Справочная
Математическая
Библиотека

Интегральные уравнения

СПРАВОЧНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИБЛИОТЕКА

П. П. ЗАБРЕЙКО, А. И. КОШЕЛЕВ,
М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ, С. Г. МИХЛИН,
Л. С. РАКОВЩИК, В. Я. СТЕЦЕНКО

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

И 73
517.2
УДК 517.94

Интегральные уравнения. Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Михлин С. Г., Раковщик Л. С., Стеценко В. Я. Издательство «Наука», Главная редакция физико-математической литературы, М., 1968, 448 стр.

В книге изложены классические теории Фредгольма и Гильберта — Шмидта, которые существенно дополнены изложением теории интегральных уравнений с неотрицательными ядрами и уравнений, содержащих вполне непрерывные операторы.

Две главы посвящены изложению теории сингулярных уравнений — одномерных и многомерных, одна глава содержит изложение теории интегральных уравнений с почти разностным ядром и одна глава, последняя в книге, посвящена нелинейным интегральным уравнениям. В этой главе приводятся признаки полной непрерывности нелинейных интегральных операторов и рассмотрены вопросы существования и единственности, продолжения и ветвления решений уравнений, содержащих нелинейные интегральные операторы.

Одна глава содержит приложения теории интегральных уравнений к некоторым задачам математической физики.

Книга предназначена для математиков, физиков, механиков, инженеров, использующих в своей деятельности методы теории интегральных уравнений. Она может быть использована аспирантами и студентами старших курсов механико-математических и физико-математических факультетов университетов, инженерно-физических, физико-технических и педагогических институтов.

Таблица 1, илл. 3, библ. 260 назв.

П. П. Забрейко, А. И. Кошелев, М. А. Красносельский, С. Г. Михлин, Л. С. Раковщик, В. Я. Стеценко

Интегральные уравнения

М., 1968 г., 448 стр. с илл.

(Серия: «Справочная математическая библиотека»)

Редакторы. *В. М. Гринберг, Л. Я. Цлаф*

Техн. редактор *А. А. Благовещенская*

Корректоры. *Ю. И. Зварич, И. Я. Кришталь*

Сдано в набор 20/X 1967 г. Подписано к печати 29/II 1968 г. Бумага $84\times108^{1}/_{32}$
Физ. печ. л. 14. Условн. печ. л. 23,52. Уч.-изд. л. 22,81 Тираж 25000 экз.
Т-00084. Цена книги 1 р. 36 к. Заказ № 930.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР,
Измайловский проспект, 29,

2-2-3
229-67

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА III

СИММЕТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГЛАВА IV

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЯДРАМИ

ГЛАВА VI

ОДНОМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГЛАВА VII
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ГЛАВА VIII

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЯДРАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ РАЗНОСТИ АРГУМЕНТОВ

ГЛАВА IX

МНОГОМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГЛАВА X

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Под общим названием «интегральные уравнения» известны вещи, порой мало похожие одна на другую. Их объединяет, однако, такая важная черта: в подавляющем большинстве случаев дело идет об уравнениях, содержащих неизвестную функцию под знаком ограниченного, а часто и вполне непрерывного оператора, действующего в некотором функциональном банаховом пространстве.

Авторы имели целью дать изложение основных результатов, относящихся к интегральным уравнениям.

В книге изложены классические теории Фредгольма и Гильберта — Шмидта (главы II и III); предшествующая этому глава I содержит описание важнейших типов интегральных уравнений и некоторые сведения об интегральных уравнениях, решаемых в «замкнутом» виде. Важным дополнением к главе II и III является глава IV, содержащая теорию интегральных уравнений с неотрицательными ядрами; развитием этой теории мы в значительной мере обязаны работам М. Г. Крейна. Изложение первых четырех глав достаточно элементарное.

Как известно, теория Фредгольма была обобщена на уравнения, содержащие вполне непрерывные операторы. Этому обобщению посвящена глава V.

В главе VI рассмотрены одномерные (т. е. с одной независимой переменной) сингулярные интегральные уравнения. От уравнений, рассмотренных в предшествующих главах, их существенно отличает то обстоятельство, что сингулярные интегральные операторы не вполне непрерывны, а только ограничены в обычных функциональных пространствах.

Перечисленные выше типы интегральных уравнений дали наибольшее количество приложений, поэтому непосредственно следующая глава VII посвящена приложениям интегральных уравнений к математической физике. Глава VIII содержит изложение теории «почти разностных» интегральных уравнений; сюда относятся такие важные типы интегральных уравнений, как уравнения Винера — Хопфа или парные интегральные уравнения. В главе IX приведены основные результаты теории многомерных сингулярных интегральных уравнений. В главах VIII и IX, как и в главе VI, дело идет об интегральных операторах ограниченных, но не вполне непрерывных.

До сих пор речь шла только о линейных уравнениях. Глава X — последняя в книге — посвящена нелинейным интегральным уравнениям. В этой главе излагаются признаки полной непрерывности нелинейных интегральных операторов; для уравнений, содержащих такие операторы, рассмотрены вопросы существования и единственности, а также продолжения и ветвления решений.

Главы I—III, VI, IX написаны С. Г. Михлиным. Главы IV, V, X написали совместно П. П. Забрейко, М. А. Красносельский и В. Я. Стеценко. Главу VII написал А. И. Кошелев, главу VIII — Л. С. Раковщик.

25 мая 1966 г.

Авторы

ГЛАВА I

ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Интегральное уравнение иногда определяют как уравнение, которое содержит неизвестную функцию под знаком интеграла. Такое определение вряд ли можно назвать удачным: оно чересчур широко, в нем не указано, какие еще действия, кроме интегрирования, можно производить над неизвестной функцией, а тогда в качестве интегральных будут выступать, например, и дифференциальные уравнения. Так, если допустить в уравнении действие предельного перехода, то «интегральное» уравнение с неизвестной функцией $u(x)$

$$a(x)\lim_{h\to 0}\int_{x}^{x+h}\frac{u(t+h)-2u(t)+u(t-h)}{h^3}\,dt+b(x)\,u(x)=f(x)$$

на самом деле есть дифференциальное уравнение второго порядка

$$a(x)\,u''(x)+b(x)\,u(x)=f(x).$$

В то же время точно описать допустимые действия над неизвестной функцией, при которых мы соглашаемся считать уравнение интегральным, довольно трудно; в частности, нельзя изгнать действие предельного перехода, которое, по существу, входит, например, в определение сингулярного интеграла (гл. VI и IX), — тогда пришлось бы отказаться от рассмотрения сингулярных интегральных уравнений.

Мы не будем пытаться давать общее определение интегрального уравнения и ограничимся тем, что в следующих двух параграфах перечислим некоторые, наиболее важные, классы интегральных уравнений.

Все рассматриваемые ниже функции предполагаются измеримыми; это обстоятельство оговариваться не будет. Мы будем предполагать, что независимые переменные уравнения — вещественные, за исключением случаев, оговоренных особо; о функциях же, данных и искомых, мы будем допускать, что они могут принимать как вещественные, так и комплексные значения.

§ 1. Уравнения Фредгольма и Вольтерра

1.1. Уравнение Фредгольма. Это один из наиболее важных, если не самый важный класс линейных интегральных уравнений. Различают *уравнения Фредгольма первого* и *второго рода*; более интересны и важны для приложений уравнения Фредгольма второго рода. В простейшем случае такое уравнение имеет вид

$$u(x) - \int_a^b K(x, t) u(t)\, dt = f(x). \tag{1.1}$$

Здесь неизвестная функция $u(x)$ зависит от вещественной переменной x, которая меняется в том же промежутке $[a, b]$, что и переменная интегрирования t; это требование относится ко всем без исключения классам интегральных уравнений, которые рассматриваются в настоящей книге. Промежуток $[a, b]$ может быть конечным или бесконечным. Функции $K(x, t)$ и $f(x)$ предполагаются данными и определенными почти всюду соответственно в квадрате $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$ и в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$; функция $K(x, t)$ называется *ядром* интегрального уравнения (1.1), функция $f(x)$ — *свободным членом* этого уравнения. О ядре $K(x, t)$ уравнения Фредгольма мы предполагаем, что оно удовлетворяет неравенству

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2\, dx\, dt < \infty; \tag{1.2}$$

свободный член уравнения Фредгольма удовлетворяет неравенству

$$\int_a^b |f(x)|^2\, dx < \infty. \tag{1.3}$$

Часто приходится рассматривать уравнения Фредгольма более общего вида. Пусть Ω — измеримое множество в пространстве любого числа переменных, x и t — точки этого множества, μ — неотрицательная мера, определенная на Ω. Уравнением Фредгольма мы будем также называть уравнение

$$u(x) - \int_{\Omega} K(x, t)\, u(t)\, d\mu(t) = f(x), \tag{1.4}$$

ядро $K(x, t)$ и свободный член $f(x)$ которого удовлетворяют неравенствам

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} |K(x, t)|^2\, d\mu(x)\, d\mu(t) < \infty \tag{1.5}$$

и

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2\, d\mu(x) < \infty. \tag{1.6}$$

Ядро $K(x, t)$, удовлетворяющее неравенству (1.5), называется *фредгольмовским*.

Решая уравнение Фредгольма (1.1), мы всегда будем предполагать, что искомая функция $u(x)$ квадратично суммируема в (a, b) и, следовательно, принадлежит функциональному пространству $L_2(a, b)$. Точно так же будем предполагать, что решение уравнения (1.4) принадлежит пространству $L_2(\mu, \Omega)$ функций, квадратично суммируемых в Ω по мере μ. Неравенства (1.3) и (1.6) означают, что тому же пространству принадлежит свободный член интегрального уравнения.

Пусть ядро удовлетворяет неравенству (1.5). Выражение

$$\int_{\Omega} K(x, t)\, u(t)\, d\mu(t) \tag{1.7}$$

определяет интегральный оператор, действующий в пространстве $L_2(\mu, \Omega)$; он называется *оператором Фредгольма*. Этот оператор переводит любую функцию, принадлежащую пространству $L_2(\mu, \Omega)$, в функцию того же пространства; он ограничен: обозначая оператор Фредгольма через $\boldsymbol{K}$, имеем

$$\|\boldsymbol{K}\| \leqslant \left[\int_{\Omega}\int_{\Omega} |K(x, t)|^2\, d\mu(x)\, d\mu(t)\right]^{1/2}. \tag{1.8}$$

Если $\mu(x)$ — лебегова мера: $d\mu(x) = dx$, то оператор Фредгольма действует в пространстве $L_2(\Omega)$ и

$$\|K\| \leqslant \left[\int_\Omega \int_\Omega |K(x, t)|^2 \, dx\, dt\right]^{1/2}. \tag{1.8$_1$}$$

Чаще других приходится рассматривать случаи, когда Ω — либо область, либо поверхность в евклидовом пространстве, а $d\mu$ — соответственно либо элемент объема в этом пространстве, либо элемент площади поверхности Ω. В частности, Ω может быть кривой линией, а $d\mu$ — элементом длины этой линии.

Если $f(x) \equiv 0$ (точнее, если $f(x)$ обращается в нуль почти всюду в Ω), то интегральное уравнение называется *однородным*, в противном случае (т. е. если $f(x)$ отлично от нуля на множестве положительной меры) уравнение называется *неоднородным*.

Приведем несколько примеров фредгольмовских уравнений. Во всех этих примерах предполагается, что $f(x)$ удовлетворяет неравенству (1.3) или соответственно (1.6).

Пример 1.1. Пусть вещественные переменные x и t меняются в *конечном* промежутке $[a, b]$. Если ядро $K(x, t)$ ограничено в квадрате $a \leqslant x \leqslant b$, $a \leqslant t \leqslant b$, то уравнение (1.1) фредгольмовское.

Пример 1.2. Уравнение (1.1) фредгольмовское и в том случае, когда промежуток $[a, b]$ по-прежнему конечный, а ядро представимо в виде

$$K(x, t) = \frac{A(x, t)}{|x-t|^\alpha}; \quad 0 \leqslant \alpha < \frac{1}{2}, \quad \alpha = \text{const},$$

где $A(x, t)$ — ограниченная функция. Действительно, пусть $|A(x, t)| \leqslant C = \text{const}$. Тогда

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 \, dx\, dt \leqslant C^2 \int_a^b \int_a^b \frac{dx\, dt}{|x-t|^{2\alpha}} = C^2 \int_a^b dx \int_a^b \frac{dt}{|x-t|^{2\alpha}}.$$

Далее,

$$\int_a^b \frac{dt}{|x-t|^{2\alpha}} = \int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{2\alpha}} + \int_x^b \frac{dt}{(t-x)^{2\alpha}} =$$

$$= -\left.\frac{(x-t)^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\right|_a^x + \left.\frac{(t-x)^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\right|_x^b = \frac{(x-a)^{1-2\alpha} + (b-x)^{1-2\alpha}}{1-2\alpha};$$

последнее выражение есть функция от x, непрерывная и, следовательно, ограниченная при $a \leqslant x \leqslant b$. Пусть C_1 — ее верхняя граница. Тогда

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, t)|^2 \, dx \, dt \leqslant C^2 C_1 (b - a),$$

и неравенство (1.2) выполнено.

Пример 1.3. Пусть Ω — m-мерная поверхность, расположенная в евклидовом пространстве $m+1$ измерений, x и t — ее точки, $d\Omega$ — элемент площади ее поверхности, r — расстояние между x и t. Допустим, что ядро $K(x, t)$ имеет вид

$$K(x, t) = \frac{A(x, t)}{r^\alpha}; \qquad 0 \leqslant \alpha < \frac{m}{2}, \qquad \alpha = \mathrm{const}, \tag{$*$}$$

где $A(x, t)$ — ограниченная функция. Тогда уравнение (1.4), в котором $d\mu(t) = d_t\Omega$, — фредгольмовское; индекс t в символе $d_t\Omega$ означает, что интегрирование совершается по переменной точке t при фиксированном x.

Пример 1.4. Уравнение (1.4) — фредгольмовское и в том случае, когда Ω — область m-мерного евклидова пространства, $d\mu(t) = dt$, где dt — элемент объема в этом пространстве, а ядро имеет вид ($*$) и функция $A(x, t)$ ограничена.

Пример 1.5. Уравнение

$$u(x) - \int_1^\infty e^{-xt} u(t) \, dt = f(x)$$

фредгольмовское, так как в данном случае

$$\int_1^\infty \int_1^\infty |K(x, t)|^2 \, dx \, dt = \int_1^\infty dx \int_1^\infty e^{-2xt} \, dt = \frac{1}{2} \int_1^\infty \frac{e^{-2x}}{x} \, dx < \infty.$$

Пример 1.6. Уравнение

$$u(x) - \int_0^\infty e^{-xt} u(t) \, dt = f(x)$$

не фредгольмовское. Действительно,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-2xt} \, dx \, dt = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dx}{x} = \infty.$$

Уравнение Фредгольма первого рода отличается отсутствием члена, содержащего неизвестную функцию вне знака интеграла. В простейшем случае оно имеет вид

$$\int_a^b K(x, t)\, u(t)\, dt = f(x), \tag{1.9}$$

где $K(x, t)$ и $f(x)$ удовлетворяют неравенствам (1.2) и (1.3) соответственно. В общем случае уравнение Фредгольма первого рода имеет вид

$$\int_\Omega K(x, t)\, u(t)\, d\mu(t) = f(x); \tag{1.10}$$

в этом случае должны быть удовлетворены неравенства (1.5) и (1.6).

1.2. Уравнения со слабой особенностью. Так называется уравнение вида (1.4), в котором Ω — конечная область m-мерного евклидова пространства или ограниченная m-мерная поверхность в $(m+1)$-мерном евклидовом пространстве (второй случай легко сводится к первому введением параметризации на поверхности), $d\mu(t) = dt$ в первом случае и $d\mu(t) = d_t\Omega$ во втором случае, а ядро имеет вид

$$K(x, t) = \frac{A(x, t)}{r^\alpha}; \qquad 0 < \alpha < m, \qquad \alpha = \mathrm{const}, \tag{1.11}$$

где $A(x, t)$ — ограниченная функция, а r — расстояние между точками x и t.

Если $\alpha < \frac{m}{2}$, то уравнение со слабой особенностью одновременно является и уравнением Фредгольма. Если $K(x, t)$ — ядро со слабой особенностью, то оператор (1.7) называется *интегральным оператором со слабой особенностью.*

1.3. Уравнения Вольтерра. В случае одной независимой переменной *уравнение Вольтерра второго рода* имеет вид

$$u(x) - \int_a^x K(x, t)\, u(t)\, dt = f(x); \qquad a \leqslant x \leqslant b; \tag{1.12}$$

мы не исключаем случаев $a = -\infty$, $b = +\infty$. Уравнения Вольтерра со многими независимыми переменными можно определить, например, так.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$; $t_1, t_2, \ldots, t_m$ — декартовы координаты соответственно точек x и t, принадлежащих m-мерному евклидову пространству. Положим

$$\rho = \left\{ \sum_{k=1}^{m-1} (x_k - t_k)^2 \right\}^{1/2}$$

и обозначим через Q_x область изменения точки t, ограниченную конусом $\rho = c(x_m - t_m)$ и плоскостью $t_m = a$, где a и c — постоянные, причем $c > 0$. Уравнением Вольтерра второго рода в этом случае мы назовем интегральное уравнение

$$u(x) - \int_{Q_x} K(x, t)\, u(t)\, dt = f(x). \tag{1.13}$$

Говоря об уравнении Вольтерра, мы в общем случае не будем формулировать ограничений, накладываемых на ядро и свободный член уравнения. Такие ограничения будут указаны в гл. II, где будет идти речь о способах решения интегральных уравнений.

Уравнения Вольтерра первого рода характеризуются отсутствием члена $u(x)$, стоящего вне интеграла. Уравнение Вольтерра первого рода с одной независимой переменной имеет вид

$$\int_a^x K(x, t)\, u(t)\, dt = f(x); \tag{1.14}$$

его частным случаем является *уравнение Абеля*

$$\int_a^x \frac{u(t)\, dt}{(x-t)^\alpha} = f(x); \qquad 0 < \alpha < 1, \quad \alpha = \mathrm{const}. \tag{1.15}$$

В случае многих независимых переменных уравнение Вольтерра первого рода имеет вид

$$\int_{Q_x} K(x, t)\, u(t)\, dt = f(x). \tag{1.16}$$

При некоторых ограничениях можно рассматривать уравнение Вольтерра как частный случай уравнения Фредгольма. Возьмем для определенности случай одной независимой переменной. Пусть $f(x)$ удовлетворяет неравенству (1.3), а ядро — неравенству

$$\int_a^b \left\{ \int_a^x |K(x, t)|^2 \, dt \right\} dx < \infty. \tag{1.17}$$

Ядро $K(x, t)$ по смыслу задачи определено при $a \leqslant t \leqslant x$; доопределим его при $t > x$, положив

$$K(x, t) = 0; \qquad x < t \leqslant b.$$

Тогда уравнение (1.12) можно записать в виде (1.1), причем ядро удовлетворяет неравенству (1.2).

§ 2. Некоторые другие классы интегральных уравнений

2.1. Уравнения с разностными ядрами. Такое уравнение имеет вид

$$au(x) - \int_{E_m} K(x - t) u(t) \, dt = f(x), \tag{1.18}$$

где a — постоянная, E_m — m-мерное евклидово пространство, x и t — его точки; ядро $K(x - t)$ зависит только от разности векторов x и t, т. е. от разностей $x_k - t_k$ декартовых координат точек x и t. При $m = 1$ уравнение с разностным ядром имеет вид

$$au(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} K(x - t) u(t) \, dt = f(x); \tag{1.19}$$

здесь x и t — вещественные переменные.

Иногда рассматривают «почти разностные» уравнения

$$a(x) u(x) - \int_{E_m} K(x, x - t) u(t) \, dt = f(x), \tag{1.20}$$

у которых зависимость ядра $K(x, x - t)$ от первого аргумента в некотором смысле несущественна. Подробнее об этом будет сказано в гл. VIII.

Представляют известный интерес уравнения Вольтерра с разностными ядрами; при $m=1$ они имеют вид

$$au(x) - \int_{-\infty}^{x} K(x-t)\,u(t)\,dt = f(x) \tag{1.21}$$

или

$$au(x) - \int_{0}^{x} K(x-t)\,u(t)\,dt = f(x). \tag{1.21$_1$}$$

Уравнение (1.21) есть частный случай уравнения с разностным ядром (1.19) и получается из этого последнего, если в нем положить $K(z)=0,\ z<0$.

2.2. Уравнение Винера — Хопфа. Так называется уравнение с разностным ядром на полуоси:

$$au(x) - \int_{0}^{\infty} K(x-t)\,u(t)\,dt = f(x); \qquad a = \text{const}. \tag{1.22}$$

Можно строить уравнения такого типа и в многомерном пространстве; при этом интегрирование по полуоси $(0, \infty)$ заменяется интегрированием по одной из полостей некоторого конуса с вершиной в начале координат. Более изучен случай, когда упомянутая полость сводится к полупространству; в этом случае мы имеем дело с уравнением вида

$$au(x) - \int\limits_{x_m>0} K(x-t)\,u(t)\,dt = f(x); \qquad a = \text{const}. \tag{1.23}$$

2.3. Парное уравнение (иногда называемое дуальным). В случае одной независимой переменной оно имеет следующий вид:

$$au(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} K_1(x-t)\,u(t)\,dt = f(x); \qquad x>0,$$

$$bu(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} K_2(x-t)\,u(t)\,dt = f(x); \qquad x<0, \tag{1.24}$$

где a и b — постоянные.

2.4. Уравнения интегральных преобразований. Любое из известных в анализе интегральных преобразований можно рассматривать как интегральное уравнение относительно функции, над которой это преобразование выполнено. Приведем несколько примеров; следуя принятой выше системе обозначений, будем обозначать через u функцию, над которой производится преобразование, а через f его результат.

a) *Косинус-преобразование Фурье*:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(t)\cos tx\,dt = f(x). \tag{1.25}$$

b) *Синус-преобразование Фурье*:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty u(t)\sin tx\,dt = f(x). \tag{1.26}$$

c) *Комплексное преобразование Фурье*:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)\,e^{-itx}\,dt = f(x). \tag{1.27}$$

d) *Комплексное преобразование Фурье в многомерном пространстве*:

$$\frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\int_{E_m} u(t)\,e^{-i(x,\,t)}\,dt = f(x). \tag{1.28}$$

Здесь

$$(x,\ t) = \sum_{k=1}^{m} x_k t_k$$

— скалярное произведение векторов x и t.

e) *Преобразование Лапласа*:

$$\int_0^\infty e^{-tx}u(t)\,dt = f(x). \tag{1.29}$$

f) *Преобразование Меллина*:

$$\int_0^\infty t^{x-1}u(t)\,dt = f(x) \tag{1.30}$$

g) *Преобразование Ханкеля*:

$$\int_0^\infty \sqrt{tx}\, J_\nu(tx)\, u(t)\, dt = f(x); \qquad (1.31)$$

J_ν — функция Бесселя первого рода порядка ν.

h) *Преобразование М. И. Конторовича—Н. Н. Лебедева*

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty t \operatorname{sh} \pi t e^{\pi t/2} H_{it}^{(2)}(kx)\, u(t)\, dt = f(x); \qquad (1.32)$$

$H_{it}^{(2)}$ — функция Ханкеля второго рода с чисто мнимым значком it.

2.5. Сингулярные уравнения. Пусть Γ — совокупность, конечная или счетная, простых дуг, замкнутых или разомкнутых, расположенных в плоскости комплексной переменной. *Одномерное сингулярное интегральное уравнение* имеет вид

$$a(t)\, u(t) - \frac{b(t)}{\pi i} \int_\Gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta + \int_\Gamma K(t, \zeta)\, u(\zeta)\, d\zeta = f(t). \qquad (1.33)$$

Здесь ζ и t — комплексные координаты (аффиксы) точек на Γ; $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ — заданные на Γ функции, $K(t, \zeta)$ — фредгольмовское ядро; если сумма длин дуг, образующих Γ, конечна, то допустимо считать, что $K(t, \zeta)$ — ядро со слабой особенностью. Расходящийся интеграл понимается в смысле его главного значения по Коши:

$$\int_\Gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma \cap (|\zeta - t| > \varepsilon)} \frac{u(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta.$$

В простейшем случае, когда область интегрирования есть E_m — евклидово пространство m измерений — *многомерное сингулярное уравнение* имеет вид

$$a(x)\, u(x) + \int_{E_m} \frac{f(x, \theta)}{|x - t|^m} u(t)\, dt + \int_{E_m} K(x, t)\, u(t)\, dt = f(x). \qquad (1.34)$$

Здесь $\theta = \frac{t-x}{|t-x|}$, ядро $K(x, t)$, скажем, фредгольмовское; расходящийся интеграл опять понимается в смысле главного значения по Коши:

$$\int_{E_m} \frac{f(x, \theta)}{|x-t|^m} u(t)\,dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-t|>\varepsilon} \frac{f(x, \theta)}{|x-t|^m} u(t)\,dt.$$

В определении сингулярного интегрального уравнения пространство E_m может быть заменено любым m-мерным многообразием. Особенно интересен случай, когда это многообразие есть m-мерная поверхность S, расположенная в евклидовом пространстве большего числа измерений; в этом случае уравнение записывается в виде

$$a(x)u(x) + \int_S \frac{f(x, \theta)}{|x-t|^m} u(t)\,d_tS + \int_S K(x, t)u(t)\,d_tS = f(x). \tag{1.34$_1$}$$

В гл. IX будут рассмотрены и более общие сингулярные уравнения.

2.6. Нелинейные уравнения. Ниже перечислены некоторые важные классы нелинейных интегральных уравнений. Простейшим из них является *уравнение Гаммерштейна*

$$u(x) - \int_\Omega K(x, t)\,F(t, u(t))\,dt = 0, \tag{1.35}$$

где $K(x, t)$ фредгольмовское ядро. Более общими являются *уравнения П. С. Урысона*

$$u(x) - \int_\Omega K(x, t, u(t))\,dt = 0. \tag{1.36}$$

Функцию $K(x, t, u)$ обычно подчиняют требованию непрерывности при $x,\ t \in \overline{\Omega},\ |u| \leqslant a$. Здесь a — некоторая достаточно большая положительная постоянная, $\overline{\Omega}$ — замыкание множества Ω, которое предполагается ограниченным.

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — две непрерывные функции, определенные на множестве Ω, которое предположим ограниченным и замкнутым. Пусть, далее, α и β — целочисленные векторы с неотрицательными компонентами:

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\rho), \qquad \beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_\rho),$$

а $K_{\alpha,\beta}(x, t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots, t^{(\rho)})$ — непрерывная функция своих аргументов, когда каждый из них меняется в Ω. *Интегростепенным членом* называется выражение

$$L_{\alpha,\beta}(u, v) = \int\limits_{\Omega} \ldots \int\limits_{\Omega} K_{\alpha,\beta}(x, t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots, t^{(\rho)}) \times \\ \times u^{\alpha_0}(x)\, u^{\alpha_1}(t^{(1)}) \ldots u^{\alpha_\rho}(t^{(\rho)}) \times \\ \times v^{\beta_0}(x)\, v^{\beta_1}(t^{(1)}) \ldots v^{\beta_\rho}(t^{(\rho)})\, dt^{(1)}\, dt^{(2)} \ldots dt^{(\rho)}. \quad (1.37)$$

Ряд

$$L(u, v) = \sum_{\alpha,\beta} L_{\alpha,\beta}(u, v), \quad (1.38)$$

в котором число ρ фиксировано, а суммирование распространено на всевозможные векторы α и β, называется *интегростепенным рядом.*

Уравнение

$$L(u, v) = 0, \quad (1.39)$$

в котором функция u считается неизвестной, а функция v — известной, называется *уравнением Ляпунова.*

Нелинейное одномерное сингулярное интегральное уравнение можно представить в виде

$$F(t, u(t), \boldsymbol{S}(u), \boldsymbol{T}_1(u), \boldsymbol{T}_2(u), \ldots, \boldsymbol{T}_k(u)) = 0. \quad (1.40)$$

Здесь для краткости обозначено

$$\boldsymbol{S}(u) = \frac{1}{\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta,$$

$$\boldsymbol{T}_j(u) = \int\limits_{\Gamma} K_j(t, \zeta)\, u(\zeta)\, d\zeta \qquad (j = 1, 2, \ldots, k),$$

где $K_j(t, \zeta)$, скажем, фредгольмовские ядра.

Многомерное нелинейное сингулярное интегральное уравнение может иметь вид

$$F(x, u(x), \sigma_1(u), \ldots, \sigma_n(u), \boldsymbol{T}_1(u), \ldots, \boldsymbol{T}_k(u)) = 0, \quad (1.41)$$

где

$$\sigma_i(u) = \int\limits_{S} \frac{f_i(x, \theta)}{|x - t|^m}\, u(t)\, dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

а T_j, как и выше, суть фредгольмовские операторы, т. е. интегральные операторы с фредгольмовскими ядрами. Можно рассматривать и более общие нелинейные сингулярные уравнения.

§ 3. Некоторые формулы обращения

Если A — некоторый оператор и уравнение

$$Au = f \tag{1.42}$$

имеет единственное решение

$$u = A^{-1}f, \tag{1.43}$$

то формула (1.43) называется *формулой обращения* для уравнения (1.42). В настоящем параграфе мы приведем ряд примеров интегральных уравнений, для которых известны сравнительно простые формулы обращения.

3.1. Обращение интегральных преобразований. Приводимые здесь под индексами a) — h) формулы являются формулами обращения для интегральных преобразований § 2, снабженных теми же индексами.

a) $$u(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos tx \, dt. \tag{1.44}$$

b) $$u(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \sin tx \, dt. \tag{1.45}$$

c) $$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(t) \, dt. \tag{1.46}$$

d) $$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}} \int_{E_m} e^{i(t, x)} f(t) \, dt. \tag{1.47}$$

e) $$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{k-i\infty}^{k+i\infty} e^{tx} f(t) \, dt. \tag{1.48}$$

В формуле (1.48) k — любая положительная постоянная; эта формула верна, если функция $f(t)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Re} t > k'$, $k' < k$, плоскости комплексной переменной t и имеет в этой полуплоскости при больших $|t|$ оценку $O\left(|t|^{-\alpha}\right)$, $\alpha > 0$. Если это условие выполнено, то при $x < 0$ интеграл в правой части упомянутой формулы равен нулю *).

f) $$u(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(t)\, x^{-t}\, dt. \tag{1.49}$$

Формула (1.49) применима, если функция $f(t)$ такова, что при некотором значении $k > 0$ интеграл

$$\int_0^\infty x^{k-1} |u(x)|\, dx$$

сходится: при этом необходимо положить $c > k$ [26], [27].

g) $$u(x) = \int_0^\infty f(t) \sqrt{tx}\, J_\nu(tx)\, dt. \tag{1.50}$$

h) $$u(x) = \int_0^\infty e^{\frac{\pi x}{2}} H_{ix}^{(2)}(kt)\, f(t)\, \frac{dt}{t}. \tag{1.51}$$

Можно указать некоторую общую формулу обращения [26], из которой как частные случаи вытекают многие приведенные выше формулы. Пусть дано уравнение

$$\int_0^\infty K(x, t)\, u(t)\, dt = f(x) \tag{1.52}$$

и пусть

$$\boldsymbol{K}(x) = \int_0^\infty t^{x-1} K(t)\, dt$$

есть преобразование Меллина ядра $K(x)$. Если существует функция $H(x)$ такая, что ее преобразование Меллина

$$\boldsymbol{H}(x) = \int_0^\infty t^{x-1} H(t)\, dt$$

---

*) Формулы *a*) — *e*) см., например, [26] или [27].

удовлетворяет соотношению

$$K(x)H(1-x)=1, \tag{1.53}$$

то обращение преобразования (1.52) дается формулой

$$u(x)=\int_0^\infty H(x, t) f(t)\,dt. \tag{1.54}$$

3.2. Формулы обращения для уравнений с разностными ядрами. Уравнение (1.19) легко исследовать, исходя из того простого соображения, что свертке двух функций соответствует произведение их комплексных преобразований Фурье. Для большей определенности примем, что в уравнении (1.19) $f(x)\in L_2(-\infty, +\infty)$. Будем искать решение этого уравнения, также принадлежащее классу $L_2(-\infty, +\infty)$. Применим к обеим частям уравнения преобразование Фурье. Допуская, что теорема о свертке применима, получим

$$\left[a-\sqrt{2\pi}\tilde{K}(x)\right]\tilde{u}(x)=\tilde{f}(x),$$

где знаком $\sim$ мы обозначаем преобразование Фурье данной функции. Если функция $\left[a-\sqrt{2\pi}\tilde{K}(x)\right]^{-1}$ ограничена, то

$$\tilde{u}(x)=\frac{\tilde{f}(x)}{a-\sqrt{2\pi}\,\tilde{K}(x)},$$

и мы приходим к следующей формуле обращения:

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{itx}\tilde{f}(t)}{a-\sqrt{2\pi}\,\tilde{K}(t)}\,dt. \tag{1.55}$$

Если функция $\left[a-\sqrt{2\pi}\,\tilde{K}(x)\right]^{-1}$ не ограничена (это будет, например, если $\tilde{K}(x)$ непрерывна и при некоторых вещественных x выражение $a-\sqrt{2\pi}\,\tilde{K}(x)$ обращается в нуль), то при произвольно выбранной функции $f(x)$ уравнение (1.19) может не иметь решения. Тем не менее формула обращения (1.55) и в этом случае сохраняет силу, если выполнены, например, следующие дополнительные условия: 1) функция $a-\sqrt{2\pi}\,\tilde{K}(t)$ обращается в нуль только на множестве нулевой меры; 2) функция $\tilde{f}(t)\left[a-\sqrt{2\pi}\,\tilde{K}(t)\right]^{-1}$ суммируема с квадратом на всей оси t.

Пример 3.1. Рассмотрим уравнение.

$$au(x) - \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-t)^2} u(t)\, dt = f(x). \tag{1.56}$$

В данном случае $K(x) = e^{-x^2}$ и

$$\tilde{K}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 - itx}\, dt.$$

Последний интеграл легко вычисляется. Имеем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 - itx}\, dt = e^{-x^2/4} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+ix/2)^2}\, dt.$$

Применяя теорему Коши к интегралу

$$\int_{\Pi} e^{-z^2}\, dz,$$

где Π — прямоугольник (рис. 1), расположенный в комплексной z-плоскости, и полагая затем $T \to +\infty$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t+ix/2)^2}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

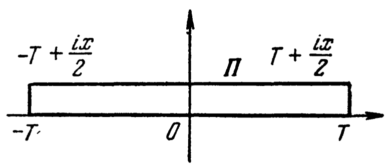

Рис. 1.

и, следовательно, $\tilde{K}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x^2/4}$. Применив преобразование Фурье к обеим частям уравнения (1.56), получим

$$\left(a - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-x^2/4}\right) \tilde{u}(x) = \tilde{f}(x).$$

Если $a < 0$ или $a > \frac{1}{\sqrt{2}}$, то решение уравнения (1.56) существует, единственно и дается формулой

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{f}(t)}{a - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-t^2/4}} e^{itx}\, dt. \tag{1.57}$$

Рассмотрим случай $a=0$. Так как $\tilde{K}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-x^2/4}$ не обращается в нуль, то решение единственно; оно существует, если функция $f(x)$ такова, что $e^{x^2/4}\tilde{f}(x)\in L_2(-\infty,+\infty)$, и определяется формулой

$$u(x)=-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{t^2/4}\tilde{f}(t)e^{ixt}\,dt. \tag{1.58}$$

Пример 3.2 [30]. Уравнение

$$\int_0^{\infty}\frac{v(\tau)}{\tau+\xi}\,d\tau=g(\xi) \tag{1.59}$$

приводится к виду (1.19). Именно, положив

$$\xi=e^x,\quad \tau=e^t,\quad e^{t/2}v(e^t)=u(t),\quad e^{x/2}g(e^x)=f(x),$$

получим уравнение

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{u(t)\,dt}{2\operatorname{ch}\frac{x-t}{2}}=f(x), \tag{1.60}$$

решение которого в соответствии с общей формулой (1.55) имеет вид

$$u(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi^3}}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{f}(t)\operatorname{ch}\pi t e^{itx}\,dt;$$

переход к старым переменным не вызывает затруднений.

Для более общего уравнения (1.18) при условии, что функция $[a-(2\pi)^{m/2}\tilde{K}(t)]^{-1}$ ограничена, получается следующая формула обращения:

$$u(x)=\frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\int_{E_m}\frac{\tilde{f}(t)e^{i(t,x)}}{a-(2\pi)^{m/2}\tilde{K}(t)}\,dt. \tag{1.61}$$

Формула (1.57) является формулой обращения и для уравнения Вольтерра (1.21), с той очевидной разницей, что в данном случае

$$\tilde{K}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty}K(t)e^{-ixt}\,dt.$$

3.3. Уравнение Вольтерра с одной независимой переменной и с разностным ядром. К уравнению (1.21_1) применим преобразование Лапласа. Мы получим тогда

$$a\tilde{u}(\xi)-\int\limits_0^\infty e^{-\xi x}\left\{\int\limits_0^x K(x-t)\,u(t)\,dt\right\}dx=\tilde{f}(\xi).$$

Здесь знак $\sim$ означает преобразование Лапласа рассматриваемой функции. В повторном интеграле изменим порядок интегрирования и затем положим во внутреннем интеграле $x-t=z$. В результате мы придем к алгебраическому уравнению

$$[a-\tilde{K}(\xi)]\,\tilde{u}(\xi)=\tilde{f}(\xi). \tag{1.62}$$

Допустим, что в правой полуплоскости комплексной переменной найдется прямая, параллельная мнимой оси, на которой функция $a-\tilde{K}(\xi)$ отлична от нуля; если уравнение этой прямой есть $\operatorname{Im}\xi=k$, то формула

$$u(x)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{k-i\infty}^{k+i\infty}\frac{\tilde{f}(\xi)}{a-\tilde{K}(\xi)}\,e^{\xi x}\,d\xi \tag{1.63}$$

дает решение уравнения (1.21_1). Мы предполагаем при этом, конечно, что функция

$$\frac{\tilde{f}(\xi)}{a-\tilde{K}(\xi)}$$

такова, что можно применять формулу (1.48).

3.4. Уравнение Абеля. Уравнение (1.15)′ допускает формулу обращения, которую легко вывести следующим образом. Заменим x на s, умножим обе части уравнения на $(x-s)^{\alpha-1}\,ds$ и проинтегрируем по s в пределах от a до x. Выполнив некоторые элементарные преобразования и воспользовавшись формулой

$$\int\limits_0^1\frac{dy}{y^\alpha(1-y)^{1-\alpha}}=\frac{\pi}{\sin\alpha\pi},$$

получим искомую формулу обращения:

$$u(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x\frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\alpha}};\tag{1.64}$$

она применима, если, например, функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема при $x\geqslant a$.

К уравнению Абеля легко сводится, например, уравнение вида

$$\int\limits_a^x\frac{u(t)\,dt}{\sqrt{x^2-t^2}}=f(x);\tag{1.65}$$

достаточно положить $x^2=x_1$, $t^2=t_1$. Можно его решить и непосредственно, применив только что описанный прием. Заменив x на s и умножив обе части уравнения на $2s(x^2-s^2)^{-1/2}\,ds$, проинтегрируем по s в пределах от a до x, что легко приведет нас к формуле

$$u(x)=\frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int\limits_a^x\frac{sf(s)\,ds}{\sqrt{x^2-s^2}}.\tag{1.66}$$

Аналогично можно решать и некоторые уравнения с большим числом переменных.

