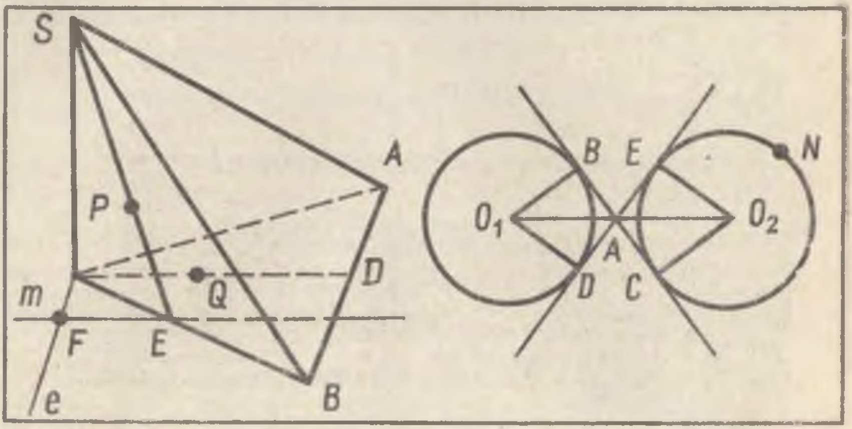
Библиотечка абитуриента

М.К. Потапов, С.Н. Олехник
Ю.В. Нестеренко

УРАВНЕНИЯ

МАТЕМАТИКА



ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1992

ББК 22.1
П64
УДК 512.1

Потапов М.К., Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В.
П64 Уравнения. – М.: Изд-во МГУ, 1992. – 16с. – (Библиотечка абитуриента: Математика)
ISBN 5-211-02665-9

В выпуске, приведены сведения, необходимые для решения уравнений. Применение приводимых понятий и утверждений иллюстрируется на примерах из практики вступительных экзаменов в вузы.

В конце выпуска перед таблицами даны задачи для самостоятельного решения, рядом с которыми в скобках указаны ответы.

Для школьников, абитуриентов, слушателей подготовительных отделений вузов, учителей.

$П\frac{4306020500-035}{077(02)-92}$КБ–46–68–1991 ББК

Учебное издание

ПОТАПОВ Михаил Константинович

ОЛЕХНИК Слав Николаевич

НЕСТЕРЕНКО Юрий Валентинович

УРАВНЕНИЯ

Редактор А.И. Камзолов
Художественный редактор Л.В. Мухина

ИБ № 6515

Подписано в печать 10.03.92. Формат 60×90 1/16.
Бумага офсетная №2. Офсетная печать.
Усл.печ.л. 1,0 Уч.-изд.л. 0,94 Тираж 56000 экз.
Заказ 160 Изд. № 2546.

Ордена "Знак Почета" Издательство Московского университета
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7

ПП „Чертановская типография" МГПО
113545, Москва, Варшавское шоссе, 129а.

ISBN 5-211-02665-9

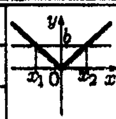
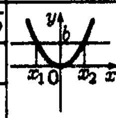
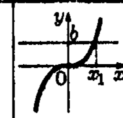
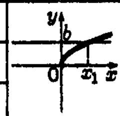
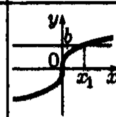
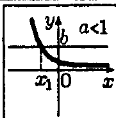
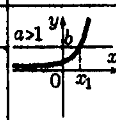
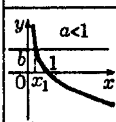
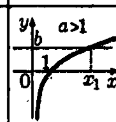
1. Простейшие способы решения уравнений

1.1. Начальные сведения. *Областью допустимых значений* (ОДЗ) уравнения $f(x)=g(x)$ называется общая часть (пересечение) областей определения (существования) функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$.

Корнем (решением) уравнения называется такое число α из ОДЗ уравнения, для которого справедливо числовое равенство $f(\alpha)=g(\alpha)$. *Решить* уравнение – значит найти множество *всех* его корней.

Прежде всего надо хорошо знать решения простейших уравнений. Для удобства читателей они собраны в таблицу 1. В таблице приведена также графическая иллюстрация этих решений (для $b>0$). Корнями уравнения $f(x)=b$ являются абсциссы точек пересечения графиков функций $y=f(x)$ и $y=b$.

Таблица 1

	$\lvert x\rvert=b$	$b>0$	$x_1=-b,\ x_2=b$	
		$b=0$	$x_1=0$	
		$b<0$	нет корней	
	$x^{2n}=b$	$b>0$	$x_1=-\sqrt[2n]{b};\ x_2=\sqrt[2n]{b}$	
		$b=0$	$x_1=0$	
		$b<0$	нет корней	
	$x^{2n+1}=b$	$b>0$	$x_1=\sqrt[2n+1]{b}$	
		$b=0$		
		$b<0$		
	$\sqrt[2n]{x}=b$	$b>0$	$x_1=b^{2n}$	
		$b=0$	$x_1=0$	
		$b<0$	нет корней	
	$\sqrt[2n+1]{x}=b$	$b>0$	$x_1=b^{2n+1}$	
		$b=0$		
		$b<0$		
	$a^x=b$	$b>0$	$x_1=\log_a b$	
		$b=0$	нет	
	$a>0,\ a\neq 1$	$b<0$	корней	
	$\log_a x=b$	$b>0$	$x_1=a^b$	
		$b=0$		
	$a>0,\ a\neq 1$	$b<0$		

Кроме того, необходимо знать решения: а) уравнений первой степени $ax+b=0$ $:x_1=-\frac{b}{a}$; б) квадратных уравнений $ax^2+bx+c=0$: 1) $x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$ и $x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$ при $D=b^2-4ac>0$; 2) $x_1=-\frac{b}{2a}$ при $D=0$; 3) нет корней при $D<0$.

$$f(x)=g(x) \quad (1)$$
$$\varphi(x)=h(x) \quad (2)$$

1.2. Равносильность уравнений. Пусть M – некоторое числовое множество. Два уравнения называются *равносильными* на M, если каждое решение первого из них, лежащее в M, является решением второго, а каждое решение второго, лежащее в M, является решением первого. Равносильность на M уравнений (1) и (2) обозначается так: $f(x)=g(x) \overset{M}{\Leftrightarrow} \varphi(x)=h(x)$. Если M – множество всех действительных чисел, то часто говорят, что уравнения (1) и (2) равносильны, опуская слова "на множестве всех действительных чисел". В этом случае равносильность уравнений (1) и (2) обозначается тем же знаком $\Leftrightarrow$, но без указания множества: $f(x)=g(x)\Leftrightarrow\varphi(x)=h(x)$.

