Справочная Математическая Библиотека

Элементы теории функций

Функции действительного переменного

Приближение функций

Почти-периодические функции

Физматгиз · 1963

СПРАВОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА

ПОД ОБЩЕЙ РЕДАКЦИЕЙ
Л. А. ЛЮСТЕРНИКА
И
А. Р. ЯНПОЛЬСКОГО

Р. С. ГУТЕР, Л. Д. КУДРЯВЦЕВ, Б. М. ЛЕВИТАН

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО
ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ
ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Под редакцией
П. Л. УЛЬЯНОВА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

517. 2(03)
Г 97

АННОТАЦИЯ

Выпуск посвящен основным понятиям теории функций в действительной области. Главным содержанием его являются вопросы приближения и интерполирования функций действительного переменного, а также теория почти-периодических функций. Этим главам предпослана глава об общих понятиях теории функций действительного переменного.

Выпуск предназначен для специалистов смежных с математикой областей науки, а также для математиков, не занимающихся теорией функций.

Справочная математическая библиотека
под общей редакцией
Л. А. Люстерника и А. Р. Янпольского

Элементы теории функций

М., Физматгиз, 1963 г., 244 стр. с илл.

Редакторы *В. Ф. Гапошкин* и *А. Н. Копылова*

Техн. редактор *Л. Ю. Плакше* Корректор *С. Н. Емельянова*

Сдано в набор 31/I 1963 г. Подписано к печати 8/VI 1963 г. Бумага $84 \times 108^1/_{32}$.
Физ. печ. л. 7,625. Условн. печ. л. 12,51. Уч.-изд. л. 11,58. Тираж 24 000 экз. Т-04993.
Цена книги 68 коп. Заказ № 166.

Государственное издательство физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградский Совет народного хозяйства. Управление целлюлозно-бумажной и полиграфической промышленности. Типография № 1 „Печатный Двор“ имени А. М. Горького. Ленинград, Гатчинская, 26.

СОДЕРЖАНИЕ

От редактора 9

Глава I. **Функции действительного переменного (основные понятия и теоремы)** 11

§ 1. Линейные точечные множества. Мощность и категория 11
§ 2. Мера Лебега линейных множеств 28
§ 3. Основные классы функций 36
§ 4. Производная и ее обобщения 45
§ 5. Интегрирование функций 51
§ 6. Последовательности функций 68
§ 7. Ортогональные системы функций 77
§ 8. Функции нескольких переменных 88
§ 9. Основные функциональные пространства 97

Глава II. **Интерполирование и приближение функций** . . . 106

§ 1. Вводные замечания 106
§ 2. Интерполирование функций многочленами 107

2.1. Простейшая интерполяционная задача. Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона 107
2.2. Интерполирование тригонометрическими многочленами 113
2.3. Общие интерполяционные задачи. Формула Эрмита 115
2.4. Сходимость интерполяционных многочленов 117
2.5. Операции над интерполяционными многочленами, приводящие к сходящимся процессам 125
2.6. Обобщенные интерполяционные многочлены 127
2.7. Замечания 128

§ 3. Равномерные приближения функций одного переменного многочленами и их обобщения 129

3.1. Общие замечания о приближении функций 129
3.2. Теоремы Вейерштрасса 131

3.3. Многочлены Бернштейна 132
3.4. Наилучшие равномерные приближения функций многочленами данной степени 133
3.5. Результаты Чебышева о наилучших приближениях 135
3.6. Приближенное построение многочленов наилучшего чебышевского приближения 137
3.7. Наилучшие приближения непрерывных и дифференцируемых периодических функций тригонометрическими многочленами данной степени 142
3.8. Наилучшие приближения непрерывных и дифференцируемых функций алгебраическими многочленами данной степени 148
3.9. Наилучшие приближения функций целыми функциями 154
3.10. Взвешенные приближения функций на всей числовой оси 156
§ 4. Методы равномерного приближения функций 157
4.1. Приближение периодических функций суммами Фурье 158
4.2. Линейные методы приближения периодических функций тригонометрическими многочленами (методы Фейера, Валле-Пуссена и Бернштейна — Рогозинского) 161
4.3. Линейные методы приближения функций алгебраическими многочленами 165
4.4. Наилучшие линейные методы приближения функций 169
§ 5. Приближение функций одного переменного в среднем 172
5.1. Общие замечания 172
5.2. Наилучшие приближения в среднем 175
5.3. Системы функций, приближающие наилучшим образом некоторый класс функций 177
§ 6. Приближение функций многих переменных 179
6.1. Основные понятия 179
6.2. Теория наилучших приближений функций многих переменных 183
§ 7. Теория приближений в банаховых пространствах 186
7.1. Общие понятия. Наилучшие приближения в гильбертовых пространствах. Метод наименьших квадратов построения наилучших приближений 186

7.2. Связь наилучших приближений с энтропией множеств 189
7.3. Теория наилучших чебышевских приближений на компактах 191
7.4. Некоторые общие замечания о теории приближения функций 193

Глава III. **Почти-периодические функции** 199

§ 1. Равномерные почти-периодические функции на прямой 199
1.1. Различные определения почти-периодических функций 199
1.2. Простейшие основные свойства почти-периодических функций 200
1.3. Ряды Фурье 201
1.4. Формальные операции над рядами Фурье 204
1.5. Основные теоремы 206
1.6. Теорема аппроксимации 207
1.7. Сходимость рядов Фурье для некоторых классов равномерных почти-периодических функций 209
1.8. Связь показателей Фурье с почти-периодами 211
1.9. Теорема Кронекера 212
1.10. Предельно периодические функции 213
1.11. Теорема об аргументе равномерной почти-периодической функции 213
1.12. N-почти-периодические функции 214
1.13. Линейные дифференциальные уравнения с почти-периодическими коэффициентами 216

§ 2. Различные обобщения почти-периодических функций . . 218
2.1. Вводные замечания 218
2.2. Определения и простейшие свойства почти-периодических функций Степанова 219
2.3. Определение и простейшие свойства почти-периодических функций Вейля 220
2.4. Теорема о среднем значении для W^p-почти-периодических функций. Равенство Парсеваля для W^2- и S^2-почти-периодических функций. Теорема аппроксимации 221
2.5. Почти-периодические функции Безиковича 222
2.6. Понятие о почти-периодических функциях на группах 224

§ 3. Аналитические почти-периодические функции 226
3.1. Определение аналитических почти-периодических функций и их простейшие свойства 226
3.2. Ряды Дирихле 228
3.3. Сходимость рядов Дирихле для аналитических почти-периодических функций 230
3.4. Поведение почти-периодических функций при $\sigma=+\infty$ (аналоги теорем Вейерштрасса—Сохоцкого и Пикара) 230
3.5. Гармонические почти-периодические функции 231
3.6. Среднее движение и плотность значений аналитических почти-периодических функций 233

Библиография 238
Указатель обозначений 240
Алфавитный указатель 241

ОТ РЕДАКТОРА

В связи с необходимостью строго обосновать большое число накопившихся в анализе фактов, в конце XIX века возникла новая дисциплина — теория множеств и функций, которая в последующие годы бурно развивалась. Развитие этой теории значительно расширило и углубило понятия, рассматриваемые в анализе. В начале XX века было найдено исключительно важное понятие меры множества (Лебег), на базе которого было создано понятие интеграла Лебега. Эти два основных понятия составляют фундамент метрической теории функций действительного переменного, которая занимается изучением свойств функций, производных, интегралов и функциональных рядов с помощью меры множеств. Методы и идеи теории функций действительного переменного способствовали возникновению ряда новых математических дисциплин и, кроме того, проникли в другие области математики (топология, теория вероятностей, функциональный анализ, теория аналитических функций, вариационное исчисление, дифференциальные уравнения и др.). В связи с этим роль и значение теории функций в современной математике очень велико.

Глава I настоящего выпуска написана Р. С. Гутером и посвящена изложению некоторых основных понятий и теорем из теории множеств и метрической теории функций действительного переменного. Она доступна каждому, кто владеет курсом анализа в объеме программы втузов. Содержание этой главы не отражает современного состояния теории функций действительного переменного, а содержит лишь основные сведения из указанной теории. Доказательства их можно в основном найти в книге: И. П. Натансон, Теория функций вещественной переменной, Физматгиз, 1957. Для более детального изучения этой теории следует обращаться к более специальным руководствам.

Глава II «Интерполирование и приближение функций» написана Л. Д. Кудрявцевым. Для ее понимания необходимо знание теории интеграла Лебега в объеме, изложенном в главе I. Кроме чисто теоретического интереса, в настоящее время роль теории интерполяции и приближения функций все больше и больше возрастает в связи с интенсивным развитием вычислительной и машинной математики. Отметим, что в главе II материал по теории приближения функций изложен до новейших современных результатов в этой области. Поэтому глава II будет полезна и интересна как для инженеров, так и для математиков, не являющихся специалистами по теории приближения функций.

Глава III написана Б. М. Левитаном и посвящена изложению основных фактов из теории почти-периодических функций, которые являются естественным обобщением периодических функций. Для чтения первого параграфа главы III достаточно владеть втузовским курсом анализа. Что касается §§ 2 и 3, то для их понимания необходимо знакомство с основами теории интеграла Лебега (например, в объеме главы I) и теории функций комплексного переменного в объеме программ спецглав математики во втузах.

В конце книги помещен список литературы по главам, в котором указаны некоторые из основных монографий, относящихся к рассматриваемым вопросам. Этот список, конечно, ни в коей мере не претендует на полноту.

В целом настоящий выпуск является доступным пособием для всякого, кто владеет курсом математики в объеме программы втузов.

П. Л. Ульянов

ГЛАВА I

ФУНКЦИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО (ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ТЕОРЕМЫ)

§ 1. Линейные точечные множества. Мощность и категория

1. Под словом *множество* понимается объединение некоторого конечного или бесконечного количества объектов. В ряде случаев слово «множество» заменяется другими словами.

Например, в геометрии множество точек, обладающих некоторым общим свойством, называют *геометрическим местом*. Так, окружность есть геометрическое место (множество) точек плоскости, отстоящих на одинаковом расстоянии от данной точки (центра). Множество всех интегральных кривых данного дифференциального уравнения называют *семейством*. Кроме этого, употребляется также термин *совокупность*. Все эти слова являются синонимами слова «множество» и будут иногда употребляться вместо него.

Множества обычно обозначают большими латинскими буквами, например M, E, ..., а его элементы — малыми, например x, y, ... Для обозначения того, что x является элементом множества M, употребляется знак $\in$. Запись $x \in M$ читается так: «x принадлежит M», или «x есть элемент M», или, наконец, «элемент x входит (содержится) в множестве M». Если x не принадлежит M, то пишут $x \overline{\in} M$ или $x \notin M$.

Первоначальным объектом рассмотрения будут *линейные точечные множества*, т. е. множества, *элементами* которых являются точки прямой линии, или, точнее говоря, точки числовой оси. Простейшими примерами линейных точечных множеств являются *отрезок* и *интервал*.

Отрезком (иногда *сегментом*) называют множество точек x числовой оси, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, а *интервалом* (или *промежутком*) — множество точек x числовой оси, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$.

Отрезок принято обозначать символом $[a, b]$, а интервал — символом (a, b). Из определения видно, что отрезок $[a, b]$ отличается от интервала (a, b) тем, что точки $x = a$ и $x = b$ принадлежат отрезку и не принадлежат интервалу.

Если каждый элемент множества B является вместе с тем также и элементом множества A, то говорят, что B есть *подмножество* A или что B *содержится в* A. В этом случае пишут $B \subseteq A$ или $A \supseteq B$. При этом не исключается также, что множество B исчерпывает *все* элементы A.

Если все элементы B являются также элементами A и, наоборот, все элементы A являются элементами B, то говорят, что множества A и B *совпадают*. Этот факт записывают равенством $A = B$.

Когда хотят подчеркнуть, что B является подмножеством A, но не совпадает с A, то пишут $B \subset A$ и говорят, что B — *собственное* подмножество A (иначе, — *правильная часть* A).

Множество, не содержащее ни одного элемента, называют *пустым*. Так, множество действительных корней уравнения $x^4 + 1 = 0$ пусто, ибо это уравнение имеет лишь мнимые корни. Чтобы показать, что множество U является пустым, пишут $U = \emptyset$. При этом нуль перечеркивается косой чертой, чтобы при письме отличить его от числа нуль. Впрочем, в тех случаях, когда нет опасности смешения, можно писать просто $U = 0$, без перечеркивания.

Пустое множество обычно считают подмножеством любого множества, т. е. если $U = \emptyset$, то для любого множества A справедливо соотношение $U \subseteq A$, и даже $U \subset A$, когда само A не пусто.

Линейное точечное множество называют *ограниченным*, если оно является подмножеством некоторого отрезка.

2. Если в ряде натуральных чисел $1, 2, \ldots, n, \ldots$ заменить по какому-либо закону каждое натуральное число n некоторым числом a_n, то получится числовая *последовательность, элементы* (или *члены*) которой занумерованы всеми натуральными числами и расположены в порядке возрастания номеров. Последовательность обозначают, выписывая ее элементы

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots$$

или, короче, символом $\{a_n\}$. Например, последовательность $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ состоит из элементов $1,\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{9},\ \frac{1}{16},\ \ldots$, т. е. $a_1=1$, $a_2=\frac{1}{4}$, $a_3=\frac{1}{9}$, $a_4=\frac{1}{16}$ и т. д.

Чаще всего последовательность задается формулой, определяющей ее *общий член* a_n в зависимости от номера. Так, формула $a_n=\frac{n-1}{n+1}$ определяет последовательность

$$\{a_n\}\equiv\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\}\equiv 0,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{6},\ \ldots;$$

формула $a_n=2^n$ — последовательность

$$\{a_n\}\equiv\{2^n\}\equiv 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ \ldots$$

и т. д.

Другим часто встречающимся способом задания последовательностей являются *рекуррентные соотношения*, с помощью которых каждый следующий член последовательности определяется через предыдущие. Например, $a_1=1$, $a_n=a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}$ — рекуррентные соотношения, определяющие последовательность:

$$\begin{aligned}
a_2&=a_1=1,\\
a_3&=a_1+a_2=2,\\
a_4&=a_1+a_2+a_3=4,\\
a_5&=a_1+a_2+a_3+a_4=8,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Последовательность может быть задана и любым другим способом, лишь бы была возможность вычислить любой ее член. Например, последовательность $\{a_n\}$ вполне определяется указанием, что a_n равно n-му члену десятичного разложения числа $\pi=3{,}1415926536\ldots$, откуда видно, что $a_1=3$, $a_2=1$, $a_3=4$, $a_4=1$, $a_5=5$, $a_6=9$, ... Для нахождения каждого члена этой последовательности следует лишь вычислить число π с достаточно большой степенью точности.

Следует иметь в виду, что члены последовательности могут быть равными между собой, тогда как элементы множества всегда предполагаются различными. Поэтому необходимо отличать последовательность от множества, состоящего из элементов этой последовательности. Это отличие является существенным даже и в том случае, когда все элементы последовательности различны: множество определяется элементами, из которых оно состоит, а для определения последовательности необходимо знать еще, в каком порядке эти элементы расположены. Например, последовательности $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots\}$ и $\{2, 1, 4, 3, 6, 5, \ldots\}$ — различные, но состоят из одних и тех же элементов.

3. Пусть A и B — два множества и каждому элементу множества A соответствует один и только один элемент множества B. Если в этом соответствии участвует к а ж д ы й элемент множества B, т. е. к а ж д о м у элементу множества B также ставится в соответствие один и только один элемент множества A, то говорят, что между множествами A и B установлено *взаимно однозначное соответствие*.

Например, каждому элементу последовательности, все элементы которой различны, ставится в соответствие одно и только одно натуральное число — его номер; с другой стороны, каждое натуральное число является номером какого-то одного члена последовательности, так что мы имеем взаимно однозначное соответствие между множеством элементов последовательности и множеством натуральных чисел.

Множества, между которыми можно установить взаимно однозначное соответствие, называют *эквивалентными* или *равномощными* (имеющими одинаковую *мощность*). Эквивалентность множеств M и N записывается в виде $M \sim N$.

Ясно, что конечные (т. е. состоящие из конечного числа элементов) множества равномощны тогда и только тогда, когда они содержат одинаковое число элементов. Никакое собственное подмножество конечного множества не может быть эквивалентно всему множеству.

Для бесконечных множеств, наоборот, имеет место следующее свойство: *у всякого бесконечного множества найдется собственное подмножество, эквивалентное самому множеству*. Это свойство может быть принято за определение бесконечного множества.

Наиболее простыми из бесконечных множеств являются множества, эквивалентные множеству натуральных чисел. Такие множества называют *счетными*. Мощность счетного множества обозначается через $\aleph_0$ (читается: алеф-нуль).

В качестве примера счетного множества можно указать на последовательность, все элементы которой различны. С другой стороны, возможность установления взаимно однозначного соответствия между некоторым множеством и множеством натуральных чисел показывает, что элементы любого счетного множества могут быть расположены в виде последовательности.

Множество всех целых чисел (положительных и отрицательных, вместе с нулем) счетно. Чтобы в этом убедиться, достаточно расположить их в виде последовательности

$$0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ 4,\ -4,\ \ldots$$

Множество всех рациональных чисел*) отрезка $[0,\ 1]$ счетно. Действительно, рациональные числа отрезка $[0,\ 1]$ можно расположить в последовательность следующим образом: будем выписывать их в порядке возрастания знаменателя, а при одинаковых знаменателях — в порядке возрастания числителя, опуская сократимые дроби. Получится последовательность

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{5}{6},\ \ldots$$

Ясно, что каждое рациональное число x, удовлетворяющее условию $0 \leqslant x \leqslant 1$, встречается в этой последовательности один и только один раз.

Легко доказать, что даже *множество всех рациональных чисел счетно*. Для доказательства воспользуемся следующей геометрической иллюстрацией. Будем изображать рациональное число точкой плоскости, откладывая по оси Ox числитель, а по оси Oy — знаменатель, считая, что последний всегда положителен (для целых чисел, естественно, знаменатель следует считать равным единице). Множество рациональных чисел изобразится тогда решеткой, точки которой рас-

---

*) Число α называется *рациональным*, если его можно представить в виде $\alpha = \frac{p}{q}$, где p и q — некоторые целые числа.

положены в первой и второй четвертях плоскости Oxy (рис. 1). Теперь не составит никакого труда перенумеровать их в последовательность, например, по спирали, показанной на рис. 1

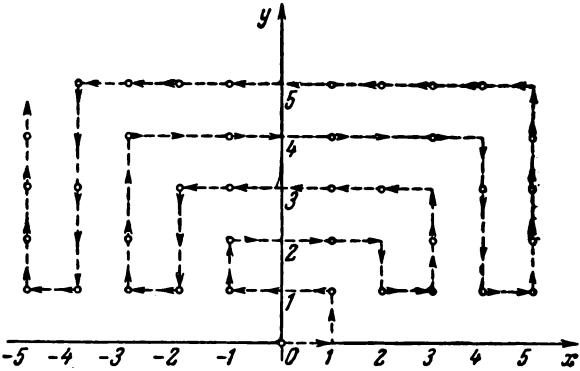

Рис. 1.

стрелками, пропуская при этом сократимые дроби, чтобы каждое рациональное число встречалось в этой последовательности ровно один раз.

Роль счетных множеств как наиболее простых бесконечных множеств особенно подчеркивается теоремами:

всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество;

всякое подмножество счетного множества либо конечно, либо счетно.

4. Пусть A и B — два произвольных множества. Возможны следующие отношения между ними.

1. Множества A и B эквивалентны, т. е. имеют одинаковую мощность.

2. Одно из множеств, например множество A, эквивалентно некоторому подмножеству B, но не эквивалентно самому B. В этом случае говорят, что *мощность множества B больше мощности A*. Наоборот, если множество B эквивалентно подмножеству множества A, но не эквивалентно A, то мощность B меньше, чем мощность A.

3. Множество A эквивалентно некоторому подмножеству B, а множество B эквивалентно некоторому подмножеству A.

Тогда множества A и B эквивалентны между собой. (теорема Кантора — Бернштейна).

Случай, когда в множестве A нет подмножества, эквивалентного B, а в множестве B нет подмножества, эквивалентного A, *невозможен*. Однако доказательство этого опирается на так называемую *аксиому Цермело*, применения которой некоторые математики считают необходимым избегать.

Бесконечные множества не исчерпываются счетными. Важнейшим примером множества большей мощности является множество всех действительных чисел отрезка. *Множество всех действительных чисел отрезка* [0, 1] *несчетно.*

Доказательство этого утверждения проще всего провести от противного. Каждое действительное число отрезка [0, 1] может быть единственным образом записано в виде десятичной дроби $0, a_1 a_2 \ldots$, не являющейся периодической дробью с периодом 9, где a_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — соответствующие десятичные знаки *). Допустим, вопреки утверждению, что множество действительных чисел отрезка [0, 1] счетно. В таком случае его можно расположить в последовательность

$$\begin{gathered} 0,\ a_{11}a_{12}a_{13}\ \ldots\ a_{1n}\ \ldots, \\ 0,\ a_{21}a_{22}a_{23}\ \ldots\ a_{2n}\ \ldots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ 0,\ a_{n1}a_{n2}a_{n3}\ \ldots\ a_{nn}\ \ldots, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{gathered}$$

так что a_{ik} означает k-й десятичный знак i-го действительного числа. По предположению эта последовательность содержит все действительные числа x, для которых $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Однако мы легко придем к противоречию, построив бесконечную десятичную дробь, *не входящую* в приведенную последовательность. Для этого достаточно выбрать числа b_n вполне произвольно, лишь бы только $b_n \neq a_{nn}$ $(a = 1, 2, \ldots)$ и число $0, b_1 b_2 b_3 \ldots b_n \ldots$ не являлось периодической дробью с периодом 9. Это число не содержится в нашей последовательности. В самом деле, если бы оно имело в ней номер p, то для всех k выполнялись бы равенства $a_{pk} = b_k$, что при $k = p$ заведомо неверно, ибо по построению $b_p \neq a_{pp}$. Полученное

*) Исключение составляет лишь число 1, которое следует представить в виде $1 = 0{,}999\ldots$

противоречие доказывает несчетность множества действительных чисел.

Между двумя отрезками любой длины всегда можно установить взаимно однозначное соответствие, например, с помощью проектирования (рис. 2). Поэтому *множество всех точек любого отрезка несчетно.* Множества, имеющие такую же мощность, как множество всех точек отрезка, называют множествами *мощности континуума.* Мощность континуума обозначают через $\aleph$ (алеф) или c.

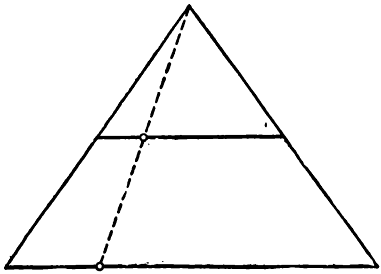

Рис. 2.

Множества все возрастающей мощности можно получить, пользуясь теоремой: *множество всех подмножеств непустого множества имеет мощность бо́льшую, чем мощность первоначального множества.*

Если конечное множество состоит из N элементов, то оно имеет 2^N различных подмножеств. Поэтому, если мощность множества обозначена через a, то мощность множества всех его подмножеств обозначают через 2^a.

Если множество E счетно, то множество всех его подмножеств имеет мощность континуума: $2^{\aleph_0} = \aleph$.

5. Пусть A и B — два произвольных точечных множества на прямой. *Суммой* (или *объединением*) множеств A и B называют множество S, состоящее из всех элементов, каждый из которых входит по крайней мере в одно из множеств A или B. Сумму множеств обозначают символом

$$S = A \cup B.$$

Впрочем, в тех случаях, когда не приходится опасаться спутать эту операцию с другими операциями, часто пишут также $S = A + B$.

Под *разностью* множеств A и B понимают множество E, состоящее из всех тех элементов множества A, которые не входят в B. Такую разность обозначают через $A \setminus B = E$. При этом множество B не обязательно должно быть подмножеством A. Если $B \subseteq A$, то часто пишут $E = A - B$. Множество E называют тогда *дополнением* множества B до A, а если A означает отрезок или всю прямую, то просто *дополнением*. Дополнение множества B обозначается через CB.

Пересечением (или *произведением*) множеств A и B

$$T = A \cap B \text{ или } T = A \cdot B = AB$$

называют множество T, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат как множеству A, так и множеству B. Если это множество T пусто, то говорят, что *множества A и B не пересекаются.*

Например, если E_1 означает множество натуральных чисел, а E_2 — множество, состоящее из отрицательных целых чисел и нуля, то сумма $E = E_1 + E_2$ совпадает с множеством всех целых чисел. Разность между интервалом $(0, 1)$ и отрезком $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ состоит из двух интервалов $\left(0, \frac{1}{3}\right)$ и $\left(\frac{2}{3}, 1\right)$, так что мы можем написать

$$(0, 1) \setminus \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] = \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, 1\right)$$

или

$$(0, 1) - \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] = \left(0, \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}, 1\right).$$

Если $A \supseteq B$, то $A \cup B = A$ и $A \cap B = B$.

Так, $(0, 1) \cap \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right] = \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$. Множества E_1 и E_2, определенные выше, имеют пустое пересечение.

Сумма и пересечение системы множеств $\{E_\alpha\}$ обозначаются соответственно

$$\bigcup_\alpha E_\alpha \text{ или } \sum_\alpha E_\alpha$$

и

$$\bigcap_\alpha E_\alpha \text{ или } \prod_\alpha E_\alpha.$$

Например, множество всех положительных иррациональных чисел может быть представлено в виде суммы

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \sum_{n=1}^{\infty} E_n,$$

где E_n означает множество всех иррациональных чисел отрезка $[n-1, n]$.

Мощность суммы множеств обладает следующими свойствами:

а) *сумма счетного множества попарно не пересекающихся конечных множеств есть счетное множество;*

б) *сумма конечного или счетного множества счетных множеств счетна;*

в) *если E — бесконечное множество и A — конечное или счетное множество, то E эквивалентно $E \bigcup A$. Если множество E несчетно, то оно эквивалентно также и $E \setminus A$;*

г) *если элементы множества определяются конечным числом индексов, каждый из которых может принимать счетное множество значений, то такое множество счетно;*

д) *сумма конечного или счетного множества множеств мощности континуума имеет мощность континуума.*

Указанные свойства позволяют получить ряд полезных следствий. Например:

Множество всех точек плоскости и трехмерного пространства, все координаты которых рациональны, счетно.

Множество всех многочленов любой степени с рациональными коэффициентами счетно.

Множество всех алгебраических чисел, т. е. чисел, являющихся корнями алгебраических уравнений с рациональными коэффициентами, счетно.

Множество всех действительных чисел имеет мощность континуума.

Множество всех трансцендентных чисел, т. е. действительных чисел, не являющихся алгебраическими, имеет мощность континуума.

Может показаться, что множество точек плоскости имеет бо́льшую мощность, нежели множество точек прямой. На самом деле это не так; *множество всех точек плоскости* *) *имеет мощность континуума.*

---

*) И даже множество всех точек эвклидова пространства n измерений.

При переходе от рассмотрения множеств к рассмотрению их дополнений операции суммы и пересечения меняются местами в том смысле, что для системы множеств $\{E_\alpha\}$ *дополнение к сумме множеств равно пересечению дополнений к отдельным слагаемым*:

$$C(\sum_\alpha E_\alpha) = \prod_\alpha CE_\alpha,$$

и наоборот, *дополнение к пересечению множеств равно сумме дополнений к отдельным множествам*:

$$C(\prod_\alpha E_\alpha) = \sum_\alpha CE_\alpha.$$

6. *Окрестностью точки* a называют любой интервал с центром в точке a, ε*-окрестностью* — интервал $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

Точку $a \in F$ называют *изолированной точкой* множества E, если существует ε-окрестность a, не содержащая точек E, отличных от точки a.

Точку a называют *предельной точкой* множества E, если любая окрестность точки a содержит хотя бы одну точку множества E, отличную от a. Точка a может принадлежать или не принадлежать E.

Из определения сразу следует, что *любая окрестность предельной точки содержит бесконечное множество точек из* E.

Если линейное множество E не является ограниченным, то оно имеет точки вне любого отрезка. Возможно, что множество E имеет точки правее любой точки действительной оси или левее любой ее точки. В первом случае говорят, что множество E *не ограничено справа* и что оно имеет $+\infty$ своей предельной точкой, во втором случае — что оно *не ограничено слева* и что $-\infty$ является предельной точкой E. В тех случаях, когда множество E имеет точки и правее и левее любой точки оси, говорят, что множество имеет предельными точками и $+\infty$, и $-\infty$.

Точку a называют *предельной точкой последовательности* $\{a_n\}$, если любая окрестность a содержит элементы последовательности со сколь угодно большим номером. Если последовательность не ограничена справа (слева), то говорят, что ее предельной точкой является $+\infty$ $(-\infty)$.

Как уже было указано, члены последовательности могут повторяться. Поэтому следует различать предельные точки последовательности и предельные точки множества ее элементов. Предельная точка множества элементов последовательности непременно является предельной точкой последовательности. Обратное заключение не верно. Так, последовательность 0, 1, 0, 1,... имеет две предельные точки 0 и 1. Однако множество элементов этой последовательности конечно и предельных точек иметь не может.

Если последовательность имеет лишь одну предельную точку, то эта точка является *пределом последовательности*, т. е. последовательность *сходится к этой точке.* Для того чтобы точка a была предельной для множества E, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\{x_n\} \subset E$ такая, что $x_n \neq x_k$ при $n \neq k$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a.$

Множество всех предельных точек множества E называют *производным множеством* и обозначают через E'. Прибавляя к множеству E производное множество E', получаем *замыкание* множества E, которое обозначают через $\bar{E}$:

$$\bar{E} = E + E'.$$

Множество E называется *замкнутым*, если $E' \subseteq E$. Иначе говоря, *замкнутое множество содержит все свои предельные точки и совпадает со своим замыканием*: $\bar{E} = E$. Каждое из этих свойств может быть принято за определение замкнутого множества.

Точку a мы будем называть *точной верхней гранью* (или просто *верхней гранью*) множества E, если для любой точки $x \in E$ справедливо неравенство $x \leqslant a$, но для любого $\varepsilon > 0$ найдется точка $y \in E$, для которой $y > a - \varepsilon$. Если a — точная верхняя грань E, то пишут $a = \sup E$.

При $a \in E$ можно для всякого ε полагать $y = a$, так что верхняя грань может быть изолированной точкой; при $a \overline{\in} E$ точка a необходимо является предельной. Например, точной верхней гранью отрезка $[0, 1]$ и интервала $(0, 1)$ является точка $a = 1$, а множества $\left\{2 - \frac{1}{n}\right\}$ $(n = 1, \quad 2, \ldots)$ — точка $a = 2$. Если множество имеет самую правую точку, то точная верхняя грань множества совпадает с этой точкой.

С другой стороны, если $a = \sup E$ принадлежит множеству E, то множество E имеет самую правую точку.

Аналогично *точной нижней гранью* (*нижней гранью*) множества E мы назовем такую точку a, что для любого $x \in E$ справедливо неравенство $x \geqslant a$ и для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $y \in E$, для которого $y < a + \varepsilon$. Точную нижнюю грань множества E обозначают через $\inf E = a$.

Ограниченное линейное точечное множество всегда имеет точную верхнюю и нижнюю грани.

Пусть множество E замкнуто и ограничено. Тогда $\inf E \in E$ и $\sup E \in E$, т. е. *ограниченное замкнутое множество содержит свои точные верхнюю и нижнюю грани.* Иначе говоря, ограниченное замкнутое множество всегда имеет самую правую и самую левую точки.

Обозначим через E ограниченное линейное точечное множество. *Верхним пределом множества E* называют точную верхнюю грань производного множества E', если оно не пусто. Так как *производное множество всегда замкнуто*, то верхний предел E принадлежит E'. Таким образом, *верхний предел ограниченного множества E есть самая правая предельная точка E*. Верхний предел E обозначают через $\limsup E$ или $\overline{\lim}\, E$.

Аналогично *нижним пределом* ограниченного множества называют *самую левую предельную точку*, т. е. точную нижнюю грань производного множества, если оно не пусто. Нижний предел множества E обозначают через $\liminf E$ или $\underline{\lim}\, E$.

Если множество E не ограничено справа, то говорят, что его верхним пределом является $+\infty$, $\limsup E = +\infty$. Нижним пределом множества может быть при этом $-\infty$, $\liminf E = -\infty$, если оно не ограничено слева; любая конечная точка, если множество E ограничено слева и имеет предельные точки, отличные от $+\infty$; наконец, $+\infty$, $\liminf E = +\infty$, если множество не имеет других предельных точек, кроме $+\infty$. Точно так же, если множество не ограничено слева, но ограничено справа и не имеет предельных точек, кроме $-\infty$, то $\limsup E = \liminf E = -\infty$.

Аналогично определяются верхний и нижний пределы последовательности. *Верхним* (*нижним*), пределом последовательности $\{a_n\}$ называют ее самую правую (левую) предельную точку или $+\infty$ $(-\infty)$, если она не ограничена справа (слева). Последовательность, имеющая верхним пределом $+\infty$, может иметь своим нижним пределом $-\infty$, произвольную точку оси или же $+\infty$.

Верхний предел последовательности обозначают символом

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \quad \text{или} \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n,$$

а нижний — символом

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \quad \text{или} \quad \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n.$$

Например, для последовательности $\left\{\frac{1}{n}, \frac{n-1}{n}\right\}$, т. е. 1, 0, $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \ldots,$

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1; \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Если верхний и нижний пределы последовательности совпадают, то последовательность имеет единственную предельную точку и сходится к ней.

Верхний предел множества следует отличать от его верхней грани. В то время как все элементы множества расположены левее его верхней грани, может существовать бесконечное подмножество их, расположенное справа от верхнего предела.

Всякое бесконечное ограниченное множество имеет хотя бы одну предельную точку (теорема Больцано—Вейерштрасса).

Точку a называют *внутренней точкой* множества E, если существует такая окрестность a, все точки которой принадлежат E. Множество, все точки которого являются внутренними, называется *открытым множеством* или *областью* (чтобы подчеркнуть, что речь идет о линейном множестве, говорят также «*линейная область*»). Примером открытого множества является произвольный интервал (a, b).

Дополнение к замкнутому множеству открыто. Наоборот, *дополнение к открытому множеству замкнуто.* Действительно, пусть F — замкнутое множество и $a \in CF$. В таком случае существует ε-окрестность точки a, свободная от точек F, так как если бы в любой окрестности a

имелись точки F, то a была бы предельной точкой для F и вследствие замкнутости F принадлежала бы F, но не CF. Следовательно, эта ε-окрестность должна целиком принадлежать CF. Итак, любая точка CF является внутренней, а значит, CF — открытое множество. Пусть теперь G открыто и a — предельная точка для множества CG. Тогда a не может принадлежать G, потому что в противном случае нашлась бы окрестность a, целиком входящая в G и не содержащая поэтому точек CG, а значит, a не была бы предельной точкой для CG. Следовательно, все предельные точки CG принадлежат CG, так что это множество замкнуто.

Благодаря установленной связи между открытыми и замкнутыми множествами, достаточно рассматривать основные свойства и структуру лишь одного из этих классов.

Действия над замкнутыми множествами обладают следующими свойствами:

а) *Пересечение любого множества замкнутых множеств есть множество замкнутое.*

б) *Сумма конечного множества замкнутых множеств — замкнутое множество.*

Сумма счетного множества замкнутых множеств может оказаться уже не замкнутой. В этом легко убедиться, заметив, например, что множество, состоящее из одной точки, замкнуто, тогда как множество элементов последовательности $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, являющееся суммой счетного множества замкнутых множеств, не содержит предельной точки 0, а потому не замкнуто.

Переходя к дополнениям, получаем:

в) *Сумма любого множества открытых множеств — открытое множество.*

г) *Пересечение конечного множества открытых множеств — открытое множество.*

Отсюда, в частности, следует, что сумма конечного или счетного множества попарно не пересекающихся интервалов является открытым множеством. Справедливо также и обратное утверждение, которое исчерпывающим образом выясняет структуру открытых множеств на прямой:

Всякое ограниченное открытое линейное множество G представимо в виде суммы конечного или *счетного множества попарно не пересекающихся интервалов*

$$G = \sum_k (a_k, b_k).$$

Если перейти к дополнениям, то можно утверждать, что *всякое ограниченное замкнутое множество F либо есть отрезок, либо получается из некоторого отрезка вычитанием конечного или счетного множества попарно не пересекающихся интервалов*

$$F = [a, b] - \sum_k (a_k, b_k).$$

Эти интервалы носят название *дополнительных* или *смежных интервалов* замкнутого множества F.

7. Множество E называется *совершенным*, если оно совпадает со своим производным множеством, $E = E'$. Очевидно, что совершенное множество замкнуто и не имеет изолированных точек. Наоборот, *замкнутое множество, лишенное изолированных точек, является совершенным.*

Точку a называют *точкой конденсации* множества E, если любая окрестность точки a содержит *несчетное* множество точек E. Точка конденсации всегда является предельной точкой, но предельная точка может и не быть точкой конденсации. *Всякое несчетное множество имеет хотя бы одну точку конденсации, принадлежащую этому множеству.* Полезно обратить внимание на различие между этим утверждением и теоремой Больцано — Вейерштрасса.

Непустое совершенное множество имеет мощность континуума; мощность непустого замкнутого множества может быть либо континуум, либо счетная, либо конечная *).

Несчетное замкнутое множество всегда представляется в виде суммы совершенного множества и не более

---

*) Тем самым утверждается, что замкнутое множество не может иметь мощности, промежуточной между счетной и мощностью континуума. В настоящее время математики полагают, что множеств промежуточной мощности вообще быть не может, однако это обстоятельство пока не поддается доказательству. Такое утверждение в приведенной или в эквивалентной ему форме называют *континуум-гипотезой.*

чем счетного множества точек (теорема Кантора — Бендиксона).

Смежные интервалы совершенного множества не имеют общих концов.

8. Множество E называют *плотным в себе*, если $E \subseteq E'$, *плотным на множестве* R, если $E' \supseteq R$, и *всюду плотным*, если R — отрезок, содержащий E, или вся прямая. Множество E называют *нигде не плотным*, если оно не плотно ни на каком отрезке. Иначе говоря, множество E называется нигде не плотным, если на каждом отрезке $[a, b]$ найдется отрезок $[a', b'] \subset [a, b]$, не содержащий ни одной точки E.

Дополнение к нигде не плотному множеству обязательно всюду плотно. Однако дополнение к всюду плотному множеству не только не обязано быть нигде не плотным, но даже само может оказаться всюду плотным. Так, множество всех рациональных точек отрезка $[0, 1]$ всюду плотно одновременно со своим дополнением.

Особый интерес представляет пример нигде не плотного совершенного множества, построенного впервые Г. Кантором. Это множество строится следующим образом. Разделим отрезок $U = [0, 1]$ на три равные части точками $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$ и удалим из U средний интервал $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Каждый из оставшихся отрезков $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ снова разделим на три равные части и удалим из них средние интервалы $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ и $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$.

Рис. 3.

С каждым из четырех оставшихся отрезков поступим дальше точно так же: разделим на три равные части и удалим средний интервал (рис. 3). Продолжая этот процесс неограниченно, замечаем, что из отрезка U вычитается счетное множество попарно не пересекающихся интервалов, не имеющих общих концов ни между собой, ни с основным отрезком $[0, 1]$.

Отсюда следует, что оставшееся множество $P = U - \sum_n (a_n, b_n)$ является совершенным. Это множество P называют *канторовым совершенным множеством.*

Описанный процесс является типичным для построения нигде не плотных совершенных ограниченных множеств. Каждое совершенное нигде не плотное множество может быть построено с помощью аналогичного процесса, так что оно *подобно* канторовому совершенному множеству. Последнее означает, что можно установить такое взаимно однозначное соответствие между двумя нигде не плотными совершенными множествами, которое сохраняет порядок следования точек.

Если данное множество может быть получено в виде суммы конечного или счетного множества нигде не плотных множеств, то его называют множеством *первой категории.* Множества, не являющиеся множествами первой категории, называют множествами *второй категории.* Сумма счетного множества множеств первой категории сама является множеством первой категории. Так как отрезок не является множеством первой категории, то дополнение к множеству первой категории не может само быть множеством первой категории. Такие множества называют множествами *строго второй категории* или *второй категории в узком смысле.*

§ 2. Мера Лебега линейных множеств

1. Понятие мощности, позволяющее до некоторой степени различать бесконечные множества «большие» и «меньшие», является тем не менее недостаточным для изучения линейных множеств. Действительно, отрезки любой длины эквивалентны между собой и имеют мощность континуума. Естественно возникает потребность создания характеристики множества, отражающей его протяженность и обобщающей понятие длины. Такой характеристикой является *мера* (m) линейного множества.

Для открытых и замкнутых множеств достаточно следующих определений:

а) мерой интервала называется его длина $m(a, b) = b - a$;

б) мерой ограниченного открытого множества G называется сумма длин составляющих его интервалов

$$m\,G = \sum_k (b_k - a_k),$$

где (a_k, b_k) $(k=1, 2, \ldots)$ — интервалы, составляющие G, причем множество их может быть как конечным, так и счетным. В первом случае знак $\sum\limits_k$ должен означать $\sum\limits_{k=1}^{n}$, а во втором случае $\sum\limits_{k=1}^{\infty}$.

в) Мерой ограниченного замкнутого множества F называется разность

$$mF = b - a - mCF,$$

где $[a, b]$ — какой-либо отрезок, содержащий множество F, а CF — дополнение к множеству F относительно этого отрезка. Нетрудно заметить, что величина mF не зависит от выбора отрезка $[a, b] \supseteq F$.

Подсчитаем в качестве примера меру канторова совершенного множества, построенного в п. 8 § 1. Сумма длин смежных интервалов равна

$$\frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{9} + 4 \cdot \frac{1}{27} + \ldots + 2^n \frac{1}{3^{n+1}} + \ldots = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1,$$

так что *мера канторова совершенного множества равна нулю.*

Эти определения ставят в соответствие каждому открытому или замкнутому множеству E некоторое определенное число — *меру* E, обозначаемое mE (иногда используются также обозначения $\operatorname{mes} E$ или $|E|$) и обладающее очевидными свойствами, аналогичными свойствам длины. Их недостаточно, однако, чтобы поставить в соответствие числовое значение меры множеству достаточно сложной природы.

Для весьма обширного класса множеств меру можно получить с помощью конструкции, предложенной А. Лебегом. Эта мера называется *линейной мерой Лебега.*

2. Пусть E — произвольное точечное множество, лежащее внутри отрезка $[a, b]$. Если G — открытое множество, принадлежащее тому же отрезку и содержащее E, $G \supset E$, то говорят, что множество E *покрыто* открытым множеством, а G называют *покрытием* E.

Обозначим через mG меру открытого множества G, т. е. сумму длин составляющих его интервалов. *Внешней мерой множества E называется нижняя грань мер открытых множеств, покрывающих E.* Обозначив внешнюю меру E через m_eE, имеем, по определению,

$$m_eE = \inf_{G \supset E} mG.$$

Множество E называют *измеримым в смысле Лебега*, если

$$m_eE + m_eCE = b - a.$$

В этом случае за меру E принимают ее внешнюю меру и пишут $mE = m_eE$. Разность

$$b - a - m_eCE = m_iE$$

называют *внутренней мерой* *) *множества E*. Поэтому *множество E измеримо тогда и только тогда, когда $m_eE = m_iE$. Мера Лебега измеримого множества есть общее значение его внешней и внутренней мер.*

Свойства измеримых множеств выражаются следующими теоремами:

а) *Ограниченное счетное множество измеримо, и его мера равна нулю.*

б) *Ограниченное множество E, являющееся суммой конечного или счетного множества измеримых множеств $E = \sum_k E_k$, измеримо. Если слагаемые попарно не пересекаются, то*

$$mE = \sum_k mE_k.$$

в) *Разность двух измеримых множеств $E = E_1 \setminus E_2$ измерима. Если $E_1 \supseteq E_2$, то*

$$mE = mE_1 - mE_2.$$

г) *Пересечение конечного или счетного множества измеримых множеств измеримо.*

---

*) Внутреннюю меру множества E можно определить также как *верхнюю грань мер замкнутых множеств, содержащихся в E,*

$$m_iE = \sup_{F \subset E} mF.$$

д) *Пусть* $E_1, E_2, E_3, \ldots$ *измеримы и* $E_1 \subseteq E_2 \subseteq E_3 \subseteq \ldots$ *Если сумма* $\sum_{k=1}^{\infty} E_k = E$ *ограничена, то*

$$mE = \lim_{n \to \infty} mE_n.$$

е) *Пусть* $E_1, E_2, E_3, \ldots$ *измеримы,* $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \ldots$ *и* $E = \prod_{n=1}^{\infty} E_n$. *Тогда*

$$mE = \lim_{n \to \infty} mE_n.$$

Все ограниченные открытые и замкнутые множества измеримы в смысле Лебега. Значение меры Лебега для этих множеств совпадает со значением меры, определенной в п. 1. Более того, *всякое ограниченное множество, которое может быть получено, исходя из открытых или замкнутых множеств путем применения конечного или счетного множества операций сложения и пересечения, измеримо.*

Всякое множество, полученное таким путем, называют *борелевским* множеством (B-множеством) или *множеством, измеримым* B. Таким образом, всякое множество, измеримое B, измеримо в смысле Лебега. Обратная теорема не верна.

3. Измеримое множество E положительной меры называется *приведенным*, если всякий интервал, содержащий хотя бы одну точку E, содержит также часть E положительной меры. Всякое измеримое множество положительной меры содержит приведенное множество той же меры. Его можно построить, образовав разность множества E и всех таких интервалов с рациональными концами, которые содержат части множества E меры нуль.

Структура измеримого множества положительной меры описывается теоремой:

всякое измеримое множество положительной меры может быть представлено в виде суммы счетного множества попарно не пересекающихся приведенных совершенных множеств и остаточного множества меры нуль.

Рассматривая аналогичное представление дополнения, можно получить приближение измеримого множества не только изнутри, но и снаружи:

для всякого измеримого множества E существуют B-множества E_1 и E_2 той же меры, одно из которых содержится в множестве E, а другое содержит его, т. е.

$$E_1 \subseteq E \subseteq E_2 \quad \text{и} \quad mE_1 = mE_2 = mE.$$

Иначе говоря, с точностью до множества меры нуль всякое измеримое множество можно считать B-множеством. Если же ограничиться рассмотрением с точностью до множеств сколь угодно малой меры, то измеримое множество можно считать совершенным, в том числе просто суммой конечного числа отрезков. Более точно,

для всякого измеримого множества положительной меры и любого числа $\varepsilon > 0$ существует конечное число таких отрезков, что точки множества, не попавшие в них, и точки его дополнения, попавшие в них, образуют вместе множество меры меньше ε.

При изучении локальной структуры измеримых множеств положительной меры существенно используется понятие точек плотности.

Пусть E — измеримое множество, лежащее на отрезке $[a, b]$, и $x_0 \in [a, b]$ — произвольная точка, принадлежащая или не принадлежащая E. Обозначим через Δ интервал длины δ, содержащий точку x_0, а через $m(\Delta E)$ меру части E, принадлежащей этому интервалу. Точку x_0 называют *точкой плотности* множества E, если

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{m(\Delta E)}{\delta} = 1.$$

Если рассматриваемый предел равен нулю, то точку x_0 называют *точкой разрежения.*

Для множества, мера которого равна длине содержащего его отрезка (такие множества называются множествами *полной* меры), каждая точка отрезка является точкой плотности. Наоборот, если мера множества равна нулю, то каждая точка отрезка будет для этого множества точкой разрежения. *Для измеримого множества $E \subset [a, b]$, мера которого удовле-*

творяет условиям $0 < mE < b - a$, *все его точки, кроме множества меры нуль, являются точками плотности* E, *а все точки дополнения, кроме множества меры нуль, — точками разрежения* E.

Если все точки некоторого множества, кроме точек, образующих множество меры нуль, обладают каким-либо свойством, то говорят, что этим свойством обладают *почти все* точки или что это свойство имеет место *почти всюду*. Пользуясь этим термином, можно сказать, что *почти все точки измеримого множества суть его точки плотности*. Этот факт показывает, что множество промежуточной меры располагается на отрезке не равномерно, а неоднородным образом, «сгустками», плотно в одних местах и разреженно в других, подобно системе отрезков.

Сходство между измеримым множеством и отрезком подкрепляется следующими утверждениями:

если измеримые множества E_1 *и* E_2 *имеют* x_0 *точкой плотности, то они пересекаются и* x_0 *является точкой плотности пересечения*;

если множества E_1 *и* E_2, *лежащие на отрезке* $[a, b]$, *измеримы и сумма* S *их мер превосходит* $b - a$, *то они пересекаются, причем мера пересечения больше, чем* $S - (b - a)$.

4. Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ — последовательность линейных множеств. *Верхним пределом* данной последовательности множеств называют множество всех таких точек, каждая из которых входит в бесконечно многие множества последовательности. Множество всех точек, каждая из которых содержится во всех множествах последовательности, кроме конечного числа, называют *нижним пределом* последовательности множеств. Верхний и нижний пределы последовательности множеств обозначают соответственно через $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} E_n$ и $\underline{\lim\limits_{n \to \infty}} E_n$ или $\limsup\limits_{n \to \infty} E_n$ и $\liminf\limits_{n \to \infty} E_n$. Иначе говоря, множество, являющееся нижним пределом последовательности, состоит из точек, принадлежащих всем множествам последовательности, начиная с некоторого номера, а множество, являющееся верхним пределом, — из точек, принадлежащих множествам с как угодно большими номерами.

Верхний и нижний пределы последовательности множеств можно получить с помощью операций сложения и пересечения по формулам

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} E_n = (E_1 \cdot E_2 \cdot E_3 \cdot \ldots) + (E_2 \cdot E_3 \cdot \ldots) + \\ + (E_3 \cdot \ldots) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{n=k}^{\infty} E_n,$$

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} E_n = (E_1 + E_2 + E_3 + \ldots) \cdot (E_2 + E_3 + \ldots) \times \\ \times (E_3 + \ldots) = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} E_n,$$

откуда, в частности, следует, что если все множества последовательности измеримы, то измеримы также и верхний и нижний пределы.

Верхний и нижний пределы последовательности множеств всегда существуют. Если они совпадают, то последовательность множеств называется *сходящейся*, а полученное множество — *пределом последовательности множеств*:

$$\lim_{n\to\infty} E_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} E_n = \underline{\lim}_{n\to\infty} E_n.$$

В случае, когда верхний и нижний пределы последовательности различны, последовательность множеств называют *расходящейся*.

Если последовательность измеримых множеств E_1, E_2, E_3, ..., лежащих на конечном отрезке, сходится к множеству E, то пишут $E = \lim\limits_{n\to\infty} E_n$.

Монотонные последовательности множеств, т. е. последовательности множеств, вложенных друг в друга, сходятся. Именно, для *монотонно возрастающей* последовательности, определяющейся условием

$$E_1 \subseteq E_2 \subseteq \ldots \subseteq E_n \subseteq \ldots,$$

пределом последовательности является сумма

$$\lim_{n\to\infty} E_n = E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} E_n,$$

для *монотонно убывающей* последовательности, для которой, по определению,

$$E_1 \supseteq E_2 \supseteq \ldots \supseteq E_n \supseteq \ldots,$$

пределом будет пересечение

$$\lim_{n \to \infty} E_n = E_1 \cdot E_2 \ldots E_n \cdot \ldots = \prod_{n=1}^{\infty} E_n.$$

При этом может случиться, что пределом монотонно возрастающей последовательности множеств является вся прямая, а пределом монотонно убывающей последовательности множеств — пустое множество.

При стремлении меры E_n к нулю при неограниченном возрастании n мера нижнего предела расходящейся последовательности множеств равна нулю, $m \varliminf_{n \to \infty} E_n = 0$, однако верхний предел $\varlimsup_{n \to \infty} E_n$ может оказаться положительной меры. Если же предположить дополнительно, что ряд из мер множеств последовательности сходится, $\sum_{n=1}^{\infty} mE_n < \infty$, то и $m \varlimsup_{n \to \infty} E_n = 0$.

5. Пусть $E \subset [a, b]$ измеримое множество и Σ — некоторая система интервалов или отрезков, причем каждая точка из E принадлежит хотя бы одному интервалу или отрезку из Σ. Тогда говорят, что *множество E покрыто системой* Σ. Часто используются следующие теоремы о покрытиях.

а) Теорема Бореля — Лебега. *Если ограниченное замкнутое множество F покрыто бесконечной системой интервалов Σ, то из системы Σ можно выделить конечное число интервалов, покрывающих F.*

б) *Из покрытия ограниченного замкнутого множества F системой интервалов Σ можно выделить конечное число попарно не пересекающихся интервалов, покрывающих часть E множества F с мерой $mE \geqslant \frac{1}{2} mF$.*

в) *Если ограниченное замкнутое множество F покрыто системой отрезков Σ, то из покрытия можно выбрать* *конечную систему не пересекающихся попарно отрезков, покрывающую часть E множества F меры $mE \geqslant \frac{1}{2} mF$.*

г) Теорема Витали. *Пусть ограниченное измеримое множество E покрыто системой отрезков Σ так, что каждая точка E покрыта отрезками сколь угодно малой длины. Тогда из системы Σ можно выделить конечное или счетное множество попарно не пересекающихся отрезков $\{\Delta_k\}$, покрывающих множество E с точностью до множества меры нуль, т. е.*

$$m\left[E \setminus \sum_k \Delta_k\right] = 0.$$

Часто теорему Витали удобно применять в следующей форме:

д) *При тех же предположениях для всякого $\varepsilon > 0$ существует конечное число отрезков Δ_k, попарно не пересекающихся и таких, что*

$$m\left[E \setminus \sum_k \Delta_k\right] < \varepsilon.$$

В обеих формах теоремы Витали можно опустить предположение измеримости множества E, заменив в утверждении д) меру непокрытой части множества на ее внешнюю меру.

§ 3. Основные классы функций

1. Рассмотрим произвольное множество $E \subset [a, b]$. Пусть каждому значению $x \in E$ ставится в соответствие определенное значение $y = f(x)$ *). В таком случае мы говорим, что на множестве E определена *функция*, а множество E называем ее *областью определения*. Множество M всех возможных значений y называют *областью значений* функции или *образом множества* E, что записывается равенством $M = f(E)$. Если $y \in f(E)$, то всякую точку $x \in E$, для которой $f(x) = y$, называют *прообразом* y. Множество всех таких точек называется *полным прообразом* y и обозначается через $f^{-1}(y)$.

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве E.

Функция $f(x)$ называется *ограниченной* на E, если множество $f(E)$ ограничено. Ее называют *конечной* на множе-

*) Значение y может быть как конечным, $-\infty < y < \infty$, так и бесконечным, $y = +\infty$ или $y = -\infty$.

стве E, если она принимает в каждой точке $x \in E$ конечное значение $y=f(x)$, $-\infty<y<+\infty$. Если функция $f(x)$ принимает конечное значение почти всюду на множестве E, то она называется ***конечной почти всюду***.

Говорят, что $f(x)$ ***непрерывна в точке*** $x_0 \in E$ ***относительно множества*** E, если для любой последовательности $\{x_n\}$ точек, принадлежащих E и сходящихся к x_0, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x_0)$, т. е. из $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $x_n \in E$, следует

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Иначе говоря, функция $f(x)$, определенная на множестве E, непрерывна в точке $x_0 \in E$ относительно E, если для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для всех точек $x \in E$, для которых $|x-x_0|<\delta$, справедливо соотношение

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

Функция $f(x)$, определенная на множестве E, ***равномерно непрерывна*** на нем, если для всякого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для любой пары точек $x_1, x_2 \in E$ из $|x_2-x_1|<\delta$ следует $|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$.

Функции, непрерывные на замкнутых множествах, обладают следующими свойствами:

а) *Если функция $f(x)$ непрерывна на замкнутом множестве F, то для любого числа c множество точек F, для которых $f(x)\geqslant c$ или $f(x)\leqslant c$, замкнуты.*

б) *Функция, непрерывная на ограниченном замкнутом множестве, равномерно непрерывна на нем.*

в) *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке и принимает на нем какие-либо значения c_1 и c_2, то она принимает на нем также любое значение c, заключенное между ними.*

г) Теорема Вейерштрасса. *Если функция $f(x)$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве, то она ограничена на нем и среди ее значений существует наименьшее и наибольшее.*

д) *Непрерывный образ замкнутого множества является замкнутым множеством. В частности, непрерывный образ отрезка есть отрезок* *).

*) Напомним, что речь идет об отображении линейных множеств на линейные.

Точки множества E, в которых определенная на E функция $f(x)$ не является непрерывной относительно E, называются *точками разрыва* этой функции.

