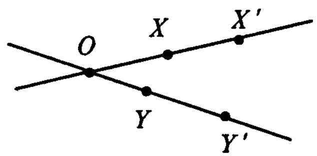
Домашняя работа по геометрии за 9 класс

к учебнику «Геометрия. 7-9 класс»
А.В. Погорелов, М.: «Просвещение», 2001 г.

СОДЕРЖАНИЕ

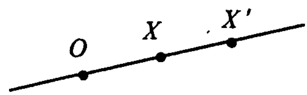
§ 11. ПОДОБИЕ ФИГУР

№ 1. При гомотетии точка X переходит в точку X', а точка Y — в точку Y'. Как найти центр гомотетии, если точки X, X', Y, Y' не лежат на одной прямой?[1]



По определению преобразования гомотетии – центр гомотетии лежит на одном луче с данными точками, поэтому точка пересечения прямых XX' и YY' является центром. Эти прямые пересекутся, так как точки X, X′, Y и Y′ не лежат на одной прямой, по условию.

№ 2. При гомотетии точка X переходит в точку X'. Постройте центр гомотетии если коэффициент гомотетии равен 2.



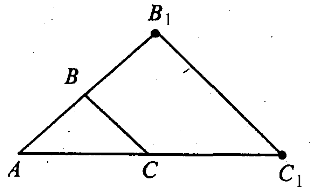
1) Так как искомый центр гомотетии лежит на одной прямой с точками X и X', то для нахождения центра проведем прямую XX'.

---

[1] Условия заданий приводятся в учебных целях и в необходимом объеме — как иллюстративный материал. Имя автора и название цитируемого издания указаны на титульном листе данной книги. (Ст. 19 п. 2 Закона РФ об авторском праве и смежных правах от 9 июня 1993 г.)

2) Так как $k = 2$, то по определению гомотетии OX' = 2OX, где O — центр гомотетии, значит, отложим от точки X' отрезок OX' = 2OX и получим искомую точку O.

№ 3. Начертите треугольник. Постройте гомотетичный ему треугольник, приняв за центр гомотетии одну из его вершин и коэффициент гомотетии, равным 2.



Построим ΔABC и примем точку A — центр гомотетии. На продолжении AB отложим отрезок $AB_1 = 2AB$, получим точку B_1, гомотетичную точке B.

Аналогично, на продолжении AC отложим отрезок $AC_1 = 2AC$, получим точку C_1, гомотетичную точке C.

Проведем отрезки AB_1, AC_1, BC_1 и получим ΔAB_1C_1, гомотетичный ΔABC с $k = 2$.

№ 5. Что представляет собой фигура, подобная треугольнику?

Фигура, подобная треугольнику, также является треугольником.

№ 6. У подобных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = 30°$, AB = 1 м, BC = 2 м, $B_1C_1 = 3$ м. Чему равны угол A_1 и сторона A_1B_1?

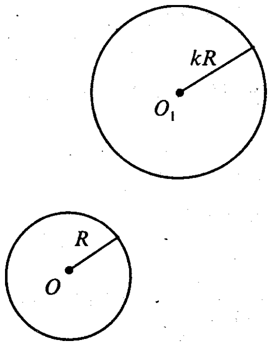
Так как подобие сохраняет углы, то $\angle A = \angle A_1 = 30°$. Далее $B_1C_1 = kBC$, а значит:

$$k = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{3}{2} = 1{,}5 .$$

Также $A_1B_1 = kAB = 1{,}5 \cdot 1 = 1{,}5$ (м).

Ответ: $\angle A_1 = 30°$, $A_1B_1 = 1{,}5$ (м).

№ 7. Докажите, что фигура, подобная окружности, есть окружность.



Докажем, что отношение радиусов окружностей равно k. Тогда рассмотрим преобразование подобия с этим коэффициентом k, при котором точка O переходит в точку O_1. Точки, находящиеся на расстоянии R от точки O (т.е. точки первой окружности), будут находиться на расстоянии kR от точки O_1, т.е. будут лежать на окружности с радиусом kR. А, значит, окружность перейдет в окружность. Что и требовалось доказать.

№ 8*. Даны угол и внутри его точка A. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через точку A.

Построение:

1) Проведем биссектрису угла NQ.

2) Отметим на ней точку O, опустим перпендикуляры OF и OE на стороны угла.

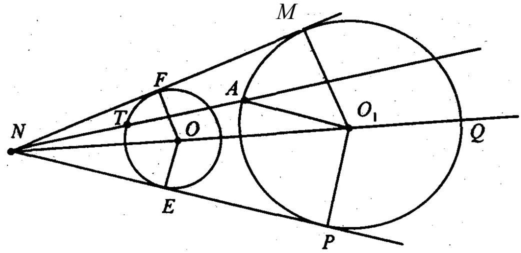
3) Построим окружность с центром в точке O и радиусом OE.

4) Проведем луч NA, который пересекает окружность в точке T.

5) Проведем прямую AO_1, так что $AO_1 \parallel TO$. Тогда ΔNTO и ΔNAO_1 подобны, так что

$$\frac{AO_1}{TO} = \frac{AN}{NT} = \frac{O_1N}{NO} = k$$

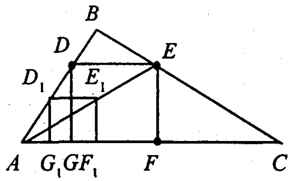
6) Построим окружность с центром в точке O_1 и радиусом O_1A_1.



Докажем, что эта окружность искомая, то есть $AO_1 = O_1M = O_1P$, где O_1M и O_1P — перпендикуляры из точки O_1 на стороны угла.

Так как ΔNMO_1 и ΔNFO_1 подобны, то $\frac{MO_1}{FO} = \frac{O_1N}{NO} = k$. То есть $\frac{MO_1}{OT} = k$, $MO_1 = kOT = AO_1$. Равенство $O_1M = O_1P$ следует из равенства ΔNMO_1 и ΔNPO_1. Значит, окружность с центром в точке O_1 и радиусом O_1A искомая.

№ 9*. Впишите в данный треугольник квадрат, у которого две вершины лежат на одной стороне, а две другие вершины — на двух других сторонах.



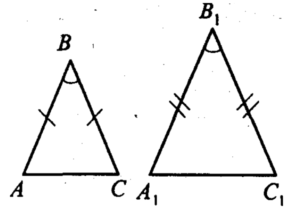
Сначала построим квадрат $D_1E_1F_1G_1$ так, чтобы вершины F_1 и G_1 лежали на стороне AC, а вершина D_1 — на стороне AB.

Гомотетия относительно вершины A, переводящая точку E_1, в точку E, лежащую на стороне BC, переводит D_1 в D, F_1 в F, G_1 в G.

Так как гомотетия переводит фигуру в подобную фигуру, то четырехугольник DEFG — искомый квадрат.

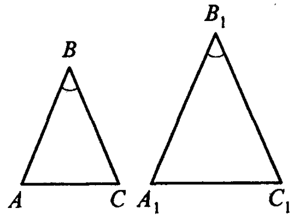
№ 10. Докажите подобие равнобедренных треугольников с равными углами при вершинах, противолежащих основаниям.

Пусть $\angle B = \angle B_1$.И ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ — равнобедренные.



Тогда $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$ (так как $\angle A = \angle C$ и $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$ и $\angle A = \angle C = \frac{1}{2}(180° - \angle B)$. Аналогично $\angle A_1 = \angle C_1 = \frac{1}{2}(180° - \angle B_1)$. Так что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, (по двум углам). Что и требовалось доказать.

№ 11. У двух равнобедренных треугольников углы между боковыми сторонами равны. Боковая сторона и основание одного треугольника равны 17 см и 10 см, основание другого равно 8 см. Найдите его боковую сторону.



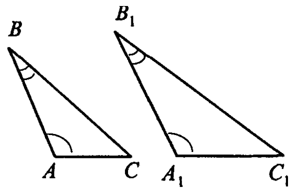
Пусть ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ — равнобедренные; $\angle B = \angle B_1$, $AC = 8$ см, $A_1C_1 = 10$ см, $A_1B_1 = 17$ см. Тогда $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (следует из задачи № 10), значит

$$\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{AB}{A_1B_1}.$$

то есть $AB = \dfrac{AC \cdot A_1B_1}{A_1C_1} = \dfrac{8 \cdot 17}{10} = 13{,}6$ см.

Ответ: AB = 13,6 см.

№ 12. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, AB = 5 м, BC = 7 м, $A_1B_1 = 10$ м, $A_1C_1 = 8$ м. Найдите остальные стороны треугольников.



$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$, (по двум углам). Значит

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Так что

$B_1C_1 = \dfrac{A_1B_1 \cdot BC}{AB} = \dfrac{10 \cdot 7}{5} = 14$ м и $AC = \dfrac{AB \cdot A_1C_1}{A_1B_1} = \dfrac{5 \cdot 8}{10} = 4$ м.

Ответ: AC = 4 м, $B_1C_1 = 14$ м.

№ 13. Решите задачу 12 при условии, что AB = 16 см, BC = = 20 см, $A_1B_1 = 12$ см, $AC - A_1C_1 = 6$ см.

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (по двум углам). Далее

$$k = \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

— коэффициент подобия, значит, $AC = \dfrac{4}{3} A_1C_1$, и, поскольку $AC - A_1C_1 = 6$,

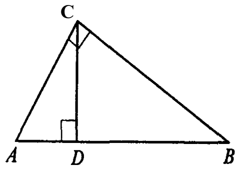
$$\frac{4}{3} A_1C_1 - A_1C_1 = 6;\ \frac{1}{3} A_1C_1 = 6;\ A_1C_1 = 18 \text{ см.}$$

Тогда AC =18 + 6 = 24 см. Далее

$$B_1C_1 = \frac{3}{4} \cdot BC = \frac{3 \cdot 20}{4} = 15 \text{ см}.$$

Ответ: AC = 24 см, A_1C_1 = 18 см, B_1C_1 = 15 см.

№ 14. Докажите, что высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобные исходному.

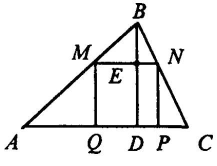


Пусть ΔABC — прямоугольный, ∠C = 90°, CD — высота.
Рассмотрим ΔABC и ΔACD:
а) ∠ACB = ∠CDA = 90°.
б) ∠CAB = ∠DAC (общий угол).
Значит, ΔABC ~ ΔACD (по двум углам).
Аналогично доказывается, что ΔABC ~ ΔCBD.

№ 15. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, пересекает его сторону AC в точке A_1, а сторону BC в точке B_1. Докажите, что ΔABC ~ ΔA_1B_1C.

Задача решена в учебнике на стр. 149 п. 103.

№ 16. В треугольнике с основанием a и высотой h вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а другие две — на боковых сторонах. Вычислите сторону квадрата.



Пусть в ΔABC BD — высота. Далее MNPQ — квадрат, N $\in$ BC, M $\in$ AB, P и Q $\in$ AC. Тогда AC = a, BD = h (по условию).

Рассмотрим ΔABC и ΔMBN:

а) $\angle$ABC = $\angle$MBN (общий угол);

б) $\angle$BAC = $\angle$BMN (как односторонние углы при параллельных прямых AC и MN и секущей AB).

Следовательно, ΔABC ~ ΔMBN (по двум углам). Значит стороны и высоты треугольников ABC и MBN пропорциональны. То есть:

$$\frac{BE}{BD} = \frac{MN}{AC}.$$

Пусть x — сторона квадрата. Тогда BE = $h - x$. То есть

$$\frac{h-x}{h} = \frac{x}{a},$$

$$a(h-x) = hx,$$

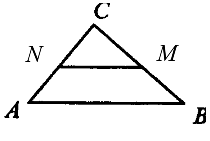
$$ah - ax = hx,$$

$$ah = x(h+a),$$

$$x = \frac{ah}{h+a}.$$

Ответ: $\frac{ah}{h+a}$.

№ 17. Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, делит его сторону AC в отношении $m : n$, считая от вершины C. В каком отношении она делит сторону BC?

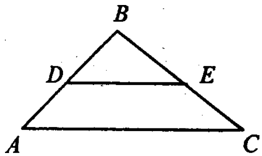


Пусть MN || AB; $\frac{CN}{AN}=\frac{m}{n}$. Из задачи № 15 следует, что $\Delta ABC \sim \Delta CNM$. Значит $\frac{AC}{CN}=\frac{BC}{CM}$, но AC = CN + AN, BC = = MB + CM, имеем $\frac{AN+CN}{CN}=\frac{MB+CM}{CM}$ или $\frac{AN}{CN}+1=\frac{MB}{CM}+1$ то есть $\frac{AN}{CN}=\frac{MB}{CM}$. Так что

$$\frac{CM}{BM}=\frac{CN}{NA}=\frac{m}{n}.$$

Ответ: $\frac{m}{n}$.

№ 18. В треугольнике ABC проведен отрезок DE, параллельный стороне AC (конец D отрезка лежит на стороне AB, а E — на стороне BC). Найдите AD, если AB = 16 см, AC = 20 см и DE = 15 см.



Из задачи № 15 следует, что $\Delta ABC \sim \Delta DBE$. Тогда:

$$\frac{AB}{BD}=\frac{AC}{DE}.$$

Далее BD = AB – AD, так что:

$$\frac{AB}{AB-AD}=\frac{AC}{DE},\ \frac{16}{16-AD}=\frac{20}{15},$$

$$240 = 320 - 20AD,\ 20AD = 80;\ AD = 4 \text{ см}.$$

Ответ: AD = 4 см.

№ 19. В задаче 18 найдите отношение AD : BD, если известно, что AC : DE = 55:28.

Так как $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DE} = \frac{55}{28}$ и AB = BD + AD, то

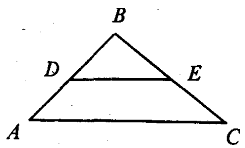
$$\frac{BD + AD}{BD} = \frac{55}{28},$$

$$1 + \frac{AD}{BD} = \frac{55}{28},$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{27}{28}.$$

Ответ: $\frac{AD}{BD} = \frac{27}{28}$.

№ 20. Найдите длину отрезка DE в задаче 18, если:
1) AC = 20 см, AB = 17 см и BD = 11,9 см;
2) AC = 18 дм, AB = 15дм и AD = 10дм.



1) Имеем: $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{DE}$,

откуда получаем, что:

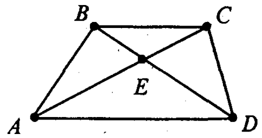
$$DE = \frac{AC \cdot BD}{AB} = \frac{20 \cdot 11{,}9}{17} = 14 \text{ см}.$$

2) BD = AB – AD, то есть

$$BD = 15 - 10 = 5 \text{ дм и } DE = \frac{AC \cdot BD}{AB} = \frac{18 \cdot 5}{15} = 6 \text{ дм}.$$

Ответ: 1) 14 см; 2) 6 дм.

№ 21. Диагонали трапеции ABCD пересекаются в точке E. Докажите подобие треугольников BCE и DAE.

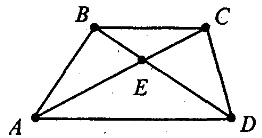


Рассмотрим ΔBCE и ΔDAE:

а) ∠BEC = ∠AED (как вертикальные углы);

б) ∠CBE = ∠EDA (как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей BD). Значит, ΔBCE ~ ΔAED (по двум углам). Что и требовалось доказать.

№ 22. Найдите отношение отрезков диагонали трапеции, на которые она разбивается другой диагональю, если основания трапеции относятся как $m : n$.

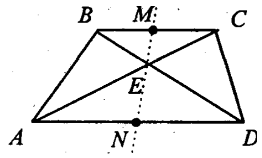


ΔAED ~ ΔBCE (см. решение № 21). Значит

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EC}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BC}} = \frac{m}{n}.$$

Ответ: $\frac{m}{n}$

№ 23. Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции, делит одно основание в отношении $m : n$. В каком отношении она делит другое основание?



Пусть $\frac{BM}{MC} = \frac{m}{n}$.

Рассмотрим ΔMCE и ΔAEN:

1) $\angle MEC = \angle AEN$ (углы вертикальные);

2) $\angle MCE = \angle EAN$ (как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых MC и AN секущей AC).

Значит $\Delta MCE \sim \Delta AEN$ (по двум углам). Тогда

$$\frac{MC}{AN} = \frac{ME}{NE}.$$

Аналогично доказывается, что $\Delta BME \sim \Delta DNE$, а, значит,

$$\frac{MB}{ND} = \frac{ME}{NE}.$$

Так что $\frac{ME}{NE} = \frac{MC}{AN} = \frac{MB}{ND}$, значит,

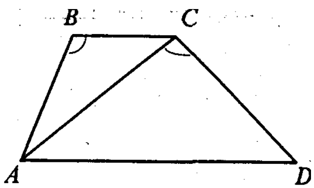
$$MC \cdot ND = MB \cdot AN;$$

$$\frac{AN}{ND} = \frac{MC}{MB} = \frac{n}{m}.$$

Ответ: $\frac{n}{m}$.

№ 24. В трапеции ABCD с диагональю AC углы ABC и ACD равны. Найдите диагональ AC, если основания BC и AD соответственно равны 12 м и 27 м.

Рассмотрим ΔACD и ΔCBA:



а) $\angle ACD = \angle ABC$ (по условию);

б) $\angle CAD = \angle BCA$ (как накрест лежащие углы при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей AC).

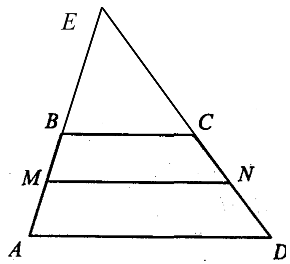
Так что $\Delta ACD \sim \Delta CBA$. Поэтому: $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{AD}{AC}$, то есть

$$AC^2 = CB \cdot AD;$$

$$AC = \sqrt{CB \cdot AD} = \sqrt{12 \cdot 27} = \sqrt{324} = 18 \text{ см.}$$

Ответ: AC =18 см.

№ 25. Линия, параллельная основаниям трапеции, делит одну боковую сторону в отношении $m : n$. В каком отношении делит она вторую боковую сторону?



Пусть ABCD — трапеция, AD и BC — ее основания, MN || AD || BC,

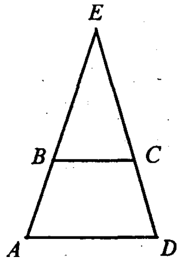
$$\frac{AM}{MB} = \frac{m}{n}.$$

Боковые стороны трапеции пересекаются в точке E. По теореме о пропорциональных отрезках, параллельные прямые AD, MN и BC, пересекающие стороны $\angle E$ отсекают от сторон пропорциональные отрезки, так что:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{DN}{NC} = \frac{m}{n}.$$

Ответ: $\dfrac{m}{n}$.

№ 26. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции ABCD пересекаются в точке E. Найдите стороны треугольника AED, если AB = 5 см, BC = 10 см, CD = 6 см, AD = 15 см.



Рассмотрим ΔAED и ΔBEC. Так как AD ∥ BC, то эти треугольники подобны (см решение задачи № 15). Значит,

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BC},$$

но AE = AB + BE, так что

$$\frac{AB+BE}{BE} = \frac{AD}{BC}; \ \frac{5+BE}{BE} = \frac{15}{10};$$

$$50 + 10BE = 15BE; 5BE = 50; BE = 10 \text{ см.}$$

Тогда AE = AB + BE = 5 + 10 = 15 см.

Аналогично из подобия треугольников AEB и BEC имеем:

$$\frac{DE}{CE} = \frac{AD}{BC}.$$

А, так как DE = CD + CE, то

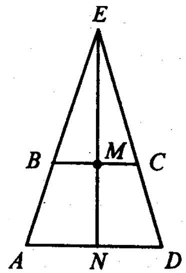
$$\frac{CD+CE}{CE} = \frac{AD}{BC}; \ \frac{6+CE}{CE} = \frac{15}{10};$$

$$15CE = 60 + 10CE; 5CE = 60; CE = 12 \text{ см,}$$

$$DE = CE + CD = 6 + 12 = 18 \text{ см.}$$

Ответ: AE = 15 см, DE = 18 см.

№ 27. Найдите высоту треугольника AED из задачи № 26, опущенную на сторону AD, если BC=7 см, AD=21 см и высота трапеции равна 3 см.



Пусть EN — высота треугольника AED, MN — высота трапеции.

$\Delta AED \sim \Delta BEC$ (было доказано в задаче № 26). Поэтому

$$\frac{AE}{BE} = \frac{AD}{BC} = \frac{21}{7} = 3.$$

Далее рассмотрим ΔAEN и ΔBEM.

а) $\angle A = \angle B$ (углы при пересечении параллельных прямых BM и AN секущей AB);

б) $\angle N = \angle M = 90°$.

Тогда, $\Delta AEN \sim \Delta BEM$ и

$$\frac{EN}{EM} = \frac{AE}{BE} = 3.$$

Но EN = EM + MN, так что:

$$\frac{EM+3}{EM} = \frac{3}{1};$$

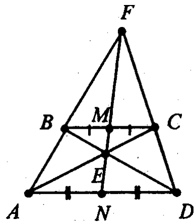
$$3EM = EM + 3;\ 2EM = 3;\ EM = 1{,}5 \text{ см},$$

тогда EN = EM + MN = 1,5 + 3 = 4,5 см.

Ответ: 4,5 см.

№ 28*. Диагонали трапеции пересекаются в точке E, а продолжения боковых сторон пересекаются в точке F.

Докажите, что прямая EF делит основания трапеции пополам.



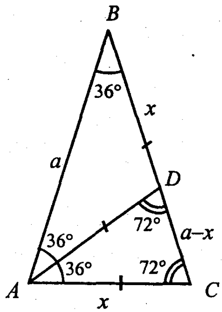
ΔFMC ~ ΔFND (так как $\angle$FMC = $\angle$FND — односторонние углы при BC || AD и $\angle$NFD — общий). Так что $\frac{MC}{ND} = \frac{FM}{FN}$.

Аналогично ΔFMB ~ ΔFNA и $\frac{BM}{AN} = \frac{FM}{FN}$, так что $\frac{MC}{MD} = \frac{BM}{AN}$, то есть $\frac{BM}{MC} = \frac{AN}{ND} = k$.

В задаче № 23 было доказано, что $\frac{BM}{MC} = \frac{AN}{ND} = \frac{1}{k}$, так что $k = 1$ и BM = MC; ND = AN. Что и требовалось доказать.

№ 29*. У равнобедренного треугольника ABC с основанием AC и противолежащим углом 36° проведена биссектриса AD.

1) Докажите подобие треугольников ABC и CAD.
2) Найдите основание треугольника ABC, если его боковая сторона равна a. AB = BC = a.



1) Так как $\angle B = 36°$, то

$$\angle BAC = \angle ACB = (180° - 36°):2 = 72°.$$

Поскольку AD — биссектриса $\angle A$, то:

$$\angle CAD = \angle DAB = 72°:2 = 36°.$$

Рассмотрим ΔABC и ΔCAD. Так как

а) $\angle BAC = \angle ACB = 72°$;

б) $\angle ABC = \angle CAD = 36°$.

Значит, $\Delta ABC \sim \Delta CAD$ (по двум углам). Что и требовалось доказать.

2) Из подобия треугольников ABC и ACD следует:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CD}.$$

Пусть BD = x см, следовательно DC = $a - x$.

Далее BD = AD = AC (стороны равнобедренных треугольников), то есть BD = AD = AC = x см.

