается в книге: *Victor Kac. Infinite-dimensional Lie Algebras. Third Edition.* — Cambridge University Press, 1990.
22. Модели, включающие симметрию алгебры Вирасоро, называются конформными теориями поля. Впервые они были изучены российскими физиками Александром Белавиным, Александром Поляковым и Александром Замолотчиковым в 1984 году. Фундаментальный труд этих ученых основывался на результатах, полученных Фейгиным и Фуksom, а также Виктором Кацем.
23. Наиболее известные из них — это модели Весса — Зумино — Виттена. Подробнее об этом см. в книге: *Edward Frenkel, David Ben-Zvi. Vertex Algebras. 2nd ed.* // American Mathematical Society, 2004.
24. У этих «квантовых полей» нет ничего общего с «числовыми полями» и «конечными полями», которые мы обсуждали в предыдущих главах. Это еще один пример сбивающей с толку математической терминологии, хотя некоторые другие языки обходятся без двусмысленности: например, во французском языке для обозначения квантовых полей используется слово *champs*, а для числовых и конечных — *corps*.

Глава 11. Покорение вершины

1. Вот как выглядит точное построение. Предположим, что у нас есть элемент группы петель $SO(3)$. Мы знаем, что он представляет собой множество $\{g(\varphi)\}$ элементов $SO(3)$, запараметризованное углом φ (это координата на окружности). С другой стороны, элемент пространства петель сферы — это множество $\{f(\varphi)\}$ точек на сфере, запараметризованное углом φ . Взяв такие $\{g(\varphi)\}$ и $\{f(\varphi)\}$, мы можем построить новый элемент пространства петель сферы в виде множества $\{g(\varphi)f(\varphi)\}$, то есть применить вращение $g(\varphi)$ к точкам $f(\varphi)$ сферы — независимо

друг от друга для каждого φ . Таким образом, мы убедились, что каждый элемент группы петель $SO(3)$ порождает симметрию пространства петель сферы.

- Точка флагового многообразия представляет собой следующий набор: прямую в фиксированном n -мерном пространстве; плоскость, содержащую эту прямую; трехмерное пространство, содержащее эту плоскость, и т. д. вплоть до $(n - 1)$ -мерной гиперплоскости, содержащей все перечисленные выше объекты.

А теперь сравните это определение с определением проективных пространств, которые я стал изучать поначалу: точка проективного пространства — это всего лишь прямая в n -мерном пространстве, ничего более.

В простейшем случае, когда $n = 2$, наше фиксированное пространство двумерно, поэтому единственный доступный нам объект из перечисленных выше — это прямая (плоскость имеется только одна, и это само пространство). Таким образом, для $n = 2$ флаговое многообразие совпадает с проективным пространством и, как выясняется, является не чем иным, как знакомой нам сферой. Важно отметить, что здесь мы рассматриваем прямые, плоскости и т. д. в комплексном (а не вещественном) пространстве, и только те, которые проходят через начало координат нашего фиксированного n -мерного пространства.

Следующий пример флагового многообразия — это когда $n = 3$, то есть мы рассматриваем трехмерное пространство. В этом случае проективное пространство состоит из всех прямых в данном трехмерном пространстве, а флаговое многообразие образовано парами: прямая плюс содержащая ее плоскость (трехмерное пространство у нас только одно). Следовательно, для $n = 3$ проективное пространство уже не совпадает с флаговым многообразием. Прямую можно представить себе как мачту, а плоскость — как полотнище флага. Отсюда и название этого объекта — флаговое многообразие.

- Boris Feigin, Edward Frenkel. A Family of Representations of Affine Lie Algebra // Russian Mathematical Surveys. 1988. Vol. 43, No. 5. P. 221–222.

Глава 12. Древо знаний

- Mark Saul. Kerosinka: An episode in the history of Soviet mathematics // Notices of the American Mathematical Society. 1999. Vol. 46. P. 1217–1220.
- Впоследствии я узнал, что Гельфанд, тесно сотрудничавший с врачами-кардиологами (по той же причине, почему Яков Исаевич сотрудничал с урологами), также успешно применял данный подход к медицинскому исследованию.

Глава 14. Сплетая пучки мудрости

- Точное определение векторного пространства было дано в примечании 17 к главе 10.
- Если речь идет о категории векторных пространств, то морфизмами из векторного пространства V_1 в векторное пространство V_2 служат так называемые линейные преобразования из V_1 в V_2 . Это отображения f из V_1 в V_2 , такие, что $f(\vec{a} + \vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$ для любых двух векторов \vec{a} и \vec{b} из V_1 и $f(k \cdot \vec{a}) = k \cdot f(\vec{a})$ для любого вектора \vec{a} из V_1 и числа k . В частности, морфизмы из заданного

векторного пространства V в себя — это линейные преобразования из V в себя. Группу симметрий V составляют морфизмы, для которых существует обратное преобразование.

3. См. например: Benjamin C. Pierce. Basic Category Theory for Computer Scientists. — MIT Press, 1991.

Joseph Goguen. A categorical manifesto // Mathematical Structures in Computer Science. 1991. Vol. 1. P. 49–67.

Steve Awodey. Category Theory. — Oxford University Press, 2010.

4. См. например, http://www.haskell.org/haskellwiki/Category_theory, а также ссылки в этой статье.
5. См. например: Masaki Kashiwara, Pierre Schapira. Sheaves on Manifolds. — Springer Verlag, 2010.
6. Это удивительное свойство вычислений по модулю простых чисел очень просто объясняется, если взглянуть на него с точки зрения теории групп. Рассмотрим не равные нулю элементы конечного поля: $1, 2, \dots, p - 1$. Они образуют группу по отношению к умножению. Действительно, тождественным элементом относительно умножения является число 1: если умножить любой элемент a на 1, мы снова получим a . Кроме того, у каждого элемента есть обратный элемент, как объяснялось в примечании 8 к главе 8: для каждого a из $\{0, 1, 2, \dots, p - 1\}$ существует элемент b , такой, что $a \cdot b = 1$ по модулю p .