Рассмотрим уравнение [18], [20]

$$\iint\limits_{\sigma_0}\frac{u(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{(y_0-y)^2-(x_0-x)^2}}=f(x_0,y_0),\tag{1.67}$$

где σ_0 — равнобедренный прямоугольный треугольник с вершиной (x_0, y_0) и основанием на оси x. Решение уравнения (1.67) дается формулой

$$u(x_0,y_0)=\frac{1}{2\pi^2}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x_0^2}-\frac{\partial^2 g}{\partial y_0^2}\right),\tag{1.68}$$

где

$$g(x_0,y_0)=\iint\limits_{\sigma_0}\frac{f(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{(y_0-y)^2-(x_0-x)^2}}.$$

3.5. Уравнения, ядра которых зависят от гипергеометрической функции [1]. Рассмотрим уравнение первого рода

$$\int_0^a K(x, t)\, u(t)\, dt = f(x), \tag{1.69}$$

где a — постоянная, $0 < a \leqslant \infty$, и

$$K(x, t) = (x^2 + t^2)^{-p} F\left(\frac{p}{2}, \frac{p+1}{2}, \frac{q}{2}; \frac{4x^2t^2}{(x^2+t^2)^2}\right), \tag{1.70}$$

а параметры p и q подчинены неравенствам

$$0 < 2p < q < 2p + 2. \tag{1.71}$$

Решение уравнения (1.69) имеет вид

$$u(x) = \frac{x^{q-2}}{\Gamma(1 + p - q/2)} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{t g(t)\, dt}{(t^2 - x^2)^{q/2-p}},$$

$$g(t) = \frac{2\Gamma(p) \sin(p - q/2)\pi}{\pi\Gamma(q/2)} t^{1-2p} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{s^{q-1} f(s)\, ds}{(t^2 - s^2)^{q/2-p}}. \tag{1.72}$$

Если $a = \infty$ и функция $f(t)$ дифференцируема, то решение можно представить также в одной из следующих форм:

$$u(x) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q-p) \sin(p - q/2)\pi}{\pi\Gamma(q/2)\Gamma(1 + q/2)} \frac{d}{dt} \int_0^\infty \frac{(xt)^q f'(t)}{(x^2+t^2)^{q-p}} \times$$
$$\times F\left(\frac{q-p}{2}, \frac{q-p+1}{2}, \frac{q}{2} + 1; \frac{4x^2t^2}{(x^2+t^2)^2}\right) dt; \tag{1.73}$$

$$u(x) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q-p-2) \sin(p - q/2)\pi}{\pi\Gamma(q/2)\Gamma(q/2 - 1)} x^{q-2} \times$$
$$\times \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left[t^{q-2} f(t)\right] \left\{(x^2 + t^2)^{p+2-q} F\left(\frac{q-p-2}{2},\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{q-p-1}{2}, \frac{q}{2} - 1; \frac{4x^2t^2}{(x^2+t^2)^2} - \frac{1}{t^{2q-2p-4}}\right)\right\} dt. \tag{1.74}$$

Формула (1.74) верна, если наряду с неравенствами (1.71) выполнены еще неравенства

$$q > p + 2, \quad q \geqslant 3. \tag{1.75}$$

Частные случаи:

1) $p = 1$, $q = 3$; $K(x, t) = \frac{1}{2xt} \ln \left| \frac{x+t}{x-t} \right|$. Положив

$$\frac{u(t)}{2t} = U(t), \quad xf(x) = \Phi(x),$$

получим интегральное уравнение

$$\int_0^a U(t) \ln \left| \frac{x+t}{x-t} \right| dt = \Phi(x), \tag{1.76}$$

решение которого имеет вид

$$U(x) = -\frac{2}{\pi^2} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{dt}{\sqrt{t^2 - x^2}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{s\Phi(s)\, ds}{\sqrt{t^2 - s^2}}. \tag{1.77}$$

При $a = \infty$, $p = 1$, $q = 3$ имеем уравнение

$$\int_0^\infty \frac{1}{2xt} \ln \left| \frac{x+t}{x-t} \right| u(t)\, dt = f(x), \tag{1.78}$$

решение которого можно получить с помощью формулы (1.72) в виде

$$u(x) = \frac{x}{\pi^2} \frac{d}{dx} \int_0^\infty \frac{d}{dt} [2tf(t)] \ln \left| 1 - \frac{x^2}{t^2} \right| dt. \tag{1.79}$$

2) $0 < p < 1$, $q = p + 1$; $K(x, t) = |x^2 - t^2|^{-p}$. Уравнение

$$\int_0^a \frac{u(t)}{|x^2 - t^2|^p} dt = f(x) \tag{1.80}$$

имеет решение

$$u(x) = -\frac{2x^{p-1}\Gamma(p) \cos \frac{p\pi}{2}}{\pi \left[\Gamma\left(\frac{1+p}{2} \right) \right]^2} \frac{d}{dx} \int_x^a \frac{t^{2-2p}\, dt}{(t^2 - x^2)^{\frac{1-p}{2}}} \int_0^t \frac{f(s)\, s^p\, ds}{(t^2 - s^2)^{\frac{1-p}{2}}}.$$

3) $p=\frac{1}{2}$, $q=2$; $K(x,\ t)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{x+t}\cdot K\left(\frac{2\sqrt{xt}}{x+t}\right)$, где K — полный эллиптический интеграл первого рода:

$$K(k)=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Уравнение имеет вид

$$\frac{2}{\pi}\int_0^a\frac{1}{x+t}\,K\left(\frac{2\sqrt{xt}}{x+t}\right)u(t)\,dt=f(x). \qquad (1.81)$$

Решение получаем по формуле (1.72):

$$u(x)=-\frac{2}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^a\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2-x^2}}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{sf(s)\,ds}{\sqrt{t^2-s^2}}. \qquad (1.82)$$

ГЛАВА II

ТЕОРИЯ ФРЕДГОЛЬМА

§ 1. Основные понятия. Теоремы Фредгольма *)

1.1. Основные понятия. Для простоты записи будем предполагать, что мера μ в уравнении (1.4) лебегова. Элемент объема будем обозначать через dx, так что уравнение (1.4) принимает вид

$$u(x) - \int_\Omega K(x, t)\, u(t)\, dt = f(x); \tag{2.1}$$

неравенства (1.5) и (1.6) переходят в следующие:

$$\int_\Omega \int_\Omega |K(x, t)|^2\, dx\, dt < \infty \tag{2.2}$$

и

$$\int_\Omega |f(x)|^2\, dx < \infty. \tag{2.3}$$

Интеграл в левой части неравенства (2.2) в последующем будет играть важную роль; мы обозначим этот интеграл через B_K^2:

$$\int_\Omega \int_\Omega |K(x, t)|^2\, dx\, dt = B_K^2. \tag{2.4}$$

---

*) Подробное изложение теории Фредгольма можно найти в ряде книг, из которых мы отметим следующие: [8], [15], [20], [22], [23], [25], [28]. Книга [8] особенно богата по содержанию, хотя по изложению несколько устарела.

Удобно рассматривать не одно интегральное уравнение (2.1), а семейство уравнений, зависящих от параметра λ:

$$u(x) - \lambda \int_{\Omega} K(x, t)\, u(t)\, dt = f(x); \tag{2.5}$$

параметр λ может принимать и вещественные, и комплексные значения.

Пусть $K(x, t)$ — фредгольмовское ядро. Выражение

$$\int_{\Omega} K(x, t)\, u(t)\, dt \tag{2.6}$$

представляет собой оператор, который функцию $u(x)$ преобразует в новую функцию

$$v(x) = \int_{\Omega} K(x, t)\, u(t)\, dt;$$

нетрудно доказать, что этот оператор преобразует любую функцию $u(x)$ из пространства $L_2(\Omega)$ и функцию $v(x)$, принадлежащую тому же пространству. Оператор (2.6) будем называть *оператором Фредгольма*; если обозначить его символом $\boldsymbol{K}u$, то

$$(\boldsymbol{K}u)(x) = \int_{\Omega} K(x, t)\, u(t)\, dt. \tag{2.7}$$

В пространстве $L_2(\Omega)$ оператор Фредгольма ограничен, причем

$$\|\boldsymbol{K}\| \leqslant B_K, \tag{2.8}$$

где величина B_K определяется формулой (2.4).

Введем еще в рассмотрение *тождественный* оператор $\boldsymbol{I}$:

$$\boldsymbol{I}u = u.$$

Тогда уравнение (2.5) можно записать короче:

$$(\boldsymbol{I} - \lambda \boldsymbol{K})\, u = f. \tag{2.5$_1$}$$

При любом значении параметра однородное уравнение

$$u(x) - \lambda \int_{\Omega} K(x, t)\, u(t)\, dt = 0 \tag{2.9}$$

имеет решением функцию, тождественно равную нулю. Это решение часто называют *тривиальным*. Значение параметра называется *правильным* для данного ядра $K(x, t)$ или для оператора $\boldsymbol{K}$, если при этом значении уравнение (2.9) не имеет решений, кроме тривиального. Значение параметра называется *характеристическим* для данного ядра $K(x, t)$ (или оператора $\boldsymbol{K}$), если при этом значении уравнение (2.6) имеет нетривиальные (т. е. отличные от тождественного нуля) решения; такие решения называются *собственными функциями* ядра $K(x, t)$ или оператора $\boldsymbol{K}$, соответствующими данному характеристическому числу λ.

Величины, обратные характеристическим числам, называются *собственными числами* данного ядра или оператора.

Если $u_1(x)$, $u_2(x)$, ..., $u_k(x)$ — собственные функции ядра $K(x, t)$, соответствующие одному и тому же собственному числу λ, а C_1, C_2, ..., C_k — произвольные постоянные, то функция $u_0(x) = C_1 u_1(x) + C_2 u_2(x) + \ldots + C_k u_k(x)$, если только она отлична от тождественного нуля, также есть собственная функция ядра $K(x, t)$, соответствующая тому же характеристическому числу λ.

Число линейно независимых собственных функций, соответствующих данному характеристическому числу, называется *рангом* этого характеристического числа. Характеристическое число ранга единица называется *простым*.

Пример 1.1. Пусть Ω — отрезок $[0, 2\pi]$. Выясним, какие значения параметра λ являются правильными и какие — характеристическими для ядра $K(x, t) = \sin(x - t)$. Рассмотрим однородное интегральное уравнение

$$u(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x - t)\, u(t)\, dt = 0. \tag{2.10}$$

Его легко решить следующим образом. Перепишем уравнение (2.10) в виде

$$u(x) - \lambda(a \sin x - b \cos x) = 0, \tag{2.10$_1$}$$

где

$$a = \int_0^{2\pi} u(t) \cos t\, dt, \qquad b = \int_0^{2\pi} u(t) \sin t\, dt.$$

Умножая уравнение (2.10$_1$) сначала на $\cos x$, а затем на $\sin x$ и интегрируя, получим систему уравнений для постоянных a и b:

$$a+\pi\lambda b=0, \qquad b-\pi\lambda a=0.$$

Определитель этой системы, равный $1+\lambda^2\pi^2$, обращается в нуль при $\lambda=\pm i/\pi$. Если $\lambda\neq\pm i/\pi$, то необходимо $a=b=0$, и из уравнения (2.10_1) следует, что $u(x)\equiv 0$. Таким образом, в рассматриваемом примере все значения $\lambda\neq\pm i/\pi$ правильные. При $\lambda=\pm i/\pi$ получаем $b=\pm ia$, где a остается произвольным; из (2.10_1) находим нетривиальные решения уравнения (2.10)

$$u(x)=ce^{\mp ix},$$

где c — произвольная постоянная. Отсюда видно, что ядро $\sin(x-t)$, $0\leqslant x,\ t\leqslant 2\pi$, имеет два простых характеристических числа i/π и $-i/\pi$; им соответствуют собственные функции e^{-ix} и e^{ix}.

Ядра $K(x, t)$ и

$$K^*(x, t)=\overline{K(t, x)} \tag{2.11}$$

называются *сопряженными*. Соответственно называются сопряженными операторы (2.7) и $\boldsymbol{K}^*$, где

$$(\boldsymbol{K}^*u)(x)=\int\limits_\Omega K^*(x, t)\,u(t)\,dt=\int\limits_\Omega \overline{K(t, x)}\,u(t)\,dt, \tag{2.12}$$

а также интегральные уравнения (2.1) и

$$u(t)-\int\limits_\Omega K^*(x, t)\,u(t)\,dt=g(x),$$

где $g(x)$ — произвольная функция класса $L_2(\Omega)$. Для уравнения (2.5) сопряженным будет уравнение

$$u(x)-\overline{\lambda}\int\limits_\Omega K^*(x, t)\,u(t)\,dt=g(x). \tag{2.13}$$

Очевидно, $\boldsymbol{K}^*$ также есть оператор Фредгольма. Сопряженные операторы $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K}^*$ удовлетворяют тождеству

$$(\boldsymbol{K}u, v)=(u, \boldsymbol{K}^*v); \qquad u, v\in L_2(\Omega). \tag{2.14}$$

Круглые скобки означают здесь скалярное произведение в $L_2(\Omega)$: если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — функции этого класса, то

$$(\varphi, \psi)=\int\limits_\Omega \varphi(x)\,\overline{\psi(x)}\,dx.$$

Ядра $K(x, t)$ и $K(t, x)$ называются *транспонированными*, или *союзными*. Уравнение

$$u(x) - \lambda \int\limits_{\Omega} K(t, x) u(t) dt = h(x) \tag{2.15}$$

называется *транспонированным*, или *союзным*, *с уравнением* (2.5). Если $h(x) = \overline{g(x)}$ и $\overline{\psi(x)}$ есть решение сопряженного уравнения (2.13), то $\psi(x)$ есть решение транспонированного уравнения (2.15), и наоборот. Указанное соотношение между решениями сопряженного и транспонированного уравнений имеет место, в частности, если эти уравнения однородные.

Если $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{L}$ — два оператора Фредгольма, с ядрами $K(x, t)$ и $L(x, t)$ соответственно, то произведение $\boldsymbol{KL}$ также есть оператор Фредгольма. Ядро этого оператора выражается интегралом

$$\int\limits_{\Omega} K(x, s) L(s, t) ds.$$

При этом

$$B_{KL} \leqslant B_K B_L, \tag{2.16}$$

где величина B_K и ей аналогичные определяются формулой (2.4).

В частности, целые положительные степени фредгольмовского оператора $\boldsymbol{K}$ также суть фредгольмовские операторы. Если обозначить через $K_n(x, t)$ ядро оператора $\boldsymbol{K}^n$ — n-й степени оператора K, то

$$\begin{gathered} K_1(x, t) = K(x, t), \\ K_{p+q}(x, t) = \int\limits_{\Omega} K_p(x, s) K_q(s, t) ds, \\ K_n(x, t) = \\ = \int\limits_{\Omega} \ldots \int\limits_{\Omega} K(x, s_1) K(s_1, s_2) \ldots K(s_{n-1}, t) ds_1 ds_2 \ldots ds_{n-1}. \end{gathered} \tag{2.17}$$

Обозначим для краткости

$$B_n^2 = B_{K^n}^2 = \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\Omega} |K_n(x, t)|^2 dx\, dt.$$

Тогда

$$B_n \leqslant B_K^n. \tag{2.18}$$

Ядро $K_n(x, t)$ называется n-м *итерированным* по отношению к ядру $K(x, t)$.

1.2. Основные теоремы. Для фредгольмовского уравнения (2.5) справедливы следующие четыре *теоремы Фредгольма.*

Теорема 1.1. *Уравнение Фредгольма имеет либо конечное, либо счетное множество характеристических чисел; если этих чисел счетное множество, то они стремятся к бесконечности.*

Теорема 1.1 допускает и такую формулировку: если $K(x, t)$ — фредгольмовское ядро, то в любой конечной части комплексной λ-плоскости содержится не более чем конечное число характеристических чисел этого ядра.

Теорема 1.2. *Если значение параметра λ правильное, то каждое из сопряженных уравнений* (2.5) *и* (2.13) *имеет одно и только одно решение, каковы бы ни были функции $f(x)$ и $g(x)$, принадлежащие классу $L_2(\Omega)$.*

Теорема 1.3. *Если значение параметра λ характеристическое, то сопряженные однородные уравнения*

$$u(x) - \lambda \int_\Omega K(x, t)\, u(t)\, dt = 0 \tag{2.19}$$

и

$$v(x) - \bar{\lambda} \int_\Omega K^*(x, t)\, v(t)\, dt = 0 \tag{2.20}$$

имеют одно и то же число линейно независимых решений.

Теорему 1.3 можно сформулировать еще так: если λ есть характеристическое число ядра $K(x, t)$, то $\bar{\lambda}$ есть характеристическое число сопряженного ядра $K^*(x, t)$ и обоим характеристическим числам указанных ядер соответствует одно и то же число линейно независимых собственных функций.

Теорема 1.4. *Для того чтобы неоднородное уравнение* (2.1) *имело решение, необходимо и достаточно, чтобы его свободный член $f(x)$ был ортогонален к любому решению $v(x)$ однородного сопряженного уравнения* (2.20):

$$(f, v) = 0. \tag{2.21}$$

Если значение λ правильное, то теорема 1.4 делается тривиальной: в этом случае уравнение (2.20) имеет только одно решение $v \equiv 0$ (теорема 1.2) и условию (2.21) удовлетворяет любая функция $f(x)$; одновременно по той же теореме 1.2 уравнение (2.1) всегда разрешимо. Теорема 1.4 имеет существенное значение в случае характеристического λ.

Важным дополнением к теореме 1.1 Фредгольма является следующая теорема И. Шура *):

Теорема 1.5. *Если ядро $K(x, t)$ удовлетворяет неравенству* (2.2) *и λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ суть характеристические числа этого ядра, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^2} \leqslant B_K^2 = \int_\Omega \int_\Omega |K(x, t)|^2 dx\, dt. \tag{2.22}$$

Если ядро $K(x, t)$ симметрично, т. е. если $K(x, t) = K^*(x, t)$, то в (2.22) *имеет место знак равенства.* По этому поводу см. гл. III.

Отметим еще одно обстоятельство, связанное с теоремой 1.1 Фредгольма. Существуют ядра, вовсе не имеющие характеристических чисел; таковы, например, вольтерровские ядра. Полная характеристика таких ядер дается следующей теоремой Лалеско.

Теорема 1.6. *Пусть $K(x, t)$—фредгольмовское ядро и $K_n(x, t)$ — его итерированные ядра. Для того чтобы ядро $K(x, t)$ не имело характеристических чисел, необходимо и достаточно, чтобы*

$$A_n = \int_\Omega K_n(x, x)\, dx = 0; \qquad n = 3, 4, 5 \ldots \tag{2.23}$$

Заметим, что числа A_n называются *следами* ядра $K(x, t)$. Сам Лалеско доказал свою теорему для случая ограниченных ядер; общее доказательство дано С. Н. Крачковским [10].

Представляют интерес случаи, когда можно утверждать, что решение уравнения Фредгольма не только квадратично суммируемо, но и непрерывно или по крайней мере ограничено. Мы приведем здесь две теоремы, относящиеся к этому вопросу [20].

---

*) См., например, [8].

Теорема 1.7. *Пусть Ω — конечная область, а ядро $K(x, t)$ удовлетворяет не только неравенству* (2.2), *но и неравенству*

$$\int_\Omega |K(x, t)|^2 dt \leqslant A = \text{const}. \tag{2.24}$$

Если свободный член уравнения (2.5) *ограничен, то любое решение этого уравнения также ограничено.*

Будем говорить, что ядро $K(x, t)$ *непрерывно по x в области Ω в целом*, если по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что для любых $x_1, x_2 \in \Omega$, таких, что $|x_1 - x_2| < \delta$, справедливо неравенство

$$\int_\Omega |K(x_1, t) - K(x_2, t)| \, dt < \varepsilon.$$

Теорема 1.8. *Пусть Ω — конечная замкнутая область. Пусть, далее, ядро $K(x, t)$ удовлетворяет неравенству* (2.24) *и непрерывно в целом по x в Ω. Пусть, наконец, свободный член уравнения* (2.5) *непрерывен в Ω. Тогда любое решение этого уравнения непрерывно в Ω.*

§ 2. Решение уравнений Фредгольма. Метод последовательных приближений

Ниже, говоря о методах решения интегральных уравнений, мы будем иметь в виду только *точные* методы. Методы приближенного решения интегральных уравнений изложены в [14], гл. IV.

2.1. Построение приближений. Ряд Неймана. Рассмотрим уравнение (2.5). В силу теоремы 1.2, это уравнение разрешимо и имеет единственное решение при любой правой части $f(x)$, если параметр λ достаточно мал, точнее, если

$$|\lambda| < |\lambda_1|, \tag{2.25}$$

где λ_1 — наименьшее по модулю характеристическое число ядра $K(x, t)$. Оказывается, что в этом случае решение можно построить по методу последовательных приближений.

Обычно за начальное приближение выбирают свободный член уравнения (2.1) и пишут $u_0(x) = f(x)$. Если некоторое, скажем $(n-1)$-е, приближение $u_{n-1}(x)$ уже построено, то

n-е приближение строится так: в уравнении (2.5) переносим интеграл направо:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x, t)\, u(t)\, dt,$$

и заменяем под интегралом $u(t)$ через $u_{n-1}(t)$. То, что получилось в правой части, принимаем за $u_n(x)$:

$$u_n(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x, t)\, u_{n-1}(t)\, dt. \tag{2.26}$$

Полагая здесь $n = 1, 2, \ldots$, получаем формулы для первых приближений:

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x, t)\, u_0(t)\, dt = \\ = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x, t)\, f(t)\, dt,$$

$$u_2(x) = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x, t)\, u_1(t)\, dt = \\ = f(x) + \lambda \int_{\Omega} K(x, t)\, f(t)\, dt + \lambda^2 \int_{\Omega} K_2(x, t)\, f(t)\, dt$$

и т. д. Имеет место общая формула, позволяющая выразить любое приближение через свободный член и итерированные ядра:

$$u_n(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{n} \lambda^j \int_{\Omega} K_j(x, t)\, f(t)\, dt. \tag{2.26$_1$}$$

Если $n \to \infty$ и выполнено условие (2.25), то $u_n(x)$ стремится к точному решению $u(x)$ уравнения (2.5); указанное решение можно представить в виде ряда

$$u(x) = f(x) + \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^j \int_{\Omega} K_j(x, t)\, f(t)\, dt, \tag{2.27}$$

называемого *рядом Неймана*. Если при некотором λ и при любой функции $f(x)$, удовлетворяющей неравенству (2.3), ряд Неймана сходится, то $|\lambda| \leqslant |\lambda_1|$.

В общем случае, когда ядро удовлетворяет только неравенству (2.2), можно лишь утверждать, что ряд Неймана сходится в среднем в Ω. Однако если ядро удовлетворяет не только неравенству (2.2), но еще и неравенству (2.24), то при том же условии (2.25) ряд Неймана сходится равномерно в Ω.

Если ядро не имеет характеристических чисел, то ряд Неймана сходится при всех значениях λ. Такое обстоятельство тривиально имеет место, если какое-либо итерированное ядро есть тождественный нуль: в этом случае исчезают и все последующие итерированные ядра, а ряд (2.27) сводится к конечной сумме. Нетривиален и значительно более интересен другой случай: если интегральное уравнение есть уравнение Вольтерра с ядром, удовлетворяющим неравенству (2.2), то ряд Неймана сходится при любом значении параметра.

Условие (2.25) сравнительно трудно проверяемо. Можно указать более простое условие: для сходимости ряда Неймана достаточно, чтобы

$$|\lambda| < \frac{1}{B_K} = \left\{ \int\limits_\Omega \int\limits_\Omega |K(x, t)|^2 \, dx \, dt \right\}^{-1/2}. \tag{2.28}$$

В этом случае ряд Неймана сходится не медленнее, чем прогрессия с знаменателем $|\lambda| B_K$.

В частности, если Ω имеет конечную меру (например, если Ω — ограниченное множество) и ядро ограничено $|K(x, t)| \leqslant M = \text{const}$, то для сходимости ряда Неймана достаточно, чтобы

$$|\lambda| < \frac{1}{M \cdot \operatorname{mes} \Omega}. \tag{2.29}$$

В этих условиях ряд Неймана сходится равномерно и не медленнее, чем прогрессия с знаменателем $|\lambda| M \cdot \operatorname{mes} \Omega$.

2.2. Резольвента ядра. Пусть условие (2.25) выполнено. В ряде (2.27) можно изменить порядок суммирования и интегрирования, и это приводит к новой форме решения интегрального уравнения (2.5):

$$u(x) = f(x) + \lambda \int\limits_\Omega \Gamma(x, t; \lambda) f(t) \, dt, \tag{2.30}$$

где

$$\Gamma(x, t; \lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^{j-1} K_j(x, t). \tag{2.31}$$

Функция $\Gamma(x, t; \lambda)$, с помощью которой можно представить решение уравнения (2.5) в виде (2.30), называется *резольвентой* ядра $K(x, t)$. Ряд (2.31) дает представление резольвенты в виде степенного ряда, годное для достаточно малых λ. Ниже (см. §§ 4 и 5) будут даны представления резольвенты, годные для всех правильных значений λ.

Особо рассмотрим случай вольтерровского уравнения второго рода (формулы (1.12) и (1.13)). Если точки x и t изменяются в конечной области, то при весьма общих условиях последовательные приближения сходятся при любом значении параметра (и, следовательно, при любых значениях параметра резольвента представляется рядом (2.31)). Укажем два типа таких условий: 1) ядро и свободный член уравнения суммируемы с квадратом; 2) ядро ограничено, а свободный член суммируем.

Уравнение Вольтерра первого рода в некоторых случаях можно свести к уравнению Вольтерра второго рода, которое уже решается по методу последовательных приближений. Пусть x и t—вещественные переменные и пусть в уравнении Вольтерра первого рода

$$\int_a^x K(x, t)\, u(t)\, dt = f(x)$$

ядро непрерывно и имеет частную производную по x, также непрерывную. Если существует хотя бы суммируемое решение, то свободный член $f(x)$ необходимо непрерывно дифференцируем. Допуская, что это так, продифференцируем по x данное уравнение:

$$K(x, x)\, u(x) + \int_a^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x}\, u(t)\, dt = f'(x).$$

Если функция $K(x, x)$ нигде не обращается в нуль, то получается уравнение Вольтерра второго рода

$$u(x) + \int_a^x \frac{1}{K(x, x)} \frac{\partial K(x, t)}{\partial x}\, u(t)\, dt = f'(x),$$

решаемое по методу последовательных приближений.

В случае, когда $K(x, x) \equiv 0$, мы опять приходим к уравнению Вольтерра первого рода; применяя только что описанный прием, можно попытаться это новое уравнение свести к уравнению второго рода.

§ 3. Решение уравнений Фредгольма. Вырожденные уравнения и общий случай

3.1. Уравнения с вырожденными ядрами. Фредгольмовское ядро $K(x, t)$ называется *вырожденным*, если его можно представить конечной суммой вида

$$K(x, t) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x)\, b_k(t). \tag{2.32}$$

Функции a_k, так же как и функции b_k, можно считать линейно независимыми, в противном случае число n можно уменьшить.

Уравнение с вырожденным ядром само называется *вырожденным*.

Уравнение с вырожденным ядром легко решается сведением к линейной алгебраической системе. Используя разложение (2.32), представим уравнение (2.5) в виде

$$u(x) - \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k a_k(x) = f(x), \tag{2.33}$$

где c_k — постоянные, определяемые формулами

$$c_k = \int_{\Omega} u(t)\, b_k(t)\, dt. \tag{2.34}$$

Из формулы (2.33) видно, что функция $u(x)$ станет известной, если удастся найти постоянные c_k. Умножив обе части уравнения (2.33) на $b_j(x)$ и проинтегрировав по Ω, получим для этих постоянных систему алгебраических уравнений

$$c_j - \lambda \sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} c_k = f_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.35}$$

где

$$\alpha_{jk} = \int_{\Omega} a_k(x)\, b_j(x)\, dx, \quad f_j = \int_{\Omega} f(x)\, b_j(x)\, dx. \tag{2.36}$$

Определитель системы (2.35) есть многочлен относительно λ степени не выше n. Он отличен от тождественного нуля (он равен единице при $\lambda=0$) и потому имеет не более n различных корней, которые являются характеристическими числами ядра (2.32). Все остальные значения для этого ядра правильные.

Найдя решение системы (2.35) и подставив его в (2.33), получим решение интегрального уравнения в виде

$$u(x)=f(x)+\lambda\sum_{k=1}^{n}c_k a_k(x).$$

Пример 3.1. Рассмотрим уравнение

$$u(x)-\int_0^\pi \sin(x+t)\,u(t)\,dt=f(x). \qquad (2.37)$$

Здесь Ω есть отрезок $[0, \pi]$ числовой оси, x и t — числовые вещественные переменные, меняющиеся на этом отрезке. Уравнение (2.37) вырожденное: его ядро можно представить в виде

$$\sin(x+t)=\sin x\cos t+\cos x\sin t;$$

сопоставив это с формулой (2.32), видим, что

$$n=2,\quad a_1(x)=\sin x,\quad a_2(x)=\cos x,\quad b_1(t)=\cos t,\quad b_2(t)=\sin t.$$

По формуле (2.36) имеем

$$\alpha_{11}=\int_0^\pi \sin x\cos x\,dx=0,$$

$$\alpha_{12}=\int_0^\pi \sin^2 x\,dx=\frac{\pi}{2},$$

$$\alpha_{21}=\int_0^\pi \cos^2 x\,dx=\frac{\pi}{2},$$

$$\alpha_{22}=\int_0^\pi \cos x\sin x\,dx=0;$$

$$f_1=\int_0^\pi f(x)\cos x\,dx,\qquad f_2=\int_0^\pi f(x)\sin x\,dx.$$

В данном случае система (2.35) имеет вид

$$\begin{aligned} c_1 - \frac{\lambda\pi}{2} c_2 &= f_1, \\ -\frac{\lambda\pi}{2} c_1 + c_2 &= f_2. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Ее определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -\lambda\pi/2 \\ -\lambda\pi/2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \lambda^2\pi^2/4$$

имеет корни

$$\lambda_1 = -2/\pi, \quad \lambda_2 = 2/\pi, \tag{2.39}$$

которые являются характеристическими числами уравнения (2.37); все остальные λ правильные. Если λ не совпадает с каким-либо из чисел (2.39), то определитель системы (2.38) отличен от нуля, коэффициенты c_1, c_2 определяются единственным образом и единственное решение уравнения (2.37) дается формулой

$$u(x) = f(x) + c_1 \sin x + c_2 \cos x.$$

Нетрудно найти собственные функции нашего уравнения. Для этого решим однородную систему, соответствующую системе (2.38), в которой λ заменено одним из характеристических значений. При $\lambda = \lambda_1 = -2/\pi$ получаем систему из двух одинаковых уравнений

$$c_1 + c_2 = 0.$$

Отсюда $c_2 = -c_1$ и соответствующая собственная функция

$$u_1(x) = c_1(\sin x - \cos x).$$

Постоянную c_1 можно определить, например, из условия

$$\|u_1\|^2 = \int_0^\pi |u_1^2(x)|\, dx = 1,$$

которое дает $c_1 = 1/\sqrt{\pi}$, и, следовательно,

$$u_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\sin x - \cos x).$$

Аналогично при $\lambda = \lambda_2 = 2/\pi$ получаем $c_1 - c_2 = 0$ и

$$u_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (\sin x + \cos x).$$

Если в неоднородном уравнении (2.37) $\lambda = \lambda_1 = -2/\pi$, то система (2.38) принимает вид

$$c_1 + c_2 = f_1, \quad c_1 + c_2 = f_2;$$

для разрешимости уравнения необходимо и достаточно, чтобы $f_1 = f_2$ — это означает ортогональность функций $f(x)$ и $u_1(x)$. Точно так же, если $\lambda = \lambda_2 = 2/\pi$, то уравнение (2.37) разрешимо тогда и только тогда, когда $f_1 = -f_2$, т. е. когда функции $f(x)$ и $u_2(x)$ ортогональны. Полученные здесь условия ортогональности соответствуют теореме 4 § 1: в нашем случае ядро $K(x, t)$ совпадает со своим сопряженным.

3.2. Общий случай. В общем случае, когда ядро не вырожденное, а параметр λ не мал, решение уравнения (2.5) можно построить следующим образом. Ядро $K(x, t)$ можно разложить в двойной ряд вида

$$K(x, t) = \sum_{k, n=1}^{\infty} A_{kn} \varphi_k(x) \psi_n(t), \tag{2.40}$$

где A_{kn} — постоянные, а φ_k, ψ_k — некоторые функции класса $L_2(\Omega)$, причем равенство (2.40) надлежит понимать в том смысле, что

$$\lim_{N\to\infty} \int_\Omega \int_\Omega \left| K(x, t) - \sum_{k, n=1}^{N} A_{kn} \varphi_k(x) \psi_n(t) \right|^2 dx\, dt = 0. \tag{2.41}$$

Разложение (2.40) можно построить, например, так. Пусть $\varphi_k(x)$ и $\psi_n(x)$, $k, n = 1, 2, \ldots,$ — две последовательности функций, ортонормированные и полные в $L_2(\Omega)$ (при этом допустим и тот случай, когда $\psi_k(x) \equiv \varphi_k(x)$). Тогда система функций

$$\varphi_k(x) \psi_n(t); \qquad k, n = 1, 2, \ldots, \tag{2.42}$$

ортонормирована и полна на прямом произведении $\Omega \times \Omega$, ряд (2.40) есть ряд Фурье функции $K(x, t)$ по системе (2.42) и равенство (2.41) есть следствие полноты упомянутой системы. Коэффициенты A_{kn} в этом случае определяются по хорошо известной формуле для коэффициентов Фурье:

$$A_{kn} = \int_\Omega \int_\Omega K(x, t) \overline{\varphi_k(x)}\, \overline{\psi_n(t)}\, dx\, dt.$$

Пусть разложение (2.40) построено. Будем рассматривать уравнение (2.5) при значениях λ, которые по модулю ограничены некоторым произвольно фиксированным числом R:

$$|\lambda| \leqslant R.$$

Обозначим

$$K''(x, t) = \sum_{k, n=1}^{N} A_{kn}\varphi_k(x)\psi_n(t),$$

$$K'(x, t) = K(x, t) - K''(x, t).$$

В силу равенства (2.41) можно выбрать N столь большим, чтобы

$$B_{K'}^2 = \int_\Omega \int_\Omega |K'(x, t)|^2 dx\, dt \leqslant \frac{1}{4R^2}. \tag{2.43}$$

Уравнение (2.5) представим в виде

$$u(x) - \lambda \int_\Omega K'(x, t)\, u(t)\, dt = \\ = f(x) + \lambda \int_\Omega K''(x, t)\, u(t)\, dt. \tag{2.44}$$

Временно рассматривая правую часть как известную, можно к уравнению (2.44) применить метод последовательных приближений или, что то же, формулу (2.30). Положим

$$\Gamma'(x, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} K'_n(x, t), \tag{2.45}$$

где $K'_n(x, t)$ — ядра, итерированные по отношению к ядру $K'(x, t)$. По формуле (2.30) получаем

$$u(x) - \lambda \int_\Omega \sum_{k, n=1}^{N} A_{kn}\varphi_k(x, \lambda)\psi_n(t)\, u(t)\, dt = f(x, \lambda). \tag{2.46}$$

Здесь

$$\varphi_k(x, \lambda) = \varphi_k(x) + \lambda \int_\Omega \Gamma'(x, \tau; \lambda)\, \varphi_k(\tau)\, d\tau,$$

$$f(x, \lambda) = f(x) + \lambda \int_\Omega \Gamma'(x, \tau; \lambda)\, f(\tau)\, d\tau.$$

Ядро уравнения (2.46) вырожденное. Решая его, как указано выше, получим решение уравнения (2.5).

К уравнению с вырожденным ядром можно прийти и несколько иным способом. В уравнении (2.44) введем новую неизвестную

$$u(x) - \lambda \int_{\Omega} K'(x, t)\, u(t)\, dt = v(x).$$

Решая это по формуле (2.30) относительно старой неизвестной $u(x)$, найдем

$$u(x) = v(x) + \lambda \int_{\Omega} \Gamma'(x, t; \lambda)\, v(t)\, dt. \qquad (2.47)$$

Подставив это в уравнение (2.44), получим новое интегральное уравнение, ядро которого вырожденное:

$$v(x) - \lambda \int_{\Omega} \sum_{k, n=1}^{N} A_{kn} \varphi_k(x)\, \psi_n(t; \lambda)\, v(t)\, dt = f(x), \qquad (2.48)$$

где

$$\psi_n(t; \lambda) = \psi_n(t) + \lambda \int_{\Omega} \Gamma'(\tau, t; \lambda)\, \psi_n(\tau)\, d\tau.$$

Решив уравнение (2.48), можно восстановить решение данного уравнения (2.5) по формуле (2.47).

§ 4. Резольвента Фредгольма

4.1. Резольвента Фредгольма. *Резольвентой Фредгольма* называется функция $\Gamma(x, t; \lambda)$, определенная почти всюду в Ω при всех правильных значениях параметра λ и позволяющая представить решение уравнения (2.5) по формуле (2.30). В § 2 резольвента была построена для достаточно малых значений λ. Прием, описанный в § 3, позволяет построить резольвенту для всех правильных значений λ и дать ее явное представление, годное в любом круге $|\lambda| \leqslant R$ комплексной плоскости λ с заранее фиксированным радиусом R.

Пусть дано разложение ядра

$$K(x, t) = K'(x, t) + K''(x, t),$$

где ядро $K'(x, t)$ удовлетворяет неравенству (2.43), а ядро $K''(x, t)$ вырожденное. Запишем это последнее ядро в виде (2.32) и положим

$$a_k(x, \lambda) = a_k(x) + \lambda \int_\Omega \Gamma'(x, t; \lambda)\, a_k(t)\, dt,$$

$$b_k(x, \lambda) = b_k(x) + \lambda \int_\Omega \Gamma'(t, x; \lambda)\, b_k(t)\, dt.$$

Здесь $\Gamma'(x, t; \lambda)$ — резольвента ядра $K'(x, t)$, определяемая формулой (2.45).

Далее, обозначим

$$D_R(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda\alpha_{11}(\lambda) & -\lambda\alpha_{12}(\lambda) & \ldots & -\lambda\alpha_{1n}(\lambda) \\ -\lambda\alpha_{21}(\lambda) & 1 - \lambda\alpha_{22}(\lambda) & \ldots & -\lambda\alpha_{2n}(\lambda) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\lambda\alpha_{n1}(\lambda) & -\lambda\alpha_{n2}(\lambda) & \ldots & 1 - \lambda\alpha_{nn}(\lambda) \end{vmatrix},$$

где

$$\alpha_{jk}(\lambda) = \int_\Omega a_k(x)\, b_j(x, \lambda)\, dx,$$

и через $\Delta_{jk}(x)$ — алгебраическое дополнение того элемента определителя $D_R(\lambda)$, который стоит на пересечении j-го столбца и k-й строки. В этих обозначениях справедливо следующее представление резольвенты:

$$\Gamma(x, t; \lambda) = \Gamma'(x, t; \lambda) + \\ + \frac{1}{D_R(\lambda)} \sum_{j, k=1}^{n} \Delta_{jk}(\lambda)\, a_j(x, \lambda)\, b_k(t, \lambda). \quad (2.49)$$

4.2. Свойства резольвенты. Перечислим важнейшие свойства резольвенты.

1. Резольвента единственна.

2. Если ядро удовлетворяет неравенству (2.2), то при любом правильном λ резольвента удовлетворяет тому же неравенству. Если множество Ω ограниченное и замкнутое и ядро на этом множестве непрерывно, то резольвента также непрерывна на Ω при любом правильном λ.

3. Резольвента есть мероморфная функция от λ на всей λ-плоскости.

4. Полюсы резольвенты совпадают с характеристическими числами ядра.

5. При малых по модулю значениях λ резольвента определяется формулой (2.31).

6. Резольвента удовлетворяет интегральным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma(x,\ t;\ \lambda) &= K(x,\ t) + \lambda \int_\Omega K(x,\ \tau)\,\Gamma(\tau,\ t;\ \lambda)\,d\tau, \\ \Gamma(x,\ t;\ \lambda) &= K(x,\ t) + \lambda \int_\Omega K(\tau,\ t)\,\Gamma(x,\ \tau;\ \lambda)\,d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{2.50}$$

7. Если резольвента $\Gamma(x,\ t;\ \lambda)$ является ядром нового интегрального уравнения с параметром μ, то резольвента нового уравнения равна $\Gamma(x,\ t;\ \lambda+\mu)$.

§ 5. Решение уравнений Фредгольма. Ряды Фредгольма

Укажем еще один способ построения точного решения уравнения Фредгольма. Способ этот, предложенный самим Фредгольмом, основан на следующих соображениях.

5.1. Ряды Фредгольма. Определитель и миноры Фредгольма. Будучи мероморфной функцией, резольвента может быть представлена как частное некоторых двух целых функций от λ. При этом полюсы резольвенты — характеристические числа данного ядра — не зависят от x и t, поэтому можно добиться того, чтобы знаменатель в представлении резольвенты зависел только от λ. Таким образом, резольвента должна иметь вид

$$\Gamma(x,\ t;\ \lambda) = \frac{D(x,\ t;\ \lambda)}{D(\lambda)}, \tag{2.51}$$

где $D(x,\ t;\ \lambda)$ и $D(\lambda)$ суть целые функции от λ. Если эти функции удастся построить, то резольвента станет известной и решение интегрального уравнения можно будет построить по формуле (2.30).

Для числителя и знаменателя дроби (2.51) Фредгольм дал представление в виде следующих рядов, называемых теперь *рядами Фредгольма*:

$$D(x, t; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n(x, t) \lambda^n, \tag{2.52}$$

$$D(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} c_n \lambda^n. \tag{2.53}$$

Здесь

$$c_0 = 1, \quad B_0(x, t) = K(x, t), \tag{2.54}$$

$$c_n = \int_\Omega B_{n-1}(x, x)\, dx, \qquad n > 0, \tag{2.55}$$

$$B_n(x, t) = \int_\Omega \ldots \int_\Omega K\begin{pmatrix} x, & t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \\ t, & t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \end{pmatrix} dt_1\, dt_2 \ldots dt_n, \tag{2.56}$$

где принято обозначение

$$K\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_p \\ t_1, & t_2, & \ldots, & t_p \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x_1, t_1) & K(x_1, t_2) & \ldots & K(x_1, t_p) \\ K(x_2, t_1) & K(x_2, t_2) & \ldots & K(x_2, t_p) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K(x_p, t_1) & K(x_p, t_2) & \ldots & K(x_p, t_p) \end{vmatrix}. \tag{2.57}$$

Если ядро не непрерывно, то интеграл

$$\int_\Omega K(x, x)\, dx,$$

определяющий коэффициент c_1, может потерять смысл. Эту трудность можно обойти таким простым способом: достаточно приравнять $K(x, x)$ любой функции от x, суммируемой в Ω; можно, например, положить $K(x, x) = 0$, тогда и $c_1 = 0$.

Если ядро $K(x, t)$ и множество Ω ограничены, то сходимость рядов Фредгольма для всех конечных λ просто доказывается с помощью теоремы Адамара об оценке определителя (см., например, [8], [15], [23]). Т. Карлеман [29] доказал, что ряды Фредгольма (2.52) и (2.53) представляют целые функции от λ и в том случае, когда Ω — ограниченное множество, а ядро удовлетворяет неравенству (2.2). Другое доказательство, пригодное и для случая неограниченного множества, дано в [19].

Формула (2.56) неудобна, так как она требует многократного интегрирования определителей высоких порядков; удобнее формула

$$B_n(x,\ t) = c_n K(x,\ t) - n \int_\Omega K(x,\ \tau) B_{n-1}(\tau,\ t)\,d\tau, \tag{2.58}$$

которая вместе с формулами (2.54) и (2.55) позволяет рекуррентно вычислить коэффициенты $B_n(x,\ t)$ и c_n.