Подставляя в пропорцию: $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$, получим

$$x^2 = a^2 - ax,\ x^2 + ax - a^2 = 0,$$

$$D = a^2 + 4a^2 = 5a^2,\ x_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{5a^2}}{2},$$

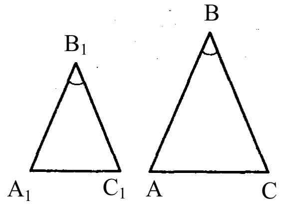
$x_1 = \frac{-a - a\sqrt{5}}{2} = -\frac{a(1+\sqrt{5})}{2} < 0$, не удовлетворяет условию задачи, так как $x > 0$.

$$x_2 = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2} = \frac{a\sqrt{5} - a}{2} = \frac{a(\sqrt{5} - 1)}{2} > 0.$$

Значит, $AC = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}a$ см.

Ответ: $AC = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}a$.

№ 30. Углы B и B_1 треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Стороны треугольника ABC, прилежащие к углу B, в 2,5 раза больше сторон треугольника $A_1B_1C_1$, прилежащих к углу B_1. Найдите AC и A_1C_1, если их сумма равна 4,2 м.



$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = 2{,}5$ и $\angle B = \angle B_1$, так что $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ (по признаку подобия треугольников) с коэффициентом подобия, равным 2,5.

Пусть $A_1C_1 = x$ м, следовательно $AC = 2{,}5x$ м, но

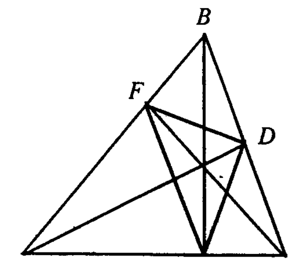
$$A_1C_1 + AC = 4{,}2 \text{ м},$$

Так что $x + 2{,}5x = 4{,}2$, $3{,}5x = 4{,}2$, $x = 1{,}2$ м. Тогда, $A_1C_1 = 1{,}2$ м, следовательно

$$AC = 4{,}2 - A_1C_1 = 4{,}2 - 1{,}2 = 3 \text{ м}.$$

Ответ. $A_1C_1 = 1{,}2$ м, $AC = 3$ м.

№ 32*. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD, BE, CF. Найдите углы треугольника DEF, зная углы треугольника ABC.



Из предыдущей задачи получаем, что $\Delta FBD \sim \Delta ABC$, следовательно, $\angle BDF = \angle A$, $\angle BFD = \angle C$.

Далее $\Delta DCE \sim \Delta ABC$ так, что $\angle CDE = \angle A$ и $\angle CED = \angle B$.

$\angle D = 180° - (\angle BDF + \angle CDE) = 180° - (\angle A + \angle A) = 180° - 2\angle A.$

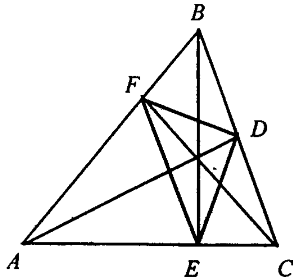
Так как $\Delta AEF \sim \Delta ABC$, то $\angle AEF = \angle B$, $\angle AFE = \angle C$. Так что:

$\angle E = 180° - (\angle CED + \angle AEF) = 180° - (\angle B + \angle B) = 180° - 2\angle B.$

$\angle F = 180° - (\angle AFE + \angle BFD) = 180° - (\angle C + \angle C) = 180° - 2\angle C.$

Ответ. $\angle D = 180° - 2\angle A$; $\angle E = 180° - 2\angle B$, $\angle F = 180° - 2\angle C$.

№ 33*. Докажите, что биссектрисы треугольника DEF в задаче № 32 лежат на высотах треугольника ABC.



$\angle FBA = \angle BDA - \angle BDF$, так что $\angle FDA = 90° - \angle A$ и $\angle ADE = \angle ADC - \angle CDE = 90° - \angle A$, значит, AD — биссектриса $\angle D$.

Аналогично доказывается, что EB — биссектриса $\angle E$ и FC — биссектриса $\angle F$, то есть биссектрисы этих углов лежат на высотах ΔABC.

Что и требовалось доказать.

№ 34. Подобны ли два равносторонних треугольника?

Так как стороны равностороннего треугольника равны, то три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого, так что равносторонние треугольники подобны.

№ 35. Подобны ли треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, если:

1) AB = 1 м, AC = 1,5 м, BC = 2 м; A_1B_1 = 10см, A_1C_1 = 15 см, B_1C_1 =20 см;
2) AB = 1 м, AC = 2 м, BC = 1,5 м; A_1B_1 = 8дм, A_1C_1 = 16 дм, B_1C_1 =12 дм;
3) AB = 1 м, AC = 2 м, BC = 1,25 м; A_1B_1 = 10 см, A_1C_1 = 20 см, B_1C_1 =30 см;

Треугольники будут подобны, если будет выполняться равенство:

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}.$$

1) $\frac{100}{10} = \frac{150}{15} = \frac{200}{20} = 10$ — треугольники подобны.

2) $\frac{10}{8} = \frac{20}{16} = \frac{15}{12}$ — неверно, поэтому треугольники не подобны.

3) $\frac{100}{10} = \frac{200}{20} = \frac{125}{13}$ — неверно, поэтому треугольники не подобны.

№ 37. Стороны треугольника равны 0,8 м, 1,6 м и 2 м. Найдите стороны подобного ему треугольника, периметр которого равен 5,5 м.

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$; P — периметр ΔABC; P_1 — периметр $\Delta A_1B_1C_1$; AB = 0,8 м, BC = 1,6 м, AC = 2 м; P_1 = 5,5 м. Тогда

$$P = AB + BC + AC = 0{,}8 + 1{,}6 + 2 = 4{,}4 \text{ м}.$$

Воспользуемся задачей № 36:

$$\frac{P_1}{P} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{A_1C_1}{AC} = k,$$

тогда $k = \frac{5{,}5}{4{,}4} = \frac{5}{4}$. Значит:

$$A_1B_1 = k \cdot AB = \frac{5}{4} \cdot 0{,}8 = 1 \text{ м},$$

$$B_1C_1 = k \cdot BC = \frac{5}{4} \cdot 1{,}6 = 2 \text{ м},$$

$$A_1C_1 = k \cdot AC = \frac{5}{4} \cdot 2 = 2{,}5 \text{ м}.$$

Ответ. $A_1B_1 = 1$ м, $B_1C_1 = 2$ м, $A_1C_1 = 2{,}5$ м.

№ 38. Периметр одного треугольника составляет $\frac{11}{13}$ периметра подобного ему треугольника. Разность двух соответствующих сторон равна 1 м. Найдите эти стороны.

$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$; $P_{\Delta ABC} = \frac{11}{13} P_{\Delta A_1B_1C_1}$; $A_1B_1 - AB = 1$ м.

$$\frac{P_{\Delta A_1B_1C_1}}{P_{\Delta ABC}} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{13}{11}.$$

Пусть $AB = x$, тогда

$$A_1B_1 = x + 1 \text{ и } \frac{x+1}{x} = \frac{13}{11},$$

$$11x + 11 = 13x,\ 2x = 11,\ x = 5{,}5 \text{ м}.$$

То есть $AB = 5{,}5$ м, а $A_1B_1 = 6{,}5$ м.

Ответ: 6,5 м; 5,5 м.

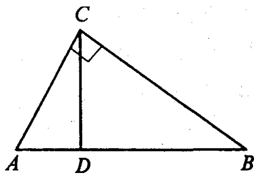
№ 39. Подобны ли два прямоугольных треугольника, если у одного из них есть угол 40°, а у другого — угол, равный: 1) 50°; 2) 60°?

У подобных треугольников углы равны, к тому же сумма острых углов прямоугольного треугольника 90°.

а) $40^\circ + 50^\circ = 90^\circ$ (треугольники подобны).

б) $40^\circ + 60^\circ = 100^\circ$ (треугольники не подобны).

№ 40. Основание высоты прямоугольного треугольника, опущенной на гипотенузу, делит ее на отрезки 9 см и 16 см. Найдите стороны треугольника.



В ΔABC $\angle C = 90°$, CD — высота, AD = 9 см, DB=16 см.

$\Delta ACD \sim \Delta CBD$ (так как $\angle CDA = \angle CDB = 90°$ и $\angle ACD = 90° - \angle A = \angle B$). Значит $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$, $CD^2 = AD \cdot BD$,

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{9 \cdot 16} = 3 \cdot 4 = 12 \text{ см.}$$

Далее из ΔACD по теореме Пифагора имеем:

$$AC = \sqrt{AD^2 + CD^2} = \sqrt{81 + 144} = 15 \text{ см.}$$

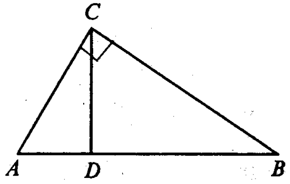
Из ΔCBD по теореме Пифагора имеем:

$$CB = \sqrt{DB^2 + CD^2} = \sqrt{256 + 144} = 20 \text{ см;}$$

$$AB = AD + BD = 9 + 16 = 25 \text{ см.}$$

Ответ: AC = 15 см; CB = 20 см, AB = 25 см.

№ 41. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 25 см, а один из катетов равен 10 см. Найдите проекцию другого катета на гипотенузу.



В ΔABC $\angle C = 90°$; CD — высота, AB = 25 см, AC =10 см.

Пусть AD = x см, следовательно

$$DB = (25 - x) \text{ см}.$$

В ΔACD по теореме Пифагора имеем:

$$CD^2 = AC^2 - AD^2 = 100 - x^2.$$

По доказанному в решении задачи № 40:

$$CD^2 = AD \cdot DB = x \cdot (25 - x) = 25x - x^2.$$

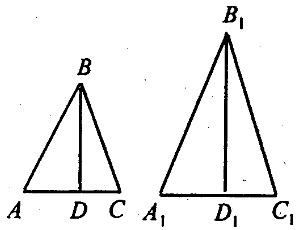
Так что:

$$100 - x^2 = 25x - x^2,\ 100 = 25x,\ x = 4 \text{ см}.$$

$$BD = 25 - x = 21 \text{ см}.$$

Ответ: BD = 21см.

№ 42. Докажите, что соответствующие высоты подобных треугольников относятся как соответствующие стороны.



$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$. Пусть BD — высота ΔABC, B_1D_1 — высота $\Delta A_1B_1C_1$.

Рассмотрим ΔABD и $\Delta A_1B_1D_1$.

а) $\angle A = \angle A_1$ (так как $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$);

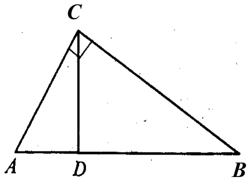
б) $\angle D = \angle D_1$ (прямые углы).

Значит, $\Delta ABD \sim \Delta A_1B_1D_1$ (по двум углам), то есть:

$$\frac{B_1D_1}{BD} = \frac{A_1B_1}{AB}.$$

Что и требовалось доказать.

№ 43. Катеты прямоугольного треугольника относятся как m:n. Как относятся проекции катетов на гипотенузу?



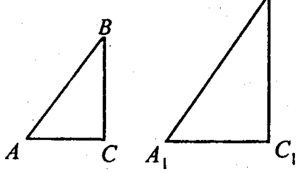
Пусть в ΔABC $\angle$C = 90°, $\frac{\text{AC}}{\text{BC}} = \frac{m}{n}$.

ΔACD ~ ΔABC, так что $\frac{\text{AC}}{\text{AB}} = \frac{\text{AD}}{\text{AC}}$, откуда $\text{AD} = \frac{\text{AC}^2}{\text{AB}}$. Далее ΔABC ~ ΔBCD, откуда $\frac{\text{BC}}{\text{AB}} = \frac{\text{BD}}{\text{BC}}$, то есть $\text{DB} = \frac{\text{BC}^2}{\text{AB}}$. Так что

$$\frac{\text{AD}}{\text{DB}} = \frac{\text{AC}^2}{\text{AB}} : \frac{\text{BC}^2}{\text{AB}} = \frac{\text{AC}^2}{\text{BC}^2} = \frac{m^2}{n^2}.$$

Ответ: $\frac{m^2}{n^2}$.

№ 44. Длина тени фабричной трубы равна 35,8 м; в это же время вертикально воткнутый в землю кол высотой 1,9 м дает тень длиной 1,62 м. Найдите высоту трубы.



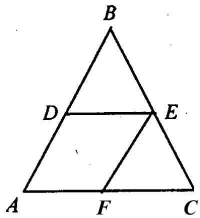
Возьмем ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$, где $\angle C = \angle C_1 = 90°$, AC = 1,62 м, BC = 1,9 м, A_1C_1 = 35,8 м. Найдем B_1C_1 (длина трубы).

Свет на кол и трубу падает с одной стороны и под одним углом, значит $\angle A = \angle A_1$, к тому же $\angle C = \angle C_1 = 90°$. Значит $\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$ и $\frac{A_1C_1}{AC} = \frac{B_1C_1}{BC}$, то есть

$$B_1C_1 = \frac{A_1C_1 \cdot BC}{AC} = 41{,}99 \approx 42 \text{ м.}$$

Ответ: $B_1C_1 \approx 42$ м.

№ 45. В треугольник ABC вписан ромб ADEF так, что угол A у них общий, а вершина E находится на стороне BC. Найдите сторону ромба, если AB = *c* и AC = *b*.



Так как DE||AC (по определению ромба), то $\Delta ABC \sim \Delta DBE$:

$$\frac{DB}{AB} = \frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC} = \frac{BE}{BC}$$

тогда, $\frac{DB}{AB} = \frac{DE}{AC}$. Далее, $BD = AB - AD = c - AD$, $DE = AD$, так что:

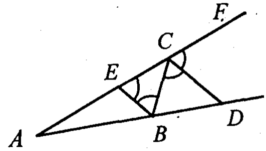
$$\frac{c - AD}{c} = \frac{AD}{b},$$

$bc - b \cdot AD = c \cdot AD$, $bc = AD(b + c)$, так что

$$AD = \frac{b \cdot c}{b + c}$$

Ответ. $AD = \frac{b \cdot c}{b + c}$.

№ 46*. Биссектриса внешнего угла треугольника ABC при вершине C пересекает прямую AB в точке D. Докажите, что AD:BD = AC:BC.



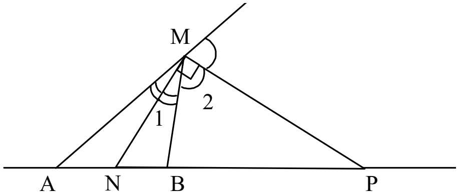
Проведем BE ∥ CD. Тогда $\angle CBE = \angle BCD$ (как углы накрест лежащие при паресечении параллельных прямых EB и CD секущей CB); $\angle BEC = \angle DCF = \angle DCB$ (как соответственные углы при тех же параллельных прямых); $\angle DCF = \angle DCB$ (т.к. CD биссектриса $\angle BCF$). Значит, ΔECB — равнобедренный и EC = BC.

Из решения задачи № 17 имеем: если стороны угла пересечены параллельными прямыми, то отсекаемые на сторонах угла отрезки пропорциональны, то есть

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{EC}.$$

Но так как EC = BC, то $\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}$, что и требовалось доказать.

№ 47*. Докажите, что геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек постоянно (не равно единице), есть окружность.



Возьмем произольную точку M, такую что $\frac{MA}{MB} = \lambda \neq 1$.

Проведем биссектрису MN и биссектрису внешнего угла MP в ΔAMB.

Тогда $\frac{AN}{NB} = \frac{AM}{BM} = \lambda$ (свойство биссектрисы); $\frac{AM}{BM} = \frac{AP}{BP} = \lambda$ (см. задачу №46). То есть положение точек N и P зависит только от выбора числа λ и не зависит от точки M. $\angle NMP = \angle 1 + \angle 2$. Но $2\cdot\angle 1 + 2\cdot\angle 2 = 180°$. Значит, $\angle NMP = 90°$, а следовательно геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до двух данных точек постоянно и не равно 1 — это множество точек, из которых фиксированный отрезок (NP) виден под прямым углом, то есть окружность, построенная на диаметре NP. Что и требовалось доказать.

№ 48. Найдите дополнительные плоские углы, зная, что: 1) один из них в 5 раз больше другого; 2) один из них на 100° больше другого; 3) разность их равна 20°.

1) Пусть 1-й угол равен $x°$, тогда 2-й будет $5x°$, а т.к. сумма двух плоских углов равна 360°, то:

$$x + 5x = 360°,\ 6x = 360°,\ x = 60°.$$

Значит, 1-й угол — 60°, а 2-й — 300°.

2) Пусть 1-й угол равен $x°$, тогда 2-й будет $(x + 100°)$, а их сумма 360°, т. е.:

$$x + x + 100° = 360°,\ 2x = 260°,\ x = 130°,$$

$$100° + x = 230°.$$

Значит, 1-й угол — 130°, а 2-й — 230°.

3) Пусть 1-й угол равен $x°$, тогда 2-й будет $x + 20°$, а их сумма 360°, т. е.:

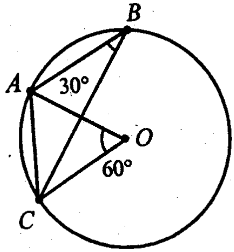
$$x + x + 20° = 360°,\ 2x = 340°,\ x = 170°,$$

$$20° + x = 190°.$$

Значит, 1-й угол — 170°, а 2-й — 190°.

Ответ: 1) 60°, 300°; 2) 130°, 230°; 3) 170°, 190°.

№ 49. Точки A, B, C лежат на окружности. Чему равна хорда AC, если угол ABC равен 30°, а диаметр окружности 10 см?



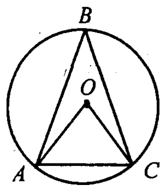
Так как вписанный угол ABC = 30°, то соответствующий ему центральный угол будет 60° (по теореме 11.5), то есть $\angle AOC = 60°$.

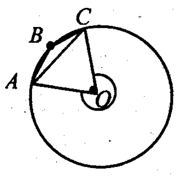
Рассмотрим ΔAOC. Так как AO = OC (как радиусы окружности), а $\angle O = 60°$, то ΔABC — равносторонний, значит,

$$AC = AO = OC = r = 5 \text{ см}.$$

Ответ: AC = 5 см.

№ 50. Точки A, B, C лежат на окружности. Чему равен угол ABC, если хорда AC равна радиусу окружности? (Два случая.)





1) $\angle AOC$ является центральным для $\angle ABC$.

Так как AC = AO = OC, то ΔAOC равносторонний, следовательно $\angle AOC = 60°$, а

$$\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC = 30°.$$

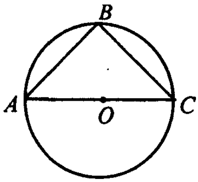
2) $\angle AOC$ в ΔAOC равен $60°$, но центральный угол, соответствующий нашему вписанному, есть угол, дополнительный к $\angle AOC$ и равен $360° - 60° = 300°$. Тогда:

$$\angle ABC = \frac{1}{2} 300° = 150°.$$

Ответ: $\angle ABC = 30°$ или $150°$.

№ 51. Докажите, что центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина гипотенузы.

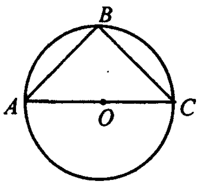
Пусть ΔABC вписан в окружность с центром O.



Из следствия теоремы 11.5 о вписанном угле имеем, что $\angle B = 90°$ опирается на диаметр окружности; значит, гипотенуза треугольника AC — диаметр окружности и точка O — центр окружности находится в ее середине. Что и требовалось доказать.

№ 52. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два равнобедренных треугольника.

Опишем около ΔABC окружность.

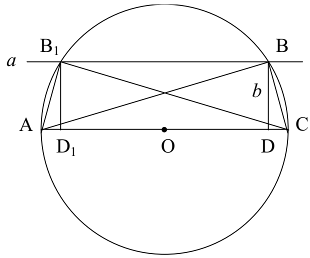


Центр окружности будет совпадать с серединой гипотенузы (по доказанному в задаче № 51). Значит, BO — медиана, но

ΔABO и ΔBCO равнобедренные, так как $AO = OB$ и $OB = OC$ — радиусы одной окружности. Что и требовалось доказать.

№ 53. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и высоте, опущенной из вершины прямого угла на гипотенузу.

Пусть AC — гипотенуза; $BD = b$ — высота.



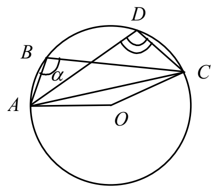
Построение:

1) проведем отрезок AC, разделим его пополам, приняв O за середину AC;

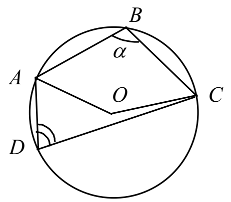
2) проведем окружность с центром в точке O и радиусом AO;

3) проведем прямую $a \parallel AC$ на расстоянии b от прямой AC. Прямая a пересечет окружность в двух точках B_1 и B. Так что ΔABC и ΔAB_1C — искомые.

№ 54. На окружности отмечены четыре точки A, B, C, D. Чему равен угол ADC, если угол ABC равен α? (Два случая.)



1-й случай: $\angle ADC$ и $\angle ABC$ — вписанные, опирающиеся на одну хорду. Поэтому $\angle ADC = \frac{1}{2}\angle AOC = \angle ABC = \alpha$.

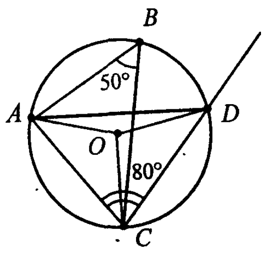


2-й случай: в ΔAOC $\angle AOC = 360° - 2\alpha$, так как дополнительный к нему угол $\angle AOC = 2\alpha$, как центральный угол, соответствующий описанному $\angle B = \alpha$.

$$\angle ADC = \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}(360° - 2\alpha) = 180° - \alpha.$$

Ответ: 1) α; 2) 180° – α.

№ 55. Хорды окружности AD и BC пересекаются. Угол ABC равен 50°, угол ACD равен 80°. Найдите угол CAD.



$\angle ADC = \angle ABC = 50°$ — как вписанные, опирающиеся на одну хорду. Тогда $\angle CAD = 180° - \angle ADC - \angle ACD = 180° - 50° - 80° = 50°$.

Ответ: 50°.

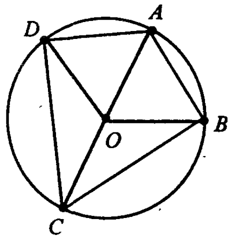
№ 56*. Докажите, что у четырехугольника, вписанного в окружность, сумма противолежащих углов равна 180°.

Пусть четырехугольник ABCD вписан в окружность. По теореме 11.5 имеем:

$$\angle A + \angle C = \frac{1}{2}\angle DOB + \frac{1}{2}\angle BOD =$$

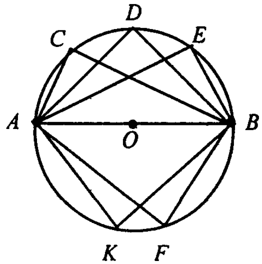
$$= \frac{1}{2}(\angle DOB + \angle BOD) = \frac{1}{2}360° = 180°,$$

так как $\angle DOB$ и $\angle BOD$ дополнительные.



Аналогично $\angle D + \angle B = 180°$. Что и требовалось доказать.

