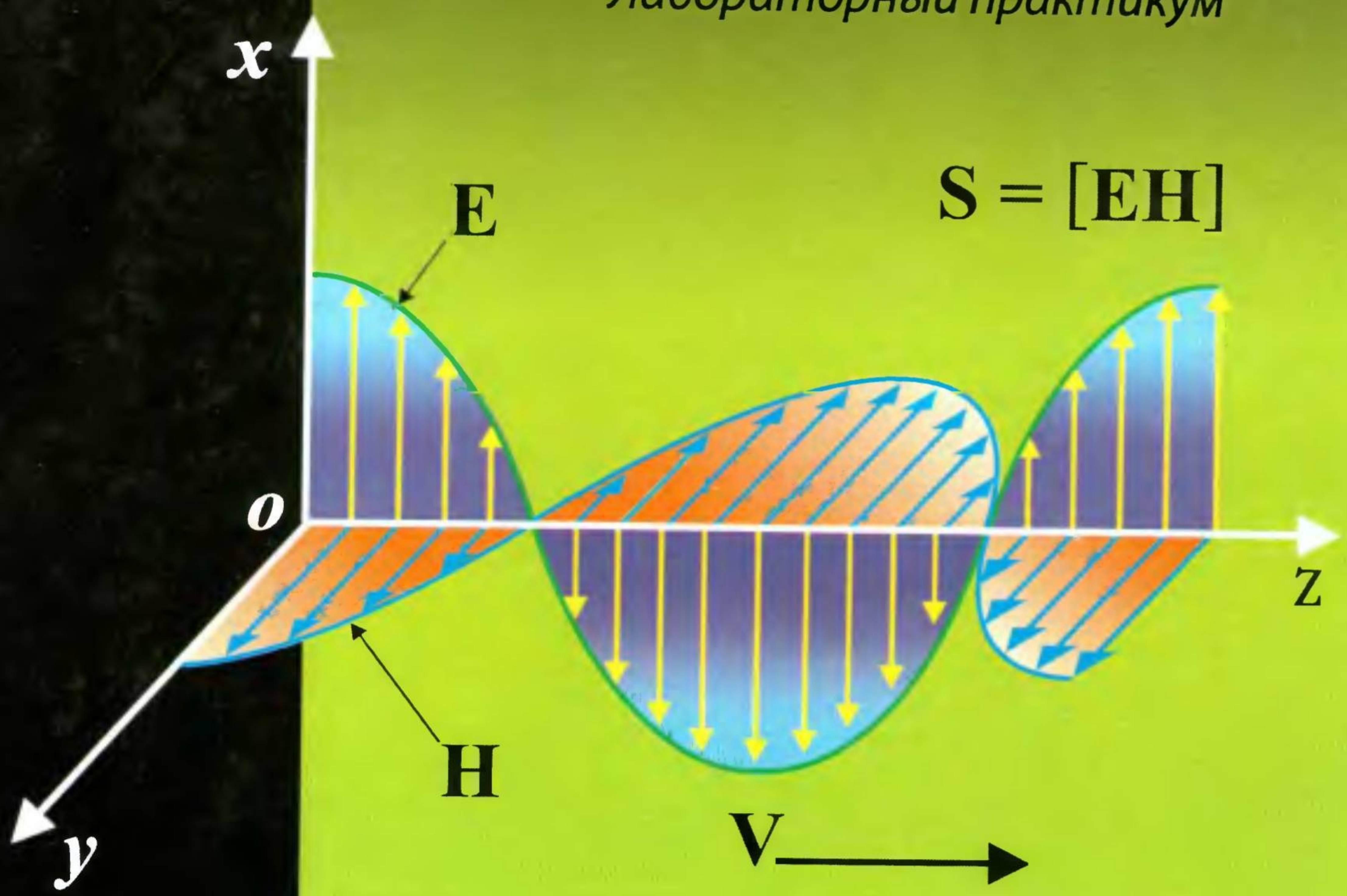
ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Лабораторный практикум



Санкт-Петербург • Издательство Политехнического университета • 2011

УДК 621.3.011(076.5)
ББК 31.21я73
Н46

Авторы:
Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян, В. М. Юринов, В. Н. Боронин

Теоретические основы электротехники. Теория электромагнитного поля : лаб. практикум / Л. Р. Нейман [и др.]. — СПб. : Изд-во Политехн. ун-та, 2011. — 221 с.

Соответствует содержанию разделов дисциплин ОПД.Ф.04.01 «Электротехника и электроника: теоретические основы электротехники», ОПД.Ф.05 «Теоретические основы электротехники» государственного образовательного стандарта направлений подготовки бакалавров и специалистов в области электротехники, электроэнергетики и электротехнологии.

Практикум содержит описание работ, выполняемых студентами в лаборатории кафедры теоретических основ электротехники Санкт-Петербургского государственного политехнического университета по последней части курса ТОЭ (теории электромагнитного поля). Цель практикума — дать студентам возможность подготовиться к выполнению работ, а также способствовать приобретению студентами навыков самостоятельного исследования.

Предназначено для студентов третьего курса электромеханического факультета, а также студентов других факультетов, изучающих курс ТОЭ в рамках подготовки бакалавров.

Табл. 4. Ил. 87. Библиогр.: 27 назв.

Печатается по решению редакционно-издательского совета Санкт-Петербургского государственного политехнического университета.

ISBN 978-5-7422-2868-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ ИЗДАНИЮ

Практикум выходит спустя семь лет после предыдущего, изданного под редакцией профессора В.М. Юринова. Четвертое издание подверглось изменениям редакционного характера, однако его содержательная часть осталась в основном неизменной. В отличие от четвертого издания в данном практикуме работы распределены по разделам, в каждом из которых они объединяются общими положениями, кратко изложенными в начале каждого раздела. При этом каждый последующий раздел является логическим продолжением предыдущего. Такое построение перечня лабораторных работ должно способствовать более глубокому усвоению студентами взаимосвязи между различными сторонами электромагнитных явлений. Описание каждой из работ включает в себя разделы: цель и задачи, решаемые в работе, описание установки и методики проведения эксперимента, программа выполнения работы, указания по обработке результатов исследования и оформлению отчета, основы теории, контрольные вопросы.

Наибольшее изменение претерпели работы по изучению электрического поля постоянного тока в проводящей среде и моделированию электростатических полей. При их выполнении наряду с металлическими листами используется электропроводящая бумага, что расширило круг решаемых задач и потребовало изменения лабораторных установок.

Содержание всех работ изменилось ввиду включения вопросов численного расчета поля. Поскольку в подавляющем большинстве работ на опыте изучаются плоскопараллельные и плоскомеридианные поля, оказалось целесообразным использовать отечественную специализированную программу численного расчета двухмерных полей *Qfield*, разработанную выпускниками Ленинградского политехнического института. Численный расчет поля объектов лабораторного исследования не является обязательным, поэтому вопросы применения программы при выполнении каждой работы, определения области численного расчета и задания граничных условий изложены кратко. По усмотрению преподавателя они могут быть включены в программу выполнения работ.

Настоящее издание выходит в свет после кончины одного из авторов–профессора В. М. Юринова.

Авторы выражают благодарность сотрудникам кафедры теоретических основ электротехники СПбГПУ, принявшим участие в работе над практикумом: С. А. Важнову, С. Е. Виноградову, Р. П. Кияткину, Н. В. Коровкину, Т. Г. Миневич, В. Л. Чечурину, а также В. В. Андрущуку–за работу по модернизации лаборатории.

К. С. Демирчян, В. Н. Боронин

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее руководство к лаборатории электромагнитного поля является по существу четвертым изданием широко известного в технических вузах стран бывшего СССР и ряда других зарубежных стран одноименного пособия трех авторов: Л. Р. Неймана, К. С. Демирчяна, В. М. Юринова. Предыдущие издания сыграли значительную роль при организации и модернизации лабораторий электромагнитного поля и развитии кафедр ТОЭ во многих родственных высших учебных заведениях.

Последнее издание выходит в свет спустя 36 лет после предыдущего и посвящено памяти выдающегося ученого, многолетнего заведующего кафедрой ТОЭ ЛПИ им. М. И. Калинина, академика Леонида Робертовича Неймана, ушедшего из жизни в 1975 г.

Со времени предыдущего издания пособия произошли изменения в методике и технике измерения характеристик электромагнитных полей, методах теоретического исследования и компьютерной обработки экспериментальных данных. Естественно поэтому, что содержание и структура последнего издания претерпели существенные изменения.

В данное пособие вошло описание только тех работ, которые выполняются в настоящее время в лаборатории ТЭМП университета, таким образом, оно стало более конкретным применительно к учебному процессу в указанной лаборатории. Основное содержание работ изложено в более сжатой форме; сведения, содержащие выводы необходимых для расчета теоретических формул и положений, инструкции для работы с компьютерными программами и приборами, а также ряд справочных сведений вынесены в приложения, объем которых по сравнению с предыдущим изданием увеличился.

Во всех работах предусмотрена возможность сопоставления экспериментальных данных с расчетами по компьютерным программам либо непосредственно в процессе выполнения работ, либо позже — при обработке опытных данных.

Лаборатория электромагнитного поля относится к последней части курса и выполняется в СПбГПУ уже после прохождения теоретической его части. Это дает возможность организовать занятия в ней с учетом высокого уровня подготовки студентов и поставить целью этих занятий не только углубление знаний, полученных студентами в теоретическом курсе, но и привитие студентам в максимально возможной мере навыков самостоятельного научного исследования. Это существенное обстоятельство, как и ранее, нашло свое отражение в построении практикума, который не содержит готовых рецептов в виде форм протоколов и примерных кривых.

С этой же целью в описании работ обращено внимание на такие важные стороны всякого исследования, как, например, методы устранения мешающих влияний, могущих исказить результаты опытных исследований. Во всех работах наряду с экспериментальными исследованиями требуется провести теоретические расчеты и результаты их сопоставить с результатами опыта, критически оценив причины возможных расхождений.

Некоторые работы в полном объеме могут быть выполнены только за несколько посещений лаборатории, в то же время ряд работ близок по своему характеру, как, например, работы 2 и 3, 9 и 10. Поэтому не предполагается, что каждый студент должен выполнять все работы, приведенные в пособии. Наоборот, предпочтительным является такой порядок организации работ в лаборатории, при котором отдельные бригады студентов выполняют только небольшое количество работ, но при этом от них требуется, чтобы исследование было проведено со всей необходимой глубиной и тщательностью.

В конце семестра оставляется время для проведения общегруппового итогового семинара, на котором отдельные бригады докладывают всей группе результаты выполненных ими исследований, и проводится обсуждение этих результатов. К семинару студенты группы должны ознакомиться по практикуму также с работами, которые выполнялись другими бригадами, а докладчики — с дополнительной литературой по теме их доклада.

Везде, где это возможно, изучение в лаборатории общих закономерностей, характеризующих то или иное электромагнитное явление, проводится на конкретных примерах электротехнических устройств. Это сделано для того, чтобы приблизить изучение общих закономерностей к практическим задачам, более детальное исследование которых реализуется в дальнейшем в лабораториях специальных кафедр.

Большую помощь в организации работ оказали сотрудники кафедры теоретических основ электротехники СПбГПУ: Р. А. Брагинский, С. А. Важнов, Ю. В. Варламов, С. Е. Виноградов, Р. П. Кияткин, А. Б. Новгородцев, В. Л. Чечурин и в подготовке рукописи к печати: О. Л. Газиева и В. А. Кузьмина.

Всем им авторы выражают свою благодарность.

К. С. Демирчян, В. М. Юринов

РАЗДЕЛ I

ИССЛЕДОВАНИЕ ПОСТОЯННЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Постоянные электрические поля, а именно электростатические поля и электрические стационарные поля, вне и внутри неподвижных проводников, по которым протекают постоянные токи, в области вне источников электродвижущих сил, а также постоянные магнитные поля, а именно статические магнитные поля неподвижных постоянных магнитов и стационарные магнитные поля постоянных токов в неподвижных проводниках вне области, где протекают токи, описываются уравнением Лапласа для электрического или соответственно магнитного скалярного потенциала.

Линии электрической или магнитной напряженности таких электрических или магнитных полей нормальны к поверхностям равного электрического или, соответственно, скалярного магнитного потенциала.

В указанных отношениях между этими полями существует аналогия.

Для каждого конкретного случая должны быть удовлетворены граничные условия на поверхностях проводников, а также на границах раздела сред с различными диэлектрическими проницаемостями, удельными проводимостями и магнитными проницаемостями. При определении магнитного поля постоянных токов в неподвижных проводниках необходимо знать пространственное распределение этих токов.

В наиболее простом случае плоскопараллельного поля оно может быть описано с помощью комплексного электрического или соответственно магнитного потенциала, представляющего собой аналитическую функцию комплексной переменной $z = x + jy$, причем x и y являются координатами комплексной плоскости, на которой изображается картина поля. Такое поле существует около бесконечно длинных прямолинейных цилиндрических заряженных проводников или соответственно проводников с токами. При этом плоскость $x0y$ перпендикулярна проводникам.

Работы, сгруппированные в этом разделе, имеют целью уяснение общего характера постоянных электрических и магнитных полей и ознакомление с некоторыми основными методами их экспериментального исследования. С другими методами экспериментального исследования таких полей можно ознакомиться в теоретическом курсе. Этой же цели служат также работы раздела IV, в котором главной объединяющей их идеей является метод моделирования.

Работа 1

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ПЛОСКОМ ПРОВОДЯЩЕМ ЛИСТЕ

Цель и задачи, решаемые в работе

Целью работы являются: исследование электрического поля постоянного тока в плоском проводящем листе, установление общих взаимосвязей между описывающими поля величинами, а также закрепление навыков расчета такого поля.

В исследуемых задачах заданными являются потенциал (либо нормальная составляющая напряженности поля) на границах области проводящей среды, а также вводимые и отводимые токи. Следует найти распределение потенциала и напряженности поля экспериментально и путем расчета [1, 3, 4].

Описание установки и методики проведения эксперимента

Установка содержит источник постоянного напряжения, измерительный прибор с щупом, лист электропроводящей бумаги и набор металлических электродов. Схема соединения элементов лабораторной установки приведена на рис. 1.1.

Металлические полосовые электроды прижимают к бумаге винтовыми зажимами. Зажимы служат одновременно контактами для подсоединения к источнику постоянного напряжения. При подготовке листа следует в местах предполагаемого размещения таких электродов оставлять дополнительные полоски бумаги, чтобы внутренние края электродов точно ограничивали требуемую область листа. Внутри листа могут располагаться круглые металлические электроды для ввода или отвода тока, зажимы которых также подсоединяются к источнику постоянного напряжения. Для круглого электрода в бумаге следует вырезать отверстие и вставить в него электрод, представляющий собой болт с плоской головкой и гайкой-зажимом. Удельная электрическая проводимость материала электродов значительно больше удельной электрической проводимости бумаги, что позволяет считать электроды эквипотенциальными.

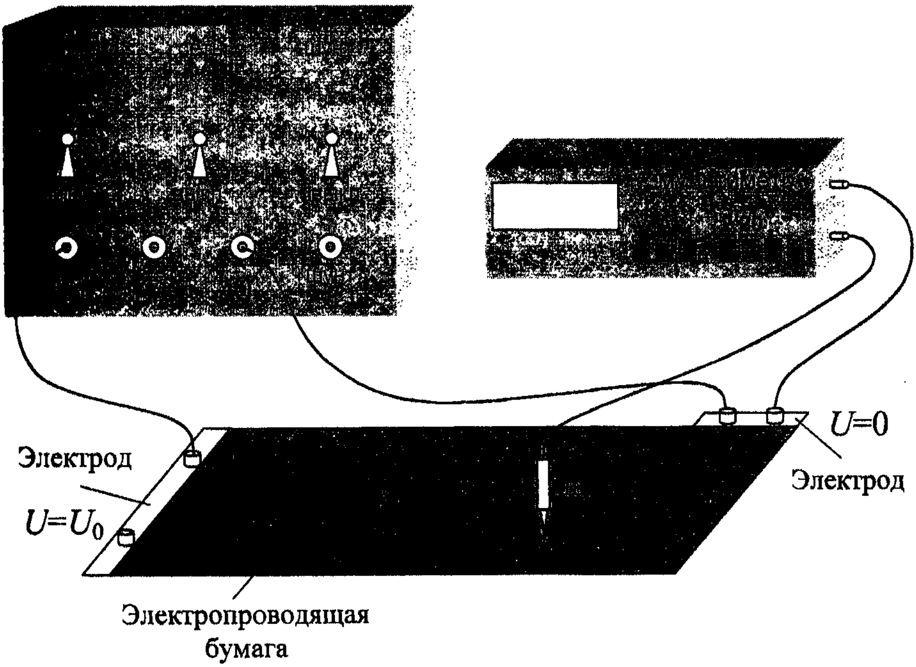


Рис. 1.1

Можно использовать листы различной формы, а также разные варианты присоединения электродов и варьировать их размеры. В соответствии с заданным преподавателем вариантом следует вырезать лист бумаги требуемой формы и, присоединив к нему электроды, задать на них потенциал $U_0 = +15$ В или $U = 0$ В от источника питания.

Для измерения потенциала используется мультиметр, один из зажимов которого подсоединяется к электроду с нулевым потенциалом, а второй — связан с металлическим щупом. При экспериментальном определении линий равного потенциала острие щупа следует вести по поверхности листа с легким нажимом таким образом, чтобы показание прибора не изменялось. Щуп желательно держать перпендикулярно к поверхности листа, а точки, лежащие на эквипотенциальной линии, отмечать карандашом, который следует проводить вслед за острием щупа.

При измерениях необходимо периодически контролировать постоянство напряжения между электродами, так как возможные случайные изменения напряжения источника питания могут привести к искажению линий равного потенциала. Необходимо также обращать внимание на то, чтобы получаемые экспериментально линии равного потенциала удовлетворяли граничным условиям на краях листа. Так как свободные от электродов границы листа являются линиями тока, то линии равного потенциала должны подходить к ним под прямым углом. Строить линии равного потенциала следует таким образом, чтобы разность потенциалов ΔU между любыми двумя соседними линиями оставалась постоянной.

Полученную из опыта картину эквипотенциальных линий дополняют линиями тока. При этом необходимо соблюдать условие ортогональности линий тока и линий равного потенциала, а также условие подобия ячеек образующейся сетки картины поля.

Строить линии тока удобнее, начиная от электрода с заданным потенциалом, где силовые линии проходят перпендикулярно к границе электрода. При этом каждая трубка тока проводит один и тот же ток. Условие подобия ячеек будет выполнено, если отношение средней длины к средней ширине любой из ячеек близко к единице. Тогда в области однородного поля ячейки будут представлять собой квадраты.

Густота линий построенного поля определяется выбором либо числа приращений n равного потенциала, либо числа трубок m равного тока. Хотя обычно задана разность потенциалов между электродами, практически целесообразно выбирать не число приращений потенциала, а число трубок тока, полагая его равным $m = 4 \div 6$. Для определения приращения потенциала ΔU, при котором выполняется рекомендованное условие подобия ячеек сетки поля, перед началом эксперимента следует разделить область вблизи электрода с заданным потенциалом на m равных трубок тока, а затем провести ближайшую к электроду линию равного потенциала параллельно границе электрода на таком расстоянии, чтобы образовалось m равных квадратов. Измерив разность потенциалов между электродом и построенной линией равного потенциала, сохраняют ее постоянной между любыми соседними линиями.

Один из этапов эксперимента состоит в определении сопротивления листа между электродами. Так как напряжение U_0 между электродами известно, то для этого достаточно определить протекающий по листу ток, что осуществляется с помощью шунта, встроенного в блок питания, с сопротивлением $r_ш = 100$ Ом. Включая тумблер шунта, подсоединяют тем самым сопротивление $r_ш$ последовательно с сопротивлением листа к источнику напряжения U_0. Измерив с помощью щупа напряжение $U_ш$ на зажимах шунта, находят ток $i = \dfrac{U_ш}{r_ш} = \dfrac{U_ш}{100}$ и затем сопротивление между электродами

$$r = \frac{U_0 - U_ш}{i} = 100\left(\frac{U_0}{U_ш} - 1\right) \text{ Ом.}$$

Для того чтобы в дальнейшем расчетным путем найти сопротивление r, необходимо знать параметры, определяющие проводящие свойства листа: его толщину b и удельную проводимость γ материала. Практически достаточно на основании измерений определить произведение γb. Для этого можно от того же рулона бумаги, от которого взят исследуемый лист, отрезать полосу шириною 2÷3 см и разделить ее поперечными линиями на равные квадраты. Полосу следует включить в цепь вместо исследуемого листа, затем измерить ток i в полосе и напряжение ΔU, приходящееся на один или несколько квадратов. Измерять напряжение ΔU следует в средней части полосы, где поле однородно. Учитывая, что длина и ширина квадрата одинаковы, сопротивление одного квадрата

$$r_{\square} = \frac{\Delta U}{ni} = \frac{1}{\gamma b},$$

где n — число квадратов полосы.

Это сопротивление не зависит от линейного размера квадрата Δn. Такое же сопротивление имеет любой элемент листа, соответствующий ячейке картины поля, так как на каждый подобный элемент приходятся одно и то же напряжение ΔU и один и тот же ток i.

Для экспериментального определения напряженности электрического поля в произвольной точке (x_0, y_0) следует наметить от этой точки достаточно малые, но еще позволяющие проводить надежные измерения приращения координат Δx и Δy. Измеряя потенциалы точек с координатами (x_0, y_0), $(x_0+\Delta x, y_0)$ и $(x_0, y_0+\Delta y)$, находят приближенно напряженность поля $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2}$, где составляющие вектора $\boldsymbol{E}$ можно рассчитать по формулам

$$E_x \approx \frac{U(x_0, y_0) - U(x_0 + \Delta x, y_0)}{\Delta x}, \quad E_y \approx \frac{U(x_0, y_0) - U(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta y}.$$

Наиболее просто определяется напряженность на границах листа, поскольку отдельные участки границ либо эквипотенциальны и линии напряженности поля перпендикулярны к ним, либо являются линиями тока и линии напряженности поля совпадают с ними. В обоих случаях на границе отлична от нуля только одна составляющая напряженности: нормальная или касательная к границе.

В лаборатории предлагается построить картину электрического поля в проводящих областях, показанных на рис. 1.2 и 1.3.

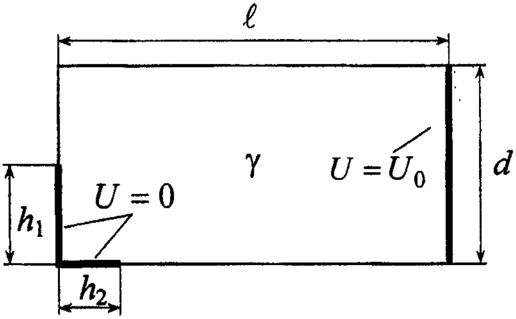


Рис. 1.2

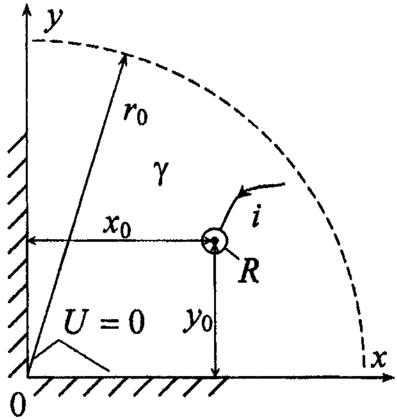


Рис. 1.3

В задаче варианта 1 (см. рис. 1.2) область существования поля ограничена прямоугольником, тогда как в задаче варианта 2 (см. рис. 1.3), она простирается до бесконечности. При экспериментальном исследовании поля в такой области ее приходится ограничивать, вводя так называемые искусственные границы и задавая на них некоторые условия для потенциала или его нормальной к границе производной. При подготовке проводящего листа искусственную границу располагают на расстоянии, в несколько раз большем расстояния между токовводом и другими электродами. Соответственно и размер листа определяется этим расстоянием. Для варианта 2 (см. рис. 1.3) такой границей может быть показанная пунктирной линией дуга окружности радиусом r_0, в $5 \div 10$ раз большим расстояния от вершины угла до токоввода. Эта линия — линия отреза бумаги. Поскольку линия отреза бумаги является линией тока, то на ней выполняется условие $\partial U/\partial n = 0$, т.е. производная потенциала по нормали к ней равна нулю.

Вариант лабораторного задания и все необходимые размеры задает преподаватель.

Программа выполнения работы

1. В соответствии с заданием подготовить область исследования поля, записать граничные условия на контуре проводящей области для потенциала и (или) его нормальной к границам производной, установить электроды и присоединить их к зажимам источника питания. Подключить устройство измерения потенциала.

2. Задать число промежутков n=$5 \div 8$ между линиями постоянного потенциала и, измеряя потенциалы с помощью щупа, изобразить семейство линий равного потенциала на листе.

3. Выполняя правила построения картины электрического поля, провести линии напряженности на том же листе, на котором были предварительно изображены линии постоянного потенциала.

4. Определить потребляемый от источника ток и рассчитать сопротивление между электродами.

5. Найти величину γb, для чего измерить ток в полоске бумаги и напряжение на ней.

Обработка результатов исследования и оформление отчета

Картина поля, построенная на основании экспериментальных данных, сопоставляется с картиной рассчитанных эквипотенциальных и силовых линий. Следует провести количественную оценку имеющих место расхождений. Последние связаны как с неоднородностью свойств листа проводящей бумаги, в частности возможной анизотропией материала, так и с отличием реального листа от теоретической модели. Можно указать также погрешность измерений и погрешность, возникающую вследствие ограничения области моделирования.

Определенные экспериментально значения напряженности электрического поля также сравниваются с расчетными. Оценку, как отмечено ранее, целесообразно в первую очередь проводить для граничных точек листа, поскольку здесь измерения и расчеты наиболее просты. Полезно оценить практическую целесообразность использования расчета непосредственно по картине поля. При этом среднее значение напряженности поля на участке силовой линии между двумя эквипотенциалями находят в виде отношения разности потенциалов ΔU к значению расстояния Δn между этими линиями. Приближенно можно полагать это отношение равным напряженности в средней точке отрезка Δn.

В отчете необходимо сравнить значения сопротивлений r между электродами, полученные различными способами:

на основании измерений;

по картине поля с использованием соотношения

$$r = \frac{U_0}{i} = \frac{n\Delta U}{m\Delta V}\,\frac{1}{\gamma b} = \frac{n}{m}\,r_{\square},$$

где n — число приращений равного потенциала, m — число трубок тока, $r_{\square}$ — сопротивление одного квадрата;

на основании расчета.

Отметим, что по указанию преподавателя или по желанию студентов содержание работы может быть изменено в сторону расширения как экспериментальных, так и теоретических исследований. Можно, например, исследовать вопросы влияния положения и размеров электродов на сопротивление растеканию тока в листе, провести количественную оценку влияния геометрических параметров модели на точность расчетов. Можно также провести исследования для листов иной конфигурации; в этом случае расчетные формулы должны быть получены студентами самостоятельно.

При обработке опытных данных и оформлении отчета следует:

1. Подставляя в выражение $W(z)$ координаты x, y точек, лежащих на некоторой полученной из опыта линии $U = \text{const}$, рас-

считать потенциалы в этих точках. Аналогично, задавая координаты x, y точек, лежащих на некоторой построенной по результатам опыта линии $V = \text{const}$, рассчитать значение функции потока в этих точках.

2. Рассчитать распределение напряженности поля $E(x)$ на границе области при $y = 0$ (для задачи варианта рис.1.3) и сравнить с полученным в опыте.

3. Измерить потребляемый от источника ток и сравнить сопротивления между электродами, полученные по результатам опыта и расчета.

4. Объяснить причины расхождения опытных и расчетных данных.

По указанию преподавателя можно не только выполнить анализ поля в проводящей среде на лабораторной установке, но и рассчитать его аналитически и (или) численно. Пример аналитического решения задачи варианта рис.1.2 приведен в приложении 3.

Основы теории и расчетные соотношения

Электрическое поле постоянного тока в проводящей среде с удельной электрической проводимостью γ описывается уравнениями

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \quad \boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{J} = 0,$$

в которых величины $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{J}$ определяют векторы напряженности электрического поля и плотности тока.

В работе рассматриваются поля, которым соответствует модель в виде плоскопараллельного поля постоянного тока.

Учитывая безвихревой характер электрического поля постоянного тока, для его расчета используют электрический потенциал, который вне источников удовлетворяет уравнению Лапласа ($\Delta U = 0$) или в прямоугольной системе координат уравнению

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0.$$

На границе двух проводников с удельными электрическими проводимостями γ_1 и γ_2 должны выполняться равенства $E_{\tau 1} = E_{\tau 2}$, $J_{n1} = J_{n2}$. При условии $\gamma_1 >> \gamma_2$ в точках поверхности проводника с удельной электрической проводимостью γ_1 можно записать приближенное условие $U = \text{const}$. Области ввода тока i в проводящую среду рассматривают обычно как хорошо проводящие и задают на их поверхностях условие $U = \text{const}$ либо условие $-\gamma \oint \frac{\partial U}{\partial n} dS = i$.

В приложении 3 приведено аналитическое решение задачи варианта рис. 1.2 методом функций комплексного переменного, позволяющее построить картину поля, а также рассчитать сопротивление между электродами с помощью формулы

$$r = \frac{U_0}{i} = \frac{1}{\gamma b} \frac{U_0}{V_0} = r_{\square} \left(\frac{\ell}{d} - \frac{2}{\pi} \ln \sqrt{\omega_2 - \omega_1} \right).$$

Здесь $r_{\square}$ — сопротивление квадрата электропроводящей бумаги; d — ширина листа; ℓ — его длина; ω_1, ω_2 — координаты точек электрода в плоскости комплексного переменного ω (см. рис. П.6 в приложении 3).

Рассмотрим метод расчета электрического поля в задаче варианта рис. 1.3 Допустим вначале, что ток i вводится в безграничный проводящий лист толщиной b с удельной электрической проводимостью γ через весьма малый электрод. Электрический потенциал и напряженность поля в точке листа на расстоянии r от токоввода записываем по аналогии с соответствующими величинами электростатического поля:

$$U(r) = -\frac{i}{2\pi\gamma b} \ln r + C; \quad E(r) = \frac{i}{2\pi\gamma b r}.$$

Комплексный потенциал электрического поля тока i, вводимого в точке с координатами $x = 0$, $y = 0$ проводящего листа ($z = x + jy$):

$$W(z) = V(x, y) + jU(x, y) = -\frac{i}{2\pi\gamma b} j \ln z + C.$$

Если токоввод имеет координату z_1, то комплексный потенциал принимает вид $W(z) = -\dfrac{i}{2\pi\gamma b} j \ln(z - z_1) + C$.

Соотношение $\dfrac{dW}{dz} = -E_y - jE_x$ позволяет рассчитать составляющие напряженности электрического поля.

Запишем выражения для потенциала и напряженности поля тока i, вводимого в точке $z_0 = x_0 + jy_0$ проводящего листа, расположенного в первом квадранте плоскости z, на сторонах $x = 0$ и $y = 0$ которого потенциал равен нулю (см. рис. 1.3). Зеркальное изображение тока в плоскостях $x = 0$ и $y = 0$ приводит к совокупности из четырех токов (рис. 1.4), комплексный потенциал которых

$$W(z) = -\frac{i}{2\pi\gamma b} j \begin{bmatrix} \ln(z - x_0 - jy_0) - \ln(z + x_0 - jy_0) + \\ + \ln(z + x_0 + jy_0) - \ln(z - x_0 + jy_0) \end{bmatrix}.$$

На оси x (при $y = 0$) напряженность электрического поля

$$E_y(x) = -\left.\frac{dW(z)}{dz}\right|_{\substack{z=x \\ y=0}} = -\frac{iy_0}{\pi\gamma b}\left[\frac{1}{(x^2 - x_0^2) + y_0^2} - \frac{1}{(x^2 + x_0^2) + y_0^2}\right].$$

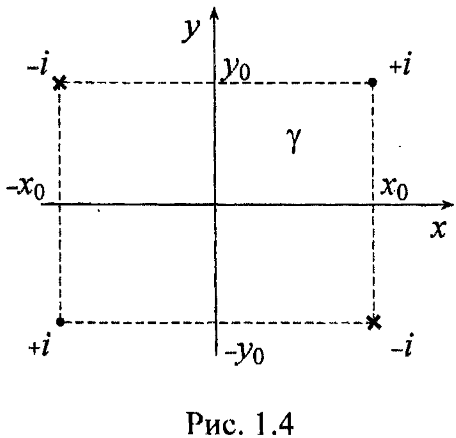


Рис. 1.4

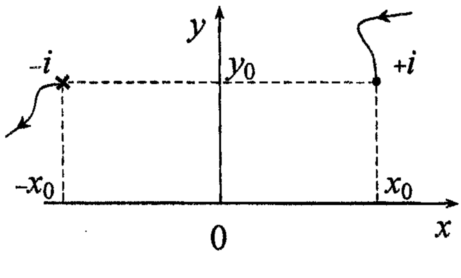


Рис. 1.5

Для расчета сопротивления r растеканию тока применим метод электростатической аналогии, для чего изобразим вначале ток I зеркально в плоскости $x = 0$ (рис. 1.5).

Отметим, что при этом сопротивление растеканию тока увеличилось в два раза в сравнении с сопротивлением растеканию тока в исходной задаче (см. рис. 1.3).

Согласно методу электростатической аналогии из соотношения $\frac{G}{C} = \frac{\gamma}{\varepsilon}$ получаем сопротивление растеканию токов $r' = \frac{1}{G} = \frac{\varepsilon}{\gamma C}$. В рассматриваемом случае величина C определяет емкость двухпроводной линии с учетом влияния земли [1]:

$$C = \frac{\pi\varepsilon\ell}{\ln\left(\frac{2h}{R}\frac{D}{\sqrt{4h^2 + D^2}}\right)},$$

где $D = 2x_0$ — расстояние между токами; $h = y_0$ — расстояние от тока до поверхности $U = 0$; R — радиус электрода токоввода.

Таким образом, искомое сопротивление

$$r = \frac{1}{2\gamma b\pi}\ln\left(\frac{2x_0y_0}{R\sqrt{x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2}}}\right) = \frac{r_\square}{2\pi}\ln\left(\frac{2x_0y_0}{R\sqrt{x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2}}}\right),$$

где $r_\square$ — сопротивление квадрата бумаги.

Задачи обоих вариантов могут быть решены численно с помощью программы *Qfield*. При решении задачи варианта рис. 1.3 область расчета ограничена одной четвертой частью окружности, отмеченной пунктирной линией. Условия для потенциала на ее границах показаны на этом же рисунке. Значение r_0 должно превышать не менее чем в пять раз расстояние от электрода токоввода до начала координат.

Объем расчетов определяет преподаватель.

Контрольные вопросы

1. В каком направлении электрическое поле в проводящем листе считаем неизменяющимся?

2. На части границы проводящего листа электродов нет. Как записать граничное условие на этом участке границы?

3. При каком условии контур электрода можно рассматривать как эквипотенциальный?

4. Какая часть комплексного потенциала (действительная или мнимая) изменяется при перемещении: *а*) вдоль линии тока в проводящей среде; *б*) по границе проводящей области, на которой нет электродов; *в*) по границе электрода?

5. Каковы причины возможного расхождения данных опыта и расчета электрического поля в проводящей среде?

Работа 2

ИССЛЕДОВАНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КАТУШКИ

Цель и задачи, решаемые в работе

Целями работы являются: изучение методов измерения напряженности и индукции магнитного поля в магнитных системах, распределения магнитодвижущей силы (МДС) на отдельных участках систем, анализ напряженности и магнитной индукции на поверхности раздела сред с различными магнитными свойствами, уяснение одного из законов электромагнитного поля — закона полного тока.

В работе исследуется магнитное поле цилиндрической катушки с многослойной обмоткой при питании ее постоянным током. В задачу работы входит нахождение распределения напряженности и индукции магнитного поля вдоль оси катушки без сердечника и с незамкнутым коаксиальным цилиндрическим ферромагнитным сердечником, а также магнитодвижущей силы [1, 2, 7, 9].

Описание установки и методики проведения эксперимента

Обмотка исследуемой катушки имеет w витков, образующих несколько слоев (рис. 2.1).

Внутрь катушки может быть вставлен стальной цилиндрический сердечник. Длина сердечника такая же, как и длина катушки, так что их торцевые поверхности совпадают. Сердечник имеет продольный цилиндрический осевой канал, в который вводится диэлектрический стержень, на котором расположена небольшая измерительная катушка, служащая для измерения напряженности магнитного поля. Измерительная катушка состоит из w_1 витков тонкой проволоки, уложенной в канавку, выточенную в эбонитовом стержне. Стержень с измерительной катушкой вводится в канал сердечника и может свободно перемещаться вдоль сердечника. Стержень имеет достаточную длину для того, чтобы измерительную катушку можно было не только перемещать внутри сердечника исследуемой катушки, но и выводить за его пределы на значительное расстояние. На диэлектрическом стержне нанесены деления в сантиметрах, дающие возможность определить положение измерительной катушки внутри сердечника. Стальной сердечник довольно плотно входит в канал исследуемой катушки. Точно так же стержень с измерительной катушкой входит достаточно плотно в канал сердечника. Поэтому можно считать, что центр витков измерительной катушки перемещается вдоль оси исследуемой катушки.

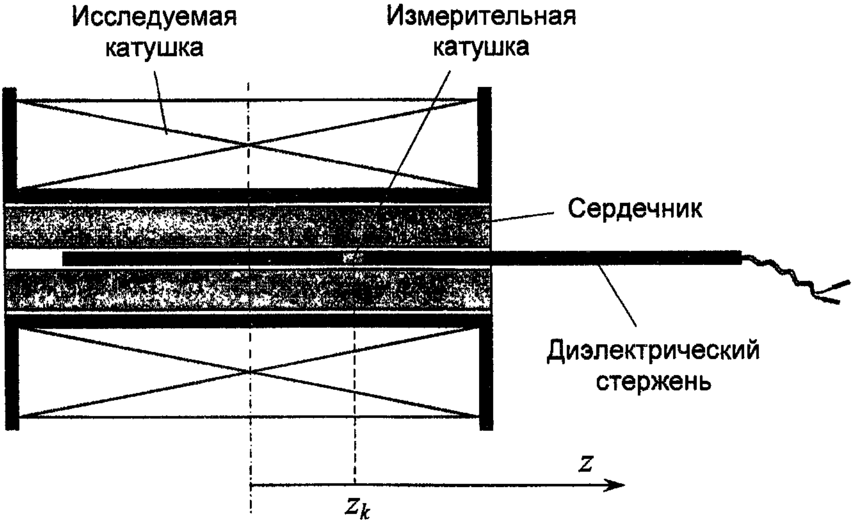


Рис. 2.1

Для снятия зависимости напряженности магнитного поля от координаты z вдоль оси исследуемой катушки при отсутствии в ней стального сердечника последний заменяют аналогичным по размерам деревянным цилиндром.

При выполнении работы измеряют напряженность магнитного поля и магнитодвижущую силу.

Осевую составляющую напряженности магнитного поля можно измерить с помощью щупа, представляющего собой цилиндрический стержень с датчиком (преобразователем) Холла, который можно перемещать вдоль оси катушки. На стержне нанесена шкала, позволяющая определять положение датчика. Сигнал с датчика подается на миллитесламетр.

Напряженность магнитного поля можно также измерить при помощи измерительной катушки баллистическим методом. Поэтому установка содержит баллистический гальванометр и образцовый длинный соленоид с охватывающей его посередине вторичной обмоткой, служащей для градуировки гальванометра.

Для измерения, регулировки и выключения тока в исследуемой катушке или в образцовом соленоиде в цепь включают амперметр, реостат и рубильник. Электрическая схема, используемая при выполнении работы, приведена на рис. 2. 2. Методика измерений изложена в приложениях 1 и 2.

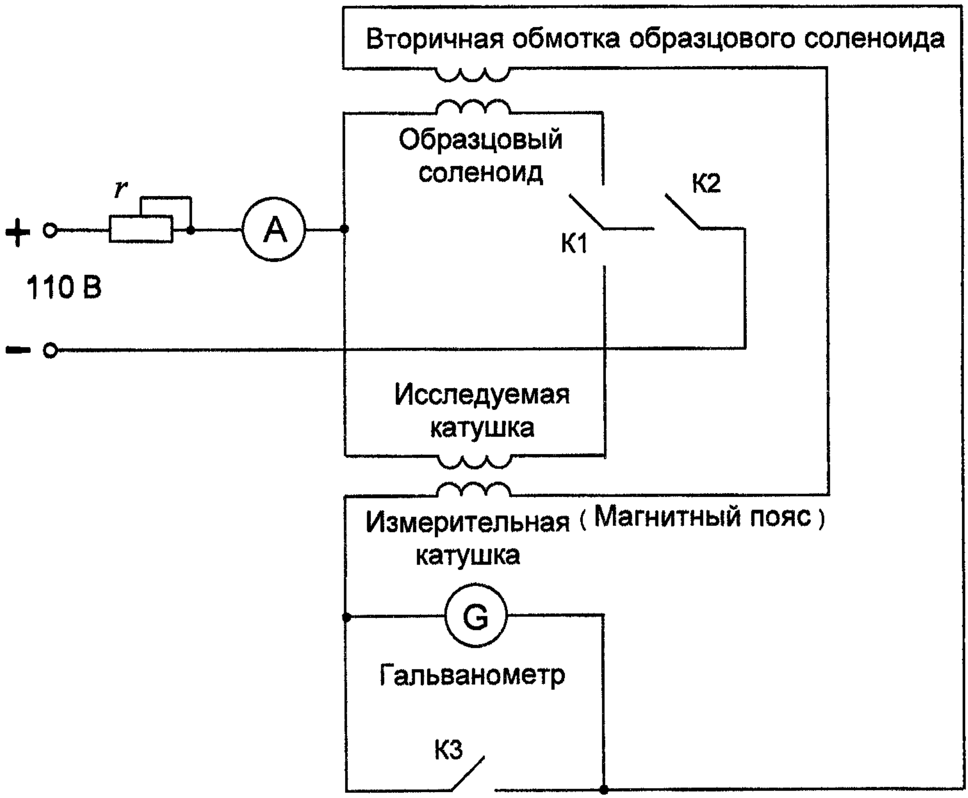


Рис. 2.2

При выполнении работы в лаборатории зависимость напряженности магнитного поля H от осевой координаты z получают опытным путем (как при отсутствии стального сердечника, так и при его наличии). При этом пользуются описанным ранее устройством. Измерительная катушка, расположенная на диэлектрическом стержне, достаточно мала, чтобы можно было считать напряженность поля в занимаемом пространстве всюду одинаковой и равной напряженности поля в ее центре. Напряженность поля измеряют в ряде точек на оси исследуемой катушки, начиная от середины катушки и заканчивая на возможно большем, допускаемом измерительным устройством, расстоянии от катушки за ее пределами. При наличии стального сердечника напряженность поля резко изменяется у края сердечника, поэтому для получения точной зависимости в этой области необходимо снять достаточное количество точек.

Пусть $C_{\Psi 1}$ — постоянная гальванометра при измерении магнитного потока в случае, когда в цепь гальванометра включена измерительная катушка. Полный поток, сцепляющийся с измерительной катушкой при токе i в исследуемой катушке, определяется при этом из выражения

$$\Psi_1 = C_{\Psi_1}\alpha .$$

С другой стороны, этот поток связан с искомой напряженностью магнитного поля H соотношением

$$\Psi_1 = \mu_0 H s_1 w_1,$$

где s_1 — площадь, охватываемая средним витком измерительной катушки; w_1 — число витков измерительной катушки.

Следовательно,

$$H = \frac{C_{\Psi_1}}{\mu_0 s_1 w_1}\alpha .$$

При измерении включают или выключают ток i в исследуемой катушке и наблюдают отброс α по шкале баллистического гальванометра, включенного в цепь измерительной катушки.

Для измерения магнитодвижущей силы используют магнитный пояс, описание которого приведено в приложении 2. Длина пояса вполне достаточна для охвата обмотки исследуемой катушки. Пояс вместе с обмоткой и защитным покрытием свободно проходит через канал стального сердечника или заменяющего его деревянного цилиндра.

Измерению подлежат следующие величины: 1) полная магнитодвижущая сила $F = \oint H dl$ по замкнутому контуру, охватывающему всю обмотку исследуемой катушки; 2) часть F_e этой МДС (называемая внешней) вдоль пути, проходящего вне катушки между точками, лежащими на торцах сердечника; 3) остальная часть F_i этой МДС (называемая внутренней) вдоль пути, проходящего внутри сердечника, между теми же точками на торцах сердечника. В первом случае пояс продевают сквозь канал сердечника и замыкают так, чтобы он охватывал всю обмотку катушки. Во втором — пояс весь располагают вне катушки и оставляют незамкнутым, причем концы его должны примыкать к торцам сердечника. В третьем случае пояс вкладывают в канал сердечника так, чтобы один его конец оказался вровень с одним торцом сердечника. Второй конец пояса изгибают и прикладывают к другому торцу сердечника.

Все три измерения производят сначала без стального сердечника (причем для удобства измерений вкладывают вместо сердечника заменяющий его деревянный цилиндр) и затем при наличии стального сердечника.

Полный поток Ψ_2, сцепляющийся с обмоткой пояса при токе I в исследуемой катушке, измеряют баллистическим методом. Величину Ψ_2 находят из соотношения

$$\Psi_2 = C_{\Psi_2} \alpha,$$

где C_{Ψ_2} — постоянная гальванометра, когда в цепь гальванометра включена обмотка пояса; α – отброс по шкале гальванометра, наблюдаемый при включении или выключении тока в исследуемой катушке.

Магнитодвижущая сила F_{AB} вдоль оси пояса пропорциональна, как показано в приложении 2, потоку Ψ_2:

$$F_{AB} = C\Psi_2,$$

при этом постоянная пояса

$$C = \frac{1}{\mu_0 s_2 w_2'},$$

где s_2 — площадь поперечного сечения пояса, охватываемая витком обмотки пояса; w_2' — число витков обмотки на единицу длины пояса.

Используя соотношение $\Psi_2 = C_{\Psi_2}\alpha$, получаем

$$F_{AB} = C\Psi_2 = C\ C_{\Psi_2}\alpha = K\alpha,$$

где K — постоянная системы пояс–гальванометр.

Заметим, что вихревые токи, возникающие в стальном сердечнике при включении или выключении тока в исследуемой катушке, не влияют на результаты измерений, так как они весьма кратковременны и изменяются от начального нулевого значения вновь до нуля.

В экспериментальной части работы необходимо также определить при помощи образцового соленоида постоянные гальванометра C_{Ψ_1} и C_{Ψ_2} при включении в цепь гальванометра измерительной катушки или магнитного пояса. Эти постоянные зависят от сопротивления обмотки измерительной катушки или пояса.

Программа выполнения работы

1. Включить миллитесламетр, учитывая, что для нормальной работы он требует предварительного прогрева.

2. Выполнить градуировку гальванометра при включении в его цепь вначале измерительной катушки и затем обмотки магнитного пояса.

3. Снять зависимость напряженности магнитного поля от координаты на оси катушки с сердечником и без него: *а*) баллистическим методом; *б*) с помощью датчика Холла.

4. Измерить магнитодвижущую силу, приходящуюся на отдельные участки поля для катушки с сердечником и без него.

Обработка результатов исследования и оформление отчета

Следует построить зависимости $H(z)$ по точкам, полученным путем эксперимента при отсутствии и при наличии стального сердечника. На этот же график нанести рассчитанную по приведенной в приложении 4 расчетной формуле

$$H(z)=\frac{iw}{2\ell}\left(\frac{z+\ell/2}{\sqrt{R^2+(z+\ell/2)^2}}-\frac{z-\ell/2}{\sqrt{R^2+(z-\ell/2)^2}}\right)$$

зависимость $H(z)$ при отсутствии стального сердечника.

Некоторое расхождение теоретической и экспериментальной кривых при отсутствии стального сердечника может иметь помимо неизбежных ошибок измерений следующие причины. При выводе расчетной формулы для напряженности $H(z)$ магнитного поля действительная многослойная катушка была заменена эквивалентной однослойной. Кроме того, при измерении использовалась измерительная катушка конечных размеров, с помощью которой можно измерить лишь среднее значение напряженности поля в пределах пространства, занимаемого катушкой. Это среднее значение может несколько отличаться от значения напряженности поля на оси катушки.

На снятой опытным путем зависимости $H(z)$ катушки со стальным сердечником не наблюдается резкого скачка напряженности поля вследствие того, что канал в сердечнике имеет конечный диаметр и часть линии магнитной индукции выходит из сердечника вблизи его торцов через поверхности канала, а также вследствие конечных размеров измерительной катушки. В предельном случае для бесконечно тонкого канала и бесконечно малых размеров измерительной катушки была бы получена кривая с резким скачком напряженности поля.

Переходя к анализу результатов измерения магнитодвижущей силы, необходимо прежде всего убедиться в том, что полная МДС $F = \oint \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l}$ по замкнутому контуру, охватывающему всю обмотку исследуемой катушки, независимо от того, отсутствует или введен в катушку стальной сердечник, равна полному току в обмотке исследуемой катушки:

$$F = \oint \boldsymbol{H} d\boldsymbol{l} = iw.$$

Соответственно сумма магнитодвижущих сил на двух участках этого замкнутого контура (вне и внутри катушки) в обоих случаях должна оставаться неизменной: $F_e + F_i = F = iw$.

В заключение предлагается получить значения F_1 и F_2 графическим интегрированием кривой $H = f(z)$ в соответствующих пределах. Это интегрирование следует выполнить для обеих опытных кривых, снятых при отсутствии и при наличии стального сердечника. Результаты интегрирования необходимо сопоставить с результатами непосредственного измерения магнитным поясом.

Рассчитать аналитическими методами магнитное поле катушки после внесения ферромагнитного сердечника затруднительно.

Численный расчет магнитного поля исследуемой катушки с помощью программы *Qfield* позволяет оценить влияние свойств материала ее сердечника на поле не только в воздухе, но также в обмотке и сердечнике. Определим область расчета магнитного поля.

Геометрия катушки (как с ферромагнитным сердечником, так и без него) характеризуется осевой симметрией, что позволяет рассчитать поле только в одном ее сечении плоскостью, проходящей через ось симметрии z (рис. 2.3, *а*). Катушка имеет также плоскость симметрии $z = 0$. Поэтому область расчета представляет собой первый квадрант плоскости $r0z$. Так как она должна быть ограниченной, вводим искусственную границу — дугу окружности радиусом r_0 с центром в начале координат (рис. 2.3, *б*).

Определим условия на границах области для векторного магнитного потенциала A, имеющего единственную угловую составляющую. На оси z векторный магнитный потенциал равен нулю. На оси r выполняется условие $\partial A/\partial z = 0$. Допуская, что при большом радиусе дуги (при $r_0 \approx 10\ell$, где ℓ — длина катушки) линии магнитной индукции касательны к дуге, принимаем на ней $A = 0$.

Расчеты следует выполнить: *а*) при отсутствии ферромагнитного сердечника; *б*) при его наличии и допущении, что магнитная проницаемость вещества сердечника постоянна; *в*) при учете нелинейных свойств вещества сердечника.