Утверждения о равносильности уравнений:

1. $f(x)=g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)=0$.
2. $f(x)=g(x)\Leftrightarrow\alpha f(x)=\alpha g(x)$, α – действительное число, $\alpha\neq0$.
3. $f(x)=g(x)\overset{M_1}{\Leftrightarrow} f(x)=h(x)$, если $h(x)=g(x)$ для всех x из M_1.
4. $f(x)=g(x)\overset{M_2}{\Leftrightarrow}\varphi(x)f(x)=\varphi(x)g(x)$, если $\varphi(x)\neq0$ для всех x из M_2.
5. а) $f(x)=g(x)\Leftrightarrow[f(x)]^{2n+1}=[g(x)]^{2n+1}$, n – натуральное число; б) $f(x)=g(x)\overset{M_3}{\Leftrightarrow}[f(x)]^{2n}=[g(x)]^{2n}$, если $f(x)\geqslant0$ и $g(x)\geqslant0$ для всех x из M_3, n – натуральное число;
6. $f(x)=g(x)\overset{M_4}{\Leftrightarrow}\log_a f(x)=\log_a g(x)$, если $f(x)>0$ и $g(x)>0$ для всех x из M_4, a – действительное число, $a>0, a\neq1$.

1.3. Простейшие преобразования уравнений. К простейшим преобразованиям относят следующие: перенос членов уравнения из одной части в другую (утверждение 1) и умножение (или деление) обеих частей уравнения на число, отличное от нуля (утверждение 2).

Пример. Решить уравнение (3).

$$4\cdot3^x-5=0 \quad (3)$$
$$4\cdot3^x=5 \quad (4)$$
$$3^x=\frac{5}{4} \quad (5)$$

Решение. Перенося число (-5) в правую часть, получаем уравнение (4), равносильное уравнению (3). Разделив обе части уравнения (4) на число 4, получим простейшее уравнение (5), равносильное уравнению (4). Уравнение (5) имеет единственный корень $x_1=\log_3\frac{5}{4}$. Так как уравнения (3) и (4), а также уравнения (4) и (5) равносильны, то уравнение (3) имеет тот же единственный корень x_1. Ответ: $x=\log_3\frac{5}{4}$.

Отметим, что равносильность уравнений при применении утверждений 1 и 2 настолько очевидна, что часто при применении этих утверждений даже не пишут слов о равносильности уравнений, а пишут слова: "перепишем уравнение в виде", или "перепишем уравнение так", или "уравнение имеет вид" и т.д.

2. Преобразования уравнений на множествах

Поскольку каждое из преобразований, описанных в утверждениях 3-6 п. 1.2., сохраняет равносильность уравнений лишь на некотором множестве M, то прежде чем сделать выбранное преобразование, надо выделить то множество, на котором оно будет применяться. Поэтому часто сначала находят ОДЗ уравнения, т.е. сужают, вообще говоря, область, где ищутся корни уравнения. Иногда из каких-либо соображений можно еще сузить область, содержащую корни, отбросив подмножества ОДЗ, которые заведомо не могут содержать корней. Так определяется исходное множество M, в котором ищутся корни заданного уравнения. Затем множество M делят на две части: множество M_1, где выбранное преобразование сохраняет равносильность уравнений, и множество M_2, где оно не сохраняет равносильность.

На множестве M_1 после выполнения преобразования получают более простое уравнение (так выбирается преобразование). Затем с множеством M_1 и вновь полученным уравнением поступают так же, как перед этим с множеством M и исходным уравнением. На M_2 применять выбранное преобразование нельзя, поэтому на M_2 ищется свое преобразование, с помощью которого можно упростить уравнение. Затем на M_2 выполняются действия, подобные действиям на множестве M_1. В итоге таких преобразований приходят к простейшим уравнениям. Объединяя решения, найденные на множествах M_1 и M_2, находят все решения исходного уравнения.

Отметим также, что иногда бывает удобнее не находить явно ОДЗ и области M_1 и M_2, а задавать их системой условий (см. п. 5.2.).

Покажем теперь на примерах, как используются эти идеи при решении различных уравнений.

2.1. Применение тождественных равенств. Применение тождественных равенств основано на утверждении 3. Отметим, что применение в одной из частей уравнения одной из формул таблицы 2, помещенной в конце выпуска, приводит к уравнению, равносильному исходному только на том множестве M, на котором справедлива применяемая формула.

Пример 1. Решить уравнение

$$2^{x+1}-6\cdot 2^{x}+x^2+\log_3(x-1)+\log_3(3-x)=\log_3(4x-3-x^2)-2^{x+2}-x+6. \quad (1)$$

Решение. ОДЗ уравнения (1) определяется условиями $x-1>0, 3-x>0, 4x-3-x^2>0$. Так как $4x-3-x^2=(x-1)(3-x)$, то ясно, что ОДЗ есть промежуток $1<x<3$. Поскольку на ОДЗ функции $y=x-1$ и $y=3-x$ положительны, то, применяя формулы 8 и 23 из таблицы 2, получим, что уравнение (1) равносильно по утверждению 3 уравнению

$$2\cdot 2^{x}-6\cdot 2^{x}+x^2+\log_3(4x-3-x^2)=\log_3(4x-3-x^2)-4\cdot 2^{x}-x+6. \quad (2)$$

Перенося все члены уравнения (2) в его левую часть и приводя подобные члены (т.е. применяя формулу 11 из таблицы 2), приходим к уравнению $x^2+x-6=0$,(3) равносильному по утверждению 3 на промежутке $1<x<3$ уравнению (2). Уравнение (3) имеет два корня: $x_1=2$ и $x_2=-3$; из них в промежуток $1<x<3$ входит только x_1. Следовательно, уравнение (1) имеет единственный корень x_1.

Ответ: $x=2$.

Отметим, что применение формулы $f(x)-f(x)=0$, т.е. уничтожение подобных членов, приводит к уравнению, равносильному исходному только на области существования функции $y=f(x)$ (например, уравнения (2) и (3) равносильны только на том множестве, где $4x-3-x^2>0$). Поэтому при уничтожении подобных членов надо отобрать из решений полученного уравнения те, которые лежат в области существования функции $y=f(x)$

2.2. Освобождение от знаменателя.