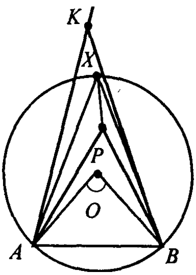
№ 57. Докажите, что геометрическое место вершин прямых углов, стороны которых проходят через две данные точки, есть окружность.



Пусть существует такая точка D, что $\angle ADB = 90^{\circ}$. Опишем окружность вокруг прямоугольного ΔADB. Тогда ее центром является точка O — середина AB. А радиус равен $\frac{1}{2}AB = AO$, то есть не зависит от точки D. Так что любая точка — вершина прямого угла (из условия задачи) принадлежит окружности с центром O — середина AB, и радиусом $AO = \frac{1}{2}AB$. Что и требовалось доказать.

№ 58. Докажите, что геометрическое место вершин углов с заданной градусной мерой, стороны которых проходят через две данные точки, а вершины лежат по одну сторону от прямой, соединяющей эти точки, есть дуга окружности с концами в этих точках.

Пусть AB — прямая. Угол AXB — вписан в окружность. Если вершина X принадлежит дуге окружности (O; r), то все углы, вершины которых лежат на окружности по одну сторону от прямой AB, равны $\frac{1}{2}\angle AOB$, поэтому они равны между собой.



Докажем теперь, что данным свойством обладают только точки этой части окружности. Рассмотрим два варианта:

а) вершина P лежит внутри окружности, тогда $\angle APB > \angle AXB$;

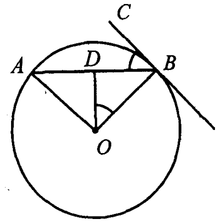
б) вершина K лежит вне окружности, тогда $\angle AXB > \angle AKB$.

Так что вершины должны лежать на окружности, то есть на дуге окружности.

Что и требовалось доказать.

№ 59. Докажите, что острый угол между хордой окружности и касательной к окружности в конце хорды равен половине угла между радиусами, проведенными к концам хорды.

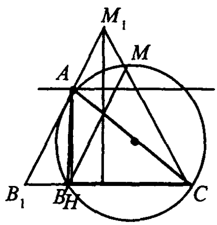
Пусть OA и OB — радиусы окружности (O; r); AB — хорда; CB — касательная. Тогда $\angle OBC = 90°$(по свойству касательной), а $\angle OBD = \angle OAD$ (как углы равнобедренного треугольника. Тогда $\angle OBD = \frac{180° - \angle AOB}{2} = 90° - \frac{1}{2}\angle AOB$.



Далее $\angle CBA = \angle OBC - \angle OBD = 90° - (90° - \frac{1}{2} AOB) =$
$= 90° - 90° + \frac{1}{2}\angle AOB = \frac{1}{2}\angle AOB.$

Что и требовалось доказать.

№ 60. Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и высоте, проведенной из вершины этого угла.



Пусть a — сторона ΔABC; $\angle A = \alpha$; h_a — высота, опущенная из $\angle A$.

Построение:

1) Построим равнобедренный треугольник B_1M_1C с $\angle M_1 = \angle A = \alpha$.

2) На луче CB_1 отложим отрезок $CB = a$ от точки C.

3) Проведем $BM \parallel B_1M_1$ через точку B.

4) Около ΔMCB опишем окружность.

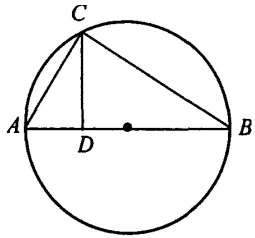
5) Проведем прямую $b \parallel BC$, находящуюся на расстоянии h_a.

6) Обозначим точку пересечения b и окружности A.

ΔABC — искомый, так как $\angle A = \angle M = a$ (как вписанные углы, лежащие по одну сторону от прямой BC); $BC = a$ (по построению); $AH = h_a$ (по построению).

№ 61. Из точки C окружности проведен перпендикуляр CD к диаметру AB. Докажите, что $CD^2 = AD \cdot BD$.

Пусть AB — диаметр окружности; $CD \perp AB$.

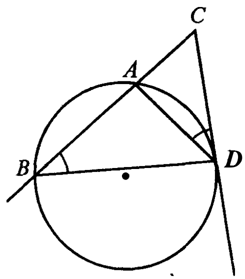


1) Проведем лучи CA и CB, получим ΔACB, у которого $\angle C = 90°$ (т.к. опирается на диаметр).

2) По признаку подобия прямоугольных треугольников имеем: $\Delta ACD \sim \Delta CDB$, так что $\frac{AD}{CD} = \frac{CD}{BD}$, т.е. $CD^2 = AD \cdot BD$.

Что и требовалось доказать.

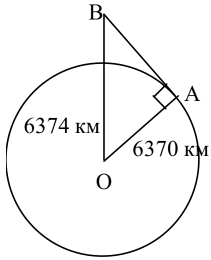
№ 62. Докажите, что произведение отрезков секущей окружности равно квадрату отрезка касательной, проведенной из той же точки: $AC \cdot BC = CD^2$.



$\angle ABD = \angle ADC$.

Рассмотрим ΔCBD и ΔACD. $\angle CBD = \angle CDA$ (по условию), $\angle C$ — общий, поэтому $\Delta CBD \sim \Delta ACD$ по двум углам, значит: $\frac{BC}{CD} = \frac{CD}{AC}$, откуда имеем: $CD^2 = AC \cdot BC$. Что и требовалось доказать.

№ 63. Как далеко видно из самолета, летящего на высоте 4 км над Землей, если радиус Земли 6370 км?

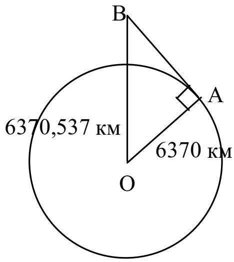


Пусть B — точка нахождения самолета. Проведем касательную BA. Тогда в ΔAOB, $\angle A = 90°$; AO = 6370 км; OB = = 6374 км. По теореме Пифагора:

$$AB = \sqrt{6374^2 - 6370^2} = \sqrt{(6374 - 6370)(6374 + 6370)} =$$
$$= \sqrt{4 \cdot 12744} \approx 225{,}8 \text{ км.}$$

Ответ: ≈225,8 км.

№ 64. Вычислите радиус горизонта, видимого с вершины телебашни в Останкине, высота которой 537 м.



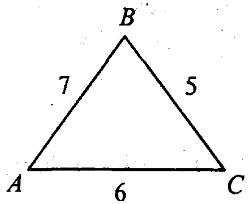
Аналогично задаче № 65 получаем:

$$AB = \sqrt{6370{,}537^2 - 6370^2} = \sqrt{(6370{,}537 - 6370)(6370{,}537 + 6370)} =$$
$$= \sqrt{0{,}537 \cdot 12740{,}537} \approx 82{,}7 \text{ км}$$

Ответ: ≈82,7 км.

§ 12. РЕШЕНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

№ 1. Стороны треугольника 5 м, 6 м, 7 м. Найдите косинусы углов треугольника.



Пусть AB = 7м; BC = 5м; AC = 6м. Тогда по теореме косинусов

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cdot \cos\angle C,$$

то есть:

$$\cos\angle C = \frac{BC^2 + AC^2 - AB^2}{2BC \cdot AC} = \frac{25 + 36 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5},$$

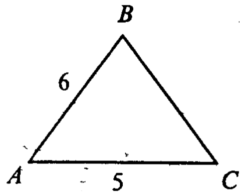
аналогично:

$$\cos\angle A = \frac{BA^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{49 + 36 - 25}{2 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{60}{84} = \frac{5}{7},$$

$$\cos\angle B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{49 + 25 - 36}{2 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{38}{70} = \frac{19}{35}.$$

Ответ: $\cos\angle C = \frac{1}{5}$, $\cos\angle A = \frac{5}{7}$, $\cos\angle B = \frac{19}{35}$.

№ 2. У треугольника две стороны равны 5 м и 6 м, а синус угла между ними равен 0,6. Найдите третью сторону.



Пусть AB = 6 м, AC = 5 м; $\sin\angle A = 0{,}6$. Имеем:

$$\cos^2\angle A = 1 - \sin^2\angle A,$$

$$\cos\angle A = \pm\sqrt{1-\sin^2 A} = \pm\sqrt{1-0{,}36} = \pm\sqrt{0{,}64} = \pm 0{,}8\,.$$

Далее по теореме косинусов:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB\cdot AC\cdot\cos\angle A$$

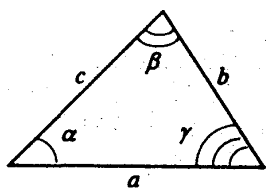
получаем, что

а) $BC^2 = 36 + 25 - 2\cdot5\cdot6\cdot0{,}8 = 61 - 48 = 13$ м^2 и $BC = \sqrt{13}$ м;

б) $BC^2 = 36 + 25 - 2\cdot5\cdot6(-0{,}8) = 61 + 48 = 109$ м^2 и $BC = \sqrt{109}$ м.

Ответ: а) $\sqrt{13}$ м; б) $\sqrt{109}$ м.

№ 3. Стороны треугольника равны a, b, c. Докажите, что если $a^2 + b^2 > c^2$, то угол, противолежащий стороне c, острый. Если $a^2 + b^2 < c^2$, то угол, противолежащий стороне c, тупой.



γ — угол треугольника, противолежащий стороне c. По теореме косинусов имеем:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma,$$

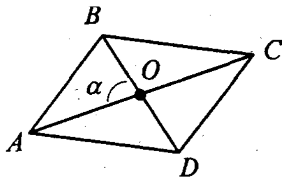
откуда получаем:

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Если $a^2 + b^2 > c^2$, то $a^2 + b^2 - c^2 > 0$; тогда $\cos\gamma > 0$, а так как $0 < \gamma < 180°$, то γ — острый.

Если $a^2 + b^2 < c^2$, то $\cos\gamma < 0$ и угол γ — тупой. Что и требовалось доказать.

№ 4. Даны диагонали параллелограмма c и d и угол между ними α. Найдите стороны параллелограмма.



Пусть ABCD — параллелограмм, AC=c, BD=d, $\angle$AOB=α.

Тогда OC = AO = $\frac{1}{2}$ AC = $\frac{1}{2}c$, BO = $\frac{1}{2}$ BD = $\frac{1}{2}d$ (по свойству диагоналей параллелограмма), $\angle AOB = \alpha$, так что по теореме косинусов имеем:

$$AB^2 = AO^2 + BO^2 - 2AO\cdot BO\cdot\cos\angle AOB =$$
$$= \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}d^2 - \frac{1}{2}cd\cdot\cos\alpha$$

$$AB = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}d^2 - \frac{1}{2}cd\cdot\cos\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + d^2 - 2cd\cdot\cos\alpha}.$$

В ΔBOC по теореме косинусов имеем:

$$BC^2 = BO^2 + OC^2 - 2BO\cdot OC\cdot\cos(180° - \alpha) =$$
$$= \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}d^2 - \frac{1}{2}cd\cdot\cos(180° - \alpha) = \frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}d^2 + \frac{1}{2}cd\cdot\cos\alpha$$

Т.к. $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$, поэтому

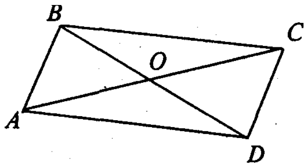
$$\text{BC} = \sqrt{\frac{1}{4}c^2 + \frac{1}{4}d^2 + \frac{1}{2}cd \cdot \cos\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{d^2 + c^2 + 2cd \cdot \cos\alpha}.$$

Далее AB = CD и AD = BC.

Ответ: $\frac{1}{2}\sqrt{c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos\alpha}$; $\frac{1}{2}\sqrt{d^2 + c^2 + 2cd \cdot \cos\alpha}$

№ 5. Даны стороны параллелограмма a и b и один из углов α. Найдите диагонали параллелограмма.

Пусть ABCD — параллелограмм, AB = a, AD = b, $\angle$A = α.



В ΔBAD, по теореме косинусов:

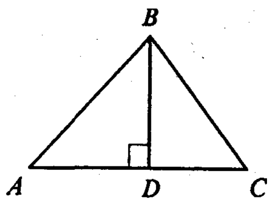
$$\text{BD} = \sqrt{\text{AB}^2 + \text{AD}^2 - 2\text{AB} \cdot \text{AD} \cdot \cos\alpha} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}.$$

В ΔABC, по теореме косинусов:

$$\text{AC} = \sqrt{\text{AB}^2 + \text{BC}^2 - 2\text{AB} \cdot \text{BC} \cdot \cos\beta} =$$
$$= \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos(180° - \alpha)} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}.$$

Ответ: $\text{BD} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$; $\text{AC} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}$.

№ 6. Стороны треугольника 4 м, 5 м и 6 м. Найдите проекции сторон 4 м и 5 м на прямую, содержащую сторону 6 м.



BD⊥AC; AB = 5м, BC = 4 м, AC = 6 м; AD — проекция AB на AC, DC — проекция BC на AC.

По теореме косинусов:

$$\cos\angle A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{25+36-16}{2\cdot5\cdot6}=\frac{45}{60}=\frac{3}{4};$$

$$\cos\angle C=\frac{BC^2+AC^2-AB^2}{2BC\cdot AC}=\frac{16+36-25}{2\cdot4\cdot6}=\frac{27}{48}=\frac{9}{16}.$$

Далее в прямоугольном ΔABD имеем:

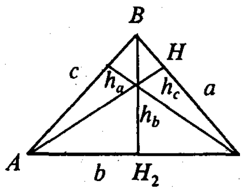
$$AD=AB\cos\angle A=5\cdot\frac{3}{4}=\frac{15}{4}=3{,}75\ \text{м}.$$

А в ΔBCD:

$$DC=BC\cos\angle C=4\cdot\frac{9}{16}=\frac{9}{4}=2{,}25\ \text{м}.$$

Ответ: AD = 3,75 м; DC = 2,25 м.

№ 8. Найдите высоты треугольника в задаче 1.



Найдем h_a, h_b, h_c. Из задачи 1 знаем, что

$$\cos\angle A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2ab}=\frac{36+49-25}{2\cdot6\cdot7}=\frac{60}{84}=\frac{5}{7};$$

$$\cos\angle B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{25+49-36}{2\cdot5\cdot7}=\frac{38}{70}=\frac{19}{35};$$

$$\cos\angle C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{25+36-49}{2\cdot5\cdot6}=\frac{12}{60}=\frac{1}{5}.$$

Из основного тригонометрического тождества получаем:

$$\sin\angle A = \sqrt{1-\cos^2\angle A} = \sqrt{1-\frac{25}{49}} = \sqrt{1-\frac{25}{49}} = \sqrt{\frac{24}{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7};$$

$$\sin\angle B = \sqrt{1-\cos^2\angle B} = \sqrt{1-\frac{361}{1225}} = \sqrt{\frac{864}{1225}} = \frac{12\sqrt{6}}{35};$$

$$\sin\angle C = \sqrt{1-\cos^2\angle C} = \sqrt{1-\frac{1}{25}} = \sqrt{\frac{24}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}.$$

Далее находим:

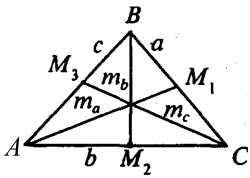
из ΔABH_1 $h_a = c\cdot\sin\angle B = 7\cdot\frac{12\sqrt{6}}{35} = \frac{12\sqrt{6}}{5}$ м;

из ΔBCH_2 $h_b = a\cdot\sin\angle C = 5\cdot\frac{2\sqrt{6}}{5} = 2\sqrt{6}$ м;

из ΔACH_3 $h_c = b\cdot\sin\angle A = 6\cdot\frac{2\sqrt{6}}{7} = \frac{12\sqrt{6}}{7}$ м.

Ответ: $h_a = \frac{12\sqrt{6}}{5}$ м, $h_b = 2\sqrt{6}$ м, $h_c = \frac{12\sqrt{6}}{7}$ м.

№ 9. Найдите медианы треугольника в задаче № 1 §12.



Найдем медианы m_a, m_b и m_c.

В ΔABM_1 AB=c=7 м, $BM_1 = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}a = \frac{5}{2}$ м, $\cos\angle B = \frac{19}{35}$ (см. задачу № 1 §12). По теореме косинусов:

$$m_a = \mathrm{AM}_1 = \sqrt{c^2 + (\frac{1}{2}a)^2 - 2 \cdot c \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos \angle \mathrm{B}} =$$

$$= \sqrt{49 + \frac{25}{4} - 2 \cdot 7 \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{19}{35}} = \sqrt{\frac{145}{4}} = \frac{\sqrt{145}}{2}$$

В $\Delta \mathrm{BCM}_2$ BC = a = 5 м, $\mathrm{BM}_2 = \frac{1}{2}\mathrm{AC} = \frac{1}{2}b = 3$ м, $\cos \angle \mathrm{C} = \frac{1}{5}$.

Из теоремы косинусов:

$$m_b = \mathrm{BM}_2 = \sqrt{a^2 + \left(\frac{1}{2}b\right)^2 - 2a\left(\frac{1}{2}b\right) \cdot \cos \angle \mathrm{C}} =$$

$$= \sqrt{25 + 9 - 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot \frac{1}{5}} = \sqrt{34 - 6} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}.$$

В $\Delta \mathrm{AM}_3\mathrm{C}$ AC=b=6 м, $\mathrm{AM}_2 = \frac{1}{2}\mathrm{AB} = \frac{1}{2}c = \frac{7}{2}$ м, $\cos \angle \mathrm{A} = \frac{5}{7}$.

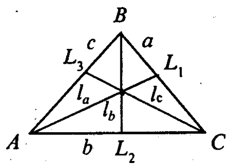
Так что

$$m_c = \mathrm{CM}_3 = \sqrt{b^2 + \left(\frac{1}{2}c\right)^2 - 2b\left(\frac{1}{2}c\right) \cdot \cos \angle \mathrm{A}} =$$

$$= \sqrt{36 + \frac{49}{4} - 2 \cdot 6 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{7}} = \sqrt{\frac{73}{4}} = \frac{\sqrt{73}}{2}$$

Ответ: $m_a = \frac{\sqrt{145}}{2}$; $m_b = 2\sqrt{7}$; $m_c = \frac{\sqrt{73}}{2}$

№ 10*. Найдите биссектрисы треугольника в задаче № 1.



Пусть $\mathrm{AL}_1 = l_a$, $\mathrm{BL}_2 = l_b$, $\mathrm{CL}_3 = l_c$ — биссектрисы. По свойству биссектрисы треугольника:

$$\frac{AB}{BL_1} = \frac{AC}{CL_1}.$$

Известно, что AB = 7 м, AC = 6 м. Пусть $BL_1 = x$ м, следовательно $L_1C = 5 - x$, откуда:

$$\frac{7}{x} = \frac{6}{5-x};\ 35 - 7x = 6x;\ -13x = -35;\ x = \frac{35}{13},$$

значит, $BL_1 = \frac{35}{13}$.

В ΔABL_1 AB = 7 м, $BL_1 = \frac{35}{13}$, $\cos\angle B = \frac{19}{35}$ (см. задачу № 1). По теореме косинусов получаем:

$$AL_1 = \sqrt{AB^2 + BL_1^2 - 2AB \cdot BL_1 \cdot \cos\angle B};$$

$$AL_1 = \sqrt{49 + \frac{1225}{169} - 2 \cdot 7 \cdot \frac{35}{13} \cdot \frac{19}{35}} = \sqrt{49 + \frac{1225}{169} - \frac{3458}{169}} =$$

$$= \sqrt{49 - \frac{2233}{169}} = \sqrt{\frac{6048}{169}} = \frac{12\sqrt{42}}{13}.$$

Аналогично: $\frac{AB}{AL_2} = \frac{BC}{L_2C}$, т.е. $\frac{7}{y} = \frac{5}{6-y}$, где $AL_2 = y$ м,

$$42 - 7y = 5y;\ -12y = -42;\ y = \frac{7}{2};$$

следовательно $AL_2 = \frac{7}{2}$ м.

В ΔABL_2, AB = 7 м, $AL_2 = \frac{7}{2}$ м, $\cos\angle A = \frac{5}{7}$, тогда

$$BL_2 = \sqrt{AB^2 + AL_2^2 - 2AB \cdot AL \cdot \cos\angle A} = \sqrt{49 + \frac{49}{4} - 2 \cdot 7 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{5}{7}} =$$

$$= \sqrt{\frac{105}{4}} = \frac{\sqrt{105}}{2}.$$

Далее $\frac{BC}{BL_3} = \frac{AC}{AL_3}$, т.е. $\frac{5}{z} = \frac{6}{7-z}$, где $BL_3 = z$ м.

$$35 - 5z = 6z;\ -11z = -35;\ z = \frac{35}{11};$$

т.е. $BL_3 = \frac{35}{11}$.

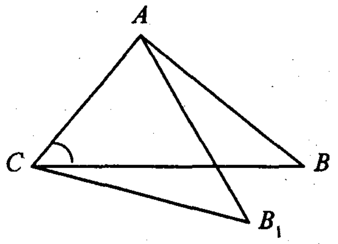
В ΔCBL_3

$$CL_3 = \sqrt{BC^2 + BL_3^2 - 2BC \cdot BL_3 \cos\angle B} =$$

$$= \sqrt{25 + \frac{1225}{121} - \frac{2090}{121}} = \sqrt{\frac{2160}{121}} = \frac{12\sqrt{15}}{11}.$$

Ответ: $AL_1 = \frac{12\sqrt{42}}{13}$; $BL_2 = \frac{\sqrt{105}}{2}$; $CL_3 = \frac{12\sqrt{15}}{11}$.

№ 11*. Как изменяется сторона AB треугольника ABC, если угол C возрастает, а длины сторон AC и BC остаются без изменений?

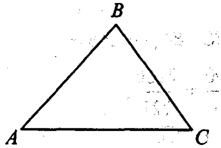


Имеем:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cdot \cos\angle C.$$

Если AC и AB не изменяются, а $\angle C$ возрастает, то $\cos\angle C$ — убывает, следовательно AB^2 возрастает. Значит, AB возрастает.

№ 12. У треугольника ABC AB = 15 см, AC = 10 см. Может ли $\sin\beta = \frac{3}{4}$?



По теореме синусов: $\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{AC}{\sin \angle B}$, откуда имеем:

$$\sin\beta = \frac{AC \cdot \sin\angle C}{AB} = \frac{10}{15} \cdot \sin\angle C = \frac{2}{3} \cdot \sin\angle C,$$

то есть $\sin\angle C = \frac{3}{2}\sin\beta$.

Если $\sin\beta = \frac{3}{4}$, то $\sin \angle C = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$, но $-1 < \sin\angle C < 1$, а $\frac{9}{8} > 1$, так что $\sin\beta$ не может быть равен $\frac{3}{4}$.

Ответ. Не может.

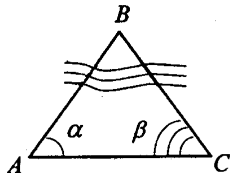
№ 14. Как найти радиус окружности, описанной около треугольника, зная его стороны? Найдите радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 5 м, 6 м, 7 м.

По теореме синусов: $R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}$. Далее, пусть $b = 6$ м. Тогда $\sin\beta = \frac{12\pi}{35}$ (смотри задачу № 8). Так что

$$R = \frac{b}{2\sin\angle B} = \frac{6}{2 \cdot \frac{12\sqrt{6}}{35}} = \frac{6 \cdot 35}{2 \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{35}{4\sqrt{6}}.$$

Ответ: $\frac{35}{4\sqrt{6}}$.