В этой группе $p - 1$ элементов. Существует общее свойство, выполняющееся в *любой* конечной группе G с N элементами: N -я степень каждого элемента a этой группы равна тождественному элементу (который мы обозначили как 1):

$$a^N = 1.$$

Для того чтобы доказать это, рассмотрим следующие элементы в группе G : $1, a, a^2, \dots$ Поскольку группа G конечна, среди этих элементов должны встречаться повторяющиеся значения — они не могут быть все разными. Пусть k будет наименьшим натуральным числом, таким, что a^k равно 1 или a^j для некоторого $j = 1, \dots, k - 1$. Предположим, что выполняется второй случай. Обозначим a^{-1} значение, обратное к a , такое, что $a \cdot a^{-1} = 1$, и возьмем его j -ю степень $(a^{-1})^j$. Умножим обе стороны уравнения $a^k = a^j$ на $(a^{-1})^j$ справа. Каждый раз, когда нам будет встречаться значение $a \cdot a^{-1}$, мы будем заменять его на 1. Умножение на 1 не меняет результата, поэтому значение 1 всегда можно удалить из произведения. Таким образом, мы видим, что каждое a^{-1} вычеркивает одно из a . Следовательно, левая часть уравнения будет равна a^{k-j} , а правая будет равна 1. Получается, что $a^{k-j} = 1$. Но $k - j$ меньше k , а это противоречит нашему выбору k . Следовательно, первое повторение в нашем списке обязательно должно быть в форме $a^k = 1$, то есть все элементы $1, a, a^2, \dots, a^{k-1}$ будут разными. Это означает, что они образуют группу из k элементов: $\{1, a, a^2, \dots, a^{k-1}\}$. Это подгруппа исходной группы G из N элементов в том смысле, что это поднабор элементов из G , такой, что результат умножения любых двух элементов из этого поднабора также является элементом из данного поднабора. Кроме того, данный поднабор содержит тождественный элемент из G и обратный элемент для каждого из составляющих его элементов.

Теперь известно, что число элементов в любой подгруппе всегда делит число элементов группы. Это утверждение называется теоремой Лагранжа. Ее до-

казательство я оставлю вам в качестве домашнего задания (или же вы можете просто поискать его в Интернете).

Применяя теорему Лагранжа к подгруппе $\{1, a, a^2, \dots, a^{k-1}\}$, состоящей из k элементов, мы получаем, что k должно делить N , то есть число элементов группы G . Таким образом, $N = km$ для некоторого натурального числа m . Однако поскольку $a^k = 1$, мы получаем, что

$$a^N = (a^k) \cdot (a^k) \cdot \dots \cdot (a^k) = 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1,$$

что и требовалось доказать.

Снова вернемся к группе $\{1, 2, \dots, p-1\}$ относительно умножения. В ней содержится $p-1$ элемент. Это наша группа G , то есть наше N равно $p-1$. Применяя общий результат к данному случаю, мы находим, что $a^{p-1} = 1$ по модулю p для всех a из $\{1, 2, \dots, p-1\}$. Но тогда

$$a^p = a \cdot a^{p-1} = a \cdot 1 = a \text{ по модулю } p.$$

Легко видеть, что последняя формула истинна для любого целого a , если мы поставим условие, что

$$x = y \text{ по модулю } p$$

всегда, когда $x - y = gp$ для некоторого целого числа g .

Это формулировка малой теоремы Ферма, которую тот впервые привел в письме к другу. «Я бы написал тебе доказательство, — добавил он, — но, боюсь, оно слишком длинное».

7. До сих пор мы рассматривали вычисления по модулю простого числа p . Однако выясняется, что существует утверждение, аналогичное малой теореме Ферма, и для вычислений по модулю любого натурального числа n . Для того чтобы объяснить его суть, необходимо вспомнить функцию Эйлера φ , которую мы обсуждали в применении к группам кос в главе 6 (в своем проекте, посвященном группам кос, я обнаружил, что числа Бетти групп кос выражаются через данную функцию). Итак, $\varphi(n)$ — это число натуральных чисел от 1 до $n-1$, являющихся взаимно простыми с n . Это означает, что у них с n нет общих делителей, за исключением 1. Например, если n — простое число, то все числа от 1 до $n-1$ взаимно просты с n , и поэтому $\varphi(n) = n-1$.

Далее, аналогом формулы $a^{p-1} = 1$ по модулю p , которую мы доказали в предыдущем примечании, является формула

$$a^{\varphi(n)} = 1 \text{ по модулю } n.$$

Она истинна для любого натурального числа n и любого натурального числа a , взаимно простого с n . Доказательство выполняется точно так же, как в предыдущем случае: мы берем набор всех натуральных чисел от 1 до $n-1$, взаимно простых с n . Их количество равно $\varphi(n)$. Легко видеть, что они образуют группу по отношению к операции умножения. Следовательно, согласно теореме Лагранжа, для любого элемента этой группы его $\varphi(n)$ -я степень равна тождественному элементу.

Рассмотрим, например, случай, когда n является произведением двух простых чисел, то есть $n = pq$, где p и q — два разных простых числа. В такой ситуации

числа, не являющиеся взаимно простыми с n , делятся без остатка либо на p , либо на q . Первые можно представить в виде $p \cdot i$, где $i = 1, \dots, q - 1$ (всего их $q - 1$), а вторые — в форме qj , где $j = 1, \dots, p - 1$ (а этих ровно $p - 1$). Следовательно, находим, что

$$\varphi(n) = (n - 1) - (q - 1) - (p - 1) = (p - 1)(q - 1).$$

Таким образом,

$$a^{(p-1)(q-1)} = 1 \text{ по модулю } pq$$

для любого числа a , среди делителей которого нет ни p , ни q . Легко видеть, что формула

$$a^{1 + m(p-1)(q-1)} = a \text{ по модулю } pq$$

истинна для любого натурального числа a и любого целого числа m .

Это уравнение лежит в основе одного из наиболее широко используемых алгоритмов шифрования, известного под названием алгоритма RSA (в честь Рона Ривеста, Ади Шамира и Леонарда Адлемана, которые описали его в 1977 году, — первые буквы фамилий Rivest, Shamir и Adleman складываются в аббревиатуру RSA). Идея заключается в том, что мы выбираем два простых числа p и q (существует множество алгоритмов генерации таких чисел) и принимаем за n произведение $p \cdot q$. Число n общедоступно, но простые числа p и q не раскрываются. Затем мы выбираем число e , взаимно простое с $(p - 1)(q - 1)$. Это число также общедоступно.