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве E и $x_0 \in E$. Если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0, для которой $x_n \in E$ и $x_n > x_0$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится, то говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *правосторонний предел* (или *предел справа*), который обозначается так:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 + 0 \\ x \in E}} f(x) = f(x_0 + 0).$$

Аналогично определяется *левосторонний предел* (*предел слева*). Функцию $f(x)$ называют *непрерывной справа* (*слева*); если

$$f(x_0) = f(x_0 + 0) \quad (f(x_0) = f(x_0 - 0)).$$

Точку x_0, в которой пределы слева и справа существуют, но $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, называют *точкой разрыва первого рода* или *конечным скачком*. Разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называют *величиной скачка* в точке x_0. Разности $f(x_0 + 0) - f(x_0)$ и $f(x_0) - f(x_0 - 0)$ называются соответственно *скачками справа и слева*. Точки разрыва, отличные от конечного скачка, называются точками разрыва *второго рода*. Точки разрыва функции могут образовать весьма обширное множество. Так, известная *функция Дирихле*, определенная на отрезке $[0, 1]$ условием

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально}, \\ 1, & \text{если } x \text{ рационально}, \end{cases}$$

или, что то же самое, формулой $f(x) = \lim\limits_{m \to \infty} \lim\limits_{n \to \infty} (\cos 2\pi n! x)^m$, разрывна в каждой точке отрезка. Функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \text{ иррационально}, \\ \dfrac{1}{q}, & \text{если } x = \dfrac{p}{q}, \text{ где } \dfrac{p}{q} \text{ — несократимая рациональная дробь}, \end{cases}$$

разрывна в каждой рациональной точке отрезка и непрерывна в иррациональных точках.

2. Функция $f(x)$, определенная на множестве E, называется *возрастающей* (или *неубывающей*) на этом множестве, если для любой пары точек $x_1, x_2 \in E$ из $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) \geqslant f(x_1)$. В том случае, когда последнее неравенство имеет вид $f(x_2) > f(x_1)$, функцию называют *строго возрастающей* (иногда просто *возрастающей*).

Аналогично, если для любых $x_1, x_2 \in E$ из $x_2 > x_1$ следует $f(x_2) \leqslant f(x_1)$, то функцию называют *убывающей* или *невозрастающей*, а в случае $f(x_2) < f(x_1)$ — *строго убывающей*.

Функции возрастающие и убывающие называются *монотонными функциями*, соответственно строго возрастающие и строго убывающие — *строго монотонными*.

Если функция $f(x)$ возрастает, то функция $-f(x)$ будет убывающей, и наоборот.

Монотонные функции могут иметь лишь разрывы первого рода. Более того, если E замкнуто, то *множество точек разрыва монотонной функции не более чем счетно и для любого $\sigma > 0$ существует лишь конечное число точек, в которых возрастающая функция имеет скачок больше σ.*

Пусть $f(x)$ возрастает на отрезке $[a, b]$. Определим *функцию скачков* функции $f(x)$, положив для $x \in [a, b]$

$$s(a) = 0,$$

$$s(x) = [f(a+0) - f(a)] + \sum_{x_k < x} [f(x_k + 0) - f(x_k - 0)] + \\ + [f(x) - f(x-0)] \qquad (a < x \leqslant b);$$

здесь x_k — абсциссы скачков $f(x)$.

Тогда *разность между возрастающей функцией и ее функцией скачков возрастает и непрерывна*, т. е. *всякую возрастающую функцию можно представить в виде суммы непрерывной возрастающей функции и функции скачков*, которая, очевидно, тоже неубывающая. Аналогичная теорема имеет место и для убывающей функции.

3. Пусть функция $f(x)$ определена и конечна на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок на части точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

и составим для данного разбиения сумму

$$V=\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|.$$

Если точная верхняя грань множества таких сумм по всем возможным разбиениям конечна, то ее называют *полной вариацией* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначают так:

$$\bigvee_a^b(f)=\sup\sum_{k=0}^{n-1}|f(x_{k+1})-f(x_k)|,$$

а функцию $f(x)$ называют *функцией с ограниченной вариацией на этом отрезке.*

Простейшими примерами функций с ограниченной вариацией являются монотонные функции. *Полная вариация возрастающей функции равна ее приращению на данном отрезке.* Действительно, так как все слагаемые в сумме, определяющей вариацию, для возрастающей функции всегда положительны, то при любом разбиении $\bigvee_a^b=f(b)-f(a)$.

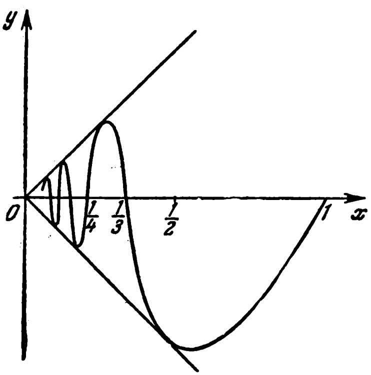

Рис. 4

Ясно, что функции с ограниченной вариацией могут быть разрывными. С другой стороны, непрерывные функции не обязательно имеют ограниченную вариацию. Так, функция $y=x\cos\frac{\pi}{2x}$, доопределенная условием $y(0)=0$, непрерывна на отрезке $[0, 1]$, но не имеет ограниченной вариации на этом отрезке. В самом деле, разбив при фиксированном n отрезок $[0, 1]$ точками

$$0<\frac{1}{2n}<\frac{1}{2n-1}<\ldots<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1,$$

найдем, что для такого разбиения сумма V равна (рис. 4)

$$V=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n},$$

так что при достаточно больших n она может быть как угодно большой.

Важным классом функций с ограниченной вариацией являются функции, удовлетворяющие *условию Липшица*. При этом конечная функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ условию Липшица, если существует такая константа K, что для любых двух точек $x, y \in [a, b]$

$$|f(x)-f(y)| \leqslant K|x-y|.$$

В частности, функция $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица, если она имеет в каждой точке $[a, b]$ производную, которая ограничена на отрезке. В этом случае за K можно принять верхнюю грань значений $|f'(x)|$.

Функция $f(x)$, удовлетворяющая условию Липшица на отрезке $[a, b]$, имеет ограниченную вариацию на этом отрезке и $\bigvee\limits_a^b (f) \leqslant K(b-a)$.

Функции с ограниченной вариацией на отрезке обладают следующими свойствами:

а) *Сумма, разность и произведение двух функций с ограниченной вариацией суть функции с ограниченной вариацией. Частное двух функций с ограниченной вариацией, если знаменатель $f(x)$ в каждой точке удовлетворяет условию $f(x) \geqslant \sigma > 0$, также есть функция с ограниченной вариацией.*

б) *Функция с ограниченной вариацией на отрезке ограничена на нем.*

в) *Если отрезок $[a, b]$ разбит на конечное число отрезков, то вариация функции на отрезке равна сумме вариаций на всех его частях.* Отсюда следует, что *если отрезок $[a, b]$ можно разбить на конечное число частей, на каждой из которых $f(x)$ будет монотонной, то $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$.*

г) *Для того чтобы функция имела ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы она могла быть представлена в виде разности двух функций, возрастающих на $[a, b]$.* Используя свойства монотонных функций, отсюда заключаем немедленно, что

д) *функция с ограниченной вариацией имеет не более чем счетное множество точек разрыва лишь первого рода* и е) *функцию с ограниченной вариацией можно представить в виде суммы непрерывной функции с ограниченной вариацией и функции скачков.*

4. Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[a, b]$. Функция $f(x)$ называется *абсолютно непрерывной* на отрезке, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой конечной системы попарно не пересекающихся интервалов, сумма длин которых меньше δ, сумма абсолютных величин приращений функции на этих интервалах будет меньше ε, т. е. для системы $\{(a_k, b_k)\}$, для которой $\sum\limits_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$, имеет место

$$\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

В определении абсолютной непрерывности можно заменить сумму абсолютных величин приращений функции суммой ее приращений, т. е. требовать выполнения неравенства

$$\left| \sum_{k=1}^{n} \{f(b_k) - f(a_k)\} \right| < \varepsilon.$$

Так как, в частности, вместо системы интервалов можно взять один, то функция, абсолютно непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем, а значит, и непрерывна в каждой его точке. Как будет показано ниже, обратное заключение не верно.

Простейшим примером абсолютно непрерывных функций являются функции, удовлетворяющие условию Липшица.

Сумма, разность и произведение абсолютно непрерывных функций суть абсолютно непрерывные функции. Частное абсолютно непрерывных функций абсолютно непрерывно на любом отрезке, на котором знаменатель не обращается в нуль.

Абсолютно непрерывная функция имеет ограниченную вариацию. Отсюда сразу следует, что непрерывная функция, не имеющая ограниченной вариации, например рассмотренная в п. 3 функция $y = x \cos \frac{\pi}{2x}$, не будет абсолютно непрерывной. Однако даже непрерывная функция с ограниченной вариацией может не быть абсолютно непрерывной.

Для того чтобы непрерывная на отрезке $[a, b]$ *функция* $f(x)$, *имеющая ограниченную вариацию на этом отрезке, была на нем абсолютно непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы образ* $f(E)$ *любого множества* E *меры нуль также был меры нуль* *).

Суперпозиция **) двух абсолютно непрерывных функций может и не быть абсолютно непрерывной. Однако *абсолютно непрерывная функция* F *от абсолютно непрерывной и монотонной функции* f, *т. е.* $F[f(x)]$, *есть абсолютно непрерывная функция.* Точно так же, *если* $f(x)$ *абсолютно непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *а* $F(y)$ *удовлетворяет условию Липшица на отрезке, содержащем все значения* $f(x)$, *то* $F[f(x)]$ *абсолютно непрерывна на* $[a, b]$.

Мы имеем здесь два достаточных условия, при которых суперпозиция абсолютно непрерывных функций является абсолютно непрерывной. Более общее условие дает

Теорема Г. М. Фихтенгольца. *Если функция* $f(x)$ *абсолютно непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и* $F(y)$ *абсолютно непрерывна на отрезке, содержащем все значения* $f(x)$, *то для того чтобы суперпозиция* $F[f(x)]$ *была абсолютно непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы она была функцией с ограниченной вариацией.*

5. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве E. Множество тех точек x из E, для которых выполняется неравенство $f(x) > a$, будем обозначать через $E\{f > a\}$. В некоторых случаях, для того чтобы подчеркнуть, что речь идет о множестве точек x, пишут $E\{x \mid f(x) > a\}$. Аналогично определяются символы $E\{f \leqslant a\}$, $E\{f = a\}$ и т. д.

Функция $f(x)$ называется *измеримой* на множестве E, если E измеримо и для любого a измеримо также множество $E\{f > a\}$.

Ясно, что функция, заданная на множестве меры нуль, всегда измерима, поскольку любая часть множества меры нуль также есть множество меры нуль.

---

*) Это свойство функции Н. Н. Лузин назвал *N-свойством.*

**) *Суперпозицией* функций $u = \varphi(x)$ и $y = f(u)$ называется функция $y = f[\varphi(x)]$.

Назовем *характеристической функцией* множества $E \subset [a, b]$ такую функцию $\psi(x)$, которая определена на $[a, b]$ и равна единице в точках множества E и нулю в точках дополнения. *Множество E и его характеристическая функция измеримы или неизмеримы одновременно.*

Функция $g(x)$ называется *эквивалентной* функции $f(x)$, если множество $E\{f \neq g\}$ имеет меру нуль. Пользуясь введенным в § 2 термином, можно сказать, что функции называются эквивалентными, если они почти всюду совпадают или, иначе, их разность почти всюду равна нулю. Легко показать, что *если функция $f(x)$ измерима, то все функции, эквивалентные $f(x)$, также измеримы.*

Для измеримой функции $f(x)$ при любом a измеримо не только множество $E\{f > a\}$, упомянутое в определении измеримости, но также и каждое из множеств $E\{f \geqslant a\}$, $E\{f < a\}$, $E\{f \leqslant a\}$, $E\{f = a\}$. С другой стороны, измеримость хотя бы одного из множеств $E\{f \geqslant a\}$, $E\{f < a\}$, $E\{f \leqslant a\}$ для любого a уже влечет измеримость функции.

Нетрудно установить, что *функция $f(x)$, определенная и непрерывная на отрезке, измерима на нем.* Так же просто доказывается, что *арифметические действия над измеримыми функциями приводят лишь к измеримым функциям.*

Структура измеримых функций выясняется следующими теоремами.

а) *Каковы бы ни были измеримая и почти всюду конечная на множестве E функция $f(x)$ и число $\varepsilon > 0$, существует ограниченная измеримая функция $\varphi(x)$, отличающаяся от $f(x)$ лишь в точках множества, мера которого меньше ε,*

$$mE\{f \neq \varphi\} < \varepsilon.$$

б) Теорема Э. Бореля. *Пусть на отрезке $[a, b]$ задана измеримая и почти всюду конечная функция $f(x)$. Каковы бы ни были числа $\sigma > 0$ и $\varepsilon > 0$, существует непрерывная функция $\psi(x)$, отличающаяся от $f(x)$ не меньше чем на σ лишь в точках множества, мера которого меньше ε,*

$$mE\{|f - \psi| \geqslant \sigma\} < \varepsilon.$$

Более детально выясняется природа измеримой функции с помощью введенного Н. Н. Лузиным понятия C-свойства.

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана измеримая функция $f(x)$. Говорят, что $f(x)$ обладает *С-свойством*, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется совершенное множество P, на котором $f(x)$ непрерывна и мера которого отличается от длины отрезка меньше чем на данное ε, т. е. $mP > b - a - \varepsilon$. Название C-свойства происходит от французского слова continu, что означает непрерывность.

Теорема Н. Н. Лузина. *Для того чтобы функция $f(x)$ обладала С-свойством, необходимо и достаточно, чтобы она была измерима и конечна почти всюду.*

Таким образом, всякую измеримую и почти всюду конечную функцию можно получить из некоторой непрерывной путем деформации ее на множестве сколь угодно малой меры.

Приведенная теорема Н. Н. Лузина является одной из основных теорем теории функций действительного переменного.

§ 4. Производная и ее обобщения

1. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и непрерывна в точке $x_0 \in [a, b]$. Отношение

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

называют *разностным отношением* для функции $f(x)$ в данной точке. *Производной* $f(x)$ в точке x_0 называют предел этого разностного отношения

$$f'(x_0)=\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h},$$

если он существует. Если этот предел конечен, то говорят, что $f(x)$ *дифференцируема* в точке x_0.

Непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0 необходима, но не достаточна для дифференцируемости. Чтобы убедиться в последнем, достаточно рассмотреть поведение функций $y = |x|$ и

$$y=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x=0 \end{cases}$$

в точке $x_0 = 0$. Для первой из них разностное отношение равно $+1$ при $h > 0$ и -1 при $h < 0$ (рис. 5). Для второй (рис. 6) разностное отношение в любой окрестности точки $x_0=0$ принимает все значения между -1 и $+1$. Действительно, разностное отношение равно

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h\sin\frac{1}{h}}{h}=\sin\frac{1}{h},$$

так что все значения от -1 до $+1$ принимаются на каждом участке вида

$$\frac{2}{\pi(2n-1)}\geqslant h\geqslant\frac{2}{\pi(2n+1)}\quad(n=0,\,1,\,2,\,\ldots).$$

В приведенных примерах производная отсутствует лишь в одной точке. Существуют, однако, примеры непрерывных

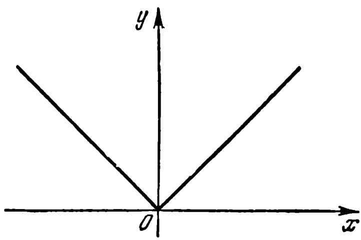

Рис. 5.

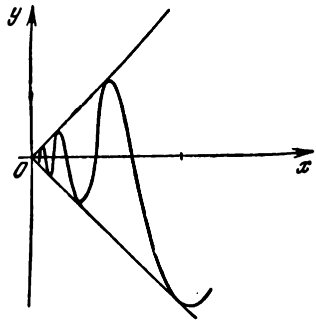

Рис. 6.

функций, не имеющих производной ни в одной точке отрезка. Один из них будет рассмотрен ниже в § 6 (см. стр. 71).

Если функция $f(x)$ дифференцируема в каждой точке отрезка, то функцию $f'(x)$ называют *точной производной*. Важное свойство точной производной на отрезке устанавливает

Теорема Дарбу. *Точная производная функции $f(x)$ на отрезке $[a,\,b]$ принимает на $(a,\,b)$ все промежуточные значения между $f'(a)$ и $f'(b)$.* Отсюда следует, что *точная производная не может иметь точек разрыва первого рода.*

2. Если множество точек существования производной имеет полную меру, то говорят, что производная существует *почти всюду*. Простейшим достаточным условием существования производной почти всюду является монотонность функции. Именно, имеет место следующая теорема: *функция* $f(x)$, *монотонная на отрезке* $[a, b]$, *имеет почти всюду на этом отрезке конечную производную* $f'(x)$ (при этом вовсе не предполагается непрерывности $f(x)$). Отсюда и из теорем § 3 (см. пп. 3, 4) следует:

а) *функция с ограниченной вариацией на отрезке* $[a, b]$ *имеет производную почти всюду на этом отрезке*;

б) *если функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию Липшица на отрезке, то она имеет почти всюду конечную производную*;

в) *функция, абсолютно непрерывная на отрезке* $[a, b]$, *имеет почти всюду на нем конечную производную.*

Кроме того,

г) *не существует непрерывной функции, производная которой равна бесконечности на множестве положительной меры.*

Вместе с тем *для всякого множества* E *меры нуль на отрезке* $[a, b]$ *существует непрерывная возрастающая функция* $\sigma(x)$, *производная которой в каждой точке* $x \in E$ *равна* $+\infty$.

3. Пусть в точке x_0 функция $f(x)$, определенная на $[a, b]$, не имеет производной. Если разностное отношение $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ имеет односторонние пределы слева и справа, то их называют соответственно *левой* и *правой производными* в точке x_0 или *производной слева* и *производной справа*. Производные слева и справа в точке x_0 часто обозначают через $D_s f(x_0)$ и $D_d f(x_0)$.

Для того чтобы функция $f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы обе односторонние производные существовали и совпадали между собой. Может, однако, случиться, что производные слева и справа существуют, но различны. Например, функция $f(x)=|x|$ (см. рис. 5) не имеет производной при $x_0=0$, но $D_s f(0)=$ $=-1$, $D_d f(0)=+1$. Точки, в которых $D_s f(x_0) \neq D_d f(x_0)$, являются *угловыми точками*.

Множество точек, в которых правая и левая производные существуют и различны, не более чем счетно.

Иначе говоря, *множество угловых точек лишь конечно или счетно.*

Во всякой точке x_0 существуют *верхняя производная* $f^+(x_0)$ и *нижняя производная* $f^-(x_0)$. При этом верхней производной называют *верхний предел разностного отношения*

$$f^+(x_0) = \limsup_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Аналогично нижняя производная определяется равенством

$$f^-(x_0) = \liminf_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Так, для функции

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

в точке $x_0 = 0$ имеем $f^+(x_0) = +1$ и $f^-(x_0) = -1$ (см. рис. 6). При этом угловой коэффициент прямой, соединяющей точку $(x_0, f(x_0))$ с точкой $(x_0+h, f(x_0+h))$, колеблется от биссектрисы второго до биссектрисы первого координатного угла и обратно.

Более далеким обобщением понятия производной являются *производные числа.* Число λ (конечное или бесконечное) называется *производным числом функции* $f(x)$ *в точке* x_0, если существует последовательность $\{h_n\}$, стремящаяся к нулю ($h_n \neq 0$), для которой

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_0+h_n)-f(x_0)}{h_n} = \lambda.$$

Производное число будем обозначать $\lambda = Df(x_0)$. Очевидно, что

а) *для каждой функции* $f(x)$, *заданной на отрезке* $[a, b]$, *в любой точке существуют производные числа*;

б) *для существования производной* $f'(x_0)$ *в точке* $x_0 \in [a, b]$ *необходимо и достаточно, чтобы все производные числа функции в данной точке совпадали.*

В ряде случаев производные числа обладают свойствами, присущими производной. Например, *если функция* $f(x)$ *воз-*

растает (убывает) на отрезке $[a, b]$, то все ее производные числа неотрицательны (неположительны).

Производные числа Дини определяются следующим образом. *Верхним* (нижним) *правым* производным числом называют верхний (нижний) предел разностного отношения при стремлении h к нулю справа,

$$\Lambda^+ = \limsup_{h \to +0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

$$\lambda^+ = \liminf_{h \to +0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Аналогично определяются верхнее и нижнее *левые* производные числа Λ^- и λ^-. Именно,

$$\Lambda^- = \limsup_{h \to -0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad \lambda^- = \liminf_{h \to -0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Ясно, что для каждой конечной функции все четыре производных числа существуют в каждой точке и их можно рассматривать как функции того же аргумента.

Теорема Дини. *Если какое-нибудь одно из производных чисел Дини непрерывной функции непрерывно в некоторой точке, то в этой точке непрерывны также все остальные производные числа и все четыре производных числа в данной точке совпадают, т. е. функция дифференцируема в этой точке.*

Производные числа Дини на множестве полной меры удовлетворяют соотношениям, устанавливаемым следующими теоремами.

Теорема Н. Н. Лузина. *Если все четыре производных числа Дини функции $f(x)$ конечны в каждой точке множества положительной меры, то функция дифференцируема почти всюду на этом множестве.*

Теорема А. Данжуа. *Пусть $f(x)$ — конечная функция, определенная на отрезке $[a, b]$. Тогда в каждой точке некоторого множества полной меры выполняется одно из следующих четырех соотношений:*

а) $\Lambda^+ = \Lambda^- = +\infty$, $\lambda^+ = \lambda^- = -\infty$;

б) $\Lambda^+ = \lambda^- \neq \infty$, $\lambda^+ = -\infty$, $\Lambda^- = +\infty$;

в) $\lambda^+ = \Lambda^- \neq \infty$, $\Lambda^+ = +\infty$, $\lambda^- = -\infty$;

г) $\Lambda^+ = \Lambda^- = \lambda^+ = \lambda^- \neq \infty$.

4. Функцию называют *асимптотически непрерывной* в точке x_0, не являющейся концом отрезка $[a, b]$, если существует множество $E \subset [a, b]$, для которого точка $x_0 \in E$ является точкой плотности и функция $f(x)$ в точке x_0 непрерывна по множеству E. Аналогично определяется асимптотическая производная: функцию $f(x)$ называют *асимптотически дифференцируемой* в точке x_0, если существует множество E, для которого точка x_0 является точкой плотности и такое, что разностное отношение $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ стремится к определенному пределу, когда точка x стремится к x_0 по множеству E. Получающийся предел называют *асимптотической* (иногда *аппроксимативной*) *производной* и обозначают $f^{[1]}(x)$.

Асимптотическая производная является обобщением обычной, поскольку существуют примеры непрерывных функций, не имеющих обычной производной ни в одной точке отрезка, но асимптотически дифференцируемых почти всюду.

Всякая измеримая функция асимптотически непрерывна почти всюду, как и, наоборот, *всякая функция, асимптотически непрерывная почти всюду, измерима.* Однако асимптотическая производная может не существовать и на множестве положительной меры.

В точках, где не существует асимптотической производной, можно рассматривать асимптотические производные числа, аналогичные производным числам Дини. Для них имеет место теорема, аналогичная теореме Данжуа.

Асимптотические производные высших порядков определяются обычной индукцией.

Наряду с асимптотическими производными в теории рядов используется понятие симметричной производной, которое также обобщает понятие обычной производной. *Симметричной производной* или *производной Шварца* называют предел отношения $\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ при $h \to 0$. Вторую симметричную производную можно определить непосредственно как предел при $h \to 0$ отношения $\frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}$, причем предел можно рассматривать как в обычном, так и в асимптотическом смысле. Симметричная производная обладает рядом свойств, аналогичных свойствам обычной производной.

§ 5. Интегрирование функций

1. Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на отрезке $[a, b]$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ и обозначим через Δ_i отрезок $[x_{i-1}, x_i]$, а его длину $x_i-x_{i-1}=\Delta x_i$. Далее, обозначим через M_i и m_i соответственно верхнюю и нижнюю грани функции $f(x)$ на отрезке Δ_i. Разность M_i-m_i называют *колебанием* функции на Δ_i. Суммы

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i \quad \text{и} \quad s_n=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$$

мы будем называть соответственно *верхней* и *нижней суммами Дарбу* для данного разбиения.

При стремлении к нулю максимума длин участков *суммы Дарбу стремятся к определенным пределам* (не зависящим от способа разбиения отрезка), которые называются *верхним* и *нижним интегралами Дарбу функции* $f(x)$ по отрезку $[a, b]$

$$\bar{I}=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x_i\to 0}} S_n=\overline{\int_a^b f(x)\,dx},$$

$$\underline{I}=\lim_{\substack{n\to\infty\\ \Delta x_i\to 0}} s_n=\underline{\int_a^b f(x)\,dx}.$$

Это означает, что для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что для всех разбиений отрезка $[a, b]$, для которых длина наибольшего участка не превосходит δ, выполняются неравенства $|S_n-\bar{I}|<\varepsilon$ и $|s_n-\underline{I}|<\varepsilon$.

Если верхний и нижний интегралы функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ совпадают, то функцию $f(x)$ называют *интегрируемой в смысле Римана на отрезке* $[a, b]$, а общее значение верхнего и нижнего интегралов — *интегралом Римана* этой функции.

Интеграл Римана был подробно рассмотрен в выпуске: *СМБ*, Математический анализ (дифференцирование и интегрирование). Мы ограничимся поэтому формулировкой двух критериев интегрируемости функции по Риману.

Теорема Римана. *Ограниченная функция интегрируема в смысле Римана на отрезке $[a, b]$ тогда и только тогда, когда для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ отрезок $[a, b]$ можно так разбить на интервалы, что сумма длин тех интервалов, колебание на которых больше ε, была меньше δ.*

Теорема Лебега. *Для того чтобы ограниченная функция была интегрируема в смысле Римана, необходимо и достаточно, чтобы множество ее точек разрыва имело меру нуль.*

Из теоремы Лебега, например, следует, что приведенная в § 3, п. 1 функция

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ для иррационального } x, \\ \dfrac{1}{q} \text{ для } x = \dfrac{p}{q} \end{cases}$$

интегрируема по Риману на отрезке $[0, 1]$ (и ее интеграл равен нулю), так как множество ее точек разрыва есть множество рациональных точек отрезка, а следовательно, имеет меру нуль. Наоборот, определенная там же функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \text{ иррационально}, \\ 1, \text{ если } x \text{ рационально}, \end{cases}$$

не интегрируема в смысле Римана, ибо она разрывна всюду. Впрочем, неинтегрируемость функции Дирихле легко вытекает из определения. В самом деле, верхние суммы Дарбу для нее всегда равны единице, потому что при любом разбиении на каждом участке найдется хотя бы одна рациональная точка. По аналогичной причине нижние суммы Дарбу для функции Дирихле всегда равны нулю. Таким образом, верхняя и нижняя суммы не могут иметь общего предела.

2. Заменив в суммах Дарбу длину отрезка Δx_i приращением некоторой *интегрирующей* (или *весовой*) *функции* $\varphi(x)$ на этом отрезке, приходим к суммам Дарбу — Стилтьеса

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})],$$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i [\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1})].$$

Общий предел этих сумм, если он существует и не зависит от способа разбиения отрезка, называют *интегралом Стилтьеса* функции $f(x)$ по интегрирующей функции $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначают: $\int\limits_a^b f(x)\,d\varphi(x)$. Часто говорят также: *интеграл Римана—Стилтьеса.* Легко видеть, что интеграл Римана является частным случаем интеграла Римана — Стилтьеса при интегрирующей функции $\varphi(x)\equiv x$.

Если функция $f(x)$ непрерывна, а $\varphi(x)$ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$, то интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,d\varphi(x)$ существует.

Если функция $f(x)$ непрерывна, а точная производная $\varphi'(x)$ существует и интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то имеет место равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\varphi(x)=\int\limits_a^b f(x)\,\varphi'(x)\,dx,$$

где интеграл слева понимается в смысле Стилтьеса, а интеграл справа является обычным интегралом Римана.

При вычислении интеграла Стилтьеса часто используется формула интегрирования по частям, которой можно придать следующий вид. *Если существует один из интегралов $\int\limits_a^b f(x)\,d\varphi(x)$ и $\int\limits_a^b \varphi(x)\,df(x)$, то существует и второй и имеет место равенство*

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\varphi(x)+\int\limits_a^b \varphi(x)\,df(x)=f(b)\,\varphi(b)-f(a)\,\varphi(a).$$

В частности, если функция $f(x)$ имеет интегрируемую точную производную, а $\varphi(x)$ непрерывна, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,d\varphi(x)=\Big[f(x)\,\varphi(x)\Big]_a^b-\int\limits_a^b \varphi(x)\,f'(x)\,dx,$$

причем интеграл справа понимается в смысле Римана.

Замена переменных в интеграле Стилтьеса возможна при обычных условиях монотонности отображения: *если $x=\psi(t)$ —*

монотонная функция, взаимно однозначно отображающая отрезок $c \leqslant t \leqslant d$ *на отрезок* $a \leqslant x \leqslant b$, *то*

$$\int_a^b f(x)\, d\varphi(x) = \int_c^d f[\psi(t)]\, d\varphi[\psi(t)],$$

причем из существования одного интеграла вытекает существование другого.

Если функция $f(x)$ для $a \leqslant x \leqslant b$ удовлетворяет неравенству $|f(x)| \leqslant M$ и $\varphi(x)$ — функция ограниченной вариации, то для интеграла $\int_a^b f(x)\, d\varphi(x)$, если он существует, имеет место оценка

$$\left|\int_a^b f(x)\, d\varphi(x)\right| \leqslant M \bigvee_a^b(\varphi).$$

При тех же условиях для $\varphi(x)$

$$\left|\int_a^b f(x)\, d\varphi(x)\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, d \bigvee_a^x(\varphi).$$

Вычисление интеграла Стилтьеса с интегрирующей функцией $\varphi(x)$ ограниченной вариации всегда может быть сведено к вычислению интеграла с непрерывной интегрирующей функцией ограниченной вариации. В самом деле, в силу свойства е) п. 3 § 3 для функции $\varphi(x)$ с ограниченной вариацией возможно представление $\varphi(x) = \psi(x) + s(x)$, где $\psi(x)$ непрерывна и имеет ограниченную вариацию, а $s(x)$ — функция скачков. Поэтому *интеграл Стильтьеса допускает следующее каноническое представление*

$$\int_a^b f(x)\, d\varphi(x) = \int_a^b f(x)\, d\psi(x) + f(a)[\varphi(a+0) - \varphi(a)] + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k)[\varphi(x_k+0) - \varphi(x_k-0)] + f(b)[\varphi(b) - \varphi(b-0)],$$

где $\psi(x)$ — непрерывная функция, а $\{x_k\}$ — точки скачка функции $\varphi(x)$. Существование интеграла слева гарантирует сходимость ряда справа.

3. Рассмотрим ограниченную измеримую функцию $f(x)$, определенную на измеримом множестве $E \subset [a, b]$. Выберем отрезок $[A, B]$ так, чтобы

$$f(E) \subset (A, B),$$

и разобьем его на n частей точками $A = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots \ldots < y_n = B$. Определим множества E_k, на которых функция $f(x)$ принимает значения, заключенные между y_{k-1} и y_k,

$$E_k = E\{y_{k-1} \leqslant f(x) < y_k\}.$$

Ясно, что все множества E_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) измеримы и попарно не пересекаются. Кроме того,

$$E = \sum_{k=1}^{n} E_k, \quad mE = \sum_{k=1}^{n} mE_k.$$

Теперь можно построить суммы

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} mE_k, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} y_k mE_k,$$

которые мы будем называть соответственно *нижней* и *верхней суммами Лебега.* Если число n неограниченно возрастает, причем максимум длины участков $[y_{k-1}, y_k)$ стремится к нулю, то *верхние и нижние суммы Лебега стремятся к общему пределу, который и называют интегралом Лебега от функции $f(x)$ по множеству E.* Этот предел не зависит ни от выбора отрезка $[A, B]$, ни от способа его разбиений.

На рис. 7 заштрихованы прямоугольники, вместе составляющие одно из слагаемых нижней суммы Лебега для случая, когда множество E совпадает с отрезком $[a, b]$. Множество E_k состоит здесь из нескольких отрезков.

Интеграл Лебега от функции $f(x)$ по множеству E обозначают через $\int\limits_E f(x)\,dx$, если же множество E совпадает с отрезком $[a, b]$, то через $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Иногда для того чтобы подчеркнуть, что речь идет об интеграле Лебега, перед интегралом ставят знак (L).

Функции, интегрируемые в смысле Лебега, мы будем называть *суммируемыми.* Впрочем, как уже было отмечено выше, *каждая измеримая ограниченная функция суммируема.*

Интеграл Лебега обладает естественными свойствами, общими с интегралом Римана.

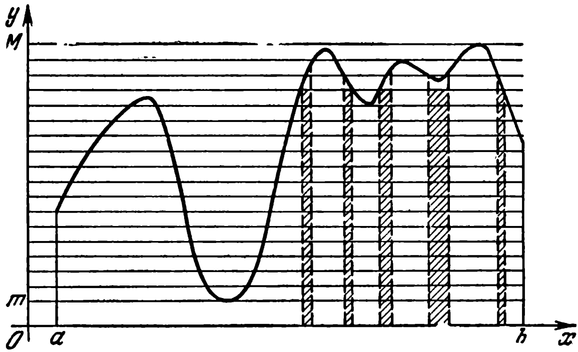

Рис. 7.

а) Теорема о среднем. *Если измеримая функция $f(x)$ на измеримом множестве E удовлетворяет неравенствам $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то*

$$m \cdot mE \leqslant \int_E f(x)\,dx \leqslant M \cdot mE.$$

б) Теорема о полной аддитивности. *Если измеримое множество E разбито на сумму конечного или счетного множества попарно не пересекающихся измеримых множеств E_k $(k = 1, 2, \ldots)$ и $f(x)$ — измеримая ограниченная функция, заданная на E, то*

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_k \int_{E_k} f(x)\,dx.$$

Из этих теорем следует, что

$$\int_E c\,dx = cmE;$$

если $f(x) \geqslant 0$ на E, то

$$\int_E f(x)\,dx \geqslant 0;$$

если $mE = 0$, *то для любой ограниченной функции*

$$\int_E f(x)\,dx = 0;$$

если функции $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *почти всюду на* E *совпадают (эквивалентны), то*

$$\int_E f(x)\,dx = \int_E \varphi(x)\,dx;$$

если $f(x) \geqslant 0$ *на* E *и* $\int_E f(x)\,dx = 0$, *то* $f(x) \equiv 0$ *почти всюду на* E.

в) *Если на измеримом множестве* E *заданы измеримые ограниченные функции* $f(x)$ *и* $\varphi(x)$, *то*

$$\int_E [f(x) \pm \varphi(x)]\,dx = \int_E f(x)\,dx \pm \int_E \varphi(x)\,dx;$$

$$\int_E cf(x)\,dx = c\int_E f(x)\,dx \quad (c \text{ — постоянная});$$

если $f(x) \geqslant \varphi(x)$ *на множестве* E, *то*

$$\int_E f(x)\,dx \geqslant \int_E \varphi(x)\,dx.$$

г) *Если функция* $f(x)$ *измерима и ограничена на множестве* E, *то*

$$\left|\int_E f(x)\,dx\right| \leqslant \int_E |f(x)|\,dx.$$

Интеграл Лебега представляет собой обобщение интеграла Римана: *если функция* $f(x)$ *интегрируема в смысле Римана по отрезку* $[a, b]$, *то она интегрируема также и в смысле Лебега и интегралы совпадают.* Это утверждение делает излишним в большинстве случаев различение обозначений для интегралов Римана и Лебега, т. е. употребление специальных знаков (R) или (L). С другой стороны, *существуют суммируемые на* $[a, b]$ *функции, не интегрируемые в смысле Римана.* В качестве примера можно указать на приведенную в § 3, п. 1 функцию Дирихле. Как было показано в п. 1, интеграл Римана для этой функции не существует. Тем не менее она является суммируемой, ибо она равна нулю почти всюду, так что интеграл Лебега от этой функции существует и равен нулю.

Различие между процессами интегрирования Римана и Лебега можно образно пояснить принадлежащим Лебегу следующим примером. Пусть требуется подсчитать стоимость лежащей на столе кучи монет различного достоинства. Тогда процесс «интегрирования Римана» состоит в том, что из кучи монет мы выбираем подряд по одной в том порядке, в каком они лежат, и складываем их стоимости. Процесс же «интегрирования Лебега» состоит в том, что монеты предварительно рассортировываются в соответствии с их стоимостью и каждая из возможных стоимостей умножается на количество соответствующих монет.

4. Интеграл Лебега может быть определен также и для функций неограниченных. Рассмотрим сначала *неотрицательную* измеримую функцию $f(x)$, определенную на измеримом множестве E. Пусть N — некоторое натуральное число. Определим функцию $f_N(x)$ следующим образом:

$$f_N(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } f(x)\leqslant N, \\ N, & \text{если } f(x)>N. \end{cases}$$

Функцию $f_N(x)$ иногда называют *срезкой* функции $f(x)$ числом N.

Функция $f_N(x)$ измерима и ограничена на E и потому интегрируема в смысле Лебега. Кроме того, последовательность интегралов от срезок $\left\{\int\limits_E f_N(x)\,dx\right\}$ $(N=1,\ 2,\ \ldots)$ монотонно возрастает, так что существует конечный или равный $+\infty$ предел

$$\lim_{N\to+\infty}\int\limits_E f_N(x)\,dx.$$

Этот предел называют *интегралом Лебега неотрицательной функции $f(x)$ по множеству E и обозначают символом* $\int\limits_E f(x)\,dx$. Если этот интеграл *конечен*, то функцию $f(x)$ называют *интегрируемой по Лебегу* или *суммируемой* на множестве E.

Из определения легко следует, что

функция, суммируемая на множестве E, почти всюду конечна на нем;

если $mE=0$, *то любая неотрицательная функция суммируема на* E *и ее интеграл по множеству* E *равен нулю;*

если $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ — *неотрицательные измеримые функции на* E *и* $f(x) \geqslant \varphi(x)$, *то* $\int\limits_E f(x)\,dx \geqslant \int\limits_E \varphi(x)\,dx$,

если $f(x)$ *неотрицательна и измерима на* E *и подмножество* $E_1 \subset E$ *измеримо, то*

$$\int\limits_E f(x)\,dx \geqslant \int\limits_{E_1} f(x)\,dx;$$

если $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *эквивалентны на* E, *то*

$\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_E \varphi(x)\,dx$; *если* $\int\limits_E f(x)\,dx = 0$ *и* $f(x)$ *неотрицательна, то* $f(x)=0$ *почти всюду на* E;

если $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ — *неотрицательные измеримые функции на* E *и* $c \geqslant 0$ — *фиксированное число, то*

$$\int\limits_E [f(x)+\varphi(x)]\,dx = \int\limits_E f(x)\,dx + \int\limits_E \varphi(x)\,dx;$$

$$\int\limits_E cf(x)\,dx = c\int\limits_E f(x)\,dx.$$

Важную роль играет в теории интеграла Лебега

Теорема о полной аддитивности. *Пусть измеримое множество* E *представлено в виде суммы конечного или счетного множества попарно не пересекающихся измеримых множеств*

$$E = \sum_k E_k.$$

Тогда для всякой неотрицательной функции $f(x)$, *суммируемой на множестве* E,

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \sum_k \int\limits_{E_k} f(x)\,dx\ ^{*)}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению неограниченных функций, принимающих значения любого знака. Чтобы определить

*) Это равенство надо понимать в следующем смысле: если правая часть принимает конечное значение или $+\infty$, то и левая часть принимает то же значение или $+\infty$, и наоборот.

интеграл от такой функции $f(x)$, определенной и измеримой на измеримом множестве E, введем функции $f^+(x)$ и $f^-(x)$, положив

$$f^+(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } f(x)\geqslant 0,\\ 0, & \text{если } f(x)<0;\end{cases}$$

$$f^-(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } f(x)\geqslant 0,\\ -f(x), & \text{если } f(x)<0.\end{cases}$$

Обе функции, $f^+(x)$ и $f^-(x)$, измеримы и неотрицательны, причем

$$f(x)=f^+(x)-f^-(x).$$

Естественно называть интегралом от функции $f(x)$ разность $\int\limits_E f^+(x)\,dx-\int\limits_E f^-(x)\,dx$. Эта разность, однако, не будет иметь смысла в том случае, когда оба входящих в нее интеграла бесконечны. Поэтому мы называем эту разность интегралом от неограниченной функции $f(x)$ лишь в том случае, когда хотя бы один из интегралов $\int\limits_E f^+(x)\,dx$ и $\int\limits_E f^-(x)\,dx$ конечен, т. е. хотя бы одна из функций $f^+(x)$ и $f^-(x)$ суммируема. При этом $\int\limits_E f(x)\,dx$ может принимать как конечное значение, так и значение $+\infty$ или $-\infty$. Если обе функции, $f^+(x)$ и $f^-(x)$, суммируемы, то функция $f(x)$ называется *суммируемой* (*интегрируемой в смысле Лебега*) и интеграл от нее полагается равным

$$\int\limits_E f(x)\,dx=\int\limits_E f^+(x)\,dx-\int\limits_E f^-(x)\,dx.$$

Измеримая функция $f(x)$ суммируема тогда и только тогда, когда суммируема функция $|f(x)|$. При этом

$$\left|\int\limits_E f(x)\,dx\right|\leqslant\int\limits_E |f(x)|\,dx.$$

Большинство свойств интеграла, справедливых для ограниченных или неотрицательных неограниченных функций, переносится и на общий случай. Так, например,

суммируемая функция почти всюду конечна;

функция, суммируемая на множестве E, суммируема и на всяком измеримом его подмножестве;

на множестве меры нуль любая функция суммируема и интеграл ее равен нулю;

если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ измеримы на множестве E и $|\varphi(x)| \leqslant f(x)$, то из суммируемости $f(x)$ вытекает суммируемость $\varphi(x)$;

если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ эквивалентны на множестве E, то они одновременно суммируемы или нет; в случае суммируемости их интегралы по E равны между собой.

Для случая произвольной суммируемой функции полная аддитивность интеграла Лебега в такой общей форме, как это было сформулировано для ограниченных или неотрицательных функций, не имеет места. Здесь верна только

Теорема о конечной аддитивности интеграла. *Если множество E представляется в виде суммы конечного числа попарно не пересекающихся измеримых множеств, $E = \sum_{k=1}^{n} E_k$, и функция $f(x)$ суммируема на каждом из множеств E_k, то она суммируема также и на E и*

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} f(x)\,dx.$$

Тем не менее возможны также теоремы о полной аддитивности интеграла Лебега, однако здесь требуются уже некоторые дополнительные ограничения. Полная аддитивность имеет место, например, в следующих случаях.

а) *Если функция $f(x)$ суммируема на множестве E, которое представляется в виде суммы счетного множества попарно не пересекающихся измеримых множеств, $E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$, то*

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{E_k} f(x)\,dx.$$

б) *Пусть множество E представлено в виде суммы счетного множества попарно не пересекающихся изме-*

римых множеств, $E=\sum_{k=1}^{\infty}E_k$, *и функция* $f(x)$ *суммируема на каждом* E_k. *Тогда если* $\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}|f(x)|\,dx<+\infty$, *то* $f(x)$ *суммируема на* E *и справедливо равенство*

$$\int_E f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_{E_k}f(x)\,dx.$$

Для суммируемых функций справедливы также следующие два свойства:

Если $f(x)$ *суммируема на* E *и* k — *постоянная, то функция* $kf(x)$ *суммируема на* E *и*

$$\int_E kf(x)\,dx=k\int_E f(x)dx.$$

Если $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *суммируемы на* E, *то их сумма и разность также суммируемы на* E *и*

$$\int_E[f(x)\pm\varphi(x)]\,dx=\int_E f(x)\,dx\pm\int_E\varphi(x)\,dx.$$

Особую роль для дальнейшего играет свойство *абсолютной непрерывности* интеграла Лебега, которое устанавливается следующей теоремой.

Теорема об абсолютной непрерывности интеграла Лебега. *Пусть функция* $f(x)$ *суммируема на измеримом множестве* E. *Тогда для всякого* $\varepsilon>0$ *найдется такое* $\delta>0$, *что для всех множеств* $e\subset E$ *с* $me<\delta$ *будем иметь*

$$\left|\int_E f(x)\,dx\right|<\varepsilon.$$

5. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана суммируемая функция $f(x)$. *Неопределенным интегралом Лебега* функции $f(x)$ называют всякую функцию

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt+C,$$

где C — любая постоянная, а интеграл берется в смысле Лебега. *Неопределенный интеграл Лебега есть абсолютно* *непрерывная функция*, что легко следует из теоремы об абсолютной непрерывности интеграла, приведенной в п. 4. В силу теорем п. 2 § 4 неопределенный интеграл Лебега имеет почти всюду конечную производную, которая суммируема. Более того, *производная неопределенного интеграла Лебега* $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ *почти в каждой точке* $x\in[a, b]$ *равна функции* $f(x)$.

С другой стороны, *всякая абсолютно непрерывная функция является неопределенным интегралом Лебега от своей производной*, т. е. для абсолютно непрерывной функции справедлива *формула Ньютона — Лейбница*

$$\int\limits_a^x f'(t)\,dt=f(x)-f(a).$$

Заметим, что эта формула может оказаться неверной даже для случая точной производной $f'(x)$, так как точная производная не обязательно является суммируемой функцией. Так, для функции

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2} & \text{при} \quad x>0, \\ 0 & \text{при} \quad x=0 \end{cases}$$

точная производная существует, но не суммируема ни на каком отрезке, содержащем точку $x=0$.

Для справедливости формулы Ньютона — Лейбница достаточно наложить на точную производную некоторые дополнительные ограничения. Так, *если производная* $f'(x)$ *существует в каждой точке и ограничена на отрезке, то*

$$\int\limits_a^x f'(t)\,dt=f(x)-f(a).$$

Эта формула справедлива и тогда, когда $f'(x)$ всюду конечна и суммируема. Отсюда, в частности, следует, что она справедлива, когда $f(x)$ есть функция ограниченной вариации и производная ее всюду конечна.

Если же производная существует лишь почти всюду, то, вообще говоря, никакие дополнительные условия на производную не позволяют добиться справедливости формулы

Ньютона—Лейбница для всех x. Действительно, можно построить пример неубывающей непрерывной функции, не равной нулю, производная которой существует и равна нулю почти всюду. Для этого рассмотрим построенное в п. 8 § 1 канторово совершенное множество. Пусть x — точка канторова множества и $x = 0{,}a_1a_2a_3 \ldots$ — ее *троичное* разложение. Как следует из построения, элементы разложения a_1, a_2, ... могут принимать лишь значения 0 и 2. Поэтому

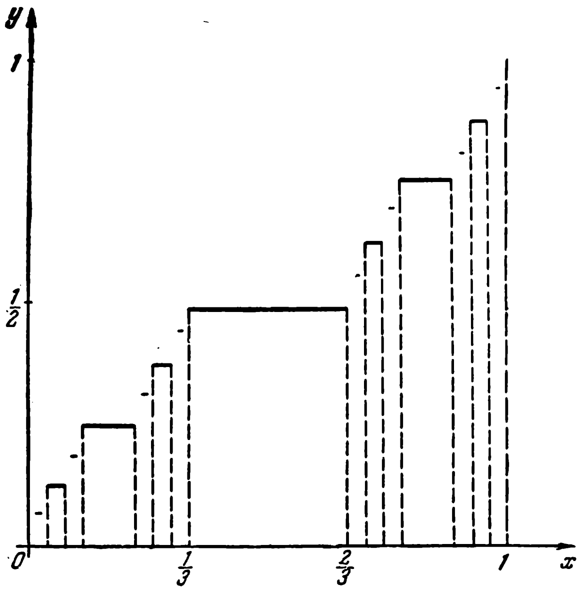

Рис. 8.

можно положить $b_n = \frac{1}{2} a_n$ и определить значение функции с помощью *двоичного* представления $f(x) = 0{,}b_1b_2b_3 \ldots$ Остается определить функцию $f(x)$ в смежных интервалах, где мы полагаем ее постоянной. Последнее возможно, так как значения функции $f(x)$ в концах некоторого смежного интервала представляются двоичными разложениями $0{,}b_1b_2 \ldots b_m\ 0111 \ldots$ и $0{,}b_1b_2 \ldots b_m\ 1000 \ldots$, которые равны одному и тому же числу. График функции $f(x)$ изображен на рис. 8.

Легко проверить, что $f(x)$ — неубывающая и непрерывная функция. Ее производная существует всюду, кроме точек канторова множества, т. е. почти всюду на $[0, 1]$. Однако

$$\int_0^1 f'(t)\,dt \neq f(1) - f(0),$$

потому что $f(1) = 1$, $f(0) = 0$, а $\int_0^1 f'(t)\,dt = 0$, ибо $f'(t) = 0$ почти всюду. Итак, функция $f(t)$ не равна интегралу от своей производной. Отсюда, между прочим, следует, что $f(x)$ не является абсолютно непрерывной функцией.

Интеграл Лебега от производной может быть использован для нахождения полной вариации абсолютно непрерывной функции. Именно, если $f(x)$ суммируема на $[a, b]$ и

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

то

$$\bigvee_a^b (F) = \int_a^b |f(t)|\,dt,$$

т. е. *полная вариация абсолютно непрерывной функции равна интегралу от модуля ее производной.*

Обычные формулы замены переменных и интегрирования по частям для интеграла Лебега справедливы при некоторых дополнительных условиях.

Если $f(x)$ суммируема на отрезке $[a, b]$ и $x = \varphi(t)$ принимает значения лишь из $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt,$$

где $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Эта формула имеет место, например, для случая, *если абсолютно непрерывная функция* $\varphi(t)$ *строго монотонна на* $[\alpha, \beta]$.

Если $f(x)$ абсолютно непрерывна, а $\varphi(x)$ суммируема на $[a, b]$ и $\Phi(x)$ означает неопределенный интеграл от $\varphi(x)$, то справедлива *формула интегрирования по частям*

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = [f(x)\Phi(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)\Phi(x)\,dx.$$

6. Если функция $\varphi(x)$ обращается в нуль вне отрезка $[a, b]$ вместе со своей первообразной $\Phi(x)$ (включая концы отрезка), а функция $f(x)$ дифференцируема, то проинтегрированный член исчезает и формула интегрирования по частям приобретает вид

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = -\int_a^b f'(x)\Phi(x)\,dx$$

или, иначе,

$$\int_a^b f(x)\Phi'(x)\,dx = -\int_a^b f'(x)\Phi(x)\,dx.$$

Эта формула была положена С. Л. Соболевым в основу определения обобщенной производной, используемой при решении ряда задач математической физики. Именно, функция $\omega(x)$ называется *обобщенной производной в смысле Соболева от* $f(x)$, если для любой функции $\Phi(x)$, бесконечно дифференцируемой и обращающейся в нуль вне некоторого отрезка $[a, b]$, имеет место равенство

$$\int_a^b f(x)\Phi'(x)\,dx = -\int_a^b \omega(x)\Phi(x)\,dx.$$

Подробнее об обобщенном дифференцировании и о других операциях над *обобщенными функциями* см. следующий выпуск *СМБ*.

7. Приведенные выше определения интегралов Римана, Стилтьеса и Лебега являются *конструктивными*, т. е. они указывают действия, которые следует проделать для нахождения этих интегралов.

В противоположность этому *дескриптивное* определение указывает лишь свойства, которыми должен обладать определяемый объект. Так, определение первообразной как функции, производная которой равна данной, дескриптивно. Дескриптивное определение называют также *аксиоматическим*.

Интеграл Лебега от ограниченной измеримой функции можно определить дескриптивно следующим образом.

Поставим в соответствие каждой ограниченной измеримой функции $f(x)$, определенной на каком-либо конечном отрезке $[a, b]$, некоторое конечное число $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, которое мы будем называть интегралом от $f(x)$ по $[a, b]$ и которое обладает следующими свойствами:

1. *Каковы бы ни были a, b и h, имеем*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_{a+h}^{b+h} f(x-h)\,dx.$$

2. *Каковы бы ни были a, b, c, имеем*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx + \int\limits_c^a f(x)\,dx = 0.$$

3.

$$\int\limits_a^b [f(x)+\varphi(x)]\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_a^b \varphi(x)\,dx.$$

4. *Если $f(x) \geqslant 0$ и $b > a$, то*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0.$$

5.

$$\int\limits_0^1 1\,dx = 1.$$

6. *Если с возрастанием n ограниченные измеримые функции $f_n(x)$ стремятся, возрастая, к ограниченной измеримой функции $f(x)$, то интеграл от $f_n(x)$ стремится к интегралу от $f(x)$.*

Ясно, что определенный в п. 3 конструктивно интеграл Лебега обладает указанными шестью *) свойствами. Замеча-

---

*) Выполнение свойств 1—5 следует из теорем пп. 3, 4. Что касается свойства 6, то оно относится к возможности *перехода к пределу под знаком интеграла* и будет подробно рассмотрено в § 6.

тельно, однако, что справедливо и обратное. Именно, как показал Лебег, *если интеграл обладает свойствами* 1—6, *то он может быть получен конструкцией, описанной в* п. 3. Поэтому свойства 1—6 называют *дескриптивным определением интеграла Лебега* *).

Возможность дескриптивного определения интеграла показывает, что интеграл Лебега является, так сказать, наиболее естественным и разумным интегралом для функции одной переменной. Дальнейшие обобщения понятия интеграла, которые приходится рассматривать в связи с той или иной частной задачей, не носят уже такого общего характера.

8. Понятие интеграла допускает обобщение на случай неограниченных множеств. Пусть E — произвольное множество, лежащее на прямой. Обозначим через E_a пересечение множества E с интервалом $(-a, a)$, $E_a = E \cap (-a, a)$. Предположим, что все множества $E_a\ (a > 0)$ измеримы. Функция $f(x)$ называется *суммируемой на* E, если она суммируема на каждом множестве E_a и существует конечный предел $\lim\limits_{a\to\infty} \int\limits_{E_a} |f(x)|\,dx$. Для суммируемой функции полагают

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \lim_{a\to\infty} \int\limits_{E_a} f(x)\,dx.$$

Из этого определения вытекает, что для интеграла по неограниченным множествам сохраняют силу основные свойства интеграла Лебега.

§ 6. Последовательности функций

1. Пусть $\{f_n(x)\}$ — функциональная последовательность, все члены которой определены на одном и том же множестве E. Будем рассматривать в дальнейшем только ограниченные множества E. Говорят, что последовательность *сходится в точке* $x_0 \in E$, если сходится числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$. Точку x_0 называют *точкой сходимости* данной последовательности функций. Множество $E_1 \subset E$ всех

*) Как указал впоследствии Н. Н. Лузин, формулировки аксиом Лебега нуждаются в некоторых уточнениях и дополнительных условиях; тем не менее эти аксиомы и в уточненном виде не выводят за пределы класса суммируемых функций.

точек сходимости назовем *множеством сходимости* последовательности $\{f_n(x)\}$. Если $E_1 = E$, т. е. каждая точка E является точкой сходимости, то говорят, что функциональная последовательность *сходится на E в каждой точке* (или *сходится всюду на E*).

Положив в каждой точке $x_0 \in E_1$

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0),$$

заметим, что заданная функциональная последовательность определяет, таким образом, в каждой точке E_1 *предельную функцию*, к которой сходится последовательность на множестве E_1 (или *в каждой точке E*, если $E_1 = E$).

Если разность $E - E_1$ есть множество меры нуль, то принято говорить, что *последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ почти всюду на E*. Мы пишем

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{почти всюду на } E.$$

Наряду с последовательностью $\{f_n(x)\}$ часто рассматривается *функциональный ряд*

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

или, короче, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Этому ряду ставится в соответствие последовательность его *частичных сумм* $\{s_n(x)\}$, члены которой определяются равенствами

$$s_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ряд называют *сходящимся* в каждой точке или почти всюду, если так ведет себя последовательность его частичных сумм.

Всякую последовательность можно рассматривать как последовательность частичных сумм некоторого ряда. Действительно, для последовательности $\{f_n(x)\}$ таким рядом будет

$$f_1(x) + (f_2(x) - f_1(x)) + \ldots + (f_n(x) - f_{n-1}(x)) + \ldots =$$
$$= f_1(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)).$$

Если последовательность измеримых функций сходится всюду (или *почти всюду*) *на отрезке, то предельная функция также измерима на этом отрезке.* Ясно, что это имеет место также и для ряда.

2. Сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ в каждой точке множества E означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ и всякого $x \in E$ найдется такой номер N, *зависящий от* ε *и от* x, $N = N(\varepsilon, x)$, что для всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Говорят, что последовательность сходится *равномерно*, когда удается для всех $x \in E$ подобрать один и тот же номер N. Более подробно: последовательность $\{f_n(x)\}$ *равномерно сходится к функции* $f(x)$ *на множестве* E, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое N, зависящее только от ε, $N = N(\varepsilon)$, что для всех $n > N$ и $x \in E$ выполняется неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Из равномерной сходимости последовательности на множестве E вытекает ее сходимость в каждой точке этого множества, однако обратное заключение не верно.

Последовательность непрерывных функций, сходящаяся в каждой точке, может иметь своим пределом разрывную функцию. Так, последовательность $\{x^n\}$ сходится в каждой точке отрезка $[0, 1]$ к функции

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \leqslant x < 1, \\ 1 \text{ при } x = 1, \end{cases}$$

разрывной при $x = 1$. Однако *если последовательность непрерывных функций* $\{f_n(x)\}$ *равномерно сходится на множестве* E, *то предельная функция* $f(x)$ *непрерывна на* E.