Заслуживает быть отмеченной формула

$$\frac{D'(\lambda)}{D(\lambda)} = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \lambda^n, \tag{2.59}$$

где

$$A_n = \int_\Omega K_n(x,\ x)\,dx, \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

суть введенные выше следы ядра $K(x,\ t)$. Ряд (2.59) сходится, если выполнено условие (2.25).

Функция $D(\lambda)$ называется *определителем Фредгольма*, функция $D(x,\ t;\ \lambda)$ — *первым минором Фредгольма*.

Миноры Фредгольма порядка p определяются формулой

$$D\left(\begin{matrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_p \\ t_1, & t_2, & \ldots, & t_p \end{matrix}\,\middle|\,\lambda\right) = K\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_p \\ t_1, & t_2, & \ldots, & t_p \end{pmatrix} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \lambda^n \int_\Omega \ldots \int_\Omega K\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_p, & \tau_1, & \ldots, & \tau_n \\ t_1, & t_2, & \ldots, & t_p, & \tau_1, & \ldots, & \tau_n \end{pmatrix} d\tau_1 \ldots d\tau_n. \tag{2.60}$$

Очевидно, $D(x,\ t;\ \lambda) = D\left(\begin{matrix} x \\ t \end{matrix}\,\middle|\,\lambda\right)$.

При любом p и любых $x_k,\ t_k \in \Omega$ ряд (2.60) представляет собой целую функцию от λ; это утверждение доказано во всяком случае для ядер, ограниченных и измеримых в конечной области Ω. Такие именно ядра мы имеем в виду ниже.

5.2. Выражение собственных функций ядра через миноры Фредгольма. Через миноры Фредгольма можно выразить собственные функции данного ядра. Пусть λ_0 — характеристическое число ядра $K(x, t)$ и пусть при $\lambda = \lambda_0$ все миноры порядка, меньшего p, тождественно равны нулю, а минор порядка p отличен от тождественного нуля.

Пусть фиксированные точки $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_p^0, t_1^0, t_2^0, \ldots, t_p^0$ таковы, что

$$D\left(\begin{array}{cccc|c} x_1^0, & x_2^0, & \ldots, & x_p^0 & \multirow{2}{*}{λ_0} \\ t_1^0, & t_2^0, & \ldots, & t_p^0 & \end{array}\right) \neq 0. \tag{2.61}$$

Тогда функции

$$u_k(x) = D\left(\begin{array}{ccccccc|c} x_1^0, & \ldots, & x_{k-1}^0, & x, & x_{k+1}^0, & \ldots, & x_p^0 & \multirow{2}{*}{λ_0} \\ t_1^0, & \ldots, & t_{k-1}^0, & t_k^0, & t_{k+1}^0, & \ldots, & t_p^0 & \end{array}\right), \tag{2.62}$$
$$k = 1, 2, \ldots, p,$$

суть линейно независимые собственные функции ядра $K(x, t)$, соответствующие характеристическому числу λ_0; не существует собственных функций ядра $K(x, t)$, соответствующих характеристическому числу λ_0 и линейно независимых с функциями (2.62). Короче это формулируется так: функции (2.62) образуют полную систему собственных функций ядра $K(x, t)$, соответствующих характеристическому числу λ_0.

Функции $v_k(x)$, определяемые формулой

$$\overline{v_k(x)} = D\left(\begin{array}{ccccccc|c} x_1^0, & \ldots, & x_{k-1}^0, & x_k^0, & x_{k+1}^0, & \ldots, & x_p^0 & \multirow{2}{*}{λ_0} \\ t_1^0, & \ldots, & t_{k-1}^0, & x, & t_{k+1}^0, & \ldots, & t_p^0 & \end{array}\right), \tag{2.63}$$
$$k = 1, 2, \ldots, p,$$

образуют полную систему собственных функций сопряженного ядра $K^*(x, t) = \overline{K(t, x)}$, соответствующих характеристическому числу $\overline{\lambda}_0$ этого ядра.

§ 6. Уравнения со слабой особенностью

6.1. Ограниченность интегрального оператора со слабой особенностью. Для уравнения со слабой особенностью *) верны все четыре теоремы Фредгольма, приведенные в § 1 настоящей главы.

Интегральный оператор со слабой особенностью ограничен в $L_2(\Omega)$. Если Ω — область m-мерного евклидова

*) Определение см. в гл. I, § 1, п. 3.

пространства, оператор определен формулой (1.7) при $d\mu(t)=dt$, а ядро определено формулой (1.11), то

$$\|K\| \leqslant \frac{C\omega_m h^{m-\alpha}}{m-\alpha}. \tag{2.64}$$

Здесь

$$\omega_m = \frac{2\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}$$

есть площадь поверхности сферы радиуса единица в m-мерном пространстве, h — диаметр области Ω (т. е. верхняя грань всех расстояний между точками этой области), $C = \sup|A(x, t)|$.

Пусть K и L — два оператора со слабой особенностью, причем ядра $K(x, t)$ и $L(x, t)$ этих операторов имеют оценки

$$|K(x, t)| \leqslant \frac{C_1}{r^\alpha}, \quad |L(x, t)| \leqslant \frac{C_2}{r^\beta}; \quad C_1, \ C_2 = \text{const}. \tag{2.65}$$

Тогда ядро $M(x, t)$ произведения KL операторов K и L (это ядро определяется формулой (2.15)) имеет следующую оценку:

$$|M(x, t)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{C}{r^{\alpha+\beta-m}}, & \alpha+\beta > m, \\ C\ln\dfrac{h}{r}+C', & \alpha+\beta = m, \\ C, & \alpha+\beta < m. \end{cases} \tag{2.66}$$

6.2. Итерации ядра со слабой особенностью. Пусть $K(x, t)$ — ядро со слабой особенностью и с оценкой (2.65). Обозначим через $K_n(x, t)$ его итерированные ядра и через n_0 — наименьшее целое число, большее чем $\frac{m}{2(m-\alpha)}$; очевидно,

$$n_0 = \left[\frac{m}{2(m-\alpha)}\right]+1. \tag{2.67}$$

Все итерированные ядра с номерами $n \geqslant n_0$ фредгольмовские. Если $n \geqslant n_1$, где

$$n_1 = \left[\frac{m}{m-\alpha}\right]+1,$$

то итерированные ядра $K_n(x, t)$ просто ограничены.

Теорема Шура для ядра со слабой особенностью (1.11) принимает такой вид: *если* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — *характеристические числа этого ядра, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_k|^{2n_0}} \leqslant \int_{\Omega} \int_{\Omega} |K_{n_0}(x, t)|^2 \, dx \, dt. \tag{2.68}$$

6.3. Метод последовательных приближений. Уравнения со слабой особенностью можно решать по методу последовательных приближений при малых значениях параметра. Если Ω — область m-мерного евклидова пространства, то последовательные приближения сходятся при условии

$$|\lambda| < \frac{m - \alpha}{C\omega_m h^{m-\alpha}}. \tag{2.69}$$

Если Ω — замкнутая область, а функции $f(x)$ и $A(x, t) = r^{\alpha} K(x, t)$ непрерывны в Ω, то любое решение уравнения со слабой особенностью непрерывно в Ω.

§ 7. Системы интегральных уравнений

7.1. Векторная форма записи систем интегральных уравнений. Будем рассматривать системы интегральных уравнений вида

$$u_i(x) - \lambda \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} K_{ij}(x, t) \, u_j(t) \, d\mu(t) = f_i(x) \tag{2.70}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Введя n-компонентные векторы

$$u(x) = (u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)),$$
$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$$

и матрицу n-го порядка $K(x, t)$ с элементами $K_{ij}(x, t)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$, можно систему (2.70) записать в виде одного векторного уравнения, по форме совпадающего с уравнением (2.1).

7.2. Методы решения для случая фредгольмовских ядер. Если ядра $K_{ij}(x, t)$ фредгольмовские или имеют слабую особенность, а $f_i \in L_2(\Omega)$, то для системы (2.70) верны все теоремы Фредгольма. Применимы методы решения интегральных уравнений, изложенные в §§ 2—5 настоящей главы. В частности, при малых λ сходится метод последовательных приближений; если ядра $K_{ij}(x, t)$ фредгольмовские, то для сходимости достаточно, чтобы

$$|\lambda| \leqslant \left\{ \sum_{i, j=1}^{n} B_{ij}^2 \right\}^{-1}; \qquad B_{ij}^2 = \int_\Omega \int_\Omega |K_{ij}(x, t)|^2 d\mu(x)\, d\mu(t). \tag{2.71}$$

Можно указать и более широкое условие сходимости. Обозначим через $\mathfrak{B}$ матрицу элементов B_{ij}, через $\mathfrak{B}^*$ сопряженную с $\mathfrak{B}$ матрицу и через σ^2 наибольшее собственное число матрицы $\mathfrak{B}^*\mathfrak{B}$. Последовательные приближения для системы (2.70) сходятся, если

$$|\lambda| < \sigma^{-1}. \tag{2.72}$$

7.3. Методы решения для случая ядер со слабыми особенностями. Пусть теперь ядра $K_{ij}(x, t)$ имеют слабую особенность, причем

$$|K_{ij}(x, t)| \leqslant \frac{C_{ij}}{r^{\alpha_{ij}}}; \qquad C_{ij} = \text{const}, \qquad 0 \leqslant \alpha_{ij} < m.$$

На этот раз обозначим через $\mathfrak{B}$ матрицу элементов $\dfrac{C_{ij}\omega_m h^{m-\alpha_{ij}}}{m-\alpha_{ij}}$; по-прежнему пусть $\mathfrak{B}^*$ — матрица, сопряженная с $\mathfrak{B}$, и σ^2 — наибольшее собственное число матрицы $\mathfrak{B}^*\mathfrak{B}$. Условие (2.72) остается достаточным для сходимости последовательных приближений и в данном случае. В частности, если C_{ij} и α_{ij} одинаковы для всех индексов i, j, так что $C_{ij} = C$, $\alpha_{ij} = \alpha$, то условие (2.72) принимает вид

$$|\lambda| < \frac{m-\alpha}{Cn\omega_m h^{m-\alpha}}. \tag{2.73}$$

Если ядра $K_{ij}(x, t)$ вольтерровские, то последовательные приближения для системы (2.69) сходятся при любом значении параметра λ.

§ 8. Строение резольвенты в окрестности характеристического числа

Вопросы, затронутые в настоящем параграфе, были исследованы Э. Гурса и подробно изложены в [8]; исследование для уравнений более общих, чем фредгольмовские, проведено Ф. Рисом [24] в 1916 г. и, в последнее время, С. Н. Крачковским и М. А. Гольдманом [2]—[4], [9], [11]—[13], И. Ц. Гохбергом, М. Г. Крейном, А. С. Маркусом [5]—[7], [16]—[17].

8.1. Ортогональные ядра. Два фредгольмовских ядра $K(x, t)$ и $L(x, t)$ называются *ортогональными в области* Ω, если

$$\int_\Omega K(x, s) L(s, t)\,ds \equiv 0, \qquad \int_\Omega L(x, s) K(s, t)\,ds \equiv 0. \tag{2.74}$$

Иначе говоря, $K(x, t)$ и $L(x, t)$ ортогональны, если $\boldsymbol{KL} = \boldsymbol{LK} = 0$, где $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{L}$ — фредгольмовские операторы с ядрами $K(x, t)$ и $L(x, t)$ соответственно.

Обозначим через $\Gamma_K(x, t; \lambda)$, $\Gamma_L(x, t; \lambda)$, $\Gamma_{K+L}(x, t; \lambda)$ резольвенты ядер $K(x, t)$, $L(x, t)$ и $K(x, t) + L(x, t)$ соответственно. Если ядра $K(x, t)$ и $L(x, t)$ ортогональны, то: *а*) $\Gamma_K(x, t; \lambda)$ и $\Gamma_L(x, t; \mu)$ ортогональны при любых значениях параметров λ и μ; *б*) $\Gamma_{K+L}(x, t; \lambda) = \Gamma_K(x, t; \lambda) + \Gamma_L(x, t; \lambda)$.

Пусть λ_0 — характеристическое число ядра $K(x, t)$. Тогда λ_0 есть полюс резольвенты этого ядра, которую мы теперь обозначим через $\Gamma(x, t; \lambda)$. Пусть n — кратность полюса λ_0. Тогда в окрестности точки λ_0 справедливо разложение

$$\Gamma(x, t; \lambda) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k(x, t)}{(\lambda - \lambda_0)^k} + H(x, t; \lambda),$$

где функция $H(x, t; \lambda)$ регулярна при $\lambda = \lambda_0$. Полагая для краткости

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k(x, t)}{(\lambda - \lambda_0)^k} = \gamma(x, t; \lambda), \tag{2.75}$$

имеем

$$\Gamma(x, t; \lambda) = \gamma(x, t; \lambda) + H(x, t; \lambda). \tag{2.76}$$

Оказывается, что при любых значениях λ и μ ядра $\gamma(x, t; \lambda)$ и $H(x, t; \mu)$ ортогональны.

8.2. Главные ядра. Обозначим

$$\gamma(x, t; 0) = k(x, t), \qquad H(x, t; 0) = H(x, t). \tag{2.77}$$

Тогда ядра $k(x, t)$ и $H(x, t)$ ортогональны и

$$K(x, t) = k(x, t) + H(x, t). \tag{2.78}$$

Если $k(x, t)$ и $H(x, t)$ рассматривать как ядра, то их резольвенты суть $\gamma(x, t; \lambda)$ и $H(x, t; \lambda)$ соответственно. Ядро $k(x, t)$ называется *главным ядром*, соответствующим характеристическому числу λ_0. Главные ядра, соответствующие различным характеристическим числам, попарно ортогональны.

Все главные ядра — вырожденные. Таким образом, главное ядро $k(x, t)$, соответствующее полюсу λ_0 резольвенты, имеет вид

$$k(x, t) = \sum_{j=1}^{l} \varphi_j(x) \overline{\psi_j(t)}; \tag{2.79}$$

функции $\varphi_j(x)$, так же как и функции $\psi_j(t)$, можно считать линейно независимыми.

8.3. Канонические ядра. Если функции $\varphi_j(x)$ подвергнуть линейному преобразованию, то вид формулы (2.79) не изменится. Можно так выбрать это преобразование, чтобы разложение (2.79) приняло *каноническую форму*. Поясним подробнее последнее утверждение. Функции $\varphi_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, l)$ распадаются на несколько групп:

$$\begin{array}{cccc} \varphi_1^{(1)}, & \varphi_2^{(1)}, & \ldots, & \varphi_{p_1}^{(1)}; \\ \varphi_1^{(2)}, & \varphi_2^{(2)}, & \ldots, & \varphi_{p_2}^{(2)}; \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_1^{(q)}, & \varphi_2^{(q)}, & \ldots, & \varphi_{p_q}^{(q)}, \end{array} \tag{2.80}$$

таких, что

$$\lambda_0 K \varphi_1^{(s)} = \varphi_1^{(s)},$$

$$\lambda_0 K \varphi_2^{(s)} = \varphi_1^{(s)} + \varphi_2^{(s)}, \quad \ldots, \quad \lambda_0 K \varphi_{p_s}^{(s)} = \varphi_{p_s - 1}^{(s)} + \varphi_{p_s}^{(s)}. \tag{2.81}$$

Функции $\varphi_1^{(s)}(x)$, $s=1, 2, \ldots, q$, образуют полную систему собственных функций ядра $K(x, t)$, соответствующих характеристическому числу λ_0; функции $\varphi_j^{(s)}(x)$ удовлетворяют уравнению

$$(I-\lambda K)^j \varphi_j^{(s)}=0 \qquad (j=1, 2, \ldots, p_s). \tag{2.82}$$

Функции $\varphi_j^{(s)}(x)$ называются *нуль-элементами* ядра $K(x, t)$, соответствующими характеристическому числу λ_0.

Таблица (2.80) позволяет представить главное ядро в виде

$$k(x, t)=\sum_{s=1}^{q} k^{(s)}(x, t), \tag{2.83}$$

где $k^{(s)}(x, t)$ имеет вид

$$k^{(s)}(x, t)=\sum_{j=1}^{p_s} \varphi_j^{(s)}(x)\overline{\psi_j^{(s)}(t)}. \tag{2.84}$$

Ядра $k^{(s)}(x, t)$ называются *каноническими* ядрами, соответствующими характеристическому числу λ_0. Канонические ядра попарно ортогональны. Функции $\psi_j^{(s)}(x)$ суть нуль-элементы сопряженного ядра $K^*(x, t)$, соответствующие характеристическому числу $\overline{\lambda}_0$; функции $\psi_1^{(s)}(x)$ образуют полную систему собственных функций этого ядра, соответствующих тому же числу $\overline{\lambda}_0$.

Резольвента канонического ядра $k^{(s)}(x, t)$ имеет вид

$$\gamma^{(s)}(x, t; \lambda)=\sum_{h=1}^{p_s}\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^{h-1}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^{-h}\sum_{j=1}^{p_s-h} \varphi_j(x)\overline{\psi_{j+h}(t)}; \tag{2.85}$$

так как канонические ядра попарно ортогональны, то резольвента главного ядра

$$\gamma(x, t; \lambda)=\sum_{s=1}^{q} \gamma^{(s)}(x, t; \lambda). \tag{2.86}$$

С каждым характеристическим числом λ_0 связаны три натуральных числа: 1) r — ранг этого числа, т. е. число соответствующих ему линейно независимых собственных функций; 2) n — порядок полюса, которым является λ_0 для резольвенты; 3) кратность ν числа λ_0 как нуля определителя Фредгольма $D(\lambda)$. Эти три числа связаны с введенными выше числами следующими соотношениями:

$$r = q, \qquad n = \max_s p_s, \qquad \nu = \sum_s p_s.$$

§ 9. О порядке роста собственных чисел

Порядок роста собственных чисел в общем случае фредгольмовского ядра определяется теоремой Шура (формула (2.22)). При более специальных предположениях о ядре можно высказать более определенные суждения о росте собственных чисел. Ниже приводятся некоторые из результатов А. О. Гельфонда *), относящиеся к этому кругу идей.

Пусть x и t — вещественные переменные и Ω есть отрезок $[0, 1]$. Тогда ядро $K(x, t)$ есть функция двух вещественных переменных, определенная в квадрате $0 \leqslant x, t \leqslant 1$. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 9.1. *Пусть в квадрате* $0 \leqslant x, t \leqslant 1$ *ядро* $K(x, t)$ *имеет ограниченные производные по* t *до порядка* m *включительно. Если* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — *характеристические числа ядра* $K(x, t)$, *то сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^{\rho+\varepsilon}}, \qquad \rho = \frac{2}{2m+1}, \tag{2.87}$$

где ε — *любое положительное число. При этом определитель Фредгольма есть целая функция порядка не выше* ρ.

Более сильный результат удается установить для ядер, аналитических по t. Именно, верна следующая теорема.

Теорема 9.2. *Пусть в окрестности любой точки* $\tau \in [0, 1]$ *имеет место разложение*

$$K(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x, \tau)(t-\tau)^n, \tag{2.88}$$

причем

$$|\varphi_n(x, \tau)| \leqslant c\rho^n, \tag{2.89}$$

где положительные постоянные c *и* ρ *не зависят ни*

*) См. написанное А. О. Гельфондом «Приложение» к книге [15].

от x, ни от τ. Тогда характеристические числа ядра $K(x, t)$ возрастают не медленнее некоторой геометрической прогрессии.

Приведем еще одну теорему, относящуюся к ядрам, которые могут быть неограниченными вблизи сторон квадрата $0 \leqslant x,\ t \leqslant 1$.

Теорема 9.3. *Пусть ядро $K(x, t)$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *существуют такие постоянные γ и δ, причем $\gamma > 1$ и $0 < \delta \leqslant \frac{1}{2}$, что*

$$|K(x, t)| \leqslant \frac{\gamma}{[xt(1-x)(1-t)]^{\frac{1}{2}-\delta}};$$

2) *существует такая постоянная $q \geqslant 1$, что внутри луночки*

$$\left| z - \frac{1}{2} \pm \operatorname{ctg} \frac{\pi}{2q} \right| < \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{2q}}; \qquad z = x + it,$$

ядро $K(x, t)$ есть голоморфная функция от z;

3) *пусть $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$. В замкнутой области, контур которой определен уравнением*

$$z = \frac{[1 + (1 - 2\varepsilon)\, e^{i\varphi}]^{1/q}}{[1 + (1 - 2\varepsilon)\, e^{i\varphi}]^{1/q} + [1 - (1 - 2\varepsilon)\, e^{i\varphi}]^{1/q}},$$

выполняется неравенство

$$|K(x, t)| < \frac{\gamma}{[x(1-x)]^{1/2-\delta}\, \varepsilon^{p/q}},$$

где p — положительная постоянная. Тогда характеристические числа ядра $K(x, t)$ удовлетворяют неравенству

$$|\lambda_n| > ab^{\sqrt{n}},$$

где a и b — некоторые постоянные, причем $a > 0$, $b > 1$.

ГЛАВА III

СИММЕТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ *)

§ 1. Основные свойства

1.1. Симметричные ядра. В настоящей главе мы ограничимся симметричными уравнениями с ядрами фредгольмовского типа. Уравнения более общего типа будут рассмотрены в гл. V. Мы полностью сохраняем здесь понятия, терминологию и обозначения гл. II.

Фредгольмовское ядро $K(x, t)$ называется *симметричным*, если оно совпадает со своим сопряженным:

$$K(x, t) = K^*(x, t) = \overline{K(t, x)}; \tag{3.1}$$

вещественное ядро симметрично, если

$$K(x, t) = K(t, x). \tag{3.2}$$

Пример 1.1. Пусть Ω — отрезок $[a, b]$ вещественной оси. Ядра $x+t$, x^2+t^2, $i(x-t)$ симметричны; ядро $i(x+t)$ несимметрично.

Пример 1.2. Пусть Ω — m-мерная конечная область и $r = |x-t|$. Ядро $K(x, t) = r^{-\lambda}$, $0 \leqslant \lambda < m/2$, — фредгольмовское симметричное. Симметрично и ядро $K(x, t) = \ln \frac{1}{r}$.

Если ядро симметрично, то все его итерированные ядра также симметричны.

Если $K(x, t)$ симметричное ядро и K — соответствующий оператор Фредгольма (формула (2.7)), то он совпадает со своим сопряженным. Операторы, обладающие последним свой-

---

*) Теория симметричных уравнений подробно изложена в книгах, указанных в сноске на стр. 36.

ством, называются *самосопряженными*; тождество (2.14) для них принимает более простой вид

$$(Ku, v) = (u, Kv); \qquad u, v \in L_2(\Omega). \tag{3.3}$$

Интегральное уравнение с симметричным ядром само называется *симметричным*. Оператор Фредгольма с симметричным ядром мы будем называть *оператором Гильберта — Шмидта*.

1.2. Основные теоремы о симметричных ядрах.

Теорема 1.1. *Симметричное ядро, отличное от тождественного нуля, имеет по крайней мере одно характеристическое число.*

Теорема 1.2. *Характеристические числа симметричного ядра вещественны.*

Теорема 1.3. *Собственные функции симметричного ядра, соответствующие различным характеристическим числам, ортогональны.*

1.3. Системы характеристических чисел и собственных функций. Может случиться, что одному и тому же характеристическому числу соответствует несколько линейно независимых собственных функций; применив к ним процесс ортогонализации (см. ниже), можно эти функции сделать попарно ортогональными. Далее, любую собственную функцию можно нормировать, — для этого достаточно разделить эту функцию на ее норму. Из сказанного следует, что *совокупность собственных функций симметричного ядра можно считать ортонормированной.*

Характеристические числа и собственные функции симметричного ядра принято выписывать в виде последовательностей

$$\begin{gathered} \lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_n, \quad \ldots; \\ u_1(x), \quad u_2(x), \quad \ldots, \quad u_n(x), \quad \ldots, \end{gathered} \tag{3.4}$$

с соблюдением следующих правил.

1) Числа λ выписываются в порядке возрастания их абсолютных величин, так что $|\lambda_n| \leqslant |\lambda_{n+1}|$.

2) Каждое характеристическое число выписывается столько раз, каков его ранг (см. стр. 38); таким образом, в записи (3.4) одно и то же число λ_k может встретиться несколько раз, но при этом каждому такому числу соответствует в записи (3.4) только одна собственная функция.

3) Собственные функции $u_n(x)$ нормированы и попарно ортогональны; короче это формулируют так: система $\{u_n(x)\}$ ортонормирована.

Последовательности (3.4) принято называть системой характеристических чисел и собственных функций данного симметричного ядра.

1.4. Процесс ортогонализации. Пусть дана конечная или счетная последовательность функций из $L_2(\Omega)$

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x), \quad \ldots$$

таких, что $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ линейно независимы при любом n; если число функций конечно, то мы просто потребуем, чтобы они были линейно независимы. Процесс ортогонализации состоит в построении ортонормированной системы функций

$$\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_n(x), \ldots$$

по следующему алгорифму:

$$\psi_1(x) = \varphi_1(x), \quad \omega_1(x) = \frac{\psi_1(x)}{\|\psi_1\|};$$

$$\psi_n(x) = \varphi_n(x) - \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi_n, \omega_k)\, \omega_k(x),$$

$$\omega_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{\|\psi_n\|}; \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Заметим, что при любом n функция ω_n линейно выражается через $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ и, наоборот, функция φ_n линейно выражается через $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$.

§ 2. Ряд Гильберта — Шмидта и следствия из него

2.1. Теорема Гильберта — Шмидта. Пусть K — оператор Гильберта — Шмидта. Пусть система характеристических чисел и собственных функций ядра $K(x, t)$ этого оператора дана записью (3.4). Пусть, наконец, $g(x)$ — функция, принадлежащая области значений оператора K, так что

$$g(x) = (Kh)(x) = \int_{\Omega} K(x, t)\, h(t)\, dt; \quad h \in L_2(\Omega). \tag{3.5}$$

Тогда

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(h, u_n)}{\lambda_n} u_n(x), \tag{3.6}$$

причем ряд (3.6) сходится в среднем в Ω. Если ядро $K(x, t)$ удовлетворяет неравенству (2.24), то ряд (3.6) равномерно сходится в Ω.

Ряд (3.6) называется *рядом Гильберта — Шмидта*; он представляет собой ортогональное разложение функции $g(x)$ по собственным функциям ядра $K(x, t)$. Теорему Гильберта — Шмидта можно сформулировать так:

Система собственных функций оператора Гильберта — Шмидта полна в области значений этого оператора.

В частности, если область значений некоторого оператора Гильберта — Шмидта совпадает с $L_2(\Omega)$, то система его собственных функций в $L_2(\Omega)$ полна.

2.2. Решение симметричного интегрального уравнения. Интегральное уравнение (2.5) просто решается, если его ядро симметрично и если известна система (3.4) его характеристических чисел и собственных функций. Именно, если λ — правильное число, то

$$u(x) = f(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, u_n)}{\lambda_n - \lambda} u_n(x). \tag{3.7}$$

Формуле (3.7) можно придать смысл и для λ характеристического. Пусть $\lambda = \lambda_{p+1} = \lambda_{p+2} = \ldots = \lambda_q$. Тогда для разрешимости уравнения (2.5) необходимо и достаточно (теорема 1.4 гл. II), чтобы

$$(f, u_n) = 0 \quad (n = p+1, \ p+2, \ \ldots, \ q).$$

Допустим, что эти условия выполнены. Тогда коэффициенты ряда (3.7) с только что названными номерами принимают форму $\frac{0}{0}$. Если заменить эти коэффициенты произвольными числами, то формула (3.7) даст решение симметричного уравнения (2.5) и в случае характеристического λ.

2.3. Резольвента симметричного ядра. Из формулы (3.7) легко извлечь выражение для резольвенты симметричного ядра:

$$\Gamma(x, t; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x)\overline{u_n(t)}}{\lambda_n - \lambda}. \tag{3.8}$$

При правильных значениях λ ряд (3.8) сходится в среднем по обеим переменным x и t.

2.4. Билинейный ряд для ядра и его итераций. При $\lambda = 0$ формула (3.8) переходит в *билинейный ряд* для ядра $K(x, t)$:

$$K(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) \overline{u_n(t)}}{\lambda_n}. \tag{3.9}$$

Билинейный ряд для итерированных ядер имеет вид

$$K_p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n(x) \overline{u_n(t)}}{\lambda_n^p}. \tag{3.10}$$

Из формулы (3.10) следует, между прочим, что система характеристических чисел и собственных функций итерированного ядра $K_p(x, t)$ имеет вид

$$\begin{gathered} \lambda_1^p, \lambda_2^p, \ldots, \lambda_n^p, \ldots, \\ u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots \end{gathered} \tag{3.11}$$

Из той же формулы (3.10) вытекает равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^{2p}} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} |K_p(x, t)|^2 \, dx \, dt. \tag{3.12}$$

В частности, при $p = 1$ получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} = \int_{\Omega} \int_{\Omega} |K(x, t)|^2 \, dx \, dt. \tag{3.13}$$

Этот случай был отмечен в § 1 гл. II.

Отметим одно следствие из формулы (3.9): симметричное ядро является вырожденным тогда и только тогда, когда оно имеет конечное число характеристических чисел или, что то же, конечное число ортонормированных собственных функций.

Коротко скажем о характере сходимости билинейных рядов (3.9) и (3.10). В общем случае эти ряды сходятся в среднем по обеим переменным. Если ядро $K(x, t)$ удовлетворяет неравенству (2.24), то при $p > 2$ ряд (3.10) сходится равномерно по обеим переменным, а при $p=2$ — равномерно по одной из переменных при почти любом фиксированном значении другой переменной. Если все характеристические числа положительны (в этом случае ядро $K(x, t)$ называется положительным, см. ниже), само ядро непрерывно, а область Ω конечная, то билинейный ряд (3.9) сходится равномерно по обеим переменным (теорема Мерсера)*). В частности, если ядро непрерывно, а область Ω конечная, то при $p=2$ ряд (3.10) сходится равномерно по обеим переменным.

§ 3. Классификация симметричных ядер

Симметричное ядро $K(x, t)$, заданное в области Ω, называется *полным* (иногда *замкнутым*), если система его собственных функций полна в $L_2(\Omega)$; в противном случае оно называется *неполным*.

Симметричное ядро называется *положительным* (соответственно *отрицательным*), если все его характеристические числа положительны (соответственно отрицательны). Полное положительное ядро называется *положительно определенным*; аналогично определяется *отрицательно определенное* ядро.

Можно дать другое (равносильное) определение положительных (и отрицательных) ядер. Симметричное ядро $K(x, t)$, заданное в области Ω, называется положительным, если так называемая *квадратичная форма* этого ядра, равная

$$(Ku, u)=\int_{\Omega}\int_{\Omega} K(x, t)\overline{u(x)}\,u(t)\,dx\,dt, \tag{3.14}$$

неотрицательна, какова бы ни была функция $u \in L_2(\Omega)$. То же ядро называется положительно определенным, если квадратичная форма (3.14) положительна при любой функции $u \in L_2(\Omega)$, отличной от тождественного нуля.

Несимметричное ядро $H(x, t)$, заданное в области Ω, называется *симметризируемым слева*, если существует такое положительно определенное ядро $G(x, t)$, что ядро

$$\int_{\Omega} G(x, s)H(s, t)\,ds \tag{3.15}$$

*) См., например, [22] или [23].

симметрично. Аналогично определяется ядро, *симметризируемое справа.* Если ядро симметризируемо, то оно имеет по крайней мере одно характеристическое число и все его характеристические числа вещественны.

§ 4. Экстремальные свойства характеристических чисел и собственных функций

Приводимые ниже теоремы могут быть получены как следствия из билинейного ряда (3.9).

Теорема 4.1. *Пусть λ_1 — наименьшее по абсолютной величине характеристическое число симметричного ядра $K(x, t)$ и пусть $u_1(x)$ — соответствующая этому числу собственная функция. Тогда*

$$\frac{1}{\lambda_1} = \max_{u \neq 0} \frac{|(Ku, u)|}{\|u\|^2} = \max_{\|u\|=1} |(Ku, u)|. \tag{3.16}$$

Максимум достигается при $u = u_1$.

Теорема 4.2. *Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — первые (при расположении их в порядке возрастания абсолютных величин) n характеристических чисел симметричного ядра $K(x, t)$, а $u_1, u_2, \ldots, u_n$ — соответствующие им ортонормированные собственные функции. Тогда для числа λ_{n+1}, ближайшего следующего за λ_n по абсолютной величине, справедлива формула*

$$\frac{1}{|\lambda_{n+1}|} = \max \frac{|(Ku, u)|}{\|u\|^2}, \tag{3.17}$$

причем максимум берется на множестве функций, отличных от тождественного нуля и ортогональных к собственным функциям $u_1, u_2, \ldots, u_n$:

$$(u, u_j) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.18}$$

Максимум в формуле (3.17) достигается на собственной функции u_{n+1}, соответствующей собственному числу λ_{n+1}.

Формула (3.17), очевидно, равносильна следующей:

$$\frac{1}{|\lambda_{n+1}|} = \max |(Ku, u)|,$$

где максимум берется на множестве функций, удовлетворяющих условиям (3.18) и еще условию $\|u\|=1$.

Теорема 4.1 допускает следующее уточнение.

Обозначим через H^+ и H^- множества функций из $L_2(\Omega)$, на которых квадратичная форма $(\boldsymbol{K}u, u)$ принимает только положительные (соответственно только отрицательные) значения. Обозначим, далее, через λ_1^+ (соответственно λ_1^-) наименьшее по абсолютной величине положительное (соответственно отрицательное) характеристическое число ядра $K(x, t)$. Тогда

$$\frac{1}{\lambda_1^+}=\max_{u\in H^+}\frac{(\boldsymbol{K}u, u)}{\|u\|^2}, \quad \frac{1}{\lambda_1^-}=\min_{u\in H^-}\frac{(\boldsymbol{K}u, u)}{\|u\|^2}. \tag{3.19}$$

Аналогичное уточнение допускает и теорема 4.2. В частности, если ядро $K(x, t)$ положительное, то

$$\frac{1}{\lambda_1}=\max_{u\neq 0}\frac{(\boldsymbol{K}u, u)}{\|u\|^2}=\max_{\|u\|=1}(\boldsymbol{K}u, u). \tag{3.20}$$

§ 5. Ядра Шмидта и билинейный ряд для несимметричных ядер

Пусть $L(x, t)$ — *несимметричное* ядро, удовлетворяющее неравенству вида (2.2), и $L^*(x, t)$ — сопряженное с $L(x, t)$ ядро. Соответствующие им операторы Фредгольма обозначим, как обычно, $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{L}^*$. Операторы $\boldsymbol{K}_1=\boldsymbol{L}^*\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{K}_2=\boldsymbol{L}\boldsymbol{L}^*$ симметричны и положительны; их ядра

$$K_1(x, t)=\int_\Omega L^*(x, s)L(s, t)\,ds=\int_\Omega \overline{L(s, x)}L(s, t)\,ds \tag{3.21}$$

и

$$K_2(x, t)=\int_\Omega L(x, s)L^*(s, t)\,ds=\int_\Omega L(x, s)\overline{L(t, s)}\,ds \tag{3.22}$$

суть симметричные положительные ядра; доказывается, что системы их характеристических чисел совпадают. Ядра $K_1(x,t)$ и $K_2(x, t)$ называются *ядрами Шмидта* для ядра $L(x, t)$.

Обозначим через μ_k $(k=1, 2, \ldots)$ характеристические числа ядер Шмидта, через $u_k(x)$ — ортонормированные собственные функции ядра $K_2(x, t)$ и через $v_k(x)$ — ортонормированные собственные функции ядра $K_1(x, t)$. Каждую из функций $u_k(x)$, $v_k(x)$ можно умножить на произвольный численный множитель, равный единице по модулю. Эти множители можно подобрать так, что оказываются справедливыми формулы

$$L(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)\overline{v_k(t)}}{\sqrt{\mu_k}}, \quad L^*(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k(x)\overline{u_k(t)}}{\sqrt{\mu_k}}, \tag{3.23}$$

которые можно рассматривать как билинейные ряды для ядер $L(x, t)$ и $L^*(x, t)$. Ряды (3.23) сходятся в среднем в Ω по совокупности переменных x и t. Имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_k} \leqslant B_L^2 = \int_\Omega \int_\Omega |L(x, t)|^2 \, dx\, dt. \tag{3.24}$$

§ 6. Решение интегральных уравнений первого рода

6.1. Симметричные уравнения. Пусть $K(x, t)$ — симметричное ядро, заданное в области Ω, и система его характеристических чисел и собственных функций задана записью (3.4). Решения *однородного* уравнения первого рода

$$\int_\Omega K(x, t)\, u(t)\, dt = 0 \tag{3.25}$$

совпадают с функциями, ортогональными ко всем собственным функциям ядра $K(x, t)$. Отсюда сразу следует, что уравнение (3.25) имеет только тривиальное решение, если ядро $K(x, t)$ полное. Если оно неполное, то уравнение (3.25) имеет конечное или счетное множество линейно независимых решений *).

Рассмотрим теперь *неоднородное* уравнение первого рода

$$\int_\Omega K(x, t)\, u(t)\, dt = f(x); \tag{3.26}$$

примем, что $f \in L_2(\Omega)$. Для того чтобы уравнение (3.26) было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы свободный

---

*) Это множество будет счетным, если, например, ядро $K(x, t)$ вырожденное.

член $f(x)$ разлагался в сходящийся в среднем ряд по собственным функциям ядра $K(x, t)$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k(x); \qquad f_k = (f, u_k),$$

и чтобы ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |f_k|^2$$

сходился. Общее решение уравнения (3.26) тогда дается формулой

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k u_k(x), \tag{3.27}$$

где $u_0(x)$ — любое решение однородного уравнения (3.25). Если ядро $K(x, t)$ полное, то $u_0(x) \equiv 0$, и уравнение (3.26) при выполнении указанных выше условий имеет единственное решение

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k u_k(x). \tag{3.28}$$

6.2. Несимметричные уравнения. Пусть несимметричное ядро $L(x, t)$ имеет билинейное разложение (3.23). Решения однородного уравнения первого рода

$$\int_{\Omega} L(x, t) u(t)\, dt = 0 \tag{3.29}$$

суть функции, ортогональные ко всем функциям $v_k(x)$ ($k = 1, 2, \ldots$). Отсюда, между прочим, следует, что уравнение (3.29) имеет только тривиальное решение, если ядро Шмидта $K_1(x, t)$ полное, и имеет конечное или счетное множество линейно независимых нетривиальных решений, если это ядро неполное.

Для разрешимости неоднородного уравнения первого рода

$$\int_{\Omega} L(x, t) u(t)\, dt = f(x); \qquad f \in L_2(\Omega), \tag{3.30}$$

необходимо и достаточно, чтобы свободный член $f(x)$ разлагался в ряд по функциям $u_k(x)$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k u_k(x); \qquad f_k = (f, u_k),$$

сходящийся в среднем, и чтобы ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k |f_k|^2$$

сходился. Если эти условия выполнены, то общее решение уравнения (3.30) дается формулой

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\mu_k} f_k v_k(x), \tag{3.31}$$

где $u_0(x)$ — любое решение уравнения (3.29). Если ядро Шмидта $K_1(x, t)$ полное, то $u_0(x) \equiv 0$, и при выполнении указанных выше условий уравнение (3.30) имеет единственное решение

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\mu_k} f_k v_k(x). \tag{3.32}$$

ГЛАВА IV

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ ЯДРАМИ

§ 1. Позитивные собственные значения

1.1. Постановка задачи. В этом параграфе рассматриваются неотрицательные ядра $K(x, t)$; $x, t \in \Omega$, где Ω — ограниченное замкнутое множество конечномерного пространства. Такие ядра при несущественных дополнительных предположениях имеют неотрицательные собственные функции. Соответствующие этим собственным функциям собственные значения λ принято называть *позитивными*. Каждое позитивное собственное значение, очевидно, неотрицательно. Ниже будет показано, что при достаточно общих условиях неотрицательная собственная функция единственна (с точностью до скалярного множителя). Будет выяснено, в каких условиях позитивное собственное значение *простое* *).

При широких предположениях позитивное собственное значение мажорирует абсолютные величины других собственных значений (вещественных и комплексных).

1.2. Рассматриваемые классы ядер. В этом параграфе предполагается, что ядро $K(x, t)$ неотрицательно и либо непрерывно, либо измеримо и интегрируемо с квадратом:

$$\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} K^2(x, t)\, dx\, dt < \infty. \tag{4.1}$$

*) Собственное значение λ называется простым, если ему соответствует единственная (с точностью до скалярного множителя) собственная функция $\varphi(x)$ и если уравнение

$$\int\limits_{\Omega} K(x, t)\, \psi(t)\, dt = \lambda\psi(x) + \varphi(x)$$

не имеет решений.

Если ядро непрерывно, то все время идет речь о непрерывных собственных функциях. Если ядро квадратично суммируемо, то речь идет о собственных функциях, интегрируемых с квадратом. Аналогично все функции, встречающиеся в приводимых ниже рассуждениях и утверждениях, нужно считать непрерывными, если $K(x, t)$ непрерывно, и квадратично суммируемыми, если выполнено условие (4.1).

Непрерывное неотрицательное ядро $K(x, t)$ называется *неразложимым*, если при любом разбиении множества Ω на две непустые непересекающиеся части Ω_1 и Ω_2 найдутся такие $x_0 \in \Omega_1$, $t_0 \in \Omega_2$, что $K(x_0, t_0) > 0$.

