С. И. НОВОСЕЛОВ

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

УЧПЕДГИЗ • 1956

С. И. НОВОСЕЛОВ

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

ИЗДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Москва — 1956

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Настоящая книга предназначается в качестве пособия для учителя; она содержит материал в большем объеме, чем предусмотрено по теме „Обратные тригонометрические функции" программой средней школы. Определения, основные свойства и графики обратных тригонометрических функций изложены в главе II; материалом этой главы учитель может воспользоваться в преподавании. Материал главы III может быть использован в качестве упражнений в классе, для домашних заданий и при повторении. Материал главы IV может быть использован частично: следует рассмотреть соотношения первого рода, соотношения второго рода (при ограниченности времени) могут быть рассмотрены на конкретных числовых примерах — образцы таких примеров приведены в тексте. Формулы преобразования суммы и разности двух аркфункций (гл. V, §§ 15 и 16) не входят в программу школы. Во многих случаях преобразование суммы аркфункций может быть выполнено непосредственно без применения громоздких общих формул. В конце § 15 приводятся примеры на непосредственное выполнение преобразований. Решения этих примеров могут служить образцами для решения ряда подобных упражнений, содержащихся в школьном задачнике. В главе VI разобраны основные методы решения тригонометрических уравнений, применяющиеся в школьном курсе. В подстрочных примечаниях указаны номера, под которыми в школьном задачнике содержатся тригонометрические уравнения, решаемые тем или другим методом. В главе VII разобраны типы уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции. Приведенные решения уравнений могут служить образцами решения соответствующих упражнений из школьного задачника.

В книге содержится материал для работы школьных математических кружков. В первую очередь следует рекомендовать тему „Полиномы Чебышева"; материал по этой теме дан в специальном дополнении к тексту книги. Для разбора на занятиях школьных кружков можно рекомендовать также материал, содержащийся в главах IV, V, VIII.

В конце книги в виде дополнения даны две небольшие главы о полиномах Чебышева и об обратных тригонометрических функциях от комплексного аргумента. О первой из этих двух глав было сказано выше, вторая глава требует от читателя основных сведений из математического анализа (элементы теории рядов). Мы полагаем, что при реферативном изложении необходимых сведений из теории рядов материал этой последней главы может быть использован для занятий школьных кружков.

Выражаю глубокую благодарность П. А. Ларичеву и П. С. Моденову за внимательный просмотр рукописи и данные мне ценные советы и указания.

Москва, 9 июня 1955 г. *С. Новоселов*

Глава I.

ВВЕДЕНИЕ.

§ 1. Понятие функции.

Общее определение понятия функции формулируется следующим образом.

Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ два множества, элементами которых могут быть любые объекты. Если каждому элементу x множества $\mathfrak{M}$ ставится в соответствие некоторый элемент y множества $\mathfrak{N}$, то говорят, что задана функция

$$y = f(x).$$

Элементы x множества $\mathfrak{M}$ называются значениями аргумента, а соответствующие элементы y множества $\mathfrak{N}$ — значения функции. Множество $\mathfrak{M}$ называется областью определения функции, или множеством значений (допустимых) аргумента. Множество соответствующих значений $y = f(x)$ называется множеством значений функции.

Таким образом, в основе понятия функции лежат понятия множества и соответствия. Эти понятия в современной математике являются первоначальными, не поддающимися определению через другие более простые понятия.

Примеры: 1. Процесс измерения отрезков (или углов) ставит в соответствие (по определенному правилу) всякому отрезку (углу) число — его меру. Следовательно, длина отрезка (мера угла) есть функция отрезка (угла). Здесь значения аргумента суть отрезки (углы), а значения функции — числа.

2. Аналогично, площадь многоугольника есть функция многоугольника. Здесь значения аргумента — многоугольники, а значения функции — числа.

3. При ортогональном проектировании на данную плоскостью P всякой точке x пространства ставится в соответствие точка y плоскости P. Здесь значения аргумента суть точки пространства, а значения функции — точки плоскости.

4. В элементарной математике тригонометрические функции рассматриваются как функции угла (дуги). Так, например, всякому углу (дуге) соответствует значение синуса (число), здесь значения аргумента — дуги (углы), а значения функции — числа.

В дальнейшем мы будем рассматривать главным образом числовые действительные функции от действительного аргумента. Для этих функций множество $\mathfrak{M}$ — область определения — есть некоторое множество действительных чисел, значения функции суть действительные числа, а потому и множество значений функции есть также некоторое множество действительных чисел.

Закон соответствия данной функции может задаваться различными способами; так, например, он может быть задан непосредственным описанием или формулой, указывающей, какие математические операции следует выполнить над значением аргумента.

Примеры:

1. Поставим в соответствие всякому действительному числу x число y следующим образом: если x рациональное число, то считаем $y=1$, если x — иррациональное число, то считаем $y=0$. Эта функция задана непосредственным описанием закона соответствия.

2. Всякому действительному числу x поставим в соответствие число y, определяемое формулой

$$y=2^x+1;$$

здесь функция задается посредством формулы.

3. Всякому действительному числу x поставим в соответствие число y следующим образом:

$$y=\begin{cases} x^2, & \text{если } x\geqslant 0, \\ x, & \text{если } x<0. \end{cases}$$

Так, если $x=2$, то $y=4$; если $x=0$, то $y=0$, если $x=-5$, то $y=-5$. В последнем примере функция задается различными формулами в разных промежутках.

Пусть дано некоторое математическое выражение $T(x)$, содержащее букву x. Если заранее не указано, какие значения для x считаются допустимыми, то условимся допустимыми считать все те действительные значения x, при которых выражение $T(x)$ имеет смысл и его значения действительны. Всякому допустимому значению x соответствует вполне определенное значение выражения $T(x)$, а потому рассматриваемое выражение определяет функцию от аргумента x. Областью определения этой функции является множество всех допустимых значений x.

Примеры:

1. $y = ax^2 + bx + c$ область определения — множество всех действительных чисел.

2. $y = \sqrt{x}$ область определения—множество неотрицательных чисел, $x \geqslant 0$.

3. $y = \sqrt{-x}$ область определения — множество всех неположительных чисел, $x \leqslant 0$.

4. $y = \dfrac{1}{x^2 - 1}$ область определения — множество всех действительных чисел, отличных от ± 1, т. е. $x \neq \pm 1$.

5. $y = \lg x$ область определения — множество всех положительных чисел, $x > 0$.

6. $y = \lg \sin x$ область определения состоит из промежутков, в которых синус положителен:

$$2k\pi < x < (2k + 1)\pi \quad (k \text{ — любое целое число}).$$

§ 2. Числовые промежутки.

В дальнейшем мы будем встречаться главным образом с числовыми промежутками двух родов: с и н т е р в а л а м и и с с е г м е н т а м и. Пусть a и b любые два действительные числа, взятые при условии $a < b$.

Определение. 1°. *Интервалом (a, b) называется множество всех действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам*

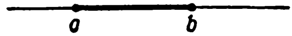
$$a < x < b.$$

2°. *Сегментом $[a, b]$ называется множество всех действительных чисел, удовлетворяющих неравенствам*

$$a \leqslant x \leqslant b.$$

Геометрически интервал изображается на числовой прямой множеством точек, лежащих между двумя данными точками a и b, при этом сами граничные

Черт. 1.



Черт. 2.

точки a и b и с к л ю ч а ю т с я (черт. 1). Сегмент изображается на числовой прямой множеством точек, принадлежащих отрезку с концами в точках a и b, при этом сами концы a и b в к л ю ч а ю т с я (черт. 2). Необходимость отличать сегмент от интервала возникает даже при изучении простейших элементарных функций. Так, например, областью определения функции $\sqrt{1-x^2}$ является сегмент $[-1, 1]$. Областью определения функции $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ является интервал $(-1,1)$, ибо теперь точки ± 1 приходится исключить как обращающие в нуль знаменатель.

Функцию $y=\sin x$ можно рассматривать на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, однако функцию $\operatorname{tg} x$ нельзя рассматривать на этом сегменте, так так при $x=\pm\frac{\pi}{2}$ тангенс теряет смысл.

Если под x можно подразумевать любое действительное число, то принято писать символические неравенства $-\infty < x < \infty$. В целях установления единообразия в терминологии и в обозначениях множество всех действительных чисел называется интервалом от $-\infty$ до ∞ и обозначается так: $(-\infty, \infty)$. Аналогично запись $a < x < \infty$ (или $-\infty < x < a$) означает, что под x можно подразумевать любое число, большее (меньшее) a. Множество всех действительных чисел, больших (меньших) a, называется интервалом от a до ∞ (или от $-\infty$ до a) и обозначается так: (a, ∞) или соответственно $(-\infty, a)$.

§ 3. Монотонные функции.

Определение. *Функция $y=f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на данном промежутке, если при произвольных двух различных значениях аргумента, принадлежащих данному промежутку, большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции:*

$$f(x_1) < f(x_2), \text{ если } x_1 < x_2$$

для возрастающей функции, и

$$f(x_1) > f(x_2), \text{ если } x_1 < x_2$$

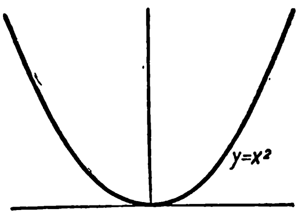
для убывающей функции.

Функция возрастающая или убывающая в некотором промежутке называется монотонной в этом промежутке.

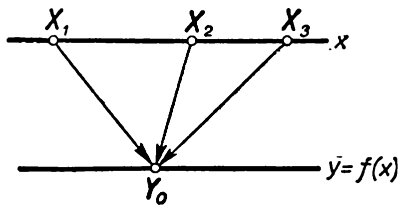
Примеры монотонных функций нетрудно привести из элементарной математики.

Примеры:

1. Функции x, x^3, x^5 — возрастающие.
2. Функции a^x и $\log_a x$ возрастают при $a > 1$ и убывают при $a < 1$.
3. Функции $\frac{1}{2^x}$, $-x$, $-x^3$ — убывающие.
4. Функции x^2, x^4, x^6, рассматриваемые в интервале $-\infty < x < \infty$, не являются монотонными. В самом деле, каждая из них убывает



Черт. 3.



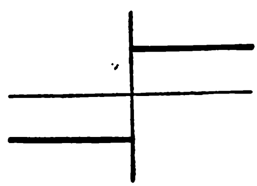
Черт. 4.

в промежутке $-\infty < x \leqslant 0$ и возрастает в промежутке $0 \leqslant x < \infty$ (черт. 3).

§ 4. Обратная функция.

Пусть $y = f(x)$ есть некоторая функция от аргумента x.

Рассмотрим некоторое значение y_0 данной функции. Значение y_0 функция $f(x)$ может иметь при нескольких (может быть, при бесконечно многих) значениях аргумента (черт. 4). Так, например, функция $y = x^2$ имеет значение $y_0 = 4$ при двух различных значениях: $x_1 = 2$ и $x_2 = -2$. Функция $y = \sin x$ имеет значение $y_0 = 0$ для бесконечного множества значений аргумента:



Черт. 5.

$$\ldots x_{-2} = -2\pi,\quad x_{-1} = -\pi,\quad x_0 = 0,\quad x_1 = \pi,\quad x_2 = 2\pi,\ \ldots$$

Функция

$$\frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & (\text{если } x > 0) \\ -1 & (\text{если } x < 0) \end{cases} \text{ (черт. 5) *)}$$

имеет значение, равное 1, для бесконечного множества

---

*) Речь идет об арифметическом значении корня, в силу чего имеем $\sqrt{x^2} = |x|$.

значений аргумента, именно при всех положительных значениях x.

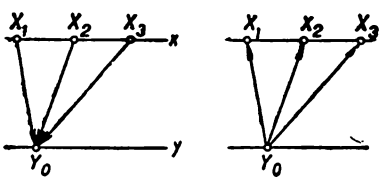
Всякому значению y функции $y=f(x)$ можно поставить в соответствие все те значения x, при которых значение $f(x)$ равно y. Однако такое обратное соответствие не всегда определяет x как функцию от y. В самом деле, данному численному значению $y=y_0$ может соответствовать не одно, а несколько значений x (черт. 6), а по определению функции каждому данному значению аргумента должно соответствовать одно единственное значение фуркции*).

Рассмотрим, например, функцию $y=x^2$, обратное соответствие каждому положительному значению y ставит в соответствие два различные значения x:

$$x=\pm\sqrt{y},$$

а потому не определяет x как функцию от y.

В частных случаях возможно, что обратное соответствие каждому допустимому значению y ставит в соответствие одно единственное значение x, и тогда можно рассматривать x как функцию от аргумента y, *эта функция называется обратной по отношению к данной. Переход к обратной функции возможен лишь в том случае, когда всякое данное значение функция имеет при одном единственном значении аргумента.*



Черт. 6.

Примеры функций, имеющих обратную, знакомы из курса элементарной алгебры. Так, например, если $y=x^3$, то каждому действительному значению y соответствует единственное значение x, определяемое формулой

$$x=\sqrt[3]{y}.$$

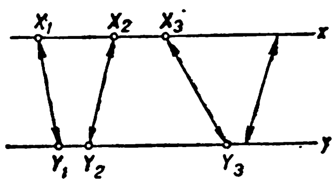
*) Иногда вводится в рассмотрение понятие многозначной функции, когда каждому значению аргумента ставится в соответствие несколько (или бесконечное множество) значений функции. Однако мы не считаем целесообразным введение понятия многозначной функции в теорию функций от действительного аргумента.

Если $y=a^x$ (где $a>0$ и $a\neq 1$), то существует обратная функция $x=\log_a y$*). Напротив, функция $y=x^2$ рассматриваемая на множестве всех действительных чисел $-\infty<x<\infty$, не имеет обратной функции.

Если функция $f(x)$ имеет обратную функцию, то значения y и x связаны взаимно-однозначным соответствием и могут быть объединены в пары взаимносоответственных элементов (черт. 7).

Теорема. *Всякая монотонная функция имеет обратную функцию.*

Доказательство. Допустим для определенности, что функция $y=f(x)$ возрастает, тогда большему значению аргумента, $x_1<x_2$, соответствует большее значение функции, $y_1<y_2$. Каждое данное (допустимое) значение y функция $f(x)$ не может иметь при двух различных значениях аргумента x и x'. Так, например, если $x<x'$, то $f(x)<f(x')$ и не может выполняться равенство $y=f(x)=f(x')$. Следовательно, обратное соответствие является однозначным и определяет x как функцию от y, ч. т. д.



Черт. 7.

Для убывающей функции доказательство проводится аналогично.

Теорема. *Если данная функция является возрастающей (убывающей), то обратная функция также является возрастающей (убывающей).*

---

*) Существует убеждение, что для перехода к обратной функции необходимо из соотношения $y=f(x)$ выразить x через y, а затем заменить x на y, а y на x. Так, например, если $y=2^x$, то $x=\lg_2 y$, а обратной функцией будет непременно $y=\lg_2 x$. Это убеждение основано на недоразумении.

Функция определяется множеством значений аргумента и законом соответствия, а не буквами, которые употребляются для обозначения аргумента и функции. Так, например, выражения x^2, t^2, y^2 определяют одну и ту же, а не разные функции. Перестановка букв при переходе к обратной функции возможна и во многих случаях целесообразна, однако не обязательна.

Доказательство. Предположим для определенности, что функция $y=f(x)$ возрастает. Рассмотрим обратную функцию $x=\varphi(y)$.

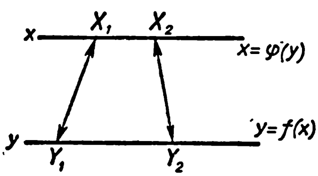
Пусть

$$y_1 < y_2 \quad \text{и} \quad x_1=\varphi(y_1),\ x_2=\varphi(y_2),$$

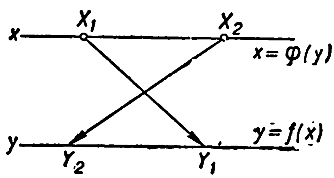
покажем, что $x_1 < x_2$ (черт. 8). В силу взаимной однозначности соответствия значений y и x имеем $y=f(x)$. Неравенство $y_1 < y_2$, или что то же $f(x_1) < f(x_2)$, возможно в силу возрастания $f(x)$ лишь при условии $x_1 < x_2$, ч. т. д.

Для убывающей функции (черт. 9) доказательство проводится аналогично.

Нередко, чтобы сделать возможным переход к обратной функции, рассматривают данную функцию не при всех допустимых значениях аргумента, а лишь в тех промежутках, в которых она монотонна. Рассмотрим, например, функцию $y=x^2$, считая допустимыми для x лишь неотрицательные значения. В промежутке $0 \leqslant x < \infty$ функция $y=x^2$ возрастает, каж-



Черт. 8.



Черт. 9.

дому значению y соответствует единственное неотрицательное значение x, и мы получим обратную функцию

$$x=\sqrt{y}.$$

Если функцию $y=x^2$ рассматривать при отрицательных значениях x, то также становится возможным переход к обратной функции:

$$x=-\sqrt{y}.$$

§ 5. Тригонометрические функции и их основные свойства.

Напомним те основные сведения из тригонометрии, которые необходимы для дальнейшего.

Тригонометрические функции рассматриваются первоначально как функции угла, так как численное значение каждой из них (если только оно имеет смысл) определяется заданием угла. Взаимно-однозначное соответствие между дугами окружности и центральными углами позволяет рассматривать тригонометрические функции как функции дуги. Так, например, аргумент φ функции $\sin\varphi$ мы имеем возможность по желанию толковать как угол или как дугу. Таким образом, первоначально аргумент тригонометрической функции выступает как геометрический объект — угол или дуга. Однако как в самой математике, так и в ее приложениях возникает потребность рассматривать тригонометрические функции как функции от числового аргумента. Даже в школьной математике не всегда аргумент тригонометрической функции рассматривается как угол. Так, например, гармоническое колебательное движение задается при помощи уравнения: $s = A \sin at$. Здесь аргумент t есть время, а не угол (коэффициент a — число, характеризующее частоту колебания).

Процесс измерения углов (или дуг) ставит в соответствие всякому углу (дуге) в качестве его меры некоторое число. В результате измерения угла (дуги) может получиться л ю б о е действительное число, так как мы можем рассматривать направленные углы (дуги) л ю б о й величины. Выбрав определенную единицу измерения углов (дуг), можно всякому углу (дуге) поставить в соответствие измеряющее его число, и, обратно, всякому числу поставить в соответствие угол (дугу), измеряющийся данным числом. Это позволяет толковать аргумент тригонометрической функции как ч и с л о. Рассмотрим какую-нибудь тригонометрическую функцию, например, синус. Пусть x — любое действительное число; этому числу соответствует вполне определенный угол (дуга), измеряющийся числом x, а полученному углу (дуге) соответствует вполне определенное значение синуса, $\sin x$. В конечном итоге получается соответствие между числами: каждому действительному числу x соответствует вполне определенное действительное число $y = \sin x$. Следовательно, $\sin x$ можно толковать как функцию ч и с л о в о г о а р г у м е н т а. При рассмотрении тригонометрических функций как функций числового аргумента условились в качестве единицы измерения дуг и углов принимать радиан. В силу этого соглашения символы $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ следует толковать как синус, косинус, тангенс и котангенс угла (дуги), радианная мера которого выражается числом x. Так, например, $\sin 2$ есть синус дуги, измеряющейся двумя радианами*).

Выбор единицы измерения дуг и углов не имеет принципиального значения. Выбор радиана не диктуется необходимостью. Радиан оказывается лишь наиболее удобной единицей, так как в радианном измерении формулы математического анализа, относящиеся к тригонометрическим функциям, принимают наиболее простой вид**).

Закон соответствия между значениями аргумента и тригонометрической функции устанавливается не прямым указанием математических операций (формулой), которые надлежит выполнить над аргументом, а геометрически***). Однако, чтобы иметь возможность говорить о функции, необходимо наличие закона соответствия, в силу которого каждому допустимому значению аргумента соответствует определенное значение функции, но не существенно, каким способом этот закон устанавливается.

Функции $\sin x$ и $\cos x$ имеют смысл при любых действительных значениях x, а потому областью их определения является множество всех действительных чисел.

Функция $\operatorname{tg} x$ определена для всех действительных значений x, отличных от чисел вида $\frac{\pi}{2}+k\pi$.

---

*) Заметим, что в некоторых руководствах радианная мера крайне неудачно называется отвлеченной, в отличие от градусной. Между обоими способами измерения *нет принципиальной разницы*, только лишь выбраны разные единицы измерения.

**) Это упрощение и объясняется тем, что в радианной мере $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Примем, например, за единицу измерения углов градус. Пусть t и x соответственно градусная и радианная меры данного угла, тогда имеем:

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sin t}{t} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{\frac{180\, x}{\pi}} = \frac{\pi}{180}.$$

***) Средствами элементарной математики невозможно построить формулы, выражающие значения тригонометрических функций

Функция ctg x определена для всех действительных значений x, отличных от чисел вида $k\pi$.

Итак, *аргумент тригонометрической функции по нашему усмотрению можно толковать как угол, или как дугу, или, наконец, как число*. Называя аргумент дугой (или углом), можно подразумевать под ним не саму дугу (или угол), а число, ее измеряющее. Сохраняя геометрическую терминологию, мы позволим себе вместо, например, такой фразы: „синус числа $\frac{\pi}{2}$" говорить: „синус дуги $\frac{\pi}{2}$".

Геометрическая терминология тем удобна, что она напоминает о соответствующих геометрических образах.

Одним из важнейших свойств тригонометрических функций является их периодичность. Функции $\sin x$ и $\cos x$ имеют период 2π. Это значит, что при любом значении x имеют место равенства:

$$\sin x = \sin(x+2\pi) = \sin(x+4\pi) = \ldots = \sin(x+2k\pi);$$
$$\cos x = \cos(x+2\pi) = \cos(x+4\pi) = \ldots = \cos(x+2k\pi),$$

где k — любое целое число.

Строго говоря, функции $\sin x$ и $\cos x$ имеют бесконечное множество периодов:

$$\pm 2\pi,\ \pm 4\pi,\ \pm 6\pi, \ldots \pm 2k\pi,$$

число 2π, являющееся *наименьшим положительным периодом,* принято называть просто периодом.

Свойство периодичности имеет следующее геометрическое толкование: значение тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$ не изменяется, если к дуге x

---

при помощи алгебраических действий над аргументом. Формулы, известные из высшей математики, выражающие значения тригонометрических функций непосредственно через значение аргумента,

$$\left(\text{напр., } \sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot2\cdot3} + \frac{x^5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} - \ldots \text{ и}\right.$$
$$\left.\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot2} + \frac{x^4}{1\cdot2\cdot3\cdot4} - \ldots\right),$$

содержат, кроме алгебраических действий, операции предельного перехода (суммирование рядов, бесконечные произведения и пр.).

прибавить (или вычесть) целое число окружностей. Если функция $\sin x$ или $\cos x$ обладает каким-либо свойством при значении аргумента $x=a$, то она обладает тем же свойством при любом из значений $a+2k\pi$

Функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ также являются периодическими, их периодом (наименьшим положительным) является число π.

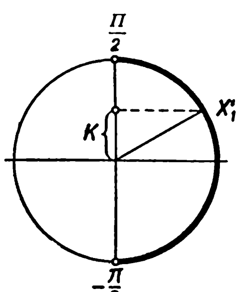
При исследовании свойств периодической функции достаточно рассмотреть ее в каком-либо промежутке, по величине равном периоду.

Перечислим основные свойства тригонометрических функций.

1°. *Функция* $\sin x$ *на сегменте* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (I и IV четверти) *возрастает. Значения синуса в концах сегмента, т. е. при* $x=\frac{\pi}{2}$ *и при* $x=-\frac{\pi}{2}$ *равны соответственно* 1 *и* -1.

2°. *Каково бы ни было действительное число* k, *по абсолютной величине не большее* 1, *на сегменте* $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ *существует единственная дуга* $x=x_1$, *синус которой равен* k. *Иначе говоря, на сегменте* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *синус имеет при одном единственном значении аргумента* $x=x_1$ *произвольное заданное значение, не превосходящее по абсолютной величине* 1.

В самом деле, по данному значению синуса можно в I и IV четвертях тригонометрического круга (радиус тригонометрического круга всегда будем считать равным 1) построить соответствующую дугу. Достаточно отложить на вертикальном диаметре отрезок величиной k (вверх при $k>0$ и вниз при $k<0$) и провести параллель горизонтальному диаметру (черт. 10) до пересечения с правой полуокружностью. Найденная точка пересечения определит конец искомой дуги. Из геометрического построения следует, что (при $|k| \leqslant 1$) эта точка пересечения является единственной.

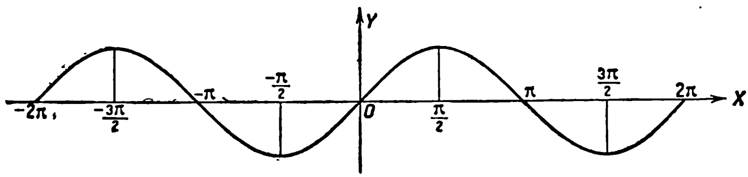


Черт. 10.

Свойства 1° и 2° обычно объединяют в виде следующего утверждения.

На сегменте $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ *синус возрастает от* -1 *до* 1.

При помощи аналогичных геометрических рассуждений, или воспользовавшись формулой приведения

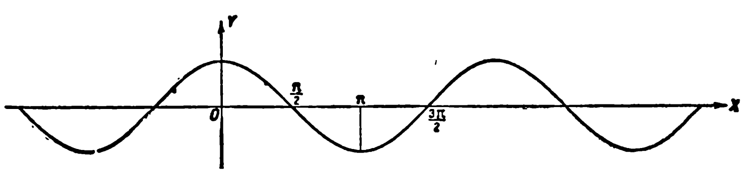


Черт. 11.

$\sin(\pi - x) = \sin x$, нетрудно установить, что на сегменте $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$ (т. е. во II и III четвертях) синус убывает от 1 до -1. Сегменты $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$ вместе составляют полную окружность, т. е. охватывают полный период синуса; в силу периодичности дальнейшее исследование синуса становится излишним, и мы можем утверждать, что на любом сегменте $\left[-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right]$ синус возрастает от -1 до 1, а на любом сегменте $\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right]$ синус убывает от 1 до -1. График синуса представлен на чертеже 11.

Исследование косинуса проводится аналогично. Основные свойства косинуса таковы:

Функция $\cos x$ *на сегменте* $[0, \pi]$ *(т. е. в* I *и* II *четвертях) убывает от* 1 *до* -1. *На сегменте* $[\pi, 2\pi]$ *(т. е. в* III *и* IV *четвертях) косинус возрастает от* -1 *до* 1.

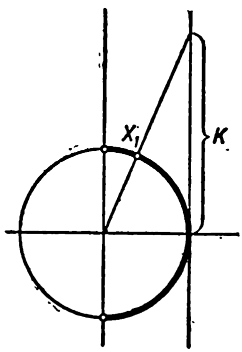


Черт. 12.

Всилу периодичности косинус убывает от 1 до -1 на сегментах $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ и возрастает от -1 до 1 на сегментах $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$ (черт. 12).