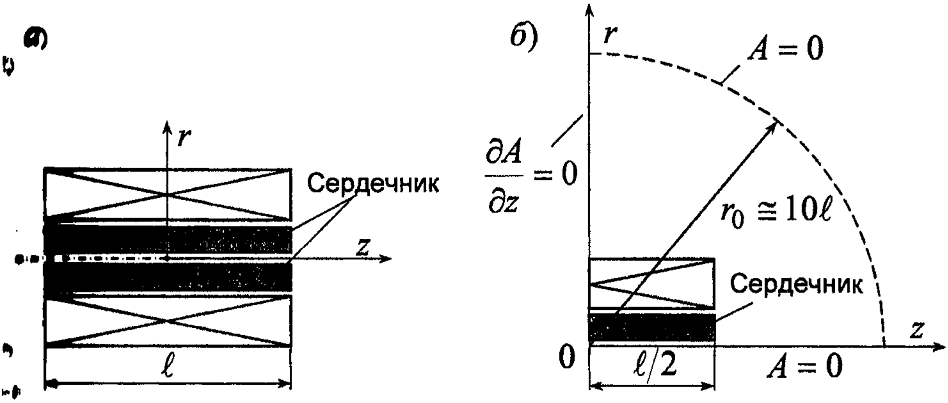


Рис. 2.3

Следует проанализировать влияние насыщения на вид зависимости $H = f(z)$, а также на распределение МДС в воздухе и сердечнике катушки.

Рассчитанные зависимости $H(z)$ на оси катушки необходимо сравнить с найденными из опытов.

Размеры элементов и объем расчетов задает преподаватель.

Основы теории

Магнитное поле постоянного тока описывается уравнениями

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{J};\ \ \mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0;\ \ \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}.$$

Аналитическое решение этих уравнений относительно напряженности магнитного поля в общем случае произвольного распределения плотности электрического тока имеет громоздкий вид даже в однородной в магнитном отношении среде. Для цилиндрической катушки без ферромагнитного сердечника, магнитное поле которой является осесимметричным, его можно записать в простой форме при упрощающем допущении об однослойности обмотки. Идея заключается в представлении обмотки совокупностью круговых витков и интегрировании напряженности магнитного поля витка по длине катушки. В приложении 4 получено выражение для расчета напряженности магнитного поля в произвольной точке на оси однослойной катушки без ферромагнитного сердечника.

Найти напряженность в произвольной точке с учетом многослойности катушки можно, применяя метод наложения.

Рассчитать магнитное поле катушки с ферромагнитным сердечником значительно труднее, поскольку вблизи границ сердечника появляются области быстрого изменения поля. Как известно, на границе раздела двух сред с различными магнитными проницаемостями должны быть равны касательные составляющие вектора $\boldsymbol{H}$ напряженности магнитного поля и нормальные составляющие вектора $\boldsymbol{B}$ магнитной индукции.

Линии напряженности магнитного поля вблизи оси катушки можно считать параллельными оси. Поэтому можно принять, что вектор $\boldsymbol{B}$ перпендикулярен к торцевым поверхностям сердечника и имеет только нормальные к ним составляющие. Следовательно, на этих поверхностях

$$\mu H_2 = \mu_0 H_1,$$

причем μ — магнитная проницаемость сердечника; H_2 и H_1 — напряженности поля внутри и вне сердечника на его торцевой поверхности.

Таким образом,

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{\mu}{\mu_0},$$

т.е. на торцевых поверхностях сердечника напряженность поля изменяется скачкообразно.

После внесения стального сердечника напряженность поля внутри сердечника уменьшилась, а за его пределами увеличилась по сравнению со значениями напряженности поля в тех же местах при отсутствии сердечника.

Полная МДС $F=\oint \boldsymbol{H}d\boldsymbol{l}$ по замкнутому контуру, охватывающему всю обмотку катушки, независимо от того, отсутствует или введен в катушку стальной сердечник, равна полному току в ее обмотке:

$$F=\oint \boldsymbol{H}d\boldsymbol{l}=iw.$$

Соответственно сумма магнитодвижущих сил на двух участках этого замкнутого контура (вне и внутри сердечника) в обоих случаях должна оставаться неизменной и равной $F=iw$.

Однако после внесения сердечника вследствие изменения напряженности магнитного поля МДС F_e вне сердечника должна возрасти, а МДС F_i внутри сердечника должна уменьшиться по сравнению с их значениями при отсутствии сердечника.

Контрольные вопросы

1. Почему введение ферромагнитного сердечника приводит к перераспределению напряженности магнитного поля и МДС?

2. Измеренная в некоторой точке магнитная индукция после введения ферромагнитного сердечника может увеличиться, но может и уменьшиться. Зависит ли это от того, в какой точке измеряют магнитную индукцию?

3. При измерении МДС между торцевыми поверхностями катушки магнитный пояс может располагаться как вне окна катушки, так и внутри него. Почему МДС, измеряемая между торцевыми точками катушки, зависит от расположения магнитного пояса?

4. Как изменится МДС между торцевыми точками сердечника при его замене сердечником с меньшей магнитной прони-

цаемостью? Зависит ли результат от того, в какой области измеряют МДС: внутри или вне сердечника?

5. По построенной зависимости $H(z)$ напряженности магнитного поля вдоль оси x катушки рассчитан интеграл $\int_a^b H dz$. Какую величину он определяет? Чему равен интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} H dz$?

6. Магнитную индукцию измеряют баллистическим методом или с помощью датчика Холла в воздушном канале сердечника. Почему по этим измерениям можно определить напряженность поля в сердечнике, внутри которого непосредственно измерить поле не удается?

7. Изобразите качественные зависимости осевых составляющих векторов напряженности магнитного поля $H_z(r)$ и магнитной индукции $B_z(r)$ от радиальной координаты r в центральном поперечном сечении катушки (с ферромагнитным сердечником и без него). Чему равен интеграл $\int_0^{\infty} B_z dr$, рассчитываемый: *а*) в центральном поперечном сечении катушки; *б*) в ее произвольном поперечном сечении?

8. Какие из составляющих напряженности магнитного поля и магнитной индукции непрерывны, а какие изменяются скачком на поверхности (при $r = R$) вставленного в катушку ферромагнитного сердечника?

Работа 3

ИССЛЕДОВАНИЕ НАМАГНИЧИВАНИЯ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Цель и задачи, решаемые в работе

Цель работы заключается в исследовании явления намагничивания ферромагнитных тел в не изменяющихся во времени магнитных полях, ознакомлении с методами и средствами измерения индукции и напряженности магнитного поля вне и внутри исследуемых образцов.

При исследовании используется уникальное свойство эллипсоидов вращения намагничиваться однородно во внешнем однородном поле.

В задачу работы входит изучение характера намагничивания эллипсоидов вращения и коротких цилиндров в однородном магнитном поле [1, 2, 7, 9, 10].

Описание установки и методики проведения эксперимента

Для создания однородного магнитного поля используются катушки Гельмгольца, которые будем называть катушками возбуждения. Средний радиус катушек R =12,5 см, число витков w = 7900. Расстояние между средними плоскостями расположенных коаксиально катушек равно их среднему радиусу R. Катушки закреплены на основании, имеющем специальную стойку, которая позволяет фиксировать исследуемые образцы на продольной оси катушек возбуждения (рис. 3.1).

Катушки соединены последовательно согласно и подключены к источнику постоянного напряжения. При указанном выше соотношении размеров в центральной области между катушками создается магнитное поле, близкое к однородному. Вопросы создания однородного поля с помощью магнитной системы из двух соосных катушек исследуются в работе 4. В данной работе только проверяется однородность поля в области, в которой при эксперименте размещаются намагничиваемые тела.

В работе исследуется намагниченность: трех стальных эллипсоидов вращения, изготовленных из одного материала; шара, спрессованного из стальных опилок с немагнитным наполнителем, называемого композитным;   короткого стального цилиндра, намагничиваемого неоднородно.

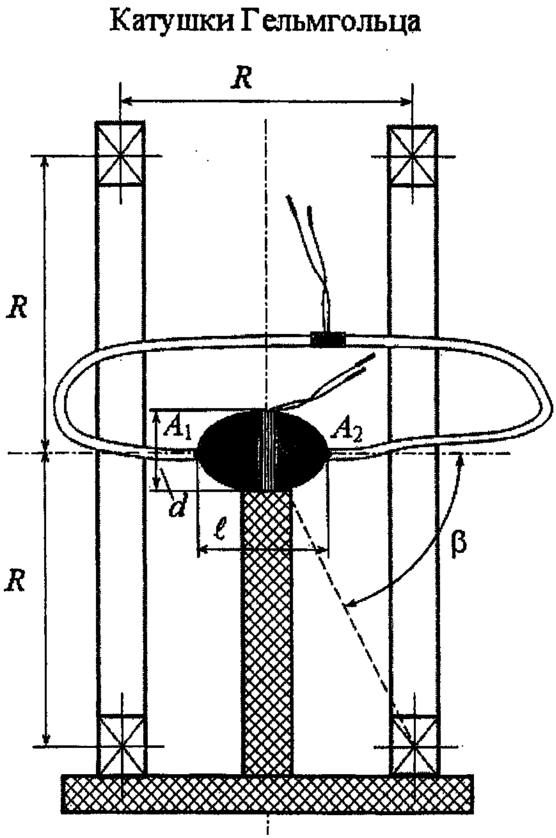


Рис. 3.1

Наибольшие круговые сечения, перпендикулярные осям вращения, для всех исследуемых образцов одинаковы, в то время как оси вращения стальных эллипсоидов имеют различную длину. Один из образцов имеет форму удлиненного эллипсоида вращения (овоида), второй — форму шара того же радиуса, что и композитный, третий — форму укороченного эллипсоида вращения (сфероида). Композитный шар можно рассматривать как сплошной, но с магнитной проницаемостью, значительно меньшей проницаемости материала ферромагнитных опилок, которые входят в его состав.

Исследуемые образцы помещают в фиксатор между катушками на их оси и располагают на стойке так, чтобы их оси вращения совпадали с осью катушек возбуждения, т. е. были направлены вдоль линий магнитной индукции внешнего поля. При размещении эллипсоидов в однородном поле внутри них поле изменяется, но остается однородным. Именно поэтому для измерения магнитных полей внутри эллипсоидов не требуются датчики малых размеров, позволяющие измерять индукцию или напряженность поля в точке, а применяются методы измерения интегральных характеристик поля: магнитного потока и магнитодвижущей силы.

Для экспериментального определения магнитной индукции в теле эллипсоида используют измерительную катушку, плотно охватывающую тело вращения по периметру наибольшего кругового сечения, перпендикулярного оси вращения (см. рис. 3.1). Измерительную катушку включают в цепь баллистического гальванометра, схема которой приведена на рис. 3.2. Через катушки пропускают постоянный ток $0{,}4 \div 0{,}8$ А.

Для ограничения отброса светового пятна гальванометра в пределах его шкалы следует подобрать подходящее значение добавочного сопротивления $r_{доб}$, включенного в его цепь.

Выключая ток в катушках, замечают отклонение светового пятна на шкале гальванометра. Это отклонение пропорционально магнитному потоку, сцепляющемуся с измерительной катушкой. Так как эллипсоид намагничен однородно и измерительная катушка его плотно охватывает, то отсчет по шкале гальванометра пропорционален магнитной индукции B_i в теле эллипсоида. Эллипсоид удаляют, оставляя измерительную катушку в том же положении, и вновь определяют показания гальванометра при выключении тока в катушках. Отклонение светового пятна в этом случае пропорционально магнитной индукции B_0 однородного внешнего поля.

Обозначим отношение двух отсчетов по шкале гальванометра (при наличии и при отсутствии эллипсоида) b:

$$b = B_i / B_0 .$$

Величину b следует определить для всех исследуемых тел вращения.

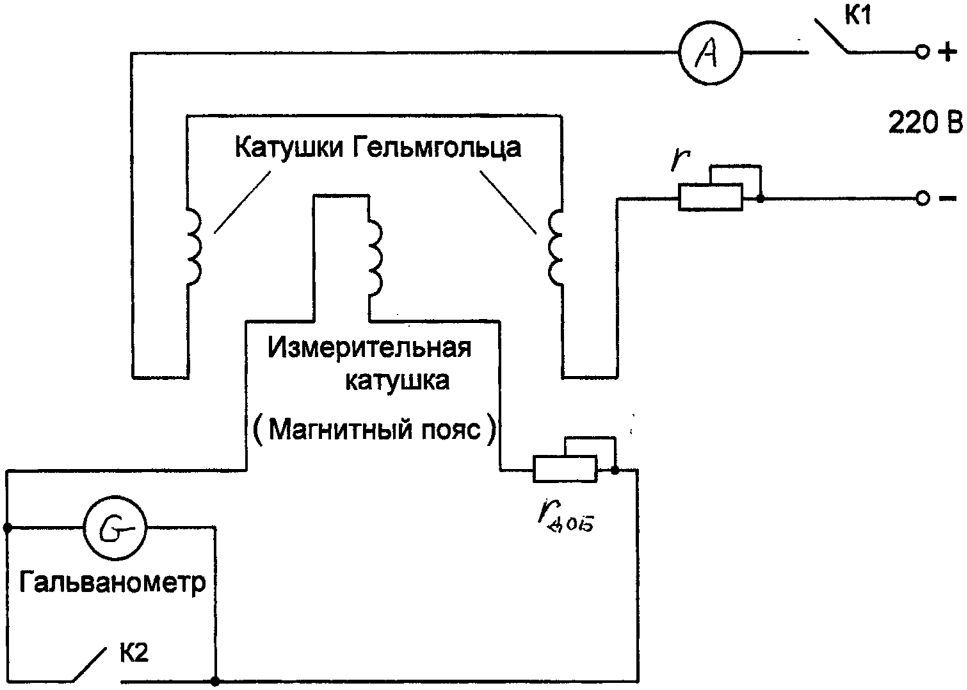


Рис.3.2

Далее необходимо найти напряженность магнитного поля H_i внутри эллипсоидов, для чего используется магнитный пояс (см. приложение 2). Вновь установив эллипсоид на подставке, располагают пояс так, чтобы он своими концами плотно примыкал к полюсам A_1 и A_2, лежащим на оси вращения эллипсоида, но не охватывал катушки возбуждения (см. рис. 3.1).

Таким образом, включая обмотку пояса в цепь баллистического гальванометра и производя отсчет по шкале при включении или выключении тока в катушках, получают возможность измерить магнитодвижущую силу вдоль оси эллипсоида. Добавочное сопротивление $r_{доб}$ при измерениях магнитодвижущей силы следует установить равным нулю. Так как поле внутри эллипсоида однородно, то

$$\int_{A_1}^{A_2} \boldsymbol{H}_i dl = H_i \ \ell .$$

Следовательно, показание гальванометра будет пропорционально напряженности поля H_i в теле эллипсоида. Выполнив этот опыт, удаляют образец, фиксируя концы пояса в том же положении с помощью немагнитного вкладыша, продольный размер которого равен длине соответствующего эллипсоида. Отсчет по шкале гальванометра при включении или выключении тока в катушках возбуждения пропорционален величине $H_0\ell$, то есть напряженности внешнего однородного поля. Обозначив отношение двух отсчетов по шкале гальванометра h, можем записать

$$h = \frac{H_i}{H_0}.$$

Для облегчения правильной установки магнитного пояса на внешних торцевых плоскостях катушек возбуждения закреплены пластины из оргстекла с рядом отверстий, в которые вставляется гибкий магнитный пояс. При выполнении других пунктов программы работы в эти отверстия вставляют стержень с датчиком Холла.

По результатам выполнения опытов следует рассчитать значения коэффициентов размагничивания N для всех тел. Для шаров значения N должны быть близки к 1/3, для овоида — находиться в диапазоне $0 < N < 1/3$, для сфероида — $1/3 < N < 1$. Сопоставление значений коэффициента размагничивания стального и композитного шаров позволяет экспериментально подтвердить независимость этого коэффициента от магнитной проницаемости материала.

Для проверки однородности внешнего поля в области, в которой размещают тела вращения, используется миллитесламетр, первичным измерительным преобразователем которого является датчик Холла, закрепленный внутри цилиндрического стержня. Для измерений используют два стержня: длинный — для измерения осевой составляющей B_z магнитной индукции, короткий — для измерения нормальной к поверхности тел составляющей B_n индукции.

Для исследования однородности поля стержень зонда, с помощью которого измеряют осевую составляющую B_z магнитной индукции, через отверстия боковых пластин вводят в рабочую область внешнего поля. Измерения индукции проводят в ряде точек, перемещая стержень с датчиком Холла вдоль оси катушек, а затем вдоль нескольких прямых, параллельных оси. В области расположения эллипсоидов показания прибора изменяются незначительно. Полезно проверить, на каком расстоянии от указанной области поле заметно отличается от однородного. При выполнении этих и последующих измерений в катушках возбуждения должен протекать ток в диапазоне $0{,}1 \div 0{,}2$ А.

В заключение измеряют нормальную составляющую B_n магнитной индукции на поверхности сплошного и композитного шаров. Для этого, поместив шар на подставке, закрепляют на нем специальную оправку таким образом, чтобы вставленный в нее короткий зонд с датчиком Холла касался шара в точке, расположенной на оси катушек, соответствующей точке A_1 для эллипсоида (см. рис. 3.1). Поворачивая шар вместе с оправкой и зондом в горизонтальной плоскости на угол α, отсчитываемый от оси катушек возбуждения, измеряют нормальную составляющую магнитной индукции $B_n(\alpha)$ для ряда значений угла в диапазоне $0 \le \alpha \le \pi/2$.

Программа выполнения работы

1. Ознакомиться с инструкцией по работе с миллитесламетром и включить его в цепь питания, учитывая, что для нормальной работы он требует предварительного прогрева.

2. Пропустить через катушки ток $0{,}4 \div 0{,}8$ А. Поместить в фиксатор ферромагнитный шар, включить измерительную катушку в цепь гальванометра и определить максимальный отброс светового пятна (пропорциональный магнитной индукции внутри шара) на его шкале при выключении тока в катушках возбуждения. Повторить данный опыт, устанавливая вместо ферромагнитного шара последовательно сфероид, овоид и композитный шар. Удалить тело и измерить отброс светового пятна гальванометра (пропорциональный магнитной индукции B_0) при включении тока в катушки возбуждения.

3. Включить в цепь гальванометра обмотку магнитного пояса и определить отбросы светового пятна гальванометра, прижимая концы магнитного пояса к крайним точкам тела (отброс пропорционален напряженности поля H_i внутри тела) и затем к крайним точкам немагнитного вкладыша того же продольного размера, что и размер тела (отброс пропорционален напряженности поля H_0).

4. Измерить нормальную составляющую магнитной индукции в 6÷10 точках поверхности шаров с помощью датчика Холла.

5. Проверить однородность внешнего магнитного поля, измеряя осевую составляющую магнитной индукции вдоль нескольких прямых, параллельных оси катушки.

6. Измерить магнитную индукцию на торцевой поверхности короткого ферромагнитого цилиндра на различных расстояниях от его оси и убедиться в том, что в однородном внешнем магнитном поле он намагничивается неоднородно.

Обработка результатов исследования и оформление отчета

Напряженность H_0 и индукцию B_0 внешнего однородного поля, создаваемого катушками Гельмгольца, можно рассчитать с помощью выражений, приведенных в работе 4. В точке оси z, соответствующей центру магнитной системы, напряженность магнитного поля и магнитная индукция выражаются в виде

$$H_0 = 0{,}716\frac{iw}{R}; \quad B_0 = \mu_0 H_0,$$

где R — средний радиус катушек.

Результаты измерений магнитной индукции в отдельных точках (п. 5 программы) сводят в таблицу и представляют в виде графиков $B(z)$ при нескольких значениях координаты r и $B(r)$ при нескольких значениях координаты z.

Количественно степень неоднородности поля в заданной области можно оценить с помощью коэффициента, определяемого в виде отношения максимального значения индукции к ее среднему значению: $k = \dfrac{B_{max}}{B_{ср}}$.

Найденное ранее расчетное значение B_0 индукции внешнего однородного поля следует сопоставить с экспериментально полученным средним значением индукции $B_{ср}$ в области расположения исследуемого тела вращения.

Найти значения $b = \dfrac{B_i}{B_0}$, $h = \dfrac{H_i}{H_0}$ и коэффициент размагничивания $N = \dfrac{1-h}{b-h}$ для всех образцов и сравнить их с теоретическими значениями. На основании рассчитанных по результатам эксперимента значениям b, h и N определяют характеристики поля:

$$B_i = bB_0; \quad H_i = hH_0; \quad \mu = \frac{B_i}{H_i}; \quad H_J = H_0 - H_i; \quad M = \frac{H_J}{N}.$$

Результаты расчетов для всех образцов сводят в таблицу. Проводя анализ, следует сопоставить значения отдельных составляющих напряженности поля, сравнить полученные значения магнитной проницаемости для различных образцов. Полезно убедиться, что при использовании в лаборатории баллистического гальванометра и магнитного пояса, имеющего относительно небольшое число витков на единицу осевой длины, измерить достаточно точно величину магнитной проницаемости для стальных образцов не удается. В первую очередь это является следствием неточности определения малой величины h. С другой стороны, отмеченная неточность практически не сказывается на точности расчета коэффициента размагничивания. Действительно, для стальных эллипсоидов $b > 1$, $h \ll 1$ и, следовательно, $N \approx 1/b$. Однако для композитного шара можно на основании результатов проведенных измерений определить магнитную проницаемость с достаточной точностью, поскольку она относительно невелика.

Так как нормальная составляющая магнитной индукции непрерывна на границе раздела сред с различными магнитными проницаемостями, то по данным измерений этой составляющей в воздухе на поверхности стального и композитного шаров можно судить не только о соответствии расчетного и опытного распределений индукции в воздухе, но и о поле внутри шаров. Нормальная составляющая магнитной индукции B_n на поверхности шара, являющаяся одновременно и радиальной составляющей B_r, при однородном внешнем поле определяется простым выражением:

$$B_n = B_r = B_i \cos\alpha,$$

где угол α отсчитывается от оси катушек возбуждения и равен углу, измеряемому при экспериментальном определении зависимости $B_n(\alpha)$.

Полученные опытным путем зависимости $B_n(\alpha)$ для шаров представляют в виде графиков и сопоставляют с теоретически ожидаемым распределением. При этом имеется возможность проверить полученные на основании опытных данных значения индукции B_i внутри шаров, так как при $\alpha = 0$ величина B_n имеет максимальное значение, равное индукции B_i внутреннего однородного поля.

Численный расчет магнитного поля намагничиваемых в однородном поле тел с использованием программы *Qfield* позволяет не только оценить погрешности опыта, но и определить характер намагниченности тел произвольной формы с учетом нелинейных свойств их материала.

Исследуемые при выполнении работы тела, как и создающие поле катушки Гельмгольца, обладают осевой симметрией (рис. 3.3).

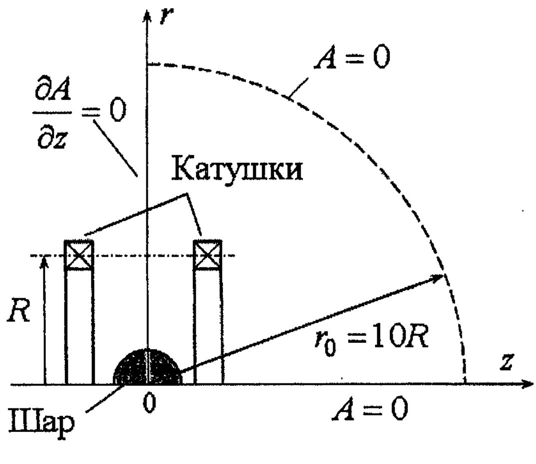


Рис. 3.3

Поскольку намагничиваемое тело располагается в лабораторной установке посередине между катушками, то поле имеет плоскость симметрии, перпендикулярную оси вращения и разрезающую тела пополам. Поэтому область численного расчета можно ограничить осью вращения z, линией $0r$ и дугой окружности с центром в точке 0. Радиус окружности r_0 задаем приблизительно в 10 раз больше радиуса R катушки.

На линии $0z$ и дуге окружности принимаем векторный магнитный потенциал A=0. Так как линии магнитной индукции нормальны к линии $0r$, то на ней следует принять условие $\partial A/\partial z = 0$.

Необходимо выполнить следующие численные расчеты:

1. Рассчитать магнитное поле в области между катушками при отсутствии намагничиваемых тел. Для оценки однородности магнитного поля найти наибольшее и наименьшее значения магнитной индукции B_z в объеме, где при выполнении работы располагаются намагничиваемые тела.

2. Рассчитать магнитное поле в объеме намагничиваемого тела (шара, эллипсоидов, цилиндра) при постоянных значениях магнитной проницаемости материала тел. Рассчитать коэффициенты размагничивания и сопоставить их с полученными в опыте.

3. Рассчитать магнитное поле в объеме намагничиваемого тела (шара, эллипсоидов, цилиндра) с учетов нелинейных свойств материала тел.

Размеры элементов и объем расчетов задает преподаватель.

Основы теории

При теоретическом анализе магнитного поля для учета свойств ферромагнетиков можно использовать различные формы связи между векторами, характеризующими поле: с помощью магнитной проницаемости μ либо путем введения понятия вектора намагниченности $\boldsymbol{M}$. Для магнитного поля внутри эллипсоидов вращения, опуская векторные обозначения, можно записать:

$$B_i = \mu H_i = \mu_0 \left(H_i + M \right).$$

В общем случае магнитная проницаемость μ и намагниченность M являются функциями напряженности поля H_i внутри тел, в связи с чем расчет магнитного поля при наличии ферромагнитных тел представляет собой сложную нелинейную задачу. В приближенной постановке полагают магнитную проницаемость постоянной, что эквивалентно линейной связи между M и H_i, и тогда становится возможным аналитический расчет поля эллипсоида вращения, внесенного во внешнее однородное магнитное поле.

Воспользуемся решением более простой задачи для шара [1]. Вне шара поле становится неоднородным и совпадает с полем магнитного диполя, расположенного в центре шара. Внутри шара поле сохраняется однородным, а напряженность и магнитная индукция определяются формулами

$$H_i = \frac{3\mu_0}{\mu + 2\mu_0} H_0; \qquad B_i = \frac{3\mu}{\mu + 2\mu_0} B_0. \tag{3.1}$$

Из выражений (3.1) следует, что при $\mu > \mu_0$ $B_i > B_0$ (при внесении такого тела в однородное магнитное поле магнитная индукция внутри него становится больше индукции внешнего однородного поля B_0). Напротив, напряженность H_i поля внутри шара оказывается меньше напряженности H_0 внешнего поля. Для ферромагнетика $\mu >> \mu_0$, и напряженность поля H_i внутри шара близка к нулю. Предельное значение магнитной индукции $B_i \approx 3B_0$.

Соотношения (3.1) можно использовать для решения аналогичной задачи при заданной нелинейной характеристике $B = f(H)$ материала шара. Тогда можно применить итерационную процедуру решения, изложенную в работе 5.

Возможен другой способ описания явления намагничивания эллипсоидов вращения. Рассматривая поле вектора напряженности внутри тела в виде суммы внешнего однородного поля H_0 и поля, обусловленного намагничиванием ферромагнетика, и учитывая при этом, что напряженность поля H_i становится меньше напряженности внешнего поля, можно ввести понятие размагничивающего поля H_J, определяя его на основании выражения

$$H_i = H_0 - H_J.$$

Для любого эллипсоида вращения, как и для шара, размагничивающее поле, как и поля напряженностей H_0 и H_i, однородно и направлено в соответствии с определением навстречу внешнему полю. Так как для ферромагнетика $H_i << H_0$, то напряженность размагничивающего поля близка по величине к напряженности внешнего поля: $H_J \approx H_0$.

Для характеристики размагничивающего поля вводят понятие коэффициента размагничивания N в соответствии с соотношением

$$H_J = NM.$$

Практическая целесообразность использования этого коэффициента определяется тем, что при однородном намагничивании тел его значение зависит только от формы тела, но не зависит от магнитной проницаемости материала. Для эллипсоидов вращения теоретическим путем получены формулы

$$N = \frac{\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}}\ln\left(\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}\right)-1}{\lambda^2-1} = \frac{1-\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\arccos\lambda}{1-\lambda^2}. \quad (3.2)$$

В выражениях (3.2) параметр $\lambda = \ell / d$ представляет собой отношение длины ℓ оси вращения эллипсоида, которая совпадает с направлением вектора напряженности внешнего поля, к диаметру d эллипсоида. Первым равенством удобно пользоваться для расчетов при $\lambda > 1$, а вторым — при $\lambda < 1$.

Для бесконечно протяженной поперек направления поля пластины, которую можно рассматривать как сплющенный эллипсоид вращения, приняв $\lambda = 0$, получим $N = 1$, то представляет собой наибольшее возможное значение коэффициента размагничивания. Для шара $\lambda = 1$, тогда $N = 1/3$. Минимальное значение N получается для бесконечно длинного круглого стержня диаметром d, расположенного вдоль линий поля; в этом случае следует принять $\lambda = \infty$, что соответствует значению $N = 0$.

Ввести понятие коэффициента размагничивания, зависящего только от формы тела, строго говоря, возможно лишь для эллипсоидов вращения и в указанных предельных случаях. Однако для приближенных расчетов магнитных полей в приборах и аппаратах, имеющих конструктивные элементы в виде коротких ферромагнитных тел, например цилиндров или призм, а также магнитопроводы с малым воздушным зазором, методики, использующие коэффициенты размагничивания, применяются довольно часто. При этом следует помнить, что такие расчеты являются только ориентировочными, так как тела, отличные по форме от эллипсоидов вращения, даже в однородных полях намагничиваются неоднородно.

Распределение магнитного поля в ферромагнитных телах произвольной формы можно получить с требуемой для практики точностью путем численного расчета.

Контрольные вопросы

1. Какая из величин больше: магнитная индукция внутри ферромагнитного шара, помещенного во внешнее однородное магнитое поле, или магнитная индукция внешнего магнитного поля при отсутствии шара? Какая из величин больше: напряженность магнитного поля внутри ферромагнитного эллипсоида, помещенного во внешнее однородное магнитое поле, или напряженность внешнего однородного магнитного поля при отсутствии эллипсоида?

2. В однородное магнитное поле помещен намагничиваемый эллипсоид вращения. Сохранит ли однородность магнитное поле вне эллипсоида?

3. Будет ли намагничиваться однородно эллипсоид вращения, помещенный по внешнее однородное магнитное поле, направленное а) вдоль его большой оси; б) вдоль его малой оси; в) под произвольным углом к его осям?

4. Ферромагнитный цилиндр конечной длины помещен во внешнее однородное магнитное поле, напряженность которого направлена вдоль оси цилиндра. Какая из областей цилиндра характеризуется большей намагниченностью? Какие области намагничены меньше?

5. Два ферромагнитных шара расположены в непосредственной близости друг от друга и помещены в однородное магнитное поле, напряженность которого направлена вдоль линии, соединяющей центры шаров. Будут ли они намагничиваться однородно?

6. Намагничиваемый шар при допущении постоянства магнитной проницаемости помещен в однородное магнитное поле. При увеличении магнитной проницаемости материала шара напряженность внутри шара падает. Как при этом изменяется величина $\mu H = B$, определяющая магнитную индукцию внутри шара?

Работа 4

СИНТЕЗ ИСТОЧНИКОВ, СОЗДАЮЩИХ ЗАДАННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ОТРЕЗКЕ ПРЯМОЙ

Цель и задачи, решаемые в работе

Целью работы являются: экспериментальное подтверждение возможности практической реализации заданного закона распределения магнитного поля на участке оси системы одинаковых круглых соосно расположенных катушек с токами, а также ознакомление на этом примере с постановкой и путями решения задач синтеза электромагнитного поля.

Следует исследовать магнитное поле токов двух или трех одинаковых соосных катушек, с помощью которых создается магнитное поле, распределенное вдоль их оси по заданному закону [2, 10–12].

Описание установки и методики проведения эксперимента

Лабораторная установка содержит три круглые соосно расположенные катушки одинаковых размеров: $R_{min} = 7{,}1$ см, $R_{max} = 9{,}1$ см, $R_{ср} = R_0 = 8{,}1$ см, осевая ширина 2,4 см (рис. 4.1), а также устройство для измерения магнитной индукции. Число витков катушек одинаково: $w = 338$. Одна из катушек (левая) закреплена, две другие могут перемещаться по направляющим вдоль оси системы.

Обмотки катушек соединяются по схеме, приведенной на рис. 4.2. С помощью реостатов r_1, r_2 и r_3 в них можно устанавливать токи от 0,09 до 0,4 А. Переключение концов отдельных катушек позволяет изменить в них направление тока, а следовательно, и направление вектора магнитной индукции поля, создаваемого токами этих катушек.

Осевую составляющую индукции измеряют с помощью датчика Холла, закрепленного на цилиндрическом стержне, который можно перемещать вдоль оси магнитной системы. На стержне нанесена сантиметровая шкала. Сигнал с датчика подается на миллитесламетр.

Используемый в работе датчик позволяет измерять осевую составляющую магнитной индукции не только на оси, но и при других значениях радиальной координаты *r*, для чего в каркасах катушек выполнен ряд соответствующих друг другу отверстий, вдоль которых перемещают стержень с датчиком.

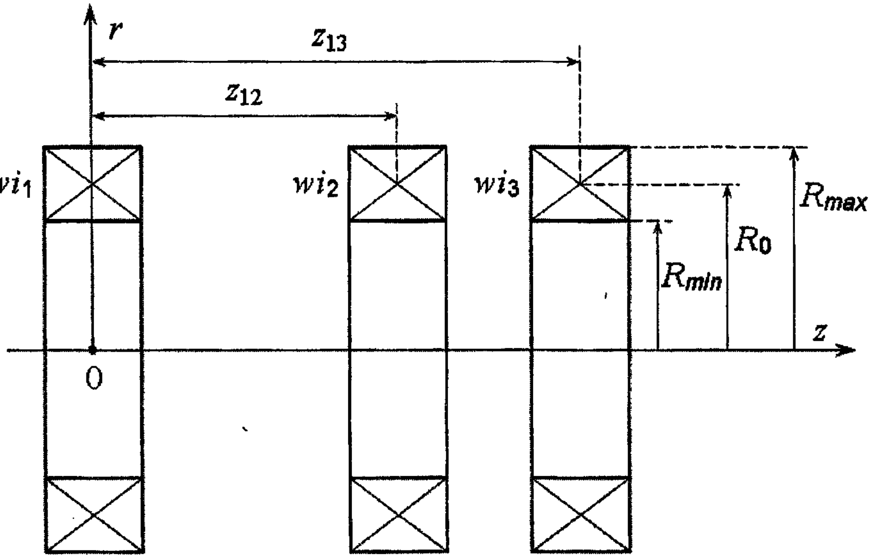


Рис. 4.1

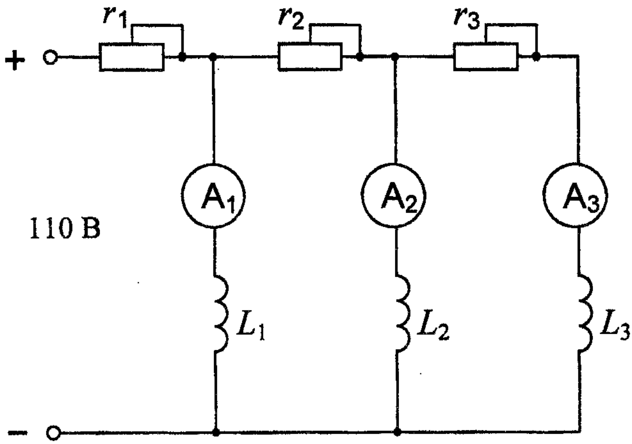


Рис. 4.2

В табл. 4.1 приведены предварительно рассчитанные расстояния между катушками и токи в них, обеспечивающие близкие к заданным законы распределения осевой составляющей магнитной индукции $B_0(z) = f(z)$ на оси на определенных интервалах (от $z = z_a$ до $z = z_b$) для четырех вариантов. В первых двух вариантах получаем поля, близкие к однородному, в третьем варианте — линейное распределение магнитной индукции, а в четвертом — квадратичное. В первом варианте используются две катушки, а в остальных — три.

Начало координат во всех вариантах соответствует середине поперечного сечения первой катушки. Отметим, что при установке катушек удобнее отсчитывать расстояния z_{12} и z_{13} по неподвижной шкале, скрепленной с первой катушкой, как расстояния между правыми торцевыми плоскостями соответствующих катушек (см. рис. 4.1).

Таблица 4.1

Номер варианта	Требуемый закон распределения индукции $B_0(z)$	z_a	z_b	z_{12}	z_{13}	i_1	i_2	i_3
	Тл	см				А		
1	$5\cdot10^{-4}$	0	8,1	8,1	—	0,134	0,134	0
2	$5\cdot10^{-4}$	5,75	13,85	8,5	17	0,15	0,09	0,15
3	$(0{,}2+3z)\,10^{-3}$	1,25	16,75	7,6	16	0,11	0,14	0,3
4	$0{,}02z^2$	11,25	21,25	20	28	0,09	0,16	0,41

Предлагается следующий порядок проведения экспериментальных исследований. После прогрева и настройки миллитесламетра для одной из катушек снимают зависимость $B_0(z)$. Затем в соответствии с вариантами табл. 4.1 устанавливают катушки, задают их токи и измеряют магнитную индукцию вдоль их оси. По указанию преподавателя для заданного варианта можно исследовать однородность поля не только на оси, но и в области вблизи оси.

Отметим, что программа работы может быть расширена, и тогда она выполняется за два лабораторных занятия, если преподаватель задает требуемый закон изменения индукции на оси $B_0(z) = f(z)$ в виде функции, отсутствующей в табл. 4.1, или для других значений отрезка, на котором следует получить данное распределение поля. В этих случаях перед проведением описанных измерений во время первого посещения лаборатории необходимо решить поставленную задачу синтеза магнитной системы с помощью программы численного поиска (приложение 5). Программа записана на языке *Mathcad 7*; для поиска размеров катушек и их токов в ней использован метод наискорейшего спуска.

Программа выполнения работы

1. Включить миллитесламетр и перед использованием прогреть в соответствии с инструкцией.

2. Проверить идентичность полей трех используемых в лабораторной установке катушек, для чего вначале задать токи катушек: i_1 = 0,3 А, $i_2 = i_3$ = 0, затем: $i_1 = i_3$ = 0, i_2 = 0,3 А, далее: $i_1 = i_2$ = 0, i_3= 0,3 А, измеряя в каждом опыте распределение магнитной индукции $B_0(z)$ на оси.

3. Проверить возможность создания с помощью двух и трех одинаковых круглых катушек практически однородного магнитного поля вблизи оси магнитной системы с постоянной магнитной индукцией на определенном участке оси. Для этого следует установить катушки и задать их токи в соответствии с координатами и токами вначале для варианта 1 (см. табл.4.1), а затем — для варианта 2, измеряя для каждого из заданий магнитную индукцию вдоль отрезка оси, превышающего заданные размеры отрезка $ab = z_b - z_a$ приблизительно на 5÷6 см (по 3 см с каждой стороны).

4. Проверить возможность создания магнитной системой из трех одинаковых круглых катушек заданного линейного и квадратичного распределения магнитной индукции на отрезке оси. Для этого следует задать координаты и токи катушек в соответст-

ствии с вариантами 3 и 4 (см. табл. 4.1), измеряя для каждого из заданий магнитную индукцию в точках на отрезке $ab = z_b - z_a$ оси.

5. Найти с помощью программы синтеза координаты и токи катушек, создающих заданное преподавателем распределение магнитной индукции на их оси. Установить катушки и токи в них и измерить распределение магнитной индукции на оси катушек.

Обработка результатов исследования и оформление отчета

При обработке результатов измерений для оценки идентичности катушек следует сопоставить кривые распределения индукции на оси для всех трех катушек, совместив их на одном графике. Для количественной оценки идентичности можно рассчитать среднее из максимальных значений индукции катушек на оси $B_{m\text{ср}} = (B_{m1} + B_{m2} + B_{m3})/3$ и сравнить его с B_{m1}, B_{m2} и B_{m3}, а также с расчетным максимальным значением магнитной индукции для одной катушки $B_m = \dfrac{\mu_0 iw}{2R_0}$. Следует объяснить причины возможного несовпадения этих величин.

Далее требуется построить полученную экспериментальным путем зависимость $B_0(z)$ для двух катушек (вариант 1, см. табл. 4.1), соответствующую условию $d = z_{12} = R_0$, а также рассчитанную по формуле (4.1) (см. раздел “Основы теории”). Зависимость $B(z)$ можно получить, используя графический метод наложения, как это показано на рис. 4.3. Для количественной оценки рассчитывают наибольшую относительную погрешность отклонения индукции на заданном интервале от требуемого постоянного значения $5 \cdot 10^{-4}$ Тл для всех трех зависимостей.

Аналогичным способом следует обработать данные других экспериментов. Количественную оценку отклонения полученных распределений от требуемых можно выполнить путем расчета относительной погрешности в нескольких точках заданных интервалов.

Численный расчет магнитного поля катушек можно выполнить с учетом размеров их поперечного сечения с помощью программы *Qfield*. Поскольку все катушки имеют общую ось симметрии z, одной из границ области расчета является ось z. На ней векторный магнитный потенциал A=0.

Магнитные поля одной или двух катушек имеют плоскость симметрии z = const. Действительно, для одной катушки плоскость симметрии z = const проходит через середину сечения катушки, а для двух одинаковых катушек при равных токах она расположена на одинаковом расстоянии от катушек. Наличие плоскости симметрии позволяет уменьшить область расчета. Однако поле трех катушек 1, 2, 3 (рис. 4.4) в общем случае уже не имеет плоскости симметрии z = const.

При расчете магнитного поля трех катушек область расчета можно ограничить полукругом радиуса r_0, значение которого зависит от радиуса $R_{ср}$ катушек и расстояния D между крайними катушками. Его можно принять приблизительно равным $10\max(R_{ср}, D)$.

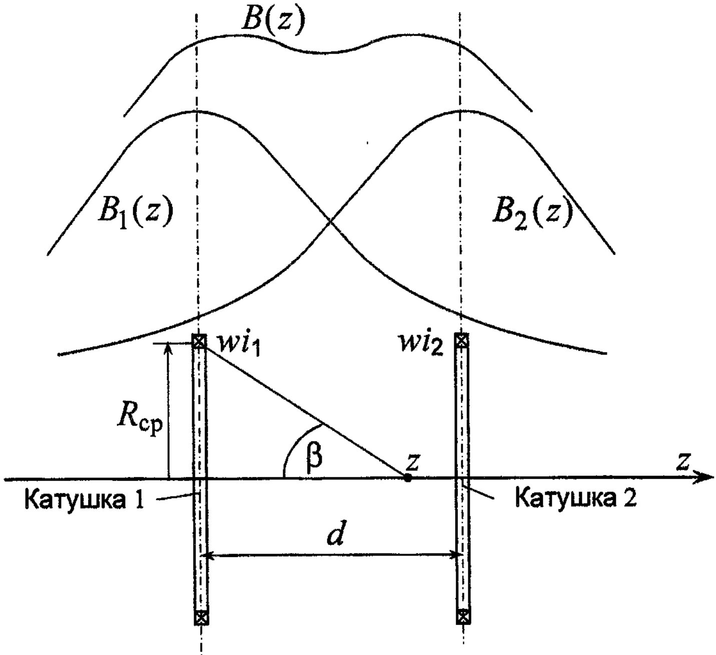


Рис. 4.3

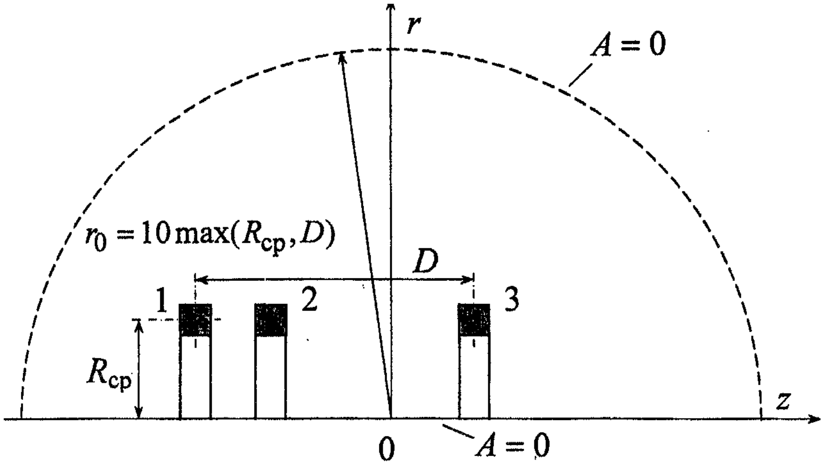


Рис. 4.4

На дуге окружности (как и на оси симметрии z) принимаем условие $A = 0$, допуская, что вблизи нее линии поля близки по форме к окружности.

Следует сравнить распределения магнитной индукции вдоль оси z, получаемые в опыте и при численном расчете для одной, двух и трех катушек.

Размеры элементов и объем расчетов задает преподаватель.

Основы теории и расчетные соотношения

Задачи создания магнитных систем, образованных катушками с токами и обеспечивающих в определенных областях пространства магнитные поля с требуемыми характеристиками, носят название задач синтеза магнитных полей. Их относят, в отличие от задач анализа полей (прямых задач), к обратным задачам теории поля, решение которых, как и задач синтеза в теории электрических цепей, не всегда существует, а если существует, то может быть не единственным.

На практике часто требуется получить однородное ($B_0(z) = \text{const}$) поле, а также линейное ($B_0(z) = k_1z+k_2$) или квадратичное ($B_0(z) = kz^2$) распределение магнитной индукции на отрезке оси катушек с токами. Найти положение катушек и значения токов в них, обеспечивающих требуемое распределение магнитной индукции $B_0(z) = f(z)$ на отрезке оси ab, можно различными способами: путем экспериментального подбора, графоаналитическим методом или посредством численного перебора вариантов. Чаще всего это осуществляется с помощью программ численного поиска, обеспечивающих минимальное значение среднеквадратичной погрешности (минимальное значение некоторого функционала).

Размеры катушек, количество их витков и координаты концов отрезка, на котором следует получить заданный закон распределения магнитной индукции, считаем заданными.

При поиске координат катушек и их токов должен быть выполнен ряд ограничений: например, допустимые значения токов, допустимое расположение катушек и т. п. В данной работе одним из ограничений является идентичность всех используемых катушек.

Для двух одинаковых катушек с заданными размерами объем, в котором в пределах фиксированной точности магнитная индукция может считаться постоянной, зависит только от одного параметра — расстояния между катушками $d = z_{12}$. В этом случае оптимальное расстояние, при котором область однородности оказывается наибольшей, может быть приближенно определено исходя из теоретических положений.

Заменим каждую из катушек тонким витком радиусом, равным их среднему радиусу $R_0 = R_{\text{ср}} = (R_{\max} + R_{\min})/2$, с током iw. Используя для анализа поля на оси z катушек приведенное в приложении 4 выражение

$$B_0(z) = \frac{\mu_0 iw}{2R_0}\sin^3\beta = B_m\left(\frac{R_0}{\sqrt{R_0^2 + z^2}}\right)^3,$$

где $B_m = \dfrac{\mu_0 iw}{2R_0}$ — индукция на оси z в плоскости витка, можно показать, что оптимальным является расстояние между катушками, равное их среднему радиусу ($d = R_0$).

Следует учитывать, что это условие оптимальности получено при определенных допущениях, в частности, при использовании идеализированной расчетной модели, не учитывающей реальные размеры сечения катушек.

Соотношение размеров магнитной системы, обеспечивающее наибольшую зону однородности поля, хорошо известно, и его нередко используют для создания однородного магнитного поля в метрологических лабораториях, а сами катушки (при $d = R_0$) называют в технике магнитных измерений катушками Гельмгольца. Подобная магнитная система используется при исследовании намагничивания эллипсоидов в однородном поле.

Осевая составляющая магнитной индукции на оси двух соосных катушек определяется выражением

$$B_0(z) = B_m \left[\left(\frac{R_0}{\sqrt{R_0^2 + z^2}} \right)^3 + \left(\frac{R_0}{\sqrt{R_0^2 + (z-d)^2}} \right)^3 \right], \qquad (4.1)$$

где d — расстояние между катушками.

Контрольные вопросы

1. Каким свойством характеризуются катушки Гельмгольца?

2. По каким причинам получаемое в опытах распределение магнитной индукции на отрезке отличается от требуемого?

3. Может ли система из трех соосных катушек улучшить равномерность магнитного поля на отрезке их оси, создаваемого катушками Гельмгольца?

4. Какие ограничения накладываются на искомые переменные при решении рассматриваемых в лаборатории задач синтеза осевой составляющей магнитной индукции на оси соосных катушек?

5. Каковы основные отличия задач синтеза магнитного поля от задач его анализа?

Работа 5

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКРАНИРОВАНИЯ В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Цель и задачи, решаемые в работе

Целью работы являются: экспериментальное исследование и анализ зависимости экранирующего действия составных экранов от их формы и размеров, свойств материала, из которого они изготовлены, а также от наличия и расположения щелей (стыков) между отдельными частями экранов.

В задачи работы входят экспериментальное исследование и расчет экранирующих свойств сферических и цилиндрических экранов, выполненных из ферромагнитных материалов, при различной толщине стенки в постоянном однородном магнитном поле [1, 2, 6, 22–24].

Описание установки и методики проведения эксперимента

Магнитное поле, в которое помещаются исследуемые экраны, создается в воздушном зазоре электромагнита. Воздушный зазор сохраняется постоянным $(h_0 = 13{,}5$ см$)$ при выполнении всех опытов.

Обмотка электромагнита состоит из восьми секций с одинаковым числом витков (w_1 = 175), концы которых выведены на общую изолирующую колодку, что позволяет переключать их с помощью перемычек. При поперечном по отношению к плате расположении перемычек секции электромагнита соединены последовательно. Такое соединение используется при питании обмоток электромагнита постоянным током. В этом случае суммарная МДС обмотки при постоянном токе $F_= = I_0 \cdot 8w_1$, где I_0 — постоянный ток, потребляемый от источника.

Установка содержит устройство, предназначенное для предварительного размагничивания ферромагнитных экранов. В процессе размагничивания в зазоре электромагнита создается переменное магнитное поле с плавно уменьшающейся до нуля амплитудой магнитной индукции.

В лаборатории исследуют замкнутые экраны (сферические и цилиндрические) и плоские незамкнутые экраны, содержащие две плоские пластины, расположенные в параллельных плоскостях.

Сферические и цилиндрические экраны являются составными и содержат две одинаковые части, между которыми имеется воздушная щель. Она оказывает влияние на степень экранирования, определяемую соотношением $a = H_0/H_i$ (здесь H_0 — напряженность внешнего однородного поля; H_i — напряженность поля в воздухе внутри экрана).

Сферические экраны имеют одинаковый внутренний радиус $R_1 = 27$ мм и различную толщину ($\Delta = 1{,}5$; 3; 5 мм) стенки – их внешние радиусы R_2 различны. Каждый экран состоит из двух полусфер, торцы которых отшлифованы, что позволяет получить минимальный воздушный зазор между ними. При этом внешнее магнитное поле проникает внутрь экрана в основном сквозь его поверхность и лишь частично через зазор. В месте стыка половинок каждого экрана имеется радиальное отверстие, через которое выводится кабель, присоединенный к датчику (преобразователю) Холла. Внутри экранов сделаны немагнитные изолирующие выступы, на которые опирается контейнер с датчиком Холла для правильного и надежного ориентирования их по отношению к внешнему магнитному полю в зазоре.

Состыкованные из двух половинок экраны (с датчиком Холла внутри) укладываются в соответствующую каждому экрану подставку, вместе с которой зажимаются в фиксаторе. Фиксатор с экраном и контейнером с датчиком Холла помещаются в воздушный зазор электромагнита, а выведенный наружу кабель от датчика Холла подключается к входу миллитесламетра.