Ядро $K(x, t)$ неразложимо тогда и только тогда, когда для любой неотрицательной непрерывной функции $\varphi(x)$, не равной тождественно нулю, найдется такая итерация ядра $K^{(N)}(x, t)$ $(N = N(\varphi))$:

$$K^{(N)}(x, t) = \int_\Omega \int_\Omega \dots \int_\Omega K(x, s_1) K(s_1, s_2) \cdot \ldots \cdot K(s_{n-1}, t)\, ds_1 \ldots ds_{N-1}, \tag{4.2}$$

что

$$\int_\Omega K^{(N)}(x, t)\, \varphi(t)\, dt > 0 \qquad (x \in \Omega). \tag{4.3}$$

Из неразложимости ядра $K(x, t)$ вытекает неразложимость каждой итерации $K^{(p)}(x, t)$ и, наоборот, из неразложимости $K^{(p)}(x, t)$ вытекает неразложимость $K(x, t)$.

Пусть $u_0(x)$ — фиксированная неотрицательная функция, принимающая положительные значения на некотором множестве положительной меры. Ядро $K(x, t)$ называется $u_0(x)$-*ограниченным сверху*, если для каждой функции $u(x)$ найдутся такие $p = p(u)$ и $a = a(u) > 0$, что

$$\int_\Omega K^{(p)}(x, t)\, u(t)\, dt \leqslant a u_0(x). \tag{4.4}$$

Аналогично ядро $K(x, t)$ называется $u_0(x)$-*ограниченным снизу*, если для каждой неотрицательной функции $u(x)$, положительной на множестве ненулевой меры,

$$\int_\Omega K^{(q)}(x, t)\, u(t)\, dt \geqslant b \cdot u_0(x), \tag{4.5}$$

где q и b зависят от $u(x)$, причем $b > 0$.

Непрерывное ядро $K(x, t)$, очевидно, $u_0(x)$-ограничено сверху, если $u_0(x)$ положительна. Если ядро $K(x, t)$ неразложимо, то оно $u_0(x)$-ограничено снизу при $u_0(x) \equiv 1$. Если $K(x, t)$ удовлетворяет условию (4.1), то оно $u_0(x)$-ограничено сверху при

$$u_0(x) = \left(\int_\Omega K^2(x, t)\,dt\right)^{1/2} \qquad (x \in \Omega). \tag{4.6}$$

Ядро, которое $u_0(x)$-ограничено и сверху и снизу, называется $u_0(x)$-*ограниченным*.

Важными примерами неотрицательных ядер являются функции Грина некоторых краевых задач. Следующая таблица содержит простейшие примеры функций Грина $G(x, t)$ некоторых краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений. Во всех этих примерах $G(t, x) = G(x, t)$ и поэтому приводятся значения функций Грина только при $x \leqslant t$.

Дифференциальный оператор	Краевые условия	Функция Грина $G(x, t)$
$-y''$	$y(0) = y(l) = 0$	$x\left(1 - \frac{t}{l}\right)$
	$y(0) = y'(l) = 0$	t
	$y'(0) = y'(l) = 0$	$l - t$
$[-f(x)\,y']'$,	$y(0) = y(l) = 0$	$q(x) - \frac{q(x)\,q(t)}{q(l)}$
$f(x) > 0$,	$y(0) = y'(l) = 0$	$q(x)$
$q(x) = \int_0^x \frac{ds}{f(s)}$	$y(0) = y(l) + cy'(l)$ $(c > 0)$	$q(x) - \frac{q(x)\,q(t)\,f(l)}{c + q(l)\,f(l)}$
$-xy'' - y'$	$y(0)$ конечно, $y(l) = 0$	$-\ln\frac{t}{l}$
$(-xy')' + \frac{n^2}{x}y$	$y(0)$ конечно, $y(l) = 0$	$\frac{1}{2n}\left[\left(\frac{x}{t}\right)^n - \frac{1}{l^{2n}}(xt)^n\right]$

Все приведенные в таблице функции Грина $G(x, t)$ являются $u_0(x)$-ограниченными ядрами, где

$$u_0(x) = \int_0^l G(x, t)\,dt. \tag{4.7}$$

1.3. Существование положительной собственной функции.

Теорема 1.1. *Пусть $K(x, t)$ — неотрицательное ядро. Пусть существует положительная на некотором множестве ненулевой меры функция $\varphi_0(x)$, для которой*

$$\int_\Omega K^{(p)}(x, t)\varphi_0(t)\,dt \geqslant \alpha\varphi_0(x) \qquad (x \in \Omega), \tag{4.8}$$

где $\alpha > 0$, а $K^{(p)}(x, t)$ — итерированное ядро некоторого порядка p.

Тогда ядро $K(x, t)$ имеет по крайней мере одно позитивное собственное значение λ_0. Это позитивное собственное значение удовлетворяет неравенству $\lambda_0 \geqslant \sqrt[p]{\alpha}$.

Из теоремы 1.1 следует, что u_0-ограниченные снизу ядра и, в частности, неразложимые ядра имеют позитивное собственное значение.

Приведем еще один признак существования позитивного собственного значения, формулируемый в других терминах.

Теорема 1.2. *Пусть неотрицательное ядро $K(x, t)$ имеет хотя бы одно ненулевое (вещественное или комплексное) собственное значение.*

Тогда оно имеет позитивное собственное значение λ_0.

Предостерегаем читателя от неправильного мнения о том, что у каждого неотрицательного ядра есть неотрицательная собственная функция. Например (в случае $\Omega = [a, b]$), ядра $K(x, t)$, удовлетворяющие условию $K(x, t) \equiv 0$ при $t \geqslant x$, не имеют собственных функций, соответствующих ненулевым собственным значениям.

1.4. Сравнение позитивных собственных значений с другими собственными значениями. Наибольшее из позитивных собственных значений неотрицательного ядра обозначим через Λ.

Теорема 1.3. *Все (вещественные и комплексные) собственные значения λ неотрицательного ядра $K(x, t)$ удовлетворяют неравенству* $|\lambda| \leqslant \Lambda$.

В теории линейных интегральных уравнений важную роль играет наибольшее по абсолютному значению собственное значение ядра $K(x, t)$. В силу теоремы 1.3 в случае неотрицательного ядра среди наибольших по абсолютной величине собственных значений всегда есть позитивное собственное значение.

1.5. Простота позитивного собственного значения.

Теорема 1.4. *Пусть ядро $K(x, t)$ неразложимо. Тогда оно имеет единственное позитивное собственное значение Λ. Это собственное значение Λ простое. Оно больше абсолютных величин всех остальных собственных значений.*

Эта теорема содержится в следующем более общем утверждении.

Теорема 1.5. *Пусть ядро $K(x, t)$ $u_0(x)$-ограничено. Тогда оно имеет единственное позитивное собственное значение Λ. Это собственное значение простое. Оно больше абсолютных величин остальных собственных значений.*

Теорема 1.5 может быть применена, в частности, к рассмотренным в п. 1.2 функциям Грина краевых задач.

1.6. Стохастические ядра. Неотрицательное непрерывное ядро $K(x, t)$ называется *стохастическим*, если

$$\int_{\Omega} K(x, t)\,dt \equiv 1 \qquad (x \in \Omega). \tag{4.9}$$

Очевидно, функция $\varphi_0(x) \equiv 1$ $(x \in \Omega)$ является собственной функцией стохастического ядра, соответствующей собственному значению $\lambda_0 = 1$. Остальные собственные значения λ стохастического ядра удовлетворяют неравенству $|\lambda| \leqslant 1$. Примеры показывают, что у стохастических ядер могут быть такие отличные от 1 собственные значения λ, что $|\lambda| = 1$. Эти собственные значения называются *пермутаторами*.

Теорема 1.6. 1. *Все собственные значения стохастического ядра, по модулю равные единице, суть натуральные корни из единицы.*

2. *Множество собственных функций стохастического ядра, отвечающих собственному значению* $\lambda = 1$, *имеет базис, состоящий из неотрицательных функций* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_r(x)$ *и обладающий следующими свойствами*:

a) *для каждой функции* $\varphi_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$ *существует по крайней мере одна точка, в которой данная функция положительна, а остальные функции базиса равны нулю*;

b) *для каждой точки множества* Ω *найдется по крайней мере одна функция базиса, положительная в этой точке*;

c) *множество собственных функций транспонированного уравнения*

$$\lambda\psi(x) = \int_\Omega K(t, x)\,\psi(t)\,dt, \tag{4.10}$$

отвечающих собственному значению $\lambda = 1$, *имеет базис, составленный из неотрицательных функций* $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_r(x)$, *биортогональный с базисом* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_r(x)$ *и такой, что*

$$\psi_i(x)\,\psi_j(x) \equiv 0 \qquad (x \in \Omega,\ i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, r).$$

1.7. Замечания. Приведенные в этом параграфе утверждения содержатся в общей теории (см. [3] — [5]) линейных операторов, оставляющих инвариантным конус в банаховом пространстве. Некоторые факты этой теории излагаются в гл. V, § 5.

Из общей теории вытекает справедливость сформулированных в этом параграфе теорем и для ядер $K(x, t)$, которые не обладают свойством квадратичной суммируемости, но которые порождают линейный интегральный оператор

$$Ku(x) = \int_\Omega K(x, t)\,u(t)\,dt,$$

действующий и вполне непрерывный в каком-либо пространстве функций.

§ 2. Положительные решения неоднородного уравнения

2.1. Существование положительного решения. Рассмотрим неоднородное уравнение

$$\mu u(x) = \int_\Omega K(x, t)\, u(t)\, dt + f(x) \qquad (4.11)$$

с неотрицательным ядром $K(x, t)$, которое либо непрерывно, либо удовлетворяет условию (4.1). Как и в предыдущем параграфе, все функции, участвующие в рассуждениях, предполагаются непрерывными, если $K(x, t)$ непрерывно, и квадратично суммируемыми, если $K(x, t)$ удовлетворяет условию (4.1).

Теорема 2.1. *Пусть $\mu > \Lambda$, где Λ — наибольшее позитивное собственное значение ядра $K(x, t)$.*

Тогда уравнение (4.11) *при любой неотрицательной функции $f(x)$ имеет единственное неотрицательное решение $u^*(x)$, которое можно получить методом последовательных приближений*

$$\mu u_{n+1}(x) = \int_\Omega K(x, t)\, u_n(t)\, dt + f(x) \qquad (4.12)$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

при любом начальном приближении $u_0(x)$.

Если положить $u_0(x) \equiv 0$, то

$$u_n(x) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{K^m f(x)}{\mu^{m+1}}$$

и, следовательно,

$$u^*(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{K^m f(x)}{\mu^{m+1}};$$

здесь K — интегральный оператор с ядром $K(x, t)$:

$$Ku(x) = \int_\Omega K(x, t)\, u(t)\, dt.$$

Теорема 2.1 допускает обращение.

Теорема 2.2. *Если уравнение* (4.11) *имеет положительное решение хотя бы при одной положительной* *функции* $f_0(x)$, *то* $\mu > \Lambda$, *и поэтому уравнение* (4.11) *имеет неотрицательное решение при любой неотрицательной функции* $f(x)$.

Теорему 2.1 естественно дополнить следующим утверждением.

Теорема 2.3. *Если ядро* $K(x, t)$ $u_0(x)$*-ограничено, то при* $\mu \leqslant \Lambda$ *уравнение* (4.11) *не имеет неотрицательных решений ни при одной неотрицательной и не равной тождественно нулю функции* $f(x)$.

В частности, уравнение (4.11) с неразложимым ядром не имеет неотрицательных решений при $\mu \leqslant \Lambda$ и $f(x) \geqslant 0$ ($f(x) \not\equiv 0$).

2.2. Сходимость последовательных приближений.

Теорема 2.4. *В условиях теоремы* 2.1 *быстрота сходимости последовательных приближений* (4.12) *к решению* $u^*(x)$ *уравнения* (4.11) *характеризуется неравенством*

$$\| u^* - u_n \| \leqslant C(\mu) \left(\frac{\Lambda}{\mu} \right)^n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $C(\mu)$ — *некоторая постоянная.*

В этой теореме

$$\| y \| = \max_{x \in \Omega} | y(x) |,$$

если ядро $K(x, t)$ и функция $f(x)$ непрерывны. Если же ядро удовлетворяет условию (4.1) и функция $f(x)$ интегрируема с квадратом, то

$$\| y \| = \left(\int_\Omega y^2(x)\, dx \right)^{1/2}.$$

2.3. Замечание. Распространение теорем этого параграфа на более широкий класс ядер требует привлечения общей теории линейных операторов, оставляющих инвариантным конус (см. [4], [5]).

§ 3. Оценки спектрального радиуса

3.1. Постановка задачи. Наибольшая из абсолютных величин собственных значений ядра $K(x, t)$ называется его *спектральным радиусом* $\rho(K)$ *или спектральным радиусом* *интегрального оператора*

$$Ku(x) = \int_{\Omega} K(x, t)\, u(t)\, dt. \tag{4.13}$$

Роль спектрального радиуса определяется, например, тем, что интегральное уравнение (4.11) с непрерывным ядром при любой непрерывной функции $f(x)$ имеет непрерывное решение $u(x)$, которое может быть получено методом последовательных приближений (4.12) в том и только том случае, когда $|\mu| > \rho(K)$. Аналогичное утверждение имеет место и для ядер, суммируемых с квадратом. В связи с этим приобретают важное значение оценки спектрального радиуса.

В этом параграфе будут указаны некоторые оценки спектрального радиуса неотрицательных ядер и будут описаны общие приемы получения таких оценок (см. [3] — [6]).

Из теоремы 1.3 вытекает, что спектральный радиус $\rho(K)$ неотрицательного ядра $K(x, t)$ либо равен нулю, либо совпадает с его наибольшим позитивным собственным значением. Поэтому оценки спектрального радиуса в случае неотрицательного ядра совпадают с оценками наибольшего позитивного собственного значения.

Оценки спектральных радиусов неотрицательных ядер могут быть использованы для изучения знакопеременных ядер, так как спектральный радиус $\rho(K)$ неотрицательного ядра $K(x, t)$ является оценкой сверху спектрального радиуса каждого такого ядра $R(x, t)$, что

$$|R(x, t)| \leqslant K(x, t) \qquad (x, t \in \Omega). \tag{4.14}$$

Для простоты изложения будем считать, что рассматриваются непрерывные ядра $K(x, t)$ и что все функции, участвующие в формулировках, непрерывны. Однако все утверждения сохраняют силу, если ядро $K(x, t)$ квадратично суммируемо.

3.2. Оценки сверху. Простейшие оценки сверху дают неравенства

$$\rho(K) \leqslant \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} K(x, t)\, dt, \tag{4.15}$$

$$\rho(K) \leqslant \sqrt{\int_{\Omega} \int_{\Omega} K^2(x, t)\, dx\, dt}. \tag{4.16}$$

Более точные оценки дают неравенства

$$\rho(K) \leqslant \sqrt[m]{\max_{x \in \Omega} \int_\Omega K^{(m)}(x, t)\,dt}, \tag{4.17}$$

$$\rho(K) \leqslant \sqrt[2m]{\int_\Omega \int_\Omega K^{(m)^2}(x, t)\,dx\,dt}. \tag{4.18}$$

Укажем еще две оценки. Пусть для некоторого $\lambda_1 > 0$ выполнено неравенство

$$\int_\Omega K(x, t)\left[\lambda_1 - \int_\Omega K^{(m)}(t, \tau)\,d\tau\right] dt \geqslant 0. \tag{4.19}$$

Тогда $\rho(K) \leqslant \sqrt[m]{\lambda_1}$.

Если для некоторого $\lambda_2 \geqslant 0$

$$\int_\Omega K^{(m)}(x, t)\left[\lambda_2 - \int_\Omega K(t, \tau)\,d\tau\right] dt \geqslant 0, \tag{4.20}$$

то $\rho(K) \leqslant \lambda_2$.

3.3. Общий метод.

Теорема 3.1. *Пусть для некоторого $\lambda_0 > 0$ и некоторой неотрицательной функции $u_0(x)$, принимающей положительные значения на множестве положительной меры, выполнено неравенство*

$$\int_\Omega K(x, t)\,u_0(t)\,dt \geqslant \lambda_0 u_0(x) \qquad (x \in \Omega). \tag{4.21}$$

Тогда наибольшее собственное значение Λ ядра $K(x, t)$ удовлетворяет неравенству

$$\Lambda \geqslant \lambda_0. \tag{4.22}$$

Следующие теоремы позволяют получать оценку $\rho(K)$ сверху.

Теорема 3.2. *Пусть неотрицательное ядро $K(x, t)$ $u_1(x)$-ограничено сверху и пусть для некоторых натурального p и неотрицательного λ_0*

$$\int_\Omega K^{(p)}(x, t)\,u_1(t)\,dt \leqslant \lambda_0 u_1(x) \qquad (x \in \Omega), \tag{4.23}$$

где $K^{(p)}(x, t)$ — итерированное ядро.

Тогда

$$\Lambda \leqslant \sqrt[p]{\lambda_0}. \qquad (4.24)$$

Теорема 3.3. *Пусть неотрицательная функция $u_1(x)$, принимающая нулевые значения лишь на множестве нулевой меры (например, в конечном числе точек), удовлетворяет неравенству*

$$\int_{\Omega} K^{(m)}(x, t)\, u_1(t)\, dt \leqslant \lambda_0 u_1(x) \qquad (x \in \Omega). \qquad (4.25)$$

Тогда

$$\rho(K) \leqslant \sqrt[m]{\lambda_0}. \qquad (4.26)$$

Все теоремы этого пункта можно рассматривать как метод получения оценок числа Λ. Функции $u_0(x)$, $u_1(x)$ нужно подбирать по ядру $K(x, t)$. Точность получаемых при этом оценок зависит от того, насколько удачно выбраны функции $u_0(x)$, $u_1(x)$.

3.4. Блочный метод. В этом пункте будем считать, что непрерывное ядро $K(x, t)$ задано в квадрате $a \leqslant x, t \leqslant b$. Пусть

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b \qquad (4.27)$$

— произвольное дробление сегмента $[a, b]$ на n частей.

Положим

$$m_{ik} = \max_{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |K(x, t)|\, dt \quad (i, k = 1, \ldots, n) \qquad (4.28)$$

и образуем матрицу

$$S = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \ldots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \ldots & m_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{n1} & m_{n2} & \ldots & m_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (4.29)$$

Теорема 3.4. *Спектральный радиус $\rho(K)$ не превосходит наибольшее собственное значение матрицы S.*

Аналогичное утверждение справедливо, если вместо S рассмотреть матрицу

$$T=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \tag{4.30}$$

где

$$\alpha_{ik}=\left(\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i}\int\limits_{x_{k-1}}^{x_k} K^2(x,\ t)\,dx\,dt\right)^{1/2}. \tag{4.31}$$

В качестве примера рассмотрим функцию Грина $G(x,\ t)$ уравнения колебания струны с закрепленными концами:

$$G(x,\ t)=\begin{cases} x(1-t) \text{ при } 0\leqslant x\leqslant t\leqslant 1, \\ t(1-x) \text{ при } 0\leqslant t\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$$

Построим матрицу (4.30), полагая $n=5$, $x_i=\frac{1}{5}i$ $(i=0, 1, \dots, 5)$.

Наибольшее собственное значение матрицы T в этом случае равно 0,10216. Это дает оценку $\rho(K)\leqslant 0{,}10216$. Точная величина наибольшего собственного значения равна $\frac{1}{\pi^2}\approx 0{,}10132$.

3.5. Дополнительные замечания. Пусть ядро $K(x,\ t)$ $u_0(x)$-ограничено сверху. Обозначим через δ_p наименьшее из всех чисел λ_0, при которых выполняется неравенство (4.23). Положим $\beta_p=\sqrt[p]{\delta_p}$. Тогда $\beta_p\geqslant\Lambda$ и $\beta_p\to\Lambda$.

Пусть ядро $K(x,\ t)$ $u_0(x)$-ограничено. Обозначим через γ_p наибольшее из чисел γ, при которых выполняется неравенство

$$\gamma u_0(x)\leqslant\int\limits_{\Omega} K^{(p)}(x,\ t)\,u_0(t)\,dt$$

и положим $\sqrt[p]{\gamma_p}=\alpha_p$. Тогда $\alpha_p\to\Lambda$, причем $\alpha_p\leqslant\Lambda$. При этом имеет место оценка $0\leqslant\beta_n-\alpha_n\leqslant O(1/n)$.

§ 4. Осцилляционные ядра

4.1. Постановка задачи. В этом параграфе будет описан класс неотрицательных ядер, все собственные значения которых положительные и простые, а собственные функции образуют такую систему, которая во многих отношениях аналогична системе функций $\sin nx$ ($n = 1, 2, \ldots;\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$) (см. [1], [2]).

4.2. Осцилляционные матрицы [1], [2]. Матрица A называется *вполне неотрицательной* (*вполне положительной*), если неотрицательны (положительны) все миноры любых порядков этой матрицы.

Всякая вполне неотрицательная матрица, некоторая степень которой A^k вполне положительна, называется *осцилляционной* матрицей.

Прежде чем сформулировать основную теорему о свойствах осцилляционных матриц, введем некоторые понятия и обозначения.

Пусть

$$u = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \tag{4.32}$$

— ряд вещественных чисел. Если некоторые из чисел равны нулю, то припишем им произвольно выбранные знаки: плюс или минус. После этого можно подсчитать число перемен знака в ряде (4.32). Это число будет меняться в зависимости от выбора знаков нулевых членов ряда (4.32). Наибольшее и наименьшее значения этих чисел будем называть *максимальным и соответственно минимальным числами перемен знака* в ряде (4.32) и обозначать через S_u^+ и S_u^-. Если $S_u^+ = S_u^-$, будем говорить о *точном числе перемен знака* в ряде (4.32) и обозначать его просто через S_u. Очевидно, $S_u^+ = S_u^-$ в том и только том случае, если числа u_1 и u_n отличны от нуля и если из $u_i = 0$ ($1 < i < n$) вытекает, что $u_{i-1}u_{i+1} < 0$.

Теорема 4.1. 1. *Все характеристические числа λ_i осцилляционной матрицы $A = (a_{ij})$ ($i, j = 1, \ldots, n$) положительные и простые. Поэтому можно считать, что*

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n > 0. \tag{4.33}$$

2. *Если* $u_k = (u_{1k}, u_{2k}, \ldots, u_{nk})$ — *собственный вектор осцилляционной матрицы* A, *соответствующий* k-*му по величине характеристическому числу* λ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, *то при любых числах* $c_p, c_{p+1}, \ldots, c_q$ $\left(1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n, \sum_{i=p}^{q} c_i^2 > 0\right)$ *число перемен знака среди координат вектора*

$$u = c_p u_p + c_{p+1} u_{p+1} + \ldots + c_q u_q \tag{4.34}$$

заключается между $p - 1$ *и* $q - 1$:

$$p - 1 \leqslant S_u^- \leqslant S_u^+ \leqslant q - 1. \tag{4.35}$$

В частности, среди координат вектора u_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *имеется точно* $k - 1$ *перемена знака*:

$$S_{u_k}^+ = S_{u_k}^- = S_{u_k} = k - 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.36}$$

3. *Нулевые координаты двух последовательных собственных векторов* u_k, u_{k+1} $(k = 2, 3, \ldots, n - 1)$ *осцилляционной матрицы перемежаются.*

При доказательстве осцилляционности конкретных матриц, встречающихся в приложениях, фундаментальную роль играет следующий критерий:

Теорема 4.2. *Для того чтобы вполне неотрицательная матрица* $A = (a_{ik})$ $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ *была осцилляционной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия*:

1. A — *неособенная матрица.*
2. $a_{i, i+1} > 0$, $a_{i+1, i} > 0$ $\quad (i = 1, 2, \ldots, n - 1)$.

4.3. Колебания упругого континуума с дискретным распределением масс. Свойства осцилляционных матриц находят применение, например, при изучении малых колебаний невесомого линейного упругого континуума (струны или стержня), простирающегося вдоль оси x от точки $x = a$ до точки $x = b$, не имеющего закреплений (опор) внутри (a, b) и несущего n сосредоточенных масс (бусинок).

Пусть массы $m_1, m_2, \ldots, m_n$ бусинок сосредоточены в точках $x_1, \ldots, x_n$ $(a < x_1 < \ldots < x_n < b)$ упругого континуума. Колебания этого континуума описываются прогибом $y(x, t)$ в точке x в момент времени t.

Обозначим через $K(x, \sigma)$ $(a \leqslant x, \sigma \leqslant b)$ прогиб континуума в точке x под действием единичной силы, приложенной в точке σ. Функция $K(x, \sigma)$ называется *функцией влияния*. Согласно принципу Даламбера прогиб $y(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$y(x, t) = -\sum_{k=1}^{n} K(x, x_k)\, m_k \frac{d^2 y(x_k, t)}{dt^2}. \tag{4.37}$$

Будем искать гармонические колебания упругого континуума, т. е. решения уравнения (4.37) вида

$$y(x, t) = \varphi(x) \sin(pt + \alpha). \tag{4.38}$$

Такие решения называются *собственными колебаниями* упругого континуума, число p называется *собственной частотой*, $\varphi(x)$—*амплитудной функцией*. Для определения p и $\varphi(x)$ подставляем (4.38) в (4.37), в результате чего получим уравнение

$$\varphi(x) = p^2 \sum_{k=1}^{n} K(x, x_k)\, m_k \varphi(x_k). \tag{4.39}$$

Отсюда, придавая x значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, придем к системе линейных алгебраических уравнений $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$\varphi(x_i) = p^2 \sum_{k=1}^{n} K(x_i, x_k)\, m_k \varphi(x_k). \tag{4.40}$$

Из этой системы можно найти значения функции $\varphi(x)$ только в точках x_i; в остальных точках она определяется из равенства (4.39).

Для существования ненулевого решения $\varphi(x)$ уравнения (4.39) необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} 1 - p^2 K(x_1, x_1)\, m_1 & -p^2 K(x_1, x_2)\, m_2 & \ldots & -p^2 K(x_1, x_n)\, m_n \\ -p^2 K(x_2, x_1)\, m_1 & 1 - p^2 K(x_2, x_2)\, m_2 & \ldots & -p^2 K(x_2, x_n)\, m_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -p^2 K(x_n, x_1)\, m_1 & -p^2 K(x_n, x_1)\, m_2 & \ldots & 1 - p^2 K(x_n, x_n)\, m_n \end{vmatrix} = 0.$$

Из последнего уравнения определяются собственные частоты p_i, их, очевидно, не более чем n. Подставляя собственные частоты в (4.40), найдем $\varphi(s_i)$ — значения амплитудной функции в точках расположения масс.

Ясно, что свойства функции $y(s, t)$ полностью определяются свойствами матрицы

$$(K(x_i, x_k) m_k) \qquad (i, k = 1, \ldots, n), \tag{4.41}$$

которая поэтому называется *матрицей влияния*, а числа $K(x_i, x_k)$ называются *коэффициентами влияния*.

Оказывается, что матрица (4.41) является осцилляционной. Из свойств осцилляционных матриц вытекают следующие основные свойства упругого континуума:

1. Все собственные частоты p_i различны и их ровно n: $p_1 < p_2 < \ldots < p_n$. Каждая из них является простой частотой, т. е. амплитудная функция $\varphi_i(x)$ собственного колебания данной частоты p_i определяется с точностью до постоянного множителя однозначно.

2. Собственное колебание с наименьшей частотой (основной тон) не имеет узлов *).

3. Собственное колебание с частотой p_{j+1} (j-й обертон) имеет ровно j узлов.

4. Узлы двух соседних собственных колебаний перемежаются.

5. В колебании, полученном путем наложения собственных колебаний с частотами $p_k < p_l < \ldots < p_m$, число узлов заключено между $k-1$ и $m-1$.

4.4. Осцилляционные ядра [2]. Пусть ядро $K(x, t)$, где $a \leqslant x, t \leqslant b$, неотрицательно и непрерывно. Обозначим через I промежуток, получаемый из (a, b) присоединением конца a, если $K(a, a) \neq 0$, и конца b, если $K(b, b) \neq 0$.

Ядро $K(x, t)$ $(a \leqslant x, t \leqslant b)$ называется *осцилляционным*, если для любых $t_1, t_2, \ldots, t_n \in I$, среди которых по крайней мере одна из этих точек принадлежит (a, b), матрица

$$(K(t_i, t_k)) \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{4.42}$$

осцилляционная.

Если ядро $K(x, t)$ осцилляционное, то справедливы неравенства

$$\begin{vmatrix} K(t_1, s_1) & \ldots & K(t_1, s_n) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ K(t_n, s_1) & \ldots & K(t_n, s_n) \end{vmatrix} > 0$$

*) Точка t_0 называется узлом функции $\varphi(t)$, если $\varphi(t_0) = 0$ и если $\varphi(t)$ меняет знак при переходе через t_0.

при любых таких $x_1, x_2, \ldots, x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n \in I$, что

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_n; \quad t_1 < t_2 < \ldots < t_n.$$

Теорема 4.3. *Пусть ядро $K(x, t)$ осцилляционное. Тогда*

1. *Все его собственные значения положительные и простые.*

2. *Собственная функция $\varphi_1(x)$, соответствующая наибольшему собственному значению λ_1, не имеет нулей в промежутке I.*

3. *Собственная функция $\varphi_j(x)$, соответствующая j-му по величине собственному значению λ_j, имеет ровно $j-1$ узлов и никаких других нулей в промежутке I не имеет.*

4. *Узлы двух соседних собственных функций $\varphi_j(x)$ и $\varphi_{j+1}(x)$ $(j=2, \ldots)$ перемежаются.*

5. *При любых k и m $(0 \leqslant k \leqslant m)$ и произвольных числах $c_k, \ldots, c_m$ $\left(\sum_{i=k}^{m} c_i^2 > 0\right)$ линейная комбинация $\varphi(x) = \sum_{i=k}^{m} c_i\varphi_i(x)$ собственных функций имеет в промежутке I не более $m-1$ нулей и не менее $k-1$ узлов.*

4.5. Малые колебания систем с бесконечным числом степеней свободы. Отмеченные в п. 4.3 свойства малых колебаний невесомого линейного упругого континуума с дискретным распределением масс естественным образом распространяются на случай колебания линейного упругого континуума с непрерывно распределенной массой. При этом уравнение (4.37) заменяется одним интегро-дифференциальным уравнением, а система линейных алгебраических уравнений (4.40) — линейным уравнением для амплитудных функций.

Пусть S — линейный упругий континуум, $K(x, \sigma)$ — его функция влияния, которая при обычных закреплениях концов является осцилляционным ядром. Для составления уравнения движения воспользуемся принципом Даламбера. В результате получим следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$y(x, t) = -\int_S K(x, \sigma)\frac{\partial^2 y(\sigma, t)}{\partial t^2}\rho(\sigma)\,d\sigma. \tag{4.43}$$

Здесь $\rho(\sigma)$ — линейная плотность стержня, которую мы считаем кусочно непрерывной и положительной функцией.

Исследуем теперь собственные гармонические колебания континуума S, т. е. колебания вида

$$y(x, t) = \varphi(x) \sin(pt + \alpha), \tag{4.44}$$

где $\varphi(x)$ — амплитудная функция, а p — частота колебаний. Подставляя (4.44) в (4.43), найдем, что

$$\varphi(x) = p^2 \int\limits_S K(x, \sigma) \varphi(\sigma) \rho(\sigma) d\sigma. \tag{4.45}$$

Ядро $K(x, \sigma) \rho(\sigma)$ осцилляционно. Поэтому из теоремы 4.3 вытекают замечательные свойства малых колебаний линейного упругого континуума с непрерывным распределением масс:

1. Частоты собственных гармонических колебаний различны.

2. Основной тон ($p = p_1$) не имеет узлов.

3. j-й обертон ($p = p_j$) имеет $j - 1$ узлов ($j = 1, 2, \ldots$).

4. В колебании, получающемся наложением собственных колебаний с частотами $p_k < p_l < \ldots < p_m$, прогиб в любой момент времени имеет не менее $k - 1$ узлов и не более $m - 1$ нулей.

5. Узлы двух соседних обертонов перемежаются.

ГЛАВА V

УРАВНЕНИЯ С ЛИНЕЙНЫМИ НЕПРЕРЫВНЫМИ И ВПОЛНЕ НЕПРЕРЫВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Изложенная в предыдущих главах теория линейных интегральных уравнений содержится в общей теории операторных уравнений. Это объясняется тем, что линейное интегральное уравнение

$$u(x) = \int_{\Omega} K(x, t) u(t) dt + f(x)$$

при достаточно общих условиях можно рассматривать как уравнение

$$u = Ku + f$$

с линейным непрерывным или вполне непрерывным оператором K, действующим в некотором функциональном пространстве E. После такого истолкования интегрального уравнения для его исследования можно применять общие теоремы функционального анализа.

Системы интегральных уравнений также могут быть записаны в виде операторных уравнений в пространствах вектор-функций. Для исследования систем могут быть применены и специальные переходы к одному интегральному уравнению.

Рассмотрим, например, систему

$$u_1(x) = \sum_{l=1}^{n} \int_{\Omega} K_{1l}(x, t) u_l(t) dt + f_1(x),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_n(x) = \sum_{l=1}^{n} \int_{\Omega} K_{nl}(x, t) u_l(t) dt + f_n(x),$$

где Ω — ограниченное замкнутое множество конечномерного пространства. Пусть h — такой вектор, что $\Omega + ih$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ и Ω не пересекаются (или их пересечение имеет меру нуль). Введем множество

$$\hat{\Omega} = \Omega \cup (\Omega + h) \cup \ldots \cup (\Omega + (n-1)h);$$

определим на нем ядро

$$\hat{K}(x, t) = K_{ml}(x - (m-1)h, \ t - (l-1)h),$$

если

$$x \in \Omega + (m-1)h, \quad t \in \Omega + (l-1)h,$$

и функцию

$$\hat{f}(x) = f_l(x - (l-1)h), \quad \text{если} \quad x \in \Omega + (l-1)h,$$

и рассмотрим уравнение

$$\hat{u}(x) = \int_{\hat{\Omega}} \hat{K}(x, t)\hat{u}(t)\,dt + \hat{f}(x).$$

Нетрудно видеть, что это уравнение эквивалентно системе.

§ 1. Условия непрерывности и полной непрерывности линейных интегральных операторов

1.1. Постановка задачи. Пусть Ω — ограниченное замкнутое множество конечномерного пространства ненулевой лебеговой меры, $K(x, t)$ — измеримая по совокупности переменных функция, определенная на $\Omega \times \Omega$. Выражение

$$\boldsymbol{K}u(x) = \int_{\Omega} K(x, t)u(t)\,dt \tag{5.1}$$

(интеграл здесь понимается в смысле Лебега) называется линейным интегральным оператором. Линейный интегральный оператор $\boldsymbol{K}$ определен на каждой измеримой функции $u(x)$, для которой функция $K(x, t)u(t)$ суммируема по t на Ω почти при всех $x \in \Omega$; значения оператора $\boldsymbol{K}$ на таких функциях являются измеримыми функциями.

При исследовании интегральных, интегро-дифференциальных и других уравнений, в которые входят линейные интегральные операторы, важную и часто решающую роль играет тот факт, что оператор K действует из одного банахова пространства E_1 в другое E_2 и обладает «хорошими» свойствами: непрерывностью, полной непрерывностью и др. В связи с этим возникает задача отыскания для данного интегрального оператора K таких пар $[E_1, E_2]$ банаховых пространств, что оператор K действует из E_1 в E_2 и является непрерывным, вполне непрерывным и т. д.

Обычно пары пространств, в которых заданный интегральный оператор обладает «хорошими» свойствами, отыскиваются «методом проб и ошибок». В связи с этим известно большое число достаточных (а в некоторых случаях и необходимых) условий на ядро $K(x, t)$, при выполнении которых линейный интегральный оператор K с ядром $K(x, t)$ действует из одного банахова пространства в другое и обладает нужными свойствами; некоторые из них приводятся ниже.

В качестве «пробных» пространств чаще всего берутся пространство C непрерывных на Ω функций и пространства L_p суммируемых на Ω со степенью p функций. Напомним, что пространством $C = C(\Omega)$ называется совокупность всех непрерывных на Ω функций u с нормой

$$\|u\|_C = \max_{x \in \Omega} |u(x)|. \tag{5.2}$$

Пространством $L_p = L_p(\Omega)$ $(p \in [1, \infty))$ называется совокупность всех измеримых на Ω функций x, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|u\|_{L_p} = \left\{ \int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}. \tag{5.3}$$

Вместе с пространствами L_p часто приходится рассматривать и пространство $L_\infty = L_\infty(\Omega)$ ограниченных в существенном на Ω функций; норма в этом пространстве определяется равенством

$$\|u\|_{L_\infty} = \operatorname{vrai}\max_{x \in \Omega} |u(x)|. \tag{5.4}$$

Пространство C можно рассматривать как подпространство пространства L_∞; в этом случае функции, отличающиеся от непрерывных на множестве меры нуль, можно рассматривать как элементы пространства C.

При изучении операторов в пространствах C и L_p удобно рассматривать скалярное произведение

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)\overline{v(x)}\,dx. \tag{5.5}$$

Это скалярное произведение принимает конечное значение, если, например, $u \in L_p$, а $v \in L_{p'}$; здесь числа p и p' связаны равенством

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{5.6}$$

Выражение

$$F(u) = (u, v_0) \tag{5.7}$$

при фиксированном $v_0 \in L_{p'}$ является линейным непрерывным функционалом на L_p, причем $\| F \| = \| v_0 \|_{L_{p'}}$. При $p < \infty$ верно и обратное утверждение: каждый линейный непрерывный функционал F на L_p допускает представление (5.7); функция v_0 в этом представлении определяется однозначно. При $p = \infty$ это утверждение неверно.

Из приведенных утверждений следует, что при $p < \infty$ пространство $L_{p'}$ можно рассматривать как сопряженное *) к L_p пространство; при $p = \infty$ L_1 является подпространством сопряженного к L_∞ пространства $(L_\infty)^*$.

При фиксированном $v_0 \in L_1$ выражение (5.7) является линейным непрерывным функционалом на C, причем $\| F \|_C = \| v_0 \|_{L_1}$. Поэтому пространство L_1 можно рассматривать и как подпространство сопряженного к C пространства C^*.

Приведем здесь еще основные определения, относящиеся к линейным операторам.

---

*) Напомним, что сопряженным к банахову пространству E называется пространство E^* линейных непрерывных на E функционалов f со следующими линейными операциями:

$$(f_1 + f_2)(u) = f_1(u) + f_2(u), \qquad (\lambda f)(u) = \bar{\lambda} f(u)$$

и с нормой

$$\| f \| = \sup_{\| u \| \leqslant 1} | f(u) |.$$

Действующий из E_1 в E_2 линейный оператор K называется *непрерывным*, если

$$\lim_{\|u-u_0\|_{E_1}\to 0} \|Ku - Ku_0\|_{E_2} = 0$$

для любого $u_0 \in E_1$. Непрерывность линейного оператора K эквивалентна его *ограниченности*:

$$\|Ku\|_{E_2} \leqslant M\|u\|_{E_1} \qquad (u \in E_1). \tag{5.8}$$

Наименьшее из чисел M, для которых выполняется неравенство (5.8), называется *нормой* оператора K и обозначается через $\|K\|_{E_1\to E_2}$.

Пусть линейный оператор K действует из E_1 в E_2 и непрерывен. *Сопряженным* к нему оператором K^* называется оператор, действующий из сопряженного к E_2 пространства E_2^* в пространство E_1^*, сопряженное к E_1, и определенный равенством

$$K^*f(u) = f(Ku) \qquad (u \in E_1). \tag{5.9}$$

Если E_1 — это одно из пространств L_∞ или C, то часто бывает неудобно рассматривать K^* как оператор из E_2^* в E_1^*. В таких случаях часто бывает, что оператор K^* действует из E_2^* (или, если $E_2 = L_\infty$, по крайней мере из L_1) в L_1 и во всех построениях можно K^* рассматривать как оператор из E_2^* (L_1) в L_1.

Действующий из E_1 в E_2 линейный оператор K называется *положительным*, если он преобразует неотрицательные функции пространства E_1 в неотрицательные функции пространства E_2. Действующий из E_1 в E_2 линейный оператор K называется *регулярным*, если для некоторого действующего из E_1 в E_2 линейного положительного оператора K_0 выполняется неравенство $|Ku| \leqslant K_0(|u|)$ $(u \in E_1)$. Регулярные операторы, действующие из L_p в L_q (C), непрерывны.

Наконец, действующий из E_1 в E_2 линейный оператор K называется *вполне непрерывным*, если он преобразует ограниченные множества пространства E_1 в компактные множества пространства E_2. Каждый вполне непрерывный оператор непрерывен.

1.2. Линейные интегральные операторы со значениями в пространстве C. В этом пункте рассматриваются линейные интегральные операторы, действующие из одного из пространств L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ в пространство C. Основные результаты теории таких операторов были установлены И. Радоном [16].

Теорема 1.1. *Линейный интегральный оператор* $\boldsymbol{K}$ *с ядром* $K(x, t)$ *действует из пространства* L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ *в пространство* C *в том и только том случае, когда*:

a) *при всех* $x \in \Omega$ *функция* $K(x, t)$ *принадлежит пространству* $L_{p'}$, *где* $p' = \frac{p}{p-1}$;

b) *функция*

$$\varphi(x) = \| K(x, t) \|_{L_{p'}} \qquad (x \in \Omega) \tag{5.10}$$

ограничена;

c) *для любого измеримого подмножества* D *множества* Ω *и любого* $x_0 \in \Omega$ *справедливо равенство*

$$\lim_{x \to x_0} \int_D K(x, t)\, dt = \int_D K(x_0, t)\, dt.$$

Отметим, что условия a) и b) в случае, когда $p > 1$, эквивалентны неравенству

$$\int_\Omega |K(x, t)|^{p'} dt \leqslant k < \infty \qquad (x \in \Omega).$$

В случае $p = 1$ эти условия эквивалентны неравенству

$$\operatorname*{vrai\,max}_{t \in \Omega} |K(x, t)| \leqslant k < \infty \qquad (x \in \Omega).$$

Теорема 1.2. *Пусть линейный интегральный оператор* $\boldsymbol{K}$ *с ядром* $K(x, t)$ *действует из пространства* L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ *в пространство* C.