Пример 2. Решить уравнение (4).

$$\boxed{\frac{1}{2x^2+9x+10}=\frac{1}{x^2+3x+2} \qquad (4)}$$

Решение. ОДЗ уравнения (4) есть множество M, которое состоит из всех чисел, отличных от корней уравнений $2x^2+9x+10=0$ и $x^2+3x+2=0$, т.е. от чисел $-1; -2; -5/2$. На M обе функции $y=$

$2x^2+9x+10$ и $y=x^2+3x+2$ определены и не обращаются в нуль. Поэтому, умножив уравнение (4) на произведение этих функций, получим на основании утверждения 4, что оно равносильно на M уравнению

$$x^2+3x+2=2x^2+9x+10. \qquad (5)$$

Перенося все члены уравнения (5) в его правую часть и приводя подобные члены многочлена, получим уравнение $x^2+6x+8=0$, (6)

равносильное по утверждению 3 уравнению (5). Уравнение (6) имеет два корня: $x_1=-4$ и $x_2=-2$. Из этих корней в множество M входит только x_1. Следовательно, уравнение (4) имеет единственный корень x_1. Ответ: $x=-4$.

2.3. Возведение в степень

Пример 3. Решить уравнение (7).

$$\sqrt[5]{2x^2-3x+1}=\sqrt[5]{5x-3} \qquad (7)$$

$$\left(\sqrt[5]{2x^2-3x+1}\right)^5=\left(\sqrt[5]{5x-3}\right)^5 \qquad (8)$$

$$2x^2-3x+1=5x-3, \qquad (9)$$

$$2x^2-8x+4=0 \qquad (10)$$

Решение. Возведя обе части уравнения (7) в пятую степень, получим на основании утверждения 5а уравнение (8), равносильное уравнению (7). Применяя формулу 5 из таблицы 2, получаем уравнение (9), равносильное по утверждению 3 уравнению (8). Перенося все члены уравнения (9) в его левую часть и приводя подобные члены многочлена, получаем уравнение (10), равносильное по утверждению 3 уравнению (9). Уравнение (10) имеет два корня: $x_1=2+\sqrt{2}$ и $x_2=2-\sqrt{2}$. Следовательно, и равносильное ему уравнение (7) также имеет те же корни x_1 и x_2.

Ответ: $x_1=2+\sqrt{2}$, $x_2=2-\sqrt{2}$.

Пример 4. Решить уравнение (11).

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{2x+3} \qquad (11)$$

$$\left(\sqrt{x+1}\right)^2+2\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{x-1}+\left(\sqrt{x-1}\right)^2=\left(\sqrt{2x+3}\right)^2 \qquad (12)$$

$$x+1+2\sqrt{x^2-1}+x-1=2x+3 \qquad (13)$$

$$2\sqrt{x^2-1}=3 \qquad (14)$$

$$4\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2=9 \qquad (15)$$

$$4(x^2-1)=9 \qquad (16)$$

Решение: ОДЗ уравнения (11) состоит из всех $x\geqslant 1$. На этой области неотрицательны левая и правая части уравнения (11), поэтому возведя обе части уравнения (11) в квадрат, получим уравнение (12), равносильное на основании утверждения 5б для всех $x\geqslant 1$ уравнению (11). Для всех $x\geqslant 1$ неотрицательны функции $y=x+1, y=x-1, y=2x+3$, поэтому применяя формулу 16 таблицы 2, получим, что уравнение (12) равносильно для $x\geqslant 1$ уравнению (13), которое можно переписать в виде (14). На области $x\geqslant 1$ обе части уравнения (14) неотрицательны, поэтому на ней уравнение (14) равносильно уравнению (15), которое в силу неотрицательности функции $y=x^2-1$ равносильно на этом множестве уравнению (16). Уравнение (16) имеет два корня: $x_1=\frac{\sqrt{13}}{2}$ и $x_2=-\frac{\sqrt{13}}{2}$. Из этих корней в множество $x\geqslant 1$ входит только корень x_1. Следовательно, уравнение (11) имеет единственный корень x_1. Ответ: $x=\frac{\sqrt{13}}{2}$.

Отметим, что обычно при возведении в степень таких уравнений, как в примерах 3 и 4, сразу переходят от уравнений (7) и (11) к уравнениям (9) и (13), пропуская уравнения (8) и (12). Так дальше и будем поступать.

$$|x+3|=3x-1 \qquad (17)$$

Пример 5. Решить уравнение (17).

Решение. Ясно, что среди $x<\frac{1}{3}$ нет решений уравнения (17). Поэтому все они находятся в множестве M – множестве всех $x\geqslant\frac{1}{3}$; тогда, применяя утверждения 5б, 1 и 2, имеем цепочку равносильных преобразований

$$|x+3|=3x-1 \overset{M}{\Leftrightarrow} (x+3)^2=(3x-1)^2 \Leftrightarrow 8x^2-12x-8=0 \Leftrightarrow 2x^2-3x-2=0.$$

Последнее уравнение имеет два корня: $x_1=2$ и $x_2=-\frac{1}{2}$. Из них в множество M входит лишь x_1. Он и будет корнем уравнения (17). Ответ: $x=2$.

2.4. Потенцирование и логарифмирование.

Пример 6. Решить уравнение (18).

$$\log_{1/2}(x^2-4x-5)=\log_{1/2}(1-x) \quad (18)$$

Решение. ОДЗ уравнения (18) определяется условиями $x^2-4x-5>0$ и $1-x>0$, т.е. ОДЗ есть все $x<-1$. На этом множестве обе функции $y=x^2-4x-5$ и $y=1-x$ положительны, поэтому на нем на основании утверждения 6 уравнение (18) равносильно уравнению $x^2-4x-5=1-x$, имеющему два корня: $x_1=\frac{3-\sqrt{33}}{2}$ и $x_2=\frac{3+\sqrt{33}}{2}$. Из них условию $x<-1$ удовлетворяет только корень x_1. Следовательно, уравнение (18) имеет единственный корень x_1. Ответ: $x=\frac{3-\sqrt{33}}{2}$.

$$9^x=5^{x^2-1} \quad (19)$$
$$\log_5 9^x=\log_5 5^{x^2-1} \quad (20)$$
$$2x\log_5 3=x^2-1 \quad (21)$$

Пример 7. Решить уравнение (19).

Решение. Для всех действительных x обе функции $y=9^x$ и $y=5^{x^2-1}$ положительны, поэтому по утверждению 6 уравнение (19) равносильно уравнению (20). На основании формулы 2 таблицы 2 уравнение (20) равносильно уравнению (21), имеющему два корня: $x_1=\log_5 3-\sqrt{1+\log_5^2 3}$ и $x_2=\log_5 3+\sqrt{1+\log_5^2 3}$. Следовательно, уравнение (19) также имеет два корня x_1 и x_2. Ответ: $x_1=\log_5 3-\sqrt{1+\log_5^2 3}$, $x_2=\log_5 3+\sqrt{1+\log_5^2 3}$.

3. Переход к следствию

Уравнение $\varphi(x)=h(x)$ называется *следствием* уравнения $f(x)=g(x)$, если среди корней уравнения $\varphi(x)=h(x)$ содержатся все корни уравнения $f(x)=g(x)$.