Цилиндрические экраны также выполнены из двух половинок (стаканов) с радиальным отверстием в месте стыка. Внутренние размеры всех цилиндрических экранов одинаковы ($R_1 = 23$ мм, $h = 46$ мм), а толщина стенок стальных экранов

(Δ = 1,5; 3; 5 мм) варьируется за счет различных внешних радиусов.

В опытах используется один и тот же датчик Холла. С его помощью можно измерить магнитную индукцию внутри каждого экрана, а также индукцию внешнего магнитного поля (без экрана). Необходимо следить за тем, чтобы во всех опытах плоскость контейнера датчика Холла была расположена перпендикулярно линиям индукции измеряемого магнитного поля.

Для исследования экранов к обмотке электромагнита подводится постоянное напряжение. В этом случае используется силовой блок лабораторной установки «Исследование на постоянном токе» (рис. 5.1). Схема позволяет устанавливать требуемый постоянный ток в обмотке электромагнита (ЭМ).

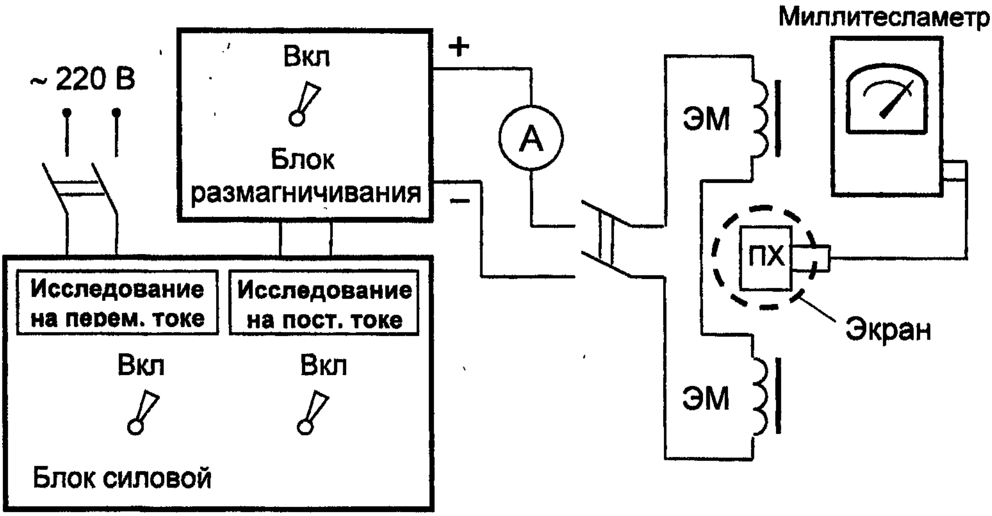


Рис.5.1

В процессе работы следует экспериментально определить степень экранирования всех сферических экранов при различной ориентации плоскости стыка по отношению к направлению внешнего магнитного поля, а для цилиндрических экранов – только при расположении плоскости стыка поперек поля. Кроме того, для ферромагнитных экранов с толщиной стенки Δ = 5 мм необходимо определить степень экранирования при наличии между половинками экрана немагнитных изолирующих прокладок.

Экранирующее действие экрана зависит не только от толщины его стенок, но и от магнитной проницаемости материала экрана. Поэтому все опыты с ферромагнитными экранами, магнитная проницаемость которых зависит от интенсивности магнитного поля, необходимо выполнять при одной и той же напряженности H_0 внешнего магнитного поля при одном и том же значении тока в обмотке электромагнита. Рекомендуется выбрать значение тока 0,8÷1 А.

Программа выполнения работы

Соединить секции обмотки электромагнита последовательно и, подключив их к источнику постоянного напряжения, установить ток 0,8÷1 А. Измерить магнитную индукцию между полюсами электромагнита вначале при отсутствии экранов и затем в области экранирования для всех имеющихся в лаборатории сферических и цилиндрических экранов. Для каждого сферического экрана измерить магнитную индукцию при положениях щели как вдоль, так и поперек линий внешнего поля при наличии и отсутствии картонных прокладок в щели между половинами каждого экрана.

Расчет степени экранирования

Для простейшего случая — для однородного сплошного сферического экрана с постоянной магнитной проницаемостью, находящегося в однородном внешнем магнитном поле, степень экранирования можно рассчитать с помощью соотношения [1, 2, 6]

$$H_i = H_0 \frac{1}{1+\frac{2}{9}\left(1-\frac{R_1^3}{R_2^3}\right)\left(\frac{\mu_0}{\mu}+\frac{\mu}{\mu_0}-2\right)}. \tag{5.1}$$

Здесь H_0 — напряженность магнитного поля в зазоре электромагнита при отсутствии экрана между его полюсами:

$$H_0 = \frac{Iw}{h_0},$$

где I — ток обмотки электромагнита; w — число витков; h_0 — расстояние между полюсами.

Формула (5.1) точная для сферических экранов, магнитная проницаемость μ которых во всех точках одинакова. Ввиду того что магнитная проницаемость стальных экранов зависит от напряженности магнитного поля, которая в различных точках стенки экрана неодинакова, степень экранирования, получаемая по (5.1), будет соответствовать некоторому среднему значению μ в стенке экрана. Для нахождения заранее неизвестного среднего значения магнитной проницаемости материала экрана можно применить итерационную процедуру.

Выбрав в качестве первого приближения некоторое значение напряженности магнитного поля внутри экрана H_i, определяют из графика $\mu/\mu_0 = f(H)$, построенного на основании табл. 5.1, соответствующее значение μ/μ_0. Подставляя его в соотношение (5.1) и учитывая, что напряженность H_0 внешнего магнитного поля задана, вычисляют новое приближение H_i и продолжают итерационный процесс до тех пор, пока два очередных приближения для величины H_i будут отличаться не более чем на 1–2 %. Найденная таким способом степень экранирования $a = H_0/H_i$ определяет приближенное теоретическое значение для соответствующего экрана.

Степень экранирования можно также определить графическим способом. С этой целью запишем выражение (5.1) в виде

$$\mu_r + \frac{1}{\mu_r} = b, \tag{5.2}$$

где μ_r — относительная магнитная проницаемость материала экрана; $b = \frac{9}{2}\ \frac{(H_0/H_i - 1)}{1-(R_1/R_2)^3} + 2$.

Так как обе части равенства (5.2) являются функциями H_i, то построив их на одном графике, можно найти значение H_i, соответствующее точке пересечения кривых, значение μ_r (на основании данных табл. 5.1) и степень экранирования a.

Таблица 5.1

H, А/м	B, Тл(Вб/м^2)	μ/μ_0
50	0,030	477
100	0,095	756
150	0,206	1087
200	0,325	1293
250	0,445	1416
300	0,535	1419
350	0,600	1364
400	0,650	1293
450	0,685	1211
500	0,720	1146
550	0,745	1078
600	0,770	1021
650	0,800	979
700	0,820	932
750	0,840	891
800	0,860	855
850	0,880	824
900	0,900	796
950	0,915	766
1000	0,930	740
1050	0,945	716
1100	0,960	694

Заметим, что при $\mu >> \mu_0$ формулу (5.1) можно упростить, представляя ее в виде

$$\frac{9}{2}\,\frac{H_0/H_i}{1-(R_1/R_2)^3} \approx \frac{1}{\mu_r} + \mu_r .$$

Целесообразно затем сопоставить точность расчетов по (5.1) и по приближенной формуле.

Обработка результатов исследования и оформление отчета

Используя полученные экспериментальные данные, следует рассчитать степень экранирования сферических экранов и свести результаты в таблицу для удобства их сопоставления. В эту таблицу следует внести также результаты теоретического расчета, который включает в себя вычисление степени экранирования магнитного поля. Напряженность H_i необходимо рассчитывать с помощью выражения (5.1) с применением итерационной процедуры, позволяющей учесть насыщение материала экрана.

Для ферромагнитных экранов следует построить зависимости степени экранирования от толщины стенки экрана.

Анализируя полученные результаты, необходимо сопоставить и объяснить зависимость степени экранирования различных экранов от материала экрана, толщины стенки и ориентации плоскости стыка.

Рассмотрим влияние материала экрана, толщины его стенки и величины щели (зазора) на степень экранирования.

Экраны, выполненные из немагнитных материалов (медь, алюминий, латунь), не экранируют при постоянном магнитном поле, тогда как экраны из ферромагнитных материалов характеризуются наибольшим экранирующим эффектом, что связано с их намагниченностью.

Экран с большей толщиной Δ стенки имеет бóльшую степень экранирования.

При расположении щели вдоль линий постоянного внешнего магнитного поля степень экранирования больше, чем при ее расположении поперек линий поля. Действительно, при расположении щели поперек линий поля появляется большое добавочное магнитное сопротивление на пути магнитного потока, что и приводит к уменьшению степени экранирования. Чем шире щель, тем при прочих равных условиях меньше степень экранирования.

Расположенная вдоль линий поля щель не оказывает сопротивления внешнему магнитному потоку, и степень экранирования практически такая же, как и при полном отсутствии щели. При таком расположении щели даже ее некоторое увеличение мало сказывается на степени экранирования. Конечно, это имеет место только до определенной ширины щели.

Интересно отметить, что степень экранирования сферических и цилиндрических экранов имеет одинаковый порядок при одинаковых толщинах стенок, одинаковых расположениях щели и одинаковых габаритах. Этот вывод имеет большое практическое значение: на его основе можно в первом приближении рассчитать степень экранирования цилиндрического экрана по формуле, выведенной для сферического экрана. При этом радиусы R_1 и R_2 должны быть такими, чтобы разность $R_2 - R_1$ была равна толщине стенок цилиндрического экрана и чтобы эквивалентный сферический экран в среднем соответствовал по габаритам цилиндрическому экрану (рис. 5.2).

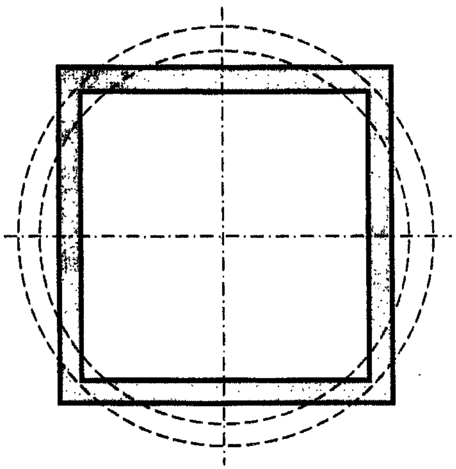


Рис. 5.2

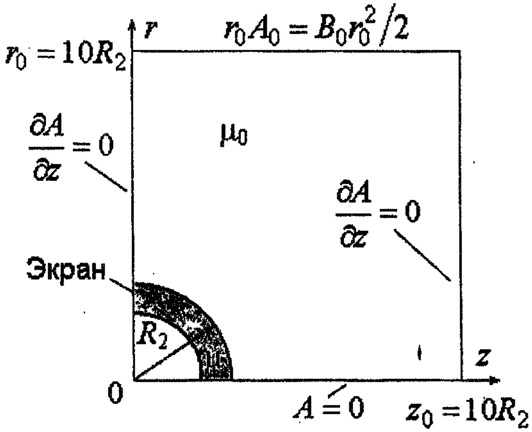


Рис. 5.3

Магнитное поле внутри и вне экранов можно рассчитать численно с помощью программы *Qfield*. Поскольку исследуемые в лаборатории экраны являются телами вращения, численный расчет поля достаточно выполнить только в плоскости их сечения, проходящей через ось вращения.

Так как для исследуемых сферических экранов, помещенных в направленное вдоль оси вращения z однородное магнитное поле, имеется плоскость симметрии $z = 0$ (рис. 5.3), область численного расчета можем ограничить линиями $0z$ и $0r$. Она расположена в первом квадранте плоскости $r0z$. Ограничим область расчета линиями $z_0 = 10R_2$, $r_0 = 10R_2$. На границах области расчета зададим следующие условия. На оси вращения z $A=0$, а на оси r $\partial A/\partial z = 0$, так как касательная к оси r составляющая магнитной индукции равна нулю (линии поля подходят к оси r под прямым углом). На линии $z = z_0 = 10R_2$, как и на оси r, принимаем условие $\partial A/\partial z = 0$.

На линии $r = r_0 = 10R_2$ зададим постоянный векторный магнитный потенциал, значение которого можно определить из следующих соображений. Магнитный поток через круг радиусом $r_0 = 10R_2$ составляет $\Phi = \mu_0 H_0 \pi r_0^2 = B_0 \pi r_0^2$. Этот же магнитный поток можно записать в виде $\Phi = 2\pi r_0 A_0$, где A_0 — векторный магнитный потенциал на линии $r = r_0$. Таким образом, при $r = r_0$ получаем $r_0 A_0 = B_0 r_0^2/2$.

Численные расчеты поля и степени экранирования следует выполнить для всех исследуемых в лаборатории экранов за исключением экранов, щель которых ориентирована вдоль линий поля. Для учета нелинейной характеристики материала ферромагнитного экрана можно воспользоваться его основной кривой намагничивания (см. табл. 5.1).

Размеры элементов и объем расчетов задает преподаватель.

Контрольные вопросы

1. Какую величину в выражении для степени экранирования $a = H_0 / H_i$ определяет H_i: напряженность магнитного поля в стенке экрана или напряженность магнитного поля в воздухе внутри экрана?

2. Влияет ли ориентация щели (вдоль или поперек линий поля) на степень экранирования экрана, находящегося в постоянном магнитном поле?

3. Как следует расположить внутри экрана плоскость контейнера датчика Холла: вдоль или поперек линий магнитной индукции внешнего поля?

4. Щель экрана расположена вдоль линий магнитной индукции. Как влияет ее ширина на степень экранирования при постоянном магнитном поле?

5. Как влияет толщина стенки экрана на степень экранирования?

РАЗДЕЛ II

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

В переменном электромагнитном поле в проводящей среде проявляются его обе составляющие: электрическая и магнитная. При исследовании и анализе таких полей необходимо пользоваться полной системой уравнений электромагнитного поля и совокупностью граничных и начальных условий. Хотя при рассматриваемых частотах изменения поля допущение пренебрежения токами электрического смещения в проводящей среде и окружающем ее диэлектрике упрощает его анализ, исследование в сравнении с постоянными электрическими и магнитными полями становится существенно более трудоемким. Анализ поля, изменяющегося по гармоническому закону в неподвижных проводниках, требует в общем случае использования двух взаимосвязанных потенциалов: векторного магнитного и скалярного электрического. Причем оба потенциала являются комплексными, требующими определения их амплитуды и фазы.

Переменный электрический ток распределяется неравномерно по сечению проводов, причем плотность тока имеет наибольшее значение на поверхности провода и убывает по мере удаления от поверхности вглубь провода, т. е. имеет место явление поверхностного эффекта. При расположении нескольких проводов в непосредственной близости друг от друга наблюдается так называемый эффект близости, оказывающий влияние на распределение плотности тока в проводах.

Аналитическое решение уравнений электромагнитного поля в проводящей среде возможно в простых случаях распространения в ней плоской волны, распределения переменного тока в плоских и цилиндрических проводах или переменного магнитного поля в плоских ферромагнитных листах. В этих случаях могут быть решены уравнения, записанные относительно напряженности электрического или магнитного поля.

Целью выполнения работ раздела является изучение характера распространения электромагнитного поля в проводящих телах, влияния электрических и магнитных свойств проводников и окружающих их проводящих ферромагнитных тел на распределение электрического тока в токонесущих шинах и ферромагнитных проводах.

В работах этого раздела экспериментальным и расчетным путями изучается неравномерность распределения электрического тока и магнитного поля в проводах и шинах, электромагнитных экранах и конструктивных элементах электротехнических устройств.

Работа 6

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКРАНИРОВАНИЯ В ПЕРЕМЕННОМ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Цель и задачи, решаемые в работе

Целью работы являются: экспериментальное исследование и анализ зависимости экранирующего действия составных экранов от их формы и размеров, свойств материала, из которого они изготовлены, а также от наличия и расположения щелей (стыков) между отдельными частями экранов.

В задачи работы входит экспериментальное исследование и расчет экранирующих свойств сферических и цилиндрических экранов, выполненных из ферромагнитных и неферромагнитных материалов при различной толщине стенки в переменном электромагнитном поле при частоте 50 Гц и при других частотах изменения поля [1, 2, 6, 22 – 24].

Описание установки и методики проведения эксперимента

Магнитное поле, в которое помещаются исследуемые экраны, создается в воздушном зазоре электромагнита (ЭМ) (рис. 6.1), собранного из трансформаторной листовой стали с целью уменьшения потерь в сердечнике при питании обмоток переменным током. Воздушный зазор поддерживается постоянным: $h_0 = 13{,}5$ см.

Обмотка электромагнита состоит из восьми секций с одинаковым числом витков ($w_1 = 175$), зажимы которых выведены на общую изолирующую колодку, что позволяет переключать их с помощью перемычек.

Секции обмотки электромагнита следует соединить параллельно, т.е. перемычки должны быть расположены вдоль платы.

В данной работе используется то же устройство для расположения экранов в воздушном зазоре, что и в работе 5 при исследовании экранирования в постоянном магнитном поле. Его описание приведено в работе 5. Там же приведены размеры экранов.

При экранировании в переменном электромагнитном поле для измерения магнитной индукции используется измерительная катушка (ИК)(см. рис. 6.1). Для правильного и надежного ориентирования катушки при измерении магнитного поля внутри экранов она опирается на немагнитные изолирующие выступы.

Экран с измерительной катушкой внутри укладывается в соответствующую ему подставку, вместе с которой зажимается в фиксаторе. Фиксатор с экраном и измерительной катушкой помещается в воздушный зазор магнита, а выведенные наружу концы обмотки измерительной катушки подключаются к переходным клеммам, сигнал с которых поступает на вход многопредельного вольтметра.

В опытах используется одна измерительная катушка. С ее помощью можно измерить индукцию внутри каждого экрана, а также индукцию внешнего магнитного поля (без экрана). Необходимо следить за тем, чтобы во всех опытах плоскость катушки была расположена перпендикулярно линиям индукции измеряемого магнитного поля.

В процессе работы необходимо экспериментально определить степень экранирования для всех сферических экранов при различной ориентации плоскости стыка по отношению к направлению внешнего магнитного поля, а для цилиндрических экранов — только при расположении плоскости стыка поперек поля. Кроме того, для ферромагнитных экранов с толщиной стенки

$\Delta = 5$ мм необходимо определить степень экранирования при наличии между половинками экрана немагнитных изолирующих прокладок.

Экранирующее действие экрана зависит не только от толщины его стенок, но и от магнитной проницаемости материала экрана. Поэтому все опыты с ферромагнитными экранами, магнитная проницаемость которых зависит от интенсивности магнитного поля, необходимо проводить при одной и той же напряженности внешнего магнитного поля H_0, т.е. при одном и том же значении тока в обмотке электромагнита.

Для исследования экранов в электромагнитном поле к обмотке электромагнита подводится напряжение от источника синусоидального напряжения, которое регулируется с помощью автотрансформатора (АТР)(см. рис.6.1). В этом случае используется силовой блок лабораторной установки «Исследование на переменном токе».

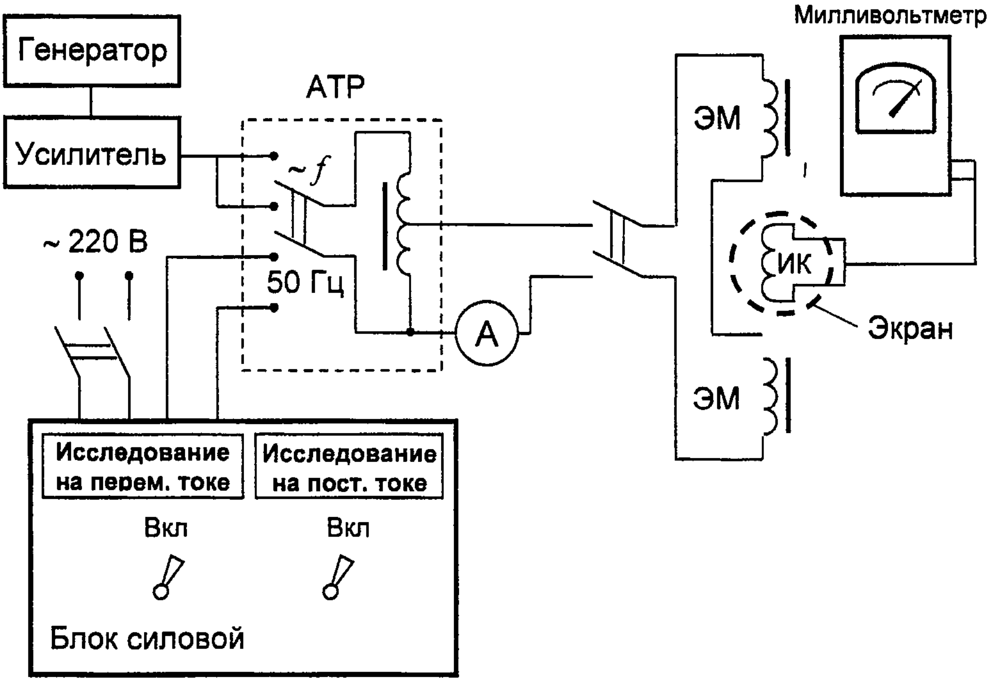


Рис. 6.1

Исследования на повышенных частотах ($200 \le f \le 2000$ Гц) выполняют для нескольких экранов (по указанию преподавателя), при этом питание ЭМ осуществляется от генератора переменной частоты.

При исследовании свойств экранов при переменной частоте следует получить зависимость сигнала с измерительной катушки в виде функции частоты питающего напряжения для каждого исследуемого экрана. Опыты выполняют для различных ориентаций стыка (вдоль и поперек линий магнитной индукции внешнего магнитного поля).

Программа выполнения работы

1. Соединить секции обмотки электромагнита параллельно и, подключив их к источнику переменного напряжения частотой 50 Гц, установить заданный преподавателем ток. Измерить магнитную индукцию между полюсами электромагнита вначале при отсутствии экранов, а затем в области экранирования для всех имеющихся в лаборатории сферических и цилиндрических экранов. Для сферических экранов выполнить измерения при положениях щели как вдоль, так и поперек линий внешнего поля при наличии и отсутствии картонных прокладок в щели между половинами каждого экрана.

2. Получить частотную зависимость степени экранирования для каждого из экранов. Количество и вид изучаемых экранов, а также диапазон частот напряжения и ориентацию щели относительно линий поля задает преподаватель.

Обработка результатов исследования и оформление отчета

Используя полученные экспериментальные данные, следует свести результаты в таблицу для удобства их сравнения.

При анализе полученных результатов, необходимо объяснить зависимость степени экранирования различных экранов от материала экрана, толщины его стенки, ориентации плоскости стыка и частоты внешнего электромагнитного поля.

Для ферромагнитных экранов следует построить зависимости степени экранирования от толщины стенки экрана. Аналогичные зависимости на основе экспериментальных данных необходимо построить для частоты 50 Гц. Для экранов, исследованных при различных частотах, следует построить зависимости степени экранирования от частоты внешнего поля.

Изучаемые в лаборатории экраны (сферические и цилиндрические) являются телами вращения. Поэтому численный расчет поля с помощью программы *Qfield* достаточно выполнить только в плоскости их сечения, проходящей через ось вращения.

Область расчета и условия для векторного магнитного потенциала на ее границах совпадают с принятыми в работе 5 при численном решении аналогичной задачи экранирования в постоянном магнитном поле.

Численные расчеты поля и степени экранирования можно выполнить при переменном внешнем однородном магнитном поле для всех исследуемых в лаборатории экранов за исключением экранов, щель которых ориентирована вдоль линий поля.

Объем расчетов задает преподаватель.

Рассмотрим влияние материала экрана, толщины его стенки и величины щели на степень экранирования.

Увеличение толщины стенок ферромагнитных экранов ведет к увеличению степени экранирования. Однако в переменном поле экранирующее действие определяется не только намагниченностью экрана, но также макроскопическими токами, возникающими в теле экрана. Теперь расположение щели вдоль линий магнитного поля весьма вредно, так как электрическое сопротивление стыка между обеими половинами экрана получается столь большим, что ток практически не переходит через место стыка и вынужден возвращаться около внутренних поверхностей стенок экрана. Вследствие этого экранирующее действие макроскопических токов практически сводится к нулю. На рис. 6.2 изображены линии тока в обеих половинах сферического экрана в этом случае. «Крестиками» показано направление вектора $\boldsymbol{B}$ магнитной индукции внешнего электромагнитного поля. Результат получается одинаковым как при наличии изолирующих прокладок, так и при отсутствии их, так как сопротивление контакта в месте прикосновения обеих половин экрана даже при защищенных соприкасающихся поверхностях оказывается во много раз больше сопротивления возврата тока по слою металла около внутренних поверхностей стенок экрана.

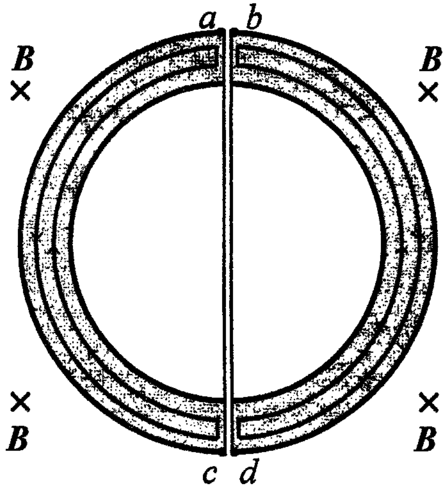


Рис. 6.2

Расположение щелей поперек линий магнитного поля не препятствует развитию макроскопических токов в стенках экрана. Поэтому степень экранирования при таком расположении щели оказывается при переменном поле больше, чем при постоянном поле.

Экранирующее действие экранов из немагнитных материалов (например, латуни) при переменном поле определяется только макроскопическими токами. Расположение щели поперек линий магнитной индукции не препятствует развитию макроскопических токов в стенках экрана, и степень экранирования может быть практически такой же, как и при отсутствии щели. Поэтому узкая щель, расположенная поперек линий магнитного поля, вообще не оказывает никакого вредного действия. Наоборот, щель, расположенная вдоль линий магнитного поля, практически сводит к нулю экранирующий эффект. Это обстоятельство следует иметь в виду при конструировании экранов в высокочастотных устройствах.

Явление экранирования при переменном поле можно объяснить, рассматривая процесс распространения электромагнитных волн в стенках и щелях, образуемых в месте стыка частей экрана. В идеальном случае — при полном отсутствии щелей — электромагнитное поле может проникнуть в полость экрана только сквозь толщу его стенок. Но, как известно, периодические электромагнитные волны быстро затухают при распространении в проводящей среде. Это явление носит название поверхностного эффекта, так как электромагнитная волна быстро затухает по мере удаления вглубь среды от поверхности, сквозь которую она проникает в проводящую среду. Если толщина стенок экрана превосходит эквивалентную глубину проникновения электрического тока или магнитного потока в тело экрана, то достигается практически почти полное экранирование. Эквивалентная глубина проникновения при $\mu = \text{const}$

$$b = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \gamma}},$$

где f — частота; μ и γ — магнитная проницаемость и удельная электрическая проводимость материала стенок экрана.

Роль щелей можно пояснить следующим образом. Пусть щель расположена поперек линий магнитного поля. В этом случае линии напряженности электрического поля касательны к краям щели. Поэтому вектор напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ одинаков в щели и смежных с ней точках металлических стенок экрана. Если магнитная проницаемость μ материала стенок экрана равна магнитной проницаемости воздуха в щели, т.е. если $\mu = \mu_0$, то и векторы напряженности магнитного поля в щели и стенках около щели будут также равны между собой. Поэтому и значение вектора Пойнтинга $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{EH}]$ в щели будет тем же, что и на поверхности стенок около щели, и при небольшой ширине щели энергия, проникающая в единицу времени в полость экрана через щель, будет малой. Такая щель не уменьшает степень экранирования.

Иначе обстоит дело при таком же расположении щели для ферромагнитного экрана, т.е. при $\mu >> \mu_0$. Линии магнитной индукции проходят перпендикулярно щели, и, следовательно, равны между собой в щели и стенках значения вектора магнитной индукции $\boldsymbol{B}$. Напряженность магнитного поля в щели во много раз превосходит напряженность магнитного поля в стенках экрана. Поэтому и значение вектора Пойнтинга $\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{EH}]$ в щели во много раз больше, чем на поверхности стенок. Это значит, что сквозь щель при любых заметных ее размерах устремляется в полость экрана поток электромагнитной энергии. Но следует подчеркнуть, что мощность этого потока энергии зависит от ширины щели, и при весьма узких щелях она должна изменяться пропорционально ширине щели. Скачок напряженности магнитного поля при переходе из стенки в пространство щели определяется только скачком магнитной проницаемости и не зависит от ширины щели. То же относится и к значению вектора Пойнтинга, т.е. к значению плотности мощности потока электромагнитной энергии, проникающей сквозь стенки экрана и сквозь щель. Но величина самого потока энергии, проходящего через щель, будет расти с увеличением щели. Таким образом, в ферромагнитном экране влияние щели, расположенной поперек линий магнитного поля, можно уменьшать, доводя размеры щели до возможного ее минимума путем шлифования соприкасающихся поверхностей.

Рассмотрим теперь случай, когда щель расположена вдоль линий магнитного поля и, следовательно, поперек линий напряженности электрического поля и линий электрического тока. Так как при этом линии магнитного поля касательны к краям щели, то напряженность магнитного поля одинакова в щели и стенках экрана около щели независимо от свойств материала стенок. Напряженность электрического поля в щели оказывается во много раз больше, чем в стенках экрана. Дело в том, что, как отмечалось ранее, сопротивление контакта в щели весьма велико по сравнению с сопротивлением пути тока по стенкам экрана. Ток почти совсем не переходит через место контакта и вынужден возвращаться вдоль внутренних поверхностей стенок экрана (см. рис. 6.2, на котором дан разрез экрана в плоскости, перпендикулярной к линиям магнитной индукции). Сопротивление контакта изменяется приблизительно обратно пропорционально общей силе давления на всю поверхность соприкосновения контакта. Расчет показывает, что для исследуемых в лаборатории экранов сопротивление контакта даже при хорошо зачищенных соприкасающихся поверхностях может стать сравнимым с сопротивлением пути тока вдоль стенок только при силах, сжимающих обе половины экрана, порядка нескольких десятков килоньютонов. При тех же силах, с которыми мы имеем дело в обычных условиях, можно считать, что сопротивление контакта бесконечно велико. Между точками a и b щели (см. рис.6.2) возникает напряжение U_{ab}, которое определяется величиной падения напряжения при прохождении тока вдоль внутренней поверхности стенки от точки a до точки c и ЭДС, индуцируемой потоком Ф, проникающим в полость экрана. Такое же напряжение появляется между точками d и c.

Напряжение U_{ab} при узких щелях практически не зависит от ширины щели. Оно равно интегралу напряженности электрического поля в пределах от a до b по пути поперек щели, и, следовательно, чем уже щель, тем больше в ней напряженность электрического поля и соответственно значение вектора Пойнтинга. Приблизительно получается, что плотность мощности потока энергии в щели обратно пропорциональна ширине щели, а мощность всего потока сквозь всю щель не зависит от ширины щели. Поэтому оказывается, что при узких щелях, расположенных вдоль линий магнитного поля, степень экранирования не зависит от ширины щели.

При этом для экрана из неферромагнитного материала получается совершенно ничтожный экранирующий эффект. Для экрана из ферромагнитного материала сохраняется экранирование, обусловленное только намагничиванием стенок экрана, т.е. действием элементарных токов в теле экрана. Это действие аналогично тому, которое наблюдается и при постоянном токе. Разница лишь в том, что при постоянном поле намагничивается весь экран по всей толще своих стенок, а при переменном поле при достаточно резком проявлении поверхностного эффекта намагничиваются только небольшие слои металла, прилегающие к наружным и внутренним поверхностям стенок. Поэтому если толщина стенок превышает двойную глубину проникновения магнитного поля в стенки, то при дальнейшем увеличении толщины стенок при переменном поле степень экранирования практически не изменяется.

Контрольные вопросы

1. Какую величину в выражении степени экранирования $a = H_0/H_i$ определяет H_i: напряженность магнитного поля в стенке экрана или напряженность магнитного поля в воздухе внутри экрана?

2. Как изменяется степень экранирования при увеличении частоты внешнего магнитного поля?

3. Влияет ли ориентация щели (вдоль или поперек линий поля) на степень экранирования экрана, находящегося в переменном магнитном поле?

4. Как следует расположить плоскую измерительную катушку внутри экрана: вдоль или поперек линий поля?

5. Щель экрана расположена вдоль линий поля. Как влияет ее ширина на степень эканирования (увеличивает или уменьшает ее) при переменном магнитном поле?

6. На рис. 6.2 показаны линии вихревого тока в стенках экрана. Каково направление внешнего магнитного поля?

7. При каких условиях эксперимента толщина стенки экрана мало влияет на степень экранирования экрана?

8. Экран с щелью расположен в переменном поле. При какой ориентации щели относительно внешнего поля вектор Пойнтинга в ней имеет большее значение?

Работа 7

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОКА В ПРОВОДНИКАХ, ЗАЛОЖЕННЫХ В ПАЗ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАШИНЫ

Цели и задачи, решаемые в работе

Целями работы являются: исследование опытным путем распределения переменного тока в проводниках, находящихся в пазу электрической машины, и выяснение причин, вызывающих увеличение активного сопротивления таких проводников при переменном токе по сравнению с их сопротивлением при постоянном токе; ознакомление с аналитическим и численным расчетом распределения переменного тока в таких проводниках и их активного сопротивления.

В задачи работы входит нахождение распределения тока по высоте одного проводника в открытом пазу электрической машины, двух последовательно соединенных проводников, а также двух проводников при пропускании тока: *а*) только по нижнему проводу; *б*) только по верхнему проводу [2, 6, 18, 19].

Описание установки и методики проведения эксперимента

Исследование производится на специально изготовленной модели паза электрической машины. Модель изображена на рис. 7.1. Исследуется вариант открытого паза. Модель собрана из листов трансформаторной стали, стянутых четырьмя изолированными болтами между двумя железными пластинами. Внутри паза расположены проводники прямоугольного сечения. Проводники изготовлены из латуни, а не из меди, так как удельная проводимость латуни меньше удельной проводимости меди.

В один из пазов помещен проводник высотой h (рис. 7.2, *а*), немного меньшей, чем высота паза. В другом пазу расположены два одинаковых проводника, которые могут быть соединенными либо изолированными друг от друга (рис. 7.2, *б*), что определяется положением двух переключателей (см. рис. 7.1).

Общая высота двух проводников в пазу равна высоте одного проводника в первом варианте. В первом варианте ток проходит по одному проводнику, во втором — один и тот же ток проходит последовательно по обоим проводникам.

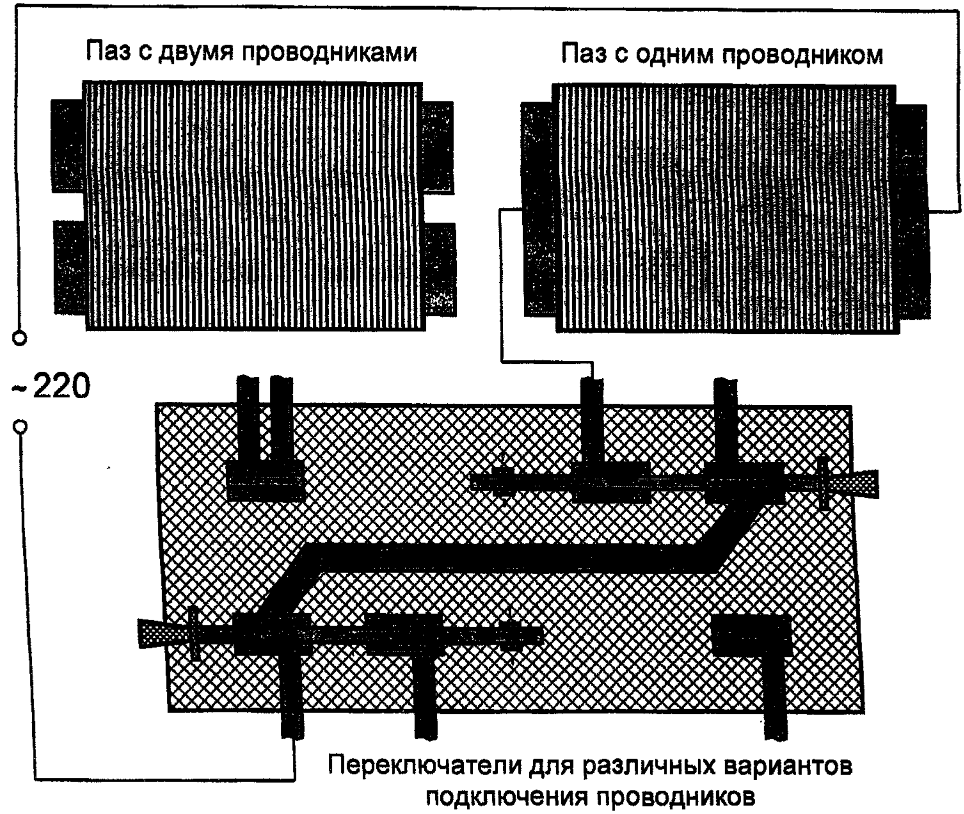


Рис.7.1

Проводники присоединяют к трансформатору, который описан в работе 11.

Для измерения распределения плотности тока по поверхности заложенных в паз проводников используется метод, изложенный в работе 11.

Следовательно, и устройство для измерения комплексной амплитуды плотности тока в принципе не отличается от соответствующего устройства, описанного в работе 11. Оно лишь иначе

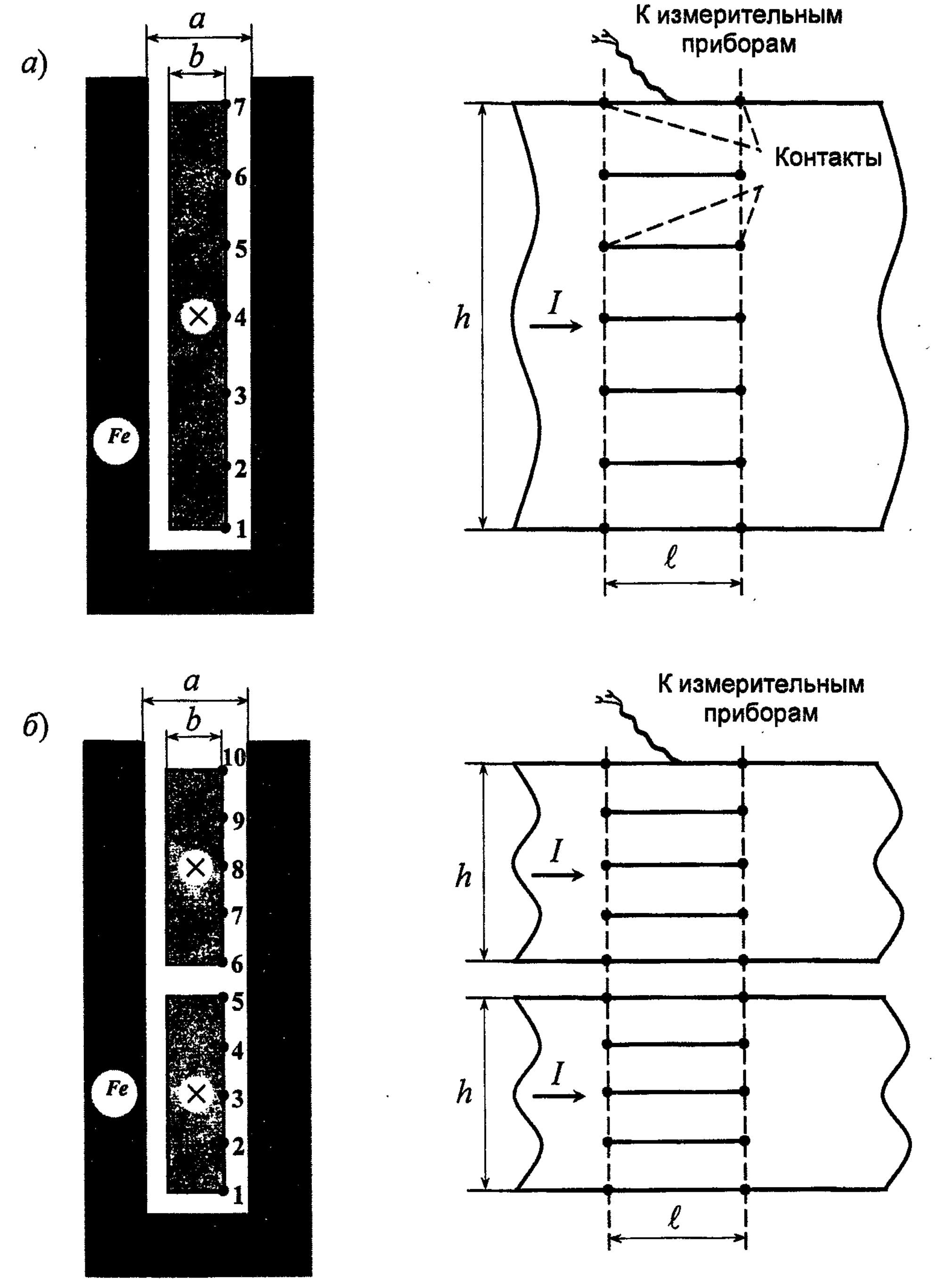

а)
a
b
7
6
5
4
3
2
1
Fe
К измерительным приборам
Контакты
h
I
ℓ
б)
a
b
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
Fe
К измерительным приборам
h
I
h
I
ℓ

Рис. 7.2

оформлено конструктивно. Для этого на одной из боковых поверхностей проводников на разной высоте вклепаны несколько пар медных контактов, к которым припаяны соединительные провода, выведенные бифиляром за пределы паза к измерительным приборам. Расстояние ℓ между контактами равно 10 см.

По схеме, используемой в работе 11 (см. рис. 11.4), с помощью вольтметра и фазометра измеряют комплекс действующего напряжения $\dot{U}$ между контактами на поверхности проводника, а именно $\dot{U}=Ue^{j\psi_u}$, где U — показание вольтметра, $\psi_u=\alpha-270°$ (α — показание фазометра).

Программа выполнения работы

1. Включить и прогреть в соответствии с инструкциями электронные вольтметр и фазометр. Прогреть также до достижения установившейся или по крайней мере медленно изменяющейся температуры проводники в пазу.

2. Установить переключатели (см. рис. 7.1) в положение, когда ток I = 600 А проходит через один проводник в пазу. Измерить распределение напряженности электрического поля по высоте проводника.

3. Соединить оба проводника последовательно и пропустить по ним ток I = 300 А. Выполнить аналогичные п. 2 измерения.

4. Подключить проводники так, чтобы ток I = 300 А протекал только по нижнему проводнику, и измерить распределение напряженности электрического поля по высоте обоих проводников. Затем подключить проводники так, чтобы ток I = 300 А протекал только по верхнему проводнику, и вновь измерить распределение напряженности электрического поля по высоте обоих проводников.

Основы теории и расчетные соотношения

Рассмотрим случай, когда в пазу один под другим размещены n проводников. Расположим оси координат так, как это показано на рис. 7.3, направляя ось $0x$ от наблюдателя перпендикулярно к плоскости рисунка. Начало координат совместим с верхней поверхностью p-го проводника. Счет проводников будем вести от дна паза. Обозначим a ширину паза, b и h — ширину и высоту одного проводника. Заметим, что результаты анализа можно применить и к случаю, когда в каждом горизонтальном слое лежит не один, а несколько проводников; при этом b есть суммарная ширина проводников, лежащих в одном горизонтальном слое.

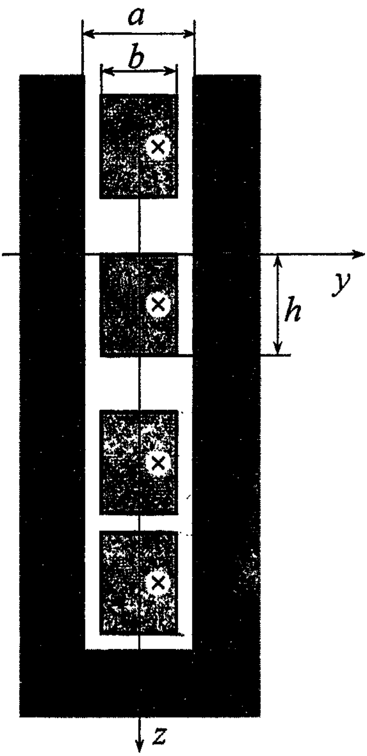


Рис. 7.3

Выделим поверхность площадью $a\ell$, причем ℓ — длина участка вдоль оси $0x$, на котором производится измерение падения напряжения между соответствующими контактами (см. рис. 7.2). Сквозь эту поверхность электромагнитная волна проходит вглубь паза. Нормальные к ней составляющие вектора Пойнтинга определяются составляющими вектора напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ по оси x и составляющими вектора напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H}$.

Комплекс мощности потока электромагнитной энергии, проникающей в p-й проводник, выражается в виде

$$\dot{S}_p = a\ell\left[\left(\frac{\dot{E}_m}{\sqrt{2}}\frac{\overset{*}{H}_m}{\sqrt{2}}\right)_{z=0} - \left(\frac{\dot{E}_m}{\sqrt{2}}\frac{\overset{*}{H}_m}{\sqrt{2}}\right)_{z=h}\right],$$

причем $\dot{E}_m$ — комплексная амплитуда напряженности электрического поля; $\overset{*}{H}_m$ — комплекс, сопряженный с комплексной амплитудой напряженности магнитного поля $\dot{H}_m$.

Заметим, что

$$\left(\ell\frac{\dot{E}_m}{\sqrt{2}}\right)_{z=0} = \dot{U}_{0p}; \quad \left(\ell\frac{\dot{E}_m}{\sqrt{2}}\right)_{z=h} = \dot{U}_{hp};$$

$$\left(a\frac{\overset{*}{H}_m}{\sqrt{2}}\right)_{z=0} = \overset{*}{I}p; \quad \left(a\frac{\overset{*}{H}_m}{\sqrt{2}}\right)_{z=h} = \overset{*}{I}(p-1),$$

где $\dot{U}_{0p}$ — комплекс действующего значения напряжения на длине ℓ у верхнего края p-го проводника; $\dot{U}_{hp}$ — то же у нижнего края p-го проводника; $\overset{*}{I}$ — комплекс, сопряженный с комплексом $\dot{I}$ действующего значения тока в одном проводнике.

Последние два равенства вытекают из закона полного тока. Таким образом,

$$\dot{S}_p = \overset{*}{I}\left[\dot{U}_{0p}p - \dot{U}_{hp}(p-1)\right];$$

$$\dot{S} = \sum_{p=1}^{p=n}\dot{S}_p = \overset{*}{I}\sum_{p=1}^{p=n}\left[\dot{U}_{0p}p - \dot{U}_{hp}(p-1)\right].$$

Для одного проводника в пазу ($n = 1$)

$$\dot{S} = \dot{S}_{p=1} = \overset{*}{I}\left[\dot{U}_{01} - 0\right] = \overset{*}{I}\dot{U}_{01} \text{ и } Z = r + jx = \dot{S}/I^2 = \dot{S}/\dot{I}\cdot\overset{*}{I} = \dot{U}_{01}/\dot{I}.$$

Для двух проводников ($n = 2$)

$$\dot{S} = \dot{S}_{p=1} + \dot{S}_{p=2} = \overset{*}{I}\left[\dot{U}_{01} - 0 + 2\dot{U}_{02} - \dot{U}_{h2}\right]$$

или

$$Z = r + jx = \frac{\dot{S}}{I^2} = \frac{\dot{S}}{\dot{I}\overset{*}{I}} = \frac{\dot{U}_{01} + 2\dot{U}_{02} - \dot{U}_{h2}}{\dot{I}} =$$

$$= \frac{\dot{U}_{01}}{\dot{I}} + \frac{2\dot{U}_{02}}{\dot{I}} - \frac{\dot{U}_{h2}}{\dot{I}}.$$

Здесь r — активное сопротивление; x — индуктивное сопротивление двух проводников, включенных последовательно и имеющих каждый длину ℓ.

Полученное таким образом реактивное сопротивление учитывает только потоки, линии которых пронизывают проводники, находящиеся в пазу. Не учитывается дополнительное реактивное сопротивление, определяемое потоками, линии которых проходят в пазу между проводниками, а также выше проводников.

Если необходимо получить сопротивления проводников в пределах всей длины L паза, то найденные сопротивления следует умножить на отношение L/ℓ.

Таким образом, для определения величин r и x необходимо найти отношения комплексных напряжений у верхних и нижних краев всех проводников к комплексному току.

Распределение тока в проводнике можно найти расчетным путем, пользуясь формулой

$$\frac{\dot{J}_m}{\dot{J}_{m\text{ср}}} = \frac{\alpha' h}{\text{sh}\,\alpha' h}[p\,\text{ch}\,\alpha'(z-h) - (p-1)\text{ch}\,\alpha' z],$$

где p — номер проводника, считая от дна паза; h — высота одного проводника; $\alpha' = (1+j)k'$, причем $k' = \sqrt{\dfrac{b\omega\mu\gamma}{2a}}$ (b и a имеют прежний смысл; μ и γ — магнитная проницаемость и удельная проводимость материала проводника; ω — угловая частота тока); $\dot{J}_{m\text{ср}} = \dot{I}_m/bh$ — средняя по высоте проводника комплексная амплитуда плотности тока.

Для одного проводника $p = 1$. Для двух проводников $p = 1$, $p = 2$.

Начало координат при выводе формулы располагалось для каждого проводника на верхней его границе (см. рис. 7.3).

Активное сопротивление r проводников при переменном токе вычисляется по формуле

$$r = r_0\left[\phi(k'h) + \frac{n^2-1}{3}\psi(k'h)\right],$$

где r_0 — сопротивление проводников при постоянном токе; n — общее число проводников в пазу; входящие сюда функции:

$$\varphi(k'h) = k'h\frac{\operatorname{sh}2k'h + \sin 2k'h}{\operatorname{ch}2k'h - \cos 2k'h};$$

$$\psi(k'h) = 2k'h\frac{\operatorname{sh}k'h - \sin k'h}{\operatorname{ch}k'h + \cos 2k'h}.$$

Эти зависимости представлены на графике (рис. 7.4). При вычислениях следует подставлять в формулы то значение γ, которое соответствует температуре проводника при проведении соответствующего опыта.

Отметим, что распределение плотности тока по высоте проводников зависит от того, имеются ли в пазу проводники, не присоединенные к источнику.