Большой интерес представляет следующий вопрос. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ на множестве E. Справедливо ли при этом равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx?$$

Если равенство справедливо, то говорят, что *допуст́им предельный переход под знаком интеграла.* Интеграл можно понимать в различных смыслах.

Для интеграла Римана при сходимости последовательности в каждой точке отрезка предельный переход допуст́им не всегда, ибо предельная функция может оказаться неинтегрируемой. Тем не менее *если последовательность* $\{f_n(x)\}$ *функций, интегрируемых по Риману на отрезке* $[a, b]$, *равномерно сходится, то предельная функция* $f(x)$ *также интегрируема по Риману и возможен предельный переход под знаком интеграла.* Аналогичное утверждение справедливо и для интеграла Лебега, но для него верна и гораздо более общая теорема, о чем речь будет ниже.

Иначе обстоит дело с дифференцированием последовательности. *Пусть* $\{f_n(x)\}$ — *последовательность функций, дифференцируемых на отрезке* $[a, b]$, сходящаяся хотя бы в одной точке отрезка. Тогда *если последовательность производных* $\{f'_n(x)\}$ *равномерно сходится на* $[a, b]$ *к функции* $\varphi(x)$, *то первоначальная последовательность равномерно сходится на* $[a, b]$ *к дифференцируемой функции, производная которой равна* $\varphi(x)$.

Равномерной сходимости самой последовательности дифференцируемых функций не достаточно для того, чтобы предельная функция была дифференцируемой. На этом обычно основываются примеры непрерывных функций, не имеющих производной (см. п. 1 § 4), первый из которых был построен К. Вейерштрассом. Приведем один из таких примеров:

Пример Ван-дер-Вардена. Определим для каждого $n = 1, 2, \ldots$ и для любого $x \in [0, 1]$ функцию $u_n(x)$ как расстояние от точки x до ближайшей к ней точки вида $\frac{m}{4^n}$, где m — целое число (участок графиков функций $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$, $u_4(x)$ см. на рис. 9). Ясно, что каждая из функций $u_n(x)$ непрерывна. Пусть теперь $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Этот ряд сходится равномерно, так как всюду на $[0, 1]$ справедливо неравенство $|u_n(x)| < \frac{1}{4^n}$. Поэтому функция $f(x)$ также непрерывна. Вместе с тем она не имеет производной ни в одной внутренней точке интервала $(0, 1)$.

Действительно, пусть $x = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{4^k}$ — точка интервала. Определим последовательность $\{x_k\}$, сходящуюся к x,

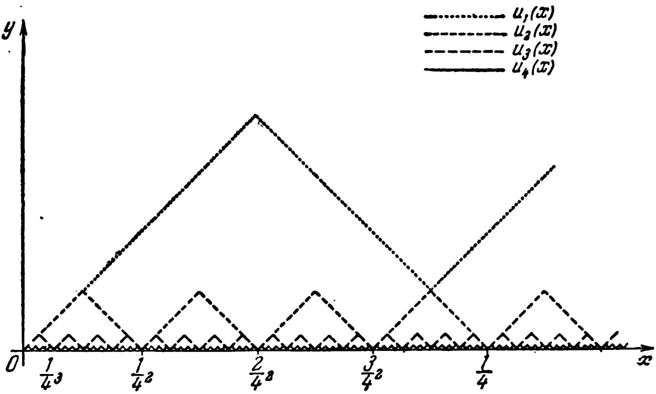

Рис. 9.

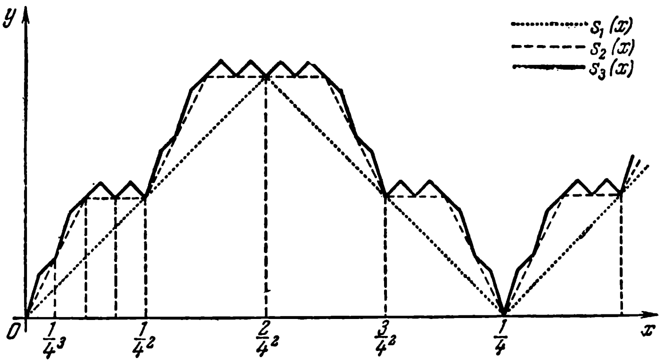

Рис. 10.

положив $x_k = x + (-1)^{a_k} \frac{1}{4^k}$. Если теперь $k > n$, то точки x и x_k имеют общую ближайшую точку вида $\frac{m}{4^n}$ и находятся по одну сторону от нее. Отсюда следует, что в этом случае $u_n(x_k) - u_n(x) = \pm (x_k - x)$. Если же $k \leqslant n$, то

$u_n(x_k) - u_n(x) = 0$. Поэтому при фиксированном k

$$f(x_k) - f(x) = \sum_{n=1}^{k-1} \pm (x_k - x) = p(x_k - x),$$

где p есть целое число, четное или нечетное вместе с $k-1$. Таким образом, разностное отношение $\frac{f(x_k)-f(x)}{x_k - x}$ при $k \to \infty$ не может иметь предела, так что функция $f(x)$ не дифференцируема. На рис. 10 показан участок графика нескольких частичных сумм ряда, определяющего функцию $f(x)$.

3. Из того, что последовательность непрерывных функций сходится к непрерывной функции, не следует, что сходимость равномерна. Это заключение возможно лишь при некоторых дополнительных предположениях. Например, *если последовательность непрерывных функций сходится к непрерывному пределу, возрастая, то сходимость равномерна.*

Следующая теорема показывает, что в некотором смысле равномерная сходимость имеет место в любом случае.

Теорема Д. Ф. Егорова. *Пусть последовательность измеримых и почти всюду конечных функций $\{f_n(x)\}$ сходится почти всюду на отрезке $[a, b]$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существует множество $E \subset [a, b]$, мера которого $mE > b - a - \varepsilon$ и на котором последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно.*

Теорема Егорова находит широкое применение в теории функций и вместе с теоремой Лузина о C-свойстве (п. 5 § 3) составляет содержание центральных положений теории функций: *с точностью до множества как угодно малой меры всякая функция непрерывна и всякая сходимость равномерна.*

Возможность представления функции с помощью ряда полиномов устанавливается следующими теоремами.

Теорема К. Вейерштрасса. *Всякая непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ есть сумма ряда полиномов, сходящегося к $f(x)$ абсолютно и равномерно на $[a, b]$.*

Теорема Н. Н. Лузина. *Для всякой функции $f(x)$, измеримой на отрезке $[a, b]$, существует ряд полиномов, абсолютно сходящийся к $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$.*

4. Пусть $\{f_n(x)\}$ — последовательность функций, определенных на множестве $E \subseteq [a, b]$. Говорят, что эта последовательность *сходится в среднем к функции* $f(x)$, если

$$\int_E [f_n(x) - f(x)]^2 \, dx \to 0 \qquad (n \to \infty),$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. Иногда говорят также более точно о *сходимости в среднем квадратическом.*

Последовательность $f(x)$ называют *сходящейся в среднем p-й* степени ($p > 0$) к функции $f(x)$, если

$$\int_E |f_n(x) - f(x)|^p \, dx \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

Чаще всего используется случай $p \geqslant 1$.

Имеет место следующая

Теорема А. Лебега. *Пусть на измеримом множестве E задана последовательность $\{f_n(x)\}$ измеримых и почти всюду конечных функций, которая сходится почти всюду на E к функции $f(x)$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ справедливо соотношение*

$$\lim_{n \to \infty} mE\{|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} = 0.$$

Эта теорема дает повод ввести следующее определение. Пусть задана последовательность функций $\{f_n(x)\}$, измеримых и почти всюду конечных на измеримом множестве E. Говорят, что она *сходится по мере на множестве E к функции* $f(x)$, если

$$\lim_{n \to \infty} mE\{|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\} = 0$$

для любого $\varepsilon > 0$. Тогда приведенную выше теорему Лебега можно формулировать так: *последовательность, сходящаяся почти всюду, сходится по мере к той же предельной функции.* Очевидно, что любую функцию, совпадающую с $f(x)$ почти всюду, также можно считать *предельной функцией в смысле сходимости по мере* для данной последовательности $\{f_n(x)\}$.

Теорема Лебега не допускает обращения, т. е. из сходимости последовательности по мере не следует ее сходимость почти всюду. Более того, *последовательность может сходиться по мере, не имея ни одной точки сходимости.* Чтобы убедиться в существовании такой последовательности, достаточно рассмотреть следующий пример. Определим для каждого натурального k группу функций $f_1^{(k)}(x), f_2^{(k)}(x), \ldots, f_k^{(k)}(x)$, полагая

$$f_i^{(k)}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right], \\ 0 \text{ вне этого отрезка.} \end{cases}$$

Занумеровав подряд все построенные функции, получим последовательность $\{\varphi_n(x)\}$, которая *сходится по мере* к функции, тождественно равной нулю на $[0, 1]$.

В самом деле, пусть $\varphi_n(x) = f_i^{(k)}(x)$. Достаточно рассмотреть случай $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$. Тогда

$$E\{|\varphi_n(x)| \geqslant \varepsilon\} = \left[\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}\right],$$

так что $mE\{|\varphi_n(x)| \geqslant \varepsilon\} = \frac{1}{k} \to 0$ при $n \to \infty$. Вместе с тем эта последовательность не сходится ни в одной точке, ибо для всякого $x_0 \in [0, 1]$ и любого $k > 2$ найдутся такие i_1 и i_2, что

$$x_0 \in \left[\frac{i_1-1}{k}, \frac{i_1}{k}\right], \quad x_0 \overline{\in} \left[\frac{i_2-1}{k}, \frac{i_2}{k}\right],$$

вследствие чего $f_{i_1}^{(k)}(x_0) = 1$, $f_{i_2}^{(k)}(x_0) = 0$. Таким образом, в каждой точке x_0 функции последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ бесконечно много раз принимают как значение 1, так и значение 0, поэтому последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ *расходится в каждой точке* $[0, 1]$.

Заключение от сходимости по мере к сходимости почти всюду все же возможно сделать, однако в следующей узкой форме: *если последовательность* $\{f_n(x)\}$ *сходится по мере к функции* $f(x)$ *на множестве* E, *то из нее можно выбрать подпоследовательность*

$$f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), f_{n_3}(x), \ldots \qquad (n_1 < n_2 < n_3 < \ldots),$$

сходящуюся к $f(x)$ *почти всюду на* E.

Последовательность функций, сходящаяся в среднем p-й степени ($p>0$), *сходится по мере к этой же функции.* Поэтому *у последовательности, сходящейся в среднем, также существует подпоследовательность, сходящаяся почти всюду.* Однако, как и выше, сама *последовательность, сходящаяся в среднем, может оказаться расходящейся в каждой точке.* Точно так же *из сходимости по мере не вытекает сходимость в среднем,* как и *сходимость в каждой точке не влечет за собой сходимости в среднем.*

Подтверждением последнего является последовательность $\{f_n(x)\}$, определенная на $[0, 1]$ посредством равенств

$$f_n(x)=\begin{cases} n \text{ при } 0<x<\frac{1}{n}, \\ 0 \text{ в остальных точках } [0, 1]. \end{cases}$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$ для любого $x\in[0, 1]$, так что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к нулю в каждой точке. Однако

$$\int_0^1 f_n^2(x)\,dx=\int_0^{\frac{1}{n}} n^2dx=n\to\infty,$$

следовательно, сходимость в среднем не имеет места.

5. Рассмотрим теперь условия, при которых возможен переход к пределу под знаком интеграла в интеграле Лебега. Как и в интеграле Римана (см. п. 2), для допустимости перехода к пределу под знаком интеграла сходимость в каждой точке не является достаточным условием даже в том случае, когда предельная функция интегрируема. В этом легко убедиться, рассмотрев предыдущий пример. Действительно, при любом $x\in[0, 1]$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=0$. С другой стороны,

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx=1,$$

и этот интеграл не стремится к нулю.

Для ограниченных функций имеет место следующая теорема.

Пусть на измеримом множестве E задана последовательность $\{f_n(x)\}$ ограниченных измеримых функций, сходящаяся на E по мере к измеримой ограниченной функции $f(x)$. Если последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно ограничена, т. е. существует такая постоянная M, что при всех n и при всех x выполняется неравенство $|f_n(x)| < M$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx.$$

Более сильным является следующее утверждение.

Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ суммируемых функций сходится по мере на множестве E к суммируемой функции $f(x)$. Если все функции последовательности мажорируются некоторой суммируемой функцией, т. е. существует такая суммируемая функция $\varphi(x)$, что для всех n и всех $x \in E$ справедливо неравенство $|f_n(x)| \leqslant \varphi(x)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n(x)\,dx = \int_E f(x)\,dx.$$

Как уже отмечалось, последовательность, сходящаяся почти всюду, сходится и по мере. Поэтому обе сформулированные выше теоремы остаются в силе, если в них заменить сходимость по мере сходимостью почти всюду.

§ 7. Ортогональные системы функций

1. Мы ограничимся рассмотрением лишь измеримых функций $f(x)$, определенных на отрезке $[a, b]$, квадрат которых суммируем на этом отрезке, т. е. интеграл Лебега $\int_a^b [f(x)]^2\,dx$ существует и конечен. Множество всех таких функций принято обозначать $L^2_{[a,b]}$, или просто L^2 *).

Систему функций $\{\varphi_n(x)\}$, принадлежащих L^2, называют *ортогональной* на отрезке $[a, b]$, если

$$\int_a^b \varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx = 0 \qquad (m \neq n).$$

*) Подробнее см. § 9.

Обычно рассматриваются *нормированные* системы, функции которых обладают свойством $\int\limits_a^b [\varphi_n(x)]^2 dx = 1$. Если система $\{\varphi_n(x)\}$ ортогональна и нормирована, то ее коротко называют *ортонормированной системой*. Таким образом, ортонормированная система определяется соотношениями

$$\int\limits_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(x)\,dx = \delta_{m,n} = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ 1, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

Символ $\delta_{m,n}$ носит наименование *символа Кронекера*.

Ортонормированная система функций в L^2 не более чем счетна.

Система функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется *полной* относительно L^2, если из соотношений $f \in L^2$ и

$$\int\limits_a^b \varphi_n(x) f(x)\,dx = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

следует $f(x) \equiv 0$ почти всюду, т. е. если в L^2 не существует функции, ортогональной всем функциям данной системы, кроме равных нулю почти всюду.

Система функций $\{\varphi_n(x)\}$ *замкнута* относительно L^2, если любую функцию $f(x)$ с суммируемым квадратом можно приблизить в среднем линейной комбинацией функций системы с любой степенью точности. Более точно: для каждой функции $f(x) \in L^2$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется n функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ нашей системы и такие действительные числа $c_1, \ldots, c_n$, что

$$\int\limits_a^b [f(x) - c_1\varphi_1(x) - \ldots - c_n\varphi_n(x)]^2 dx < \varepsilon^2.$$

Понятия полноты и замкнутости в L^2 эквивалентны, т. е. всякая замкнутая система полна, а всякая полная система замкнута. Полная или замкнутая система всегда бесконечна, поэтому *полная* (замкнутая) *ортонормированная система всегда бесконечна, но счетна.*

Если система полна или замкнута на отрезке $[a, b]$, то она сохраняет это свойство и для всякого внутреннего отрезка. *Каждую ортонормированную на $[a, b]$ систему можно* *расширить до полной ортонормированной системы присоединением подходящих функций.*

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная система функций. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x),$$

где a_n — любые постоянные, называют *ортогональным рядом.* Если этот ряд равномерно сходится на отрезке $[a, b]$ к функции $f(x)$, то коэффициенты a_n ряда легко определить непосредственно. Умножив обе части равенства

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

на $\varphi_k(x)$ и проинтегрировав затем по отрезку $[a, b]$, найдем

$$\int_a^b f(x)\varphi_k(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_k(x)\,dx = a_k.$$

Коэффициенты, полученные по этим формулам, называют *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$ по ортонормированной системе $\{\varphi_n(x)\}$. Если все коэффициенты ортогонального ряда являются коэффициентами Фурье функции $f(x)$, то ряд называют *разложением* или *рядом Фурье* функции $f(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$. Выше показано, что *если ортогональный ряд равномерно сходится к функции $f(x)$, то он является рядом Фурье этой функции.* Нетрудно доказать справедливость этого утверждения также и для случая *сходимости в среднем.*

Определение ряда Фурье существенно зависит от того, в каком смысле производится интегрирование. В связи с этим рассматриваются ряды Фурье — Римана, Фурье — Стилтьеса, Фурье — Лебега и т. д.

Если система $\{\varphi_n(x)\}$ не нормирована, то выражение для коэффициентов Фурье несколько изменится. Именно, если $\int_a^b [\varphi_n(x)]^2\,dx = \lambda_n > 0$, то система $\{\psi_n(x)\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\varphi_n(x)\right\}$ уже нормирована. Пусть b_k означает k-й коэффициент функции $f(x)$ по системе $\{\psi_n(x)\}$. Тогда

$$b_k = \int_a^b f(x)\psi_k(x)\,dx = \int_a^b f(x)\frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}}\,dx = \frac{a_k}{\sqrt{\lambda_k}},$$

где мы по-прежнему полагаем $a_k = \int\limits_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx$. Разложение функции $f(x)$ по системе $\{\psi_n(x)\}$ дает

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k\psi_k(x) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{\sqrt{\lambda_k}}\,\frac{\varphi_k(x)}{\sqrt{\lambda_k}} \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k\varphi_k(x)}{\lambda_k},$$

откуда видно, что коэффициенты Фурье по системе $\{\varphi_n(x)\}$, которая не является нормированной, равны $\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_a^b f(x)\,\varphi_k(x)\,dx$. Эта формула могла быть получена и непосредственным интегрированием.

2. Коэффициенты Фурье могут быть получены при решении задачи *наилучшей аппроксимации в среднем.* Пусть на $[a, b]$ определена функция $f(x) \in L^2$ и $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная система функций из L^2. Положим $s_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k\varphi_k(x)$ и поставим задачу подобрать при постоянном n коэффициенты ξ_k так, чтобы интеграл

$$\int\limits_a^b [f(x) - s_n(x)]^2\,dx$$

был минимальным. *Решением этой задачи является частичная сумма ряда Фурье,* т. е. приближение в среднем будет наилучшим, когда коэффициенты ξ_k равны соответствующим коэффициентам Фурье.

Для любой функции $f(x) \in L^2$ справедливо *неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \leqslant \int\limits_a^b [f(x)]^2\,dx,$$

где $\{a_k\}$ означает коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$. Отсюда следует, что *для функции с суммируемым квадратом ряд из квадратов коэффициентов Фурье сходится.* В частности, *коэффициенты Фурье стремятся к нулю.*

Ортогональный ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$ *сходится в среднем тогда и только тогда, когда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$.

Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — ортонормированная система, полная относительно L^2 и $f(x) \in L^2$. Тогда *ряд Фурье функции* $f(x)$ *по системе* $\{\varphi_n(x)\}$ *сходится в среднем к функции* $f(x)$. Для полной системы справедливо также *равенство Парсеваля*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \int_a^b [f(x)]^2\,dx.$$

Теорема Ф. Рисса — Е. Фишера. *Если система* $\{\varphi_n(x)\}$ *ортонормирована, а* $\{a_i\}$ — *последовательность чисел со сходящейся суммой квадратов, то существует функция* $f(x) \in L^2$, *для которой ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$ *является рядом Фурье по системе* $\{\varphi_n(x)\}$.

Подобная функция определяется единственным образом с точностью до ее значений на множестве меры нуль тогда и только тогда, когда $\{\varphi_n(x)\}$ — полная.

Следующая теорема дает достаточное условие сходимости почти всюду ортогонального ряда в общем случае.

Теорема Д. Е. Меньшова — Г. Радемахера. *Пусть* $\{\varphi_n(x)\}$ — *ортонормированная система из* L^2 *на* $[a, b]$ *и* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \ln^2 n < \infty$. *Тогда ортогональный ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x)$ *сходится почти всюду на* $[a, b]$.

Для некоторых ортогональных систем справедливы и более сильные утверждения. Например, имеют место следующие теоремы.

Теорема А. Н. Колмогорова — Г. А. Селиверстова — А. И. Плесснера. *Если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \ln n$ *сходится, то тригонометрический ряд* $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ *сходится почти всюду*.

Теорема Г. Радемахера. *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(x)$, *где* $r_i(x)$ — *функции Радемахера* (см. п. 3), *сходится почти всюду на отрезке* $[0, 1]$.

Теорема А. Н. Колмогорова. *Если* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \infty$, *то ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(x)$ *расходится почти всюду на* $[0, 1]$.

3. Наиболее часто встречающимся примером ортогональной системы является *тригонометрическая система*

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \ldots,$$

которая является *полной (замкнутой) ортогональной системой* на отрезке $[0, 2\pi]$ или $[-\pi, \pi]$, а также на любом другом отрезке вида $[\alpha, \alpha + 2\pi]$. Эта система не нормирована, так как $\int_0^{2\pi} 1^2 dx = 2\pi$ и $\int_0^{2\pi} \cos^2 nx\, dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 nx\, dx = \pi$. Поэтому *нормированная тригонометрическая система* имеет вид

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos 2x, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin 2x, \ \ldots$$

Систему

$$1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \ldots,$$

ортогональную на $[-l, l]$ либо на любом отрезке длины $2l$, также называют тригонометрической системой, как и системы

$$\{\cos nx\} \ (n = 0, 1, 2, \ldots) \text{ и } \{\sin nx\} \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Эти последние являются *полными* ортогональными системами на отрезке $[0, \pi]$. Легко видеть, что они ортогональны также и на $[0, 2\pi]$, но здесь они уже перестают быть полными.

Другим примером ортогональной системы на отрезке $[-1, 1]$ является полная система многочленов Лежандра $\{P_n(x)\}$, где

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Для того чтобы сделать ее нормированной, достаточно многочлен $P_n(x)$ умножить на $\sqrt{\frac{2n+1}{2}}$.

Функции Радемахера, образующие ортонормированную систему на отрезке $[0, 1]$, строятся следующим образом. Полагаем $r_0(x) \equiv 1$. Для натурального $k > 0$ разбиваем отрезок $[0, 1]$ на 2^k равных отрезков, на каждом из которых функция $r_k(x)$ принимает попеременно значения $+1$ и -1, а в концах их — значение нуль. Иначе можно сказать, что для точки $x \in [0, 1]$ функция $r_k(x)$ принимает значение $+1$, если на k-м месте двоичного разложения x стоит нуль, и значение -1, если на k-м месте двоичного разложения x стоит единица; если же x допускает два двоичных разложения с различными k-ми цифрами, то $r_k(x) = 0$.

Эта система обладает интересным свойством *мультипликативности: если $j \leqslant k \leqslant l \leqslant \ldots \leqslant q$ — натуральные числа и $r_i(x)$ — функции Радемахера, то*

$$\int_0^1 r_j(x) r_k(x) \ldots r_q(x)\, dx = 0,$$

за исключением того случая, когда выражение под знаком интеграла является произведением пар одинаковых сомножителей. В этом случае интеграл равен единице.

Функции Радемахера допускают вероятностное истолкование. Функция $r_1(x)$ равна $+1$ для $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ и -1 для $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$. Если выбирать наудачу точку x, считая вероятность выбора точки, принадлежащей множеству E, равной mE, то вероятности значений $+1$ и -1 для функции $r_1(x)$ одинаковы и равны половине, что соответствует вероятностям выпадания герба и решетки при одном бросании монеты. Аналогично задачу об n бросаниях или любую другую задачу на повторение испытаний с двумя равновероятными исходами можно формулировать с помощью функций $r_n(x)$. В связи с этим все теоремы, относящиеся к функциям Радемахера, могут быть истолкованы в теоретико-вероятностном смысле.

Система Радемахера является неполной системой. Естественным ее пополнением является *система функций Уолша* $\{w_n(x)\}$, которая может быть построена так: пусть число n представляется в виде суммы степеней двойки, $n=\sum\limits_{k=0}^{m} a_k 2^k$, где a_k принимают значения 0 и 1. Положим $w_0(x)\equiv r_0(x)\equiv 1$ и

$$w_n(x)=\prod_{k=0}^{m}[r_{k+1}(x)]^{a_k} \quad n\geqslant 1,$$

где $r_i(x)$ — соответствующие функции Радемахера. В частности,

$$w_1(x)=r_1(x);\ w_2(x)=r_2(x);\ w_3(x)=r_1(x)\,r_2(x);\ \ldots$$
$$\ldots;\ w_7(x)=r_1(x)\,r_2(x)\,r_3(x);\ \ldots$$

Система функций Уолша является *полной ортонормированной системой* на отрезке $[0, 1]$.

4. Пусть система функций $\{\varphi_n(x)\}$ при некоторой фиксированной неотрицательной функции $w(x)$ обладает свойством

$$\int_a^b w(x)\,\varphi_m(x)\,\varphi_n(x)\,dx=\delta_{m,n}.$$

Такую систему принято называть *ортогональной с весом* $w(x)$. Ясно, что при этом система $\{\varphi_n(x)\sqrt{w(x)}\}$ будет ортогональной в обычном смысле. Функцию $w(x)$ называют *весовой функцией*. При $w(x)\equiv 1$ мы приходим к ранее рассмотренному понятию ортогональности.

Системы функций, ортогональных с весом, часто возникают при рассмотрении краевых задач обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Рассмотрим уравнение второго порядка вида

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\lambda A(x)\,y=0,$$

где λ — действительный параметр и $A(x)>0$ — непрерывная функция. *Собственными значениями* уравнения называют такие значения параметра λ, при которых существуют решения, отличные от тождественного нуля и удовлетворяющие граничным условиям $y(a)=y(b)=0$. Функции, удовлетворяющие уравнению при собственных значениях параметра, называются *собственными функциями*. Если $y_i(x)$, $y_k(x)$ — две собственные функции, то

$$\int_a^b A(x)y_i(x)y_k(x)\,dx=0.$$

Таким образом, ***собственные функции образуют систему функций, ортогональную с весом $A(x)$.***

Среди функций, ортогональных с весом, важную роль играют системы многочленов. ***Для каждой весовой функции $w(x)$, суммируемой на отрезке $[a, b]$ и положительной почти всюду на нем, существует система многочленов, ортогональных с весом $w(x)$ на $[a, b]$***, определенная однозначно с точностью до множителей ± 1. Для систем функций, ортогональных с весом $w(x)$, сохраняют силу основные факты, установленные в пп. 1 и 2. При этом вместо функций из L^2 следует рассматривать функции $f(x)$, для которых

$$\int_a^b f^2(x)\,w(x)\,dx<\infty,$$

а коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\varphi_n(x)\}$, ортогональной с весом $w(x)$, определяются равенствами

$$a_n=\int_a^b w(x)f(x)\,\varphi_n(x)\,dx.$$

Наиболее широко используемые системы многочленов, ортогональных с весом, рассмотрены в выпуске *СМБ*, Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби).

5. Пусть $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ — система n функций из L^2, определенных на $[a, b]$. Эта система называется *линейно независимой* на этом отрезке, если никакая линейная комбинация этих функций с отличными от нуля постоянными коэффициентами не может обращаться в нуль почти всюду на $[a, b]$.

Критерий линейной независимости функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ дается следующей теоремой.

Теорема Грама. *Для того чтобы функции $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x)$ были линейно независимы, необходимо и достаточно, чтобы был отличен от нуля определитель матрицы $\|a_{ik}\|$, элементы которой определены формулами*

$$a_{ik}=\int_a^b f_i(x) f_k(x)\,dx \qquad (i,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$$

(определитель Грама).

Обозначим определитель Грама системы $f_1, f_2, \ldots, f_n$ через $G(f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Две системы функций $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ и $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ называются *эквивалентными*, если любая из функций одной системы может быть представлена в виде линейной комбинации функций другой системы. Задача *ортогонализации* системы ставится следующим образом: задана линейно независимая система $f_1(x), \ldots, f_n(x)$; нельзя ли найти эквивалентную ей систему $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$, состоящую из ортогональных функций? Эта задача всегда имеет решение. Ортогонализацию системы $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ можно провести следующим образом. Положим

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(x)=c_{11}f_1(x),\\
&\varphi_2(x)=c_{21}f_1(x)+c_{22}f_2(x),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi_n(x)=c_{n1}f_1(x)+c_{n2}f_2(x)+\ldots+c_{nn}f_n(x),
\end{aligned}$$

так что $c_{ik}=0$ при $k>i$, и последовательно подберем коэффициенты c_{ik} при $k\leqslant i$ так, чтобы функции $\varphi_1(x), \ldots$ $\ldots, \varphi_n(x)$ были ортогональны и нормированы. Коэффициенты $c_{ik}(k\leqslant i)$ выражаются формулами

$$c_{ik}=\frac{1}{\sqrt{G_k G_{k-1}}}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{k-1,\,1} & a_{k-1,\,2} & \ldots & a_{k-1,\,k}\\ f_1(x) & f_2(x) & \ldots & f_k(x)\end{vmatrix},$$

где $G_k=G(f_1, f_2, \ldots, f_k)(k\geqslant 1)$ и $G_0\equiv 1$.

Приведенный процесс носит наименование *процесса ортогонализации Э. Шмидта.*

В ряде случаев представляет интерес ставить задачу ортогонализации иначе. Именно, нужно, имея систему линейно независимых функций $\{f_n(x)\}$, заданных на отрезке $[a, b]$, искать такое продолжение этих функций на больший отрезок, при котором продолженная система оказалась бы ортогональной.

Если $\{f_n(x)\}$ — *произвольная система функций из* L^2, *определенных на отрезке* $[a, b]$, *то функции* $f_n(x)$ *можно так продолжить на отрезок* $[b, c]$, *чтобы полученная система была ортогональна на* $[a, c]$. Если при этом первоначальная система была ортогональной на $[a, b]$, то после продолжения она будет также ортогональна на $[b, c]$.

Полученная в результате ортогонализации система функций может оказаться ненормированной, а ее нормирование умножением на постоянные изменило бы функции $f_n(x)$ на $[a, b]$. Поэтому естествен вопрос о возможности продолжения системы до ортонормированной. Условия возможности такого продолжения даются следующей теоремой.

Теорема И. Шура. *Пусть функции* $\{f_n(x)\}$ *определены на* $[a, b]$, $0<a<b<1$ *и* $f_n(x) \in L^2$. *Для того чтобы на* $[0, 1]$ *существовала ортонормированная система* $[\varphi_n(x)]$, *для которой* $\varphi_n(x) \equiv f_n(x)$ *при* $x \in [a, b]$, *необходимо и достаточно, чтобы максимум интеграла*

$$\int_a^b \Big[\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i f_i(x) \Big]^2 dx$$

при любых различных последовательностях $\{\xi_i\}$, *удовлетворяющих условию* $\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 = 1$, *не превосходил единицы.*

6. В некоторых прикладных вопросах приходится рассматривать системы, ортогональные или ортогональные с весом на бесконечных интервалах $(0, \infty)$ или $(-\infty, \infty)$. Свойства этих систем аналогичны свойствам систем, заданных на конечном интервале. Ортогональность иногда определяется и иначе. Именно, система функций $\{\varphi_n(x)\}$ называется *ортогональной* на $(-\infty, \infty)$, если

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \varphi_m(x)\, \varphi_n(x)\, dx = 0 \qquad (T>0,\ m \neq n).$$

Легко видеть, что для ортогональности в этом смысле достаточно, например, равномерной ограниченности интегралов от произведения функций. В частности, этим свойством обладают системы, состоящие из синусов и косинусов. Так, система $\{\cos \alpha x\}$ $(-\infty < \alpha < \infty)$ ортогональна в этом смысле на $(-\infty, \infty)$, так что в этом случае ортогональная система может оказаться несчетной.

§ 8. Функции нескольких переменных

1. Основные понятия § 1 без труда переносятся на плоские точечные множества или точечные множества в пространстве любого числа измерений. Равным образом сохраняют силу определения операций над этими множествами и обозначения для этих операций.

Определения изолированной и предельной точек множества, замкнутого, совершенного и открытого множеств также остаются в силе, однако термин «окрестность» принимает уже иное значение. Если для линейного множества под окрестностью точки понимался любой содержащий ее интервал, то *ε-окрестностью точки плоского множества* мы будем называть открытый круг радиуса ε с центром в данной точке.

Для удобства переноса этого определения на пространство любого числа измерений дадим алгебраическое определение: *ε-окрестностью точки $M(a, b)$ на плоскости* называется множество точек $\{(x, y)\}$, удовлетворяющих неравенству $(x-a)^2+(y-b)^2<\varepsilon^2$. Аналогично *$\varepsilon$-окрестностью точки $M(a, b, c)$ в пространстве* назовем открытый шар радиуса ε с центром в данной точке, т. е. множество точек $\{(x, y, z)\}$, удовлетворяющих неравенству $(x-a)^2+(y-b)^2+$ $+(z-c)^2<\varepsilon^2$.

Как известно (см. *СМБ*, Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби)), *точкой пространства n измерений* называют упорядоченную систему n действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, называемых ее *координатами*. Множество всех возможных n-мерных точек назовем *эвклидовым пространством n измерений*, если расстояние между точками $x(x_1, \ldots, x_n)$ и $y(y_1, \ldots, y_n)$ определяется по формуле $\rho(x, y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}$. Эвклидово n-мерное пространство принято обозначать буквами E^n или R^n.

В дальнейшем, если явно не оговорено противное, мы будем рассматривать точечные множества в эвклидовом пространстве R^n. Роль отрезков в пространстве R^n играют параллелепипеды, т. е. множества точек $\{M\}$, $M \in R^n$, координаты которых удовлетворяют неравенствам $a_k \leqslant x_k \leqslant b_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$.

Замкнутый (открытый) n-мерный шар радиуса r с центром в точке a определяется как множество точек x, удовлетворяющих условию $\rho(x, a) \leqslant r + 2n$ $(\rho(x, a) < r)$. Соответственно ε-окрестностью точки a называют открытый шар радиуса ε с центром в точке a.

В отличие от линейных множеств *областью* в n-мерном пространстве $(n \geqslant 2)$ называют не любое открытое множество, но открытое и связное множество. При этом *открытое* множество называется *связным*, если любые две его точки можно соединить ломаной, все точки которой принадлежат этому множеству.

Для пространственного открытого множества нельзя определить составляющих интервалов, как для линейного. Справедливо лишь следующее утверждение: *всякое непустое открытое множество есть сумма счетного множества замкнутых параллелепипедов, попарно не имеющих общих внутренних точек.*

2. Переменная величина y называется *функцией точки* пространства R^n или *функцией n переменных* $y = f(M) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенной на множестве $E \subset R^n$, если каждой точке $M (\equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)) \in E$ ставится в соответствие определенное значение y.

Пусть σ — некоторая система множеств пространства R^n. Мы говорим, что *на σ определена функция множества*, если каждому множеству $E \in \sigma$ ставится в соответствие определенное число $\Phi(E)$.

Функция множеств $\Phi(E)$ *аддитивна* на σ, если для любых двух множеств $E_1, E_2 \in \sigma$, не пересекающихся друг с другом, $\Phi(E_1 + E_2) = \Phi(E_1) + \Phi(E_2)$. Очевидно, что если $\Phi(E)$ аддитивна, то для любого конечного числа попарно не пересекающихся множеств $E_1, E_2, \ldots, E_m$ имеет место равенство

$$\Phi\left(\sum_{k=1}^{m} E_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \Phi(E_k).$$

Если это свойство выполняется и для счетного множества попарно не пересекающихся множеств $\{E_k\}$, т. е.

$$\Phi\left(\sum_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi(E_k),$$

то функция множеств $\Phi(E)$ называется *вполне аддитивной*.

Простейшей вполне аддитивной функцией множеств является *объем* (точнее, *n-мерный объем*; для $n=2$ — *площадь*). Для n-мерного параллелепипеда $S \subset R^n$, координаты точек $M \in S$ которого удовлетворяют неравенствам $a_k \leqslant x_k \leqslant b_k$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, где $M \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, *объем определяется равенством*

$$v(S) = \prod_{k=1}^{n} (b_k - a_k).$$

Это определение позволяет приписать объем любому множеству, которое может быть получено из счетного множества параллелепипедов с помощью операций сложения, пересечения и взятия дополнений.

Более общим примером вполне аддитивной функции множества является *мера*. Мера пространственного множества для некоторой системы множеств σ определяется как *неотрицательная вполне аддитивная и монотонная функция множеств*, т. е. такая функция $\mu(E)$, для которой

1) $\mu(E) \geqslant 0$ для любого $E \in \sigma$,

2) $\mu(E_1) \leqslant \mu(E_2)$ при $E_1 \subseteq E_2$ $(E_1, E_2 \in \sigma)$,

3) $\mu\left(\sum_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k)$, если $E_1, E_2, \ldots$ — попарно не пересекающиеся множества из σ.

Наиболее употребительной мерой для пространственных множеств является мера Лебега, которая может быть получена с помощью следующей конструкции. Пусть E — ограниченное точечное множество в R^n, лежащее внутри параллелепипеда S, $E \subseteq S$ и G — открытое множество в S, содержащее E, $S \supseteq G \supseteq E$. Значение объема $v(G)$, определенного с помощью представления G в виде суммы счетного множества замкнутых параллелепипедов, определяется однозначно и не зависит от способа выбора параллелепипедов. Нижнюю грань $\inf v(G)$ для всех множеств G из S, содержащих E, мы будем называть *внешней n-мерной мерой Лебега* множества E и писать

$$m_e E = \inf v(G).$$

Множество E называют *измеримым*, если

$$m_e E + m_e CE = v(S),$$

где CE означает дополнение множества E до параллелепипеда S, $CE = S - E$. Значение внешней меры и называют *n-мерной мерой Лебега измеримого множества E*. Величину

$$m_i E = v(S) - m_e CE$$

называют *внутренней n-мерной мерой Лебега* множества E. Она может быть определена также как верхняя грань объемов замкнутых множеств F, содержащихся в E,

$$m_i E = \sup v(F), \qquad F \subseteq E.$$

Пусть E — плоское множество, состоящее из точек (x, y). *Сечением* множества E прямой $x = x_0$ будем называть линейное множество $E(x_0)$, состоящее из таких чисел y, что точка $(x_0, y) \in E$. Плоская мера E связана с линейной мерой своих сечений. Именно, справедлива следующая теорема:

Пусть E — плоское множество, содержащееся в открытом прямоугольнике $S(a < x < b,\ c < y < d)$. Тогда

а) *почти для всех $x \in (a, b)$ множество $E(x)$ измеримо;*

б) *если Δ означает множество тех $x \in (a, b)$, для которых $E(x)$ измеримо ($m\Delta = b - a$), то функция $mE(x)$ измерима на Δ;*

в) *справедлива формула*

$$mE = \int_{\Delta} mE(x)\, dx,$$

где интеграл следует понимать в смысле Лебега.

Из этой теоремы вытекает, что *если плоское множество E меры нуль, то почти все его сечения суть множества меры нуль.* Наоборот, *если почти все сечения плоского измеримого множества E имеют меру нуль, то и $mE = 0$.*

Эта теорема переносится также на случай множества в пространстве R^n.

Кроме меры Лебега, для пространственных множеств используется иногда k-мерная *мера Хаусдорфа*, которая определяется следующей конструкцией. Пусть E — множество n-мерного пространства R^n, σ — конечная система n-мерных шаров, покрывающих E, диаметры которых не превосходят данного δ, и $\sum_\delta d$ означает сумму диаметров сфер, принадлежащих системе σ. Тогда предел

$$\lim_{\delta \to 0} \inf \textstyle\sum_\delta d = \nu_1(E),$$

где нижняя грань берется по всем возможным системам σ, всегда существует, хотя и может оказаться бесконечным.

Величину $\nu_1(E)$ называют *линейной мерой Хаусдорфа* или *длиной по Хаусдорфу* n-мерного множества E. Для получения *плоской* (*двумерной*) *меры Хаусдорфа* вместо $\sum_\delta d$ следует брать $\sum_\delta \frac{\pi d^2}{4}$, т. е. сумму площадей двумерных больших кругов. Аналогично можно определить меру Хаусдорфа $\nu_k(E)$ любой размерности k для $1 \leqslant k \leqslant n$. Ясно, что если $\nu_k(E)$ конечно и отлично от нуля, то $\nu_m(E) = 0$ при $m > k$ и $\nu_m(E) = \infty$ при $m < k$.

3. Пусть $M \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ означает точку пространства R^n и $y = f(M)$ — функция n переменных, определенная на множестве $E \subset R^n$. Говорят, что функция $f(M)$ непрерывна в точке $M_0 \in E$ *относительно множества* E, если для любой последовательности точек $\{M_m\}$ $(M_m \equiv (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, \ldots \ldots, x_n^{(m)}) \in E)$, сходящейся к M_0, т. е. такой, для которой $\rho(M_m, M_0) \to 0$, имеем

$$\lim_{m \to \infty} f(M_m) = f(M_0).$$

Если функция $f(M)$ задана и непрерывна на замкнутом множестве F, то множества $E\{f \geqslant a\}$ и $E\{f \leqslant a\}$ замкнуты при любом a.

Функция $f(M)$ называется *измеримой* на множестве E, если измеримо (по Лебегу) E и измеримы множества $E\{f > a\}$ при любом a. В частности, *функция, заданная и непрерывная на замкнутом параллелепипеде, измерима.* Для измеримой функции n переменных справедливы теорема Э. Бореля и теорема Н. Н. Лузина о C-свойстве (см. § 3, п. 5).

Функция двух переменных $f(x, y)$ называется *дифференцируемой* в точке (x_0, y_0), если существуют такие числа A и B, что отношение

$$\frac{f(x, y)-f(x_0, y_0)-A(x-x_0)-B(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}$$

стремится к нулю при $(x,y)\to(x_0,y_0)$. Выражение $A(x-x_0)+$ $+B(y-y_0)$ или пару чисел $\{A, B\}$ называют *точным полным дифференциалом* функции f в точке (x_0, y_0). В этом случае числа A и B суть *частные производные* функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) соответственно по x и по y.

Если это отношение при некоторых A и B стремится к пределу *асимптотически* *), то пару $\{A, B\}$ называют *асимптотическим дифференциалом* функции $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0), а числа A и B — *коэффициентами* асимптотического дифференциала.

Теорема В. В. Степанова. *Для того чтобы конечная функция двух переменных $f(x, y)$, измеримая на множестве E, была асимптотически дифференцируема почти во всех точках E, необходимо и достаточно, чтобы почти всюду на E она была асимптотически дифференцируема по каждой из переменных.*

Если $f(x, y)$ асимптотически дифференцируема почти всюду на E, то коэффициенты асимптотического дифференциала почти в каждой точке E совпадают с асимптотическими частными производными $f_x^{[1]}(x, y)$, $f_y^{[1]}(x, y)$.

4. Пусть функция двух переменных $f(x, y)$ определена и непрерывна на прямоугольнике $S(a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d)$. *Множеством уровня* E_t функции $f(x, y)$ мы назовем множество тех точек S, в которых $f(x, y)=t$,

$$E_t=E\{f(x, y)=t\}.$$

Из непрерывности $f(x, y)$ следует, что все множества E_t замкнуты. Замкнутое множество называют *связным*, если оно не может быть разбито на сумму двух замкнутых, попарно не пересекающихся множеств. Если замкнутое множество не

*) То есть существует плоское множество положительной меры, имеющее (x_0, y_0) точкой плотности относительно двумерной меры Лебега, по которому существует предел в обычном смысле.

связно, то оно представляется в виде суммы конечного или бесконечного множества связных замкнутых слагаемых, называемых *компонентами* этого множества.

Обозначим через $J(t)$ число компонент множества уровня E_t. Тогда $J(t)$ измерима. Интеграл

$$\mathrm{V}(f)=\int_{-\infty}^{\infty} J(t)\,dt$$

называют *линейной вариацией* функции $f(x, y)$. Если $\mathrm{V}(f)$ конечна, то функцию $f(x, y)$ называют *функцией с ограниченной линейной вариацией* *).

Далее, $\nu_1(E_t)$ означает длину по Хаусдорфу множества уровня E_t. Эта функция также измерима. Поэтому имеет смысл интеграл

$$\mathrm{W}(f)=\int_{-\infty}^{\infty} \nu_1(E_t)\,dt,$$

который называется *плоской вариацией* функции $f(x, y)$. Функция $f(x, y)$, для которой $\mathrm{W}(f)$ конечна, называется *функцией с ограниченной плоской вариацией*.

Роль плоской и линейной вариаций для функции двух переменных выясняется следующими теоремами А. С. Кронрода:

а) *если непрерывная на S функция $f(x, y)$ имеет ограниченную плоскую вариацию, то у нее почти всюду на S существует асимптотический дифференциал*;

б) *если непрерывная на S функция $f(x, y)$ имеет ограниченные плоскую и линейную вариации, то она обладает точным полным дифференциалом почти всюду на S.*

5. Для функции n переменных можно определить интеграл Лебега с помощью точно такого же процесса, как и для функции одной переменной.

---

*) Если рассматривать непрерывные на $[a, b]$ функции одного переменного $f(x)$, а через $J(t)$ обозначать число компонент множества $E_t=E\{f(x)=t\}$, то $\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\,dt=\bigvee_a^b f$. Это равенство и этот подход к изучению непрерывных функций с ограниченным изменением были найдены С. Банахом.

Пусть на ограниченном множестве $E \subset R^n$ задана измеримая и ограниченная функция точки $y=f(M)$, все значения которой заключены строго между числами t и T. Разобьем отрезок $[t, T]$ на l частей точками $t=y_0<y_1<y_2<\ldots$ $\ldots<y_l=T$ и определим множества

$$E_k=E\{y_{k-1}\leqslant f(M)<y_k\}.$$

Тогда можно построить интегральные суммы

$$s_l=\sum_{k=1}^{l} y_{k-1}mE_k, \qquad S_l=\sum_{k=1}^{l} y_k mE_k,$$

где mE_k означает n-мерную меру Лебега множества E_k. Эти суммы называют соответственно *нижней и верхней суммами Лебега.* Общий предел, к которому стремятся нижние и верхние суммы Лебега, когда число l неограниченно возрастает, причем длина всех участков $[y_{k-1}, y_k]$ стремится к нулю, называется *интегралом Лебега от функции $f(M)$ по множеству E*. Его обозначают одним из символов

$$\int\limits_E f(M)\,dw \text{ или } \iint\limits_E \ldots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n.$$

Легко видеть, что это определение не отличается от определения, приведенного в § 5. В связи с этим мы не будем останавливаться на свойствах интеграла Лебега и распространении этого определения на неограниченные функции. Как и для функций одной переменной, функции $f(M)$, для которых существует интеграл Лебега, называют *суммируемыми.*

Связь кратного интеграла Лебега с одномерным устанавливается следующей теоремой.

Теорема Фубини (для функции двух переменных). *Пусть в прямоугольнике $S(a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d)$ задана суммируемая функция $f(x, y)$. Тогда*

а) *почти для всех $x\in[a, b]$ функция $f(x, y)$ как функция от y суммируема на $[c, d]$;*

б) *если Δ означает множество тех $x\in[a, b]$, для которых $f(x, y)$ суммируема на $[c, d]$, то интеграл $\int\limits_c^d f(x, y)\,dy$ как функция от x суммируем на Δ;*

в) *справедлива формула*

$$\iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_\Delta dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy.$$

Если допустить, что функция, стоящая под знаком интеграла, определена почти всюду, то вместо $\int\limits_\Delta$ можно писать $\int\limits_a^b$, поскольку из а) следует, что $m\Delta = b - a$. Тогда получается равенство

$$\iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy.$$

Ввиду равноправности аргументов мы получаем такой результат:

если $f(x, y)$ суммируема на прямоугольнике S, то существуют оба повторных интеграла $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy$ *и* $\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)\,dx$, *причем*

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)\,dx.$$

Заметим, что из существования одного или даже обоих повторных интегралов не следует суммируемость функции $f(x, y)$ на прямоугольнике S.

Аналогично может быть сформулирована также теорема Фубини для функции большего числа переменных.

6. Пусть на множестве $E \subset R^n$ определена ограниченная функция точки $f(M)$. Рассмотрим некоторую меру μ, т. е. вполне аддитивную неотрицательную и монотонную функцию множеств, определенную на системе множеств σ, содержащей множество E. Функцию $f(M)$ будем называть *измеримой по мере* μ, если все множества $E\{f > a\}$ при любом a входят в систему σ.

В таком случае, разбив участок $[t, T]$, содержащий все значения $f(M)$, точками $t=y_0<y_1<y_2<\ldots<y_m=T$, построим интегральные суммы

$$s_m=\sum_{k=1}^{m} y_{k-1}\mu(E_k) \text{ и } S_m=\sum_{k=1}^{m} y_k\mu(E_k).$$

Общий предел интегральных сумм s_m и S_m (если он существует) называют *интегралом Лебега — Стилтьеса* от функции $f(M)$ по множеству E. Его обозначают символом

$$\int_E f(M)\,\mu(dE).$$

Из определения ясно, что свойства интеграла Лебега — Стилтьеса совпадают со свойствами обычного интеграла Лебега, если только заменить меру Лебега (там, где она содержится в формулировках) мерой μ. Очевидно, что, заменив какой-либо другой мерой меру Лебега на прямой, мы получим интеграл Лебега — Стилтьеса также для функции одной переменной. Перенос понятия интеграла Лебега — Стилтьеса на случай неограниченных функций также не вызывает никаких затруднений.

§ 9. Основные функциональные пространства

1. *Метрическим пространством* называют множество объектов любой природы, в котором определено расстояние между элементами. Это означает, что на данном множестве определена функция, которая каждой паре элементов (точек) x и y ставит в соответствие некоторое число $\rho=\rho(x, y)$, называемое *расстоянием* между ними и удовлетворяющее следующим условиям:

а) $\rho(x, y)\geqslant 0$; $\rho(x, y)=0$ тогда и только тогда, когда элементы x и y совпадают;

б) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$;

в) $\rho(x, y)\leqslant\rho(x, z)+\rho(y, z)$.

Перечисленные условия называют *аксиомами метрики*. Если x, y, z — точки эвклидова пространства и расстояние между ними определяется обычным способом, то условие в) выражает известное свойство треугольника: сумма двух сторон треугольника не меньше третьей стороны. Поэтому это условие часто называют *неравенством треугольника* или *аксиомой треугольника.*

Как и для n-мерных эвклидовых пространств, для метрического пространства можно легко определить основные понятия, рассмотренные в § 1.

Шаром радиуса r с центром в точке x метрического пространства E называют множество элементов $y \in E$, удовлетворяющих условию $\rho(x, y) < r$, ε-окрестностью точки x — шар радиуса ε с центром в x. После этого легко определятся понятия изолированной и предельной точки, а также замкнутого и открытого множества. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится к точке* x_0, если $\lim\limits_{n \to \infty} \rho(x_n, x_0) = 0$.

Последовательность $\{x_n\}$ называется *фундаментальной*, если она удовлетворяет *критерию Коши*, т. е. если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое целое число N, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ при $n \geqslant N$, $m \geqslant N$. Всякая сходящаяся последовательность является фундаментальной. Если в метрическом пространстве всякая фундаментальная последовательность сходится, то это пространство называется *полным.*

Множество элементов любой природы называют *линейным пространством*, если для его элементов определены операции сложения и умножения на действительные числа, удовлетворяющие обычным естественным условиям *). Линейное пространство называют *нормированным*, если каждому элементу $x \in E$ ставится в соответствие действительное число $\|x\|$, *норма* x, которая удовлетворяет следующим требованиям:

а) $\|x\| \geqslant 0$; $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда x — нулевой элемент E;

б) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$;

в) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Нормированное пространство можно сделать метрическим, введя расстояние между элементами x и y как норму их разности, $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Пользуясь этим замечанием, можно все определения, сформулированные в терминах метрики, формулировать также в терминах нормы. Например, последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0, если $\|x_n - x_0\| \to 0$.

---

*) То есть условиям ассоциативности, коммутативности и дистрибутивности по отношению друг к другу.

Эту сходимость часто называют также *сходимостью по норме* или *сильной сходимостью.*

Здесь мы рассмотрим только некоторые примеры *функциональных пространств*, элементами которых являются функции тех или иных классов с различным образом введенным расстоянием между ними. Ограничимся рассмотрением пространств действительных функций одной действительной переменной.

2. Множество всех непрерывных функций, определенных на некотором отрезке, является линейным пространством. Расстояние между элементами x и y (функциями $x(t)$ и $y(t)$) этого пространства определяется равенством $\rho(x, y) = \max|x(t) - y(t)|$. *Нулевым элементом* служит здесь функция, тождественно равная нулю на отрезке, поэтому норму можно определить как $\|x\|_C = \max|x(t)|$.

Пространство непрерывных функций с определенной выше метрикой и нормой называют *пространством* C. Если хотят подчеркнуть, что речь идет о функциях, определенных и непрерывных на отрезке $[a, b]$, то пишут $C_{[a, b]}$. При изучении тригонометрических рядов Фурье приходится иметь дело с пространством непрерывных *периодических функций*, которое обозначают $CP_{[0, 2\pi]}$ или $CP_{[0, 1]}$, в зависимости от отрезка определения и периода.

Сходимость по норме в пространстве C последовательности $\{x_n\}$ к элементу x_0 означает стремление к нулю расстояния $\|x_n - x\| = \max|x_n(t) - x(t)|$. Таким образом, *сильная сходимость в пространстве C означает обычную равномерную сходимость.*

3. Множество всех непрерывных функций, имеющих непрерывные производные до порядка $k\,(k \geqslant 1)$ включительно, является линейным нормированным пространством $C^{(k)}_{[a,b]}$, если расстояние между элементами $x(t)$ и $y(t)$ определить равенством

$$\rho(x, y) = \max_{a \leqslant t \leqslant b} \sum_{s=0}^{k} |x^{(s)}(t) - y^{(s)}(t)|, \qquad x^{(0)}(t) \equiv x(t), \quad y^{(0)}(t) \equiv y(t).$$

При этом

$$\|x\|_{C^{(k)}} = \max \sum_{s=0}^{k} |x^{(s)}(t)|.$$

Сильная сходимость в пространстве $C^{(k)}_{[a,b]}$ означает равномерную сходимость последовательности функций и последовательностей, составленных из производных до k-го порядка включительно.

4. Множество суммируемых функций на данном отрезке, т. е. таких измеримых функций $x(t)$, для которых интеграл

$$\int_a^b |x(t)|\,dt$$

существует и конечен, образует *пространство L. Расстояние* между элементами $x, y \in L$ определяется равенством $\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)|\,dt$. *Нулевым элементом* является здесь функция, равная нулю почти всюду, т. е. эквивалентная тождественному нулю. *Норма* элемента $x \in L$ может быть определена так:

$$\|x\|_L = \int_a^b |x(t)|\,dt.$$

В пространстве L нет возможности различать эквивалентные между собой функции, ибо расстояние между ними равно нулю. Функции, отличающиеся лишь на множестве меры нуль, считаются здесь тождественными. Иначе говоря, элементом пространства L является не отдельно взятая суммируемая функция, но целый класс функций, совпадающих между собой почти всюду.

Всякая функция, принадлежащая пространству C, суммируема, т. е. принадлежит также и пространству L. Однако включение $C \subset L$, справедливое, если рассматривать C и L просто как два множества функций, не верно, если речь идет о функциональных пространствах. Действительно, для одной и той же функции $x(t)$, принадлежащей как к C, так и к L, ее норма как элемента пространства C отлична от ее же нормы как элемента L, $\|x\|_C \neq \|x\|_L$. Точно так же расстояние между двумя функциями в пространствах C и L будет различно.

5. *К пространству L^2*, с которым мы уже сталкивались в § 7, *относятся функции с суммируемым квадратом,* т. е. такие измеримые функции $x(t)$, для которых интеграл $\int\limits_a^b x^2(t)\,dt$ конечен. *Расстоянием* между элементами $x,\ y \in L^2$ называется

$$\rho(x,\ y) = \left(\int\limits_a^b [x(t) - y(t)]^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}};$$

нулевым элементом, как и для L, служит функция, равная нулю почти всюду. Соответственно этому норма в пространстве L^2 определяется так:

$$\|x\|_{L^2} = \left(\int\limits_a^b |x(t)|^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда ясно, что *сильная сходимость последовательности в пространстве L^2 означает сходимость в среднем.*

В пространстве L^2 также не различаются эквивалентные между собой функции. Если рассматривать пространство L^2 как линейное, а его элементы как векторы, то для $x,\ y \in L^2$ можно определить *скалярное произведение* равенством

$$(x,\ y) = \int\limits_a^b x(t)\,y(t)\,dt.$$

Таким образом, элементы L^2 называются *ортогональными* (см. § 7), если их скалярное произведение равно нулю. Точно так же функция *нормирована*, если ее норма равна единице, причем *норма элемента играет роль длины вектора.*

Ряд Фурье функции $x \in L^2$ по полной ортонормированной системе $\{\varphi_n(x)\}$ представляет собой аналог разложения вектора по декартовому базису в эвклидовом пространстве. Коэффициенты Фурье являются ортогональными *проекциями* вектора x на соответствующие координатные векторы φ_n.