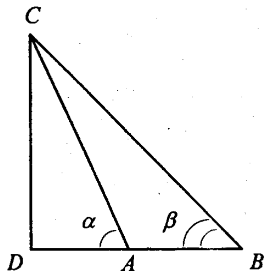
№ 15. Объясните, как найти расстояние от точки A до недоступной точки B, зная расстояние AC и углы α и β.



По теореме синусов: $\frac{AB}{\sin\beta} = \frac{AC}{\sin\angle B}$, тогда: $AB = \frac{AC \cdot \sin\beta}{\sin\angle B}$,

т.к. $\angle B = 180° - (\alpha + \beta)$, то $\sin B = \sin(180° - (\alpha + \beta) = \sin(\alpha + \beta)$ и $AB = \frac{AC \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$.

№ 16. Объясните, как найти высоту x здания по углам α и β и расстоянию a.



В ΔABC $\angle A = 180° - \alpha$, тогда $\angle C = 180° - \beta - (180° - \alpha) = \alpha - \beta$.

Далее по теореме синусов: $\frac{AC}{\sin\beta} = \frac{AB}{\sin\angle C}$, так что $AC = \frac{AB \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$.

ΔACD — прямоугольный, поэтому:

$$x = CD = AC\sin\alpha = \frac{AB\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

№ 18. В треугольнике ABC $\angle A = 40°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 80°$. Какая из сторон треугольника наибольшая, какая — наименьшая?

По теореме синусов $\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{AC}{\sin\angle B}$. Из условия следует что $\sin\angle C > \sin\angle B > \sin\angle A$, тогда $AB > AC > BC$, т.е. сторона AB — наибольшая, а сторона BC — наименьшая.

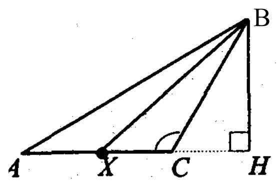
№ 19. У треугольника ABC стороны AB= 5,1 м, BC = 6,2 м, AC = 7,3 м. Какой из углов треугольника наибольший, какой — наименьший?

По теореме синусов $\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{BC}{\sin\angle A} = \frac{AC}{\sin\angle B}$. Так как по условию $AC > BC > AB$, то и $\sin\angle B > \sin\angle A > \sin\angle C$, значит и $\angle B > \angle A > \angle C$. Поэтому $\angle B$ — наибольший, а $\angle C$ — наименьший.

№ 20. Что больше — основание или боковая сторона равнобедренного треугольника, если прилежащий к основанию угол больше 60°?

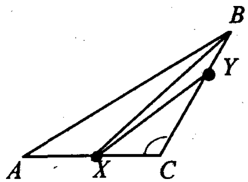
Так как прилежащий к основанию угол больше 60°, то угол при вершине меньше 60°. По теореме синусов против меньшего угла лежит меньшая сторона, так что боковая сторона больше.

№ 21. У треугольника ABC угол C тупой. Докажите, что если точка X лежит на стороне AC, то $BX < AB$.



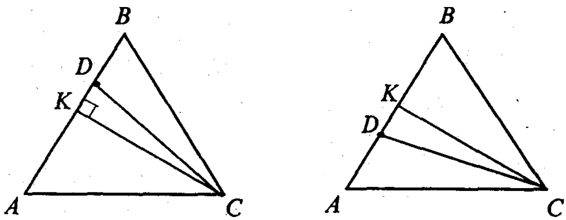
Проведем $BH \perp AC$. Так как X лежит на AC, то $AH > XH$, а значит, наклонная $AB > BX$ (т.к. из двух наклонных больше та, проекция которой больше). Что и требовалось доказать.

№ 22. У треугольника ABC угол C тупой. Докажите, что если точка X лежит на стороне AC, а точка Y — на стороне BC, то XY < AB.



Соединим X с B, по доказанному в предыдущей задаче XB < AB и XY < XB. Так что XY < AB, что и требовалось доказать.

№ 23. На стороне AB треугольника *ABC* отмечена точка D. Докажите, что отрезок CD меньше по крайней мере одной из сторон: AC или BC.



Проведем CK ⊥ AB. Точка D лежит или между B и K или между A и K.

Если D лежит между точками K и B, то KB > KD; а если проекция больше, то больше и наклонная, т.е. AB > CD.

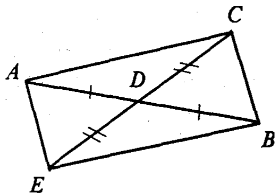
Аналогично доказывается, что CD < AC, если точка D лежит между точками A и K.

Если D совпадает с K, то CD < CB, так как наклонная больше перпендикуляра.

Что и требовалось доказать.

№ 24*. Дан треугольник ABC, CD — медиана, проведенная к стороне AB. Докажите, что если AC > BC, то угол ACD меньше угла BCD.

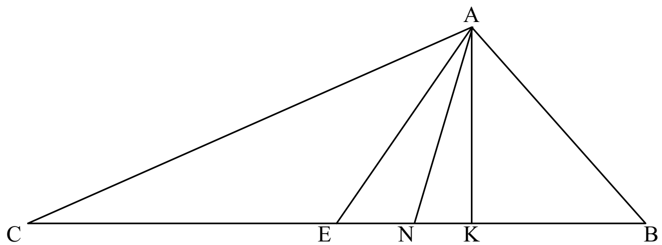
Продолжим медиану CD и отложим на ней отрезок DE = CD; полученный четырехугольник ACBE — параллелограмм. BE = AC и CB = AE.



В ΔACE $\angle ACD$ лежит против стороны AE = CB. В ΔCBE $\angle BCD$ лежит против стороны BE = AC. Так как AC > BC, то $\angle ACD < \angle BCD$. Что и требовалось доказать.

№ 25*. Докажите, что биссектриса треугольника не меньше высоты и не больше медианы, проведенных из этой же вершины.

Пусть в ΔABC, AK — высота, AN — биссектриса $\angle A$, AE — медиана.



Из точки A к прямой BC проведены перпендикуляр AK (высота) и две наклонные. Следовательно точка N принадлежит либо KB, либо KE.

Точка N совпадает с K, тогда AN = AK < AE.

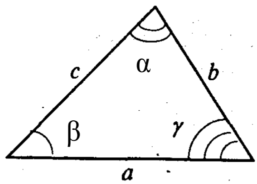
Точка N совпадает с E, тогда AN = AE > AK.

Точка N лежит между точками K и E, тогда AK < AN < AE (так как ее проекция NK меньше EK — проекции AE).

По доказанному в задаче № 24, AN не может быть больше AE, т.е. точка N не может лежать между E и C. Что и требовалось доказать.

№ 26. Даны сторона и два угла треугольника. Найдите третий угол и остальные две стороны, если:

1) $a = 5$, $\beta = 30°$, $\gamma = 45°$
2) $a = 20$, $\alpha = 75°$, $\beta = 60^0$;
3) $a = 35$, $\beta = 40°$, $\gamma = 120°$;
4) $b = 12$, $\alpha = 36°$, $\beta = 25°$;
5) $c = 14$, $\alpha = 64°$, $\beta = 48°$.



1) $\alpha = 180° - \beta - \gamma = 180° - 30° - 45° = 105°$

Используя теорему синусов: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$, получаем:

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{5\sin 30^{\circ}}{\sin 105^{\circ}} \approx 2{,}59,$$

$$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{5\sin 45^{\circ}}{\sin 105^{\circ}} \approx 3{,}66.$$

2) $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 75° - 60° = 45°$.

Используя теорему синусов: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$, получаем:

$$b = \frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{20\cdot\sin 60^{\circ}}{\sin 75^{\circ}} = \frac{20\cdot 0{,}87}{0{,}97} \approx 17{,}9\,,$$

$$c = \frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{20\cdot\sin 45^{\circ}}{\sin 75^{\circ}} = \frac{20\cdot 0{,}7}{0{,}97} \approx 14{,}4\,.$$

3) $\alpha = 180^{\circ} - \beta - \gamma = 180° - 120^{\circ} - 40^{\circ} = 20^{\circ}$.

Используя теорему синусов: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$, получаем:

$$b=\frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha}=\frac{35\cdot\sin 40^{\circ}}{\sin 20^{\circ}}=\frac{35\cdot 0{,}64}{0{,}34}\approx 65{,}8\ ,$$

$$c=\frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}=\frac{35\cdot\sin 120^{\circ}}{\sin 20^{\circ}}=\frac{35\cdot 0{,}87}{0{,}34}\approx 89{,}6\ .$$

4) $\gamma = 180^{\circ} - \alpha - \beta = 180^{\circ} - 36^{\circ} - 25^{\circ} = 119^{\circ}$.

Используя теорему синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$, получаем:

$$c=\frac{b\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}\beta=\frac{12\cdot\sin 119^{\circ}}{\sin 25^{\circ}}\approx\frac{12\cdot 0{,}88}{0{,}42}=24{,}8\ ,$$

$$a=\frac{b\cdot\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{12\cdot 0{,}88}{0{,}42}\approx 16{,}7\ .$$

5) $\gamma = 180^{\circ} - \alpha - \beta = 180^{\circ} - 64^{\circ} - 48^{\circ} = 68^{\circ}$.

Используя теорему синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$, получаем:

$$a=\frac{c\cdot\sin\alpha}{\sin\gamma}=\frac{14\cdot\sin 64^{\circ}}{\sin 68^{\circ}}=\frac{14\cdot 0{,}9}{0{,}93}\approx 13{,}6\ ,$$

$$b=\frac{c\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{14\cdot 0{,}74}{0{,}93}\approx 11{,}2\ .$$

№ 27. Даны две стороны и угол между ними. Найдите остальные два угла и третью сторону, если:
1) $a = 12$, $b = 8$, $\gamma = 60^{\circ}$;
2) $a = 7$, $b = 23$, $\gamma = 130^{\circ}$;
3) $b = 9$, $c = 17$, $\alpha = 95^{\circ}$;
4) $b = 14$, $c = 10$, $\alpha = 145^{\circ}$;
5) $a = 32$, $c = 23$, $\beta = 152^{\circ}$;
6) $a = 24$, $c = 18$, $\beta = 15^{\circ}$.

1) Используя теорему косинусов, находим:

$$c=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}=\sqrt{144+64-2\cdot 96\cdot 0{,}5}=\sqrt{112}\approx 10{,}6\ .$$

Далее $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{(10{,}6)^2+64-144}{2\cdot 8\cdot 10{,}6} \approx 0{,}19$, так что $\alpha = 79°$, а $\beta = 180° - 79° - 60° = 41°$.

2) Используя теорему косинусов, находим:

$$c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma} = \sqrt{49+529+2\cdot 7\cdot 23\cdot 0{,}64} = \sqrt{784{,}08} \approx 28\,.$$

Далее $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{529+784-49}{2\cdot 23\cdot 28} \approx 0{,}98$, так что $\alpha = 11°$, а $\beta = 180° - 11° - 130° = 39°$.

3) Используя теорему косинусов, находим:

$$a = \sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha} = \sqrt{81+289-306\cos 95^{\circ}} = \sqrt{396{,}7} \approx 19{,}9\,.$$

Далее $\cos\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \dfrac{396{,}01+289-81}{2\cdot 19{,}9\cdot 17} = \dfrac{604{,}01}{676{,}6} = 0{,}89$, так что $\beta = 27°$, а $\gamma = 180° - 95° - 27° = 58°$.

4) Используя теорему косинусов, находим:

$$a = \sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\alpha} = \sqrt{196+100+227{,}6} = \sqrt{523{,}6} \approx 22{,}9\,.$$

Далее: $\cos\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \dfrac{100+523{,}6-196}{2\cdot 22{,}9\cdot 10} \approx 0{,}93$, так что $\beta = 21°$, а $\gamma = 180° - \alpha - \beta = 180° - 145° - 21° = 14°$.

5) Используя теорему косинусов, находим:

$$b = \sqrt{a^2+c^2-2ac\cos\beta} = \sqrt{1024+529+1472\cdot 0{,}88} = \\ = \sqrt{2848{,}36} \approx 53{,}4.$$

Далее: $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \dfrac{2848{,}36+529-1024}{2\cdot 53{,}4\cdot 23} \approx 0{,}9580$, так что $\alpha = 16°$, а $\gamma = 180° - 152° - 16° = 12°$.

6) Используя теорему косинусов, находим:

$$b = \sqrt{a^2+c^2-2ac\cos\beta} = \sqrt{576+324+864\cdot\cos 15^{\circ}} \approx \sqrt{61{,}9} \approx 7{,}9\,.$$

Далее; $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{324 + 61{,}9 - 576}{2 \cdot 7{,}9 \cdot 18} \approx -0{,}67$, так что $\alpha = 130°$, а $\gamma = 180° - 15° - 130° = 35°$.

№ 28. В треугольнике заданы две стороны и угол, противолежащий одной из сторон. Найдите остальные углы к сторону треугольника, если:

1) $a = 12$, $b = 5$, $\alpha = 120°$;
2) $a = 27$, $b = 9$, $\alpha = 138°$;
3) $a = 34$, $b = 12$, $\alpha = 164°$;
4) $a = 2$, $b = 4$, $\alpha = 60°$;
5) $a = 6$, $b = 8$, $\alpha = 30°$.

1) По теореме синусов имеем: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$, откуда получаем:

$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} = \frac{5 \cdot \sin 120^{\circ}}{12} = \frac{5 \cdot 0{,}87}{12} \approx 0{,}3608,$$

т.е. $\beta = 21°$, $\gamma = 180° - 120° - 21° = 39°$ и

$$c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{12 \cdot \sin 39^{\circ}}{\sin 120^{\circ}} = \frac{12 \cdot 0{,}63}{0{,}87} \approx 8{,}69.$$

2) По теореме синусов имеем: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$, откуда получаем:

$$\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\alpha}{a} = \frac{9 \cdot \sin 138^{\circ}}{27} = \frac{9 \cdot 0{,}67}{27} \approx 0{,}223,$$

т.е. $\beta \approx 13°$, $\gamma = 180° - 138° - 13° = 29°$ и

$$c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{27 \cdot \sin 29^{\circ}}{\sin 138^{\circ}} = \frac{27 \cdot 0{,}48}{0{,}67} \approx 19{,}6.$$

3) По теореме синусов имеем: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$, откуда получаем:

$$\sin\beta=\frac{b\cdot\sin\alpha}{a}=\frac{12\cdot\sin 164^{\circ}}{34}=\frac{12\cdot 0{,}28}{34}\approx 0{,}0973,$$

т.е. $\beta = 6^{\circ}$, $\gamma = 180^{\circ} - 164^{\circ} - 6^{\circ} = 10^{\circ}$ и

$$c=\frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}=\frac{34\cdot 0{,}18}{0{,}28}\approx 22{,}3\ .$$

4) По теореме синусов имеем: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$, откуда получаем:

$$\sin\beta=\frac{b\cdot\sin\alpha}{a}=\frac{4\cdot 0{,}87}{2}=1{,}73,$$

но $\sin\beta$ должен быть меньше 1, значит, задача не имеет решения.

5) По теореме синусов имеем: $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$, откуда получаем:

$$\sin\beta=\frac{b\cdot\sin\alpha}{a}=\frac{8\cdot 0{,}5}{6}\approx 0{,}667\ ,$$

т.е. $\beta_1 = 42^{\circ}$ или $\beta_2 = 138^{\circ}$. Тогда $\gamma = 180^{\circ} - \alpha - \beta$, т.е. $\gamma_1 = 108^{\circ}$ или $\gamma_2 = 12^{\circ}$. Далее $c=\frac{a\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}$, так что $c_1 \approx 11{,}4$ или $c_2 \approx 2{,}49$.

№ 29. Даны три стороны треугольника. Найдите его углы, если:

1) $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$;
2) $a = 7$, $b = 2$, $c = 8$;
3) $a = 4$, $b = 5$, $c = 7$;
4) $a = 15$, $b = 24$, $c = 18$;

5) $a = 23$, $b = 17$, $c = 39$;
6) $a = 55$, $b = 21$, $c = 38$.

1) По теореме косинусов имеем:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{9+16-4}{24} = 0{,}875,\ \alpha \approx 29^{\circ},$$

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{4+16-9}{16} = 0{,}6875,\ \beta \approx 47^{\circ}.$$

Тогда $\gamma = 180^{\circ} - 29^{\circ} - 47^{\circ} = 104^{\circ}$.

2) По теореме косинусов имеем:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{4+64-49}{2\cdot 2\cdot 8} = \frac{19}{32} = 0{,}5938,\ \alpha=54^{\circ},$$

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{49+64-4}{2\cdot 7\cdot 8} = \frac{109}{112} = 0{,}9732,\ \beta=13^{\circ}.$$

Тогда $\gamma = 180^{\circ} - 54^{\circ} - 13^{\circ} = 113^{\circ}$.

3) По теореме косинусов имеем:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{25+49-16}{2\cdot 5\cdot 7} = \frac{58}{70} \approx 0{,}8286,\ \alpha = 34^{\circ},$$

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{16+49-25}{2\cdot 4\cdot 7} = \frac{40}{56} \approx 0{,}7143,\ \beta = 44^{\circ}.$$

Тогда $\gamma = 180^{\circ} - 34^{\circ} - 44^{\circ} = 102^{\circ}$.

4) По теореме косинусов имеем:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{576+324-225}{2\cdot 24\cdot 18} \approx 0{,}7813,\ \alpha = 39^{\circ},$$

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{324+225-578}{2\cdot 15\cdot 18} = -\frac{27}{540} = -0{,}05,\ \beta = 93^{\circ}.$$

Тогда $\gamma = 180^{\circ} - 39^{\circ} - 93^{\circ} = 180^{\circ} - 132^{\circ} = 48^{\circ}$.

5) По теореме косинусов имеем:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{289 + 1521 - 289}{2 \cdot 17 \cdot 39} \approx 0{,}966,\ \alpha = 15°,$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{529 + 1521 - 289}{2 \cdot 23 \cdot 39} \approx 0{,}9816,\ \beta = 11°.$$

Тогда $\gamma = 180° - 15° - 11° = 154°$.

6) По теореме косинусов имеем:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - c^2}{2ac} = \frac{441 + 1444 - 3025}{2 \cdot 21 \cdot 38} \approx -0{,}7142,\ \alpha = 136°,$$

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{3025 + 1444 - 441}{2 \cdot 55 \cdot 38} \approx 0{,}9636,\ \beta = 15°.$$

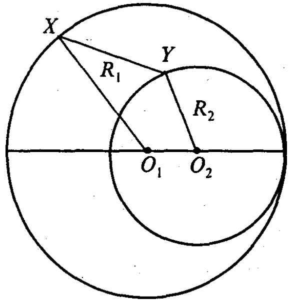
Тогда $\gamma = 180° - 136° - 15° = 29°$.

§ 13. МНОГОУГОЛЬНИКИ

№ 1. Даны две окружности с радиусами R_1 и R_2 и расстояние между центрами $d > R_1 + R_2$. Чему равны наибольшее и наименьшее расстояния между точками X и Y этих окружностей.

Задача решена в п. 113 учебника, стр. 169.

№ 2. Решите задачу 1 при условии, что $d < R_1 - R_2$.



Пусть X и Y — точки на окружностях. По теореме о длине ломаной для ломаной XO_1O_2Y имеем:

$$XY \le XO_1 + O_1O_2 + O_2Y,$$

то есть $XO_1 + O_1O_2 + O_2Y = R_1 + R_2 + d$ — наибольшее расстояние.

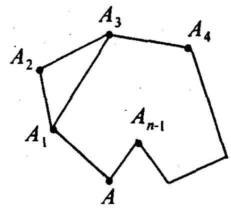
Для ломаной XYO_2O_1 имеем:

$$XO_1 \le XY + YO_2 + O_1O_2;$$
$$R_1 \le XY + R_2 + d,$$
$$XY \ge R_1 - R_2 - d,$$

значит, $(R_1 - R_2 - d)$ — наименьшее расстояние.

№ 3. Докажите, что если вершины ломаной не лежат на одной прямой, то длина ломаной больше длины отрезка, соединяющего ее концы.

Пусть $A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1},A_n$ — ломаная, точки A_1, A_2, ... A_n не лежат на одной прямой.



Доказать, что $A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n > A_1A_n$.

Точки A_1, A_2, A_3 не лежат на одной прямой, по неравенству треугольника имеем:

$$A_1A_2 + A_2A_3 > A_1A_3. \quad (1)$$

Для ломаной $A_1A_3A_4$ получим:

$$A_1A_3 + A_3A_4 > A_1A_4. \quad (2)$$

Подставив (1) в (2), получим:

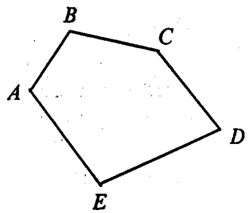
$$A_1A_2 + A_2A_3 + A_3A_4 > A_1A_4.$$

Продолжая преобразования, дальше аналогично получим:

$$A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots + A_{n-1}A_n > A_1A_n,$$

что и требовалось доказать.

№ 4. Докажите, что у замкнутой ломаной расстояние между любыми двумя вершинами не больше половины длины ломаной.



Пусть ABCDEA — замкнутая ломаная линия.

Расстояние между двумя вершинами, например, A и D будем считать отрезком, соединяющим концы ломаной, следовательно по теореме о длине ломаной имеем: $AD \le AB + BC + CD$ и $AD \le AE + ED$, сложив два неравенства, получим:

$$2AD \le AB + BC + CD + DE + EA,$$

$$AD \le \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DE + EA).$$

Что и требовалось доказать.

№ 5. Докажите, что у замкнутой ломаной длина каждого звена не больше суммы длин остальных звеньев.

Так же, как и в решении задачи № 4, получаем, что

$$AE \le AB + BC + CD + DE.$$

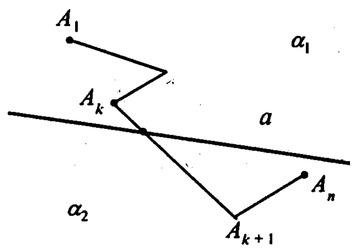
Для других звеньев аналогично.

№ 6. Может ли замкнутая ломаная иметь звенья длиной 1 м, 2 м, 3 м, 4 м, 11 м? Объясните ответ.

Для замкнутой ломаной длина самого большого звена должна быть меньше суммы длин всех остальных звеньев. Для данной ломаной должно выполняться $1+ 2+ 3+ 4 > 11$, то есть $11 < 10$, что неверно.

Ответ. Не может.

№ 7. Докажите, что если концы ломаной лежат по разные стороны от данной прямой, то она пересекает эту прямую.



Докажем, что у прямой и ломаной найдется хотя бы одна общая точка.

Прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости a_1 и a_2, в которых лежат концы A_1, и A_n ломаной $A_1A_2,\ldots A_n$. Докажем, что у прямой a и ломаной найдется хотя бы одна общая точка. Допустим, что $A_1 \in a_1$, $A_n \in a_2$. Каждая из вершин $A_2A_3\ldots A_{n-1}$ принадлежит одной из полуплоскостей или прямой a. Если $A_2 \in a_2$, то отрезок A_1A_2, пересекает прямую a, если $A_2 \in a$, то A_2 является общей точкой прямой и ломаной. Если $A_2 \in a_1$, то рассмотрим вершину A_3 и т.д. То есть если $A_3 \in a_2$, то отрезок A_2A_3 пересечет прямую a, если $A_3 \in a$, то A_3 является общей точкой прямой и ломаной. Если $A_3 \in a_1$, перейдем к рассмотрению вершины A_4 и т.д. Допустим, что среди вершин $A_1, A_2,\ldots A_{n-1}$ не найдется ни одной, которая бы лежала в a_2 или на прямой a, то в этом случае отрезок $A_{n-1}A_n$ пересечет прямую a. Что и требовалось доказать.