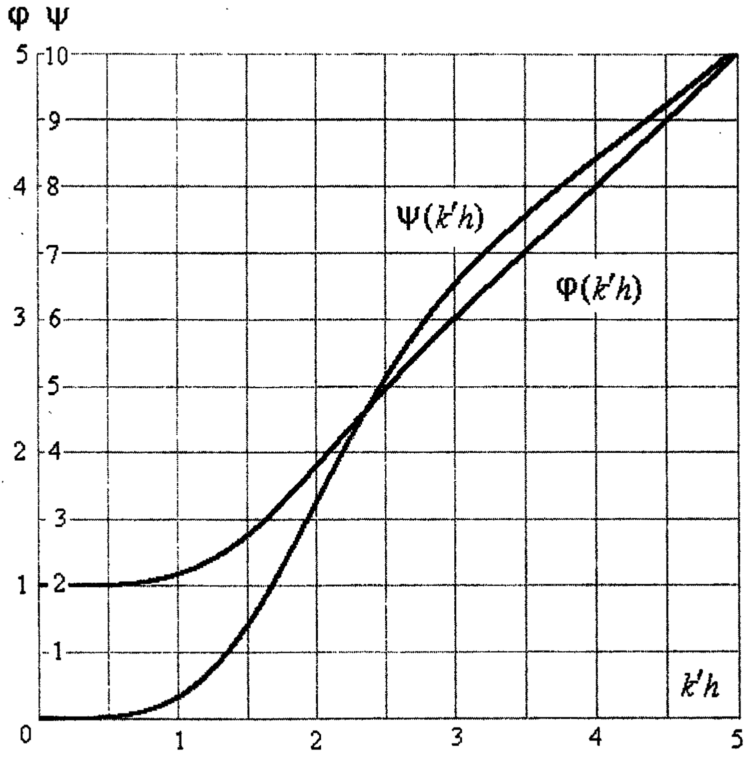


Рис. 7.4

Рассмотрим вариант размещения двух проводников в пазу. Когда ток проходит только по одному нижнему проводнику, он создает переменное магнитное поле, линии которого пронизывают верхний проводник. Это переменное поле возбуждает в верхнем проводнике вихревые токи. Когда ток проходит только по одному верхнему проводнику, то его магнитный поток почти весь проходит по железу ниже дна паза. Линии магнитной индукции этого потока охватывают весь нижний проводник. Следовательно, этот поток индуцирует на всех нитях нижнего проводника одинаковые ЭДС, и вихревые токи в нижнем проводнике практически не возникают.

Оба этих случая интересны тем, что получаемые в них картины распределения тока, будучи наложенными друг на друга, дают картину, имеющую место при одновременном прохождении тока по обоим проводникам.

Обработка результатов исследования и оформление отчета

По результатам измерений и расчетов необходимо построить зависимости $J = f(z)$, характеризующие изменение плотности тока по высоте проводников. Комплекс плотности тока на соответствующей высоте вычисляется по комплексу напряжения по формуле

$$\dot{J} = \gamma \dot{E} = \gamma \frac{\dot{U}}{l},$$

где γ — удельная проводимость материала провода.

Для получения наглядного представления об изменении фазы плотности тока с ростом z на векторной диаграмме строят векторы плотности тока для всех точек, в которых производилось измерение. Эти диаграммы следует построить для каждого проводника отдельно рядом с соответствующими кривыми $J = f(z)$, обозначив на них цифрами точки, к которым относятся отмеченные теми же цифрами векторы.

Расчетные и опытные кривые и диаграммы необходимо сравнить между собой и дать им объяснение.

Построения следует выполнить для всех исследованных случаев: при одном проводнике в пазу; при двух проводниках в пазу и наличии тока в обоих проводниках; при двух проводниках в пазу, но наличии тока сначала только в нижнем, а затем только в верхнем проводнике. Характер этих зависимостей для двух проводников в пазу показан на рис. 7.5.

Векторы плотности тока, полученные в двух последних случаях, необходимо сложить геометрически — сумма должна дать диаграмму, соответствующую второму случаю.

Для двух основных исследованных случаев (один и два проводника с токами в пазу) необходимо определить активные сопротивления на основании опытных данных и по аналитическим формулам. Расчет следует выполнить и для большего числа проводников с токами в пазу ($n = 3, \ldots, 10$) при той же их общей высоте с целью выявления числа n, при котором наступает заметное снижение отношения r/r_0.

Результаты расчетов и опытов следует сопоставить с данными численного расчета по программе *Qfield*.

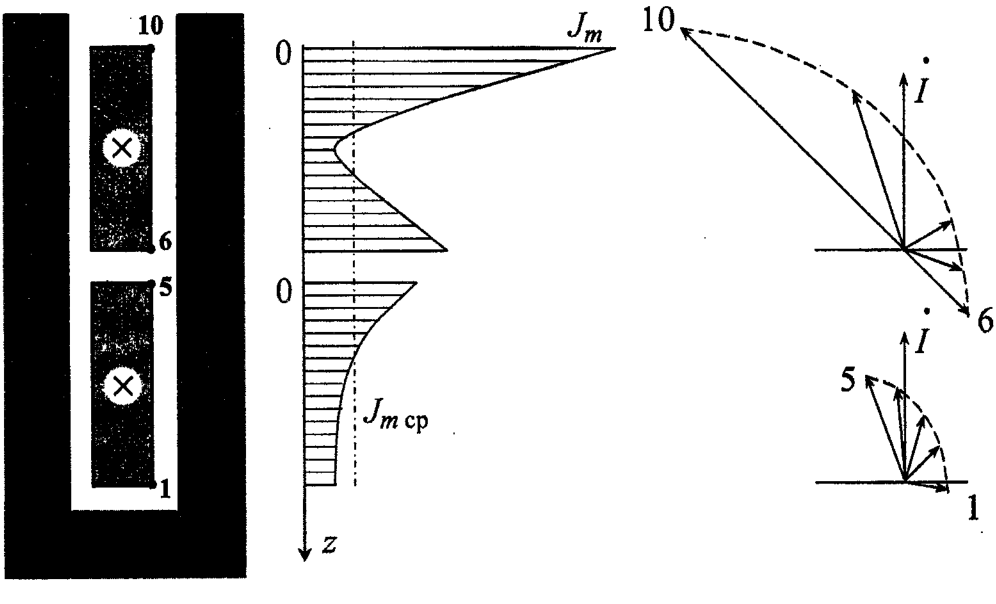


Рис. 7.5

При численном расчете поля с помощью прорамммы *Qfield* учитывается наличие плоскости геометрической симметрии, следом которой в плоскости (рис. 7.6) является ось y. Эта линия является также линией симметрии векторного магнитного потенциала. Поэтому можем задать на ней условие $\partial A/\partial x = 0$ и рассматривать ее как одну из границ области расчета.

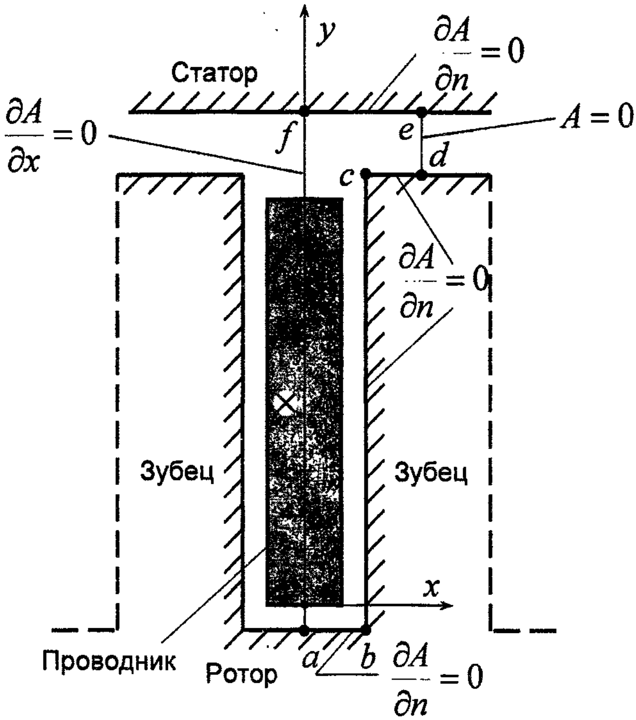


Рис. 7.6

Принимая допущение о том, что материал ротора и статора обладает идеальными магнитными свойствами и что линии магнитной индукции нормальны к поверхностям ротора и статора, получаем, что на этих поверхностях выполняется условие $\partial A/\partial n = 0$, где производная вычисляется в направлении нормали к соответствующей поверхности. Таким образом, на линиях *ab*, *bc*, *cd*, *ef* можно задать условие $\partial A/\partial n = 0$. Допуская также, что линия магнитной индукции проходит в воздухе вдоль линии *de*, являющейся серединой зубца ротора, получаем на ней условие A = const. Принимаем значение этой постоянной $A = 0$.

Как и в опыте, следует выполнить расчеты поля для следующих вариантов.

1. В пазу находится одна почти полностью заполняющая его шина с током 600 А.

2. В пазу находятся две соединенные последовательно шины, по которым течет ток 300 А.

3. В пазу находятся две изолированные шины, по одной из которых течет ток 300 А. Расчет выполнить для двух случаев: *а*) ток течет по верхней шине; *б*) ток течет по нижней шине.

Объем расчетов может быть по указанию преподавателя увеличен при изучении влияния частоты тока на его распределение по сечению шин, при введении слоя изоляции шин, при учете конечной магнитной проницаемости материала зубцов, охватывающих шины, при замене шин совокупностью проводов малого поперечного сечения.

Необходимые размеры и объем расчетов задает преподаватель.

Контрольные вопросы

1. По проводнику, лежащему в пазу электрической машины, пропускают: *а*) постоянный, *б*) переменный ток. В каком случае и по каким причинам ток по высоте проводника может быть распределен неравномерно?

2. В пазу электрической машины уложены по его высоте два проводника. Почему при пропускании тока только по верхнему проводнику ток в нижнем проводнике практически отсутствует? Почему при пропускании тока только по нижнему проводнику в верхнем проводнике протекает ток? Чему в этом случае равен полный ток верхнего проводника?

3. По латунному проводнику, лежащему в пазу электрической машины, пропускают переменный ток. Будет ли изменяться

распределение тока по высоте проводника при изменении частоты тока? Изменяется ли при этом активное сопротивление проводника? Изменится ли распределение тока по высоте проводника при замене его материала медью?

4. При измерении напряжений измерительные провода укладывают вдоль проводников и подводят витыми к измерительным приборам. Почему для нахождения параметров проводов следует делать именно так?

Работа 8

ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В СИСТЕМЕ КОНТУРОВ С ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ ТОКАМИ

Цель и задачи, решаемые в работе

Целью работы являются: ознакомление с методами измерения и расчета электромагнитных сил, действующих в системе контуров с электрическими токами, а также исследование влияния на эти силы ферромагнитных и проводящих массивных тел, расположенных вблизи контуров.

В задачи работы входит нахождение опытным и расчетным путем электромагнитной силы, действующей на катушки, при пропускании тока через одну или обе катушки, а также индуктивности и взаимной индуктивности круглых катушек при различных расстояниях между ними [1, 6, 7, 16, 18, 20, 21, 26].

Описание установки и методики проведения экспериментов

В лаборатории используют две идентичные круглые коаксиальные катушки (рис. 8.1) с размерами: R_1 = 4,4 см; R_2 = 7,9 см; a = 2,5 см; число витков $w_1 = w_2 = 510$.

Силы взаимодействия измеряют с помощью лабораторных весов ВЛТК-5, обеспечивающих быстрое и достаточно точное взвешивание. Исследуемая сила равна разности отсчетов по шкале весов соответственно при наличии и отсутствии тока в катушках. Установка позволяет перемещать катушки одну относительно другой в широких пределах; ее схематический вид показан на рис. 8.2. Катушки расположены на достаточном удалении от стальной штанги, по которой перемещается кронштейн с одной из катушек, и от самих весов. Поэтому влиянием этих элементов конструкции на определяемую силу можно пренебречь.

Катушки можно подсоединить к источнику как постоянного, так и переменного синусоидального напряжения 220 В.

В цепь для регулирования значения тока включен реостат (рис. 8.3). Помимо амперметра и вольтметра в схему сразу можно включить ваттметр, который используется в дальнейшем при определении параметров катушек.

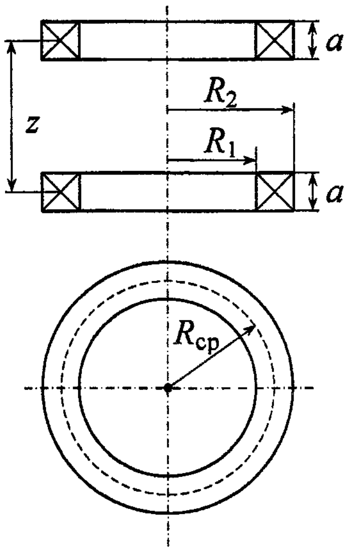


Рис. 8.1

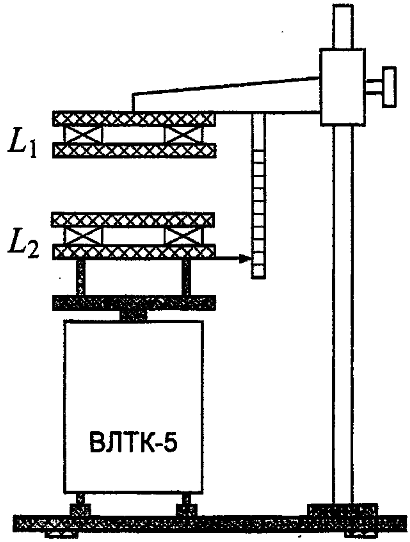


Рис. 8.2

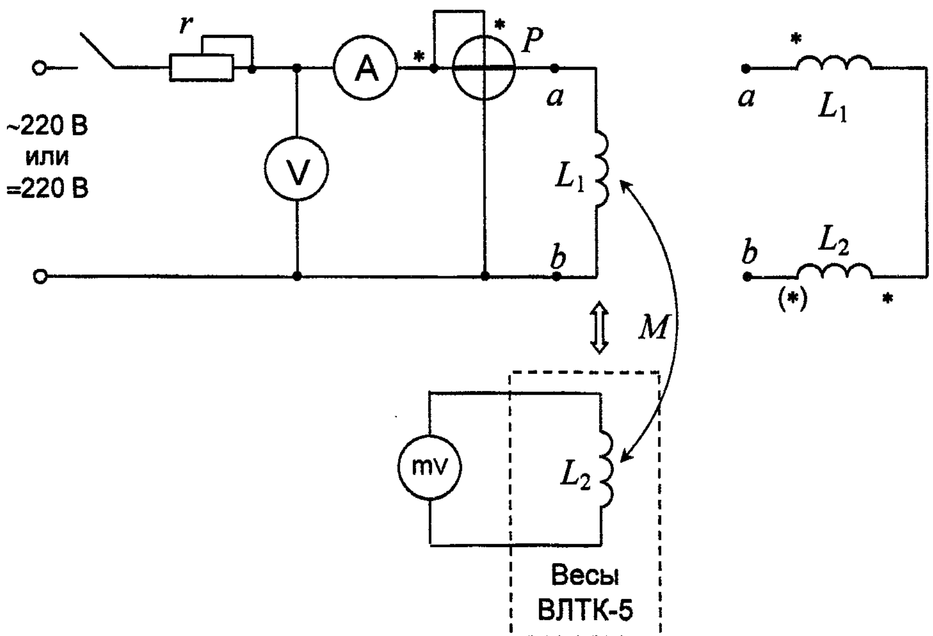


Рис. 8.3

Вначале исследуют зависимость электромагнитной силы взаимодействия катушек от расстояния между ними.

Зависимость знака силы взаимодействия катушек от способа их соединения, а также квадратичная зависимость электромагнитной силы от тока подтверждаются в первой серии экспериментов. В этой серии две последовательно соединенные катушки включают под постоянное напряжение, и при двух заданных преподавателем значениях тока снимают зависимости $f_z(z)$ электромагнитной силы от расстояния между катушками. Эксперименты проводятся как при согласном, так и при встречном соединении катушек. Переход к другому способу соединения достигается переменой зажимов одной из катушек.

Далее исследуемые катушки подключают к источнику синусоидального напряжения и экспериментально определяют зависимости средней за период силы от расстояния при согласном либо при встречном включении и при постоянстве действующего значения тока.

Для выполнения следующей серии измерений при питании катушек от синусоидального напряжения ток подают только в одну из катушек, в то время как вторую замыкают накоротко. Для этого случая также снимают зависимость $F_{z\text{ср}}(z)$ средней силы от расстояния между катушками.

После проведения этих исследований катушку, которая была замкнута накоротко, размыкают и к ее зажимам подключают вольтметр с большим внутренним сопротивлением, с помощью которого при переменном токе экспериментально получают зависимость $M(z)$, как это описано в работе 10.

В лаборатории в опыте с ферромагнитным диском (с размерами $R_{\text{д}1} = 24{,}5$ см и $d_1 = 1$ см), который устанавливается между катушками, предлагается снять зависимость $f_z(z)$ при постоянном токе катушки.

Подобную зависимость необходимо снять при синусоидальном токе как для ферромагнитного, так и для алюминиевого дисков с размерами $R_{\text{д}2} = R_{\text{д}1}$ и $d_2 = 1{,}3$ см. Следует убедиться, что в опыте с алюминиевым диском на расположенную рядом катушку с синусоидальным током действует отталкивающая сила, обусловленная вихревыми токами, возникающими в теле диска.

Определим характер влияния на электромагнитные силы, действующие на контуры с токами, близко расположенных к этим контурам массивных ферромагнитных или проводящих тел.

Рассмотрим случай, когда катушка располагается так, что ее торцевые плоскости проходят параллельно плоскостям проводящего диска (на рис. 8.4 это катушка, расположенная под диском).

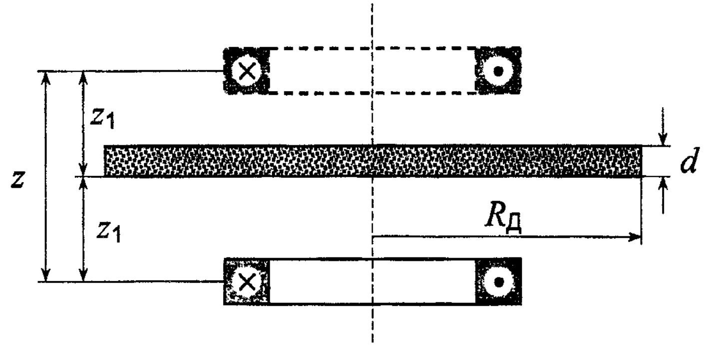


Рис. 8.4

Пусть ток катушки постоянный. Если диск неферромагнитный, то никакие силы в статическом положении системы со стороны диска на катушку не действуют. Если же диск ферромагнитный, то даже в состоянии покоя при постоянном токе катушки влияние намагничивания материала диска приводит к искажению поля и появлению силы, притягивающей катушку к диску.

Используем для пояснения механизма возникновения этой силы метод зеркальных изображений. Полагая ближнюю к катушке поверхность диска бесконечно протяженной, а магнитную проницаемость материала бесконечно большой, отразим катушку в указанной плоскости диска (см. рис. 8.4). Тогда приходим к эквивалентной задаче расчета магнитного поля и усилий в системе двух согласно включенных одинаковых катушек, расположенных в однородной среде с магнитной проницаемостью $\mu = \mu_0$.

Если ток катушки переменный, то для ферромагнитного проводящего диска на рассмотренный эффект намагничивания накладывается еще эффект индуцируемых в теле диска вихревых токов. Наличие этих двух эффектов, действующих в противоположном направлении, приводит к уменьшению силы, притягивающей катушку к ферромагнитному диску.

Программа выполнения работы

1. Снять зависимость электромагнитной силы от расстояния между двумя последовательно соединенными круглыми катушками при постоянном и синусоидальном токах.

2. Снять зависимость электромагнитной силы от расстояния между двумя катушками при синусоидальном токе одной из катушек и коротком замыкании другой.

3. Измерить ток, напряжение и мощность при подключении каждой из катушек к источнику синусоидального напряжения для расчета параметров катушек.

4. Снять зависимость взаимной индуктивности от расстояния между катушками.

5. Снять зависимость электромагнитной силы взаимодействия катушки с постоянным током и ферромагнитного диска от расстояния между ними.

6. Снять зависимость электромагнитной силы взаимодействия катушки с синусоидальным током и алюминиевого диска от расстояния между ними.

Обработка результатов исследования и оформление отчета

По данным опытов изобразите на графиках экспериментальные и теоретические зависимости действующих на катушки электромагнитных сил от расстояния между ними, а также от расстояния до ферромагнитного и алюминиевого дисков.

Оцените точность расчета действующей на катушку электромагнитной силы, когда другая катушка замкнута накоротко. Для этого сопоставьте результаты расчета силы по формулам (8.1), (8.2), приведенным в разделе «Теоретический расчет электромагнитных сил», как между собой, так и с экспериментально полученной силой при выполнении п. 2 программы.

Зависимость $f_z(z)$, снятую экспериментально при постоянном токе для катушки, расположенной рядом с ферромагнитным диском, сравните с соответствующей зависимостью силы притяжения для двух катушек, полученной при выполнении п. 1 программы.

Теоретический расчет электромагнитных сил

Электромагнитная сила f_g, стремящаяся изменить некоторую обобщенную координату g в системе контуров с токами, определяется через производную от энергии магнитного поля по указанной координате:

$$f_g = \left(\frac{\partial W_{\text{м}}}{\partial g}\right)_{i_k=\text{const}} = -\left(\frac{\partial W_{\text{м}}}{\partial g}\right)_{\psi_k=\text{const}}.$$

Рассчитать усилия можно по любой из этих формул. В дальнейшем, предполагая постоянство токов в системе, будем использовать первое равенство.

На основании выражения для энергии магнитного поля

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M i_1 i_2,$$

где L_1 и L_2 — соответственно индуктивность первой и второй катушек; M — взаимная индуктивность, приходим к выражению для электромагнитной силы взаимодействия катушек:

$$f_z = i_1 i_2 \frac{\partial M}{\partial z}.$$

При выводе учтено, что индуктивности L_1 и L_2 не зависят от координаты z.

Полагая $i_1 = i_2 = i$, получим $f_z = i^2 \dfrac{\partial M}{\partial z}$. При согласном включении катушек потоки самоиндукции и взаимной индукции каждой катушки складываются. Так как при увеличении расстояния z между катушками взаимная индуктивность по абсолютному значению уменьшается, то для согласного включения

$$M > 0; \quad \frac{\partial M}{\partial z} < 0; \quad f_z = i^2 \frac{\partial M}{\partial z} < 0;$$

таким образом, обобщенная сила оказывается отрицательной. Это означает, что сила f_z стремится уменьшить координату z, т.е. катушки притягиваются.

При встречном включении катушек взаимная индуктивность отрицательна ($M<0$), и обобщенная сила тогда будет положительна, т.е. она стремится увеличить координату z, и, следовательно, катушки в этом случае отталкиваются.

При расчете электромагнитных сил между двумя катушками с помощью записанного выражения

$$f_z(z) = i^2 \frac{\partial M}{\partial z}$$

для постоянного тока следует воспользоваться приведенными в работе 10 формулами, в соответствии с которыми

$$M = \mu_0 w^2 R_{\text{ср}} \cdot f(k),$$

причем

$$k^2 = \frac{4R_{\text{ср}}^2}{z^2 + 4R_{\text{ср}}^2},$$

где $R_{\text{ср}}$ — средний радиус катушки.

Среднее значение электромагнитной силы $F_{z\text{ср}}$ выражается через действующее значение переменного тока частоты ω той же формулой, что и при постоянном токе. Действительно, в соответствии с определением

$$F_{z\text{ср}}(z) = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 \frac{\partial M}{\partial z} dt = \frac{\partial M}{\partial z}\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt = I^2 \frac{\partial M}{\partial z}.$$

Взаимная индуктивность катушек рассчитывается по формуле

$$|M| = \frac{U_2}{\omega I_1},$$

где U_2 — напряжение, индуцируемое во второй катушке; I_1 — ток в первой катушке.

Получим выражение для расчета средней силы $F_{z\text{ср}}(z)$, действующей на питаемую синусоидальным током катушку, когда другая катушка замкнута накоротко.

Среднее значение силы при синусоидальном токе в катушке можно определить по аналогии с определением средней мощности в цепи синусоидального тока [1, 6, 18] комплексным методом по формуле

$$F_{z\text{ср}} = \mathrm{Re}\left(\dot{I}_1 \overset{*}{I}_2 \frac{\partial M}{\partial z} \right),$$

где $\dot{I}_1$ — комплекс тока первой катушки, $\overset{*}{I}_2$ — сопряженный комплекс тока второй (короткозамкнутой) катушки.

На основании второго закона Кирхгофа для контура, образованного замкнутой накоротко катушкой, можно написать

$$(r_2 + j\omega ML_2)\dot{I}_2 + j\omega M\dot{I}_1 = 0.$$

Выразив отсюда комплекс $\dot{I}_2$, а затем и сопряженный ему комплекс $\overset{*}{I}_2$, для силы получим

$$F_{z\text{ср}}(z) = -I_1^2 \frac{\omega^2 ML_2}{r_2^2 + \omega^2 L_2^2} \frac{\partial M}{\partial z}. \qquad (8.1)$$

Для расчета силы по формуле (8.1) следует иметь значения величин r_2, L_2, M и $\partial M/\partial z$. Отметим, что получаемая в этом случае сила положительна, так как $\partial M/\partial z < 0$, т.е. катушки отталкиваются, что и подтверждается экспериментальными исследованиями.

При малых активных сопротивлениях r_2 (в сравнении с реактивным сопротивлением ωL_2) приближенно в качестве расчетной формулы можно принять следующую:

$$F_{z\text{ср}} \approx -I_1^2 \frac{M}{L_2} \frac{\partial M}{\partial z}. \qquad (8.2)$$

Детальное исследование влияния различных факторов, действующих на электромагнитную силу катушки, можно выполнить при численном расчете поля с помощью программы *Qfield*.

Поскольку все соосные элементы устройства (катушка, ферромагнитный или алюминиевый диск) характеризуются осевой симметрией, область расчета можно ограничить отрезком *ab* оси

z и полуокружностью диаметром, равным длине этого отрезка (рис. 8.5).

Радиус окружности принимаем приблизительно в 10 раз больше радиуса диска. При расчете поля и взаимной индуктивности двух катушек (при отсутствии дисков) радиус r_0 окружности следует принять приблизительно в 10 раз бóльшим наибольшего расстояния между катушками, достигаемого в процессе измерений.

Допуская, что на полуокружности нормальная к ней составляющая магнитной индукции значительно меньше касательной, задаем на ней, как и на оси симметрии, векторный магнитный потенциал $A = 0$.

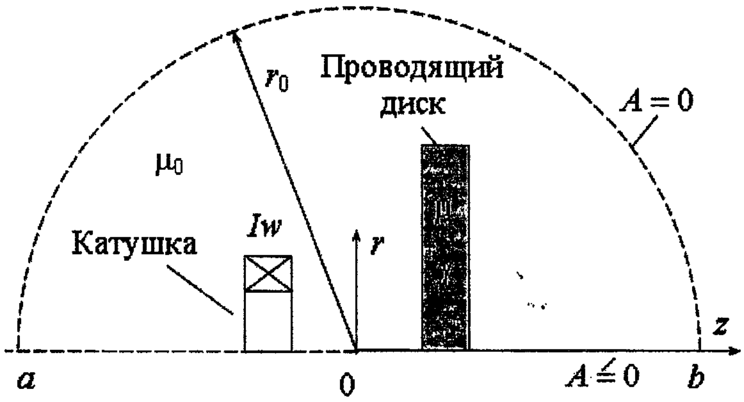


Рис. 8.5

Объем расчетов задает преподаватель.

Контрольные вопросы

1. Как изменится электромагнитная сила, действующая на одну из индуктивно связанных катушек, при увеличении протекающего в них тока в два раза?

2. Почему сила взаимодействия катушки и расположенного вблизи нее проводящего диска подобна по существу силе взаимодействия катушки и другой короткозамкнутой катушки?

3. Можно ли подобрать магнитную проницаемость и удельную электрическую проводимость материала ферромагнитного диска так, чтобы действующая на расположенную вблизи него катушку электромагнитная сила обратилась в нуль?

4. Как изменяется электромагнитная сила взаимодействия катушки и проводящего диска при увеличении (уменьшении) частоты тока катушки?

5. Как изменится электромагнитная сила взаимодействия катушки и находящегося вблизи нее: а) проводящего неферромагнитного диска; б) непроводящего ферромагнитного диска; в) проводящего ферромагнитного диска, если диск разрезать вдоль его радиуса?

6. Над катушкой с постоянным током в параллельных ей плоскостях расположены два не соединенных один с другим ферромагнитных диска. Существует ли силовое взаимодействие между дисками?

РАЗДЕЛ III

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ

В электротехнических устройствах используются различные по конструктивному исполнению токоведущие системы с однофазной или трехфазной системой токов.

К классу проводящих систем можно отнести токопроводы для соединения мощных генераторов и трансформаторов, токоведущие системы электрических машин, многопроволочные провода воздушных линий передач, а также мощные кабельные линии, имеющие защитную свинцовую оболочку, выполняющую роль экрана.

Понятие электромагнитных характеристик включает в себя не только интегральные параметры устройств в виде активных и реактивных сопротивлений, собственных и взаимных индуктивностей, электрических емкостей, но и результирующие и распределенные электромагнитные силы, локальные источники тепла в конструктивных элементах устройства и ряд других характеристик.

Исследование влияния неравномерного распределения магнитного поля проводится для проводов из неферромагнитного и ферромагнитного проводящего материалов, что позволяет определить особенности вычисления таких параметров проводов, как полное, активное и внутреннее реактивное сопротивления, а также особенности методов их измерения.

Например, активные и внутренние реактивные сопротивления массивных ферромагнитных проводов можно определить путем измерения напряженности электрического поля в одной точке. Однако эта точка должна соответствовать максимальной плотности тока на периметре провода.

Изучение методов определения коэффициентов, связывающих заряды проводящих тел с их потенциалами, является основой для расчета емкостей сложных систем, таких как емкость двухпроводной линии с учетом влияния земли, емкость трехфазной линии передачи. Методы определения взаимной индуктивности между токоведущими контурами, проводами с электрическим током дают возможность решения ряда практически важных задач — определения взаимной индуктивности двухпроводных линий, индуктивности двухпроводной и трехфазной линий передач.

Работа 9

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ, ЧАСТИЧНЫХ ЕМКОСТЕЙ И ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Цели и задачи, решаемые в работе

Целями работы являются: а) изучение метода экспериментального определения коэффициентов электростатической индукции, частичных емкостей и потенциальных коэффициентов системы заряженных тел и проверка связей между коэффициентами; б) построение картины электрического поля заряженных тел для различных соотношений между их потенциалами, а также проведение численного расчета электростатического поля.

Указанные коэффициенты находят, измеряя напряжения и заряды жил четырехжильного кабеля со свинцовой оболочкой [1, 6].

Описание установки и методики проведения эксперимента

Объектом исследования служит четырехжильный кабель со свинцовой оболочкой. Расположение жил видно на рис. 9.1, на котором изображен поперечный разрез кабеля.

Потенциал оболочки условно принимают при исследовании равным нулю, и, следовательно, потенциалы U_1, U_2, U_3 и U_4 всех жил кабеля равны напряжениям между жилами и оболочкой.

Заряды жил измеряют с помощью баллистического гальванометра. Баллистическая постоянная гальванометра определяется с помощью образцового конденсатора емкостью $C = 0{,}01$ мкФ.

Для проведения работы используют схему, показанную на рис. 9.2. Все четыре жилы выведены из оболочки и присоединены к зажимам, отмеченным на рис. 9.2 номерами, соответствующими номерам жил на рис. 9.1. Схема, изображенная сплошными линиями (см. рис. 9.2), остается неизменной во время всего опыта. Оболочка кабеля и планка A всегда подключены к отрицательному полюсу источника. Положительный полюс источника может быть присоединен тем или иным способом к жилам кабеля. Ключ К2 служит для успокоения колебаний гальванометра и шунтирования его на время переключений жил кабеля при подготовке схемы к очередным измерениям. Реостат дает возможность регулировать в широких пределах напряжение питания. Рубильник К3 служит для отключения схемы от источника питания.

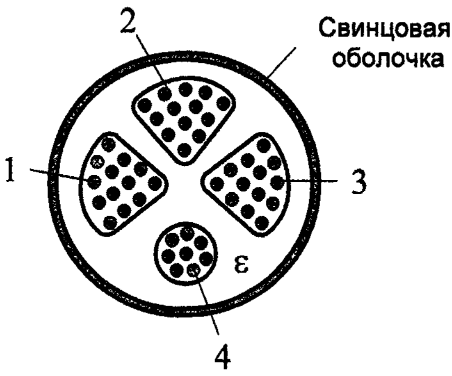


Рис. 9.1

Для градуировки баллистического гальванометра образцовый конденсатор подключают между планкой A и зажимом b переключателя К1 (см. рис. 9.2, пунктир). При левом положении этого переключателя конденсатор заряжается до напряжения u источника. Быстро перекидывая переключатель К1 в правое положение, разряжают конденсатор через цепь гальванометра. Баллистическую постоянную гальванометра C_q вычисляют по формуле

$$C_q = \frac{q}{\alpha} = \frac{Cu}{\alpha},$$

где α — отклонение светового пятна на шкале гальванометра.

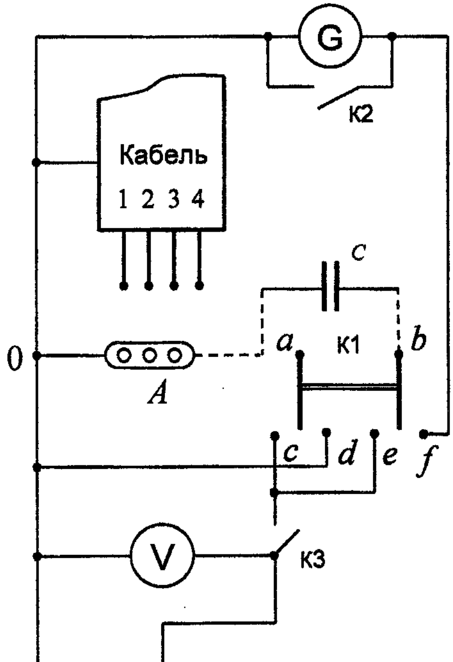


Рис. 9.2

По окончании градуировки

следует отключить образцовый конденсатор от цепи.

Коэффициенты электростатической индукции входят в систему линейных уравнений, определяющих заряды тел (в нашем случае четырех жил кабеля) через их потенциалы [1]:

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \beta_{11}U_1 + \beta_{12}U_2 + \beta_{13}U_3 + \beta_{14}U_4;\\
q_2 &= \beta_{21}U_1 + \beta_{22}U_2 + \beta_{23}U_3 + \beta_{24}U_4;\\
q_3 &= \beta_{31}U_1 + \beta_{32}U_2 + \beta_{33}U_3 + \beta_{34}U_4;\\
q_4 &= \beta_{41}U_1 + \beta_{42}U_2 + \beta_{43}U_3 + \beta_{44}U_4.
\end{aligned}
\qquad (9.1)
$$

Для определения собственного коэффициента электростатической индукции, например коэффициента β_{22}, следует задать потенциалы $U_1=U_3=U_4=0$, $U_2=U_0 \neq 0$ и найти заряд q_2. Тогда отношение q_2/U_2 определит величину β_{22}. Аналогично можно найти и другие собственные коэффициенты электростатической индукции.

Для измерения собственного коэффициента β_{kk} электростатической индукции k-й жилы соединяют эту жилу с зажимом b переключателя К1, а все остальные жилы соединяют с оболочкой (с планкой A). При этом потенциалы всех жил, кроме k-й, становятся равными нулю, и тогда

$$q_k = \beta_{kk}U_k.$$

Зарядив k-ю жилу до потенциала U_k, разряжают ее на гальванометр и измеряют ее заряд q_k. На рис. 9.3 представлена схема измерения коэффициента β_{44}. Таким же способом следует измерить собственные коэффициенты электростатической индукции всех жил.

Переключатель К1 следует перекидывать по возможности быстро, чтобы жила не успевала за время переключения сколько-нибудь заметно разрядиться через сопротивление утечки. Время переключения Δt должно быть много меньше постоянной времени τ разряда жилы через сопротивление утечки.

Для нахождения взаимного коэффициента электростатической индукции, например β_{34}, следует задать потенциалы $U_1 = U_2 = U_3 = 0$, $U_4=U_0 \neq 0$ и, определив заряд q_3, рассчитать искомую величину $\beta_{34} = q_3/U_4$.

В общем случае для определения коэффициента β_{kp} следует задать потенциалы $U_i = 0$, $i = 1, 2, ..., i \neq p$, $U_p = U_0 \neq 0$ и, определив заряд q_k, найти β_{kp} из соотношения $q_k = \beta_{kp} U_p$.

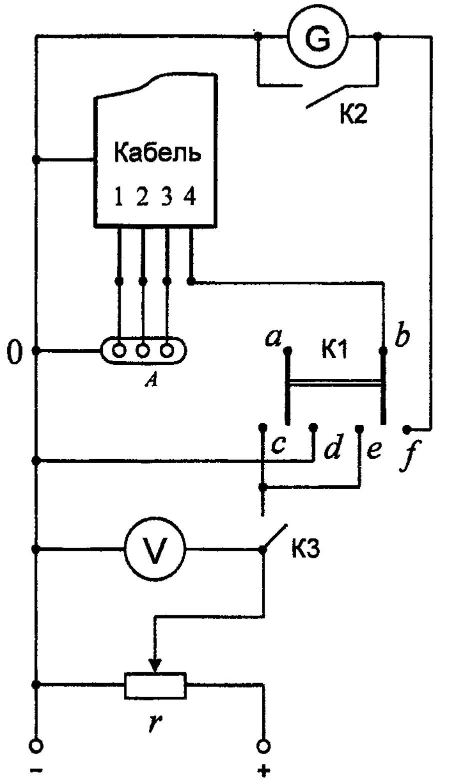


Рис. 9.3

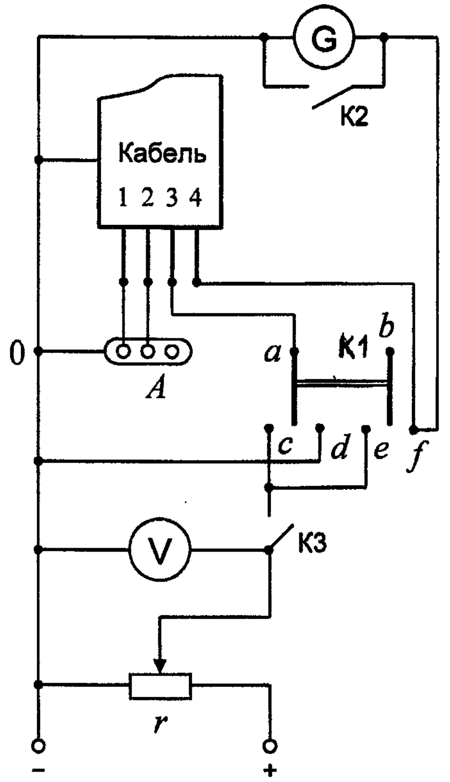


Рис. 9.4

Для измерения взаимного коэффициента электростатической индукции β_{kp} соединяют p-ю жилу с зажимом a и k-ю жилу с зажимом f переключателя K1. Все остальные жилы соединяют через планку A с оболочкой. Таким образом, p-я жила заряжается до потенциала U_p и затем, при перекидывании переключателя, разряжается на оболочку помимо гальванометра. Другая, k-я, жила постоянно соединена через гальванометр с оболочкой. Пока p-я жила заряжена, на k-й жиле имеется индуцированный заряд q_k. Этот заряд освобождается и проходит через гальванометр при разряде p-й жилы. Из системы уравнений (9.1) получаем

$$q_k = \beta_{kp} U_p.$$

На рис. 9.4 показана схема для измерения коэффициента β_{43}.

Необходимо измерить все 12 взаимных коэффициентов электростатической индукции и убедиться в справедливости соотношения

$$\beta_{kp} = \beta_{pk},$$

являющегося выражением общего принципа взаимности в применении к рассматриваемому случаю.

Все собственные коэффициенты электростатической индукции положительны, все взаимные — отрицательны. На опыте это проявляется в том, что отклонения светового пятна гальванометра при измерении собственных и взаимных коэффициентов происходят в противоположных направлениях.

Частичные емкости входят в систему уравнений, связывающих заряды жил кабеля с разностями потенциалов между ними:

$$\begin{aligned} q_1 &= C_{11}(U_1 - 0) + C_{12}(U_1 - U_2) + C_{13}(U_1 - U_3) + C_{14}(U_1 - U_4); \\ q_2 &= C_{21}(U_2 - U_1) + C_{22}(U_2 - 0) + C_{23}(U_2 - U_3) + C_{24}(U_2 - U_4); \\ q_3 &= C_{31}(U_3 - U_1) + C_{32}(U_3 - U_2) + C_{33}(U_3 - 0) + C_{34}(U_3 - U_4); \\ q_4 &= C_{41}(U_4 - U_1) + C_{42}(U_4 - U_2) + C_{43}(U_4 - U_3) + C_{44}(U_4 - 0). \end{aligned} \tag{9.2}$$

Для нахождения собственной частичной емкости, например C_{33}, следует, принимая $U_1=U_2=U_3=U_0\neq 0$, найти заряд q_3 и затем рассчитать $C_{33} = q_3/U_3$. Аналогично можно найти и другие собственные частичные емкости.

Для измерения собственной частичной емкости C_{kk} k-й жилы следует соединить эту жилу с зажимом b переключателя K1. Все остальные жилы необходимо соединить с зажимом a того же переключателя. При левом положении переключателя все жилы заряжаются до потенциала $U_k = U_0$. При перекидке переключателя вправо k-я жила разряжается через гальванометр, а остальные разряжаются помимо гальванометра.

Из уравнений (9.2) $\qquad q_k = C_{kk}U_k.$

Необходимо измерить все четыре собственные частичные емкости. На рис. 9.5 приведена схема измерения C_{44}.

Взаимные частичные емкости можно определить из соотношений

$$C_{kp} = -\beta_{kp},$$

это видно из сопоставления уравнений для q_k из систем (9.1) и (9.2) при условии, что $U_p \neq 0$, а потенциалы всех остальных тел равны нулю.

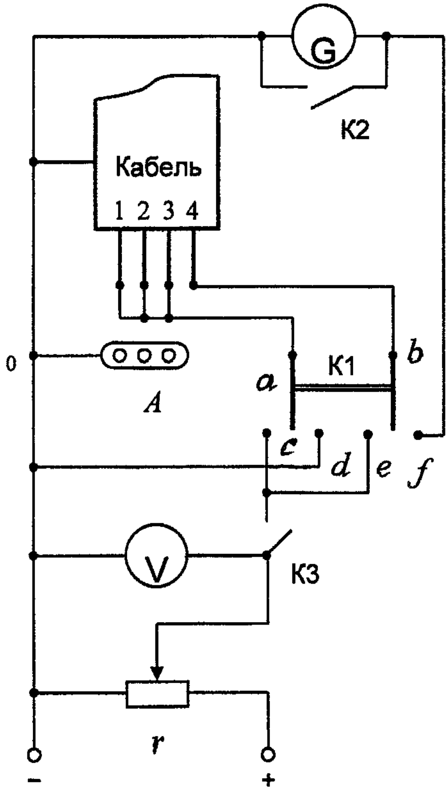


Рис. 9.5

Потенциальные коэффициенты входят в систему уравнений, определяющих потенциалы жил кабеля через их заряды:

$$\begin{aligned}
U_1 &= \alpha_{11}q_1 + \alpha_{12}q_2 + \alpha_{13}q_3 + \alpha_{14}q_4;\\
U_2 &= \alpha_{21}q_1 + \alpha_{22}q_2 + \alpha_{23}q_3 + \alpha_{24}q_4;\\
U_3 &= \alpha_{31}q_1 + \alpha_{32}q_2 + \alpha_{33}q_3 + \alpha_{34}q_4;\\
U_4 &= \alpha_{41}q_1 + \alpha_{42}q_2 + \alpha_{43}q_3 + \alpha_{44}q_4.
\end{aligned} \tag{9.3}$$

Для определения собственных потенциальных коэффициентов, например α_{11}, необходимо задать заряды $q_2=q_3=q_4=0$ и, принимая потенциал жилы 1 равным $U_1=U_0\neq0$, найти его заряд и рассчитать искомый коэффициент $\alpha_{11}=U_1/q_1$. Так же можно рассчитать и другие собственные потенциальные коэффициенты.

Для измерения собственного потенциального коэффициента α_{kk} необходимо соединить k-ю жилу с зажимом b. Все остальные жилы должны быть отключены от схемы и иметь заряды, равные нулю. Для осуществления последнего необходимо до начала опыта все четыре жилы одновременно разрядить, соединив их на некоторый промежуток времени с планкой A.

В левом положении переключателя К1 k-я жила заряжается до потенциала $U_k = U_0$ и после переключения разряжается через гальванометр. Из уравнений (9.3)

$$U_k = \alpha_{kk} q_k.$$

Следует измерить все четыре собственных потенциальных коэффициента. Измерение взаимных потенциальных коэффициентов α_{kp} при малой длине исследуемого кабеля и, следовательно, при малой емкости кабеля произвести весьма трудно. Действительно, подключение вольтметра сразу же ведет к перераспределению зарядов и изменению потенциалов жил кабеля, что не позволяет определить с достаточной точностью коэффициенты α_{kp}.

Программа выполнения работы

1. Выполнить градуировку баллистического гальванометра, служащего для измерения зарядов жил (приложение 1). Рассчитать величины C_q при нескольких значениях α и найти их среднее значение $C_{q\text{ср}}$.

2. Измерить отклонения α для расчета: *а*) коэффициентов электростатической индукции, проверить выполнение условия $\beta_{km}=\beta_{mk}$; *б*) собственных частичных емкостей C_{kk}; *в*) собственных потенциальных коэффициентов, проверить выполнение условия $C_{km} = -\beta_{mk}$.

Обработка результатов исследования и оформление отчета

Как указано в программе выполнения работы, следует убедиться в справедливости равенства

$$\beta_{kp} = \beta_{pk},$$

а также в справедливости соотношений [1]

$$C_{11} = \beta_{11} + \beta_{12} + \beta_{13} + \beta_{14};$$

$$C_{22} = \beta_{21} + \beta_{22} + \beta_{23} + \beta_{24};$$

$$C_{33} = \beta_{31} + \beta_{32} + \beta_{33} + \beta_{34};$$

$$C_{44} = \beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43} + \beta_{44}.$$

Используя баллистическую постоянную гальванометра, определенную в первом опыте, следует рассчитать коэффициенты β и C (в фарадах), а также коэффициенты $\alpha(1/\Phi)$.

Необходимо также проверить связь между коэффициентами α и β, которая выражается в виде

$$\alpha_{kk} = \frac{\Delta_{kk}}{\Delta},$$

где Δ — определитель системы уравнений:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \beta_{11}, & \beta_{12}, & \beta_{13}, & \beta_{14} \\ \beta_{21}, & \beta_{22}, & \beta_{23}, & \beta_{24} \\ \beta_{31}, & \beta_{32}, & \beta_{33}, & \beta_{34} \\ \beta_{41}, & \beta_{42}, & \beta_{43}, & \beta_{44} \end{vmatrix},$$

Δ_{kk} — алгебраическое дополнение определителя Δ.

При оформлении отчета следует сделать четыре чертежа сечения кабеля и изобразить качественно на этих чертежах семейство линий напряженности электрического поля между жилами и оболочкой, соответствующее опытам при измерении коэффициентов β_{kk}, β_{kp}, C_{kk} и α_{kk}. Поля следует изобразить для каждого опыта в соответствии с индексами коэффициентов, указанными преподавателем.

Все измеряемые в лаборатории коэффициенты, а также те коэффициенты, которые получены при измерениях вследствие малых отклонений пятна гальванометра, можно рассчитать численно.

Численный расчет позволяет найти любой из коэффициентов α, β, C и напряженность электрического поля на поверхности жил. Хотя кабель имеет плоскость геометрической симметрии, областью численного расчета является его полное поперечное сечение, поскольку поле не имеет плоскостей симметрии при требуемом для нахождениия большинства коэффициентов задании потенциалов жил. Жилы кабеля можно представить в виде массивных проводящих тел, не разделенных на отдельные проводники.

При численном расчете с помощью программы *Qfield* заряд любой жилы определяется путем интегрирования вектора электрического смещения по ее поверхности. Если заряд не соединенной с зажимом источника (изолированной) жилы равен нулю, а приобретаемый ею в электрическом поле заряженных жил потенциал заранее неизвестен, то такую жилу при численном расчете следует маркировать как проводник с плавающим потенциалом.

Размеры элементов и объем расчетов задает преподаватель.

Контрольные вопросы

1. Существуют ли связи между коэффициентами α, β, C?
2. Можно ли, определив экспериментально коэффициент β, найти коэффициенты α и C?
3. В чем заключается целесообразность введения и использования коэффициентов α, β, C?
4. Каким способом можно измерить заряд жил кабеля?
5. Какое минимальное число опытов следует выполнить для нахождения всех коэффициентов: α, β, C?
6. Почему справедливо равенство $\beta_{km} = \beta_{mk}$?

Работа 10

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТИ КРУГЛЫХ И ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КАТУШЕК

Цель и задачи, решаемые в работе

Целью работы являются: экспериментальное и теоретическое исследования зависимостей взаимной индуктивности M круглых и прямоугольных катушек от расстояния между ними, а также построение на основе опытных данных картины магнитного поля круглой катушки [1, 2, 10, 16, 25].

Описание установки и методики проведения эксперимента

Исследуемые круглые и прямоугольные катушки закреплены на основании, выполненном из диэлектрика (рис. 10.1).

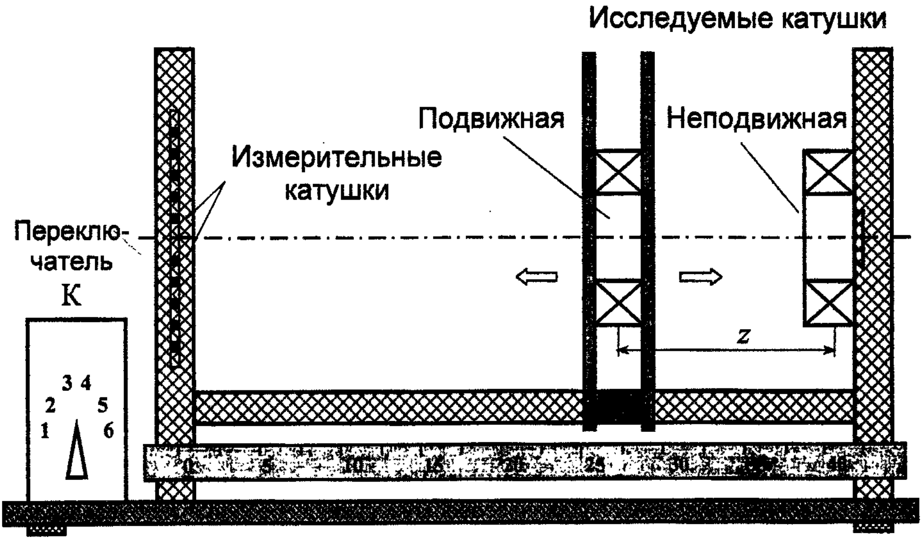


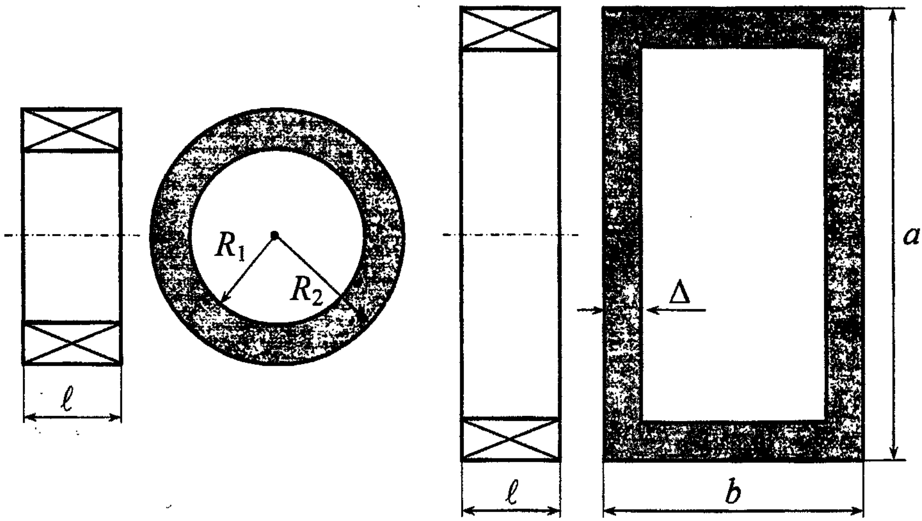
Рис. 10.1

Катушки располагаются соосно, причем одна из них может перемещаться вдоль продольной оси.