При переходе к уравнению-следствию не происходит потери корней, но могут появиться посторонние корни. Поэтому, если в процессе решения уравнения был совершен переход к следствию, то в конце решения необходимо проверить, является ли каждое из найденных чисел корнем исходного уравнения. Такая проверка – обязательный этап описываемого в этом параграфе метода решения уравнений. Без него решение уравнения считается неполным, и зачастую приводит к ошибочному ответу.

К уравнению-следствию может привести:

а) применение в одной из частей уравнения любой из формул 12-26 таблицы 2 "слева-направо", т.е. замена левой части формулы на правую без учета множества, на котором она применима;

б) освобождение уравнения от знаменателя;

в) возведение уравнения в степень;

г) потенцирование уравнения.

Дальше в п.п.3.1-3.4. приводятся примеры, в которых приобретение посторонних корней действительно происходит при применении преобразований, сформулированных в названии пункта.

3.1. Применение тождественных равенств. Если при решении уравнения применена хотя бы одна из формул 12-26 таблицы 2 так, что ее левая часть заменена на правую без учета множества, на котором она справедлива, то возможно приобретение посторонних корней (потери корней не происходит). Приобретение корней происходит также при уничтожении подобных членов, т.е. при применении формулы $f(x)-f(x)=0$.

Пример 1. Решить уравнение

$$5\cdot 3^{\log_3 x}+\log_2(x+1)+\log_2(2-x)=\log_2(2+x-x^2)+x^2+4. \qquad (1)$$

Решение. Применяя формулы 12 и 23 из таблицы 2 "слева-направо", получаем уравнение $5x+\log_2(2+x-x^2)=\log_2(2+x-x^2)+x^2+4$, (2), являющееся следствием уравнения (1). Перенося все члены уравнения (2) в его правую часть и приводя подобные члены, т.е. пользуясь формулой 11 из таблицы 2, приходим к уравнению $x^2-5x+4=0$, (3), которое является следствием уравнения (2). Уравнение (3) имеет два корня: $x_1=1$ и $x_2=4$. Проверка показывает, что x_1 удовлетворяет уравнению (1), а x_2 - нет. Следовательно, уравнение (1) имеет единственный корень x_1. Ответ: $x=1$.

Обратим внимание на то, что применение формул 1-10, а также формулы 11 при $\alpha+\beta\neq 0$ не приводит к приобретению посторонних корней. Применение же формулы 11 при $\alpha=1$ и $\beta=-1$ и замена нулем выражения $0\cdot f(x)$, т.е. уничтожение подобных членов, часто приводит к приобретению лишних корней.

3.2. Освобождение уравнения от знаменателя. При освобождении уравнения от знаменателя можно приобрести посторонние корни (потери корней не происходит).

Пример 2. Решить уравнение (4).

$$\frac{1}{x^2+5x+4}=\frac{1}{2x^2+9x+7} \qquad (4)$$

$$2x^2+9x+7=x^2+5x+4 \qquad (5)$$

$$x^2+4x+3=0 \qquad (6)$$

Решение. Освобождаясь от знаменателя в уравнении (4), получим уравнение (5), являющееся следствием уравнения (4). Перепишем уравнение (5) в виде (6). Уравнение (6) имеет два корня $x_1=-3$ и $x_2=-1$. Проверка показывает, что x_1 удовлетворяет уравнению (4), а x_2 - нет. Следовательно, уравнение (4) имеет единственный корень x_1. Ответ: $x=-3$.

3.3. Возведение уравнения в степень. При возведении обеих частей уравнения в четную степень можно приобрести посторонние корни (потери корней не происходит).

Пример 3. Решить уравнение (7).

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{x-4}=\sqrt{2x-6} \qquad (7)$$

$$x+4-2\sqrt{x^2-16}+x-4=2x-6 \qquad (8)$$

$$\sqrt{x^2-16}=3 \qquad (9)$$

$$x^2=25 \qquad (10)$$

Решение. Возведя обе части уравнения (7) в квадрат, получим уравнение (8), являющееся следствием уравнения (7). Приводя подобные члены, приходим к уравнению (9), которое есть следствие уравнения (8). Возведя уравнение (9) в квадрат, получим уравнение (10), являющееся следствием уравнения (9). Уравнение (10) имеет два корня: $x_1=5$ и $x_2=-5$. Проверка показывает, что x_1 удовлетворяет уравнению (7), а x_2 – нет. Следовательно, уравнение (7) имеет единственный корень x_1. Ответ: $x=5$.

$$|x+3|=2x-1 \quad (11)$$
$$(x+3)^2=(2x-1)^2 \quad (12)$$
$$3x^2-10x-8=0 \quad (13)$$

Пример 4. Решить уравнение (11).

Решение. Возводя обе части уравнение (11) в квадрат, получим уравнение (12), являющееся следствием уравнения (11). Перепишем уравнение (12) в виде (13). Уравнение (13) имеет два корня: $x_1=4$ и $x_2=-2/3$. Проверка показывает, что x_1 удовлетворяет уравнению (11), а x_2 – нет. Следовательно, уравнение (11) имеет единственный корень x_1. Ответ: $x=4$

3.4. Потенцирование уравнения. При потенцировании уравнения можно приобрести посторонние корни (потери корней не происходит).

Пример 5. Решить уравнение (14).

$$\log_{1/2}(x^2-3x-6)=\log_{1/2}(x-1) \quad (14)$$
$$x^2-3x-6=x-1 \quad (15)$$
$$x^2-4x-5=0 \quad (16)$$

Решение. Потенцируя уравнение (14), получаем уравнение (15), являющееся следствием уравнения (14). Перенося все члены уравнения (14) в левую часть и приводя подобные члены, приходим к уравнению (16), которое является следствием уравнения (15). Уравнение (16) имеет два корня: $x_1=5$ и $x_2=-1$. Проверка показывает, что $x_1=5$ есть корень уравнения (14), а x_2 – нет. Следовательно, уравнение (14) имеет единственный корень x_1. Ответ: $x=5$.

3.5. Преобразования, связанные с потерей корней уравнения. Ниже будут приведены преобразования, которые могут привести к потере корней уравнения. Проводить такие преобразования нельзя, ибо потерянный корень невозможно восстановить, следовательно, "решение" уравнения, использующее такие преобразования, на самом деле не является решением.

К потере корней исходного уравнения может привести:

а) применение любой из формул 12-26 таблицы 2 "справа-налево", т.е. замена правой части формулы на левую, без учета множества, на котором она применима;

б) извлечение корня четной степени из обеих частей уравнения;

в) логарифмирование обеих частей уравнения.