Рассмотрим функцию $y=\operatorname{tg} x$ в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Граничные значения $\pm\frac{\pi}{2}$ следует исключить, ибо $\operatorname{tg}\left(\pm\frac{\pi}{2}\right)$ не существует.



Черт. 13.

1°. *В интервале* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *функция* $\operatorname{tg} x$ *возрастает.*

2°. *Каково бы ни было действительное число* k, *в интервале* $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ *существует единственная дуга* x_1, *тангенс которой равен* k.

В существовании и единственности дуги x_1 легко убедиться из геометрического построения, представленного на чертеже 13.

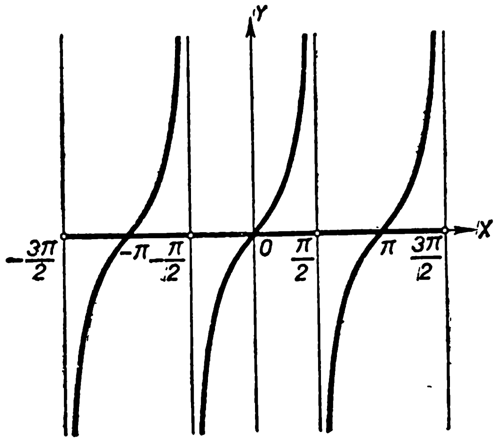
Итак, в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ тангенс возрастает и при единственном значении аргумента имеет произвольное заданное действительное значение. Свойства 1° и 2° кратко формулируют в виде следующего утверждения: *в интервале* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ *тангенс возрастает от* $-\infty$ *до* ∞.

Каково бы ни было заданное (как угодно большое) положительное число N, значения тангенса больше N при всех значениях x, меньших $\frac{\pi}{2}$ и достаточно близких к $\frac{\pi}{2}$. Символически это утверждение записывается так:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x=\infty \quad \left(\text{при } x<\frac{\pi}{2}\right). \tag{1}$$

При значениях x, бо́льших $-\frac{\pi}{2}$ и достаточно близких к $-\frac{\pi}{2}$, значения $\operatorname{tg} x < -N$. Это свойство символически записывается так:

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = -\infty \quad \left(\text{при } x > -\frac{\pi}{2}\right) *). \tag{2}$$



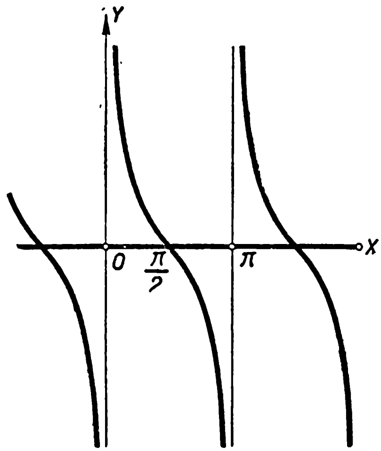
Черт. 14.

Дальнейшее исследование тангенса излишне, ибо величина интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ равна π, т. е. полному периоду тангенса. Следовательно, в любом интервале $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi, \frac{\pi}{2}+\pi\right)$ тангенс возрастает от $-\infty$ до ∞, а

---

*) Нередко пишут $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2} = \infty$ и говорят, что значение тангенса $\frac{\pi}{2}$ равно ∞. Это утверждение в курсе элементарной математики может привести лишь к нелепым антинаучным представлениям. Символ ∞ не есть число и не может быть значением функции. Точный смысл, в котором следует употреблять символы $\pm\infty$, разъяснен в тексте.

в точках $x = \frac{(2k+1)\pi}{2}$ не имеет смысла. График тангенса представлен на чертеже 14.



Черт. 15.

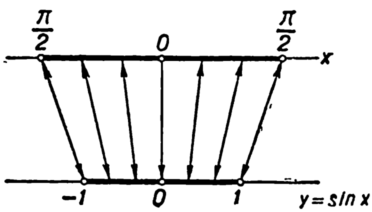
Функция $\operatorname{ctg} x$ в интервале $(0, \pi)$, а также в каждом из интервалов $(k\pi, (k+1)\pi)$ убывает от ∞ до $-\infty$, а в точках $x = k\pi$ котангенс не имеет смысла. График котангенса представлен на чертеже 15.

Глава II.

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ (АРКФУНКЦИИ).

§ 6. Арксинус.

Для тригонометрической функции $y=\sin x$, рассматриваемой при всевозможных действительных значениях x, переход к обратной функции невозможен. Так, например, значение $y=0$ функция имеет на бесконечном множестве значениях аргумента $x=k\pi$ и по данному значению y невозможно найти одно единственное значение x. Однако переход к обратной функции станет возможным, если рассматривать $y=\sin x$ не при произвольных значениях x, а лишь в каком-либо промежутке, в котором синус является монотонным.



Черт. 16.

Рассмотрим сегмент $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$. На этом сегменте $\sin x$ возрастает от -1 до 1 и, следовательно, значения x и y связаны взаимно-однозначным соответствием. Как показывает чертеж 16, сегменты $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ и $-1\leqslant y\leqslant 1$ взаимно-однозначно отображаются друг на друга.

Определение. *Функция, обратная функции $y=\sin x$, на сегменте $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, называется* ***арксинусом*** *и обозначается так:*

$$x=\arcsin y.$$

Теперь мы рассматриваем y как аргумент, а x как функцию. Чтобы не нарушать привычки в обозначениях (что не имеет принципильного значения), переставив буквы x и y, будем писать $y = \arcsin x$, тогда имеем:

$$x = \sin y,$$

$$\text{где } -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}, \text{ а } -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

В геометрической терминологии определение арксинуса можно сформулировать следующим образом: $\arcsin x$ *есть дуга, взятая в промежутке от* $-\frac{\pi}{2}$ *до* $\frac{\pi}{2}$:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

синус которой равен числу x:

$$\sin(\arcsin x) = x,$$

где $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Если $|x| > 1$, то выражение $\arcsin x$ теряет смысл, так как не существует дуги, для которой значение синуса по абсолютной величине больше 1. Значит, областью определения функции $\arcsin x$ служит сегмент $[-1, 1]$.

Таким образом (в силу определения), при любом значении $|x| \leqslant 1$ имеют место неравенства:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Примеры:

1) $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; 2) $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$; 3) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$;
4) $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$; 5) $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$; 6) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$;
7) $\arcsin 0 = 0$; 8) $\arcsin 3$ не имеет смысла.

Основные свойства арксинуса:

1°. *Функция* $y = \arcsin x$ *на сегменте* $-1 \leqslant x \leqslant 1$ *возрастает от* $-\frac{\pi}{2}$ *до* $\frac{\pi}{2}$.

Это следует из монотонности синуса и взаимной однозначности отображения друг на друга сегментов:

$$-1 \leqslant x \leqslant 1 \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

2°. *Функция* $\arcsin x$ *нечетная, т. е. при изменении знака аргумента функция* $\arcsin x$ *изменяет знак, не изменяя абсолютной величины:*

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x. \tag{1}$$

Доказательство. Дуга $\arcsin(-x)$ заключена на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, ибо значения арксинуса при любом аргументе заключены на этом сегменте. Дуга $-\arcsin x$ заключена на том же сегменте, в самом деле:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

откуда:

$$\frac{\pi}{2} \geqslant -\arcsin x \geqslant -\frac{\pi}{2}.$$

Обе дуги имеют одинаковый синус:

$$\sin[\arcsin(-x)] = -x;$$

$$\sin(-\arcsin x) = -\sin(\arcsin x) = -x.$$

Отсюда вытекает равенство (1), ч. т. д.

Примеры:

1) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\arcsin\frac{1}{2} = -\frac{\pi}{6}$;

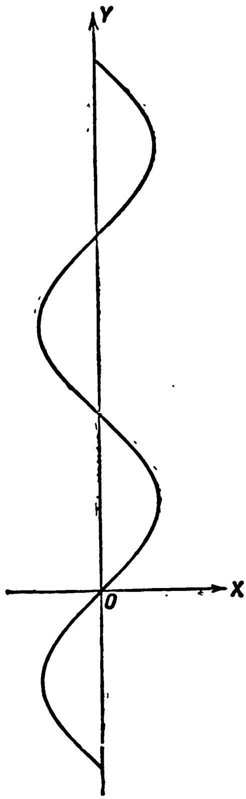
2) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$.

Для построения графика функции $y = \arcsin x$ построим график функции $x = \sin y$, при этом мы получим синусоиду с волнами, расположенными вдоль оси OY (черт. 17). Выделив на полученной линии дугу, для которой ординаты заключены на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, получим график арксинуса (черт. 18).

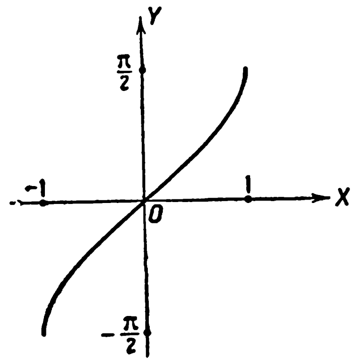
Функция $y = \sin x$ имеет обратную функцию не только на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, но и на любом сегменте, на котором она монотонна. Так, например, на сегменте $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ (т. е. во II и III четвертях) $y=\sin x$ убывает от 1 до -1, поэтому на данном сегменте возможен переход к обратной функции. Дугу x, имеющую синус, равный y, и расположенную на сегменте $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$, нетрудно найти. Для этого достаточно воспользоваться общей формулой приведения:

$$\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha).$$

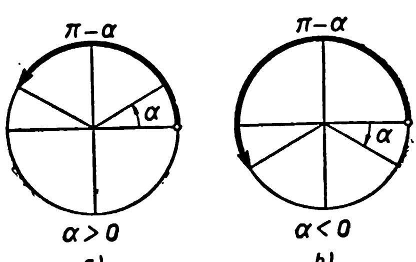
Если дуга α заключена на сегменте $-\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$ (I и IV четверти), то дуга $\pi - \alpha$ заключена на сегменте $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ (II и III четверти). $\frac{\pi}{2} \leqslant \pi - \alpha \leqslant \frac{3}{2}\pi$ (черт. 19).



Черт. 17.



Черт. 18.



Черт. 19.

Следовательно, $x=\pi-\arcsin y$ есть функция, обратная по отношению $y=\sin x$ на сегменте $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi$.

Функция $y=\sin x$ возрастает от -1 до 1 на сегменте $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}+2k\pi$ (где k — любое целое число), функция

$$x=\arcsin y+2k\pi$$

есть соответствующая обратная функция.

На сегменте $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi+2k\pi$ функция $y=\sin x$ убывает от $+1$ до -1, а $x=(\pi-\arcsin y)+2k\pi$ есть соответствующая обратная функция.

Примеры:

1) На сегменте $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ найти дугу γ, имеющую синус, равный $\frac{1}{2}$. Эту дугу можно найти так:

$$\gamma=\pi-\arcsin\frac{1}{2}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}.$$

Решим ту же задачу при следующих данных: синус искомой дуги равен $-\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\gamma=\pi-\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\pi+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{4}.$$

2) На сегменте $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ найти дугу, синус которой равен $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Так как $$\frac{3\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}+2\pi \quad\text{и}\quad \frac{5\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2\pi,$$

то искомой дугой является дуга

$$\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\pi=\frac{7\pi}{4}.$$

3) На сегменте $\left[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right]$ найти дугу, синус которой равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Так как

$$-\frac{3\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-2\pi \quad\text{и}\quad -\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{2}-2\pi,$$

то искомой дугой будет дуга:

$$\pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 2\pi = -\pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{4\pi}{3}.$$

§ 7. Арккосинус.

Если рассматривать функцию $y = \cos x$ при всевозможных действительных значениях x, то переход к обратной функции невозможен.

На сегменте $0 \leqslant x \leqslant \pi$ (т. е. I и II четверти) $\cos x$ убывает от 1 до -1, а потому существует обратная функция на этом сегменте.

Определение. *Функция, обратная функции $y = \cos x$ на сегменте $0 \leqslant x \leqslant \pi$, называется арккосинусом:*

$$x = \arccos y.$$

В геометрических терминах это определение формулируется так (меняем местами буквы x и y):

$\arccos x$ *есть дуга, взятая в промежутке от* 0 *до* π;

$$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi.$$

косинус которой равен x:

$$\cos(\arccos x) = x,$$

где $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Областью определения функции $\arccos x$ является сегмент $[-1, 1]$. Если $|x| > 1$, то $\arccos x$ не имеет смысла.

Примеры:

1) $\arccos 0 = \frac{\pi}{2}$; 2) $\arccos 1 = 0$; 3) $\arccos(-1) = \pi$;
4) $\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$; 5) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$; 6) $\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$;
7) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}$; 8) $\arccos(-2)$ не имеет смысла.

Основные свойства арккосинуса:

1°. *На сегменте* $-1 \leqslant x \leqslant 1$ *функция* $y = \arccos x$ *убывает от* π *до нуля.*

Это следует из того, что обратная функция $x = \cos y$ на сегменте $0 \leqslant y \leqslant \pi$ убывает от 1 до -1.

2°. *Имеет место равенство*:

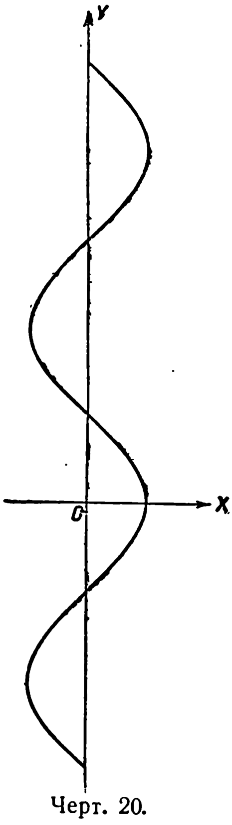
$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x. \tag{1}$$

Доказательство. Дуга $\arccos(-x)$ заключена на сегменте $[0, \pi]$, в силу определения арккосинуса. Дуга $\pi - \arccos x$ заключена на том же сегменте; это следует из неравенств $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$. Обе дуги имеют одинаковый косинус:

$$\cos[\arccos(-x)] = -x;$$
$$\cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x.$$

Отсюда следует равенство (1), ч. т. д.

Построим график функции $y = \arccos x$. Согласно определению этой функции, имеем $x = \cos y$. Графиком является косинусоида с волнами, расположенными вдоль оси OY (черт. 20). Выделив на этой линии дугу, для которой ординаты заключены в промежутке $[0, \pi]$, получим график функции $\arccos x$ (черт. 21).

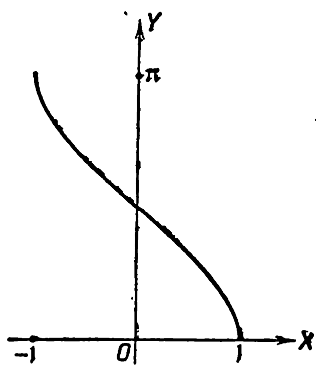


Черт. 20.

Переход к обратной функции можно осуществить в любом промежутке, в котором косинус является монотонным. Так, $y = \cos x$ возрастает от -1 до 1 на сегменте $[-\pi, 0]$, соответствующая обратная функция есть $-\arccos x$. Вообще на сегменте $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, на котором $y = \cos x$ убывает от 1 до -1, обратная функция есть

$$x = \arccos y + 2k\pi.$$

На сегменте $[(2k-1)\pi; 2k\pi]$,



Черт. 21

на котором $y=\cos x$ возрастает от -1 до 1, обратная функция есть

$$x=-\arccos y+2k\pi.$$

Примеры:

1) Найти дугу на сегменте $[-\pi, 0]$, косинус которой равен $\frac{1}{2}$. Искомой дугой является

$$-\arccos\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{3},$$

2) На сегменте $[\pi, 2\pi]$ найти дугу, косинус которой равен $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Имеем $\pi=-\pi+2\pi$ и $2\pi=0+2\pi$.

Решение задачи дает дуга

$$-\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\pi=-\frac{3}{4}\pi+2\pi=\frac{5}{4}\pi.$$

§ 8. Арктангенс.

Точки $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ (k — любое целое число) разделяют всю числовую прямую на интервалы, в каждом из которых тангенс возрастает и может иметь любое заданное действительное значение, или, как говорят условно, в каждом из рассматриваемых интервалов тангенс возрастает от $-\infty$ до ∞ (см. график, черт. 14). Следовательно, в каждом из интервалов $\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)$ возможен переход к обратной функции.

Определение. *Функция, обратная функции* $y=\operatorname{tg}x$ *в интервале* $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$, *называется арктангенсом*:

$$x=\operatorname{arc\,tg} y.$$

В геометрической терминологии это определение формулируется так (меняем местами x и y): $\operatorname{arc\,tg} x$ *есть дуга, взятая в интервале от* $-\frac{\pi}{2}$ *до* $\frac{\pi}{2}$:

$$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg} x<\frac{\pi}{2},$$

тангенс которой равен x:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)=x.$$

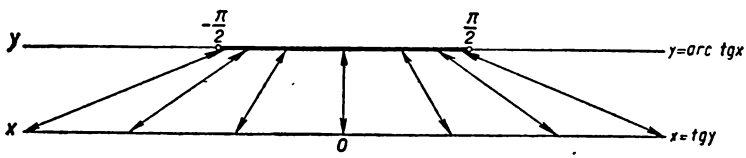
Итак, если $y = \operatorname{arc\,tg} x$, то $x = \operatorname{tg} y$, причем $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Так как значение тангенса в интервале от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ может быть произвольным действительным числом, то допустимыми значениями x являются произвольные действительные значения, и, следовательно, областью определения функции $y = \operatorname{arc\,tg} x$ является множество всех действительных чисел $-\infty < x < \infty$. Взаимнообратные функции $y = \operatorname{arc\,tg} x$ и $x = \operatorname{tg} y$ взаимно однозначно отображают друг на друга интервалы

$$-\infty < x < \infty \text{ и } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \quad \text{(черт. 22).}$$

Примеры:

1) $\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$; 2) $\operatorname{arc\,tg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$; 3) $\operatorname{arc\,tg}(-1) = -\frac{\pi}{4}$;
4) $\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$; 5) $\lim\limits_{x \to \infty} (\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{\pi}{2}$;
6) $\lim\limits_{x \to -\infty} (\operatorname{arc\,tg} x) = -\frac{\pi}{2}$.

Основные свойства арктангенса.



Черт. 22.

1°. *Функция* $y = \operatorname{arc\,tg} x$ *в интервале* $-\infty < x < \infty$ *возрастает от* $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$ $\left(\text{сами граничные значения } \pm\frac{\pi}{2} \text{ исключаются}\right)$. Это следует из монотонности и взаимной однозначности отображения друг на друга интервалов:

$$-\infty < x < \infty \text{ и } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

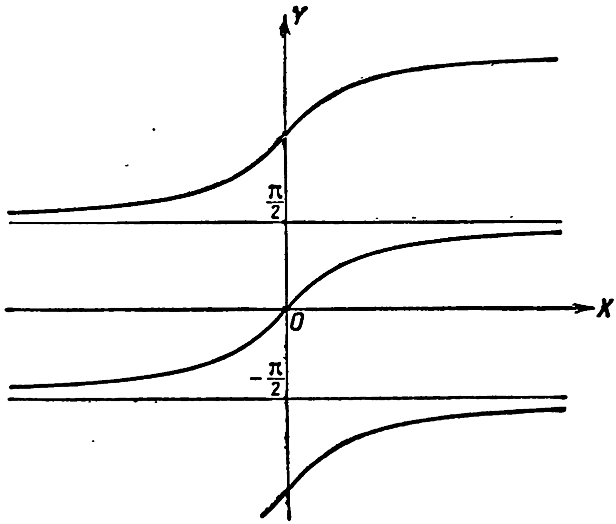
2°. *Функция* $\operatorname{arc\,tg} x$ — *нечетная, т. е. при изменении знака аргумента имеет место равенство:*

$$\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x.$$

Доказательство аналогично доказательству соответствующего свойства арксинуса.

Для построения графика функции $y = \operatorname{arc\,tg} x$ строим график функции $x = \operatorname{tg} y$ (черт. 23) и выделяем ветвь, для которой ординаты заключены в промежутке $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ (черт. 24).

В каждом из интервалов $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, получающихся переносом основного интервала $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ на любое целое число периодов тангенса (в силу монотонности) возможен переход к обратной функции. Если $y = \operatorname{tg} x$, то обратной функцией в интервале $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$ будет $x = \operatorname{arctg} y + k\pi$.



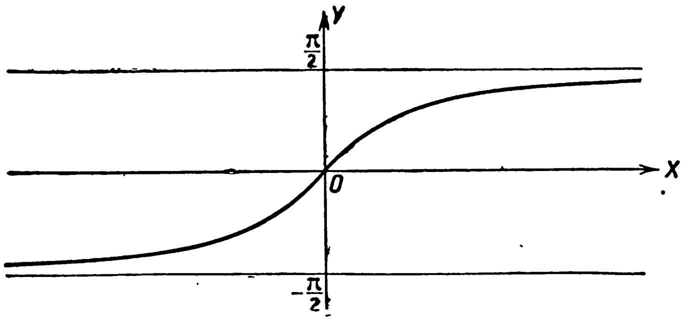
Черт. 23.

Примеры:

1. Найти дугу в интервале $\left(-\frac{3}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которой равен $-\sqrt{3}$. Имеем $-\frac{3}{2}\pi = -\frac{\pi}{2} - \pi$ и $-\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \pi$. Поэтому

искомая дуга есть:

$$\operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3})-\pi=-\frac{\pi}{3}-\pi=-\frac{4}{3}\pi.$$



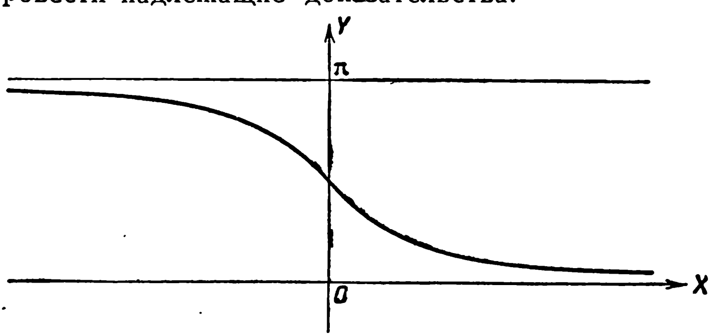
Черт. 24.

2. Найти дугу в интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$, тангенс которой равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$; имеем $\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}+\pi$ и $\frac{3}{2}\pi=\frac{\pi}{2}+\pi$. Искомая дуга есть

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}}{3}+\pi=\frac{\pi}{6}+\pi=\frac{7}{6}\pi.$$

§ 9. Арккотангенс.

Рассуждения, лежащие в основе определения и изучения свойств функции $\operatorname{arc\,ctg} x$, аналогичны соответствующим рассуждениям, относящимся к арктангенсу. Поэтому мы ограничимся кратким, конспективным изложением теории арккотангенса и предоставляем читателю в качестве упражнения самостоятельно провести надлежащие доказательства.



Черт. 25.

В каждом из интервалов $(k\pi, (k+1)\pi)$ котангенс убывает от ∞ до $-\infty$, а потому возможен переход к обратной функции.

Определение. *Функция, обратная функции* $y=\operatorname{ctg}x$ *в интервале* $(0, \pi)$, *называется арккотангенсом:*

$$x=\operatorname{arc\,ctg} y.$$

Иначе говоря:

Символом $\operatorname{arc\,ctg} x$ *обозначается дуга, заключенная в интервале* $(0, \pi)$, *котангенс которой равен* x.

Примеры:

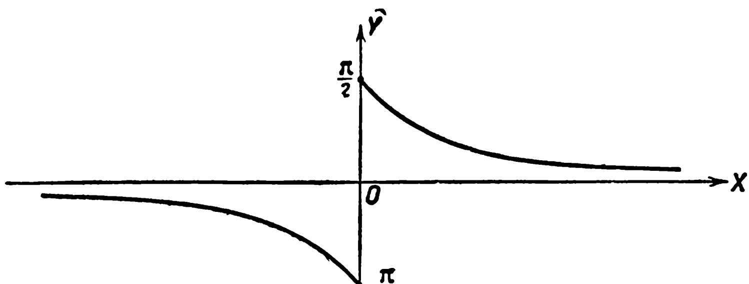
1) $\operatorname{arc\,ctg} 0=\frac{\pi}{2}$; 2) $\operatorname{arc\,ctg}(-1)=\frac{3}{4}\pi$; 3) $\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{6}$.

Функция $y=\operatorname{arc\,ctg} x$ определена для *всех* действительных значений x и в интервале $-\infty<x<\infty$ убывает от π до 0.

График функции $y=\operatorname{arc\,ctg} x$ легко построить, построив график функции $x=\operatorname{ctg} y$ и выделив ту ветвь, для которой ординаты заключены в промежутке $(0, \pi)$ (черт. 25).

При изменении знака аргумента арккотангенса имеем

$$\operatorname{arc\,ctg}(-x)-\pi-\operatorname{arc\,ctg} x.$$

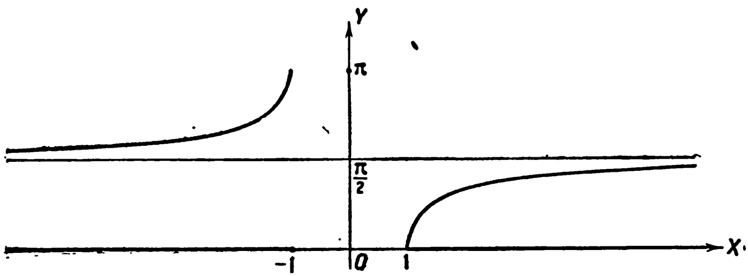


Черт. 26.

Для интервала $(k\pi, (k+1)\pi)$ функция $y=\operatorname{arc\,ctg} x+k\pi$ является обратной относительно котангенса.

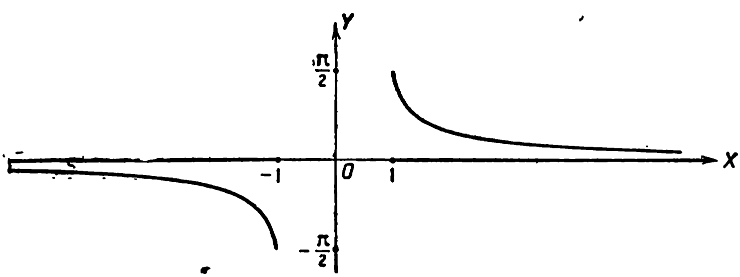
В некоторых учебниках рекомендуется значение функции $\operatorname{arc\,ctg} x$ выбирать в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Возможность выбирать значения arc ctg x в этом промежутке мотивируется тем, что в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ котангенс может иметь *любое* заданное значение при одном единственном значении аргумента. Принять интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ за основной неудобно, так как он содержит точку разрыва котангенса. Если бы мы условились выбирать значение арккотангенса в этом интервале, то функция arc ctg x оказалась бы разрывной. График этой функции изображен на чертеже 26.



Черт. 27.