В одной из неподвижных стоек основания расположены пять измерительных катушек (датчиков), используемых для построения линий магнитной индукции. Эти катушки имеют общий центр, лежащий на оси исследуемых катушек.

Исследуемые и измерительные катушки подключаются к измерительной схеме с помощью переключателя К, укрепленного на том же основании.

Круглые и прямоугольные катушки имеют соответственно по 1000 и по 500 витков; их размеры приведены на рис. 10.2.



$R_1 = 32$ мм; $R_2 = 38$ мм; $a = 130$ мм; b = ~~130~~ 70 мм;
$\ell = 30$ мм; $\ell = 25$ мм; $\Delta = 10$ мм.

Рис. 10.2

Все измерительные катушки имеют по 100 витков и выполнены из весьма тонкого провода, так что их можно эквивалентировать круговыми контурами с радиусами $R_1 = 10$ мм; $R_2 = 20$ мм; $R_3 = 30$ мм; $R_4 = 45$ мм; $R_5 = 60$ мм. Для определения зависимости взаимной индуктивности катушек от расстояния между ними используется схема, изображенная на рис. 10.3.

Взаимная индуктивность M определяется из соотношения

$$M = \frac{U}{\omega I},$$

где U, I — показания используемых в схеме вольтметра и амперметра; $\omega = 2\pi f$ — круговая частота напряжения источника.

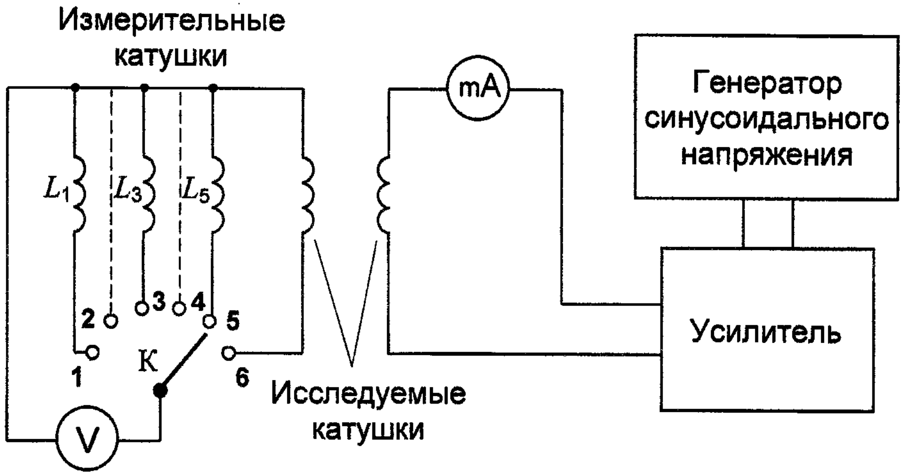


Рис. 10.3

Для катушек различной формы необходимо снять показания вольтметра $U(z)$, изменяя расстояние z от минимального до максимально возможного в данной установке значения. При этом переключатель К устанавливается в положение 6. Полученные данные позволяют определить зависимости $M(z)$ для пары круглых и пары прямоугольных катушек. Кроме того, следует рассмотреть сочетание круглой и прямоугольной катушек, используя в качестве источника магнитного поля поочередно каждую из них. Две последние зависимости должны совпадать вследствие принципа взаимности $(M_{12} = M_{21})$.

В работе предусмотрена возможность экспериментального исследования магнитного поля круглой катушки с током и построения в меридиональной плоскости линий магнитной индукции этого поля. Качественная картина линий показана на рис. 10.4, *а*. Их следует строить таким образом, чтобы магнитный поток каждой трубки поля был одинаковым: $\Delta\Phi = \text{const}$. Каждая трубка магнитного потока ограничена соседними линиями магнитной индукции.

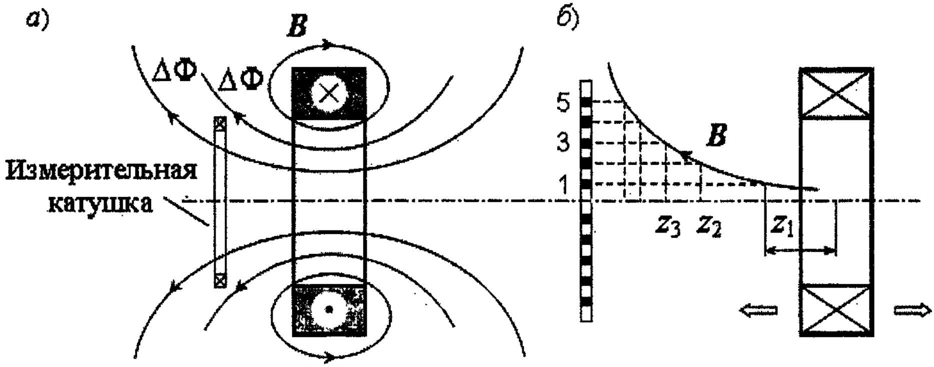


Рис. 10.4

Для определения линий магнитной индукции разместим в исследуемом магнитном поле измерительную катушку. Магнитный поток Ф, пересекающий плоскость этой катушки, пропорционален возникающему на ее зажимах напряжению U. Таким образом, появляется возможность с помощью вольтметра и измерительных катушек различного диаметра определить координаты точек, принадлежащих силовым линиям, ограничивающим трубки равного магнитного потока: в этих точках показания вольтметра остаются неизменными.

В работе для построения линий магнитной индукции проводится следующий опыт. К источнику подключается подвижная круглая катушка. С помощью переключателя К (см. рис. 10.3) к датчику 5, имеющему максимальный диаметр, подсоединяется вольтметр, и его показания U_5 фиксируются при максимальном сближении датчика и исследуемой катушки. Задавая число линий магнитной индукции n, которые требуется определить экспериментально ($n = 5 \div 10$), рассчитаем величину $\Delta U = U_5 / n$, пропорциональную магнитному потоку $\Delta\Phi$. Ток в катушке задается таким, чтобы значение ΔU составляло не менее $3 \div 5$ мВ. Для обработки результатов эксперимента необходимо зафиксировать значения тока i в катушке, круговой частоты ω и напряжения U_5.

При определении положения первой линии магнитной индукции, которой соответствуют показания вольтметра ΔU, подключаем к нему датчик *1*. Перемещая катушку с током относительно датчика, определим такое расстояние z_1 между ними, при котором вольтметр покажет напряжение ΔU. Затем соединим с вольтметром датчик *2* и зафиксируем координату z_2, в которой показания вольтметра также составят ΔU. Выполнив такие же измерения поочередно с датчиками *3*, *4* и *5*, получим еще три принадлежащие данной силовой линии точки (z_3, z_4, z_5). Изобразим на бумаге продольное сечение круглой катушки и, отмечая найденные пять точек (см. рис. 10.4, *б*), соединим их плавной линией, которая соответствует магнитной трубке с потоком $\Delta\Phi$.

Аналогично определяются координаты точек, принадлежащих остальным n-1 линиям магнитной индукции, поскольку каждой из них соответствуют определенные показания вольтметра ($2\Delta U$, $3\Delta U$ и т.д.).

Заметим, что экспериментальную картину магнитного поля круглой катушки можно получить в ограниченной части пространства, определяемой размерами используемых в данной установке датчиков.

Программа выполнения работы

1. В электрической цепи (см. рис. 10.3) установить переключатель К в положение 6. К выходу генератора синусоидальных сигналов подключить неподвижную круглую катушку. Задать на выходе генератора напряжение 10 В и частоту в диапазоне $200 \div 1000$ Гц. Измерить ток *I*, а также напряжение на зажимах подвижной круглой индуктивно связанной с ней катушки для нескольких расстояний *z* (от минимального до максимально возможного).

2. Повторить п. 1, заменив круглую подвижную катушку прямоугольной.

3. Повторить п. 1, подключая к зажимам генератора неподвижную прямоугольную катушку, а в качестве индуктивно связанной с ней катушки — вначале вторую прямоугольную, а затем круглую катушку.

4. Поменять местами в последнем опыте круглую и прямоугольную катушки и измерить для проверки принципа взаимности напряжение на зажимах круглой катушки при нескольких расстояниях между катушками.

5. Измерить напряжения на зажимах измерительных катушек в соответствии с изложенной методикой и построить линии индукции магнитного поля круглой катушки.

Обработка результатов исследования и оформление отчета

Для всех случаев следует рассчитать теоретические зависимости взаимной индуктивности от расстояния между катушками и сопоставить их с полученными по результатам опытов.

По расчетным данным следует построить зависимости $M(x)$ и сопоставить их с аналогичными зависимостями, полученными опытным путем.

При анализе результатов необходимо обратить внимание на расхождение экспериментальных и расчетных кривых, которое в основном объясняется особенностями моделей, использованных при вычислениях. Сопоставление опытных и расчетных кривых дает критерий допустимости применения той или иной расчетной модели для заданного диапазона изменения координаты z.

Следует построить картину магнитного поля круглой катушки на основании опытных и расчетных данных.

Расчет можно провести следующим образом. Зададим значение напряжения U_1, пропорциональное потоку Φ_1, проходящему сквозь сечение первой трубки магнитного потока некоторого радиуса r_1. При этом запишем:

$$\Phi_1 = \frac{U_1}{\omega w_д},$$

где $w_д$ — число витков измерительной катушки (датчика). Из выражения

$$f(k_1) = \frac{\Phi_1}{\mu_0 \, i \, w \sqrt{R_0 r_1}}$$

определим значение функции $f(k_1)$.

Затем с помощью приведенной в разделе “Теоретический расчет взаимной индуктивности катушек” зависимости $f(k)$ (см. рис. 10.8, 10.9) по найденному значению функции получим значение аргумента k_1^2 и из выражения

$$k_1^2 = \frac{4R_0 r_1}{z_1^2 + (R_0 + r_1)^2}$$

определяем координату z_1 точки, принадлежащей силовой линии 1 магнитного поля (рис. 10.5).

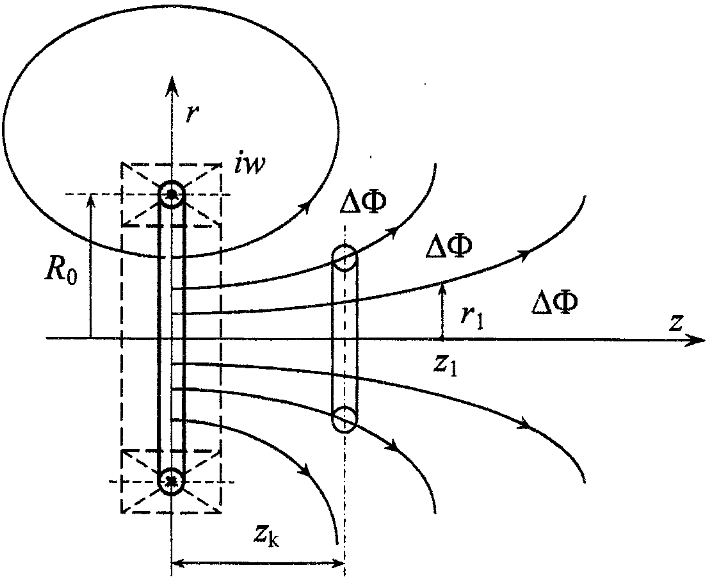


Рис. 10.5

Аналогично определим координаты z_2, z_3... точек, отстоящих от продольной оси катушки на расстояния r_2, r_3, ... и принадлежащих той же силовой линии магнитного поля. Повторяя указанную процедуру для значений Φ_2, Φ_3, ..., Φ_n, получаем координаты силовых линий поля, определенных ранее экспериментально.

Заметим, что если в процессе расчета значение z_j при некотором r_j получается мнимым, то это означает, что данная линия магнитной индукции не пересекает линию r_j=const.

Построенную картину магнитных силовых линий следует использовать для приближенного расчета взаимной индуктивности круглых катушек, поскольку потокосцепление взаимной индукции можно определить по количеству n трубок магнитного потока $\Delta\Phi = \Delta U / w_{д}\omega$, сцепляющегося с катушкой (см. рис. 10.4, *а*). Найденную таким образом взаимную индуктивность

$$M = \frac{wn \cdot \Delta\Phi}{I} = \frac{wn \cdot \Delta U}{w_{д}\omega\, I},$$

где величины ΔU, ω и I известны из эксперимента, необходимо сопоставить с полученной ранее.

Теоретический расчет взаимной индуктивности катушек

Поскольку взаимная индуктивность определяется соотношением

$$M = \frac{\Psi_{21}}{i_1},$$

где Ψ_{21} — потокосцепление второй катушки, обусловленное током первой катушки, задача нахождения M сводится к расчету потокосцепления Ψ_{21} при заданном токе i_1.

Для круглых катушек наиболее простая расчетная модель содержит систему, в которой источником магнитного поля является диполь с магнитным моментом $\overline{m}$, эквивалентирующий катушку с током i_1 и числом витков w_1. Вторую катушку заменим тонким витком, радиус которого R_0 равен среднему радиусу реальной круглой катушки (рис. 10.6).

Составляющие напряженности магнитного поля диполя в некоторой точке A на расстоянии r от его центра определяются выражениями

$$H_r = \frac{2m\cos\varphi}{4\pi r^3}; \quad H_\varphi = \frac{m\sin\varphi}{4\pi r^3},$$

где $m = i_1 w_1 S_1$ — магнитный момент диполя, определяемый полным током первой катушки $i_1 w_1$ и площадью ее сечения S_1.

Если при определении потока Φ_{21} в первом приближении считать, что все силовые линии магнитного диполя пересекают охватываемую витком площадь под прямым углом (т.е. $\varphi = 0$, $r = z$), то в любой точке этого сечения напряженность магнитного поля

$$H \approx \frac{m}{2\pi z^3}.$$

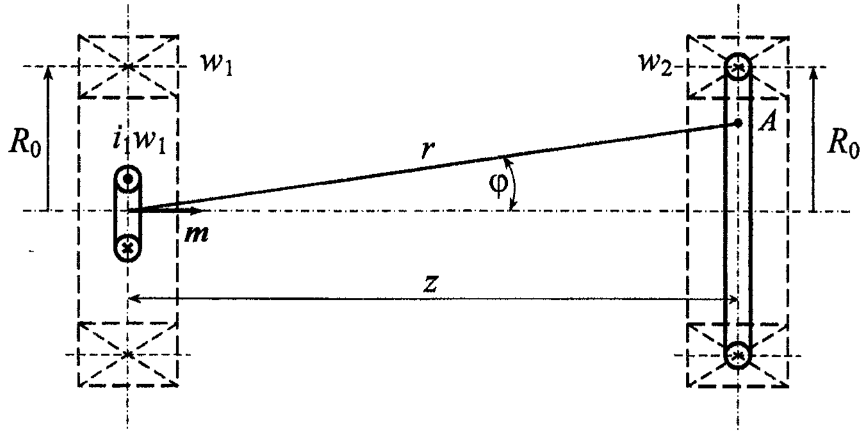


Рис. 10.6

Тогда, поскольку реальная вторая катушка имеет w_2 витков,

$$\Psi_{21} = w_2 \Phi_{21} = \frac{\mu_0 m w_2 S_2}{2\pi z^3},$$

и взаимная индуктивность M с учетом выражения для m определится в виде

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{w_1 w_2 S_1 S_2}{z^3}.$$

При $w_1 = w_2 = w$ и $S_1 = S_2 = S$ получаем

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{w^2 S^2}{z^3},$$

где $S = \pi R_0^2$ $\left(R_0 = (R_1 + R_2)/2\right.$ — средний радиус катушки$\left.\right)$.

Преимуществом расчетной модели "диполь – виток" является ее простота, однако получаемые таким способом результаты достоверны лишь при значительном удалении катушек друг от друга, когда угол $\varphi = 0$.

Рассмотрим расчетную модель исходной системы, представляя каждую из круглых катушек тонким витком радиуса R_0 (рис. 10.7).

При таком подходе взаимная индуктивность катушек определяется приведенным в [1] выражением (при $R_1 = R_2 = R_0$ и $h = z$):

$$M = \mu_0 w_1 w_2 R_0 \cdot f(k);\ f(k) = \left(\frac{2}{k} - k\right)\mathbf{K} - \frac{2}{k}\mathbf{E},$$

где **K**, **E** — полные эллиптические интегралы первого и второго рода, являющиеся функциями модуля k, определяемого из выражения

$$k^2 = \frac{4R_0^2}{z^2 + 4R_0^2}.$$

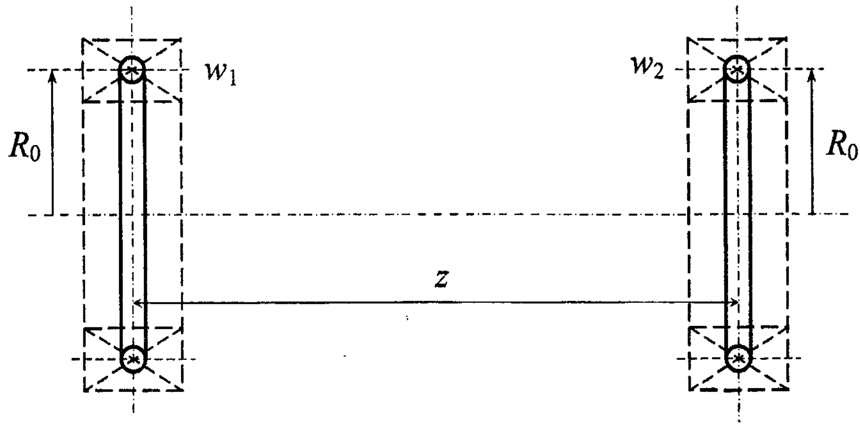


Рис. 10.7

На рис. 10.8 и 10.9 приведены зависимости величины $f(k)$ в функции от k^2.

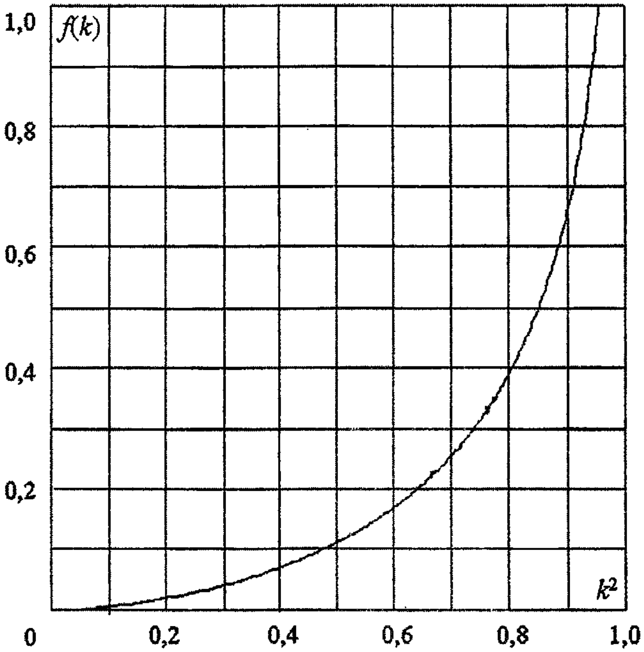


Рис. 10.8

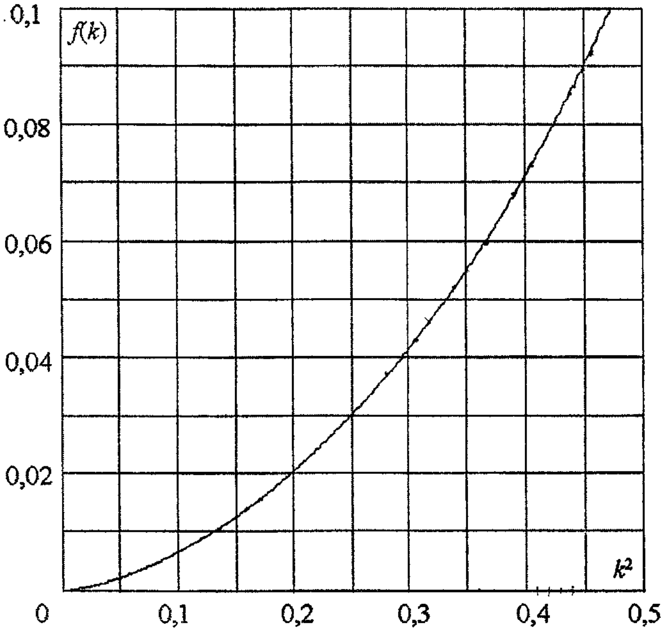


Рис. 10.9

При использовании расчетной модели “виток – виток” достоверные результаты можно ожидать для катушек, линейные размеры сечений которых малы по сравнению с расстоянием между катушками.

Когда замена катушек сосредоточенными витками является некорректной, можно использовать алгоритм расчета, основанный на представлении каждой из катушек совокупностью n витков, образующих однослойную катушку, как это показано, например, на рис. 10.10 при $n = 3$.

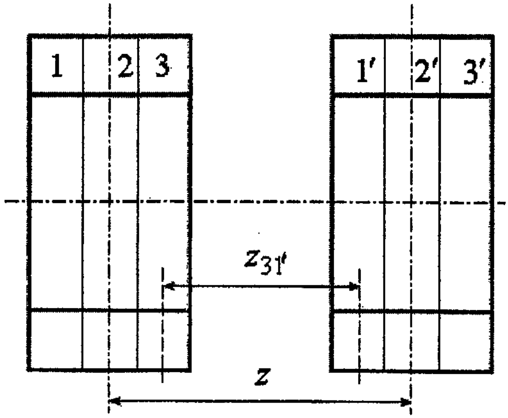


Рис. 10.10

При таком подходе взаимную индуктивность M можно определить соотношением

$$M = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} M_{kp},$$

где M_{kp} — взаимные индуктивности соответствующих пар витков, определенные из модели “виток – виток”.

Преимущество этого подхода в том, что реальные размеры катушек учитываются на основе результатов расчета упрощенной модели “виток – виток”, т.е. происходит уточнение полученного ранее значения взаимной индуктивности M.

Заметим, что увеличение числа разбиений n для повышения точности расчета зависимости $M(z)$ практически означает реализацию процедуры численного интегрирования базового решения “виток – виток” и требует использования компьютера.

Определим взаимную индуктивность прямоугольных катушек, используя рассмотренные расчетные модели.

В системе “диполь – виток” расчет выполняется по формуле

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{w^2 S^2}{z^3},$$

где $S = a_0 b_0$ (a_0, b_0 — размеры прямоугольника, взятые по средней линии обмоток катушек).

При замене каждой из катушек прямоугольным витком со сторонами a_0 и b_0 расчет взаимной индуктивности такой системы проведем на основе метода участков:

$$M = w_1 w_2 \sum_{k=1}^{4}\sum_{p=1}^{4} M_{kp},$$

где M_{kp} — взаимная индуктивность между k-м отрезком первого витка и p-м отрезком второго витка (рис. 10.11).

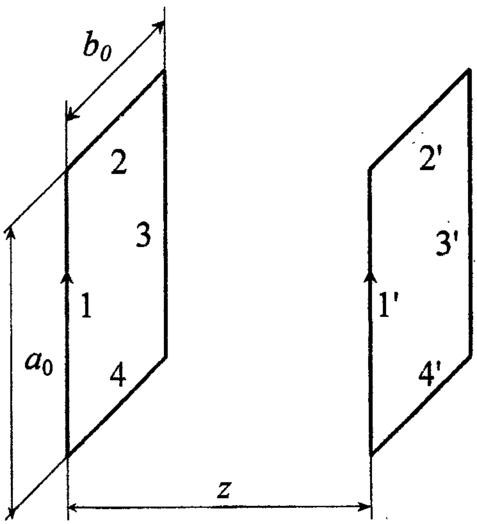


Рис. 10.11

Значения M_{kp} для всех взаимно перпендикулярных отрезков первого и второго витков равны нулю (например, $M_{12'}=0$). Для параллельных отрезков M_{kp} определяется соотношением, приведенным в [1]:

$$M_{kp}=\pm\frac{\mu_0\ell}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{\ell+\sqrt{\ell^2+D^2}}{D}\right)-\frac{\sqrt{\ell^2+D^2}-D}{\ell}\right],$$

где ℓ — длина отрезков; D — расстояние между ними.
В данном случае

$$\ell=\begin{cases}a_0\\ b_0\end{cases};\qquad D=\begin{cases}z\\ \sqrt{z^2+a_0^2}\\ \sqrt{z^2+b_0^2}\end{cases}.$$

Знак коэффициента M_{kp} определяется следующим образом. Выбираются одинаковые положительные направления обхода каждого прямоугольника. При совпадении направления обхода в k-м и p-м отрезках берется знак «плюс», в противном случае — знак «минус».

Учесть реальные размеры катушек можно так же, как это было сделано для круглых катушек. Для учета числа витков w_1 и w_2 катушек величину M_{kp} следует умножить на $w_1\,w_2$.

Для смешанной пары катушек определим их взаимную индуктивность, когда источником магнитного поля является круглая катушка, используя расчетную модель "виток – виток" (рис. 10.12, *а*).

Для расчета магнитного потока Φ_{21} сквозь поверхность, ограниченную прямоугольным контуром ℓ, воспользуемся известным выражением [1]:

$$\Phi_{21}=\oint\limits_{\ell}A_2 dl.$$

Векторный потенциал тока $i_1 w_1$, протекающего по круговому витку радиуса R_0, в любой точке прямоугольного витка на расстоянии R от оси витка равен по абсолютной величине

$$A_2 = A_{2\varphi} = \frac{\mu_0 i_1 w_1}{2\pi}\sqrt{\frac{R_0}{R}}f(k)$$

и, находясь в плоскости, параллельной плоскости кругового витка, направлен перпендикулярно радиусу-вектору $\mathbf{R}$.

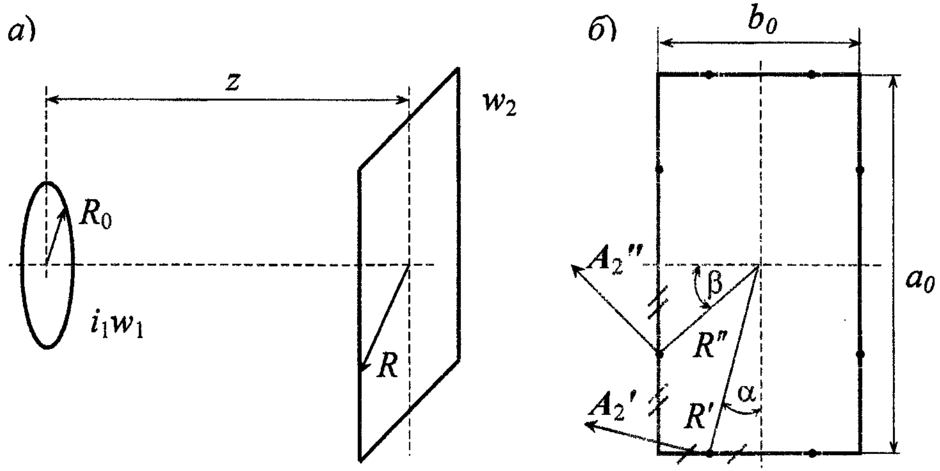


Рис. 10.12

В последнем выражении $f(k)$ — используемая ранее функция, которая определяется значениями эллиптических интегралов первого и второго рода модуля k, определяемого из выражения

$$k^2 = \frac{4R_0R}{z^2 + \left(R_0 + R\right)^2}.$$

Рассчитаем магнитный поток Φ_{21}, выполняя численное интегрирование по прямоугольному контуру. Рассматривая контур ℓ как совокупность отрезков, приближенно представим интеграл суммой четырех одинаковых, с учетом симметрии задачи, пар слагаемых. Для соответствующих каждой паре отрезков длиной $b_0/2$ и $a_0/2$ определим в их средних точках (рис. 10.12, *б*) векторные потенциалы A_2' и A_2''. Проектируя найденные векторы на соответствующие стороны контура, для расчета Φ_{21} получим выражение

$$\Phi_{21} = 4\left[A'_2\cos\alpha\ \frac{b_0}{2} + A''_2\cos\beta \cdot \frac{a_0}{2}\right].$$

Тогда взаимную индуктивность $M = w_2\Phi_{21} / i_1$ круглой и прямоугольной катушек, находящихся на расстоянии z друг от друга, можно рассчитать по формуле

$$M = \frac{\mu_0 w_1 w_2 S}{2\pi}\left[\sqrt{\frac{R_0}{R'}}\frac{f(k')}{R'} + \sqrt{\frac{R_0}{R''}}\frac{f(k'')}{R''}\right],$$

где $S = a_0 b_0$ — площадь прямоугольного контура; модули k' и k'' определены для значений R' и R'' соответственно.

Уменьшения погрешности при определении зависимости $M(z)$, как и в рассмотренных ранее случаях, можно добиться, выполняя численное интегрирование выражения для определения магнитного потока Φ_{21} с достаточной точностью, что практически потребует применения компьютера.

Зависимость взаимной индуктивности круглых многовитковых катушек от расстояния между ними можно найти путем численного расчета магнитного поля с помощью программы *Qfield*. При этом учитываются конечные размеры поперечного сечения катушек.

Для определения области расчета принимаем во внимание осевую симметрию и соосность катушек. Так как катушка, ток в которой не равен нулю, имеет плоскость симметрии, следом которой в плоскости рис. 10.13 является линия $0r$, область расчета можем ограничить осью симметрии z, линией $0r$ и четвертой частью окружности с центром в средней точке 0 катушки.

При достаточно большом радиусе окружности можем принять на ней условие A=0, допуская, что при большом удалении от катушки нормальная к окружности составляющая магнитной индукции значительно меньше касательной составляющей. Радиус этой окружности выбираем приблизительно в 10 раз бо́льшим наибольшего расстояния D между катушками, которое достигается при проведении опыта. На оси симметрии векторный магнитный потенциал A равен нулю; на линии $0r$ $\partial A/\partial z = 0$, так как линии магнитной индукции подходят к ней под прямым углом.

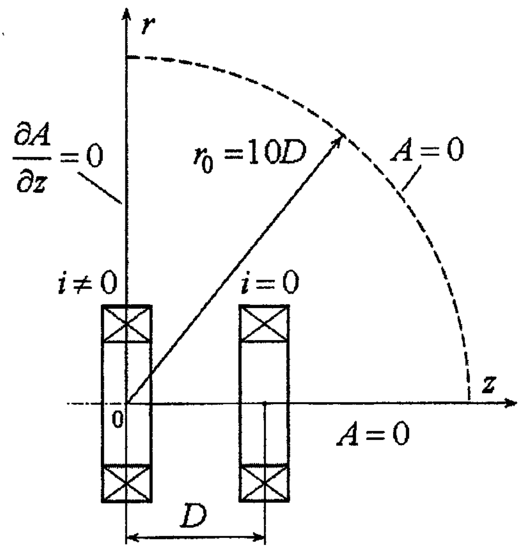


Рис. 10.13

Объем расчетов задает преподаватель.

Контрольные вопросы

1. Почему целесообразно применение различных расчетных моделей при расчете взаимной индуктивности катушек? В каких случаях какую из расчетных моделей следует использовать?

2. Каков простейший алгоритм численного расчета взаимной индуктивности многослойных катушек?

3. Сечение катушки представлено в виде совокупности n элементарных витков. Сколько слагаемых содержит выражение для приближенного численного расчета индуктивности катушки? Можно ли при таком расчете принять, что витки имеют бесконечно малые поперечные сечения?

4. Изменится ли взаимная индуктивность соосных катушек, и если изменится, то как, если в окно обеих катушек вставить: а) ферромагнитный стержень; б) стержень из немагнитного проводящего материала? Зависит ли ответ от того, какой ток протекает в катушках: постоянный или переменный?

5. Как изменится взаимная индуктивность катушек при увеличении числа витков одной катушки в два раза и уменьшении числа витков другой катушки в три раза?

Работа 11

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПОВЕРХНОСТНОГО ЭФФЕКТА И ЭФФЕКТА БЛИЗОСТИ НА СОПРОТИВЛЕНИЯ ТОКОПРОВОДОВ

Цель и задачи, решаемые в работе

Целями работы являются: ознакомление с методами измерения и расчета активного и внутреннего реактивного сопротивлений массивных токопроводов с учетом неравномерности распределения переменного тока по их сечению; уяснение зависимости этих сопротивлений от факторов, влияющих на распределение тока – таких, как магнитная проницаемость и удельная электрическая проводимость материала проводов, их форма, размеры поперечного сечения и взаимное расположение.

В работе экспериментальным и расчетным путем находят сопротивления переменному току цилиндрических медных стержней, трубчатой стальной шины, а также такой же шины с продольным разрезом. В задачу работы входит также анализ влияния ферромагнитной плиты, находящейся в поле токопроводов, на сопротивление проводов и нахождение опытным и расчетным путем электромагнитного поля на ее поверхности [1, 6, 8, 16, 17].

Описание установки и методики проведения эксперимента

Так как в лаборатории исследования проводятся при частоте 50 Гц, то для заметного проявления изучаемого явления неравномерного распределения переменного тока необходимо, чтобы провода имели достаточно большое сечение. Исследуемыми объектами являются цилиндрические медные стержни диаметром 3 см, трубчатая стальная шина с внешним диаметром 8,3 см и толщиной стенки 0,65 см, а также такая же шина с продольным разрезом шириной 0,9 см (рис. 11.1).

Длина исследуемых объектов около 2 м. Такая длина позволяет пренебречь влиянием концов проводов и считать, что в их средней части, где устанавливается измерительное устройство, распределение тока такое же, как и для бесконечно длинных проводов.

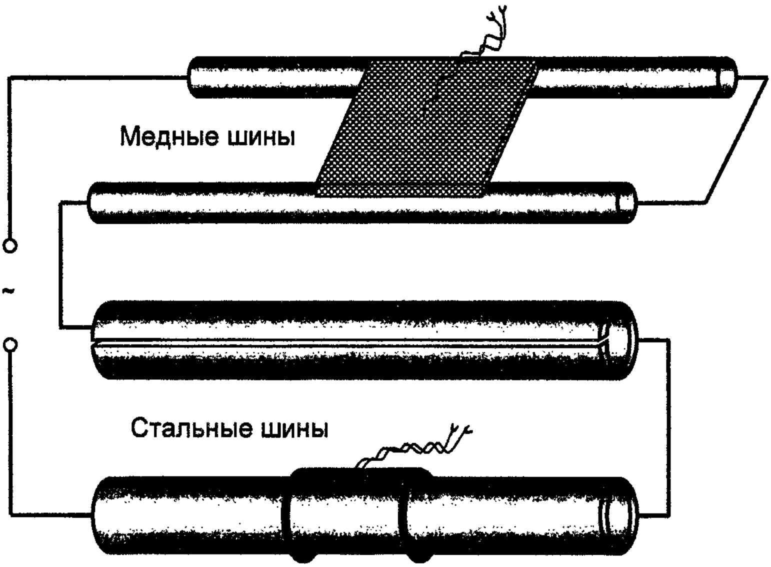


Рис. 11.1

Питание токопроводов осуществляется от трансформатора, рассчитанного на большой ток во вторичной цепи при малом напряжении. Его коэффициент трансформации равен 120.

Исследуемые провода с помощью гибких медных полос и специальных контактных устройств присоединены к выводам вторичной обмотки трансформатора. Во вторичную цепь включен измерительный трансформатор тока проходного типа. При больших токах такие трансформаторы удобно использовать, так как при проведении измерений достаточно пропустить шины сквозь окно магнитопровода трансформатора.

Первичную обмотку нагрузочного трансформатора подключают к сети через автотрансформатор соответствующей мощности. Этим достигается возможность регулирования напряжения и тока во вторичной цепи трансформатора.

Разделение реактивного сопротивления проводов на внутреннее x_i и внешнее x_e сопротивления при переменном токе просто и точно выполняется только для коаксиального кабеля. Для проводов сложной формы сечения, а также при наличии других проводов с токами или даже массивных проводящих тел, расположенных поблизости от исследуемого провода, распределение тока на поверхности является неравномерным. В силу этого разделение реактивного сопротивления на внутреннее и внешнее оказывается затруднительным и не имеющим особого смысла. Однако для проводов сложной формы сечения из ферромагнитного материала такое разделение величины x на x_i и x_e имеет большое значение ввиду того, что при этом, как правило, основным является внутреннее реактивное сопротивление x_i вследствие большой магнитной проницаемости материала и, что особенно важно, оно вычисляется с высокой точностью и весьма просто по найденному активному сопротивлению из соотношения $x_i = 0{,}6r$. Существенно при этом, что внутреннее реактивное сопротивление x_i практически не зависит от формы всего контура тока, которая определяет внешнее реактивное сопротивление x_e. Это дает возможность производить расчеты реактивного сопротивления сложных контуров из ферромагнитных проводов сложной формы сечения.

Для определения активного и реактивного сопротивлений проводов из неферромагнитных материалов на основе формулы

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}}$$

необходимо измерить падение напряжения таким образом, чтобы был учтен весь магнитный поток, охватывающий контур. Для двух одинаковых параллельных проводов, один из которых является прямым, а другой — обратным, измерительный контур *abdc* должен быть расположен так, как показано на рис. 11.2. Для проводов из ферромагнитного материала, как было отмечено, для расчета величины x целесообразно разделить реактивное сопротивление на внешнее и внутреннее. Для оценки величины x_i опытным путем необходимо измерить падение напряжения вдоль линии тока на поверхности провода (рис. 11.3). Наилучший результат получим, если выбрать для такого измерения ту линию тока, на которой плотность тока максимальна. При этом мы определяем и значение активного сопротивления *r*, весьма близкое к измеренному при помощи контура *abdc* (см. рис. 11.2). Небольшое отличие возникает за счет того, что магнитный поток сквозь поверхность, охватываемую контуром *abdc*, оказывается не точно в фазе с током *I* ввиду того, что в течение периода ток перераспределяется по-разному по сложному сечению провода. Однако для проводов из ферромагнитного материала это обстоятельство проявляется весьма слабо, так как основная часть потока замыкается целиком внутри тела проводника, и распределение тока вдоль контура сечения проводника в течение периода меняется незначительно.

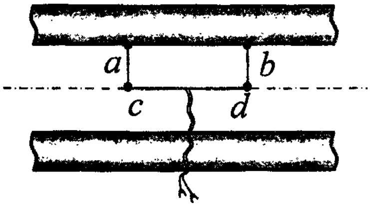


Рис. 11.2

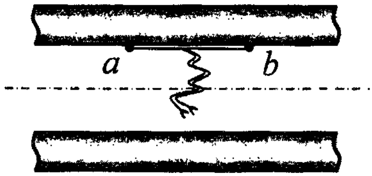


Рис. 11.3

Для измерения падения напряжения служат контактные устройства, основой которых являются пары небольших металлических конусов из неферромагнитного материала, прижимаемых к поверхности проводов. К этим контактным конусам припаяны соединительные провода, выведенные бифиляром за пределы устройства к измерительным приборам. Расстояние между остриями контактных конусов $\ell = 25$ см.

Измерение полного сопротивления, приходящегося на один провод (см. рис. 11.2) и внутреннего сопротивления провода (см. рис. 11.3) производится с помощью электронного вольтметра и фазометра, а также включенного через трансформатор тока амперметра. Принципиальная схема установки, используемая при проведении исследований, показана на рис. 11.4. Показания вольтметра и фазометра позволяют определить комплексы действующих значений напряжений, измеряемых на участке провода длиной ℓ.

При измерении полного падения напряжения, приходящегося на один провод на длине ℓ, выполненном при расположении измерительного контура в соответствии с рис. 11.2, получаем

$$\dot{U} = Ue^{j\Psi_u} = Ue^{j(\alpha-90^\circ)},$$

где U — показание вольтметра; α — показание фазометра; Ψ_u — начальная фаза напряжения, равная при данном способе измерений углу сдвига φ между измеряемым напряжением и током в проводе.

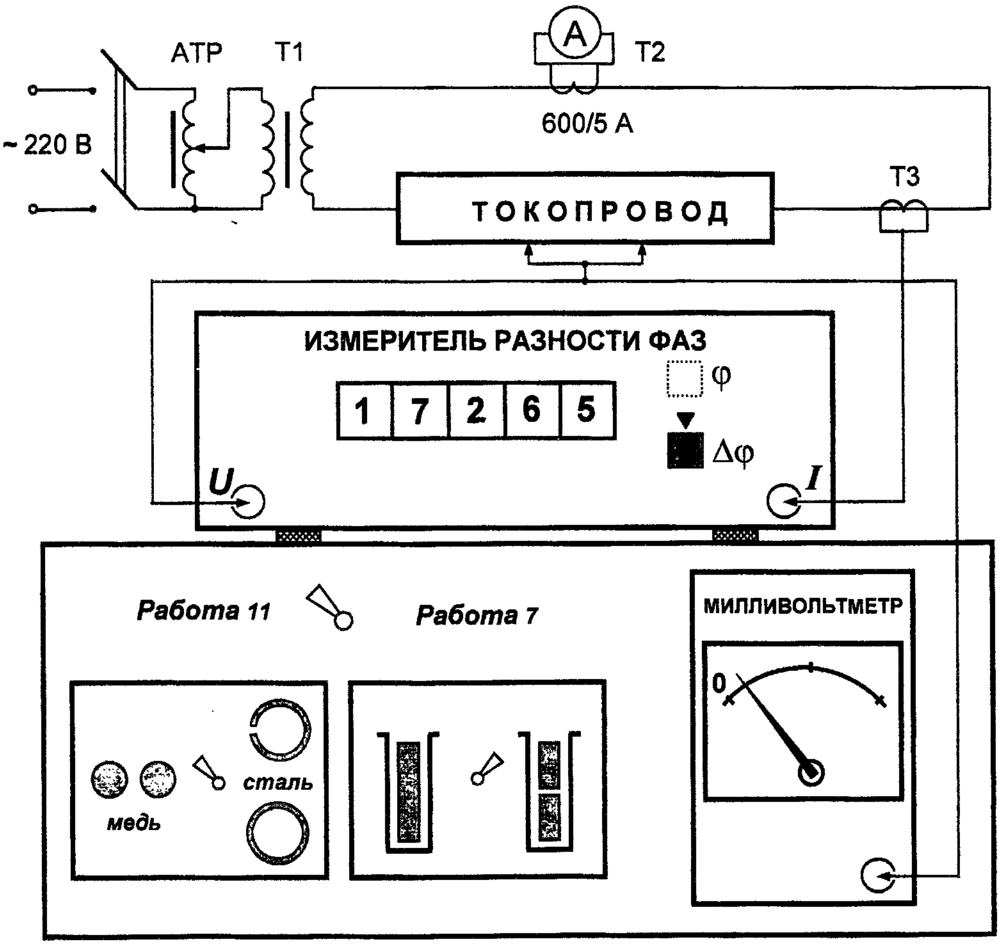


Рис. 11.4

Следовательно, комплексное сопротивление, приходящееся на один провод участка, можно вычислить по формуле

$$Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U}{I} e^{j\varphi} = r + jx.$$

Все измерения в конкретной системе токопроводов целесообразно проводить при одной и той же температуре. При изменении температуры следует в дальнейшем при расчете учесть изменение удельной проводимости материала проводов.

По данным измерения напряжений, проведенным (в соответствии с рис. 11.3), когда провода измерительного контура на участке проходят вплотную к линии тока, непосредственно могут быть найдены комплексы действующих значений плотности тока $\dot{J}$ в соответствующих точках поверхности шины:

$$\dot{J} = \gamma \dot{E} = \gamma \frac{\dot{U}}{\ell}.$$

Выполняя измерения при различных положениях контактных конусов, получают зависимость амплитуды и фазы плотности тока на поверхности шин от угловой координаты.

Ранее отмечалось, что при размещении контактных конусов на поверхности вдоль линии тока с максимальной плотностью тока можно при измерении по схеме, изображенной на рис. 11.3, достаточно точно определить комплексное сопротивление токопроводов из ферромагнитного материала, которое можно считать внутренним сопротивлением шины:

$$Z_i = r + jx_i.$$

Таким же образом при слабом влиянии эффекта близости приближенно определяют внутреннее сопротивление и для неферромагнитных шин.

Отметим, что для системы из двух круглых медных шин экспериментальное определение положения линии с наибольшей плотностью тока не требуется, так как ей соответствует на поверхности шины ближайшая к обратному проводу линия, охватываемая наибольшим внутренним магнитным потоком.

Сопротивление стальных шин зависит от протекающего по ним тока, так как с изменением тока изменяется напряженность магнитного поля и, следовательно, изменяется магнитная проницаемость материала шины.

В табл. 11.1 приведена зависимость $\mu/\mu_0 = f(H)$ для материала стальной шины, полученная в лаборатории на основании кривой намагничивания, снятой баллистическим методом для кольцевого образца, отрезанного от исследуемой стальной трубчатой шины.

Таблица 11.1

μ/μ_0	245	375	485	1070	1215	1200	1070
H, А/м	45	95	170	260	340	420	640
μ/μ_0	935	840	755	685	635	580	530
H, А/м	850	1050	1280	1490	1700	1910	2120

Для оценки влияния окружающих токоведущие шины проводящих и ферромагнитных элементов конструкций электротехнических устройств на распределение тока в шинах в лаборатории вблизи шин можно установить проводящую ферромагнитную плиту (рис. 11.5). Ее влияние приводит к изменению распределения плотности тока по контуру сечения шин, а также к изменению их активного и реактивного сопротивлений. Для такой оценки опыт по измерению напряжений на шинах следует выполнить один раз при отсутствии плиты и второй раз при ее внесении.

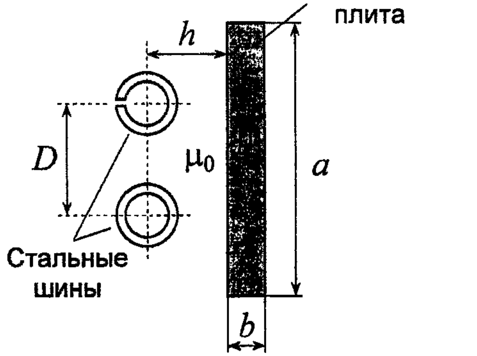


Рис. 11.5

Программа выполнения работы

1. Подготовить установку к работе, для чего включить и прогреть электронные приборы, пропустить по исследуемым шинам ток порядка 300 А для их прогрева.

2. Для двух медных круглых шин, расположенных на минимально допустимом конструкцией креплений расстоянии D, когда влияние эффекта близости сказывается в максимальной степени, снять зависимость плотности тока на поверхности от угловой координаты, меняя ее через 45° от начального положения, которое будем принимать соответствующим линии максимальной плотности тока, лежащей в плоскости симметрии токопровода в ближайшей ко второй шине точке. Полезно после измерений проверить наличие симметрии данных, так как ее отсутствие может указывать либо на недопустимо большую погрешность измерений, либо на влияние близко расположенных проводящих элементов, например стальных конструкций здания или земли.

Измерения этого пункта программы проводятся по схеме, приведенной на рис. 11.3.

3. Для изучения влияния эффекта близости для той же системы двух круглых медных шин снять зависимость полного сопротивления шины от расстояния D, начиная от минимального расстояния, при котором проводились исследования п. 2 программы, до максимально допустимого. Для этого следует перейти к расположению измерительного контура, показанному на рис. 11.2. При данном способе измерений результат не будет зависеть от того, на какой линии тока располагаются конусные контакты на поверхности шины.

4. При максимальном удалении шин друг от друга, что соответствует наименьшему влиянию эффекта близости, следует снова вернуться к схеме измерения внутреннего сопротивления для круглой шины, поместив контакты измерительного контура на линии максимальной плотности тока (см. рис. 11.3) и измерив напряжение, определить приближенно Z_i.

5. Для стальной трубчатой шины исследовать зависимости $r = f(I)$ и $x_i = f(I)$. Пределы изменения тока выбрать таким обра-

зом, чтобы максимум кривой $r = f(I)$, соответствующий максимуму зависимости $\mu/\mu_0 = f(H)$, располагался между ними. Оценку провести по действующему значению напряженности магнитного поля на поверхности шины, которую для ферромагнитной шины можно с высокой степенью точности принять одинаковой во всех точках поверхности и на основании закона полного тока равной $H=I/p$, где I — действующее значение тока в шине; p — внешний периметр ее поперечного сечения.

Измерения выполнить в соответствии со схемой рис. 11.3, расположив конусные контакты в точках, ближайших к обратной шине.

6. Измерить комплекс плотности тока в ряде точек контура сечения стальной трубчатой шины с целью определения положения нити, на которой плотность тока максимальна. Результаты измерений на этой нити используются в дальнейшем для вычисления активного и внутреннего реактивного сопротивлений и построения зависимостей $r = f(I)$ и $x_i = f(I)$.

7. Снять аналогичные п. 5 зависимости $r = f(I)$ и $x = f(I)$ для стальной шины с разрезом. Ток выбрать таким большим, чтобы находиться за максимумом кривой $\mu = f(I)$, так как на практике шины обычно работают в таких условиях.

8. Определить влияние ферромагнитной плиты, вносимой в поле шин, на распределение плотности тока в шинах и их сопротивление, для чего повторно измерить распределение плотности тока по контуру сечения шин и найти параметры шин после внесения ферромагнитной плиты.

Расчет сопротивлений токопроводов и обработка результатов исследования

Практическое значение методов экспериментального исследования и методов расчета сопротивлений массивных токопроводов весьма велико, так как явления поверхностного эффекта и эффекта близости необходимо учитывать при расчете и проектировании многих инженерных сооружений: шин электрических станций и подстанций; проводов линий связи; систем проводников, используемых для заземлений; рельсовых цепей, питаемых переменным током; токопроводов мощных электрофизических и электротехнологических установок и т. д. Поэтому важно проверить надежность оценки сопротивлений разными способами.

На основании проведенных в работе измерений необходимо рассчитать активное либо внутреннее реактивное x_i, либо полное реактивное x сопротивление шин на заданной длине l в зависимости от положения измерительного контура.

Для двухпроводной системы круглых медных шин измеренные значения $r = f(D)$ и $x = f(D)$ следует представить на графиках.

Влияние эффекта близости для медных круглых шин следует также иллюстрировать путем построения по измеренным данным эпюры распределения модуля плотности тока по периметру шины. Для наглядности в точках контура сечения откладывают по направлению внешней нормали отрезки, пропорциональные действующему значению плотности тока. Рекомендуется оценить отклонение плотности тока в разных точках от среднего на поверхности значения.

По измеренному при наибольшем расстоянии между круглыми шинами напряжению (п. 4 программы) необходимо определить приближенно внутреннее сопротивление $Z_i = r + jx_i$. Эти значения r и x_i следует сопоставить с рассчитанными по известным формулам [1], справедливым для проводов из неферромагнитного материала и не учитывающим эффект близости:

$$r = Z_i \cos\varphi; \quad x_i = \mathbf{Z}_i \sin\varphi,$$

где $Z_i = r_0 \dfrac{R\sqrt{\omega\mu\gamma}}{2} \dfrac{b_0}{b_1}$; $\varphi = \beta_0 - \beta_1 - \pi/4$;

r_0 — сопротивление провода радиусом R при постоянном токе; b_0 и b_1 — модули функций Бесселя первого рода соответственно нулевого $J_0(x)$ и первого $J_1(x)$ порядков при $x = R\sqrt{-j\omega\mu\gamma}$; β_0 и β_1 — аргументы этих функций при тех же значениях x; значения b_0, b_1, β_0 и β_1 по вычисленному предварительно модулю

$|x| = R\sqrt{\omega\mu\gamma}$ можно найти в справочниках, они приведены также в приложении 6.