Еще раз подчеркнем, что недопустимо применение этих преобразований без рассмотрения множества, на котором они выполняются. Отметим, что умножение (или деление) уравнения, а также сокращение обеих частей уравнения на функцию может привести как к потере, так и к приобретению посторонних корней. Например, разделив обе части уравнения $(x^2+2x)\sqrt{x}=3\sqrt{x}$ (17)
на $\sqrt{x}$, получим уравнение $x^2+2x=3$, имеющее два корня: $x_1=1$ и $x_2=-3$. При таком "решении" приобретен лишний корень $x_2=-3$, но потерян корень $x_3=0$ исходного уравнения. Решение таких уравнений описано ниже в п. 4.1.

4. Совокупность уравнений

Областью допустимых значений (ОДЗ) совокупности уравнений

$f_1(x)=g_1(x),\dots,f_n(x)=g_n(x)$ называется общая часть (пересечение) ОДЗ всех этих уравнений. *Решением (корнем)* совокупности уравнений называется такое число α из ОДЗ этой совокупности, которое является корнем хотя бы одного из этих n уравнений. *Решить* совокупность – значит найти множество *всех* ее решений.

Уравнение $f(x)=g(x)$ *равносильно* совокупности, если совпадают множества всех их корней.

4.1. Замена уравнения $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)=0$ совокупностью уравнений. Для решения таких уравнений применяется следующее утверждение:

7. Уравнение $f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot\ldots\cdot f_n(x)=0$, (1),
равносильно совокупности уравнений $f_1(x)=0,\dots,f_n(x)=0$; (2).

Обычно уравнение вида (1) решают так: сначала отыскивают его ОДЗ, затем решают каждое из уравнений совокупности (2) и, наконец, отбирают из найденных корней те, которые лежат в ОДЗ уравнения (1). Они и будут корнями уравнения (1).

Пример 1. Решить уравнение (3).

$$\boxed{(x^2+3x+2)\cdot\log_2 x=0 \quad (3)}$$

Решение. ОДЗ уравнения (3) есть множество M – множество всех положительных чисел. Уравнение (3) равносильно совокупности уравнений $\log_2 x=0$ и $x^2+3x+2=0$.

Первое уравнение этой совокупности имеет единственный корень $x_1=1$, а второе – два корня: $x_2=-1$ и $x_3=-2$. Из найденых чисел в множество M входит только x_1. Следовательно, уравнение (3) имеет единственный корень x_1.
Ответ: $x=1$.

$$\boxed{\varphi(x)f(x)=\varphi(x)g(x) \quad (4)}$$

Замечание. Иногда при решении уравнения (4), его сокращают на общий множитель – функцию $\varphi(x)$. При таком "решении" можно как потерять так и приобрести лишние корни (см. уравнение (17) п. 3.5.), поэтому такое "решение" уравнения (4) недопустимо. Уравнение вида (4) лучше решать сведением его к виду (1):

1) переписать его в виде $\varphi(x)[f(x)-g(x)]=0$;
2) затем решать, используя утверждение 7.

Пример 2. Решить уравнение (5).

$$\boxed{\begin{array}{lr} x^2\sqrt{x}-x\sqrt{x}=3x^2-3x+6\sqrt{x}-18 & (5)\\ \sqrt{x}(x^2-x-6)=3(x^2-x-6) & (6)\\ (\sqrt{x}-3)(x^2-x-6)=0 & (7)\\ \sqrt{x}-3=0, \text{ и } x^2-x-6=0 & (8)\end{array}}$$

Решение. Перенося член $6\sqrt{x}$ в левую часть уравнения (5) и вынося общий множитель, перепишем уравнение (5) в виде (6), затем в виде (7). Уравнение(7) равносильно совокупности уравнений (8). ОДЗ уравнения (5), а значит, и совокупности уравнений (8) есть множество всех чисел $x\geqslant 0$. Первое уравнение совокупности (8) имеет единственный корень $x_1=9$. Второе уравнение – два корня: $x_2=3$ и $x_3=-2$. Из этих корней в множество $x\geqslant 0$ входят только x_1 и x_2. Следовательно, только они и будут корнями уравнения (5). Ответ: $x_1=9$, $x_2=3$.

4.2. Уравнения, связанные с суперпозицией функций. Пусть дано уравнение вида $\varphi(g(x))=0$, (9),
где $g(x)$ и $\varphi(x)$ – некоторые функции. При решении таких уравнений обычно пользуются следующим утверждением:

8а) Если уравнение $\varphi(t)=0$ не имеет корней, то не имеет решений и уравнение (9); 8б) если уравнение $\varphi(t)=0$ имеет корни $t_1, t_2, \ldots, t_n$, то уравнение (9) равносильно совокупности уравнений

$$g(x)=t_1, g(x)=t_2, \ldots, g(x)=t_n. \tag{10}$$

Отметим, что иногда совокупность уравнений (10) может состоять из одного уравнения.

Такой способ решения уравнения (9) часто оформляется другими словами: для решения уравнения (9) оно заменой неизвестной $t=g(x)$ сначала сводится к уравнению $\varphi(t)=0$, а после нахождения всех корней этого уравнения $t_1, t_2, \ldots, t_n$ сводится к решению совокупности уравнений (10).

$9^x-4\cdot 3^x-5=0$	(11)
$(3^x)^2-4\cdot 3^x-5=0$	(12)
$t^2-4t-5=0$	(13)
$3^x=5$ и $3^x=-1$	(14)

Пример 3. Решить уравнение (11).

Решение. Уравнение (11) можно переписать в виде (12). Делая замену неизвестной $t=3^x$, получаем уравнение (13), имеющее два корня: $t_1=5$ и $t_2=-1$. Следовательно, на основании утверждения 8б, уравнение (11) равносильно совокупности уравнений (14). Первое уравнение имеет единственный корень $x_1=\log_3 5$, а второе уравнение решений не имеет. Следовательно, уравнение (11) имеет единственный корень x_1. Ответ: $x=\log_3 5$.

$$\boxed{|5x^2+20x+17|=2 \quad (15)}$$

Пример 4. Решить уравнение (15).

Решение. Поскольку уравнение $|t|=2$ имеет два корня: $t_1=2$ и $t_2=-2$, то на основании утверждения 8б уравнение (15) равносильно совокупности уравнений $5x^2+20x+17=2$ и $5x^2+20x+17=-2$. Первое уравнение этой совокупности имеет два корня: $x_1=-3$ и $x_2=-1$, второе уравнение – также два корня: $x_3=-2-1/\sqrt{5}$ и $x_4=-2+1/\sqrt{5}$. Следовательно, уравнение (15) имеет четыре корня x_1, x_2, x_3, x_4. Ответ: $x_1=-3$, $x_2=-1$, $x_3=-2-1/\sqrt{5}$, $x_4=-2+1/\sqrt{5}$.