6. Для любого $p \geqslant 1$ можно определить *пространство L^p функций, интегрируемых с p-й степенью. Расстояние* между элементами $x,\ y \in L^p$ определяется равенством

$$\rho(x,\ y) = \left(\int\limits_a^b |x(t) - y(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}},$$

а *норма* — равенством

$$\|x\|_{L^p}=\left(\int_a^b |x(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Сильная сходимость в L^p означает сходимость в среднем p-й степени. При $p<q$ функции, принадлежащие L^q, принадлежат также и L^p. Поэтому если рассматривать L^p и L^q как множества функций, то справедливо включение $L^q\subset L^p$. Однако *это включение не имеет места*, если иметь в виду *функциональные пространства*, поскольку нормы функций, как элементов различных пространств, различны.

Рассмотренные в пп. 3, 4 пространства L и L^2 являются частными случаями пространств L^p при $p=1$ и $p=2$.

Напомним, что в п. 4 § 6 сходимость в среднем p-й степени была определена для любых показателей $p>0$. Однако пространства L^p при $0<p<1$ обычно не рассматриваются, так как они не являются метрическими пространствами. Действительно, для расстояния

$$\rho(x,y)=\left\{\int_a^b |x(t)-y(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}$$

при $0<p<1$ нарушается неравенство треугольника.

Функция $x(t)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется *существенно ограниченной*, если найдется такое число N, что неравенство $|x(t)|\leqslant N$ выполняется для почти всех t. Нижнюю грань таких чисел N называют *существенной верхней гранью* функции $x(t)$ на $[a, b]$ и пишут

$$\inf N=\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\operatorname{vrai} x(t).$$

Множество существенно ограниченных функций с метрикой

$$\rho(x,\ y)=\sup_{a\leqslant t\leqslant b}\operatorname{vrai}|x(t)-y(t)|$$

называют *пространством M существенно ограниченных функций.*

Каждая из функций, входящих в пространство M, принадлежит также любому из пространств L^p при любом $p\geqslant 1$. Однако, как и выше, о включении $M\subset L^p$ говорить нельзя, так как для одной и той же функции f ее нормы в пространствах M и L^p будут различны.

Сильная сходимость в M означает равномерную сходимость почти всюду.

Можно рассматривать также *пространство V функций ограниченной вариации*, если расстояние определить равенством

$$\rho(x, y) = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(x-y).$$

Пространства M и V будут нормированными, если для элемента x определить норму равенствами

$$\|x\|_M = \sup_{a \leqslant t \leqslant b} \operatorname{vrai} |x(t)|,$$

$$\|x\|_V = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(x).$$

Пусть $x(t)$ — измеримая функция, определенная на отрезке $[0, 1]$. Построим множество E_x таких действительных чисел ε, что множество точек $t \in [0, 1]$, для которых $|x(t)| > \varepsilon$, имеет меру, не превосходящую ε. Множество E_x во всяком случае содержит число $\varepsilon = 1$, а потому не пусто. Введем обозначение $\varepsilon_0(x) = \inf E_x$. Множество S всех функций, измеримых на $[0, 1]$, будет метрическим пространством, если определить расстояние между элементами $x, y \in S$ равенством

$$\rho(x, y) = \varepsilon_0(x-y).$$

Пространство S называют *пространством измеримых функций*. Его называют также *пространством сходимости по мере*, так как *сходимость в пространстве S означает сходимость по мере.*

Пространство S, в отличие от всех рассмотренных выше пространств, н е н о р м и р у е м о, т. е. в нем нельзя ввести норму $\|x\|_S$ так, чтобы сходимость по этой норме была эквивалентна сходимости по мере. В частности, $\varepsilon_0(x)$ нельзя принять за норму, поскольку для этой функции нарушена аксиома б). Отметим, что все рассмотренные пространства C, $C^{(k)}$, L^p, V, M, S являются полными пространствами.

7. С функциональными пространствами тесно связаны *пространства последовательностей*, нормы и расстояния в которых определяются аналогично нормам и расстояниям в соответствующих функциональных пространствах. Так, для элемента $x \equiv \{x_n\}$ имеем *в пространстве сходящихся числовых последовательностей*

$$\|x\|_c = \sup_{1 \leqslant n < \infty} |x_n|.$$

В пространстве l^p $(p \geqslant 1)$ *последовательностей со сходящейся суммой p-х степеней для элемента*

$$x \equiv \{x_n\} \in l^p$$

$$\|x\|_{l^p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}};$$

в пространстве m ограниченных последовательностей

$$\|x\|_m = \sup_{1 \leqslant n < \infty} |x_n|.$$

Заметим, что всякая сходящаяся последовательность ограничена, так что все последовательности, входящие в c, входят также и в m. Более того, нормы в c и m совпадают, поэтому имеет место включение $c \subset m$.

Особо важную роль играет пространство l^2 с нормой

$$\|x\|_{l^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2}$$

и метрикой

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}.$$

Из этих формул видно, что *пространство* l^2 *является простейшим естественным аналогом n-мерного эвклидова пространства*, рассмотренного в § 8. Пространства c, m, l^p $(p \geqslant 1)$ — полные.

Теорема Рисса — Фишера (см. § 7) устанавливает взаимно однозначное линейное соответствие между пространствами l^2 и L^2: каждой функции из L^2 ставится в соответствие последовательность ее коэффициентов Фурье по данной полной ортонормированной системе со сходящейся суммой квадратов, и наоборот; при этом сумме двух функций и произведению функции на число соответствует сумма последовательностей и произведение последовательности на число. В силу равенства Парсеваля нормы соответствующих элементов из L^2 и l^2 равны между собой, т. е. мы имеем *взаимно однозначное линейное отображение с сохранением расстояния*. Такое отображение называется *изометричным*. Таким образом, *пространства L^2 и l^2 изометричны*.

ГЛАВА II

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ И ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

§ 1. Вводные замечания

При изучении того или иного математического вопроса (как чисто теоретического, так и прикладного) часто оказывается весьма полезной замена с определенной степенью точности рассматриваемой функции другой, в известном смысле более простой, более конкретной функцией.

Пусть на отрезке $[a, b]$ действительной оси заданы некоторая функция $f(x)$ и некоторый класс $\mathfrak{G}$ «простых» функций.

В настоящей главе мы будем изучать такие функции $g(x) \in \mathfrak{G}$, которые или в каком-то смысле (который всегда будет точно указываться) будут иметь что-то общее с функцией $f(x)$ (интерполирование функций), или будут «достаточно мало» отличаться от функции $f(x)$, или будут «наиболее близкими» к функции $f(x)$ по сравнению с другими функциями класса $\mathfrak{G}$ (приближение функций). В случае, когда достаточно хорошо изучены определенные свойства функций класса $\mathfrak{G}$ и характер приближения ими функции $f(x)$, можно исследовать некоторые свойства самой функции $f(x)$, рассматривая приближающие ее функции класса $\mathfrak{G}$. В численных методах и расчетах данная функция $f(x)$ заменяется обычно определенными функциями соответствующего класса $\mathfrak{G}$, которые более удобны при «вычислениях» в самом широком смысле этого слова, т. е. для которых имеются уже готовые таблицы, программы вычисления их значений или такие, которые рационально вычислять с помощью машины.

Задачи указанного вида встречаются уже при первом знакомстве с математическим анализом. Пусть, например, на интервале (a, b) задана функция $f(x)$, имеющая в точке

$x_0 \in (a, b)$ n производных (n — фиксированное натуральное число). Требуется найти многочлен $P(x)$ степени не выше n, который вместе со своими производными до порядка n включительно в точке x_0 совпадал бы с соответствующими значениями функции $f(x)$ и ее производных:

$$P^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \qquad k = 0, 1, \ldots, n\,^{*}). \tag{1.1}$$

Таким образом, в этом конкретном случае класс $\mathfrak{G}$ состоит из всех многочленов степени не выше n, а то общее, что имеют функции класса $\mathfrak{G}$ с данной функцией $f(x)$, выражается формулами (1.1). Как хорошо известно, такой многочлен $P(x)$ всегда существует, единствен и образует главную часть формулы Тейлора порядка n в точке x_0, т. е.

$$P(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n. \tag{1.2}$$

Отметим также, что многочлен (1.2) дает решение еще одной важной задачи. Именно, среди всех многочленов степени не выше n он наилучшим образом приближает заданную функцию $f(x)$ при x, стремящемся к x_0. Более подробно и точно это означает следующее: с одной стороны, для многочлена $P(x)$, задаваемого формулой (1.2), имеет место равенство

$$f(x) - P(x) = o((x - x_0)^n), \tag{1.3}$$
$$\text{при } x \to x_0,$$

а с другой стороны, не существует многочлена степени не выше n, отличного от многочлена (1.2), который обладал бы свойством (1.3).

§ 2. Интерполирование функций многочленами

2.1. Простейшая интерполяционная задача. Интерполяционные многочлены Лагранжа и Ньютона. Пусть на отрезке $[a, b]$ задана действительная функция $f(x)$ и фиксированы $m + 1$ значений аргумента x_i, $i = 1, 2, \ldots, m, m + 1$:

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{m+1}. \tag{2.1}$$

---

*) Символом $\varphi^{(0)}(x)$ обозначается, как обычно, сама рассматриваемая функция $\varphi(x)$.

Одна из простейших интерполяционных задач состоит в отыскании многочлена $P(x)$ не выше некоторой степени n, который при указанных значениях аргумента (узлах интерполяции) принимает те же значения, что и заданная функция, т. е. имеют место равенства

$$f(x_k)=P(x_k), \qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ m+1. \tag{2.2}$$

Такой многочлен $P(x)$ называется *интерполяционным многочленом*, интерполирующим функцию $f(x)$ в данных узлах интерполяции.

В дальнейшем совокупность всех многочленов степени не выше n, т. е. совокупность всех функций вида

$$P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n, \tag{2.3}$$

где a_i — действительные числа, $i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, будем обозначать через $\mathfrak{P}_n$, $n=0,\ 1,\ 2\ ,\ \ldots$

Для того чтобы исследовать вопрос о существовании многочлена $P(x)\in\mathfrak{P}_n$, удовлетворяющего условиям (2.2), возьмем многочлен $P(x)\in\mathfrak{P}_n$ вида (2.3) с неопределенными коэффициентами a_i, $i=0,\ 1,\ \ldots,\ n$, и подставим его в систему (2.2). Мы получим систему $m+1$ линейных уравнений с $n+1$ неизвестными $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$:

$$\left.\begin{array}{l} a_0+a_1x_1+\ldots+a_nx_1^n=f(x_1), \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_0+a_1x_{m+1}+\ldots+a_nx_{m+1}^n=f(x_{m+1}). \end{array}\right\} \tag{2.4}$$

Отметим, что определитель, составленный из коэффициентов этой системы в первых k строках и первых k столбцах, является определителем Вандермонда *) $W(x_1,\ \ldots,\ x_k)$, который в данном случае не равен нулю, ибо все узлы интерполяции различны. Поэтому ранг матрицы коэффициентов системы (2.4) равен наименьшему из двух чисел $m+1$ и $n+1$ ($m+1$ — число строк, а $n+1$ — число столбцов этой матрицы). Если $m>n$, то система (2.4), вообще говоря, не имеет решения. Если $m=n$, то решение системы (2.4) всегда существует и притом единственное. Если же $m<n$, то существует бесчисленное множество решений системы (2.4). Таким образом, минимальное натуральное число n, для которого разрешима интерполяционная задача (2.2)

---

*) См. *СМБ*, Высшая алгебра, гл. I.

при условии, что $P(x) \in \mathfrak{P}_n$, должно быть не меньше, чем уменьшенное на единицу число узлов интерполяции, т. е. должно быть $n \geqslant m$.

Указанный метод позволяет, очевидно, не только доказать существование (и единственность в случае $m = n$) интерполяционного многочлена, но и фактически найти его; для этого достаточно решить систему (2.4).

Обозначим через $P(x)$ интерполяционный многочлен, удовлетворяющий системе уравнений (2.2). Можно показать (например, решая систему (2.4)), что при $n = m$ этот многочлен, называемый в этом случае *интерполяционным многочленом Лагранжа*, может быть записан в виде

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k) \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_{n+1})}{(x_k-x_1)(x_k-x_2)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_{n+1})}. \tag{2.5}$$

Впрочем, то, что написанное выражение является многочленом степени не выше n и удовлетворяет условиям (2.2), легко проверяется непосредственно.

Пусть теперь у функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ существуют производные до порядка $n+1$ включительно, тогда существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n+1}),$$

где $P(x)$ — интерполяционный многочлен (2.5).

Полагая для краткости

$$\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ \ldots\ (x-x_{n+1}),$$

$$R(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega(x)$$

и

$$M_{n+1}(a, b) = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} |f^{(n+1)}(x)|,$$

имеем оценку для погрешности при интерполировании функции f по формуле (2.5):

$$|R(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}(a, b)}{(n+1)!} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\omega(x)|.$$

Из этой формулы видно, что если мы хотим уменьшить погрешность при рассматриваемом интерполировании, то для этого достаточно так выбрать узлы интерполяции $x_1, \ldots, x_{n+1}$ на отрезке $[a, b]$, чтобы величина $\max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |\omega(x)|$ уменьшилась. Отметим, что в случае $a = -1$, $b = 1$ многочлены $\omega(x)$, для которых $\max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |\omega(x)|$ достигают наименьшего значения, называются *многочленами Чебышева* (см. п. 3.4); они могут быть записаны в следующем виде:

$$T_{n+1}(x) = \frac{1}{2^n} \cos(n+1) \arccos x, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots *).$$

Отметим, что корни многочлена Чебышева $T_n(k)$ простые, лежат в интервале $(-1, 1)$ и задаются формулой

$$x_{k,n} = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n; \qquad n = 1, 2, \ldots$$

При этом между двумя соседними корнями $x_{k,n}$ и $x_{k+1,n}$ многочлена $T_n(x)$ находится один и только один корень многочлена $T_{n-1}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$

Этим объясняется тот факт, что при интерполировании на отрезке $[-1, 1]$ в качестве узлов интерполяции оказывается выгодным брать точки x_{kn}, т. е. нули многочлена Чебышева $T_{n+1}(x)$, так как при этом $\omega(x) = T_n(x)$. В случае произвольного отрезка $[a, b]$ с той же точки зрения выгодно брать в качестве узлов интерполяции точки, которые получаются из нулей соответствующего многочлена Чебышева при подобном отображении отрезка $[-1, +1]$ на отрезок $[a, b]$ (см. об интерполяции с узлами Чебышева также в п. 2.4). Более подробно о многочленах Чебышева см. *СМБ*, Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби), гл. X, § 15.

Укажем теперь другой вид записи интерполяционного многочлена Лагранжа $P(x)$ для частного случая равноотстоящих узлов, т. е. когда $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$, $i = 2, 3, \ldots, n+1$, $x_1 = a$, $x_{n+1} = b$. Для этого предварительно напомним понятие

---

*) Следует иметь в виду, что часто многочленами Чебышева называют также многочлены $T_n(x) = \cos n \arccos x$, $n = 1, 2, \ldots$

разностей $\Delta_n^{(k)}(x, f)$ функции $f(x)$ с шагом h. Пусть h — некоторое фиксированное число; тогда по определению

$$\Delta_h^{(0)}(x, f)=f(x),$$
$$\Delta_h(x, f)=\Delta_h^{(1)}(x, f)=f(x+h)-f(x),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta_h^{(k+1)}(x, f)=\Delta_h(x, \Delta_h^{(k)}(x, f))=\sum_{j=0}^{k+1}(-1)^{k-j+1}C_{k+1}^j f(x+jh).$$

Последняя формула проверяется по индукции. Отметим, что и, обратно, значения функции $f(x)$ в точках $x+kh$ $(k=0, 1, \dots, n)$ выражаются как линейные комбинации последовательных конечных разностей в начальной точке x:

$$f(x+kh)=\sum_{j=0}^{k} C_k^j\Delta_h^{(j)}(x, f), \qquad k=0, \ 1, \ \dots, \ n.$$

Пусть теперь на отрезке $[a, b]$ выбраны равноотстоящие узлы интерполяции:

$$x_k=a+(k-1)h, \qquad k=1, \dots, n+1, \qquad h=\frac{b-a}{n}.$$

Тогда интерполяционный многочлен $P(x)$, удовлетворяющий условиям (2.2) (при $m=n$), может быть с помощью разностей записан в виде

$$P(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta_h^{(k)}(a, f)}{h^k}\frac{(x-a)(x-a-h)\dots[x-a-(k-1)h]}{k!}. \qquad (2.6)$$

Интерполяционный многочлен, записанный в виде (2.6), называется *интерполяционным многочленом Ньютона*.

В случае равноотстоящих узлов интерполяции интерполяционный многочлен Ньютона оказывается обычно более удобным для вычислений, чем интерполяционный многочлен Лагранжа. Это связано, в частности, с тем, что если добавляется один узел интерполяции при сохранении прежних (тем самым увеличивается на h и отрезок, на котором производится интерполирование), а степень интерполирующего многочлена увеличивается на единицу, то в формуле (2.6) добавляется просто одно слагаемое, тогда как интерполяционный многочлен Лагранжа в этом случае надо весь пересчитывать заново.

Впрочем, и в общем случае произвольно расположенных узлов интерполяционному многочлену $P(x)$ можно придать такой вид, что будет сохраняться указанное свойство (см, например, [7], стр. 60 — 62).

Естественным обобщением рассмотренной задачи является следующая: пусть на отрезке $[a, b]$ задана система n линейно независимых непрерывных функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$. В качестве функций, с помощью которых мы будем производить интерполяцию, возьмем функции вида

$$\varphi(x)=\lambda_1\varphi_1(x)+\ldots+\lambda_n\varphi_n(x).$$

Интерполяционная задача для данной функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$ при заданных узлах интерполяции $x_1, \ldots, x_n$, состоит в отыскании таких чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, чтобы

$$f(x_i)=\varphi(x_i), \qquad i=1, 2, \ldots, n.$$

Для того чтобы эта интерполяционная задача имела, и притом единственное, решение для любой функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы определитель

$$D(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)=\begin{vmatrix} \varphi_1(x_1) & \varphi_2(x_1) & \ldots & \varphi_n(x_1), \\ \varphi_1(x_2) & \varphi_2(x_2) & \ldots & \varphi_n(x_2), \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1(x_n) & \varphi_2(x_n) & \ldots & \varphi_n(x_n) \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля в случае, когда все $x_1, \ldots, x_n$ попарно различны. Это условие эквивалентно тому, что всякий «обобщенный полином»

$$\varphi'(x)=\lambda_1\varphi_1(x)+\ldots+\lambda_n\varphi_n(x),$$

тождественно не равный нулю, обращается в нуль на отрезке $[a, b]$ не более чем в $n-1$ различных точках. Такие системы функций называются *чебышевскими* (ср. п. 7.3).

Так как определитель $D(1, x, x^2, \ldots, x^{n-1})$ является определителем Вандермонда, то он удовлетворяет указанному требованию и, значит, система степеней $1, x, \ldots, x^{n-1}$ является чебышевской.

В следующем пункте мы рассмотрим задачу интерполирования функций в случае, когда функции $\varphi_i(x)$ являются тригонометрическими, точнее, синусами и косинусами кратных дуг.

2.2 Интерполирование тригонометрическими многочленами. Функция вида

$$T(x)=a_0+\sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx+b_k \sin kx, \qquad a_n^2+b_n^2>0, \tag{2.7}$$

называется *тригонометрическим многочленом степени* n. С помощью комплексных чисел его можно записать в виде *)

$$T(x)=\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \quad \bar{c}_k=c_{-k}, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n.$$

Совокупность всех тригонометрических многочленов степени выше n обозначим через $\mathfrak{T}_n$.

Пусть теперь задана периодическая периода 2π **) функция $f(x)$, и пусть фиксированы узлы интерполяции $x_0, x_1, \ldots$ $\ldots, x_{2m}$, причем $x_{j_1}-x_{j_2} \neq 2k\pi$ при $j_1 \neq j_2$, k — целое.

Тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что

$$T(x_j)=f(x_j), \qquad j=0, 1, \ldots, 2m, \tag{2.8}$$

называется *интерполяционным многочленом*, интерполирующим функцию $f(x)$ в узлах x_j $(j=0, 1, \ldots, 2m)$. При $n \geqslant m$ в классе $\mathfrak{T}_n$ всегда существует интерполяционный многочлен, удовлетворяющий условию (2.8), причем в случае $m=n$ он единствен и может быть записан в виде

$$T(x)=\\
=\sum_{k=0}^{2n} \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}\ldots\sin\frac{x-x_{k-1}}{2}\sin\frac{x-x_{k+1}}{2}\ldots\sin\frac{x-x_{2n}}{2}}{\sin\frac{x_k-x_0}{2}\ldots\sin\frac{x_k-x_{k-1}}{2}\sin\frac{x_k-x_{k+1}}{2}\ldots\sin\frac{x_k-x_{2n}}{2}} f(x_k), \tag{2.9}$$

$$T(x) \in \mathfrak{T}_n.$$

Иногда оказывается полезной интерполяция с помощью тригонометрических многочленов, не содержащих синусов или

---

*) Напомним, что $e^{it}=\cos t+i \sin t$.

**) В случае периодических функций с периодом $2l$ в настоящем пункте и в дальнейшем для формулировки соответствующих результатов следует лишь сделать линейную замену переменных $x=\frac{\pi}{l} t$.

косинусов кратных дуг, т. е. либо с помощью многочленов вида

$$T(x)=a_0+a_1\cos x+\ldots+a_n\cos nx, \tag{2.10}$$

являющихся, очевидно, четными функциями, либо с помощью многочленов вида

$$T(x)=b_1\sin x+\ldots+b_n\sin nx, \tag{2.11}$$

являющихся, очевидно, нечетными функциями. Для разрешимости интерполяционной задачи с помощью многочленов вида (2.10) следует задавать $m+1$ узлов интерполяции x_j, $j=0, 1, \ldots, m$, $m\leqslant n$, причем $x_{j_1}\pm x_{j_2}\neq 2p\pi$, $j_1\neq j_2$, p — целое. Если $m=n$, то тригонометрический многочлен вида (2.10), удовлетворяющий условиям

$$T(x_j)=f(x_j), \qquad j=0, 1, \ldots, n,$$

единствен и его можно записать в виде

$$T(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(\cos x-\cos x_0)\ldots(\cos x-\cos x_{k-1})(\cos x-\cos x_{k+1})\ldots(\cos x-\cos x_n)}{(\cos x_k-\cos x_0)\ldots(\cos x_k-\cos x_{k-1})(\cos x_k-\cos x_{k+1})\ldots(\cos x_k-\cos x_n)}f(x_k).$$

Аналогично для разрешимости интерполяционной задачи с помощью многочленов вида (2.11) следует задавать m узлов интерполяции x_j, $j=1, 2, \ldots, m$, $x_{j_1}\pm x_{j_2}\neq 2p\pi$, $j_1\neq j_2$, p — целое, где снова $m\leqslant n$. Если $m=n$, то тригонометрический многочлен вида (2.11), удовлетворяющий условиям

$$T(x_j)=f(x_j), \qquad j=1, 2, \ldots, n,$$

единствен и его можно записать в виде

$$T(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin x(\cos x-\cos x_1)\ldots(\cos x-\cos x_{k-1})(\cos x-\cos x_{k+1})\ldots(\cos x-\cos x_n)}{\sin x_k(\cos x_k-\cos x_1)\ldots(\cos x_k-\cos x_{k-1})(\cos x_k-\cos x_{k+1})\ldots(\cos x_k-\cos x_n)}f(x_k).$$

Из сказанного видно, что при интерполировании тригонометрическими многочленами, так же как и при интерполировании алгебраическими многочленами, задача об интерполяции функции имеет единственное решение в случае, когда число узлов интерполяции совпадает с числом коэффициентов у искомого интерполирующего многочлена.

Отметим еще случай равноотстоящих узлов интерполяции

$$x_k = \frac{2j\pi}{2n+1}, \quad j = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n.$$

В этом случае тригонометрический многочлен, удовлетворяющий условиям (2.8), при $m = n$ может быть записан в виде

$$T(x) = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=0}^{2n} f(x_k) \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x - x_j)}{\sin \frac{x - x_j}{2}}.$$

Если же его записать в «канонической форме» (2.7)

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

то для коэффициентов a_k и b_k имеют место формулы

$$a_0 = \frac{1}{2n+1} \sum_{l=0}^{2n} f(x_l),$$

$$a_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{l=0}^{2n} f(x_l) \cos kx_l,$$

$$b_k = \frac{2}{2n+1} \sum_{l=0}^{2n} f(x_l) \sin kx_l.$$

2.3. Общие интерполяционные задачи. Формула Эрмита. При интерполировании функции $f(x)$ многочленами с фиксированными узлами интерполяции можно требовать, чтобы в тех или иных узлах совпадали не только значения функции со значениями интерполирующего многочлена, но и значения некоторых производных $f(x)$ с соответствующими значениями производных указанного многочлена. Рассмотрим одну из задач подобного типа.

Пусть заданы s узлов интерполяции $x_1, \ldots, x_s$, натуральное число n и s натуральных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ таких, что

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_s=n+1.$$

Требуется найти многочлен $P(x)$ возможно наименьшей степени такой, что

$$P^{(m)}(x_k)=f^{(m)}(x_k), \tag{2.12}$$
$$m=0,\ 1, \ldots, \alpha_k-1, \qquad k=1,\ 2, \ldots, s.$$

При этом если какое-либо $\alpha_i>1$, то соответствующий узел x_i называется *кратным узлом* интерполяции кратности α_i (при $\alpha_i=1$ узел x_i называется *простым*). Сформулированная задача (называемая обычно *задачей Эрмита*), является, очевидно, прямым обобщением задачи, рассмотренной нами в п. 2.1, которая получается отсюда при $\alpha_1=\ldots=\alpha_s=1$, $s=n+1$.

Задача Эрмита всегда имеет решение и притом единственное. Чтобы написать формулу для этого решения, введем следующее обозначение:

$$\Omega(x)=\prod_{\nu=1}^{s}(x-x_\nu)^{\alpha_\nu}. \tag{2.13}$$

Разложим, далее, рациональную функцию $\frac{1}{k!}\frac{(x-x_i)^{\alpha_i}}{\Omega(x)}$, регулярную в окрестности точки x_i, в ряд Тейлора и обозначим через $l_{ik}(x)$ сумму тех членов этого разложения, у которых степени множителя $x-x_i$ не превышают α_i-k-1. Очевидно, $l_{ik}(x)$ — многочлен степени не выше чем α_i-k-1.

Многочлен наименьшей степени, удовлетворяющий условиям (2.12), имеет степень, не большую чем n, и называется обычно *эрмитовым интерполяционным многочленом*. Он может быть записан в виде

$$P(x)=\sum_{i=1}^{s}\left[\frac{\Omega(x)}{(x-x_i)^{\alpha_i}}\sum_{k=0}^{\alpha_i-1}f^{(k)}(x_i)(x-x_i)^k l_{ik}(x)\right]. \tag{2.14}$$

Другие формы записи этого многочлена можно найти, например, в [4].

Отметим частный случай этой формулы при $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_s = 2$. Полагая

$$\omega(x) = \prod_{\nu=1}^{s} (x - x_\nu), \qquad (2.15)$$

$$A_k(x) = \left[1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right] \frac{\omega^2(x)}{\omega'^2(x)(x - x_k)^2},$$

$$B_k(x) = (x - x_k)\frac{\omega^2(x)}{\omega'^2(x)(x - x_k)^2},$$

получим

$$P(x) = \sum_{k=1}^{s} f(x_k) A_k(x) + \sum_{k=1}^{s} f'(x_k) B_k(x).$$

Возвращаясь к задаче Эрмита в общем случае, отметим запись интерполяционной формулы с остаточным членом для функции $f(x)$, определенной вместе со своими производными до порядка $n+1$ включительно на отрезке $[a, b]$:

$$f(x) = P(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\Omega(x), \qquad a < \xi < b;$$

здесь $P(x)$ определяется формулой (2.14), а $\Omega(x)$ — формулой (2.13).

2.4. Сходимость интерполяционных многочленов. В настоящем пункте мы рассмотрим вопрос о сходимости последовательности интерполяционных многочленов к интерполируемой функции при увеличении числа узлов. Наиболее простой ответ получается для целых функций *).

Теорема 1. *Пусть функция $f(x)$ — целая. Пусть, далее, фиксирован некоторый конечный отрезок $[a, b]$, на котором для каждого $k = 1, 2, \ldots$ заданы узлы интерполяции $x_{1k}, \ldots, x_{n_k k}$ соответственно кратности $\alpha_{1k}, \ldots,$*

---

*) Напомним, что функция $f(x)$ называется *целой*, если она раскладывается в степенной ряд $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, сходящийся при любых значениях x.

$\alpha_{n_k k}$, *и пусть* $P_k(x)$ — *интерполяционный многочлен такой, что*

$$P_k^{(i)}(x_{jk}) = f^{(i)}(x_{jk}),$$

$$i = 0, 1, \ldots, \alpha_{jk} - 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, n_k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Тогда, если при $k \to \infty$ *число узлов интерполяции неограниченно растет, т. е.* $n_k \to \infty$, *то последовательность* $P_k(x)$ *равномерно сходится на отрезке* $[a, b]$ *к функции* $f(x)$.

Отметим, что для функции, про которую только известно, что она непрерывна, вообще говоря, нельзя гарантировать сходимость к ней последовательности ее интерполирующих многочленов при увеличении числа узлов. В качестве примера подобного утверждения отметим следующую теорему.

Теорема 2 (С. Н. Бернштейн). *Пусть* $P_n(x)$ — *интерполяционный многочлен, интерполирующий функцию* $|x|$ *на отрезке* $[-1, 1]$ *в* n *равноотстоящих узлах* (*см. п.* 2.1). *Тогда последовательность многочленов* $P_n(x)$ *не сходится к функции* $|x|$ *ни в одной точке отрезка* $[-1, 1]$, *кроме точек* $-1, 0, 1$, *в которых сходится к соответствующим значениям* $|x|$.

Другие отрицательные результаты, относящиеся к вопросу сходимости интерполяционных процессов, можно найти, например, в [7], [11]. Мы же рассмотрим здесь, наоборот, некоторые из положительных результатов этого направления.

Пусть на отрезке $[a, b]$ заданы n точек

$$x_1, \ldots, x_n. \tag{2.16}$$

Положим

$$l_k(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n\,^{*)},$$

$$\lambda_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |l_k(x)|,$$

$$\lambda_n = \max_{a \leq x \leq b} \lambda_n(x),$$

*) Символ $\omega(x)$ определен в (2.15).

$l_k(x)$ суть многочлены степени $n-1$ такие, что

$$l_k(x_i)=\begin{cases}0, & \text{если } i\neq k,\\ 1, & \text{если } i=k.\end{cases}\tag{2.17}$$

Многочлены $l_k(x)$ обычно называются *фундаментальными* относительно системы n узлов. Они однозначно определяются системой (2.16) и свойством (2.17).

Очевидно, что интерполяционный многочлен Лагранжа $P(x)$ с узлами интерполяции $x_1, \ldots, x_n$ в обозначениях (2.17) принимает вид

$$P(x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, l_k(x).\tag{2.18}$$

Отметим, что характер поведения функции $\lambda_n(x)$ играет существенную роль в вопросах сходимости интерполяционных процессов.

Для формулировки дальнейших результатов дадим еще одно определение: пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Величина

$$E_{\mathfrak{P}_n}(f)=\inf_{P(x)\in\mathfrak{P}_n}\ \sup_{x\in[a,\, b]}|f(x)-P(x)|$$

называется *наилучшим приближением* функции $f(x)$ многочленами степени не выше n *).

Класс функций, определенных и непрерывных на отрезке $[a, b]$ вместе со своими производными до порядка k включительно ($k=0, 1, 2, \ldots$), будем обозначать через $C^k[a, b]$. При $k=0$ будем вместо $C^0[a, b]$ писать просто $C[a, b]$.

Теорема 3. *Пусть* $f(x)\in C[a, b]$, $x_0\in[a, b]$, *и пусть*

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n(x_0)\,E_{\mathfrak{P}_{n-1}}(f)=0.$$

Тогда если интерполяционные многочлены Лагранжа $P_n(x)\in\mathfrak{P}_{n-1}$, $n=1, 2, \ldots$, *интерполируют функцию* $f(x)$ *в узлах* (2.16), *то*

$$\lim_{n\to\infty}P_n(x_0)=f(x_0).$$

*) Подробнее о наилучших приближениях см. в § 3.

Теорема 4. *Пусть* $f(x) \in C[a, b]$, D — *некоторое подмножество отрезка* $[a, b]$, $\mu_n = \sup\limits_{x \in D} \lambda_n(x)$, *и пусть*

$$\lim_{n \to \infty} \mu_n E_{\mathfrak{P}_{n-1}}(f) = 0,$$

тогда последовательность интерполяционных многочленов Лагранжа $P_n(x) \in \mathfrak{P}_{n-1}$, *интерполирующих функцию* $f(x)$ *в узлах* (2.16), *равномерно на множестве* D *сходится к функции* $f(x)$.

Следствие. *Пусть функция* $f(x) \in C[a, b]$ *и*

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n E_{\mathfrak{P}_{n-1}}(f) = 0;$$

тогда последовательность интерполяционных многочленов Лагранжа $P_n(x) \in \mathfrak{P}_{n-1}$, *интерполирующих функцию* $f(x)$ *в узлах* (2.16), *равномерно сходится на отрезке* $[a, b]$ *к функции* $f(x)$.

Таким образом, грубо говоря, чем медленнее рост величин $\lambda_n(x)$ (соответственно λ_n), тем шире класс функций, для которых имеет место сходимость интерполяционного процесса.

Рост величин λ_n оценивается следующим образом: при любом выборе узлов интерполяции (2.16) имеет место неравенство (С. Н. Бернштейн — Г. Фабер)

$$\lambda_n > \frac{\ln n}{8\sqrt{\pi}}.$$

С другой стороны, если в случае отрезка $[-1, 1]$ за узлы интерполяции взять узлы Чебышева (см. п. 2.1)

$$x_k = \cos\frac{2k+1}{2n}\pi, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{2.19}$$

то (Бернштейн С. Н.)

$$\lambda_n \leqslant 8 + \frac{4}{\pi}\ln n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Эти два неравенства показывают, что если в качестве узлов интерполяции выбрать узлы Чебышева, то мы получим наименьший порядок роста величины λ_n.

Используя результаты теории наилучших приближений функций (см. § 3), из сформулированных выше результатов можно получить различные критерии сходимости интерполяционных процессов. Предварительно напомним еще одно важное понятие.

Для всякой функции $f(x)$, определенной на некотором множестве E, функция

$$\omega(\delta;\ f) = \sup_{\rho(x',\ x'') \leqslant \delta} [f(x') - f(x'')],\quad x' \in E,\ x'' \in E\,^{*)},$$

определенная для любого $\delta \geqslant 0$, называется *модулем непрерывности* функции $f(x)$.

Теорема 5. *Пусть функция* $f(x)$ *определена на отрезке* $[-1,\ 1]$ *и удовлетворяет условию*

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta;\ f) \ln \delta = 0$$

(это условие обычно называется *условием Дини — Липшица*); *тогда последовательность интерполяционных многочленов Лагранжа* $P_n(x) \in \mathfrak{P}_{n-1}$, *интерполирующих функцию* $f(x)$ *в узлах Чебышева* (2.19), *равномерно сходится на отрезке* $[-1,\ 1]$ *к функции* $f(x)$.

Теоремы, подобные сформулированным, имеют место и в случае интерполирования тригонометрическими многочленами; соответствующие результаты можно найти, например, в [11].

Отметим еще две близкие по характеру теоремы.

Теорема 6 (В. И. Крылов). *Пусть функция* $f(x)$ *абсолютно непрерывна на отрезке* $[-1,\ 1]$. *Тогда последовательность интерполяционных многочленов Лагранжа* $P_n(x) \in \mathfrak{P}_{n-1}$, *интерполирующих функцию* $f(x)$ *в узлах Чебышева* (2.19), *равномерно сходится на отрезке* $[-1,\ 1]$ *к функции* $f(x)$.

Теорема 7 (В. И. Крылов). *Пусть функция* $f(x)$ *на отрезке* $[-1,\ 1]$ *определена и имеет ограниченную вариацию. Тогда последовательность интерполяционных многочленов Лагранжа* $P_n(x) \in \mathfrak{P}_{n-1}$, *интерполирующих функцию* $f(x)$ *в узлах Чебышева* (2.19), *в каждой точке*

---

*) Символом $\rho(x',\ x'')$ обозначается расстояние между точками x' и x'', тем самым данное определение модуля непрерывности имеет смысл в случае, когда E является метрическим пространством.

непрерывности функции $f(x)$ сходится к значению функции $f(x)$ в этой точке.

Пусть теперь на отрезке $[a, b]$ задана неотрицательная и суммируемая функция $q(x)$, почти всюду не равная нулю. Эту функцию мы будем в дальнейшем называть *весовой функцией* или, короче, просто *весом*. Пусть, далее, $\{p_n(x)\}$ — некоторая система многочленов, ортогональная на отрезке $[a, b]$ с весом $q(x)$:

$$\int_a^b q(x)\,p_n(x)\,p_m(x)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m.$$

Пусть, наконец,

$$x_{1n},\ x_{2n},\ \ldots,\ x_{nn} \tag{2.20}$$

суть нули многочлена $p_n(x)$, $n = 1, 2, \ldots$

Если в качестве узлов интерполяции брать систему (2.20), то в известном смысле, подобно тому как это было сделано для интерполяции в узлах Чебышева *), и в этом случае удается получить ряд критериев сходимости интерполяционных процессов; некоторые из относящихся сюда результатов изложены, например, в [11].

Здесь мы отметим лишь один весьма общий результат, относящийся, правда, к сходимости в среднем интерполяционных многочленов.

Теорема 8 (Р. Эрдеш — Р. Туран). *Пусть $f(x) \in C[a, b]$, и пусть интерполяционный многочлен Лагранжа $P_n(x) \in \mathfrak{P}_{n-1}$ интерполирует функцию $f(x)$ в узлах* (2.20); *тогда*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b q(x)\,[P_n(x) - f(x)]^2\,dx = 0,$$

т. е. последовательность многочленов $\{P_n(x)\}$ на отрезке $[a, b]$ сходится в среднем с весом $q(x)$ к функции $f(x)$.

Другой метод изучения сходимости интерполяционных процессов, пригодный для исследования и в случае кратных

*) Напомним, что многочлены Чебышева образуют ортогональную систему на отрезке $[-1, 1]$ с весом $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

корней, связан с понятием так называемой **нормальной матрицы** узлов интерполяции.

Пусть задана система узлов интерполяции, которую мы запишем в виде треугольной матрицы

$$\begin{pmatrix} x_{11} & & & \\ x_{12} & x_{22} & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{1n} & x_{2n} & \ldots & x_{nn} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \tag{2.21}$$

где в n-й строке записаны узлы интерполяции $x_{kn} \in [a, b]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$, для интерполирования функции с помощью многочлена $P(x) \in \mathfrak{P}_{n-1}$. Рассмотрим функции

$$v_{kn}(x) = 1 - \frac{\omega_n''(x_{kn})}{\omega_n'(x_{kn})}(x - x_{kn}), \qquad k = 1, 2, \ldots \text{*)},$$

где

$$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_{kn}).$$

Если для всех $x \in [a, b]$ имеет место

$$v_{kn}(x) \geqslant 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

то матрица (2.21) называется *нормальной*; если же существует $\sigma > 0$ такое, что для всех $x \in [a, b]$ имеет место

$$v_{kn}(x) \geqslant \sigma > 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

то матрица (2.21) называется *строго нормальной*.

В качестве примера отметим, что если x_{kn} ($k = 1, 2, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$) являются корнями многочленов Якоби $J_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ **), то при $\alpha \leqslant 0$, $\beta \leqslant 0$ матрица (2.21) нормальна, а при $\alpha < 0$, $\beta < 0$ — строго нормальна.

---

*) Функции $v_{kn}(x)$ появляются при решении задачи Эрмита с двукратными узлами, см. (2.15).

**) *СМБ*, Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби), гл. IV, § 4.

Теорема 9 (Л. Фейер). *Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и удовлетворяет условию Гёльдера с показателем* $\alpha > \frac{1}{2}$

$$|f(x') - f(x'')| < M\,|x' - x''|^{\alpha},$$

где M — постоянная, $x' \in [a, b]$, $x'' \in [a, b]$.

Пусть, далее, матрица узлов интерполяции (2.21) *нормальна и $P_n(x)$ — последовательность интерполяционных многочленов Лагранжа, интерполирующих функцию $f(x)$ в соответствующих узлах матрицы* (2.21). *Тогда при любом $h > 0$ последовательность $\{P_n(x)\}$ равномерно сходится при $n \to \infty$ к функции $f(x)$ на отрезке $[a+h, b-h]$.*

Если же матрица (2.21) *строго нормальна, то последовательность $\{P_n(x)\}$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на всем отрезке $[a, b]$.*

Теорема 10 (Фейер). *Пусть $f(x) \in C^1[a, b]$, матрица узлов интерполяции* (2.21) *нормальна и $Q_n(x) \in \mathfrak{P}_{2n-1}$ является эрмитовым интерполяционным многочленом, удовлетворяющим условию*

$$Q_n(x_{kn}) = f(x_{kn}), \qquad Q'_n(x_{kn}) = f'(x_{kn}),$$
$$k = 1, 2, \ldots, n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Тогда для любого $h > 0$ последовательность $\{Q_n(x)\}$ равномерно сходится к функции $f(x)$ на отрезке $[a+h, b-h]$. Если же матрица (2.21) *строго нормальна, то последовательность $\{Q_n(x)\}$ сходится равномерно к функции $f(x)$ на всем отрезке $[a, b]$.*

Мы рассмотрели некоторые критерии сходимости интерполяционных многочленов Лагранжа и Эрмита, связанные с теми или иными ограничениями на классы интерполируемых функций. В заключение отметим, что существуют методы интерполяции, обеспечивающие сходимость соответствующих интерполяционных многочленов для любой наперед заданной непрерывной функции. Эти методы связаны с введением интерполяционных многочленов достаточно большой степени по сравнению с числом узлов интерполяции. Отметим в качестве примера следующую теорему.

Теорема 11 (Л. Фейер). *Пусть*

$$x_{kn} = \cos\frac{2k+1}{2n}\pi, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

(т. е. x_{kn} — узлы Чебышева) и функция $f(x) \in C[-1, 1]$. Тогда если $Q_n(x) \in \mathfrak{P}_{2n-1}$ для любого $n = 1, 2, \ldots$ является интерполяционным многочленом таким, что

$$Q_n(x_{kn}) = f(x_{kn}), \qquad Q'_n(x_{kn}) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1\ ^{*)},$$

то на отрезке $[-1, 1]$ последовательность $\{Q_n(x)\}$ равномерно стремится к функции $f(x)$.

Л. Фейером было также показано, что условие обращения в нуль производных интерполяционных многочленов $Q_n(x)$ в узлах Чебышева может быть существенно ослаблено; именно, достаточно, чтобы производные $Q'_n(x_{kn})$ росли при $n \to \infty$ не слишком быстро. Например, утверждение теоремы 11 остается в силе, если вместо условия $Q'_n(x_{kn}) = 0$ потребовать, чтобы

$$Q'_n(x_{kn}) = \frac{o(1)}{\sqrt{1 - x_{kn}^2}}\,\frac{n}{\ln n} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Вопрос о возможно наименьшем повышении степени интерполяционного многочлена для обеспечения сходимости интерполяционного процесса был поставлен и исследован С. Н. Бернштейном. Подробнее обо всех этих вопросах см., например, [7] и [11].

2.5. Операции над интерполяционными многочленами, приводящие к сходящимся процессам. Подобно тому как из расходящегося ряда можно с помощью той или иной операции получить некоторый сходящийся процесс, при изучении интерполяционных методов удается из интерполяционных многочленов получать определенными способами последовательности, сходящиеся к интерполируемой функции. Первые основные исследования в этом направлении принадлежат С. Н. Бернштейну. Наиболее просто его результаты выглядят в случае интерполирования периодических функций тригонометрическими многочленами (см. п. 2. 2).

---

*) Такой многочлен $Q_n(x)$ всегда существует.

В дальнейшем через $C_{2\pi}^*$ будем обозначать класс непрерывных периодических периода 2π функций.

Пусть функция $f(x)$ принадлежит $C_{2\pi}^*$. Рассмотрим ее интерполирование с простыми равноотстоящими узлами интерполяции

$$x_{kn}=\frac{2k\pi}{2n+1}, \qquad k=0, 1, \ldots, 2n.$$

Пусть

$$T_n(x)=a_{0n}+\sum_{k=1}^{n}(a_{kn}\cos kx+b_{kn}\sin kx)$$

— интерполяционный многочлен такой, что

$$f(x_{kn})=T_n(x_{kn}), \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ldots,\ 2n,\ n=1,\ 2,\ldots$$

Положим

$$T_{0n}(x)=a_{0n},$$

$$T_{mn}(x)=a_{0n}+\sum_{k=1}^{m}(a_{kn}\cos kx+b_{kn}\sin kx),$$

$$1\leqslant m\leqslant n.$$

Пусть, наконец,

$$U_{sn}(x)=\frac{T_{0n}(x)+T_{1n}(x)+\ldots+T_{sn}(x)}{s+1}\ *). \tag{2.22}$$

Теорема 1 (С. Н. Бернштейн). *Пусть* $f(x)\in C_{2\pi}^*$. *Тогда любая последовательность* (2.22) *функций* $U_{sn}(x)$, $s\leqslant n$, *при* $s\to\infty$ *равномерно на всей оси сходится к функции* $f(x)$.

Положим теперь

$$U_n(x)=\frac{T_n\left(x+\frac{\pi}{2n+1}\right)+T_n\left(x-\frac{\pi}{2n+1}\right)}{2}; \tag{2.23}$$

тогда имеет место

Теорема 2 (С. Н. Бернштейн). *Пусть функция* $f(x)\in C_{2\pi}^*$. *Тогда последовательность* (2.23) *функций*

---

*) Очевидно, что метод получения функций $U_s^{(n)}$ аналогичен в известном смысле методу Чезаро — Фейера в теории расходящихся рядов.

$U_n(x)$ при $n \to \infty$ равномерно на всей оси сходится к функции $f(x)$.

Сведения об обобщениях и дальнейшем развитии этого направления можно найти, например, в [3], [4], [8], [11], [12].

2.6. Обобщенные интерполяционные многочлены. Пусть заданы матрица узлов интерполяции (2.21) и некоторая система функций $\varphi_{kn}(x)$, называемых *фундаментальными*:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_{11}(x), \\ \varphi_{12}(x),\ \varphi_{22}(x), \\ \dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{1n}(x),\ \varphi_{2n}(x), \dots, \varphi_{nn}(x). \end{array}\right\} \qquad (2.24)$$

При этом все узлы x_{kn} принадлежат некоторому заданному отрезку $[a, b]$, а все функции $\varphi_{kn}(x)$ определены на этом же отрезке.

При фиксированных системах (2.21) и (2.24) каждой функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$, может быть поставлен в соответствие «многочлен»

$$\Phi_n(x; f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{kn}) \varphi_{kn}(x),$$

называемый *обобщенным интерполяционным многочленом* (по данной системе (2.24) фундаментальных функций при данной системе (2.21) узлов).

Очевидно, что интерполяционный многочлен Лагранжа, как это показывает, например, формула (2.18), является и обобщенным интерполяционным многочленом. Вместе с тем ряд других конструкций, встречающихся в различных разделах математики, также приводит к понятию обобщенных интерполяционных многочленов. В качестве примера обобщенных интерполяционных многочленов отметим так называемые многочлены *Бернштейна* $B_n(x, f)$ (см. стр. 132). В предположении ограниченности функций $\varphi_{kn}(x)$ поставим в соответствие каждой паре систем (2.21) и (2.24) функции

$$\lambda_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |\varphi_{kn}(x)|, \qquad x \in [a, b],\ n = 1, 2, \dots,$$

и числа

$$\lambda_n = \sup_{a \leqslant x \leqslant b} \{\lambda_n(x)\}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Имеет место следующая теорема (см. [9]).

Теорема. *Для того чтобы для всякой функции $f(x) \in C[a, b]$ последовательность обобщенных интерполяционных многочленов $\Phi_n(x; f)$ (при некоторых фиксированных системах* (2.21) *и* (2.24)) *равномерно сходилась на отрезке $[a, b]$ к функции $f(x)$, необходима и достаточна совокупность следующих условий*:

1) *если $f(x)$ является алгебраическим многочленом, то последовательность $\Phi_n(x; f)$ равномерно сходится на отрезке $[a, b]$ к многочлену $f(x)$*;

2) *существует $N > 0$ такое, что для всех $n = 1, 2, \ldots$*

$$\lambda_n \leqslant N.$$

Дальнейшие рассмотрения свойств обобщенных интерполяционных многочленов можно найти, например, в [3], [7], [11].

2.7. Замечания. Рассмотренные нами задачи интерполирования относятся к классу так называемых *задач о приближении функций*. В качестве классов $\mathfrak{G}$ функций, из которых мы выбирали функции $g(x)$, «приближающие» в определенном смысле данную функцию $f(x)$, мы брали многочлены (алгебраические или тригонометрические). «Близость» функций $f(x)$ и $g(x)$ определялась просто как совпадение значений самих функций $f(x)$ и $g(x)$, а иногда и некоторых их производных в фиксированном конечном числе точек (узлах интерполяции). Это — классическая задача интерполирования функций. Она естественным образом распространяется и на функции многих переменных. Классической задаче интерполирования были посвящены пп. 2.1, 2.2 и 2.3; в п. 2.6 было дано одно ее обобщение.

В связи с тем, что мы рассматривали лишь теорию интерполирования в действительной области, мы не останавливались на классической интерполяционной задаче Абеля — Гончарова.

Эта задача состоит в следующем: дана n раз дифференцируемая функция $f(x)$ и $n+1$ точек (узлы интерполяции) $x_0, x_1, \ldots, x_n$ из ее области определения. Требуется найти многочлен $P(x)$, удовлетворяющий условиям

$$P^{(k)}(x_k) = f^{(k)}(x_k), \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Указанный многочлен $P(x)$ называется интерполяционным многочленом *Абеля — Гончарова.* Как и во всех интерполяционных задачах, здесь прежде всего возникает вопрос об условиях, при которых интерполяционные многочлены $P(x)$ сходятся к функции $f(x)$ при $n \to \infty$. Оказывается, что как по методам решения этой задачи, так и по классам функций $f(x)$, для которых эта задача и ее обобщения представляют интерес, ее естественно рассматривать в рамках теории функций комплексного переменного. Более того, интерполяционный процесс Абеля — Гончарова оказывается тесно связанным с рядом других свойств аналитических функций.

Общую задачу интерполирования функций $f(x)$ (одного или нескольких переменных) некоторого класса $\mathfrak{F}$ с помощью функций класса $\mathfrak{G}$ можно сформулировать следующим образом: задано конечное (иногда счетное) число линейных функционалов U_k, $k=1, 2, \ldots$, определенных как для функций класса $\mathfrak{F}$, так и для функций класса $\mathfrak{G}$; требуется для данной функции $f_0(x) \in \mathfrak{F}$ найти такую функцию $g_0(x) \in \mathfrak{G}$, чтобы

$$U_k[g_0] = U_k[f_0], \qquad k = 1, 2, \ldots$$

При этом, конечно, представляет большой интерес оценка разности $f_0(x) - g_0(x)$ для произвольных значений аргумента x; этому вопросу были посвящены пп. 2.4 и 2.5.

Иногда определение «близости» функций $f(x) \in \mathfrak{F}$ и $g(x) \in \mathfrak{G}$ не может быть выражено как равенство конечного или счетного числа функционалов, а в ее определении участвуют все значения аргумента из области определения функций $f(x)$ и $g(x)$. При этом ставится вопрос об отыскании функции $g(x) \in \mathfrak{G}$, лишь приближающей функцию $f(x) \in \mathfrak{F}$ с той или иной степенью точности. Здесь мы имеем дело с типичной задачей собственно приближения функций, которая будет рассмотрена в следующих параграфах.

§ 3. Равномерные приближения функций одного переменного многочленами и их обобщения

3.1. Общие замечания о приближении функций. Задачу приближения функций интересно изучать и для целых классов функций $f(x)$. Это значит, что исследуемая функция $f(x)$ описывается какими-либо своими общими свойствами;

иначе говоря, рассматривается лишь как представитель некоторого функционального класса $\mathfrak{F}$. В дальнейшем в качестве такого исходного класса у нас будут встречаться, например, класс непрерывных периодических с одним и тем же периодом функций, классы суммируемых в той или иной степени функций и т. д. В качестве классов $\mathfrak{G}$ функций $g(x)$, «приближающих» в определенном смысле функции класса $\mathfrak{F}$, мы будем брать большей частью многочлены (алгебраические или тригонометрические) или целые функции экспоненциального типа.

При решении вопроса о приближении функции $f(x)$ функциями класса $\mathfrak{G}$ может случиться, что либо существуют функции $g(x)$ класса $\mathfrak{G}$, сколь угодно близкие в нашем смысле к данной функции $f(x)$, либо эта близость ограничена снизу некоторым положительным числом. Оба эти случая встречаются уже при изучении приближений для простейших классов функций и, как мы увидим ниже, приводят естественным образом к совершенно разным дальнейшим постановкам задач.

В качестве критерия близости в вопросах приближения функции наиболее важную роль играет так называемая р а в н о м е р н а я б л и з о с т ь и с р е д н я я с т е п е н н а я б л и з о с т ь.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ соответственно классов $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{G}$ определены на некотором множестве E, то их *равномерная близость* определяется величиной

$$\operatorname*{sup\,vrai}_{x \in E} |f(x)-g(x)| \text{ *)};$$

в случае, когда $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, а E — ограниченное замкнутое множество, эта величина записывается просто как

$$\max_{x \in E} |f(x)-g(x)|.$$

*) Пусть на некотором множестве M задана функция $\varphi(x)$. Для всякого числа y положим $M_y = \{x \mid \varphi(x) \geqslant y,\ x \in M\}$, и пусть $M^* = \{y \mid \operatorname{mes} M_y = 0\}$. Тогда по определению

$$\operatorname*{sup\,vrai}_{x \in M} \varphi(x) = \inf M^*.$$

Средняя степенная близость при фиксированной степени $p > 0$ задается величиной $\int |f(x) - g(x)|^p dE$ (при этом предполагается, что верхняя грань $\sup\limits_{x \in E} \operatorname{vrai} |f(x) - g(x)|$ и последний интеграл существуют и, следовательно, конечны).

3.2. Теоремы Вейерштрасса. Фундаментальные результаты, принципиально разрешающие вопрос о приближении непрерывных на отрезке функций многочленами, принадлежат К. Вейерштрассу. Первая теорема Вейерштрасса состоит в следующем:

Теорема 1 (Вейерштрасс). *Пусть на некотором отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(x)$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен $P(x)$ такой, что для всех точек $x \in [a, b]$ имеет место неравенство*

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon.$$

Эта теорема может быть перефразирована следующим образом.

Теорема 1[1]. *Для любой непрерывной на некотором отрезке функции существует равномерно сходящаяся к ней на этом отрезке последовательность многочленов.*

Отметим, что обратное утверждение также имеет место: всякая функция, являющаяся на отрезке пределом равномерно сходящейся последовательности многочленов, является непрерывной на этом отрезке. Таким образом, возможность сколь угодно точного приближения функции на отрезке с помощью многочленов является свойством, эквивалентным непрерывности функции на этом отрезке *).

Теорема 2 (К. Вейерштрасс). *Пусть $f(x)$ — непрерывная периода 2π функция; тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен $T(x)$ такой, что для любого действительного x имеет место неравенство*

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon.$$

Этой теореме можно придать следующую эквивалентную форму:

---

*) Отметим, что утверждение теоремы 1 Вейерштрасса содержится, в частности, в теореме 11 Фейера (п. 2.4), однако теорема Вейерштрасса была доказана значительно ранее теоремы Фейера.

Теорема 2[1]. *Для любой непрерывной периода* 2π *функции существует равномерно сходящаяся к ней на всей действительной оси последовательность тригонометрических многочленов.*

Подобно рассмотренному выше непериодическому случаю, возможность сколь угодно точного приближения функции на всей действительной оси с помощью тригонометрических полиномов является характеристическим свойством непрерывных периодических периода 2π функций.

3.3. Многочлены Бернштейна. Теоремы Вейерштрасса устанавливают принципиальную возможность сколь угодно точной аппроксимации непрерывных функций многочленами. Не менее важен вопрос об эффективном отыскании многочленов, приближающих данную непрерывную функцию с наперед заданной точностью. Такими многочленами являются, например, многочлены Фейера (см. теорему 11 в п. 2.4) и многочлены Бернштейна.

Определение. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[0, 1]$, тогда ее *многочленом Бернштейна* степени n называется многочлен

$$B_n(x, f) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Оказывается, что многочлены Бернштейна и осуществляют, в частности, равномерное приближение непрерывных функций, а в случае достаточно гладких функций и равномерное приближение их производных. Именно, имеет место

Теорема 1. *Пусть* $f(x) \in C^m[0, 1]$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$; *тогда последовательности* $\frac{d^s B(x; f)}{dx^s}$, $(s = 0, 1, 2, \ldots, m^*)$ *при* $n \to \infty$ *сходятся к функции* $\frac{d^s f(x)}{dx^s}$ *равномерно на отрезке* $[0, 1]$.