Для проводов из ферромагнитного материала эти формулы не дают правильных результатов, так как при их выводе принято μ = const, т. е. не учтены непостоянство магнитной проницаемости и потери на гистерезис.

При резком проявлении поверхностного эффекта сопротивления r и x_i ферромагнитных проводов длиной ℓ следует рассчитывать по формулам

$$r = \frac{\ell}{p}\sqrt{\frac{\mu_e\omega}{\gamma}} \quad \text{и} \quad x_i = 0{,}6r,$$

где μ_e — магнитная проницаемость материала на поверхности провода, определяемая по основной кривой намагничивания при напряженности магнитного поля на поверхности, которую находят из соотношения $H = I/p$ по действующему значению тока I и периметру p провода.

Приведенные формулы справедливы для ферромагнитных проводов любой формы сечения при резком проявлении поверхностного эффекта, т. е. когда поперечные размеры сечения провода больше двойной глубины $Z_{0,05}$, на которой электромагнитная волна, проникающая внутрь провода от его поверхности, практически полностью затухает. На глубину

$$Z_{0,05} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_e\gamma}}$$

доходит только 5% энергии волны. Если поперечные размеры сечения провода всюду больше $2Z_{0,05}$, то можно считать, что отраженные волны в проводе отсутствуют. В таком случае сопротивление зависит не от площади сечения провода, а обратно пропорционально периметру поперечного сечения провода, что и отражено в приведенных формулах.

Для ферромагнитных проводов следует прежде всего оценить, удовлетворяют ли их параметры условию резкого проявления поверхностного эффекта, т. е. можно ли с достаточным основанием использовать указанные расчетные формулы.

Для стальной шины трубчатого сечения необходимо на одном графике представить зависимости $r = f(I)$ и $x_i = f(I)$, полученные на основании опытных данных и по расчетным формулам, и объяснить характер полученных зависимостей.

Для стальной шины с разрезом следует построить эпюру распределения плотности тока по внешней части ее контура поперечного сечения, а также, как и для шины трубчатого сечения, построить опытные и расчетные зависимости $r = f(I)$ и $x_i = f(I)$.

В заключение следует проанализировать влияние различных факторов на сопротивления проводов, сопоставляя между собой результаты измерений и расчетов.

Исследовать поверхностный эффект и эффект близости в массивных токопроводах в широком диапазоне частоты тока можно путем численного расчета поля с помощью программы *Qfield*. При этом поддаются расчету параметры токопроводов при учете насыщения как материала проводов, так и окружающих их ферромагнитных элементов конструкций.

Два расположенных в однородной среде длинных медных провода круглого сечения имеют две плоскости симметрии, следы которых в плоскости $x0y$ их поперечного сечения есть оси x и y (рис. 11.6). Поскольку плоскость $y = 0$ является плоскостью

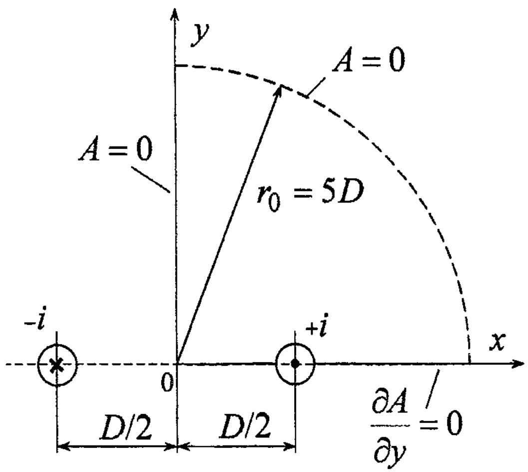


Рис. 11.6

симметрии векторного магнитного потенциала, на ней выполняется условие $\partial A/\partial y = 0$. На оси y векторный магнитный потенциал равен нулю, поэтому область расчета находится в первом квадранте плоскости $x0y$. Ограничиваем ее дугой окружности радиусом $r_0 = 5D$, где D — расстояние между осями проводов, и принимаем на ней условие $A = 0$.

Рассчитанное численно магнитное поле, а также сопротивление проводов и их индуктивность при различных расстояниях D между проводами следует сравнить с результатами опыта.

Аналогичные расчеты следует выполнить и для длинных стальных труб при условии постоянства магнитной проницаемости их материала. Кроме сопоставления расчетного и опытного значений сопротивлений труб следует сравнить также получаемые из опыта и расчета распределения плотности тока по внешней окружности их поперечного сечения. Используя заданную нелинейную характеристику материала труб, рассчитать их сопротивление при различных токах, принимаемых при выполнении опыта.

При расчете параметров труб с учетом расположенной рядом с ними ферромагнитной плиты (рис. 11.7) область расчета

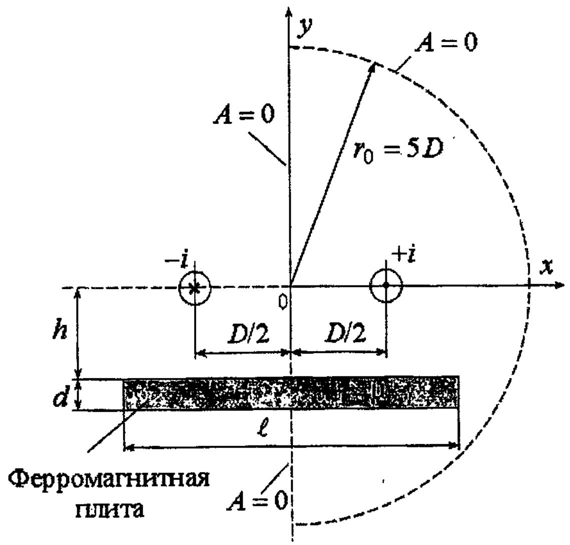


Рис. 11.7

отличается от показанной на рис. 11.6, поскольку ось x уже не является линией геометрической симметрии и симметрии поля.

Область численного расчета ограничена (см. рис. 11.7) осью y и полуокружностью радиусом $r_0 = 5D$.

Необходимые размеры и объем расчетов задает преподаватель.

Контрольные вопросы

1. Может ли плотность протекающего в проводе переменного тока иметь в разных точках его поперечного сечения различные направления в один и тот же момент времени?

2. Как с изменением частоты тока в проводе изменяется его: а) активное сопротивление; б) внутреннее реактивное сопротивление?

3. Как при уменьшении расстояния между проводами с прямым и обратным токами изменяется характер распределения плотности тока в их сечении?

4. Почему при внесении проводящей плиты в поле провода с переменным током изменяется распределение плотности тока по сечению провода?

5. Какой из проводов одинакового радиуса имеет большее активное сопротивление переменному току: а) медный или алюминиевый; б) медный или стальной ($\mu/\mu_0 = 100$)?

6. По двум соседним проводам протекает постоянный ток. Будет ли распределение тока по сечению провода таким же, как и у уединенного провода, по которому течет постоянный ток?

Работа 12

ИЗМЕРЕНИЕ ВЗАИМНОЙ ИНДУКТИВНОСТИ КАТУШЕК БАЛЛИСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Цель и задачи, решаемые в работе

Целью работы является ознакомление с баллистическим методом измерения взаимной индуктивности, а также с общими принципами расчета взаимной индуктивности катушек [1, 2, 10, 16, 25].

Описание установки и методики проведения экспериментов

Установка позволяет исследовать зависимость взаимной индуктивности двух круглых или двух прямоугольных катушек от расстояния между ними.

Средние радиусы круглых катушек $R_1 = R_2 = 81$ мм, толщина каждой из них 29 мм, число витков $w_1 = w_2 = 338$ (рис. 12.1).

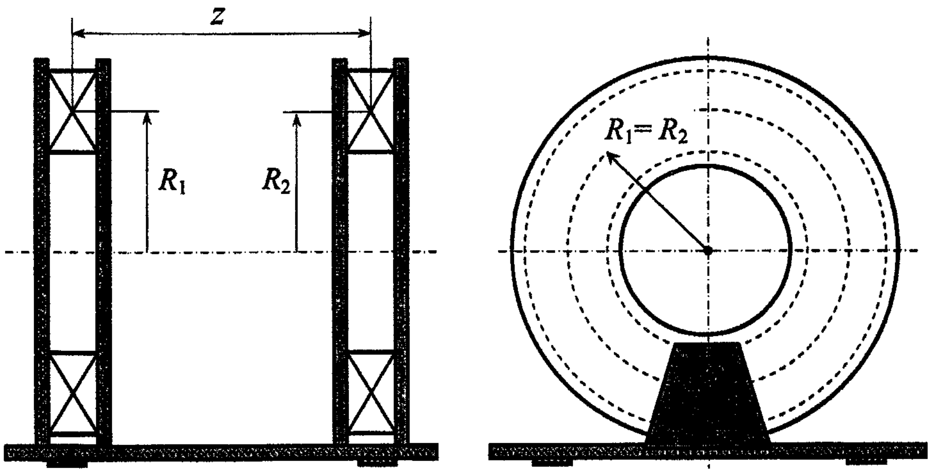


Рис. 12.1

В лаборатории имеются также две пары прямоугольных катушек. Подвижная катушка первой пары имеет 1000 витков, неподвижная — 475 витков. Подвижная катушка второй пары имеет 1500 витков, неподвижная — 300 витков. Толщина прямоугольных катушек 22 мм. Средние длины их сторон: $a = 100$ мм, $b = 200$ мм (рис. 12.2).

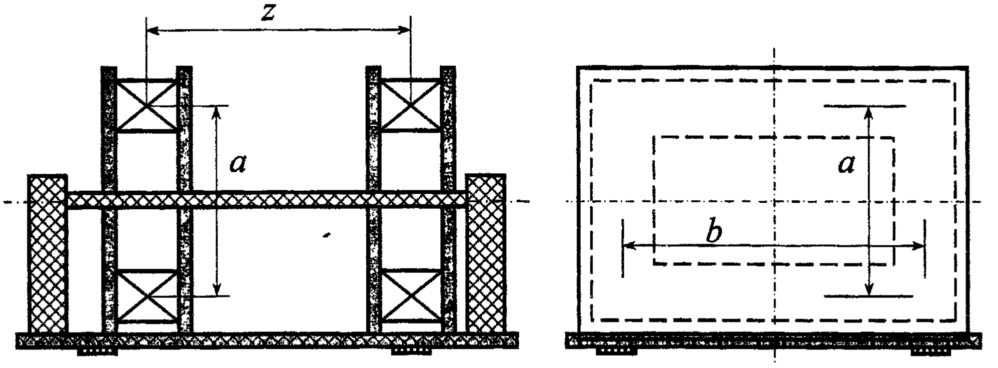


Рис. 12.2

Катушки расположены коаксиально на направляющих. Одна из катушек закреплена, другая-может перемещаться по направляющим. На стойках имеются шкалы для отсчета расстояния z.

При выполнении опытов одну из катушек включают в цепь источника постоянного тока через регулировочный реостат, амперметр и рубильник (рис. 12.3).

Вторую катушку включают в цепь баллистического гальванометра. В цепь гальванометра включают также вторичную катушку образцового соленоида, используемого при градуировке гальванометра, и магазин сопротивлений для подбора сопротивления цепи гальванометра (приложение 1).

Включив ток в одну из круглых катушек, измеряют магнитный поток, сцепляющийся со второй катушкой. Измерения выполняют при различных расстояниях между катушками. При этом ток в первой катушке обычно поддерживается постоянным. По мере удаления катушек друг от друга показания гальванометра могут оказаться столь малыми, что точность измерений существенно снижается. Поэтому при больших расстояниях между катушками целесообразно увеличивать ток в катушке, учитывая это в дальнейшем при расчете взаимной индуктивности.

После выполнения экспериментов для круглых катушек рассчитывают взаимную индуктивность в зависимости от расстояния между ними на основании формул и графиков, приведенных в работе 10.

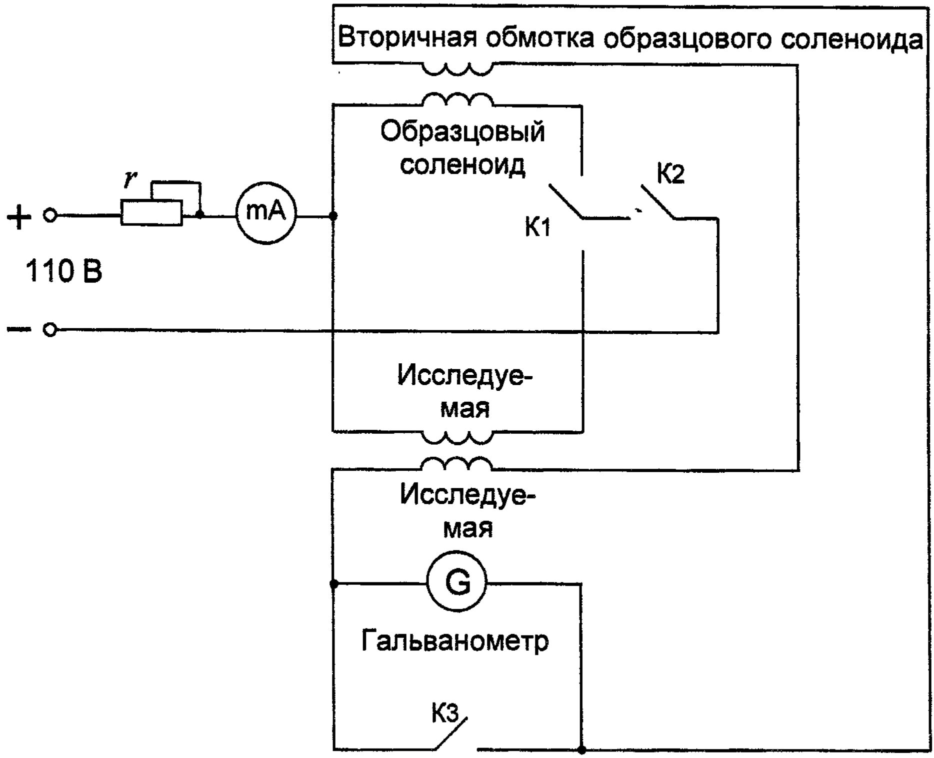


Рис. 12.3

Затем переходят к аналогичным измерениям и расчетам для прямоугольных катушек.

Программа выполнения работы

1. Выполнить градуировку гальванометра по схеме, приведенной в приложении 1, подавая ток в образцовый соленоид и включая в измерительную цепь одну из исследуемых катушек. Рассчитать баллистическую постоянную гальванометра.

2. Снять баллистическим методом зависимости взаимной индуктивности двух круглых катушек от расстояния между ними.

3. Снять аналогичную зависимость для указанных преподавателем двух прямоугольных катушек.

4. Для проверки данных опыта на этом же занятии рассчитать взаимную индуктивность для круглых и прямоугольных катушек при одном из расстояний между ними, принятом при выполнении опыта.

Обработка результатов исследования и оформление отчета

Построить зависимости $M = f(z)$ для круглых и прямоугольных катушек, полученные экспериментально и путем расчета.

Помимо неизбежных погрешностей измерений причиной расхождения опытных и расчетных данных может быть сделанная при расчете замена катушек с конечным сечением обмоток эквивалентными тонкими контурами. Очевидно, что погрешности, возникающие в результате такого упрощения, будут иметь наибольшее значение при малых расстояниях между катушками.

Как и при выполнении работы 10, зависимость взаимной индуктивности круглых многовитковых катушек от расстояния между ними можно найти путем численного расчета магнитного поля с помощью программы *Qfield*. При этом учитываются конечные размеры поперечного сечения катушек. Область расчета и граничные условия определяются точно так же, как и в работе 10.

Размеры элементов и объем расчетов задает преподаватель.

Основные расчетные соотношения

Взаимная индуктивность двух катушек определяется соотношением

$$M = \frac{\Psi_{21}}{i_1},$$

где Ψ_{21} — потокосцепление второй катушки, обусловленное током первой катушки.

Поэтому нахождение M сводится к поиску потокосцепления Ψ_{21} при заданном токе i_1.

Взаимная индуктивность двух круглых катушек со средними радиусами обмоток R и числом витков w каждой выражается формулой [1]

$$M = \mu_0 w^2 R f(k).$$

При выводе этого выражения предполагается, что линейные размеры сечений катушек малы по сравнению с их радиусами. Поскольку параметр k функции $f(k)$ зависит от расстояния между катушками, то, пользуясь этой формулой, можно рассчитать и построить искомую зависимость $M(z)$.

Выражения для расчета взаимной индуктивности прямоугольных катушек, представляемых в виде прямолинейных отрезков, приведены в работе 10. Применение метода участков позволяет записать взаимную индуктивность в виде

$$M = w_1 w_2 \sum_{k=1}^{4} \sum_{p=1}^{4} M_{kp},$$

где w_1, w_2 — числа витков катушек; M_{kp} — взаимная индуктивность участков k и p катушек, определяемая выражением [1]

$$M_{kp} = \pm \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \left[\ln\left(\frac{\ell + \sqrt{\ell^2 + D^2}}{D} \right) - \frac{\sqrt{\ell^2 + D^2} - D}{\ell} \right],$$

где ℓ — длина участка; D — расстояние между катушками.

РАЗДЕЛ IV

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ

Наряду с теоретическим расчетом и непосредственным экспериментальным исследованием электрических и магнитных полей большое практическое значение приобрело исследование этих полей путем моделирования. В основу моделирования положен тот факт, что многие поля описываются одними и теми же уравнениями. Например, постоянное электрическое поле в диэлектрике при отсутствии объемных зарядов, постоянное магнитное поле в области вне токов и постоянное электрическое поле в проводящей среде в области вне источников ЭДС описываются аналогичными уравнениями, имеющими соответственно вид:

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0\ (\boldsymbol{E} = -\,\mathrm{grad}\,U),\quad \boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E},\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = 0;$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = 0\ (\boldsymbol{H} = -\,\mathrm{grad}\,U_{\text{м}}),\quad \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H},\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0;$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0\ (\boldsymbol{E} = -\,\mathrm{grad}\,U),\quad \boldsymbol{J} = \gamma\boldsymbol{E},\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{J} = 0.$$

Поэтому если одинаковы геометрические конфигурации областей пространства, в которых существуют эти поля, если аналогичны граничные условия на границах областей и если подобны относительные распределения значений ε, μ и γ внутри областей, то картины этих полей будут подобны друг другу.

Это обстоятельство можно использовать для моделирования одного поля другим. Проще всего и с наибольшей точностью удается экспериментально исследовать электрическое поле в проводящей среде. Поэтому естественно исследование постоянных электрических полей в диэлектрике и постоянных магнитных полей вне токов заменять исследованием электрического поля в проводящей среде на соответствующих моделях. Важно при этом, чтобы при моделировании было соблюдено геометрическое подобие областей, в которых существует поле, а также соблюдены требуемые граничные условия.

Для исследования плоскопараллельных полей можно использовать металлические листы или листы из проводящей бумаги, вырезанные по фигуре, изображающей область исследуемого поля.

Для исследования как плоскопараллельных, так и пространственных полей используется метод моделирования в электролитической ванне.

При выполнении большинства работ целесообразно использовать метод численного моделирования, дополняющий программу экспериментальных и теоретических методов исследования. Рекомендуемое численное моделирование основано на применении программы *Qfield*, позволяющей рассчитать как характеристики электромагнитного поля, так и электромагнитные параметры с учетом нелинейных свойств материалов и в широком диапазоне частоты изменения поля.

Работа 13

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ДВУХПРОВОДНОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ ПОЛЕМ ТОКА В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ

Цель и задачи, решаемые в работе

Целями работы являются: а) изучение на примере двухпроводной линии аналогии между картинами стационарных полей тока в проводящей среде и электрического поля в диэлектрике при схожих граничных условиях; б) установление общих взаимосвязей между описывающими поля величинами, а также закрепление навыков расчета подобных полей.

Задача работы состоит в изучении электрического поля двухпроводной линии, расположенной: а) в безграничной однородной среде; б) над плоской поверхностью земли.

Исследуемому в работе электрическому полю соответствует модель в виде плоскопараллельного электрического поля постоянного тока [1, 3, 4, 8].

Описание установки и методики проведения эксперимента

В лаборатории имеются две установки для изучения электростатического поля двухпроводной линии. В одной из них проводящей средой модели является плоский круглый металлический лист, на границе которого расположены зажимы для подвода тока (рис. 13.1). В этом варианте двухпроводная линия передачи располагается в однородной безграничной среде с постоянной диэлектрической проницаемостью. В другой установке проводящей средой модели служит электропроводящая бумага, форма которой повторяет форму исследуемой области.

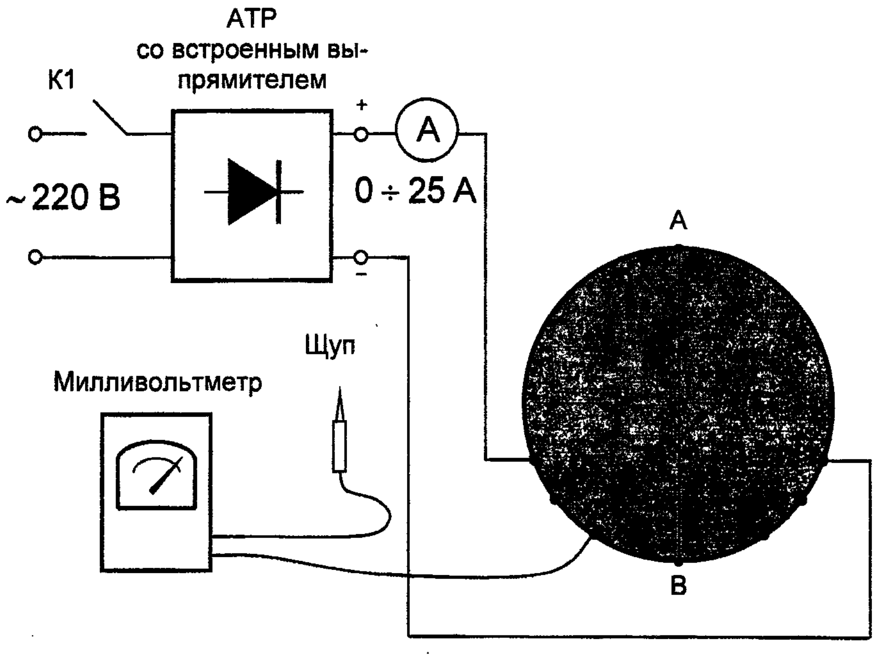


Рис. 13.1

В первой установке зажимы для подвода тока размещены парами симметрично по отношению к средней диаметральной линии *AB*. К какой-либо из этих пар зажимов подводится постоянное напряжение, и через лист пропускается ток 20÷25 А. Постоянство тока во время опыта поддерживается регулировочным реостатом. Установка содержит щуп и милливольтметр для получения опытным путем линий равного потенциала. Провода от милливольтметра подсоединяют к щупу и к одному из свободных зажимов на листе.

В соответствии с тем, что нам известно о картине электрического поля двухпроводной линии, можем утверждать, что линии тока в проводящей среде являются окружностями, проходящими через электрические оси электродов, а линии равного потенциала в плоскостях, перпендикулярных осям электродов, образуют семейство эксцентрических окружностей с центрами на прямой, проходящей через оси электродов. Если диаметры сечений электродов малы по сравнению с расстоянием между ними, то электрические оси практически совпадают с геометрическими осями электродов.

Для исследования такого поля нет необходимости располагать бесконечной проводящей средой. Достаточно из всей среды вырезать часть, ограниченную со всех сторон линиями тока. Именно такой частью и является исследуемый круглый плоский железный лист. Боковая поверхность исследуемого листа как граница проводящей среды совпадает с линиями тока.

Плоские поверхности листа соответствуют двум плоскостям, перпендикулярным осям электродов или соответственно проводам линии передачи. Линии напряженности в поле линии передачи лежат в плоскостях, параллельных этим плоскостям листа. Боковая цилиндрическая поверхность листа соответствует цилиндрическим поверхностям, образованным в электрическом поле линий передачи линиями напряженности электростатического поля, являющимися дугами окружностей одинакового радиуса.

При выполнении работы в лаборатории получают на листе семейство линий равного потенциала. Одну из экспериментальных линий равного потенциала совмещают с осью симметрии *AB* (см. рис. 13.1), убедившись вначале, что потенциал на оси симметрии постоянен. Затем проводят на небольшом расстоянии от точки подвода тока крайнюю линию равного потенциала.

Падение напряжения между этой крайней линией и средней делят на равное число частей, соответственно чему достраивают остальные линии равного потенциала. Точки, соответствующие линиям U = const, отмечают маркером.

На основании экспериментально построенной картины линий равного потенциала следует построить картину линий плотности тока, которые одновременно являются и линиями напряженности электрического поля. Эти линии проходят через центры зажимов, служащих для подвода тока, перпендикулярно линиям равного потенциала и также представляют собой окружности.

Рекомендуется построить их таким образом, чтобы весь лист был разделен на целое число трубок равного тока, причем выбирают число трубок так, чтобы средняя длина и средняя ширина образующихся ячеек сетки поля были в каждой ячейке приблизительно равны друг другу. При этом ячейки сетки поля оказываются подобными по конфигурации криволинейными квадратами.

Поскольку каждый из участков границы листа между зажимами является линией тока, то практически можно начинать построение картины линий тока, начиная от одной из указанных граничных линий. Далее намечают положение следующей окружности, проводя ее через центры зажимов перпендикулярно линиям равного потенциала так, чтобы ячейки сетки формировали криволинейные квадраты, затем строят следующую линию и т.д. до второго участка границы листа. Если последняя трубка тока не будет удовлетворять требуемым условиям и ячейки поля в этой трубке не будут подобны ячейкам других трубок поля, то картину линий тока следует корректировать, выбрав другое отношение средней длины к их средней ширине.

При моделировании электрического поля двухпроводной линии на электропроводящей бумаге используется установка, описанная в работе 1, которая содержит источник постоянного напряжения и измерительное устройство для построения эквипотенциальных линий. В этом случае изучению подлежит электрическое поле линии, протянутой вблизи проводящих заземленных поверхностей, например над плоской поверхностью земли.

На рис. 13.2, *а* показаны провода линии над плоской поверхностью земли, электромагнитные свойства которой принимаем идеальными: ее магнитная проницаемость равна нулю, удельная электрическая проводимость бесконечно велика. В этом случае электромагнитное поле не проникает вглубь земли и нормальная к поверхности земли составляющая напряженности электрического поля обращается в нуль.

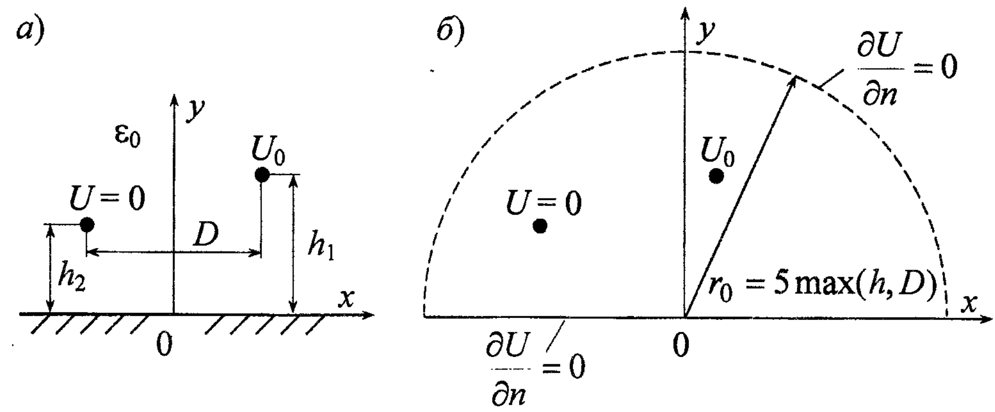


Рис. 13.2

Модель линии на основе электропроводящей бумаги содержит лист бумаги с электродами для ввода и отвода тока. Поскольку на поверхности земли задано условие $\partial U/\partial n = 0$, то на соответствующей ей линии в модели (при $y = 0$) также должно быть выполнено аналогичное условие для электрического потенциала. Это означает, что эта линия должна являться линией отреза бумаги, свободной от электродов.

Так как высота подвеса проводов различна, то плоскости геометрической симметрии в рассматриваемой задаче отсутствуют. На достаточно большом удалении от проводов, например на полуокружности радиусом $r_0 = 5\max(h,D)$ с центром в начале координат, можно принять условие $\partial U/\partial n = 0$ (рис. 13.2, *б*). Отрезая электропроводящую бумагу вдоль полуокружности, оставляем ее также свободной от электродов. В этом случае в точках полуокружности нормальная составляющая плотности тока обращается в нуль, что соответствует условию $\partial U/\partial n = 0$.

Электроды токоввода и токоотвода, выполненные в виде круглых металлических зажимов небольшого радиуса, подсоединены к источнику напряжения и имеют потенциалы 0 В и +15 В.

Методика построения линий постоянного потенциала и линий плотности тока такая же, как и при исследовании поля двухпроводной линии в однородной безграничной среде.

Координаты осей проводов задает преподаватель.

Программа выполнения работы

При моделировании поля двухпроводной линии в однородной среде на основе металлического листа

1. Подключить установку к источнику напряжения. Принимая n=5÷8 промежутков между линиями постоянного потенциала и измеряя потенциалы с помощью щупа, изобразить семейство линий равного потенциала в листе.

2. Выполняя правила построения картины электрического поля, провести линии напряженности на том же листе, на котором были предварительно изображены линии постоянного потенциала.

При моделировании поля двухпроводной линии, протянутой над плоской поверхностью земли, на основе электропроводящей бумаги

1. В соответствии с заданными преподавателем координатами осей проводов линии определить размер листа электропроводящей бумаги. Записать граничные условия на контуре проводящей области для потенциала и (или) его нормальной к границам производной, вырезать лист электропроводящей бумаги и установить электроды.

2. Выполнить такие же измерения и построения, как и при моделировании поля на основе металлического листа.

3. Подключая шунт, определить потребляемый от источника ток.

4. Рассчитать величину $r_{\square} = \dfrac{\Delta U}{i} = \dfrac{1}{\gamma b}$, для чего измерить ток i в полоске бумаги и определить напряжение ΔU на ее отрезке квадратной формы. Методика определения тока и проведения опыта для нахождения сопротивления квадрата бумаги изложена в работе 1.

Обработка результатов исследования и оформление отчета

На тот же рисунок, на котором изображена полученная экспериментально картина линий равного потенциала, наносят рассчитанные теоретически линии равного потенциала и силовые линии.

При построении картины поля двухпроводной линии с помощью металлического листа следует учесть, что линии равного потенциала являются окружностями с центрами на прямой, проходящей через оси проводов, т.е. через центры подводящих ток зажимов (рис. 13.3). Расстояния от центров этих окружностей до средней прямой линии AB равного потенциала определяются формулой [1]

$$|x_0| = \frac{1+k^2}{|1-k^2|} b.$$

Их радиусы находят из выражения

$$R = \frac{2k}{|1-k^2|} b,$$

где b — половина расстояния между осями проводов, т.е. между центрами зажимов.

При этом берется расстояние между геометрическими центрами, так как вследствие малого радиуса сечений зажимов по сравнению с расстоянием между ними электрические оси изображаемых ими проводов линии можно считать совпадающими с геометрическими осями проводов. Зажимы закреплены так, что их центры лежат на окружности листа. Число k характеризует рассматриваемую линию равного потенциала и равно отношению расстояний от любой точки этой линии до электрических осей проводов. Для средней линии $k = 1$. Для крайней линии число k выбирают так, чтобы построенная теоретически крайняя линия прошла через точку пересечения полученной экспериментальным путем крайней линии с отрезком, соединяющим центры зажимов. Числа k для остальных линий следует выбрать так, чтобы общее число рассчитанных теоретически линий было равно числу полученных экспериментально и чтобы приращения потенциала между всеми соседними теоретическими линиями были всюду одинаковыми.

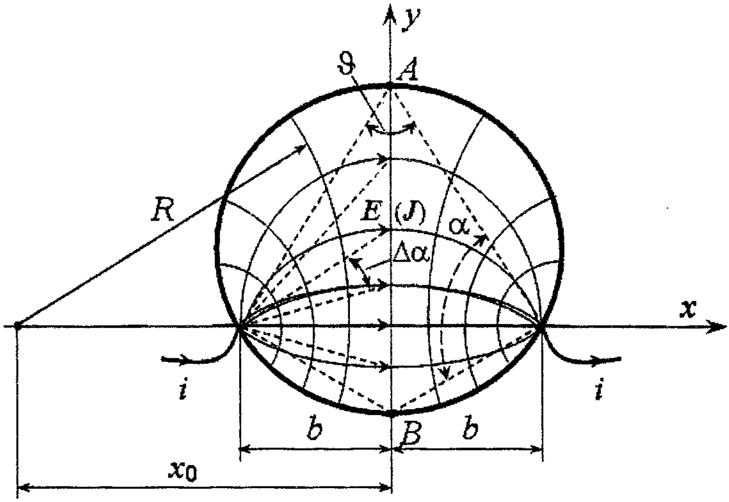


Рис. 13.3

Для построения линий напряженности электрического поля двухпроводной линии разбивают всю исследуемую область на трубки равного потока и сохраняют по возможности одинаковыми для всех ячеек отношения средней длины ячейки к ее ширине.

Обозначим ϑ угол, под которым виден отрезок, соединяющий электрические оси проводов линии, из точек, лежащих на силовой линии (см. рис. 13.3). Чтобы эти линии делили пространство на трубки равного потока, необходимо строить их одну за другой так, чтобы угол ϑ при переходе от каждой линии к соседней изменялся на одну и ту же величину $\Delta\vartheta$. Практически это проще всего осуществить следующим образом. Проводят от центра одного зажима прямые к концам диаметра AB. Угол α между этими прямыми делят на равные части $\Delta\alpha$, число которых равно выбранному ранее числу трубок равного тока. Проводят лучи, отстоящие друг от друга на угол $\Delta\alpha$. Точки пересечения этих лучей с диаметром AB лежат на искомых линиях тока. Через электрические оси и полученные точки проводят окружности, подбирая на оси y положение соответствующих центров y_0.

Теоретически построенную картину поля сопоставляют с полученной на основании экспериментальных данных.

При моделировании электрического поля двухпроводной линии на основе электропроводящей бумаги полученные из опыта линии равного потенциала дополняют линиями напряженности поля, соблюдая правила построения картины электрического поля. На основе опытных данных (ток электрода и напряжение между электродами) следует рассчитать электрическую проводимость G и далее, пользуясь аналогией полей, найти емкость линии $C = G\dfrac{\varepsilon}{\gamma b}$ на единицу ее длины.

Используя выражение комплексного потенциала линейного тока

$$W(z) = -\frac{i}{2\pi\gamma b} j\ln(z - z_1) + C, \tag{13.1}$$

где $z_1 = x_1 + jy_1$ — его координата, можно рассчитать комплексный потенциал поля линии. Результирующий потенциал определяется методом наложения как сумма потенциалов (13.1) заданных и зеркально изображенных токов.

Если заданные токи $+i$ и $-i$ имеют координаты $z_1 = x_1 + jy_1$ и $z_2 = -x_1 + jy_2$, то зеркально изображенные токи $i_3 = +i$ и $i_4 = -i$ — соответственно координаты $z_3 = -x_1 - jy_2$, $z_4 = x_1 - jy_1$ (рис. 13.4).

Комплексный потенциал поля линии

$$W(z) = -\frac{i}{2\pi\gamma b} j\left[\ln(z - z_1) - \ln(z - z_2) + \ln(z - z_3) - \ln(z - z_4)\right].$$

Задавая координаты $z = x+jy$ точек одной из полученных при выполнении опыта линий равного потенциала, рассчитайте, пользуясь выражением для комплексного потенциала, значения электрического потенциала в этих точках и найдите максимальную разность расчетных и опытного потенциала.

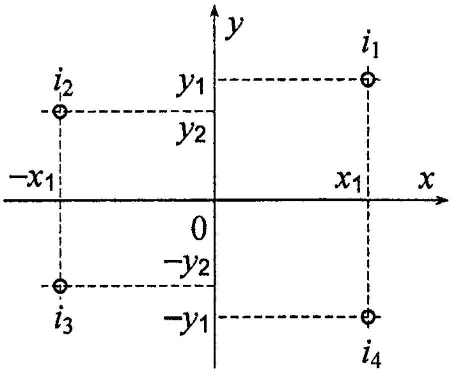


Рис. 13. 4

Пользуясь выражением для комплексного потенциала, рассчитайте распределение потенциала $U(x)$ на поверхности земли (при $y = 0$) и сравните его с полученным в опыте.

Напряженность электрического поля на поверхности земли при $z = x$, $y = 0$ определяется из выражения

$$E_y + jE_x = -\frac{dW}{dz}\bigg|_{\substack{z=x\\y=0}} = \frac{i}{2\pi\gamma b} j\left(\frac{1}{z-z_1} - \frac{1}{z-z_2} + \frac{1}{z-z_3} - \frac{1}{z-z_4}\right).$$

Рассчитайте напряженность поля в нескольких точках на поверхности земли и сравните ее с данными опыта.

При численном расчете электрического поля линии с помощью программы *Qfield*, как и при его моделировании, приходится вводить искусственную границу, поскольку область расчета должна быть ограниченной. Область расчета и условия для потенциала на ее границах показаны на рис. 13.2, *б*. Значение радиуса окружности r_0, ограничивающей область расчета, должно превышать не менее чем в пять раз наибольшее расстояние от электрода токоввода до начала координат.

Необходимые размеры и объем расчетов задает преподаватель.

Контрольные вопросы

1. В чем заключаются условия аналогии электростатического поля и электрического поля постоянного тока в проводящей среде?

2. Какие величины в электрическом поле постоянного тока аналогичны электрическому заряду q, векторам напряженности и электрического смещения электростатического поля?

3. Какие линии в электрическом поле постоянного тока соответствуют линиям: а) равного потенциала; б) напряженности электростатического поля?

4. Почему аналогия электростатического поля и электрического поля постоянного тока в проводящей среде расширяет возможности анализа этих полей?

5. Какая величина в электрическом поле постоянного тока соответствует потоку вектора напряженности электростатического поля?

6. Какая величина в электростатическом поле соответствует удельной мощности потерь в электрическом поле постоянного тока?

7. В электростатическом поле находятся несколько тел с различными диэлектрическими проницаемостями. Какими будут электрические свойства аналогичных тел при моделировании этого поля электрическим полем постоянного тока?

8. Аналогия уравнений электростатического поля и электрического поля постоянного тока является необходимым, но недостаточным условием для моделирования этих полей. Какие еще условия должны выполняться?

Работа 14

МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА ПОЛЕМ ТОКА В ПРОВОДЯЩЕМ ЛИСТЕ

Цель и задачи, решаемые в работе

Целями работы являются: а) изучение аналогии между электрическим полем постоянного тока в проводящей среде и магнитным полем в области, где отстутствуют электрические токи; б) получение практических навыков построения картины поля.

В работе решается задача построения линий напряженности магнитного поля и линий равного скалярного магнитного потенциала около полюсов электрической машины на основе правил графического построения картины поля.

Магнитное поле рассматривается как плоскопараллельное [1, 5, 8].

Описание установки и методики проведения эксперимента

Установка содержит фигурный плоский железный лист (рис. 14.1). Его очертание повторяет конфигурацию границ 1/8 части сечения четырехполюсной электрической машины постоянного тока (рис. 14.2), перпендикулярного ее оси. Линия *abcd* представляет собой очертание полюса; линия *de* пересекает воздушный зазор под серединой полюса; линия *ef* определяет границу якоря; линия *fg* проходит посередине междуполюсного пространства; линия *ga* представляет собой границу ярма.

К листу подводится ток через массивный латунный брусок, припаянный к нему по линии *de*. Так как удельная проводимость материала бруска на порядок больше удельной проводимости листа и толщина бруска значительно превышает толщину листа, то падением напряжения в бруске можно пренебречь и считать линию *de* линией равного электрического потенциала. Линия *dcb* как граница проводящего листа является линией тока. Точно так же линия *efga* является линией тока. Между линиями *dcb* и *efga* проходит по листу весь ток, отводимый посредством ряда проводов с зажимами, припаянными вдоль линии *ab*. При помощи реостатов можно изменять распределение тока между этими проводами, т. е. изменять распределение тока вдоль линии *ab*. В общую цепь включен еще один реостат для поддержания постоянства общего тока в листе.

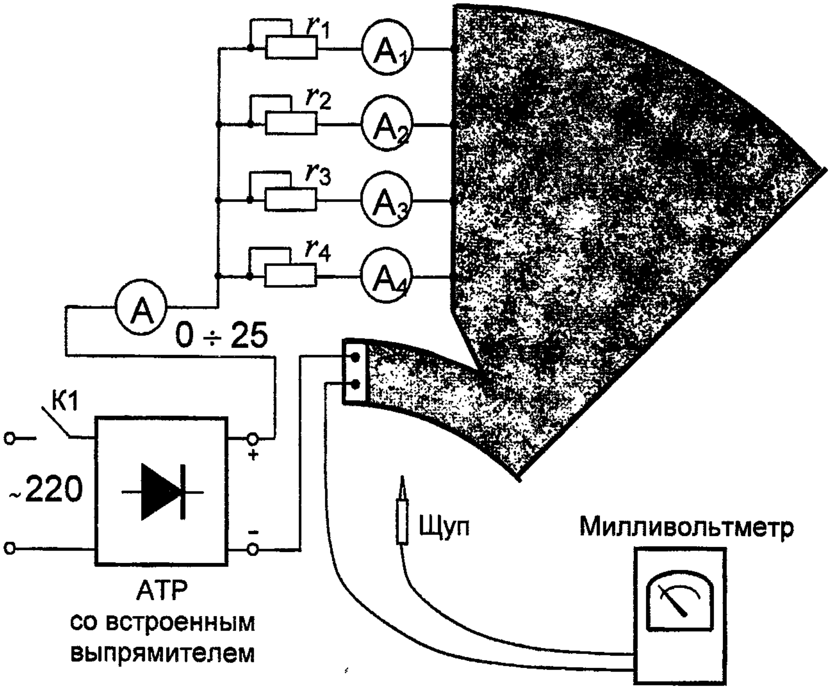


Рис. 14.1

Для нахождения линий равного электрического потенциала на поверхности листа используют милливольтметр с щупом. Один зажим милливольтметра присоединяют к щупу, а другой — к специальному зажиму, имеющемуся на бруске, припаянном к листу по линии *de*.

В работе в основу моделирования положен тот факт, что магнитное поле постоянных токов и электрическое поле постоянных токов в проводящей среде описываются аналогичными уравнениями. Поэтому если одинаковы геометрические конфигурации, а распределение магнитной проницаемости μ и удельной электрической проводимости γ в пространстве и граничные условия в указанных задачах соответствуют друг другу, то и картины полей будут аналогичны.

Исследуя магнитное поле в воздухе около полюса (см. рис. 14.2), можно принять магнитную проницаемость материала полюса, ярма и якоря равной бесконечности. В таком случае линии *dcb*, *ef* и *ga* являются линиями равного скалярного магнитного потенциала.

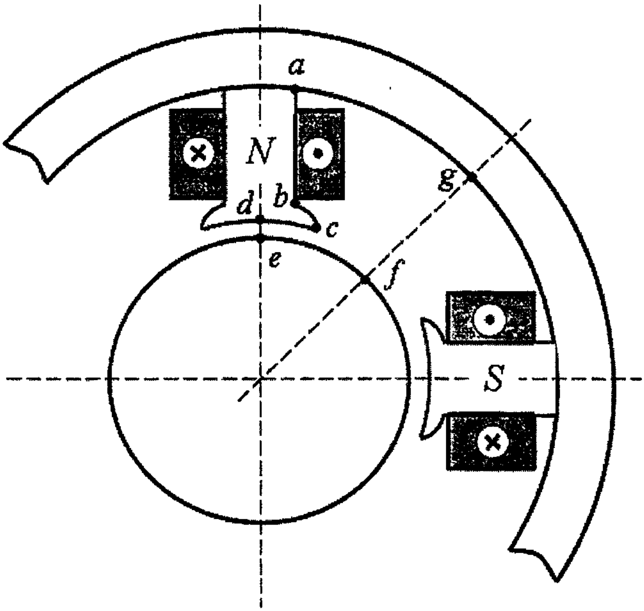


Рис.14.2

Линия *fg* также является линией равного скалярного магнитного потенциала. Действительно, магнитные линии потока рассеяния, идущие от северного полюса к южному в пространстве между полюсами, должны пересекать линию *fg* под прямым углом вследствие симметричного расположения полюсов по отношению к ней. Следовательно, линия *fg* есть линия равного скалярного магнитного потенциала, и потенциал этой линии такой же, как и потенциал на поверхности якоря и поверхности ярма, т. е. на линиях *ef* и *ag*.

При принятом предположении, что магнитная проницаемость стали бесконечно велика, линия *efga* есть линия одного и того же скалярного магнитного потенциала, а линия *dcb* — линия другого потенциала. Разность магнитных потенциалов между этими линиями равна той части магнитодвижущей силы, которая определяется магнитным потоком в воздушном зазоре машины и магнитным сопротивлением воздушного зазора. Принятое допущение о том, что магнитная проницаемость стала бесконечно велика, эквивалентно допущению о том, что магнитное сопротивление пути потока по стальным частям машины бесконечно мало по сравнению с магнитным сопротивлением воздушного зазора. В таком случае разность магнитных потенциалов между линиями *dcb* и *efga* равна полному току *iw* катушки, расположенной на одном полюсе, причем *i* — ток в обмотке этой катушки, *w* — число ее витков. Так как в пространстве, занятом самой катушкой, понятие скалярного магнитного потенциала неприменимо ввиду того, что в этом пространстве протекает электрический ток, то для построения поля прибегаем к следующему приближенному методу. Предполагаем, что катушка имеет бесконечно малую толщину и прилегает непосредственно к поверхности сердечника полюса, т. е. сжимаем сечение катушки к линии *ab*. При построении картины поля во всем пространстве, ограниченном контуром *abcdefga*, можно пользоваться понятием скалярного магнитного потенциала, так как во всем этом пространстве нет электрических токов. Вдоль линии *ab* магнитный потенциал в воздухе изменяется на величину магнитодвижущей силы катушки. Распределение магнитодвижущей силы вдоль линии *ab* зависит от распределения витков катушки вдоль сердечника полюса.

Заметим, что магнитные линии в воздухе должны подходить перпендикулярно к линиям *dcb* и *efga* как к линиям равного потенциала. К линии *ab* магнитные линии подходят не под прямым углом, так как вдоль линии *ab* в воздухе магнитный потенциал изменяется.

В решаемой в лаборатории задаче ограничиваемся рассмотрением поля в средней части электрической машины, т. е. в перпендикулярной к валу машины плоскости, пересекающей машину в ее средней части. В первом приближении поле в этой части можно считать плоскопараллельным, таким же, как для бесконечно длинной машины.

Функция потока $V_м$ и скалярный магнитный потенциал $U_м$ во всей области удовлетворяют уравнению Лапласа для плоскопараллельного поля:

$$\frac{\partial^2 V_м}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_м}{\partial y^2} = 0; \qquad \frac{\partial^2 U_м}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U_м}{\partial y^2} = 0.$$

Уравнение линий напряженности магнитного поля может быть записано в форме

$$V_м = \text{const},$$

и уравнение линий равного скалярного магнитного потенциала имеет вид

$$U_м = \text{const}.$$

Обращаясь к металлическому листу (см. рис. 14.1), можем установить аналогию электрического поля тока в этом листе и магнитного поля в исследуемой области (см. рис. 14.2) электрической машины.

Электрическое поле в листе также является плоскопараллельным, и, соответственно, уравнения Лапласа для электрического потенциала U и функции потока V в листе имеют вид

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0; \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Уравнение линий равного электрического потенциала имеет вид

$$U = \text{const},$$

и уравнение линий напряженности электрического поля может быть записано в форме

$$V = \text{const}.$$

Лист изготовлен из однородного и изотропного в отношении электрической проводимости материала, и, следовательно, между векторами плотности тока $\boldsymbol{J}$ и напряженности $\boldsymbol{E}$ электрического поля существует зависимость $\boldsymbol{J} = \gamma \boldsymbol{E}$, где γ — удельная проводимость материала листа. Поэтому линии напряженности электрического поля одновременно являются и линиями электрического тока. Они пересекаются с линиями равного электрического потенциала всюду под прямым углом.

Граничные линии *dcb* и *efga* листа являются линиями тока, а в электрической машине они являются линиями равного скалярного магнитного потенциала.

Ток, входящий в лист по линии *de* и выходящий из листа по линии *ba*, соответствует падению магнитного потенциала (или магнитодвижущей силе) вдоль линий *de* и *ba* в машине. Отсюда ясно, что при одинаковом распределении тока в листе и магнитодвижущей силы в машине вдоль линий *de* и *ba* картина электрического поля в листе будет совпадать с картиной магнитного поля в машине. При этом линии тока в листе будут соответствовать линиям равного магнитного потенциала в машине, и линии равного электрического потенциала в листе будут соответствовать линиям напряженности магнитного поля в машине.

Требуемое распределение вдоль линии входящего в лист тока достигается автоматически благодаря тому, что сопротивление латунного бруска, припаянного к листу по этой линии, весьма мало. Вследствие этого линия *de* является на листе линией равного электрического потенциала. В машине эта линия является линией напряженности магнитного поля. Таким образом, граничные условия вдоль этой линии оказываются подобными.

Требуемое распределение вдоль линии *ba* выходящего из листа тока, соответствующее распределению магнитодвижущей силы по высоте сердечника полюса, т. е. распределению витков обмотки намагничивающей катушки, достигается при помощи реостатов, подключенных к зажимам вдоль линии *ba* (см. рис. 14.1).

Работа в лаборатории заключается в получении экспериментальным путем на поверхности фигурного листа линий равного электрического потенциала, аналогичных линиям напряженности магнитного поля в электрической машине. Линии наносят одну за другой так, чтобы приращение потенциала между соседними линиями всюду было одним и тем же. Это соответствует разделению картины магнитного поля на трубки равного магнитного потока. Линии U = const изображают как при равномерном, так и при заданном неравномерном распределении тока вдоль линии ba.

Полученную на металлическом листе картину линий U = const переносят на кальку.

После получения экспериментальным путем линий равного потенциала (для равномерного распределения токов между подходящими к линии ab проводами) следует для определения сопротивления листа зафиксировать приложенное к листу напряжение и общий ток, протекающий через лист.

Программа выполнения работы

1. Подключить модель к источнику питания и установить требуемое распределение отводимого тока.

2. Построить линии равного электрического потенциала, сохраняя постоянным его приращение при переходе от любой линии к соседней.

3. Перенести построеннные на металлическом листе линии постоянного электрического потенциала на лист кальки такой же формы, что и металлический лист.

Обработка результатов исследования и оформление отчета

Предлагается построить графически ту же картину магнитного поля, которая была найдена экспериментально на модели. При построении картины поля должны быть выполнены следующие условия [1].

1. Линии напряженности магнитного поля и линии равного скалярного магнитного потенциала должны пересекаться всюду под прямым углом.

2. Линии напряженности магнитного поля должны подходить к граничным поверхностям, на которых задан постоянный магнитный потенциал, под прямым углом.

3. Ячейки сетки, образованные линиями напряженности магнитного поля и линиями $U_м$ = const, должны быть при доста-

точной густоте сетки приблизительно подобны друг другу, т. е. отношение средней длины Δn ячейки в направлении линии напряженности магнитного поля к средней ширине Δa ячейки в направлении линий равного магнитного потенциала должно быть одинаковым для всех ячеек.