№ 8. Сколько диагоналей у n-угольника?

Из каждой вершины n-угольника можно провести диагонали ко всем вершинам, кроме самой себя и двух соседних, т.е. n – 3 диагонали. Поскольку каждая диагональ соединяет две вершины, то общее количество диагоналей

$$d = \frac{n(n-3)}{2}$$

№ 10. Углы выпуклого четырехугольника пропорциональны числам 1, 2, 3, 4. Найдите их.

По теореме о сумме углов многоугольника имеем:

$$S_4 = 180°(n-2) = 180°\cdot(4-2) = 180°\cdot 2 = 360°.$$

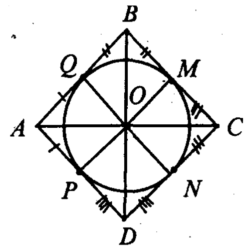
Пусть градусная мера 1-го угла $k°$, 2-го — $2k°$, 3-го — $3k°$ и 4-го — $4k°$. Так как сумма всех углов 360°, получим уравнение:

$$k + 2k + 3k + 4k = 360°;\ 10k = 360°;\ k = 36°.$$

Значит, 1 угол — 36°, 2-й — 72°, 3-й — 108°, 4-й — 144°.

№ 11. Докажите, что у четырехугольника, описанного около окружности, суммы длин противолежащих сторон равны.

Пусть ABCD — четырехугольник, описанный около окружности.



По свойству касательной AP = AQ, DP = DN, CN = CM и BQ = BM, получаем, что

$$AB + CD = AQ + BQ + CN + DN;$$

$$BC + AD = BM + CM + AP + DP.$$

Следовательно

$$AB + CD = BC + AD.$$

Что и требовалось доказать.

№ 12. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый из внутренних углов которого равен: 1) 135°; 2) 150°?

Угол правильного n-угольника вычисляется по формуле:

$$\alpha = \frac{180°(n-2)}{n};$$

1) $135° = \dfrac{180°n - 360°}{n}$, $135°n = 180°n - 360°$, $-45°n = -360°$, $n = 360° : 45°$, $n = 8$;

2) $150° = \dfrac{180°n - 360°}{n}$, $150°n = 180°n - 360°$, $-30°n = -360°$, $n = 360° : (-30°)$, $n = 8$.

№ 13. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, если каждый из внешних его углов равен: 1) 36°; 2) 24°?

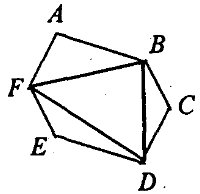
$$S_\alpha = 360°,\ \alpha = \frac{360°}{n};$$

1) $36° = \dfrac{360°}{n}$, $36°n = 360°$, $n = 360° : 36°$, $n = 10$;

2) $24° = \dfrac{360°}{n}$, $24°n = 360°$, $n = 360° : 24°$, $n = 15$.

№ 14. Докажите, что взятые через одну вершины правильного $2n$-угольника являются вершинами правильного n-угольника.

Пусть ABCDEF — правильный $2n$-угольник.



Рассмотрим ΔABF и ΔBCD.

FA = BC, AB = CD (как стороны правильного многоугольника); $\angle A = \angle C$ (как углы правильного многоугольника).

Значит, $\Delta FAB = \Delta BCD$ (по 1-му признаку), т.е. FB = BD.

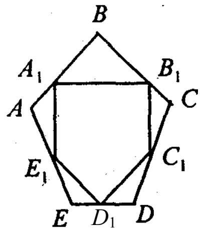
Аналогично доказывается, что все стороны n-угольника BDF равны, следовательно n-угольник — правильный.

Что и требовалось доказать.

№ 15. Докажите, что середины сторон правильного n-угольника являются вершинами другого правильного n-угольника.

Пусть ABCDE — правильный n-угольник, $AA_1 = A_1B$, $BB_1 = B_1C$ и т.д.

Рассмотрим ΔA_1BB_1 и ΔB_1CC_1.

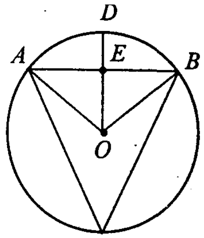


$A_1B = B_1C$, $BB_1 = CC_1$ (как половины равных сторон n-угольника); $\angle B = \angle C$ (из условия). Значит, $\Delta A_1BB_1 = \Delta B_1CC_1$, так что $A_1B_1 = B_1C_1$.

Аналогично доказывается, что все стороны полученного n-угольника равны, то есть n-угольник — правильный.

Что и требовалось доказать.

№ 17. Хорда, перпендикулярная радиусу и проходящая через его середину, равна стороне правильного вписанного треугольника. Докажите.



Нужно доказать, что:

$$AB = a_3 = R\sqrt{3},$$

где R — радиус окружности.

Рассмотрим ΔOEB.

$\angle E = 90°$, т.к. $OD \perp AB$ (по условию), $OB = R$, $OE = \frac{1}{2}R$ (по условию). По теореме Пифагора:

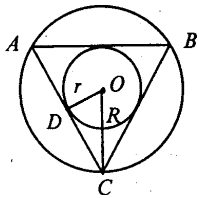
$$EB^2 = OB^2 - OE^2 = R^2 - \frac{1}{4}R^2 = \frac{3}{4}R^2,\ EB = \sqrt{\frac{3}{4}R^2} = \frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

Далее $\Delta AEO = \Delta EBO$ (так как $AO = OB$ и катет OE — общий). Так что: $EA = EB = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Тогда

$$AB = AE + EB = \frac{R\sqrt{3}}{2} + \frac{R\sqrt{3}}{2} = R\sqrt{3}.$$

Что и требовалось доказать.

№ 18. У правильного треугольника радиус вписанной окружности в два раза меньше радиуса описанной окружности. Докажите.



Пусть в ΔABC $AB = a$, $OC = R$ — радиус описанной окружности, $OD = r$ — радиус вписанной окружности.

Рассмотрим ΔDOC.

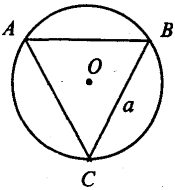
$\angle D = 90°$ (AC — касательная), $\angle OCD = \frac{1}{2}\angle C = \frac{1}{2}60° = 30°$ (как биссектриса равнобедренного треугольника). Тогда $\sin\angle OCD = \frac{OD}{OC}$. То есть

$$\sin 30° = \frac{r}{R},\ \frac{1}{2} = \frac{r}{R},\ R = 2r.$$

Что и требовалось доказать.

№ 19. Сторона правильного вписанного в окружность треугольника равна a. Найдите сторону квадрата, вписанного в эту окружность.

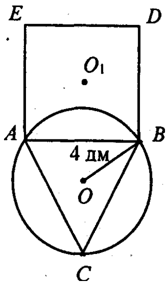
Дано: ΔABC — правильный, вписанный в окружность $a_3 = a$. Найдем a_4.



Так как $a_3 = R\sqrt{3}$, то $a = R\sqrt{3}$; $R = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$.

Далее $a_4 = R\sqrt{2} = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

№ 20. В окружность, радиус которой 4 дм, вписан правильный треугольник, на стороне которого построен квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата.



Пусть ΔABC — правильный, вписанный в окружность, $OB = R_1 = 4$ дм, ABDE — квадрат, R_2 — радиус описанной около квадрата окружности.

Тогда $a_3 = R_1\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$ дм, $a_4 = a_3 = 4\sqrt{3}$ дм. Далее: $a_4 = R_2\sqrt{2}$, $R_2 = \dfrac{a_n}{\sqrt{2}}$, т.е.

$$R_2 = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6} \text{ дм.}$$

Ответ: $R_2 = 2\sqrt{6}$ дм.

№ 21. Конец валика диаметром 4 см опилен под квадрат. Определите наибольший размер, который может иметь сторона квадрата.

Вписанный в окружность квадрат имеет бóльшую сторону. Найдем ее.

$$R = d:2 = 4:2 = 2 \text{ см.}$$

$$a_4 = R\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \text{ см.}$$

Ответ: $2\sqrt{2}$ см.

№ 22. Конец винта газовой задвижки имеет правильную трехгранную форму. Какой наибольший размер может иметь каждая грань, если цилиндрическая часть винта имеет диаметр 2 см?

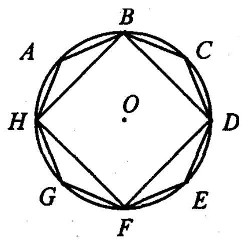
Требуется найти сторону вписанного в окружность треугольника.

$$R = d:2 = 2:2 = 1 \text{ см.}$$

$$a_3 = R\sqrt{3} = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3} \text{ см.}$$

Ответ: $\sqrt{3}$ см.

№ 23. Докажите, что сторона правильного 8-угольника вычисляется по формуле $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, где R — радиус описанной окружности.



Пусть в окружность с радиусом R вписан правильный 8-угольник ABCDEFGH.

Тогда в ΔHAB: $HB = a_4 = R\sqrt{2}$, $AH = AB = a8$, $\angle A = 135^o$. По теореме косинусов: $HB^2 = HA^2 + AB^2 - 2HA \cdot AB \cdot \cos\angle A$, т.е.

$$(R\sqrt{2})^2 = a_8{}^2 + a_8{}^2 - 2a_8{}^2 \cdot \cos 135°,$$

т.к. $\cos 135° = -\cos 45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то

$$2R^2 = 2a_8{}^2 + \sqrt{2}\, a_8{}^2 = a_8{}^2(2 + \sqrt{2}),$$

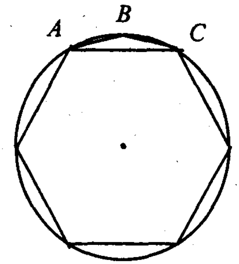
отсюда

$$a_8{}^2 = \frac{2R^2 \cdot (2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})} = \frac{2R^2 \cdot (2-\sqrt{2})}{2} = R^2(2-\sqrt{2}),$$

$$a_8 = \sqrt{R^2(2-\sqrt{2})} = R\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Что и требовалось доказать.

№ 24. Докажите, что сторона правильного 12-угольника вычисляется по формуле $a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, где R — радиус описанной окружности.



Пусть в окружность с радиусом R вписан ABC... — правильный 12-угольник.

В ΔABC: $AC = a_6 = R$, $AB = BC = a_{12}$, $\angle B = 150°$, из теоремы косинусов получаем: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B$, так как $\cos 150° = -\cos 30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то

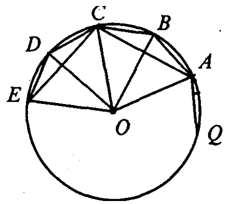
$$R^2 = a_{12}^2 + a_{12}^2 + 2a_{12}^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2a_{12}^2 + \sqrt{3}a_{12}^2 = a_{12}^2(2+\sqrt{3})$$

$$a_{12}^2 = \frac{R^2}{2+\sqrt{3}} = \frac{R^2 \cdot (2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \frac{R^2(2-\sqrt{3})}{1} = R^2(2-\sqrt{3}),$$

т.е. $a_{12} = \sqrt{R^2(2-\sqrt{3})} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Что и требовалось доказать.

№ 25*. Найдите стороны правильного пятиугольника и правильного 10-угольника, вписанных в окружность радиуса R.



Пусть ABCD... — правильный 10-угольник, ACE... — правильный 5-угольник, AO = R.

1) Рассмотрим ΔABO: AB = a_{10}; OA = OB = R.

$$\angle A = \angle B = \frac{1}{2} \cdot \frac{180^{\circ} \cdot (10-2)}{10} = 72^{\circ},$$

тогда $\angle O = 180° - \angle A - \angle B = 36°$.

В задаче № 29 §11 доказано, что основание равнобедренного треугольника с такими углами равно $\frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$, т.е.

$$a_{10} = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}.$$

2) Из ΔABC по теореме косинусов получаем:

$$a_5^2 = AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\angle B,$$

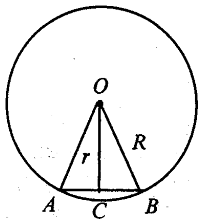
$$a_5^2 = \frac{R^2(\sqrt{5}-1)^2}{4} + \frac{R^2(\sqrt{5}-1)^2}{4} - 2\cdot\frac{R^2(\sqrt{5}-1)^2}{4}\cos 144^{\circ} =$$
$$= \frac{R^2(\sqrt{5}-1)^2}{2}(1+\cos 36^\circ),$$

так как cos144° = –cos36°.

Из ΔABO $\cos 36^{\circ} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ (по теореме косинусов), так что подставив, получим

$$a_5 = R\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}.$$

№ 26. Сторона правильного многоугольника равна a, а радиус описанной окружности R. Найдите радиус вписанной окружности.



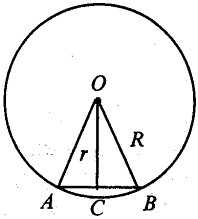
Пусть O — центр окружности, AB = a — сторона правильного многоугольника, OA = R — радиус описанной окружности, OC = r — радиус вписанной окружности.

В ΔOBC: ∠C = 90°, CB = $\frac{a}{2}$, OB = R; так что по теореме Пифагора получаем:

$$r^2 = R^2 - \frac{a^2}{4},$$

$$r = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

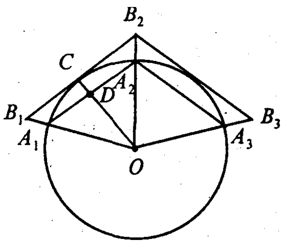
№ 27. Сторона правильного многоугольника равна a, а радиус вписанной окружности r. Найдите радиус описанной окружности.



Пользуясь решением задачи № 26, мы получили $R^2 = r^2 + \frac{a^2}{4}$, так что $R = \sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}$.

№ 28. Выразите сторону b правильного описанного многоугольника через радиус R окружности и сторону a правильного вписанного многоугольника с тем же числом сторон.

Пусть $A_1A_2...A_n$ — правильный n-угольник, вписанный в окружность радиуса R, а $B_1B_2...B_n$ — правильный n-угольник, описанный около той же окружности, $A_1A_2 = a$, $B_1B_2 = b$.



Рассмотрим ΔOA_1D и ΔOB_1C: $\angle O$ — общий; $\angle D = \angle C_1 = 90°$. Значит, $\Delta OA_1D \sim \Delta OB_1C$.

Из подобия треугольников следует, что: $\frac{OD}{OC} = \frac{A_1D}{B_1C}$, то есть $B_1C = \frac{OC \cdot A_1D}{OD}$.

Далее OC = R, $A_1D = \dfrac{a}{2}$. OD найдем из ΔODA_1 по теореме Пифагора:

$$OD = \sqrt{OA_1^2 - A_1D^2} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2},$$

так что

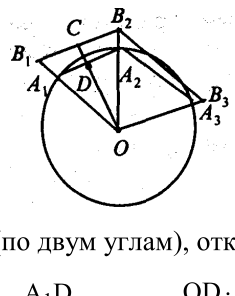
$$B_1C = \frac{R \cdot \frac{a}{2} \cdot 2}{\sqrt{4R^2 - a^2}} = \frac{Ra}{\sqrt{4R^2 - a^2}},$$

$$b = 2B_1C = \frac{2aR}{\sqrt{4R^2 - a^2}}.$$

Ответ: $b = \dfrac{2aR}{\sqrt{4R^2 - a^2}}$.

№ 29. Выразите сторону a правильного вписанного многоугольника через радиус R окружности и сторону b правильного описанного многоугольника с тем же числом сторон.

Пусть $B_1B_2...B_n$ — правильный n-угольник, описанный около окружности радиуса R; $B_1B_2 = b$. $A_1A_2...A_n$ — правильный n-угольник, вписанный в ту же окружность; $A_1A_2 = a$.



$\Delta OB_1C \sim \Delta OA_1D$ (по двум углам), откуда:

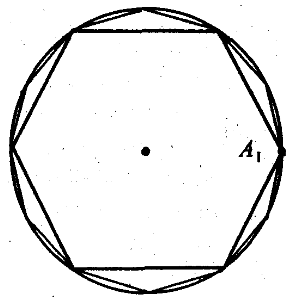
$$\frac{OD}{OC} = \frac{A_1D}{B_1C};\ A_1D = \frac{OD \cdot B_1C}{OC}.$$

Так как OC = R, $B_1D = \frac{b}{2}$ и $OD = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - a^2}$,

то

$$A_1D = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{4R^2 - a^2 \cdot \frac{b}{2}}}{R},\ a = 2A_1D = \sqrt{\frac{4b^2 \cdot R^2}{4R^2 + b^2}} = \frac{2bR}{\sqrt{4R^2} + b^2}.$$

№ 30. Впишите в окружность правильный 12-угольник.

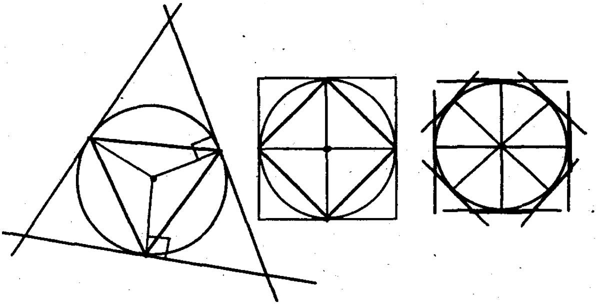


Выберем произвольную вершину A_1 на окружности. Из нее радиусом, равным радиусу окружности, делаем засечки на окружности и получаем вершины A_2, A_3...A_6, которые соединим отрезками. Получим правильный шестиугольник. Далее построим серединные перпендикуляры к сторонам шестиугольника. Они разделят дуги окружности на 12 равных частей. Соединив эти точки отрезками с вершинами шестиугольника, получим 12-угольник.

№ 31. Опишите около окружности правильный треугольник, квадрат, правильный восьмиугольник.

Рассмотрим построение правильного треугольника.

На окружности выберем произвольную точку A_1. Из нее проведем дугу радиуса окружности и получаем вершины A_2 и A_3 — точки пересечения дуги и окружности. Проведем через точки A_1, A_2, A_3 касательные к окружности. Точки пересечения касательных будут вершинами искомого треугольника.



Для построения четырехугольника и восьмиугольника проводим два перпендикулярных диаметра. Далее построение аналогично рассмотренному.

№ 32. Радиусы вписанной и описанной окружностей одного правильного n-угольника равны r_1 и R_1, а радиус вписанной окружности другого правильного n-угольника равен r_2;. Чему равен радиус описанной окружности другого n-угольника?

Так как правильные n-угольники подобны, то получаем, что $\frac{r_1}{r_2} = \frac{R_1}{R_2}$ откуда имеем: $R_2 = \frac{R_1 r_2}{r_1}$.

№ 33. Периметры двух правильных n-угольников относятся как $a{:}b$. Как относятся радиусы их вписанных и описанных окружностей?

У правильных n-угольников отношения периметров равно отношению радиусов вписанных и описанных окружностей, так что отношения радиусов будут $a{:}b$.

№ 34. Вычислите длину окружности, если радиус равен: 1) 10 м; 2) 15 м.

Длина окружности вычисляется по формуле:

$$l = 2\pi R.$$

1) R = 10 м, $l = 2\pi R = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 10 = 62{,}8$ м.

2) R = 15 м, $l = 2\pi R = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 15 = 94{,}2$ м.

№ 35. На сколько изменится длина окружности, если радиус изменится на 1 мм?

Допустим радиус равен R мм, следовательно $l_1 = 2\pi R$ мм, после изменения радиус станет $(R + 1)$ мм и $l_2 = 2\pi(R + 1) = 2\pi R + 2\pi = l_1 + 2\pi$. Так что длина окружности изменится на 2π или $\approx 6{,}28$ мм.

№ 36. Найдите отношение периметра правильного вписанного 8-угольника к диаметру и сравните его с приближенным значением π.

Сторона правильного 8-угольника равна $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ (см. задачу № 23), тогда, $P_8 = 8R\sqrt{2-\sqrt{2}}$, и, значит,

$$\frac{P_8}{d} = \frac{8R\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2R} = 4\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 3{,}06 < \pi.$$

Ответ: $\approx 3{,}06$.

№ 37. Решите задачу № 36 для правильного 12-угольника.

$a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ (см. задачу № 24). Тогда: $P_{12} = 12\,R\sqrt{2-\sqrt{3}}$, а значит

$$\frac{P_{12}}{d} = \frac{12R\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2R} = 6\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 3{,}12 < \pi.$$

Ответ: $\approx 3{,}12$

№ 38. Найдите радиус земного шара исходя из того, что 1 м составляет одну 40-миллионную долю длины экватора.

Пусть l — длина экватора, тогда $l = 2\pi R$ и $R = l/2\pi$. Далее, так как длина экватора 40000000 м, то:

$$R = \frac{40000000}{2\pi} \approx 6366{,}3 \text{ км}.$$

Ответ: $\approx 6366{,}3$ км.

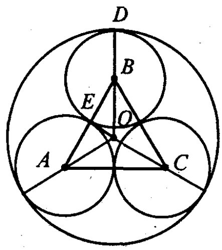
№ 39. На сколько удлинился бы земной экватор, если бы радиус земного шара увеличился на 1 см?

Из задачи № 35 имеем, что с изменением радиуса на 1 мм, длина окружности изменится на 2π мм. Значит, при увеличении радиуса земли на 1 см, длина экватора увеличится на 2π см $\approx 6{,}28$ см.

Ответ: $\approx 6{,}28$ см

№ 40. Внутри окружности радиуса R расположены n равных окружностей, которые касаются друг друга в данной окружности. Найдите радиус этих окружностей, если число их равно: 1) 3; 2) 4; 3) 6.

1) Пусть внутри окружности радиусом R с центром в точке O расположены 3 равных окружности — окр (A; r), окр (B; r) и окр (C; r).



ΔABC — равносторонний, так как AB = BC = AC = $2r$, OE $\perp$ AB, $\angle$EBO = 30°, BE = r.

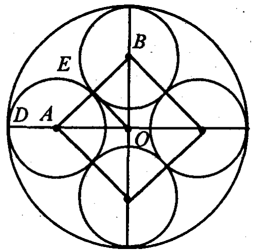
В ΔOBE имеем: EB = OB$\cdot$cos$\angle$EBO, так что:

$$\text{OB} = \frac{\text{EB}}{\cos\angle\text{EBO}} = \frac{r}{\cos 30^\circ} = r : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2r}{\sqrt{3}}$$

BD = r, R = BD + OB = $r + \dfrac{2r}{\sqrt{3}} = r\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$. Тогда

$$r = \frac{R}{\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right)} = \frac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2}.$$

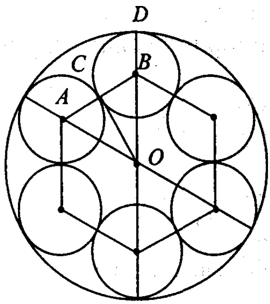
2) OD = R, AD = r, OE $\perp$ AB, AB = $2r$; OD = DA + AO, но AO = $r\sqrt{2}$ (как половина диагонали квадрата).



Значит, $R = r + r\sqrt{2}$, $R = r(1+\sqrt{2})$, откуда

$$r = \frac{R}{(1+\sqrt{2})} = \frac{R(1-\sqrt{2})}{(1-2)} = R(\sqrt{2}-1) .$$

3) OD = R, $BD = r$, CB = r; OC $\perp$ AB; OB = AB = $2r$ (как радиус описанной окружности шестиугольника).