Тогда оператор $\boldsymbol{K}$ *непрерывен и*

$$\| \boldsymbol{K} \|_{L_p \to C} = \| \varphi(x) \|_{L_\infty}. \tag{5.11}$$

Теорема 1.3. *Пусть линейный интегральный оператор* $\boldsymbol{K}$ *с ядром* $K(x, t)$ *действует из пространства* L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ *в пространство* C.

Тогда сопряженный к K оператор K^* действует из пространства L_1 в пространство $L_{p'}$ и на функциях из L_1 определяется равенством

$$K^*u(x)=\int_\Omega K^*(x,\ t)\,u(t)\,dt, \tag{5.12}$$

где $K^*(x,\ t)=\overline{K(t,\ x)}$.

Теорема 1.4. *Пусть линейный оператор K с ядром $K(x,\ t)$ действует из пространства L_p $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ в пространство. C.*

Тогда K вполне непрерывен в том и только том случае, когда для любого $x_0\in\Omega$ справедливо равенство

$$\lim_{x\to x_0}\|K(x,\ t)-K(x_0,\ t)\|_{L_{p'}}=0. \tag{5.13}$$

Равенство (5.13) в случае $p>1$ можно переписать в виде

$$\lim_{x\to x_0}\int_\Omega |K(x,\ t)-K(x_0,\ t)|^{p'}dt=0,$$

а в случае $p=1$ — в виде

$$\lim_{x\to x_0}\ \underset{t\in\Omega}{\mathrm{vrai\,max}}\,|K(x,\ t)-K(x_0,\ t)|=0. \tag{5.14}$$

Теоремы 1.1—1.4 полностью описывают ядра линейных интегральных операторов, действующих из L_p $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ в пространство C.

Проверка условий теоремы 1.1 не вызывает труда. Например, интегральный оператор K действует из любого пространства L_p $(1\leqslant p\leqslant\infty)$ в пространство C и вполне непрерывен, если ядро $K(x,\ t)$ непрерывно.

Мы не рассматривали отдельно линейные интегральные операторы, действующие из C в C. Это связано с тем, что каждый действующий из C в C линейный интегральный оператор можно рассматривать и как оператор, действующий из L_∞ в C (либо из L_∞ в L_∞).

1.3. Общие свойства интегральных операторов в пространствах L_p. К сожалению, неизвестно описание в простых терминах необходимых и достаточных свойств функции $K(x,\ t)$, при наличии которых интегральный оператор K с ядром $K(x,\ t)$ действует из L_p в L_q. В связи с этим представляют интерес, с одной стороны, различные общие свойства интегральных операторов, действующих из L_p в L_q, а с другой стороны, различные достаточные признаки того, что интегральный оператор $\boldsymbol{K}$ с ядром $K(x, t)$ действует из L_p в L_q.

Теорема 1.5. *Пусть $K(x, t)$ $(x, t \in \Omega)$ — измеримая по совокупности переменных функция. Пусть линейный интегральный оператор $\boldsymbol{K}$ с ядром $K(x, t)$ действует из L_p в L_q.*

Тогда оператор $\boldsymbol{K}$ непрерывен.

Теорема 1.6. *Пусть $K(x, t)$ $(x, t \in \Omega)$ — измеримая по совокупности переменных функция, $\boldsymbol{K}$ — линейный интегральный оператор с ядром $K(x, t)$.*

Тогда $\boldsymbol{K}$ действует из L_p в L_q и является регулярным в том и только том случае, когда из L_p в L_q действует линейный интегральный оператор $|\boldsymbol{K}|$ с ядром $|K(x, t)|$.

Подчеркнем, что теоремы 1.5 и 1.6 не содержат оценок нормы интегрального оператора $\boldsymbol{K}$.

Теорема 1.7. *Пусть функция $K(x, t)$ $(x, t \in \Omega)$ измерима по совокупности переменных, а интегральный оператор $\boldsymbol{K}$ с ядром $K(x, t)$ действует из L_p в L_q и регулярен.*

Тогда сопряженный к $\boldsymbol{K}$ оператор $\boldsymbol{K}^*$ действует из $L_{q'}$ в $L_{p'}$ и на функциях из $L_{q'}$ определяется равенством

$$\boldsymbol{K}^* u(x) = \int_{\Omega} K^*(x, t)\, u(t)\, dt,$$

где $K^*(x, t) = \overline{K(t, x)}$.

Приведем теперь теорему о полной непрерывности линейного интегрального оператора. Ниже через $\boldsymbol{P}_D$ обозначается оператор умножения на характеристическую функцию $\varkappa_D$ множества $D \subset \Omega$:

$$\boldsymbol{P}_D u(x) = \varkappa_D(x)\, u(x). \tag{5.15}$$

Теорема 1.8. *Пусть функция $K(x, t)$ $(x, t \in \Omega)$ измерима по совокупности переменных и пусть интегральный оператор $\boldsymbol{K}$ с ядром $K(x, t)$ действует из L_p в L_q. Пусть выполнено одно из условий:*

а) $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $p > q$, *оператор $\boldsymbol{K}$ регулярен;*

b) $1 < p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q < \infty$, $p \leqslant q$, *оператор* $\boldsymbol{K}$ *регулярен и*

$$\lim_{\operatorname{mes} G + \operatorname{mes} F \to 0} \| \boldsymbol{P}_G \boldsymbol{K} \boldsymbol{P}_F \|_{L_p \to L_q} = 0;$$

c) $p > 1$, $q < \infty$, *оператор* $\boldsymbol{K}$ *удовлетворяет условиям*:

$$\lim_{\operatorname{mes} G \to 0} \| \boldsymbol{P}_G \boldsymbol{K} \|_{L_p \to L_q} = \lim_{\operatorname{mes} F \to 0} \| \boldsymbol{K} \boldsymbol{P}_F \|_{L_p \to L_q} = 0;$$

d) $1 \leqslant p$, $q \leqslant \infty$; *для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такие функции* $a_i(x) \in L_q$, $b_i(t) \in L_p$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *что*

$$\| \boldsymbol{K} - \boldsymbol{K}_{a_1, \ldots, a_n;\, b_1, \ldots, b_n} \|_{L_p \to L_q} < \varepsilon,$$

где

$$\boldsymbol{K}_{a_1, \ldots, a_n;\, b_1, \ldots, b_n} u = \sum_{i=1}^{n} (u, b_i) a_i.$$

Тогда оператор $\boldsymbol{K}$ *вполне непрерывен.*

Проверка условий теоремы 1.8 обычно затруднений не вызывает.

Приведем некоторые полезные утверждения об интегральных операторах, связанные с оценками ядер.

Пусть $K(x, t)$ и $K_0(x, t)$ $(x, t \in \Omega)$ — измеримые по совокупности переменных функции, связанные неравенством

$$|K(x, t)| \leqslant K_0(x, t) \qquad (x, t \in \Omega); \tag{5.16}$$

пусть $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K}_0$ — интегральные операторы с ядрами $K(x, t)$, $K_0(x, t)$ соответственно. Тогда из теорем 1.5—1.8 вытекают следующие утверждения:

a) оператор $\boldsymbol{K}$ действует из L_p в L_q и регулярен, если $\boldsymbol{K}_0$ непрерывен как оператор из L_p в L_q; при этом

$$\| \boldsymbol{K} \|_{L_p \to L_q} \leqslant \| \boldsymbol{K}_0 \|_{L_p \to L_q};$$

b) оператор $\boldsymbol{K}$ действует из L_p в L_q и вполне непрерывен, если $\boldsymbol{K}_0$ вполне непрерывен как оператор из L_p в L_q и если $p > 1$ и $q < \infty$.

Пусть $K(x, t)$, $K_0(x, t)$, $Q(x, t)$ $(x, t \in \Omega)$ — измеримые по совокупности переменных функции, $K_0(x, t)$, $Q(x, t) \geqslant 0$, $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{K}_0$, $\boldsymbol{Q}$ — интегральные операторы с ядрами $K(x, t)$, $K_0(x, t)$, $Q(x, t)$. Оператор $\boldsymbol{K}$ действует из L_p в L_q, где $p > 1$, $q < \infty$, и вполне непрерывен, если оператор $\boldsymbol{K}_0$

действует из L_p в L_q, оператор Q действует из L_p в L_q и вполне непрерывен, и если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $h = h(\varepsilon)$, что

$$|K(x, t)| \leqslant \varepsilon K_0(x, t) \text{ при } |K(x, t)| \geqslant hQ(x, t). \quad (5.17)$$

Из этого интересного утверждения, в частности, следует, что действующий из L_p в L_q ($p > 1$, $q < \infty$) интегральный оператор K с ядром $K(x, t)$ вполне непрерывен, если из L_p в L_q действует интегральный оператор с ядром $M[K(x, t)]$, где $M(u)$ — неотрицательная функция, для которой

$$\lim_{u \to \infty} \frac{M(u)}{u} = \infty. \quad (5.18)$$

1.4. L-характеристики линейных интегральных операторов. При исследовании линейных операторов в пространствах L_p полезно понятие L-характеристики оператора K [12].

Пусть K — заданный линейный (например, интегральный) оператор. Его *L-характеристикой* $L(K; \mathfrak{R})$ называется множество всех таких точек $\{1/p, 1/q\}$ квадрата $0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1$, что K действует из L_p в L_q и обладает свойством $\mathfrak{R}$. В качестве $\mathfrak{R}$ здесь рассматриваются свойства непрерывности, регулярности, полной непрерывности; этим свойствам соответствуют L-характеристики $L(K;$ *непр.*$)$, $L(K;$ *рег.*$)$, $L(K;$ *вп. непр.*$)$.

L-характеристики линейных операторов обладают рядом замечательных свойств, вытекающих из различных интерполяционных теорем. В частности, каждая из L-характеристик — $L(K;$ *непр.*$)$, $L(K;$ *рег.*$)$, $L(K;$ *вп. непр.*$)$ — является выпуклым множеством, содержащим вместе с каждой точкой $\{\alpha, \beta\}$ все точки $\{\alpha', \beta'\}$, для которых $\alpha' \leqslant \alpha$, $\beta' \geqslant \beta$; L-характеристика $L(K;$ *вп. непр.*$)$, кроме того, либо содержит все внутренние точки L-характеристики $L(K;$ *непр.*$)$, либо является пустым множеством.

Теорема 1.9. *Пусть K — линейный интегральный оператор с ядром $K(x, t)$, $|K|$ — линейный интегральный оператор с ядром $|K(x, t)|$.*

Тогда:

a) $L(K;$ *непр.*$) = L(K;$ *действ.*$)$;

b) $L(K;$ *рег.*$) = L(|K|;$ *действ.*$)$;

c) *множество внутренних точек L-характеристики $L(\boldsymbol{K}$; непр.) входит в L-характеристику $L(\boldsymbol{K}$; вп. непр.);*

d) $\{\alpha', \beta\} \in L(\boldsymbol{K}$; *вп. непр.), если* $\alpha' < \alpha$, $\beta > 0$ *и* $\{\alpha, \beta\} \in L(\boldsymbol{K}$; *рег.);*

e) $\{\alpha, \beta'\} \in L(\boldsymbol{K}$; *вп. непр.), если* $\beta' > \beta$, $\alpha < 1$ *и* $\{\alpha, \beta\} \in L(\boldsymbol{K}$; *рег.).*

Интегральный оператор $\boldsymbol{K}^{\#}$ с ядром $K^*(x, t) = \overline{K(t, x)}$ назовем *транспонированным* к интегральному оператору $\boldsymbol{K}$ с ядром $K(x, t)$. Интегральный оператор $\boldsymbol{K}$ с ядром $K(t, x)$ назовем *симметрическим*, если $\boldsymbol{K}^{\#} = \boldsymbol{K}$.

Теорема 1.10. *L-характеристики $L(\boldsymbol{K}$; рег.) ($L(\boldsymbol{K}$; рег. и вп. непр.)) и $L(\boldsymbol{K}^{\#}$; рег.) ($L(\boldsymbol{K}^{\#}$; рег. и вп. непр.)) симметричны друг другу относительно прямой $\alpha + \beta = 1$. В частности, каждая L-характеристика $L(\boldsymbol{K}$; рег.) и $L(\boldsymbol{K}$; рег. и вп. непр.) симметрического оператора $\boldsymbol{K}$ симметрична относительно прямой $\alpha + \beta = 1$.*

1.5. Линейные U-ограниченные операторы. Как уже отмечалось, по-видимому, невозможно указать простые свойства ядра $K(x, t)$ интегрального оператора $\boldsymbol{K}$, эквивалентные тому, что $\boldsymbol{K}$ действует из L_p в L_q. Приводимые в настоящем пункте достаточные признаки непрерывности и полной непрерывности выделяют важный класс интегральных операторов, действующих в пространствах L_p, — класс U-ограниченных операторов.

Действующий из L_p в L_q линейный оператор $\boldsymbol{K}$ называется *U-ограниченным* [6], [10], [12], если для некоторого $u_0 \in L_q$ выполняется неравенство

$$|\boldsymbol{K}u(x)| \leqslant u_0(x) \|u\|_{L_p} \qquad (u \in L_p). \tag{5.19}$$

Ясно, что каждый U-ограниченный оператор $\boldsymbol{K}$ непрерывен и регулярен (как оператор из L_p в L_q); обратное верно лишь в случае, когда $q = \infty$.

Для каждого интегрального оператора $\boldsymbol{K}$ можно рассматривать L-характеристику $L(\boldsymbol{K}$; *U-огр.*). Эта L-характеристика является выпуклым множеством.

Теорема 1.11. *Пусть измеримая по совокупности переменных функция $K(x, t)$ ($x, t \in \Omega$) удовлетворяет условию:*

$$\varphi(x) = \|K(x, t)\|_{L_r} \in L_k,$$

где $1 \leqslant r,\ k \leqslant \infty$.

Тогда линейный интегральный оператор $\boldsymbol{K}$ *с ядром* $K(x, t)$ *действует из пространства* L_p, *где* $p = \frac{r}{r-1}$, *в пространство* L_q, *где* $q = k$, *U-ограничен и*

$$\|\boldsymbol{K}\|_{L_p \to L_q} \leqslant \|\varphi\|_{L_k}. \tag{5.20}$$

Неравенство (5.20) обращается в равенство, если $q = \infty$.

Теорема 1.12. *Пусть измеримая по совокупности переменных функция* $K(x, t)$ $(x, t \in \Omega)$ *удовлетворяет условию*:

$$\varphi(x) = \|K(x, t)\|_{L_r} \in L_k,$$

где $1 \leqslant r, q \leqslant \infty$. *Пусть выполнено одно из условий*:

a) $r, k < \infty$;

b) $r = \infty$, $k < \infty$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое разбиение* $D_0 \cup D_1 \cup \ldots \cup D_l = \Omega$ *множества* Ω, *что* $\operatorname{mes} D_0 = 0$ *и*

$$\int_\Omega |K(x, t') - K(x, t'')|\, dx < \varepsilon \qquad (t', t'' \in D_i;\ i = 1, \ldots, l);$$

c) $k = \infty$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое разбиение* $D_0 \cup D_1 \cup \ldots \cup D_l = \Omega$ *множества* Ω, *что* $\operatorname{mes} D_0 = 0$ *и (если* $r < \infty$*)*

$$\int_\Omega |K(x', t) - K(x'', t)|^r\, dt < \varepsilon \qquad (x', x'' \in D_i;\ i = 1, \ldots, l)$$

или (если $r = \infty$*)*

$$\operatorname*{vrai\,max}_{x \in \Omega} |K(x', t) - K(x'', t)| < \varepsilon$$
$$(x', x'' \in D_i;\ i = 1, \ldots, l).$$

Тогда линейный интегральный оператор $\boldsymbol{K}$ *с ядром* $K(x, t)$ *действует из* L_p, *где* $p = \frac{r}{r-1}$, *в* L_q, *где* $q = k$, *и вполне непрерывен.*

1.6. Линейные *U*-коограниченные операторы. Действующий из L_p в L_q линейный оператор $\boldsymbol{K}$ назовем *U-коограниченным* [7], [12], *если для некоторой функции* $v_0 \in L_{p'}$ выполняется неравенство

$$\|\boldsymbol{K}u\|_{L_q} \leqslant (|u|, v_0) \qquad (u \in L_p). \tag{5.21}$$

Каждый U-коограниченный оператор непрерывен. Можно рассматривать L-характеристику $L(\boldsymbol{K};\ U\text{-}коогр.)$. Эта L-характеристика является выпуклым множеством.

Понятия U-ограниченности линейного оператора и U-коограниченности тесно связаны. Именно, действующий из L_p в L_q линейный оператор $\boldsymbol{K}$ является U-ограниченным в том и только том случае, когда действующий из $L_{q'}$ в $L_{p'}$ сопряженный к $\boldsymbol{K}$ оператор $\boldsymbol{K}^*$ является U-коограниченным (в случае $p=\infty$ предполагается, что $\boldsymbol{K}^*$ действует из $L_{q'}$ в L_1, — это свойство всегда выполняется для регулярных интегральных операторов).

Теорема 1.13. *Пусть измеримая по совокупности переменных функция $K(x, t)$ $(x, t \in \Omega)$ удовлетворяет условию*:

$$\psi(t) = \|K(x, t)\|_{L_r} \in L_k,$$

где $1 \leqslant r,\ k \leqslant \infty$.

Тогда линейный интегральный оператор $\boldsymbol{K}$ *с ядром* $K(x, t)$ *действует из* L_p, *где* $p = \frac{k}{k-1}$, *в* L_q, *где* $q = r$, U-*коограничен и*

$$\|\boldsymbol{K}\|_{L_p \to L_q} \leqslant \|\psi\|_{L_k}. \tag{5.22}$$

Неравенство (5.22) обращается в равенство, если $k = \infty$.

Теорема 1.14. *Пусть измеримая по совокупности переменных функция $K(x, t)$ $(x, t \in \Omega)$ удовлетворяет условию*:

$$\psi(t) = \|K(x, t)\|_{L_r} \in L_k,$$

где $1 \leqslant r,\ k \leqslant \infty$. *Пусть выполнено одно из условий*:

a) $r,\ k < \infty$;

b) $r = \infty$, $k < \infty$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое разбиение* $D_0 \cup D_1 \cup \ldots \cup D_l = \Omega$ *множества* Ω, *что* $\operatorname{mes} D_0 = 0$ *и*

$$\int_\Omega |K(x', t) - K(x'', t)|\, dt < \varepsilon \qquad (x', x'' \in D_i;\ i = 1, \ldots, l);$$

c) $k=\infty$ *и для любого* $\varepsilon>0$ *можно указать такое разбиение* $D_0 \cup D_1 \cup \ldots \cup D_l = \Omega$ *множества* Ω, *что* $\operatorname{mes} D_0 = 0$ *и (если* $r<\infty$)

$$\int_\Omega |K(x, t') - K(x, t'')|^r \, dx < \varepsilon \qquad (t', t'' \in D_i;\ i=1, \ldots, l)$$

или (если $r=\infty$)

$$\operatorname*{vrai\,max}_{x \in \Omega} |K(x, t') - K(x, t'')| < \varepsilon \quad (t', t'' \in D_i;\ i=1, \ldots, l).$$

Тогда линейный интегральный оператор $\boldsymbol{K}$ *с ядром* $K(x, t)$ *действует из* L_p, *где* $p=\frac{k}{k-1}$, *в* L_q, *где* $q=r$, *и вполне непрерывен.*

1.7. Признаки с двумя условиями. Достаточные признаки непрерывности и полной непрерывности, изложенные в предыдущем пункте, не охватывают многие часто встречающиеся интегральные операторы. Ниже приводятся более сложные признаки непрерывности и полной непрерывности [8], [12].

Теорема 1.15. *Пусть* $K(x, t)$ $(x, t \in \Omega)$ — *измеримая по совокупности переменных функция, удовлетворяющая условиям:*

$$\varphi(x) = \|K(x, t)\|_{L_{r_1}} \in L_{k_1},$$
$$\psi(t) = \|K(x, t)\|_{L_{r_2}} \in L_{k_2},$$

где $0<r_1, r_2, k_1, k_2 \leqslant \infty$ *). *Пусть число* λ *удовлетворяет неравенствам:*

$$0 \leqslant \lambda, \quad \frac{1-\lambda}{r_1}+\frac{\lambda}{r_2}, \quad \frac{1-\lambda}{r_1}+\frac{\lambda}{k_2}, \quad \frac{1-\lambda}{k_1}+\frac{\lambda}{r_2} \leqslant 1.$$

Тогда линейный интегральный оператор $\boldsymbol{K}$ *с ядром* $K(x, t)$ *действует из* L_p *в* L_q, *где*

$$\frac{1}{p} = 1 - \frac{1-\lambda}{r_1} - \frac{\lambda}{k_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\lambda}{k_1} + \frac{\lambda}{r_2},$$

---

*) Через L_r, где $r<1$ (аналогично случаю $r \geqslant 1$), обозначается множество функций $z(x)$, для которых имеет смысл и конечна «норма» $\|z\|_{L_r} = \left\{\int_\Omega |z(x)|^r \, dx\right\}^{1/r}$.

регулярен и

$$\|K\|_{L_p \to L_q} \leqslant \|\varphi\|_{L_{k_1}}^{1-\lambda} \|\psi\|_{L_{k_2}}^{\lambda}. \tag{5.23}$$

Теорема 1.16. *Пусть $K(x, t)$ $(x, t \in \Omega)$ — измеримая по совокупности переменных функция, удовлетворяющая условиям:*

$$\varphi(x) = \|K(x, t)\|_{L_{r_1}} \in L_{k_1},$$

$$\psi(t) = \|K(x, t)\|_{L_{r_2}} \in L_{k_2},$$

где $0 < r_1, r_2, k_1, k_2 \leqslant \infty$. Пусть число λ удовлетворяет неравенствам:

$$0 \leqslant \lambda, \quad \frac{1-\lambda}{r_1} + \frac{\lambda}{r_2}, \quad \frac{1-\lambda}{r_1} + \frac{\lambda}{k_2}, \quad \frac{1-\lambda}{k_1} + \frac{\lambda}{r_2} \leqslant 1.$$

Пусть, наконец, выполняется одно из условий:

a) $0 < \lambda < 1$, $\min\{k_1, k_2\} < \infty$;

b) $0 < \lambda < 1$, $k_1 = k_2 = \infty$, $r_1, r_2 < \infty$ *и*

$$\lim_{\operatorname{mes} D \to 0} \left\| \int_D |K(x, t)|^{r_1} dt \right\|_{L_\infty} = 0;$$

c) $0 < \lambda < 1$; $k_1 = k_2 = \infty$, $r_1, r_2 < \infty$ *и*

$$\lim_{\operatorname{mes} D \to 0} \left\| \int_D |K(x, t)|^{r_2} dx \right\|_{L_\infty} = 0.$$

*Тогда линейный интегральный оператор **K** с ядром $K(x, t)$ действует из L_p в L_q, где*

$$\frac{1}{p} = 1 - \frac{1-\lambda}{r_1} - \frac{\lambda}{k_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\lambda}{k_1} + \frac{\lambda}{r_2},$$

и вполне непрерывен.

Приведем здесь еще одну теорему для симметричных ядер $K(x, t)$.

Теорема 1.17. *Пусть $K(x, t)$ $(x, t \in \Omega)$ — измеримая по совокупности переменных функция, удовлетворяющая условию:*

$$\varphi(x) = \|K(x, t)\|_{L_r} \in L_k,$$

где $1 \leqslant r \leqslant \infty$, $0 < k < \infty$. Пусть

$$|K(x, t)| = |K(t, x)|$$

и число λ удовлетворяет неравенствам:

$$0 \leqslant \lambda, \quad \frac{1-\lambda}{r} + \frac{\lambda}{k} \leqslant 1.$$

Тогда линейный интегральный оператор $\boldsymbol{K}$ *с ядром* $K(x, t)$ *действует из* L_p *в* L_q, *где*

$$\frac{1}{p} = 1 - \frac{1-\lambda}{r} - \frac{\lambda}{k},$$
$$\frac{1}{q} = \frac{1-\lambda}{q} + \frac{\lambda}{r},$$

регулярен и

$$\| \boldsymbol{K} \|_{L_p \to L_q} \leqslant \| \varphi \|_{L_k}. \tag{5.24}$$

При этом оператор $\boldsymbol{K}$ *вполне непрерывен, если, кроме того,* $0 < \lambda < 1$ *и выполнено одно из условий:*

a) $k < \infty$;

b) $k = \infty$, $r < \infty$ *и*

$$\lim_{\operatorname{mes} D \to 0} \left\| \int_D |K(x, t)|^r \, dx \right\|_{L_\infty} = 0.$$

1.8. Один тонкий признак непрерывности и полной непрерывности. В этом пункте приводятся некоторые достаточные признаки непрерывности и полной непрерывности, из которых, в частности, вытекают известные предельные теоремы С. Л. Соболева [19] об операторах типа потенциала.

Пусть функция $K(x, t)$ $(x, t \in \Omega)$ измерима по совокупности переменных. Будем говорить, что $K(x, t)$ удовлетворяет *условию* $\mathfrak{N}(\alpha, \beta)$ (соответственно $\mathfrak{N}^0(\alpha, \beta)$), если она суммируема и

$$\int_G \int_F |K(x, t)| \, dx \, dt \leqslant k (\operatorname{mes} F)^\alpha (\operatorname{mes} G)^\beta \tag{5.25}$$

(аналогично

$$\int_G \int_F |K(x, t)| \, dx \, dt \leqslant k(\operatorname{mes} F, \operatorname{mes} G) (\operatorname{mes} F)^\alpha (\operatorname{mes} G)^\beta, \tag{5.26}$$

где $k(u, v)$ — функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{u, v \to 0} k(u, v) = 0).$$

Здесь α, β — некоторые неотрицательные числа.

Теорема 1.18. *Пусть функция $K(x, t)$ $(x, t \in \Omega)$ измерима по совокупности переменных и удовлетворяет условиям $\mathfrak{N}(\alpha_1, \beta_1)$, $(\mathfrak{N}^0(\alpha_1, \beta_1))$, $\mathfrak{N}(\alpha_2, \beta_2)$, причем выполнены неравенства*:

$$\alpha_1 \neq \alpha_2, \quad \beta_1 \neq \beta_2.$$

Пусть число λ удовлетворяет неравенствам:

$$0 < \lambda < 1, \quad 0 \leqslant (1-\lambda)\alpha_1 + \lambda\alpha_2, \quad (1-\lambda)\beta_1 + \lambda\beta_2 \leqslant 1,$$

и либо

$$(1-\lambda)(\alpha_1 + \beta_1) + \lambda(\alpha_2 + \beta_2) < 1,$$

либо $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2 = 1$.

Тогда линейный интегральный оператор $\boldsymbol{K}$ *с ядром* $K(x, t)$ *действует из* L_p *в* L_q, *где*

$$1/p = 1 - (1-\lambda)\alpha_1 - \lambda\alpha_2, \quad 1/q = (1-\lambda)\beta_1 + \lambda\beta_2,$$

и непрерывен (*вполне непрерывен*).

1.9. Частные классы интегральных операторов. В этом пункте приводится описание L-характеристик некоторых важных классов линейных интегральных операторов [8], [9], [19], [22].

а) *Операторами типа потенциала* называются линейные интегральные операторы с ядрами вида

$$K(x, t) = \frac{Q(x, t)}{|x-t|^\lambda}, \tag{5.27}$$

где λ — некоторое неотрицательное число, а $Q(x, t)$ — функция, непрерывная при $t \neq x$ и удовлетворяющая при любом $\varepsilon > 0$ условиям:

$$\begin{aligned} &\lim_{|x-t| \to 0} |x-t|^\varepsilon Q(x, t) = 0, \\ &\lim_{|x-t| \to 0} |x-t|^{-\varepsilon} Q(x, t) = \infty. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Будем говорить, что оператор $\boldsymbol{K}$ имеет *показатель* λ, если

$$0 < m_1 \leqslant |Q(x, t)| \leqslant m_2 < \infty; \tag{5.29}$$

показатель $\lambda - 0$, если

$$\lim_{|x-t|\to 0} |Q(x, t)| = 0; \tag{5.30}$$

показатель $\lambda + 0$, если

$$\lim_{|x-t|\to 0} |Q(x, t)| = \infty. \tag{5.31}$$

К операторам типа потенциала относятся, в частности, операторы с ядрами

$$K(x, t) = \frac{1}{|x-t|^{\lambda} \ln^{\nu}|x-t|}. \tag{5.32}$$

Показатель этого оператора равен $\lambda - \operatorname{sign}\nu \cdot 0$.

L-характеристики $L(\boldsymbol{K}$; *рег.*) и $L(\boldsymbol{K}$; *вп. непр.*) операторов типа потенциала могут быть исследованы при помощи теорем пп. 1.2 — 1.8. В приводимой ниже теореме дается описание этих L-характеристик.

Теорема 1.19. *Пусть* $\boldsymbol{K}$ — *интегральный оператор типа потенциала с показателем* λ.

Тогда L-характеристика $L(\boldsymbol{K}$; рег.) совпадает с множеством точек $\{\alpha, \beta\}$:

$$0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1, \quad \beta \leqslant \alpha - 1 + \lambda/n,$$

из которого исключены точки $\{1 - \lambda/n, 0\}$ *и* $\{1, \lambda/n\}$, *а L-характеристика $L(\boldsymbol{K}$; вп. непр.) совпадает с множеством точек* $\{\alpha, \beta\}$:

$$0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1, \quad \beta < \alpha - 1 + \lambda/n.$$

Теорема 1.20. *Пусть* $\boldsymbol{K}$ — *интегральный оператор типа потенциала с показателем* $\lambda + 0$.

Тогда L-характеристики $L(\boldsymbol{K}$; рег.), $L(\boldsymbol{K}$; вп. непр.) совпадают с множеством точек $\{\alpha, \beta\}$, *для которых*

$$0 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1, \quad \beta < \alpha - 1 + \lambda/n.$$

Теорема 1.21. *Пусть* $\boldsymbol{K}$ — *интегральный оператор типа потенциала с показателем* $\lambda - 0$.

Тогда каждая из L-характеристик $L(\boldsymbol{K};$ рег.) и $L(\boldsymbol{K};$ вп. непр.) совпадает с множеством точек

$$0 \leqslant \alpha, \quad \beta \leqslant 1, \quad \beta \leqslant \alpha - 1 + \lambda/n,$$

из которого, возможно, исключены $\{1 - \lambda/n, 0\}$, $\{1, \lambda/n\}$.

b) Интегральный оператор с ядром

$$K_r(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{x^r}(x-t)^{r-1}, & \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & , \text{если} \quad x < t \leqslant 1, \end{cases} \tag{5.33}$$

где $r > 0$, называется *оператором Римана — Лиувилля*; число r называется порядком этого оператора.

Теорема 1.22. *L-характеристика $L(\boldsymbol{K};$ рег.) оператора Римана — Лиувилля совпадает с множеством точек* $\{\alpha, \beta\}$, *для которых*

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1,$$

без точек $\{0, 0\}$ *и* $\{1, 1\}$; *L-характеристика $L(\boldsymbol{K};$ вп. непр). оператора Римана — Лиувилля совпадает с множеством точек* $\{\alpha, \beta\}$, *для которых*

$$0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1.$$

c) Интегральный оператор с ядром

$$K_r(x, t) = \begin{cases} x^{r-1}t^{-r}, & \text{если} \quad 0 \leqslant t \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & \text{если} \quad x < t \leqslant 1, \end{cases} \tag{5.34}$$

где $0 \leqslant r < 1$, называется *оператором Харди*.

Теорема 1.23. *L-характеристика $L(\boldsymbol{K};$ рег.) оператора Харди совпадает с множеством точек* $\{\alpha, \beta\}$, *для которых*

$$0 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 - r.$$

L-характеристика $L(\boldsymbol{K};$ вп. непр.) оператора Харди совпадает с множеством точек $\{\alpha, \beta\}$, *для которых*

$$0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 - r,$$

без точек $\{0, 0\}$ *и* $\{1 - r, 1 - r\}$.

Сделаем одно замечание. Ядро оператора Харди не удовлетворяет условиям теоремы 1.1, и поэтому этот оператор не действует из L_∞ в C. Не действует он и из C в C. Однако если C

рассматривать как подпространство пространства L_∞ (т. е. считать элементами C функции, совпадающие с непрерывными почти всюду), то оператор Харди действует из C (но не из L_∞) в C и непрерывен.

1.10. Дополнительные замечания. Общие теоремы о линейных интегральных операторах, приведенные в параграфе, естественным образом распространяются [6] на общие банаховы пространства измеримых функций, в которых конус неотрицательных функций воспроизводящий, нормальный и сильно миниэдральный [11], [14]. К таким пространствам относятся пространства Орлича, Лоренца, Марцинкевича (см., например, [6], [12], [13]) и др.

В достаточных признаках, приведенных в параграфе, специфика конкретных пространств играет более важную роль. Сравнительно полное обобщение приведенных достаточных признаков получено пока для различных классов пространств Орлича [13].

Отметим, что в ряде случаев приходится рассматривать интегральные операторы, действующие из пространств функций, определенных на множестве Ω, в пространства функций, определенных на другом множестве Ω_0. Для таких операторов справедливы естественные аналоги приведенных выше теорем.

§ 2. Уравнения второго рода. Резольвента интегрального оператора

2.1. Постановка задачи. Уравнение

$$u(x) = \int_\Omega K(x, t)\, u(t)\, dt + f(x) \tag{5.35}$$

называется *линейным интегральным уравнением Фредгольма второго рода*. Здесь Ω — ограниченное замкнутое множество конечномерного пространства ненулевой лебеговой меры, $K(x, t)$ $(x, t \in \Omega)$ — заданная измеримая по совокупности переменных функция, $f(x)$ — известная измеримая функция, $u(x)$ — искомая функция. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется *однородным*, если $f(x) \not\equiv 0$ — *неоднородным*.

Исследование важных классов уравнений Фредгольма второго рода охватывается теорией Рисса — Шаудера — Банаха (см., например, [1], [5], [9], [23]) линейных операторных уравнений. Это связано с тем, что линейный интегральный оператор

$$Ku(x) = \int_{\Omega} K(x, t)\, u(t)\, dt, \tag{5.36}$$

определенный правой частью уравнения (5.35), обычно оказывается непрерывным или вполне непрерывным в некотором банаховом пространстве E измеримых на Ω функций; в этом случае вместо уравнения (5.35) естественно рассматривать в пространстве E линейное операторное уравнение

$$u = Ku + f \tag{5.37}$$

(конечно, при дополнительном предположении, что $f \in E$).

Подчеркнем, что исследование уравнения (5.37) не вполне эквивалентно исследованию уравнения (5.35). Например, если для уравнения (5.37) установлена его однозначная разрешимость, то тем самым для уравнения (5.35) установлена только разрешимость — уравнение (5.35) может иметь несколько решений (из них, конечно, лишь одно будет принадлежать пространству E). С другой стороны, если установлена разрешимость уравнения (5.37), то тем самым для (5.35) установлено существование решений из E, т. е. решений с некоторыми специальными свойствами.

Часто оказывается, что оператор (5.36) является непрерывным (или вполне непрерывным) сразу в нескольких пространствах. Возникает задача, какое из этих пространств выбрать при исследовании интегрального уравнения (5.35). Здесь может оказаться, что при исследовании одних задач нужно выбирать одно пространство, а при исследовании других — другое. Например, ясно, что при исследовании существования решения желательно выбирать самые «узкие» пространства, в которых действует оператор (5.36); при исследовании единственности — самые «широкие».

Предположим, что интегральный оператор $\boldsymbol{K}$ с ядром $K(x, t)$ непрерывен в пространстве E. В этом параграфе нас будет интересовать в основном вопрос о том, при каких дополнительных условиях на оператор $\boldsymbol{K}$ (т. е. на ядро $K(x, t)$) уравнение (5.37) будет иметь единственное решение $u \in E$, какова бы ни была функция $f \in E$. Этот вопрос тесно связан с изучением резольвенты $\boldsymbol{R}(\lambda, \boldsymbol{K})$ линейного интегрального оператора.

2.2. Резольвента линейного оператора и спектр. Напомним определение резольвенты произвольного линейного оператора.

Пусть K — действующий в комплексном банаховом пространстве E линейный непрерывный оператор. Комплексное число λ называется *регулярным* для оператора K, если уравнение

$$\lambda u - Ku = f \tag{5.38}$$

имеет единственное решение u в E при любом $f \in E$. Это решение равенством

$$R(\lambda, K) f = u \tag{5.39}$$

определяет действующий в пространстве E линейный непрерывный оператор $R(\lambda, K)$.

Совокупность всех регулярных значений оператора K образует его *резольвентное множество* $\Lambda(K)$; дополнительное множество $\Sigma(K)$ называется *спектром* оператора K.

Оператор-функцию $R(\lambda, K)$, определенную на $\Lambda(K)$, называют *резольвентой* оператора K. Резольвента $R(\lambda, K)$ по определению есть оператор, удовлетворяющий тождествам

$$R(\lambda, K) K = KR(\lambda, K) = \lambda R(\lambda, K) - I. \tag{5.40}$$

Для любых λ, $\mu \in \Lambda(K)$ резольвента удовлетворяет важному тождеству Гильберта:

$$R(\lambda, K) - R(\mu, K) = (\mu - \lambda) R(\lambda, K) R(\mu, K). \tag{5.41}$$

Резольвентное множество $\Lambda(K)$ каждого линейного непрерывного оператора не пусто; этому множеству принадлежит внешность круга с центром в начале координат и радиусом

$$\rho(K) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\|K^n\|} \tag{5.42}$$

(предел здесь всегда существует). Число $\rho(K)$ называется *спектральным радиусом* оператора K. Более того, для каждого λ, $|\lambda| > \rho(K)$, резольвента $R(\lambda, K)$ допускает представление

$$R(\lambda, K) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{n+1}} K^n; \tag{5.43}$$

здесь ряд сходится по норме пространства операторов, действующих в пространстве E.

Резольвентное множество оператора K открыто, а резольвента $R(\lambda, K)$ является аналитической функцией. Более того, при любом $\lambda_0 \in \Lambda(K)$ резольвента $R(\lambda, K)$ допускает представление

$$R(\lambda, K) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\lambda - \lambda_0)^n [R(\lambda_0, K)]^n \tag{5.44}$$

$$\left(|\lambda - \lambda_0| < \{\rho[R(\lambda_0, K)]\}^{-1}\right).$$

И в этом представлении ряд сходится по норме операторов, действующих в пространстве E.

Ниже нам будет удобно вместе с резольвентой $R(\lambda, K)$ рассматривать так называемый *разрешающий оператор*

$$L(\lambda, K) = \lambda K R(\lambda, K) \quad (\lambda \in \Lambda(K)). \tag{5.45}$$

Этот оператор обычно обладает более хорошими свойствами по сравнению с оператором K. Очевидно,

$$R(\lambda, K) = \frac{1}{\lambda} I + \frac{1}{\lambda^2} L(\lambda, K) \qquad (\lambda \in \Lambda(K),\ \lambda \neq 0). \tag{5.46}$$

Разрешающий оператор $L(\lambda, K)$ удовлетворяет аналогичному (5.41) тождеству

$$L(\mu, K) - L(\lambda, K) = (1/\lambda - 1/\mu) L(\lambda, K) L(\mu, K) \tag{5.47}$$

$$(\lambda, \mu \in \Lambda(K);\ \lambda, \mu \neq 0).$$

Как и резольвента, разрешающий оператор является аналитической функцией λ на $\Lambda(K)$. Из (5.43), (5.44) вытекают аналогичные разложения для разрешающего оператора:

$$L(\lambda, K) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} K^{n+1} \qquad \left(\frac{1}{|\lambda|} < [\rho(K)]\right), \tag{5.48}$$

$$L(\lambda, K) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1/\lambda - 1/\lambda_0)^n [L(\lambda_0, K)]^n \tag{5.49}$$

$$\left(|1/\lambda - 1/\lambda_0| < \{\rho[L(\lambda_0, K)]\}^{-1}\right).$$

2.3. Пространство ядер. Прежде чем перейти к изучению разрешающего оператора для линейного интегрального оператора, введем в рассмотрение специальные банаховы пространства ядер. Для простоты ограничимся ядрами операторов, действующих из одного пространства L_p в другое пространство L_q.

Пусть $p,\ q \in [1,\ \infty]$. Обозначим через $B_{p,q}$ множество функций $K(x,\ t)$, измеримых по совокупности переменных, для которых при любых $u \in L_p$, $v \in L_{q'}$ выполняется неравенство

$$\int_\Omega \int_\Omega K(x,\ t)\, u(x)\, v(t)\, dx\, dt < \infty. \tag{5.50}$$

Множество $B_{p,q}$ с обычными операциями и с нормой

$$\|\boldsymbol{K}\|_{B_{p,q}} = \sup_{\|u\|_{L_p},\ \|v\|_{L_{q'}} \leqslant 1} \int_\Omega \int_\Omega |K(x,\ t)\, u(x)\, v(t)|\, dx\, dt \tag{5.51}$$

является банаховым пространством. Функции $K(x,\ t) \in B_{p,q}$ являются ядрами регулярных операторов (см. пп. 1.1, 1.3), действующих из L_p в L_q.

Пусть $K_1(x,\ t) \in B_{p,q}$, $K_2(x,\ t) \in B_{q,r}$, где $1 \leqslant p,\ q,\ r \leqslant \infty$, $\boldsymbol{K}_1$ — интегральный оператор с ядром $K_1(x,\ t)$, $\boldsymbol{K}_2$ — интегральный оператор с ядром $K_2(x,\ t)$. Ядро $K = K_2 * K_1$ определим равенством

$$K(x,\ t) = \int_\Omega K_2(x,\ \sigma)\, K_1(\sigma,\ t)\, d\sigma. \tag{5.52}$$

Функция $K(x,\ t)$ принадлежит пространству $B_{p,r}$ и является ядром действующего из L_p в L_r регулярного интегрального оператора $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}_2\boldsymbol{K}_1$.