4.3. Освобождение от знаков абсолютной величины. Если уравнение $F(x)=0$ содержит несколько функций под знаками абсолютной величины ($y=|f_1(x)|, \ldots, y=|f_k(x)|$), то часто поступают так: сначала решают совокупность уравнений

$$f_1(x)=0, \ldots, f_k(x)=0. \tag{16}$$

Затем на координатной оси отмечают ОДЗ уравнения и все корни совокупности (16). Тогда ОДЗ уравнения $F(x)=0$ разбивается на некоторое количество промежутков, таких, что на каждом из них по формулам 13 и 14 таблицы 2 либо $|f_i(x)|=f_i(x)$, либо $|f_i(x)|=-f_i(x)$, $i=1,2,\ldots,n$. Поэтому на каждом таком промежутке уравнение $F(x)=0$ заменяется другим уравнением, уже не содержащим знаков абсолютных величин и равносильным исходному на этом промежутке. Наконец, решают полученные уравнения (каждое на своем промежутке). Объединение найденных решений и дает все решения уравнения $F(x)=0$.

$$\boxed{|x-4|+|x-2|=x+1 \quad (17)}$$

Пример 5. Решить уравнение (17).

Решение. Сначала решим совокупность уравнений

$$x-4=0 \text{ и } x-2=0, \tag{18}$$

Эта совокупность имеет два корня: $x_1=2$ и $x_2=4$. Они делят координатную ось на три промежутка: $-\infty<x<2, 2\leqslant x\leqslant 4, 4<x<+\infty$. На промежутке $-\infty<x<2$

имеем $|x-4|=4-x, |x-2|=2-x$, поэтому на этом промежутке уравнение (17) равносильно уравнению $4-x+2-x=x+1$, имеющему единственный корень $x_1=5/3$. Этот корень лежит в рассматриваемом промежутке и поэтому является корнем уравнения (17). На промежутке $2\leqslant x\leqslant 4$ имеем: $|x-4|=4-x, |x-2|=x-2$, поэтому на нем уравнение (17) равносильно уравнению $4-x+x-2=x+1$, имеющему единственный корень $x_2=1$, который не лежит в рассматриваемом промежутке. Следовательно, уравнение (17) не имеет корней на этом промежутке. На промежутке $4<x<+\infty$ имеем: $|x-4|=x-4$, $|x-2|=x-2$, поэтому на нем уравнение(17) равносильно уравнению $x-4+x-2=x+1$, имеющему единственный корень $x_3=7$, лежащий в рассматриваемом промежутке. Следовательно, уравнение (17) имеет корень x_3 на этом промежутке. Объединяя решения, найденные на всех промежутках, получаем, что уравнение (17) имеет два корня: x_1 и x_3. Ответ: $x_1=5/3$, $x_2=7$.

Отметим, что пример 4 п. 4.2. можно решать общим методом, описанном в этом пункте. Но тогда его решение было бы более громоздким, так как пришлось бы решать квадратное неравенство, рассматривать три области, на которые делилась бы координатная ось и т.д.

5. Как решать уравнения

5.1. Что лучше: переход к следствию или равносильные преобразования? Многие уравнения можно решать как переходом к следствию, так и при помощи равносильных преобразований на множестве. Какой из этих двух способов более предпочтителен? Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Решить уравнение (1).

$\sqrt{4x+11}=3+\sqrt{x+1}$	(1)
$4x+11=9+6\sqrt{x+1}+x+1$	(2)
$3x+1=6\sqrt{x+1}$	(3)
$(3x+1)^2=36(x+1)$	(4)
$9x^2-30x-35=0$	(5)

Решение. 1-й способ – *применение преобразований, равносильных на множестве.* ОДЗ уравнения (1) – множество всех $x\geqslant -1$. На ОДЗ обе части уравнения определены и неотрицательны, поэтому после возведения в квадрат обеих частей уравнения (1), получим уравнение (2), равносильное уравнению (1) на его ОДЗ. Перепишем уравнение (2) в виде (3). На ОДЗ правая часть этого уравнения неотрицательна, а левая может быть и отрицательной. Поэтому выделим из ОДЗ то множество, где обе части уравнения (3) неотрицательны – только там будут корни уравнения (3). На множестве $x\geqslant -1/3$ обе части уравнения (3) неотрицательны, поэтому после возведения в квадрат получим, что уравнение (3) равносильно на множестве $x\geqslant -1/3$ уравнению (4), которое можно переписать в виде (5). Уравнение (5) имеет два корня: $x_1=(5+2\sqrt{15})/3$ и $x_2=(5-2\sqrt{15})/3$. Из них в область $x\geqslant -1/3$ входит только x_1, следовательно, уравнение (1) имеет единственный корень x_1.

2-й способ – *переход к следствию.* Возведя обе части уравнения (1) в квадрат, получим уравнение (2), являющееся следствием уравнения (1). Перепишем уравнение (2) в виде (3). Возведя обе части уравнения (3) в квадрат, имеем уравнение (4), являющееся следствием уравнения (3). Перепишем уравнение (4) в виде (5). Уравнение (5) имеет два корня: $x_1=(5+2\sqrt{15})/3$ и $x_2=(5-2\sqrt{15})/3$. Так как были переходы к следствию, то необходима проверка, т.е. надо доказать или опровергнуть числовые равенства

$$\sqrt{\frac{53+8\sqrt{15}}{3}}=3+\sqrt{\frac{8+2\sqrt{15}}{3}}, \quad (6), \qquad \sqrt{\frac{53-8\sqrt{15}}{3}}=3+\sqrt{\frac{8-2\sqrt{15}}{3}}, \quad (7).$$

Можно показать, что равенство (6) верное, а равенство (7) неверное. Следовательно, уравнение (1) имеет единственный корень x_1. Ответ: $x=\frac{5+2\sqrt{15}}{3}$.

Пример 2. Решить уравнение (8).

$\lvert x-2\rvert-1=\lvert x-3\rvert$	(8)
$\lvert x-2\rvert=1+\lvert x-3\rvert$	(9)
$(x-2)^2=(1+\lvert x-3\rvert)^2$	(10)
$\lvert x-3\rvert=x-3$	(11)

Решение. 1-й способ – *применение преобразований, равносильных на множестве.* Перепишем исходное уравнение в виде (9). Поскольку обе части уравнения (9) неотрицательны, то после возведения в квадрат обеих его частей, получим уравнение (10), равносильное уравнению (9). Уравнение (10) можно переписать в виде (11). Из формулы 13 таблицы 2 следует, что решениями уравнения (11) являются все $x\geqslant 3$. Следовательно, все эти x являются решениями уравнения (8).