Практически поступают следующим образом. Начинают построение поля в средней части воздушного зазора между полюсом и якорем. Для гладкой поверхности якоря при постоянной ширине h зазора это поле легко построить, при этом в области около середины полюса можно пренебречь влиянием края полюса. В таком случае линии напряженности поля являются радиальными прямыми, сходящимися на оси машины, а линии равного магнитного потенциала — дугами окружностей с центрами на оси машины. Напряженность магнитного поля при этом изменяется обратно пропорционально расстоянию r до оси машины:

$$H = H_0 \frac{r_0}{r},$$

причем r_0 — радиус окружности якоря; H_0 — значение H при $r = r_0$.

Магнитный потенциал $U_м$ на расстоянии r от оси машины определяется интегралом:

$$U_{м0} - U_м = \int_{r_0}^{r} \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{r},$$

где $U_{м0}$ — значение $U_м$ при $r = r_0$, т. е. на поверхности якоря.

Под северным полюсом силовые линии направлены к оси машины, и, следовательно, $\boldsymbol{H} d\boldsymbol{r} = -Hdr$. Таким образом, под северным полюсом

$$U_м - U_{м0} = -\int_{r_0}^{r} \boldsymbol{H} d\boldsymbol{r} = \int_{r_0}^{r} H_0 r_0 \frac{dr}{r} = H_0 r_0 \ln \frac{r}{r_0}.$$

Воздушный зазор следует разделить линиями равного магнитного потенциала на целое число m интервалов равных приращений потенциала $\Delta U_м$. Следовательно,

$$m \cdot \Delta U_м = U_{мp} - U_{м0},$$

где $U_{\text{м}p}$ — значение $U_{\text{м}}$ при $r = R$ на поверхности полюса;

$$m(U_{\nu+1} - U_{\nu}) = mH_0 r_0 \ln\frac{r_{\nu+1}}{r_{\nu}} = H_0 r_0 \ln\frac{R}{r_0}.$$

Таким образом, отношение радиусов $(\nu + 1)$-й и ν-й линий равного потенциала определяется через отношение радиусов R и r_0 формулой

$$m\ln\frac{r_{\nu+1}}{r_{\nu}} = \ln\frac{R}{r_0}, \quad \text{или} \quad \frac{r_{\nu+1}}{r_{\nu}} = \left(\frac{R}{r_0}\right)^{1/m}.$$

Выбрав число m, вычисляют радиусы линий равного потенциала и проводят эти линии в области постоянной ширины воздушного зазора, не доводя до края зазора приблизительно на расстояние, равное ширине зазора, так как дальше поле уже будет иметь иной характер.

Силовые линии, являющиеся в этой области радиальными прямыми, проводят друг от друга на таком расстоянии, чтобы средняя ширина Δa ячейки сетки поля равнялась ее длине Δn, т. е. чтобы сетка состояла из криволинейных квадратов. Затем продолжают построение сетки поля в пространстве между полюсами. При этом рекомендуется поступать следующим образом.

Сначала продолжают линии равного скалярного магнитного потенциала в области между полюсами так, как это кажется правильным. Эти линии должны все закончиться на линии ba, к которой условно сжата вся обмотка катушки полюса. Расположение на линии ba точек, к которым должны подходить линии равного потенциала, зависит от распределения магнитодвижущей силы вдоль линии ba, т. е. от распределения витков обмотки по высоте сердечника полюса. При равномерном распределении витков и эти точки должны распределиться равномерно на равных расстояниях друг от друга (линии равного потенциала не должны подходить перпендикулярно к линии ba). Затем проводят отрезки линий напряженности поля только между контуром полюса и ближайшей к нему линией равного потенциала. При этом следят за тем, чтобы эти отрезки были перпендикулярны и к контуру полюса, и к ближайшей к нему линии равного потенциала и чтобы они делили полосу на криволинейные квадраты.

Построенные таким образом отрезки линий напряженности поля продолжают, следя при этом сначала только за тем, чтобы соблюдались приведенные первое и второе условия, т. е. стремясь только к тому, чтобы линии напряженности поля пересекались со всеми линиями равного потенциала под прямым углом и подходили под прямым углом к линии *efga*. Вслед за тем проверяют построенную таким образом сетку поля: удовлетворяет ли она третьему условию, согласно которому все ячейки сетки должны иметь отношение средней ширины к средней длине равным единице. Если линии равного потенциала были проведены неправильно, то это условие не удовлетворяется, причем сразу становится ясным, в какую сторону следует их подвинуть на рисунке. Осуществив на глаз такую поправку в расположении линий равного потенциала, вновь строят линии напряженности поля в том же порядке и проверяют новую сетку поля. После нескольких таких последовательных построений удается получить сетку поля, хорошо удовлетворяющую всем трем указанным требованиям. Линии напряженности поля на окончательно построенной сетке поля следует снабдить стрелками. На эту сетку наносят пунктиром или карандашом другого цвета линии напряженности поля, полученные опытным путем на модели. Их направление должно быть в согласии с построенной графически сеткой.

Из полученных опытным путем картин поля для различных распределений витков катушек полюса определяют отношение магнитного потока рассеяния, линии которого не проходят в якорь, к полезному потоку, входящему в якорь. Для нахождения этого отношения достаточно подсчитать число трубок потока рассеяния и число трубок полезного потока и разделить эти числа друг на друга, так как при соблюдении указанных требований все поле оказывается разделенным линиями напряженности поля на трубки равного потока. Может, конечно, оказаться, что число трубок каждого из указанных потоков не будет целым. Так, одна из трубок может заканчиваться частично на поверхности якоря и частично на линии *fg*. Ее поток будет относиться частично к полезному потоку и частично к потоку рассеяния. Чтобы правильно разделить эту трубку, необходимо провести линию напряженности поля из точки *f*. Точка *f* есть особая точка поля, напряженность поля в которой равна нулю. Справа от нее линии напряженности поля входят в якорь, слева — выходят из него. Можно показать, что линия напряженности поля, выходящая из точки *f*, должна при выходе из этой точки быть касательной к прямой, расположенной под углом $\pi/4$, и к линии *fg*, и к касательной в точке *f* к линии *fe*. Начиная вести линию напряженности поля из точки *f* в этом направлении, ведут ее далее между уже построенными линиями напряженности поля так, чтобы она располагалась по отношению к ним наиболее естественно. После построения такой линии становится ясным, в каком отношении следует разделить поток в рассматриваемой трубке на полезный поток и поток рассеяния.

Отношение потока рассеяния к полезному потоку получается разным для различного распределения витков катушки по высоте сердечника полюса. Необходимо уяснить в качественном отношении характер этой зависимости.

Заметим, что в исследуемом листе ширина $h = de$ той его части, которая изображает воздушный зазор между полюсом и якорем, сильно утрирована. Обычно в машинах отношение ширины зазора к полюсной дуге берется значительно меньшим, чем на листе, изображенном на рис. 14.1. Однако это отклонение от реальных соотношений размеров сделано специально для того, чтобы лучше выявить характер поля у края полюса. Заметим также, что предположение бесконечно большой магнитной проницаемости железных частей машины недопустимо при расчете требуемой магнитодвижущей силы, создаваемой катушками полюсов, но вполне допустимо для построения картины поля, если полюсные наконечники не насыщены.

Наибольшее расхождение имеет место у края полюса вблизи точки *c*, так как в этой точке при $\mu = \infty$ получается $B = \infty$. В действительности в этом месте железо насыщается, и μ, а следовательно, и B оказываются конечными.

Для расчета на основе полученных картин поля магнитного сопротивления (или проводимости) следует использовать аналогию магнитного поля и электрического поля тока в листе. На основании указанной аналогии при одинаковой геометрии отношение магнитной проводимости $G_м$ к соответствующей электрической проводимости G равно отношению магнитной проницаемости $\mu = \mu_0$ среды в области, где исследуется поле, к удельной проводимости материала листа, т. е. $\dfrac{G_м}{G} = \dfrac{\mu_0}{\gamma}$.

Следовательно, магнитное сопротивление рассчитанное на единицу осевой длины,

$$R_м = \frac{1}{G_м} = \frac{1}{G}\frac{\gamma}{\mu_0} = r\frac{\gamma}{\mu_0},$$

где r — сопротивление растекания тока в листе, приходящееся на единицу его толщины.

В соответствии с данными, приведенными в работе 1, $r = \dfrac{n}{m} r_{\square} b$, где n — число равных приращений потенциала на сетке поля; m — число трубок равного тока в листе; $r_{\square}$ — измеренное сопротивление квадрата листа; b — толщина листа.

Учитывая, что при работе с металлическим листом исследуемая область поля соответствует половине полюсного деления машины, для магнитного сопротивления потоку, выходящему из полюса, можно записать

$$R_{мp} = \frac{1}{2}\frac{n}{m} r_{\square} \frac{\gamma b}{\mu}.$$

Рассчитанное таким путем по картине поля магнитное сопротивление следует сравнить с магнитным сопротивлением, определенным непосредственно по измеренному электрическому сопротивлению на основании формулы $R_м = r\gamma/\mu$.

Численный расчет магнитного поля электрической машины, моделируемого на лабораторной установке, позволяет оценить основные принимаемые при моделировании допущения: о представлении обмотки в виде тонкого токового слоя и о бесконечно большой магнитной проницаемости стали магнитопровода.

Для оценки влияния способа представления обмотки область расчета и ее размеры принимаем такими же, что и в лабораторной модели. Численный расчет поля следут выполнить с помощью программы *Qfield* при условии, что обмотка бесконечно тонкая и на линии *ab* (см. рис. 14.2) задано условие H_τ =const, а также при условии, что обмотка заполняет некоторую часть пространства в воздухе между полюсами машины.

Граничные условия для векторного магнитного потенциала имеют следующий вид. На линии *de* (см. рис. 14.2) $A = 0$, а на всех остальных границах области расчета $\partial A/\partial n = 0$, поскольку на этих границах выполняется условие $H_\tau = 0$.

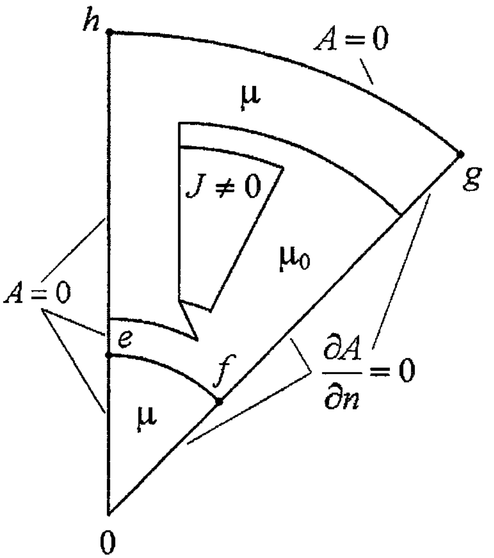


Рис. 14.3

При учете конечной магнитной проницаемости стали область расчета следует изменить (рис. 14.3). Она ограничена контуром $0gh$. На линиях $0eh$ и hg $A = 0$, на линии $0g$ $\partial A/\partial n = 0$ или $H_\tau = 0$.

По результатам расчетов следует сравнить отношения магнитного потока рассеяния, линии которого пересекают отрезок *fg* (см. рис. 14.3), к полезному магнитному потоку, пересекающему линию *ef* поверхности ротора, получаемые при моделировании и при расчете поля.

Необходимые размеры и объем расчетов задает преподаватель.

Контрольные вопросы

1. Почему при моделировании магнитного поля в лаборатории полем постоянного тока в проводящей среде нельзя построить картину магнитного поля в областях с током?

2. Почему в некоторых случаях линии напряженности магнитного поля подходят к поверхностям тел с бесконечной магнитной проницаемостью не под прямым углом?

3. Почему подсоединяемый к границе области моделирования латунный брусок имеет постоянный потенциал?

4. В модели построены линии $U = \text{const}$. В направлении какой оси следует выбрать приращение координаты Δp для приближенного расчета напряженности поля $H_y = -\Delta U/\Delta p$?

5. Какое утверждение правильное? Линии напряженности магнитного поля: *а*) пересекают линию *fg* (см. рис.14.2) под углом 90°; *б*) не пересекают линию *fg*, а касательны к ней?

Работа 15

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО РАСТЕКАНИЯ ТОКА В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ И СОПРОТИВЛЕНИЯ ЗАЗЕМЛЕНИЙ

Цель и задачи, решаемые в работе

Цель работы заключается в исследовании сопротивления растеканию тока в земле от заземляющих устройств различной конфигурации с помощью моделирования в уменьшенном масштабе поля тока в иной проводящей среде (воде), а также в ознакомлении с методами расчета сопротивлений заземления.

В работе решаются задачи моделирования и расчета электрического поля в проводящей среде и задачи нахождения сопротивления сферических, простых и составных стержневых заземлителей [1, 2, 7, 8, 13 – 15].

Описание установки и методики проведения эксперимента

В данной работе, в отличие от других работ, связанных с моделированием полей, физическая природа моделируемого объекта и модели одна и та же — проводящая среда, т. е. имеет место масштабное моделирование, а также замена одной проводящей среды (земли) другой (водой), в которой измерения проводить удобнее.

Исследование проводят в стальном баке, наполненном водой, в которую погружают различные металлические электроды — модели заземлителей (рис. 15.1).

На баке имеется устройство для закрепления и передвижения электродов и зонда, служащего для измерения потенциала. Это устройство снабжено шкалами для отсчета глубины погружения электродов в воду, расстояния между электродами и определения положения зонда по отношению к электродам. На металлических держателях электродов и зонда, а также на баке имеются зажимы для подключения к измерительной цепи.

На лабораторной установке в некотором масштабе воспроизводится явление растекания тока в земле от зарытых в нее металлических проводников, служащих для заземления электротехнических установок. Систему таких проводников называют заземляющим устройством или заземлителем.

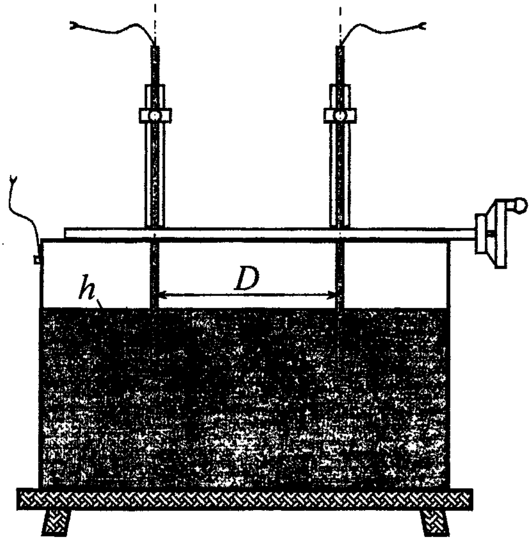


Рис. 15.1

Сопротивление растеканию тока в земле от заземлителя называют сопротивлением заземления, причем сопротивлением металлических элементов заземляющих устройств можно пренебречь по сравнению с сопротивлением земли. Последнее объясняется тем, что удельная проводимость почвы на несколько порядков меньше удельной проводимости металла проводников. Эти же условия соблюдаются и по отношению к модели, поэтому как для реальных заземлителей, так и для электродов модели поверхность металлических элементов можно считать эквипотенциальной.

В качестве электродов в лаборатории используются круглые стержни, а также шар, закрепленный на тонком стержне. Электроды изготовлены из стали или латуни и отникелированы. На шаровой электрод нанесена линия, которая делит его поверхность пополам. Ориентируясь на нее, нетрудно погрузить шаровой электрод в воду точно наполовину, моделируя тем самым полушаровой заземлитель.

Помимо шарового и стержневых заземлителей в лаборатории исследуются электроды более сложной формы, являющиеся моделями заземлителей, используемых в заземляющих устройствах молниеотводов и других электротехнических и электроэнергетических объектов. Конструкции использующихся в данной работе сложных электродов показаны на рис. 15.2. Эти электроды закрепляются на баке с помощью специального устройства, позволяющего вращать электрод в пределах 90° и снабженного шкалой для отсчета угла поворота.

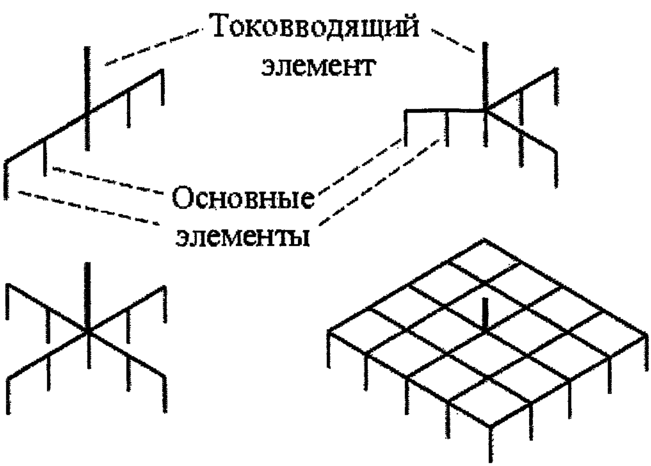


Рис. 15.2

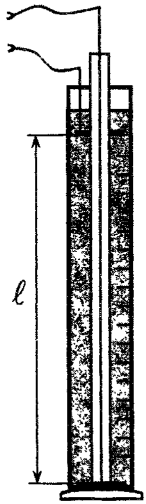


Рис. 15.3

Средой, в которой протекает ток от электродов к стенкам бака или между электродами, является водопроводная вода, являющаяся в данном случае электролитом. В соответствии с программой работы перед проведением основных измерений следует определить удельную проводимость γ воды, для чего используют специальный стеклянный сосуд. В этот сосуд отливают воду из бака, в котором ее предварительно перемешивают, и измеряют сопротивление столба воды между двумя плоскими металлическими дисками (рис. 15.3). К нижнему диску ток подводится при помощи тонкого провода, продетого в стеклянную трубочку, проходящую по оси сосуда сквозь отверстие в верхнем диске, к которому также припаян провод.

Сечение S столба воды, по которому проходит ток:

$$S=\frac{\pi}{4}(d_1^2-d_2^2),$$

где d_1 — внутренний диаметр сосуда; d_2 — внешний диаметр трубки, проходящей по оси сосуда.

Измерив сопротивление r столба воды высотой ℓ в сосуде, вычисляют удельную проводимость воды:

$$\gamma=\frac{\ell}{rS}.$$

Сопротивление столба воды в сосуде, как в последующем и сопротивления растеканию тока от электродов, измеряют мостовым методом по схеме, показанной на рис. 15.4. Измеряемым является сопротивление r_x. С целью исключения влияния поляризационных явлений в воде мост питается переменным током от генератора синусоидальных сигналов с частотой $f\approx 400$ Гц. Входное напряжение генератора не должно превышать 5 В, что обеспечивает безопасность электрических измерений в баке с водой.

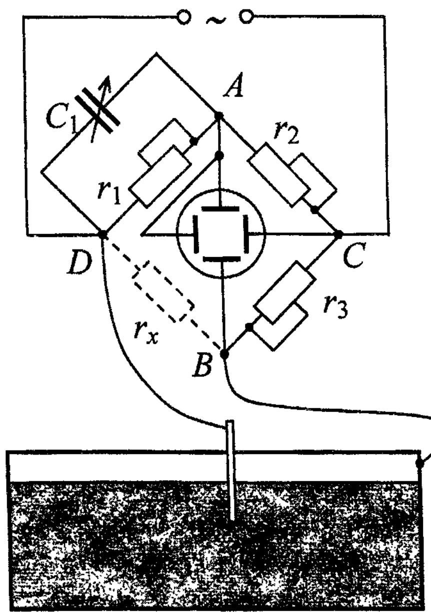


Рис. 15.4

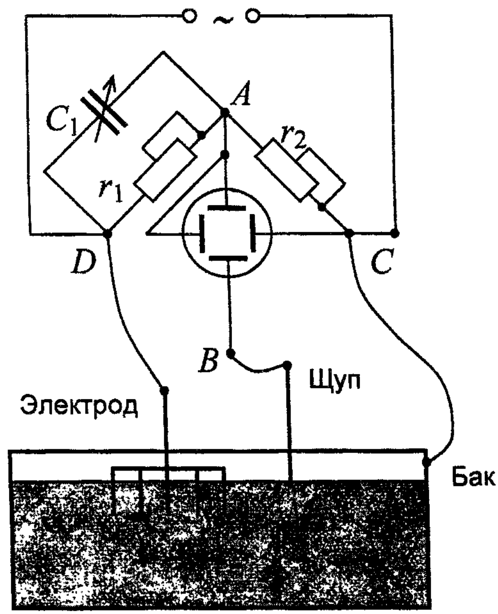


Рис. 15.5

Так как измеряемое сопротивление при переменном токе кроме активной составляющей имеет и реактивную — емкостную — составляющую, то для уравновешивания моста параллельно резистору r_1 включен конденсатор C_1 с переменной емкостью.

Индикатором равновесия моста служит электронный осциллограф, отклоняющие пластины которого включены в соответствии с приведенной на рис. 15.4 схемой. При равновесии эллипс, изображаемый лучом на экране осциллографа, вырождается в горизонтальную прямую, а измеряемое сопротивление определяется соотношением

$$r_x = \frac{r_1}{r_2} r_3.$$

Основные исследования целесообразно проводить для простейших, но важных в практическом отношении форм электродов, для которых возможен относительно несложный теоретический расчет. Таковыми являются сферический и цилиндрический электроды, служащие в модели для изображения простых заземлителей. Сопротивление между электродами и баком полагают соответствующим сопротивлению заземления в реальных условиях.

Первую серию измерений сопротивлений заземления выполняют для шарового электрода, который погружают на различную глубину h. Наименьшую глубину ($h = 0$) выбирают такой, чтобы погруженной оказалась ровно половина шара, а наибольшую — немного превышающей половину высоты воды в баке.

Далее измеряют сопротивления заземления круглых стержневых электродов. Сначала погружают в воду один стержень и измеряют сопротивление между ним и баком, меняя глубину погружения. Затем погружают в воду на одинаковую глубину два стержня и, изменяя расстояние D между ними, измеряют сопротивление между баком и электрически соединенными между собой стержнями, а затем сопротивление между стержнями, когда они разъединены.

Для электродов, по форме соответствующих реальным заземляющим устройствам, по той же схеме, что и в предыдущих случаях, измеряют сопротивление растеканию тока, переходя от простых конструкций к более сложным (см. рис. 15.2).

В мощных электроэнергетических установках при коротких замыканиях на землю в какой-либо точке электрической цепи, которая в нормальном режиме не должна иметь соединение с землей, возникают большие токи короткого замыкания, протекающие от места повреждения через заземлители в землю. Падение напряжения в земле зависит от тока короткого замыкания и сопротивления заземления. При конструировании заземлителей стремятся уменьшить сопротивление заземления, что достигается путем увеличения габаритов и усложнения конструкции заземлителей, а также, если это возможно, путем увеличения удельной проводимости почвы.

Возникающее вблизи заземлителя при коротком замыкании в цепи напряжение на длине шага человека, так называемое шаговое напряжение $U_ш$, не должно превышать значения, опасного для жизни идущего по земле человека. Поэтому исследование распределения напряжения на поверхности земли вблизи заземлителей представляет большой практический интерес.

С этой целью для полушарового электрода и моделей сложных заземлителей снимают зависимости распределения напряжения по поверхности воды вдоль радиальных направлений от электрода с помощью щупа по схеме, показанной на рис. 15.5. Подвижный зонд, исследуемый электрод и бак подключаются соответственно к зажимам "щуп", "опора" и "бак" на коммутационной панели установки. Зонд, представляющий собой тонкий металлический стержень, погружается острым концом на 1÷2 мм в воду в точке *M* поверхности, напряжение которой относительно бака и снимается. Как указывалось ранее, установка позволяет определять напряжение для точек, расположенных на радиальных линиях в пределах одного квадранта.

Конденсатор C_1 переменной емкости здесь также необходим для уравновешивания емкостных составляющих. При равновесии моста отношение напряжения между электродом и зондом к напряжению между зондом и баком равно отношению r_1/r_2 сопротивлений плеч моста. Тогда напряжение между точкой M и баком можно вычислить по формуле

$$U(M) = U_э \frac{r_2}{r_1 + r_2},$$

где $U_э$ — напряжение между электродом и баком.

По указанию преподавателя программа работы может быть как сокращена, так и расширена. Если работу выполняют за одно посещение лаборатории, то обычно исследуют не все варианты конструкций сложных электродов. При расширении программы работу выполняют за два посещения, и ее можно рассматривать как две самостоятельные работы.

За время первого посещения выполняют исследования для шарового и стержневых заземлителей, причем могут быть исследованы и более сложные варианты, например заземляющие электроды разного диаметра и при различной глубине погружения. Можно также снимать зависимости сопротивления растеканию тока от глубины погружения двух электродов при фиксированном расстоянии между ними.

При втором посещении исследуют сопротивления для сложных электродов, а также находят распределения потенциала на поверхности воды для шарового и всех имеющихся в лаборатории сложных электродов. В это же посещение следует снова измерить удельную проводимость воды, так как вода в баке может быть заменена.

Программа выполнения работы

1. Измерить удельную электрическую проводимость воды.

2. Снять зависимости сопротивления растеканию тока от глубины погружения для шарового и круглого стержневого электродов.

3. Снять зависимости сопротивления растеканию тока для двух одинаковых электрически соединенных стержневых элек-

тродов в зависимости от расстояния между ними при одинаковой глубине погружения.

4. Снять зависимости сопротивления между двумя одинаковыми стержневыми электродами в зависимости от расстояния между ними.

5. Измерить сопротивления растеканию тока от электродов сложной конфигурации, соответствующей конструкции реального заземляющего устройства.

6. Снять зависимости распределения потенциала на поверхности воды вдоль радиальных линий для моделей полушарового заземлителя и заземлителей сложной формы.

Обработка результатов исследования и оформление отчета

По результатам измерений для шарового электрода строят на графике кривую $r = f(h)$, выражающую зависимость сопротивления r от глубины h погружения электрода, причем $h = 0$ полагают при наивысшем в опыте положении электрода, когда ровно половина шара погружена в воду. При $h = 0$ отмечают на графике теоретическую точку, вычисляемую по формуле (см. раздел "Основы теории...")

$$r = \frac{1}{2\pi\gamma R},$$

а также точку при $h = R$, когда $r = \frac{1}{4\pi\gamma R}\frac{1}{\ln 2}$.

По мере увеличения h сопротивление убывает. Если бы стенки бака были бесконечно удалены от электрода, то при $h \to \infty$ величина r стремилась бы к значению

$$r = \frac{1}{4\pi\gamma R}.$$

Однако вследствие конечных размеров бака сопротивление должно убывать при приближении электрода ко дну, и поэтому будут получаться сопротивления меньше этого предельного значения, справедливого для бесконечной проводящей среды. При соприкосновении электрода с дном сопротивление должно упасть практически до нуля. Тем не менее, если диаметр шара много меньше линейных размеров бака, в средней части бака влияние как поверхности воды, так и стенок бака будет малым. Это обнаружится в появлении почти горизонтального участка в кривой $r = f(h)$ в этой области, причем асимптота этого участка должна быть приблизительно равной

$$r = \frac{1}{4\pi\gamma R}.$$

Результаты экспериментального исследования электродов в форме стержней также должны быть представлены в графическом виде.

Необходимо построить следующие опытные зависимости сопротивления между электродами и баком от различных факторов:

а) $r = f(h)$ для одного электрода, где h — глубина его погружения;
б) $r = f(D)$ для двух электрически соединенных между собой электродов при заданной глубине их погружения, D — расстояние между осями электродов.

Следует построить также зависимость сопротивления $r = f(D)$ между двумя электродами от расстояния D между их осями.

На те же графики необходимо нанести зависимости, полученные по расчетным формулам, приведенным в разделе "Основы теории" с учетом геометрических размеров электродов и измеренной удельной электрической проводимости воды. Для полушарового электрода следует на одном рисунке привести экспериментально полученное распределение потенциала $U = f(x)$ по поверхности воды, а также рассчитанную по формуле $U(x) = U_{эл} R/x$ теоретическую зависимость (здесь $U_{эл}$ — потенциал электрода; R — его радиус).

Для сложных заземлителей предлагается сопоставить значения сопротивлений для разных конструкций и построить полученные в опыте зависимости распределения потенциала $U = f(x)$ вдоль радиальных прямых, идущих от заземлителя по поверхности проводящей среды, где x — расстояние по прямой от центра заземлителя. Обычно за нуль потенциала принимается потенциал точек земли, весьма удаленных от заземлителя. В опыте за нуль потенциала принимается потенциал бака. Зависимость $U = f(x)$ строят, откладывая по осям значения U и x, соответствующие реальным устройствам. Для этого преподавателем указывается масштаб m, дающий соотношение между размерами исследуемой модели и изображаемого ею реального устройства (например, $m = 1:50$), указывается удельная электрическая проводимость почвы $\gamma_{\text{ор}}$, к которой следует привести результаты измерений на модели, и значение тока короткого замыкания $I_{\text{кз}}$. По этим данным и по измеренному на модели сопротивлению заземления $r_{\text{змод}}$ определяется сопротивление заземления реального устройства $r_{\text{зор}} = r_{\text{змод}} \dfrac{\gamma_{\text{мод}}}{\gamma_{\text{ор}}} m$ и потенциал заземлителя $U_{\text{зор}}(x) = U_{\text{змод}}(x) I_{\text{кз}} r_{\text{змод}} \dfrac{\gamma_{\text{мод}}}{\gamma_{\text{ор}}} m$. Найденное в опыте распределение потенциала дает возможность вычислить потенциал земли на разных расстояниях от заземлителя и определить наибольшее шаговое напряжение.

Основная причина возможных расхождений опытных и расчетных зависимостей связана с тем, что бак имеет конечные размеры, тогда как расчетные формулы выведены в предположении, что стенки бака бесконечно удалены от электродов. Наличие стенок, очевидно, приводит к уменьшению сопротивления. Для одного электрода это сказывается только при его глубоком погружении, когда нижняя точка его поверхности приближается ко дну бака. При двух электродах это проявляется наиболее заметно на величине сопротивления между баком и электрически соединенными между собой двумя электродами при больших расстояниях между осями электродов.

С помощью численного расчета поля, сопротивления заземления и шагового напряжения сферического и стержневого заземлителей при различной глубине их погружения можно не только подтвердить достоверность результатов моделирования, но и оценить приближенно влияние стенок бака.

Металлический бак имеет форму прямоугольного параллелепипеда. При численном расчете с помощью программы *Qfield* его можно представить в виде цилиндра высотой a, равной высоте уровня воды в баке, и площадью поперечного сечения, равной площади поверхности воды. В этом случае геометрия устройства и электрическое поле характеризуются осевой симметрией как при сферическом, так и при стержневом заземлителе (рис. 15.6, *а*).

На рис. 15.6, *б* показана область расчета, ограниченная осью симметрии z, стенками бака и поверхностью воды. На стенках бака потенциал равен 0, на линии $z = a$ (поверхности воды), являющейся линией тока, $\partial U/\partial z = 0$, на полуокружности (поверхности сферического заземлителя) задаем постоянный потенциал U. Изменяя размеры a, R области расчета, следует оценить их влияние на сопротивление заземления и распределение потенциала на линии $z = a$ при различной глубине h погружения сферического и (или) стержневого заземлителя.

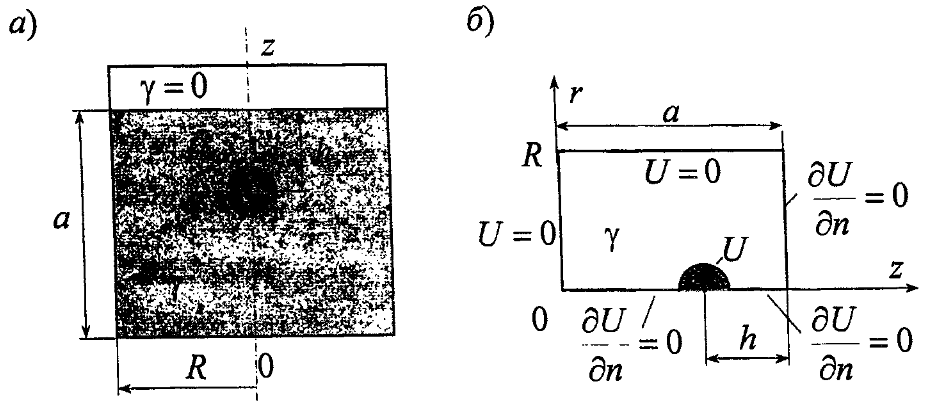


Рис. 15.6

Следует сравнить сопротивления заземления, полученные при моделировании в лаборатории, аналитическом и численном расчете и объяснить причины их различия.

Необходимые размеры и объем расчетов задает преподаватель.

Основы теории и расчетные соотношения

Найдем сопротивление полушарового заземлителя радиусом R, погруженного в среду с удельной электрической проводимостью γ при условии, что его плоская поверхность находится на уровне поверхности проводящей среды (рис.15.7).

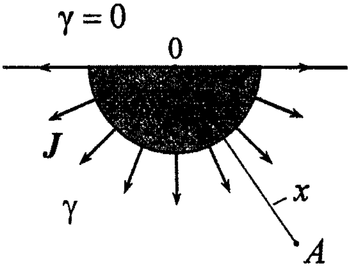


Рис.15.7

Поскольку линии вектора плотности тока в среде (удельную электрическую проводимость среды γ принимаем намного меньше удельной электрической проводимости материала металлического заземлителя) в этом случае представляют собой радиальные прямые, применяя метод зеркальных изображений [1], находим плотность тока в находящейся на расстоянии x от центра электрода ($x > R$) точке A: $J = \dfrac{i}{2\pi x^2}$. Принимая потенциал в бесконечно удаленной точке равным нулю, получаем для потенциала в любой точке (в частности, на поверхности среды) выражение

$$U(x) = \int_x^\infty \frac{J}{\gamma} dx = \frac{i}{2\pi\gamma x}.$$

Следовательно, потенциал самого электрода

$$U(R) = \frac{i}{2\pi\gamma R},$$

а сопротивление растеканию тока от полушара выражается в виде

$$r = \frac{U(R)}{i} = \frac{1}{2\pi\gamma R}.$$

Для шарового электрода в бесконечно протяженной среде сопротивление растеканию тока оказывается в два раза меньше сопротивления для полушарового электрода, т. е. в этом случае

$$r=\frac{1}{4\pi\gamma R}.$$

В общем случае при произвольной глубине h погружения заземлителя даже сферической формы пути решения оказываются существенно сложнее.

Для того чтобы при расчете сопротивления r растеканию тока от электрода учесть влияние границы проводящей среды, образованной ее поверхностью, часто используют метод зеркальных изображений, т. е. зеркально отражают погруженные в среду части электродов в пространство над поверхностью среды и продолжают проводящую среду во всех направлениях до бесконечности.

Очевидно, что сопротивление r в реальной обстановке в два раза больше сопротивления r' растеканию тока от эквивалентного электрода в однородной среде. В то же время определение r' для полученной после применения метода зеркальных изображений новой задачи оказывается более простым по сравнению с исходной именно вследствие однородности окружающей электрод среды.

В [15] получено выражение для расчета сопротивления заземления сферического электрода при произвольной глубине его погружения в виде бесконечного ряда. Поскольку при некоторых соотношениях между радиусом электрода и глубиной его погружения ряд сходится медленно, оно оказывается неудобным для практического использования. Но при $h = R$, т.е. для полностью погруженного электрода, ряд сходится к простому выражению:

$$r=\frac{1}{4\pi\gamma R}\frac{1}{\ln 2}.$$

Для расчета сопротивления заземления можно воспользоваться решением аналогичных задач электростатики. Согласно методу электростатической аналогии отношение электрической проводимости $G = 1/r$ к емкости C тела в соответствующей электростатической задаче равно отношению удельной проводимости γ среды, окружающей электрод, к диэлектрической проницаемости ε среды, окружающей заряженное тело:

$$\frac{G}{C} = \frac{\gamma}{\varepsilon},$$

откуда

$$r = \frac{1}{G} = \frac{1}{C}\frac{\varepsilon}{\gamma}.$$

Емкость стержней, расположенных в однородном диэлектрике с диэлектрической проницаемостью ε, и емкость между двумя стержнями можно выразить через их собственные α_{11} и α_{22} и взаимный α_{12} потенциальные коэффициенты.

Для одного стержня [1]

$$U_1 = \alpha_{11} q_1 = \frac{1}{C} q_1,$$

следовательно,

$$C = 1/\alpha_{11}.$$

Емкость двух электрически не соединенных стержней

$$C = \frac{q_1}{U_1 - U_2} = \frac{1}{\alpha_{11} + \alpha_{22} - 2\alpha_{12}}.$$

При одинаковых стержнях $\alpha_{11}=\alpha_{22}$,и тогда

$$C = \frac{1}{2(\alpha_{11} - \alpha_{12})}.$$

Для двух электрически соединенных друг с другом стержней потенциалы одинаковы, т. е. $U_1 = U_2 = U$, и общий заряд q равен сумме их зарядов: $q = q_1 + q_2$. С учетом соотношения $\alpha_{21} = \alpha_{12}$ из уравнений

$$U_1 = U = \alpha_{11} q_1 + \alpha_{12} q_2,$$

$$U_2 = U = \alpha_{21} q_1 + \alpha_{22} q_2$$

находим после несложных преобразований

$$C = \frac{q_1 + q_2}{U} = \frac{\alpha_{11} + \alpha_{22} - 2\alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}^2}.$$

Если стержни одинаковые, то $\alpha_{11} = \alpha_{22}$, и тогда

$$C = \frac{2}{\alpha_{11} + \alpha_{12}}.$$

Выражения для потенциальных коэффициентов α_{11} и α_{21} круглых стержней радиусом R и длиной l приведены в [1]:

$$\alpha_{11} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l}\left[\ln\left(\frac{l}{R} + \sqrt{\frac{l^2}{R^2} + 1}\right) - \sqrt{\frac{R^2}{l^2} + 1} + \frac{R}{l}\right].$$

Если $l >> R$, то

$$\alpha_{11} \approx \frac{1}{2\pi\varepsilon l}\left(\ln\frac{l}{R} - 0{,}307\right).$$

При расстоянии D между двумя параллельными круглыми стержнями (рис. 15.8)

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l}\left[\operatorname{Ar\,sh}\frac{l}{D} - \sqrt{\frac{D^2}{l^2} + 1} + \frac{D}{l}\right],$$

или

$$\alpha_{12} = \frac{1}{2\pi\varepsilon l}\left[\ln\left(\frac{l}{D} + \sqrt{\frac{l^2}{D^2} + 1}\right) - \sqrt{\frac{D^2}{l^2} + 1} + \frac{D}{l}\right].$$

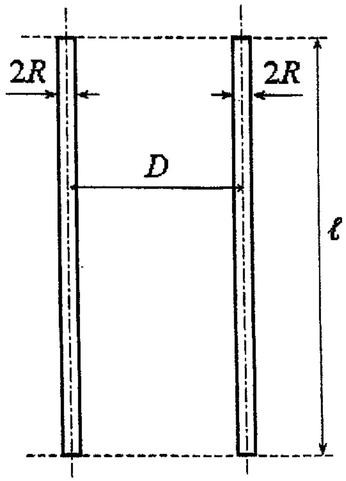


Рис. 15.8

Для сложных заземлителей, используемых в лабораторных исследованиях и выполненных из нескольких трубчатых элементов конечной длины, расчет сопротивления можно выполнить с помощью компьютера.

Контрольные вопросы

1. Почему для расчета сопротивлений в проводящей среде можно использовать потенциальные коэффициенты, применяемые в электростатике?

2. Почему желательно применять заземлители с малым сопротивлением заземления?

3. Какими особенностями обладают заземлители, характеризующиеся малыми сопротивлениями заземления?

4. Почему в установке используется напряжение переменного, а не постоянного тока?

5. Почему мост для измерения сопротивлений содержит кроме резисторов еще конденсатор?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Демирчян К. С.** Теоретические основы электротехники / К. С. Демирчян [и др.]: в 2 т. — СПб : Питер, 2009. — 430 с.

2. **Нейман Л. Р.** Руководство к лаборатории электромагнитного поля / Л. Р. Нейман, К. С. Демирчян, В. М. Юринов. — М. : Высш. шк., 1966. — 268 с.

3. **Новгородцев А. Б.** Расчет электрических и магнитных полей : учеб. пособие / А. Б. Новгородцев, М. А. Шакиров, В. М. Юринов ; ЛПИ. — 1975. — 80 с.

4. **Лаврентьев М. А.** Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1987. — 688 с.

5. **Боронин В. Н.** Моделирование стационарных магнитных полей : учеб. пособие / В. Н. Боронин, В. Л. Чечурин ; ЛПИ. — 1982. — 70 с.

6. **Нейман Л. Р**. Теоретическая электротехника. Избранные труды / Л. Р. Нейман. — Л. : Наука, 1988. — 335 с.

7. **Спектор С. А.** Электрические измерения физических величин. Методы измерений / С. А. Спектор. — Л. : Энергоатомиздат, 1987. — 320 с.

8. **Демирчян К. С.** Поверхностный эффект в электроэнергетических устройствах / К. С. Демирчян, В. Н. Боронин, И. Ф. Кузнецов. — Л. : Наука, 1983. — 280 с.

9. **Поливанов К. М.** Ферромагнетики / К. М. Поливанов. — М. : Госэнергоиздат, 1957. — 256 с.

10. **Шимони К.** Теоретическая электротехника / К. Шимони. — М. : Мир, 1964. — 773 с.

11. **Гилл Ф.** Практическая оптимизация / Ф. Гилл, У. Мюррей, М. Райт. — М. : Мир, 1985.

12. **Черноруцкий И. Г.** Оптимальный параметрический синтез: Электротехнические устройства и системы / И. Г. Черноруцкий. — Л. : Энергоатомиздат, 1987. — 128 с.

13. **Цирель Я. А.** Заземляющие устройства воздушных линий электропередачи / Я. А. Цирель. — Л. : Энергоатомиздат, 1989. — 160 с.

14. **Коструба С. И.** Измерение электрических параметров земли и заземляющих устройств / С. И. Коструба. — Л. : Энергоатомиздат, 1983. — 168 с.

15. Методы расчета электростатических полей / Н. Н. Миролюбов [и др.]. — М. : Высш. шк., 1963. — 420 с.

16. **Немцов М. В.** Справочник по расчету параметров катушек индуктивности / М. В. Немцов. — М. : Энергоатомиздат, 1989. — 192 с.

17. **Янке Е.** Специальные функции / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш. — М. : Наука, 1969. — 344 с.

18. **Туровский Я.** Техническая электродинамика / Я. Туровский. — М. : Энергия, 1974. — 488 с.

19. **Домбровский В. В.** Справочное пособие по расчету электромагнитного поля в электрических машинах / В. В. Домбровский. — Л. : Энергоатомиздат, 1983. — 256 с.

20. **Тартаковский Д. Ф.** Метрология, стандартизация и технические измерения / Д. Ф. Тартаковский, А. С. Ястребов. — М. : Высш. шк., 2001. — 206 с.

21. **Харт Х.** Введение в измерительную технику / Х. Харт. — М. : Мир, 1999. — 389 с.

22. **Гриднев И. И.** Электромагнитное экранирование в широком диапазоне частот / И. И. Гриднев. — М. : Связьиздат, 1972. — 216 с.

23. **Каден Г.** Электромагнитные экраны в высокочастотной технике и технике электросвязи / Г. Каден. — М. : Госэнергоиздат, 1957. — 327 с.

24. **Аполлонский С. М.** Справочник по расчету электромагнитных экранов / С. М. Аполлонский. — Л. : Энергоатомиздат, 1988. — 224 с.

25. **Калантаров П.Л.** Расчет индуктивностей / П. Л. Калантаров, Л. А. Цейтлин. — Л. : Энергоатомиздат, 1986. — 488 с.

26. **Кузнецов И. Ф.** Электродинамические усилия в токоведущих частях электрических аппаратов и токопроводах / И. Ф. Кузнецов, Г. Н. Цицикян. — Л. : Энергоатомиздат, 1989. — 488 с.

27. **Градштейн И. С.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. — М. : Наука, 1971. — 1108 с.

ИЗМЕРЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА И МАГНИТНОГО ПОТОКА БАЛЛИСТИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

Для измерения электрического заряда, протекающего в электрической цепи в течение короткого промежутка времени, служат баллистические гальванометры, которые отличаются от обычных магнитоэлектрических гальванометров с подвижной рамкой, применяемых для измерения малых электрических токов, значительным моментом инерции подвижной части. Для сохранения пропорциональности между углом отклонения подвижной части гальванометра и количеством электричества, протекшим по его рамке, необходимо, чтобы импульс тока прекратился практически раньше, чем рамка начнет двигаться. Чем короче импульс тока и чем больше момент инерции подвижной части гальванометра, тем строже будет выполняться это условие и тем меньше будет погрешность измерений. О значении измеряемого заряда судят по первому отбросу α светового пятна, отсчитываемому по шкале гальванометра: $\Delta q = C_q\alpha$, где C_q — коэффициент, называемый баллистической постоянной гальванометра.

Для определения баллистической постоянной гальванометра пользуются образцовым конденсатором с известной емкостью C. Заряжая конденсатор до напряжения U и разряжая затем его на цепь гальванометра, наблюдают отброс α по шкале гальванометра. Определение баллистической постоянной и последующие измерения электрического заряда следует проводить при одном и том же сопротивлении, включаемом в цепь гальванометра.

При градуировке гальванометра рекомендуется произвести несколько отсчетов α при разных значениях напряжения U и взять среднее значение C_q из вычисленных для каждого отдельного отсчета.

Баллистический метод определения полного магнитного потока Ψ, сцепленного с какой-либо электрической цепью, заключается в измерении баллистическим гальванометром электрического заряда Δq, протекающего по цепи при изменении магнитного потока от нулевого до конечного значения или от конечного до нулевого значения. Приращение $\Delta\Psi$ магнитного потока связано с величиной Δq соотношением, выражающим закон электромагнитной индукции:

$$\Delta\Psi = -\Delta q \cdot r,$$

где r — электрическое сопротивление цепи.

При возрастании потока от нуля до конечного значения Ψ $\Psi = \Delta\Psi$, а при убывании потока от значения Ψ до нуля $\Psi = -\Delta\Psi$.

Для вычисления $\Delta\Psi$ по указанной формуле необходимо знать сопротивление r цепи и определить Δq по отбросу α светового пятна на шкале гальванометра и по баллистической постоянной C_q гальванометра. Практически представляется более удобным непосредственно градуировать гальванометр в единицах магнитного потока. Действительно, для абсолютного значения приращения полного магнитного потока

$$|\Delta\Psi| = \Delta q \cdot r = C_q r\alpha = C_\Psi \alpha,$$

где $C_\Psi = C_q r$ — новая баллистическая постоянная, выраженная непосредственно в единицах магнитного потока на одно деление шкалы гальванометра.

Постоянные C_q и C_Ψ зависят от сопротивления в цепи гальванометра. Поэтому постоянную гальванометра следует измерять вновь каждый раз, когда в его цепи изменяется сопротивление.

Градуировку баллистического гальванометра для определения постоянной C_Ψ осуществляют по схеме, показанной на рис. П1, с помощью образцового соленоида. Образцовый соленоид представляет собой длинную цилиндрическую однослойную катушку, витки которой равномерно распределены по ее длине. Обмотка катушки навита на цилиндрическом сердечнике из изолирующего материала. В середине соленоида его охватывает короткая вторичная катушка, расположенная коаксиально с основной обмоткой соленоида. Диаметр витков обмотки соленоида значительно меньше длины соленоида, поэтому магнитное поле внутри соленоида в его средней части можно считать с большой степенью точности однородным и напряженность H в этой средней части вычислять по формуле

$$H = \frac{w_1 I}{\ell},$$

где w_1 — число витков основной обмотки соленоида; ℓ — длина обмотки; I — ток, протекающий по обмотке.

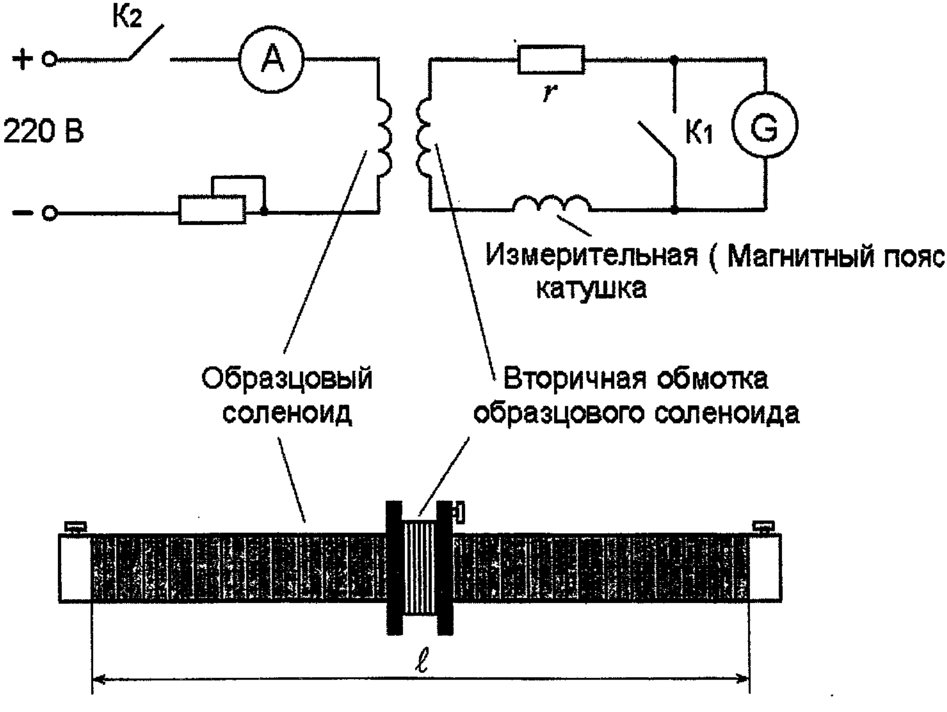


Рис. П.1

Магнитный поток Ψ, сцепляющийся со всеми w_2 витками вторичной катушки:

$$\Psi = w_2 \Phi = w_2 \mu_0 H s = \frac{\mu_0 w_1 w_2}{\ell} s I,$$

где Φ — поток, пронизывающий поперечное сечение основной обмотки; s — площадь поперечного сечения этой обмотки.

Величину s следует определять как площадь, ограниченную контуром, совпадающим с витком вторичной катушки.

Остальные элементы схемы (см. рис. П.1) следующие: G — баллистический гальванометр, подлежащий градуировке; К1 — ключ, позволяющий замыкать гальванометр на время регулирования тока в основной обмотке соленоида и тем самым предохранять гальванометр от случайных импульсов тока; r — магазин сопротивлений, служащий для подбора сопротивления цепи гальванометра равным или близким к его критическому сопротивлению; A — амперметр для измерения тока в цепи основной обмотки образцового соленоида; К2 — рубильник для включения этого тока.

Измерительная катушка включена последовательно в цепь гальванометра для обеспечения постоянства суммарного сопротивления как при градуировке гальванометра, так и при измерениях в исследуемом устройстве. Очевидно, что при основных измерениях с этой же целью в цепи гальванометра должна быть оставлена вторичная катушка образцового соленоида.

Градуировку гальванометра производят в следующем порядке. Замыкают ключ $K1$ и, включив рубильник $K2$, устанавливают какое-либо значение тока I в основной обмотке соленоида. Разомкнув затем ключ $K1$, выключают ток рубильником $K2$ и наблюдают отброс α по шкале гальванометра. Постоянную гальванометра подсчитывают по формуле

$$C_\Psi = \frac{|\Delta\Psi|}{\alpha} = \mu_0 w_1 w_2 \frac{s}{\ell}\frac{I}{\alpha}.$$

Таким путем производят серию наблюдений при различных значениях тока I и берут среднее значение постоянной C_Ψ.