Процесс шифрования преобразует любое число a (например, номер кредитной карты) в число a^e по модулю n :

$$a \rightarrow b = a^e \text{ по модулю } n.$$

Оказывается, существует эффективный способ, позволяющий восстановить значение a , если известно значение a^e . А именно мы находим число d в интервале от 1 до $(p - 1)(q - 1)$, такое, что

$$de = 1 \text{ по модулю } (p - 1)(q - 1).$$

Другими словами,

$$de = 1 + m(p - 1)(q - 1)$$

для какого-то натурального числа m . Тогда

$$a^{de} \text{ по модулю } n = a^{1 + m(p-1)(q-1)} \text{ по модулю } n = a \text{ по модулю } n,$$

согласно формуле, приведенной выше.

Следовательно, зная $b = a^e$, мы можем восстановить исходное число a следующим образом:

$$b \rightarrow b^d \text{ по модулю } n.$$

Подведем итог: мы раскрываем значения n и e , но d сохраняем в секрете. Шифрование выполняется по формуле:

$$a \rightarrow b = a^e \text{ по модулю } n.$$

Эти вычисления может выполнить кто угодно, так как значения e и n общедоступны.

Для дешифрования используется формула

$$b \rightarrow b^d \text{ по модулю } n.$$

Применяя ее к a^e , мы получаем исходное значение a . Но это может сделать только тот, кому известно значение d .

Причина, почему эта схема шифрования так хороша, заключается в том, что для поиска значения d , позволяющего восстановить закодированные числа, необходимо знать, чему равно $(p-1)(q-1)$. Но для этого нам должны быть известны значения p и q , два простых делителя n . Они сохраняются в тайне. Если n достаточно велико, то поиск p и q путем разложения на простые множители может занять много месяцев даже с использованием сети мощных компьютеров. Например, в 2009 году группе исследователей удалось разложить на простые множители число, состоящее из 232 цифр. На это у них ушло два года, а параллельные вычисления выполнялись несколькими сотнями компьютеров (см. <http://eprint.iacr.org/2010/006.pdf>). Однако если кто-нибудь придумает более эффективный способ разложения натуральных чисел на простые множители (например, с помощью квантовых компьютеров), то это даст ему инструмент для взлома данной схемы шифрования. Вот почему большое количество исследований фокусируется вокруг разложения чисел на простые множители.

8. В случае рациональных чисел, как мы уже убедились, уравнения вида $x^2 = 2$ могут не иметь решений среди рациональных чисел. В такой ситуации можно создать новую систему счисления путем присоединения двух нужных решений, таких как $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$. Мы также узнали, что замена $\sqrt{2}$ на $-\sqrt{2}$ и наоборот — это симметрия нашей новой системы счисления.

Схожим образом полиномиальные уравнения по переменной x , такие как $x^2 = 2$ или $x^3 - x = 1$, можно рассматривать как уравнения в конечном поле $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$. Возникает вопрос, можно ли решить такое уравнение относительно x в пределах данного конечного поля. Если решения не находятся, то мы можем присоединить нужные решения к конечному полю точно так же, как раньше присоединяли $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ множеству рациональных чисел. Это означает создание новых конечных полей.

Например, если $p = 7$, то у уравнения $x^2 = 2$ два решения, 3 и 4, так как

$$3^2 = 9 = 2 \text{ по модулю } 7, 4^2 = 16 = 2 \text{ по модулю } 7.$$

Обратите внимание, что в вычислениях по модулю 7 число 4 — это то же самое, что число -3 , поскольку $3 + 4 = 0$ по модулю 7. Таким образом, эти два решения уравнения $x^2 = 2$ являются противоположными по отношению друг к другу, так же как $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$. И это совершенно не удивительно: два решения уравнения $x^2 = 2$ всегда будут противоположными, так как если $a^2 = 2$, то, следуя обычной логике, и $(-a)^2 = (-1)^2 a^2 = 2$. Это означает, что если $p \neq 2$, то среди элементов конечного поля всегда найдутся два таких, которые при возведении в квадрат будут давать одно и то же число, а друг для друга будут противоположными (если $p \neq 2$, то p обязательно нечетно, и тогда $-a$ не может быть равным a , так как

в этом случае p было бы равно $2a$). Следовательно, только половина ненулевых элементов конечного поля $\{1, 2, \dots, p-1\}$ является квадратами других значений.

(Знаменитый квадратичный закон взаимности Гаусса указывает, какие числа n являются квадратами в вычислениях по модулю p , а какие нет. Мы не будем подробно останавливаться на этом; скажу лишь, что в действительности ответ зависит только от значения p по модулю $4n$. Так, например, мы уже знаем, что $n = 2$ — это квадрат по модулю $p = 7$. В данном случае $4n = 8$. Следовательно, это значение также будет квадратом по модулю любого простого p , равного 7 по модулю 8, неважно, насколько большого. Это поразительный результат!)

Если $p = 5$, то $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, $3^2 = 4$, а $4^2 = 1$ по модулю 5. Получается, что 1 и 4 — это квадраты по модулю 5, а 2 и 3 — нет. В частности, мы видим, что у уравнения $x^2 = 2$ нет решений в конечном поле $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, так же как и во множестве рациональных чисел. Следовательно, мы можем создать новую систему счисления, расширив конечное поле $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ путем присоединения решений уравнения $x^2 = 2$. Обозначим эти решения $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$, но мы должны помнить, что это не те же самые числа, которые мы присоединяли к рациональным числам ранее.

Мы получим новое конечное поле, состоящее из чисел в форме

$$a + b\sqrt{2},$$

где a и b принадлежат $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Поскольку параметры a и b могут принимать только значения 0, 1, 2, 3 или 4, мы знаем, что в этой новой системе счисления ровно $5 \cdot 5 = 25$ элементов. В более общем смысле, в любом конечном расширении поля $\{0, 1, \dots, p-1\}$ содержится p^m элементов для какого-то натурального числа m .