Мы не будем останавливаться на рассмотрении практически редко встречающихся функций arc sec x и arc cosec x. Провести соответствующие рассуждения в качестве упражнения рекомендуем читателю. Ограничимся лишь следующим замечанием. Значения



Черт. 28.

арксеканса и арккосеканса выбираются соответственно на сегментах

$$[0, \pi] \text{ и } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Функции arc sec x и arc cosec x определены для значений аргумента,

не меньших единицы. Поэтому область определения этих функций распадается на две части: $x \leqslant -1$ и $x \geqslant 1$.
На чертежах 27 и 28 изображены графики функций

$$\operatorname{arc\,sec} x \quad \text{и} \quad \operatorname{arc\,cosec} x.$$

§ 10. Заключение.

Ниже дается сводка основных положений, изложенных в предыдущих параграфах.

1) *Функции* $\operatorname{arc\,sin} x$ *и* $\operatorname{arc\,cos} x$ *определены для значений x, по абсолютной величине не превосходящих единицы, функции же* $\operatorname{arc\,tg} x$ *и* $\operatorname{arc\,ctg} x$ *определены для всех действительных значений x.*

2) *Значения функций* $\operatorname{arc\,sin} x$ *и* $\operatorname{arc\,tg} x$ *заключены в промежутке от* $-\frac{\pi}{2}$ *до* $\frac{\pi}{2}$, *а функций* $\operatorname{arc\,cos} x$ *и* $\operatorname{arc\,ctg} x$ *в промежутке от* 0 *до* π. *При этом для арксинуса и арккосинуса берутся соответствующие сегменты* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *и* $[0, \pi]$, *а для арктангенса и для арккотангенса следует брать соответствующие интервалы*

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{и} \quad (0, \pi).$$

3) *Функции* $\operatorname{arc\,sin} x$ *и* $\operatorname{arc\,tg} x$ *являются возрастающими, а функции* $\operatorname{arc\,cos} x$ *и* $\operatorname{arc\,ctg} x$ *— убывающими.*

4) *При изменении знака аргумента обратных тригонометрических функций имеют место следующие соотношения:*

$$\operatorname{arc\,sin}(-x) = -\operatorname{arc\,sin} x; \quad \operatorname{arc\,cos}(-x) = \pi - \operatorname{arc\,cos} x;$$
$$\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,tg} x; \quad \operatorname{arc\,ctg}(-x) = \pi - \operatorname{arc\,ctg} x.$$

Обратные тригонометрические функции будем в дальнейшем для краткости называть а р к ф у н к ц и я м и.

Глава III.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ОПЕРАЦИИ НАД АРКФУНКЦИЯМИ.

§ 11. Основные формулы.

Тригонометрические функции от одного и того же аргумента выражаются алгебраически одна через другую, поэтому в результате выполнения какой-либо тригонометрической операции над любой из аркфункций получается алгебраическое выражение.

В силу определения аркфункции:

$$\sin(\arcsin x)=x; \quad \cos(\arccos x)=x; \tag{1}$$

на сегменте $-1\leqslant x\leqslant 1$ и

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)=x; \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} x)=x; \tag{2}$$

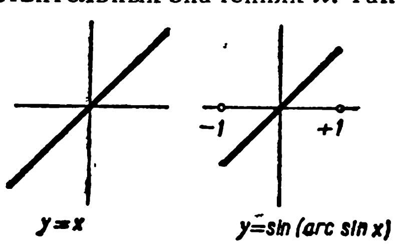
в интервале $-\infty<x<\infty$.

Равенства (1) не являются тождествами, справедливыми при всех действительных значениях x. Так, например, при $|x|>1$ выражение $\arcsin x$, а следовательно, и $\sin(\arcsin x)$ теряет смысл.

Итак, при $|x|>1$ левая часть равенства

$$\sin(\arcsin x)=x$$

не имеет смысла, а правая смысла не теряет.



Черт. 29.

Равенства (1) суть тождества лишь на сегменте $-1\leqslant x\leqslant 1$. На чертеже 29 графически показано различие между функциями, заданными формулами

$$y=x \text{ и } y=\sin(\arcsin x).$$

Первая изображается биссектрисой координатного угла, а вторая — лишь отрезком этой биссектрисы.

Равенства (2) являются тождествами, справедливыми при всех действительных значениях x.

Перейдем к более сложным преобразованиям.

1) Преобразуем выражение $\cos(\arcsin x)$. Косинус может быть выражен через синус по формуле:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

Положив в этой формуле $\alpha = \arcsin x$, будем иметь $\sin\alpha = x$, следовательно, получим:

$$\cos(\arcsin x) = \pm\sqrt{1-x^2}.$$

Выясним, какой из знаков должен быть взят перед радикалом. Из тригонометрии известно, что косинус дуги, заключенной на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, положителен или равен нулю, а так как

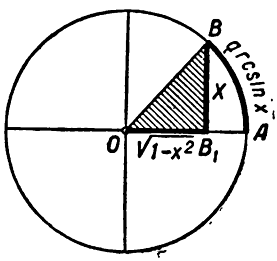
$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

то перед радикалом следует взять знак $+$. Итак,

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2} \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

Полученному соотношению можно дать геометрическую интерпретацию. Рассмотрим тригонометрический круг (радиус считаем равным 1, черт. 30). Число x есть величина линии синуса BB_1 угла $AOB = \arcsin x$. Величина отрезка OB_1 есть значение косинуса угла AOB:

$$\cos AOB = OB_1.$$



Черт. 30.

По теореме Пифагора

$$OB_1 = \sqrt{1-BB_1^2} = \sqrt{1-x^2},$$

откуда:

$$\cos(AOB) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}.$$

2) Подобным же образом найдем:

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1-x^2}.$$

В силу неравенств $0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi$ имеем $\sin(\arccos x) \geqslant 0$, а поэтому перед радикалом необходимо взять знак $+$. Геометрическую интерпретацию предоставляем читателю.

3) Из соотношения $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$ следует:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,ctg}x)=\frac{1}{\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg}x)}=\frac{1}{x} \quad (x\neq 0).$$

4) Преобразуем выражение $\operatorname{tg}(\arcsin x)$; имеем:

$$\operatorname{tg}(\arcsin x)=\frac{\sin(\arcsin x)}{\cos(\arcsin x)}=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

5) На основании формулы тригонометрии, выражающей синус через тангенс

$$\sin\alpha=\pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}},$$

получим:

$$\sin(\operatorname{arc\,tg}x)=\pm\frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg}x)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\operatorname{arc\,tg}x)}}=\pm\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Если $x<0$, то $\sin(\operatorname{arc\,tg}x)<0$ и если $x>0$, то $\sin(\operatorname{arc\,tg}x)>0$. В правой части следует выбрать знак $+$, так как только при таком выборе знака дробь $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ будет иметь тот же знак, что и знак x.

Итак,

$$\sin(\operatorname{arc\,tg}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Ниже приведена таблица формул, получающихся в результате выполнения простейших тригонометрических операций над аркфункциями. Справедливость всех этих формул может быть установлена читателем при помощи рассуждений, подобных приведенным выше.

$\sin(\arcsin x)=x$	$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$
$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$	$\cos(\arccos x)=x$
$\sin(\operatorname{arc\,tg}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos(\operatorname{arc\,tg}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\sin(\operatorname{arc\,ctg}x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\cos(\operatorname{arc\,ctg}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$\operatorname{tg}(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{ctg}(\arcsin x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
$\operatorname{tg}(\arccos x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\operatorname{ctg}(\arccos x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)=x$	$\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,tg} x)=\frac{1}{x}$
$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,ctg} x)=\frac{1}{x}$	$\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} x)=x$

Выражения, находящиеся в правых частях каждого из написанных в таблице равенств, суть *алгебраические*. Эти формулы являются не чем иным, как только иначе написанными, известными из тригонометрии формулами, при помощи которых тригонометрические функции выражаются одна через другую.

§ 12. Примеры преобразований.

Переходим к рассмотрению основных преобразований, которые могут быть получены на основе выведенных формул.

1) Преобразуем выражение: $\sin(2\arcsin x)$.

Применив формулу $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, получим: $\sin(2\arcsin x)=2\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin x)=2x\sqrt{1-x^2}$.

2) Подобным же образом устанавливается справедливость равенств:

$$\cos(2\arccos x)=\cos^2(\arccos x)-\sin^2(\arccos x)=2x^2-1;$$

$$\operatorname{tg}(2\operatorname{arc\,tg} x)=\frac{2\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)}{1-\operatorname{tg}^2(\operatorname{arc\,tg} x)}=\frac{2x}{1-x^2} \qquad (x\neq\pm 1).$$

3) Воспользовавшись теоремой сложения и формулами предыдущего параграфа, получим:

$$\sin(\arcsin x+\arcsin y)=\sin(\arcsin x)\cos(\arcsin y)+$$
$$+\cos(\arcsin x)\sin(\arcsin y)=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}.$$

4) Следуя приему, указанному в предыдущем примере, можно доказать следующие равенства:

$$\cos(\arccos x + \arccos y) = xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2};$$

$$\sin(\arccos x + \arcsin y) = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} + xy;$$

$$\sin(\arcsin x - \arcsin y) = x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2};$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y) = \frac{x+y}{1-xy};$$

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,tg} y) = \frac{x-y}{1+xy};$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x + \arcsin y) = \frac{x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy}.$$

5) Из тригонометрии известно, что $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ рационально выражаются через $\operatorname{tg}\alpha$ по следующим формулам:

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}; \qquad \cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};$$

положив в этих формулах $\alpha = \operatorname{arc\,tg} x$, получим рациональные функции:

$$\sin(2\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{2x}{1+x^2}; \qquad \cos(2\operatorname{arc\,tg} x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

6) Преобразуем $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)$. Положив в формуле $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, $\alpha = \arcsin x$, получим:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos(\arcsin x)}{2}} =$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}} = \frac{x}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}}.$$

Знак выражения $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)$ совпадает со знаком x, следовательно, перед радикалом должен быть взят знак $+$, так как только тогда знак правой части будет совпадать со знаком x.

Применив формулу преобразования сложного квадратного радикла:

$$\sqrt{A-\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} - \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}},$$

получим окончательно следующую формулу:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2}.$$

(Проверить, что знак правой части одинаков со знаком x.)

Тем же методом доказываются равенства:

$$\cos\left(\frac{1}{2}\arccos x\right)=\sqrt{\frac{1+x}{2}};$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x\right)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}.$$

В конце настоящей главы приведен ряд примеров и упражнений на выполнение подобного рода преобразований.

Выведем формулы преобразования выражений вида $\sin(m\arcsin x)$, $\cos(m\arccos x)$ и т. д., где $m>0$ — целое число. Воспользуемся формулами:

$$\cos m\varphi=\cos^m\varphi-C_m^2\cos^{m-2}\varphi\sin^2\varphi+C_m^4\cos^{m-4}\varphi\sin^4\varphi-\ldots \quad (1)$$

(последний член равен $(-1)^{\frac{m-1}{2}}m\cos\varphi\sin^{m-1}\varphi$ при нечетном m и $(-1)^{\frac{m}{2}}\sin^m\varphi$ при m четном).

$$\sin m\varphi=C_m^1\cos^{m-1}\varphi\sin\varphi-C_m^3\cos^{m-3}\varphi\sin^3\varphi+$$
$$+C_m^5\cos^{m-5}\varphi\sin^5\varphi-\ldots \quad (2)$$

последний член равен $(-1)^{\frac{m-1}{2}}\sin^m\varphi$ при нечетном m и $(-1)^{\frac{m-2}{2}}m\sin^{m-1}\varphi\cos\varphi$ при четном m).

Формулы (1) и (2) могут быть получены, если воспользоваться формулой Моавра из теории комплексных чисел:

$$\cos m\varphi+i\sin m\varphi=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^m.$$

Разложив правую часть равенства по формуле бинома Ньютона, получим:

$$\cos m\varphi+i\sin m\varphi=\cos^m\varphi+iC_m^1\cos^{m-1}\varphi\sin\varphi-$$
$$-C_m^2\cos^{m-2}\varphi\sin^2\varphi-\ldots$$

Приравняв в этом равенстве действительную часть действительной и мнимую мнимой, получим формулы (1) и (2).

Положив в формуле (2) $\varphi=\arcsin x$ и воспользовавшись равенством

$$\cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2},$$

получим:

$$\sin(m \arcsin x) = C_m^1 (1-x^2)^{\frac{m-1}{2}} x - C_m^3 (1-x^2)^{\frac{m-3}{2}} x^3 + \ldots$$

Подобным же образом, положив в формуле (1) $\varphi = \arccos x$, будем иметь:

$$\cos(m \arccos x) = x^m - C_m^2 (1-x^2) x^{m-2} + C_m^4 (1-x^2)^2 x^{m-4} - \ldots$$

Последнее равенство показывает, что функция $\cos(m \arccos x)$, определенная в сегменте $[-1, 1]$ (так как только в этом сегменте $\arccos x$ имеет смысл), совпадает на этом сегменте с некоторым многочленом m-й степени. Эти многочлены носят название **полиномов Чебышева**, по имени великого русского ученого П. Л. **Чебышева**. О некоторых замечательных свойствах полиномов Чебышева сказано в специальном дополнении в конце книги.

В качестве дальнейшего примера рассмотрим $\operatorname{tg}(m \operatorname{arc\,tg} x)$. При всяком целом m эта функция является рациональной.

В самом деле:

$$\operatorname{tg} m\varphi = \frac{\sin m\varphi}{\cos m\varphi} = \frac{C_m^1 \sin\varphi \cos^{m-1}\varphi - C_m^3 \sin^3\varphi \cos^{m-3}\varphi + \ldots}{\cos^m\varphi - C_m^2 \sin^2\varphi \cos^{m-2}\varphi + \ldots} =$$

$$= \frac{C_m^1 \operatorname{tg}\varphi - C_m^3 \operatorname{tg}^3\varphi + \ldots}{1 - C_m^2 \operatorname{tg}^2\varphi + C_m^4 \operatorname{tg}^4\varphi - \ldots}. \qquad (3)$$

Положив в формуле (3) $\varphi = \operatorname{arc\,tg} x$, получим:

$$\operatorname{tg}(m \operatorname{arc\,tg} x) = \frac{C_m^1 x - C_m^4 x^3 + \ldots}{1 - C_m^2 x^2 + C_m^4 x^4 - \ldots}.$$

Пользуясь выделенными выше формулами, можно функции $\sin(m \arccos x)$; $\cos(m \operatorname{arc\,tg} x)$; $\operatorname{tg}(m \arcsin x)$ и пр. (m — целое число) представить в виде алгебраических выражений.

Упражнения.

1) Проверить справедливость равенств:

$$\cos(\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y) = \frac{1 - xy}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}};$$

$$\operatorname{tg}(2 \arcsin x) = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2};$$

$$\operatorname{tg}(\arcsin x - \operatorname{arc\,tg} y) = \frac{x - y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2} + xy};$$

$$\cos(\arcsin\sqrt{1-x} - \arcsin\sqrt{x}) = 2\sqrt{x(1-x)};$$

$$\sin(\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y) = \frac{x+y}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}.$$

2) Доказать, что $x+y+z=xyz$ при условии

$$\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} y+\operatorname{arc\,tg} z=\pi.$$

Решение. Воспользуемся формулой:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\gamma}.$$

Согласно условию, имеем:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} y+\operatorname{arc\,tg} z)=0,$$

откуда:

$$\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-xz-yz}=0,$$

следовательно,

$$x+y+z=xyz.$$

3) Показать, что $\operatorname{ctg}[\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg}(1-x)]=1-x+x^2$.

4) Написать в виде многочленов:

$$\cos(3\arccos x);\quad \cos(4\arccos x).$$

5) Написать в виде алгебраических функций:

$$\operatorname{tg}(5\operatorname{arc\,tg} x);\quad \sin(4\arcsin x);\quad \sin(3\operatorname{arc\,tg} x).$$

6) Показать, что:

$$\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\frac{|x|}{\sqrt{2(1-\sqrt{1-x^2})}}.$$

Решение. Положив в формуле

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};\quad \alpha=\arcsin x,$$

после элементарных преобразований получим:

$$\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{2(1-\sqrt{1-x^2})}}=\frac{|x|}{\sqrt{2(1-\sqrt{1-x^2})}};$$

так как $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)>0$, то в числителе следует взять x по абсолютной величине.

7) Показать, что

$$\sin\left(\frac{3}{2}\arcsin x\right)=\frac{x(1+2\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}}.$$

Указание: положить в формуле $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ $\alpha=\frac{1}{2}\arcsin x$.

8) Показать, что $\cos\left(\frac{3}{2}\arccos x\right)=\sqrt{\frac{1+x}{2}}(2x-1)$.

9) Доказать равенство

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{n^2+n+1}.$$

Глава IV.

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ АРКФУНКЦИЯМИ.

§ 13. Соотношения первого рода.

Соотношения первого рода вытекают из зависимости между тригонометрическими функциями дополнительных дуг.

Теорема. *При всех допустимых значениях x имеют место равенства:*

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Доказательство. Доказываемые тождества суть следствия формул тригонометрии:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi, \qquad (1)$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \operatorname{ctg}\varphi; \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \operatorname{tg}\varphi. \qquad (2)$$

Положим $\varphi = \arcsin x$, тогда имеем $\sin\varphi = x$. На основании формул (1) получим:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi = x.$$

Установим, на каком сегменте расположена дуга $\frac{\pi}{2} - \varphi$.

Так как:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}, \text{ то } 0 \leqslant \frac{\pi}{2} - \varphi \leqslant \pi.$$

Итак, дуга

$$\frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

имеет косинус, равный x, и расположена на сегменте $[0, \pi]$. Но по определению арккосинуса единственная дуга на сегменте $[0, \pi]$, имеющая косинус, равный x, есть $\arccos x$.

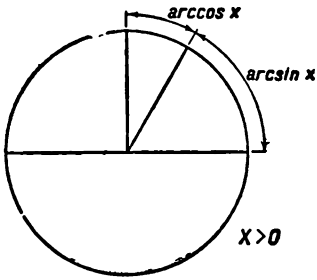
Следовательно,

$$\frac{\pi}{2} - \arcsin x = \arccos x,$$

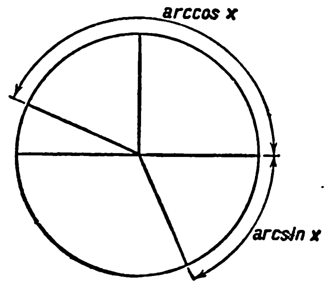
откуда:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (\text{где } |x| \leqslant 1), \text{ ч. т. д.}$$

На чертежах 31 и 32 дано геометрическое пояснение доказанного равенства для случаев $x > 0$ и $x < 0$.



Черт. 31.



Черт. 32.

Аналогично докажем, что тождество

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2},$$

является следствием формул (2), ч. т. д.

§ 14. Соотношения второго рода.

Соотношения второго рода между аркфункциями вытекают из соотношений, имеющих место между значениями тригонометрических функций от одного и того же аргумента.

Рассмотрим несколько частных примеров.

1) Мы знаем, что

$$\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6} \quad \text{и} \quad \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6},$$

следовательно:

$$\arcsin \frac{1}{2} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Из этого примера мы видим, что данная дуга может быть представлена как арксинус и как арккосинус различных аргументов.

2) Положение вещей изменится, если мы пожелаем представить в виде арккосинуса дугу

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}.$$

В самом деле, $\arccos x$ не может иметь отрицательных значений ($0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$) и поэтому ни при каком значении x не может иметь место равенство

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=\arccos x.$$

Выразить дугу $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ через арккосинус можно так: приняв во внимание равенства

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\arcsin\frac{1}{2}$$

и

$$\arcsin\frac{1}{2}=\arccos\frac{\sqrt{3}}{2},$$

получим:

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{2}=\pi-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Рассмотрим в общем виде вопрос о преобразовании одной аркфункции в другую. Рассмотрим сначала какую-нибудь пару аркфункций, *значения которых заключены в одних и тех же промежутках.* Для определенности возьмем $\arcsin x$ и $\operatorname{arctg} x$. Значения обеих этих функций заключены в промежутке от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, в этом промежутке дуга вполне определена, если задано значение ее тангенса или синуса. Пусть $y=\arcsin x$, тогда

$$\operatorname{tg}(\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\qquad(x\neq\pm1).\tag{1}$$

Дуга $\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, по определению арктангенса, имеет тангенс, равный $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, и расположена в интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

В силу (1) дуга $\operatorname{arc}\sin x$ имеет тот же тангенс и расположена в том же интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Откуда получаем тождество:

$$\operatorname{arc}\sin x = \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{2}$$

имеющее место при всех значениях x, по абсолютной величине меньших единицы [если $|x| \geqslant 1$, то выражения, стоящие в правой и левой частях равенства (2), теряют смысл]. Соотношение (2) является следствием формулы элементарной тригонометрии, выражающей тангенс через синус.

Подобным же образом из равенства:

$$\sin(\operatorname{arc}\operatorname{tg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

вытекает тождество:

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} x = \operatorname{arc}\sin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \tag{3}$$

справедливое при всех действительных значениях x.

Аналогично преобразуется арккосинус в арккотангенс. В интервале $(0, \pi)$ дуга вполне определяется заданием значения косинуса или котангенса, поэтому из равенств:

$$\cos(\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{и} \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arc}\cos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

следуют тождества:

$$\operatorname{arc}\operatorname{ctg} x = \operatorname{arc}\cos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \operatorname{arc}\cos x = \operatorname{arc}\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{4}$$

Положение дела изменится, если потребуется преобразовать одну в другую аркфункции, значения которых содержатся в различных промежутках. Будем преобразовывать функцию $y = \operatorname{arc}\sin x$ в арккосинус. На сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$ имеем:

$$0 \leqslant \operatorname{arc}\sin x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Дуга y имеет косинус, равный $\sqrt{1-x^2}$, и поэтому

$$\operatorname{arc}\sin x = \operatorname{arc}\cos\sqrt{1-x^2}. \tag{*}$$

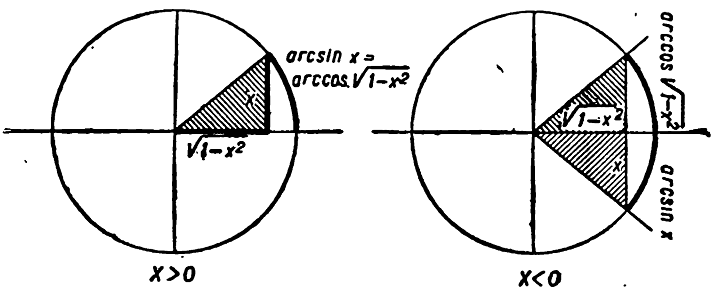
Если

$$-1 \leqslant x \leqslant 0, \text{ то } -\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arc\,sin} x \leqslant 0,$$

для функции же $\operatorname{arc\,cos} \sqrt{1-x^2}$ имеем:

$$0 \leqslant \operatorname{arc\,cos} \sqrt{1-x^2} \leqslant \pi.$$

Отсюда видно, что при отрицательных значениях x равенство (*) выполняться не может, так как дуги $\operatorname{arc\,sin} x$ и $\operatorname{arc\,cos} \sqrt{1-x^2}$ расположены в различных промежутках. В самом деле, при отрицательных значениях x дуга $\operatorname{arc\,sin} x$ заключена в четвертой четверти, а дуга $\operatorname{arc\,cos} \sqrt{1-x^2}$ заключена в первой четверти, так как аргумент арккосинуса есть арифметический корень $\sqrt{1-x^2}$, т. е. число положительное.



Черт. 33.

Расположение рассматриваемых дуг пояснено на чертеже 33.

При отрицательных значениях x имеем: $x<0$, откуда $-x>0$ и

$$\operatorname{arc\,sin} x = -\operatorname{arc\,sin}(-x) = -\operatorname{arc\,cos} \sqrt{1-x^2}.$$

Таким образом, имеем:

$$\operatorname{arc\,sin} x = \begin{cases} \operatorname{arc\,cos} \sqrt{1-x^2}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ -\operatorname{arc\,cos} \sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1 \leqslant x \leqslant 0. \end{cases} \qquad (5)$$

На чертеже 34 представлен график функции $\operatorname{arc\,cos} \sqrt{1-x^2}$. Область определения есть сегмент $[-1, 1]$, согласно равенству (5) закон соответствия может быть выражен следующим образом:

$$\arccos\sqrt{1-x^2}=\begin{cases}\arcsin x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1\\ -\arcsin x, & \text{если } -1\leqslant x\leqslant 0.\end{cases}$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что при $x\geqslant 0$ имеем

$$\arccos x=\arcsin\sqrt{1-x^2};$$

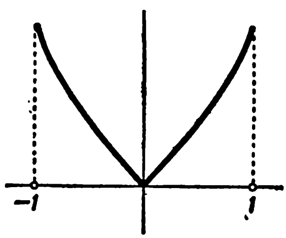
если же $-1\leqslant x\leqslant 0$, то

$$\arccos x=\pi-\arccos(-x)=\pi-\arcsin\sqrt{1-x^2}.$$

Таким образом:

$$\arccos x=\begin{cases}\arcsin\sqrt{1-x^2}, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1\\ \pi-\arcsin\sqrt{1-x^2}, & \text{если} -1\leqslant x\leqslant 0.\end{cases}\quad (6)$$

Переходим к следующему примеру. Из соотношения



Черт. 34.

$$\cos(\operatorname{arc\,tg} x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

при $x\geqslant 0$ имеем:

$$\operatorname{arc\,tg} x=\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Если же $x<0$, то

$$\operatorname{arc\,tg} x=-\operatorname{arc\,tg}(-x)=-\arccos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Итак,

$$\operatorname{arc\,tg} x=\begin{cases}\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x\geqslant 0,\\ -\arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x\leqslant 0.\end{cases}\quad (7)$$

Аналогично, если $0<x\leqslant 1$, то $\arccos x=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

При $-1\leqslant x<0$ имеем:

$$\arccos x=\pi-\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{-x}=\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

Итак,

$$\arccos x=\begin{cases}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если } 0<x\leqslant 1,\\ \pi+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если} -1\leqslant x<0.\end{cases}\quad (8)$$

Следуя методу, выясненному на приведенных примерах, можно установить справедливость следующих равенств:

$$\operatorname{arc\,tg} = \begin{cases} \operatorname{arc\,ctg}\dfrac{1}{x}, & \text{если } x>0, \\ \operatorname{arc\,ctg}\dfrac{1}{x}-\pi, & \text{если } x<0 \end{cases} \tag{9}$$

$$\left[\text{если } x<0, \text{то } \operatorname{arc\,tg} x = -\operatorname{arc\,tg}(-x) = -\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{-x} = -\left(\pi - \operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x}\right)\right].$$

$$\arcsin x = \begin{cases} \operatorname{arc\,ctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & \text{если } 0<x\leqslant 1, \\ \operatorname{arc\,ctg}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}-\pi, & \text{если } -1\leqslant x<0. \end{cases} \tag{10}$$

$$\operatorname{arc\,ctg} x = \begin{cases} \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } 0<x, \\ \pi-\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x<0. \end{cases} \tag{11}$$

$$\operatorname{arc\,ctg} x = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}, & \text{если } x>0, \\ \pi+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}, & \text{если } x<0. \end{cases} \tag{12}$$

Примеры:

1) Исследовать функцию $y = \operatorname{arc\,tg} x - \operatorname{arc\,ctg}\dfrac{1}{x}$.