Ниже в основном рассматриваются пространства ядер операторов, действующих в одном и том же пространстве L_p. В этом случае операция (5.52) является «ассоциативным умножением» в пространстве $B_{p,p}$; эта операция, конечно, не коммутативна.

Пусть $K(x,\ t)$ принадлежит $B_{p,p}$, $\boldsymbol{K}$ — интегральный оператор с ядром $K(x,\ t)$. Введем ядра

$$K_{(1)} = K, \quad K_{(2)} = K * K, \ \ldots \tag{5.53}$$

Ядра $K_{(n)}$ называются *итерированными ядрами, построенными по ядру* $K(x,\ t)$. Ясно, что n-е итерированное ядро является ядром действующего в L_p интегрального оператора $\boldsymbol{K}^n$.

2.4. Резольвента линейного интегрального оператора. Для линейных интегральных операторов K точка 0 не принадлежит резольвентному множеству $\Lambda(K)$, поэтому для них изучение резольвенты полностью эквивалентно изучению разрешающего оператора $L(\lambda, K)$. Оказывается, что разрешающий оператор $L(\lambda, K)$ интегрального оператора, вообще говоря, тоже будет интегральным оператором. Как и выше, здесь мы ограничимся лишь операторами, действующими в пространстве L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.

Ниже через $\Lambda^0 K$ обозначается множество комплексных чисел $\lambda \in \Lambda(K)$, для которых разрешающий оператор $L(\lambda, K)$ допускает интегральное представление

$$L(\lambda, K)\, u(x) = \int\limits_{\Omega} L(\lambda;\ x,\ t)\, u(t)\, dt, \tag{5.54}$$

а через $\Lambda^{00}(K)$ — подмножество тех $\lambda \in \Lambda^0(K)$, для которых $L(\lambda, K)$ — регулярный интегральный оператор. Очевидно, $\Lambda^{00}(K) \subseteq \Lambda^0(K) \subseteq \Lambda(K)$.

Теорема 2.1. *Пусть K — действующий в $L_p(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ интегральный оператор с ядром $K(x, t)$.*

Тогда справедливы следующие утверждения:

a) *Множество $\Lambda^{00}(K)$ открыто; если $\lambda_0 \in \Lambda^{00}(K)$, то*

$$L(\lambda;\ x,\ t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (1/\lambda - 1/\lambda_0)^n L_{(n)}(\lambda_0;\ x,\ t) \tag{5.55}$$

$$\left(|1/\lambda - 1/\lambda_0| < \{\rho[\,|L(\lambda_0, K)|\,]\}^{-1}\right)^{*});$$

ряд справа сходится по норме пространства $B_{p,p}$ и, в частности, по мере.

b) *При любых λ, $\mu \in \Lambda^{00}(K)$ выполняется тождество*

$$\mu\lambda\,[L(\lambda;\ x,\ t) - L(\mu;\ x,\ t)] =$$
$$= (\mu - \lambda) \int\limits_{\Omega} L(\lambda;\ x,\ \sigma)\, L(\mu;\ \sigma,\ t)\, d\sigma. \tag{5.56}$$

Теорема 2.2. *Пусть K — действующий в L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ регулярный интегральный оператор с ядром $K(x, t)$.*

---

*) Напомним, что через $|K|$, где K — интегральный оператор с ядром $K(x, t)$, обозначается интегральный оператор с ядром $|K(x, t)|$.

Тогда:

a) *множество* $\Lambda^{00}(K)$ *содержит множество*

$$|\lambda| > \{\rho(|K|)\}^{-1}; \tag{5.57}$$

при этом

$$L(\lambda;\ x,\ t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda^n} K_{(n+1)}(x,\ t); \tag{5.58}$$

ряд справа сходится по норме $B_{p,\,p}$ *и, в частности, по мере*;

b) *для любого* $\lambda \in \Lambda^{00}(K)$ *справедливы тождества*

$$L(\lambda;\ x,\ t) = \lambda \int_{\Omega} K(x,\ \sigma) L(\lambda;\ \sigma,\ t)\, d\sigma + K(x,\ t) =$$
$$= \lambda \int_{\Omega} L(\lambda;\ x,\ \sigma) K(\sigma,\ t)\, d\sigma + K(x,\ t). \tag{5.59}$$

В заключение пункта приведем одно утверждение о разрешающих операторах U-ограниченных и U-коограниченных операторов (см. пп. 1.5—1.6).

Теорема 2.3. *Пусть* K *— действующий в* L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ U*-ограниченный* (U*-коограниченный*) *интегральный оператор с ядром* $K(x,\ t)$.

Тогда $\Lambda(K) = \Lambda^{00}(K)$; *при любом* $\lambda \in \Lambda(K)$ *оператор* $L(\lambda,\ K)$ *является* U*-ограниченным* (*соответственно* U*-коограниченным*).

2.5. Резольвента «улучшающих» операторов. Пусть E, E_1, E_2 — банаховы пространства, причем $E_2 \subset E \subset E_1$ и

$$\|u\|_{E_1} \leqslant a\|u\|_E \quad (u \in E), \quad \|u\|_E \leqslant a\|u\|_{E_2} \ (u \in E_2). \tag{5.60}$$

Действующий в пространстве E оператор K назовем *улучшающим*, если он одновременно действует из E_1 в E_2 и непрерывен. Для улучшающих операторов утверждения предыдущих пунктов могут быть существенно дополнены.

Теорема 2.4. *Пусть* E, E_1, E_2 *— банаховы пространства, удовлетворяющие условию* (5.60). *Пусть* K *— улучшающий оператор.*

Тогда при любом $\lambda \in \Lambda(K)$ *разрешающий оператор* $L(\lambda,\ K)$ *действует из* E_1 *в* E_2 *и непрерывен. Более того, разложения* (5.48) — (5.49) *сходятся по норме пространства операторов, действующих из* E_1 *в* E_2.

Для интегральных операторов эту теорему можно дополнить следующим утверждением.

Теорема 2.5. *Пусть оператор K действует из L_p в L_q $(1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty)$ и регулярен.*

Тогда при $\lambda \in \Lambda^{00}(K)$ разрешающий оператор

$$L(\lambda, K)u(x) = \int_{\Omega} L(\lambda; x, t)u(t)\,dt \qquad (5.61)$$

также действует из L_p в L_q и регулярен. При этом разложения (5.55) *и* (5.58) *сходятся по норме пространства $B_{p,q}$.*

2.6. Условия однозначной разрешимости. Вернемся к изучению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Уравнение

$$\lambda u = Ku + f, \qquad (5.62)$$

где K — действующий в E линейный непрерывный оператор, имеет единственное решение $u \in E$ при любом $f \in E$ в том и только том случае, когда λ принадлежит резольвентному множеству $\Lambda(K)$ оператора K. Это решение определяется равенством

$$u = \frac{1}{\lambda} f + \frac{1}{\lambda^2} L(\lambda, K) f, \qquad (5.63)$$

где $L(\lambda, K)$ — разрешающий оператор для оператора K. Если K — улучшающий оператор и $f \in E_2$, то $u \in E_2$. Это решение единственно и в пространстве E_1.

Основная трудность связана с проверкой включения $\lambda \in \Lambda(K)$. Это условие выполнено, если $\rho(K) < |\lambda|$. В связи с этим большой интерес представляют оценки спектрального радиуса сверху; такие оценки излагались в гл. IV, § 3 (см. также § 5 настоящей главы).

2.7. Уравнения с итерированными ядрами. Рассмотрим уравнение

$$\lambda u = Ku + f. \qquad (5.64)$$

Ясно, что каждое решение $u \in E$ этого уравнения будет одновременно и решением уравнения

$$\lambda^n u = K^n u + H(\lambda) f, \qquad (5.65)$$

где оператор $H(\lambda)$ определен равенством

$$H(\lambda)f=\lambda^{n-1}f+\lambda^{n-2}Kf+\ldots+K^{n-1}f. \qquad (5.66)$$

Если $\lambda^n\in\Lambda(K^n)$, то справедливо и обратное утверждение: каждое решение уравнения (5.65) будет решением и уравнения (5.64).

Справедлива формула

$$R(\lambda,\ K)=R(\lambda^n,\ K^n)H(\lambda), \qquad (5.67)$$

определяющая резольвенту оператора $R(\lambda,\ K)$ через резольвенту оператора $R(\lambda^n,\ K^n)$. Отметим интересную формулу

$$R(\lambda,\ K^n)=$$
$$=\frac{1}{n\lambda^{1-\frac{1}{n}}}[R(\lambda,K)+\omega R(\omega\lambda,K)+\ldots+\omega^{n-1}R(\omega^{n-1}\lambda,K)], \qquad (5.68)$$

где ω — произвольный первообразный корень из единицы степени n. Эта формула выражает резольвенту $R(\lambda,\ K^n)$ оператора K^n через резольвенту $R(\lambda,\ K)$ оператора K.

Аналогичные формулы можно написать для разрешающих операторов. Именно, из (5.67) вытекает, что

$$L(\lambda,\ K)=\frac{1}{\lambda^{n-1}}H(\lambda)K-\frac{1}{\lambda^{2n-1}}L(\lambda^n,\ K^n)H(\lambda)K \qquad (5.69)$$

и аналогично из (5.68) —

$$L(\lambda^n,\ K^n)=\frac{\lambda^n}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\omega^i\lambda}L(\omega^i\lambda,\ K). \qquad (5.70)$$

В случае, когда K — интегральный оператор (действующий в пространстве L_p) и когда $\lambda^n\in\Lambda^{00}(K^n)$, формулам (5.69) — (5.70) отвечают соответствующие формулы для ядер:

$$L(\lambda;\ x,\ t)=$$
$$=\frac{1}{\lambda^{n-1}}\Delta(\lambda;x,t)-\frac{1}{\lambda^{2n-1}}\int_\Omega L^{|n|}(\lambda;\ x,\ \sigma)\Delta(\lambda,\ \sigma,\ t)\,d\sigma, \qquad (5.71)$$

где

$$\Delta(\lambda;\ x,\ t)=\sum_{k=1}^{n}\lambda^{n-k}K_{(k)}(x,\ t)$$

и

$$L^{[n]}(\lambda;\ x,\ t)=\frac{\lambda^n}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{1}{\omega^i\lambda}L(\omega^i\lambda;\ x,\ t); \tag{5.72}$$

здесь через $L^{[n]}(\lambda;\ x,\ t)$ обозначено ядро разрешающего оператора $L(\lambda^n,\ K^n)$.

Переход от изучения уравнения (5.64) к уравнению (5.65) часто оправдывается тем, что оператор K^n обладает более хорошими свойствами, чем оператор K. Пусть, например (см. п. 1.9), $K(x,\ t)$ — ядро оператора K типа потенциала с показателем λ (или с показателем $\lambda-0$ или с показателем $\lambda+0$). Тогда n-е итерированное ядро $K_n(x,\ t)$ при $r<\frac{n}{n-\lambda}$ (n — размерность пространства, в котором расположено множество Ω) также является ядром типа потенциала с показателем $r\lambda-(r-1)n$ (соответственно с показателем $[r\lambda-(r-1)n]-0$ или $[r\lambda-(r-1)n]+0$); при $r=\frac{n}{n-\lambda}$ — оператором типа потенциала с показателем 0, -0 или $+0$; при $r>\frac{n}{n-\lambda}$ — ограниченным ядром.

2.8. Союзные уравнения. Уравнения

$$\lambda u(x)=\int_\Omega K(x,\ t)\,u(t)\,dt+f(x), \tag{5.73}$$

$$\bar{\lambda}v(x)=\int_\Omega K^*(x,\ t)\,v(t)\,dt+g(x), \tag{5.74}$$

где $K^*(x,\ t)=\overline{K(t,\ x)}$, принято называть *союзными*. Изучение этих уравнений удобно проводить совместно. При этом приходится уравнение (5.73) рассматривать в одном банаховом пространстве E, а уравнение (5.74) — в другом пространстве F. Естественно, пространства E и F должны находиться между собой в определенных отношениях.

Банаховы пространства E и F назовем *двойственными*, если справедливы равенства

$$\|u\|_E=\sup_{\|v\|_F\leqslant 1}|(u,\ v)|,\quad \|v\|_F=\sup_{\|u\|_E\leqslant 1}|(u,\ v)| \tag{5.75}$$

$$(u\in E,\ v\in F),$$

где

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x)\,\overline{v(x)}\,dx. \tag{5.76}$$

Примерами двойственных пар пространств могут служить пары $\{L_p, L_{p'}\}$, где $1/p + 1/p' = 1$, $\{C, L_1\}$ и др. Если E и F — пара двойственных пространств, то F можно рассматривать как подпространство сопряженного к E пространства E^*.

Пусть E и F — пара двойственных пространств. Пусть K — действующий в E оператор. Будем считать, что $K^*F \subset F$, и обозначим через K' сужение оператора K^* на F. В этом случае операторы K и K' называют *двойственными*.

Теорема 2.6. *Пусть E и F — двойственные пространства, а K и K' — действующие в них двойственные операторы.*

Тогда содержащие точку ∞ компоненты $\Lambda_\infty(K)$ и $\Lambda_\infty(K')$ резольвентных множеств операторов K и K' симметричны относительно оси абсцисс, причем при $\lambda \in \Lambda_\infty(K)$ операторы $R(\lambda, K)$ и $R(\bar{\lambda}, K')$ также двойственны.

Для союзных интегральных уравнений справедлива

Теорема 2.7. *Пусть K — действующий в $L_p (1 \leqslant p \leqslant \infty)$ (или в C) регулярный оператор с ядром $K(x, t)$, $K^{\#}$ — оператор с транспонированным ядром $K^*(x, t) = \overline{K(t, x)}$.*

Тогда резольвентные множества $\Lambda^{00}(K)$ и $\Lambda^{00}(K^{\#})$ операторов K и $K^{\#}$ симметричны относительно оси абсцисс и, более того, ядра $L(\lambda; x, t)$ и $\tilde{L}(\lambda; x, t)$ разрешающих операторов $L(\lambda, K)$ и $L(\lambda, K^{\#})$ связаны равенством $\tilde{L}(\lambda, x, t) = L(\bar{\lambda}, t, x)$.

2.9. Дополнительные замечания. Изложенная в предыдущих пунктах общая теория относилась к операторам, действующим в пространствах L_p. С несущественными изменениями она переносится на уравнения с операторами, действующими в произвольных пространствах E, в которых конус неотрицательных функций является воспроизводящим, нормальным и сильно миниэдральным (см., например, [23]; в этой работе изучаются уравнения с операторами, действующими в различных пространствах Орлича).

§ 3. Уравнения второго рода с вполне непрерывными операторами в банаховом пространстве

3.1. Постановка задачи. В этом параграфе дальнейшему анализу будет подвергнуто линейное уравнение

$$\lambda u = Ku + f \tag{5.77}$$

с действующим в некотором пространстве E вполне непрерывным (например, интегральным) оператором K.

Напомним, что действующий из E_1 в E_2 линейный оператор K называется *вполне непрерывным*, если он преобразует ограниченные множества из E_1 в компактные множества из E_2. Различные признаки полной непрерывности интегральных операторов изложены в § 1.

Полная непрерывность оператора K позволяет существенно продвинуться в изучении уравнения (5.77). Это относится как к тому случаю, когда λ является регулярным значением для оператора K, так и к тому случаю, когда λ является точкой спектра.

3.2. Спектр вполне непрерывного оператора. Через $N(T)$ и $R(T)$, где T — действующий в E линейный непрерывный оператор, будем обозначать соответственно множество нулей и область значений оператора T. Через $M^{\perp}$, где M — некоторое множество в E, обозначается множество всех линейных непрерывных функционалов, аннулирующихся на M, а через ${}^{\perp}N$, где N — некоторое множество в E^*, обозначается множество тех элементов E, на которых аннулируются функционалы из N.

Число λ называется *собственным значением* действующего в банаховом пространстве оператора K, если уравнение $\lambda u = Ku$ имеет ненулевые решения; эти решения носят название *собственных векторов*. Множество $E(\lambda) = N(\lambda I - K)$ называется *собственным подпространством* оператора K, отвечающим собственному значению λ; размерность подпространства $E(\lambda)$ называется *порядком* собственного значения λ. Совокупность собственных значений оператора K называется *собственным спектром*.

Пусть λ — собственное значение оператора K. Подпространство

$$\hat{E}(\lambda) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} N[(\lambda I - K)^n]} \tag{5.78}$$

называется *корневым подпространством* оператора $\boldsymbol{K}$, отвечающим собственному значению λ; размерность подпространства $\hat{E}(\lambda)$ называется *кратностью* этого собственного значения.

Векторы x из $\hat{E}(\lambda)$ называются *корневыми векторами*. *Рангом корневого вектора* $x \in \hat{E}(\lambda)$ называется наименьшее целое число n, для которого $(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{K})^n x = 0$; если такого числа n не существует, то ранг корневого вектора равен бесконечности. Максимальный ранг корневых векторов, отвечающих собственному значению λ, называется *рангом собственного значения*. Ранг собственного значения λ (если он конечен) совпадает с наименьшим целым числом n_0, для которого

$$N\left[(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{K})^n\right] = N\left[(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{K})^{n_0}\right] \qquad (n > n_0). \tag{5.79}$$

Число λ называется *дефектным значением* действующего в банаховом пространстве E оператора $\boldsymbol{K}$, если существуют ненулевые непрерывные функционалы f, удовлетворяющие тождеству

$$f\left[(\lambda u - \boldsymbol{K} u)\right] = 0 \qquad (u \in E). \tag{5.80}$$

Такие функционалы называются *дефектными*. Множество $F(\lambda) = [R(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{K})]^{\perp}$ всех дефектных функционалов, отвечающих дефектному значению λ, называется *дефектным подпространством*, его размерность — *порядком дефектного значения*.

Пусть λ — дефектное значение. Подпространство

$$\hat{F}(\lambda) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{R\left[(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{K})^n\right]\}^{\perp}} \tag{5.81}$$

называется *присоединенным подпространством оператора* $\boldsymbol{K}$, отвечающим дефектному значению λ; размерность $\hat{F}(\lambda)$ называется *кратностью* этого дефектного значения.

Функционалы f из $\hat{F}(\lambda)$ называются *присоединенными функционалами*; *рангом* присоединенного функционала f называется наименьшее целое число n, для которого

$$f\left[(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{K})^n u\right] = 0 \qquad (u \in E); \tag{5.82}$$

если такого числа n не существует, то ранг присоединенного функционала равен бесконечности. Максимальный ранг присоединенных функционалов, отвечающих дефектному значению λ, называется *рангом дефектного значения*. Ранг дефектного значения λ (если он конечен) совпадает с наименьшим целым числом n_0, для которого

$$R\left[(\lambda I - K)^n\right]^{\perp} = R\left[(\lambda I - K)^{n_0}\right]^{\perp} \qquad (n > n_0). \qquad (5.83)$$

Из приведенных определений непосредственно следует, что число $\bar{\lambda}$ является собственным значением сопряженного к K оператора K^*, если λ является дефектным значением K; при этом порядок, ранг и кратность $\bar{\lambda}$ совпадают с порядком, рангом и кратностью λ.

Теорема 3.1. *Пусть K — действующий в бесконечномерном пространстве E вполне непрерывный оператор. Тогда*:

a) *спектр оператора K состоит из нуля и из не более чем счетного множества $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$, единственной предельной точкой которого может быть точка нуль.*

b) *Каждая ненулевая точка λ спектра является конечнократным собственным значением и одновременно дефектным значением того же порядка, той же кратности и того же ранга.*

c) *Спектры оператора K и сопряженного к нему оператора K^* симметричны относительно оси абсцисс.*

3.3. Расщепление вполне непрерывного оператора. Действующий в банаховом пространстве E линейный непрерывный оператор P называется *проектором*, если $P^2 = P$. Если P — проектор, то оператор $Q = I - P$ также проектор; P, Q называются *дополнительными* проекторами.

Пусть P, Q — дополнительные проекторы, $E_1 = R(P)$, $E_2 = R(Q)$. Подпространства E_1 и E_2 являются *дополнительными* друг другу, т. е. каждый $u \in E$ единственным образом представим в виде $u = u_1 + u_2$, где $u_1 \in E_1$, $u_2 \in E_2$. Обратно, если в E заданы два дополнительных друг другу подпространства, то тем самым определены дополнительные проекторы P, Q, проектирующие на E_1 и E_2. Эти проекторы определяются равенствами

$$Pu = u_1, \quad Qu = u_2, \qquad (5.84)$$

если $u = u_1 + u_2$ ($u_1 \in E_1$, $u_2 \in E_2$). В связи с этим часто говорят, что $\boldsymbol{P}$ проектирует на E_1 параллельно E_2, а $\boldsymbol{Q}$ проектирует на E_2 параллельно E_1.

Теорема 3.2. *Пусть $\boldsymbol{K}$ — действующий в E вполне непрерывный оператор, λ_0 — ненулевая точка его спектра. Тогда:*

a) *Подпространства $\hat{E}(\lambda_0)$ и $\check{E}(\lambda_0) = {}^{\perp}\hat{F}(\lambda_0)$ являются дополнительными друг другу;*

b) *Подпространства $\hat{E}(\lambda_0)$ и $\check{E}(\lambda_0)$ инвариантны для оператора $\boldsymbol{K}$; дополнительные проекторы $\boldsymbol{P}(\lambda_0)$ и $\boldsymbol{Q}(\lambda_0)$, соответствующие $\hat{E}(\lambda_0)$ и $\check{E}(\lambda_0)$, коммутируют с оператором $\boldsymbol{K}$ и его резольвентой $\boldsymbol{R}(\lambda, \boldsymbol{K})$;*

c) *Оператор $\lambda_0 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}$ как оператор в $\hat{E}(\lambda_0)$ нильпотентен, т. е.*

$$(\lambda_0 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{K})^{r(\lambda_0)} = 0;$$

здесь $r(\lambda_0)$ — ранг собственного (дефектного) значения λ_0;

d) *Оператор $\lambda_0 \boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}$ как оператор в $\check{E}(\lambda_0)$ имеет непрерывный обратный;*

e) *Оператор $\boldsymbol{K}$ представим в виде*

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{K}(\lambda_0) + \boldsymbol{K}_0(\lambda_0), \tag{5.85}$$

где $\boldsymbol{K}(\lambda_0) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{P}(\lambda_0)$, $\boldsymbol{K}_0(\lambda_0) = \boldsymbol{K}\boldsymbol{Q}(\lambda_0)$; спектр оператора $\boldsymbol{K}(\lambda_0)$ состоит из одной точки λ_0, спектр оператора $\boldsymbol{K}_0(\lambda_0)$ совпадает со спектром оператора $\boldsymbol{K}$, из которого выброшена точка λ_0.

Пусть $\boldsymbol{K}$ — действующий в E вполне непрерывный оператор и λ_0 — ненулевая точка его спектра. Из теоремы 3.1 следует, что пространства $\hat{E}(\lambda_0)$ и $\hat{F}(\lambda_0)$ имеют одинаковую конечную размерность, совпадающую с кратностью $\varkappa(\lambda_0)$ собственного (и одновременно дефектного) значения λ_0. Набор элементов

$$e_1^{(0)},\ e_1^{(1)},\ \ldots,\ e_1^{(\varkappa_1 - 1)};\ \ldots;\ e_n^{(0)},\ e_n^{(1)},\ \ldots,\ e_n^{(\varkappa_n - 1)} \tag{5.86}$$

и набор функционалов

$$f_1^{(0)},\ f_1^{(1)},\ \ldots,\ f_1^{(\varkappa_1 - 1)};\ \ldots;\ f_n^{(0)},\ f_n^{(1)},\ \ldots,\ f_n^{(\varkappa_n - 1)} \tag{5.87}$$

$(\varkappa_1 + \ldots + \varkappa_n = \varkappa(\lambda_0))$ называются *каноническими базисами* оператора K, отвечающими собственному значению λ_0, если

$$\left(\lambda_0 I - K\right) e_i^{(j+1)} = e_i^{(j)} \qquad \left(j = 0, \ldots, \varkappa_i - 2;\ i = 1, \ldots, n\right);$$
$$\left(\lambda_0 I - K\right) e_i^{(0)} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n); \tag{5.88}$$
$$\left(\bar{\lambda}_0 I - K^*\right) f_i^{(j+1)} = f_i^{(j)} \qquad \left(j = 0, \ldots, \varkappa_i - 2;\ i = 1, \ldots, n\right);$$
$$\left(\bar{\lambda}_0 I - K^*\right) f_i^{(0)} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{5.89}$$

и если

$$f_{i'}^{(j')}\left(e_{i''}^{(j'')}\right) = \begin{cases} 1, & \text{если } i' = i'' \text{ и } j' + j'' = \varkappa_i - 1, \\ 0, & \text{если } i' \neq i'' \text{ или} \\ & i' = i'' \text{ и } j' + j'' \neq \varkappa_i - 1. \end{cases} \tag{5.90}$$

Теорема 3.3. *Пусть K — действующий в E вполне непрерывный оператор, λ_0 — ненулевая точка спектра K. Тогда*:

a) *существуют канонические базисы оператора K, отвечающие λ_0;*

b) *оператор $P(\lambda_0)$ проектирования на $\hat{E}(\lambda_0)$ параллельно $\check{E}(\lambda_0)$ представим в виде*

$$P(\lambda_0)u = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{\varkappa_i - 1} f_i^{(\varkappa_i - j - 1)}(u)\, e_i^{(j)}; \tag{5.91}$$

c) *для оператора $K(\lambda_0)$ справедливо представление*

$$K(\lambda_0)u = \lambda_0 u - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{\varkappa_i - 1} f_i^{(\varkappa_i - 1)}(u)\, e_i^{(j)}. \tag{5.92}$$

Обозначим через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots$ совокупность ненулевых точек спектра действующего в E вполне непрерывного оператора K. Тогда при каждом n для K можно написать представление

$$K = \sum_{i=1}^{n} K(\lambda_i) + R_n, \tag{5.93}$$

где R_n — действующий в E вполне непрерывный оператор, ненулевой спектр которого состоит из точек $\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, \ldots$

Поэтому оператору K можно сопоставить ряд (возможно конечный)

$$K \sim \sum_{i=1}^{\infty} K(\lambda_i). \tag{5.94}$$

Этот ряд «сходится к оператору K по спектру»:

$$\lim_{n\to\infty} \rho\left(K - \sum_{i=1}^{n} K(\lambda_i)\right) = 0. \tag{5.95}$$

Подчеркнем, что этот ряд в общем случае не сходится к K по норме операторов, действующих в E.

Отметим, что спектр вполне непрерывного оператора K (даже с плотным в E множеством значений) может состоять только из нулевой точки. Примерами могут служить различные вольтерровские операторы (см. § 6).

3.4. Спектр интегрального вполне непрерывного оператора. Отметим, что действующий в банаховом пространстве E интегральный оператор

$$Ru(x) = \int_{\Omega} R(x, t)\, u(t)\, dt \tag{5.96}$$

является проектором, если

$$R(x, t) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, b_i(t), \tag{5.97}$$

где a_i, b_i — функции, удовлетворяющие условиям

$$\int_{\Omega} a_i(t)\, b_j(t)\, dt = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, \ldots, n). \tag{5.98}$$

Рассмотрим теперь интегральный оператор

$$Ku(x) = \int_{\Omega} K(x, t)\, u(t)\, dt. \tag{5.99}$$

Предположим, что этот оператор является вполне непрерывным оператором, действующим в некотором пространстве измеримых на Ω функций. В этом случае для описания спектра оператора K применимы теоремы 3.1 и 3.2. Однако для интегральных операторов теоремы 3.1 и 3.2 можно значительно уточнить. В частности, для интегральных операторов естественно ожидать, что операторы $\boldsymbol{K}(\lambda_n)$ будут интегральными.

Теорема 3.4. *Пусть $\boldsymbol{K}$ — действующий в пространстве L_p, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (или C), вполне непрерывный регулярный интегральный оператор с ядром $K(x, t)$, $\boldsymbol{K}^{\#}$ — транспонированный оператор. Пусть λ_0 — ненулевая точка спектра оператора $\boldsymbol{K}$.*

Тогда в пространстве L_p (или C) существуют функции

$$e_1^{(0)}(x),\ e_1^{(1)}(x),\ \ldots,\ e_1^{(\varkappa_1-1)}(x);\ \ldots;\ e_n^{(0)}(x),\ \ldots,\ e_n^{(\varkappa_n-1)}(x), \tag{5.100}$$

а в пространстве $L_{p'}$ (или соответственно L_1) — функции

$$f_1^{(0)}(x),\ f_1^{(1)}(x),\ \ldots,\ f_1^{(\varkappa_1-1)}(x);\ \ldots;\ f_n^{(0)}(x),\ \ldots,\ f_n^{(\varkappa_n-1)}(x), \tag{5.101}$$

для которых выполняются равенства

$$\begin{gathered}\lambda_0 e_i^{(j+1)}(x) = \int_\Omega K(x, t)\, e_i^{(j+1)}(t)\, dt + e_i^{(j)}(x)\\ (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, \varkappa_i - 2);\\ \lambda_0 e_i^{(0)}(x) = \int_\Omega K(x, t)\, e_i^{(0)}(t)\, dt \qquad (i = 1, \ldots, n);\end{gathered} \tag{5.102}$$

$$\begin{gathered}\overline{\lambda}_0 f_i^{(j+1)}(x) = \int_\Omega K^*(x, t)\, f_i^{(j+1)}(t)\, dt + f_i^{(j)}(x)\\ (i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, \varkappa_i - 2);\\ \overline{\lambda}_0 f_i^{(0)}(x) = \int_\Omega K^*(x, t)\, f_i^{(0)}(t)\, dt \quad (i = 1, \ldots, n)\end{gathered} \tag{5.103}$$

и

$$\int_\Omega e_{i'}^{(j')}(t)\, f_{i''}^{(j'')}(t)\, dt = \begin{cases} 1, & \text{если } i' = i'' \text{ и } j' + j'' = \varkappa_{i'} - 1;\\ 0, & \text{если } i' \neq i'' \text{ или } i' = i''\\ & \text{и } j' + j'' \neq \varkappa_{i'} - 1.\end{cases} \tag{5.104}$$

При этом оператор $P(\lambda_0)$ определяется равенством

$$P(\lambda_0)\,u(x)=\int_\Omega \Delta_{\lambda_0}(x,\ t)\,u(t)\,dt,$$

где

$$\Delta_{\lambda_0}(x,\ t)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{\varkappa_i-1}\overline{f_i^{(\varkappa_i-j-1)}(t)}\,e_i^{(j)}(x),$$

а оператор $K(\lambda_0)$ — равенством

$$K(\lambda_0)\,u(x)=\int_\Omega K(\lambda_0;\ x,\ t)\,u(t)\,dt,$$

где

$$K(\lambda_0,\ x,\ t)=\lambda_0\Delta_{\lambda_0}(x,\ t)-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\varkappa_i-1}\overline{f_i^{(\varkappa_i-j-1)}(t)}\,e_i^{(j-1)}(x).$$

Аналогичные утверждения справедливы для любых двойственных пар (см. п. 2.9) банаховых пространств.

3.5. Теоремы Фредгольма. В этом пункте приводятся общие условия разрешимости уравнения

$$\lambda u-Ku=f \tag{5.105}$$

с ненулевым λ и с действующим в E вполне непрерывным оператором K. В частности, эти условия содержат признаки разрешимости интегрального уравнения (5.35) с вполне непрерывным оператором.

Основную роль при исследовании уравнения (5.105) играет сопряженный к K оператор K^*, который действует в сопряженном к E пространстве E^*.

Теорема 3.5. *Пусть K — действующий в E вполне непрерывный оператор, а K^* — сопряженный к K оператор, действующий в E^*, $\lambda\neq 0$.*

Тогда уравнение $\lambda u=Ku+f$ разрешимо в том и только том случае, когда $v(f)=0$ для любого $v\in E^*$, удовлетворяющего условию $\bar\lambda v=K^*v$; число линейно независимых решений уравнения $\lambda u=Ku+f$ совпадает с числом линейно независимых решений уравнения $\bar\lambda v=K^*v$.

Перейдем к интегральным уравнениям.

Теорема 3.6. *Пусть K — действующий в пространстве L_p (или C) вполне непрерывный регулярный интегральный оператор с ядром $K(x, t)$. Пусть $\lambda \neq 0$.*

Уравнение

$$\lambda u(x) = \int_\Omega K(x, t) u(t)\, dt + f(x), \tag{5.106}$$

где $f \in L_p$ (или C), имеет в L_p (или C) решения в том и только том случае, когда

$$\int_\Omega f(t) \overline{y(t)}\, dt = 0 \tag{5.107}$$

для любой функции y из $L_{p'}$ (или L_1), удовлетворяющей условию:

$$y(x) = \int_\Omega K^*(x, t) y(t)\, dt, \tag{5.108}$$

где $K^*(x, t) = \overline{K(t, x)}$. Число линейно независимых решений уравнений (5.107) и (5.108) конечно и одинаково.

3.6. Резольвента вполне непрерывного оператора. Точки спектра линейного оператора K являются особыми точками аналитической функции $R(\lambda, K)$. Для вполне непрерывных операторов характер этих особых точек определяется свойствами соответствующих собственных значений.

Теорема 3.7. *Пусть K — действующий в пространстве E вполне непрерывный оператор. Пусть $\lambda_0 \neq 0$ — точка спектра оператора K.*

Тогда λ_0 является полюсом для резольвенты $R(\lambda, K)$. Порядок этого полюса совпадает с рангом $r(\lambda_0)$ собственного значения λ_0. Разложение Лорана для $R(\lambda; K)$ в окрестности точки λ_0 имеет вид

$$R(\lambda, K) = \sum_{k=1}^{r(\lambda_0)} \frac{B_{k-1}}{(\lambda - \lambda_0)^k} + R(\lambda, K)\, Q(\lambda_0), \tag{5.109}$$

где

$$B_{k-1} = (\lambda_0 I - K)^k P(\lambda_0) \qquad (k = 1, \ldots, r(\lambda_0)), \tag{5.110}$$

а $P(\lambda_0)$ и $Q(\lambda_0)$ — дополнительные проекторы оператора K, отвечающие собственному значению λ_0.

Если

$$e_1^{(0)},\ e_1^{(1)},\ \ldots,\ e_1^{(\varkappa_1-1)};\ \ldots;\ e_n^{(0)},\ e_n^{(1)},\ \ldots,\ e_n^{(\varkappa_n-1)};$$
$$f_1^{(0)},\ f_1^{(1)},\ \ldots,\ f_1^{(\varkappa_1-1)};\ \ldots;\ f_n^{(0)},\ f_n^{(1)},\ \ldots,\ f_n^{(\varkappa_n-1)}$$

— канонические базисы, отвечающие собственному значению λ_0, то операторы B_{k-1} определяются равенствами

$$B_{k-1}u = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=k}^{\varkappa_i-1} f_i^{(\varkappa_i-j-1)}(u)\, e_i^{(j-k)}.$$

Если оператор K интегральный, то и операторы B_{k-1} интегральные:

$$B_{k-1}u(x) = \int_\Omega B_{k-1}(x,\ t)\, u(t)\, dt,$$

где

$$B_{k-1}(x,\ t) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=k}^{\varkappa_i-1} \overline{f^{(\varkappa_i-j-1)}(t)}\, e_i^{(j-k)}(x).$$

3.7. Уравнения с улучшающими операторами. Пусть E, E_1, E_2 — банаховы пространства, причем $E_2 \subset E \subset E_1$ и $\|x\|_{E_1} \leqslant a\|x\|_E$ $(x \in E)$, $\|x\|_E \leqslant a\|x\|_{E_2}$ $(x \in E_2)$.

Допустим, что некоторая итерация K^n действующего в E вполне непрерывного оператора K является непрерывным (вполне непрерывным) оператором, действующим из E_1 в E_2. Тогда собственные и корневые векторы K, отвечающие ненулевым точкам спектра, лежат в E_2, и аналогично, дефектные и присоединенные функционалы K, отвечающие ненулевым точкам спектра, допускают продолжение в линейные непрерывные функционалы на E_1.

Это простое замечание позволяет в основных случаях установить, какими свойствами обладают собственные и корневые векторы и дефектные и присоединенные функционалы линейных интегральных операторов. При этом удобно пользоваться L-характеристиками соответствующих операторов и их итераций (см. гл. V, § 5, п. 4).

3.8. Дополнительные замечания. Основные результаты этого параграфа без изменения переносятся на операторы K, некоторая степень K^n которых является вполне непрерывным оператором. В частности, этот факт полезен при изучении так называемых слабо вполне непрерывных (т. е. преобразующих ограниченные множества в слабо компактные) операторов, действующих в пространствах L_1 и L_∞, так как квадрат каждого слабо вполне непрерывного оператора, действующего в пространстве L_1 или L_∞, является вполне непрерывным оператором.

Отметим, что действующий в L_1 или L_∞ регулярный интегральный оператор K с ядром $K(x, t)$ слабо вполне непрерывен в том и только том случае, когда

$$\lim_{\mathrm{mes}\, D \to 0} \operatorname*{vrai\,max}_{t \in \Omega} \int_D |K(x, t)|\, dx = 0$$

или соответственно

$$\lim_{\mathrm{mes}\, D \to 0} \operatorname*{vrai\,max}_{x \in \Omega} \int_D |K(x, t)|\, dt = 0.$$

Теоремы, относящиеся к интегральным операторам, переносятся на уравнения с операторами, действующими в банаховых пространствах измеримых функций, в которых конус неотрицательных функций обладает свойствами воспроизводимости, нормальности и миниэдральности.

§ 4. Уравнения второго рода с вполне непрерывными операторами в гильбертовом пространстве

4.1. Введение. В этом параграфе изучаются линейные уравнения Фредгольма второго рода с операторами

$$Ku(x) = \int_\Omega K(x, t)\, u(t)\, dt, \tag{5.111}$$

которые действуют в пространстве L_2. Такие уравнения естественно рассматривать как операторные уравнения в гильбертовом пространстве.

Такой подход позволяет установить для интегральных уравнений с операторами, действующими в L_2, ряд важных утверждений, которые неверны для произвольных интегральных уравнений. Особенно это относится к уравнениям с операторами, обладающими свойством самосопряженности (или нормальности). Именно таким операторам и посвящена основная часть параграфа.

4.2. Уравнения с самосопряженным оператором. В этом пункте рассматривается уравнение

$$\lambda u = Ku + f \tag{5.112}$$

с действующим в L_2 интегральным оператором

$$Ku(x) = \int_{\Omega} K(x, t)\, u(t)\, dt, \tag{5.113}$$

ядро которого обладает свойством симметрии

$$K(x, t) = \overline{K(t, x)} \qquad (x, t \in \Omega). \tag{5.114}$$

Предположим, что ядро $K(x, t)$, кроме того, суммируемо по совокупности переменных. Тогда оператор K будет самосопряженным в пространстве L_2, т. е. $K = K^*$ или, иначе,

$$(Ku, v) = (u, Kv) \qquad (u, v \in L_2). \tag{5.115}$$

Отметим, что ядро $K(x, t)$ оператора K суммируемо, если K — регулярный (см. п. 1.1) оператор в L_2.

Для уравнений с самосопряженными вполне непрерывными операторами условия разрешимости упрощаются.

Теорема 4.1. *Пусть K — действующий в L_2 вполне непрерывный самосопряженный оператор.*

Тогда:

a) *при вещественном λ ($\lambda \neq 0$) уравнение $\lambda u = Ku + f$ имеет в L_2 решение в том и только том случае, когда*

$$(f, v) = 0 \tag{5.116}$$

для любого решения v однородного уравнения $\lambda v = Kv$;

b) *при невещественном λ уравнение $\lambda u = Ku + f$ имеет единственное в L_2 решение при любой $f \in L_2$.*

4.3. Резольвента и спектр самосопряженного интегрального оператора. Для вполне непрерывных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве верна следующая основная

Теорема 4.2. *Пусть K — действующий в L_2 вполне непрерывный самосопряженный оператор.*

Тогда справедливы следующие утверждения:

a) *Спектр оператора* $\boldsymbol{K}$ *состоит из нуля и из не более чем счетного множества вещественных чисел* λ_n $(n=1,\ 2,\ \ldots,\ -1,\ -2,\ \ldots)$:

$$\lambda_{-1}<\lambda_{-2}<\ \ldots\ <\lambda_{-n}<\ \ldots\ <0<\ \ldots$$
$$\ldots\ <\lambda_n<\ \ldots\ <\lambda_2<\lambda_1,$$

единственной предельной точкой которого может быть точка 0.

b) *Каждой ненулевой точке спектра* $\lambda=\lambda_n$ *отвечает конечномерное подпространство* $E(\lambda_n)$ *собственных* (*и одновременно дефектных*) *векторов*; *подпространства* $E(\lambda)$, *отвечающие различным* λ, *ортогональны друг другу*.

c) *Оператор* $\boldsymbol{K}$ *допускает спектральное представление* *)

$$\boldsymbol{K}u=\sum_n \lambda_n \boldsymbol{P}(\lambda_n)\,u; \tag{5.117}$$

здесь $\boldsymbol{P}(\lambda_n)$ — *оператор ортогонального проектирования на* $E(\lambda_n)$:

$$\boldsymbol{P}(\lambda_n)\,u(x)=\int_\Omega \varphi_n(x,\ t)\,u(t)\,dt, \tag{5.118}$$

где

$$\varphi_n(x,\ t)=\sum_{i=1}^{\varkappa_n}\overline{e_i^{(n)}(t)}\,e_i^{(n)}(x), \tag{5.119}$$

$\varkappa_n$ — *размерность* $E(\lambda_n)$ (*кратность собственного значения* λ_n),

$$e_1^{(n)}(x),\ \ldots,\ e_{\varkappa_n}^{(n)}(x) \tag{5.120}$$

---

*) Обозначение $\sum\limits_n$ ниже понимается как $\lim\limits_{-n_1,\ n_2\to\infty}\sum\limits_{n=n_1}^{n_2}$, если обе последовательности чисел $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n,\ \ldots$ и $\lambda_{-1},\ \ldots,\ \lambda_{-n},\ \ldots$ бесконечны; как $\lim\limits_{n_2\to\infty}\sum\limits_{n=-n_0}^{n_2}$, если среди чисел λ_n конечное число n_0 отрицательных и бесконечное число положительных; как $\lim\limits_{-n_1\to\infty}\sum\limits_{n=n_1}^{n_0}$, если конечно число n_0 положительных и бесконечно число отрицательных, и просто как конечная сумма, если собственных значений — конечное число.