Теперь предположим, что мы присоединяем все решения всех полиномиальных уравнений по одной переменной к конечному полю $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$. Это дает нам новую систему счисления под названием *алгебраическое замыкание* конечного поля.

В исходном конечном поле имеется p элементов. Оказывается, что в его алгебраическом замыкании содержится бесконечно много элементов. Наш следующий вопрос: что такое группа Галуа данного алгебраического замыкания? А это симметрии алгебраического замыкания, которые сохраняют операции сложения и умножения и переводят элементы исходного поля из p элементов в самих себя.

Если рассмотреть поле рациональных чисел и взять его алгебраическое замыкание, то соответствующая группа Галуа окажется очень сложной. На самом деле, программа Ленглендса была создана в том числе и с целью описания этой группы Галуа и ее представлений в терминах гармонического анализа.

В противоположность этому группа Галуа алгебраического замыкания конечного поля $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ довольно проста. И нам уже известна одна из симметрий — это Фробениус, то есть операция возведения в p -ю степень: $a \rightarrow a^p$. Согласно малой теореме Ферма, Фробениус сохраняет все элементы исходного конечного поля из p элементов. Также он сохраняет сложение и умножение в алгебраическом замыкании:

$$(a + b)^p = a^p + b^p, \quad (ab)^p = a^p b^p.$$

Следовательно, Фробениус принадлежит группе Галуа алгебраического замыкания конечного поля.

Обозначим Фробениус как F . Очевидно, что любая целая степень F^n Фробениуса также является элементом группы Галуа. Например, F^2 — это операция возведения в p^2 -ю степень, $a \rightarrow a^{p^2} = (a^p)^p$. Симметрии F^n , где n пробегает по всем целым числам, образуют подгруппу группы Галуа, которая называется группой Вейля, в честь Андре Вейля. Сама группа Галуа — это объект, называемый пополнением группы Вейля; в дополнение к целым степеням F в него также входят в качестве элементов определенные пределы F^n при n , стремящемся к ∞ .

Вот пример того, как Фробениус действует на элементах алгебраического замыкания конечного поля. Рассмотрим случай, когда $p = 5$, а элементы алгебраического замыкания этого конечного поля имеют форму

$$a + b\sqrt{2},$$

где a и b могут принимать только значения 0, 1, 2, 3 или 4. В этой системе счисления существует симметрия замены $\sqrt{2}$ на $-\sqrt{2}$ и наоборот

$$a + b\sqrt{2} \rightarrow a - b\sqrt{2},$$

аналогичная тому, что происходит, когда мы присоединяем $\sqrt{2}$ к множеству рациональных чисел. Удивителен (в том числе и тем, что у него нет аналога для случая рациональных чисел) тот факт, что данная симметрия замены на самом деле эквивалентна Фробениусу. Действительно, применение Фробениуса к $\sqrt{2}$ означает возведение этого значения в 5-ю степень, и мы обнаруживаем, что

$$(\sqrt{2})^5 = (\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 4 \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{2},$$

так как $4 \equiv -1 \pmod{5}$. Отсюда следует, что для $p = 5$ Фробениус переводит $a + b\sqrt{2}$ в $a - b\sqrt{2}$. То же самое истинно для любого простого p , такого, что у уравнения $x^2 = 2$ нет решений в конечном поле $\{0, 1, 2, \dots, p-1\}$.

9. Симметрия n -мерного векторного пространства, которую правильнее называть линейным преобразованием (см. примечание 2), может быть представлена матрицей, то есть квадратным массивом чисел a_{ij} , где i и j изменяются в диапазоне от 1 до n , а n — размерность векторного пространства. Тогда след — это сумма диагональных элементов данной матрицы, то есть всех a_{ii} , где i изменяется в диапазоне от 1 до n .
10. В текущем контексте возвращение обратно означает поиск для заданной функции f пучка, такого, что для каждой точки s нашего многообразия след Фробениуса на волокне в s равен значению f в s . Любое заданное число может быть реализовано как след симметрии векторного пространства. Сложность же заключается в том, как объединить подобные векторные пространства в согласованный набор, удовлетворяющий свойствам пучка.

Глава 15. Изысканный танец

1. Представление группы Галуа в группе H — это правило, сопоставляющее каждому элементу группы Галуа элемент из группы H . Оно должно удовлетворять следующему требованию: если a, b — это два элемента группы Галуа, а $f(a), f(b)$ — сопоставленные им элементы из H , то произведению ab из группы Галуа должно быть сопоставлено произведение $f(a)f(b)$ из H . Более правильное название — это гомоморфизм из группы Галуа в H .
2. Для того чтобы лучше понять это, вспомните понятие n -мерного векторного пространства из примечания 17 к главе 10. Как уже говорилось в главе 2, n -мерное представление заданной группы — это правило, сопоставляющее симметрию S_g n -мерного векторного пространства каждому элементу g данной группы. Это правило должно удовлетворять следующему свойству: для любых двух элементов группы g и h и их произведения gh , также принадлежащего группе, симметрия S_{gh} должна быть эквивалентна композиции симметрий S_g и S_h . Также для каждого элемента g должно выполняться следующее: $S_g(\vec{a} + \vec{b}) = S_g(\vec{a}) + S_g(\vec{b})$, $S_g(k \cdot \vec{a}) = k \cdot S_g(\vec{a})$ для любых векторов \vec{a} , \vec{b} и числа k . (Такие симметрии называются линейными преобразованиями; см. примечание 2 к главе 14.)

Группа всех обратимых линейных преобразований n -мерного векторного пространства носит название общей линейной группы и обозначается $GL(n)$. Таким образом, согласно определению из предыдущего абзаца, n -мерное представление заданной группы Γ — это то же самое, что представление группы Γ в $GL(n)$ (или гомоморфизм из Γ в $GL(n)$, см. примечание 1).