Эта функция определена для всех значений x, за исключением значения $x=0$ (при $x=0$ второе слагаемое теряет смысл). Воспользовавшись формулами (9), получим:

$$y = \begin{cases} 0, & \text{если } x>0, \\ -\pi, & \text{если } x<0. \end{cases}$$

На чертеже 35 изображен график данной функции.

2) Исследовать функцию $y = \arcsin\sqrt{1-x} + \arcsin\sqrt{x}$.

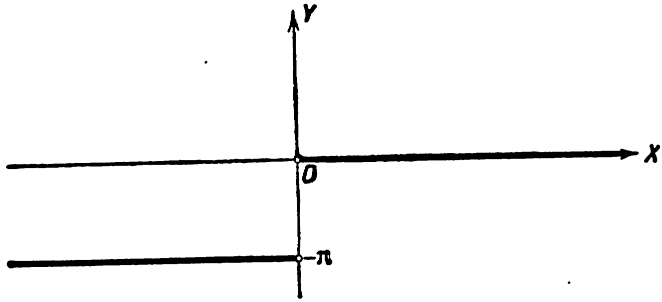
Первое слагаемое определено для значений $0\leqslant x\leqslant 1$, второе — для тех же значений аргумента. Преобразуем первое слагаемое по формуле (5). Так как $0\leqslant\sqrt{1-x}\leqslant 1$, то получим

$$\arcsin\sqrt{1-x} = \arccos\sqrt{1-(1-x)} = \arccos\sqrt{x},$$

откуда:

$$y=\arc \sin \sqrt{1-x}+\arc \sin \sqrt{x}=\arc \cos \sqrt{x}+\arc \sin \sqrt{x}=\frac{\pi}{2}.$$

Это равенство выполняется тождественно при всех значениях x на сегменте $[0,1]$. Исследуемая функция изображена графически на чертеже 36.



Черт. 35.

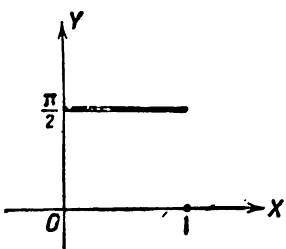
3) Исследовать функцию

$$y=\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Выражения, стоящие под знаками аркфункции, не превосходят по абсолютной величине единицы, поэтому данная функция определена для всех значений x. Преобразуем первое слагаемое по формуле (5):

$$\arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\arccos \sqrt{1-\frac{1}{1+x^2}}=\arccos \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}=$$

$$=\arccos \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}},$$



Черт. 36.

Заметим, что $\sqrt{x^2}=|x|$, ибо значение корня предполагается арифметическим.

Далее, приняв во внимание равенство:

$$\arccos|\xi|=\begin{cases}\arccos \xi, & \text{если } \xi \geqslant 0,\\ \pi-\arccos \xi, & \text{если } \xi<0,\end{cases}$$

получим:

$$y=\begin{cases}0, & \text{если } x \geqslant 0\\ \pi-2\arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, & \text{если } x<0.\end{cases}$$

Глава V.

ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ.

§ 15. Основные формулы.

Теоремы сложения тригонометрических функций дают выражения тригонометрических функций суммы двух (или нескольких) аргументов через тригонометрические функции слагаемых. Применительно к аркфункциям эти теоремы дают возможность представить *сумму двух (или нескольких) аркфункций при помощи любой из аркфункций.* Поясним сказанное на частных примерах.

1) Рассмотрим сумму $\gamma = \arcsin\frac{1}{3} + \arcsin\frac{1}{2}$.

Эта сумма является суммой двух дуг α и β, где $\alpha = \arcsin\frac{1}{3}$; $\beta = \arcsin\frac{1}{2}$.

Зная дуги α и β, можно вычислить значение любой тригонометрической функции дуги $\gamma = \alpha + \beta$ и, следовательно, выразить дугу γ через любую из аркфункций. Заметим, что в данном случае $\alpha < \frac{\pi}{4}$ $\left(\frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}}\right.$, а следовательно, $\left.\arcsin\frac{1}{3} < \frac{\pi}{4}\right)$, а также $\beta = \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{4}$, поэтому $\gamma < \frac{\pi}{2}$.

Вычислив синус дуги γ, получим:

$$\sin\gamma = \frac{1}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6}.$$

Так как сумма γ заключена на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то

$$\gamma = \arcsin\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{6}.$$

Можно рассматривать любую другую тригонометрическую функцию дуги γ и представить эту дугу при помощи соответствующей аркфункции. Так, например,

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)}=\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}-1},$$

откуда:

$$\gamma=\operatorname{arc\,tg}\frac{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}{2\sqrt{6}-1}.$$

2) Положим $\gamma=\operatorname{arc\,tg}1+\operatorname{arc\,tg}2$; пусть $\alpha=\operatorname{arc\,tg}1$; $\beta=\operatorname{arc\,tg}2$. В этом случае, в отличие от предыдущего, $\gamma>\frac{\pi}{2}$, так как $\alpha=\frac{\pi}{4}$ и $\beta>\frac{\pi}{4}$.

Таким образом, дуга γ заключена в интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

Рассмотрим $\operatorname{tg}\gamma$:

$$\operatorname{tg}\gamma=\frac{1+2}{1-2}=-3.$$

Однако в данном примере нельзя написать $\gamma=\operatorname{arc\,tg}(-3)$, так как дуги γ и $\operatorname{arc\,tg}(-3)$ заключены в различных интервалах:

$$\frac{\pi}{2}<\gamma<\pi; \quad -\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg}(-3)<0.$$

В данном случае мы будем иметь:

$$\gamma=\pi+\operatorname{arc\,tg}(-3)=\pi-\operatorname{arc\,tg}3.$$

Вычислим $\cos\gamma$:

$$\cos\gamma=\cos(\operatorname{arc\,tg}1+\operatorname{arc\,tg}2)=-\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Приняв во внимание, что дуги γ и $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$ расположены в одном и том же интервале $(0, \pi)$ и имеют одинаковый косинус, получим:

$$\gamma=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Перейдем к изучению в общем виде преобразований суммы аркфункций. Рассмотрим ряд наиболее часто встречающихся случаев.

Рассмотрим сумму $\gamma=\arcsin x+\arcsin y$ (где $|x|\leqslant 1$ и $|y|\leqslant 1$).

Вычислив $\sin\gamma$, найдем:

$$\sin\gamma = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \qquad \text{(см. § 12)}.$$

Отсюда еще нельзя заключить, что

$$\gamma = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}).$$

В самом деле дуги $\arcsin x + \arcsin y = \gamma$ и

$$\gamma' = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$$

могут оказаться расположенными в различных промежутках.

Дуга $\gamma' = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$ при всех значениях x и y заключена на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Для значения дуги γ возможны следующие три случая.

Случай I: $\qquad -\frac{\pi}{2} \leqslant \gamma \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Если числа x и y разных знаков или хотя бы одно из них равно нулю, то имеет место случай I.

Так, при $0 \leqslant x < 1$ и $-1 \leqslant y \leqslant 0$ имеем:

$$0 \leqslant \arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2} \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin y \leqslant 0,$$

откуда:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \gamma \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Если при $x > 0$, $y > 0$ имеет место случай I, то

$$\gamma = \arcsin x + \arcsin y \leqslant \frac{\pi}{2},$$

откуда:

$$\arcsin x \leqslant \frac{\pi}{2} - \arcsin y \leqslant \arccos y.$$

Следовательно (в силу возрастания синуса в первой четверти),

$$\sin(\arcsin x) \leqslant \sin(\arccos y),$$

или:

$$x \leqslant \sqrt{1-y^2} \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

Аналогично покажем, что если при $x < 0$, $y < 0$ имеет место случай I, то

$$x^2 + y^2 \leqslant 1.$$

Случай II: $\frac{\pi}{2} < \gamma \leqslant \pi$.

В этом случае $x > 0$, $y > 0$ и

$$\frac{\pi}{2} < \arcsin x + \arcsin y \leqslant \pi,$$

откуда:

$$\arcsin x > \frac{\pi}{2} - \arcsin y$$

и (взяв синус от обеих частей) $x^2 + y^2 > 1$.

Случай III. $-\pi \leqslant \gamma < -\frac{\pi}{2}$.

Этот случай имеет место при $x < 0$, $y < 0$ и

$$-\pi \leqslant \arcsin x + \arcsin y < -\frac{\pi}{2}.$$

Изменив знаки на противоположные, приходим к предыдущему случаю:

$$\pi \geqslant \arcsin(-x) + \arcsin(-y) > \frac{\pi}{2},$$

откуда:

$$x^2 + y^2 > 1.$$

Из сопоставления результатов следует, что признаком случая I при одинаковых по знаку значениях аргументов (т. е. при $xy > 0$) может служить неравенство $x^2 + y^2 \leqslant 1$. Случай II имеет место, если $x > 0$, $y > 0$ и $x^2 + y^2 > 1$. Случай III имеет место, если $x < 0$, $y < 0$ и $x^2 + y^2 > 1$.

Дуги γ и $\gamma' = \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2})$ имеют одинаковый синус, но (по определению арксинуса) $-\frac{\pi}{2} \leqslant \gamma' \leqslant \frac{\pi}{2}$, следовательно, в случае I, $\gamma = \gamma'$; в случае II $\gamma = \pi - \gamma'$ и в случае III $\gamma = -\pi - \gamma'$.

Итак, имеем окончательно:

$$\arcsin x + \arcsin y = \begin{cases} \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}); \\ \qquad\qquad xy \leqslant 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ \pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}); \\ \qquad\qquad x > 0, y > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1 \\ -\pi - \arcsin(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}); \\ \qquad\qquad x < 0,\ y < 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1. \end{cases} \quad (1)$$

Пример:

$$\arcsin\frac{3}{5}+\arcsin\frac{5}{13}=\arcsin\frac{56}{65},\quad \left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{13}\right)^2<1.$$

Из формулы (1) можно получить формулу преобразования разности $\arcsin x-\arcsin y$. В самом деле, эту разность можно представить в виде суммы:

$$\arcsin x+\arcsin(-y).$$

Заменив в формуле (1) y на $-y$, получим:

$$\arcsin x-\arcsin y=\begin{cases}\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right); \\ \qquad xy\geqslant 0, \text{ или } x^2+y^2\leqslant 1 \\ \pi-\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right); \\ \qquad x>0,\ y<0 \text{ и } x^2+y^2>1 \\ -\pi-\arcsin\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right); \\ \qquad x<0, y>0 \text{ и } x^2+y^2>1.\end{cases} \quad (2)$$

Сумму $\arcsin x+\arcsin y$ можно представить при помощи *любой другой аркфункции*. Так, например, приняв во внимание равенство

$$\cos(\arcsin x+\arcsin y)=\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy,$$

рассмотрим две дуги:

$u=\arcsin x+\arcsin y$ и $v=\arccos\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy\right)$.

Имеем: $\cos u=\cos v$.

Рассмотрим случай, когда аргументы суть числа одинаковых знаков: $xy>0$.

Мы знаем, что $-\pi<u<\pi$; $0\leqslant v\leqslant\pi$. Легко видеть, что $0\leqslant u\leqslant\pi$, если $x\geqslant 0$; $y\geqslant 0$ и $-\pi<u\leqslant 0$, если $x<0$; $y<0$, поэтому

$$\arcsin x+\arcsin y=\begin{cases}\arccos\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy\right); \\ \qquad x\geqslant 0,\ y\geqslant 0 \\ -\arccos\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy\right); \\ \qquad x<0,\ y<0.\end{cases}$$

Мы рассмотрели преобразование суммы $\arcsin x+\arcsin y$ в арккосинус для случая, когда x и y являются числами одинакового знака. Случай, когда x и y суть числа разных знаков, может быть сведен к рассмотрению разности

$$\arcsin x-\arcsin y,\quad x>0 \text{ и } y>0,$$

но тогда (как можно проверить)

$$\arcsin x - \arcsin y = \begin{cases} \arccos\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}+xy\right), x>y, \\ -\arccos\left(\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}+xy\right), x<y. \end{cases}$$

В качестве упражнения рекомендуем проверить справедливость следующей формулы:

$$\arcsin x + \arcsin y = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy}; \\ \qquad x^2+y^2<1, \text{ или } xy \leqslant 0 \\ \operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy}+\pi; \\ \qquad x^2+y^2>1,\ x>0,\ y>0 \\ \operatorname{arctg}\dfrac{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy}-\pi; \\ \qquad x^2+y^2>1,\ x<0, y<0. \end{cases}$$

Рассмотрим сумму $\arccos x + \arccos y$. В силу основных неравенств

имеем: $$0 \leqslant \arccos x \leqslant \pi \quad \text{и} \quad 0 \leqslant \arccos y \leqslant \pi,$$
$$0 \leqslant \arccos x + \arccos y \leqslant 2\pi.$$

Выведем признак, по которому можно судить, на каком из сегментов $[0, \pi]$ или $[\pi, 2\pi]$ расположена дуга

$$\arccos x + \arccos y.$$

Если

$$0 \leqslant \arccos x + \arccos y \leqslant \pi,$$

то $$\arccos x \leqslant \pi - \arccos y.$$

Приняв во внимание, что обе дуги $\arccos x$ и $\pi - \arccos y$ расположены в промежутке $[0, \pi]$ и что на этом промежутке косинус убывает, получим:

$$x \geqslant \cos(\pi - \arccos y) = -\cos(\arccos y) = -y,$$

и, следовательно, $x \geqslant -y$, откуда $x + y \geqslant 0$.
Если выполнены неравенства $\pi \leqslant \arccos x + \arccos y \leqslant 2\pi$, то $\pi - \arccos y \leqslant \arccos x$, откуда при помощи рассуждений, аналогичных предыдущим, получим $x + y \leqslant 0$.

Отсюда в частности получим, что дуга $\arccos x + \arccos y$ расположена на сегменте $[0, \pi]$, если $x > 0$ и $y > 0$, и на сегменте $[\pi, 2\pi]$, если $x < 0$ и $y < 0$.

Резюмируя полученные результаты, приходим к следующему выводу:

если

$$0 \leqslant \arccos x + \arccos y \leqslant \pi, \text{ то } x + y \geqslant 0;$$

если

$$\pi \leqslant \arccos x + \arccos y \leqslant 2\pi, \text{ то } x + y \leqslant 0.$$

Из равенства:

$$\cos(\arccos x + \arccos y) = xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2},$$

следует, что дуги:

$u = \arccos x + \arccos y$ и $v = \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2})$ имеют одинаковый косинус.

Если $0 \leqslant u \leqslant \pi$, то $u = v$; если же $\pi \leqslant u \leqslant 2\pi$, то $u = 2\pi - v$, следовательно, имеем формулу:

$$\arccos x + \arccos y = \begin{cases} \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}); & x + y \geqslant 0 \\ 2\pi - \arccos(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}); & x + y < 0. \end{cases} \quad (3)$$

Заменив y на $-y$ и приняв во внимание, что

$$\arccos(-y) = \pi - \arccos y$$

и

$$\arccos(-xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}) = \pi - \arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}),$$

получим:

$$\arccos x - \arccos y = \begin{cases} -\arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), & x \geqslant y \\ \arccos(xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}), & x < y. \end{cases} \quad (4)$$

Пример:

$$\arccos\frac{3}{7} + \arccos\frac{9}{11} = \arccos\left(-\frac{13}{77}\right).$$

Рассмотрим сумму $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$. Исследуем, в каких промежутках может быть заключена эта сумма при различных значениях x и y. В силу неравенств $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2}$ и

$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} y < \frac{\pi}{2}$, имеем $-\pi < \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y < \pi$.

Дальнейшие рассуждения аналогичны соответствующим рассуждениям, относящимся к сумме арксинусов, поэтому мы не будем останавливаться на подробностях.

Если x и y суть числа разных знаков, то

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y < \frac{\pi}{2}.$$

Если $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$, то $0 \leqslant \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y < \pi$. Установим, в каком из промежутков $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ или $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ расположена рассматриваемая сумма. Если

$0 \leqslant \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{arc\,ctg} x \leqslant \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} y$, и, следовательно,

$$x \leqslant \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} y\right) = \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,ctg} y) = \frac{1}{y},$$

откуда $x \leqslant \frac{1}{y}$, а значит $xy \leqslant 1$. Подобным же образом можно показать, что если $\frac{\pi}{2} < \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y < \pi$, то $xy > 1$. Аналогично покажем, что в случае $x < 0$ и $y < 0$ сумма $\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y$ расположена в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ или $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ в зависимости от того, которое из двух неравенств $xy < 1$ или $xy > 1$ имеет место.

Равенство $xy = 1$ имеет место, если

$$\operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y = \frac{\pi}{2}.$$

Итак, дуга $\gamma = \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,tg} y$ заключена в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, если x и y — числа разных знаков ($xy \leqslant 0$), а также, если x и y, будучи числами одинаковых знаков, удовлетворяют условию $xy < 1$. Эти оба условия можно объединить в одно: $xy < 1$. Дуга γ заключена в интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, если $x > 0$ и $y > 0$ и $xy > 1$. Это условие можно записать так: $x > 0$ и $xy > 1$, ибо из последних двух неравенств само собой следует неравенство $y>0$. Это же условие можно также записать в виде неравенств $y>0,\ xy>1$.

Наконец, дуга $\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} y$ заключена в интервале $\left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right)$ при условии $x<0,\ xy>1$. Это условие равносильно неравенствам $y<0,\ xy>1$.

Выведем формулу преобразования суммы арктангенсов в арктангенс.

Рассмотрим равенство $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} y)=\frac{x+y}{1-xy}$.

Положив $u=\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} y$ и $v=\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}$, получим $\operatorname{tg} v=\operatorname{tg} u$. Так как $-\frac{\pi}{2}<v<\frac{\pi}{2}$, то $u=v$, если $-\frac{\pi}{2}<u<\frac{\pi}{2}$; $u=\pi+v$, если $\frac{\pi}{2}<u<\pi$, и, наконец, $u=-\pi+v$, если $-\pi<u<-\frac{\pi}{2}$, поэтому:

$$\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} y=\begin{cases}\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}; & xy<1\\ \pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}; & x>0, xy>1\\ -\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}; & x<0,\ xy>1.\end{cases} \tag{5}$$

Если $xy=1$, то выражение $\operatorname{arc\,tg}\frac{x+y}{1-xy}$ не имеет смысла, в этом случае дуга

$$\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg} y=\pm\frac{\pi}{2}$$

не имеет тангенса и не может быть представлена в виде арктангенса.

Заменив y на $-y$, получим:

$$\operatorname{arc\,tg} x-\operatorname{arc\,tg} y=\begin{cases}\operatorname{arc\,tg}\frac{x-y}{1+xy}; & xy>-1\\ \pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{x-y}{1+xy}; & x>0, xy<-1\\ -\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{x-y}{1+xy}; & x<0, xy<-1.\end{cases} \tag{6}$$

Пример:

$$\operatorname{arc}\operatorname{tg} 3+\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1}{2}=\pi+\operatorname{arc}\operatorname{tg}(-7)=\pi-\operatorname{arc}\operatorname{tg} 7.$$

В данном примере $3\cdot\frac{1}{2}>1$.

Выведенными формулами не ограничиваются возможные преобразования суммы аркфункций. Не обязательно рассматривать сумму или разность *одноименных* аркфункций. Так, например, можно вывести формулы преобразования суммы $\arcsin x+\operatorname{arc}\operatorname{tg} y$ в любую другую аркфункцию. Можно было бы рассмотреть формулы преобразования суммы большего числа, чем двух аркфункций. Не будем продолжать рассмотрения этих преобразований, полагая, что приемы их выполнения достаточно выяснены на рассмотренных примерах.

Примечание. При решении числовых примеров следует стараться избегать пользования громоздкими и трудно запоминаемыми общими формулами, а всякий раз руководствоваться конкретными числовыми данными.

Пример (сб. задач Рыбкина, § 15, № 31).
Показать, что

$$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{2}}{2}=\operatorname{arc}\operatorname{tg}(\sqrt{2}+1)^2.$$

Имеем:

$$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}, \quad \text{а } \operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\pi}{4},$$

ибо $\frac{\sqrt{2}}{2}<1$ и $\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{2}}{2}<\operatorname{arc}\operatorname{tg} 1=\frac{\pi}{4}$. Следовательно, сумма дуг в правой части доказываемого равенства заключена в I четверти. Взяв тангенс от левой части, получим

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$

$$=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=(\sqrt{2}+1)^2.$$

Откуда следует доказываемое равенство.

Непосредственное выполнение исследования (без пользования готовыми формулами) может успешно применяться и при преобразовании суммы аркфункций с буквенными аргументами.

Пример:

$$y=\operatorname{arc}\operatorname{tg} x+\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{1-x}{1+x}.$$

Имеем:

$$\operatorname{tg} y = \frac{x + \frac{1-x}{1+x}}{1 - x\,\frac{1-x}{1+x}} = 1.$$

Так как $-\pi < y < \pi$, то $y = \frac{\pi}{4}$ либо $y = -\frac{3}{4}\pi$. Равенство $y = -\frac{3}{4}\pi$ может иметь место лишь при условии, если выражения, находящиеся под знаками обоих арктангенсов, отрицательны:

$$x < 0 \quad \text{и} \quad \frac{1-x}{1+x} < 0.$$

Эта система неравенств удовлетворяется, если $x < -1$.

Итак, имеем:

$$y = \begin{cases} \frac{\pi}{4}, & \text{если } x > -1. \\ -\frac{3}{4}\pi, & \text{если } x < -1. \end{cases}$$

(другое решение этого примера дано в § 16, см. пример 2).

§ 16. Примеры.

1) Положив в формулах (1), (3), (5) $y = x$, получим:

$$2 \arcsin x = \begin{cases} \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}); & |x| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pi - \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}); & \frac{1}{\sqrt{2}} < x \leqslant 1 \\ -\pi - \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}); & -1 \leqslant x < -\frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases} \qquad (7)$$

$$2 \arccos x = \begin{cases} \arccos(2x^2 - 1); & 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 2\pi - \arccos(2x^2 - 1); & -1 \leqslant x < 0. \end{cases} \qquad (8)$$

$$2 \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}; & |x| < 1 \\ \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} + \pi; & x > 1 \\ \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} - \pi; & x < -1. \end{cases} \qquad (9)$$

2) Исследовать функцию $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$.

Рассмотрим второе слагаемое. Положив в формуле (6)

$$x=1,\ \text{а}\ y=x,$$

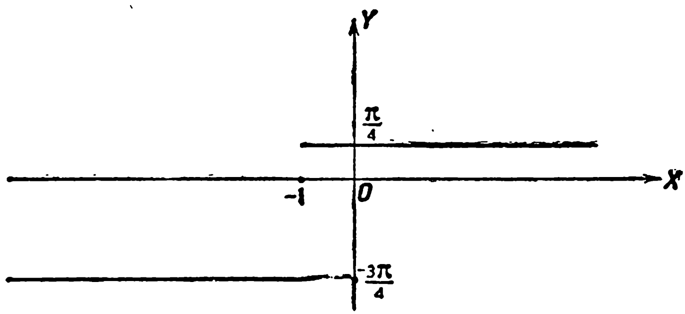
получим

$$\operatorname{arc\,tg} 1-\operatorname{arc\,tg} x=\frac{\pi}{4}-\operatorname{arc\,tg} x=$$

$$=\begin{cases}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1-x}{1+x}; & x>-1\\ \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1-x}{1+x}+\pi; & x<-1,\end{cases}$$

откуда:

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arc\,tg} x; & x>-1\\ -\dfrac{3\pi}{4}-\operatorname{arc\,tg} x; & x<-1.\end{cases}$$



Черт. 37.

Следовательно,

$$y=\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg}\frac{1-x}{1+x}=\begin{cases}\dfrac{\pi}{4}; & x>-1\\ -\dfrac{3}{4}\pi; & x<-1.\end{cases}$$

Данная функция является разрывной, ее график состоит из двух прямых, параллельных оси абсцисс (черт. 37).

3) Исследовать функцию

$$y=\arccos x+\arccos\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}.$$

Положив в формуле (4) $y=\frac{1}{\sqrt{2}}$, получим:

$$\arccos x - \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \arccos x - \frac{\pi}{4} =$$

$$= \begin{cases} -\arccos\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}; & x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \arccos\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}}; & x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \end{cases}$$

откуда:

$$\arccos\frac{x+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2}} = \begin{cases} -\arccos x + \dfrac{\pi}{4}; & x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \arccos x - \dfrac{\pi}{4}; & x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

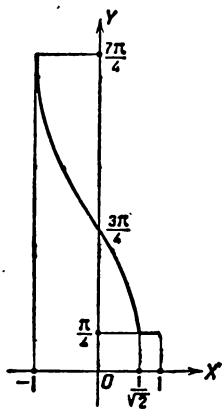
следовательно,

$$y = \begin{cases} 2\arccos x - \dfrac{\pi}{4}; & x \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{\pi}{4}; & x \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Построим график данной функции. Сегмент $[-1, 1]$, на котором определена функция, разобьем на два сегмента $\left[-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ и $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$; на первом сегменте

$$y = 2\arccos x - \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, y убывает от $\frac{7}{4}\pi$ до $\frac{\pi}{4}$. На втором сегменте $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$ функция y имеет значение, равное $\frac{\pi}{4}$ (черт. 38).



Черт. 38.

4) Исследовать функцию

$$y = \arcsin\frac{2x}{1+x^2}.$$

Установим область определения. Эта функция определена для всех значений аргумента x; так как при любом значении x имеет место неравенство: $\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leqslant 1$, или, что то же, $2|x| \leqslant 1 + x^2$.

В самом деле, примем во внимание, что при всех значениях x, $(1-|x|)^2 \geqslant 0$; имеем $1-2|x|+x^2 \geqslant 0$, откуда $2|x| \leqslant 1+x^2$. Воспользуемся формулой (стр. 39):

$$\sin(2 \operatorname{arc\,tg} x) = \frac{2x}{1+x^2}.$$

Рассмотрим две дуги $2 \operatorname{arc\,tg} x$ и $\arcsin \frac{2x}{1+x^2}$, имеющие одинаковый синус. Для дуги $2 \operatorname{arc\,tg} x$ имеют место неравенства $-\pi < 2 \operatorname{arc\,tg} x < \pi$; для второй дуги имеем

$$-\frac{\pi}{2} < \arcsin \frac{2x}{1+x^2} < \frac{\pi}{2}.$$

Если значение x заключено на сегменте $[-1, 1]$, то:

$$-\frac{\pi}{4} \leqslant \operatorname{arc\,tg} x \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно,

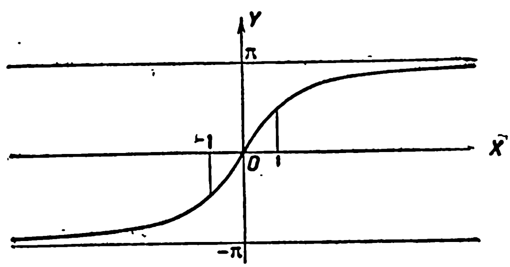
$$-\frac{\pi}{2} \leqslant 2 \operatorname{arc\,tg} x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

и мы имеем:

$$2 \operatorname{arc\,tg} x = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$

Для значений $x < -1$ имеем $-\pi < 2 \operatorname{arc\,tg} x < -\frac{\pi}{2}$, а потому:

$$\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = -\pi - 2 \operatorname{arc\,tg} x.$$



Черт. 39.