— произвольный ортонормированный базис в $E(\lambda_n)$; *ряд* (5.117) *сходится по норме операторов, действующих в* L_2.

d) *Резольвента* $\boldsymbol{R}(\lambda, \boldsymbol{K})$ ($\lambda \neq 0, \lambda_{\pm 1}, \lambda_{\pm 2}, \ldots$) *оператора* $\boldsymbol{K}$ *допускает спектральное представление*

$$\boldsymbol{R}(\lambda, \boldsymbol{K})\, u = \sum_n \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \boldsymbol{P}(\lambda_n)\, u; \tag{5.121}$$

ряд в этом представлении также сходится по норме операторов, действующих в L_2.

Теорема 4.2 полностью описывает резольвенту и спектр самосопряженного интегрального оператора. Она, в частности, позволяет написать формулы для решений уравнения (5.111), если операторы $\boldsymbol{P}(\lambda_n)$ известны.

Теорема 4.3. *Пусть* $\boldsymbol{K}$ *— вполне непрерывный самосопряженный оператор, действующий в* L_2. *Пусть* λ_n *— собственные числа оператора* $\boldsymbol{K}$, $\varphi_n(x, t)$ *— соответствующие им ядра проекционных операторов* $\boldsymbol{P}(\lambda_n)$.

Тогда:

a) *Если* $\lambda \neq \lambda_n$ *при всех* n, *то единственное в* L_2 *решение* u *уравнения* $\lambda u = \boldsymbol{K}u + f$ *представимо в виде*

$$u(x) = \sum_n \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \int_\Omega \varphi_n(x, t)\, f(t)\, dt; \tag{5.122}$$

здесь ряд сходится по норме L_2.

b) *Если* $\lambda = \lambda_{n_0}$, *то решения* u *уравнения* $\lambda u = \boldsymbol{K}u + f$ *существуют в том и только том случае, когда*

$$\int_\Omega \varphi_{n_0}(x, t)\, f(t)\, dt = 0; \tag{5.123}$$

эти решения определяются формулой

$$u(x) = h(x) + \sum_{n \neq n_0} \frac{1}{\lambda - \lambda_n} \int_\Omega \varphi_n(x, t)\, f(t)\, dt, \tag{5.124}$$

где h *— произвольная функция из* $E(\lambda_n)$; *и здесь ряд сходится по норме* L_2.

Предположим теперь, что $\boldsymbol{K}$ — регулярный интегральный оператор. Положим

$$\boldsymbol{K}(u, v) = \int_\Omega \int_\Omega K(x, t)\, u(t)\, \overline{v(x)}\, dx\, dt. \tag{5.125}$$

Если, кроме того, K — вполне непрерывный и самосопряженный оператор, то

$$K(u, v) = \sum_n \lambda_n \int_\Omega \int_\Omega \varphi_n(x, t)\, u(t)\, \overline{v(t)}\, dx\, dt. \tag{5.126}$$

Из этой формулы вытекает важная теорема Р. Куранта.

Теорема 4.4. *Пусть K — действующий в L_2 вполне непрерывный самосопряженный регулярный интегральный оператор с ядром $K(x, t)$.*

Тогда для собственных значений λ_n справедливы представления:

a) *Если $n > 0$, то*

$$\lambda_n = \min_{v_1, \ldots, v_{\mu(n)}} \; \max_{\|u\|_{L_2} \leqslant 1,\ (u, v_1) = \ldots = (u, v_{\mu(n)}) = 0} K(u, v), \tag{5.127}$$

где $\mu(n)$ — сумма кратностей собственных чисел λ_i, больших λ_n, u, $v_1, \ldots, v_{\mu(n)} \in L_2$; минимакс в правой части (5.127) *достигается лишь при $v_1, \ldots, v_{\mu(n)} \in \bigcup\limits_{\lambda_i > \lambda_n} E(\lambda_i)$, $u \in E(\lambda_n)$.*

b) *Если $n < 0$, то*

$$\lambda_n = \max_{v_1, \ldots, v_{\nu(n)}} \; \min_{\|u\|_{L_2} \leqslant 1,\ (u, v_1) = \ldots = (u, v_{\nu(n)}) = 0} K(u, v), \tag{5.128}$$

где $\nu(n)$ — сумма кратностей собственных чисел λ_i, меньших λ_n; u, $v_1, \ldots, v_{\nu(n)} \in L_2$; минимакс в правой части (5.128) *достигается лишь при $v_1, \ldots, v_{\nu(n)} \in \bigcup\limits_{\lambda_i < \lambda_n} E(\lambda_i)$, $u \in E(\lambda_n)$.*

4.4. Операторы Гильберта — Шмидта. Продолжим изучение действующих в L_2 самосопряженных операторов.

Теорема 4.5. *Пусть K — вполне непрерывный самосопряженный интегральный оператор с ядром $K(x, t)$. Тогда*

$$\int_\Omega |K(x, t)|^2\, dt = \sum_n \lambda_n^2 \int_\Omega |\varphi_n(x, t)|^2\, dt \qquad (x \in \Omega) \tag{5.129}$$

и

$$\int_\Omega \int_\Omega |K(x, t)|^2\, dx\, dt = \sum_n \varkappa_n \lambda_n^2. \tag{5.130}$$

Из этой теоремы немедленно вытекает, что действующий в L_2 самосопряженный интегральный оператор K является U-ограниченным (см. п. 1.5) в том и только том случае, когда

$$\sum_n \varkappa_n \lambda_n^2 < \infty \tag{5.131}$$

или, что то же, когда его ядро $K(x, t)$ суммируемо с квадратом. Операторы с суммируемыми с квадратом ядрами называются *операторами Гильберта — Шмидта.*

Для ядер операторов Гильберта — Шмидта справедлива важная билинейная формула.

Теорема 4.6. *Пусть* K — *оператор Гильберта — Шмидта с ядром* $K(x, t)$.

Тогда

$$K(x, t) = \sum_n \lambda_n \varphi_n(x, t); \tag{5.132}$$

этот ряд сходится в среднем квадратичном на $\Omega \times \Omega$.

Отметим, что разрешающий оператор

$$L(\lambda, K) = \lambda K R(\lambda, K)$$

оператора Гильберта — Шмидта также является оператором Гильберта — Шмидта (см. п. 2.5).

4.5. Операторы Мерсера. Симметричное ядро $K(x, t)$ назовем *ядром Мерсера*, если оно представимо в виде

$$K(x, t) = \int_\Omega a(x, \sigma)\, b(\sigma, t)\, d\sigma,$$

где $a(x, t)$, $b(x, t)$ — измеримые по совокупности переменных и суммируемые с квадратом функции. Операторы с ядрами Мерсера назовем *операторами Мерсера.* Ядра Мерсера удовлетворяют неравенству

$$|K(x, t)| \leqslant a(x)\, b(t) \qquad (x, t \in \Omega), \tag{5.133}$$

где

$$a(x) = \sqrt{\int_\Omega |a(x, \sigma)|^2 d\sigma} \in L_2,$$

$$b(t) = \sqrt{\int_\Omega |b(\sigma, t)|^2 d\sigma} \in L_2.$$

Для каждого оператора $\boldsymbol{K}$ с ядром Мерсера $K(x, t)$ положим

$$\delta(\boldsymbol{K}) = \int_\Omega \int_\Omega a(x, t)\, b(t, x)\, dx\, dt. \tag{5.134}$$

Если функции $a(x, t)$, $b(x, t)$ непрерывны, то, очевидно,

$$\delta(\boldsymbol{K}) = \int_\Omega K(\sigma, \sigma)\, d\sigma. \tag{5.135}$$

Теорема 4.7. *Пусть $\boldsymbol{K}$ — действующий в L_2 вполне непрерывный самосопряженный оператор с ядром $K(x, t)$. Тогда*:

a) *ядро $K(x, t)$ является ядром Мерсера в том и только том случае, когда оператор $\boldsymbol{K}$ ядерный, т. е.*

$$\sum_n \varkappa_n |\lambda_n| < \infty;$$

b) *если $K(x, t)$ — ядро Мерсера, то*

$$\delta(\boldsymbol{K}) = \sum_n \varkappa_n |\lambda_n|.$$

Теорема 4.8. *Пусть $\boldsymbol{K}$ — интегральный оператор с ядром Мерсера $K(x, t)$.*

Тогда найдутся такие $a_0(x)$, $b_0(t) \in L_2$, что билинейное разложение

$$K(x, t) = \sum_n \lambda_n \varphi_n(x, t)$$

сходится равномерно с весом $a_0(x)\, b_0(t)$ почти всюду:

$$\lim_{-n_1,\, n_2 \to \infty} \operatorname*{vrai\,max}_{x \in \Omega} \operatorname*{vrai\,max}_{t \in \Omega} \frac{\left| K(x, t) - \sum\limits_{n=n_1}^{n_2} \lambda_n \varphi_n(x, t) \right|}{a_0(x)\, b_0(t)} = 0. \tag{5.136}$$

4.6. Самосопряженные операторы со значениями в банаховом пространстве. В этом пункте исследуются самосопряженные в L_2 интегральные операторы, которые одновременно являются непрерывными или вполне непрерывными операторами, действующими из L_2 в некоторое банахово пространство E (например, пространство L_q, где $q > 2$, или пространство C). Для таких операторов утверждения предыдущих пунктов можно существенно дополнить.

Теорема 4.9. *Пусть K — действующий в L_2 вполне непрерывный самосопряженный оператор. Пусть оператор K действует из L_2 в банахово пространство E и непрерывен.*

Тогда справедливы следующие утверждения:

a) *Спектральное разложение*

$$Ku = \sum_n \lambda_n P(\lambda_n) u \tag{5.137}$$

оператора K при каждом фиксированном и сходится по норме E.

b) *Спектральное разложение*

$$L(\lambda, K) u = \sum_n \frac{\lambda\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} P(\lambda_n) u \tag{5.138}$$

разрешающего оператора $L(\lambda, K) = \lambda K R(\lambda, K)$ при каждом фиксированном и также сходится по норме E.

В случае, когда E — пространство C непрерывных функций, приведенная теорема содержит в себе классическую теорему Гильберта — Шмидта о разложении в равномерно сходящиеся ряды истокообразно представимых функций.

Если оператор K действует из L_2 в банахово пространство E и вполне непрерывен, то утверждение предыдущей теоремы может быть усилено.

Теорема 4.10. *Пусть K — действующий в L_2 вполне непрерывный самосопряженный оператор. Пусть K действует из L_2 в некоторое банахово пространство E и вполне непрерывен (действует из некоторого банахова пространства E в L_2 и вполне непрерывен).*

Тогда справедливы следующие утверждения:

a) *Спектральное разложение*

$$Ku = \sum_n \lambda_n P(\lambda_n) u \tag{5.139}$$

оператора K сходится по норме пространства операторов, действующих из L_2 в E (по норме пространства операторов, действующих из E в L_2).

b) *Спектральное разложение*

$$L(\lambda,\ K)u=\sum_n \frac{\lambda\lambda_n}{\lambda-\lambda_n} P(\lambda_n)u \tag{5.140}$$

разрешающего оператора $L(\lambda,\ K)=\lambda KR(\lambda,\ K)$ *сходится по норме операторов, действующих из* L_2 *в* E *(по норме операторов, действующих из* E *в* L_2).

4.7. Положительно определенные самосопряженные операторы. Напомним, что оператор K, действующий в гильбертовом пространстве L_2, называется *положительно определенным*, если

$$(Ku,\ u)\geqslant 0 \qquad (u\in L_2). \tag{5.141}$$

Положительная определенность действующего в L_2 регулярного интегрального оператора K с ядром $K(x,\ t)$ эквивалентна *положительной определенности ядра* $K(x,\ t)$:

$$\int_\Omega \int_\Omega K(x,\ t)\,u(t)\,\overline{v(x)}\,dx\,dt\geqslant 0 \qquad (u,\ v\in L_2). \tag{5.142}$$

В частности, для каждого положительно определенного ядра $K(x,\ t)$ выполняются неравенства

$$\int_D \int_D K(x,\ t)\,dx\,dt\geqslant 0 \qquad (D\subset\Omega); \tag{5.143}$$

для каждого непрерывного положительно определенного ядра $K(x,\ t)$ — неравенства

$$K(x,\ x)\geqslant 0 \qquad (x\in\Omega). \tag{5.144}$$

Предположим, что K — вполне непрерывный самосопряженный оператор, действующий в L_2. В этом случае положительная определенность K, очевидно, эквивалентна неотрицательности всех собственных значений λ_n оператора K.

Теорема 4.11. *Пусть K — действующий в L_2 вполне непрерывный самосопряженный оператор. Пусть E и F — некоторая пара двойственных пространств и оператор K действует из E в F и вполне непрерывен.*

Тогда справедливы следующие утверждения:

a) *Спектральное разложение*

$$Ku=\sum_n \lambda_n P(\lambda_n)u$$

оператора K *сходится по норме пространства операторов, действующих из* E *в* F.

b) *Спектральное разложение*

$$L(\lambda, K)u = \sum_n \frac{\lambda\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} P(\lambda_n)u$$

разрешающего оператора $L(\lambda, K) = \lambda K R(\lambda, K)$ *сходится по норме операторов, действующих из* E *в* F.

В частности, если E — пространство L_1, а F — пространство C непрерывных функций, то утверждение теоремы превращается в утверждение известной теоремы Мерсера (см. стр. 71), так как норма интегральных операторов K с непрерывным ядром $K(x, t)$ (действующих из L_1 в C) определяется равенством

$$\|K\|_{L_1 \to C} = \max_{x,\, t \in \Omega} |K(x, t)|.$$

Теорема 4.12. *Пусть ядро* $K(x, t)$ $(x, t \in \Omega)$ *действующего в* L_2 *вполне непрерывного самосопряженного положительно определенного оператора* K *удовлетворяет неравенству*

$$|K(x, t)| \leqslant \varphi(x)\varphi(t) \qquad (x, t \in \Omega).$$

Тогда ядро $K(x, t)$ *является ядром Мерсера, оно представимо в виде*

$$K(x, t) = \int_\Omega H(x, \sigma) H(\sigma, t)\, d\sigma,$$

где $H(x, t)$ — *суммируемое с квадратом ядро*:

$$H(x, t) = \sum_n \sqrt{\lambda_n}\, \varphi_n(x, t). \tag{5.145}$$

При этом ряд (5.145) *сходится в среднем квадратичном.*

4.8. Разложения Гильберта — Шмидта вполне непрерывных операторов. В этом пункте изучаются произвольные вполне непрерывные интегральные операторы, действующие в пространстве L_2. Пусть K — произвольный вполне непрерывный оператор, действующий в пространстве L_2. Введем положительно определенные самосопряженные операторы

$$B_1 = K^*K, \quad B_2 = KK^*; \tag{5.146}$$

спектр у этих операторов одинаков; пусть

$$s_1^2,\ s_2^2,\ \ldots \qquad (s_n > 0) \tag{5.147}$$

— собственные значения операторов B_1 и B_2. Числа $s_1, \ldots$ $\ldots, s_n, \ldots$ носят название *чисел Шмидта* оператора K (и сопряженного оператора K^*). Кратность собственного значения s_n^2 у операторов B_1 и B_2 одинакова; она называется *кратностью числа Шмидта* s_n. Пусть $e_i^{(n)}$ $(i = 1, \ldots, \varkappa_n)$ — ортонормальный базис в собственном подпространстве $E_1(s_n)$ оператора B_1, а $g_i^{(n)}$ $(i = 1, \ldots, \varkappa_n)$ — ортонормальный базис в собственном подпространстве $E_2(s_n)$ оператора B_2. Будем считать, что эти базисы выбраны так, что

$$s_n^{-1}Ke_i^{(n)} = g_i^{(n)}, \quad s_n^{-1}K^*g_i^{(n)} = e_i^{(n)} \qquad (i = 1, \ldots, \varkappa_n).$$

Положим

$$\psi_n(x,\ t) = \sum_{i=1}^{\varkappa_n} e_i^{(n)}(x)\, g_i^{(n)}(t) \tag{5.148}$$

и введем оператор проектирования

$$Q(\lambda_n)\, u = \int_\Omega \psi_n(x,\ t)\, u(t)\, dt \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{5.149}$$

Теорема 4.13. *Пусть K — вполне непрерывный оператор. Пусть E — некоторое банахово пространство и пусть K действует из L_2 в E и непрерывен.*

Тогда оператор K допускает представление

$$Kx = \sum_n s_n Q(s_n)\, u, \tag{5.150}$$

причем ряд справа при каждом фиксированном и сходится по норме E.

Теорема 4.12 аналогична теореме 4.9. Аналогом теоремы 4.10 является

Теорема 4.14. *Пусть K — действующий в L_2 вполне непрерывный оператор. Пусть E — некоторое банахово пространство и K действует из L_2 в E (из E в L_2) и вполне непрерывен.*

Тогда оператор K допускает представление

$$Kx = \sum_n s_n Q(s_n)\, u,$$

причем это разложение сходится по норме операторов, действующих из L_2 в E (из E в L_2).

Приведем еще утверждения о разложении ядер вполне непрерывных интегральных операторов. Эти теоремы аналогичны соответствующим утверждениям о самосопряженных операторах.

Теорема 4.15. *Пусть $K(x, t)$ — ядро вполне непрерывного интегрального оператора, действующего в пространстве L_2.*

Тогда справедливы равенства:

$$\int_\Omega |K(x, t)|^2 dt = \sum_n s_n^2 \int_\Omega |\psi_n(x, t)|^2 dt, \tag{5.151}$$

$$\int_\Omega |K(x, t)|^2 dx = \sum_n s_n^2 \int_\Omega |\psi_n(x, t)|^2 dx, \tag{5.152}$$

$$\int_\Omega \int_\Omega |K(x, t)|^2 dx\, dt = \sum_n \varkappa_n s_n^2. \tag{5.153}$$

Теорема 4.16. *Пусть ядро $K(x, t)$ суммируемо с квадратом.*

Тогда

$$K(x, t) = \sum_n \lambda_n \psi_n(x, t); \tag{5.154}$$

ряд справа сходится в среднем квадратичном на $\Omega \times \Omega$.

§ 5. Положительные операторы

Теория линейных положительных операторов охватывает изложенную в гл. IV теорию линейных интегральных уравнений с положительными ядрами. Она содержит одновременно аналогичные утверждения для систем интегральных уравнений.

5.1. Полуупорядоченные пространства. Пусть E — вещественное банахово пространство. Замкнутое выпуклое множество $K \subset E$ называется *конусом*, если из $u \in K$ вытекает $\alpha u \in K$ при $\alpha \geqslant 0$ и если из u, $-u \in K$ вытекает $u = \theta$.

Конус K позволяет ввести в E *полуупорядоченность*: пишут $u \geqslant v$, если $u - v \in K$. Знак $\geqslant$ обладает рядом обычных свойств знака $\geqslant$ (неравенства можно умножать на положительные числа, одноименные неравенства можно складывать, в неравенствах можно переходить к пределу и т. д.). Необходимо помнить, что существуют пары *несравнимых* элементов u, v (если $u - v \bar{\in} K$ и $v - u \bar{\in} K$).

Во всем параграфе без специальных оговорок предполагается, что норма монотонна в том смысле, что из $\theta \leqslant u \leqslant v$ вытекает неравенство $\|u\| \leqslant \|v\|$ и что линейная оболочка конуса совпадает со всем пространством.

Основным примером может служить конус неотрицательных функций в пространстве C и пространствах L_p. В пространствах вектор-функций (с непрерывными или принадлежащими L_p компонентами) аналогично можно рассматривать конус функций с неотрицательными компонентами.

Конус K называется *телесным*, если он содержит внутренние элементы. Конус неотрицательных функций в пространстве C телесен, конус неотрицательных функций в пространстве L_p свойством телесности не обладает.

5.2. Общие теоремы о положительных операторах. Оператор $\boldsymbol{K}$, действующий в пространстве E с конусом K, называется *положительным*, если $\boldsymbol{K}K \subset K$. Линейный положительный оператор обладает свойством *монотонности*: из $u \leqslant v$ вытекает неравенство $\boldsymbol{K}u \leqslant \boldsymbol{K}v$.

Рассмотрим в качестве примера в некотором пространстве E вектор-функций

$$u(x) = \{u_1(x), \ldots, u_n(x)\}$$

оператор $\boldsymbol{K}$, определенный равенством

$$\boldsymbol{K}u = \{\boldsymbol{K}_1 u, \ldots, \boldsymbol{K}_n u\}, \qquad (5.155)$$

где

$$\boldsymbol{K}_i u = \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} K_{ij}(x, t)\, u_j(t)\, dt; \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Допустим, что оператор $\boldsymbol{K}$ действует в E; очевидны его аддитивность и однородность:

$$\boldsymbol{K}(\alpha u + \beta v) \equiv \alpha \boldsymbol{K}u + \beta \boldsymbol{K}v \qquad (u, v \in E).$$

Если в E выделен конус вектор-функций с неотрицательными компонентами, то $\boldsymbol{K}$ положителен в том и только том случае, когда ядра $K_{ij}(x, t)$ неотрицательны. Непрерывность оператора $\boldsymbol{K}$ вытекает из следующего общего утверждения:

Теорема 5.1. *Каждый положительный аддитивный и однородный оператор непрерывен.*

При исследовании уравнений с линейными операторами K важную роль играет их спектральный радиус $\rho(K)$.

Теорема 5.2. *Спектральный радиус является точкой спектра линейного положительного оператора.*

5.3. Оценки спектрального радиуса. Основные утверждения этого пункта опираются на возможность оценивать спектральный радиус при помощи неравенств, связывающих значение оператора K на каком-либо одном элементе пространства E с этим элементом.

Теорема 5.3. *Пусть* $Kv \geqslant \alpha_1 v$, *где* $v \neq \theta$, — *некоторый элемент из* K.

Тогда $\rho(K) \geqslant \alpha_1$.

Аналогично из соотношения $K^m v \geqslant \alpha_2 v$ следует неравенство $\rho(K) \geqslant \sqrt[m]{\alpha_2}$.

Теорема 5.4. *Пусть конус K телесен и пусть на некотором его внутреннем элементе u_1 выполняется неравенство*

$$K^m u_1 \leqslant \lambda_0 u_1. \tag{5.156}$$

Тогда

$$\rho(K) \leqslant \sqrt[m]{\lambda_0}. \tag{5.157}$$

Элемент $v \in K$ назовем *квазивнутренним*, если каждый ненулевой линейный неотрицательный на K функционал принимает в точке v положительное значение. В случае телесного конуса каждая внутренняя точка является квазивнутренней и наоборот.

Теорема 5.5. *Пусть линейный положительный оператор K вполне непрерывен. Пусть на некотором квазивнутреннем элементе u_1 выполняется неравенство* (5.156).

Тогда справедливо неравенство (5.157).

Линейный положительный оператор K называется *u_0-ограниченным сверху*, если для каждого $u \in E$ найдется такое $\alpha > 0$, что

$$-\alpha u_0 \leqslant Ku \leqslant \alpha u_0. \tag{5.158}$$

Теорема 5.5 сохраняет силу, если предположение о полной непрерывности оператора K заменить предположением о его u_0-ограниченности сверху.

В заключение опишем абстрактную схему оценок спектрального радиуса, обобщающую теорему 3.4. Пусть нам даны два банаховых пространства E_1 и E_2 с конусами K_1 и K_2 соответственно. Пусть φ — оператор, действующий из E_1 в K_2 и удовлетворяющий двум условиям:

1° $\varphi(u+v) \leqslant \varphi(u)+\varphi(v) \qquad (u, v \in E)$,

2° из $\|\varphi(u_n)\| \to 0$ вытекает, что $\|u_n\| \to 0 \quad (n \to \infty)$.

Теорема 5.6. *Пусть* K — *линейный оператор, действующий в* E_1, *а* B — *линейный положительный оператор, действующий в* E_2. *Пусть*

$$\varphi(Ku) \leqslant B\varphi(u) \qquad (u \in K). \tag{5.159}$$

Тогда спектральные радиусы операторов K *и* B *связаны неравенствами* $\rho(K) \leqslant \rho(B)$.

5.4. Неоднородное уравнение. Рассмотрим уравнение

$$\mu u = Ku + f \tag{5.160}$$

с линейным положительным оператором K.

Теорема 5.7. *Для того чтобы уравнение* (5.160) *при любом* $f \in K$ *имело решение* $u^* \in K$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\mu > \rho(K). \tag{5.161}$$

Эта теорема допускает различные обобщения. Например, если K вполне непрерывен и уравнение (5.160) имеет в K решение хотя бы при одном квазивнутреннем элементе f, то выполняется неравенство (5.161).

5.5. Существование собственного вектора. Положительный оператор может не иметь собственных векторов. Примером может служить оператор

$$Ku(x) = xu(x)$$

в пространстве C непрерывных на $[0, 1]$ функций. Вторым примером может служить оператор Вольтерра (см. § 6).

Однако для многих классов положительных операторов можно утверждать существование в K собственного вектора, отвечающего собственному значению $\rho(K)$.

Теорема 5.8. *Пусть положительный оператор* $\boldsymbol{K}$ *вполне непрерывен и пусть существует такой ненулевой элемент* $u \in K$, *что*

$$\boldsymbol{K}u \geqslant cu, \tag{5.162}$$

где $c > 0$.

Тогда оператор $\boldsymbol{K}$ *имеет в конусе* K *собственный вектор, отвечающий собственному значению* $\rho(\boldsymbol{K})$.

Если $\boldsymbol{K}$ — вполне непрерывный оператор и $\rho(\boldsymbol{K}) > 0$, то собственный вектор, отвечающий собственному значению $\rho(\boldsymbol{K})$, существует и в том случае, когда линейная оболочка конуса K не совпадает с E, а лишь замыкание линейной оболочки $L(K)$ совпадает с E.

Из теоремы 5.8 вытекает, например, существование у оператора (5.155) собственной вектор-функции с положительными компонентами, если ядра $K_{ij}(x, t)$ положительны и непрерывны. Вместо положительности ядер $K_{ij}(x, t)$ достаточно предположить, что они неразложимы (см. стр. 78).

5.6. Простота собственного значения $\rho(\boldsymbol{K})$. В этом пункте предполагается, что собственному числу $\lambda_0 = \rho(\boldsymbol{K})$ положительного оператора $\boldsymbol{K}$ соответствует собственный вектор в конусе K.

Положительный оператор $\boldsymbol{K}$ называется u_0-*положительным*, если для каждого $u \in K$ $(u \neq \theta)$ найдутся такие $m = m(u)$ и $\alpha = \alpha(u) > 0$, $\beta = \beta(u) > 0$, что $\alpha u_0 \leqslant \boldsymbol{K}^m u \leqslant \beta u_0$.

Теорема 5.9. *Пусть линейный оператор* $\boldsymbol{K}$ u_0-*положителен. Тогда справедливы следующие три утверждения*:

1°. *Собственное значение* λ_0 *простое.*

2°. *Модули отличных от* λ_0 *собственных значений оператора* $\boldsymbol{K}$ *строго меньше* λ_0.

3°. *В* K *нет собственных векторов оператора* $\boldsymbol{K}$, *отвечающих отличным от* λ_0 *собственным значениям.*

Эта теорема допускает различные обобщения.

5.7. Собственные значения сопряженного оператора. Линейный функционал l, принимающий на K только неотрицательные значения, называют *положительным*. Положительные линейные функционалы образуют конус K^* в сопряженном пространстве E^*. Конус K^* называют *сопряженным*.

Теорема 5.10. *Если линейный оператор $\boldsymbol{K}$ положителен, то сопряженный оператор $\boldsymbol{K}^*$ положителен в E^*.*

Из того факта, что некоторый положительный оператор сопряжен к другому, вытекает, что он обладает многими свойствами, аналогичными свойствам вполне непрерывных операторов.

Теорема 5.11. *Пусть линейный положительный оператор $\boldsymbol{K}$ оставляет инвариантным телесный конус K. Пусть $\rho(\boldsymbol{K}) > 0$. Тогда оператор $\boldsymbol{K}^*$ имеет в конусе K собственный вектор, отвечающий собственному значению $\rho(\boldsymbol{K})$.*

Теорема 5.11 в применениях удобна в сочетании с теоремой 5.3.

Если конус K не является телесным, утверждение теоремы 5.11 теряет силу. В этом случае удобно следующее утверждение:

Теорема 5.12. *Пусть $\boldsymbol{K}$ — u_0-ограниченный сверху оператор. Тогда оператор $\boldsymbol{K}^*$ имеет в конусе K собственный вектор, отвечающий собственному значению $\rho(\boldsymbol{K}) = \rho(\boldsymbol{K}^*)$.*

5.8. Операторы, оставляющие инвариантным миниэдральный конус. Конус K называется *миниэдральным*, если для любых $u, v \in K$ можно указать такой элемент w, что $w \geqslant u$, $w \geqslant v$ и из неравенств $z \geqslant u$, $z \geqslant v$ вытекает, что $w \leqslant z$. Элемент w называют *максимумом* элементов u и v и пишут

$$w = \sup\{u, v\}.$$

Рассмотренные выше примеры конусов неотрицательных функций и конус вектор-функций с неотрицательными компонентами миниэдральны.

Оператор $U (UE_1 \subset E_1)$ называют *пермутатором*, если область его значений конечномерна и в этой области существует такой базис $e_1, e_2, \ldots, e_s$ (базис пермутатора), что

$$Ue_j = e_{k_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, s).$$

Будем говорить, что совокупность элементов $g_1, g_2, \ldots$ $\ldots, g_n$ *правильно входит в K*, если линейная комбинация вида $c_1 g_1 + c_2 g_2 + \ldots + c_n g_n$ входит в K тогда и только тогда, когда все c_i неотрицательны.

Теорема 5.13. *Пусть K — миниэдральный телесный конус, $\boldsymbol{K}$ — линейный положительный вполне непрерывный оператор, имеющий внутри K собственный вектор: $\boldsymbol{K}e_0 = e_0$.*

Тогда оператор $\boldsymbol{K}$ допускает разложение

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{K}_1, \tag{5.163}$$

где $\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{U}_1 = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{K}_1 = \theta$,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|\boldsymbol{K}_1^n\|} < 1, \tag{5.164}$$

а $\boldsymbol{U}_1$ — некоторый пермутатор с базисом, правильно входящим в K.

Множество собственных чисел оператора $\boldsymbol{K}$, равных по модулю единице, совпадает с множеством всех корней алгебраического уравнения вида

$$(z^\alpha - 1)(z^\beta - 1)\ \ldots\ (z^\tau - 1) = 0.$$

Множество неподвижных векторов операторов $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{K}^*$ имеет базисы $v_1, v_2, \ldots, v_r$ и соответственно $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$, обладающие следующими свойствами:

1°. Системы $v_1, v_2, \ldots, v_r$ и $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$ правильно входят соответственно в K и K^*.

2°. Системы $v_1, v_2, \ldots, v_r$ и $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_r$ биортогональны:

$$\psi_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = j, \\ 0 & \text{при} \quad i \neq j \end{cases}$$
$$(i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r).$$

3°. Для всякой пары $i \neq j$ $(i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ r)$

$$\inf(\psi_i,\ \psi_j) = \theta.$$

§ 6. Уравнения Вольтерра второго рода

6.1. Постановка задачи. *Линейным уравнением Вольтерра второго рода* называется уравнение вида

$$\lambda\, u(x) = \int_a^x K(x,\ t)\, u(t)\, dt + f(x); \tag{5.165}$$

здесь переменные x, t меняются в промежутке $[a,\ b]$.

Предположим, что *оператор Вольтерра*

$$Ku(x) = \int_a^x K(x, t)\, u(t)\, dt \tag{5.166}$$

действует и непрерывен в пространстве E. Оказывается, что в этом случае при некоторых дополнительных ограничениях спектральный радиус $\rho(K)$ оператора K равен нулю и, таким образом, уравнение (5.165) имеет единственное в E решение при любой правой части из E.

Пример уравнения (5.165) с действующим в L_p $(1 < p \leqslant \infty)$ оператором

$$K_0 u(x) = \frac{1}{x} \int_0^x u(t)\, dt \tag{5.167}$$

показывает, что дополнительные условия на $K(x, t)$ необходимы — спектральный радиус оператора K_0 равен 1.

6.2. Основные теоремы. Будем рассматривать оператор (5.166) в одном из пространств L_p или в C. Через $P_{[t, x]}$, где $a \leqslant t \leqslant x \leqslant b$, обозначим линейный оператор умножения на характеристическую функцию отрезка $[t, x]$. Ниже через $\delta(\Psi)$, где $\Psi = \Psi(t, x)$ — определенная в квадрате $a \leqslant t \leqslant x \leqslant b$ неотрицательная функция двух переменных, обозначается точная нижняя граница чисел $\max |\Psi(t_{i-1}, t_i)|$ по всем разбиениям $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.

Пусть K — некоторый оператор Вольтерра. Введем в рассмотрение функции

$$\Phi_n(t, x) = \sqrt[n]{\| \{P_{[t, x]} K P_{[t, x]}\}^n \|} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

$$\Phi_\infty(t, x) = \lim_{n \to \infty} \Phi_n(t, x)$$

(предел в последнем равенстве всегда существует).

Теорема 6.1. *Пусть интегральный оператор Вольтерра K с ядром $K(x, t)$ действует в L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ или в C.*

Тогда $\rho(K) \leqslant \delta(\Phi_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *и* $\rho(K) = \delta(\Phi_\infty)$.

Из этой теоремы, в частности, следует

Теорема 6.2. *Пусть K — действующий в L_p, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, или C вполне непрерывный интегральный оператор Вольтерра с ядром $K(x, t)$. Тогда $\rho(K) = 0$.*

6.3. Дополнительные замечания. Утверждения, аналогичные изложенным, справедливы и для интегральных операторов Вольтерра, действующих в произвольных пространствах измеримых функций (в частности, в пространствах Орлича).

Важной характеристикой операторов Вольтерра с нулевым спектральным радиусом является характер убывания последовательности $\|K^n\|^{1/n}$. Для U-ограниченных операторов в пространствах L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ и U-коограниченных операторов в пространствах L_p $(1 < p \leqslant \infty)$ и C выполняются интересные неравенства

$$\|K^n\| \leqslant \frac{c}{n!};$$

в общем случае сходимость может быть более медленной.

Отметим, наконец, что существуют различные определения операторов Вольтерра в многомерных случаях; для таких операторов также известны различные теоремы о равенстве нулю спектрального радиуса.

§ 7. Уравнения первого рода

7.1. Постановка задачи. Уравнение

$$\int_{\Omega} K(x, t)\, u(t)\, dt = f(x) \tag{5.168}$$

называется *линейным интегральным уравнением Фредгольма первого рода*. Здесь $K(x, t)$, $(x, t \in \Omega)$ — измеримая по совокупности переменных функция, $f(x)$ — известная функция, определенная на Ω, $u(t)$ — неизвестная функция.

Теория уравнений первого рода более сложна, чем теория уравнений второго рода. Это связано с тем, что линейный интегральный оператор

$$Ku(x) = \int_{\Omega} K(x, t)\, u(t)\, dt, \tag{5.169}$$

определенный левой частью уравнения (5.168), не является нормально разрешимым, т. е. его область значений не является замкнутым множеством. В связи с этим условия разрешимости уравнений первого рода носят в принципе иной характер по сравнению с условиями разрешимости уравнений второго рода.

7.2. Уравнения в гильбертовом пространстве. Наиболее полной является теория линейных уравнений первого рода с самосопряженными операторами. Для таких уравнений можно выписать как условия разрешимости, так и общий вид решений (в виде сходящегося ряда по собственным функциям).

Теорема 7.1. *Пусть K — действующий в L_2 вполне непрерывный самосопряженный оператор,*

$$Ku = \sum_n \lambda_n P(\lambda_n) u$$

— его спектральное разложение, $f \in L_2$.

Тогда уравнение

$$Ku = f \tag{5.170}$$

имеет в L_2 решение в том и только том случае, когда:

a) $(u, f) = 0$ *для всех $u \in L_2$, удовлетворяющих однородному уравнению $Ku = 0$;*

b)
$$\sum_n \frac{1}{\lambda_n^2} \| P(\lambda_n) f \|^2 < \infty. \tag{5.171}$$

В случае, если условия a) *и* b) *выполнены, решения $x \in L_2$ уравнения*

$$Ku = f$$

определяются формулой

$$u = h + \sum_n \frac{1}{\lambda_n} P(\lambda_n) f, \tag{5.172}$$

где h — произвольное решение однородного уравнения $Ku = 0$.

Перейдем к уравнениям с несамосопряженными операторами.

Теорема 7.2. *Пусть K — действующий в L_2 вполне непрерывный оператор,*

$$Ku = \sum_n s_n Q(s_n) u \tag{5.173}$$

— его разложение Шмидта, $f \in L_2$.

Уравнение $Ku = f$ *имеет в* L_2 *решение в том и только том случае, когда*:

a) $(u, f) = 0$ *для всех* u *из* L_2, *удовлетворяющих уравнению* $K^*u = 0$;

b)
$$\sum_n \frac{1}{s_n^2} \| Q^*(s_n) f \|^2 < \infty. \tag{5.174}$$

В случае, если условия a) *и* b) *выполнены, решения* $u \in L_2$ *уравнения* $Ku = f$ *определяются формулой*

$$u = h + \sum_n \frac{1}{s_n} Q^*(s_n) f, \tag{5.175}$$

где h — *произвольное решение однородного уравнения* $Ku = 0$.

7.3. Метод регуляризации. Основным методом исследования интегральных уравнений первого рода является *метод регуляризации* (ср. гл. VI, § 5).

Рассмотрим уравнение

$$Kx = f, \tag{5.176}$$

где K — действующий в банаховом пространстве E оператор.

Определенный на области значений $R(K)$ линейный оператор S называется *левым эквивалентным регуляризатором*, если оператор $C = I - SK$ вполне непрерывен и если из $Sx = \theta$ следует, что $x = \theta$. Если S — левый эквивалентный регуляризатор оператора K и f принадлежит области определения оператора S, то уравнение (5.176) эквивалентно уравнению второго рода

$$x - Cx = Sf. \tag{5.177}$$

К этому уравнению применимы общие методы исследования уравнения второго рода с вполне непрерывным оператором.

Линейный оператор T называется *правым эквивалентным регуляризатором*, если оператор $D = I - KT$ допускает продолжение в действующий в E вполне непрерывный оператор, область значений которого содержится в области определения оператора T, и если из $Tx = \theta$ следует $x = \theta$. Если T — правый эквивалентный регуляризатор оператора K и $f \in D(T)$, то уравнение (5.176) эквивалентно уравнению второго рода

$$y - Dy = f; \tag{5.178}$$

решения x уравнения (5.176) определяются по решениям y уравнения (5.178) равенством $x = Ty$.

Приведем два примера.

Рассмотрим в пространстве C уравнение

$$\int_0^t K(t, s)\, x(s)\, ds = f(t) \tag{5.179}$$

с непрерывным ядром $K(t, s)$ и будем считать, что $K(t, t)$ не обращается в нуль. Пусть $r(t) = \frac{1}{K(t, t)}$ и C_0 — множество непрерывно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль при значении аргумента, равном нулю.

Допустим, что $K(t, s)$ дифференцируема по t. Тогда в качестве левого регуляризатора можно взять определенный на C_0 оператор

$$Sx(t) = r(t) \cdot x'(t).$$

Если $f(t) \in C_0$, то уравнение (5.179) эквивалентно уравнению

$$x(t) = \int_0^t L_1(t, s)\, x(s)\, ds + \varphi(t), \tag{5.180}$$

где $L_1(t, s) = -r(t) K'_t(t, s)$, $\varphi(t) = r(t) f'(t)$.

Допустим теперь, что $K(t, s)$ дифференцируема по t и s. Тогда в качестве правого регуляризатора можно взять снова определенный на C_0 оператор

$$Tx(t) = [r(t)\, x(t)]'.$$

Если $f(t) \in C_0$, то уравнение (5.179) эквивалентно уравнению

$$y(t) = \int_0^t L_2(t, s)\, y(s)\, ds + f(t), \tag{5.181}$$

где $L_2(t, s) = r(s) K'_s(t, s)$; решения $x(t)$ уравнения (5.179) определяются по решениям $y(t)$ уравнения (5.181) равенством $x(t) = [r(t) \cdot y(t)]'$.

В качестве второго примера рассмотрим уравнение

$$\int_a^b K(t, s)\, x(s)\, ds = f(t). \tag{5.182}$$

Будем считать, что функция $K(t, s)$ непрерывна и удовлетворяет условиям $K(a, s) = K(b, s) = K(t, a) = K(t, b) = 0$. Обозначим через C_0 множество дважды непрерывно дифференцируемых функций, обращающихся в нуль в точках $x = a$ и $x = b$.