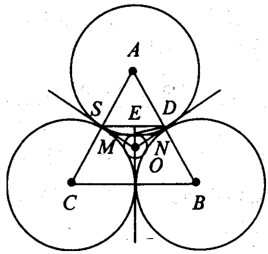
Тогда OD = OB + BD; $R = 3r$, откуда имеем $r = \frac{R}{3}$.

№ 41. Решите предыдущую задачу, если окружности расположены вне данной окружности.

1) Три равные окружности касаются друг друга. OE = R.

Проведем SD $\perp$ OE и MN $\perp$ OE, тогда, SD $\parallel$ MN.

Рассмотрим ΔOMD и ΔOEN: $\angle$M = $\angle$E (как прямые); $\angle$N = $\angle$D (соответственные). Тогда, $\Delta OMD \sim \Delta OEN$.



Поэтому $\frac{\text{OD}}{\text{ON}} = \frac{\text{MD}}{\text{EN}}$, откуда имеем:

$$\text{MD} = \frac{\text{OD} \cdot \text{EN}}{\text{ON}} \qquad (1).$$

В ΔOEN $\angle$E = 90°, $\angle$O = 60°, тогда $\angle$N = 30°, значит, OE = $= \frac{1}{2}$ ON, т.е.: $R = \frac{1}{2}$ ON, ON = 2R, тогда:

$$\text{EN} = \sqrt{4R^2 - R^2} = R\sqrt{3}$$

В ΔEND, $\angle$DEM — половина угла вписанного правильного 12-угольника, поэтому:

$$\angle\text{DEM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{180°(12-2)}{12} = \frac{1}{2} \cdot 150° = 75°.$$

Тогда, $\angle$DEN = 15°, $\angle$EDN = 15°, поэтому ΔEND — равнобедренный и EH = ND = $R\sqrt{3}$, получаем, что:

$$\text{OD} = \text{ON} + \text{ND} = 2R + R\sqrt{3}.$$

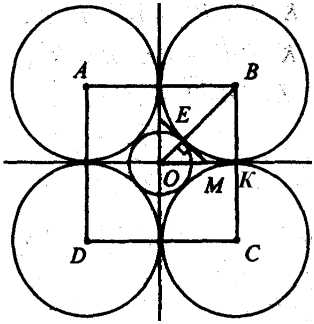
Подставим в пропорцию (1):

$$\text{MD} = \frac{(2R + R\sqrt{3}) \cdot R\sqrt{3}}{2R} = \frac{2R\sqrt{3} + 3R}{2} = \frac{R(2\sqrt{3} + 3)}{2}.$$

ΔASD — равносторонний, так что:

$$\text{AD} = \text{SD} = 2\text{MD} = 2 \cdot \frac{R(2\sqrt{3} + 3)}{2} = R(2\sqrt{3} + 3).$$

2) Пусть четыре равные окружности, касаются друг друга, и окружность с центром в точке O и радиусом OE = R.



Проведем касательную EM к окр (O; R), она пересечет OK в точке M; EM $\perp$ OB. В ΔOBK и ΔOEM: $\angle$K = $\angle$E (как прямые); $\angle$O = $\angle$O (общий), значит, ΔOBK ~ ΔOEM. Поэтому

$$\frac{\text{OB}}{\text{OM}} = \frac{\text{BK}}{\text{EM}} \qquad (1),$$

$$\text{BK} = \frac{\text{OB} \cdot \text{EM}}{\text{OM}} \qquad (2).$$

В ΔOEM $\angle$E = 90°, $\angle$O = 45°, тогда, $\angle$M = 45° и OE = EM = = R, значит: OM = $\sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$

В ΔOBK OB = R + EB = R + BK (т.к. EB = BK).

Полученные выражения подставим в (1): $\frac{\text{BK} + R}{R\sqrt{2}} = \frac{\text{BK}}{R}$, т.е.

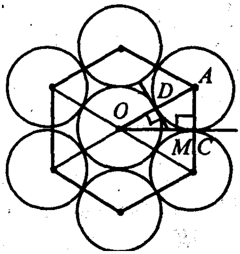
$$\text{BK} \cdot R \cdot R^2 = \text{BK} \cdot R\sqrt{2}\,,$$

$$\text{BK} \cdot R\sqrt{2} - \text{BK} \cdot R = R^2,$$

$$\text{BK}(R\sqrt{2} - R) = R^2,$$

$$\text{BK} = \frac{R}{R(\sqrt{2}-1)} = \frac{R(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = R(\sqrt{2}+1)\,.$$

3) $\Delta OAC \sim \Delta ODM$ (по двум углам).



Значит $\frac{OA}{OM} = \frac{AC}{DM}$ (1), но OA = R + DA, в ΔODM $\angle D = 90^o$, $\angle O = 30^o$, тогда, $DM = \frac{1}{2}OM$, OM = 2DM, по теореме Пифагора: $R^2 = 4DM^2 - DM^2$; $R^2 = 3DM^2$; $DM = \frac{R}{\sqrt{3}}$; $OM = \frac{R}{\sqrt{3}}$.

Подставим полученные значения DM и OM в (1):

$$\frac{R + DA}{\frac{2R}{\sqrt{3}}} = \frac{DA}{\frac{R}{\sqrt{3}}}$$

$$\frac{R}{\sqrt{3}}(R + DA) = \frac{2R}{\sqrt{3}}DA,$$

$$R(R + DA) = 2R \cdot DA,$$
$$R^2 + R \cdot DA = 2R \cdot DA,$$
$$2R \cdot DA - R \cdot DA = R^2,$$
$$DA(2R - R) = R^2,$$
$$DA \cdot R = R^2,$$
$$DA = R.$$

№ 42. Шкив имеет в диаметре 1,4 м и делает 80 оборотов в минуту. Найдите скорость точки на окружности шкива.

d = 1,4 м, так что R = 1,4 : 2 = 0,7 м; $l = 2\pi R \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 0,7 \approx$ $\approx 4,396$ м, но $v = lk$, где k — число оборотов в минуту, так что $v \approx 4,396 \cdot 80 \approx 351,68$ м/мин.

№ 43. Найдите длину дуги окружности радиуса 1 см, отвечающей центральному углу: 1) 30°; 2) 45°; 3) 120°; 4) 270°.

Длина дуги вычисляется по формуле $l = \frac{\pi R}{180°} \cdot \alpha°$. В нашем случае R = 2 см, так что

$$l = \frac{\pi\alpha°}{180°} \text{ см.}$$

1) $l = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 30°}{180°} = \frac{\pi}{6}$ см.

2) $l = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 45°}{180°} = \frac{\pi}{4}$ см.

3) $l = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 120°}{180°} = \frac{2\pi}{3}$ см.

4) $l = \frac{\pi \cdot 1 \cdot 270°}{180°} = \frac{3\pi}{2}$ см.

№ 44. Сколько градусов содержит центральный угол, если соответствующая ему дуга составляет: 1) $\frac{1}{23}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $\frac{1}{6}$; 5) $\frac{2}{5}$; 6) $\frac{3}{4}$ окружности?

Пусть l — длина окружности, а l_1 — длина дуги. Тогда $l = 2\pi R$, $l_1 = \frac{\pi R}{180°} \cdot \alpha°$. Так что

$$\alpha = \frac{l_1 \cdot 180°}{\pi R} = \frac{2l_1}{l} \cdot 180°.$$

1) $\alpha = \frac{1}{3} \cdot 360° = 120°$;

2) $\alpha = \frac{1}{4} \cdot 360° = 90°$;

3) $\alpha = \frac{1}{5} \cdot 360° = 72°$;

4) $\alpha = \frac{1}{6} \cdot 360° = 60°$;

5) $\alpha = \frac{2}{3} \cdot 360° = 240°$;

6) $\alpha = \frac{3}{4} \cdot 360° = 270°$.

№ 45. Какой угол образуют радиусы Земли, проведенные в две точки на ее поверхности, расстояние между которыми равно 1 км? Радиус Земли равен 6370 км.

R = 6370 км — радиус Земли. l = 1 км — расстояние между двумя точками на поверхности Земли, α — угол между радиусами.

Имеем: $l = \frac{\pi R}{180°} \cdot \alpha$. Тогда:

$$\alpha = \frac{l \cdot 180°}{\pi R} = \frac{1 \cdot 180°}{3{,}14 \cdot 6370} = 32''.$$

№ 46. По радиусу R = 1 м найдите длину дуги, отвечающей центральному углу: 1) 45°; 2) 30°; 3) 120°; 4) 45°45'; 5) 60°30'; 6) 150°36'.

$l = \frac{\pi R}{180°} \cdot \alpha$, откуда имеем:

1) $l \approx \frac{3{,}14 \cdot 1 \cdot 45°}{180°} = 0{,}79$ м.

2) $l \approx \frac{3{,}14 \cdot 1 \cdot 30°}{180°} = 0{,}52$ м.

3) $l \approx \frac{3{,}14 \cdot 1 \cdot 120°}{180°} = 2{,}09$ м.

4) $l \approx \frac{3{,}14 \cdot 1 \cdot 45{,}75°}{180°} = 0{,}8$ м.

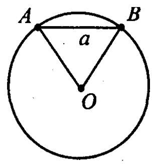
5) $l \approx \dfrac{3{,}14 \cdot 1 \cdot 60{,}5^\circ}{180^\circ} = 1{,}06$ м.

6) $l \approx \dfrac{3{,}14 \cdot 1 \cdot 150{,}6^\circ}{180^\circ} = 2{,}63$ м.

№ 47. По данной хорде a найдите длину ее дуги, если градусная мера дуги равна: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120°.

Пусть дана окружность с центром O; хорда AB = a, а градусная мера дуги равна 60°, 90°, 120°.

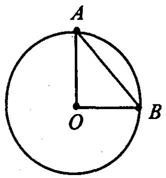
1. $\alpha = 60^\circ$. Рассмотрим ΔOAB.



AO = OB (как радиусы окружности), и $\angle AOB = \alpha = 60^\circ$. Тогда $\angle A = \angle B = (180^\circ - 60^\circ):2 = 60^\circ$, значит ΔAOB — равносторонний и: R = AO = a. Далее:

$$l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot a \cdot 60^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi a}{3}.$$

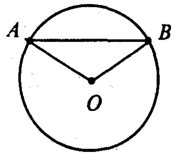
2. $\alpha = 90^\circ$. ΔAOB — прямоугольный, равнобедренный.



По теореме Пифагора получим: $a^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$, откуда: $R^2 = \dfrac{a^2}{2}$, $R = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Далее получаем:

$$l = \frac{\pi R}{180^\circ} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot 90^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi a}{2\sqrt{2}}.$$

3) $\alpha = 120°$. В ΔAOB $\angle AOB = \alpha = 120°$, по теореме косинусов получим: $AB^2 = AO^2 + OB^2 - 2AO \cdot OB \cdot \cos\angle AOB$.

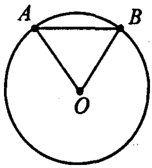


Так что $a^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cdot (-\frac{1}{2}) = 3R^2$, $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Далее

$$l = \frac{\pi R}{180°} \cdot \alpha = \frac{\pi \cdot a \cdot 120°}{180°} = \frac{2\pi a}{3\sqrt{3}}.$$

№ 48. По данной длине дуги l найдите ее хорду, если дуга содержит: 1) 60°; 2) 90°; 3)120°.

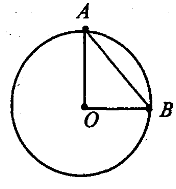
1) $\alpha = 60°$.



$l = \frac{\pi \cdot R \cdot 60°}{180°}$, откуда имеем: $R = \frac{3l}{\pi}$. Так как ΔABO — равносторонний, то

$$AB = R = \frac{3l}{\pi}.$$

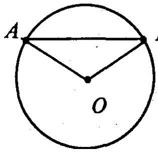
2) $\alpha = 90°$.



$l = \dfrac{\pi \cdot R \cdot 90^\circ}{180^\circ}$, $R = \dfrac{3l}{\pi}$. Далее, ΔAOB — прямоугольный, так что по теореме Пифагора: $AO^2 + OB^2 = AB^2$, $R^2 + R^2 = AB^2$.

$$AB = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2} = \frac{2l}{\pi}\sqrt{2}.$$

3) $\alpha = 120^\circ$.



$l = \dfrac{\pi \cdot R \cdot 120^\circ}{180^\circ}$, т.е. $R = \dfrac{3l}{\pi}$. В ΔAOB по теореме косинусов: $AO^2 + OB^2 - 2AO{\cdot}OB{\cdot}\cos\alpha = AB^2$. $R^2 + R^2 - 2R^2\cos 120^\circ = AB^2$, $3R^2 = AB^2$.

$$AB = R\sqrt{3} = \frac{3l\sqrt{3}}{2\pi}.$$

№ 49. Найдите радианную меру углов: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

1) $30^\circ \cdot \dfrac{\pi}{180^\circ} = \dfrac{\pi}{6}$;

2) $45^\circ \cdot \dfrac{\pi}{180^\circ} = \dfrac{\pi}{4}$;

3) $60^\circ \cdot \dfrac{\pi}{180^\circ} = \dfrac{\pi}{3}$.

№ 50. Найдите радианную меру углов треугольника ABC, если $\angle A = 60^\circ$; $\angle B = 45^\circ$.

Так как $\angle A = 60^\circ$, то:

$$\angle A = 60^\circ \cdot \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{3}.$$

Так как $\angle B = 45°$, то:

$$\angle B = 45° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{\pi}{4}.$$

$\angle C = 180° - 60° - 45° = 75°$; так что:

$$\angle C = 75° \cdot \frac{\pi}{180°} = \frac{5\pi}{12}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{3}$; $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{12}$.

№ 51. Найдите градусную меру угла, если его радианная мера равна: 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{8}$; 4) $\frac{5\pi}{6}$; 5) $\frac{7\pi}{18}$; 6) $\frac{4\pi}{3}$.

1) $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{180°}{\pi} = 90°$;

2) $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{180°}{\pi} = 45°$;

3) $\frac{\pi}{8} \cdot \frac{180°}{\pi} = 22{,}5°$;

4) $\frac{5\pi}{6} \cdot \frac{180°}{\pi} = 150°$;

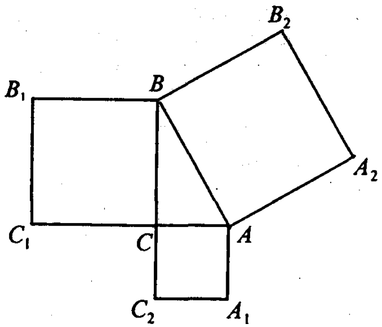
5) $\frac{7\pi}{18} \cdot \frac{180°}{\pi} = 70°$;

6) $\frac{4\pi}{3} \cdot \frac{180°}{\pi} = 240°$.

§ 14. ПЛОЩАДИ ФИГУР

№ 1. Докажите, что сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе.

Пусть катет AC = b, BC = a, гипотенуза AB = c; следовательно: $S_{AA_1C_2C} = b^2$, $S_{BB_1C_2C} = a^2$, $S_{ABB_2A_2} = c^2$.



Из теоремы Пифагора имеем: $a^2 + b^2 = c^2$, то есть

$$S_{AA_1C_2C} + S_{BB_1C_2C} = S_{ABB_2A_2}.$$

Что и требовалось доказать.

№ 2. Стороны двух участков земли квадратной формы равны 100 м и 150 м. Найдите сторону квадратного участка, равновеликого им.

a_1 = 100 м, a_2 = 150 м. $S_1 + S_2 = S_3$.

$S_1 = a_1^2 = 100 \cdot 100 = 10000$ м^2.

$S_2 = a_2^2 = 150 \cdot 150 = 22500$ м^2.

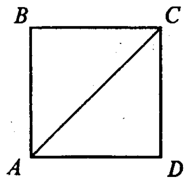
$S_3 = S_1 + S_2 = 10000 + 22500 = 32500$ м^2.

Но $S_3 = a_3^2$, откуда имеем

$$a_3 = \sqrt{S_3} = \sqrt{32500} = 50\sqrt{13} \text{ м} \approx 180 \text{ м}.$$

Ответ: $a_3 \approx 180$ м.

№ 3. Найдите площадь квадрата S по его диагонали a.



ABCD — квадрат, AC = a. В ΔABC $\angle$B = 90°, по теореме Пифагора: $AB^2 + BC^2 = AC^2$, т.к. AB = BC, то: $2AB^2=AC^2$, то есть

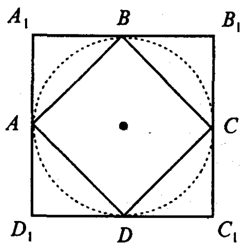
$$2AB^2 = a^2,\ AB^2 = \frac{a^2}{2},$$

следовательно:

$$S = AB^2 = \frac{a^2}{2}.$$

Ответ: $S = \dfrac{a^2}{2}$.

№ 4. Во сколько раз площадь квадрата, описанного около окружности, больше площади квадрата, вписанного в ту же окружность?



Пусть ABCD — квадрат, вписанный в окружность; $A_1B_1C_1D_1$ — квадрат, описанный около окружности.

Рассмотрим ΔAA_1B, $\angle A_1 = 90°$, по теореме Пифагора: $AB^2 = AA_1^2 + A_1B_1^2$, то есть

$$AB^2 = (\frac{1}{2}A_1B_1)^2 + (\frac{1}{2}A_1B_1)^2 = \frac{1}{2}A_1B_1^2,$$

так как: $AB^2 = S_{ABCD}$, $A_1B_1^2 = S_{A_1B_1C_1D_1}$, то:

$$S_{A_1B_1C_1D_1} : S_{ABCD} = \frac{AB_1^2}{AB^2} = 2.$$

№ 5. Как изменится площадь квадрата, если каждую его сторону увеличить в 3 раза?

Сторона квадрата равна a, его площадь равна a^2. Если сторону увеличить в 3 раза, то она станет — $3a$, а площадь — $9a^2$.

Далее: $\frac{9a^2}{a^2} = 9$.

Ответ: Площадь увеличится в 9 раз.

№ 6. Во сколько раз надо уменьшить стороны квадрата, чтобы его площадь уменьшилась в 25 раз?

Пусть a^2 — площадь квадрата, уменьшенного в 25 раз, тогда $25a^2$ — площадь квадрата, следовательно, сторона квадрата $5a$, где a — сторона уменьшенного квадрата. Значит, сторону квадрата следует уменьшить в 5 раз.

№ 7. Чему равны стороны прямоугольника, если они относятся как 4:9, а его площадь 144 м^2?

Пусть одна сторона прямоугольника будет $4x$ м, тогда другая — $9x$ м, площадь $4x \cdot 9x = 36x^2$ м^2, что по условию задачи равно 144 м^2.

$$36x^2 = 144,\ x^2 = 4,\ x = 2.$$

Тогда $4x = 8$ м и $9x = 18$ м. Значит, 1-я сторона — 8 м, 2-я сторона — 18 м.

№ 8. Чему равны стороны прямоугольника, если его периметр 74 дм, а площадь 3 м^2?

Пусть одна сторону прямоугольника x дм; а другая y дм, тогда периметр будет $(x + y)\cdot 2$, что равно 74 дм, а площадь xy дм^2 по условию равна 300 дм^2.

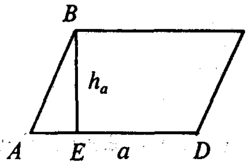
$$\begin{cases}(x+y)\cdot 2=74\\ xy=300\end{cases}\quad\begin{cases}x+y=37\\ xy=300\end{cases}\quad\begin{cases}x=37-y\\ (37-y)y=300\end{cases}$$

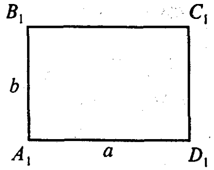
$$-y^2 + 37y - 300 = 0,\ y^2 - 37y + 300 = 0,$$

т.е. $y_1 = 12$ дм, а $y_2 = 25$ дм. Тогда $x_1 = 25$ дм, а $x_2 = 12$ дм.

Ответ. Одна сторона — 12 дм, другая — 25 дм.

№ 9. Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые стороны. Найдите острый угол параллелограмма, если площадь его равна половине площади прямоугольника.





Пусть ABCD — параллелограмм с острым углом A.

$A_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник. Тогда $AD = A_1D_1 = a$, $AB = A_1B_1 = b$.

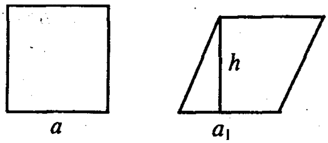
1) $S_{A_1B_1C_1D_1} = ab$, $S_{ABCD} = ah = \frac{1}{2}S_{A_1B_1C_1D_1} = \frac{1}{2}ab$. Тогда $h = \frac{b}{2}$.

2) В ΔABE $\angle E = 90°$, так что $\sin\angle A = \frac{h}{b} = \frac{b}{2b} = \frac{1}{2}$, значит, $\angle A = 30°$.

Ответ: 30°.

№ 10. Квадрат и ромб имеют одинаковые периметры. Какая из фигур имеет большую площадь? Объясните ответ.

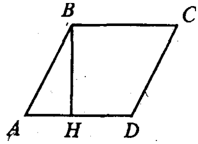
Пусть $P_{\text{кв}} = P_{\text{ромба}}$. Но $P_{\text{кв}} = 4a$, а $P_{\text{ромба}} = 4a$.



Тогда $a = a_1$. $S_{кв} = a \cdot a$. $S_{ромба} = a_1 \cdot h$, но $h < a$, так как катет меньше гипотенузы, а значит и $a \cdot a_1 > a_1 \cdot h$, так что $S_{кв} > S_{ромба}$.

№ 11. Найдите площадь ромба, если его высота 10 см, а острый угол 30°.

Пусть ABCD — ромб, BH = 10 см — высота, $\angle A = 30°$.



В ΔABH $\angle H = 90°$, так что $BH = AB \cdot \sin\alpha$, откуда

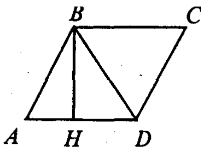
$$AB = \frac{BH}{\sin\alpha} = \frac{10}{\sin 30^{\circ}} = 20\,\text{см}.$$

Далее $S_{ромба} = AD \cdot BH = AB \cdot BH = 20 \cdot 10 = 200$ см^2.

Ответ: 200 см^2.

№ 12. Найдите площадь ромба, если его высота 12 см, а меньшая диагональ 13 см.

Пусть ABCD — ромб, BD=13 см (меньшая диагональ), BH=12 см — высота.



В ΔBDH $\angle H = 90°$, BD = 13 см, BH = 12 см, по теореме Пифагора: $HD = \sqrt{BD^2 - BH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5$ см.

В ΔABH $\angle H = 90°$, BH=12 см, AH = AD – HD = (AB – 5) см, по теореме Пифагора имеем: $AB^2 = AH^2 + BH^2$, то есть

$$AB^2 = (AB - 5)^2 + 12^2 = AB^2 - 10AB + 25 + 144,$$

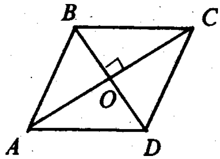
$10AB = 169$, $AB = 16{,}9$. Так что $AD = AB = 16{,}9$ см. Далее:

$$S_{ABCD} = AD \cdot BH = 16{,}9 \cdot 12 = 202{,}8 \text{ см}^2.$$

Ответ: $S_{ABCD} = 202{,}8$ см^2.