Например, в главе 10 мы обсуждали трехмерное представление группы $SO(3)$. Каждый элемент группы $SO(3)$ представляет собой вращение сферы, которому мы сопоставляем соответствующее вращение трехмерного векторного пространства, содержащего сферу (выясняется, что это линейное преобразование). Это дает нам представление $SO(3)$ в $GL(3)$ (или, что эквивалентно, гомоморфизм из $SO(3)$ в $GL(3)$). Для большей наглядности вращение можно считать «действием» на трехмерное векторное пространство, вследствие которого каждый вектор из данного пространства переходит в некий другой вектор.

В одной части соответствия Ленглендса мы рассматриваем n -мерные представления группы Галуа. В другой части у нас автоморфные функции, с помощью которых мы можем строить так называемые автоморфные представления другой группы $GL(n)$ симметрий n -мерного векторного пространства, но не над вещественными числами, а над так называемыми идеями. Я не буду пытаться объяснить здесь во всех подробностях, что это такое, — приведу лишь следующую схему, на которой показано, как выглядит соответствие Ленглендса:



Например, двумерные представления группы Галуа связаны с автоморфными представлениями группы $GL(2)$, строить которые можно на основе модулярных форм, которые мы обсуждали в главе 9.

Для обобщения данного соответствия необходимо заменить группу $GL(n)$ более общей группой Ли. Тогда в правой части соответствия окажутся автоморфные представления группы G , а не $GL(n)$. А в левой части вместо $GL(n)$ мы будем рассматривать представления группы Галуа в двойственной группе Ленглендса ${}^L G$ (или, что то же самое, гомоморфизмы из группы Галуа в ${}^L G$). Дополнительную информацию вы сможете найти, например, в следующем моем обзоре: Edward Frenkel. Lectures on the Langlands Program and Conformal Field Theory / In: Frontiers in Number Theory, Physics and Geometry II. P. Cartier et al. eds. — Springer-Verlag, 2007, p. 387–536. Доступно в Сети по адресу <http://arxiv.org/pdf/hep-th/0512172.pdf>.

3. См. видео здесь: <http://www.youtube.com/watch?v=CYBqIRM8GiY>.
4. Этот танец называется бинасуан. См., например, это видео: http://www.youtube.com/watch?v=N2T00z_eaTY.
5. Описание построения такого пути и объяснение, почему, проходя его дважды, мы получаем тривиальный путь, см., например, в работе: Louis H. Kaufmann. Knots and Physics. The 3rd ed. — World Scientific, 2001, p. 419–420.
6. Другими словами, фундаментальная группа $SO(3)$ состоит из двух элементов: один из них — это единичный элемент, а второй — данный путь, квадрат которого равен единичному элементу.
7. Математическое название этой группы — $SU(2)$. Она состоит из «специальных унитарных» преобразований двумерного комплексного векторного пространства. Эта группа — двоюродная сестра группы $SU(3)$, о которой мы упоминали в главе 2 в связи с кварками и которая состоит из специальных унитарных преобразований трехмерного комплексного векторного пространства.
8. Точнее, подъемом сконструированного нами замкнутого пути (соответствующего первому полному обороту чашки) из группы $SO(3)$ в ее двойное накрытие, группу $SU(2)$, является путь, начинающийся и заканчивающийся в разных точках $SU(2)$ (обе они проецируются на одну и ту же точку в $SO(3)$), поэтому в $SU(2)$ он не может считаться замкнутым путем.
9. Вообще говоря, это отношение куда тоньше, но в целях упрощения в этой книге мы будем предполагать, что двойником двойственной группы является сама группа.
10. Главное G -расслоение (или просто G -расслоение) на римановой поверхности — это расслоенное пространство над римановой поверхностью, такое, что все слои представляют собой копии «комплексификации» группы G (для того чтобы дать определение комплексификации группы, необходимо в определении группы заменить вещественные числа комплексными). Точки пространства модулей (которое правильнее называть стеком) G -расслоений на X — это классы эквивалентности G -расслоений на X .

В целях упрощения изложения в этой книге мы не проводим различия между группой Ли и ее комплексификацией.

11. В фундаментальной группе мы считаем одинаковыми любые два замкнутых пути, которые могут быть непрерывно преобразованы один в другой. Поскольку любой замкнутый путь на плоскости, не обходящий вокруг удаленной точки, может быть стянут в точку, нетривиальными элементами фундаментальной

группы являются те пути, которые обходят данную точку (их невозможно стянуть — точка, которую мы удалили с плоскости, препятствует этому).

Легко видеть, что любые два замкнутых пути с одним и тем же числом оборотов могут быть преобразованы друг в друга. Таким образом, фундаментальная группа на плоскости без одной точки — это не что иное, как группа целых чисел. Вы заметили, что все это очень напоминает то, что мы обсуждали в главе 5? Тогда мы говорили о группе кос на двух нитях и выяснили, что она ничем не отличается от группы целых чисел. Это не совпадение, потому что пространство пар разных точек на плоскости топологически эквивалентно плоскости с одной удаленной точкой.

12. Причина того, что монодромия принимает значения из группы окружности, заключается в знаменитой формуле Эйлера

$$e^{\theta\sqrt{-1}} = \cos(\theta) + \sin(\theta)\sqrt{-1}.$$

Другими словами, комплексное число $e^{\theta\sqrt{-1}}$ представлено точкой на единичной окружности, соответствующей углу θ , измеренному в радианах. Вспомните, что 2π радиан — это то же самое, что 360 градусов (что соответствует одному полному обороту). Следовательно, величина угла θ в радианах равна $360\cdot\theta/2\pi$ градусов.

В особом случае, при $\theta = \pi$, эта формула приобретает следующий вид:

$$e^{\pi\sqrt{-1}} = -1.$$

Ричард Фейнман назвал ее «одной из самых замечательных, поразительных формул во всей математике». Она сыграла значительную роль в повести Йоко Огавы «Домработница и профессор» (Yoko Ogawa. *Housekeeper and the Professor*. — Picador, 2009).