В случае $m = 0$ эта теорема доказана С. Н. Бернштейном, а на случай произвольного m $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ обобщена И. Н. Хлодовским.

---

*) Под нулевой производной функции $(m = 0)$ мы понимаем, как обычно, саму функцию.

Из этой теоремы при $m=0$ следует еще раз теорема 1 Вейерштрасса (п. 3.2), и, кроме того, в ней явно указывается многочлен, приближающий данную функцию.

Теорема 2 (И. Натансон). *Пусть функция* $f(x)$ *ограничена на отрезке* $[0, 1]$ *и в точке* $x_0 \in [0, 1]$ *имеет производную, тогда*

$$\lim_{n\to\infty} B_n'(x_0; f) = f'(x_0).$$

Теорема 1 показывает (при $m=0$), что любая непрерывная функция может быть представлена как предел равномерно сходящейся последовательности ее многочленов Бернштейна; при этом оказывается возможным оценить скорость этой сходимости через модуль непрерывности $\omega(x; f)$ (см. п. 2.4) функции $f(x)$.

Теорема 3 (Т. Поповичиу). *Пусть* $f(x) \in C[a, b]$, *тогда*

$$|B_n(x; f) - f(x)| \leqslant \frac{3}{2}\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}; f\right).$$

Для дважды дифференцируемой в некоторой точке функции имеется следующая оценка:

Теорема 4 (Е. Вороновская). *Пусть функция* $f(x)$ *ограничена на отрезке* $[0, 1]$, *и пусть в точке* $x_0 \in [0, 1]$ *существует производная* $f''(x_0)$; *тогда при* $n \to \infty$

$$B_n(x_0; f) - f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2n} x_0 (1 - x_0) + \frac{o(1)}{n}.$$

О других свойствах рассмотренных многочленов Бернштейна и их обобщений можно прочитать, например, в [3], [8], [11] и [12].

3.4. Наилучшие равномерные приближения функций многочленами данной степени. Первая теорема Вейерштрасса (см. п. 3.2) показывает, что всякую непрерывную на отрезке функцию с любой наперед заданной степенью точности можно приблизить многочленом. При этом мы не рассматривали ни вопрос о том, как изменяется эта точность в зависимости от увеличения степени многочлена, ни вопрос о том, какую наилучшую точность приближения можно обеспечить, ограничиваясь многочленами фиксированной степени, ни, наконец, вопрос о том, как найти среди всех многочленов данной степени многочлен, который наименее уклоняется от данной функции, и даже вопрос об его существовании.

Проблема о многочленах, наименее уклоняющихся от данной функции, была впервые поставлена и исследована более столетия тому назад, в 1853 г., великим русским математиком П. Л. Чебышевым *), который с полным правом и считается основателем теории приближения функций.

Теорема (Э. Борель). *Пусть* $f(x) \in C[a, b]$. *Тогда для любого* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *существует многочлен* $P(x) \in \mathfrak{P}_n$ *такой, что*

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |P(x) - f(x)| = E_{\mathfrak{P}_n}(f)\ ^{**}). \tag{3.1}$$

Многочлен $P(x)$, указанный в теореме Бореля, т. е. обладающий свойством (3.41), называется *многочленом наилучшего приближения* функции $f(x)$. Можно показать, что в классе $\mathfrak{P}_n$ многочлен наилучшего приближения функции $f(x)$ единствен.

Определим наилучшее приближение периодических функций с помощью тригонометрических многочленов данной степени. Если $\mathfrak{T}_n$, $n = 0, 1, \ldots$ — совокупность тригонометрических многочленов степени не выше n (см. п. 2.2), то для каждой периодической периода 2π функции $f(x)$ величина

$$E_{\mathfrak{T}_n}(f) = \inf_{T(x) \in \mathfrak{T}_n} \sup_{-\infty < x < \infty} |T(x) - f(x)|$$

называется *наилучшим приближением функции* $f(x)$ *тригонометрическими многочленами* степени не выше n. Как и в непериодическом случае, при любом фиксированном $n = 0, 1, \ldots$ для всякой функции $f(x) \in C_{2\pi}^*$ всегда существует, и притом единственный, тригонометрический многочлен $T(x) \in \mathfrak{T}_n$ такой, что

$$\max_{-\infty < x < \infty} |T(x) - f(x)| = E_{\mathfrak{T}_n}(f).$$

Этот многочлен называется *тригонометрическим многочленом наилучшего приближения* функции $f(x)$ в классе $\mathfrak{T}_n$.

---

*) Чебышев П. Л., Теория механизмов, известных под именем параллелограммов, 1853 г. Полное собрание сочинений, т. II, М.—Л., 1947.

**) Определение $E_{\mathfrak{P}_n}(f)$ см. на стр. 119.

Наилучшие приближения, определенные в настоящем пункте, называются *равномерными* наилучшими приближениями в отличие от других наилучших приближений, которые будут рассмотрены ниже (см. § 5).

Если $f(x) \in C[a, b]$, то согласно первой теореме Вейерштрасса (см. 3.2) имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} E_{\mathfrak{P}_n}(f) = 0.$$

Аналогично в случае $f(x) \in C_{2\pi}^*$ из второй теоремы Вейерштрасса (см. 3.2) вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} E_{\mathfrak{T}_n}(f) = 0.$$

Наилучшие приближения $E_{\mathfrak{P}_n}$ и $E_{\mathfrak{T}_n}(f)$ при возрастании $n = 0, 1, 2, \ldots$, очевидно, не возрастают:

$$E_{\mathfrak{P}_0}(f) \geqslant E_{\mathfrak{P}_1}(f) \geqslant \ldots \geqslant E_{\mathfrak{P}_n}(f) \geqslant \ldots,$$
$$E_{\mathfrak{T}_0}(f) \geqslant E_{\mathfrak{T}_1}(f) \geqslant \ldots \geqslant E_{\mathfrak{T}_n}(f) \geqslant \ldots$$

С. Н. Бернштейном было показано, что верно и обратное: какова бы ни была последовательность чисел

$$\alpha_0 \geqslant \alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n \geqslant \ldots \geqslant 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0, \tag{3.2}$$

и каков бы ни был отрезок $[a, b]$, существует функция $f(x) \in C[a, b]$ такая, что для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ имеет место равенство

$$E_{\mathfrak{P}n}(f) = \alpha_n.$$

Кроме того, Бернштейн показал, что для любой последовательности (3.2) существует функция $f(x) \in C_{2\pi}^*$ такая, что для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$E_{\mathfrak{T}_n}(f) = \alpha_n.$$

3.5. Результаты Чебышева о наилучших приближениях. П. Л. Чебышев указал следующее необходимое и достаточное условие для того, чтобы данный многочлен являлся многочленом наилучшего приближения некоторой непрерывной функции.

Теорема 1 (П. Л. Чебышев). *Пусть* $f(x) \in C[a, b]$, n — *фиксированное неотрицательное целое число*, $P(x)$ — *многочлен*: $P(x) \in \mathfrak{P}_n$ (см. п. 3.4), *и*

$$A = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P(x)|.$$

Многочлен $P(x)$ *является многочленом наилучшего приближения функции* $f(x)$ *в классе* $\mathfrak{P}_n$ *тогда и только тогда, когда на отрезке* $[a, b]$ *существуют такие* $n+2$ *точек* x_i, $i = 1, 2, \ldots, n+2$,

$$a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2} \leq b,$$

что

$$|Q(x_i) - f(x_i)| = A, \quad i = 1, 2, \ldots, n+2,$$

и знак разности $Q(x_i) - f(x_i)$ *меняется при переходе от каждой точки* x_i *к следующей* x_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$.

В силу сделанных выше определений при выполнении условий теоремы, очевидно, имеем

$$A = E_{\mathfrak{P}_n}(f).$$

Аналогичное утверждение имеет место и для случая наилучших приближений тригонометрическими многочленами:

Теорема 2 (П. Л. Чебышев). *Пусть* $f(x) \in C_{2\pi}^*$, n — *фиксированное неотрицательное целое число и* $T(x)$ — *тригонометрический многочлен* $T(x) \in \mathfrak{T}_n$ (см. п. 3.4). *Пусть, кроме того,*

$$A = \max_{-\infty < x < \infty} |f(x) - T(x)|.$$

Многочлен $T(x)$ *является тригонометрическим многочленом наилучшего приближения функции* $f(x)$ *в классе* $\mathfrak{T}_n$ *тогда и только тогда, когда на промежутке* $[0, 2\pi)$ *существуют такие* $2n+2$ *точек* x_i, $i = 1, 2, \ldots, n+2$,

$$0 \leq x_1 \leq x_2 < \ldots < x_{2n+2} < 2\pi,$$

что

$$|T(x_i) - f(x_i)| = A, \qquad i = 1, 2, \ldots, n+2,$$

и знак разности $T(x_i) - f(x_i)$ *меняется при переходе от каждой точки* x_i *к следующей* x_{i+1} $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$.

Очевидно, что при выполнении условий теоремы

$$A = E_{\mathfrak{T}_n}(f).$$

В теоремах 1 и 2 мы, естественно, предполагали, что функция $f(x)$ не является многочленом (алгебраическим или соответственно тригонометрическим) степени, не превышающей n, так как в этом случае функция $f(x)$ просто совпадает со своим многочленом наилучшего приближения степени не выше n.

В качестве примера укажем задачу об отыскании в классе $\mathfrak{P}_{n-1}$ многочлена $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$, наименее отклоняющегося от функции $f(x) = x^n$ на отрезке $[-1, 1]$. Иначе говоря, если

$$r(x) = x^n - (a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}), \tag{3.3}$$

то требуется так подобрать коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, чтобы величина $\max\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |r(x)|$ имела возможно меньшее значение. Но, очевидно, в виде (3.3) можно записать любой многочлен степени n с коэффициентом 1 при старшем члене. Таким образом, поставленная задача эквивалентна задаче об отыскании в классе всех многочленов степени n с коэффициентом 1 при старшем члене многочлена с наименьшей абсолютной величиной на отрезке $[-1, 1]$ или, что то же, многочлена указанного класса, наименее отклоняющегося от нуля на отрезке $[-1, 1]$.

Такие многочлены были найдены П. Л. Чебышевым и называются *многочленами Чебышева* (см. п. 2.1).

3.6. Приближенное построение многочленов наилучшего чебышевского приближения. В настоящем пункте мы рассмотрим некоторые методы приближенного вычисления чебышевских многочленов наилучшего приближения для непрерывных на отрезке функций. Оценку снизу для наилучшего приближения данной функции с помощью определенным образом выбранного многочлена дает следующая теорема.

Теорема 1 (Валле-Пуссен). *Пусть* $f(x) \in C[a, b]$, *и на отрезке* $[a, b]$ *заданы* $n+2$ *точек*

$$x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1};$$

пусть, далее, для некоторого многочлена

$$Q(x) \in \mathfrak{P}_n$$

имеет место одна из двух следующих систем неравенств:

$$\begin{aligned} &f(x_0) - Q(x_0) > 0, \\ &f(x_1) - Q(x_1) < 0, \\ &f(x_2) - Q(x_2) > 0 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &f(x_0) - Q(x_0) < 0, \\ &f(x_1) - Q(x_1) > 0, \\ &f(x_2) - Q(x_2) < 0 \\ &\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Тогда для наилучшего приближения $E_{\mathfrak{P}_n}(f)$ имеет место оценка

$$E_{\mathfrak{P}_n}(f) \geqslant \min_{i=0, 1, \ldots, n} |f(x_i) - Q(x_i)|.$$

При этом, как мы уже знаем (см. п. 3.5), равенство здесь достигается тогда и только тогда, когда многочлен $Q(x)$ является многочленом наилучшего приближения.

Приближенные методы отыскания многочлена наилучшего приближения основаны прежде всего на следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть $f(x) \in C[a, b]$, $P_0(x) \in \mathfrak{P}_n(x)$, $P_0(x)$ — многочлен наилучшего приближения функции $f(x)$ в $\mathfrak{P}_n$, т. е.*

$$E_{\mathfrak{P}_n}(f) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - P_0(x)| = \\ = \min_{P(x) \in \mathfrak{P}_n} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x) - P(x)|.$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что как только для многочлена $P(x) \in \mathfrak{P}_n$ выполняется неравенство

$$|f(x) - P(x)| < E_{\mathfrak{P}_n}(f) + \delta, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

то имеет место и неравенство

$$|P(x) - P_0(x)| < \varepsilon,$$

При этом нетрудно видеть, что при ε, стремящемся к нулю, коэффициенты указанных многочленов $P(x)$ стремятся к коэффициентам при соответствующих степенях x многочлена $P_0(x)$.

Теорема 2 показывает, что для того, чтобы найти многочлен наилучшего приближения данной функции $f(x)$ с определенной степенью точности, достаточно найти многочлен, отклонение которого от функции $f(x)$ достаточно мало отличается от ее наилучшего приближения.

Рассмотрим один из алгоритмов для вычисления приближений чебышевских многочленов наилучшего приближения.

Пусть $f(x) \in C[a, b]$ и $P(x)$ — некоторый многочлен степени не выше n: $P(x) \in \mathfrak{P}_n$. Составим разность

$$r(x) = f(x) - P(x),$$

предположим, что существуют по крайней мере $n+2$ точек

$$x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}, \tag{3.4}$$

в которых эта разность имеет последовательно чередующиеся знаки:

$$\operatorname{sign} r(x_0) = -\operatorname{sign} r(x_1) = \ldots = (-1)^{n+1} \operatorname{sign} r(x_{n+1}). \tag{3.5}$$

Пусть теперь

$$L = L(P) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |r(x)| \tag{3.6}$$

и

$$A(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}; P) = \min_{i=0, 1, \ldots, n+1} |r(x_i)|.$$

Выберем систему точек $\{x_i^{(0)}\}_{i=0}^{n+1}$ таким образом, чтобы выполнялись условия (3.5) и чтобы величина

$$A(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}; P) \text{ при } x_i = x_i^{(0)}, \ i = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

имела возможно наибольшее значение, т. е. чтобы

$$A(P) = A(x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}; P) = \\ = \max_{x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1}} A(x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}; P), \tag{3.7}$$

а также чтобы

$$\max_{i=0, 1, \ldots, n+1} |r(x_i^{(0)})| = L. \tag{3.8}$$

Для выполнения (3.7) и (3.8) достаточно в качестве точек $\{x_i^{(0)}\}_{i=0}^{n+1}$ взять соответствующие последовательные экстремальные точки функции $r(x)$.

Из теоремы 1 этого пункта следует, что

$$E_{\mathfrak{P}_n}(f) \geqslant A(P).$$

Укажем теперь алгоритм, с помощью которого строится такая «добавка» к многочлену $P(x)$ в виде некоторого многочлена $Q_1(x) \in \mathfrak{P}_n$, что многочлен $P_1(x) = P(x) + Q_1(x)$ уже меньше отличается от многочлена наилучшего приближения, чем исходный многочлен $P(x)$.

Многочлен $Q_1(x)$ определим как многочлен, наилучшим образом приближающий функцию $r(x)$ на множестве $n+2$ узлов $x_0^{(0)}, x_1^{(0)}, \ldots, x_{n+1}^{(0)}$, т. е. как многочлен, для которого имеет место равенство

$$\rho = \max_{i=0,1,\ldots,n+1} |r(x_i) - Q_1(x_i)| =$$
$$= \inf_{Q(x)\in\mathfrak{P}_n} \max_{i=0,1,\ldots,n+1} |r(x_i) - Q(x_i)|.$$

Многочлен $Q_1(x)$ (см. п. 7.3) удовлетворяет следующей системе из $n+1$ уравнений:

$$r(x_0) - Q_1(x_0) = -[r(x_1) - Q_1(x_1)] = \ldots =$$
$$= (-1)^{n+1}[r(x_{n+1}) - Q_1(x_{n+1})] = \rho \operatorname{sign} r(x_0). \quad (3.9)$$

Если $Q_1(x) = c_0 + c_1x + \ldots + c_nx_n$, то систему (3.9) можно переписать как систему $n+2$ линейных уравнений относительно $c_0, c_1, \ldots, c_n$ и ρ:

$$\left.\begin{aligned} \rho \operatorname{sign} r(x_0) + c_0 + c_1x_0 + \ldots + c_nx_0^n &= r(x_0), \\ -\rho \operatorname{sign} r(x_1) + c_0 + c_1x_1 + \ldots + c_nx_1^n &= r(x_1), \\ (-1)^{n+1} \operatorname{sign} r(x_{n+1}) + c_1 + c_1x_{n+1} + \ldots + c_nx_{n+1}^n &= \\ &= r(x_{n+1}). \end{aligned}\right\} \quad (3.10)$$

Полагая

$$d_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)\ldots(x_{n+1} - x_i)},$$

из (3.10) получим

$$\rho = \frac{d_0|r(x_0)| + d_1|r(x_1)| + \ldots + d_{n+1}|r(x_{n+1})|}{d_0 + d_1 + \ldots + d_{n-1}}.$$

Следовательно, нам теперь известны значения многочлена $Q_1(x)$ в точках $x_i^{(0')}$:

$$Q_1(x_i^{(0')}) = r(x_i^0) - \rho \operatorname{sign} r(x_i^0), \qquad i = 0, 1, \ldots, n+1,$$

и потому сам многочлен $Q_1(x)$ может быть сразу написан, например, по формуле для интерполяционного многочлена Лагранжа (см. п. 2.1) с использованием любых $n+1$ узлов, взятых из системы точек $\{x_i^{(0')}\}_{i=0}^{n+1}$.

Положим

$$P_1(x) = P(x) + Q_1(x)$$

и (см. 3.7)

$$A_1 = A(P_1);$$

тогда существует число θ, $0 < \theta < 1$, такое, что

$$E_{\mathfrak{P}_n}(f) - A_1 < \theta\,[E_{\mathfrak{P}_n}(f) - A].$$

Если, исходя из многочлена $P_1(x)$, построим многочлен $P_2(x)$ таким же образом, каким был построен многочлен $P_1(x)$, исходя из многочлена $P(x)$, и т. д., то получим последовательность многочленов $P_k(x) \in \mathfrak{P}_n$, $k = 1, 2, \ldots$, для которых, если положить (см. 3.6, 3.7, и 3.8)

$$A_k = A(P_k) \quad \text{и} \quad L_k = L(P_k),$$

будут иметь место неравенства

$$E_{\mathfrak{P}_n}(f) - A_k < \theta^k\,[E_{\mathfrak{P}_n}(f) - A],$$

$$L_k - E_{\mathfrak{P}_n}(f) < L_k - A_k < \frac{E_{\mathfrak{P}_n}(f) - A}{1-\theta},$$

где $0 < \theta < 1$ и θ не зависит от k (θ определяется функцией $f(x)$ и исходным многочленом $P(x)$).

Отсюда следует, что

$$\lim_{k\to\infty} A_k = \lim_{k\to\infty} L_k = E_{\mathfrak{P}_n}(f)$$

и, значит (см. теорему 2), последовательность многочленов $P_k(x)$ равномерно на отрезке $[a, b]$ сходится к чебышевскому многочлену наилучшего приближения функции $f(x)$.

Следует отметить, что существуют и другие методы приближенного построения многочленов наилучшего приближения; одни из них основаны подобно рассмотренному выше методу на подборе некоторой поправки, улучшающей выбранное a priori приближение, другие — на совсем других идеях, связанных, например, с приближениями функций в среднем. Все эти вопросы подробно освещены в монографиях [15], [18] и [20].

3.7. Наилучшие приближения непрерывных и дифференцируемых периодических функций тригонометрическими многочленами данной степени. Мы перейдем теперь к изучению влияния тех или иных свойств непрерывной функции $f(x)$ на скорость стремления к нулю ее наилучших приближений $E_{\mathfrak{P}_n}(f)$ или, в периодическом случае, $E_{\mathfrak{T}_n}(f)$. Начнем с периодического случая. Пусть $C_{2\pi}^*$, как и раньше, — класс непрерывных периодических периода 2π функций.

Теорема 1 (Д. Джексон). *Пусть функция $f(x) \in C_{2\pi}^*$ имеет k непрерывных производных, и пусть $\omega(\delta;\ f^{(k)})$ — модуль непрерывности k-й производной $f^{(k)}(x)$. Тогда*

$$E_{\mathfrak{T}_n}(f) \leqslant \frac{c\,\omega\left(\frac{1}{n};\ f^{(k)}\right)}{n^k},$$

где c — некоторая постоянная, зависящая только от k.

При доказательствах подобных теорем фундаментальное значение имеют интегральные представления вида

$$T(x) = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(t-x) f(t)\,dt$$

для тригонометрических многочленов $T(x) \in \mathfrak{T}_n$, достаточно точно аппроксимирующих данную функцию $f(x)$ (см. также п. 4.2).

Впрочем, подобные конструкции представляют и самостоятельный интерес. В качестве примера отметим один из результатов этого типа (из него, в частности, непосредственно вытекает теорема 1 при $k=0$).

Пусть $f(x) \in C_{2\pi}^*$, и пусть $\omega(\delta;\ f)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$. Тогда функция

$$T(x) = \frac{3}{2\pi n(2n^2+1)} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\sin\frac{n(t-x)}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^4 f(t)\,dt$$

является тригонометрическим многочленом класса $\mathfrak{T}_{2n-2}$, и для него имеет место неравенство

$$|T(x)-f(x)|\leqslant 6\omega\left(\frac{1}{n}; f\right).$$

Связь между наилучшими приближениями $E_{\mathfrak{T}_n}(f)$ и модулями непрерывности функции $f(x)$ освещена наиболее полно в работах С. Б. Стечкина, в которых привлечены к рассмотрению модули непрерывности высших порядков. Сформулируем определение последних для любой периодической периода 2π функции $f(x)$: величина

$$\omega_p(\delta; f)=\sup_{|h|\leqslant\delta}\ \sup_{-\infty<x<\infty}\left|\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}C_p^k f(x+kh)\right|$$

называется *модулем непрерывности* порядка $p=1, 2, 3, \ldots$ функции $f(x)$. Очевидно,

$$\omega_1(\delta; f)=\omega(\delta; f).$$

Отметим еще, что если $f(x)\in C_{2\pi}^*$ и $|f(x)|\leqslant M$ для всех x, то для наилучших приближений функции $f(x)$ имеет место установленное Ж. Фаваром неравенство

$$E_{\mathfrak{T}_n}(f)\leqslant\frac{MK_r}{(n+1)^r},\qquad n=0, 1, 2, \ldots,$$

где

$$K_r=\frac{4}{\pi}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\nu(r+1)}}{(2\nu+1)^{r+1}},\qquad r=1, 2, 3, \ldots$$

Теорема 2. (С. Б. Стечкин). *Пусть $f(x)\in C_{2\pi}^*$, и пусть существует производная $f^{(r)}(x)\in C_{2\pi}^*$ $(r=1, 2, 3, \ldots)$; тогда*

$$E_{\mathfrak{T}_n}(f)\leqslant\frac{2K_r}{(n+1)^r}E_{\mathfrak{T}_n}(f^{(r)}).$$

Теорема 3. *Пусть $f(x)\in C_{2\pi}^*$, тогда*

$$E_{\mathfrak{T}_n}(f)\leqslant c_p\omega_p\left(\frac{1}{n}; f\right),\qquad p=1, 2, 3, \ldots,\quad n=0, 1, 2, \ldots,$$

где постоянная c_p зависит от p.

При $p=1$ эта теорема доказана Джексоном (см. теорему 1), а при $p>1$ — С. Б. Стечкиным.

Можно и наоборот — оценить модуль непрерывности функции $f(x)$ посредством ее наилучших приближений.

Теорема 4 (С. Б. Стечкин). *Пусть* $f(x) \in C^*_{2\pi}$, *тогда*

$$\omega_p(\delta; f) \leqslant \frac{d_p}{n^p} \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{p-1} E_{\mathfrak{T}_n}(f), \qquad p = 1, 2, \ldots,$$

где $0 < \delta \leqslant 1$, $n \leqslant \frac{1}{\delta}$, *а постоянная* d *зависит от* k *).

Остановимся теперь более детально на частном случае, когда порядок убывания величины $E_{\mathfrak{T}}(f)$ носит степенной характер, точнее, когда $E_{\mathfrak{T}_n}(f)$ имеет порядок $1/n^r$, где $r > 0$. Для этого нам будет удобно ввести понятие H-классов.

Пусть $f(x) \in C^*_{2\pi}$, и пусть $r > 0$, $r = \bar{r} + \alpha$, где $\bar{r}$ — неотрицательное целое число, $0 < \alpha \leqslant 1$. Пусть, далее, функция $f(x)$ имеет непрерывную производную порядка $\bar{r}$ **). Функция $f(x)$ называется *функцией класса* $\overset{(r)}{H_*}(M)$, если существует постоянная $M > 0$ такая, что при любых действительных x и h имеет место неравенство

$$|f^{(\bar{r})}(x+h) - 2f^{(\bar{r})}(x) - f^{(\bar{r})}(x-h)| \leqslant M|h|^\alpha. \quad (3.11)$$

Отметим, что в случае $0 < \alpha < 1$ условие (3.11) эквивалентно обычному условию Гёльдера степени α для $\bar{r}$-й производной:

$$|f^{(\bar{r})}(x+h) - f^{(\bar{r})}(x)| \leqslant K|h|^\alpha.$$

Объединение классов $\overset{(r)}{H_*}(M)$ для всевозможных постоянных $M > 0$ при фиксированном r обозначим через $\overset{(r)}{H_*}$:

$$\overset{(r)}{H_*} = \bigcup_{M>0} \overset{(r)}{H_*}(M).$$

Наконец, через $\mathrm{Lip}^*_M 1$ обозначим совокупность функций $f(x) \in C^*_{2\pi}$, удовлетворяющих условию Липшица

$$|f(x+h) - f(x)| < M|h|,$$

*) Подобный результат в случае пространства L_p, $1 < p < \infty$, был получен ранее А. Ф. Тиманом.

**) Для наших дальнейших целей достаточно потребовать, чтобы функция $f(x)$ имела абсолютно непрерывную производную порядка $\bar{r} - 1$.

и пусть

$$\mathrm{Lip}^* 1 = \bigcup_M \mathrm{Lip}^*_M 1.$$

Очевидно, при $0 < \alpha < 1$ имеют место включения

$$\mathrm{Lip}^* 1 \subset \overset{(1)}{H^*} \subset \overset{(\alpha)}{H^*}. \tag{3.12}$$

Теорема 5. *Пусть* $f(x) \in \overset{(r)}{H^*}(M)$, $r > 0$, $r = \bar{r} + \alpha$, $\bar{r}$ — *неотрицательное целое число*, $0 < \alpha \leqslant 1$; *тогда*

$$E_{\mathfrak{T}_n}(f) \leqslant \frac{cM}{n^r},$$

где постоянная c *не зависит ни от* M, *ни от* n.

При $\alpha < 1$ эта теорема (являющаяся следствием теоремы 1) доказана Д. Джексоном, а при $\alpha = 1$ — А. Зигмундом.

Теорема, обратная теореме 5, в случае $0 < \alpha < 1$ является теоремой С. Н. Бернштейна, уточненной Валле-Пуссеном. Для ее доказательства фундаментальное значение имеет неравенство, носящее название *неравенства Бернштейна*, связывающее максимум абсолютной величины производной тригонометрического многочлена с максимумом абсолютной величины самого многочлена: пусть $T(x)$ — тригонометрический многочлен степени n, тогда

$$\max_{-\infty < x < \infty} |T'(x)| \leqslant n \max_{-\infty < x < \infty} |T(x)|.$$

Это неравенство находит разнообразное применение и в различных других вопросах теории функций.

Теорема 6. *Пусть* $f(x) \in C^*_{2\pi}$, $r > 0$ *и* $r = \bar{r} + \alpha$, $\bar{r}$ — *неотрицательное целое число*, $0 < \alpha \leqslant 1$. *Тогда если для всех натуральных* n*) *имеет место неравенство*

$$E_{\mathfrak{T}_n}(f) \leqslant \frac{A}{n^r}, \tag{3.13}$$

где A — *некоторая постоянная, то* $f(x) \in \overset{(r)}{H^*}(M)$, *где* $M \leqslant c\,[A + \max\limits_{-\infty < x < \infty} |f(x)|]$, *причем постоянная* c *не зависит от* A *и* f.

---

*) Утверждение теоремы остается в силе, если потребовать, чтобы неравенство (3.13) выполнялось лишь для некоторой последовательности n, образующей возрастающую геометрическую последовательность.

Случай $0<\alpha<1$ был, как уже отмечалось, рассмотрен С. Н. Бернштейном, а случай $\alpha=1$ — А. Зигмундом.

Мы видим, что теоремы 5 и 6 вместе дают необходимое и достаточное условие принадлежности функции $f(x)$ к классу $H_*^{(r)}$, выраженное в терминах наилучших приближений.

Что же касается случая, когда функция $f(x)\in C_{2\pi}^*$ имеет производную $f^{(k)}(x)\in \mathrm{Lip}^*\,1$, то из теоремы 5 и включения (3.12) следует, что существует постоянная $A>0$ такая, что

$$E_{\mathfrak{T}_n}(f)\leqslant \frac{A}{n^{k+1}}. \tag{3.14}$$

Однако из того, что для некоторой функции $f(x)\in C_{2\pi}^*$ и всех натуральных n выполнено неравенство (3.14), вообще говоря, не следует, что функция $f(x)$ имеет производную $f^{(k)}(x)$, принадлежащую классу $\mathrm{Lip}^*\,1$. Например, для функции $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^2}$ имеет место неравенство $E_{\mathfrak{T}_n}(f)<\frac{1}{n}$, однако $f(x)\overline{\in}\,\mathrm{Lip}^*\,1$. С другой стороны, оценка (3.14) для рассматриваемых функций не может быть улучшена в смысле увеличения показателя у n, так как это означало бы, согласно теореме 6, что рассматриваемая функция на самом деле имеет и производную порядка $k+1$.

Отметим еще, что вопрос о том, как охарактеризовать в терминах наилучших приближений класс, состоящий из всех функций $f(x)\in C_{2\pi}^*$, имеющих ограниченную производную, и только из таких функций, а также и вообще вопрос о возможности этого, остается в настоящее время открытым.

Рассмотрим теперь бесконечно дифференцируемые функции.

Теорема 7 (С. Н. Бернштейн). *Для того чтобы функция $f(x)\in C^*$ имела производные любого порядка, необходимо и достаточно, чтобы при любом $r>0$ имело место равенство*

$$\lim_{n\to\infty} n^r E_{\mathfrak{T}_n}(f)=0.$$

Для формулировки результата, характеризующего наилучшие приближения аналитических функций, введем следующее определение: функция $f(x)\in C_{2\pi}^*$ называется *функцией класса* $A_{2\pi}^*$, если существует $R>0$ такое, что функция $f(x)$

при $|x-x_0|<R$ раскладывается в степенной ряд

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-x_0)^k,$$

коэффициенты c_k которого зависят, вообще говоря, от x_0: $c_k=c_k(x_0)$. Если при этом $R=+\infty$, то функция $f(x)$ называется *целой* функцией, а подкласс целых функций класса $A_{2\pi}^*$ обозначается через $\mathfrak{G}_{2\pi}^*$.

Теорема 8 (С. Н. Бернштейн). *Пусть* $f(x)\in C_{2\pi}^*$. *Тогда* $f(x)\in A_{2\pi}^*$ *в том и только том случае, если*

$$E_{\mathfrak{T}_n}(f)\leqslant kq^n,$$

где k *и* $q<1$ — *некоторые постоянные.*

Теорема 9 (С. Н. Бернштейн). *Пусть* $f(x)\in C_{2\pi}^*$, *тогда* $f(x)\in \mathfrak{G}_{2\pi}^*$ *в том и только том случае, если*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_{\mathfrak{T}_n}(f)}=0.$$

В ряде случаев удается получить не только оценку порядка наилучших приближений для некоторого класса функций, но и точную величину наилучшего приближения. Отметим один из результатов этого типа.

Пусть r — неотрицательное целое, $K>0$. Обозначим через $W_*^{(r)}(K)$ совокупность всех периодических периода 2π функций, имеющих непрерывную производную порядка r такую, что

$$|f^{(r)}(x)|\leqslant K, \quad -\infty<x<\infty.$$

Теорема 10 (Ж. Фавар — Н. И. Ахиезер — М. Г. Крейн).

$$\sup_{f\in W_*^{(r)}(K)} E_{\mathfrak{T}_{n-1}}(f)=\frac{4K}{\pi n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}.$$

До сих пор мы рассматривали в основном прямую и обратную связь между свойствами функций данного класса и скоростью стремления к нулю наилучших приближений функций указанного класса. Следует заметить, что представляет интерес и круг задач другого типа. Именно, пусть задан некоторый класс непрерывных периодических функций; возникает вопрос: можно ли что-либо сказать в целом о свойствах многочленов наилучших приближений функций данного класса на основании тех или иных свойств самих функций указанного класса. Не меньший интерес представляет, конечно, и обратная задача. Отметим в качестве примера один из подобных результатов. Для функции $f(x) \in C_{2\pi}^*$ обозначим через $T_n^*(x; f)$ тригонометрический многочлен наилучшего приближения степени не выше чем n: $T_n^*(x; f) \in \mathfrak{T}_n$, и для любого α, $0 < \alpha < 1$, для простоты положим по определению $\mathrm{Lip}_M^*\alpha = H_*^{(\alpha)}(M)$.

Теорема 11 (С. Б. Стечкин). *Для того чтобы функция $f(x)$ принадлежала классу $\mathrm{Lip}_M^*\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, необходимо и достаточно, чтобы нашлась постоянная $c > 0$, не зависящая от n, такая, что*

$$T_n^*(x; f) \in \mathrm{Lip}_{cM}^*\alpha$$

для всех $n = 1, 2, \ldots$

Сведения о других результатах и дальнейшем развитии теории наилучших приближений функций класса $C_{2\pi}^*$ можно найти в [1], [3], [4], [7], [8], [11], [12].

3.8. Наилучшие приближения непрерывных и дифференцируемых функций алгебраическими многочленами данной степени. В непериодическом случае вопрос об оценке порядка наилучших приближений функций с помощью алгебраических многочленов значительно сложнее аналогичной задачи для периодического случая, рассмотренного в предыдущем пункте. Первоначально в работах Д. Джексона, С. Н. Бернштейна, А. Зигмунда, П. Монтеля ряд задач о характеристике гладкости функции в терминах наилучших приближений был исследован не для всего отрезка $[a, b]$, на котором задана рассматриваемая функция, а только для любого внутреннего отрезка $[a', b']$, лежащего в интервале (a, b). Лишь в самое последнее время благодаря результатам, полученным С. М. Никольским, А. Ф. Тиманом и Б. К. Дзядыком, здесь удалось получить в известном смысле законченное решение определенного круга вопросов, причем это оказалось сделанным не в терминах наилучших приближений $E_{\mathfrak{P}_n}(f)$, однако в довольно близких к ним по идее. Мы и сформулируем здесь сначала эти результаты. Начнем с обобщения теоремы Д. Джексона, принадлежащего А. Ф. Тиману.

Теорема 1 (А. Ф. Тиман). *Пусть задано число* k ($k=0, 1, 2, \ldots$) *и* $f(x)\in C^{(k)}[a, b]$. *Тогда для любого* $n=0, 1, 2, \ldots$ *существует многочлен* $P(x)\in \mathfrak{P}_n$ *такой, что для любого* $x\in[a, b]$ *имеет место неравенство*

$$|f(x)-P(x)|\leqslant \frac{c}{n^k}\left[\sqrt{(b-x)(x-a)}+\frac{\left|x-\frac{a+b}{2}\right|}{n}\right]^k \times$$

$$\times\,\omega\left[\frac{1}{n}\left(\sqrt{(b-x)(x-a)}+\frac{\left|x-\frac{a+b}{2}\right|}{n}\right),\ f^{(k)}\right],$$

где постоянная c *не зависит ни от* n, *ни от* x.

Мы видим, что в отличие от теоремы Д. Джексона для периодического случая (см. п. 3.7) *) приведенная оценка приближения функции многочленом зависит от положения точки x на отрезке.

Только такого рода оценки и позволяют в непериодическом случае для некоторых классов функций обратить теорему 1 (см. ниже теорему 3). Впервые результат, подобный теореме 1 и являвшийся качественно новым для своего времени, был получен в одном важном случае С. М. Никольским.

Для формулировки дальнейших результатов по аналогии с классами $H^{(r)}_*$ определим для непериодического случая классы $H^{(r)}$.

Пусть $r>0$, $r=\bar{r}+\alpha$, $\bar{r}$—неотрицательное целое число, $0<\alpha\leqslant 1$. Функция $f(x)$ называется *функцией класса* $H^{(r)}$ на отрезке $[a, b]$, если $f(x)\in C^{(\bar{r})}[a, b]$ и существует постоянная $M>0$ такая, что в случае $0<\alpha<1$ имеет место

$$|f^{(\bar{r})}(x+h)-f^{(\bar{r})}(x)|\leqslant M|h|^{\alpha},$$

а в случае $\alpha=1$ справедливо

$$|f^{(\bar{r})}(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\leqslant M|h|,$$

где $x\in[a, b]$, $x\pm h\in[a, b]$.

Теорема 2 (А. Ф. Тиман — В. К. Дзядык). *Пусть функция* $f(x)$ *является функцией класса* $H^{(r)}$ *на отрезке*

*) А также в отличие от соответствующей теоремы Джексона для непериодического случая, которую мы здесь не приводим.

$[a, b]$. *Тогда для любого* $n=0, 1 \ldots$ *существует многочлен* $P_n(x) \in \mathfrak{P}_n$ *такой, что*

$$|f(x)-P_n(x)| \leqslant \frac{c}{n^r}\left\{\left[\sqrt{(x-a)(b-x)}\right]^r+\frac{1}{n^r}\right\},$$

где постоянная c *не зависит ни от* n, *ни от* x *).

Для этой теоремы имеет место и обратная теорема, аналогичная теореме С. Н. Бернштейна для периодического случая (см. п. 3.8).

Теорема 3 (В. К. Дзядык). *Пусть задано* $r>0$, *пусть функция* $f(x)$ *определена на отрезке* $[a, b]$, *и пусть для любого* $n=0, 1, 2, \ldots$ *существует многочлен* $P_n(x) \in \mathfrak{P}_n$ *такой, что для всех* $x \in [a, b]$ *имеет место неравенство*

$$|f(x)-P_n(x)| \leqslant \frac{c}{n^r}\left\{\left[\sqrt{(x-a)(b-x)}\right]^r+\frac{1}{n^r}\right\},$$

где постоянная c *не зависит ни от* n, *ни от* x.

Тогда

$$f(x) \in H^{(r)}.$$

Теоремы 2 и 3 в совокупности дают необходимое и достаточное условие принадлежности функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ к классу $H^{(r)}$, выраженное через оценку скорости приближения функции $f(x)$ многочленами степени n, однако в отличие от периодического случая эти оценки зависят не только от степени приближающего многочлена, но и от положения точки на отрезке; тем самым в это условие не входит понятие наилучшего приближения $E_{\mathfrak{P}_n}(f)$, хотя по своей идее оба условия довольно тесно связаны.

Обобщения теорем 1 — 3 с помощью оценок отклонений функций от аппроксимирующих их многочленов через модули непрерывности получены А. Ф. Тиманом [19].

Отметим неравенства для алгебраических многочленов, полученные А. А. Марковым и С. Н. Бернштейном и уста-

---

*) Пусть $r=\bar{r}+\alpha$, $\bar{r}$ — неотрицательное целое число, $0<\alpha\leqslant 1$. Теорема 2 при $0<\alpha<1$ доказана А. Ф. Тиманом, а при $\alpha=1$ В. К. Дзядыком.

навливающие связь между абсолютной величиной многочлена и его производной: пусть $P_n(x) \in \mathfrak{P}_n$ и

$$|P(x)| \leqslant L, \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

тогда

$$|P'(x)| \leqslant \frac{2n^2 L}{b-a}, \qquad a \leqslant x \leqslant b,$$

и

$$|P'(x)| \leqslant \frac{nL}{\sqrt{(b-x)(x-a)}}, \qquad a < x < b.$$

Эти неравенства — точные в том смысле, что при любом n существуют многочлены, для которых они хотя бы в одной точке обращаются в равенство.

Отметим, однако, что для доказательства теоремы 3 потребовалось более точное неравенство, полученное В. К. Дзядыком: пусть многочлен $P_n(x)$ порядка не выше n удовлетворяет на интервале $(-1, 1)$ при произвольном действительном ρ неравенству

$$|P_n(x)| \leqslant L\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{\rho},$$

где L — постоянная. Тогда при каждом $x \in (-1, 1)$ производная $P'_n(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|P'_n(x)| \leqslant cnL\left(\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n}\right)^{\rho-1};$$

здесь c — постоянная, зависящая только от ρ.

Свойство быть бесконечно непрерывно дифференцируемой функцией можно охарактеризовать в терминах наилучших приближений следующим образом:

Теорема 4 (Д. Джексон). *Пусть $f(x) \in C^k[a, b]$ для всех $k = 0, 1, \ldots$; тогда при любом $k = 0, 1, \ldots$*

$$\lim_{n\to\infty} n^k E_{\mathfrak{P}_n}(f) = 0. \tag{3.15}$$

Теорема, в известном смысле обратная этой, читается так:

Теорема 5 (С. Н. Бернштейн). *Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, и пусть для любого $k = 0, 1, 2, \ldots$ справедливо равенство*

$$\lim_{n\to\infty} n^k E_{\mathfrak{P}_n}(f) = 0;$$

тогда функция $f(x) \in C[a, b]$ *бесконечно непрерывно дифференцируема на интервале* (a, b).

В теореме 5 утверждается лишь дифференцируемость на интервале (a, b), поэтому она не является полным обращением теоремы 4.

Перейдем к характеристике аналитических функций с помощью наилучших приближений. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется *аналитической* на этом отрезке, если для каждой точки x_0 этого отрезка существует окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, в которой функция $f(x)$ представима в виде степенного ряда, т. е.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_0)(x - x_0), \qquad x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b].$$

Совокупность всех функций, аналитических на отрезке $[a, b]$, будем обозначать через $A[a, b]$.

Теорема 6 (С. Н. Бернштейн). *Для того чтобы* $f(x)$ *принадлежала* $A[a, b]$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$E_{\mathfrak{P}_n}(f) \leqslant kq^n,$$

где k *и* $q < 1$ *— некоторые постоянные.*

Условие же

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{E_{\mathfrak{P}_n}(f)} = 0$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы функция $f(x)$ *была целой функцией.*

В терминах теории функций комплексного переменного свойства наилучших приближений аналитических функций выражаются следующим образом:

Теорема 7 (С. Н. Бернштейн). *Пусть* $f(x) \in C[a, b]$ *и*

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{E_{\mathfrak{P}_n}(f)} = \frac{1}{R} \; (R > 1); \tag{3.16}$$

тогда существует функция $F(z)$, *аналитическая внутри эллипса с фокусами в точках* a *и* b *и с суммой полуосей* $\frac{b-a}{2}R$, *имеющая особую точку на его контуре и совпадающая с* $f(x)$ *на отрезке* $[a, b]$.

Обратно, *если функция $F(z)$ аналитична внутри эллипса с фокусами в точках a и b и имеет особую точку на его контуре, то ее наилучшее приближение $E_{\mathfrak{P}_n}(F)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяет условию* (3.16), *где* $\frac{b-a}{2}R$ *есть сумма полуосей указанного эллипса.*

Для некоторых классов непериодических функций $f(x)$, а также для некоторых индивидуальных функций удается установить не только порядок убывания наилучших приближений $E_{\mathfrak{P}_n}(f)$, но и их точное или асимптотическое значение.

Рассмотрим сначала эту задачу для индивидуальной функции $f(x)$ и укажем на примере одной теоремы С. М. Никольского, как определяется асимптотическое значение $E_{\mathfrak{P}_n}(f)$ по индивидуальным свойствам функции $f(x)$. Кстати, до сих пор мы еще не рассматривали задач такого типа.

С. Н. Бернштейном было показано, что при любом $k > 0$ существует конечный предел

$$\lim_{n \to \infty} n^k E_{\mathfrak{P}_n}(|x|^k) = \mu(k),$$

т. е.

$$E_{\mathfrak{P}_n}(|x|^k) \approx \frac{\mu(k)}{n^k}, \qquad n \to \infty.$$

Теорема 8 (С. М. Никольский). *Пусть k — нечетное число, $f(x) \in C^{(k-1)}[-1, 1]$, производная $f^{(k-1)}(x)$ абсолютно непрерывна на $[-1, 1]$* *), *производная $f^{(k)}(x)$ имеет на отрезке $[-1, 1]$ только разрывы первого рода, и существует хотя бы одно $x_0 \in (-1, 1)$ такое, что $f^{(k)}(x_0+0) \neq f^{(k)}(x_0-0)$. Тогда*

$$E_{\mathfrak{P}_n}(f) \approx \frac{\varkappa \mu(k)}{2k!\, n^k} \text{ при } n \to \infty,$$

где

$$\varkappa = \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f^{(k)}(x+0) - f^{(k)}(x-0)|\,(1-x^2)^{\frac{k}{2}}.$$

---

*) Значит, почти всюду на $[-1, 1]$ существует производная $f^{(k)}(x)$.

Аналогичная теорема получена С. М. Никольским и для четного k; следует только вместо $\mu(k)$ поставить постоянную

$$\nu(k)=\lim_{n\to\infty} n^k E_{\mathfrak{P}_n}(x\,|\,x\,|^{k-1}).$$

Перейдем теперь к асимптотическим оценкам наилучших приближений для классов функций.

Обозначим через $\mathrm{Lip}_M\,1$ класс функций $f(x)$, определенных на некотором фиксированном $[a, b]$ и удовлетворяющих на нем условию Липшица с постоянной M:

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant M\,|\,h\,|,\qquad x\in[a, b],\qquad x+h\in[a, b].$$

Теорема 9 (С. М. Никольский). *Справедливо равенство*

$$\sup_{f\in \mathrm{Lip}_M 1} E_{\mathfrak{P}_n}(f)=\frac{M\pi}{2n}-\varepsilon_n,$$

где $\varepsilon_n>0$, $\varepsilon_n=O\left(\frac{1}{n\ln n}\right)$.

Пусть, далее $\mathfrak{A}_K[a, b]$ — класс функций, аналитических в эллипсе с фокусами в точках a и b и полусуммой осей, равной h, причем в указанном эллипсе

$$|\operatorname{Re} f(z)|\leqslant K.$$

Через $E_{\mathfrak{P}_n}(f)$ в этом случае будем обозначать наилучшее приближение функции $f(z)\in\mathfrak{A}_K[a, b]$ на отрезке с помощью многочленов класса $\mathfrak{P}_n$.

Теорема 10 (Н. И. Ахиезер).

$$\sup_{f(z)\in\mathfrak{A}_K[a, b]} E_{\mathfrak{P}_n}(f)=\frac{8K}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{e^{-(2l+1)nh}}{1+e^{-2(2l+1)nh}}\,\frac{1}{2l+1}.$$

О других вопросах теории равномерных наилучших приближений алгебраическими многочленами см. в [1], [3], [4], [6], [7], [8], [9], [11] и [12].

3.9. Наилучшие приближения функций целыми функциями. Займемся вопросом приближения функций, определенных и ограниченных на всей оси. В этом случае алгебраические многочлены в силу своей неограниченности на всей действительной прямой не являются аппаратом, пригодным для непосредственной аппроксимации указанных функций.

Поэтому здесь приходится в качестве аппроксимирующих функций брать другие, например целые функции экспоненциального типа *).

Пусть фиксировано $\sigma > 0$. Функция $g(z)$ комплексного аргумента z называется *целой функцией экспоненциального типа* степени не выше σ, если

1°. $g(z)$ раскладывается в степенной ряд, сходящийся на всей плоскости.

2°. Для любого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $A > 0$ такая, что при любом z

$$|g(z)| < Ae^{(\sigma+\varepsilon)|z|}.$$

Совокупность всех целых функций экспоненциального типа степени не выше σ, ограниченных на всей действительной оси, будем обозначать через $\mathfrak{G}_\sigma$.

Теория наилучших приближений действительных функций, определенных, ограниченных и непрерывных на всей числовой оси, с помощью целых функций экспоненциального типа построена С. Н. Бернштейном и в известном смысле аналогична теории наилучших приближений периодических непрерывных функций с помощью тригонометрических многочленов. Указанная аналогия выражается, в частности, в том, что подобно тригонометрическим многочленам для экспоненциальных функций имеет место следующее утверждение (С. Н. Бернштейн):

Если $g(x) \in \mathfrak{G}_\sigma$, *то*

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |g'(x)| \leqslant \sigma \sup_{-\infty < x < \infty} |g(x)|,$$

причем это неравенство точное, т. е. в нем знак равенства достигается для функций вида

$$g(z) = ae^{i\sigma z} + b^{-i\sigma z}$$

и только для них.

Для того чтобы установить связь между степенью гладкости рассматриваемой функции и скоростью убывания ее наилучших приближений с помощью функций класса $\mathfrak{G}_\sigma$, оказывается удобным рассматривать введенный в п. 3.8 класс $H^{(r)}$ (в определении класса $H^{(r)}$ в п. 3.8 следует считать теперь

*) О другом подходе к этому вопросу см. в п. 3.10.

$a=-\infty$, $b=\infty$); при этом дополнительно будем предполагать, что функции класса $H^{(r)}$ ограничены на всей числовой оси.

Величина

$$E_{\mathfrak{G}_\sigma}(f)=\inf_{g\in\mathfrak{G}_\sigma}\sup_{-\infty<x<\infty}|f(x)-g(x)|$$

называется *наилучшим приближением функции* $f(z)$ *с помощью целых функций класса* $\mathfrak{G}_\sigma$.

Теорема (С. Н. Бернштейн). *Для того чтобы функция* $f(x)$ *принадлежала классу* $H^{(r)}$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная* $c>0$ *такая, что для всех целых* n *имело бы место*

$$E_{\mathfrak{G}_\sigma}(f)\leqslant\frac{c}{n^r}. \tag{3.17}$$

Условие (3.17) остается достаточным для принадлежности функции $f(z)$ к классу $H^{(r)}$, если оно выполняется не для всех n, а лишь для последовательности n, пробегающей некоторую возрастающую геометрическую последовательность.

3.10. Взвешенные приближения функций на всей числовой оси. Рассмотрим теперь некоторые вопросы приближения непрерывных функций, определенных на всей числовой оси, относительно некоторого заданного веса.

Пусть функция $\Phi(x)$ определена и положительна для всех действительных x, и пусть

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{x^n}{\Phi(x)}=0,\qquad n=1,\ 2,\ \ldots$$

Рассмотрим совокупность всех непрерывных функций, каждая из которых определена на всей числовой оси и удовлетворяет условию

$$\lim_{|x|\to\infty}\frac{f(x)}{\Phi(x)}=0.$$

Эта совокупность при помощи нормы

$$\|f\|_\Phi=\sup_{-\infty<x<\infty}\frac{|f(x)|}{\Phi(x)} \tag{3.18}$$

превращается в нормированное пространство, которое мы обозначим через C_Φ^0. Если множество всех алгебраических многочленов расположено всюду плотно в пространстве C_Φ^0 относительно метрики, порожденной нормой (3.18), то функция $\Phi(x)$ называется *весовой*. Таким образом, функция $\Phi(x)$ называется весовой, если любая функция класса C_Φ^0 может быть с любой степенью точности в смысле метрики (3.18) приближена многочленом.

Для того чтобы функция $\Phi(x)$ была весовой, необходимо и достаточно (С. Н. Бернштейн — Н. И. Ахиезер), чтобы

$$\sup_{P(x)\in\mathfrak{K}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|P(x)|}{1+x^2}\,dx < \infty,$$

где $\mathfrak{K}$ — множество всех алгебраических многочленов $P(x)$, для которых $\|P\|_\Phi \leqslant 1$.

С. Н. Мергелян показал, что если

$$M(z) = \sup_{P\in L} |P(z)|,$$

где L — совокупность всех алгебраических многочленов $P(x)$, у которых

$$\sup_{-\infty<x<\infty} \frac{|P(x)|}{\Phi(x)(1+|x|)} \leqslant 1,$$

то условие $M(z) = +\infty$ при $\operatorname{Im} z \neq 0$ необходимо и достаточно для того, чтобы функция $\Phi(x)$ была весовой.

О вопросе приближения функций с весом можно читать [2], [3], [8], [10].

§ 4. Методы равномерного приближения функций

В настоящем параграфе мы рассмотрим некоторые эффективные методы построения многочленов, аппроксимирующих заданную функцию, и оценки погрешностей приближений функций, которые получаются при этих методах. Отдельные результаты по этим вопросам отмечались нами выше (см. теоремы 3 и 4 в п. 3.3, а также п. 3.6).

4.1. Приближение периодических функций суммами Фурье. Совокупность всех суммируемых *) на отрезке $[-\pi, \pi]$ функций обозначим через $L[-\pi, \pi]$. Пусть $f(x) \in L[-\pi, \pi]$, тогда ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{4.1}$$

у которого коэффициенты a_k, b_k, называемые *коэффициентами Фурье*, определяются по формулам

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx\, dx,$$

называется, как это хорошо известно, *рядом Фурье* данной функции $f(x)$; его частная сумма n-го порядка называется *суммой Фурье n-го порядка* функции $f(x)$ и обозначается через $S_n(x;\ f)$.

Если функция $f(x)$ имеет период 2π, то ее частные суммы Фурье могут быть записаны в виде

$$S_n(x;\ f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) f(x+u)\, du,$$

где

$$D_n(u) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} u}{\sin \frac{u}{2}}.$$

*) Определение суммируемости см. в гл. I настоящей книги.

Функция $D_n(u)$ называется *ядром Дирихле n-го порядка.* Для нее справедливы следующие соотношения:

$$D_n(-u) = D_n(u),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi D_n(u)\,du = 1.$$

Теорема 1. *Если $f(x) \in C[-\pi, \pi]$, $g(x) \in C[-\pi, \pi]$ и все коэффициенты Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$ совпадают, то функция $f(x)$ тождественна с функцией $g(x)$.*

Теорема 2. *Если ряд Фурье функции $f(x) \in C^*_{2\pi}$ сходится в точке x_0, то он сходится к $f(x_0)$.*

Отметим также результат Дю-Буа-Реймонда о том, что для произвольной непрерывной периодической периода 2π функции $f(x)$ ее ряд Фурье не обязан сходиться во всех точках периода. А. Н. Колмогоров построил пример суммируемой функции, ряд Фурье которой расходится во всех точках.

Теорема 3. *Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[-\pi, \pi]$ и имеет на нем ограниченную вариацию* *), *тогда ее ряд Фурье сходится в каждой точке $x \in [-\pi, \pi]$ к значению*

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},$$

а в точках $x = \pm\pi$ — к значению

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}.$$

В частности, в точках непрерывности рассматриваемой функции $f(x)$ ее ряд Фурье сходится к $f(x)$.

Перейдем теперь к вопросу о скорости приближения сумм Фурье некоторой функции $f(x)$ к этой функции.

Теорема 4 (А. Лебег). *Пусть $f(x) \in C^*_{2\pi}$, тогда*

$$|S_n(x; f) - f(x)| \leqslant (3 + \ln n)\, E_{\mathfrak{T}_n}(f).$$

---

*) Отсюда следует, что функция $f(x)$ представима как разность двух ограниченных монотонных функций и, значит, интегрируема.

Эта теорема показывает, что, чем глаже функция $f(x)$, в частности, чем больше она имеет производных, тем лучше к ней сходятся ее частные суммы Фурье, ибо в этом случае, согласно результатам п. 3.7, наилучшие приближения $E_{\mathfrak{T}_n}(f)$ быстрее убывают.

Теорема 5. *Пусть модуль непрерывности* $\omega(\delta;\ f)$ *периодической периода* 2π *функции* $f(x)$ *удовлетворяет условию Дини — Липшица*

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta;\ f) \ln \delta = 0;$$

тогда функция $f(x)$ *раскладывается в равномерно сходящийся ряд Фурье.*

Точное асимптотическое выражение для отклонений частных сумм Фурье от функций данного класса впервые было получено А. Н. Колмогоровым.

Теорема 6 (А. Н. Колмогоров). *Пусть* $W_*^{(r)}(K)$ (r — *неотрицательное целое число*) — *совокупность всех периодических периода* 2π *функций* $f(x)$, *имеющих непрерывную производную порядка* r *такую, что* $|f^{(r)}(x)| \leqslant K$. *Тогда*

$$\sup_{f(x) \in W_*^{(r)}(K)} \sup_{-\infty < x < \infty} |f(x) - S_n(x;\ f)| = \frac{4}{\pi^2} \frac{K \ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

При $r = 0$ этот результат тесно связан с одним результатом А. Лебега, именно с неравенством

$$M_n = \sup_{|f| \leqslant K} \sup_{-\infty < x < \infty} |S_n(x;\ f)| = \frac{4K}{\pi} \ln n + O(1),$$

$$f(x) \in C_{2\pi}^*.$$

Можно показать, что уже отсюда, точнее, даже лишь из того, что $\lim\limits_{n \to \infty} M_n = \infty$, следует, что существует непрерывная функция, ряд Фурье которой заведомо расходится хотя бы в одной точке периода.