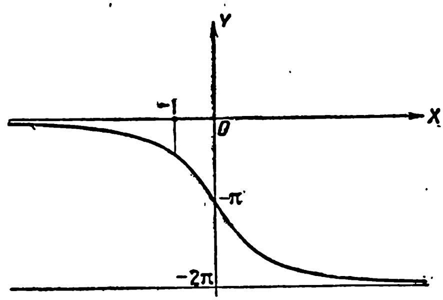
Если $x > 1$, то,

$$\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi - 2 \operatorname{arc\,tg} x.$$

Итак, получим:

$$y=\begin{cases} -\pi-2\operatorname{arc}\operatorname{tg}x; & x<-1 \\ 2\operatorname{arc}\operatorname{tg}x; & -1\leqslant x\leqslant 1 \\ \pi-2\operatorname{arc}\operatorname{tg}x; & 1<x. \end{cases}$$

Построим графики функций $2\operatorname{arc}\operatorname{tg}x$ (черт. 39), $-\pi-2\operatorname{arc}\operatorname{tg}x$ (черт. 40) и $\pi-2\operatorname{arc}\operatorname{tg}x$ (черт. 41). График данной функции получается путем соединения трех дуг построенных линий, как это показано на чертеже 42.



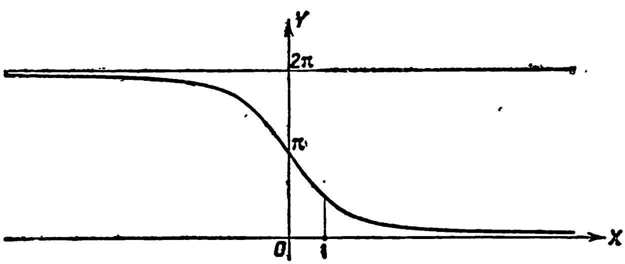
Черт. 40.

5) Исследовать функцию

$$y=\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Так как при любом значении x $1-x^2\leqslant 1+x^2$, то данная функция имеет смысл при всех значениях x. Воспользуемся формулой (стр. 39):

$$\cos(2\operatorname{arc}\operatorname{tg}x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}.$$



Черт. 41.

Рассмотрим две дуги, имеющие одинаковый косинус:

$$2\operatorname{arc}\operatorname{tg}x \quad \text{и} \quad \arccos\frac{1-x^2}{1+x^2};$$

в силу определения аркфункций имеем:

$$-\pi<2\operatorname{arc}\operatorname{tg}x<\pi \quad \text{и} \quad 0\leqslant\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}\leqslant\pi.$$

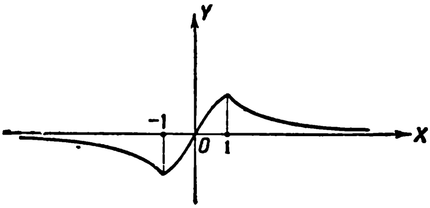
Откуда:

$$\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}=\begin{cases}2\,\mathrm{arc\,tg}\,x; & x\geqslant 0\\ -2\,\mathrm{arc\,tg}\,x; & x\leqslant 0.\end{cases}$$

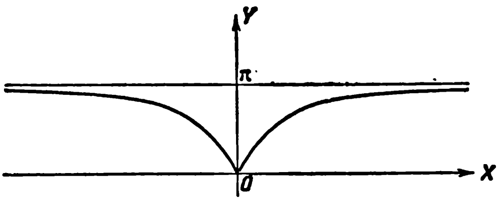
На чертеже 43 изображен график этой функции.

6) Исследовать функцию:

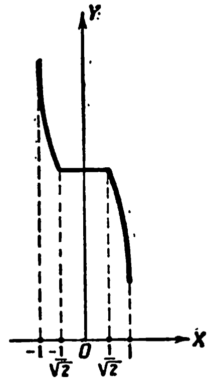
$$y=\arcsin x+3\arccos x+\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right).$$



Черт. 42.



Черт. 43.



Черт. 44.

Согласно формуле (7) (стр. 61):

$$\arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)=\begin{cases}2\arcsin x; & |x|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \pi-2\arcsin x; & \frac{1}{\sqrt{2}}<x\leqslant 1\\ -\pi-2\arcsin x; & -1\leqslant x<-\frac{1}{\sqrt{2}}.\end{cases}$$

Приняв во внимание, что $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$; получим:

$$y=\begin{cases}\frac{3}{2}\pi; & -\frac{1}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{\pi}{2}+4\arccos x; & \frac{1}{\sqrt{2}}<x\leqslant 1\\ -\frac{3}{2}\pi+4\arccos x; & -1\leqslant x<-\frac{1}{\sqrt{2}}.\end{cases}$$

График этой функции изображен на чертеже 44.

7) Преобразовать в арксинус дугу $\arcsin x + \operatorname{arc\,tg} y$. На основании формулы (стр. 46) данную дугу можно представить в виде суммы арксинусов следующим образом:

$$\arcsin x + \operatorname{arc\,tg} y = \arcsin x + \arcsin \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Далее следует применить формулу (1). Предоставляем читателю докончить вычисления.

Упражнения: 1) Вычислить:

$$2 \operatorname{arc\,tg} 10 + \arcsin \frac{20}{101}.$$

2) Вычислить:

$$4 \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} - \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{239}$$

[применить два раза формулу (9)].

3) Доказать справедливость равенств:

$$\frac{1}{2} \arcsin x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}} = \arcsin \left(\frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{2} \right);$$

$$\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1};$$

$$\frac{1}{2} \arccos x = \arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}}; \quad \frac{1}{2} \arccos x = \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

4) На основании предыдущего примера доказать равенство:

$$2 \arcsin x + \pi = 4 \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

Указание: принять во внимание равенство

$$\operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,ctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

5) Исследовать функцию

$$y = \arccos (2x^2 - 1) + 2 \arcsin x.$$

6) Исследовать функцию:

$$y = 2 \arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}} + \arcsin \frac{x\sqrt{3} + \sqrt{1-x^2}}{2}.$$

Глава VI.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ.

§ 17. Тригонометрические уравнения.

В школьном курсе элементарной математики под названием „Тригонометрические уравнения" рассматриваются некоторые частные виды трансцендентных уравнений, содержащих тригонометрические операции над неизвестными или над некоторыми функциями от неизвестных. Мы не будем давать точного определения понятию тригонометрического уравнения; в дальнейшем термин „тригонометрическое уравнение" будет применяться к различным конкретным видам уравнений, содержащих тригонометрические операции над неизвестными (или над данными функциями от неизвестных).

Примечание. Трансцендентное уравнение в общем случае не может быть решено элементарными средствами. Однако в частных случаях решение трансцендентного уравнения возможно средствами элементарной математики. Многообразие различных видов элементарных трансцендентных уравнений и приемов их решения (если таковое может быть выполнено элементарно) делает затруднительным установление достаточно целесообразной классификации этих уравнений.

Точное определение понятия, например, показательного или тригонометрического уравнения было бы плодотворным, если бы выделение класса уравнений, носящих данное название, связывалось с установлением общих методов их исследования и решения. На самом же деле речь идет о различных частных видах трансцендентных уравнений и специальных приемах их решения, а установление дробной классификации в соответствии с этими приемами не явится целесообразным.

Принятые во многих старых учебниках „определения" нельзя признать удачными. Например, под определение тригонометрического уравнения, как содержащего неизвестное под знаком тригонометрических функций, подойдут многие уравнения, неразрешимые элементарными средствами. Примером может служить уравнение

$$x + \sin x = 1,$$

линейное относительно x и $\sin x$, которое обычно не называют тригонометрическим. Однако даже в школьном задачнике система линейная относительно $\sin x$, $\sin y$, x и y:

$$\left.\begin{array}{l} \sin x+\sin y=a \\ x+y \quad\;\; =b \end{array}\right\}$$

приводится среди тригонометрических уравнений.

Вопрос о том, следует или не следует данное уравнение, содержащее тригонометрические функции, считать тригонометрическим, не имеет принципиального значения; и нет никаких неудобств, когда этот термин применяется к тем уравнениям, которые в данном случае рассматриваются.

Задача решения тригонометрического уравнения ставится следующим образом:

требуется установить, существуют ли, и найти (если существуют) все те допустимые значения неизвестного, при которых обе части данного уравнения имеют одинаковое значение.

Множество допустимых значений для неизвестного либо задается непосредственным указанием, либо определяется из смысла рассматриваемого вопроса. *Если дано уравнение без всяких указаний на множество допустимых значений неизвестного, то условимся считать допустимыми для неизвестного произвольные действительные значения, при которых обе части уравнения имеют смысл.*

Если, например, требуется найти острый угол x, удовлетворяющий уравнению $\sin x=\cos x$, то допустимыми значениями x являются значения, заключенные в I четверти: $0<x<\frac{\pi}{2}$. Если требуется найти угол треугольника A, удовлетворяющий условию

$$\operatorname{tg} A+\sin A=1,$$

то допустимые значения неизвестного A должны удовлетворять условию $0<A<\pi$. Если дано уравнение

$$\sin x-2\cos x=0$$

без указания множества допустимых значений x, то считаем для x допустимыми произвольные действительные значения. *Множество всех решений данного уравнения называют общим решением этого уравнения.*

Задача решения тригонометрического уравнения элементарными средствами заключается в составлении одной или нескольких формул, дающих общее решение тригонометрического уравнения.

§ 18. Простейшие тригонометрические уравнения.

Простейшими тригонометрическими уравнениями будем называть уравнения:

$$\sin x = m, \quad \cos x = m, \quad \operatorname{tg} x = m, \quad \operatorname{ctg} x = m.$$

Решение простейшего тригонометрического уравнения заключается в отыскании множества всех дуг, имеющих заданное значение рассматриваемой тригонометрической функции. Для нахождения множества всех дуг по известному численному значению тригонометрической функции достаточно найти все дуги, лежащие в пределах одного периода (т. е. на любом сегменте, величина которого равна периоду) и имеющие данное значение тригонометрической функции. Прибавив к каждой из найденных дуг любое целое число периодов, мы и получим искомое общее решение данного простейшего уравнения. Перейдем к рассмотрению простейших уравнений.

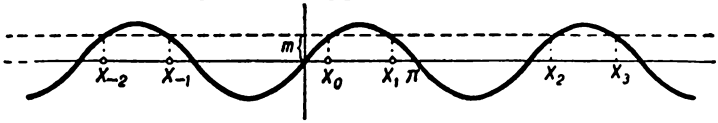
1°. $\sin x = m$, где m — данное действительное число. При $|m| > 1$ уравнение не имеет решений, так как абсолютная величина синуса не может быть больше 1. Предположим, что $|m| \leqslant 1$. На сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ содержится единственная (в силу монотонности синуса) дуга $x_1 = \arcsin m$, синус которой равен m. На сегменте $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ содержится единственная (в силу монотонности) дуга $x_2 = \pi - \arcsin m$, синус которой равен m. Но оба сегмента $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$ охватывают полный период синуса, поэтому, чтобы получить общее решение данного уравнения, достаточно к каждой из дуг x_1 и x_2 прибавить любое целое число периодов синуса:

$$x = \begin{cases} x_1 + 2k\pi = \arcsin m + 2k\pi \\ x_2 + 2k\pi = -\arcsin m + (2k+1)\pi, \end{cases}$$

где k — любое целое число (положительное, отрицательное или 0). Полученное выражение можно записать в виде одной формулы, заметив, что в верхней строке, $\arcsin m + 2k\pi$, слагаемое $\arcsin m$ берется со своим знаком и коэффициент при π — четное число $2k$; в нижней строке $\arcsin m$ берется с обратным знаком, а коэффициент при π есть нечетное число $2k+1$.

Выражение $$x=(-1)^n \arcsin m+n\pi$$ дает при четном $n=2k$ верхнюю строку, а при нечетном $n=2k+1$ нижнюю строку.

На чертеже 45 дано графическое пояснение множественности решений уравнения $\sin x=m$.



Черт. 45.

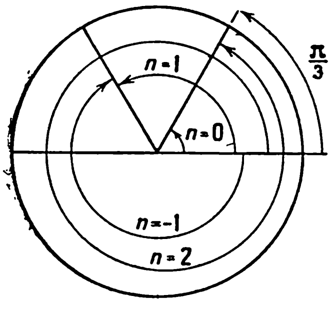
Примеры:

1) Найти множество всех дуг, синус которых равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

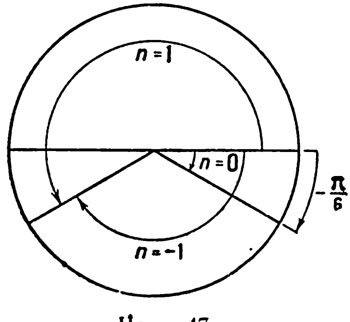
Имеем:

$$(-1)^n \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}+n\pi=(-1)^n\frac{\pi}{3}+n\pi.$$

На чертеже 46 стрелками показаны различные дуги, которые мы получим, придавая в формуле числу n различные целочисленные значения.



Черт. 46.



Черт. 47.

2) Найти множество всех дуг, синус которых равен $-\frac{1}{2}$.

Имеем: $(-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+n\pi=(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+n\pi$. (Чертеж 47.)

2°. $\cos x=m$. Если $|m|>1$, то уравнение не имеет решений. Если $|m|\leqslant 1$, то на сегменте $0\leqslant x\leqslant \pi$ уравнение имеет единственное решение $x=\arccos m$. Дуга $-\arccos m$ также является решением данного уравнения. Эта дуга расположена на сегменте $-\pi\leqslant x\leqslant 0$. Таким образом, дуги $x_1=\arccos m$ и $x_2=-\arccos m$ суть два решения данного уравнения, заключающиеся на сегменте от $-\pi$ до π. Так как этот сегмент охватывает полный период косинуса, то множество всех искомых дуг найдем, прибавляя к x_1 и x_2 любое целое число полных окружностей:

$$\arccos m + 2k\pi \quad \text{и} \quad -\arccos m + 2k\pi.$$

Объединив оба выражения в одно, можно записать:

$$x = \pm \arccos m + 2k\pi.$$

Примеры:

1. Решить уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$.

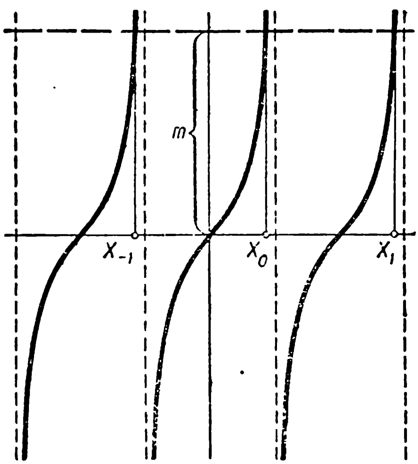
Решение. $x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2k\pi = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$.

2. Решить уравнение $\cos x = 0$.

Решение. $x = \pm \arccos 0 + 2k\pi = \pm \frac{\pi}{2} + 2k\pi = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi$ (где n — любое целое число)*).

3) Решить уравнение $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Решение. Имеем $x = \pm \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} + 2k\pi = \pm \frac{\pi}{4} + 2k\pi$.



Черт. 48.

3°. $\operatorname{tg} x = m$. При любом действительном m уравнение имеет в интервале $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ единственное решение. Этот промежуток охватывает полный период тангенса, а потому множество всех дуг, имеющих значение тангенса, равное m, запишется формулой:

$$x = \operatorname{arc\,tg} m + k\pi.$$

Множественность решений уравнения $\operatorname{tg} x = m$ пояснена графически на чертеже 48.

---

*) Заметим, что $\pm \frac{1}{2} + 2k = \frac{4k \pm 1}{2}$, но $4k \pm 1$ изображает произвольное нечетное число: $4k \pm 1 = 2n + 1$, где n — любое целое число.

Пример: Решить уравнение $\operatorname{tg} x = -1$.

Решение. $x = \operatorname{arc\,tg}(-1) + k\pi = -\frac{\pi}{4} + k\pi$.

4°. $\operatorname{ctg} x = m$. При любом действительном m уравнение имеет единственное решение в промежутке $0 < x < \pi$:

$$x = \operatorname{arc\,ctg} m.$$

Общее решение данного уравнения есть:

$$x = \operatorname{arc\,ctg} m + k\pi.$$

Решение уравнений, непосредственно приводящихся к простейшим, пояснено на нижеследующих примерах*).

Примеры:

1. $\sin 3x = \frac{1}{2}$.

Решение.

$$3x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi,$$

откуда:

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{18} + n\frac{\pi}{3}.$$

2. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{5}$.

Решение. $x + \frac{\pi}{4} = \pm \arccos\frac{4}{5} + 2k\pi$,

откуда:

$$x = \pm \arccos\frac{4}{5} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

Величину $\arccos\frac{4}{5}$ можно найти приближенно по таблицам.

Имеем (в градусной мере) $\arccos\frac{4}{5} \approx 36°52'$.

Следовательно,

$$x \approx \pm 36°52' - 45° + k \cdot 360°.$$

3. $\operatorname{tg}(ax + b) = m$.

Решение.

$$ax + b = \operatorname{arc\,tg} m + k\pi,$$

$$x = \frac{\operatorname{arc\,tg} m - b}{a} + k\frac{\pi}{a}.$$

*) Непосредственно приводящимися к простейшим являются уравнения, данные в примерах 9, 10, 11, 12 и 14 § 14 задачника Рыбкина.

4. $\sin x^2 = -\frac{1}{2}$.

Решение.

$$x^2 = (-1)^n \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + n\pi$$

или

$$x^2 = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi.$$

Условие $x^2 \geqslant 0$ показывает, что допустимыми значениями n следует считать лишь те целые значения, при которых

$$(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi \geqslant 0,$$

откуда $n = 1, 2, 3, \ldots$ (значения $0, -1, -2, \ldots$ не являются допустимыми для n).

Итак, имеем:

$$x = \sqrt{(-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + n\pi},$$

где n — произвольное натуральное число.

§ 19. Соотношения между двумя дугами, имеющими одинаковое значение данной тригонометрической функции.

Теорема. *Необходимым и достаточным условием того, чтобы*

1° *две дуги u и v имели одинаковый синус:*

$$\sin u = \sin v,$$

является наличие соотношения

$$u = (-1)^n v + n\pi,$$

2° *чтобы дуги u и v имели одинаковый косинус:*

$$\cos u = \cos v,$$

является наличие соотношения

$$u = \pm v + 2n\pi,$$

3° *чтобы дуги u и v имели одинаковый тангенс (или котангенс), является наличие соотношения*

$$u = v + n\pi,$$

где n — некоторое целое число.

Доказательство. Докажем утверждение 1°.

Условие достаточно. В самом деле, если имеет место соотношение $u = (-1)^n v + n\pi$, то в зависимости от четности или нечетности n имеем:

$$\sin u = \sin \begin{cases} v + 2k\pi & (n = 2k) \\ \pi - v + 2k\pi & (n = 2k + 1) \end{cases}$$

в обоих случаях $\sin u = \sin v$.

Условие необходимо. Пусть $\sin u = \sin v$; обозначим через m общее значение синуса двух дуг u и v:

$$\sin u = m, \quad \sin v = m.$$

Рассмотрим множество всех дуг, имеющих синус, равный m:

$$(-1)^n \arcsin m + n\pi, \tag{1}$$

каждая из дуг u и v содержится в выражении (1) при некотором значении n:

$$\left.\begin{aligned} u &= (-1)^{n_1} \arcsin m + n_1\pi, \\ v &= (-1)^{n_2} \arcsin m + n_2\pi. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Если числа n_1 и n_2 одинаковой четности (т. е. оба четные или нечетные), то вычтем почленно равенства (2):

$$u - v = (n_1 - n_2)\pi = 2k\pi,$$

где $n_1 - n_2$ есть некоторое четное число $2k$. Если n_1 и n_2 — числа различной четности, то сложим почленно равенства (2):

$$u + v = (n_1 + n_2)\pi = (2k + 1)\pi,$$

где $n_1 + n_2$ — есть некоторое нечетное число $2k + 1$. Итак, если дуги u и v имеют одинаковое значение синуса, то либо их разность равна целому числу периодов $2k\pi$, либо их сумма равна нечетному числу полупериодов $(2k + 1)\pi$. Следовательно,

$$u = \begin{cases} v + 2k\pi \\ -v + (2k + 1)\pi \end{cases} = (-1)^n v + n\pi.$$

Рассуждения в случаях 2° и 3° аналогичны. Так, в случае 2° при наличии соотношения

$$u = \pm v + 2k\pi$$

имеем

$$\cos u = \cos(\pm v + 2k\pi) = \cos(\pm v) = \cos v.$$

Обратно, если,

$$\cos u = \cos v = m,$$

то

$$u = \pm \arccos m + 2n_1\pi,$$
$$v = \pm \arccos m + 2n_2\pi.$$

Складывая или вычитая (в зависимости от знаков при $\arccos m$ в правых частях), получим:

$$u \pm v = 2(n_1 \pm n_2)\pi = 2n\pi,$$

где $n = n_1 \pm n_2$ — целое число*).

Доказанная теорема применяется, когда уравнение представлено в виде равенства некоторой тригонометрической функции от двух выражений, содержащих неизвестное.

Пусть, например, дано уравнение

$$\sin f(x) = \sin \varphi(x) \tag{3}$$

(вместо синуса можно взять любую другую тригонометрическую функцию). На основании доказанной теоремы равенство (3) равносильно уравнению

$$f(x) = (-1)^n \varphi(x) + n\pi$$

с целочисленным параметром n.

Примеры:

1. Решить уравнение $\cos(ax + b) = \cos(a_1x + b_1)$.

Решение. Имеем:

$$ax + b = \pm(a_1x + b_1) + 2n\pi,$$

откуда:

$$(a \mp a_1)x = -b \pm b_1 + 2n\pi \tag{4}$$

---

*) Теореме можно дать другое доказательство. Так, в случае 1° имеем:

$$\sin u - \sin v = 0 \quad \text{или} \quad 2\sin\frac{u-v}{2}\cos\frac{u+v}{2} = 0,$$

откуда (необходимое и достаточное условие):

$$\sin\frac{u-v}{2} = 0 \quad \text{или} \quad \cos\frac{u+v}{2} = 0$$

и, следовательно,

$$u - v = 2k\pi \quad \text{или} \quad u + v = (2k+1)\pi,$$

откуда, объединив формулы в одну, придем к тому же окончательному результату.

(знаки берутся либо верхние, либо нижние).
Если $|a| \neq |a_1|$, то

$$x = \frac{1}{a \pm a_1} (-b \mp b_1 + 2n\pi).$$

Теперь рассмотрим случай, когда $|a| = |a_1|$.
Пусть, например, $a = a_1$, тогда, взяв в левой части равенства (4) знак $+$ перед a_1, получим:

$$x = \frac{1}{2a} (-b - b_1 + 2n\pi).$$

Если взять верхние знаки, то получим:

$$0 = -b + b_1 + 2n\pi.$$

Последнее соотношение противоречиво и не дает решений, если разность $b_1 - b$ не равна целому числу периодов; если же $b_1 = b + 2n\pi$, то при $a = a_1$ данное уравнение удовлетворяется тождественно:

$$\cos(ax + b) = \cos(ax + b + 2n\pi).$$

Пусть, например, дано уравнение

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right),$$

имеем:

$$2x + \frac{\pi}{6} = \pm 2x \pm \frac{\pi}{3} + 2n\pi;$$

выбор верхних знаков дает противоречивое соотношение:

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2n\pi.$$

Выбор нижних знаков дает решения:

$$2x + \frac{\pi}{6} = -2x - \frac{\pi}{3} + 2n\pi,$$

откуда:

$$4x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi \quad \text{и} \quad x = -\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{2}.$$

2. Решить уравнение $\sin x = \cos x$.

Решение. Имеем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x,$$

откуда:

$$\frac{\pi}{2} - x = \pm x + 2n\pi; \qquad (5)$$

выбрав в правой части знак $+$, получим:

$$2x = \frac{\pi}{2} - 2n\pi,$$

откуда $x = \frac{\pi}{4} - n\pi$. Заметив, что коэффициент $-n$ можно заменить на n (ибо $-n$, равно как и n, может иметь произвольные целые значения), получим серию решений:

$$x=\frac{\pi}{4}+n\pi.$$

Выбор знака минус в правой части (5) приводит к противоречивому соотношению.

3. Решить уравнение

$$\sin 3x+\sin 12^\circ=0.$$

Решение:

$$\sin 3x=-\sin 12^\circ$$

или

$$\sin 3x=\sin(-12^\circ),$$

откуда:

$$3x=(-1)^n(-12^\circ)+180^\circ n$$

и, следовательно,

$$x=(-1)^{n+1}4^\circ+60^\circ n.$$

4. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} 5x=-\operatorname{tg} 2x.$$

Решение. Имеем $\operatorname{tg} 5x=\operatorname{tg}(-2x)$, следовательно:

$$5x=-2x+n\pi,$$

откуда:

$$7x=n\pi \quad \text{и} \quad x=n\frac{\pi}{7} \text{ *)}.$$

§ 20. Рационализирующие подстановки.

Рассмотрим уравнение, в котором неизвестное x содержится под знаком лишь одной тригонометрической функции. Возьмем, например, уравнение

$$f(\sin x)=0. \tag{1}$$

Введем новое неизвестное $\sin x=y$, тогда получим:

$$f(y)=0, \tag{2}$$

где допустимыми для неизвестного y следует считать значения, не превосходящие по абсолютной величине 1.

Если y_1, y_2 ... суть решения уравнения (2), то задача сводится к решению ряда простейших уравнений:

$$\sin x=y_1,\ \sin x=y_2,\ \ldots$$

Рассмотрим уравнение

$$2\cos^2 x-7\cos x+3=0.$$

*) Указанным в настоящем параграфе способом могут быть решены примеры 4, 18, 19, 55, 57 § 14 задачника Рыбкина.

Решение. Положив $\cos x = y$, получим квадратное уравнение:

$$2y^2 - 7y + 3 = 0 \qquad (3)$$

при допустимых значениях $|y| \leqslant 1$. В поле действительных чисел получим два решения уравнения (3):

$$y_1 = \frac{1}{2}, \; y_2 = 3.$$

Число 3 не принадлежит множеству допустимых значений неизвестного и подлежит исключению. Итак, приходим к простейшему уравнению $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда:

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}(6k \pm 1).$$

Если уравнение содержит различные тригонометрические функции от неизвестного, то можно все эти функции выразить через одну и свести задачу к решению уравнения вида (2). Однако выражения тригонометрических функций друг через друга содержат радикалы, и освобождение от них полученного уравнения может внести посторонние решения.