Другой, не менее важный особый случай:

$$e^{2\pi\sqrt{-1}} = 1$$

Это означает, что единичная окружность на комплексной плоскости с координатой t , на которой определяется решение нашего дифференциального уравнения, состоит из всех точек вида $t = e^{\theta\sqrt{-1}}$, θ от 0 до 2π . Двигаясь вдоль единичной окружности против часовой стрелки, мы вычисляем наше решение $x(t) = t^n$ в этих точках $t = e^{\theta\sqrt{-1}}$, увеличивая угол θ от 0 до 2π (в радианах). Полный обход окружности означает, что θ принимает значение 2π . Следовательно, для того чтобы получить соответствующее значение нашего решения, необходимо подставить $t = e^{2\pi\sqrt{-1}}$ в t^n . Результат равен $e^{2\pi n\sqrt{-1}}$. Однако исходное значение решения было получено путем подстановки $t = 1$ в t^n и равнялось 1 . Таким образом, мы обнаружили, что при обходе по замкнутому пути вдоль единичной окружности против часовой стрелки наше решение умножается на $e^{2\pi n\sqrt{-1}}$. Это и есть монодромия вдоль этого пути.

Монодромия $e^{2\pi n\sqrt{-1}}$ — это комплексное число, которое может быть представлено точкой на единичной окружности на *другой* комплексной плоскости. Эта точка соответствует углу, равному $2\pi n$ радиан, или $360n$ градусов, что мы и хотели продемонстрировать. Действительно, умножение любого комплексного

числа z на $e^{2\pi n\sqrt{-1}}$ геометрически эквивалентно повороту точки на плоскости, соответствующей z , на $360n$ градусов. Если n — целое число, то $e^{2\pi n\sqrt{-1}} = 1$, и монодромии нет, но если n не является целым числом, то мы получаем нетривиальную монодромию.

Для того чтобы избежать недопонимания, необходимо подчеркнуть, что здесь мы имеем дело с двумя разными комплексными плоскостями: на первой комплексной плоскости определяется наше решение — это « t -плоскость». Вторая плоскость — та, на которой мы представляем монодромию. Она никак не связана с t -плоскостью.

Подведем итог: мы интерпретировали монодромию решения вдоль замкнутого пути с числом оборотов $+1$ на t -плоскости как точку другой единичной окружности. Следуя тем же рассуждениям, если число поворотов пути равно ω , то монодромия вдоль этого пути равна $e^{2\pi n\omega\sqrt{-1}}$, что эквивалентно вращению на $2\pi n\omega$ радиан, или $360\omega n$ градусов. Таким образом, монодромия порождает представление фундаментальной группы в группе окружности. Согласно данному представлению, путь на t -плоскости с удаленной точкой, число оборотов которого равно ω , переходит во вращение на $360\omega n$ градусов.

13. Обратите внимание на то, что с плоскости была удалена одна точка — начало координат. Это очень важно. В противном случае любой путь на плоскости можно будет стянуть в точку, и фундаментальная группа будет тривиальной. Тогда никакой монодромии не будет. Мы вынуждены удалить эту точку, потому что наше решение, t^n , не определено в начале координат, если n не является натуральным числом или нулем (в этом случае монодромия, конечно, отсутствует).
14. Точнее, не все представления фундаментальной группы в ${}^L G$ можно получить посредством оперов, и в этой схеме мы ограничиваемся лишь теми, для которых это возможно. Для прочих представлений вопрос остается открытым.
15. Edward Frenkel. Langlands Correspondence for Loop Groups. — Cambridge University Press, 2007. В Интернете книга доступна по адресу <http://math.berkeley.edu/~frenkel>.

Глава 16. Квантовый дуализм

1. Возможно, вы задаетесь вопросом, что произошло в период между 1991 и 2003 годами. Что ж, в этой книге я ставлю своей целью познакомить вас с наиболее интересными аспектами программы Ленглендса, а также рассказать о том, как совершались открытия в этой области, в работе над которыми мне посчастливилось принять участие. Я не пытаюсь изложить полную историю своей жизни. Однако если вам интересно, то за этот период я перевез свою семью из России в США, переехал на запад — в Беркли, Калифорния, влюблялся и испытывал разочарования, женился и развелся, воспитал нескольких кандидатов наук, много путешествовал по миру и читал лекции в разных странах, опубликовал книгу и десятки исследовательских работ. При этом я не оставлял попыток разгадать тайны программы Ленглендса в самых разных областях: от геометрии до интегрируемых систем, от квантовых групп до физики. А другие детали этой части моего жизненного пути я сохраню для другой книги.

2. См. http://www.darpa.mil/Our_Work.
3. G. H. Hardy. *A Mathematician's Apology*. — Cambridge University Press, 2009, p. 135.
4. Свидетельские показания Р. Р. Уилсона перед Конгрессом, 17 апреля 1969, цитата с веб-сайта <http://history.fnal.gov/testimony.html>.
5. Уравнения Максвелла в вакууме имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 & \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \nabla \times \vec{B} &= \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \end{aligned}$$

где \vec{E} — электрическое поле, а \vec{B} — магнитное поле (для упрощения формул мы выбрали систему измерений, в которой скорость света равна 1). Очевидно, что если выполнить замену

$$\vec{E} \rightarrow \vec{B} \quad \vec{B} \rightarrow -\vec{E},$$

то уравнения в левой части превратятся в уравнения из правой части, и наоборот. Таким образом, каждое индивидуальное уравнение меняется, но система уравнений в целом — нет.