Для случая функции $f(x)$, r-я производная которой удовлетворяет условию Гёльдера, соответствующий результат получен С. М. Никольским.

Теорема 7 (С. М. Никольский). *Справедливо соотношение*

$$\sup_{f(x)\in H_*^{(r)}(M)}\ \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x)-S_n(x;\ f)| =$$

$$= \frac{2^{\alpha+1}M}{\pi^{\bar r}}\frac{\ln n}{n^r}\int\limits_0^{\pi/2} v^\alpha \sin v\, dv + O\left(\frac{1}{n^r}\right),$$

где $\bar r$ — неотрицательное целое число $r=\bar r+\alpha$, $0<\alpha<1$ (см. п. 3.7).

Теоремы 6 и 7 показывают, что хотя скорость стремления сумм Фурье к функции рассматриваемого класса (т. е. порядок отклонения $S_n(x;\ f)$ от $f(x)$ в целом для данного класса) в известном смысле и хуже, чем скорость стремления наилучших приближений, но для ряда задач (и прежде всего прикладного характера) это ухудшение не имеет существенного значения (рассматриваемый порядок отклонения сумм Фурье отличается от порядка наилучших приближений в соответствующих случаях при $n\to\infty$ не больше чем на $\ln n$). Это обстоятельство, а также простота вычислений сумм Фурье и то, что скорость сходимости их к функции увеличивается при увеличении гладкости функции, обусловливают широкое применение приближения функций посредством сумм Фурье как в теоретических, так и в прикладных вопросах. Суммы Фурье безусловно являются одним из самых удобных и распространенных методов приближения функций.

4.2. Линейные методы приближения периодических функций тригонометрическими многочленами (методы Фейера, Валле-Пуссена и Бернштейна — Рогозинского). Пусть $f(x)\in L[-\pi,\ \pi]$ и $S_n(x;\ f)$ — ее суммы Фурье порядка $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Сумма

$$\sigma_n(x;\ f)=\frac{S_0(x;\ f)+S_1(x;\ f)+\ldots+S_{n-1}(x;\ f)}{n}$$

называется *суммой Фейера* функции $f(x)$ *порядка* n.

В случае, когда $f(x)$ — периодическая периода 2π функция, сумму Фейера $\sigma_n(x;\ f)$ можно представить в виде

$$\sigma_n(x;\ f)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Phi_n(u)f(x+u)\,du,$$

где

$$\Phi_n(u) = \frac{\sin^2 \frac{n}{2} u}{n \sin^2 \frac{u}{2}}.$$

Функция $\Phi_n(u)$ называется *ядром Фейера* и обладает следующими свойствами:

1°. $\Phi_n(u) \geqslant 0$,

2°. $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi_n(u)\, du = 1$,

3°. $M(\delta) \equiv \max\limits_{0 < \delta \leqslant |u| \leqslant \pi} \Phi_n(u) \to 0$ при $n \to \infty$

и любом фиксированном $\delta > 0$.

Для функций $f(x) \in C_{2\pi}^*$ их суммы Фейера удовлетворяют неравенству

$$|\sigma_n(x;\ f)| \leqslant \max_{-\infty < x < \infty} |f(x)|.$$

Теорема 1 (Л. Фейер). *Пусть $f(x) \in C_{2\pi}^*$, тогда последовательность сумм Фейера $\sigma_n(x;\ f)$ равномерно сходится на всей числовой оси к функции $f(x)$.*

Скорость приближения сумм Фейера $\sigma_n(x;\ f)$ к функции $f(x)$ первоначально была исследована С. Н. Бернштейном, затем для ряда важных классов функций С. М. Никольский нашел ее точное асимптотическое выражение.

Теорема 2 (С. М. Никольский). *Пусть*

$$f(x) \in H_*^{(r)}(M),\quad 0 < r < 1,$$

тогда

$$\sup_{f \in H_*^{(r)}(M)} \max_{-\infty < x < \infty} |\sigma_n(x;\ f) - f(x)| = \frac{2M\Gamma(r)}{\pi(1-r)} \frac{\sin \frac{r\pi}{2}}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Теорема 3 (С. М. Никольский). *Пусть*

$$f(x) \in \mathrm{Lip}_M^* 1,$$

тогда

$$\sup_{f \in \mathrm{Lip}^*_M 1} \max_{-\infty < x < \infty} |\sigma_n(x;\ f) - f(x)| = \frac{2M \ln n}{\pi n} + O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Любопытно отметить, что при рассмотрении классов более гладких функций, например классов $H^{(r)}_*$ при $r > 1$, верхняя грань отклонений сумм Фейера n-го порядка от соответствующих функций не улучшается и не может иметь порядок более высокий, чем $1/n$. Это видно уже из того, что для целой функции $f(x) = 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ имеем

$$\sigma_n(0) = \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 nt\, dt = \frac{1}{n}.$$

Суммы вида

$$V_{n,\,p} = \frac{S_n(x;\ f) + \ldots + S_{n+p-1}(x;\ f)}{p}$$

называются *суммами Валле-Пуссена* $(n,\ p)$*-го порядка* для функции $f(x)$. Мы рассмотрим простейший случай $p = n$ и будем писать $V_{n,\,n}(x;\ f) = V_n(x;\ f)$. Если функция $f(x)$ является тригонометрическим многочленом степени m, то при $n \geqslant m$ сумма Валле-Пуссена $V_n(x;\ f)$ совпадает с $f(x)$ (этим свойством, очевидно, обладают суммы Фурье, но не обладают суммы Фейера). Кроме того, имеет место неравенство

$$|V_n(x;\ f)| \leqslant 3 \max_{-\infty < x < \infty} |f(x)|, \quad f(x) \in C^*_{2\pi}.$$

Теорема 4 (Ш. Валле-Пуссен). Пусть $f(x) \in C^*_{2\pi}$. *Тогда*

$$|V_n(x;\ f) - f(x)| \leqslant 4E_{\mathfrak{T}_n}(f).$$

Пусть функция $f(x)$ суммируема на отрезке $[-\pi,\ \pi]$, интеграл

$$J_n(x;\ f) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos^{2n} \frac{t-x}{2}\, dt$$

называется *сингулярным интегралом Валле-Пуссена* n-го *порядка* для функции $f(x)$. Функция $J_n(x;\ f)$ является тригонометрическим многочленом степени не выше n.

Теорема 5 (Ш. Валле-Пуссен). *Пусть* $f(x) \in C_{2\pi}^*$, *тогда последовательность ее интегралов Валле-Пуссена* $\{J_n(x;\ f)\}$ *равномерно на всей числовой оси сходится к функции* $f(x)$; *при этом имеет место оценка*

$$|J_n(x;\ f) - f(x)| \leqslant 3\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}};\ f\right).$$

И. П. Натансон исследовал асимптотическое поведение отклонений интеграла Валле-Пуссена в целом от функций, удовлетворяющих условию Гёльдера. Для удобства формулировки положим по определению $\mathrm{Lip}_M^*\alpha = H_*^{(\alpha)}(M)$ при $0 < \alpha < 1$.

Теорема 6 (И. П. Натансон).

$$\sup_{f(x) \in \mathrm{Lip}_M^*\alpha} \max_x |J_n(x;\ f) - f(x)| = \frac{2^\alpha M}{\sqrt{\pi n^\alpha}} \Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{n^\alpha}}\right).$$

Интеграл Валле-Пуссена хотя и приближает любую непрерывную функцию, но в целом с довольно плохой точностью (по сравнению с другими методами, например, посредством многочленов наилучшего приближения), подобно тому как это имеет место для многочленов Бернштейна или для сумм Фейера. Именно, можно показать, что никакое улучшение гладкости функций, например увеличение показателя r для классов $H_*^{(r)}$, не приводит в целом для этого класса к более высокому порядку убывания вышеуказанной величины, чем $1/n$.

Пусть, как и раньше, $S_n(x;\ f)$ — суммы Фурье функции $f(x)$. Положим

$$B_n^*(x;\ f) = \frac{1}{2}[S_n(x + \alpha_n;\ f) + S_n(x - \alpha_n;\ f)],$$

где $\alpha_n > 0$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ и $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = 0$.

Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами $B_n^*(x;\ f)$, называемое обычно *приближением по методу Бернштейна — Рогозинского*, изучалось в работах В. Рогозинского, С. Н. Бернштейна, А. Ф. Тимана, С. Б. Стечкина, Ф. И. Харшиладзе и др.

Отметим, например, следующий результат [11]:

Теорема 7. *Пусть* $f(x) \in C_{2\pi}^*$ *и* $\alpha_n = \frac{\pi}{2n+1}$, *тогда*

$$|B_n^*(x;\ f) - f(x)| \leqslant (2\pi + 1) E_{\mathfrak{T}_n}(f) + \omega\left(\frac{2\pi}{2n+1};\ f\right).$$

Линейные методы приближения периодических функций посредством тригонометрических многочленов и всевозможные обобщения этих методов (среди них один из наиболее важных — метод приближения посредством сингулярных интегралов) представляют в настоящее время одну из самых развитых глав теории приближения функций. Большой интерес, в частности, представляет изучение наилучших линейных методов приближения для данного класса функций. Сведения по всем этим вопросам можно найти в [1], [3], [7], [8], [11], [12] и [13].

4.3. Линейные методы приближения функций алгебраическими многочленами. Если функция $f(x)$ имеет производные всех порядков и, более того, является аналитической, то естественным методом ее приближения является приближение с помощью частных сумм ее ряда Тейлора (см. п. 1.2). Однако изучать класс аналитических функций проще в комплексной, а не действительной области. Поэтому мы будем предполагать, что рассматриваемые функции $f(z)$ определены в единичном круге $|z| \leqslant 1$ комплексной плоскости.

Обозначим через $A^{(r)}(K)$ $(r=0, 1, \ldots)$ совокупность всех функций $f(z)$, аналитических в круге $|z|<1$ и удовлетворяющих условию

$$|f^{(r)}(z)| \leqslant K, \qquad |z|<1.$$

Пусть $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, $f(z) \in A^{(r)}(k)$ при некотором фиксированном $r=0, 1, 2, \ldots$ Положим

$$P_n(z;\ f)=\sum_{k=0}^{n} a_k z^k,$$

$$r_n(z;\ f)=f(z)-P_n(z;\ f)=\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k,$$

$$R_n(f)=\max_{|z|<1} |r_n(z;\ f)|,$$

$$R_n[A^{(r)}(K)]=\sup_{f \in A^{(r)}(K)} R_n(f).$$

Имеют место следующие утверждения:

Теорема 1 (С. Б. Стечкин). *Пусть r — натуральное число и $f(z) \in A^{(r)}(K)$, тогда*

$$r_n(z;\ f) = -\frac{Kz^r}{(n+1)^r} P_{n-r}(z;\ f^{(r)}) + O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right), \qquad r \leqslant n.$$

(Эта формула осуществляется равномерно в круге $|z| < 1$ и равномерно относительно всего класса $A^{(r)}(K)$.)

Теорема 2 (С. Б. Стечкин).

$$R_n[A^{(r)}(K)] = \frac{K}{\pi} \frac{\ln(1+n)}{(1+n)^r} + O\left(\frac{1}{(n+1)^r}\right), \qquad n \geqslant r-1^{*)}.$$

Указанная оценка достигается в классе $A^{(r)}(K)$ в том смысле, что существует функция $f_0(z) \in A^{(r)}(K)$ такая, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{|r_n(1;\ f_0)|}{\dfrac{K}{\pi}\dfrac{\ln(1+n)}{(1+n)^r}} = 1.$$

Для неаналитических функций по аналогии с периодическими рассматриваются их разложения в обобщенные ряды Фурье по той или иной системе ортогональных (с весом) многочленов. Подробнее: пусть задана система $\{p_n(x)\}$ многочленов, $n = 0, 1, \ldots$, ортогональных с весом $q(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a, b]$, т. е.

$$\int_a^b q(x) p_n(x) p_m(x)\, dx \begin{cases} > 0 & \text{при } n = m, \\ = 0 & \text{при } n \neq m, \end{cases}$$

пусть, далее, на отрезке $[a, b]$ задана некоторая (суммируемая) функция $f(x)$. Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n p_n(x), \tag{4.2}$$

---

*) В случае $r = 0$ эта оценка тесно связана со следующим неравенством Е. Ландау:

$$\sup_{\varphi \in B^{(0)}} \max_{|z| \leqslant 1} |P_n(z,\ \varphi)| = \frac{1}{\pi} \ln(1+n) + O(1), \qquad n \geqslant 0.$$

у которого коэффициенты a_n, называемые *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$ *по системе* $\{p_n(x)\}$, определяются по формулам

$$a_n = \frac{\int\limits_a^b q(x) f(x) p_n(x)\,dx}{\int\limits_a^b q(x) p_n^2(x)\,dx},$$

называется *рядом Фурье* функции $f(x)$ *по системе* $\{p_n(x)\}$.

В качестве примера таких разложений (и приближений функций частичными суммами рядов (4.2)) рассмотрим разложения по многочленам Лежандра и Чебышева.

Многочлены $P_n(x)$, определенные по формулам

$$P_0(x) = 1, \qquad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n},$$

называются *многочленами Лежандра*. Они образуют ортогональную на отрезке $[-1, 1]$ систему

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \dfrac{2}{2n+1}, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

Коэффициенты Фурье a_n, $n = 0, 1, \ldots$ функции $f(x)$ по системе многочленов Лежандра определяются по формулам

$$a_n = \frac{2n+1}{2}\int\limits_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\,dx.$$

Сходимость рядов по многочленам Лежандра характеризуется следующим образом:

Теорема 3. *Пусть функция* $f(x)$ *на отрезке* $[-1, 1]$ *удовлетворяет условию Дини — Липшица*

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta; f) \ln \delta = 0;$$

тогда во всех точках интервала $(-1, 1)$ *ряд Фурье функции* $f(x)$ *по системе полиномов Лежандра сходится к функции* $f(x)$, *причем равномерно на всяком отрезке* $[-1+h, 1-h]$, $h > 0$.

Теорема 4. *Пусть функция* $f(x)$ *определена на отрезке* $[-1, 1]$, *и пусть*

$$\lim n^2 E_{\mathfrak{P}_n}(f) = 0; \tag{4.3}$$

тогда ряд Фурье функции $f(x)$ *по системе полиномов Лежандра равномерно сходится к самой функции* $f(x)$ *на отрезке* $[-1, 1]$.

Отметим, что согласно результатам, изложенным в п. 3.9, условие (4.3) заведомо выполнено, если функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема на отрезке $[-1, 1]$.

Пусть теперь задана система многочленов Чебышева

$$T_0(x) = 1, \quad T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x);$$

они образуют ортогональную с весом $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ систему на отрезке $[0, 1]$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_n(x)\,T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \begin{cases} 0, & \text{если } m \neq n, \\ \frac{\pi}{2^n}, & \text{если } m = n. \end{cases}$$

Частичные суммы ряда Фурье функции $f(x)$ по многочленам Чебышева

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n T_n(x)$$

будем обозначать через $U_n(x; f)$:

$$U_n(x; f) = \sum_{k=0}^{n} a_n T_n(x),$$

$$a_n = \frac{2^n}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\,T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Теорема 5. *Пусть функция* $f(x)$ *определена на отрезке* $[-1, 1]$, *и пусть*

$$\lim_{n \to \infty} E_{\mathfrak{P}_n}(f) \ln n = 0; \tag{4.4}$$

тогда ряд Фурье функции $f(x)$ *по системе многочленов*

Чебышева равномерно сходится к самой функции $f(x)$ *на отрезке* $[-1,\ 1]$, *причем имеет место оценка*

$$|U_n(x;\ f)-f(x)|\leqslant(3+\ln n)E_{\mathfrak{P}_n}(f).$$

Отметим еще, что условие (4.4) заведомо выполнено (согласно результатам, изложенным в п. 3.9), если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Дини — Липшица на отрезке $[-1,\ 1]$. Можно показать, что приведенные результаты в определенном смысле точны, откуда следует, что для равномерной сходимости рядов Фурье по многочленам Чебышева достаточно меньшей гладкости, чем для равномерной сходимости рядов Фурье по многочленам Лежандра.

Подобно периодическому случаю при приближении функций частичными суммами рядов Фурье относительно некоторых ортогональных систем многочленов в ряде случаев также удается оценить верхние грани уклонений частичных сумм этих рядов от самих функций.

Пусть r — фиксированное неотрицательное целое.

Обозначим через $W^{(r)}(K)$ совокупность функций $f(x)$, определенных и непрерывных на отрезке $[-1,\ 1]$ вместе со своими производными до порядка r включительно и таких, что

$$|f^{(r)}(x)|\leqslant K,\qquad 1\leqslant x\leqslant 1.$$

Для частичных сумм разложений функций по многочленам Чебышева имеет место

Теорема 6 (С. Г. Селиванова).

$$\sup_{f(x)\in W^{(r)}(K)}|f(x)-U_n(x;\ f)|=\frac{4K}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^r}(1-x^2)^{\frac{r}{2}}+O\left(\frac{1}{n^r}\right).$$

Мы снова видим, что здесь в отличие от периодического случая правая часть зависит от положения точки x на отрезке $[-1,\ 1]$.

Изложение других вопросов, связанных с линейными методами приближения функций алгебраическими многочленами, можно найти в [1], [3], [7], [8], [11], [12].

4.4. Наилучшие линейные методы приближения функций. Пусть задано некоторое банахово пространство R функций $f(x)$, норма которых, как обычно, обозначается через $\|f\|$. Пусть, далее, задан некоторый метод приближения функций $f(x) \in R$, иначе говоря, задана последовательность операторов $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$U_n(f) \in R, \qquad f(x) \in R, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Метод приближения $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется линейным, если для любых двух функций $f_1(x) \in R$ и $f_2(x) \in R$ и любых чисел λ_1 и λ_2 справедливо

$$U_n(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 U_n(f_1) + \lambda_2 U_n(f_2).$$

Пусть теперь в пространстве R задана система функций

$$\Phi = \{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots\}.$$

Рассмотрим задачу приближения (в смысле нормы пространства R) данной фиксированной функции $f(x) \in R$ с помощью всевозможных линейных агрегатов вида $c_0\varphi_0 + c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n$ (n фиксировано, $n = 0, 1, 2, \ldots$) и положим

$$E_{\Phi_n}(f) = \inf_{\substack{-\infty < c_i < \infty \\ i = 0, 1, \ldots, n}} \left\| f - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \varphi_i \right\|.$$

Пусть теперь R^* — некоторое подмножество пространства R. Положим

$$E_{\Phi_n}(R^*) = \sup_{f \in R^*} E_{\Phi_n}(f).$$

Мы скажем, что линейный метод приближения $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ является *наилучшим* линейным методом приближения функций множества R^* *относительно системы* Φ, если

$$E_{\Phi_n}(R^*) = \sup_{f \in R^*} \| f - U_n(f) \|, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Мы скажем, что линейный метод $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ является *асимптотически наилучшим* линейным методом приближения функций множества R^* *относительно системы* Φ, если

$$\lim_{n \to \infty} \frac{E\Phi_n(R^*)}{\sup\limits_{f \in R^*} \| f - U_n(f) \|} = 1.$$

Наилучшие линейные методы были исследованы для периодического случая в работах Ж. Фавара, Н. И. Ахиезера, М. Г. Крейна, Б. Надя, С. М. Никольского, В. К. Дзядыка, С. Б. Стечкина и др.

Теорема 1 (Ж. Фавар, Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн). *Пусть* (см. п. 3.7)

$$f(x) \in W_*^{(r)}(K),$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots,$$

— коэффициенты ряда Фурье функции $f(x)$, *тогда существуют числа* $\lambda_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \ldots, n-1$; $n = 1, 2, \ldots$ *такие, что метод приближения*

$$U_n(x;\ f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k^{(n)} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

является наилучшим (очевидно, линейным) методом приближения функций класса $W_*^{(r)}(K)$ *относительно тригонометрической системы* $\mathfrak{T}_{n-1}$ *тригонометрических полиномов степени не выше чем* $n-1$.

При этом значения множителей суммируемости $\lambda_k^{(n)}$ могут быть эффективно вычислены. Особенно простой вид они имеют при $r = 1$:

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{k\pi}{2n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n}, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

Как уже отмечалось ранее (см. теорему 10 п. 3.7), для рассматриваемого класса $W_*^{(r)}(K)$ Ж. Фавар, а затем Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн установили точное значение величины $E_{\mathfrak{T}_n}(W_*^{(r)}(K))$, а значит, в силу теоремы 1 и точное значение величины

$$\sup_{f(x) \in W_*^{(r)}(K)} \max_x |f(x) - U_n(x;\ f)|.$$

Для непериодического случая отметим теорему С. М. Никольского об одном асимптотически наилучшем линейном методе приближения функций алгебраическими многочленами.

Теорема 2 (С. М. Никольский). *Пусть* $f(x) \in \mathrm{Lip}_M 1$, $x \in [-1, 1]$ (см. п. 3.8), $P_0(x) = 1$, $P_k(x) = \cos k \arccos x$ — *многочлены Чебышева* ($k = 1, 2, \ldots$)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(t) P_k(t)}{\sqrt{1-t^2}}\, dt, \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

$$\lambda_k^{(n)} = \frac{k\pi}{2n} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2n}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

и пусть

$$U_n(x;\ f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{n-1} \lambda_k^{(n)} a_k P_k(x). \tag{4.5}$$

Тогда

$$\frac{M\pi}{2n} - \varepsilon < \sup_{f(x) \in \mathrm{Lip}_M 1} \ \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |f(x) - U_n(f;\ x)| < \frac{M\pi}{2n},$$

где

$$\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n \ln n}\right) \qquad и \qquad \varepsilon_n > 0.$$

Значит, метод приближения (4.5) является асимптотически наилучшим линейным методом приближения функций $f(x)$ класса $\mathrm{Lip}_M 1$, $x \in [-1, 1]$ многочленами степени не выше $n-1$.

§ 5. Приближение функций одного переменного в среднем

5.1. Общие замечания. Мы будем рассматривать теперь вопросы приближения в среднем для функций, суммируемых в некоторой степени. Пусть E — измеримое множество на прямой, $p \geqslant 1$, $q(x)$ — суммируемая, почти всюду положительная на E функция (называемая обычно весом). Рассмотрим функции $f(x)$, определенные и измеримые на множестве E. Совокупность всех измеримых функций $f(x)$, для которых интеграл $\int q(x)\,|f(x)|^p\,dE$ конечен, будем обозначать через $L_{p,q(x)}(E)$, а число

$$\|f\|_{L_{p,q(x)}(E)}=\left[\int q(x)\,|f(x)|^p\,dE\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{5.1}$$

называть *нормой* функции $f(x)\in L_{p,q(x)}(E)$. Совокупность функций $L_{p,q(x)}(E)$ при обычных операциях сложения функций и умножения их на число образуют, в силу определения нормы (5.1), линейное нормированное пространство*), которое мы будем обозначать тем же символом $L_{p,q(x)}(E)$ или, короче, $L_{p,q(x)}$. В случае, когда $q(x)\equiv 1$ на E, указанное пространство будем обозначать просто символом $L_p(E)$ или соответственно L_p, а норму элемента $f(x)\in L_p$ — символом $\|f\|_p$.

Если при $p=2$ в пространстве $L_{2,q(x)}(E)$ ввести скалярное произведение по формуле

$$(f,\ g)=\int q(x)\,f(x)\,g(x)\,dE,$$

$$f(x)\in L_{2,q(x)}(E),\quad g(x)\in L_{2,q(x)}(E),$$

то пространство $L_{2,q(x)}(E)$ превратится в гильбертово пространство.

Пусть система $\mathfrak{F}=\{f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n,\ \ldots\}$ элементов $f_n\in\mathfrak{F}$ является ортогональной системой пространства $L_{2,q(x)}(E)$, т. е. $(f_i,\ f_j)=0$ при $i\neq j$, $(f_i,\ f_i)>0$, и пусть $y\in L_{2,q(x)}(E)$. Имеет место

Теорема. *Величина*

$$\Big\|y-\sum_{k=1}^{n}a_k f_k\Big\|_{L_{2,q(x)}(E)}$$

достигает своего наименьшего значения при

$$a_k=\frac{(y,\ f_k)}{(f_k,\ f_k)},\qquad k=1,\ 2,\ \ldots$$

Коэффициенты a_k, вычисленные по этой формуле, называются *коэффициентами Фурье элемента y по данной*

---

*) При этом эквивалентные функции считаются тождественными элементами этого пространства.

системе $\mathfrak{F}$, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k$ — *рядом Фурье элемента* y *по системе* $\mathfrak{F}$.

Мы уже встречались с рядами Фурье по тригонометрической системе (см. п. 4.1), по многочленам Лежандра и Чебышева (см. п. 4.3). В качестве еще одного примера отметим многочлены Якоби:

$$J_0^{(\alpha, \beta)} = 1,$$

$$J_n^{(\alpha, \beta)}(x) = K_n (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}],$$

где K_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — некоторые постоянные, $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Многочлены Якоби образуют ортогональную с весом $p(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ систему на отрезке $[-1, 1]$; при $\alpha = \beta = 0$ многочлены Якоби превращаются в многочлены Лежандра, а при $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ — в многочлены Чебышева (при соответствующем выборе постоянных K_n, $n = 1, 2, \ldots$).

Для случая бесконечного интервала $[0, \infty)$ так называемые *многочлены Лагерра*

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}), \qquad n = 0, 1, \ldots,$$

образуют ортогональную систему с весом $q(x) = e^{-x}$, а на всей числовой оси *многочлены Эрмита*

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

образуют ортогональную систему с весом $q(x) = e^{-x^2}$.

Отметим, что в случае, когда $\operatorname{mes} E < \infty$, имеет место

$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \sup_{x \in E} \operatorname{vrai} |f(x)|.$$

Поэтому естественно положить по определению

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in E} \operatorname{vrai} |f(x)|.$$

Линейное нормированное пространство функций с конечной нормой $\|f\|_\infty$ будем обозначать $L_\infty(E)$ или просто L_∞.

5.2. Наилучшие приближения в среднем. На пространства функций типа L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ переносятся многие из результатов теории равномерных наилучших приближений, в частности, из результатов, устанавливающих связь между гладкостью функций и порядком скорости убывания их наилучших приближений.

Пусть E — промежуток на прямой, конечный или бесконечный, и пусть на E определена функция $f(x)$. Если функция $f(x)$ абсолютно непрерывна на E, то почти всюду функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$. Всякую функцию, определенную на множестве E и почти всюду совпадающую с $f'(x)$, будем называть *обобщенной производной функцией* $f(x)$ и обозначать тем же символом $f'(x)$. *Обобщенной производной* $f^{(k)}(x)$ *порядка* k функции $f(x)$ называется обобщенная производная от обычной производной $f^{(k-1)}(x)$ порядка $k-1$ функции $f(x)$. Если $f'(x)$ — обобщенная производная функции $f(x)$, то

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(x)\,dt, \qquad a \in E.$$

Пусть теперь $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $r = \bar{r} + \alpha$, $\bar{r}$ — неотрицательное целое, $0 < \alpha \leqslant 1$, $M > 0$, $E = (-\infty, \infty)$. Функция $f(x)$ называется функцией *класса* $H_p^{(r)}(M)$, если

1°. $f(x) \in L_p(-\infty, \infty)$,

2°. существует обобщенная производная

$$f^{(\bar{r})}(x) \in L_p(-\infty, \infty)$$

такая, что

$$\|f^{(\bar{r})}(x+h) - 2f(x) + f^{(\bar{r})}(x-h)\|_p \leqslant M\,|h|^\alpha.$$

Аналогично, если $E = [0, 2\pi]$, то при сохранении остальных предположений периодическую с периодом 2π функцию $f(x)$ назовем функцией класса $H_p^{*(r)}(M)$, если

1°. $f(x) \in L_p[0, 2\pi]$,

2°. существует обобщенная производная

$$f^{(\bar{r})}(x) \in L_p[0, 2\pi]$$

такая, что

$$\|f^{(\bar{r})}(x+h) - 2f^{(\bar{r})}(x) + f^{(\bar{r})}(x-h)\|_p < M\,|h|^\alpha. \quad (5.2)$$

В случае $0<\alpha<1$ условие (5.2) в определении классов $H_p^{(r)}(M)$ и $\overset{(r)}{H_p^*}(M)$ эквивалентно более простому условию

$$\|f^{(\bar{r})}(x+h)-f^{(\bar{r})}(x)\|_p \leqslant K|h|^{\alpha},$$

где $K>0$ — некоторая постоянная. Как обычно, положим

$$H_p^{(r)}=\bigcup_{M>0} H_p^{(r)}(M) \quad \text{и} \quad \overset{(r)}{H_p^*}=\bigcup_{M>0} \overset{(r)}{H_p^*}(M).$$

Через $E^p_{\mathfrak{T}_n}(f)$ будем обозначать наилучшее приближение в пространстве L_p функции $f(x)$ тригонометрическими многочленами класса $\mathfrak{T}_n$ на отрезке $[0, 2\pi]$, т. е.

$$E^p_{\mathfrak{T}_n}(\cdot f)=\sup_{T(x)\in\mathfrak{T}_n}\|f-T\|_p.$$

Обозначим, далее, через $\mathfrak{G}^p_\nu$ $(\nu>0)$ класс целых функций экспоненциального типа степеней, не превышающих ν и суммируемых в p-й степени на всей числовой оси. Можно показать, что (см. п. 3.8)

$$\mathfrak{G}^p_\nu\subset\mathfrak{G}^\infty_\nu=\mathfrak{G}_\nu, \qquad 1\leqslant p<\infty.$$

Наилучшее приближение функции f, определенной на всей оси, с помощью функций класса $\mathfrak{G}^p_\nu$ в смысле пространства L_p будем обозначать $E^p_{\mathfrak{G}_\nu}(f)$, т. е.

$$E^p_{\mathfrak{G}_\nu}(f)=\sup_{g(x)\in\mathfrak{G}^p_\nu}\|f-g\|_p.$$

Теорема 1. *Для того чтобы* $f(x)\in\overset{(r)}{H_p^*}$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $r>0$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная* $c>0$ *такая, что*

$$E^p_{\mathfrak{T}_\nu}(f)\leqslant\frac{c}{n^r}. \tag{5.3}$$

При этом условие (5.3) *остается достаточным для принадлежности функции* f *к классу* $\overset{(r)}{H_p^*}$ *и в том случае, если оно выполняется лишь для последовательности целых* n, *пробегающих некоторую возрастающую геометрическую прогрессию.*

Теорема 2. *Для того чтобы* $f(x) \in H_p^{(r)}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $r > 0$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная* $c > 0$ *такая, что*

$$E_{\mathfrak{S}_\nu}^p (f) \leqslant \frac{c}{\nu^r}. \tag{5.4}$$

При этом условие (5.4) *остается достаточным для принадлежности функции* $f(x)$ *к классу* $H_p^{(r)}$ *и в том случае, если оно выполняется лишь для последовательности индексов* ν, *пробегающих некоторую возрастающую геометрическую прогрессию.*

Вопрос о связи наилучших приближений в смысле пространства L_p алгебраическими многочленами с той или иной гладкостью функции изучен в настоящее время значительно менее полно.

В смысле метрики пространства L_p изучены также разнообразные линейные методы приближения функций, в частности, наилучшие линейные методы приближения для различных классов функций, а также получены оценки верхних граней отклонений приближений от функций того или иного класса (в отдельных случаях эти верхние грани отклонений даже точно или асимптотически вычислены). Следует отметить, что некоторые вопросы получают свое более простое и даже более полное решение именно в метрике L_p, причем часто для $1 < p < \infty$, а значения $p = 1$ и $p = \infty$ являются в этом смысле как бы особыми.

Сведения о всех этих результатах можно найти в [1], [7], [8], [11], [12], [13].

5.3. Системы функций, приближающие наилучшим образом некоторый класс функций. Во всех предыдущих рассмотрениях, когда мы сталкивались с вопросами приближения периодических функций, мы всегда использовали для этой цели линейные комбинации синусов и косинусов кратных дуг. Естественно возникает вопрос, нет ли каких-либо других систем, существенно отличающихся от указанной, линейные комбинации которых давали бы, вообще говоря, более хорошие приближения периодических функций. В общем виде подобный вопрос был поставлен А. Н. Колмогоровым в 1935 г., и им же было предложено его решение для ряда важных случаев как периодических, так и непериодических функций. Мы ограничимся здесь лишь формулировкой результата А. Н. Колмогорова для периодического случая, как наиболее простого. Этот результат оправдывает с определенной точки зрения приближение периодических функций линейными комбинациями синусов и косинусов кратных дуг; именно, формулируемая ниже теорема показывает, что в этом случае величина приближения оказывается наименьшей.

Сформулируем общую задачу А. Н. Колмогорова. Пусть задано нормированное пространство R элементов f, норму которых мы будем, как обычно, обозначать $\|f\|$. Пусть $\mathfrak{F}$ — некоторое подмножество пространства R и n — фиксированное натуральное число. Положим

$$D_n(\mathfrak{F}) = \inf_{\varphi_1, \ldots, \varphi_n} \sup_{f \in \mathfrak{F}} \inf_{c_1, \ldots, c_n} \left\| f - \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i \right\|,$$

$$\varphi_i \in R, \quad -\infty < c_i < \infty, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Рассматривается задача об определении и достижимости $D_n(\mathfrak{F})$, т. е. задача о наилучшем приближении множества $\mathfrak{F} \subset R$ посредством любых n-членных «полиномов» $c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n$ в пространстве R.

В случае, если нижняя грань $D_n(\mathfrak{F})$ достигается для некоторой системы функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, то, естественно, ставится вопрос об однозначной определенности этим условием такой системы $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (однозначная определенность здесь понимается, конечно, с точностью до линейного преобразования системы). Очевидно,

$$D_1(\mathfrak{F}) \geqslant D_2(\mathfrak{F}) \geqslant \ldots \geqslant D_n(\mathfrak{F}) \geqslant \ldots$$

Пусть теперь $R = L_2^*$ и $\mathfrak{F} = W_{\underset{2}{*}}^{(r)}$ — совокупность периодических периода 2π, r раз дифференцируемых $(r = 0, 1, \ldots)$ функций таких, что

$$\|f^{(r)}\|_2 = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f^{(r)}(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant 1.$$

Теорема (А. Н. Колмогоров). *Имеет место равенство*

$$D_{2m-1}(W_{\underset{2}{*}}^{(r)}) = D_{2m}(W_{\underset{2}{*}}^{(r)}) = \left(\frac{1}{2\pi m}\right)^r,$$

причем в случае $n=2m+1$ *нижняя грань* $D_n(W_{\S}^{(r)})$ *достигается на системе функций* 1, $\cos x$, $\sin x$, ..., $\cos mx$, $\sin mx$ (*условиями теоремы эта система определяется однозначно с точностью до линейных преобразований*).

§ 6. Приближение функций многих переменных

6.1. Основные понятия. При изучении вопросов приближения функций многих переменных многочленами и их обобщениями, как правило, возникают принципиально новые трудности, не имеющие аналогов в одномерном случае. В результате этого многомерный случай изучен в значительно меньшей степени, чем одномерный. Исследование же приближений функций многих переменных тем или иным методом представляет собой большой интерес не только в связи с теми применениями теории приближения, которые встречаются и для функций одного переменного, но и в связи с качественно новыми применениями, имеющими многомерную специфику. Именно, теория приближений функций многих переменных находит, например, весьма эффективное применение при изучении связи свойств функции со свойствами ее граничных значений, а также при изучении методов наилучших или в известном смысле наиболее целесообразных продолжений функций (теоремы такого типа являются частными случаями прямых, соответственно обратных, так называемых т е о р е м в л о ж е н и я). Эти вопросы в свою очередь играют фундаментальную роль в теории уравнений математической физики.

Одним из вопросов, которые удалось изучить достаточно полно в многомерном случае, является вопрос о связи порядка убывания наилучших приближений тригонометрическими полиномами или целыми функциями экспоненциального типа с гладкостью функции в том или ином смысле. Здесь мы приведем несколько прямых и обратных теорем в том виде, в каком они получены С. М. Никольским, а также несколько неравенств, полученных С. М. Никольским и имеющих фундаментальное значение как для самой теории приближения, так и для ее приложений (например, к теоремам вложения). Перейдем к изложению этих результатов.

Функции вида

$$T_{m_1 \dots m_n}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k_1=-m_1}^{m_1} \dots \sum_{k_n=-m_n}^{m_n} c_{k_1 \dots k_n} e^{i \sum_{s=1}^{n} k_s x_s},$$

$$c_{k_1 \dots -k_j \dots k_n} = \overline{c}_{k_1 \dots k_j \dots k_n}$$

мы будем называть *действительными тригонометрическими многочленами* степени не выше чем $m_1, \dots, m_n$ соответственно по переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$ (ср. п. 2.2). Класс всех тригонометрических многочленов $T_{m_1 \dots m_n}$ будем обозначать через $\mathfrak{T}_{m_1 \dots m_n}$.

Функция $g_{\nu_1 \dots \nu_n}(z_1, \dots, z_n)$ называется *целой функцией экспоненциального типа* степеней $\nu_1, \dots, \nu_n$ соответственно по переменным $z_1, \dots, z_n$, если

1) функция $g_{\nu_1 \dots \nu_n}(z_1, \dots, z_n)$ раскладывается в степенной ряд, сходящийся для любых комплексных $z_1, \dots, z_n$;

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $A > 0$ такое, что для всех $z_1, \dots, z_n$ выполняется неравенство

$$|g_{\nu_1 \dots \nu_n}(z_1, \dots, z_n)| \leqslant A e^{\sum_{k=1}^{n} (\nu_k + \varepsilon)|z_k|}.$$

Совокупность всех целых функций экспоненциального типа вида $g_{\nu_1 \dots \nu_n}(z_1, \dots, z_n)$, суммируемых в p-й степени по всему вещественному n-мерному пространству, обозначим через $\mathfrak{G}^p_{\nu_1 \dots \nu_n}$.

Через $\overset{(n)}{L^*_p}$ обозначим пространство функций, измеримых в n-мерном пространстве, периодических периода 2π относительно каждой переменной и суммируемых в p-й степени на периоде (т. е. при $0 \leqslant x_i \leqslant 2\pi$, $i = 1, 2, \dots, n$). При этом для $f(x) \in \overset{(n)}{L^*_p}$ положим

$$\|f\|_p^{(n)} = \left(\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} |f(x_1, \dots, x_n)|^p \, dx_1 \dots dx_n \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{6.1}$$

а в случае $p = \infty$

$$\|f\|_\infty^{(n)} = \sup_{0 \leqslant x_i \leqslant 2\pi} \underset{i=1, 2, \dots, n}{\operatorname{vrai}} |f(x_1, \dots, x_n)|. \tag{6.2}$$

Через $L_p^{(n)}$ обозначим пространство измеримых функций, определенных, измеримых и суммируемых в p-й степени на всем пространстве. При этом для $f(x) \in L_p^{(n)}$ положим

$$\|f\|_p^{(n)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} |f(x_1, \ldots, x_n)|^p \, dx_1 \ldots dx_n \right)^{\frac{1}{p}}, \qquad (6.3)$$

а в случае $p = \infty$ —

$$\|f\|_\infty^{(n)} = \sup_{-\infty < x_i < \infty, \; i=1, 2, \ldots, n} \operatorname{vrai} |f(x_1, \ldots, x_n)|. \qquad (6.4)$$

При обычных операциях сложения функций и умножения их на число с нормами, определенными соответственно формулами (6.1) — (6.4), пространства $L_{*p}^{(n)}$ и $L_p^{(n)}$ при $1 \leqslant p \leqslant \infty$ являются *линейными нормированными пространствами* (при этом эквивалентные функции считаются тождественными).

Отметим теперь основные неравенства С. М. Никольского для целых функций экспоненциального типа.

Пусть $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит $L_p^{(n)}$ и почти для каждой точки $(n-1)$-мерного пространства $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ является целой функцией степени ν относительно переменной x_i, тогда $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \in L_p^{(n)}$ и имеет место *обобщенное неравенство Бернштейна*

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\|_p^{(n)} \leqslant \nu \|\varphi\|_p^{(n)}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Пусть, далее, $g_{\nu_1, \ldots, \nu_n}(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{G}_{\nu_1 \ldots \nu_n}^p$ и $1 \leqslant p < p' \leqslant \infty$, тогда $g_{\nu_1 \ldots \nu_n}(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{G}_{\nu_1 \ldots \nu_n}^{p'}$ и имеет место неравенство

$$\|g_{\nu_1 \ldots \nu_n}\|_{p'}^{(n)} \leqslant 2^n \left(\prod_{k=1}^{n} \nu_k \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{p'}} \|g_{\nu_1 \ldots \nu_n}\|_p^{(n)},$$

причем при фиксированном n и произвольных $\nu_i \to \infty$ это неравенство точно в смысле порядка.

Наконец, если снова $g_{\nu_1 \ldots \nu_n}(x_1, \ldots, x_n) \in \mathfrak{G}_{\nu_1 \ldots \nu_n}^p$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $1 \leqslant m < n$, то при любых фиксированных

$x_{m+1}=x_{m+1}^{(0)}$, $x_{m+2}=x_{m+2}^{0}$, ..., $x_n=x_n^{(0)}$ функция $g_{\nu_1\ldots\nu_n}(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$ интегрируема по $(x_1, \ldots, x_m)$ в p-й степени и имеет место неравенство

$$\| g_{\nu_1\ldots\nu_n}\|_p^{(m)} = \left(\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}\left| g_{\nu_1\ldots\nu_n}(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})\right|^p dx_1\ldots dx_m\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant 2^n\left(\prod_{k=m+1}^{n}\nu_k\right)^{\frac{1}{p}} \| g_{\nu_1\ldots\nu_n}\|_p^{(n)},$$

причем при фиксированном n и произвольных $\nu\to\infty$ оно также точно в смысле порядка. Совершенно аналогичные неравенства были получены С. М. Никольским и для тригонометрических полиномов класса $\mathfrak{T}_{m_1\ldots m_n}$. Как уже отмечалось, эти неравенства находят существенные и разнообразные применения как в самой теории приближения функций многих переменных, так и в ее приложениях.

Как и выше, введем теперь понятия наилучших приближений:

$$E^p_{\mathfrak{T}_{m_1\ldots m_n}}(f) = \inf_{T_{m_1\ldots m_n}\in\mathfrak{T}_{m_1\ldots m_n}} \| f - T_{m_1\ldots m_n}\|_p^{(n)}, \quad f(x)\in L_p^{*(n)},$$

$$E^p_{\mathfrak{G}_{\nu_1\ldots\nu_n}}(f) = \inf_{g_{\nu_1\ldots\nu_n}\in\mathfrak{G}^p_{\nu_1\ldots\nu_n}} \| f - g_{\nu_1\ldots\nu_n}\|_p^{(n)}, \quad f(x)\in L_p^{(n)}.$$

Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет *обобщенную частную производную* порядка k по переменной x_i, и будем ее обозначать $\frac{\partial^k f}{\partial x_i^k}$, если функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ можно так видоизменить на множестве n-мерной меры нуль, что после этого функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ будет иметь обобщенную производную порядка k по переменной x_i (в смысле п. 5.2) на любом конечном отрезке, параллельном оси x_i и принадлежащем области определения функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ для почти всех (в смысле $(n-1)$-мерной меры) точек $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Аналогичным образом определяются и *обобщенные смешанные частные производные.*

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $M > 0$, $r > 0$, $r = \bar{r} + \alpha$, $\bar{r}$ — неотрицательное целое, $0 < \alpha \leqslant 1$. Функция $f(x)$ называется *функцией класса* $H^{(r)}_{px_1}(M)$, если $f(x) \in L^{(n)}_p$ и существует обобщенная частная производная $\frac{\partial^{\bar{r}} f}{\partial x_1^{\bar{r}}} \in L^{(n)}_p$ такая, что

$$\left\| \frac{\partial^{\bar{r}} f(x_1+h, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{\bar{r}}} - 2\frac{\partial^{\bar{r}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{\bar{r}}} + \frac{\partial^{\bar{r}} f(x_1-h, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{\bar{r}}} \right\|^{(n)}_p \leqslant M|h|^{\alpha}.$$

В случае $0 < \alpha < 1$ это условие эквивалентно условию

$$\left\| \frac{\partial^{\bar{r}} f(x_1+h, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1^{\bar{r}}} - \frac{\partial^{\bar{r}} f(x_1, \ldots, x_r)}{\partial x_1^{\bar{r}}} \right\|^{(n)}_p \leqslant K|h|^{\alpha}$$

при некоторой постоянной $K > 0$.

Подобным же образом определяются классы $H^{(r)}_{px_i}(M)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Пересечение классов $H^{(r_i)}_{px_i}(M_i)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ обозначается через $H^{(r_1, \ldots, r_n)}_p(M_1, \ldots, M_n)$. Наконец,

$$H^{(r_1, \ldots, r_n)}_p = \bigcup_{\substack{M_i > 0 \\ i=1, 2, \ldots, n}} H^{(r_1, \ldots, r_n)}_p(M_1, \ldots, M_n).$$

Совершенно аналогично в периодическом случае определяются классы $H^{*(r_i)}_{px_i}(M)$, $H^{*(r_1, \ldots, r_n)}_p(M_1, \ldots, M_n)$ и $H^{*(r_1, \ldots, r_n)}_p$.

6.2. Теория наилучших приближений функций многих переменных.

Т е о р е м а 1 (С. М. Н и к о л ь с к и й). *Пусть* $f(x) \in H^{*(r_1, \ldots, r_n)}_p(M_1, \ldots, M_n)$, *тогда*

$$E^p_{\mathfrak{T}_{m_1 \ldots m_n}}(f) \leqslant c \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{m_i^{r_i}},$$

где постоянная c *не зависит ни от* f, *ни от* M_i, *ни от* m_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 1[1] (С. М. Никольский). *Пусть*

$$f(x_1, \ldots, x_n) \in H_p^{(r_1, \ldots, r_n)}(M_1, \ldots, M_n),$$

тогда

$$E^p_{\mathfrak{G}_{\nu_1 \ldots \nu_n}}(f) \leqslant d \sum_{i=1}^{n} \frac{M_i}{\nu_i^{r_i}},$$

где постоянная d не зависит ни от f, ни от M_i, ни от ν_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 2 (С. М. Никольский). *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_n) \in L_p^{*(n)}$ *и*

$$E^p_{\mathfrak{T}_{m_1 \ldots m_n}}(f) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{m_i^{r_i}}, \tag{6.5}$$

где $K_i > 0$ и $r_i > 0$ — постоянные, а ν_i пробегают некоторые возрастающие геометрические прогрессии $\nu_i = b_i a_i^k$ ($a_i > 1$; $i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 0, 1, 2, \ldots$); пусть, далее, $T(x_1, \ldots, x_n)$ является тригонометрическим многочленом не выше первой степени и таким, что

$$\|f - T\|_p^{*(n)} \leqslant \sum_{i=1}^{n} K_i.$$

Тогда многочлен $T(x_1, \ldots, x_n)$ (существующий в силу условия (6.5)) принадлежит к классу $H_p^{*(r_1, \ldots, r_n)}(M)$, где

$$M \leqslant c' \|f\|_p^{*(n)} + d' \sum_{i=1}^{n} K_i,$$

а функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) - T(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежит к классу $H_p^{*(r_1, \ldots, r_n)}(M_1, \ldots, M_n)$, где

$$M_i \leqslant c_i \sum_{i=1}^{n} K_i,$$

причем постоянные c', d' и c_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) не зависят от f и K_i.

Теорема 2[1] (С. М. Никольский). *Пусть* $f(x)\in L_p^{(n)}$ *и*

$$E^p_{\mathfrak{G}_{\nu_1}\ldots\nu_n}(f)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{\nu_i^{r_i}},\tag{6.6}$$

где $K_i>0$ *и* $r_i>0$ — *постоянные, а* ν_i *пробегают некоторые возрастающие геометрические прогрессии* $\nu_i=b_ia_i^k$ ($a_i>1$; $i=1, 2, \ldots, n$; $k=0, 1, 2, \ldots$); *пусть, далее,* $g(x_1, \ldots, x_n)$ *является целой функцией экспоненциального типа не выше первой степени такой, что*

$$\|f-g\|_p^{(n)}\leqslant\sum_{i=1}^{n}K_i.$$

Тогда функция $g(x_1, \ldots, x_n)$ (*существующая в силу условия* (6.6)) *принадлежит к классу* $H_p^{(r_1, \ldots r_n)}(M)$, *где*

$$M\leqslant c'\|f\|_p^{(n)}+d'\sum_{i=1}^{n}K_i,$$

а функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)=f(x_1, \ldots, x_n)-g(x_1, \ldots, x_n)$ *принадлежит к классу* $H_p^{(r_1, \ldots, r_n)}(M_1, \ldots, M_n)$, *где*

$$M_i\leqslant c_i\sum_{i=1}^{n}K_i,$$

причем постоянные c', d' *и* c_i ($i=1, 2, \ldots, n$) *не зависят от* f *и* K_i ($i=1, 2, \ldots, n$).

Из теорем 1 и 2 (соответственно из теорем 1[1] и 2[1]) следует, в частности, что для того, чтобы выполнялось условие $f(x_1, \ldots, x_n)\in H_p^{*(r_1, \ldots, r_n)}$ (соответственно $f(x_1, \ldots, x_n)\in H_p^{(r_1, \ldots, r_n)}$), необходимо и достаточно, чтобы существовала const $K>0$ такая, что $E^p_{\mathfrak{T}_{m_1}\ldots m_n}(f)\leqslant K\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i^{r_i}}$ (соответственно $E^p_{\mathfrak{G}_{\nu_1}\ldots\nu_n}(f)\leqslant K\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\nu_i^{r_i}}$). При этом указанное условие остается достаточным и в том случае, когда m_i

(соответственно ν_i) пробегают лишь возрастающие геометрические прогрессии.

Сформулированные теоремы содержат в себе, очевидно, как частный случай соответствующие результаты п.п. 3.7, 3.9 и 5.2.

Аналогичные вопросы для приближения функций многих переменных алгебраическими многочленами изучены значительно менее полно. Плохо изучены в настоящее время и асимптотические поведения отклонений приближений для того или иного линейного метода аппроксимации функций какого-либо класса. Это относится также и к другим вопросам приближений, рассмотренным нами для функций одного переменного. Отдельные сведения по этим вопросам можно найти, например, в [1], [3], [8] и [12].

§ 7. Теория приближений в банаховых пространствах

7.1. Общие понятия. Наилучшие приближения в гильбертовых пространствах. Метод наименьших квадратов построения наилучших приближений. Пусть R — метрическое пространство, E — его подмножество, x_0 — фиксированный элемент пространства R; как обычно, по определению

$$\rho(x_0, E) = \inf_{x \in E} \rho(x_0, x)$$

($\rho(x_0, E)$ называется *отклонением* или *расстоянием* элемента x_0 от множества E).

Если существует элемент $y_0 \in E$ такой, что

$$\rho(x_0, E) = \rho(x_0, y_0),$$

то элемент y_0 называется *элементом, осуществляющим наилучшее приближение* элемента x_0 на множестве E.

Если множество E компактно и замкнуто, то, каков бы ни был элемент $x_0 \in R$, всегда существует элемент $y_0 \in E$, осуществляющий наилучшее приближение элемента x_0 на множестве E.

Пусть R — линейное нормированное пространство. Если множество $E \subset R$ является линейным конечномерным подпространством пространства R, то, каков бы ни был элемент

$x_0 \in R$, всегда существует элемент $y_0 \in E$, осуществляющий наилучшее приближение элемента x_0 на множестве E; при этом если пространство R строго нормировано, то этот элемент единственный.

Напомним, что линейное нормированное пространство называется *строго нормированным*, если из соотношения

$$\|a+b\|=\|a\|+\|b\|$$

следует, что $\lambda a=\mu b$, $\lambda \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, $\lambda+\mu>0$.

Примером строго нормированных пространств являются пространства L_p при $1<p<\infty$, в частности гильбертово пространство L_2. Это обеспечивает в них для соответствующих случаев единственность наилучших приближений. Пространства L_1 и C не являются строго нормированными. Тем не менее, как мы видели выше, и в этих пространствах для ряда важных случаев имеет место единственность элемента, осуществляющего наилучшее приближение (см. также п. 7.3).

Пусть теперь H — гильбертово пространство, E — некоторое его подпространство, $x_0 \in H$. Элемент $y_0 \in E$ является элементом наилучшего приближения элемента x_0 в подпространстве E тогда и только тогда, когда для любого $y \in E$ имеет место равенство

$$(x_0-y_0, y)=0.$$

Отсюда сразу следует, что элемент наилучшего приближения в гильбертовом пространстве линейно зависит от приближаемых элементов, т. е. если $y_0 \in E$ является элементом наилучшего приближения в E элемента $x_0 \in H$, а $y_0' \in E$ является элементом наилучшего приближения в E элемента $x_0' \in H$, то при любых числах λ и λ' элемент $\lambda y_0+\lambda' y_0'$ является элементом наилучшего приближения в E элемента $\lambda x_0+\lambda' x_0'$.

Если E — конечномерное подпространство гильбертова пространства и $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — его базис, то из сказанного выше следует также, что для любого элемента $x_0 \in H$ существует, и притом единственный, элемент $y_0 \in E$, осуществляющий наилучшее приближение заданного элемента x_0 на множестве E. Если $y_0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, то числа λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ определяются из условия, что при $y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$ величина

$$J = \| x_0 - y \|^2 = \| x_0 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \|^2 =$$
$$= (x_0 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \ x_0 - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i) =$$
$$= (x_0, x_0) - 2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_0, e_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} \alpha_i \alpha_j (e_i, e_j),$$

рассматриваемая как функция от $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, должна достигать минимума при $\alpha_i = \lambda_i$, $i = 1, \ldots, n$. Относительно этих параметров написанное выражение является квадратичной функцией, поэтому отыскание наилучшего приближения указанным методом часто называется *методом наименьших квадратов*. Для отыскания наилучших приближений в случае, когда рассматриваемое гильбертово пространство является пространством функций с интегрируемым квадратом, этот метод применялся еще Гауссом.

Чтобы найти значения α_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, при которых величина J достигает минимума, достаточно приравнять нулю частные производные $\frac{\partial J}{\partial \alpha_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Это приводит к системе линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (e_i, e_j) = (x_0, e_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, n,$$

с определителем *Грамма* $G(e_1, \ldots, e_n)$, не равным нулю в силу линейной независимости системы $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Величина отклонения $\delta = \| x_0 - y_0 \|$ элемента x_0 от элемента y_0, т. е. наилучшее приближение элемента x_0 на множестве E, в этом случае может быть определена по формуле

$$\delta = \sqrt{\frac{G(x_0, e_1, \ldots, e_n)}{G(e_1, \ldots, e_n)}},$$

где числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком корня, являются определителями Грамма от элементов, стоящих в скобках.

7.2. Связь наилучших приближений с энтропией множеств. В настоящем пункте мы рассмотрим один из вопросов теории приближения, тесно связанный с разрабатываемой А. Н. Колмогоровым и его школой теорией, касающейся вопросов приближения в банаховых пространствах и их связи с энтропией множеств [19].

Пусть R — сепарабельное линейное нормированное пространство, пусть

$$X = \{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}, \quad X_n = \{x_0, \ldots, x_n\} \tag{7.1}$$

— последовательность линейно независимых элементов пространства R, и пусть

$$E_{X_n}(x) = \inf_{c_1 \ldots c_n} \left\| x - \sum_{k=0}^{n} c_k x_k \right\|_R,$$

где нижняя грань справа берется по возможным вещественным значениям $c_1, \ldots, c_n$.

Система (7.1) называется *замкнутой*, если для любого $x \in R$

$$\lim_{n \to \infty} E_{X_n}(x) = 0.$$

В дальнейшем считаем систему X фиксированной и замкнутой. Очевидно, что для всякого элемента $x \in R$ имеет место цепь неравенств

$$E_{X_0}(x) \geqslant E_{X_1}(x) \geqslant \ldots \geqslant E_{X_n}(x) \geqslant \ldots$$

Обратно, какова бы ни была последовательность чисел

$$\alpha_0 \geqslant \alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n \geqslant \ldots, \quad \lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0,$$

существует элемент $x \in R$ такой, что

$$E_{X_n}(x) = \alpha_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Пусть $A \subset R$. Положим

$$E_{X_n}(A) = \sup_{x \in A} E_{X_n}(x). \tag{7.2}$$

При этом, если множество A компактно, то $\lim\limits_{n \to \infty} E_{X_n}(A) = 0$.

Пусть A — компактное множество и $\varepsilon > 0$. Обозначим через $N_A(\varepsilon)$ минимальное число элементов пространства R, образующих ε-сеть для множества A. Функция

$$I_A(\varepsilon) = \log_2 N_A(\varepsilon)$$

называется *энтропией* (А. Н. Колмогоров) компактного множества A. Энтропия является, очевидно, невозрастающей функцией от ε.

Положим

$$\Phi_A(\eta) = \sup_{I_A(\varepsilon) \geqslant \eta} \{\varepsilon\}.$$

Функция $\Phi_A(\eta)$ в известном смысле обратна энтропии $I_A(\varepsilon)$. Оказывается, что наилучшие приближения (7.2) компактного множества A тесно связаны с его энтропией.