№ 13. Докажите, что площадь ромба равна половине произведения диагоналей.

Пусть ABCD — ромб, AC и BD — диагонали.



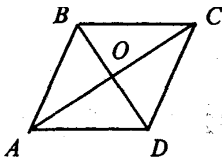
Имеем:

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD} =$$
$$= \frac{1}{2} AC \cdot BO + \frac{1}{2} AC \cdot DO =$$
$$= \frac{1}{2} AC(BO + DO) =$$
$$= \frac{1}{2} AC \cdot BD = \frac{AC \cdot BD}{2}.$$

Что и требовалось доказать.

№ 14. Найдите стороны ромба, зная, что его диагонали относятся как 1:2, а площадь ромба равна 12 см^2.

Пусть ABCD — ромб, AC и BD — диагонали, $\frac{BD}{AC} = \frac{1}{2}$, $S_{ABCD} = 12$ см.



$S_{\text{ABSD}}=\dfrac{1}{2}$ AC·BD = 12 см^2. Пусть BD=x см, тогда AC=2x см, значит:

$$\frac{1}{2}x\cdot 2x=12,\ x^2=12,$$
$$x=\sqrt{12}=2\sqrt{3}.$$

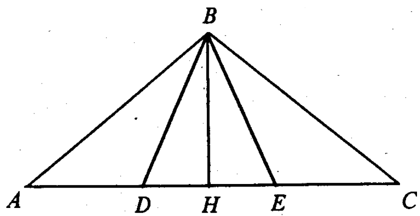
Значит: BD = $2\sqrt{3}$ см, AC = $4\sqrt{3}$ см.

Рассмотрим ΔAOB, ∠O = 90°, катет AO = $\dfrac{1}{2}$ AC = $2\sqrt{3}$ см, катет BO = $\dfrac{1}{2}$ BD = $\sqrt{3}$ см. Тогда по теореме Пифагора:

$$\text{AB}=\sqrt{\text{AO}^2+\text{BO}^2}=\sqrt{12+3}=\sqrt{15}\ \text{см}.$$

Ответ: $\sqrt{15}$ см.

№ 15. Разделите данный треугольник на три равновеликие части прямыми, проходящими через одну вершину.



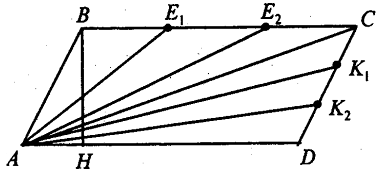
Разделим AC на AD = DE = EC. Тогда

$$S_{\text{ABD}}=\frac{1}{2}\text{AD}\cdot\text{BH},$$
$$S_{\text{DBE}}=\frac{1}{2}\text{DE}\cdot\text{BH},$$
$$S_{\text{EBC}}=\frac{1}{2}\text{EC}\cdot\text{BH}.$$

Так что $S_{\text{ABD}}=S_{\text{DBE}}=S_{\text{EBC}}$.

№ 16*. Решите предыдущую задачу, взяв вместо треугольника параллелограмм.

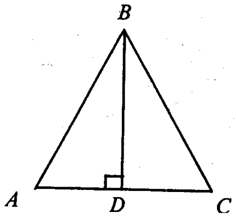
Проведем диагональ AC, $\Delta ABC = \Delta ACD$ (по трем сторонам), тогда: $S_{ABC} = S_{ACD}$



Разделим каждый из треугольников ABC и ACD на 3 равновеликие части, т.к. сами треугольники равны, то их части будут равновелики. Так что получится шесть равновеликих треугольников, но тогда $S_{ABE_2} = S_{AE_2CK_1} = S_{AK_1D}$. Так как эти фигуры содержат по 2 треугольника.

№ 17. Чему равна площадь равнобедренного треугольника, если его основание 120 м, а боковая сторона 100 м?

ΔABC — равнобедренный, AB = BC = 100 м, AC = 120 м.



Проведем $BD \perp AC$, по свойству равнобедренного треугольника BD — медиана и высота. Тогда $AD = \frac{1}{2}AC = 60$ м.

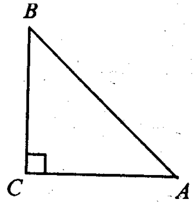
В ΔABD, $\angle D = 90°$, AB = 100 м, AD = 60 м, по теореме Пифагора: $BD = \sqrt{AB^2 - AD^2} = \sqrt{10000 - 3600} = \sqrt{6400} = 80$ м. Далее

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 80 = 4800 \text{ м}^2.$$

Ответ: 4800 м^2.

№ 18. Найдите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой a.

Рассмотрим ΔABC, $\angle$C = 90°, BC = AC, AB = a — гипотенуза.



По теореме Пифагора имеем: $AC^2 + BC^2 = AB^2$,

$$2BC^2 = a^2,$$

$$BC^2 = \frac{a^2}{2},$$

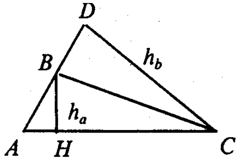
$$BC = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Тогда $AC = BC = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Далее:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{a^2}{4}$.

№ 19. У треугольника со сторонами 8 см и 4 см проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведенная к стороне 8 см, равна 3 см. Чему равна высота, проведенная к стороне 4 см?



Пусть в ΔABC, AC = 8 см, AB = 4 см, BH = h_a = 3 см.
Тогда, с одной стороны:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12 \text{ см}^2.$$

С другой стороны,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h_b,$$

получаем, что

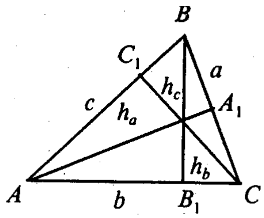
$$h_b = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB} = \frac{24}{4} = 6 \text{ см}.$$

Ответ: 6 см.

№ 20. Докажите, что стороны треугольника обратно пропорциональны его высотам, т.е.:

$$a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}.$$

Пусть в ΔABC, BC = a, AA$_1$ = h_a, AC = b, BB$_1$ = h_b, AB = c, CC$_1$ = h_c.



Тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c,$$

поэтому:

$$a = \frac{2S}{h_a};\ b = \frac{2S}{h_b};\ c = \frac{2S}{h_c}.$$

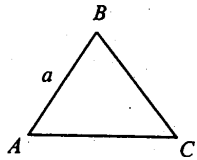
Из полученных равенств получаем

$$a : b : c = \frac{2S}{h_a} : \frac{2S}{h_b} : \frac{2S}{h_c} = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}.$$

Что и требовалось доказать.

№ 21. Найдите площадь равностороннего треугольника со стороной *a*.

Пусть ΔABC — равносторонний, AB = *a*.



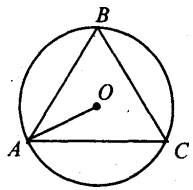
Тогда ∠A = ∠B = ∠C = 60°, следовательно:

$$S_{\text{ABC}} = \frac{1}{2}\text{AB}\cdot\text{AC}\cdot\sin\angle\text{A} = \frac{1}{2}a\cdot a\cdot\sin 60^\circ = \frac{1}{2}a^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$.

№ 22. Найдите площадь правильного треугольника, вписанного в круг радиуса *R*.

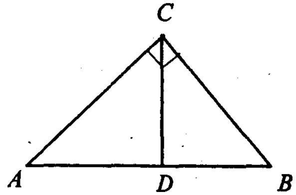
Пусть ΔABC — правильный, вписанный в окружность; AO = R.



Тогда $a_3 = R\sqrt{3}$. То есть AB = BC = AC $= R\sqrt{3}$. Но тогда $S_{ABC} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4}$ (по предыдущей задаче) и $S_{ABC} = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$.

№ 23. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его высота делит гипотенузу на отрезки 32 см и 18 см.

Пусть в треугольнике ABC, $\angle C = 90°$, CD — высота, AD = 32 см, DB = 18см. Найти $S_{\Delta ABC}$.



$\Delta ACD \sim \Delta CBD$, поэтому:

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB} = \sqrt{32 \cdot 18} = \sqrt{16 \cdot 36} = 24 \text{ см}.$$

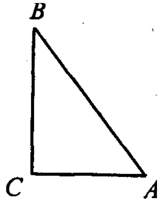
$$AB = AD + BD = 32 + 18 = 50 \text{ см}.$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD = 25 \cdot 24 = 600 \text{ см}^2.$$

Ответ: 600 см^2.

№ 24. Чему равны катеты прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 73 см, а площадь равна 1320 см^2?

Пусть в ΔABC $\angle C = 90°$, AB = 73 см, S = 1320 см^2.



Допустим, AC = x см, а BC = y см, тогда по теореме Пифагора имеем: $x^2 + y^2 = 73^2$, а по формуле площади $\frac{xy}{2} = 1320$. Так что:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5329 \\ \dfrac{xy}{2} = 1320 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5329 \quad (1) \\ 2xy = 5280 \quad (2) \end{cases}$$

Сложим и вычтем (2) из (1), получим

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 10609 \\ x^2 - 2xy + y^2 = 49 \end{cases}$$

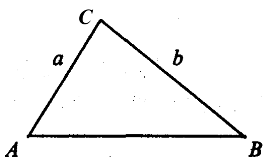
$$\begin{cases} (x+y)^2 = 10609 \\ (x-y)^2 = 49 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 103 \\ x - y = 7 \end{cases}$$

Откуда $x = 55$, тогда $y = x - 7 = 48$. То есть AC = 55 см, BC = 48 см.

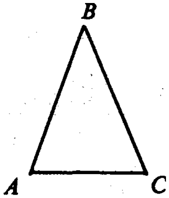
Ответ: 55 см, 48 см.

№ 25. У треугольника ABC AC = a, BC = b. При каком угле C площадь треугольника будет наибольшей?



Так как $S_{\Delta ABC} = \dfrac{1}{2}$ AC·BC·sin∠C $= \dfrac{1}{2}ab\sin\angle C$, то площадь будет наибольшей при наибольшем значении sin∠C. А sin∠C — наибольший у ∠C = 90°; sin∠90° = 1. Значит, при ∠C = 90° S будет наибольшей и равной $\dfrac{1}{2}ab$.

№ 26. Найдите площадь равнобедренного треугольника, у которого боковые стороны равны 1 м, а угол между ними равен 70°.



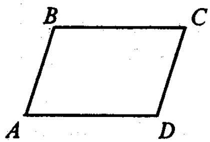
Пусть ΔABC — равнобедренный, AB = BC = 1 м; ∠B = 70°. Тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot \sin\angle B = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 70° = \frac{1}{2} \cdot 0{,}94 = 0{,}47 \text{ м}^2.$$

Ответ: 0,47 $м^2$.

№ 27. Найдите площадь параллелограмма, если его стороны 2 м и 3 м, а один из углов равен 70°.

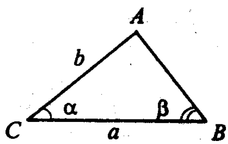
Пусть ABCD — параллелограмм, AD = 3 м, AB = 2 м, ∠A = 70°.



Тогда $S_{ABCD} = AD \cdot AB \cdot \sin\angle A = 3 \cdot 2 \cdot \sin 70° = 6 \cdot 0{,}94 = 5{,}64$ $м^2$.
Ответ: 5,64 $м^2$.

№ 28*. Найдите площадь треугольника по стороне *a* и прилежащим к ней углам α и β.

Пусть ΔABC, BC = *a*, ∠C = α, ∠B = β.



По теореме синусов имеем $\frac{\text{BC}}{\sin\angle\text{C}} = \frac{\text{AC}}{\sin\angle\text{B}}$, то есть

$$\frac{a}{\sin(180° - (\alpha + \beta))} = \frac{b}{\sin\beta}, \ \frac{a}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{b}{\sin\beta}.$$

откуда имеем: $b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$. Далее

$$S_{\Delta\text{ABC}} = \frac{1}{2}ab\sin\alpha = \frac{a \cdot a\sin\alpha \cdot \sin\beta}{2\sin(\alpha + \beta)} = \frac{a^2\sin\alpha \cdot \sin\beta}{2\sin(\alpha + \beta)}.$$

№ 29. Выведите формулу Герона для площади треугольника: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, где a, b, c — длины сторон треугольника, p — полупенриметр.

Задача решена в п. 125 учебника, стр. 186.

№ 30. Найдите площадь треугольника по трем сторонам: 1) 13, 14, 15; 2) 5, 5, 6; 3) 17, 65, 80; 4) $\frac{25}{6}, \frac{29}{6}$, 6; 5) 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{13}$; 6) $2\frac{1}{12}$, $3\frac{44}{75}$, 1,83.

1) $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$.

$$p = \frac{a+b+c}{2}, \ p = \frac{13+14+15}{2} = 21.$$

По формуле Герона получаем:

$$S_{\Delta\text{ABC}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot (21-13)(21-14)(21-15)} =$$

$$= \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} = 7 \cdot 3 \cdot 4 = 84 \text{ см}^2.$$

2) $a = 5$, $b = 5$, $c = 6$.

$$p = \frac{a+b+c}{2}, \ p = \frac{5+5+6}{2} = 8.$$

По формуле Герона получаем:

$$S_{\text{ABC}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{8\cdot(8-5)(8-5)(8-6)} =$$

$$= \sqrt{8\cdot 3\cdot 3\cdot 2} = 4\cdot 3 = 12 \text{ см}^2.$$

3) $a = 17$, $b = 65$, $c = 80$.

$$p = \frac{17+65+80}{2} = \frac{162}{2} = 81 .$$

По формуле Герона получаем:

$$S_{\text{ABC}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{81\cdot 64\cdot 16\cdot 1} = 9\cdot 8\cdot 4 = 288 \text{ см}^2.$$

4) $a = \dfrac{25}{6}, b = \dfrac{29}{6}$, $c = 6$.

$$p = \frac{\frac{25}{6}+\frac{29}{6}+6}{2} = \frac{15}{2} .$$

По формуле Герона получаем:

$$S_{\text{ABC}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{15}{2}\cdot\frac{10}{3}\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{3}{2}} = \frac{5\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 3} = 10 \text{ см}^2.$$

5) $a = 13$, $b = 37\dfrac{12}{13}$, $c = 47\dfrac{1}{13}$.

$$p = \frac{13+37\frac{12}{13}+47\frac{1}{13}}{2} = \frac{98}{2} = 49 .$$

По формуле Герона получаем:

$$S_{\text{ABC}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{49\cdot 36\cdot 11\frac{1}{13}\cdot 1\frac{12}{13}} =$$

$$= 7\cdot 6\cdot\frac{12}{13}\cdot 5 = \frac{2520}{13} = 193\frac{11}{13} .$$

6) $a = 2\frac{1}{12}$, $b = 3\frac{44}{75}$, $c = 1{,}83$.

$$p = \frac{2\frac{1}{12} + 3\frac{44}{75} + 1{,}83}{2} = \frac{2\frac{25}{300} + 3\frac{176}{300} + 1\frac{249}{300}}{2} = 7\frac{150}{300} : 2 = \frac{15}{4}.$$

По формуле Герона получаем:

$$S_{\text{ABC}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$

$$= \sqrt{\frac{15}{4} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{49}{300} \cdot \frac{192}{100}} = \frac{5 \cdot 7 \cdot 24}{2 \cdot 3 \cdot 100} = \frac{7}{5} = 1{,}4.$$

№ 31. Стороны треугольника a, b, c. Найдите высоту треугольника, опущенную на сторону c.

Пусть h_c — высота. Тогда

$$S_{\Delta\text{ABC}} = \frac{1}{2} c \cdot h_c.$$

С другой стороны по формуле Герона

$$S_{\Delta\text{ABC}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где: $p = \frac{a+b+c}{2}$. Так что

$$h_c = \frac{2S_{\Delta\text{ABC}}}{c} = \frac{2}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

№ 32. Боковые стороны треугольника 30 см и 25 см. Найдите высоту треугольника, опущенную на основание, равное: 1) 25 см; 2) 11 см.

Пусть a, b, c — стороны треугольника.

1) $a = 30$ см, $b = 25$ см, $c = 25$ см. Тогда

$$p = \frac{30 + 25 + 25}{2} = \frac{80}{2} = 40 \text{ см};$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{40\cdot10\cdot15\cdot15}=20\cdot15=300\ \text{см}^2.$$

$$h_c=\frac{2S}{c}=\frac{2\cdot300}{25}=24\ \text{см}.$$

2) a = 30 см, b = 25 см, c = 11 см. Тогда

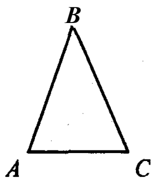
$$p=\frac{30+25+11}{2}=\frac{66}{2}=33\ \text{см};$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{33\cdot3\cdot8\cdot22}=11\cdot3\cdot4=132\ \text{см}^2.$$

$$h_c=\frac{2S}{c}=\frac{132\cdot2}{11}=24\ \text{см}.$$

№ 33. Периметр равнобедренного треугольника равен 64 см, а его боковая сторона на 11 см больше основания. Найдите высоту треугольника, опущенную на боковую сторону.

Треугольник АВС — равнобедренный, АС — основание, АВ = АС + 11 см; P = 64 см. h_{AB} — высота, опущенная на АВ.



Пусть АС = x см, тогда АВ = ВС = (11 + x) см, а периметр равен x + 2(x + 11), так что

$$x+2(x+11)=64,$$
$$3x=64-22,$$
$$x=14.$$

Значит: АС = 14 см, АВ = ВС = 14 + 11 = 25 см. Далее:

$$p=\frac{14+25+25}{2}=\frac{64}{2}=32\ \text{см}.$$

$$S = \sqrt{p(p-\mathrm{AB})(p-\mathrm{AC})(p-\mathrm{BC})} = \sqrt{32\cdot 18\cdot 7\cdot 7} = 7\cdot 3\cdot 8 = 168 \text{ см}^2.$$

Тогда $h_{\mathrm{AB}} = \dfrac{2S}{\mathrm{AB}} = \dfrac{168\cdot 2}{25} = 13{,}44$ см.

Ответ: 13,44 см.

№ 34. Найдите высоты треугольника, у которого стороны равны 13 см, 14 см и 15 см.

Пусть a, b, c — стороны треугольника; a = 13 см, b = 14 см, c = 15 см.

$p = \dfrac{a+b+c}{2}$, тогда

$$p = \frac{13+14+15}{2} = \frac{42}{2} = 21 \text{ см},$$

$$S_{\mathrm{ABC}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = 7\cdot 3\cdot 4 = 84 \text{ см}^2.$$

Далее

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{84\cdot 2}{13} = \frac{168}{13} = 12\frac{12}{13} \text{ см};$$

$$h_b = \frac{2S}{b} = \frac{84\cdot 2}{14} = 12 \text{ см};$$

$$h_c = \frac{2S}{c} = \frac{84\cdot 2}{15} = \frac{56}{5} = 11\frac{1}{5} \text{ см}.$$

Ответ: $12\dfrac{12}{13}$ см, 12 см и $11\dfrac{1}{5}$ см.

№ 35. Найдите высоту треугольника со сторонами $2\dfrac{1}{12}$, $3\dfrac{44}{75}$, 1,83, проведенную к стороне $2\dfrac{1}{12}$.

Пусть a, b, c — стороны треугольника; $a = 2\dfrac{1}{12}$, $b = 3\dfrac{44}{75}$, c = 1,83.

Из задачи № 30 (6) $S = 1{,}4$ см^2, тогда:

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{1{,}4 \cdot 2}{2\frac{1}{12}} = \frac{2{,}8 \cdot 12}{25} = 1{,}344 \text{ см.}$$

Ответ: 1,344 см.

№ 36. Найдите наименьшую высоту треугольника со сторонами: 1) 5, 5, 6; 2) 17,65, 80 и наибольшую высоту треугольника со сторонами: 3) $\frac{25}{6}$, $\frac{29}{6}$, 6; 4) 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{13}$.

Из задачи № 20 следует, что наименьшая — высота, опущенная к наибольшей стороне, а наибольшая — высота, опущенная к наименьшей стороне.

Наименьшая высота h_c.

1) $a = 5$, $b = 5$, $c = 6$.

Из задачи № 30 (2) $S = 12$ см^2; тогда

$$h_c = \frac{2S}{c} = \frac{12 \cdot 2}{6} = 4 \text{ см.}$$

2) $a = 17$, $b = 65$, $c = 80$.

Из задачи № 30 (3) $S = 288$ см^2; тогда

$$h_c = \frac{2S}{c} = \frac{288 \cdot 2}{80} = 7{,}2 \text{ см.}$$

Наибольшая высота h_a.

3) $a = \frac{25}{6}$, $b = \frac{29}{6}$, $c = 6$.

Из задачи № 30 (4) $S = 10$ см^2; тогда

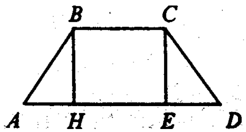
$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{10 \cdot 2}{\frac{25}{6}} = \frac{10 \cdot 2 \cdot 6}{25} = \frac{24}{5} = 4{,}8 \text{ см.}$$

4) $a = 13$, $b = 37\frac{12}{13}$, $c = 47\frac{1}{13}$.

Из задачи № 30 (5) $S = \frac{2520}{13}$ см^2; тогда

$$h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2 \cdot \frac{2520}{13}}{13} = \frac{5040}{169} = 29\frac{139}{169} \text{ см.}$$

№ 37. Найдите площадь трапеции, у которой параллельные стороны 60 см и 20 см, а непараллельные — 13 см и 37 см.



Пусть ABCD — трапеция, AD и BC — основания; AD = 60 см; BC =20 см; AB = 13 см; CD =37 см.

$$S_{\mathrm{ABCD}} = \frac{\mathrm{AB} + \mathrm{BC}}{2} \cdot \mathrm{BH}.$$

Пусть AH = x см, HE = BC = 20 см, тогда ED=AD–AH–HE= = 60 – 20 – x = (40 – x) см.

В ΔABH $\angle$H = 90°, по теореме Пифагора имеем:

$$\mathrm{BH}^2 = \mathrm{AB}^2 - \mathrm{AH}^2 = 169 - x^2.$$

В ΔCDE $\angle$E = 90°, по теореме Пифагора:

$$\mathrm{CE}^2 = \mathrm{CD}^2 - \mathrm{DE}^2 = 1369 - (40 - x)^2 =$$
$$= 1369 - 1600 + 80x - x^2 = 80x - x^2 - 231.$$

Но BH^2 = CE^2, так что

$$169 - x^2 = 80x - x^2 - 231, \; -80x = -231 - 169, \; -80x = -400, \; x = 5.$$

Значит, AH = 5 см, тогда

$$\mathrm{BH}^2 = 169 - 25, \; \mathrm{BH} = \sqrt{144}, \; \mathrm{BH} = 12 \text{ см.}$$

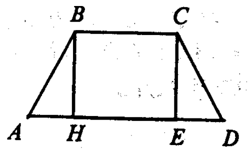
Следовательно

$$S_{ABCD} = \frac{60+20}{2} \cdot 12 = 40 \cdot 12 = 480 \text{ см}^2.$$

Ответ: 480 см^2.

№ 38. В равнобокой трапеции основания равны 10 см и 24 см, боковая сторона 25 см. Найдите площадь трапеции.

Пусть ABCD — трапеция, AB = CD = 25 см, AD = 24 см, BC = 10 см.