6. См. страницу Дайны Мейсон на Flickr: <http://www.flickr.com/photos/daynoir>.
7. Калибровочную группу $SU(3)$ не следует путать с другой группой $SU(3)$, о которой мы говорили в главе 2, — той, которую Гелл-Ман и другие применяли для классификации элементарных частиц (она называется «ароматной группой»). Калибровочная группа $SU(3)$ связана с характеристикой кварков под названием «цвет». Оказывается, кварки могут обладать тремя разными цветами, и калибровочная группа $SU(3)$ ответственна за изменение этих цветов. По этой причине калибровочная теория, описывающая взаимодействия кварков, носит название квантовой хромодинамики. Дэвид Гросс, Дэвид Полицер и Франк Вильчек были награждены Нобелевской премией за свое поразительное открытие: они обнаружили так называемую асимптотическую свободу в квантовой хромодинамике (и других неабелевых калибровочных теориях), что помогло объяснить загадочное поведение кварков.
8. D. Z. Zhang. C. N. Yang and Contemporary Mathematics // *Mathematical Intelligencer*. 1993. Vol. 15, No. 4. P. 13–21.
9. Albert Einstein. *Geometry and Experience*. / Обращение к Прусской академии наук в Берлине, 27 января 1921 г. / In: G. Jeffrey, W. Perrett. *Geometry and Experience in Sidelights on Relativity*. — Methuen, 1923.
10. Eugene Wigner. *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences* // *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1960. Vol. 13. P. 1–14.
11. C. Montonen, D. Olive. *Magnetic monopoles as gauge particles?* // *Physics Letters B*. 1977. Vol. 72. P. 117–120.
12. P. Goddard, J. Nuyts, D. Olive. *Gauge theories and magnetic charge* // *Nuclear Physics B*. 1977. Vol. 125. P. 1–28.
13. S_e — это множество комплексных одномерных представлений максимального тора G , а S_m — фундаментальная группа максимального тора G . Если

G — группа окружности, то ее максимальный тор — это сама группа окружности, и каждое из этих двух множеств находится в однозначном соответствии с множеством целых чисел.

Глава 17. В поисках скрытых связей

1. Пространство $M(X, G)$ можно описать несколькими способами, например как пространство решений системы дифференциальных уравнений на X , впервые изученное Хитчиным (подробности см. в статье, указанной в примечании 19). Нам же в этой главе будет полезно такое описание: $M(X, G)$ — это пространство модулей представлений фундаментальной группы римановой поверхности S в комплексификацию группы G (см. примечание 10 к главе 15). Это означает, что подобное представление связывается с каждой точкой $M(X, G)$.
2. См. видеозапись лекции Хитчина в Филдсовском институте: <http://www.fields.utoronto.ca/video-archive/2012/10/108-690>.
3. Здесь я ссылаюсь на недавнюю работу Нго Бао Чау, посвященную доказательству «фундаментальной леммы» программы Ленглендса. См., например, обзорную статью: David Nadler. The Geometric Nature of the Fundamental Lemma // Bulletin of the American Mathematical Society. 2012. Vol. 49. P. 1-50.
4. Вспомните о том, что в сигма-модели все вычисления производятся путем суммирования по всем отображениям из фиксированной римановой поверхности Σ в целевое многообразие S . В теории струн мы делаем один дополнительный шаг: помимо суммирования по всем отображениям из фиксированной Σ в S , как мы обычно делаем в сигма-модели, мы также выполняем суммирование по всем возможным римановым поверхностям Σ (целевое многообразие S все это время остается фиксированным — это наше пространство-время). В частности, мы суммируем по римановым поверхностям произвольного рода.
5. Подробнее о теории суперструн см.: Brian Greene. The Elegant Universe. — Vintage Books, 2003; The Fabric of the Cosmos: Space, Time, and the Texture of Reality. — Vintage Books, 2005.
6. Подробнее о многообразиях Калаби — Яу и их роли в теории суперструн см. в главе 6 книги: Shing-Tung Yau, Steve Nadis. The Shape of Inner Space. — Basic Books, 2010.
7. У тора также есть два непрерывных параметра: это радиусы R_1 и R_2 , которые мы еще обсудим в этой главе. Однако в целях настоящего обсуждения их можно вполне проигнорировать.
8. В последнее время активно обсуждается идея о том, что каждое из подобных многообразий порождает свою собственную Вселенную с собственным набором физических законов. Ее часто объединяют с одной из версий антропного принципа: наша Вселенная выбрана среди всех возможных благодаря тому факту, что физические законы в ней допускают разумную жизнь (это нужно для того, чтобы можно было задать вопрос: «Почему наша Вселенная именно такая, какая она есть?»). Однако эта идея, получившая название «ландшафт теории струн» или «мультивселенная», была встречена с большим скептицизмом как учеными, так и философами.

9. Многие интересные свойства квантовых теорий поля самых разных размерностей были обнаружены или объяснены благодаря установлению связей этих теорий с теорией суперструн с помощью размерной редукции или путем изучения браев. В некотором смысле, теорию суперструн используют в качестве фабрики по производству и анализу квантовых теорий поля (в основном суперсимметричных). Например, таким образом можно получить красивую интерпретацию электромагнитного дуализма четырехмерных суперсимметричных калибровочных теорий. Так что, пусть мы пока и не знаем, может ли теория суперструн описать физику нашей Вселенной (и пока что до конца не понимаем, что такое теория суперструн), она все же поспособствовала рождению множества замечательных догадок относительно свойств квантовой теории поля. Кроме того, она привела к многочисленным успехам и достижениям в математике.
10. Размерность пространства модулей Хитчина $M(X, G)$ равна произведению размерности группы G (которая равна размерности ${}^L G$) на $(g - 1)$, где g — это род римановой поверхности X .
11. Подробнее о бранах см.: Lisa Randall. *Warped Passages: Unraveling the Mysteries of the Universe's Hidden Dimensions*. — Harper Perennial, 2006 (в частности, см. главу IV).
12. Точнее, А-браны на $M(X, G)$ — это объекты категории (эту концепцию мы обсуждали в главе 14). В-браны на $M(X, {}^L G)$ — объекты другой категории. Гомологическая зеркальная симметрия подразумевает, что эти две категории эквивалентны друг другу.
13. Anton Kapustin, Edward Witten. *Electric-Magnetic Duality and the Geometric Langlands Program // Communications in Number Theory and Physics*. 2007. Vol. 1. P. 1-236.
14. Подробнее о Т-дуальности — в главе 7 книги Яу и Надиса, упомянутой в примечании 6.
15. Подробнее о SYZ-гипотезе — в главе 7 книги Яу и Надиса, упомянутой в примечании 6.
16. Точнее, каждый слой — это произведение n окружностей, где n — четное натуральное число. Следовательно, это n -мерный аналог двумерного тора. Обратите также внимание на то, что размерность базы расслоения Хитчина и размерность каждого тороидального слоя всегда совпадают.
17. В главе 15 мы обсуждали другое построение, в котором автоморфные пучки были получены из представлений алгебр Каца — Мути. Существует мнение, согласно которому эти два построения связаны между собой, но на момент написания этой книги это неизвестно.
18. Edward Frenkel, Edward Witten. *Geometric Endoscopy and Mirror Symmetry // Communications in Number Theory and Physics*. 2008. Vol. 2. P. 113–283; доступно в Сети по адресу <http://arxiv.org/pdf/0710.5939.pdf>.
19. Edward Frenkel. *Gauge Theory and Langlands Duality // Astérisque*. 2010. Vol. 332, P. 369–403; доступно в Сети по адресу <http://arxiv.org/pdf/0906.2747.pdf>.
20. Henry David Thoreau. *A Week on the Concord and Merrimack Rivers*. — Penguin Classics, 1998, p. 291.