Рассмотрим уравнение

$$\sin x + \cos x = 1. \qquad (4)$$

Решение. Имеем:

$$\cos x = \pm\sqrt{1 - \sin^2 x}.$$

Положив $\sin x = y$, получим иррациональное уравнение:

$$y \pm \sqrt{1 - y^2} = 1. \qquad (5)$$

Освободив уравнение от радикала, получим:

$$2y^2 - 2y = 0,$$

откуда:

$$y_1 = 0, \; y_2 = 1.$$

Значение $y_1 = \sin x = 0$ удовлетворяет уравнению (4) при $\cos x = 1$. Следовательно, решению $y_1 = 0$ соответствует положительное значение радикала. Решения уравнения (4), соответствующие корню $y_1 = 0$, суть:

$$x = 2k\pi,$$

так как из общей формулы $x = n\pi$ следует исключить нечетные значения n, дающие для косинуса значение, равное -1.

Значение $y_2 = 1$ удовлетворяет уравнению (5), откуда находим $\sin x = 1$ или

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{2} + n\pi = \frac{\pi}{2}[2n + (-1)^n].$$

Заметим, что $2n + (-1)^n = 4k + 1$, будет ли n четным числом $n = 2k$ или нечетным $n = 2k + 1$, а потому:

$$x = \frac{\pi}{2}(4k + 1) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Итак, имеем две серии решений:

$$x = 2k\pi \text{ и } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

Мы будем изучать уравнения, являющиеся **рациональными** относительно входящих в них тригонометрических функций от искомого неизвестного. Предположим, что удалось выразить все функции, входящие в уравнение, через одну, причем так, что получалось уравнение рациональное относительно этой функции, которую и примем за новое неизвестное. Эта подстановка приведет к рациональному уравнению относительно нового неизвестного, а потому и называется **рационализирующей подстановкой**.

Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x = 4.$$

Решение. Имеем

$$\operatorname{tg} x + 3 \operatorname{ctg} x - 4 = 0.$$

Умножив обе части на $\operatorname{tg} x$, получим:

$$\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 3 = 0.$$

(Заметим, что значение $\operatorname{tg} x = 0$ не удовлетворяет последнему уравнению.)

Подстановка $z = \operatorname{tg} x$ является рационализирующей. Из уравнения

$$z^2 - 4z + 3 = 0$$

найдем $z_1 = 1$ и $z_2 = 3$, откуда:

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad \text{и} \quad x = \operatorname{arc\,tg} 3 + k\pi.$$

Рассмотрим уравнение вида:

$$f(\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x) = 0,$$

где левая часть есть рациональное выражение относительно $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ (в частности, некоторые из тригонометрических функций могут и не входить в уравнение).

Известно, что тригонометрические функции рационально выражаются через тангенс половинного аргумента:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \quad \text{и т. д.,}$$

а потому, приняв за новое неизвестное $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, мы получим рациональное уравнение относительно t. Подстановка $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ называется универсальной, так как она всегда в рассматриваемом случае приводит к рациональному алгебраическому уравнению с одним неизвестным. Так как $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ теряет смысл, если $x = (2k+1)\pi$, то универсальной подстановкой можно найти все решения уравнения, кроме решений вида $x = (2k+1)\pi$ (если последние существуют). Для примера рассмотрим уравнение

$$a \sin x + b \cos x + c = 0$$

(где $a \neq 0$ и $b \neq 0$).

Положив $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, получим:

$$\frac{2at + b(1 - t^2) + c(1 + t^2)}{1 + t^2} = 0.$$

Сократив на $\frac{1}{1 + t^2}$, получим квадратное уравнение:

$$t^2(c - b) + 2at + b + c = 0. \qquad (6)$$

Числа вида $x = (2k+1)\pi$ удовлетворяют данному уравнению, если

$$-b + c = 0,$$

поэтому исследованию подлежат два случая:

1°. $b \neq c$. В этом случае квадратное уравнение (6) в поле комплексных чисел имеет два решения:

$$t = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}}{c - b}.$$

Если $a^2+b^2 \geqslant c^2$, то квадратное уравнение имеет действительные корни, и мы получим общее решение данного уравнения:

$$x = 2\operatorname{arc\,tg} \frac{-a \pm \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{c-b} + 2k\pi. \qquad (7)$$

Если $c^2 > a^2+b^2$, то исходное уравнение не имеет решений, так как корни уравнения (6) мнимые.

2°. $b=c$. В этом случае данное уравнение имеет решения вида $x=(2k+1)\pi$. Уравнение (6) обращается в уравнение 1-й степени, из которого находим вторую серию решений:

$$x = 2\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{b+c}{2a}\right) + 2k\pi.$$

Примеры:

1) Универсальная подстановка преобразует уравнение

$$\sin x + \cos x = 1 \quad \text{в } 2t^2 - 2t = 0.$$

Откуда $t_1 = 0$ и $t_2 = 1$ и, следовательно,

$$x = 2k\pi \text{ и } x = 2\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi.$$

2) Решить уравнение:

$$\cos(\pi \sin x) = \sin(\pi \cos x).$$

Имеем:

$$\cos(\pi \sin x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi \cos x\right),$$

откуда:

$$\frac{\pi}{2} - \pi \cos x = \pm \pi \sin x + 2k\pi$$

или

$$\pm 2 \sin x + 2 \cos x = 1 - 4k.$$

Получилось уравнение вида

$$a \sin x + b \cos x + c = 0,$$

где

$$a = \pm 2, \; b = 2, \; c = 4k - 1.$$

Равенство $b=c$, т. е. $2 = 4k - 1$ не выполняется ни при каком значении k.

Общее решение данного уравнения находится по формуле (7):

$$x = 2\operatorname{arc\,tg} \frac{\pm 2 \pm \sqrt{7+8k-16k^2}}{4k-3} + 2n\pi,$$

где k — любое целое число, удовлетворяющее условию:

$$7 + 8k - 16k^2 \geqslant 0,$$

а n — произвольное целое число. Следовательно, допустимые значения k суть целые числа, содержащиеся между корнями квадратного уравнения:

$$16k^2-8k-7=0.$$

Корни последнего уравнения суть $k_1\approx-0{,}45$ и $k_2\approx0{,}95$, следовательно, $k_1=0$ есть единственное допустимое значение k, откуда:

$$x=2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\pm2\pm\sqrt{7}}{3}\right)+2n\pi \text{ и}$$

$$x=2\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\pm2\pm\sqrt{7}}{3}\right)+2n\pi.$$

Универсальная подстановка обычно сопряжена с громоздкими вычислениями, поэтому стараются, если возможно, отыскать более простую рационализирующую подстановку*).

Если левая часть уравнения

$$f(\sin x, \cos x)=0$$

есть рациональное выражение относительно $\sin x$ и $\cos x$ и содержит функцию $\sin x$ (или $\cos x$) только в четных степенях, то можно положить $t=\cos x$ (или соответственно $t=\sin x$), ибо четные степени синуса (или косинуса) рационально выражаются через косинус (или синус):

$$\sin^{2k}x=(1-\cos^2 x)^k=(1-t^2)^k.$$

Примеры:

1. Решить уравнение

$$3-7\cos^2 x\sin x-3\sin^3 x=0.$$

Решение. Положим $\sin x=t$ и заменим $\cos^2 x$ на $1-t^2$, тогда получим кубическое уравнение:

$$4t^3-7t+3=0.$$

Последнее уравнение имеет три действительных корня:

$$t_1=1,\ t_2=\frac{1}{2} \text{ и } t_3=-\frac{3}{2},$$

откуда:

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi \text{ и } x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}=1+\sin 2x.$$

Решение. В данном случае для рационализации достаточно положить $\operatorname{tg}x=t$, так как

$$\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$$

*) Универсальная подстановка может быть применена к примерам 30, 31, 32, 33 задачника Рыбкина.

рационально выражается через t. Имеем:

$$\frac{1+t}{1-t}=1+\frac{2t}{1+t^2},$$

откуда:

$$2(1+t)t^2=0.$$

Из последнего уравнения находим два различных решения:

$$t=-1 \quad \text{и} \quad t=0,$$

откуда:

$$x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \quad \text{и} \quad x=k\pi.$$

3. Решить уравнение

$$5\cos 2x=4\sin x.$$

Решение. Так как $\cos 2x$ выражается рационально через $\sin x$:

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=1-2\sin^2 x,$$

то для рационализации достаточно положить $t=\sin x$, тогда получим:

$$5-10t^2=4t$$

или

$$10t^2+4t-5=0,$$

откуда:

$$t=\frac{-2\pm\sqrt{4+50}}{10}=\sin x$$

и

$$x=(-1)^n \arcsin\frac{-2\pm\sqrt{54}}{10}+n\pi.$$

Рассмотрим уравнение вида

$$f(\sin x, \cos x)=0,$$

в котором левая часть есть однородный многочлен (т. е. многочлен, все члены которого имеют одинаковую степень) относительно $\sin x$ и $\cos x$. При решении однородных уравнений применяется подстановка $\operatorname{tg} x=t$. Рассмотрим, например, однородное уравнение 3-й степени:

$$\sin^3 x-\sin^2 x\cos x-3\sin x\cos^2 x+3\cos^3 x=0.$$

Заметим, что при $\cos x=0$ уравнение не удовлетворяется*). Разделив обе части на $\cos^3 x$, получим:

$$\operatorname{tg}^3 x-\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x+3=0.$$

Положив $\operatorname{tg} x=t$, получим кубическое уравнение:

$$t^3-t^2-3t+3=0,$$

*) Если положить $\cos x=0$, то получим $\sin^3 x=0$, и, следовательно, $\sin x=0$, но равенства $\sin x=\cos x=0$ не могут выполняться ни при каком значении x. Если бы в уравнении не содержался член с $\sin^3 x$, то можно было бы предварительно вынести общий множитель, равный $\cos x$, и приравнять его отдельно нулю.

имеющее корни
$$t=1 \text{ и } t=\pm\sqrt{3},$$
откуда:
$$x=\frac{\pi}{4}+k\pi \text{ и } x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi^{*}).$$

Ниже даны примеры уравнений, приводящихся к однородным:

1° $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=d.$

Достаточно правую часть заменить на $d(\sin^2 x+\cos^2 x)$, чтобы получить однородное уравнение 2-й степени.

2° $a\sin^4 x+b\sin^3 x\cos x+c\cos^3 x\sin x=d.$

Достаточно правую часть заменить на $d(\sin^2 x+\cos^2 x)^2$, чтобы получить однородное уравнение 4-й степени.

3° $a\sin^2 x+b\sin 2x+c\cos 2x+d\cos^2 x=e.$

Достаточно преобразовать $\sin 2x$ и $\cos 2x$ по формулам двойного аргумента и заменить e на $e(\sin^2 x+\cos^2 x)$, чтобы получить однородное уравнение 2-й степени.

§ 21. Различные частные приемы решения тригонометрических уравнений.

Нередко можно (перенеся предварительно все члены в левую часть) разложить левую часть уравнения на множители. В этом случае уравнение распадается на несколько уравнений, получающихся поочередным приравниванием нулю сомножителей. В большинстве случаев разложение на множители левой части достигается применением формул приведения к логарифмическому виду.

Пример 1.

Решить уравнение
$$\sin kx=\sin lx$$
(где $|k|\neq|l|$).

Решение. Имеем:
$$\sin kx-\sin lx=0,$$
откуда:
$$2\sin\frac{k-l}{2}x\cdot\cos\frac{k+l}{2}x=0.$$

*) Различные рационализирующие подстановки могут быть применены к решению, например, следующих номеров § 14 задачника Рыбкина: 3, 16, 24, 34, 42, 46, 48, 49, 50, 59.

Следовательно, получим два уравнения:

$$\sin\frac{k-l}{2}x=0 \quad \text{и} \quad \cos\frac{k+l}{2}x=0.$$

Из первого найдем

$$\frac{k-l}{2}x=n\pi,$$

и, следовательно,

$$x=\frac{2n\pi}{k-l}. \tag{1}$$

Из второго найдем

$$\frac{k+l}{2}x=\frac{\pi}{2}+n\pi,$$

и, следовательно,

$$x=\frac{(2n+1)\pi}{k+l}. \tag{2}$$

Мы получили две серии решений. Это же уравнение можно решать другим способом, рассмотренным в § 19, согласно которому имеем:

$$kx=(-1)^n lx+n\pi,$$

откуда:

$$x=\frac{n\pi}{k-(-1)^n l}. \tag{3}$$

Обе серии решений (1) и (2) содержатся в (3). В самом деле, если в (3) взять n четное, то получим значение x, содержащееся в (1); если взять n нечетное, то для x получим значение, содержащееся в (2). Этот пример показывает, что общее решение тригонометрического уравнения может оказаться представленным в различной форме в зависимости от метода, применявшегося при решении.

Пример 2.

Решить уравнение

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x.$$

Решение. Преобразуем левую часть:

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=(\sin x+\sin 3x)+\sin 2x=$$
$$=2\sin 2x\cos x+\sin 2x=\sin 2x(2\cos x+1)=$$
$$=2\sin x\cos x(2\cos x+1).$$

Преобразуем правую часть:

$$1+\cos x+\cos 2x=(1+\cos 2x)+\cos x=$$
$$=2\cos^2 x+\cos x=\cos x(2\cos x+1).$$

После переноса всех членов в левую часть, перепишем данное уравнение в виде

$$(2\cos x+1)\cos x(2\sin x-1)=0.$$

Приравняв поочередно нулю три сомножителя, получим:

$$x=\pm\frac{2}{3}\pi+2k\pi,$$

$$x=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

и

$$x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi^{*)}.$$

В некоторых случаях бывает целесообразно выполнить преобразование произведения тригонометрических функций в сумму. Это преобразование осуществляется посредством формул:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}, \quad (4)$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}, \quad (5)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}. \quad (6)$$

Пример 3.

Решить уравнение

$$\sin x+2\sin x\cos(a-x)-\sin a=0.$$

Решение. Преобразуем в сумму средний член по формуле (6).

Уравнение принимает вид:

$$\sin x+\sin(2x-a)=0,$$

или

$$\sin(2x-a)=\sin(-x),$$

откуда:

$$2x-a=(-1)^{n+1}x+n\pi$$

и

$$x=\frac{a+n\pi}{2+(-1)^n}{}^{**)}.$$

---

*) Способ разложения на множители широко применяется на практике при решении уравнений различной степени трудности. Так, например, этот способ может быть применен при решении следующих номеров задачника Рыбкина: 6, 19, 20, 26, 40, 51, 52, 54.

**) Этим приемом легко решаются примеры 41 и 63 задачника Рыбкина.

Приведем пример, когда удобно представить уравнение в виде пропорции, а затем образовать производную пропорцию и применить формулы приведения к логарифмическому виду.

Пример 4.

Решить уравнение

$$a\sin(x+\alpha)+b\sin(x+\beta)=0,$$

где $a\neq 0$ и $b\neq 0$, а значения α и β взяты на сегменте от 0 до 2π и $\alpha\neq\beta$.

Решение. Имеем:

$$\frac{\sin(x+\alpha)}{\sin(x+\beta)}=-\frac{b}{a}.$$

Если $a\neq -b$, то образуем производную пропорцию

$$\frac{\sin(x+\alpha)+\sin(x+\beta)}{\sin(x+\alpha)-\sin(x+\beta)}=-\frac{a-b}{a+b}$$

Приведя числитель и знаменатель к логарифмическому виду, получим:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(x+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}=\frac{b-a}{a+b} \tag{7}$$

при условии $\frac{\alpha-\beta}{2}\neq\frac{\pi}{2}$, т. е. $\alpha\neq\pi+\beta$.

Из (7) найдем:

$$\operatorname{tg}\left(x+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=\frac{b-a}{a+b}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

и

$$x=-\frac{\alpha+\beta}{2}+\operatorname{arctg}\left(\frac{b-a}{a+b}\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+k\pi.$$

Если $a=-b$, то уравнение решается непосредственным приведением левой части к логарифмическому виду, и в составлении производной пропорции нет надобности.

Если $\alpha=\beta+\pi$, то уравнение примет вид:

$$a\sin(x+\alpha)-b\sin(x+\alpha)=0,$$

откуда при $a\neq b$ имеем $\sin(x+\alpha)=0$ и $x=-\alpha+k\pi$.

При $a=b$ уравнение удовлетворяется всеми значениями x*).

*) Составлением производной пропорции легко решается пример 43 задачника Рыбкина.

На двух следующих примерах показан способ решения уравнения посредством введения вспомогательного угла.

Пример 5.

Решить уравнение

$$a \sin x + b \cos x = c$$

(где $a \neq 0$ и $b \neq 0$).

Решение. Введем вспомогательный угол, который определим из условия

$$\frac{b}{\sin \varphi} = \frac{a}{\cos \varphi}.$$

Имеем

$$\sin \varphi = \frac{b}{\pm \sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{a}{\pm \sqrt{a^2+b^2}}.$$

Выбрав надлежащим образом знак перед радикалом, можем считать угол φ заключенным в интервале $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ (достаточно выбрать знак при условии $\cos \varphi = \frac{a}{\pm \sqrt{a^2+b^2}} > 0$). Тогда будем иметь

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \quad \text{и} \quad \varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}.$$

Разделив обе части уравнения на $\pm \sqrt{a^2+b^2}$ (знак выбирается надлежащим образом), плучим:

$$\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \frac{c}{\pm \sqrt{a^2+b^2}},$$

или

$$\sin (x + \varphi) = \frac{c}{\pm \sqrt{a^2+b^2}} \tag{8}$$

и, наконец,

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{c}{\pm \sqrt{a^2+b^2}} + n\pi - \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{a}$$

Исходное уравнение эквивалентно (8), а потому имеет решения, если

$$\left| \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right| \leqslant 1,$$

или $c^2 \leqslant a^2 + b^2$. Если $c^2 > a^2 + b^2$, то уравнение не имеет решений.

Рассмотрим, например, уравнение

$$\sqrt{3}\cos x+\sin x=1.$$

Разделив обе части на 2 и положив $\varphi=\frac{\pi}{3}$, получим $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, откуда:

$$x=(-1)^n\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{3}+n\pi.$$

Пример 6.

Решить уравнение

$$a\cos x+b\sin x=a\cos mx+b\sin mx.$$

Решение. Введем вспомогательный угол $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}$, получим:

$$\cos(x-\varphi)=\cos(mx-\varphi).$$

откуда:

$$mx-\varphi=\pm x\mp\varphi+2k\pi.$$

Следовательно:

$$x=\frac{2}{m+1}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a}+k\pi\right) \text{ и } x=\frac{2k\pi}{m-1}.$$

При условии, что $m\neq\pm1$. Если $m=1$, то уравнение удовлетворяется тождественно. Если $m=-1$, то уравнение примет вид $b\sin x=-b\sin x$. Откуда при $b\neq0$ получим $\sin x=0$ и $x=k\pi$*).

Никакими общими правилами невозможно предусмотреть различных искусственных приемов, вносящих упрощения в процесс решения тригонометрических уравнений. Умение применять эти приемы приобретается практикой.

Пример 7.

Решить уравнение

$$\sin^4 x+\cos^4 x+\sin 2x+a=0.$$

---

*) Способ введения вспомогательного угла может быть применен к решению примеров 28, 30, 32, 33, 47, 53 задачника Рыбкина.

Решение. Выделим полный квадрат из первых двух членов:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = \\ = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x.$$

Данное уравнение примет вид:

$$\sin^2 2x - 2\sin 2x - 2(1 + a) = 0.$$

Положив $t = \sin 2x$, получим квадратное уравнение:

$$t^2 - 2t - 2(a + 1) = 0,$$

имеющее в поле комплексных чисел решения:

$$t = 1 \pm \sqrt{2a + 3}.$$

Найденные значения t действительны, если $2a + 3 \geqslant 0$, откуда $a \geqslant -\frac{3}{2}$. Допустимые значения t определяются условием $|t| \leqslant 1$. Взяв знак $+$ перед радикалом получим:

$$1 + \sqrt{2a + 3} \geqslant 1,$$

равенство имеет место лишь при условии $a = -\frac{3}{2}$.

Рассмотрим другой корень:

$$t = 1 - \sqrt{2a + 3}.$$

Условие $|t| \leqslant 1$ выполняется, если

$$-1 \leqslant 1 - \sqrt{2a + 3} \leqslant 1,$$

откуда:

$$-2 \leqslant -\sqrt{2a + 3} \leqslant 0,$$

или

$$0 \leqslant \sqrt{2a + 3} \leqslant 2.$$

Возведя почленно в квадрат, получим:

$$0 \leqslant 2a + 3 \leqslant 4, \text{ откуда } -\frac{3}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}.$$

Следовательно, данное уравнение имеет решения при любом значении a, удовлетворяющем условию $-\frac{3}{2} \leqslant a \leqslant \frac{1}{2}$:

$$x = (-1)^n \arcsin(1 - \sqrt{2a + 3}) + n\pi.$$

Пример 8. Решить уравнение
$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1.$$

Решение. Положим
$$\sin x + \cos x = t;$$
имеем:
$$t^2 = 1 + 2 \sin x \cos x,$$
откуда:
$$\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

Данное уравнение примет вид:
$$t^2 + 2t - 3 = 0,$$
откуда: $t = 1$ и $t = -3$.

Следовательно, получим два уравнения:
$$\sin x + \cos x = 1 \text{ и } \sin x + \cos x = -3.$$

Первое уравнение было уже решено выше. Второе уравнение не имеет решений, так как каждое из слагаемых в левой части по абсолютной величине не превосходит 1 и в сумме не может получиться число -3.

§ 22. Особые случаи решения уравнений.

Рассмотрим уравнение
$$\frac{\sin mx}{\sin x} - \frac{\cos mx}{\cos x} = 0$$
(где $m \neq 1$).

Приведя к общему знаменателю и выполнив несложные преобразования, получим:
$$\frac{2 \sin (m-1) x}{\sin 2x} = 0.$$

Дробь равна нулю, если ее числитель равен нулю, следовательно,
$$\sin (m-1) x = 0,$$
откуда: $x = \frac{k\pi}{m-1}$.

Однако при найденных значениях x, обращающих в нуль числитель, может обратиться в нуль знаменатель, и тогда левая часть потеряет смысл. Следовательно, из множества найденных значений придется исключить те значения, которые обращают в нуль знаменатель, т. е. значения вида $\frac{l\pi}{2}$, где l — любое целое число. Но $\frac{k\pi}{m-1}=\frac{l\pi}{2}$, если $\frac{2k}{m-1}$ есть целое число. Так, если $m=2$, то $\frac{2k}{m-1}$ всегда целое число, а потому все полученные значения исключаются. Если, например, $m=4$, то $\frac{2k}{3}$ есть целое число, если k кратное числа 3, эти значения для k придется исключить. Если $m=\sqrt{2}$, то $\frac{2k}{\sqrt{2}-1}$ не есть целое число ни при каком k, а потому все найденные значения удовлетворяют уравнению. Таким образом, *приравняв нулю числитель или отдельные сомножители левой части уравнения $f(x)=0$, можно получить значения, при которых левая часть теряет смысл, эти значения следует исключать из рассмотрения.*

Рассмотрим уравнение

$$f(x)=\varphi(x), \tag{1}$$

в котором правая и левая части заданы при помощи некоторых аналитических выражений. Пусть при значении $x=a$ хотя бы одно из выражений $f(x)$ или $\varphi(x)$ утрачивает смысл. Если основываться непосредственно на определении корня уравнения как такого значения аргумента, при котором значения функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ равны, то число a нельзя считать принадлежащим множеству допустимых значений неизвестного, а значит нельзя его считать корнем уравнения. Однако в некоторых „особых" случаях оказывается целесообразным расширить понятие корня уравнения.

Примем следующее дополнительное определение корня в особом случае.

Определение. *Если в точке a хотя бы одно из выражений $f(x)$ и $\varphi(x)$ теряет смысл и если предел разности $f(x)-\varphi(x)$ в точке a равен нулю:*

$$\lim_{x\to a}[f(x)-\varphi(x)]=0,$$

то условимся число считать корнем уравнения (1).

Это определение связано с принципом продолжения функции по непрерывности, согласно которому значение функции $f(x)-\varphi(x)$ в точке a (не принадлежащей области определения) следует считать равным нулю, если ее предел в этой точке равен нулю.

Примечание. Следует иметь в виду, что связанное с особыми случаями решения уравнений наивное протаскивание (характерное для старых учебников) всякого рода „раскрытия неопределенностей", „бесконечных корней" и т. п. как чего-то очевидного само по себе есть глубоко ошибочная, антинаучная точка зрения. В элементарном изложении учения об уравнениях возможно одно из двух: либо, оставаясь на базе первоначального определения, под корнем уравнения подразумевать лишь его корень в первоначальном „узком смысле" и отказаться тем самым от рассмотрения особых случаев; либо расширить понятие корня (в особых случаях) посредством точно сформулированного дополнительного определения.

Пример: Решить уравнение:

$$\frac{1-\cos 2x}{2\sin x}=\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}. \qquad (2)$$

Решение. После формальных преобразований получим:

$$\sin 2x\cdot\sin x\cdot(\cos x-1)=0, \qquad (3)$$

откуда:

$$x=n\frac{\pi}{2}, \quad x=n\pi \quad \text{и} \quad x=2n\pi.$$

Две последние формулы решений содержатся в первой, поэтому формула $x=n\frac{\pi}{2}$ дает общее решение уравнения (2). Переход от уравнения (2) к уравнению (3) был совершен посредством умножения обеих частей на произведение знаменателей, поэтому возможно появление посторонних решений. Подстановка $x=n\frac{\pi}{2}$ в уравнение (2) показывает, что здесь имеет место особый случай. Именно, при четном $n=2k$ теряет смысл левая часть, а при нечетном $n=2k+1$ — правая.

Имеем $\left(\text{при } x\neq n\frac{\pi}{2}\right)$:

$$f(x)-\varphi(x)=\frac{1-\cos 2x}{2\sin x}-\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}=\sin x-\operatorname{tg} x.$$

При нечетном n получим:

$$\lim_{x\to\frac{2k+1}{2}\pi}|f(x)-\varphi(x)|=\lim|\sin x-\operatorname{tg} x|=\infty.$$

Следовательно, числа $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ не являются корнями уравнения.

При четном n имеем:

$$\lim_{x\to k\pi}(\sin x-\operatorname{tg} x)=0.$$

Следовательно, числа $x=k\pi$ не являются корнями в первоначальном „узком" смысле. Однако, приняв дополнительное определение, мы должны считать эти числа корнями уравнения (2).

Примечание. В курсе средней школы особые случаи решения уравнений не рассматриваются, так как учащиеся не располагают необходимыми сведениями из теории пределов. Поэтому при решении рассмотренного уравнения в школе следует считать, что это уравнение не имеет корней.

Глава VII.

УРАВНЕНИЯ, СОДЕРЖАЩИЕ НЕИЗВЕСТНОЕ ПОД ЗНАКОМ АРКФУНКЦИЙ.

§ 23. Простейшие уравнения.