ΔABH = ΔCED ($\angle$H = $\angle$E = 90°, AB = CD, BH = CE). Тогда

$$AH = ED = (AD - BC):2 = (24 - 10):2 = 7 \text{ см}.$$

Тогда по теореме Пифагора:

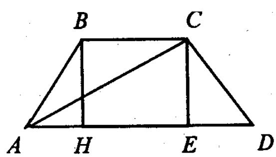
$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{625-49} = \sqrt{576} = 24 \text{ см}.$$

Следовательно

$$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot BH = \frac{24+10}{2} \cdot 24 = 17 \cdot 24 = 408 \text{ см}^2.$$

Ответ: 408 см^2.

№ 39. В равнобокой трапеции большее основание равно 44 м, боковая сторона 17 м и диагональ 39 м. Найдите площадь трапеции.



Пусть ABCD — трапеция, AB = CD = 17 м, AC = 39 м, AD = 44 м.

В ΔACE $\angle E = 90°$, AC = 39 м, AE = 44 – ED. По теореме Пифагора:

$$CE^2 = AC^2 - AE^2 = 39 - (44 - ED)^2 =$$
$$= 1521 - 1936 + 88ED - ED^2 = -415 + 88ED - ED^2,$$

то есть $CE^2 + ED^2 = 88ED - 415$.

В ΔCDE $\angle E = 90°$, CD = 17 м. По теореме Пифагора имеем:

$$ED^2 + CE^2 = CD^2 = 17^2 = 289.$$

Получаем, что:

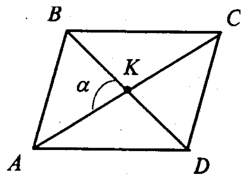
$$88ED - 415 = 289,\ 88ED = 704,\ ED = 8 \text{ м},$$

следовательно, AH = ED = 8 м; BC = 44 – 8·2 = 28 м; $CE^2 = 289 - 64 = 225$, CE = 15 м. Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CE = \frac{44 + 28}{2} \cdot 15 = 36 \cdot 15 = 540 \text{ м}^2.$$

Ответ: 540 $м^2$.

№ 41*. Докажите, что среди всех параллелограммов с данными диагоналями наибольшую площадь имеет ромб.



Пусть ABCD — параллелограмм, AC и CD — диагонали, $\angle AKB = \alpha$.

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot CD \cdot \sin\alpha.$$

S_{ABCD} будет наибольшей, когда $\sin\alpha = 1$, то есть $\alpha = 90°$, следовательно, диагонали данного параллелограмма пересекаются под прямым углом, а такой параллелограмм является ромбом. Что и требовалось доказать.

№ 42. Выведите следующие формулы для радиусов описанной (R) и вписанной (r) окружностей треугольника: $R = \frac{abc}{4S}$, $r = \frac{2s}{a+b+c}$, где a, b, c — стороны треугольника, а S — его площадь.

Задача решена в п. 127 учебника, стр. 187.

№ 43. Найдите радиусы описанной (R) и вписанной (r) окружностей для треугольника со сторонами: 1) 13, 14, 15; 2) 15, 13, 4; 3) 35, 29, 8; 4) 4, 5, 7.

1) $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$.

Полупериметр треугольника:

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{13+14+15}{2} = \frac{42}{2} = 21.$$

По формуле Герона получаем:

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6} = 84.$$

Следовательно

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{13\cdot 14\cdot 15}{4\cdot 84} = 8\frac{1}{8},$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{84\cdot 2}{42} = 4.$$

2) $a = 15$, $b = 13$, $c = 4$.

Полупериметр треугольника:

$$p = \frac{15+13+4}{2} = \frac{32}{2} = 16.$$

По формуле Герона получаем:

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{16\cdot 1\cdot 3\cdot 12} = 24.$$

Следовательно

$$R=\frac{abc}{4S}=\frac{15\cdot 13\cdot 4}{4\cdot 24}=\frac{65}{8}=8\frac{1}{8},$$

$$r=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{2\cdot 24}{32}=1{,}5\,.$$

3) $a = 35$, $b = 29$, $c = 8$.

Полупериметр треугольника:

$$p=\frac{35+29+8}{2}=\frac{72}{2}=36\,.$$

По формуле Герона получаем:

$$S_{\Delta}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{36\cdot 1\cdot 7\cdot 28}=84\,.$$

Следовательно

$$R=\frac{abc}{4S}=\frac{35\cdot 29\cdot 8}{4\cdot 84}=24\frac{1}{6},$$

$$r=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{2\cdot 84}{72}=2\frac{1}{3}\,.$$

4) $a = 4$, $b = 5$, $c = 7$.

Полупериметр треугольника:

$$p=\frac{4+5+7}{2}=8\,.$$

По формуле Герона получаем:

$$S_{\Delta}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{8\cdot 4\cdot 3\cdot 1}=4\sqrt{6}\,.$$

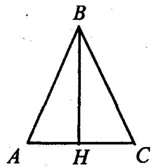
Следовательно

$$R=\frac{abc}{4S}=\frac{4\cdot 5\cdot 7}{4\cdot 4\sqrt{6}}=\frac{35}{4\sqrt{6}},$$

$$r=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{2\cdot 4\sqrt{6}}{16}=\frac{\sqrt{6}}{2}\,.$$

№ 44. Боковая сторона равнобедренного треугольника 6 см, высота, проведенная к основанию, 4 см. Найдите радиус описанной окружности.

Пусть ABC — равнобедренный треугольник, AB = BC = = 6 см, BH = 4 см — высота, проведенная к основанию.



Тогда в ΔABH ∠H = 90°. По теореме Пифагора получаем:

$$\mathrm{AH} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BH}^2} = \sqrt{36-16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ см.}$$

Тогда $\mathrm{AC} = 2\mathrm{AH} = 4\sqrt{5}$ см и

$$S_{\Delta\mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{BH} = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{5}\cdot 4 = 8\sqrt{5} \text{ см}^2.$$

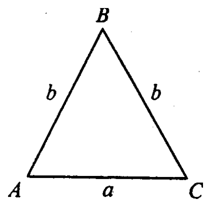
Следовательно:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{6\cdot 6\cdot 4\sqrt{5}}{4\cdot 8\sqrt{5}} = \frac{9}{2} = 4{,}5 \text{ см.}$$

Ответ: 4,5 см.

№ 45. Найдите радиусы окружностей описанной около равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороной b и вписанной в него.

Пусть ABC — равнобедренный треугольник, AB = BC = b, AC = a. Найти R, r.



Тогда $p = \dfrac{AB + BC + AC}{2} = \dfrac{2b + a}{2} = b + \dfrac{a}{2}$.

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)^2} = \sqrt{\frac{2b+a}{2} \cdot \frac{2b-a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}\ .$$

Следовательно

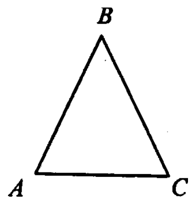
$$R = \frac{abb}{4S} = \frac{ab^2}{4 \cdot \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}} = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}\ ;$$

$$r = \frac{2S}{2a + b} = \frac{2 \cdot \frac{a}{4}\sqrt{4b^2 - a^2}}{2b + a} = \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2(2b + a)} =$$

$$= \frac{\sqrt{4b^2 - a^2}}{2\sqrt{(2b+a)(2b+a)}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(2b-a)(2b+a)}{(2b+a)(2b+a)}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(2b-a)}{(2b+a)}}\ .$$

№ 46. Найдите радиус r вписанной и радиус R описанной окружностей для равнобедренного треугольника с основанием 10 см и боковой стороной 13 см.

Пусть ABC — равнобедренный треугольник, AB = BC = = 13 см, AC = 10 см.



Тогда $p = \dfrac{13 + 13 + 10}{2} = 18$ см.

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)^2} = \sqrt{18 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 8} = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60 \text{ см}^2.$$

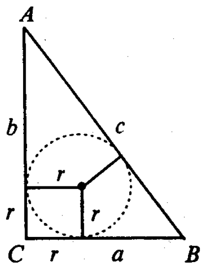
Следовательно:

$$R=\frac{abc}{4S}=\frac{13\cdot13\cdot10}{4\cdot60}=\frac{169}{24}\text{ см;}$$

$$r=\frac{2S}{a+b+c}=\frac{2\cdot60}{36}=\frac{10}{3}\text{ см.}$$

№ 47. Докажите, что в прямоугольном треугольнике радиус вписанной окружности равен половине разности между суммой катетов и гипотенузой.

Пусть в ΔABC, ∠C = 90°, CB = a, AC = b, AB = c. Докажем, что: $r=\dfrac{a+b-c}{2}$.



Имеем: $r=\dfrac{2S}{a+b+c}$, но $S=\dfrac{ab}{2}$, так что

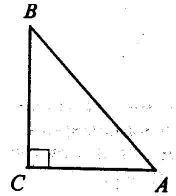
$$r=\frac{\frac{ab}{2}\cdot2}{a+b+c}=\frac{ab}{a+b+c}=\frac{ab(a+b-c)}{(a+b+c)(a+b-c)}=\frac{ab(a+b-c)}{(a+b)^2-c^2}=$$

$$=\frac{ab(a+b-c)}{a^2+b^2+2ab-c^2}=\frac{ab(a+b-c)}{2ab}=\frac{a+b-c}{2},$$

что требовалось доказать.

№ 48. Катеты прямоугольного треугольника равны 40 см и 42 см. Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей.

Пусть в ΔABC, ∠C = 90°, AC = 40 см, BC = 42 см.



Тогда $S_{\Delta ABC} = \dfrac{AC \cdot BC}{2} = \dfrac{40 \cdot 42}{2} = 840$ см^2. Далее по теореме Пифагора:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = 1600 + 1764 = 3364 \text{ см}^2;$$

$$AB = \sqrt{3364} = 58 \text{ см}.$$

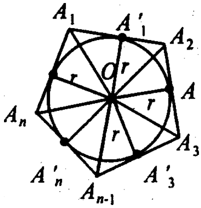
Пусть AB = c, AC = b, BC = a. Тогда

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{40 \cdot 42 \cdot 58}{840} = 29 \text{ см},$$

$$r = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2 \cdot 840}{140} = 12 \text{ см}.$$

Ответ: 29 см, 12 см.

№ 49. Докажите, что площадь многоугольника описанного около окружности, равна половине произведения периметра многоугольника на радиус окружности.



Пусть $A_1A_2...A_n$ — многоугольник, описанный около окружности; A_1A_2; A_2A_3; ... $A_{n-1}A_n$ — стороны многоугольника; $OA'_1 = OA'_2 = ... = OA'_n = r$.

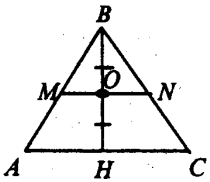
Соединим вершины многоугольника с центром окружности. Многоугольник разбит на n треугольников. Тогда:

$$S_{A_1A_2...A_n} = S_{\Delta A_1OA_2} + S_{\Delta A_2OA_3} + ... + S_{\Delta A_{n-1}OA_n} =$$
$$= \frac{1}{2} A_1A_2 \cdot r + \frac{1}{2} A_2A_3 \cdot r + ... + \frac{1}{2} A_{n-1}A_n \cdot r =$$
$$= \frac{1}{2} r(A_1A_2 + A_2A_3 + ... + A_{n-1}A_n) = \frac{1}{2} r \cdot P_{A_1...A_n}$$

Что и требовалось доказать.

№ 50. Через середину высоты треугольника проведена перпендикулярная к ней прямая. В каком отношении она делит площадь треугольника?

Пусть ΔABC, BH — высота, BO = OH.



ΔABC ~ ΔMBN, поэтому $\frac{BO}{BH} = \frac{MN}{AC}$, так что AC = 2MN. Тогда

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BH = MN \cdot BH,$$

$$S_{\Delta MBH} = \frac{1}{2} MN \cdot BO = \frac{1}{4} MN \cdot BH.$$

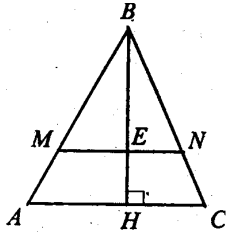
Поэтому

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BMH}} = \frac{MN \cdot BH \cdot 4}{MN \cdot BH \cdot 1} = 4 : 1 .$$

Ответ: $\frac{S_{\Delta BMH}}{S_{\Delta ABC}} = 1 : 4$.

№ 51. Прямая, перпендикулярная высоте треугольника, делит его площадь пополам. Найдите расстояние от этой прямой до вершины треугольника, из которой проведена высота, если она равна А.

Пусть в ΔABC, BH — высота, MN ⊥ BH, BH = h; $S_{\Delta BMN} = S_{AMNC}$.



ΔABC ~ ΔMBN, так как MN || AC.

Так как $S_{\Delta BMN} = S_{AMNC}$, то $S_{\Delta BMN} = \frac{1}{2} S_{\Delta ABC}$.

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MBN}} = \left(\frac{BH}{BE}\right)^2,$$

откуда получаем

$$\frac{BH}{BE} = \sqrt{\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta MBN}}} = \sqrt{2}$$

$$BE = BH : \sqrt{2} = \frac{h\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{h\sqrt{2}}{2}$.

№ 52. Периметры правильных n-угольников относятся как a:b. Как относятся их площади?

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}.$$

Ответ: a^2:b^2.

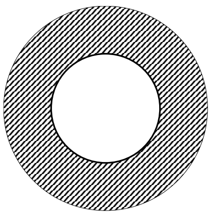
№ 53. Найдите площадь круга, если длина окружности l.

$l = 2\pi R$, откуда имеем $R = \dfrac{l}{2\pi}$. Тогда

$$S = \pi R^2 = \pi\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 = \pi \cdot \frac{l^2}{4\pi^2} = \frac{l^2}{4\pi}$$

Ответ: $\dfrac{l^2}{4\pi}$.

№ 54. Найдите площадь кругового кольца, заключенного между двумя окружностями с одним и тем же центром и радиусами: 1) 4 см и 6 см; 2) 5,5 м и 6,5 м; 3) a и b, $a > b$.



$$S_{\text{кольца}} = S_{\text{кр1}} - S_{\text{кр2}} = \pi R_1^2 - \pi R_2^2 = \pi(R_1^2 - R_2^2).$$

Так что

1) $S_{\text{кольца}} = \pi(36 - 16) = 20\pi$ см^2.
2) $S_{\text{кольца}} = \pi(6{,}5^2 - 5{,}5^2) = \pi(6{,}5 - 5{,}5)(6{,}5 + 5{,}5) = 12\pi$ см^2.
3) $S_{\text{кольца}} = \pi(a^2 - b^2)$ см^2.

№ 55. Во сколько раз увеличится площадь круга, если его диаметр увеличить: 1) в 2 раза; 2) в 5 раз; 3) в m раз?

Если диаметр увеличить в n раз, то радиус увеличится тоже в n раз, тогда площадь увеличится в n^2 раз.

1) $n = 2$, так что:

$$\frac{S_1}{S_2} = n^2 = 4,$$

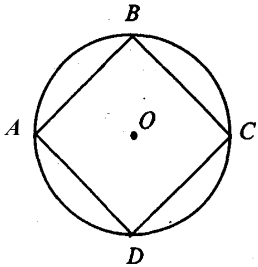
т.е. S круга увеличится в 4 раза.

2) Аналогично, если диаметр увеличить в 5 раз, то S круга увеличится в 25 раз.

3) Если диаметр увеличить в m раз, то S круга увеличится в m^2 раз.

№ 56. Найдите отношение площади круга к площади вписанного в него: 1) квадрата; 2) правильного треугольника; 3) правильного шестиугольника.

1) Пусть ABCD — квадрат, вписанный в круг.



Тогда $a_4 = R\sqrt{2}$ и $S_{\text{кв}} = \left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2$, $S_{\text{кр}} = \pi R^2$, следовательно:

$$\frac{S_{кр}}{S_{кв}} = \frac{\pi R^2}{2R^2} = \frac{\pi}{2}.$$

2) Пусть ABC — треугольник, вписанный в круг. Тогда $a_3 = R\sqrt{3}$ и $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a_3 \cdot a_3 \cdot \sin 60^\circ = \frac{R\sqrt{3} \cdot R\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$, $S_{\text{кр}} = \pi R^2$, следовательно:

$$\frac{S_{кр}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{\pi R^2}{1} : \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} = \frac{\pi R^2 \cdot 4}{3\sqrt{3}R} = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

3) Пусть ABCDEF — шестиугольник, вписанный в круг. Тогда $a_6 = R$ и $S_6 = 6 \cdot S_{\Delta ABC} = 6 \cdot \frac{R \cdot R \cdot \sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$, $S_{кр} = \pi \mathrm{R}^2$, следовательно:

$$\frac{S_{кр}}{S_6} = \frac{\pi R^2 \cdot 2}{1 \cdot 3\sqrt{3}R^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Ответ: 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$; 3) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

№ 57. Найдите отношение площади круга, вписанного в правильный треугольник, к площади круга, описанного около него.

$$S_{\text{вп. круга}} = \pi r^2,\ S_{\text{оп. круга}} = \pi R^2.$$

Так как $a_3 = R\sqrt{3}$, то есть $R = \frac{a_3}{\sqrt{3}}$ и $r = \frac{a_3}{2\sqrt{3}}$, то $r = \frac{R}{2}$.

Так что $S_{\text{вп. круга}} = \pi \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2}{4}$. Поэтому

$$\frac{S_{оп.круга}}{S_{вп.круга}} = \frac{\pi R^2}{4} : \pi R^2 = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\frac{1}{4}$.

№ 58. Найдите отношение площади круга, описанного около квадрата, к площади круга,вписанного в него.

$$S_{\text{оп. круга}} = \pi R^2,\ S_{\text{вп. круга}} = \pi r^2.$$

Далее имеем: $a_4 = R\sqrt{2}$ и $r = \frac{a_4}{2}$, так что $r = \frac{R\sqrt{2}}{2}$ и

$S_{\text{вп. круга}} = \pi \cdot \left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{\pi R^2 \cdot 2}{4} = \frac{\pi R^2}{2}$. Так что

$$\frac{S_{\text{оп.круга}}}{S_{\text{вп.круга}}} = \frac{\pi R^2}{1} : \frac{\pi R^2}{2} = \frac{\pi R^2 \cdot 2}{1 \cdot \pi R^2} = 2.$$

Ответ: 2.

№ 59. Найдите площадь сектора круга радиуса R, если соответствующий этому сектору центральный угол равен: 1) 40°; 2) 90°; 3) 150°; 4) 240°; 5) 300°; 6) 330°.

$S_{сектора} = \frac{\pi R^2}{360^o}\alpha$, так что получаем:

1) $S_{сектора} = \frac{\pi R^2}{360^o}40^o = \frac{\pi R^2}{9}$;

2) $S_{сектора} = \frac{\pi R^2}{360^o}90^o = \frac{\pi R^2}{4}$;

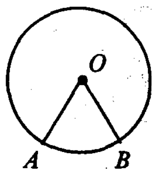
3) $S_{сектора} = \frac{\pi R^2}{360^o}150^o = \frac{5\pi R^2}{12}$;

4) $S_{сектора} = \frac{\pi R^2}{360^o}240^o = \frac{2\pi R^2}{3}$;

5) $S_{сектора} = \frac{\pi R^2}{360^o}300^o = \frac{5\pi R^2}{6}$;

6) $S_{сектора} = \frac{\pi R^2}{360^o}330^o = \frac{11\pi R^2}{12}$.

№ 60. Дана окружность радиуса R. Найдите площадь сектора, соответствующего дуге с длиной, равной: 1) R, 2) l.



1) $R = \frac{\pi R}{180°}\cdot\alpha$, откуда $\alpha = \frac{180°\cdot R}{\pi\cdot R} = \frac{180°}{\pi}$.

$$S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2}{360°}\cdot\alpha = \frac{\pi R^2\cdot 180°}{360°\cdot\pi} = \frac{R^2}{2}.$$

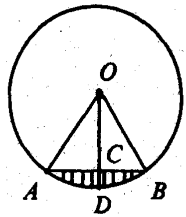
2) $\alpha = \dfrac{180° \cdot l}{\pi \cdot R}$, так что

$$S_{\text{сектора}} = \frac{\pi R^2 \cdot 180° l}{360° \cdot \pi R} = \frac{Rl}{2}.$$

Ответ: 1) $\dfrac{R^2}{2}$; 2) $\dfrac{Rl}{2}$.

№ 61*. Найдите площадь кругового сегмента с основанием $a\sqrt{3}$ и высотой — $\dfrac{a}{2}$.

Пусть ADB — круговой сегмент, AB — основание, AB = $= a\sqrt{3}$, CD = $\dfrac{a}{2}$ — высота сегмента.



В ΔAOC $\angle C = 90°$, AO = R; $OC = OD - CD = R - \dfrac{a}{2}$ и $AC = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$. По теореме Пифагора:

$$AO^2 = OC^2 + AC^2,$$

$$R^2 = \left(R - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2,$$

$$R^2 = R^2 - Ra + \frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4},$$

то есть $Ra = a^2$, так что $R = \dfrac{a^2}{a} = a$.

В ΔAOB AO = BO = a, AB = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Тогда по теореме косинусов:

$$\cos\angle AOB = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\frac{1}{2},$$

то есть $\angle$AOB = 120° и

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot \sin\angle AOB = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

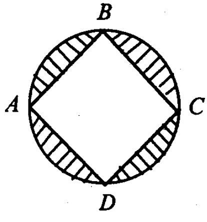
Далее

$$S_{\text{сегмента}} = S_{\text{сектора}} - S_{AOB} =$$
$$= \frac{\pi R^2}{360^\circ}\cdot\alpha - S_{\Delta AOB} = \frac{\pi a^2\cdot 120^\circ}{360^\circ} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

Ответ: $a^2\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

№ 62. Найдите площадь той части круга, которая расположена вне вписанного в него: 1) квадрата; 2) правильного треугольника; 3) правильного шестиугольника. Радиус круга R.

1) Пусть ABCD — квадрат, вписанный в круг.

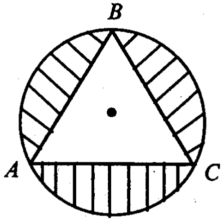


$S_{\text{кр}} = \pi R^2$.

$a_4 = R\sqrt{2}$, тогда $S_{\text{кв}} = a_4^2 = \left(R\sqrt{2}\right)^2 = 2R^2$.

$$S = S_{\text{кр}} - S_{\text{кв}} = \pi R^2 - 2R^2 = R^2(\pi - 2).$$

2) Пусть ABC — треугольник, вписанный в круг.



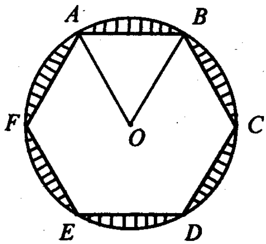
$S_{кр}= \pi R^2$.

$a_3 = R\sqrt{3}$, поэтому $S_\Delta = \frac{1}{2} a_3 \cdot a_3 \sin 60° = \frac{(R\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}$.

Следоавтельно

$$S = S_{кр} - S_{\Delta ABC} = \pi R^2 - \frac{3\sqrt{3}R^2}{4} = R^2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right).$$

3) Пусть ABCDEF — шестиугольник, вписанный в круг.



$S_{кр} = \pi R^2$.

$S_6 = 6 \cdot S_{\Delta AOB} = 6 \cdot \frac{1}{2} R \cdot R \cdot \sin 60° = 3R^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}R^2}{2}$. Так что

$$S = \pi R^2 - \frac{3\sqrt{3}R^2}{2} = R^2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

Ответ: 1) $R^2(\pi - 2)$; 2) $R^2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$; 3) $R^2\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.