Теорема 1 (Ю. А. Брудный — А. Ф. Тиман). *Пусть A — компакт* (т. е. *компактное метрическое пространство*), $A \subset R$,

$$A_X = \{x \in R : \|x\| \leqslant E_{X_0}(A),\ E_{X_k}(x) \leqslant E_{X_k}(A)\}.$$

Тогда

$$E_{X_{n-1}}(A) \leqslant 4\,\Phi_{A_X}(n+1).$$

В любом бесконечномерном линейном нормированном пространстве существуют компактные множества, энтропия которых при $\varepsilon \to 0$ растет сколь угодно быстро. В связи с этим естественно классифицировать указанные множества по скорости роста их энтропии при $\varepsilon \to 0$.

Обозначим через $\mathfrak{M}_k^\beta(R)$ класс множеств $A \subset R$ таких, что

$$\underbrace{\log_2 \log_2 \ldots \log_2}_{k \text{ раз}} I_A(\varepsilon) \asymp \left(\log \frac{1}{\varepsilon}\right)^{\beta}\text{*)}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad \beta > 0.$$

*) Следуя Н. Бурбаки, мы пишем, что $f \asymp g$ при $\varepsilon \to 0$ ($f = f(\varepsilon)$, $g = g(\varepsilon)$), если $f = O(g)$ и $g = O(f)$.

Отметим, что множество A конечномерно тогда и только тогда, когда при некотором фиксированном n

$$\inf_X E_{X_n}(A) = 0.$$

Справедлива следующая теорема, в известном смысле обратная теореме 1 и оценивающая наилучшие приближения снизу.

Теорема 2 (Ю. А. Брудный — А. Ф. Тиман). *Пусть H — гильбертово пространство,*

$$A \in \mathfrak{M}_k^{\beta}(H);$$

тогда для всех достаточно больших n имеем:

если $k=0$, $\beta > 1$, то

$$\inf_X E_{X_n}(A) \geqslant \rho^{n^{\frac{1}{\beta-1}}}, \quad \rho < 1;$$

если $k=1$, $0 < \beta \leqslant 1$, то

$$\inf_X E_{X_n}(A) \geqslant \Phi_A\left[(n \ln n)^{\frac{1}{\beta}}\right];$$

если $k=1$, $\beta > 1$, то

$$\inf_X E_{X_n}(A) \geqslant \rho^{(\ln n)^{\frac{1}{\beta}}}, \quad \rho < 1;$$

если $k \geqslant 2$, то

$$\inf_X E_{X_n}(A) \geqslant \Phi_A(n^2).$$

7.3. Теория наилучших чебышевских приближений на компактах. Пусть R — компакт. Пространство всех действительных непрерывных на R функций $f(x)$ с естественными операциями сложения функций и умножения их на число и с нормой

$$\|f\|_{C_R} = \max_{x \in R} |f(x)| \tag{7.3}$$

образует линейное нормированное пространство, которое мы обозначим через C_R. Пусть

$$\Omega = \{\omega_1(x), \ldots, \omega_n(x)\} \tag{7.4}$$

— система линейно независимых функций, определенных и непрерывных на R, и пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — действительные числа. Всякую функцию вида

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \omega_i(x)$$

будем называть *обобщенным многочленом* (относительно системы Ω). Совокупность всех таких обобщенных многочленов будем обозначать через $\mathfrak{P}_\Omega$. Для каждой непрерывной на R функции $f(x)$ величина

$$\|f - P\|_{C_R} = \max_x |f(x) - P(x)|$$

называется *отклонением* (*расстоянием*) функции $f(x)$ от обобщенного многочлена $P(x) \in \mathfrak{P}_\Omega$, а величина

$$E_{\mathfrak{P}_\Omega}^{C_R}(f) = \inf_{P(x) \in \mathfrak{P}_\Omega} \|f - P\|$$

— ***наилучшим приближением в смысле Чебышева*** данной функции посредством обобщенных многочленов $P(x) \in \mathfrak{P}_\Omega$.

При сделанных предположениях всегда существует обобщенный многочлен $P_0(x) \in \mathfrak{P}_\Omega$ такой, что

$$E_{\mathfrak{P}_\Omega}^{C_R}(f) = \|f - P_0\|_{C_R},$$

т. е. в $\mathfrak{P}_\Omega$ всегда существует обобщенный многочлен, осуществляющий наилучшее приближение данной непрерывной функции $f(x)$.

Теорема 1 (Ш. Валле-Пуссен — Е. Я. Ремез). *Пусть на компакте R фиксированы система непрерывных линейно независимых функций* (7.4) *и некоторая непрерывная функция $f(x)$. Тогда существует конечное подмножество E компакта R, состоящее из r точек $E = \{x_1, \ldots, x_r\} \subset R$, $1 \leqslant r \leqslant n+1$, такое, что наилучшее приближение функции $f(x)$ при помощи обобщенных многочленов системы $\mathfrak{P}_\Omega$ на компакте R в смысле нормы* (7.3) *совпадает с таким же наилучшим приближением функции $f(x)$ на множестве E; при этом по крайней мере* *один из обобщенных многочленов, наименее уклоняющийся от функции $f(x)$ на E, является наименее уклоняющимся от этой функции и на всем компакте R.*

Вопрос о единственности обобщенного многочлена наилучшего приближения разрешается следующей теоремой.

Теорема 2 (Хаар). *Для того чтобы для каждой непрерывной на компакте R функции существовал единственный обобщенный многочлен наилучшего приближения $P_0(x) \in \mathfrak{P}_\Omega$, необходимо и достаточно, чтобы каждый многочлен $P(x) \in \mathfrak{P}_\Omega$, $P(x) \not\equiv 0$ имел бы на R не более чем $n-1$ различных нулей.*

Компакт R, удовлетворяющий условиям теоремы Хаара, называется *чебышевским множеством.* В случае, когда компакт R лежит в k-мерном эвклидовом пространстве E^k, $k \geqslant 2$, то условия теоремы Хаара заведомо не выполняются, если R содержит внутренние точки. Более полно структуру чебышевских множеств выясняет следующая теорема.

Теорема 3 (Мэрхьюбер). *Компактное множество R, содержащее не менее двух точек, тогда и только тогда является чебышевским множеством, когда R гомеоморфно некоторому замкнутому множеству на окружности.*

При этом оказывается, что если на множестве R, удовлетворяющем условиям теоремы Мэрхьюбера, существует единственный обобщенный многочлен наилучшего приближения степени n, то при четном n компакт R гомеоморфен подмножеству отрезка, а при нечетном n компакт R гомеоморфен окружности или подмножеству отрезка.

На чебышевские приближения непрерывных на компакте функций обобщается ряд свойств соответствующих приближений непрерывных функций на отрезке (например, теорема 1 Чебышева из п. 3.5). Сведения об этих результатах, а также дальнейшем развитии теории чебышевских приближений можно найти в [1], [3], [7], [8], [12] и [15].

7.4. Некоторые общие замечания о теории приближения функций. Опишем теперь кратко вопросы теории приближения, рассмотренные нами выше. В функциональных терминах эти задачи можно описать следующим образом.

Дано некоторое банахово пространство B. Большей частью элементами этого пространства являются функции, обладающие теми или иными свойствами. В пространстве B фиксируется некоторое n-мерное подпространство R^n (например, подмножество многочленов степени не выше чем $n-1$) и изучается вопрос о приближении в том или ином смысле элементов $f \in B$ с помощью элементов подпространства R^n. Задачи, которые при этом изучаются, связаны прежде всего с кругом идей великого русского математика П. Л. Чебышева, являющегося основоположником этого направления. Основными вопросами здесь являются следующие:

1°. Вопрос о существовании для каждого элемента $f \in B$ наилучшего приближения в подпространстве R^n, т. е. такого элемента $g \in R^n$, для которого величина $\|f-g\|$ *) достигает наименьшего значения.

2°. Вопрос о единственности указанного наилучшего приближения для каждого элемента $f \in B$.

3°. Вопрос о тех или иных характеристических свойствах элементов наилучших приближений.

4°. Вопрос о построении с любой наперед заданной степенью точности наилучшего приближения данного элемента $f \in B$ в заданном подпространстве R^n.

В указанной постановке задач оказывается, что элемент наилучшего приближения всегда существует, но, вообще говоря, не является единственным, однако в ряде важных и в какой-то степени основных случаев он единствен. С определенной точки зрения задача интерполяции функций многочленами данной степени (как алгебраическими, так и тригонометрическими) также может быть отнесена к указанному кругу идей, так как в этом случае мы также имеем дело с приближением функций с помощью элементов конечномерного подпространства (см. § 2).

Задачи, подобные вышеуказанным задачам 1° — 4°, возникают, конечно, и в том случае, когда изучается вопрос о приближении элементов $f \in B$ с помощью элементов некоторого заданного линейного бесконечномерного подпространства $R^\infty \subset B$ (например, подпространства экспоненциальных функций данной степени).

---

*) Символом $\|a\|$ мы обозначаем, как обычно, *норму* элемента $a \in B$.

Поскольку во всех этих вопросах речь идет о приближении элементов пространства B с помощью элементов некоторого линейного подпространства, то указанный круг задач относится к линейным задачам теории приближения, которым посвящены пп. 3.2 — 3.5 и 7.1 — 7.3.

При этом следует отметить, что сам элемент наилучшего приближения зависит от приближаемых элементов, вообще говоря, нелинейно (например, в пространстве непрерывных на отрезке $[a, b]$ функций при приближении их с помощью подпространства многочленов степени не выше n). С другой стороны, в гильбертовом пространстве функций с суммируемым квадратом *) элемент наилучшего приближения уже линейно зависит от приближаемых элементов и может быть найден с помощью так называемого метода наименьших квадратов, изучавшегося еще Гауссом (см. п. 7.1).

Кроме линейных задач, в теории приближений изучаются и задачи нелинейные, связанные с приближением элементов f пространства B с помощью элементов некоторого подмножества S пространства B, не являющегося линейным подпространством. Основоположником этого направления также является П. Л. Чебышев, рассмотревший впервые задачу подобного типа, именно задачу о наилучшем приближении функций с помощью рациональных функций, у которых фиксированы наибольшие возможные степени знаменателя и числителя. В нелинейных задачах встают те же вопросы, которые были указаны выше для линейных задач, однако положение здесь, как правило, значительно сложнее. Далеко не всегда в этом случае элемент наилучшего приближения единственный, поэтому здесь встает, например, вопрос о размерности множества наилучших приближений и возникает ряд других новых задач.

В последнее время все больше и больше развивается теория линейных и нелинейных задач теории приближений в указанном круге чебышевских идей в абстрактных банаховых пространствах, т. е. теория, для которой безразлична природа элементов рассматриваемого пространства. К сожалению, ввиду ограниченности объема в настоящем справочнике мы почти совершенно не касались ни нелинейных задач, ни приближений в абстрактных банаховых пространствах.

---

*) А значит, и в любом гильбертовом пространстве, независимо от природы его элементов.

Другие задачи теории приближения функций связаны с идеями Вейерштрасса — Джексона — Бернштейна и касаются приближений элементов пространства B с помощью подмножества R, представленного как объединение некоторой расширяющейся последовательности линейных подпространств R_n, $n=1, 2, 3, \ldots$, т. е. $R_1 \subset R_2 \subset \ldots \subset R_n \subset \ldots$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} R_n = R$. Например, в случае, когда B есть банахово пространство функций, в качестве R_n часто берется множество многочленов (алгебраических или тригонометрических) степени не выше чем n, и, значит, множеством R здесь является совокупность всех многочленов (соответственно алгебраических или тригонометрических). Первый вопрос, который здесь возникает, — это вопрос о принципиальной возможности сколь угодно точного приближения любого элемента $f \in B$ с помощью элементов $g \in R$ (см. п. 3.2), а также вопрос о конструктивном получении этих элементов $g \in R$ (см., например, п. 3.3), если они, конечно, существуют. В случае положительного решения вопроса о сколь угодно точном приближении элемента $f \in B$ с помощью элементов множества R возникает, например, вопрос о скорости стремления к нулю при $n \to \infty$ отклонения вида

$$\omega_n(f) = \inf_{g_n \in R_n} \|f - g_n\|$$

в зависимости от свойств элемента f, а также вопрос об изучении тех или иных конкретных методов приближения элементов $f \in B$ с помощью элементов $g_n \in R_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Оба этих вопроса изучаются как в зависимости от индивидуальных свойств элемента f, так и в зависимости от некоторых общих свойств, характеризующих принадлежность элемента к тому или иному классу. Эти вопросы приобретают особенный интерес, когда рассматриваемое пространство B представляет собой то или иное пространство функций (пп. 3.7 — 3.10, § 5, § 6). Здесь интересно также изучение свойств приближающих функций по свойствам приближаемых функций (см., например, теорему 11 в п. 3.7).

В непосредственной связи с указанными вопросами приближения находится одно из самых важных приложений теории приближения функций, представляющее в известном смысле задачу, обратную к только что рассмотренной (поэтому результаты в этой области часто называют обратными теоремами теории приближений). Во-первых, изучаются структурные свойства функции по заданному характеру изменения величины ее отклонения при $n \to \infty$ от элементов пространств R_n, получаемых тем или иным методом приближения. Здесь встречаются случаи, когда это отклонение рассматривается как в целом по всему множеству определения функций, так и в точке. Во-вторых, по тем или иным свойствам самих приближающих функций из подпространств R_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, изучаются свойства приближаемых функций. В ряде важных случаев, рассмотренных нами выше (см. §§ 3, 5, 6), этот вопрос удается в известном смысле полностью изучить и описать структурные свойства функций в терминах приближающих функций или отклонения от них приближаемой функции, т. е. получить необходимые и достаточные условия для рассматриваемых свойств функций в указанных терминах. Изучение функций по свойствам тех или иных приближений или отклонений функций от приближающих функций обычно называется *конструктивной теорией функций*.

В нашем справочнике мы рассмотрели в пространствах функции одного переменного как периодические, так и непериодические функции. При этом оказалось, что периодический случай значительно проще непериодического; например, в периодическом случае указанные выше задачи удалось описать в достаточно полной степени только лишь в терминах наилучших приближений $E_n(\mathfrak{F})$ данного класса функций $\mathfrak{F}$, принадлежащего пространству функций B.

Для аналогичного описания свойств непериодических функций оказалось уже недостаточно наилучших приближений, и приходится вводить понятие так называемых взвешенных отклонений, т. е. отклонений, которые зависят не только от индекса n, но и от положения точки на отрезке (см. п. 3.8).

В настоящее время большое внимание уделяется изучению различных конкретных методов приближения функций, задаваемых с помощью некоторого алгоритма. Оказывается, что для приближения периодических функций наиболее удобным является приближение их с помощью тригонометрических функций, точнее, с помощью линейных комбинаций синусов и косинусов кратных дуг (см. п. 5.3). Поэтому в периодическом случае мы рассмотрели различные методы приближения функций, связанные прежде всего с методами суммирования рядов Фурье (см. п. 4.1). Здесь представляет большой интерес, как теоретический, так и практический, точная и асимптотическая оценка отклонения функций $f(x) \in \mathfrak{F}$ от построенных с помощью алгоритма приближающих функций $g_n(x) \in R_n$ (например, скорость изменения этого отклонения при $n \to \infty$, зависимость его от свойств функций класса $\mathfrak{F}$ и от метода приближения).

Это позволяет оценить величину допускаемой погрешности при применении указанного метода приближения.

Особый интерес, конечно, представляют так называемые наилучшие линейные методы приближения функций некоторого класса $\mathfrak{F}$, т. е. такие методы, которые для данного класса функций дают в точности (или хотя бы асимптотически) тот же порядок приближения, что и наилучшие приближения. (Более подробно см. об этом в п. 4.4.)

В § 7 настоящей главы мы рассмотрели некоторые вопросы приближения в банаховых пространствах; однако, как это уже указывалось выше, рассмотренные нами здесь вопросы не отражают в полной мере существующие сейчас направления развития теории в этой области, а носят лишь иллюстративный характер. За недостатком места мы не затронули также и геометрическую интерпретацию вопросов теории приближений ни в конечномерном, ни в бесконечномерном случае.

ГЛАВА III

ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Равномерные почти-периодические функции на прямой

1.1. Различные определения почти-периодических функций. 1. Определение 1. Число τ называется *ε-почти-периодом* (*ε-смещением*) функции $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, если для всех x выполняется неравенство

$$|f(x+\tau)-f(x)|<\varepsilon.$$

Если $f(x)$ — периодическая функция и p — ее период, т. е. $f(x+p)=f(x)$, то, очевидно, p является также и почти-периодом $f(x)$ для любого $\varepsilon>0$, точно так же как и любое число вида np $(n=\pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Определение 2. Множество E действительных чисел называется *относительно плотным*, если существует такое число $l>0$, что в каждом интервале действительной оси длины l $(\alpha<x<\alpha+l)$ найдется хотя бы одно число множества E.

Например, числа арифметической прогрессии np $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ и числа вида $\pm\sqrt{n}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ образуют относительно плотные множества. Напротив, числа вида $\pm n^2$ не образуют относительно плотного множества.

Определение 3. Непрерывная на всей действительной прямой функция $f(x)$ называется *равномерной почти-периодической* (в дальнейшем сокращенно п.-п.) функцией, если для каждого $\varepsilon>0$ существует относительно плотное множество ε-почти-периодов функции $f(x)$.

Иначе говоря, для каждого $\varepsilon>0$ можно указать такое положительное число $l=l(\varepsilon)$, что в каждом интервале длины l найдется хотя бы одно число τ, для которого выполняется неравенство

$$|f(x+\tau)-f(x)|<\varepsilon \qquad (-\infty<x<\infty).$$

Легко показать, что если $f(x)$ — почти-периодическая, но не периодическая функция, то при $\varepsilon \to 0$ $l(\varepsilon) \to +\infty$.

Равномерные п.-п. функции называются также п.-п. функциями Бора.

2. Определение 4. Множество функций $M = \{f(x)\}$, каждая из которых определена на всей числовой оси, называется *условно компактным*, если из каждой бесконечной последовательности $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ..., принадлежащей множеству M, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся равномерно на всей числовой оси.

Определение 5. Функция $f(x)$ называется *п.-п.* (*в смысле Бохнера*), если семейство функций $\{f(x+h)\}$ $(-\infty < h < \infty)$ условно компактно (т. е. если из каждой бесконечной последовательности $f(x+h_1), f(x+h_2), \ldots$ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся равномерно на всей числовой оси).

Теорема 1 (Бохнер). *В случае непрерывных функций классы п.-п. функций Бора и Бохнера совпадают.*

1.2. Простейшие основные свойства п.-п. функций. В этом параграфе перечислены простейшие свойства п.-п. функций. Некоторые из этих свойств прямо следуют из определения, а некоторые нуждаются в доказательствах, иногда не простых.

1) Если $f(x)$ — равномерная п.-п. функция, то $\alpha f(x)$ и $f(x+c)$ (c — действительное число, α — комплексное) — также равномерные п.-п. функции.

2) Если $f(x)$ — равномерная п.-п. функция, то $|f(x)|$ — также равномерная п.-п. функция (это следует из элементарного неравенства $\big||f(x+\tau)| - |f(x)|\big| \leqslant |f(x+\tau) - f(x)|$).

3) Если $f(x)$ равномерная п.-п. функция и

$$\inf_{-\infty < x < \infty} |f(x)| = \gamma > 0,$$

то $1/f(x)$ — также равномерная п.-п. функция.

Имеет место более общее утверждение. Обозначим через E множество значений п.-п. функции $f(x)$. Если функция $F(z)$ на множестве E равномерно непрерывна, то $F[f(x)]$ — равномерная п.-п. функция.

4) Равномерная п.-п. функция ограничена на всей числовой прямой.

5) Равномерная п.-п. функция равномерно непрерывна на всей числовой прямой.

6) Сумма и произведение конечного числа равномерных п.-п. функций есть равномерная п.-п. функция.

7) Предел $f(x)$ равномерно сходящейся последовательности $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ равномерных п.-п. функций есть равномерная п.-п. функция.

Каждый тригонометрический многочлен

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k x},$$

в котором a_k — комплексные числа, λ_k — действительные числа, есть сумма периодических и, следовательно, почти-периодических функций. На основании свойства 6) $S_n(x)$ есть п.-п. функция. На основании свойства 7) равномерный предел последовательности тригонометрических многочленов есть равномерная п.-п. функция. Имеет место также и обратный результат, т. е. каждая равномерная п.-п. функция есть равномерный предел последовательности тригонометрических многочленов. В отличие от прямого результата, который, как мы видели, получается очень просто, обратный результат можно получить лишь путем сложного доказательства. Этот обратный результат является основным во всей теории равномерных п.-п. функций.

8) Если производная $f'(x)$ равномерной п.-п. функции равномерно непрерывна, то она также является равномерной п.-п. функцией.

9) Если неопределенный интеграл

$$F(x) = C + \int_0^x f(x)\,dx$$

равномерной п.-п. функции $f(x)$ ограничен на всей числовой оси, то он также является равномерной п.-п. функцией (теорема Боля — Бора).

1.3. Ряды Фурье.

1. Теорема о среднем значении. *Для каждой равномерной п.-п. функции $f(x)$ существует среднее значение*

$$M\{f\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x)\,dx.$$

Усиленная теорема о среднем значении. *Для каждой равномерной п.-п. функции $f(x)$ предел*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(x)\,dx=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T f(x+a)\,dx=$$
$$=M\{f(x+a)\}=M\{f(x)\}$$

существует равномерно по a.

В частности, полагая $a=-T$, получим

$$M\{f(x)\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T}^{0} f(x)\,dx=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx.$$

Среднее $M\{f\}$ обладает следующими очевидными свойствами:

1) $M\{cf\}=cM\{f\}$ (c — постоянное комплексное число).
2) $M\{f+g\}=M\{f\}+M\{g\}$.
3) $M\{f(x+a)\}=M\{f(x)\}$ (a — произвольное действительное число).

4) Если последовательность равномерных п.-п. функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ сходится равномерно на всей числовой оси к функции $f(x)$, то

$$\lim_{n\to\infty} M\{f_n\}=M\{\lim_{n\to\infty} f_n\}=M\{f\}.$$

Следующее свойство менее очевидно и нуждается в доказательстве.

5) Пусть $f(x)$ — равномерная п.-п. функция. Если $f(x)\geqslant 0$ и не равна тождественно нулю, то

$$M\{f(x)\}>0.$$

2. При любом действительном λ функция $e^{-i\lambda x}$ — периодическая с периодом $2\pi/|\lambda|$. Поэтому если $f(x)$ — равномерная п.-п. функция, то этим же свойством обладает произведение $f(x)e^{-i\lambda x}$. Следовательно, функция

$$a(\lambda)=M\{f(x)e^{-i\lambda x}\}$$

определена для всех действительных λ. Фундаментальное значение имеет следующий факт:

Функция $a(\lambda)$ может отличаться от нуля самое большее на счетном множестве значений λ.

Это утверждение легко следует из неравенства Бесселя для п.-п. функций, которое в свою очередь следует из свойства минимальности коэффициентов Фурье.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — произвольные различные действительные числа и $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — произвольные комплексные числа. Тогда в силу очевидных преобразований

$$M\{|f(x)-\sum_{k=1}^{n} c_k e^{i\lambda_k x}|^2\} = M\{|f(x)|^2\} - \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k M\{f(x)e^{-i\lambda_k x}\} -$$

$$-\sum_{k=1}^{n} c_k M\{\overline{f(x)}\, e^{i\lambda_k x}\} + \sum_{k_1=1}^{n}\sum_{k_2=2}^{n} c_{k_1}\bar{c}_{k_2} M\{e^{i\lambda_{k_1}x} e^{-i\lambda_{k_2}x}\} =$$

$$= M\{|f(x)|^2\} - \sum_{k=1}^{n} \bar{c}_k a(\lambda_k) - \sum_{k=1}^{n} c_k \bar{a}(\lambda_k) + \sum_{k=1}^{n} c_k \bar{c}_k =$$

$$= M\{|f(x)|^2\} + \sum_{k=1}^{n} |c_k - a(\lambda_k)|^2 - \sum_{k=1}^{n} |a(\lambda_k)|^2.$$

Из этого тождества следует, что минимум левой части достигается при $c_k = a(\lambda_k)$. Полагая $c_k = a(\lambda_k)$, получим

$$M\{|f(x)-\sum_{k=1}^{n} a(\lambda_k) e^{i\lambda_k x}|^2\} = M\{|f(x)|^2\} - \sum_{k=1}^{n} |a(\lambda_k)|^2.$$

Так как левая часть неотрицательна, то

$$\sum_{k=1}^{n} |a(\lambda_k)|^2 \leqslant M\{|f(x)|^2\}, \tag{1.1}$$

что является *неравенством Бесселя* для п.-п. функций.

Из неравенства (1.1) легко следует приведенное выше утверждение о функции $a(\lambda)$. В самом деле, из неравенства (1.1) следует, что для любого натурального n значений λ, для которых $\frac{1}{n+1} \leqslant |a(\lambda)| < \frac{1}{n}$, — конечное число. Придавая n значения 0, 1, 2, ..., получим, что всех λ, для которых $a(\lambda) \neq 0$, не более чем счетное множество.

Обозначим те λ, для которых $a(\lambda) \neq 0$ (в произвольном порядке), через $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, и пусть $a(\lambda_n) = A_n$.

Числа λ_n называются *показателями Фурье* функции $f(x)$, а числа A_n — ее *коэффициентами Фурье*. Таким образом, каждой равномерной п.-п. функции можно сопоставить ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x}, \quad A_n = M\{f(x)e^{i\lambda_n x}\}.$$

Из неравенства (1.1) в пределе следует

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 \leqslant M\{|f(x)|^2\}. \tag{1.2}$$

Неравенство (1.2) также называется *неравенством Бесселя.* На самом деле, для каждой равномерной п.-п. функции в неравенстве (1.2) имеет место знак равенства:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 = M\{|f(x)|^2\}. \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) называется *уравнением Парсеваля* и является одним из основных утверждений теории п.-п. функций.

1.4. Формальные операции над рядами Фурье.

1. Пусть

$$f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x} = \sum_\lambda a(\lambda) e^{i\lambda x},$$

$$g(x) \sim \sum_n B_n e^{i\mu_n x} = \sum_\lambda b(\lambda) e^{i\lambda x}.$$

Тогда

1) $kf(x) \sim \sum_n k A_n e^{i\lambda_n x}$ (k — произвольное комплексное число);

2) $e^{i\lambda x} f(x) \sim \sum_n A_n e^{i(\lambda_n + \lambda)x}$ (λ — произвольное действительное число);

3) $f(x+\alpha) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n \alpha} e^{i\lambda_n x}$ (α — произвольное действительное число);

4) $\overline{f}(x) \sim \sum_n \overline{A}_n e^{-i\lambda_n x}$;

5) $f(x) + g(x) \sim \sum_\lambda [a(\lambda) + b(\lambda)] e^{i\lambda x}$;

6) $f(x) \cdot g(x) \sim \sum_n C_n e^{i\nu_n x}$,

где

$$C_n = \sum_{\lambda_p + \mu_q = \nu_n} A_p B_q. \tag{1.4}$$

Первые пять свойств получаются совершенно элементарно. В отличие от них шестое свойство можно получить только с использованием равенства Парсеваля (и наоборот, равенство Парсеваля можно получить из равенства (1.4)).

2. Пусть дана последовательность равномерных п.-п. функций

$$f_m(x) \sim \sum_n A_n^{(m)} e^{i\lambda_n^{(m)} x},$$

сходящаяся равномерно для всех действительных x к $f(x)$. Тогда равномерно для всех действительных λ

$$\lim_{m\to\infty} M\{f_m(x)\, e^{-i\lambda x}\} = M\{f(x)\, e^{-i\lambda x}\},$$

т. е.

$$f(x) \sim \lim_{m\to\infty} \sum_n A_n^{(m)} e^{i\lambda_n^{(m)} x}.$$

Доказательство очевидно.

3. Если

$$f(x) \sim \sum_n A_n\, e^{i\lambda_n x}, \tag{1.5}$$

то

$$f'(x) \sim \sum_n i\,\lambda_n A_n\, e^{i\lambda_n x}.$$

Если

$$F(x) = \int_0^x f(x)\, dx$$

есть п.-п. функция, то

$$F(x) \sim C + \sum_n \frac{A_n}{i\lambda_n}\, e^{i\lambda_n x}.$$

4. Сверткой функции $f(x)$ называется функция

$$g(x) = M_t\{f(x+t)\overline{f}(t)\}.$$

Если $f(x)$ — равномерная п.-п. функция, то и $g(x)$ такая функция. Если $f(x)$ имеет ряд Фурье (1.5), то

$$g(x) \sim \sum_n |A_n|^2 e^{i\lambda_n x}.$$

5. Если тригонометрический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{i\lambda_n x}$ сходится равномерно на всей числовой прямой к сумме $S(x)$, то он является рядом Фурье своей суммы.

Доказательство следует из п. **2** и свойства ортогональности

$$M\{e^{i\lambda x} e^{-i\mu x}\} = \begin{cases} 0 & \text{при } \lambda \neq \mu, \\ 1 & \text{при } \lambda = \mu. \end{cases}$$

Следствие. Существуют равномерные п.-п. функции, показатели Фурье которых образуют произвольное счетное множество.

1.5. Основные теоремы. Основными теоремами теории равномерных п.-п. функций называются равенство Парсеваля и теорема единственности (а также теорема аппроксимации, которую мы рассмотрим в следующем параграфе).

Равенство Парсеваля (теорема Бора). *Если $f(x) \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n e^{i\lambda_n x}$ есть равномерная п.-п. функция, то*

$$M\{|f(x)|^2\} = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2. \tag{1.6}$$

Равенство (1.6) называется *равенством Парсеваля.*

Теорема единственности. *Если для равномерной п.-п. функции $f(x)$ все коэффициенты Фурье равны нулю, т. е. для всех действительных λ*

$$M\{f(x) e^{-i\lambda x}\} = 0,$$

то функция $f(x)$ тождественно равна нулю.

Доказательства этих теорем представляют некоторые трудности. Легко доказывается эквивалентность этих теорем в том смысле, что из одной из них следует другая.

а) Из теоремы единственности следует равенство Парсеваля. Пусть $f(x) \sim \sum\limits_{n} A_n e^{i\lambda_n x}$. Тогда

$$g(x) = M_t\{f(x+t)\bar{f}(t)\} \sim \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 e^{i\lambda_n x}.$$

Так как (в силу неравенства Бесселя) $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 < \infty$, то тригонометрический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2 e^{i\lambda_n x}$ сходится равномерно и, следовательно, является рядом Фурье своей суммы, которую мы обозначим через $S(x)$. Итак, функции $g(x)$ и $S(x)$ имеют одинаковые ряды Фурье. Следовательно, по теореме единственности, справедливость которой мы предположили,

$$g(x) = S(x).$$

Полагая в этом равенстве $x = 0$, мы получим

$$M\{|f(t)|^2\} = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2.$$

б) Из равенства Парсеваля следует теорема единственности. Пусть все коэффициенты Фурье функции $f(x)$ равны нулю. Тогда из равенства Парсеваля получим

$$M\{|f(x)|^2\} = 0.$$

Отсюда следует (см. п. 1.3) $f(x) \equiv 0$.

1.6. Теорема аппроксимации. Для каждой равномерной п.-п. функции $f(x)$ и каждого $\varepsilon > 0$ можно указать тригонометрический многочлен

$$P_\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{N} c_k e^{i\nu_k x},$$

удовлетворяющий неравенству

$$|f(x) - P_\varepsilon(x)| < \varepsilon \quad (-\infty < x < \infty).$$

При этом можно предполагать, что показатели ν_k многочлена $P_\varepsilon(x)$ выбираются из показателей Фурье функции $f(x)$.

Имеется несколько различных доказательств теоремы аппроксимации. Мы рассмотрим один из методов — метод Бохнера. Предварительно необходимо ввести некоторые новые понятия.

Определение 1. Конечное или счетное множество действительных чисел β_1, β_2 называется *линейно независимым*, если не существует соотношения вида

$$r_1\beta_1 + r_2\beta_2 + \ldots + r_n\beta_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

с рациональными, не равными одновременно нулю числами $r_1, r_2, \ldots, r_n$.

Определение 2. Конечное или счетное множество линейно независимых чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots$ называется *базисом* множества чисел $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n, \ldots$, если каждое число Λ_n представляется в виде конечной линейной комбинации с рациональными коэффициентами из чисел β, т. е.

$$\Lambda_n = r_1^{(n)}\beta_1 + r_2^{(n)}\beta_2 + \ldots + r_{m_n}^{(n)}\beta_{m_n}. \tag{1.7}$$

Нетрудно доказать, что каждое счетное множество действительных чисел имеет базис, содержащийся в этом множестве.

Очевидно, что для одного и того же множества чисел может существовать много базисов, но в определенном базисе представление числа единственно.

Если базис содержит конечное число членов, то он называется *конечным,* в противном случае — *бесконечным.* Если в представлении (1.7) все r — целые числа, то базис называется *целым*, в противном случае — *рациональным.*

Определение 3. *Ядром Фейера* называется функция

$$K_n(\beta t) = \sum_{\nu=-n}^{n}\left(1 - \frac{|\nu|}{n}\right)e^{i\nu\beta t} = \frac{\sin^2 \frac{n\beta}{2} t}{n \sin^2 \frac{\beta t}{2}}$$

(β — произвольное действительное число, n — произвольное натуральное число).

Пусть $f(x) \sim \sum\limits_{n} A_n e^{i\lambda_n x}$ — равномерная п.-п. функция. Обозначим через $\beta_1, \beta_2, \ldots$ какой-либо базис показателей Фурье функции $f(x)$ и через $r, m, n_1, \ldots, n_r$ некоторые целые положительные числа. Построим составное ядро Фейера:

$$K_B^{(m)}(t) = K^{(m)}_{\begin{pmatrix} n_1, & n_2, & \ldots, & n_r \\ \beta_1, & \beta_2, & \ldots, & \beta_r \end{pmatrix}}(t) = K_{n_1}\left(\frac{\beta_1 t}{m!}\right) K_{n_2}\left(\frac{\beta_2 t}{m!}\right) \ldots K_{n_r}\left(\frac{\beta_r t}{m!}\right),$$

где через B обозначена совокупность индексов $\begin{pmatrix} n_1, & n_2, & \ldots, & n_r \\ \beta_1, & \beta_2, & \ldots, & \beta_r \end{pmatrix}$.

Определение 4. *Тригонометрическим многочленом Бохнера—Фейера* называется многочлен

$$P_B^{(m)}(x) = M_t\{f(x+t)\,K_B^{(m)}(t)\} =$$
$$= \sum_{\substack{|\nu_1|\leq n_1\\ \cdots\cdots \\ |\nu_r|\leq n_r}} k_{n_1,\, n_2,\, \ldots,\, n_r;\, \nu_1,\, \nu_2,\, \ldots,\, \nu_r}\, a\left(\frac{\nu_1}{m!}\beta_1 + \ldots + \frac{\nu_r}{m!}\beta_r\right) e^{i\left(\frac{\nu_1}{m!}\beta_1 + \ldots + \frac{\nu_r}{m!}\beta_r\right)x},$$

где $a\left(\frac{\nu_1}{m!}\beta_1 + \ldots + \frac{\nu_r}{m!}\beta_r\right)$ есть коэффициент Фурье функции $f(x)$, соответствующий показателю $\frac{\nu_1}{m!}\beta_1 + \ldots + \frac{\nu_r}{m!}\beta_r$, $k_{n_1,\, \ldots,\, n_r;\, \nu_1,\, \ldots,\, \nu_r}$ — неотрицательные числа.

Теорема аппроксимации (Бохнер). *Для каждой равномерной п.-п. функции $f(x)$ равномерно на всей вещественной оси*

$$\lim_{n_1\to\infty,\, n_2\to\infty,\, \ldots,\, n_r\to\infty,\, m\to\infty} P_B^{(m)}(x) = f(x),$$

т. е. для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такие r, m, n_1, ..., n_r, что для всех вещественных x выполняется неравенство

$$|f(x) - P_B^{(m)}(x)| < \varepsilon.$$

1.7. Сходимость рядов Фурье для некоторых классов равномерных почти-периодических функций.

1. При изучении вопросов сходимости рядов Фурье п.-п. функций мы встречаемся с той дополнительной трудностью, что показатели Фурье могут лежать всюду плотно, и поэтому не ясно, в каком порядке суммировать члены ряда Фурье. В случае, если ряд Фурье сходится абсолютно, вопрос о порядке его членов отпадает. Вначале мы укажем два случая абсолютной сходимости рядов Фурье. Затем рассмотрим также и случаи неабсолютной сходимости, однако в предположении, что показатели Фурье имеют изолированные предельные точки.

Теорема 1. *Если коэффициенты Фурье равномерной п.-п. функции* $f(x) \sim \sum\limits_n A_n e^{i\lambda_n x}$ *положительны,* $A_n > 0$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ *сходится.*

Теорема 2. *Если показатели Фурье равномерной п.-п. функции* $f(x)$ *линейно независимы, то ряд Фурье для этой функции сходится абсолютно:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |A_n| < \infty.$$

2. Предположим теперь, что показатели Фурье равномерной п.-п. функции имеют единственную предельную точку на бесконечности (таковы, в частности, все периодические функции).

Теорема 3. *Пусть равномерная п.-п. функция* $f(x) \sim \sum\limits_k A_k e^{i\lambda_k x}$ $(\lambda_{k+1} > \lambda_k,\ \lambda_{-k} = -\lambda_k,\ |A_k| + |A_{-k}| > 0,$ $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \infty)$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$\sup_x |f(x+h) - f(x)| < C|h|^{\alpha} \qquad (0 < \alpha < 1),$$

и пусть

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k^{-\alpha} \ln \frac{\lambda_{k+1} + \lambda_k}{\lambda_{k+1} - \lambda_k} = 0;$$

тогда равномерно на всей действительной оси

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} A_k e^{i\lambda_k x}.$$

Теорема 4. *Пусть* $\lambda_{k+1} - \lambda_k > \alpha > 0$, *где* α *не зависит от* k. *Тогда в каждой точке* x_0, *в окрестности которой функция* $f(x)$ *имеет ограниченную вариацию,*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} A_k e^{i\lambda_k x_0} = \frac{1}{2}[f(x_0+0) + f(x_0-0)].$$

3. Предположим теперь, что показатели Фурье функции $f(x) \sim \sum\limits_k A_k e^{i\lambda_k x}$ стремятся к нулю.

Теорема 5. *Пусть* $f(x) \sim \sum_k A_k e^{i\lambda_k x}$ $(\lambda_{k+1} < \lambda_k,\ \lambda_{-k} = -\lambda_k,\ |A_k| + |A_{-k}| > 0,\ \lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0)$ — *равномерная п.-п. функция. Пусть существует такая постоянная величина* C, *что*

$$\left|\int_0^u f(x+u)\,du\right| < C\left|u\right|^{1-\alpha} \qquad (0 < \alpha \leqslant 1),$$

и пусть

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k^\alpha \ln\frac{\lambda_k + \lambda_{k+1}}{\lambda_k - \lambda_{k+1}} = 0.$$

Тогда равномерно для всех действительных x

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} A_k e^{i\lambda_k x}.$$

1.8. Связь показателей Фурье с почти-периодами. Если $f(x)$ — периодическая функция с периодом p, то ее показатели Фурье кратны числу $2\pi/p$.

Для равномерных п.-п. функций также существует тесная связь между почти-периодами и показателями Фурье функции, но разумеется не столь простая, как для периодических функций. Эта связь устанавливается в следующих двух теоремах Бора:

Теорема 1. *Пусть* $f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\Lambda_n x}$ — *равномерная п.-п. функция. Для произвольных натурального числа* N *и положительного числа* $\delta\ (<\pi)$ *существует такое положительное число* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, N)$, *что все* ε-*почти-периоды* τ *функции* $f(x)$ *удовлетворяют системе неравенств* *)

$$|\Lambda_k \tau| < \delta \pmod{2\pi},\quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{1.8}$$

Теорема 2 (обратная теореме 1). *Пусть* $f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\Lambda_n x}$ — *равномерная п.-п. функция. Для произвольного* $\varepsilon > 0$ *можно указать натуральное* N *и положи-*

---

*) Неравенства (1.8.) означают, что найдутся такие целые числа n_k, для которых выполняются обычные неравенства

$$|\Lambda_k \tau - 2\pi n_k| < \delta \quad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

тельное $\delta\,(<\pi)$ *такие, что каждое действительное число* τ, *удовлетворяющее системе неравенств* (1.8), *является* ε-*почти-периодом функции* $f(x)$.

Интересно отметить, что, в то время как доказательство теоремы 1 совершенно элементарно, доказательство теоремы 2 основано на теореме аппроксимации (см. [2], гл. II, § 1).

1.9. Теорема Кронекера. Многие факты теории равномерных п.-п. функций тесно связаны со следующей классической теоремой Кронекера (см., в частности, следующий пункт, а также цитированную книгу Б. М. Левитана, гл. II).

Теорема 1 (Кронекер). *Пусть* $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$; $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ — *произвольные действительные числа. Для того чтобы система неравенств*

$$|\Lambda_k \tau - \theta_k| < \delta \pmod{2\pi}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.9}$$

имела совместное действительное решение τ *при любом сколь угодно малом положительном числе* δ, *необходимо и достаточно, чтобы из всякого равенства* $l_1\Lambda_1 + l_2\Lambda_2 + \ldots + l_n\Lambda_n = 0$, *в котором* $l_1, l_2, \ldots, l_n$ — *целые числа, следовало сравнение*

$$l_1\theta_1 + l_2\theta_2 + \ldots + l_n\theta_n \equiv 0 \pmod{2\pi}. \tag{1.10}$$

Отметим два важных частных случая этой теоремы:

1) если $\theta_1 = \theta_2 = \ldots = \theta_n = 0$, то система сравнений (1.10) всегда выполняется, поэтому система неравенств

$$|\Lambda_k \tau| < \delta \pmod{2\pi} \tag{1.11}$$

разрешима *);

2) если числа $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$ линейно независимы, т. е. уравнение $l_1\Lambda_1 + l_2\Lambda_2 + \ldots + l_n\Lambda_n = 0$ с целыми $l_1, l_2, \ldots, l_n$ возможно лишь в случае, когда $l_1 = l_2 = \ldots = l_n = 0$, то условие (1.10) выполняется при любых $\theta_1, \ldots, \theta_n$ и, значит, система (1.9) разрешима при любых $\theta_1, \ldots, \theta_n$ и любых $\delta > 0$.

---

*) Очевидно, что $\tau = 0$ удовлетворяет при любом $\delta > 0$ системе (1.11). Однако речь идет не об этом решении. Из доказательства теоремы Кронекера следует, что при любом $\delta > 0$ система (1.9), а значит и (1.11), имеет сколь угодно большие решения τ (более того, числа τ образуют относительно плотное множество).

1.10. Предельно периодические функции. Определение 1. Функция $F(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ называется *предельно периодической*, если она является равномерным пределом непрерывных периодических функций $F_k(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $(k=1,2, \ldots)$

Если функции $F_k(x_1, \ldots, x_m)$ по отношению к каждой переменной имеют неизменные (независимые от k) периоды, то предельная функция будет, очевидно, периодической с теми же периодами.

Определение 2. Функция $F(x_1, x_2, \ldots)$ от счетного числа переменных, каждая из которых может принимать всевозможные действительные значения, называется *предельно периодической*, если для произвольного положительного числа ε можно указать целое положительное число $n = n(\varepsilon)$ и непрерывную периодическую функцию $F_\varepsilon(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ такие, что для произвольных значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $x_{n+1}, \ldots$ выполняется неравенство

$$|F(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) - F_\varepsilon(x_1, x_2, \ldots, x_n)| < \varepsilon.$$

Теорема 1. *Для каждой равномерной п.-п. функции $f(x)$ существует такая предельно периодическая функция $F(x_1, x_2, \ldots)$ от конечного или счетного числа переменных, что*

$$f(x) = F(x, x, \ldots).$$

Природа предельно периодической функции $F(x_1, x_2, \ldots)$ существенно зависит от того, каков базис показателей Фурье функции $f(x)$ (см. п. 1.6). Так, например, если базис показателей Фурье целый, т. е. каждый показатель Фурье функции $f(x)$ есть линейная комбинация с целыми коэффициентами из чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots$, то функция $F(x_1, x_2, \ldots)$ — периодическая с периодами $\frac{2\pi}{\beta_1}, \frac{2\pi}{\beta_2}, \ldots$

Если базис конечный (не обязательно целый), т. е. чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots$ — конечное число, то $F(x_1, x_2, \ldots)$ — предельно периодическая функция от конечного числа переменных.

Если базис и целый, и конечный, то $F(x_1, x_2, \ldots)$ является периодической функцией от конечного числа переменных. Соответствующий класс равномерных п.-п. функций был рассмотрен П. Болем задолго до создания общей теории п.-п. функций.

1.11. Теорема об аргументе равномерной п.-п. функции. Пусть $F(t)$ — произвольная (комплексная) непрерывная, ограниченная функция, определенная для всех действительных t. Пусть $\inf\limits_t |F(t)| = k > 0$. Рассмотрим функцию $\varphi(t) = \frac{F(t)}{|F(t)|}$.

Очевидно, что эта функция также непрерывна и $|\varphi(t)|=1$. Положим $\varphi(t)=e^{i\omega(t)}$. Если в некоторой точке t_0 значение $\omega(t)$ выбрано, то для других значений t функцию $\omega(t)$ естественно продолжить как непрерывную. Очевидно, что таким образом функция $\omega(t)$ определится с точностью до целого, кратного 2π. Если дополнительно положить $-\pi\leqslant\omega(0)<\pi$, то функция $\omega(t)$ определится однозначно.

Функция $\omega(t)$ называется аргументом функции $F(t)$ и обозначается $\arg F(t)$. Различные непрерывные ветви аргумента функции отличаются на целое, кратное числу 2π.

Теорема Бора. *Пусть $F(t)$ — равномерная п.-п. функция, и пусть $\inf\limits_t |F(t)|=k>0$. Тогда $\arg F(t)=ct+\psi(t)$, где c — постоянная величина *) и $\psi(t)$ — равномерная п.-п. функция. Число c и показатели Фурье функции $\psi(t)$ суть линейные комбинации с целыми коэффициентами из показателей Фурье функции $F(t)$.*

1.12. N-почти-периодические функции.

1. В этом параграфе рассматривается класс обобщенных непрерывных п.-п. функций (содержащий в себе класс равномерных п.-п. функций), в области которого сохраняется теорема единственности для рядов Фурье (см. п. 1.5). В следующем параграфе указывается на важность этого класса функций для линейных дифференциальных уравнений с п.-п. коэффициентами.

Определение 1. Число $\tau=\tau(\varepsilon, N)$ называется *ε, N-почти-периодом* функции $f(x)$, если для всех $|x|<N$ выполняется неравенство

$$|f(x+\tau)-f(x)|<\varepsilon. \tag{1.12}$$

Определение 2. Непрерывная функция $f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ называется *N-почти-периодической* (сокращенно *N-п.-п.*) функцией, если можно указать счетную последовательность действительных чисел **) $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n, \ldots$, обладающую тем свойством, что, каковы бы ни были положительные числа ε и N, можно указать целое положительное число $n=n(\varepsilon, N)$ и положительное число $\delta=\delta(\varepsilon, N)$ такие, что

---

*) Постоянная c называется *средним движением* п.-п. функции $F(t)$.

**) Числа $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n \ldots$, разумеется, зависят от функции $f(x)$.

каждое действительное число τ, удовлетворяющее системе неравенств

$$|\Lambda_k \tau| < \delta \pmod{2\pi} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

является ε, N-почти-периодом функции $f(x)$, т. е. удовлетворяет неравенству (1.12).

Из теоремы 2 п. 1.8 следует, что каждая равномерная п.-п. функция есть N-п.-п. функция. Обратное не верно, что видно из следующего примера.

Пусть $p(x) = 2 + \cos x + \cos \sqrt{2}\, x$. Ясно, что для всех x $p(x) > 0$. С другой стороны, в силу теоремы Кронекера (см. п. 1.9) для произвольного $\delta > 0$ найдется решение системы неравенств

$$|x - \pi| < \delta \pmod{2\pi},$$
$$|\sqrt{2}\, x - \pi| < \delta \pmod{2\pi}.$$

Поэтому $\inf p(x) = 0$. Следовательно, функция $q(x) = \dfrac{1}{p(x)}$ не ограничена и, значит, не может быть равномерной п.-п. функцией (см. п. 1.2). Покажем, однако, что $q(x)$ есть N-п.-п. функция. Выберем $N > 0$ и $\varepsilon > 0$ произвольно и положим $k = \min\limits_{-N \leqslant x \leqslant N} p(x)$. Затем выберем произвольное положительное число $\delta < k$ и обозначим через $\tau = \tau(\delta)$ почти-период функции $p(x)$. Для $|x| < N$ имеем

$$|q(x+\tau) - q(x)| = \frac{|p(x+\tau) - p(x)|}{p(x)\, p(x+\tau)} < \frac{\delta}{k(k-\delta)}.$$

Поэтому если $\delta = \min\left(\dfrac{k}{2}, \dfrac{\varepsilon k^2}{2}\right)$, то $\dfrac{\delta}{k(k-\delta)} < \varepsilon$, следовательно, τ есть ε, N-почти-период для $q(x)$ и, стало быть, $q(x)$ — N-п.-п. функция (см. п. 1.8).

2. Теорема 1. *Сумма, разность и произведение N-п.-п. функций есть N-п.-п. функция.*

Для N-п.-п. функций среднее значение в обычном смысле не обязательно существует. Рассмотрим те N-п.-п. функции, для которых:

1) для всех действительных λ существует предел

$$a(\lambda) = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx = M\{f(x)\, e^{-i\lambda x}\},$$

$$2) \quad \overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x)|^2\, dx < \infty.$$

Если эти условия выполнены, то функции $f(x)$ можно отнести ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\lambda_n x}, \quad A_n = M\{f(x)\, e^{-i\lambda_n x}\}.$$

Теорема 2 (теорема единственности для N-п.-п. функций). *Если две N-п.-п. функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковые ряды Фурье, то эти функции тождественно равны.*

Теорема 3 (теорема аппроксимации для N-п.-п. функций). *Пусть $f(x)$ — N-п.-п. функция. Для произвольных* $\varepsilon > 0$ и $N > 0$ *можно указать тригонометрический многочлен* $P_{N,\varepsilon}(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\nu_k x}$, *показатели Фурье которого выбираются из показателей Фурье функции $f(x)$, а коэффициенты получаются из коэффициентов Фурье функции $f(x)$ умножением на некоторые числа, удовлетворяющий неравенству*

$$|f(x) - P_{N,\varepsilon}(x)| < \varepsilon \text{ для } |x| < N.$$

В частности, $P_{N,\varepsilon}(x)$ можно построить по методу Бохнера (см. п. 1.6).

1.13. Линейные дифференциальные уравнения с почти-периодическими коэффициентами. Как известно, каждую линейную систему дифференциальных уравнений можно привести к системе вида

$$(S_x) \quad \frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{n} f_{ik}(x) y_k + g_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Наряду с системой (S_x) мы будем рассматривать соответствующую однородную систему

$$(\Sigma_x) \quad \frac{dy_i}{dx} = \sum_{k=1}^{n} f_{ik}(x) y_k \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Рассмотрим тот случай, когда в системе (S_x) все коэффициенты $f_{ik}(x)$ и свободные члены $g_i(x)$ — равномерные п.-п.

функции. Пусть $\{h_\nu\}$ — последовательность действительных чисел, для которой существуют пределы

$$\lim_{\nu\to\infty} f_{ik}(x+h_\nu)=f^*_{ik}(x), \quad \lim_{\nu\to\infty} g_i(x+h_\nu)=g^*_i(x)$$

$$(i, k=1, 2, \ldots, n)$$

(см. определение Бохнера, п. 1.1, определение 5).

Наряду с системами (S_x) и (Σ_x) можно также рассматривать системы

$$(S^*_x) \quad \frac{dy_i}{dx}=\sum_{k=1}^{n} f^*_{ik}(x)y_k+g^*_i(x) \qquad (i=1, 2, \ldots, n),$$

$$(\Sigma^*_x) \quad \frac{dy_i}{dx}=\sum_{k=1}^{n} f^*_{ik}(x)y_k \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Выбирая различные последовательности $\{h_\nu\}$, мы получим семейства систем, которые обозначим через $H(S_x)$ и $H(\Sigma_x)$.

Теорема 1. *Если однородная система (Σ_x) не имеет ограниченных решений (за исключением тривиального решения $y_k=0$), то каждое ограниченное решение системы (S_x) состоит из N-п.-п. функций.*

Теорема 2. *Если ни одна из систем $H(\Sigma_x)$ не имеет ограниченных решений (за исключением тривиального), то каждое ограниченное решение системы (S_x) состоит из равномерных п.-п. функций.*

Определение 1. *Абсолютным значением* решения $\{y_i(x)\}$ в точке x называется величина

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |y_i(x)|^2\right)^{1/2}.$$

Теорема 3. *Если неоднородная система (S_x) имеет ограниченные решения, а однородная система (Σ_x) не имеет ограниченного решения, абсолютное значение которого может становиться сколь угодно малым (за исключением тривиального решения $y_i=0$), то система (S_x) имеет хотя бы одно решение, состоящее из N-п.-п. функций.*

Теорема 4. *Если ни одна из однородных систем семейства $H(\Sigma_x)$ не имеет решения, абсолютное значение которого может становиться сколько угодно малым (за исключением тривиального решения), и если система (S_x) имеет ограниченные решения, то хотя бы одно из них состоит из равномерных п.-п. функций.*

Из последней теоремы легко вывести, что каждое ограниченное решение дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x)$$

с постоянными коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и равномерной п.-п. правой частью $f(x)$ есть равномерная п.-п. функция.

§ 2. Различные обобщения п.-п. функций

2.1. Вводные замечания.

Определение 1. *Равномерной нормой* функции $f(x)$ называется величина

$$\|f\|_u = \sup_{-\infty < x < \infty} |f(x)|.$$

Очевидно, равномерная норма конечна только для ограниченных функций.

Определение 2. Величина

$$D_u(f, g) = \|f - g\|_u \tag{2.1}$$

называется *расстоянием* между функциями $f(x)$ и $g(x)$.

Тем самым совокупность ограниченных функций становится метрическим пространством. Сходимость в этом пространстве совпадает с равномерной сходимостью на всей числовой оси.

Основную теорему теории равномерных п.-п. функций можно сформулировать следующим образом:

Множество всех равномерных п.-п. функций совпадает с замыканием множества всех конечных тригонометрических сумм по расстоянию (2.1).

Различные обобщения понятия п.-п. функций на разрывные (интегрируемые по Лебегу) функции основаны на том, что в пространстве функций, определенных на всей числовой прямой, можно по-разному определять расстояние.

2.2. Определение и простейшие свойства п.-п. функций Степанова.

Определение 1. Величина

$$D_{S_l^p}[f(x), g(x)] = \sup_{-\infty < x < \infty} \left[\frac{1}{l}\int_x^{x+l} |f(x) - g(x)|^p\, dx\right]^{1/p}$$

называется *S-расстоянием порядка $p \geqslant 1$, соответствующим длине l (S_l^p-расстоянием).* Пространство суммируемых с p-й степенью в каждом конечном интервале функций с так определенным расстоянием называется *пространством Степанова (S^p-пространством).*

Замечание. Можно доказать, что S^p-расстояния, соответствующие различным l, топологически эквивалентны. Поэтому можно ограничиться случаем $l = 1$. Вместо S_1^p мы будем писать S^p.

Теорема 1. *S^p-пространства полны, т. е. если*

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} D_{S^p}[f_n(x), f_m(x)] = 0,$$

то существует функция $f(x) \in S^p$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} D_{S^p}[f(x), f_n(x)] = 0.$$

Определение 2. Измеримая и суммируемая с p-й степенью в каждом конечном интервале функция $f(x)$ называется *S^p-почти-периодической* (сокращенно *S^p-п.-п.*), если для любого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество чисел τ, удовлетворяющих неравенству

$$D_{S^p}[f(x+\tau), f(x)] =$$

$$= \sup_{-\infty < x < \infty} \left[\int_x^{x+1} |f(x+\tau) - f(x)|^p\, dx\right]^{1/p} < \varepsilon.$$

Число τ называется S^p, *ε-почти-периодом* функции $f(x)$.

Теорема 2. *S^p-п.-п. функция $f(x)$ S^p-ограничена, т. е.*

$$D_{S^p}\{f, 0\} = \sup_{-\infty < x < \infty} \left[\int_x^{x+1} |f(x)|^p\, dx\right]^{1/p} < \infty.$$

Теорема 3. *S^p-п.-п. функция $f(x)$ S^p-равномерно непрерывна, т. е. для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta=\delta(\varepsilon)$, что если $|h|<\delta$, то*

$$D_{S^p}[f(x+h),\ f(x)]<\varepsilon.$$

Теорема 4. *Сумма двух S^p-п.-п. функций есть S^p-п.-п. функция.*

Теорема 5. *Произведение S^p-п.-п. функции на S^q-п.-п. функцию $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ есть S-п.-п. функция* *).