Простейшими уравнениями мы будем называть уравнения вида:

$$\arcsin x = m, \quad \arccos x = m,$$
$$\operatorname{arc\,tg} x = m, \quad \operatorname{arc\,ctg} x = m,$$

в которых требуется найти неизвестное по заданному значению одной из аркфункций. Рассмотрим подробнее одно из этих уравнений. Возьмем, например, первое уравнение

$$\arcsin x = m.$$

Это уравнение не всегда имеет решение. В самом деле, значения функции $\arcsin x$ заключены на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а поэтому данное уравнение может иметь решение только в том случае, если выполнено неравенство $|m| \leqslant \frac{\pi}{2}$. При соблюдении этого условия получаем единственное решение уравнения:

$$x = \sin m.$$

Аналогично рассматриваются прочие простейшие уравнения.

Уравнение

$$\arccos x = m$$

имеет единственное решение:

$$x = \cos m$$

при условии $0 \leqslant m \leqslant \pi$ и не имеет решений, если m не принадлежит сегменту $[0, \pi]$.

Уравнение

$$\operatorname{arc\,tg} x = m$$

имеет единственное решение:

$$x = \operatorname{tg} m$$

при условии, если m принадлежит интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Уравнение

$$\operatorname{arc\,ctg} x = m$$

имеет единственное решение:

$$x = \operatorname{ctg} m,$$

если m принадлежит интервалу $(0, \pi)$. Непосредственно приводятся к простейшим уравнения линейные относительно аркфункции, под знаком которой содержится неизвестное. В качестве примера рассмотрим уравнение

$$A \arcsin x + B = 0.$$

Решив это уравнение относительно $\arcsin x$, получим

$$\arcsin x = -\frac{B}{A},$$

или, положив

$$-\frac{B}{A} = m,$$

придем к простейшему уравнению:

$$\arcsin x = m.$$

Не представляет затруднений рассмотрение уравнений, в которых под знаком аркфункций содержится какая-либо функция от неизвестного. Так, например, уравнение

$$\arcsin f(x) = m,$$

где

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant m \leqslant \frac{\pi}{2},$$

равносильно уравнению

$$f(x) = \sin m,$$

не содержащему аркфункций.

Примеры:

1) $6 \arcsin x - \pi = 0.$

Решение. $x = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

2) $2 \arcsin x - 8 = 0$.

Так как $4 > \frac{\pi}{2}$, то уравнение не имеет решений.

3) Решить уравнение

$$3 \arcsin \sqrt{x} - \pi = 0.$$

Решение.

$$\arcsin\sqrt{x} = \frac{\pi}{3}, \quad \sqrt{x} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

откуда:

$$x = \frac{3}{4}.$$

4) Решить уравнение

$$4 \operatorname{arc\,tg}(x^2 - 3x + 3) - \pi = 0.$$

Решение.

$$\operatorname{arc\,tg}(x^2 - 3x + 3) = \frac{\pi}{4}; \quad x^2 - 3x + 3 = 1,$$

откуда:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2.$$

Рассмотрим уравнение, в котором неизвестное содержится под знаком лишь одной аркфункции. Возьмем, например, уравнение:

$$f(\arcsin x) = 0.$$

Введем новое неизвестное $y = \arcsin x$, тогда получим:

$$f(y) = 0.$$

Пусть y_1; y_2; ... — корни уравнения $f(y) = 0$, тогда корни уравнения $f(\arcsin x) = 0$ находятся путем решения простейших уравнений:

$$\arcsin x = y_1; \quad \arcsin x = y_2; \ \ldots$$

Решим, например, уравнение

$$2 \arcsin^2 x - 5 \arcsin x + 2 = 0.$$

Корни квадратного уравнения

$$2y^2 - 5y + 2 = 0$$

суть

$$y_1 = 2 \quad \text{и} \quad y_2 = \frac{1}{2}.$$

Из двух простейших уравнений

$$\arcsin x = 2 \quad \text{и} \quad \arcsin x = \frac{1}{2}$$

только второе дает решение данного уравнения

$$x = \sin \frac{1}{2}.$$

Первое не имеет решений, ибо $2 > \frac{\pi}{2}$.

Уравнение

$$f(\arcsin x, \arccos x) = 0,$$

содержащее неизвестное под знаками арксинуса и арккосинуса, приводится к уравнению рассмотренного типа. В самом деле, воспользовавшись тождеством

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

можно выразить одну из аркфункций через другую и, подставив в данное уравнение, получить уравнение, содержащее лишь одну аркфункцию. Это же замечание относится к уравнениям вида

$$f(\operatorname{arc\,tg} x, \operatorname{arc\,ctg} x) = 0.$$

Рассмотрим, например, уравнение

$$m \arcsin x + n \arccos x = p \qquad (\text{где } m \neq n),$$

заменив в этом уравнении $\arccos x$ через $\frac{\pi}{2} - \arcsin x$, получим

$$m \arcsin x + n\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = p,$$

или

$$(m - n) \arcsin x = p - n\frac{\pi}{2},$$

откуда:

$$\arcsin x = \frac{2p - n\pi}{2(m - n)}.$$

Уравнение имеет решение только при выполнении условия

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{2p - n\pi}{2(m - n)} \leqslant \frac{\pi}{2};$$

при указанном условии получим

$$x = \sin \frac{2p - n\pi}{2(m-n)}.$$

Пример:

$4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - 6 \operatorname{arc} \operatorname{ctg} x = \pi.$

Решение. $4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x - 6 \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x\right) = \pi$; $10 \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = 4\pi$

и

$$x = \operatorname{tg} \frac{2}{5}\pi.$$

§ 24. Уравнения, приводящиеся к алгебраическим.

Основной прием решения уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции, заключается в том, что над обеими частями уравнения производится некоторая тригонометрическая операция. Следует иметь в виду, что выполнение тригонометрической операции над обеими частями уравнения может привести к уравнению, не эквивалентному данному. Возьмем, например, синус от обеих частей уравнения:

$$f(x) = \varphi(x), \tag{1}$$

тогда получим уравнение:

$$\sin f(x) = \sin \varphi(x). \tag{2}$$

К тому же уравнению мы придем, если возьмем синус обеих частей уравнения:

$$f(x) = (-1)^n \varphi(x) + n\pi \tag{3}$$

при любом целом значении n. Поэтому среди решений уравнения (2), кроме корней уравнения (1), содержатся все корни уравнений вида (3) при любом целом n.

Во многих случаях в результате выполнения какой-либо тригонометрической операции над обеими частями уравнения, содержащего аркфункции, получается алгебраическое уравнение. В каждом таком случае корни данного уравнения содержатся среди корней алгебраического уравнения. Следовательно, для решения данного уравнения достаточно найти все решения алгебраического уравнения в поле действительных чисел и подвергнуть их проверке посредством подстановки в исходное уравнение. Проверка корней необходима, так как выполнение тригонометрической операции может внести „посторонние" решения.

Алгебраические функции, получающиеся в результате выполнения тригонометрических операций над аркфункциями, вообще говоря, являются иррациональными (см. гл. III). Следовательно, алгебраические уравнения, получающиеся после выполнения тригонометрических операций над обеими частями данного уравнения, в общем случае будут также иррациональными. Освобождение иррационального уравнения от радикалов также может привести к появлению посторонних решений.

На нижеследующих примерах пояснены различные приемы решения уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции.

1) Решить уравнение:

$$\pi - \arcsin x = \arccos x. \tag{4}$$

Возьмем синус от обеих частей:

$$\sin(\pi - \arcsin x) = \sin(\arccos x),$$

откуда:

$$\sin(\arcsin x) = \sin(\arccos x)$$

или

$$x = \sqrt{1 - x^2}. \tag{5}$$

Возведя в квадрат обе части, получим:

$$2x^2 = 1,$$

откуда:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{и} \quad x = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значение $x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ не есть корень иррационального уравнения (5). Это есть „постороннее“ решение, появившееся в результате возведения в квадрат обеих частей уравнения (5). Значение $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ есть корень иррационального уравнения, но не есть решение данного уравнения (4), так как данное уравнение не имеет решений. В самом деле, предположив противное, мы придем к противоречию с тождеством:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Значение $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ удовлетворяет другому уравнению:

$$\arcsin x = \arccos x.$$

Если взять синус от обеих частей этого последнего уравнения, то получится то же самое иррациональное уравнение.

2) Решить уравнение: $\arcsin mx = \arccos nx$. Для получения алгебраического уравнения, которому должно удовлетворять неизвестное, произведем над обеими частями данного уравнения какую-нибудь тригонометрическую операцию. Поступим, например, так:

$$\sin(\arcsin mx) = \sin(\arccos nx),$$

откуда (на основании формул § 11) получим иррациональное уравнение:

$$mx = \sqrt{1 - n^2x^2}.$$

По возведении обеих частей в квадрат, получим:

$$(m^2 + n^2)x^2 = 1, \quad \text{откуда} \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Исследуем, являются ли найденные значения x решениями данного уравнения. Рассмотрим следующие случаи:

а) $m \geqslant 0$; $n \geqslant 0$, но по крайней мере одно из чисел m или n отлично от нуля. В этом случае уравнению может удовлетворить только положительное значение x, так как при $x \leqslant 0$ дуги $\arcsin mx$ и $\arccos nx$ расположены в различных промежутках:

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin mx \leqslant 0 \quad \text{и} \quad \frac{\pi}{2} \leqslant \arccos nx \leqslant \pi.$$

Поэтому предложенное уравнение не может иметь отрицательных решений. Единственным решением данного уравнения является:

$$x = \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

b) $m \leqslant 0$; $n \leqslant 0$, но по крайней мере одно из чисел m или n отлично от нуля. В этом случае уравнение не может иметь положительных решений, и единственным его решением является:

$$x = -\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

c) $m > 0$; $n < 0$. В этом случае предложенное уравнение не имеет решений, так как аргументы аркфункций mx и nx имеют разные знаки, а поэтому дуги $\arcsin mx$ и $\arccos nx$ расположены в различных промежутках. То же самое можно сказать и в случае $m < 0$; $n > 0$.

d) $m = n = 0$. В этом случае уравнение противоречиво.

3) Решить уравнение:

$$\arcsin 2x + \arcsin x = \frac{\pi}{3}. \qquad (6)$$

Приравняв косинусы обеих частей, получим алгебраическое уравнение:

$$\cos(\arcsin 2x + \arcsin x) = \frac{1}{2},$$

откуда:

$$\sqrt{1-4x^2}\sqrt{1-x^2} - 2x^2 = \frac{1}{2}.$$

Освободив последнее уравнение от радикалов, получим:

$$1 - 5x^2 = \frac{1}{4} + 2x^2.$$

Среди корней этого квадратного уравнения находятся решения уравнения (6). Решив квадратное уравнение, получим:

$$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}.$$

Значение $x = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ не может служить корнем данного уравнения. В самом деле, дуги $\arcsin\left(-\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ и $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\right)$ расположены в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, и поэтому их сумма не может равняться $\frac{\pi}{3}$. Значение $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ является решением данного уравнения. В этом можно убедиться проверкой. В самом деле, подставим в левую часть данного уравнения $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$ и воспользуемся формулой суммы арксинусов:

$$\arcsin\sqrt{\frac{3}{7}} + \arcsin\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}} = \arcsin\sqrt{\frac{3}{7}}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{25}{7}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{7}}\right) = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3};$$

в нашем случае

$$\left(\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}\right)^2<1.$$

Примечание. Мы пришли к алгебраическому уравнению путем взятия косинуса от обеих частей; ясно, что можно прийти к алгебраическому уравнению, если выполнить над обеими частями какую-нибудь другую тригонометрическую операцию. Взятие косинуса наиболее удобно (в данном случае), так как получается только одно слагаемое, содержащее радикалы, что позволяет освободить уравнение от иррациональности однократным возведением в квадрат обеих частей.

4) Решить уравнение:

$$\operatorname{arc\,tg}(x+2)-\operatorname{arc\,tg}(x+1)=\frac{\pi}{4}.$$

Взяв тангенс от обеих частей, получим квадратное уравнение

$$x^2+3x+2=0,$$

которое имеет корни

$$x_1=-2 \quad \text{и} \quad x_2=-1.$$

Оба найденные значения удовлетворяют уравнению.

5) Решить уравнение:

$$\arcsin x+\arccos(1-x)=\arcsin(-x). \qquad (7)$$

Данное уравнение равносильно следующему уравнению:

$$2\arcsin x+\arccos(1-x)=0,$$

откуда:

$$2\arcsin x=-\arccos(1-x).$$

Приравняв косинусы обеих частей, получим:

$$\cos(2\arcsin x)=1-x,$$

откуда:

$$2x^2-x=0.$$

Корни полученного уравнения суть $x=0$ и $x=\frac{1}{2}$. Произведя подстановку в данное уравнение, увидим, что ему удовлетворяет только первый корень $x=0$. Второе же значение $x=\frac{1}{2}$ является решением другого уравнения:

$$\arcsin x-\arccos(1-x)=\arcsin(-x). \qquad (8)$$

Уравнение (8) получается из уравнения (7), если заменить

$$\arccos(1-x) \quad \text{на} \quad -\arccos(1-x).$$

6) Решить уравнение:

$$\arcsin\frac{x}{2}+\arccos\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}. \qquad (9)$$

Взяв синус от обеих частей и освободив от радикалов полученное иррациональное уравнение, придем к квадратному уравнению

$$x(x+\sqrt{3})=0,$$

откуда: $x=0$ и $x=-\sqrt{3}$.

Уравнению (9) удовлетворяет только значение $x=0$. Значение $x=-\sqrt{3}$ удовлетворяет другому уравнению:

$$\left(-\pi-\arcsin\frac{x}{2}\right)+\arccos\left(x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}. \qquad (10)$$

Уравнение (10) может быть получено из уравнения (9) заменой

$$\arcsin\frac{x}{2} \quad \text{на} \quad -\pi-\arcsin\frac{x}{2}.$$

Корни уравений (9) и (10) удовлетворяют одному и тому же квадратному уравнению $x(x+\sqrt{3})=0$. Именно, $x=0$ удовлетворяет уравнению (9), но не удовлетворяет уравнению (10), а $x=-\sqrt{3}$ удовлетворяет уравнению (10), но не удовлетворяет уравнению (9).

7) Решить уравнение:

$$\arcsin mx=\operatorname{arctg} nx. \qquad (11)$$

Взяв тангенс от обеих частей, получим:

$$\operatorname{tg}(\arcsin mx)=\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} nx),$$

откуда:

$$\frac{mx}{\sqrt{1-m^2x^2}}=nx.$$

Это уравнение имеет очевидное решение $x=0$. Для отыскания других решений имеем уравнение $m^2n^2x^2=n^2-m^2$, откуда при $m\neq0$ и $n\neq0$ получим:

$$x=\pm\frac{\sqrt{n^2-m^2}}{mn}.$$

Уравнение (11) не имеет других решений, кроме $x=0$ в случаях $|m| \geqslant |n|$, а также если знаки чисел m и n противоположны. Если числа m и n противоположных знаков и $|m| < |n|$, то найденные значения служат корнями уравнения:

$$-\operatorname{arc\,sin} mx = \operatorname{arc\,tg} nx.$$

Последнему уравнению соответствует иррациональное уравнение:

$$-\frac{mx}{\sqrt{1-m^2x^2}} = nx,$$

которое после освобождения от радикалов приведет к тому же квадратному уравнению:

$$m^2n^2x^2 = n^2 - m^2.$$

Если $m=0$, но $n \neq 0$, то уравнение (11) примет вид:

$$\operatorname{arc\,tg} nx = 0,$$

которое имеет единственное решение $x=0$.

Если $n=0$, но $m \neq 0$, то получим единственное решение $x=0$.

Если $m=n=0$, то уравнение удовлетворяется тождественно всеми значениями x.

8) Решить уравнение:

$$2 \operatorname{arc\,sin} x = \operatorname{arc\,cos} 2x; \tag{12}$$

имеем:

$$\cos(2 \operatorname{arc\,sin} x) = \cos(\operatorname{arc\,cos} 2x),$$

откуда:

$$1 - 2x^2 = 2x; \quad 2x^2 + 2x - 1 = 0,$$

следовательно:

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}; \quad x_2 = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}.$$

Так как $|x_2| > 1$, то x_2 не может служить корнем данного уравнения.

Число x_1 является решением уравнения (12), так как дуги $2 \operatorname{arc\,sin} x_1$ и $\operatorname{arc\,cos} 2x_1$ расположены в интервале $(0, \pi)$ и имеют одинаковый косинус $(x_1 > 0)$.

9) Решить уравнение:

$$\operatorname{arc\,sin} \frac{2}{3\sqrt{x}} - \operatorname{arc\,sin} \sqrt{1-x} = \operatorname{arc\,sin} \frac{1}{3}.$$

Приравняв синусы обеих частей, получим:

$$\frac{2}{3} - \sqrt{1 - \frac{4}{9x}} \cdot \sqrt{1-x} = \frac{1}{3}.$$

После освобождения от радикалов и элементарных преобразований будем иметь квадратное уравнение:

$$9x^2 - 12x + 4 = 0.$$

Это уравнение имеет двукратный корень $x = \frac{2}{3}$. Подстановкой легко убедиться, что найденное значение удовлетворяет уравнению. Мы пришли бы к тому же квадратному уравнению, если бы стали рассматривать уравнение:

$$\arcsin \frac{2}{3\sqrt{x}} + \arcsin \sqrt{1-x} = \arcsin \frac{1}{3}.$$

Однако значение $x = \frac{2}{3}$ не удовлетворяет последнему уравнению. В этом случае иррациональное уравнение принимает вид:

$$\frac{2}{3} + \sqrt{1 - \frac{4}{9x}} \cdot \sqrt{1-x} = \frac{1}{3},$$

а это последнее уравнение решений не имеет.

10) Решить уравнение:

$$2 \arccos x = \arcsin (2x\sqrt{1-x^2}).$$

Имеем:

$$\sin (2 \arccos x) = 2x\sqrt{1-x^2};$$
$$2x\sqrt{1-x^2} = 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Мы пришли к тождеству, однако это еще не значит, что данное уравнение удовлетворяется при всех значениях x. В самом деле, при значениях $x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ уравнение не может удовлетвориться, так как при этих значениях:

$$\frac{\pi}{2} < 2 \arccos x \leqslant 2\pi,$$

тогда как $-\frac{\pi}{2} \leqslant \arcsin (2x\sqrt{1-x^2}) \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Уравнение имеет бесконечное множество решений, именно ему удовлетворяет любое значение x на сегменте:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant 1.$$

11) Решить уравнение:

$$\arccos x = \operatorname{arc\,tg} x.$$

Имеем $x = \cos(\operatorname{arc\,tg} x)$; $x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$;

$$x^2(x^2+1) = 1,$$

откуда:

$$x^4 + x^2 - 1 = 0.$$

Последнее уравнение имеет два действительных корня:

$$x_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \quad \text{и} \quad x_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}},$$

из которых данному уравнению удовлетворяет первый.

Отметим следующие простейшие случаи, когда можно получить *квадратное уравнение*, среди корней которого содержатся корни уравнения, содержащего аркфункции:

1) $\arcsin(mx+p) + \arcsin(nx+q) = a.$

Приравняв косинусы обеих частей и освободясь от радикалов, получаем квадратное уравнение:

$$1 - [(nx+q)^2 + (mx+p)^2] = \cos^2 a + \\ + 2\cos a\,(mx+p)(nx+q).$$

2) $\arccos(mx+p) + \arccos(nx+q) = a.$

Поступив подобным же образом, придем к квадратному уравнению:

$$1 - (nx+q)^2 - (mx+p)^2 = \cos^2 a - \\ - 2\cos a\,(mx+p)(nx+q).$$

3) $\operatorname{arc\,tg}(mx+p) + \operatorname{arc\,tg}(nx+q) = a.$

Взяв тангенс от обеих частей, получим:

$$\frac{(mx+p)+(nx+q)}{1-(mx+p)(nx+q)} = \operatorname{tg} a,$$

откуда получим квадратное уравнение:

$$(mx+p) + (nx+q) = \operatorname{tg} a\,[1 - (mx+p)(nx+q)].$$

Пользуясь формулами:

$$\operatorname{arc\,sin} x + \operatorname{arc\,cos} x = \frac{\pi}{2} \text{ и } \operatorname{arc\,tg} x + \operatorname{arc\,ctg} x = \frac{\pi}{2},$$

можно привести к уравнениям рассмотренного вида следующие уравнения:

$$\operatorname{arc\,sin}(mx+p) + \operatorname{arc\,cos}(nx+q) = a;$$
$$\operatorname{arc\,tg}(mx+p) + \operatorname{arc\,ctg}(nx+q) = a.$$

Укажем ряд простейших уравнений, решение которых может быть приведено к решению уравнений высших степеней:

$$n \operatorname{arc\,sin}(ax+b) + m \operatorname{arc\,sin}(cx+d) = e;$$
$$n \operatorname{arc\,sin}(ax+b) + m \operatorname{arc\,cos}(cx+d) = e;$$

. . . .

$$n \operatorname{arc\,sin}(ax+b) + m \operatorname{arc\,sin}(cx+d) + n_1 \operatorname{arc\,cos}(a_1 x + b_1) + m_1 \operatorname{arc\,cos}(c_1 x + d_1) = e \text{ и т. д.},$$

где m и n — целые числа, а a; b; c;... — некоторые данные действительные числа. Рассмотрим более подробно первое из написанных уравнений. Приравняв синусы обеих частей, получим

$$\sin[n \operatorname{arc\,sin}(ax+b) + m \operatorname{arc\,sin}(cx+d)] = \sin e, \quad (13)$$

откуда:

$$\sin[n \operatorname{arc\,sin}(ax+b)] \cdot \cos[m \operatorname{arc\,sin}(cx+d)] + \cos[n \operatorname{arc\,sin}(ax+b)] \cdot \sin[m \operatorname{arc\,sin}(cx+d)] = \sin e.$$

Мы видели в § 12, что каждая из функций

$\sin[n \operatorname{arc\,sin}(ax+b)]$; $\cos[m \operatorname{arc\,cos}(cx+a)]$ и т. д. является алгебраической, а поэтому уравнение (13 является алгебраическим.

Указанным путем можно свести к решению алгебраического уравнения решение любого из уравнений этого же вида, в котором под знаком аркфункций содержатся не *обязательно линейные,* а какие-либо *другие алгебраические функции.*

Глава VIII.

О ВЫПОЛНЕНИИ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЙ НАД ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ.

§ 25. Простейшие случаи выполнения обратных тригонометрических операций над тригонометрическими функциями.

На вопрос, что представляют собой выражения

$\operatorname{arc\,sin}(\sin x)$, $\operatorname{arc\,cos}(\cos x)$, $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$, $\operatorname{arc\,ctg}(\operatorname{ctg} x)$, нередко дается ошибочный ответ.

Иногда говорят, что при всех значениях x имеем

$$\operatorname{arc\,sin}(\sin x)=x.$$

При этом обыкновенно дается такое объяснение: арксинус и синус являются взаимно обратными операциями или это есть дуга, синус которой равен синусу x. В подтверждение этих рассуждений обычно проводится аналогия с тождеством:

$$\sin(\operatorname{arc\,sin} x)=x.$$

Однако надо иметь в виду, что арксинус является обратной функцией относительно функции $y=\sin x$ лишь на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Положим $x=\frac{\pi}{6}$. Дуги $\operatorname{arc\,sin}\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$ и $\frac{\pi}{6}$ имеют одинаковый синус и обе заключены на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Поэтому

$$\operatorname{arc\,sin}\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

Положим $x=\frac{3}{4}\pi$. В этом случае дуга $\frac{3}{4}\pi$ не расположена на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Дуга $\pi-\frac{3}{4}\pi$ расположена на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и имеет тот же синус, как и $\frac{3}{4}\pi$, поэтому:

$$\arcsin\left(\sin\frac{3}{4}\pi\right)=\pi-\frac{3}{4}\pi=\frac{\pi}{4}.$$

Рассмотрим функцию

$$y=\arcsin(\sin x).$$

В силу периодичности синуса функция $\arcsin(\sin x)$ также является периодической с периодом 2π, поэтому достаточно исследовать ее на сегменте величиной 2π. В силу определения арксинуса y есть дуга, заключенная на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и удовлетворяющая условию:

$$\sin y=\sin x.$$

Если значение x заключено на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то $y=x$, и, следовательно, на этом сегменте график функции совпадает с биссектрисой координатного угла. Предположим, что значение x заключено на сегменте $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$. В этом случае дуга $\pi-x$ заключена на сегменте $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, и так как

$$\sin(\pi-x)=\sin x, \quad \text{то имеем} \quad y=\pi-x,$$

и, следовательно, на этом сегменте график функции совпадает с прямой линией $\pi-x$. Если значение x заключено на сегменте $\left[\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi\right]$, то, воспользовавшись периодичностью или путем непосредственной проверки, получим:

$$y=x-2\pi.$$

Если значение x заключено на сегменте

$\left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$, то

$$y=-\pi-x.$$

Если значение x заключено на сегменте

$$\left[-\frac{5}{2}\pi, -\frac{3}{2}\pi\right], \text{ то}$$

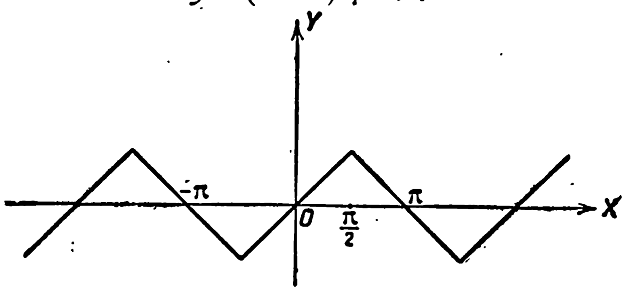
$$y = x + 2\pi.$$

Вообще, если $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, то

$$y = x - 2k\pi,$$

и если $\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, то

$$y = (\pi - x) + 2k\pi.$$



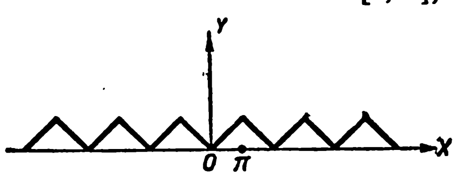
Черт. 49.

На основании изложенных результатов построен график функции $y = \arcsin(\sin x)$ в виде ломаной, изображенной на чертеже 49.

Рассмотрим функцию

$$y = \arccos(\cos x).$$

Эта функция периодическая, с периодом 2π. Если значение x заключено на сегменте $[0, \pi]$, то $y = x$.



Черт. 50.

Если значение x заключено на сегменте $[\pi, 2\pi]$, то дуга $2\pi - x$ заключена на сегменте $[0, \pi]$ и $\cos(2\pi - x) = \cos x$, поэтому:

$$\arccos(\cos x) = 2\pi - x.$$

Следовательно, на сегменте $[\pi, 2\pi]$ имеем:

$$y = 2\pi - x.$$

Если значение x заключено на сегменте $[2\pi, 3\pi]$, то

$$y = x - 2\pi.$$

Если значение x заключено на сегменте $[3\pi, 4\pi]$, то

$$y = 4\pi - x.$$

Вообще, если $2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi$, то

$$y = x - 2k\pi,$$

если же $(2k-1)\pi \leqslant x \leqslant 2k\pi$, то

$$y = -x + 2k\pi.$$

Графиком функции $y = \operatorname{arc}\cos(\cos x)$ является ломаная линия (черт. 50).