ИЗМЕРЕНИЕ МАГНИТОДВИЖУЩЕЙ СИЛЫ

Для измерения магнитодвижущей силы F_{AB}, т. е. линейного интеграла напряженности магнитного поля

$$\int_A^B H\cos\alpha\, d\ell = F_{AB}$$

вдоль некоторого пути между точками A и B, применяют магнитный пояс, представляющий собой длинный гибкий цилиндрический шнур из изолирующего материала, обмотанный изолированным проводом (рис. П.2).

Витки обмотки пояса равномерно распределены по его длине и доходят до самых краев у концов шнура. На концах пояса обмотка хорошо проклеена лаком, вследствие чего крайние витки ее не могут сползать со шнура.

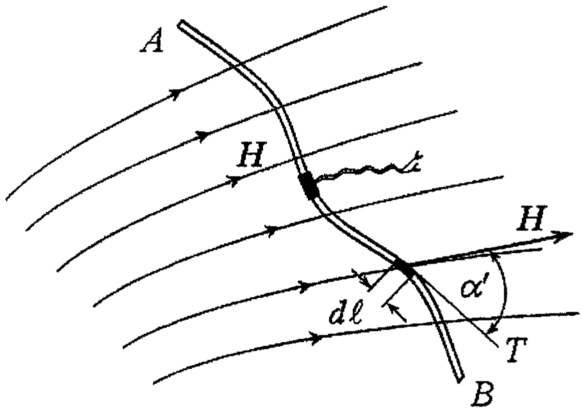


Рис. П.2

Магнитодвижущая сила F_{AB} вдоль оси пояса пропорциональна полному потоку Ψ, сцепляющемуся с обмоткой пояса. Действительно, поток, сцепляющийся с одним витком пояса,

$$\Phi = \mu_0 H\cos\alpha' s,$$

где s — среднее значение площади поперечного сечения пояса, охватываемой витком обмотки пояса; H — напряженность поля в точках этого сечения; α' — угол между нормалью к поверхности сечения и вектором напряженности магнитного поля.

Этот же угол α' есть угол между касательной T к оси пояса и вектором $\boldsymbol{H}$ (см. рис. П.2). Знак "штрих" ставим, чтобы отличить обозначение этого угла от обозначения отброса светового пятна гальванометра.

На элемент длины $d\ell$ пояса приходится $w'd\ell$ витков, причем w' — число витков на единицу длины пояса. Потокосцепление Ψ пояса получаем, интегрируя вдоль оси пояса между точками A и B, лежащими на концах пояса:

$$\Psi = \int_A^B \Phi w' d\ell = \int_A^B \mu_0 H \cos\alpha' s w' d\ell =$$

$$= \mu_0 s w' \int_A^B H \cos\alpha' d\ell = \mu_0 s w' F_{AB}.$$

Таким образом,

$$F_{AB} = \frac{1}{\mu_0 s w'}\Psi = C\Psi.$$

Величина C называется постоянной пояса. Она вычисляется по известным параметрам s и w' пояса.

Потокосцепление Ψ пояса можно измерить разными способами.

Для постоянного магнитного поля можно воспользоваться баллистическим методом. Наблюдают отброс α светового пятна по шкале гальванометра при убывании потока Ψ от начального значения до нуля. Последнее достигается либо быстрым удалением пояса за пределы магнитного поля, либо выключением создающих поле токов. Обозначив, как и ранее, постоянную баллистического гальванометра при измерении магнитного потока C_Ψ, получим

$$F_{AB} = C\Psi = CC_\Psi\alpha = K\alpha.$$

Величина K представляет собой постоянную системы "пояс – гальванометр".

При переменном магнитном поле, когда величина Ψ является синусоидальной функцией времени, для определения амплитуды потокосцепления Ψ_m можно воспользоваться измерением ЭДС, индуцируемой в обмотке пояса. Действующее значение этой ЭДС [1]

$$E = 4{,}44 f \Psi_m,$$

где f — частота изменения потока.

Таким образом, для вычисления амплитуды магнитодвижущей силы F_{ABm} в этом случае имеем формулу

$$F_{ABm} = \frac{C}{4{,}44 f} E = K'E.$$

С помощью магнитного пояса можно измерить полный ток iw в обмотке какой-либо катушки. Здесь w — число витков обмотки, i — ток в обмотке. Это измерение основано на законе полного тока. Охватив поясом всю обмотку катушки (рис. П.3) и сомкнув концы пояса, получим

$$F = \oint H \cos\alpha' dl = iw.$$

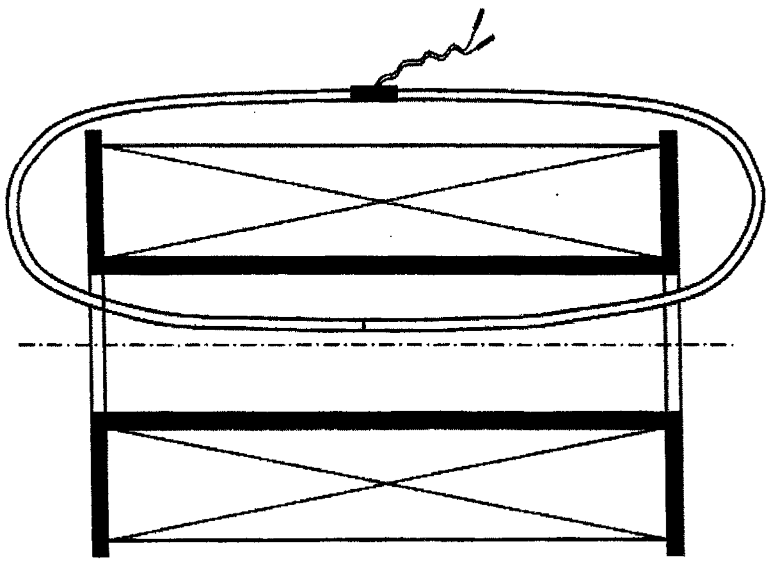


Рис. П.3

Таким же способом можно измерить ток в каком-либо проводе, охватив провод поясом и измерив магнитодвижущую силу F вдоль оси пояса. Этот способ измерения тока имеет большую ценность при измерении весьма больших токов в отдельных близко расположенных друг к другу шинах, когда не представляется возможным включение амперметра или трансформатора тока. Последнее соотношение дает возможность просто определить из опыта постоянную K системы "пояс — гальванометр", если имеется катушка с известным числом витков w_0.

Пусть через эту катушку проходит постоянный ток i_0. Охватив поясом обмотку катушки по некоторому замкнутому контуру и выключив затем ток в обмотке, наблюдают отброс α_0 по шкале гальванометра. Постоянная K определится из соотношения

$$K = \frac{i_0 w_0}{\alpha_0}.$$

Аналогично можно определить опытным путем постоянную K', связывающую амплитуду синусоидально изменяющейся магнитодвижущей силы с действующим значением ЭДС в обмотке пояса. Пусть действующее значение синусоидального тока в катушке с известным числом витков w_0 равно I_0. Охватив поясом обмотку катушки по замкнутому контуру, измеряют действующее значение E_0 ЭДС в обмотке пояса. Постоянную K' находят при этом из соотношения

$$K' = \frac{\sqrt{2}\, I_0 w_0}{E_0}.$$

Приложение 3

РАСЧЕТ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ ПОСТОЯННОГО ТОКА В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Приведем аналитическое решение задачи, показанной на рис. П.4, *а*, методом функций комплексного переменного.

Утолщенными линиями отмечены электроды на границах прямоугольной проводящей области, представлющей собой тонкий проводящий лист толщиной b. Потенциал правого электрода – +15 В, левого — 0 В.

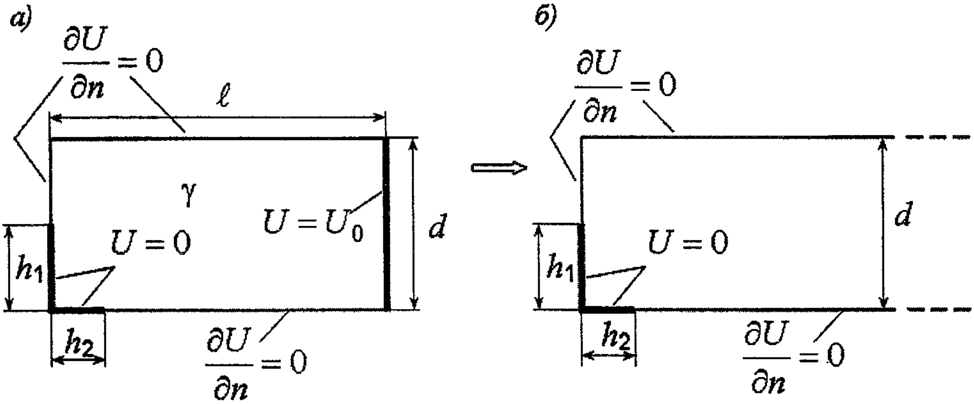


Рис. П.4

Если расстояние от электрода с потенциалом +15 В до ближайшей точки второго электрода в $1{,}5 \div 2{,}0$ раза превышает ширину d листа, то на этом расстоянии линии равного потенциала можно с высокой степенью точности считать вертикальными прямыми. В этом случае можно рассчитать поле при допущении полубесконечной полосы шириной d (см. рис. П.4, *б*).

На рис. П.5 показана полученная расчетным путем картина силовых линий и линий равного потенциала поля в такой полубесконечной полосе.

От исходной задачи расчета поля в полубесконечной полосе плоскости z (см. рис. П.5) можно перейти к задаче расчета поля в верхней полуплоскости (рис. П.6) плоскости ω с помощью функции

$$\omega = \mathrm{sh}^2 \frac{\pi z}{2d}$$

при указанном на рисунках соответствии точек границ областей и граничных условий. Точки на плоскости ω, соответствующие угловым точкам области на плоскости z, обозначены теми же буквами.

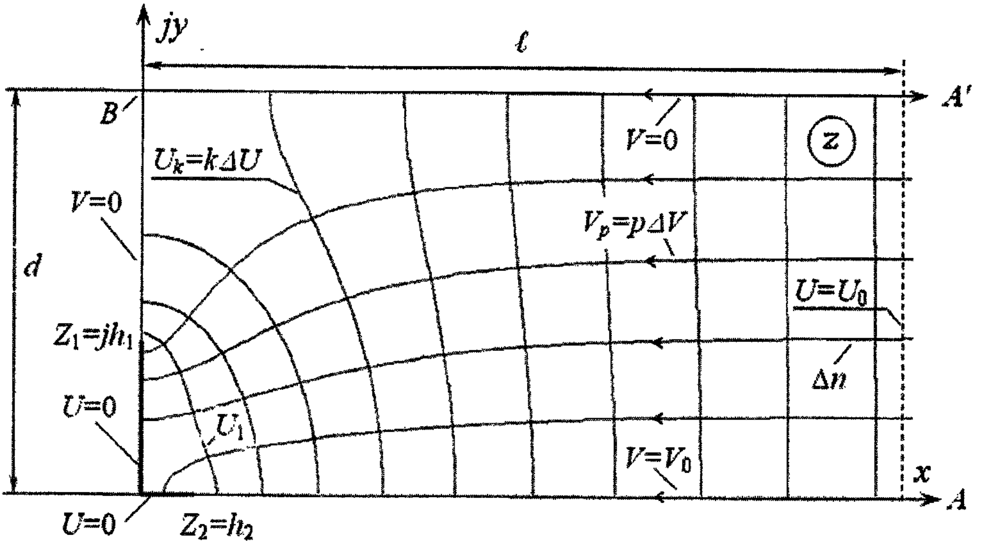


Рис. П.5

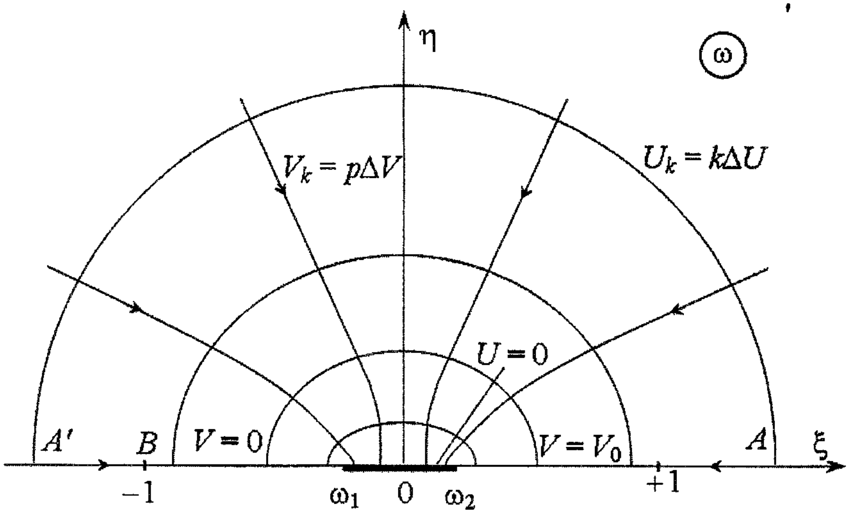


Рис. П.6

В рассматриваемом примере нетрудно записать обратную функцию, выражающую z через ω:

$$z = \frac{2d}{\pi} \ln\left(\sqrt{\omega} + \sqrt{\omega + 1}\right).$$

Функция потока принята равной нулю на участках границы листа между точками z_1 и B и точками B и A', принадлежащими одной и той же линии тока. Значение функции V на нижней границе на участке между точками z_2 и A, также являющимся силовой линией, обозначено V_0. Учитывая, что потоки векторов плотности тока и напряженности поля связаны равенством $\Psi_J = \gamma\Psi_E$, а полный поток плотности тока равен току i в листе, определяют значение V_0:

$$V_0 = \frac{\Psi_E}{b} = \frac{\Psi_J}{\gamma b} = \frac{i}{\gamma b} = r_{\square} i .$$

Граничные условия и картины полей на плоскостях z и ω показаны на рис. П.5 и П.6. На плоскости ω получили задачу расчета поля в полупространстве при задании на вещественной оси значений либо потенциала, либо функции потока. Комплексный потенциал в такой задаче определяется на основании известной формулы, приведенной в [3]. Для одной эквипотенциальной полосы с граничными точками ω_1 и ω_2 в общем виде комплексный потенциал определяется выражением

$$W(\omega) = C_1 \ln\left(\sqrt{\omega - \omega_1} + \sqrt{\omega - \omega_2}\right) + C_2 .$$

При $\omega = \omega_1$ (см. рис. П.6) $W = 0$, а при $\omega = \omega_2$ $W = V_0$. Используя эти условия, находим значения постоянных: $C_1 = j\dfrac{2V_0}{\pi}$, $C_2 = -C_1 \ln\sqrt{\omega_1 - \omega_2}$. Для комплексного потенциала $W(\omega)$ тогда получаем

$$W(\omega) = j\frac{2V_0}{\pi}\ln\frac{\sqrt{\omega - \omega_1} + \sqrt{\omega - \omega_2}}{\sqrt{\omega_1 - \omega_2}} =$$

$$= j\frac{2V_0}{\pi}\ln\frac{\sqrt{\omega - \omega_1} + \sqrt{\omega - \omega_2}}{\sqrt{\omega_2 - \omega_1}} + V_0 .$$

Если подставить сюда функцию $\omega(z)$, то получим выражение для комплексного потенциала $W(z)$ на плоскости z. Приводить здесь достаточно громоздкое выражение для $W(z)$ не будем, поскольку дальнейшие выводы, а также расчеты удобно выполнять с использованием плоскости ω, контролируя на ней получающиеся результаты.

В расчетные формулы входит значение функции потока V_0 на нижней границе листа, в то время как заданным является напряжение U_0 между электродами. Найдем связь между этими величинами, используя полученные соотношения. Точке $z = \ell$ на нижней границе листа соответствует на плоскости ω точка $\omega_\ell = \operatorname{sh}^2 \frac{\pi\ell}{2d}$. Комплексный потенциал в этих точках имеет одно значение: $W_\ell = V_0 + jU_0$. Тогда получаем

$$U_0 = \frac{2V_0}{\pi} \ln \frac{\sqrt{\omega_\ell - \omega_1} + \sqrt{\omega_\ell - \omega_2}}{\sqrt{\omega_2 - \omega_1}}.$$

При выполнении указанных ранее соотношений ℓ/d между размерами листа можно пренебречь в последнем выражении величинами ω_1 и ω_2 по сравнению с ω_ℓ. Если использовать далее приближенное выражение гиперболического синуса при больших значениях аргумента через показательную функцию, то

$$\frac{U_0}{V_0} \approx \frac{2}{\pi} \ln \frac{2\sqrt{\omega_\ell}}{\sqrt{\omega_2 - \omega_1}} \approx \frac{\ell}{d} - \frac{2}{\pi} \ln \sqrt{\omega_2 - \omega_1}.$$

Расчет поля следует начинать с нахождения величины V_0 на основании этой формулы, после чего для определения расчетных значений комплексного потенциала в заданных точках плоскости z можно непосредственно воспользоваться приведенными ранее соотношениями между ω и W. Однако для построения расчетным путем картины поля, удовлетворяющей тем же условиям, что и для полученной на основании опытных данных, целесообразно поступать иначе: приняв то же самое число трубок равного потока m, найти приращения потока и потенциала между соответствующими соседними линиями: $\Delta V = V_0 \,/\, m = \Delta U$. При этом число приращений равного потенциала $n = U_0/\Delta U$, умещающихся в пределах расчетной области листа, как правило, не получается целым числом, поскольку разность потенциалов между последней расчетной линией равного потенциала и электродом с потенциалом U_0 оказывается меньше расчетного значения ΔU.

Далее выбирают конкретные значения потенциала U_k и функции потока V_p и определяют положение узловых точек на плоскости ω, а затем и на плоскости z. Удобно при этом воспользоваться обратным по отношению к W преобразованием, которое имеет вид

$$\omega = \omega_1 \cos^2 \frac{\pi W}{2V_0} + \omega_2 \sin^2 \frac{\pi W}{2V_0} \cdot$$

Практически поступают следующим образом. Задают потенциал $U_1 = \Delta U$ ближайшей к электроду с нулевым потенциалом линии и ряд значений функции потока ($V = 0$, $V_1 = \Delta V$, $V_2 = 2\Delta V$, ..., $V_p = p\Delta V$, ..., $V_m = m \cdot \Delta V = V_0$) и по последней формуле получают на плоскости ω точки, принадлежащие эквипотенциальной линии U_1 и различным значениям функции потока. Затем находят точки с теми же значениями U_k и V_p на плоскости z. Задавая далее потенциал $U_2 = 2\Delta U$ и те же значения функции потока V_p, получают узловые точки сетки поля на второй эквипотенциали областей ω и z. Указанную последовательность расчетов повторяют для всех остальных линий равного потенциала.

Если расчет проводится без использования компьютера, то для построения приближенной картины поля можно ограничиться указанными расчетами. Достаточно соединить между собой узловые точки сетки с равными значениями потенциала, а затем и равными значениями функции потока.

Отметим, что при вычислении многозначных функций комплексного переменного аргументы квадратных корней следует брать в пределах (0, $\pi/2$), что отвечает ветви, дающей положительное значение корня из положительного числа. Для упрощения вычисления координат точек плоскости z, лежащих на границах листа, выражение для z можно преобразовать. Так, для верхней границы ($\omega < -1$)

$$z(x, jd) = \frac{2d}{\pi}\ln(\sqrt{-\omega} + \sqrt{1-\omega}) + jd;$$

для левой границы ($-1 < \omega < 0$)

$$z(0, jy) = j\frac{2d}{\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{-\omega}{1+\omega}} = j\frac{2d}{\pi}\arcsin\sqrt{-\omega}\,;$$

для нижней границы ($\omega > 0$) непосредственно используется исходная формула.

Расчетная формула для комплексной напряженности поля наиболее просто находится на основании выражения для производной от комплексного потенциала в виде функции комплексного переменного ω:

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{d\omega}\,\frac{d\omega}{dz} = j\frac{V_0}{\pi}\sqrt{\frac{\omega(\omega+1)}{(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)}}.$$

Подставив в это выражение зависимость $\omega(z)$, нетрудно затем в соответствии с общим определением получить комплексную напряженность поля в виде функции комплексного переменного z.

Полученное решение позволяет рассчитать сопротивление листа между электродами с помощью выражения

$$r = \frac{U_0}{i} = \frac{1}{\gamma b}\frac{U_0}{V_0} = r_{\square}\left(\frac{\ell}{d} - \frac{2}{\pi}\ln\sqrt{\omega_2 - \omega_1}\right),$$

где параметр $r_{\square}$, характеризующий свойства листа, определяется на основании измерений.

Переписав последнее выражение в виде

$$r = \frac{\ell}{\gamma b d} + \frac{2}{\pi\gamma b}\ln\frac{1}{\sqrt{\omega_2 - \omega_1}} = r_0 + r_k,$$

можно определить, что r_0 представляет собой сопротивление листа длиною ℓ и сечением bd при протекании по нему равномерно распределенного тока. Тогда видно, что слагаемое r_k учитывает влияние на общее сопротивление фактора искажения картины растекания тока, обусловленного реальными размерами и расположением электродов.

Приложение 4

РАСЧЕТ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ КАТУШКИ

Для приближенного расчета напряженности магнитного поля на оси катушки при отсутствии стального сердечника заменим действительную многослойную катушку однослойной с тем же общим числом витков, с той же длиной и с радиусом витков, равным среднему радиусу витков действительной катушки. Совместим ось 0z с осью исследуемой катушки и поместим начало координат в центр катушки (рис. П.7).

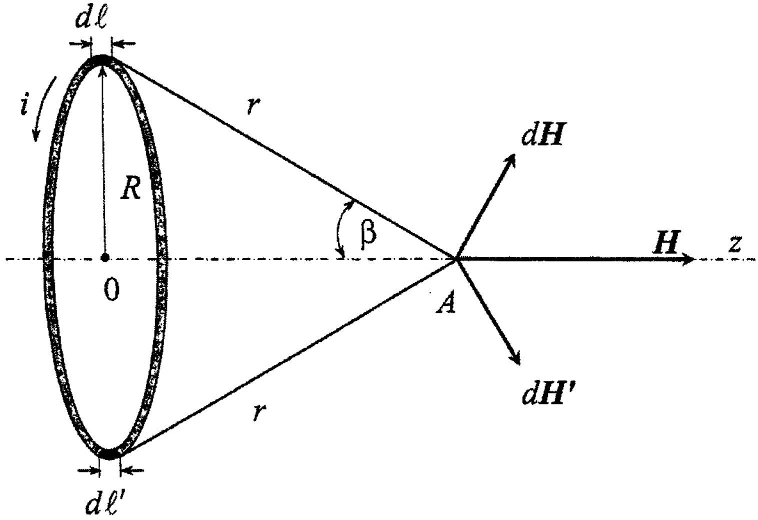


Рис. П.7

Напряженность магнитного поля на оси однослойной цилиндрической катушки легко вычислить при помощи закона Био – Савара – Лапласа. Согласно этому закону ток i, проходящий по элементу проводника $d\ell$, создает магнитное поле, имеющее в точке, удаленной на расстояние r от элемента проводника, напряженность

$$dH = \frac{id\ell\sin\alpha}{4\pi r^2},$$

где α — угол между вектором $d\ell$ (направлением тока в элементе $d\ell$) и радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$, направленным от элемента $d\ell$ к точке, в которой определяется $d\boldsymbol{H}$.

Вектор $d\boldsymbol{H}$ направлен перпендикулярно к $d\ell$ и перпендикулярно к $\boldsymbol{r}$ в сторону, определяемую правилом правого винта.

Найдем сначала напряженность поля в точке A (см. рис. П.7), лежащей на оси кругового витка, по которому протекает ток i. Пусть R — радиус витка. Так как для точек на оси $\boldsymbol{r} \perp d\ell$, то $\sin\alpha = 1$, и тогда

$$dH = \frac{id\ell}{4\pi r^2}.$$

Каждые два равных элемента витка $d\ell$ и $d\ell'$, лежащих на противоположных концах диаметра витка, обусловливают в точке A векторы $d\boldsymbol{H}$ и $d\boldsymbol{H}'$, составляющие которых, нормальные к оси $0z$, взаимно компенсируются. Наоборот, составляющие этих векторов, направленные вдоль оси $0z$, складываются. Следовательно, при вычислении напряженности поля H в точке A, обусловленной током во всем витке, достаточно учесть только составляющую каждого элементарного вектора $d\boldsymbol{H}$, направленную вдоль оси $0z$ и равную $\sin\beta \cdot dH$, где β — угол между осью $0z$ и радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$.

Интегрируя вдоль всего витка, получаем

$$H = \int_0^{2\pi R} \sin\beta \frac{i \cdot dl}{4\pi^2} = \frac{i\sin\beta}{4\pi^2} 2\pi R = \frac{iR}{2R^2}\sin\beta.$$

Так как $\dfrac{R}{r} = \sin\beta$, то

$$H = \frac{i}{2}\frac{R^2}{r^3} = \frac{i}{2R}\sin^3\beta. \qquad \text{(П.1)}$$

Найдем напряженность магнитного поля в точке A, лежащей на оси однослойной цилиндрической катушки, имеющей длину ℓ, число витков w и радиус витков R (рис. П.8).

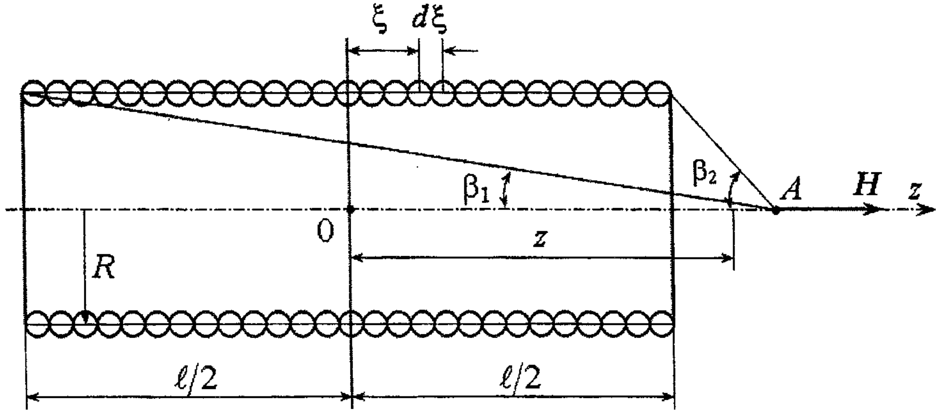


Рис. П.8

Выделим элемент длины $d\xi$ катушки. Его можно рассматривать как тонкий круговой контур с током $di = \frac{iw}{\ell} d\xi$.

Напряженность магнитного поля в точке A, вызванная этим током, согласно выражению (П.1)

$$dH = \frac{di}{2R} \sin^3 \beta = \frac{iw}{2\ell} \frac{\sin^3 \beta}{R} d\xi.$$

Искомая напряженность H магнитного поля в точке A, созданного током во всей катушке, получается интегрированием вдоль всей катушки:

$$H = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{+\frac{\ell}{2}} \frac{iw}{2\ell} \frac{\sin^3\beta}{R} d\xi.$$

Так как $\frac{z-\xi}{R} = \operatorname{ctg} \beta$, то $\frac{d\xi}{R} = \frac{d\beta}{\sin^2 \beta}$.

Следовательно,

$$H = \frac{iw}{2\ell}\int\limits_{\beta_1}^{\beta_2} \sin\beta \cdot d\beta = \frac{iw}{2\ell}\left(\cos\beta_1 - \cos\beta_2\right),$$

где β_1 и β_2 — значения угла β, соответствующие краям катушки.

Косинусы этих углов выражаются формулами

$$\cos\beta_1 = \frac{z+\ell/2}{\sqrt{R^2+\left(z+\ell/2\right)^3}} \quad \text{и} \quad \cos\beta_2 = \frac{z-\ell/2}{\sqrt{R^2+\left(z-\ell/2\right)^2}},$$

где z — расстояние от точки A до середины катушки.

Для определения напряженности магнитного поля в точке A получим выражение

$$H(z) = \frac{iw}{2\ell}\left(\frac{z+\ell/2}{\sqrt{R^2+\left(z+\ell/2\right)^2}} - \frac{z-\ell/2}{\sqrt{R^2+\left(z-\ell/2\right)^2}}\right). \tag{П.2}$$

Формула (П.2) служит для расчета зависимости $H = f(x)$ при отсутствии стального сердечника.

Приложение 5

ИНСТРУКЦИЯ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ ПРОГРАММЫ СИНТЕЗА МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ОТРЕЗКЕ ПРЯМОЙ

Программа «работа 4 Синтез» позволяет рассчитать координаты z и токи i нескольких соосных одновитковых катушек одинакового радиуса, обеспечивающих близкую к заданной индукцию $B_0(z)$ на отрезке ab оси z (рис. П.9).

Для минимизации функционала

$$F(\mathbf{x}) = \int\limits_a^b \left[B(\mathbf{x},z) - B_0(z)\right]^2 dz,$$

где $\mathbf{x}$ — вектор координат z_k и токов $I_k\left(k = 1,\ldots,N\right)$ катушек, использован градиентный метод наискорейшего спуска, позволяющий также изучить особенности процесса поиска требуемой величины.

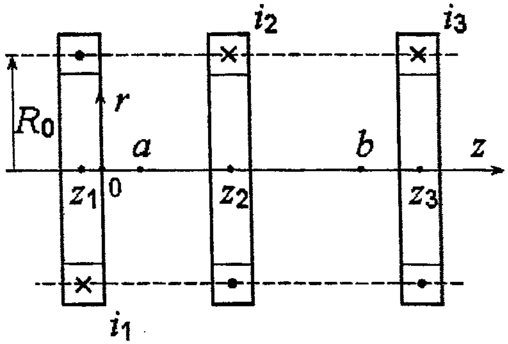


Рис. П.9

На одной итерации метода вектор **x** изменяется в направлении grad $F(\mathbf{x})$ с шагом sI по токам и шагом sz по координатам катушек. Так как входящая в функционал магнитная индукция $B(\mathbf{x}, z)$ описывается аналитическим выражением, то его производная по составляющим вектора **x** также рассчитана аналитически. Значения шагов zI и sz следует задать перед началом расчета, причем они сохраняются постоянными при выполнении принятого числа итераций.

Величины, которые должны быть введены перед расчетом, находятся в описательной части перед текстом программы. Они помечены зеленым цветом. К ним относятся: радиус катушек R_0; число витков одной катушки w; функция $f(z) = B_0(z)$, определяющая требуемое распределение индукции на отрезке ab оси z; координаты a и b точек отрезка ab; наименьшее $z_{0\min}$ и наибольшее $z_{0\max}$ допустимые значения координаты z, где могут размещаться катушки, наименьшее $I_{0\min}$ и наибольшее $I_{0\max}$ допустимые значения тока катушки; матрица-столбец $\mathbf{z}_0$ значений начальных координат катушек; матрица-столбец $\mathbf{I}_0$ начальных значений токов катушек; количество катушек N, используемых для получения заданного распределения поля; число итераций M процесса поиска неизвестных; шаг изменения токов катушек sI; шаг изменения координат катушек sz.

Для запуска программы следует переместить находящийся в правой крайней части экрана бегунок вниз до конца.

После выполнения программы можно увидеть среднеквадратичное отклонение получаемой и требуемой индукций на отрезке ab, отнесенное к требуемому значению магнитной индукции q, значение функционала $F(x)$, вектор найденных координат $\mathbf{z}$ катушек, вектор найденных токов $\mathbf{I}$ катушек, а также соответствующие векторы $\mathbf{z}_0$, $\mathbf{I}_0$ начальных значений.

Если приподнять бегунок вверх, то на графике можно увидеть отмеченную красным цветом зависимость полученного распределения индукции $B(z)$, отмеченную синим цветом пунктирную зависимость требуемого распределения индукции – функции $f(z)$, красные вертикальные пунктирные линии, отмечающие границы отрезка ab, и зеленые вертикальные линии, отмечающие найденные положения катушек.

Отклонение получаемой в результате выполнения расчета индукции $B(z)$ от требуемой $f(z)$ зависит от выбора начальных значений координат и токов катушек, задаваемых шагов sI, sz, а также от заданного числа итераций M.

Желательно задавать начальные значения координат и токов катушек по возможности ближе к искомым, используя для этого любые соображения о качественном распределении поля на оси катушек. После выполнения расчета для повышения точности можно задать полученные значения координат и токов как начальные и повторить расчет. При неудовлетворительной точности такую процедуру можно выполнить несколько раз.

Коэффициенты sI, sz, имеющие относительно большие значения на первых итерациях метода, должны уменьшаться по мере приближения к минимуму функционала. Если принять их постоянными, то для получения устойчивого процесса они должны быть небольшими, так что решение может потребовать выполнения значительного числа итераций и, соответственно, много времени. На практике эти коэффициенты можно изменять после выполнения принятого числа итераций M, проверяя при этом характер изменения функционала. Если первоначальные значения этих коэффициентов можно принять приблизительно равными $s = 5$ и $sz = 3{\cdot}10^6$, то при приближении к точке минимума, когда функционал будет иметь порядок $10^{-10} \div 10^{-11}$, их следует уменьшить до значений $sI = 0{,}001$ и $sz = 10^3 \div 10^4$. Необходимость коррекции коэффициентов легко определить по характеру изменения функционала: их следует уменьшать при увеличении значения функционала в процессе расчета.

Расчеты показывают, что вблизи минимума функционал может изменяться на несколько порядков, например от 10^{-11} до 10^{-13}. При этом токи и координаты катушек изменяются незначительно, в пределах миллиампера и долей миллиметра. Такие изменения токов и координат катушек в условиях лабораторной установки учесть невозможно, в связи с чем не имеет смысла продолжать вычисления, которые приводят к таким уточнениям токов и координат катушек. Поэтому критерием завершения расчета может служить не только значение функционала, но и характер изменения искомых параметров.

Лабораторная установка накладывает также ограничения на искомые значения токов и координат катушек. Так, токи катушек не могут превышать значений 0,4 А (реостаты установки не позволяют пропускать токи, превышающие 0,4 А). Расстояния между катушками ограничены размерами установки, так что максимальное расстояние между ними не может превышать 33 см. Имеется также еще одно ограничение на взаимное расположение катушек, связанное с их конечной толщиной (2,5 см). Так как при расчете толщина катушек принимается равной нулю, то они не могут располагаться на расстоянии, меньшем 5 см, одна от другой. Эти ограничения учитываются путем добавления к исходному функционалу $F(x)$ дополнительных слагаемых.

В результате расчета программа позволяет определить токи и координаты катушек. Так как в лабораторной установке крайняя левая катушка имеет координату $z_1 \neq 0$, то полученные значения координат z_1, z_2, z_3, как и координаты a, b концов отрезка с заданным распределением магнитной индукции, следует уменьшить на значение z_1.

БЕССЕЛЕВЫ ФУНКЦИИ НУЛЕВОГО И ПЕРВОГО ПОРЯДКА ПЕРВОГО РОДА

Разложение $J_0(x)$ и $J_1(x)$ в ряды имеет вид

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{(2\cdot 4)^2} - \frac{x^6}{(2\cdot 4\cdot 6)^2} + \ldots;$$

$$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2\cdot 4} + \frac{x^5}{(2\cdot 4)^2\cdot 6} - \frac{x^7}{(2\cdot 4\cdot 6)^2\cdot 8}.$$

Последовательные корни уравнений $J_0(x) = 0$ и $J_1(x) = 0$ представлены в табл. П. 1.

Таблица П. 1

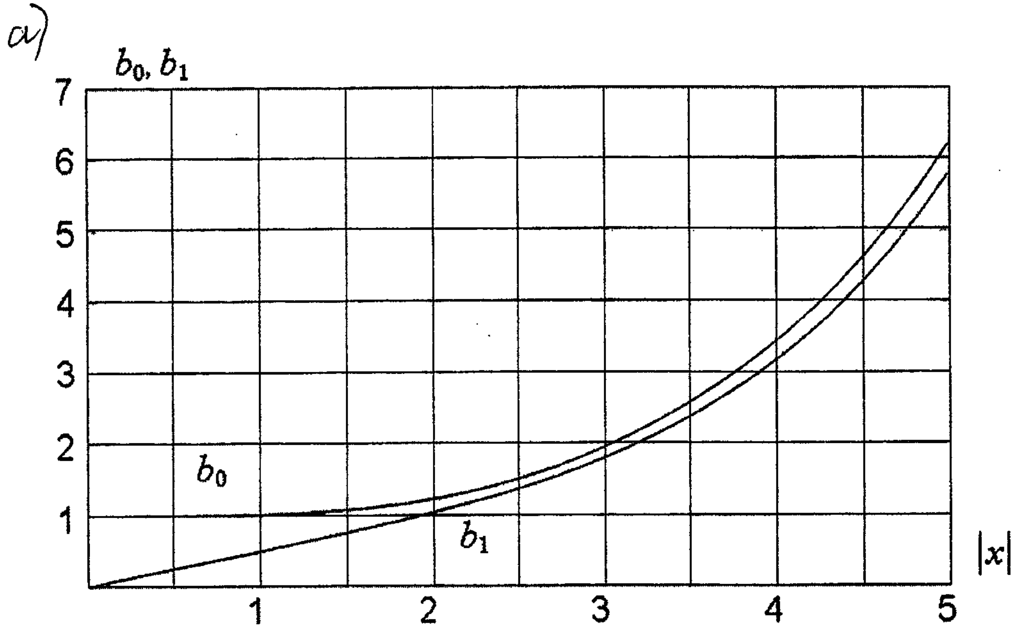
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_n при $J_0(x_n) = 0$	2,4	5,5	8,7	11,8	14,9	18,1	21,2	24,3	27,5	30,6
x_n при $J_1(x_n)=0$	0	3,8	7,0	10,2	13,3	16,5	19,6	22,8	25,9	29,0

Справедливы следующие рекуррентные формулы:

$$J_0(x) = -J_1(x); \quad \int_0^x J_1(x)\,dx = 1 - J_0(x);$$

$$\frac{d}{dx}\left[xJ_1(x)\right] = xJ_0(x); \quad \int_0^x xJ_0(x)\,dx = xJ_1(x).$$

Зависимости модулей b_0, b_1 и аргументов β_0, β_1 бесселевых функций $J_0(x) = b_0\varepsilon^{j\beta_0}$, $J_1(x) = b_1\varepsilon^{j\beta_1}$ нулевого и первого порядка от величины $x = \sqrt{-j}\cdot|x|$ показаны на рис. П. 10 и П. 11.



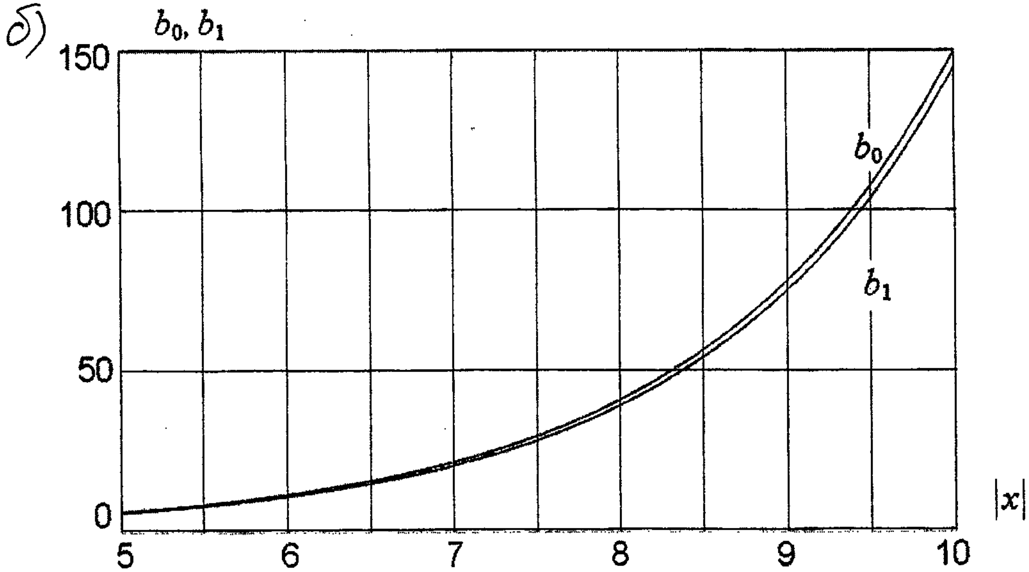


Рис. П. 10

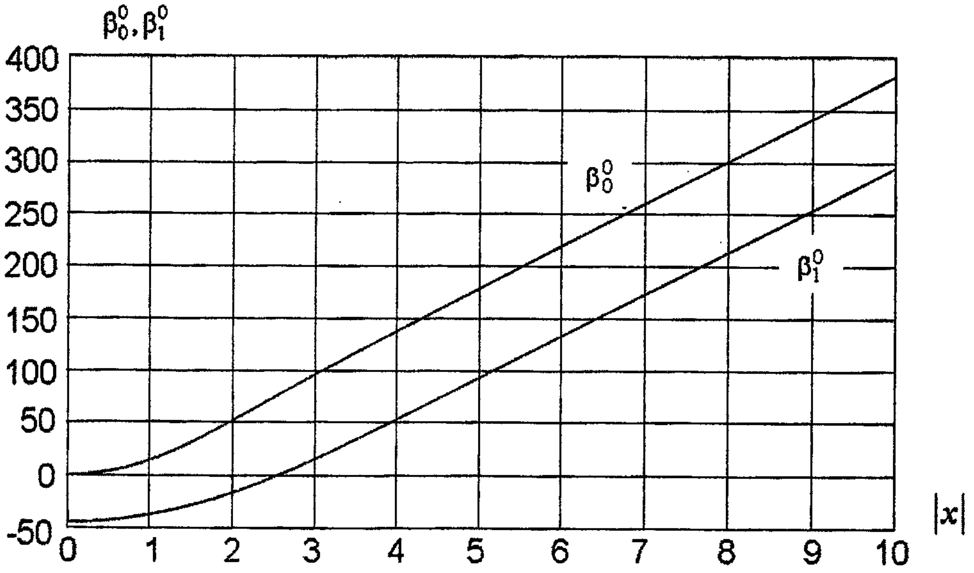


Рис. П. 11

Приложение 7

ОГРАНИЧЕНИЕ ОБЛАСТИ ЧИСЛЕННОГО РАСЧЕТА ПОЛЯ

Перед обращением к программе численного расчета поля следует найти центры, оси и плоскости геометрической симметрии или антисимметрии (если они существуют), а также симметрии потенциала и напряженности поля. Выявление симметрий позволяет уменьшить размер области расчета и тем самым упростить задачу. Действительно, наличие плоскости симметрии дает возможность задания на ней потенциала либо нормальной к ней производной потенциала. Это позволяет исключить одну или несколько симметричных частей исходной области из рассмотрения и рассчитать поле только в одной из них, поскольку картины поля в других симметричных частях такие же.

Поле является симметричным относительно некоторой плоскости, если относительно нее симметричны геометрия тел и границ, а также симметричны источники и граничные условия.

На рис. П. 12, *а* изображены сечения весьма длинных прямолинейных шин с электрическими потенциалами U_0 и $-U_0$, поле которых является плоскопараллельным. Шины расположены в прямоугольной области, на сторонах которой распределения потенциала заданы. Линия *1 – 1* является линией геометрической симметрии. Линии напряженности электрического поля подходят к ней под прямым углом, и, следовательно, потенциал на этой линии имеет постоянное значение. Он равен нулю, поскольку в симметрично расположенных относительно нее точках A, B потенциалы связаны соотношением $U_A = -U_B$. Принимая на этой линии $U = 0$, можем рассчитывать поле только в половине исходной области (рис. П. 12, *б*).

Если существует линия симметрии электрического потенциала (в симметрично расположенных относительно нее точках A и B потенциалы связаны соотношением $U_A=U_B$), то на ней можем принять условие $\partial U/\partial n = 0$.

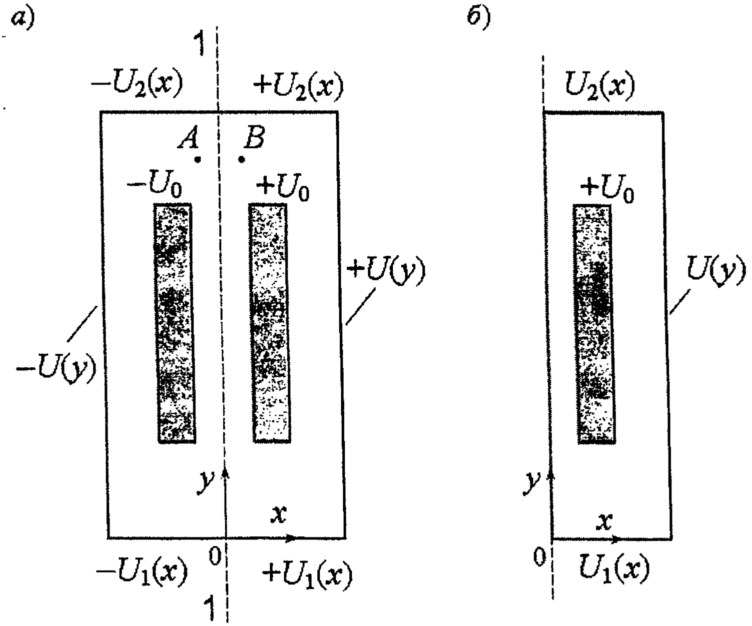


Рис. П. 12

Поверхности проводящих тел являются границами области расчета, поскольку во всем объеме проводящего тела электрический потенциал имеет постоянное значение. Если потенциал проводящего тела неизвестен, но задана плотность σ распределенного на его поверхности поверхностного заряда, то граничное условие в точках поверхности переходит в неоднородное граничное условие второго рода: $\frac{\partial U}{\partial n} = -\frac{\sigma}{\varepsilon}$.

Условия симметрии при расчете плоскопараллельного магнитного поля определяются аналогично рассмотренному. При нахождении линий симметрии (антисимметрии) следует определить, существуют ли линии геометрической симметрии, а также выполнены ли условия симметрии источников и граничных условий. В программе *Qfield* для расчета магнитного поля решается уравнение Пуассона относительно векторного магнитного потенциала A. Если на некоторой линии нормальная к ней составляющая магнитной индукции равна нулю, то в силу соотношения $B_n = \partial A/\partial\tau$ (τ — касательное к линии направление) на этой линии векторный магнитный потенциал имеет постоянное значение, равное в частном случае нулю, если линия является линией антисимметрии потенциала. Если же линии вектора магнитной индукции подходят к некоторой линии под прямым углом, то на ней $B_\tau = 0$, и в силу соотношения $B_\tau = \partial A/\partial n$ получаем, что на этой линии можно принять условие $\partial A/\partial n = 0$.

Определим линии симметрии при анализе магнитного поля постоянного тока двух одинаковых шин прямоугольного сечения с равными токами противоположных направлений (рис. П. 13, *а*).

Линии магнитной индукции касательны к линии *1 – 1*. На этой линии нормальная к ней составляющая магнитной индукции равна нулю, поэтому векторный магнитный потенциал на ней имеет постоянное и равное нулю значение. Линии магнитной индукции подходят к линии *2 – 2* под прямым углом, потому $B_\tau = B_x = \partial A/\partial y = 0$. Линия *1 – 1* является линией антисимметрии векторного магнитного потенциала, а линия *2 – 2* — линией симметрии, что позволяет уменьшить область расчета поля (рис. П. 13, *б*).

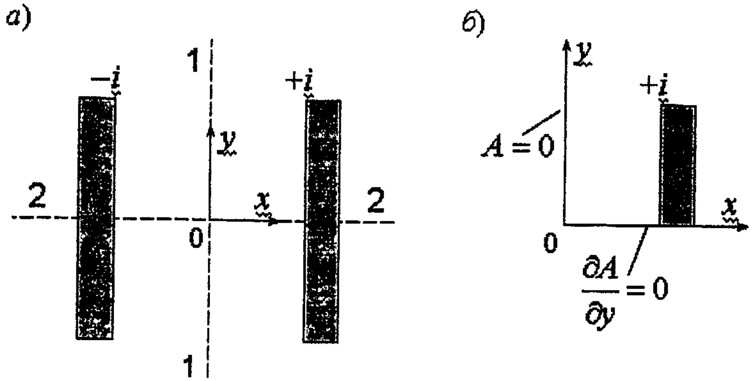


Рис. П. 13

Таким образом, область расчета поля можно уменьшить, если поле обладает свойствами симметрии или антисимметрии. Для плоскопараллельного электрического поля на линии антисимметрии потенциала выполняется условие $U = 0$ (либо $A = 0$-для магнитного поля), а на линии симметрии потенциала — условие $\partial U/\partial n = 0$ (либо условие $\partial A/\partial n = 0$-для магнитного поля).

Отметим, что при расчете осесимметричного электрического поля потенциал на оси симметрии (при $r = 0$) равен нулю. Аналогично-при расчете магнитного поля векторный магнитный потенциал на оси симметрии также равен нулю. Поэтому в этих случаях поле можно рассчитать только в полуплоскости $r > 0$.

В ряде случаев приходится рассчитывать электрическое или магнитное поле в безграничных областях, т.е. областях, не ограниченных замкнутым контуром с заданными граничными условиями. При численном расчете поля методом конечных элементов (в частности, с помощью программы *Qfield*) в безграничных областях приходится ограничивать число элементов, вводя так называемые искусственные границы области с заданием на них некоторых граничных (называемых краевыми) условий для потенциала.

Выбор размера контура, ограничивающего область расчета (например, радиуса окружности), имеет большое значение. Чем ближе искусственно вводимая граница к области расположения источников и к области, в которой нас интересуют характеристики поля, тем меньше размер области расчета и тем меньшим будет и число узлов. Однако при приближении искусственной границы к этим областям уменьшается точность расчета, поскольку точное граничное условие на ней заранее неизвестно, и приходится задавать приближенное условие для потенциала или для его нормальной к границе производной. При удалении искусственной границы от области расположения источников точность расчета возрастает, однако это одновременно ведет к увеличению области расчета и числа узлов. На практике при введении искусственной границы, например окружности, ее радиус принимают $r_0 \approx 10d$, где d — характерный размер области с источниками (например, наименьший радиус окружности, охватывающей источники поля, либо среднее расстояние между источниками).

Краевое условие на искусственной границе можно задать, используя известные оценки характера убывания потенциала и напряженности поля на больших расстояниях от источников.

Если сумма зарядов, создающих поле в однородной среде, не равна нулю, то на большом расстоянии r_0 от них можно задать приближенно электрический потенциал $U=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r_0}$ или напряженность электрического поля $E=-\dfrac{\partial U}{\partial n}=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon r_0^2}$. В плоскопараллельном электрическом поле на большом расстоянии r_0 от проводника с линейной плотностью заряда τ напряженность поля $E=-\dfrac{\partial U}{\partial n}=\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon r_0}$, поэтому на окружности радиусом r_0 можно принять условие $\dfrac{\partial U}{\partial n}=-\dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon r_0}$.

Если сумма зарядов, создающих поле, равна нулю, то можно считать, что на большом удалении от них, т.е. на окружности радиусом r_0 (границе расчетной области), нормальная к ней составляющая напряженности поля значительно меньше касательной составляющей, и задать на ней условие $\partial U/\partial n=0$.

При большом удалении от линейных проводов, сумма зарядов которых равна нулю, потенциал убывает в однородной среде как $U=\dfrac{\tau d\cos\theta}{2\pi\varepsilon r}$. Это выражение можно (при $r=r_0$ и d, равном среднему расстоянию между проводами) принять в качестве граничного условия на искусственной границе.

На практике оценить влияние искусственной границы на результат расчета можно, решая задачу несколько раз при различных значениях величины r_0, постепенно увеличивая ее значение.