Теорема 6. *Если последовательность $\{f_n(x)\}$ S^p-п.-п. функций сходится (в метрике S^p) к функции $f(x)$, то предельная функция также является S^p-п.-п.*

Определение 3. Суммируемая вместе со своей p-й степенью в каждом конечном интервале функция $f(x)$ называется *S^p-нормальной*, если семейство функций $\{f(x+h)\}$ (h—произвольное вещественное число) S^p-компактно, т. е. если из каждой бесконечной последовательности $f(x+h_1)$, $f(x+h_2)$, ... можно выбрать S^p-сходящуюся подпоследовательность.

Теорема 7. *Для того чтобы функция $f(x)$ была S^p-нормальной, необходимо и достаточно, чтобы она была S^p-п.-п.*

2.3. Определение и простейшие свойства п.-п. функций Вейля. В теории п.-п. функций Степанова существенно, что число l, фигурирующее в определении расстояния, фиксировано. Напротив, для п.-п. функций Вейля существенно, что с убыванием ε до нуля число l растет до бесконечности.

Определение 1. Величина **)

$$D_{W^p}\{f,g\}=\lim_{l\to\infty} D_{S_l^p}\{f,g\}=$$

$$=\lim_{l\to\infty}\ \sup_{-\infty<x<\infty}\left\{\frac{1}{l}\int_x^{x+l}|f(x)-g(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}$$

называется *W-расстоянием порядка p.*

---

*) Вместо S^1 мы пишем S.

**) Можно показать, что этот предел всегда существует.

Определение 2. Функция $f(x)$, интегрируемая с p-й степенью в каждом конечном интервале, называется *почти-периодической в смысле Вейля* (сокращенно: W^p-*п.-п.*), если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такие положительные числа $l = l(\varepsilon)$ и $L = L(\varepsilon)$, что в каждом интервале $(\alpha, \alpha + L)$ вещественной оси длины L найдется хотя бы одно число τ, удовлетворяющее неравенству

$$D_{S_l^p}[f(x+\tau), f(x)] = \\ = \sup_{-\infty < x < \infty} \left\{ \frac{1}{l} \int_x^{x+l} |f(x+\tau) - f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} < \varepsilon.$$

Очевидно, что если $\overline{\lim\limits_{\varepsilon \to 0}}\, l(\varepsilon) < \infty$, то W^p-*п.-п.* функция есть S^p-*п.-п.* функция. Точно так же очевидно, что равномерные п.-п. функции и S^p-п.-п. функции суть W^p-п.-п. функции.

Теорема 1. *W^p-п.-п. функция $f(x)$ W^p-ограничена, т. е.*

$$D_{W^p}\{f(x), 0\} = D_{W^p}\{f(x)\} < \infty.$$

Теорема 2. *W^p-п.-п. функция W^p-равномерно непрерывна, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие положительные числа $l = l(\varepsilon)$ и $\delta = \delta(\varepsilon)$, что если $|h| < \delta$, то*

$$D_{S_l^p}\{f(x+h), f(x)\} < \varepsilon.$$

Теорема 3. *Сумма двух W^p-п.-п. функций есть W^p-п.-п. функция.*

Теорема 4. *Произведение W^p-п.-п. функции и W^q-п.-п. функции $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ есть W-п.-п. функция* *).

Теорема 5. *Если последовательность W^p-п.-п. функций $\{f_n(x)\}$ W^p-сходится к функции $f(x)$, то последняя является W^p-п.-п.*

В заключение этого пункта отметим, что в отличие от пространств S^p пространства W^p неполны.

2.4. Теорема о среднем значении для W^p-п.-п. функций. Равенство Парсеваля для W^2- и S^2-п.-п. функций. Теорема аппроксимации. Так как коэффициенты Фурье выражаются

*) Вместо W^1 мы пишем W.

через определенные интегралы, то естественно ожидать, что и для п.-п. функций Степанова и Вейля существуют ряды Фурье. Действительно, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Для каждой W-п.-п. функции существует среднее значение*

$$M\{f(x)\} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_a^{a+T} f(x)\,dx.$$

Предел справа существует равномерно по a.

Теорема 2. *Для каждой W^p-(S^p-) п.-п. функции $f(x)$ среднее значение*

$$a(\lambda) = M\{f(x)\,e^{-i\lambda x}\} \quad (\lambda \text{ — вещественное число})$$

отлично от нуля не более чем для счетного множества значений λ: $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n, \ldots$ *Таким образом, каждой W^p-(S^p-) п.-п. функции $f(x)$ можно сопоставить ряд Фурье*

$$f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\Lambda_n x}, \quad A_n = a(\Lambda_n).$$

Теорема 3. *Для W^2-(S^2-) п.-п. функции имеет место равенство Парсеваля*

$$M\{|f(x)|^2\} = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2.$$

Теорема 4. *Для каждой W^p-(S^p-) п.-п. функции $f(x)$ и каждого $\varepsilon > 0$ можно указать конечный тригонометрический многочлен P_ε, удовлетворяющий неравенству*

$$D_{W^p}\{f(x), P_\varepsilon(x)\} < \varepsilon \quad [D_{S^p}\{f(x), P_\varepsilon(x)\} < \varepsilon].$$

Замечание. Многочлен $P_\varepsilon(x)$ можно строить по методу Бохнера.

2.5. П.-п. функции Безиковича.

Определение 1. Величина

$$D_{B^p}[f, g] = \left\{\overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(x) - g(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} =$$

$$= \{\overline{M}\{|f-g|^p\}\}^{1/p}$$

называется *B^p-расстоянием*. Пространство функций, суммируемых с p-й степенью в каждом конечном интервале с так определенным расстоянием, называется *B^p-пространством*.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется *почти-периодической в смысле Безиковича порядка* p (сокращенно *B^p-п.-п. функцией*), если существует последовательность конечных тригонометрических сумм $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_n(x)$, ..., для которой

$$\lim_{n \to \infty} D_{B^p}[f(x),\ P_n(x)] = 0.$$

Это определение по своему характеру отличается от определений, которые были положены в основу при изучении S^p- W^p-п.-п. функций. Для этих классов п.-п. функций определение основывалось на обобщении понятия почти-периода, а то, что мы взяли за определение для B^p-п.-п. функций, там являлось теоремой.

Однако функции Безиковича можно также определить внутренним образом. Такое определение впервые было дано Безиковичем *), но оно оказалось очень громоздким.

Значительно более простое определение дал Р. Досс **). Приведем это определение.

Для того чтобы функция $f(x)$, суммируемая с p-й степенью ($p \geqslant 1$) в каждом конечном интервале, принадлежала классу B^p-п.-п., необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла следующим трем условиям:

1. $$\lim_{h \to 0} \overline{M}_x \{ |f(x+h) - f(x)|^p \} = 0.$$

2. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество чисел τ, удовлетворяющих неравенству

$$\{\overline{M}_x \{ |f(x+\tau) - f(x)|^p \}\}^{1/p} < \varepsilon.$$

3. Для любого $a > 0$ существует периодическая периода a и класса L^p функция $f^{(a)}(x)$, для которой

$$\lim_{n \to \infty} \overline{M}_x \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(x+ka) - f^{(a)}(x) \right|^p \right\} = 0.$$

---

*) Besicovitch A. S., Almost periodic functions, Cambridge (1932).

**) Doss R., On generalized almost periodic functions, Annals of Math., v. 59, № 3 (1954), стр. 477.

Каждой B^p-п.-п. функции $f(x)$ можно сопоставить ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_n A_n e^{i\Lambda_n x}, \quad A_n = M\{f(x) e^{-i\Lambda_n x}\}.$$

Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковые ряды Фурье, то их разность $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ есть нулевая функция в пространстве B^p, т. е.

$$D_{B^p}[\varphi(x), 0] = 0.$$

Теорема 1. *Пространства B^p $(p \geqslant 1)$ полны.*

Следствие (аналог теоремы Рисса — Фишера). Для каждого тригонометрического ряда

$$\sum_n A_n e^{i\Lambda_n x} \tag{2.2}$$

(A_n — комплексные числа, Λ_n — вещественные числа), у которого $\sum\limits_n |A_n|^2 < \infty$, существует B^2-п.-п. функция, ряд Фурье которой совпадает с рядом (2.51).

2.6. Понятие о п.-п. функциях на группах. Пусть G — *абстрактная группа*, т. е. множество элементов, удовлетворяющих следующим четырем аксиомам:

1) В G определено умножение (вообще говоря, некоммутативное), т. е. операция, ставящая в соответствие каждой упорядоченной паре элементов $a, b \in G$ элемент $c \in G$:

$$ab = c.$$

2) Операция умножения ассоциативна, т. е. для любых трех элементов $a, b, c \in G$ имеет место равенство

$$a(bc) = (ab)c = abc.$$

3) В G имеется правая единица e, т. е. такой элемент, что для любого $a \in G$

$$ae = a.$$

4) Для всякого элемента $a \in G$ существует единственный правый обратный элемент a^{-1} такой, что

$$a \cdot a^{-1} = e.$$

Если сверх указанных четырех аксиом выполнено еще условие

$$ab = ba$$

для любых элементов $a, b \in G$, то группа называется *коммутативной* или *абелевой*.

Примером абелевой группы может служить действительное n-мерное векторное пространство R^n, в котором элементами группы являются векторы (или точки, отождествленные с концами векторов), а групповое умножение совпадает со сложением векторов.

В качестве примера некоммутативной группы приведем пример группы всех вращений единичной сферы в трехмерном пространстве.

Определение. Функция $f(x)$ ($x \in G, f(x)$ принимает комплексные значения) называется *почти-периодической на группе* G, если семейство функций $f(xa)$, $a \in G$ (или, что эквивалентно, семейство $f(ax)$) условно компактно в смысле равномерной сходимости на G, т. е. из каждой бесконечной последовательности $f(xa_1)$, $f(xa_2)$, ... можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность.

Теория п.-п. функций на группах развивается во многом аналогично теории п.-п. функций на прямой (прямая линия, очевидно, также является группой, в которой групповая операция совпадает с обычным сложением). При этом основную трудность представляет доказательство следующей теоремы.

Теорема о среднем значении. *Для каждой п.-п. функции $f(x)$ ($x \in G$, G — группа) существует однозначно определенное число $M_x\{f(x)\}$ (среднее значение функции $f(x)$), которое обладает следующими свойствами:*

1) $M_x\{\alpha f(x)\} = \alpha M_x\{f(x)\}$ (α — *комплексное число*);

2) $M_x\{f(x) \pm g(x)\} = M_x\{f(x)\} \pm M_x\{g(x)\}$;

3) $M_x\{1\} = 1$;

4) *если на всей группе G $f(x) \geqslant 0$, то $M_x\{f(x)\} \geqslant 0$; если $f(x) \geqslant 0$ и по крайней мере в одной точке $x_0 \in G$ $f(x_0) > 0$, то $M_x\{f(x)\} > 0$;*

5) $|M_x\{f(x)\}| \leqslant M_x\{|f(x)|\}$;

6) $M_x\{\overline{f(x)}\} = \overline{M}_x\{f(x)\}$ (*черта означает переход к комплексно-сопряженным значениям*);

7) $M_x\{f(xa)\} = M_x\{f(ax)\} = M_x\{f(x)\}$ *для произвольного элемента* $a \in G$;

8) $M_x\{f(x^{-1})\} = M_x\{f(x)\}$.

Существование среднего значения позволяет доказать для п.-п. функций на группах равенство Парсеваля, теорему единственности для рядов Фурье, теорему аппроксимации и др. Подробно с этим можно познакомиться в монографии [2], гл. VI.

§ 3. Аналитические п.-п. функции

3.1. Определение аналитических п.-п. функций и их простейшие свойства.

1. В теории аналитических п.-п. функций основной областью изменения аргумента является полоса. В связи с этим условимся в определенной терминологии.

Через (a, b) мы будем обозначать открытый интервал $a<x<b$. Через $[a, b]$ — замкнутый интервал $a\leqslant x\leqslant b$. Будут также встречаться интервалы $(a, b]$, $[a, b)$.

Пусть $s=\sigma+it$ — комплексная переменная. Множество всех s, для которых $\sigma=\sigma_0$, мы будем называть *прямой линией*, *вертикальной прямой линией* или просто *линией* $\sigma=\sigma_0$.

Множество всех s, для которых σ принадлежит интервалу (a, b), мы будем называть *полосой* (a, b). Будут также встречаться полосы $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$.

2. Определение 1. Действительное число τ называется *ε-почти-периодом* аналитической в полосе (α, β) функции $f(s)$, если во всех точках полосы (α, β) выполняется неравенство

$$|f(s+i\tau)-f(s)|<\varepsilon.$$

Обозначим множество всех ε-почти-периодов функции $f(s)$ (в рассматриваемой полосе) через $E\{\varepsilon;\ f(s)\}$.

Определение 2. Функция $f(s)$ называется *п.-п. в полосе* (α, β), если для каждого $\varepsilon>0$ множество $E\{\varepsilon;\ f(s)\}$ относительно плотно.

Аналогично можно определить почти-периодичность в полосе $[\alpha, \beta]$*).

Теорема 1. *П.-п. в полосе* $[\alpha, \beta]$ *функция* $f(s)$ *ограничена в этой полосе.*

---

*) При этом мы требуем, чтобы $f(s)$ была регулярна в полосе (α, β) и непрерывна в полосе $[\alpha, \beta]$.

Теорема 2. *Пусть $f(s)$ регулярна в полосе (α, β) и ограничена в любой полосе $[\alpha_1, \beta_1]$, $(\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta)$. Предположим, что на некоторой прямой $\sigma = \sigma_0$ $(\alpha < \sigma_0 < \beta)$ $f(s)$ есть равномерная п.-п. функция. Тогда $f(s)$ — п.-п. функция в полосе $[\alpha_1, \beta_1]$.*

Замечание. Эта теорема неверна, если условие ограниченности в любой полосе $[\alpha_1, \beta_1]$ не выполняется.

Теорема 3. *Сумма и произведение п.-п. в любой полосе $[\alpha_1, \beta_1]$ $(\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta)$ функций обладают этим же свойством.*

Следствие. Многочлен $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n e^{\lambda_n s}$ (λ_n — действительные числа, a_n — комплексные числа) есть п.-п. функция в полосе $(-\infty, \infty)$.

Теорема 4. *Равномерный предел последовательности аналитических п.-п. в любой полосе $[\alpha_1, \beta_1]$ $(\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta)$ функций $\{f_n(s)\}$ есть п.-п. функция в полосе $[\alpha_1, \beta_1]$.*

Следствие. Сумма равномерно сходящегося в любой полосе $[\alpha_1, \beta_1]$ $(\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n s}$ (λ_n действительны) есть п.-п. функция в этой полосе.

Теорема 5. *Производная п.-п. в полосе $[\alpha_1, \beta_1]$ $(\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta)$ функции — также п.-п. функция в этой полосе.*

Теорема 6. *Если неопределенный интеграл $F(s)$ п.-п. в полосе $[\alpha_1, \beta_1]$ функции $f(s)$ ограничен в этой полосе, то он является п.-п. функцией в той же полосе.*

Теорема 7. *Пусть $F(s)$ — п.-п. функция в полосе (α, β). Обозначим через G множество всех значений функции $f(s)$ на прямой σ_0 $(\alpha < \sigma_0 < \beta)$. Какое бы ни было $\delta > 0$, функция $f(s)$ принимает в полосе $(\sigma_0 - \delta, \sigma_0 + \delta)$ все значения из производного множества G'.*

Следствие 1. Если функция $f(s)$ п.-п. в полосе (α, β) и не обращается в этой полосе в нуль, то $\inf |f(s)| > 0$ в любой полосе $[\alpha_1, \beta_1]$ $(\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta)$.

Следствие 2. Если $f(s)$—п.-п. функция в любой полосе $[\alpha_1, \beta_1]$ $(\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta)$ и $f(s) \neq 0$ в полосе (α, β), то $g(s) = \frac{1}{f(s)}$ есть п.-п. функция в любой полосе $[\alpha_1, \beta_1]$.

Теорема 8. *Пусть* $f(s)$ *и* $g(s)$ — *две аналитические п.-п. функции в полосе* (α, β). *Если их отношение* $h(s)=\frac{f(s)}{g(s)}$ в этой полосе ограничено, то $h(s)$ есть п.-п. функция в любой полосе (α_1, β_1) $(\alpha<\alpha_1<\beta_1<\beta)$.

3.2. Ряды Дирихле. 1. Каждой аналитической п.-п. функции соответствует бесконечный ряд, который называется рядом Дирихле. Этот ряд аналогичен ряду Фурье для равномерных п.-п. функций от действительной переменной.

Теорема 1. *Пусть* $f(s)=f(\sigma+it)$ — *аналитическая п.-п. функция в полосе* (α, β). *Рассмотрим функцию* $f(\sigma+it)$ *при фиксированном* σ. *Ряд Фурье этой функции имеет вид*

$$f(s)=f(\sigma+it)\sim\sum_n A_n e^{\Lambda_n\sigma} e^{i\Lambda_n t}=\sum_n A_n e^{\Lambda_n s}, \tag{3.1}$$

причем числа A_n *и* Λ_n *не зависят от* s.

Ряд (3.1) называется *рядом Дирихле* для $f(s)$. Для A_n справедлива формула

$$A_n=M_t\{f(\sigma+it)\,e^{-\Lambda_n\sigma}e^{-i\Lambda_n t}\}\ (\alpha<\sigma<\beta).$$

Теорема 2. *Если* $f(s)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\Lambda_n s}$, *причем ряд сходится равномерно в некоторой полосе, то он является рядом Дирихле для суммы* $f(s)$.

Теорема 3 (теорема единственности для рядов Дирихле). *Если две аналитические п.-п. в одной и той же полосе функции имеют одинаковые ряды Фурье, то они тождественны в этой полосе.*

Теорема 4 (равенство Парсеваля). *Пусть* $f(s)\sim\sum_n A_n e^{\Lambda_n s}$ — *п.-п. в полосе* (α, β) *функция. Для каждого* σ *из полосы* (α, β) *имеет место равенство*

$$M_t\{|f(\sigma+it)|^2\}=\sum_{n=1}^{\infty}|A_n|^2 e^{2\Lambda_n\sigma}.$$

Теорема 5 (теорема аппроксимации). *Пусть* $f(s)$ — *п.-п. в полосе* (α, β) *функция. Последовательность сумм Бохнера — Фейера для ряда Дирихле функции* $f(s)$ *сходится равномерно к* $f(s)$ *в любой внутренней полосе.*

2. В силу теоремы 2 п. 3.1 для почти-периодичности функции $f(s)$ в любой полосе $[\alpha_1, \beta_1]$ $(\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta)$ достаточно, чтобы она была ограничена в этой полосе и почти-периодична хотя бы на одной прямой внутри полосы. Можно указать другой интересный признак почти-периодичности функции в полосе, в условия которого ограниченность функции в полосе не входит.

Теорема 6. *Пусть $F(s)$ удовлетворяет следующим условиям:* 1) *регулярна в полосе* (α, β), 2) *непрерывна в полосе* $[\alpha, \beta]$ *и* 3) *на прямых* $\sigma = \alpha$ *и* $\sigma = \beta$ $F(s)$ — *равномерная п.-п. функция переменной t с рядом Фурье* $\sum\limits_n A_n e^{\Lambda_n \sigma} e^{i\Lambda_n t}$ $(\sigma = \alpha,$ $\sigma = \beta)$. *При выполнении этих условий $F(s)$ является п.-п. функцией в полосе $[\alpha, \beta]$ с рядом Дирихле*

$$F(s) \sim \sum_n A_n e^{\Lambda_n s}.$$

Теорема 7. *Пусть дан ряд*

$$\sum_n A_n e^{\Lambda_n s} \tag{3.2}$$

с отрицательными показателями Дирихле $(\Lambda_n < 0)$. *Предположим, что для некоторого $\sigma = \alpha$ ряд* (3.2) *является рядом Фурье п.-п. функции $f_\alpha(t)$. Тогда существует п.-п. в полосе $(\alpha, +\infty)$ и непрерывная в полосе $[\alpha, +\infty)$ функция, которая на прямой $\sigma = \alpha$ совпадает с функцией $f_\alpha(t)$, имеет своим рядом Дирихле ряд* (3.2) *и при $\sigma \to +\infty$ стремится к нулю равномерно по t.*

Теорема 8. *Пусть $f(s) \sim \sum\limits_n A_n e^{\lambda_n s}$ есть п.-п. функция в полосе (α, β), причем все $\Lambda_n < 0$. Тогда $f(s)$ — п.-п. функция в полосе $(\alpha, +\infty)$ и стремится к нулю равномерно по t.*

Замечание. Аналогичные теоремы имеют место для рядов с исключительно положительными показателями Дирихле.

Следствие. Если показатели Дирихле п.-п. функции в некоторой полосе (α, β) ограничены, то эта функция — целая аналитическая.

3. В силу теоремы 8 аналитическая п.-п. функция с отрицательными показателями Дирихле при $\sigma \to +\infty$ равномерно стремится к нулю и, следовательно, ограничена (при $\sigma \to +\infty$).

Справедливо также и обратное.

Теорема 9. *Пусть функция $f(s)$ п.-п. в полосе $(\alpha, +\infty)$ и равномерно ограничена в полуплоскости $\sigma > \alpha$. Тогда все показатели Дирихле функции $f(s)$ неположительны.*

Теорема 10. *Пусть $f(s) \sim \sum_n A_n e^{\Lambda_n s}$ — п.-п. функция в полосе $[\alpha, \beta]$. Если неопределенный интеграл $F(s)$ функции $f(s)$ в полосе $[\alpha, \beta]$ ограничен (и, следовательно, является п.-п. функцией), то ряды*

$$\sum_{\Lambda_n < 0} A_n e^{\Lambda_n s}, \quad \sum_{\Lambda_n \geqslant 0} A_n e^{\Lambda_n s}$$

являются рядами Дирихле двух функций $f_1(s)$ и $f_2(s)$, п.-п. в любой полосе $[\alpha_1, +\infty)$, $\alpha_1 > \alpha$, соответственно $(-\infty, \beta_1]$, $\beta_1 < \beta$.

3.3. Сходимость рядов Дирихле для аналитических п.-п. функций. В следующей теореме указано несколько признаков абсолютной сходимости рядов Дирихле.

Теорема 1. *Пусть $f(s) \sim \sum_n A_n e^{\Lambda_n s}$ — п.-п. функция в любой полосе $[\alpha_1, \beta_1]$ $(\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta)$.*

Если выполнено одно из условий:

1) *Λ_n линейно независимы,*

2) *$A_n > 0$,*

3) *для всех $\delta > 0$ сходится ряд $\sum_n e^{-|\Lambda_n|\delta}$, то ряд $\sum_n A_n e^{\Lambda_n s}$ сходится абсолютно в полосе (α, β).*

Случай 2) позволяет доказать для аналитических п.-п. функций следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть все коэффициенты Дирихле A_n п.-п. функции $f(s) \sim \sum_n A_n e^{\Lambda_n s}$ положительны. Если (α, β) есть максимальная полоса почти-периодичности функции $f(s)$, то точки $s = \alpha$* и *$s = \beta$ — особые для $f(s)$.*

3.4. Поведение п.-п. функций при $\sigma = +\infty$ (аналоги теорем Вейерштрасса — Сохоцкого и Пикара).

1. Теорема 1 (аналог теоремы Вейерштрасса — Сохоцкого). *Пусть $f(s)$ — п.-п. функция в полосе*

$[\alpha, +\infty)$. *Могут представиться только три возможности поведения функции* $f(s)$ *в окрестности точки* $\sigma = +\infty$:

(A) $f(s)$ *стремится к конечному пределу при* $\sigma \to +\infty$ *и притом равномерно по* t.

(B) $|f(s)| \to +\infty$ *при* $\sigma \to +\infty$ *равномерно по* t.

(C) *в каждой полуплоскости* $\sigma > \alpha_1 > \alpha$ $f(s)$ *принимает значения, сколь угодно близкие к каждому комплексному числу*.

Мы будем говорить, что функция $f(s)$ принадлежит классу (A), (B) или (C) в зависимости от того, какой случай имеет место.

Следующая теорема дает возможность по ряду Дирихле функции $f(s)$ судить о том, к какому классу она принадлежит.

Теорема 2. *Пусть* $f(s) \sim \sum\limits_n A_n e^{\Lambda_n s}$ — *п.-п. функция в полосе* (α, β) *при любом* $\beta > \alpha$. *Функция* $f(s)$ *принадлежит*:

1) *к классу* (A), *если все показатели Дирихле неположительны*,

2) *к классу* (B), *если имеются положительные показатели Дирихле и среди них наибольший, и*

3) *к классу* (C) *если имеются положительные показатели Дирихле, но среди них нет наибольшего.*

2. Рассмотрим теперь теоремы типа теоремы Пикара.

Теорема 3. *Пусть* $f(s)$ — *п.-п. функция в полосе* $(\alpha, +\infty)$ *и принадлежит к классу* (C). *Тогда в каждой полуплоскости* $(\alpha_1, +\infty)$ $(\alpha_1 > \alpha)$ *функция* $f(s)$ *принимает все значения, за исключением, быть может, одного (т. е.* $f(s)$ *имеет не более одного исключительного значения Пикара).*

Теорема 4. *Если положительные показатели Дирихле функции* $f(s)$ *имеют конечную верхнюю грань* Λ, *причем само число* Λ *не есть показатель Дирихле, то функция* $f(s)$ *совсем не имеет исключительных значений Пикара.*

3.5. Гармонические п.-п. функции.

1. Пусть $f(s) = u(\sigma, t) + iv(\sigma, t)$ $(s = \sigma + it)$ — п.-п. функция в некоторой полосе (α, β). Известно, что $u(\sigma, t)$ и $v(\sigma, t)$

суть гармонические функции в той же полосе. В этом параграфе рассматриваются гармонические в некоторой полосе п.-п. функции.

Определение 1. Гармоническая в полосе $[\sigma_1, \sigma_2]$ функция $u(\sigma, t)$ называется п.-п. функцией в этой полосе, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество ε-почти-периодов, т. е. чисел τ, для которых выполняется неравенство

$$|u(\sigma, t+\tau) - u(\sigma, t)| < \varepsilon \qquad (-\infty < t < \infty;\ \sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2).$$

Теорема 1. *Пусть $u(\sigma, t)$ — гармоническая и ограниченная в полосе $[\sigma_1, \sigma_2]$ функция. Если на прямых $\sigma = \sigma_1$ и $\sigma = \sigma_2$ $u(\sigma, t)$ — равномерная п.-п. функция, то она является гармонической п.-п. функцией в полосе $[\sigma_1, \sigma_2]$.*

Теорема 2. *Сумма конечного числа гармонических п.-п. функций в полосе $[\sigma_1, \sigma_2]$ есть гармоническая п.-п. функция в той же полосе. Предел равномерно сходящейся последовательности гармонических п.-п. функций в полосе $[\sigma_1, \sigma_2]$ есть также гармоническая п.-п. функция в той же полосе.*

Теорема 3. *Частные производные всех порядков гармонической п.-п. в полосе $[\sigma_1, \sigma_2]$ функции — также гармонические п.-п. функции в этой же полосе.*

2. Каждой гармонической п.-п. функции $u(\sigma, t)$ можно отнести ряд Фурье вида

$$u(\sigma, t) \sim k\sigma + l + \sum_n (A_n^+ e^{\Lambda_n \sigma} + A_n^- e^{-\Lambda_n \sigma}) \cos \Lambda_n t + \\ + \sum_n (B_n^+ e^{\Lambda_n \sigma} + B_n^- e^{-\Lambda_n \sigma}) \sin \Lambda_n t, \quad (3.3)$$

где k, l, A_n^+, A_n^-, B_n^+, B_n^- от σ и t не зависят.

Теорема 4 (теорема единственности для рядов Фурье). Пусть $u_1(\sigma, t)$ и $u_2(\sigma, t)$ — *гармонические и п.-п. функции в полосе $[\sigma_1, \sigma_2]$. Если ряды Фурье для этих функций совпадают, то в этой полосе $u_1 \equiv u_2$.*

Теорема 5 (теорема аппроксимации). *Суммы Бохнера — Фейера для гармонической п.-п. в полосе (σ_1, σ_2) функции $u(\sigma, t)$ сходятся равномерно к $u(\sigma, t)$ в каждой внутренней полосе $[\sigma_1', \sigma_2']$ $(\sigma_1 < \sigma_1' < \sigma_2' < \sigma_2)$.*

3.6. Среднее движение и плотность значений аналитических почти-периодических функций.

1. Аналитическая функция может обращаться в нуль только в изолированных точках. Поэтому для каждой аналитической функции (независимо от того, обращается она в нуль или нет) можно разумно ввести понятие аргумента функции.

Пусть функция $f(s)$ $(s=\sigma+it)$ аналитична в некоторой области G и отлична в этой области от тождественного нуля. Во всех точках области G, за исключением нулей $f(s)$, по формуле $f(s)=|f(s)|\,e^{i\arg f(s)}$ определяется с точностью до кратного 2π функция $\arg f(s)$.

Предположим, что L есть прямая (или отрезок прямой) из G. Мы будем в дальнейшем предполагать, что прямая L ориентирована, т. е. на L различается положительное и отрицательное направления.

Определим функцию $\arg^- f(s)$ $(s\in L)$, взяв произвольную ветвь аргумента функции $f(s)$ и продолжая ее далее во всех точках, где $f(s)\neq 0$ по непрерывности. Если s проходит в положительном направлении нуль кратности p функции $f(s)$, то функции $\arg^- f(s)$ приписывается скачок $-p\pi$. Функция $\arg^- f(s)$ называется *левым аргументом*.

Аналогично определяется правый аргумент $\arg^+ f(s)$ на L как произвольная ветвь аргумента $f(s)$, непрерывная всюду, за исключением нулей $f(s)$ на L и со скачком $+p\pi$, если s проходит в положительном направлении нуль $f(s)$ кратности p.

В точках разрыва определенных сейчас функций мы будем приписывать функции среднее арифметическое значение. Обе функции $\arg^- f(s)$ и $\arg^+ f(s)$ таким образом определены во всех точках s на L, разумеется, с точностью до кратного 2π. Если $f(s)$ на L не имеет нулей, то каждая из функций совпадает с некоторой непрерывной ветвью $\arg f(s)$ на L. Пусть s_1 и s_2 — две точки на L, расположенные в положительном направлении прямой L. Тогда разности

$$\arg^- f(s_2)-\arg^- f(s_1),\qquad \arg^+ f(s_2)-\arg^+ f(s_1)$$

не зависят от выбора ветви аргумента и называются *изменением* (*вариацией*) $\arg f(s)$ *в пределах от* s_1 *до* s_2 *в левом* (соответственно *правом*) *направлении*. Очевидно, что

$$\arg^- f(s_2)-\arg^- f(s_1)\leqslant \arg^+ f(s_2)-\arg^+ f(s_1).$$

2. Пусть $f(s)$ — аналитическая п.-п. функция в полосе (α, β). Пусть σ принадлежит интервалу (α, β). Рассмотрим прямую L: $s = \sigma + it$, ориентированную по росту t.

Введем в рассмотрение четыре числа:

$$\underline{C}^{\pm}(\sigma) = \varliminf_{(\delta-\gamma)\to\infty} \frac{\arg^{\pm} f(\sigma + i\delta) - \arg^{\pm} f(\sigma + i\gamma)}{(\delta - \gamma)},$$

$$\overline{C}^{\pm}(\sigma) = \varlimsup_{(\delta-\gamma)\to\infty} \frac{\arg^{\pm} f(\sigma + i\delta) - \arg^{\pm} f(\sigma + i\gamma)}{(\delta - \gamma)}.$$

$\underline{C}^{-}(\sigma)$ называется *нижним левым средним движением* функции $f(s)$ на прямой $s = \sigma + it\ (-\infty < t < \infty)$, $\overline{C}^{-}(\sigma)$ — *верхним левым средним движением* и т. д. Эти числа конечны (если $f(s)$ п.-п. в полосе).

Если $\underline{C}^{-}(\sigma) = \overline{C}^{-}(\sigma) = C^{-}(\sigma)$, $\underline{C}^{+}(\sigma) = \overline{C}^{+}(\sigma) = C^{+}(\sigma)$, то числа $C^{-}(\sigma)$ и $C^{+}(\sigma)$ называются *левым* (соответственно *правым*) *средним движением* $f(s)$ на прямой σ.

Пусть $\alpha < \sigma_1 < \sigma_2 < \beta$ и $-\infty < \gamma < \delta < +\infty$. Обозначим через $N(\sigma_1, \sigma_2; \gamma, \delta)$ число нулей функции $f(s)$ в прямоугольнике $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$; $\gamma < t < \delta$. Числа

$$\underline{H}(\sigma_1, \sigma_2) = \varliminf_{(\delta-\gamma)\to\infty} \frac{N(\sigma_1, \sigma_2; \gamma, \delta)}{(\delta - \gamma)},$$

$$\overline{H}(\sigma_1, \sigma_2) = \varlimsup_{(\delta-\gamma)\to\infty} \frac{N(\sigma_1, \sigma_2; \gamma, \delta)}{(\delta - \gamma)}$$

называются *нижней* (соответственно *верхней*) *плотностью нулей* функции $f(s)$ в полосе (σ_1, σ_2). Для п.-п. функции эти числа конечны.

Если $\underline{H} = \overline{H} = H$, то число $H = H(\sigma_1, \sigma_2)$ называется *плотностью нулей* $f(s)$ в полосе (σ_1, σ_2).

В следующей теореме устанавливается связь между средними движениями и плотностью нулей п.-п. функции.

Теорема 1. Пусть $f(s)$ — *аналитическая п.-п. в полосе* (α, β) *функция, отличная от тождественного нуля. Средние движения и плотности нулей в произвольной* *полосе* (σ_1, σ_2) $(\alpha < \sigma_1 < \sigma_2 < \beta)$ *связаны следующими неравенствами*:

$$\frac{1}{2\pi}[\underline{C}^-(\sigma_2) - \overline{C}^+(\sigma_1)] \leqslant \underline{H}(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant \overline{H}(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant \leqslant \frac{1}{2\pi}[\overline{C}^-(\sigma_2) - \underline{C}^+(\sigma_1)].$$

Следствия

1) Если $C^+(\sigma_1)$ существует, то для каждого $\sigma_2 > \sigma_1$ справедливы равенства

$$\underline{H}(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2\pi}[\underline{C}^-(\sigma_2) - C^+(\sigma_1)],$$

$$\overline{H}(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2\pi}[\overline{C}^-(\sigma_2) - C^+(\sigma_1)].$$

2) Если $C^-(\sigma_2)$ существует, то для каждого $\sigma_1 < \sigma_2$ справедливы равенства

$$\underline{H}(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2\pi}[C^-(\sigma_2) - \overline{C}^+(\sigma_1)],$$

$$\overline{H}(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2\pi}[C^-(\sigma_2) - \underline{C}^+(\sigma_1)].$$

3) Если существуют две из трех величин $C^+(\sigma_1)$, $C^-(\sigma_2)$, $H(\sigma_1, \sigma_2)$, то существует также и третья величина, причем

$$H(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2\pi}[C^-(\sigma_2) - C^+(\sigma_1)].$$

3. Функция Иенсена.

Теорема 2. *Для каждой п.-п. в полосе* (α, β) *функции* $f(s)$, *не равной тождественно нулю, существует равномерно по* σ *в интервале* $[\alpha_1, \beta_1]$ $(\alpha < \alpha_1 < \beta_1 < \beta)$ *среднее значение*

$$\varphi(\sigma) = M_t\{\ln|f(\sigma + it)|\},$$

т. е. функция

$$\varphi(\sigma; \gamma, \delta) = \frac{1}{(\delta - \gamma)}\int_\gamma^\delta \ln|f(\sigma + it)|\,dt$$

равномерно по σ *в* $[\alpha_1, \beta_1]$ *при* $(\delta - \gamma) \to +\infty$ *стремится к пределу* $\varphi(\sigma)$.

Функцию $\varphi(\sigma)$ можно также определить следующим образом:

Пусть $m>0$ выбрано произвольно. Положим $|f(s)|_m = \max\{|f(s)|, m\}$

$$\varphi_m(\sigma) = M_t\{\ln|f(\sigma+it)|_m\}.$$

При $m \to 0$ $\varphi_m(\sigma)$ сходятся равномерно в $[\alpha_1, \beta_1]$ к $\varphi(\sigma)$. Функция $\varphi(\sigma)$ называется *функцией Иенсена* для функции $f(s) = f(\sigma+it)$. Так как $\varphi(\sigma; \gamma, \delta)$ при фиксированных γ, δ как функция σ непрерывна, то из теоремы следует, что $\varphi(\sigma)$ непрерывна.

Теорема 3. *Пусть $f_1(s), f_2(s), \ldots$ — последовательность п.-п. в полосе (α, β) функций, сходящаяся равномерно в этой полосе* к функции $f_0(s)$. *Если для всех $n = 0, 1, 2, \ldots$ функции $f_n(s)$ отличны от тождественного нуля, то функции Иенсена $\varphi_n(\sigma)$ сходятся при $n \to \infty$ равномерно в интервале (α, β) к $\varphi_0(\sigma)$ (функции Иенсена для $f_0(s)$). В этом смысле функция Иенсена $\varphi(\sigma)$ зависит непрерывно от функции $f(s)$.*

Теорема 4. *Пусть $f(s)$ — п.-п. функция в полосе (α, β), не равная тождественно нулю. Соответствующая ей функция Иенсена $\varphi(\sigma)$ выпукла в (α, β) и для каждого $\sigma \in (\alpha, \beta)$ четыре средних движения удовлетворяют неравенствам*

$$\varphi'(\sigma-0) \leqslant \underline{C}^{\pm}(\sigma) \leqslant \overline{C}^{\pm}(\sigma) \leqslant \varphi'(\sigma+0).$$

Далее, две плотности нулей удовлетворяют в каждой полосе (σ_1, σ_2) $(\alpha < \sigma_1 < \sigma_2 < \beta)$ неравенствам

$$\frac{1}{2\pi}[\varphi'(\sigma_2-0) - \varphi'(\sigma_1+0)] \leqslant \underline{H}(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant \overline{H}(\sigma_1, \sigma_2) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi}[\varphi'(\sigma_2+0) - \varphi'(\sigma_1-0)].$$

Из теоремы 4 можно получить три следствия.

Следствие 1. Если функция $\varphi(\sigma)$ в некоторой точке σ дифференцируема, то левые и правые средние движения $C^-(\sigma)$ и $C^+(\sigma)$ функции $f(\sigma+it)$ существуют и имеют общее значение

$$C^-(\sigma) = C^+(\sigma) = \varphi'(\sigma).$$

Следствие 2. Если $\varphi(\sigma)$ дифференцируема в двух точках σ_1 и σ_2, то существует плотность нулей $f(s)$ $H(\sigma_1, \sigma_2)$ в полосе (σ_1, σ_2), причем

$$H(\sigma_1, \sigma_2) = \frac{1}{2\pi}[\varphi'(\sigma_2) - \varphi'(\sigma_1)].$$

Последнюю формулу, по аналогии с классической формулой теории аналитических функций, естественно назвать *формулой Иенсена.*

Следствие 3. Справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi}[\varphi'(\sigma+0) - \varphi'(\sigma-0)] = \lim_{\varepsilon\to 0} \underline{H}(\sigma-\varepsilon, \sigma+\varepsilon).$$

Из этой формулы следует, что $\varphi(\sigma)$ дифференцируема в тех и только тех точках, где

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \underline{H}(\sigma-\varepsilon, \sigma+\varepsilon) = 0.$$

БИБЛИОГРАФИЯ

К главе I

1. Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, ч. I, ГИТТЛ, 1948.
2. Александров П. С., Колмогоров А. Н., Введение в теорию функций действительного переменного, ГОНТИ, 1938.
3. Качмаж С. и Штейнгауз Г., Теория ортогональных рядов, Физматгиз, 1958.
4. Колмогоров А. Н. и Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, изд. МГУ, ч. I, 1956 и ч. II, 1959.
5. Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, ГТТИ, 1934.
6. Лузин Н. Н. Теория функций действительного переменного, Учпедгиз, 1940.
7. Натансон И. П., Теория функций вещественного переменного, ГИТТЛ, 1957.
8. Сакс С., Теория интеграла, ИЛ, 1949.

К главе II

1. Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, М., 1947.
2. Ахиезер Н. И., О взвешенном приближении непрерывных функций многочленами на всей числовой оси, УМН (1956), 11:4 (70), 3—43.
3. Бернштейн С. Н., Собрание сочинений, т. I, 1952 и т. II, 1954.
4. Бернштейн С. Н., Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной, ОНТИ, 1937.
5. Гельфонд А. О., Исчисление конечных разностей, Гостехиздат, 1952.
6. Гельфонд А. О., О равномерных приближениях многочленами с целыми рациональными коэффициентами, УМН (1955), 10:1 (63), 41—65, 199—200.
7. Гончаров В. Л., Теория интерполирования и приближения функций, Гостехиздат, 1954.
8. Лозинский С. М., Натансон И. П., Метрическая и конструктивная теория функций вещественной переменной, Сб. «Математика в СССР за сорок лет 1917—1957», Физматгиз, 1959, т. I, 295—380.

9. Люстерник Л. А., О вычислении значений функций одного переменного, Математическое просвещение, 1959, №№ 3—4.
10. Мергелян С. Н., Весовые приближения многочленами, УМН (1956), 11:5(71), 107—152.
11. Натансон И. П., Конструктивная теория функций, Гостехиздат, 1949.
12. Никольский С. М., Приближение многочленами функций действительного переменного, Сб. «Математика в СССР за тридцать лет 1917—1947», М.—Л., 1948, 288—318.
13. Никольский С. М., Приближение периодических функций тригонометрическими многочленами, Труды Матем. ин-та АН СССР, 1945, т. 15, 1—76.
14. Никольский С. М., Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных, Труды Матем. ин-та АН СССР, 1951, т. 38, 244—278.
15. Ремез Е. Я., Общие вычислительные методы чебышевского приближения, Киев, 1957.
16. Стефенсен И. Ф., Теория интерполяции, ОНТИ, 1935.
17. Стечкин С. Б., О порядке наилучших приближений непрерывных функций, ИАН СССР, 1951, т. 15, 219—242.
18. Хаусхолдер А. С., Основы численного анализа, М., 1956.
19. Тиман А. Ф., Теория приближений функций действительного переменного, Физматгиз, 1960.
20. Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, т. I и т. II, Физматгиз, 1959.

К главе III

1. Бор Г., Почти-периодические функции, ГТТИ, 1934.
2. Левитан Б. М., Почти-периодические функции, Гостехиздат, 1953.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$[a, b]$ — отрезок $a \leqslant x \leqslant b$ 12

(a, b) — интервал $a < x < b$ 12

B-измеримые множества — измеримые в смысле Бореля 31

B^p — пространство Безиковича 223

C — пространство непрерывных функций 99

$CP_{[0,2\pi]}$ — пространство непрерывных периодических периода 2π функций 99

$A \cap B$ — пересечение множеств A и B 19

$A \cup B$ — объединение множеств A и B 18

$\bigcup\limits_{\alpha} A_\alpha$ (или $\sum\limits_{\alpha} A_\alpha$) — объединение множеств A_α 19

$\bigcap\limits_{\alpha} A_\alpha$ (или $\prod\limits_{\alpha} A_\alpha$) — пересечение множеств A_α 19

$A \setminus B$ — разность множеств 18

$x \in X$ — элемент x принадлежит множеству X 11

$x \overline{\in} X$ — элемент x не принадлежит множеству X 11

$A \subseteq B$ (или $A \subset B$) — множество A является подмножеством множества B 12

$\varnothing$ — пустое множество 12

$A \sim B$ — множества A и B эквивалентны 14

$\aleph_0$ («алеф-нуль») — мощность счетного множества 15

$\mathfrak{C}$ и $\aleph$ («алеф») — мощность континуума 18

E' — производное множество множества E 22

$\overline{E}$ — замыкание множества E 22

$\limsup E$ (или $\overline{\lim}\, E$) — верхний предел множества E 23

$\liminf E$ (или $\underline{\lim}\, E$) — нижний предел множества E 23

$\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ (или $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$) — верхний предел последовательности чисел a_n 24

$\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ (или $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$) — нижний предел последовательности чисел a_n 24

mE — мера множества E 28

$m_e E$ ($m_i E$) — внешняя (внутренняя) мера множества E 30

$\limsup\limits_{n\to\infty} E_n$ (или $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, E_n$) — верхний предел последовательности множеств E_n 33

$\liminf\limits_{n\to\infty} E_n$ (или $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, E_n$) — нижний предел последовательности множеств E_n 33

$\bigvee\limits_a^b$ (или $\bigvee$) — полная вариация функции на отрезке $[a, b]$ 40

$E\{x \mid f(x) > a\}$ (или $E\{f > a\}$) — множество точек x, удовлетворяющих условию $f(x) > a$ 43

$D_s f(x_0)$, $D_d f(x_0)$ — производные функции f слева и справа в точке x_0 47

$f^+(x_0)$, $f^-(x_0)$ — производные функции f верхняя и нижняя 48

λ^+, λ^-, Λ^+, Λ^- — производные числа Дини 49

$f^{[1]}$ — асимптотическая (аппроксимативная) производная функции f 50

$\bar{I}$, $\underline{I}$ — интегралы Дарбу верхний и нижний 51

$\delta_{m,n}$ — символ Кронекера 78

$\mathrm{Lip}_M\, 1$ — условие Липшица с постоянной M 154

$S_n(x; f)$ — n-я сумма Фурье 158

$m_e(E)$, $m_i(E)$ — внешняя и внутренняя n-мерные меры Лебега 91

$\nu_k(E)$ — k-мерная мера Хаусдорфа 92

L — пространство суммируемых функций 100

L^p — пространство функций, суммируемых в p-й степени 101

M — пространство существенно ограниченных функций 102

V — пространство функций ограниченной вариации 103

S — пространство измеримых функций 103

l^p — пространство последовательностей 104

$V_{n,p}$ — сумма Валле-Пуссена 163
$J_n(x; f)$ — интеграл Валле-Пуссена 163
$\sigma_n(x; f)$ — сумма Фейера 161
$D_n(u)$ — ядро Дирихле 159
H — пространство Гильберта 187
$\| f \|$ — норма функции f 170
ε, N-почти-период 214
S^p — пространство Степанова 219
ε-почти-период 219
W^p — пространство Вейля 221
B^p-расстояние 222
C-свойство 45
N-свойство 43
S-расстояние порядка p (S^p-расстояние) 219
W-расстояние порядка p 220
ε-окрестность точки 21, 88
ε-почти-период (ε-смещение) 199, 219
ε, N-почти-период 214

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютное значение решения 217
Аксиомы метрики 97
Аргумент левый 233

Базис 208
Близость равномерная и средняя степенная 130

Вариация линейная 94
— плоская 94
— полная 40, 65
Верхняя (нижняя) грань 22, 23
— — — существенная 102
— — — точная 22, 23

Геометрическое место 11
Группа абстрактная 224
— коммутативная (абелева) 225

Движение среднее (верхнее и нижнее, левое и правое) 234
— — почти-периодической функции 214
Дифференциал асимптотический 93
— точный полный 93
Дополнение 19

Задача Эрмита 116
Замыкание множества 22

Интеграл Валле-Пуссена сингулярный 163
— Дарбу 51
— Лебега 55, 58, 67, 95
— — неопределенный 62
— Лебега — Стилтьеса 97
— Римана 51, 56
— Стилтьеса (Римана — Стилтьеса) 53
Интервал 11
— дополнительный 26
— смежный 26

Колебание функции на отрезке 51
Компонента связности 94
Конструктивная теория функций 197
Континуум-гипотеза 26
Коэффициенты Фурье 79, 167, 174, 203
Критерий Коши 98

Матрица нормальная 123
Мера 28
— (n-мерный объем) 90
— внешняя 30
— внутренняя 30
— Лебега 29
— — n-мерная (и внутренняя) 91
— n-мерная измеримого множества 91
— Хаусдорфа k-мерная 92
— — линейная 92
— — плоская (двумерная) 92
Многочлен наилучшего приближения 134
Многочлены Абеля — Гончарова 129
— Бернштейна 127, 132
— действительные тригонометрические 180
— интерполяционные 108
— — обобщенные 127
— Лагерра 174
— Лагранжа 109
— Лежандра 83, 167
— Ньютона 111
— обобщенные 192
— тригонометрические 113
— — Бохнера — Фейера 209
— фундаментальные 119
— Чебышева 110, 137, 168
— Эрмита 116, 174
— Якоби 174
Множества равномощные 14
— эквивалентные 14
Множество 11
— борелевское 31
— второй категории 28
— замкнутое 22
— измеримое B (B-множество) 31
— — в смысле Лебега 30
— канторово совершенное 27, 64

Множество линейно независимое 207
— несчетное 26
— нигде не плотное 27
— ограниченное 12
— открытое 24
— относительно плотное 199
— первой категории 28
— плотное в себе 27
— — на множестве R 27
— полной меры 32
— приведенное 31
— производное 22
— пустое 12
— связное 89
— — замкнутое 93
— совершенное 26
— счетное 15
— точечное 11
— уровня 93
— условно компактное 200
— чебышевское 112, 193
Модуль непрерывности 143
Мощность 14
— континуума 18
Мультипликативность 83

Наилучшая аппроксимация в среднем 80
Наилучшее приближение равномерное 135
Наилучший метод приближения функций относительно системы Ф 170
Непрерывность интеграла Лебега абсолютная 62
Неравенство Бернштейна 145
— — обобщенное 181
— Бесселя 80, 203, 204
— Ландау 166
— (аксиома) треугольника 98
Норма 98, 100, 102
— равномерная 218
— функции 173

Область 24, 89
— значений функции 36
— определения функции 36
Образ множества 36
Объединение множеств 18
Объем n-мерный (мера) 90
Окрестность точки 21
Определитель Грама 188
Ортогонализация 86
Отрезок 11

Пересечение 19
Плотность нулей 234
Подмножество 12
— собственное 12
Показатели Фурье 203
Покрытие множества 29
Полоса 226
Последовательность 12
— множеств монотонно возрастающая 34
— — монотонно убывающая 35
— — расходящаяся 34
— — сходящаяся 34
Последовательность сходящаяся 68
— — в среднем 74
— — в точке 98
— — по мере 74
— — почти всюду 33, 46
— — равномерно 70
— фундаментальная 98
Правильная часть 12
Предел последовательности 22
— — верхний (нижний) 23
— — множеств верхний (и нижний) 33
— функции правосторонний (справа) и левосторонний (слева) 38
Предельный переход под знаком интеграла 71
Пример Ван-дер-Вардена 71
Произведение 19
Производная 45
— асимптотическая (аппроксимативная) 50
— верхняя (и нижняя) 48
— левая (слева) и правая (справа) 47
— обобщенная 175
— — в смысле Соболева 66
— — смешанная частная 182
— — частная 182
— симметричная (Шварца) 50
— точная 46
— частная 93
Производное число 48
— — верхнее (и нижнее) правое (и левое) 49
— — Дини 49, 50
Промежуток 12
Прообраз точки 36
Пространство (B^p) Безиковича 223
— (W^p) Вейля 221
— (H) гильбертово 173, 187
— (S) измеримых функций 103
— линейное 98
— — нормированное 173, 181
— (L) 100
— (L^p) 101
— метрическое 97
— (C) непрерывных функций 99
— ($CP_{[0,2\pi]}$) непрерывных периодических функций 99
— нормированное 98
— полное 98
— (l^2 и l^p) последовательностей 104
— (S^p) Степанова 219
— строго нормированное 187
— (M) существенно ограниченных функций 102
— (V) функций ограниченной вариации 103
— (L^2) функций с суммируемым квадратом 100
— функциональное 99
— эвклидово n-мерное 88
Процесс ортогонализации Шмидта 86

Равенство Парсеваля 206, 228
Разложение (ряд) Фурье 79
Разностное отношение 45

Разность множеств 18
Расстояние 100, 101, 219
— между элементами 97
— функции от обобщенного многочлена 192
— элемента от множества 186
Рекуррентные соотношения 13
Ряд Дирихле 228
— ортогональный 79
— сходящийся 69
— функциональный 69
— Фурье 79, 158, 167, 174
— Фурье — Римана (Фурье — Лебега, Фурье — Стилтьеса) 79

Сегмент 12
Семейство 11
— S^p-компактное 220
Сечение множества 91
Символ Кронекера 78
Система функций замкнутая 78, 189
— — линейно независимая 85
— — нормированная 78
— — ортогональная 77, 88
— — ортонормированная 78
— — — с весом 84
— — полная 78
— — тригонометрическая 82
— — Уолша 84
— — фундаментальных 127
— — чебышевская 112
Системы функций эквивалентные 86
Скалярное произведение 101
Скачок функции конечный 38, 54
Совокупность 11
Соответствие взаимно однозначное 14
Срезка функции 58
Сумма Валле-Пуссена 163
— Дарбу 51
— Дарбу — Стилтьеса 52
— Лебега 55, 95
— множеств 18
— Фейера 161
— Фурье 158
— частичная 69
Суперпозиция функций 43
Сходимость по норме (сильная) 99

Теорема аппроксимации 209, 216, 222
— Больцано — Вейерштрасса 24
— Боля — Бора 201
— Бора 206, 211, 214
— Бореля 44
— Бореля — Лебега 35
— Вейерштрасса 37, 73
— Витали 36
— Грама 86
— Данжуа 49, 50
— Дарбу 46
— Дини 49
— Егорова 73
— единственности 206, 216, 228, 232
— Кантора — Бендиксона 27
— Кантора — Бернштейна 17
— Колмогорова 82
Теорема Колмогорова — Селиверстова — Плесснера 81
— Кронекера 212
— Кронрода 94
— Лебега 52, 74
— Лузина 45, 49, 73
— Меньшова — Радемахера 81
— о конечной аддитивности интеграла Лебега 61
— — полной аддитивности интеграла 56, 59, 61
— — среднем 56
— — — значении 201, 202, 225
— об абсолютной непрерывности интеграла Лебега 62
— Радемахера 82
— Римана 52
— Рисса — Фишера 81
— Степанова 93
— Фихтенгольца 43
— Фубини 95
— Шура 87
Точка внутренняя 24
— изолированная 21
— конденсации 26
— плотности 32
— предельная 21
— пространства n измерений 88
— разрежения 32
— разрыва функции 38
— сходимости последовательности функций 69
— угловая 47

Узлы кратные 116
— простые 116
— Чебышева 120
Уравнение Парсеваля 204
Условие Дини — Липшица 160
— Липшица 41, 47

Формула Иенсена 237
— интегрирования по частям 66
— Ньютона — Лейбница 63
Функции Радемахера 83
Функция 36
— абсолютно непрерывная 42, 47, 63
— аналитическая 152
— асимптотически (аппроксимативно) дифференцируемая 50
— — — непрерывная 50
— Безиковича 222
— B^p-почти-периодическая 223
— Вейля 220
— весовая 84, 122, 157
— возрастающая (неубывающая) и убывающая (невозрастающая) 39
— гармоническая почти-периодическая 232
— Дирихле 38
— дифференцируемая 45, 93
— Иенсена 236
— измеримая 70, 92
— — на множестве 43
— — по мере μ 96

Функция интегрируемая в смысле Лебега (суммируемая) 56, 58, 60, 68
— — — — Римана 51
— интегрирующая (весовая) 52
— конечная 36
— множества 89
— — аддитивная 89
— — — вполне 90
— монотонная 39
— непрерывная в точке относительно множества 37
— — относительно множества 92
— — равномерно 37
— ε, N-почти-периодическая 214
— ограниченная 36
— — существенно 102
— почти-периодическая в смысле Бохнера 200
— — в полосе 226
— — на группе 225
— предельная 69
— предельно периодическая 213
— равномерная почти-периодическая 199
— скачков 39
— собственная 84
— с ограниченной вариацией 40, 47, 94
— Степанова почти-периодическая 218
— строго монотонная 39
— — убывающая (и возрастающая) 39

Функция S^p-почти-периодическая 219
— S^p-равномерно непрерывная 220
— S^p-нормальная 220
— суммируемая 95, 158
— точки (переменных) 89
— почти-периодическая 221
— характеристическая 44
— целая 117, 147
— — экспоненциального типа 155, 180

Число рациональное 15
Член последовательности 12
— — общий 13

Шар 98
— замкнутый (и открытый) 89

Элемент множества 11
— нулевой 99, 100, 101
— последовательности 12
Энтропия 190

Ядро Дирихле 159
— Фейера 162

Цена 68 коп.

СПРАВОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА

ВЫШЛИ ИЗ ПЕЧАТИ

1. В. Л. ДАНИЛОВ, А. Н. ИВАНОВА и др., Математический анализ (функции, пределы, ряды, цепные дроби).

2. И. Г. АРАМАНОВИЧ, Р. С. ГУТЕР и др., Математический анализ (дифференцирование и интегрирование).

3. Л. А. ЛЮСТЕРНИК и др., Математический анализ (вычисление элементарных функций).

4. А. П. МИШИНА и И. В. ПРОСКУРЯКОВ, Высшая алгебра (линейная алгебра, многочлены, общая алгебра).

5. В. А. ДИТКИН и А. П. ПРУДНИКОВ, Интегральные преобразования и операционное исчисление.

6. Н. П. БУСЛЕНКО, Д. И. ГОЛЕНКО и др., Метод статистических испытаний (Монте-Карло).

7. Н. А. КРИНИЦКИЙ и др., Программирование.