Рассмотрим функцию $y = \operatorname{arc}\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)$. При изучении этой функции следует исключить из рассмотрения значения x вида $\frac{(2k+1)\pi}{2}$. Эти значения не являются допустимыми, так как $\operatorname{tg}\frac{(2k+1)}{2}\pi$ не имеет смысла.

Функция $\operatorname{arc}\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)$ является периодической с периодом π.

Из определения следует, что y есть дуга, взятая в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ и удовлетворяющая условию

$$\operatorname{tg} y = \operatorname{tg} x.$$

Отсюда ясно, что для всякого значения x, удовлетворяющего неравенствам $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, имеем:

$$y = x.$$

Предположим, что значение x заключено в интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$, тогда дуга $x - \pi$ заключена в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

и $$\operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x,$$

следовательно, в этом интервале имеем:

$$y = x - \pi.$$

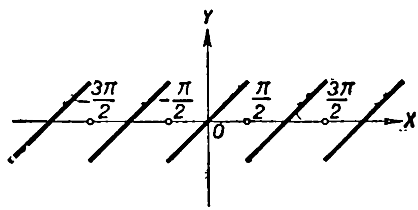
Это же можно получить, если воспользоваться периодичностью данной функции. Графиком функции $y=\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$ в интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ является отрезок прямой $y=x$, а в интервале $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right)$—отрезок прямой $y=x-\pi$ (черт. 51).

Для рассматриваемой функции значение $x=\frac{\pi}{2}$ является точкой разрыва.

В самом деле, в этой точке y не имеет предела. Будем рассматривать значения x, достаточно близкие к $\frac{\pi}{2}$. Если $x<\frac{\pi}{2}$, то $y=x$, и мы имеем $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} y=\frac{\pi}{2}$; если же $x>\frac{\pi}{2}$,

то $y=x-\pi$, а потому $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} y=-\frac{\pi}{2}$.

Следовательно, предел y „слева" $\left(\text{т. е. при } x<\frac{\pi}{2}\right)$ равен $\frac{\pi}{2}$, а предел „справа" $\left(\text{т. е. при } x>\frac{\pi}{2}\right)$ равен $-\frac{\pi}{2}$, и одного „единого" предела в точке $\frac{\pi}{2}$ не существует.



Черт. 51.

В математическом анализе точка $x=a$ называется **точкой разрыва первого рода** функции $f(x)$, если существуют отдельно левый предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ в предположении, что $x<a$, и правый предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ в предположении, что $x>a$, и эти „односторонние" пределы различны. Таким образом, для функции $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$ точка $\frac{\pi}{2}$ является точкой разрыва первого рода.

Легко видеть, что:

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)=x-2\pi, \quad \text{если} \quad \frac{3}{2}\pi<x<\frac{5}{2}\pi;$$

и вообще:

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x - k\pi, \quad \text{если} \quad \frac{(2k-1)\pi}{2} < x < \frac{(2k+1)\pi}{2}.$$

График функции $y = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$ построен на чертеже 51.

На чертеже 52 дано геометрическое изображение функции $\operatorname{arc\,ctg}(\operatorname{ctg} x)$. Мы не будем подробно останавливаться на соответствующих исследованиях, что может сделать читатель.

Исследование функций $\arccos(\sin x)$ и $\operatorname{arc\,ctg}(\operatorname{tg} x)$ не представляет затруднений, так как, воспользовавшись тождествами

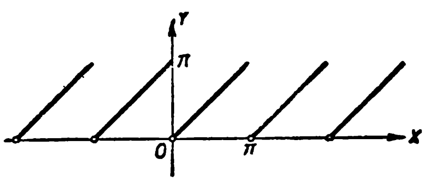
$$\arcsin(\sin x) + \arccos(\sin x) = \frac{\pi}{2}$$

и

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) + \operatorname{arc\,ctg}(\operatorname{tg} x) = \frac{\pi}{2},$$

можно привести рассмотрение этих функций к уже изученным функциям.

При помощи функций $\arcsin(\sin x)$ и $\arccos(\cos x)$ можно задавать ломаную линию посредством одного уравнения. Аналогично при помощи функций $\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$ и $\operatorname{arc\,ctg}(\operatorname{ctg} x)$ можно одним уравнением задать разрывную линию, составленную из несоединенных между собой отрезков. Комбинируя эти функции с другими функциями, мы можем в качестве графиков получать разнообразные ломаные и разрывные линии.



Черт. 52.

Примеры:

1) Исследовать функцию $y = x - \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x)$ и построить ее график.

Рассматривая эту функцию в различных промежутках, получим: если

$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2};$$

то

$$\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x \quad \text{и} \quad y = 0;$$

если

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi,$$

то $\qquad \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x - \pi$ и $y = \pi$;

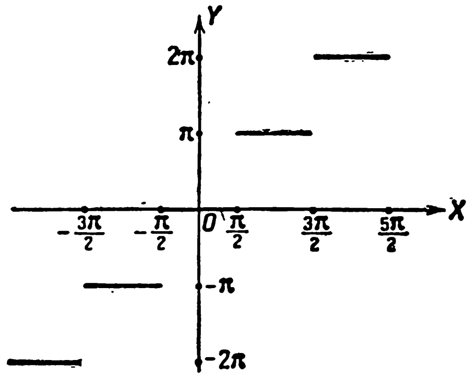
. . . .

если $\qquad \frac{2k-1}{2}\pi < x < \frac{2k+1}{2}\pi,$

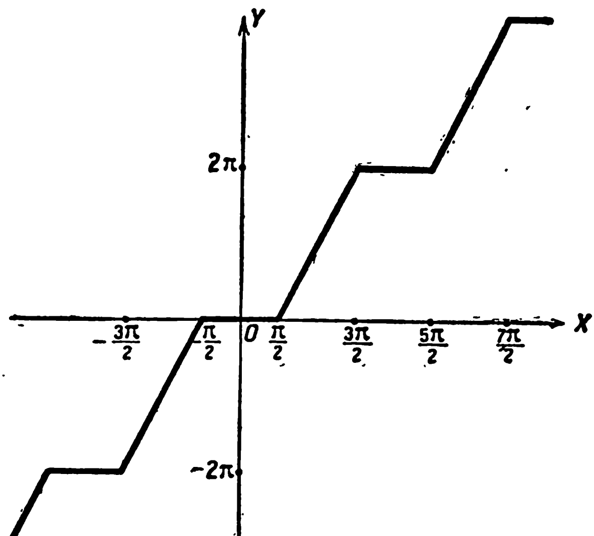
то $\qquad \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x - k\pi$ и $y = k\pi$

. . . .

В качестве графика мы получим изображенную на чертеже 53 ступенчатую разрывную линию.



Черт. 53



Черт. 54.

2) Исследовать функцию $y = x - \arcsin(\sin x)$ и построить ее график.

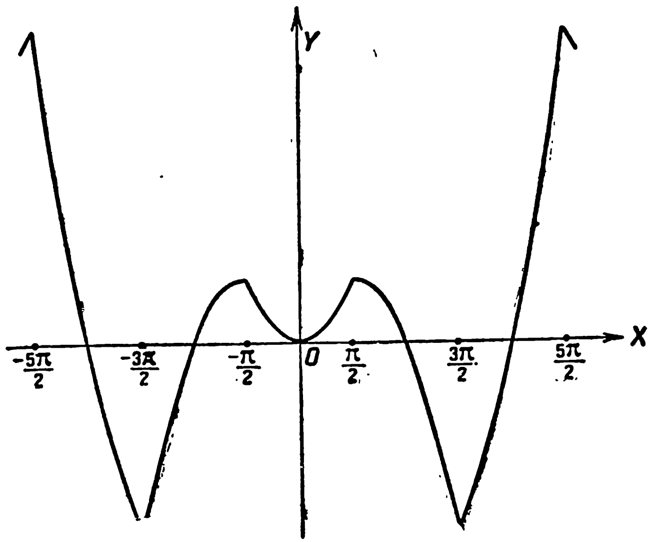
Если $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\arcsin(\sin x) = x$ и $y = 0$;

если $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, то $\arcsin(\sin x) = \pi - x$ и $y = 2x - \pi$;

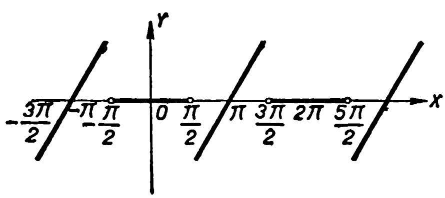
если $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{2}$, то $\arcsin(\sin x) = x - 2\pi$ и $y = 2\pi$;

если $\frac{5\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{7\pi}{2}$, то $\arcsin(\sin x) = 3\pi - x$ и $y = 2x - 3\pi$.

В качестве графика мы получаем изображенную на чертеже 54 ломаную линию.



Черт. 55.



Черт. 56.

3) Исследовать функцию $y = x \arcsin(\sin x)$.

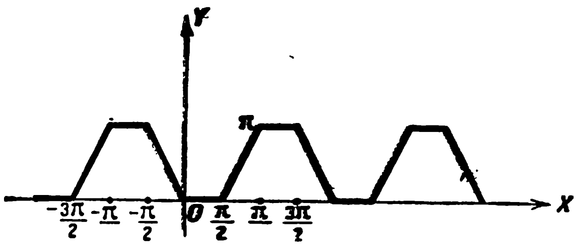
Если $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $y = x^2$;

если $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}\pi$, то $y = x(\pi - x)$;

если $\frac{3}{2}\pi \leqslant x \leqslant \frac{5}{2}\pi$, то $y = x(x - 2\pi)$;

если $-\frac{3}{2}\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{2}$, то $y = x(-\pi - x)$.

. . . .



Черт. 57.

В качестве графика мы получим ломаную линию, состоящую из параболических дуг (черт. 55).

Упражнения. Исследовать функции:

$$y = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) - \arcsin(\sin x) \quad \text{(черт. 56)},$$

$$y = \arccos(\cos x) - \arcsin(\sin x) \quad \text{(черт. 57)}.$$

Пафнутий Львович Чебышев.

ДОПОЛНЕНИЕ I.

Полиномы Чебышева.

Мы видели в § 12, что при целом n функция $\cos(n \arccos x)$, определенная на сегменте $[-1, 1]$, совпадает на этом сегменте с некоторым многочленом степени n. Эти многочлены носят название полиномов Чебышева, по имени великого русского математика, и обозначаются символом $T_n(x)$. Согласно результатам, полученным в § 12, имеем:

$$T_n(x) = x^n - C_n^2\, x^{n-2}(1-x^2) + C_n^4\, x^{n-4}(1-x^2)^2 - \dots$$

В настоящем дополнении мы остановимся на некоторых замечательных свойствах полиномов Чебышева. Выведем рекуррентную формулу, позволяющую последовательно вычислять полиномы Чебышева.

Положим в тригонометрической формуле:

$$\cos(\alpha+\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha-\beta);$$

$$\alpha = n\varphi; \quad \beta = \varphi,$$

тогда получим:

$$\cos(n+1)\varphi = 2\cos n\varphi\cos\varphi - \cos(n-1)\varphi.$$

Положив $\varphi = \arccos x$, будем иметь:

$$\cos[(n+1)\arccos x] = 2\cos[n\arccos x]\cos(\arccos x) - \cos[(n-1)\arccos x],$$

откуда:

$$T_{n+1}(x) = 2x\, T_n(x) - T_{n-1}(x). \qquad (1)$$

Приняв во внимание, что

$$T_0(x) = 1^{*}), \quad T_1(x) = x,$$

и воспользовавшись формулой (1), найдем:

$$T_2(x) = 2x^2 - 1;$$
$$T_3(x) = 4x^3 - 3x;$$
$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1.$$

Определим значение коэффициента при x^n в полиноме T_n. Легко видеть, что этот коэффициент есть 2^{n-1}. Докажем это методом полной индукции. В самом деле, для полинома T_1 утверждение справедливо. Предположим, что для полинома T_n этот коэффициент равен 2^{n-1}, тогда, в силу рекуррентной формулы (1), мы видим, что коэффициент при x^{n+1} полинома T_{n+1} есть 2^n. Отсюда следует справедливость высказанного утверждения для любого натурального значения n.

Как и всякий многочлен степени n, T_n имеет n корней; покажем, что все эти корни действительны и расположены в интервале $(-1, 1)$. В самом деле, в интервале $(-1, 1)$ имеем

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x).$$

Имеем

$$T_n(x) = 0, \text{ если}$$

откуда:

$$n \arccos x = \frac{(2k-1)\pi}{2},$$

$$x = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n},$$

где k — любое целое число.

Придавая k значения 1, 2, 3, ..., n, мы получим n корней $T_n(x)$. Будем эти корни в соответствии с значением k обозначать так: $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n$.

Придавая k целые значения, отличные от рассмотренных, мы не получим других корней, кроме найденных. В самом деле:

$$x_{n+p} = \cos\frac{(2n+2p-1)\pi}{2n} = \cos\left(\pi + \frac{(2p-1)\pi}{2n}\right) =$$
$$= \cos\left(\pi - \frac{(2p-1)\pi}{2n}\right) = \cos\frac{2(n-p)+1}{2n}\pi = x_{n-p+1}.$$

Отсюда мы видим, что $x_{n+1} = x_n$; $x_{n+2} = x_{n-1}$; $x_{n+3} = x_{n-2}$ и т. д.

Значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются простыми корнями $T_n(x)$, ибо среди них нет равных. Для построения корней T_n можно поступить следующим образом: разделим полуокружность единичного радиуса на $2n$ равных частей, занумеруем точки деления в направлении, указанном на чертеже 58, и отметим точку A, ближайшую к точке B с

*) $T_0(x) = 1$, так как $\cos(0 \arccos x) = \cos 0 = 1$.

абсциссою 1. Затем, начиная с точки A, спроектируем на отрезок $[-1, 1]$ через одну точки деления (черт. 58). Полученные в проекции точки и являются геометрическим изображением корней полинома $T_n(x)$.

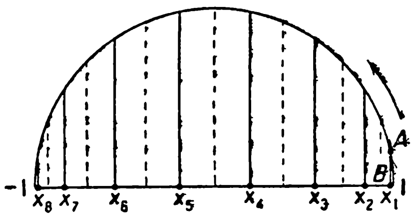
Если значение x заключено на сегменте $[-1, 1]$, то (в силу определения) значения полиномов Чебышева заключены на том же сегменте:

$$-1 \leqslant T_n(x) \leqslant 1, \text{ если } |x| \leqslant 1. \tag{2}$$

Определим те значения x на сегменте $[-1, 1]$, для которых $T_n(x) = \pm 1$; так как $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, то

$$T_n(x) = 1, \text{ если } n \arccos x = 2k\pi;$$

$$T_n(x) = -1, \text{ если } n \arccos x = (2k+1)\pi.$$



$n=8$

Черт. 58.

Таким образом,

$$T_n(x'_m) = (-1)^m, \text{ если } n \arccos x'_m = m\pi.$$

Отсюда найдем:

$$x'_0 = 1; \quad x'_1 = \cos\frac{\pi}{n}; \quad x'_2 = \cos\frac{2\pi}{n}; \ldots; \quad x'_n = -1.$$

Итак:

$$T_n(x'_0) = T_n(1) = 1; \quad T_n(x'_1) = -1; \quad T_n(x'_2) = 1; \ldots; T_n(x'_n) =$$

$$= T_n(-1) = (-1)^n.$$

Таким образом, график функции $y = T_n(x)$ на сегменте $[-1, 1]$ является колеблющейся в пределах $[-1, 1]$ линией, пересекающей в n точках ось абсцисс (черт. 59).

Рассмотрим многочлен

$$\overline{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x).$$

Для каждого из многочленов $\overline{T}_n(x)$ коэффициент при x^n равен единице. Этот многочлен, как и T_n, имеет n корней, расположенных в интервале $(-1, 1)$. На основании неравенств (2) имеем:

$$-\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \overline{T}(x) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{2'}$$

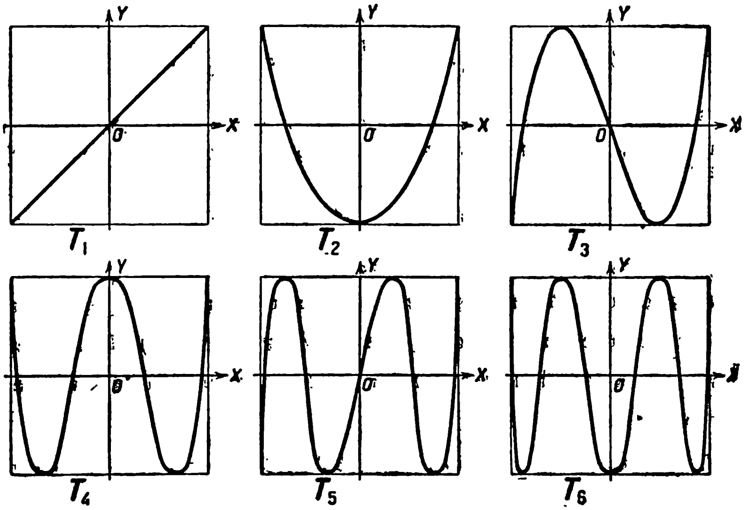
Рассмотрим одно из важных свойств полиномов $T_n(x)$.

Предположим, что на некотором сегменте $[a, b]$ дана функция $f(x)$. Пусть c — некоторая точка сегмента $[a, b]$. Величина $|f(c)|$ характеризует отклонение от нуля значения функции $f(x)$ в данной точке c.

Отклонением от нуля функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ называется наибольшее значение $|f(x)|$ на сегменте $[a, b]$.

Это наибольшее значение обозначается так: $\max|f(x)|$.

Если функция $f(x)$ непрерывна, то непрерывна также и функция $|f(x)|$ и существование наибольшего значения $|f(x)|$ следует из теоремы Вейерштрасса, которая доказывается в курсе математического анализа.



Черт. 59.

Эта теорема формулируется следующим образом. *Всякая непрерывная на сегменте функция по крайней мере в одной точке этого сегмента имеет наибольшее (наименьшее) значение.*

Свойство полиномов Чебышева, о котором будет идти речь, выражается следующей теоремой.

Из всех многочленов степени n, имеющих коэффициент при x^n, равный единице, наименьшее отклонение от нуля на сегменте $[-1, 1]$ имеет полином $\overline{T}_n = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$.

Согласно неравенствам (2′) отклонение от нуля полинома $\overline{T}_n(x)$ есть $\frac{1}{2^{n-1}}$; предположим, что некоторый многочлен:

$$P_n(x) = x^n + \overline{p}_1 x^{n-1} + \ldots + \overline{p}_n$$

имеет отклонение от нуля на сегменте $[-1, 1]$, не превосходящее отклонения $\overline{T}_n(x)$. Следовательно, согласно сделанному предположению на сегменте $[-1, 1]$ выполнены неравенства:

$$-\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant P_n(x) \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}. \qquad (3)$$

Рассмотрим точки

$$x_0' = 1; \quad x_1' = \cos\frac{\pi}{n}; \quad x_2' = \cos\frac{2\pi}{n}; \ \ldots \ ; x_n' = -1.$$

В этих точках имеем:

$$\overline{T}_n(x_0') = \frac{1}{2^{n-1}}; \quad \overline{T}(x_1') = -\frac{1}{2^{n-1}};$$

$$\overline{T}_n(x_2') = \frac{1}{2^{n-1}}; \ \ldots ; \ \overline{T}_n(x_n') = \frac{(-1)^n}{2^{n-1}}. \qquad (4)$$

Разность $R(x) = \overline{T}_n(x) - P_n(x)$ есть многочлен степени не выше $n-1$. Согласно неравенствам (3) и равенствам (4) будем иметь:

$$R(x_0') \geqslant 0; \ R(x_1') \leqslant 0; \quad R(x_2') \geqslant 0; \ldots . \qquad (5)$$

Сегмент $[-1, 1]$ разбит при помощи точек $x_0', x_1', x_2', \ldots, x_n'$ на n сегментов. Рассмотрим один из этих сегментов; его границами служат две соседние точки x_{i+1}' и x_i'. Многочлен $R(x)$ обращается в нуль по крайней мере в одной точке каждого из сегментов $[x_{i+1}', x_i']$.

В самом деле, если $R(x_{i+1}') \neq 0$ и $R(x_i') \neq 0$, то в силу условий (5) $R(x)$ на концах сегментов $[x_{i+1}, x_i]$ имеет разные знаки, а потому в силу непрерывности обращается в нуль по крайней мере в одной внутренней точке данного сегмента. Таким образом, $R(x)$ обращается в нуль по крайней мере в одной внутренней или граничной точке каждого сегмента $[x_{i+1}', x_i']$. Отсюда мы заключаем, что $R(x) \equiv 0$, так как, будучи многочленом степени $n-1$, он имеет по меньшей мере n корней, а следовательно,

$$P_n(x) \equiv \overline{T}_n(x).$$

Этими рассуждениями доказано, что полином $\overline{T}_n$ является многочленом, наименее уклоняющимся от нуля на сегменте $[-1, 1]$ по сравнению с любым многочленом степени n, имеющим при x^n коэффициент, равный единице.

ДОПОЛНЕНИЕ II.

Аркфункции от комплексного аргумента.

Мы рассматривали аркфункции как функции, обратные тригонометрическим, причем тригонометрические функции считались определенными только для действительных значений аргумента. Из курса математического анализа известно, что тригонометрические функции могут быть определены для произвольного комплексного значения аргумента при помощи следующих степенных рядов, сходящихся при произвольных комплексных значениях аргумента:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots;$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots .$$

Положив в ряде, определяющем показательную функцию:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots,$$

$z = \pm ix$ мы получим известные формулы Эйлера:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \qquad e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

откуда можно выразить тригонометрические функции через показательные следующим образом:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Перейдем теперь к обратным тригонометрическим функциям. Рассмотрим функцию $y = \sin x$. В силу формул Эйлера

$$y = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i};$$

выразим x через y:

$$2iy = e^{ix} - e^{-ix}; \qquad e^{2ix} - 2iye^{ix} - 1 = 0,$$

откуда:

$$e^{ix} = iy \pm \sqrt{1 - y^2}, \quad x = \frac{1}{i} \lg (iy \pm \sqrt{1 - y^2}).$$

Таким образом, функция, обратная тригонометрической функции $\sin x$, выражается при помощи логарифма. Логарифм комплексного числа имеет бесконечное множество значений и поэтому функция:

$$\arcsin y = \frac{1}{i} \lg (iy \pm \sqrt{1 - y^2})$$

является бесконечнозначной функцией. Эта функция определена при всех значениях y (не только для значений $|y| \leqslant 1$), так как $iy + \sqrt{1-y^2}$ не обращается в нуль ни при каком значении y (в самом деле, освободив уравнение $iy \pm \sqrt{1-y^2} = 0$ от радикала, мы получим $1 = 0$).

При действительных значениях y, удовлетворяющих неравенствам $-1 \leqslant y \leqslant 1$, значения $\arcsin y$ действительны.

В самом деле:

$$\lg(iy \pm \sqrt{1-y^2}) = \lg|iy \pm \sqrt{1-y^2}| + \\ + i[\arg(iy \pm \sqrt{1-y^2}) + 2k\pi]$$

(под символом $\arg z$ мы понимаем одно из значений аргумента комплексного числа z). Но если $-1 \leqslant y \leqslant 1$, то $\sqrt{1-y^2}$ есть число действительное, и следовательно:

$$|iy \pm \sqrt{1-y^2}| = \sqrt{y^2 + (1-y^2)} = 1;$$

отсюда следует:

$$\lg|iy \pm \sqrt{1-y^2}| = 0,$$

откуда:

$$\arcsin y = \arg(iy \pm \sqrt{1-y^2}) + 2k\pi.$$

Отсюда видно, что значения функции $\arcsin y$ действительны, если $-1 \leqslant y \leqslant 1$. В самом деле, положим $\arg(iy \pm \sqrt{1-y^2}) = \varphi$, легко видеть, что φ определяется из условий $\sin\varphi = y$; $\cos\varphi = \pm\sqrt{1-y^2}$, так как

$$|\pm\sqrt{1-y^2} + iy| = 1.$$

При выборе перед радикалом знака плюс в качестве значения φ можно взять $\varphi = \arcsin y$, где $\arcsin y$ есть функция действительного аргумента, уже определенная в главе II. При выборе знака минус перед радикалом мы можем положить $\varphi = \pi - \arcsin y$.

Рассмотрим функцию:

$$y = \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Отсюда

$$x = \frac{1}{i}\lg(y \pm i\sqrt{1-y^2}).$$

Функция, обратная функции $y = \cos x$, есть:

$$\operatorname{ars}\cos y = \frac{1}{i}\lg(y \pm i\sqrt{1-y^2}).$$

Полученная функция бесконечнозначная и определена для всех значений y. Значения $\arccos y$ действительны, если $-1 \leqslant y \leqslant 1$ (доказательство предоставляем провести читателю).

Рассмотрим функцию $y=\operatorname{tg} x$; так как

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \text{то } y=\frac{1}{i}\cdot\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{e^{ix}+e^{-ix}}.$$

Из последнего равенства найдем:

$$x=\frac{1}{2i}\lg\left(\frac{1+iy}{1-iy}\right)=\frac{1}{2i}\lg\frac{i-y}{i+y}.$$

Бесконечнозначная функция:

$$\operatorname{arc\,tg} y=\frac{1}{2i}\lg\left(\frac{i-y}{i+y}\right)$$

определена для любого значения $y\neq\pm i$. При $y=\pm i$ эта функция теряет смысл, так как при этих значениях выражение, стоящее под знаком логарифма, обращается соответственно в нуль и бесконечность. Для любого действительного значения y имеем:

$$|i-y|=|i+y|,$$

откуда:

$$\left|\frac{i-y}{i+y}\right|=1,$$

а следовательно, как легко видеть, значения $\operatorname{arc\,tg} y$, соответствующие действительным значениям y, будут также действительны.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

Глава I. Введение.

Глава II. Обратные тригонометрические функции (аркфункций).

Глава III. Тригонометрические операции над аркфункциями.

Глава IV. Соотношения между аркфункциями.

Глава V. Теоремы сложения.

Глава VI. Тригонометрические уравнения.

Сергей Иосифович Новоселов.
Обратные тригонометрические функции.

Редактор *С. А. Пономарев.*

Техн. редакторы: *С. Т. Шикин и*
А. А. Пономарева

* * *

Сдано в набор 26/VII 1955 г. Подписано
к печати 21/X 1955 г. 84 × 108¹/₃₁
Печ. л. 8 (6,56 Уч..изд. л. 5,49.
Тираж 25000 экз. А 05841
Заказ № а-156

* * *

Учпедгиз. Москва, Чистые пруды, 6.
Отпечатано в книжной ф-ке им. Камиль
Якуба Отдела издательств и полиграфической
промышленности Министерства культуры
ТАССР. г. Казань, ул. Баумана 1955 г.

Цена без переплета 1 р. 50 к.
Переплет 50 к.

Цена 2 руб.