2-й способ – *переход к следствию.* Возводя уравнение (8) в квадрат, получим уравнение $x^2-2x+4-2|x-2|+1=x^2-6x+9$ – следствие уравнения (8). Это уравнение можно переписать в виде

$$|x-2|=x-2, \tag{12}$$

Из формулы 13 таблицы 2 следует, что решениями уравнения (12) являются все $x\geqslant 2$. Так как в процессе решения был переход к следствию, то необходима проверка. Проверить каждое из бесконечного множества чисел невозможно. Проверка же *сразу всех* чисел, лежащих в том или ином промежутке, сводится, на самом деле, к решению уравнения (8) способом, описанным в п. 4.3. Проводя ее, получим, что решениями уравнения (8) являются все $x\geqslant 3$. Ответ: $3\leqslant x<+\infty$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\log_2(2^x+1-x^2)=\log_2(2^{x-1}+2-2x)+1. \tag{13}$$

Решение. Поскольку $1=\log_2 2$, то перепишем уравнение (13) в виде

$$\log_2(2^x+1-x^2)=\log_2(2(2^{x-1}+2-2x)). \tag{14}$$

Потенцируя уравнение (14), получаем уравнение $2^x+1-x^2=2^x+4-4x$, являющееся следствием уравнения (14). Перенося все члены полученного уравнения в левую часть и приводя подобные члены, получаем уравнение $x^2-4x+3=0$, имеющее два корня: $x_1=1$ и $x_2=3$. Проверка показывает, что $x_1=1$ является корнем уравнения (13), а x_2 не является. Следовательно, уравнение (13) имеет единственный корень x_1. Ответ: $x=1$.

Отметим, что решение уравнения (13) способом применения преобразований, равносильных на множестве, было бы намного сложнее.

Из анализа решений примеров 1, 2 и 3 можно сделать вывод: примеры 1 и 2 лучше решать переходами, равносильными на множествах, а пример 3 – переходом к следствию.

К сожалению, нельзя указать общее правило, по которому еще до начала решения можно было бы выбрать один из двух способов как лучший способ. Умение сделать правильный выбор приходит с опытом решения уравнений.

5.2. Всегда ли надо находить явно ОДЗ уравнения? Совершенно ясно, что если выполняется переход к следствию, то необязательно искать ОДЗ уравнения, так как в процессе такого решения эта область никак не используется. Столь же очевидно, что при применении преобразований, равносильных на множествах, лучше начинать решение с отыскания ОДЗ, чем сразу сужается область, в которой отыскиваются корни уравнения.

Как отмечено выше, при решении конкретного уравнения сразу неочевидно, каким способом (переходом к следствию или равносильными преобразованиями) оно будет решаться. Поэтому можно дать общий совет: если ОДЗ уравнения вычисляется просто, то лучше ее найти в начале решения. Иногда нахождение ОДЗ позволяет упростить решение уравнения.

Пример 4. Решить уравнение $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{1-x^2}=x^2+2x-3$.

Решение. ОДЗ уравнения состоит из двух чисел: $x_1=1$ и $x_2=-1$. Подставляя $x_1=1$ в уравнение, получаем верное числовой равенство, а подставляя $x_2=-1$, получаем неверное равенство. Следовательно, уравнение имеет единственный корень $x_1=1$. Ответ: $x=1$.

Отметим, что решение этого примера возведением обеих его частей в квадрат и переходом к уравнению-следствию весьма затруднительно.

Отметим еще, что не всегда надо явно находить ОДЗ уравнения (иногда сделать это трудно, см. пример 3 п. 5.1), а достаточно записать систему условий, ее задающую, и после преобразований корни полученного в итоге уравнения проверить на вхождение в ОДЗ (т.е. отобрать из них те, которые удовлетворяют системе условий, задающих ОДЗ).

Пример 5. Решить уравнение

$$\log_3(\sqrt{x-2}+1)+\left(x+\sqrt{x^2-\log_3(\sqrt{x-2}+1)}\right)\times$$
$$\times\left(x^2-9x+7+\sqrt{x^2-\log_3(\sqrt{x-2}+1)}\right)=0. \qquad (15)$$

Решение. ОДЗ уравнения (15) определяется условиями (16). Обозначим ОДЗ буквой M. Перемножив выражения в скобках, перепишем уравнение (15) в виде

$$\boxed{\begin{array}{ll} x^2\geqslant\log_3(\sqrt{x-2}+1) & \\ x\geqslant 2 & (16)\end{array}}$$

$$\log_3(\sqrt{x-2}+1)+x(x^2-9x+7)+\sqrt{x^2-\log_3(\sqrt{x-2}+1)}(x^2-8x+7)+$$
$$+\left(\sqrt{x^2-\log_3(\sqrt{x-2}+1)}\right)^2=0. \qquad (17)$$

На M применимы формулы 16 и 11 таблицы 2, и поэтому на M уравнение (17) равносильно уравнению

$$(x^2-8x+7)\left(x+\sqrt{x^2-\log_3(\sqrt{x-2}+1)}\right)=0. \qquad (18)$$

Так как для любого x из M $x+\sqrt{x^2-\log_3(\sqrt{x-2}+1)}\geqslant x\geqslant 2$, то уравнение (18) равносильно на M уравнению $x^2-8x+7=0$, имеющему два корня: $x_1=7$ и $x_2=1$. Проверка показывает, что x_1 лежит в M, т.е. удовлетворяет условиям (16), а x_2 не лежит. Следовательно, уравнение (15) имеет единственный корень x_1. Ответ: $x=7$.

Задачи для самостоятельного решения

Решить уравнения:

1. $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$; $\{-1;2\}$.

2. $3|x-1|=x+3$; $\{0;3\}$.

3. $4^x-2^{x+1}=3$; $\{\log_2 3\}$.

4. $5^{x+1/2}-9^x=3^{2x-2}-5^{x-1/2}$; $\{3/2\}$.

5. $3\sqrt{\log_3 x}-\log_3 3x-1=0$; $\{3;81\}$.

6. $|5x-13|-|6-5x|=7$; $(-\infty<x\leqslant\frac{6}{5})$.

7. $x+\sqrt{2x^2-7x+5}=1$; $\{1\}$.

8. $\log_{1/2}\left(1-\frac{x}{2}\right)+\log_2\sqrt{2-\frac{x}{4}}=0$; $\{-1\}$.

9. $1+\lg(1+x^2-2x)-\lg(1+x^2)=2\lg(1-x)$; $\{-3\}$.

10. $(\sqrt{2}+1)^{\frac{6x-6}{x+1}}=(\sqrt{2}-1)^{-x}$; $\{2;3\}$.