Глава 18. В поисках формулы любви

1. Snow C. P. *The Two Cultures*. — Cambridge University Press, 1998.
2. Thomas Farber, Edward Frenkel, *The Two-Body Problem*. — Andrea Young Arts, 2012.
Подробности см. на <http://thetwobodyproblem.com/>.
3. Michael Harris. Further investigations of the mind-body problem (глава из готовящейся к публикации книги). Доступна в Сети по адресу <http://www.math.jussieu.fr/~harris/MindBody.pdf>.
4. Henry David Thoreau. *A Week on the Concord and Merrimack Rivers*. — Penguin Classics, 1998, p. 291.
5. E. T. Bell. *Men of Mathematics*. — Touchstone, 1986, p. 16. Цитата из книги Э. Т. Белл. *Творцы математики*. — Москва: Просвещение, 1979.
6. Robert Langlands. Is there beauty in mathematical theories? / In: *The Many Faces of Beauty*. Vittorio Hösle (ed.). — University of Notre Dame Press, 2013. Доступно в Сети по адресу <http://publications.ias.edu/sites/default/files/ND.pdf>.
7. Yuri I. Manin. *Mathematics as Metaphor: Selected Essays*. — American Mathematical Society, 2007, p. 4.
8. Философские споры об онтологии математики не прекращаются вот уже много столетий. Точку зрения, которой я придерживаюсь в этой книге, обычно называют математическим платонизмом. Обратите внимание, однако, что существуют разные типы платонизма, а также несколько разных философских интерпретаций математики. См., например: Mark Balaguer. *Mathematical Platonism* / In: *Proof and Other Dilemmas: Mathematics and Philosophy* / Bonnie Gold and Roger Simons (eds.). — Mathematics Association of America, p. 179-204. См. также приведенный в этом издании список литературы.
9. Roger Penrose. *The Road to Reality*. — Vintage Books, 2004, p. 15. Цитата из книги: Роджер Пенроуз. *Путь к реальности, или Законы, управляющие Вселенной*. — Москва; Ижевск, 2007.
10. Там же, с. 13-14.
11. Kurt Gödel. *Collected Works*. V. III. — Oxford University Press, 1995, p. 320.
12. Там же, с. 323.
13. Roger Penrose. *Shadows of the Mind*. Section 8.47. — Oxford University Press, 1994.
14. В историческом решении по делу «Готтшалк против Бенсона», 409 U.S. 63 (1972), Верховный суд США постановил (цитируя свои более ранние решения): «научная истина или ее математическое выражение не является патентоспособным изобретением... Принцип, говоря абстрактно, это фундаментальная истина; первопричина; мотив; они не могут быть запатентованы, так как никто не может заявить ни на одно из перечисленного эксклюзивных прав... Обнаружив доселе неизвестное явление природы, человек не может предъявить на него требование исключительного права, признаваемого законом».

15. Edward Frenkel, Andrey Losev, Nikita Nekrasov. Instantons beyond topological theory I. Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu. 2011. V. 10. P. 463–565; в статье присутствует примечание, рассказывающее о том, что данная формула (5.7) сыграла роль «формулы любви» в фильме «Обряды любви и математики».
16. Мы рассматриваем суперсимметричную квантовую механическую модель на сфере (обозначенную здесь \mathbb{P}^1) и корреляционную функцию двух наблюдаемых объектов, обозначенных F и ω . Корреляционная функция в нашей теории определяется как интеграл, находящийся в левой части уравнения. Однако наша теория также предсказывает для него существование другого выражения: суммы по «промежуточным состояниям», присутствующей в правой части. Для того чтобы наша теория была непротиворечива, требуется, чтобы эти две части были равны между собой. И так действительно происходит; именно это доказывает наша формула.
17. *Le Monde Magazine*. 2010. April 10. P. 64.
18. Laura Spinney. Erotic equations: Love meets mathematics on film // *New Scientist*. 2010. April 13. Доступно в Сети по адресу <http://ritesofloveandmath.com>.
19. Hervé Lehning. La dualité entre l'amour et les maths // *Tangente Sup*. 2010. V. 55, May—June. P. 6–8. Доступно в Сети по адресу <http://ritesofloveandmath.com>.
20. Мы взяли стихотворение «Многим» Анны Ахматовой, великой русской поэтессы первой половины двадцатого века.
21. Norma Farber. *A Desperate Thing*. — The Plowshare Press Incorporated, 1973, p. 21.
22. Письмо Эйнштейна Филлис Райт, 24 января 1936 г. Прочитировано в книге: Walter Isaacson. *Einstein: His Life and Universe*. — Simon & Schuster, 2007, p. 388.
23. David Brewster. *Memoirs of the Life, Writings, and Discoveries of Sir Isaac Newton*. V. 2. — Adamant Media Corporation, 2001, p. 407 (перепечатка издания Thomas Constable and Co. 1855 года).

Эпилог

1. Edward Frenkel, Robert Langlands, Ngô Bao Châu. Formule des Traces et Functorialité: le Début d'un Programme // *Annales des Sciences Mathématiques du Québec*, 2010, 34. P. 199–243. Доступно в Сети по адресу <http://arxiv.org/pdf/1003.4578.pdf>.

Edward Frenkel. Langlands Program, trace formulas, and their geometrization // *Bulletin of AMS*. 2013. Vol. 50. P. 1–55. Доступно в Сети по адресу <http://arxiv.org/pdf/1202.2110.pdf>.