11. $\sqrt{2(5^x+24)}-\sqrt{5^x-7}=\sqrt{5^x+7}$; $\{\log_5 7;2\}$.

12. $x^2\log_6\sqrt{5x^2-2x-3}-x\log_{1/6}(5x^2-2x-3)=x^2+2x$; $\left\{-\frac{13}{5};-2;3\right\}$.

13. $(x+1)\sqrt{16x+17}=(x+1)(8x-23)$; $\{-1;4\}$.

14. $\left(\log_3\frac{3}{x}\right)\log_2 x-\log_3\frac{x^3}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}+\log_2\sqrt{x}$; $\left\{\frac{\sqrt{3}}{8};1\right\}$.

15. $\log_9(x^2-5x+6)^2=2^{-1}\log_{\sqrt{3}}\frac{x-1}{2}+\log_3|x-3|$; $\left\{\frac{5}{3}\right\}$.

16. $9\cdot4^{\frac{1}{x}}+5\cdot6^{\frac{1}{x}}=4\cdot9^{\frac{1}{x}}$; $\{1/2\}$.

17. $\sqrt{8+2^{\sqrt{3-x}+1}-4^{\sqrt{3-x}}}+2^{\sqrt{3-x}+1}=5$; $\{3\}$.

18. $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}$; $\{2\}$.

19. $\sqrt{(x+2)(2x-1)}-3\sqrt{x+6}=4-\sqrt{(x+6)(2x-1)}+3\sqrt{x+2}$; $\{7\}$.

20. $\sqrt{4+2\log_2\left(1-\frac{8x}{(1+2x)^2}\right)}=\log_2\frac{2x+1}{2x-1}+2\log_2\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\{3/2\}$.

$(\alpha, \beta, a \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N},\ a>0,\ a \neq 1)$

1	$\lvert f(x)\rvert^{2n} \overset{M_1}{=} (f(x))^{2n}$	2	$\log_a a^{f(x)} \overset{M_1}{=} f(x)$
3	$\sqrt[2n+1]{(f(x))^{2n+1}} \overset{M_1}{=} f(x)$	4	$\sqrt[2n]{(f(x))^{2n}} \overset{M_1}{=} \lvert f(x)\rvert$
5	$\left(\sqrt[2n+1]{f(x)}\right)^{2n+1} \overset{M_1}{=} f(x)$	6	$\sqrt[2n+1]{f(x)}\cdot \sqrt[2n+1]{g(x)} \overset{M_2}{=}$ $\overset{M_2}{=} \sqrt[2n+1]{f(x)g(x)}$
7	$\dfrac{\sqrt[2n+1]{f(x)}}{\sqrt[2n+1]{g(x)}} \overset{M_7}{=} \sqrt[2n+1]{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$	8	$a^{f(x)+g(x)} \overset{M_2}{=} a^{f(x)}\cdot a^{g(x)}$
9	$(a^{f(x)})^{g(x)} \overset{M_2}{=} a^{f(x)g(x)}$	10	$a^{f(x)-g(x)} \overset{M_2}{=} \dfrac{a^{f(x)}}{a^{g(x)}}$
11	$\alpha f(x)+\beta f(x) \overset{M_1}{=} (\alpha+\beta)f(x)$	12	$a^{\log_a f(x)} \overset{M_3}{=} f(x)$
13	$f(x) \overset{M_8}{=} \lvert f(x)\rvert$	14	$-f(x) \overset{M_4}{=} \lvert f(x)\rvert$
15	$\dfrac{f(x)\cdot g(x)}{g(x)} \overset{M_7}{=} f(x)$	16	$\left(\sqrt[2n]{f(x)}\right)^{2n} \overset{M_8}{=} f(x)$
17	$\sqrt[2n]{f(x)}\cdot \sqrt[2n]{g(x)} \overset{M_9}{=}$ $\overset{M_9}{=} \sqrt[2n]{f(x)g(x)}$	18	$\sqrt[2n]{-f(x)}\cdot \sqrt[2n]{-g(x)} \overset{M_{10}}{=}$ $\overset{M_{10}}{=} \sqrt[2n]{f(x)g(x)}$
19	$\dfrac{\sqrt[2n]{f(x)}}{\sqrt[2n]{g(x)}} \overset{M_{11}}{=} \sqrt[2n]{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$	20	$\dfrac{\sqrt[2n]{-f(x)}}{\sqrt[2n]{-g(x)}} \overset{M_{12}}{=} \sqrt[2n]{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$
21	$2n \log_a f(x) \overset{M_3}{=} \log_a (f(x))^{2n}$	22	$2n \log_a (-f(x)) \overset{M_{13}}{=} \log_a (f(x))^{2n}$
23	$\log_a f(x) + \log_a g(x) \overset{M_5}{=}$ $\overset{M_5}{=} \log_a f(x)g(x)$	24	$\log_a(-f(x)) + \log_a(-g(x)) \overset{M_6}{=}$ $\overset{M_6}{=} \log_a (f(x)\cdot g(x))$
25	$\log_a f(x) - \log_a g(x) \overset{M_5}{=}$ $\overset{M_5}{=} \log_a (f(x)/g(x))$	26	$\log_a(-f(x)) - \log_a(-g(x)) \overset{M_6}{=}$ $\overset{M_6}{=} \log_a (f(x)/g(x))$

В каждой формуле над знаком равенства указано множество всех тех x, для каждого из которых справедлива данная формула. При этом

M_1 – те x, для которых имеет смысл $f(x)$,
M_2 – те x, для которых имеют смысл $f(x)$ и $g(x)$,
M_3 – те x, для которых имеет смысл $f(x)$ и $(x)>0$,
M_4 – те x, для которых имеет смысл $f(x)$ и $f(x) \leqslant 0$,
M_5 – те x, для которых имеют смысл $f(x)$, $g(x)$ и $f(x)>0$, $g(x)>0$,
M_6 – те x, для которых имеют смысл $f(x)$, $g(x)$ и $f(x)<0$, $g(x)<0$,
M_7 – те x, для которых имеют смысл $f(x)$, $g(x)$ и $g(x) \neq 0$,
M_8 – те x, для которых имеет смысл $f(x)$ и $f(x) \geqslant 0$,
M_9 – те x, для которых имеют смысл $f(x)$, $g(x)$ и $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$,
M_{10} – те x, для которых имеют смысл $f(x)$, $g(x)$ и $f(x) \leqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$,
M_{11} – те x, для которых имеют смысл $f(x)$, $g(x)$ и $f(x) \geqslant 0$, $g(x)>0$,
M_{12} – те x, для которых имеют смысл $f(x)$, $g(x)$ и $f(x) \leqslant 0$, $g(x)<0$,
M_{13} – те x, для которых имеет смысл $f(x)$ и $f(x)<0$.