Допустим, что $K(t, s)$ при $t \neq s$ имеет непрерывные первую и вторую производные по t (по s) и что функция

$$\frac{1}{r_1(t)} = K'_t(t+0, t) - K'_t(t-0, t)$$

$$\left(\frac{1}{r_2(t)} = K'_s(t+0, t) - K'_s(t-0, t)\right)$$

непрерывна и в нуль не обращается (обоим этим условиям удовлетворяют, в частности, функции Грина первой краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка). В этом случае в качестве левого (правого) регуляризатора удобно взять оператор

$$Sx(t) = r_1(t)\, x''(t) \qquad (Tx(t) = [r_2(t)\, x(t)]'').$$

При этом оказывается, что (если $f(t) \in C_0$) уравнение (5.182) эквивалентно уравнениям:

$$x(t) = \int_a^b L_1(t, s)\, x(s)\, ds + \varphi(t),$$

$$y(t) = \int_a^b L_2(t, s)\, y(s)\, ds + f(t),$$

где

$$L_1(t, s) = -r_1(t)\, K''_{tt}(t, s), \quad \varphi(t) = r_1(t)\, f''(t),$$

$$L_2(t, s) = -r_2(s)\, K''_{ss}(t, s), \quad x(t) = [r_2(t)\, y(t)]''.$$

ГЛАВА VI

ОДНОМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ *)

§ 1. Основные определения

1.1. Сингулярный интеграл. Для функций одной независимой переменной, которыми мы и будем заниматься в настоящей главе, сингулярный интеграл определяется следующим образом.

Пусть Γ — кривая, замкнутая или незамкнутая, расположенная в комплексной плоскости; кривую Γ мы часто будем называть контуром. Пусть ζ — комплексная координата переменной точки контура Γ; обычно мы не будем делать различия между точкой комплексной плоскости и ее комплексной координатой. Допустим, что функция $f(\zeta)$, определенная почти всюду на Γ, обладает следующим свойством: на контуре Γ существует такая внутренняя точка t, что если эту точку вырезать кругом с центром в t и произвольного радиуса $\varepsilon > 0$, то на оставшейся части Γ_ε контура Γ функция $f(\zeta)$ суммируема. Если при этом существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(\zeta)\, d\zeta,$$

то он называется *сингулярным* интегралом **) функции $f(\zeta)$ по контуру Γ и обозначается обычным символом

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(\zeta)\, d\zeta = \int_{\Gamma} f(\zeta)\, d\zeta. \tag{6.1}$$

---

*) Предмету настоящей главы посвящены книги [4], [5], [25], а также обзорная статья [22], гл. I.

**) Коши называл этот предел главным значением интеграла $\int_\Gamma f(\zeta)\, d\zeta$.

Если интеграл

$$\int_\Gamma f(\zeta)\,d\zeta$$

существует как лебеговский или хотя бы как несобственный, то сингулярный интеграл (6.1) существует и совпадает с упомянутым лебеговским или несобственным интегралом. Сингулярный интеграл может, однако, существовать и в более общей ситуации.

Пример 1.1. Пусть Γ — отрезок $-1 \leqslant \zeta \leqslant 1$ и пусть $f(\zeta) = \frac{1}{\zeta^n}$, где $n > 1$ — натуральное число. В данном случае $t = 0$. Имеем

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} f(\zeta)\,d\zeta = \int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta^n} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{d\zeta}{\zeta^n} = \frac{1-(-1)^{n-1}}{n-1}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\right).$$

Отсюда ясно, что сингулярный интеграл

$$\int_{-1}^{1} \frac{d\zeta}{\zeta^n}, \quad n > 1,$$

не существует при n четном; при n нечетном он существует, причем

$$\int_{-1}^{1} \frac{d\zeta}{\zeta^n} = 0.$$

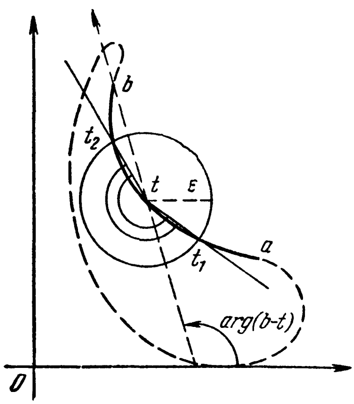

Рис. 2.

Пример 1.2. Пусть Γ — простая незамкнутая ляпуновская *) дуга с концами a и b (рис. 2) и t — внутренняя точка этой дуги. Выясним, существует ли сингулярный интеграл

$$\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - t}. \tag{6.2}$$

Проведем окружность радиуса ε с центром в t; пусть t_1 и t_2 — точки ее пересечения с Γ. По определению предварительно надо

*) Дуга называется ляпуновской, если она имеет в каждой точке определенную касательную и угол ϑ между касательными в точках t_1 и t_2 этой дуги удовлетворяет неравенству $\vartheta \leqslant A\,|t_1 - t_2|^\alpha$, в котором A и α — положительные постоянные.

вычислить интеграл

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - t} = \int\limits_a^{t_1} \frac{d\zeta}{\zeta - t} + \int\limits_{t_2}^{b} \frac{d\zeta}{\zeta - t} = \ln \frac{t_1 - t}{a - t} + \ln \frac{b - t}{t_2 - t}. \quad (6.3)$$

Чтобы последнее равенство было верным, надо выбрать ветвь логарифма так, чтобы $\ln(\zeta - t)$ менялся непрерывно как на дуге (a, t_1), так и на дуге (t_2, b). Этот выбор мы осуществим так. Дополним Γ до гладкого замкнутого контура Γ_1 (на рис. 2 дополнительная часть изображена пунктиром) так, чтобы обход Γ от a до b соответствовал обходу Γ_1 против часовой стрелки. Зафиксируем ветвь $\ln(\zeta - t)$ так, чтобы $\arg(b - t)$ принял наименьшее возможное неотрицательное значение. Этим определена ветвь $\ln(\zeta - t)$, однозначная и непрерывная на контуре Γ_1 с выключенной точкой t. Будем считать, что в формуле (6.3) выбрана именно эта ветвь логарифма, и преобразуем эту формулу так:

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - t} = \ln \frac{b - t}{a - t} + \ln \frac{t_1 - t}{t_2 - t}.$$

Так как $|t_1 - t| = |t_2 - t| = \varepsilon$, то

$$\ln \frac{t_1 - t}{t_2 - t} = i\left[\arg(t_1 - t) - \arg(t_2 - t)\right].$$

Из рис. 2 видно, что при переходе по контуру Γ_1 от точки $\zeta = t_2$ до точки $\zeta = t_1$ величина $\arg(\zeta - t)$ возрастает на величину угла α, отмеченного на рис. 2 двойной дужкой; при $\varepsilon \to 0$, очевидно, $\alpha \to \pi$. Теперь

$$\int\limits_{\Gamma_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - t} = \ln \frac{b - t}{a - t} + i\alpha,$$

и ясно, что интеграл (6.2) существует и равен

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - t} = \ln \frac{b - t}{a - t} + i\pi. \quad (6.4)$$

Если бы мы дополнили Γ до замкнутого контура Γ_1, обходимого по часовой стрелке, то вместо (6.4) мы получили бы формулу

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{d\zeta}{\zeta - t} = \ln \frac{b - t}{a - t} - i\pi. \quad (6.5)$$

Противоречие между формулами (6.4) и (6.5), конечно, только кажущееся: каждой из этих формул соответствует своя ветвь логарифма, и эти ветви различаются слагаемым $2\pi i$.

Пример 1.3. Если контур Г замкнутый и обходится против часовой стрелки, то в формуле (6.4) надо считать $a = b$; в силу сделанного нами выбора ветви логарифма, функция $\ln(\zeta - t)$ однозначна и непрерывна на Г при $\zeta \neq t$, поэтому $\ln(b - t) = \ln(a - t)$, первый член в формуле (6.4) исчезает и мы получаем простую и важную формулу

$$\int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - t} = i\pi. \tag{6.6}$$

Если замкнутый контур Г обходится по часовой стрелке, то в (6.6) справа следует поставить знак минус.

Пример 1.4. Пусть Г — отрезок $[a, b]$ вещественной оси. В этом случае формула (6.4), так же как и формула (6.5), приводится к виду

$$\int_a^b \frac{d\zeta}{\zeta - t} = \ln \frac{b - t}{t - a}. \tag{6.7}$$

1.2. Сингулярный интеграл Коши. Рассмотренные выше примеры позволяют ввести в рассмотрение важный класс сингулярных интегралов, которыми мы будем заниматься на протяжении всей настоящей главы. Это интегралы вида

$$\frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta, \quad t \in \Gamma, \tag{6.8}$$

где Г — ляпуновский контур.

Почти очевидно, что интеграл (6.8) существует, если $u(\zeta)$ удовлетворяет на Г условию Липшица с положительным показателем α (это условие часто называют условием Гельдера):

$$|u(\zeta_1) - u(\zeta_2)| \leqslant A |\zeta_1 - \zeta_2|^\alpha,$$

где A и α — положительные постоянные. Действительно,

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{u(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta = \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{u(\zeta) - u(t)}{\zeta - t} d\zeta + \frac{u(t)}{\pi i} \int_{\Gamma_\varepsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - t}.$$

Используя, например, формулу (6.4) и связанный с ней выбор ветви логарифма, имеем

$$\frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta = \frac{1}{\pi i} \int_\Gamma \frac{u(\zeta) - u(t)}{\zeta - t} d\zeta + \frac{u(t)}{\pi i} \left[\ln \frac{b - t}{a - t} + \pi i\right]. \tag{6.9}$$

Если Γ — замкнутый контур, обходимый против часовой стрелки, то

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{u(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{u(\zeta)-u(t)}{\zeta-t}\,d\zeta+u(t). \qquad (6.10)$$

В формулах (6.9) и (6.10) интеграл справа — абсолютно сходящийся.

Интеграл (6.8) мы будем называть *сингулярным интегралом Коши*, а выражение $\frac{d\zeta}{\zeta-t}$ — *ядром Коши*. Функция $u(\zeta)$ называется *плотностью* интеграла (6.8).

Заключение о существовании интеграла (6.8) очевидным образом остается в силе и тогда, когда контур Γ представляет собой совокупность конечного числа замкнутых или незамкнутых кривых, ограничивающих некоторую область (вообще говоря, многосвязную) в плоскости комплексной переменной.

1.3. Сингулярный интеграл Гильберта. С сингулярным интегралом Коши тесно связан *сингулярный интеграл Гильберта*

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma; \quad -\pi\leqslant s\leqslant\pi. \qquad (6.11)$$

Если функция $u(\sigma)$ 2π-периодична и удовлетворяет условию Липшица с положительным показателем, то интеграл (6.11) существует при любом s и может быть представлен в виде абсолютно сходящегося интеграла:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,ds=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}[u(\sigma)-u(s)]\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma. \qquad (6.12)$$

Между интегралами Коши и Гильберта существует тесная связь. Пусть γ — окружность радиуса единица с центром в начале координат, ζ и t — точки этой окружности. Тогда $\zeta=e^{i\sigma}$, $t=e^{is}$, где вещественные переменные σ и s меняются на отрезке $[-\pi, \pi]$. При этом

$$\frac{d\zeta}{\zeta-t}=\left(\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}+\frac{i}{2}\right)d\sigma;$$

полагая $u(\zeta) = u(e^{i\sigma}) = \hat{u}(\sigma)$, имеем

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\hat{u}(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma - s}{2}\,d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\hat{u}(\sigma)\,d\sigma. \qquad (6.13)$$

Заметим еще, что интеграл Гильберта тесно связан с теорией сопряженных тригонометрических рядов. Подробно об этом см. [13], гл. VII.

§ 2. Некоторые свойства сингулярных интегралов

2.1. Допущения о контуре. В последующем будем предполагать, что Γ — контур, ограничивающий некоторую область D плоскости комплексной переменной, вообще говоря, многосвязную. Условимся считать, что этот контур всегда обходится в положительном направлении, т. е. так, чтобы область D оставалась слева. Контур Γ состоит из некоторого конечного или счетного множества замкнутых или незамкнутых кривых Γ_0, Γ_1, Γ_2, ...; всюду в этой главе будем считать это множество конечным. Для упрощения формулировок будем предполагать, что каждая из кривых Γ_j расположена в конечной части плоскости и имеет непрерывную кривизну, хотя многие из приводимых ниже результатов верны и для ляпуновских кривых.

2.2. О существовании сингулярного интеграла Коши. В предшествующем параграфе было установлено, что сингулярный интеграл (6.8) существует при любом t, если плотность $u(\sigma)$ этого интеграла удовлетворяет на Γ условию Липшица с некоторым положительным показателем α (это принято записывать символически в виде $u \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$). Если требовать существования не всюду, а только почти всюду на Γ, то можно сформулировать следующий, значительно более общий результат.

Теорема 2.1. *Если на контуре Γ направление выпуклости меняется только конечное число раз, а плотность $u(\zeta)$ суммируема на Γ, то сингулярный интеграл* (6.8) *существует почти при всех $t \in \Gamma$.*

Теорема 2.1 была доказана И. И. Приваловым [30]; доказательство более общей теоремы дано в [31], стр. 192—194.

2.3. Предельные формулы. Фундаментальное значение для большинства приложений одномерных сингулярных интегралов имеет теорема о предельных значениях интеграла типа Коши. Эта теорема доказывалась в различных условиях многими авторами, начиная с Ю. В. Сохоцкого *) (1873 г.). В наиболее общих условиях эту теорему доказал И. И. Привалов **), результат которого мы здесь и приводим.

Рассмотрим интеграл Коши

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{u(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \tag{6.14}$$

где z — точка, расположенная либо внутри области D, ограниченной контуром Γ, либо в одной из дополнительных к D областей. В первом случае будем обозначать интеграл (6.14) через $\Phi^+(z)$, во втором случае — через $\Phi^-(z)$. Допустим теперь, что $z\to t$, $t\in\Gamma$, и поставим вопрос о существовании пределов

$$\Phi^+(t)=\lim_{z\to t}\Phi^+(z),\quad \Phi^-(t)=\lim_{z\to t}\Phi^-(t). \tag{6.15}$$

Ответ на этот вопрос дается следующей теоремой И. И. Привалова.

Теорема 2.2. *Если контур Γ и плотность $u(\zeta)$ удовлетворяют условиям теоремы* 1, *а $z\to t$ по пути, не касательному к Γ, то почти для всех $t\in\Gamma$ существуют пределы* (6.15), *причем почти всюду на* Γ

$$\Phi^+(t)=\frac{1}{2}u(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{u(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta, \tag{6.16$_1$}$$

$$\Phi^-(t)=-\frac{1}{2}u(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{u(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta. \tag{6.16$_2$}$$

Если $u\in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$, $\alpha>0$, и Γ — ляпуновский контур, то всюду на Γ существуют пределы (6.15) *и верны формулы* (6.16) ***).

---

*) См. по этому поводу [20].

**) См. [30], а также [31], стр. 190—194.

***) См., например, [25].

Предельные соотношения (6.16) позволяют в ряде важных случаев просто вычислять сингулярные интегралы Коши. Приведем соответствующие формулы.

Если функция $u(z)$ голоморфна в области D, ограниченной контуром Γ, и непрерывна вплоть до контура, то

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{u(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta=u(t). \tag{6.17$_1$}$$

Если функция $u(z)$ голоморфна в каждой из областей, дополнительных к D, непрерывна вплоть до контура и обращается в нуль на бесконечности, то

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{u(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta=-u(t). \tag{6.17$_2$}$$

Пример 2.1. Если n — целое неотрицательное число, то

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\zeta^n}{\zeta-t}\,d\zeta=t^n.$$

Если n — целое положительное число и точка $z=0$ принадлежит D, то

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{d\zeta}{\zeta^n(\zeta-t)}=-\frac{1}{t^n}.$$

Для вычисления интегралов Гильберта (6.11) полезна следующая формула (n — целое число):

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\sigma}\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma=\begin{cases} ie^{ins}, & n>0,\\ 0, & n=0,\\ -ie^{ins}, & n<0.\end{cases} \tag{6.18}$$

2.4. Формулы интегрирования по частям. Для интеграла Гильберта эта формула имеет вид

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma=$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u'(\sigma)\ln\left|\sin\frac{\sigma-s}{2}\right|d\sigma; \tag{6.19}$$

формула верна для почти всех $s \in [-\pi, \pi]$, если на сегменте $[-\pi, \pi]$ функция $u(\sigma)$ абсолютно непрерывна и $u(-\pi) = u(\pi)$.

Если функция $u(\zeta)$ абсолютно непрерывна на замкнутом контуре Γ, удовлетворяющем допущениям п. 2.1 и обходимом в положительном направлении, то почти для всех $t \in \Gamma$

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma u'(\zeta)\ln(\zeta - t)\,d\zeta = u(t) - \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta. \qquad (6.20)$$

Если контур Γ незамкнутый и представляет собой простую дугу с началом a и концом b, то выберем ветвь логарифма $\ln(\zeta - t)$ так же, как в п. 1.2. Тогда почти всюду на Γ верна формула

$$\int_\Gamma u'(\zeta)\ln(\zeta - t)\,d\zeta =$$

$$= \pi i u(t) + u(b)\ln(b - t) - u(a)\ln(a - t) - \int_\Gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta. \qquad (6.21)$$

Формулы интегрирования по частям (6.19) — (6.21) верны всюду на Γ, если не только $u(\zeta)$ абсолютно непрерывна на Γ, но еще $u' \in L_p(\Gamma)$, где постоянная $p > 1$.

2.5. Искажение удаляемой дуги. Пусть $t \in \Gamma$ и пусть, как и выше, t_1 и t_2 суть точки пересечения Γ с окружностью с центром в t и радиуса ε. Пусть, далее, t_1' и t_2' — точки на Γ такие, что отношения

$$\frac{|t_1' - t_1|}{\varepsilon^{p'}}, \quad \frac{|t_2' - t_2|}{\varepsilon^{p'}}, \qquad (6.22)$$

где p' — постоянная, заключенная в интервале $1 < p' < \infty$, остаются ограниченными при $\varepsilon \to 0$. Обозначим через Γ_ε' часть контура Γ, полученную из него удалением малой дуги с концами t_1' и t_2'. Если $u \in L_p(\Gamma)$, где $1/p + 1/p' = 1$, то

$$\int_\Gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta = \lim_{\varepsilon \to 0}\int_{\Gamma_\varepsilon'} \frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta. \qquad (6.23)$$

Равенство (6.23) верно в том смысле, что если при некотором t существует одна из его частей, то существует и другая, и они между собой равны. Из теоремы 2.1 следует, что равенство (6.23) выполняется почти всюду на Γ.

2.6. Правило замены переменной. Пусть функция $\zeta=\omega(\tau)$ взаимно однозначно и непрерывно переводит контур Γ в некоторый контур C в плоскости τ, причем на C производные $\omega'(\tau)$, $\omega''(\tau)$ непрерывны и $\omega'(\tau)$ нигде не обращается в нуль. Тогда, если $u\in L_2(\Gamma)$, то

$$\int_\Gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta=\int_C \frac{u(\omega(\tau))\,\omega'(\tau)}{\omega(\tau)-t}\,d\tau. \tag{6.24}$$

§ 3. Сингулярные операторы в функциональных пространствах

3.1. Сингулярный оператор. Из теоремы 2.1 вытекает, что сингулярный интеграл Коши (6.8) можно рассматривать как оператор, который любой суммируемой вдоль Γ функции $u(t)$ приводит в соответствие некоторую новую функцию

$$v(t)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta, \tag{6.25}$$

определенную почти всюду на Γ. Этот оператор принято обозначать буквой S, так что

$$(Su)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta. \tag{6.26}$$

3.2. Инвариантные пространства. В общем случае о свойствах функции $v(t)$ судить не удается: если функция $u(\zeta)$ только суммируема, то утверждать суммируемость функции $v(\zeta)$, определяемой формулой (6.25), нельзя. Но если функция $u(\zeta)$ принадлежит подходящим образом выбранному более узкому классу, то делается возможным установить некоторые аналитические свойства функции $v(\zeta)$. Вопрос обычно ставится так: пусть u принадлежит некоторому функциональному пространству; какому пространству принадлежит тогда v? Более частный, но более важный вопрос такой: какие функциональные пространства обладают тем свойством, что если u принадлежит этому пространству, то и v принадлежит тому же пространству? Пространства, обладающие указанным свойством, называются *инвариантными* для оператора S. Ниже будут перечислены основные факты, относящиеся к этому кругу идей. В этой главе всегда p означает фиксированное число такое, что $1 < p < \infty$; через p' обозначено число, удовлетворяющее равенству $1/p + 1/p' = 1$.

Теорема 3.1. *Пространство $L_p(\Gamma)$ — инвариантное для оператора S; этот оператор ограничен в упомянутом пространстве.*

Для случая $p = 2$ теорема 3.1 была доказана Н. Н. Лузиным, для произвольного p, отличного от единицы, — М. Рисом. Для $p = 1$ и $p = \infty$ теорема 3.1 неверна.

Подробно о теореме 3.1 см., например, [13].

Теорема 3.1 допускает обобщения на пространства функций, суммируемых с некоторой степенью и некоторым весом. Так, для оператора S инвариантным является пространство $L_p(\Gamma;\ |t - t_0|^\beta)$ функций, для которых конечен интеграл

$$\| u \|^p = \int\limits_\Gamma | u(t) |^p \, | t - t_0 |^\beta \, | dt |,$$

где $t_0 \in \Gamma$, а постоянная β заключена в пределах

$$-1 < \beta < p - 1;$$

в этом пространстве оператор S ограничен [3а].

Теорема 3.2. *Если Γ — замкнутый ляпуновский контур, то пространство $\mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$ функций, удовлетворяющих на Γ условию Липшица с фиксированным показателем α, $0 < \alpha < 1$, — инвариантное для оператора S. Оператор S в этом пространстве ограничен.*

Теорема 3.2 была доказана И. Племелем и И. И. Приваловым; подробно об этом см. [25].

Отметим еще некоторые факты, относящиеся к свойствам сингулярного интеграла на липшицевых функциях; эти свойства также исследованы И. Племелем и И. И. Приваловым.

Пространство $\mathrm{Lip}_1(\Gamma)$ — не инвариантное для оператора Коши: если Γ — замкнутый ляпуновский контур, $u \in \mathrm{Lip}_1(\Gamma)$, так что

$$| u(t_1) - u(t_2) | \leqslant A \, | t_1 - t_2 |; \qquad A = \mathrm{const},$$

и $v = Su$, то для достаточно близких t_1 и t_2

$$| v(t_1) - v(t_2) | \leqslant B \, | t_1 - t_2 | \ln \frac{1}{| t_1 - t_2 |}; \qquad B = \mathrm{const}. \quad (6.27)$$

Если Γ — незамкнутый ляпуновский контур, то при любом α пространство $\mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$ не является инвариантным для оператора Коши: если $u \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$, и $v = Su$, то можно только утверждать, что $v \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma')$, где Γ' — любая внутренняя часть Γ. Точно так же, в случае $\alpha = 1$ функция $v = Su$ удовлетворяет неравенству (6.27) не на всем контуре, а только на любой его внутренней части Γ'.

Отметим еще, что пространство непрерывных функций не является инвариантным для оператора Коши: существуют непрерывные функции, которые оператор S преобразует в функции разрывные. Примеры такого рода приведены в [13].

3.3. Неляпуновские контуры. Приведем одно обобщение теоремы 3.2 на случай неляпуновского контура [3]. Пусть Γ — гладкий (т. е. с непрерывно меняющейся касательной) замкнутый контур. Через $\varphi(\tau)$ обозначим функцию, определенную для достаточно малых неотрицательных значений τ и обладающую следующими свойствами: 1) $\varphi(\tau)$ — непрерывная и возрастающая функция; 2) $\varphi(0) = 0$; 3) $\varphi(\tau) > 0$, $\tau > 0$; 4) отношение $\varphi(\tau)/\tau$ — убывающая функция.

Пусть $u(t)$ — функция, определенная на Γ. Через $\omega(u, \tau)$ обозначим ее модуль непрерывности

$$\omega(u, \tau) = \sup_{|t_1 - t_2| < \tau} |u(t_1) - u(t_2)|.$$

Определим пространство $H_\varphi(\Gamma)$ функций, заданных на Γ и удовлетворяющих условию

$$\|u\|_\varphi = \max_{t \in \Gamma} |u(t)| + \sup_\tau \frac{\omega(u, \tau)}{\varphi(\tau)} < \infty. \tag{6.28}$$

Нетрудно видеть, что $H_\varphi(\Gamma)$ — банахово пространство.

3.4. Дальнейшие теоремы об инвариантных пространствах.

Теорема 3.3. *Если существует такая постоянная $c > 1$, что*

$$\varliminf_{\tau \to 0} \frac{\varphi(c\tau)}{\varphi(\tau)} > 1, \quad \varlimsup_{\tau \to 0} \frac{\varphi(c\tau)}{\varphi(\tau)} < c,$$

то пространство H_φ — инвариантное для оператора Коши, и этот оператор в H_φ ограничен.

Вернемся к случаю замкнутого контура с непрерывной кривизной. Обозначим через I_q, $q \geqslant 0$, класс функций, непрерывных на Γ и удовлетворяющих условию:

$$\int_0^l \frac{\omega(u, \tau)}{\tau} \left(\ln \frac{l}{\tau}\right)^q d\tau < \infty. \tag{6.29}$$

Здесь l — длина контура Γ. Справедливы следующие теоремы [17].

Теорема 3.4. *Оператор Коши преобразует любую функцию класса I_{q+1}, $q > 0$, в функцию класса I_q.*

Теорема 3.5. *Класс $I_\infty = \bigcap\limits_{0 \leqslant q < \infty} I_q$ — инвариантный для оператора Коши.*

Теорема 3.5 является очевидным следствием теоремы 3.4.

В статье [19] рассмотрены и несколько более общие пространства.

Отметим еще такой результат [8]: если D_α — класс функций, модули непрерывности которых удовлетворяют неравенству

$$\omega(u, \tau) \leqslant A\left(\ln \frac{a}{\tau}\right)^{-\alpha},$$

то оператор Коши переводит функцию класса D_α в функцию класса $D_{\alpha-1}$.

§ 4. Формулы дифференцирования и интегрирования, содержащие сингулярные интегралы

4.1. Формулы дифференцирования. В настоящем параграфе предполагается, что контур удовлетворяет требованиям п. 2.1 § 2. Справедливы следующие формулы дифференцирования:

1. Если $u \in L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, то

$$\frac{d}{dt} \int_\Gamma u(\zeta) \ln \frac{1}{\zeta - t}\, d\zeta = \pi i u(t) + \int_\Gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta. \tag{6.30}$$

2. Если $u(\zeta)$ абсолютно непрерывна на Γ, а $u'(\zeta) \in L_p(\Gamma)$, то

$$\frac{d}{dt} \int_\Gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta = \int_\Gamma \frac{u'(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta. \tag{6.31}$$

3. Аналогичные формулы верны и для интегралов Гильберта:

$$\frac{d}{ds}\int_{-\pi}^{\pi} u(\sigma)\ln\left|\sin\frac{\sigma-s}{2}\right|d\sigma = -\int_{-\pi}^{\pi} u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma; \tag{6.32}$$

$$\frac{d}{ds}\int_{-\pi}^{\pi} u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma = \int_{-\pi}^{\pi} u'(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma. \tag{6.33}$$

Формула (6.33) верна, если $u(\sigma)$ абсолютно непрерывна, а $u'(\sigma)$ суммируема со степенью p на отрезке $[-\pi, \pi]$ и если $u(-\pi)=u(\pi)$; формула (6.32) верна, если $u \in L_p(-\pi, \pi)$.

4.2. Формулы интегрирования.

1. Если $u \in L_p(\Gamma)$, $v \in L_{p'}(\Gamma)$, то

$$\int_{\Gamma} v(t)\left\{\int_{\Gamma}\frac{u(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta\right\}dt = \int_{\Gamma} u(\zeta)\left\{\int_{\Gamma}\frac{v(t)}{\zeta-t}\,dt\right\}d\zeta. \tag{6.34}$$

2. Если при некотором фиксированном p, $0<p<1$,

$$\int_{\Gamma}\int_{\Gamma}|\varphi(\zeta,\tau)|^p\,|d\zeta|\cdot|d\tau| < \infty,$$

то

$$\int_{\Gamma}\frac{1}{\zeta-t}\left\{\int_{\Gamma}\varphi(\zeta,\tau)\,d\tau\right\}d\zeta = \int_{\Gamma}\left\{\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta,\tau)}{\zeta-t}\,d\zeta\right\}d\tau. \tag{6.35}$$

3. *Формулы перестановки* порядка интегрирования в двойном сингулярном интеграле.

Если $u \in L_p(\Gamma)$ и Γ — замкнутый контур, то

$$\frac{1}{(\pi i)^2}\int_{\Gamma}\frac{1}{\tau-t}\left\{\int_{\Gamma}\frac{u(\zeta)}{\zeta-\tau}\,d\zeta\right\}d\tau = u(t). \tag{6.36}$$

Формула (6.36) — одна из важнейших в теории одномерных сингулярных интегральных уравнений; она называется *формулой Пуанкаре — Бертрана*. Формуле (6.36) можно придать такой вид:

$$S^2 = I, \tag{6.37}$$

где I — тождественный оператор.

Формула для интегралов Гильберта, аналогичная формуле (6.36), имеет вид

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ctg}\frac{\omega-s}{2}\left\{\int_{-\pi}^{\pi}u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-\omega}{2}\,d\sigma\right\}d\omega=$$
$$=-u(s)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(\sigma)\,d\sigma. \qquad (6.38)$$

Пусть $\varphi(\zeta, \tau)$ удовлетворяет по обеим переменным сразу условию Липшица с положительными показателями и пусть Γ — замкнутый или незамкнутый контур, удовлетворяющий требованиям п. 2.1. Тогда

$$\frac{1}{(\pi i)^2}\int_{\Gamma}\frac{1}{\tau-t}\left\{\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta, \tau)}{\zeta-\tau}\,d\zeta\right\}d\tau=$$
$$=\frac{1}{(\pi i)^2}\int_{\Gamma}\left\{\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\zeta, \tau)}{(\zeta-\tau)(\tau-t)}\,d\tau\right\}d\zeta+\varphi(t, t). \qquad (6.39)$$

§ 5. Регуляризация

Приводимые в настоящем параграфе понятия и теоремы относятся не специально к одномерным сингулярным операторам, а вообще к линейным операторам в банаховых пространствах. Факты этого параграфа будут использованы не только в данной главе, но также в гл. VIII и IX. Доказательства и библиографические сведения см. [23].

5.1. Правая и левая регуляризация. Пусть X и X_1 — банаховы пространства (которые могут и совпадать) и A — линейный замкнутый оператор [16], действующий из X в X_1. Будем говорить, что *оператор A допускает левую регуляризацию*, если существует такой *ограниченный* оператор B, действующий из X_1 в X, что

$$BA=I+T, \qquad (6.40)$$

где I — тождественный, а T — вполне непрерывный оператор в X. Аналогично оператор A допускает *правую регуляриза-*

цию, если существует такой ограниченный оператор C, действующий из X в X_1, что

$$AC = I_1 + T_1, \tag{6.41}$$

где I_1 и T_1 — операторы, соответственно тождественный и вполне непрерывный, в пространстве X_1.

Операторы B и C называются (соответственно *левым* и *правым*) *регуляризаторами* оператора A.

Оператор A допускает *левую эквивалентную* регуляризацию, если существует такой левый регуляризатор B, что уравнения

$$Au = f \tag{6.42}$$

и

$$BAu = Bf \tag{6.43}$$

эквивалентны, каков бы ни был элемент $f \in X_1$.

Оператор A допускает *правую эквивалентную* регуляризацию, если существует такой правый регуляризатор C, что при любом $f \in X_1$ уравнения (6.42) и

$$ACv = f \tag{6.44}$$

эквивалентны в следующем смысле: уравнения (6.42) и (6.44) одновременно разрешимы или неразрешимы; любому решению u уравнения (6.42) соответствует решение v уравнения (6.44) такое, что $Cv = u$.

В последующем звездочкой будет обозначаться сопряженное уравнение или сопряженный оператор.

Если оператор A допускает левую регуляризацию, то сопряженный оператор A^* допускает правую регуляризацию и наоборот.

5.2. Индекс оператора. Решения однородного уравнения

$$Au = 0 \tag{6.45}$$

называются *нулями* оператора A. Если A — замкнутый линейный оператор, то его нули образуют подпространство, размерность которого называется *числом нулей* оператора A и обозначается $\alpha(A)$. Если хотя бы одно из чисел $\alpha(A)$ и $\alpha(A^*)$ конечно, то разность

$$\operatorname{Ind} A = \alpha(A) - \alpha(A^*) \tag{6.46}$$

называется *индексом* оператора A. Очевидно,

$$\operatorname{Ind} A = -\operatorname{Ind} A^*. \tag{6.47}$$

Оператор A называется *нормально разрешимым*, если для разрешимости уравнения (6.42) достаточно (необходимость этого условия тривиальна), чтобы его свободный член был ортогонален ко всем нулям сопряженного оператора A^*, иначе говоря, чтобы для уравнения (6.42) была верна теорема 1.4 Фредгольма (гл. II, § 1). Известна следующая теорема Хаусдорфа: оператор A нормально разрешим тогда и только тогда, когда образ этого оператора замкнут, иначе говоря, когда множество его значений образует в X_1 подпространство.

Теорема 5.1. *Если оператор A допускает левую регуляризацию, то число $\alpha(A)$ конечно.*

Следствие 1. *Если A допускает правую регуляризацию, то число $\alpha(A^*)$ конечно.*

Следствие 2. *Если A допускает двустороннюю*) регуляризацию, то $\operatorname{Ind} A$ конечен.*

Теорема 5.2. *Если замкнутый оператор допускает левую регуляризацию, то он нормально разрешим.*

Теорема 5.3. *Пусть ограниченный оператор A, действующий из X в X_1, допускает левую регуляризацию. Тогда для любого вполне непрерывного оператора T, действующего из X в X_1, справедливо тождество*

$$\operatorname{Ind}(A+T)=\operatorname{Ind} T. \tag{6.48}$$

Теорема 5.4. *Пусть оператор A допускает левую регуляризацию и B — левый регуляризатор оператора A. Пусть K — оператор, действующий из X в X_1, такой, что $\|B\|\cdot\|K\|<1$. Тогда $\operatorname{Ind}(A+K)=\operatorname{Ind} A$.*

Введем еще одно понятие. Ограниченные операторы A_0 и A_1, действующие из X в X_1, назовем *гомотопными*, если существует зависящее от вещественного параметра $\lambda\in[0, 1]$ семейство операторов A_λ со следующими свойствами:

1) При $\lambda=0$ A_λ совпадает с A_0, а при $\lambda=1$ — с A_1.

2) При любом λ оператор A_λ ограничен.

3) Оператор A_λ непрерывно зависит от λ в том смысле, что

$$\lim_{\mu\to 0}\|A_{\lambda+\mu}-A_\lambda\|=0.$$

---

*) То есть и левую, и правую.

4) При любом λ оператор A_λ допускает левую регуляризацию, причем регуляризатор B_λ ограничен независимо от λ:

$$\| B_\lambda \| \leqslant M = \text{const}.$$

Теорема 5.5 (Ф. В. Аткинсон, [1]). *Индексы гомотопных операторов равны между собой.*

Теорема 5.6. *Если A_1 и A_2 — ограниченные операторы с конечными индексами, то*

$$\operatorname{Ind}(A_1 A_2) = \operatorname{Ind}(A_2 A_1) = \operatorname{Ind} A_1 + \operatorname{Ind} A_2. \tag{6.49}$$

Теорема 5.7. *Для того чтобы оператор допускал левую эквивалентную регуляризацию, необходимо и достаточно, чтобы он был нормально разрешим и чтобы его индекс был конечным и неотрицательным.*

§ 6. Случай замкнутого контура. Символ. Теоремы Нетера

6.1. Общий сингулярный оператор. Будем рассматривать сингулярное интегральное уравнение вида

$$Au = a(t)\,u(t) + b(t)\,(Su)(t) + (Tu)(t) = f(t) \tag{6.50}$$

в пространстве $L_p(\Gamma)$. Контур Γ будем считать замкнутым, с непрерывной кривизной; S, как и выше, означает оператор Коши (6.8); T — оператор, вполне непрерывный в $L_p(\Gamma)$; $a(t)$ и $b(t)$ — функции, заданные и непрерывные на Γ; $f(t)$ — функция из $L_p(\Gamma)$. Искомую функцию считаем принадлежащей $L_p(\Gamma)$. Заметим сразу же, что все результаты, сформулированные ниже в настоящем параграфе, верны и для пространств $\mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$, $0 < \alpha < 1$, если только предположить, что $a(t)$ и $b(t)$ принадлежат этому пространству и что в нем оператор T вполне непрерывен *).

Оператор A, определяемый левой частью уравнения (6.50), будем называть *общим сингулярным оператором*, или иногда

---

*) Материал настоящего параграфа для пространства $L_2(\Gamma)$ изложен в [22]; все рассуждения дословно переносятся на случай $p \neq 2$, который подробно рассмотрен в [41]. Сингулярные одномерные уравнения в пространствах Липшица с большой полнотой изучены в [25].

просто *сингулярным оператором*; если $T=0$, то оператор A будем называть *простейшим* *).

В теории одномерных сингулярных уравнений важную роль играет следующая лемма.

Лемма 6.1. *Если функция $c(t)$ непрерывна на Γ, то оператор*

$$S(cu)-cSu=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{c(\zeta)-c(t)}{\zeta-t}u(\zeta)\,d\zeta$$

вполне непрерывен в $L_p(\Gamma)$.

Лемма 6.1 делает рациональным введение понятия *символа* сингулярного оператора.

6.2. Символ сингулярного оператора. Введем в рассмотрение независимую переменную θ, принимающую только два значения: $+1$ и -1. *Символом* сингулярного оператора A, определяемого левой частью уравнения (6.50), а также символом самого уравнения (6.50) называется функция двух переменных t и θ

$$\Phi_A(t,\ \theta)=a(t)+b(t)\,\theta. \tag{6.51}$$

Из определения сразу вытекают следующие простые свойства символа:

1) Символ тождественного оператора равен единице.

2) Символ любого вполне непрерывного оператора равен нулю.

3) Символ суммы двух сингулярных операторов равен сумме их символов.

4) По данному символу сингулярный оператор восстанавливается с точностью до вполне непрерывного слагаемого.

Лемма 6.1 и формула (6.37) Пуанкаре — Бертрана позволяют установить основное свойство символа.

5) Символ произведения двух сингулярных операторов равен произведению символов этих операторов.

Из свойств 4) и 5) сразу вытекает, что умножение сингулярных операторов коммутативно с точностью до вполне непрерывного оператора; если A_1 и A_2 — два сингулярных оператора, то разность $A_1A_2-A_2A_1$ вполне непрерывна.

---

*) В [25] такой оператор называется характеристическим.

Будем говорить, что символ *вырождается*, если при хотя бы одной паре значений $t \in \Gamma$ и $\theta = \pm 1$ значение символа равно нулю. Если при любых $t \in \Gamma$ и $\theta = \pm 1$ символ отличен от нуля, то будем говорить, что он не вырождается. Очевидно, символ (6.51) не вырождается тогда и только тогда, когда

$$a^2(t) - b^2(t) \neq 0, \qquad t \in \Gamma. \tag{6.52}$$

В настоящем параграфе ниже рассматриваются только операторы с невырождающимся символом.

Теорема 6.1. *Если символ оператора* (6.50) *не вырождается, то этот оператор допускает двустороннюю регуляризацию. Регуляризатором, как левым, так и правым, является оператор* $\boldsymbol{B}$, *определяемый формулой*

$$\boldsymbol{B}u = \frac{1}{a^2(t) - b^2(t)} [a(t)u(t) - b(t)\boldsymbol{S}u]. \tag{6.53}$$

Таким образом, требование невырождения символа (при условии его непрерывности) достаточно для того, чтобы одномерный сингулярный оператор допускал регуляризацию. В работе [9] доказано, что это же требование и необходимо: если одномерный сингулярный оператор допускает регуляризацию, то его символ не вырождается.

6.3. Теорема Нетера. Из теоремы 6.1 и результатов § 5 вытекают теоремы, впервые установленные Ф. Нетером [51]; мы их сформулируем кратко в виде одной теоремы.

Теорема 6.2. *Пусть контур* Γ *замкнутый, с непрерывной кривизной, и символ сингулярного оператора непрерывен и не вырождается. Тогда этот оператор нормально разрешим и имеет конечный индекс, который не зависит от вполне непрерывного слагаемого в операторе.*

Важным дополнением к теореме 6.2 является формула для вычисления индекса, впервые полученная Ф. Нетером в той же статье [51]: если сингулярный оператор $\boldsymbol{A}$ имеет вид (6.50), то

$$\operatorname{Ind} \boldsymbol{A} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d \arg \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}. \tag{6.54}$$

Если $\operatorname{Ind} \boldsymbol{A} \geqslant 0$, то, в силу теоремы 5.7, оператор $\boldsymbol{A}$ допускает левую эквивалентную регуляризацию; эквивалентным регуляризатором в этом случае служит оператор (6.53).

Если коэффициенты a и b постоянные и $a^2-b^2\neq 0$, то регуляризация сразу приводит к решению сингулярного уравнения. Пусть это уравнение имеет вид

$$au(t)+b(Su)(t)=f(t).$$

Воздействуя на его обе части регуляризатором

$$\frac{1}{a^2-b^2}(aI-bS),$$

найдем решение

$$u(t)=\frac{a}{a^2-b^2}f(t)-\frac{b}{a^2-b^2}(Sf)(t).$$

Если a и b постоянные и $a^2-b^2=0$, то однородное сингулярное уравнение имеет бесконечно много линейно независимых решений. В самом деле, в данном случае однородное уравнение после сокращения на a (которое, конечно, считается отличным от нуля) имеет одну из следующих форм:

$$u(t)-(Su)(t)=0,\quad u(t)+(Su)(t)=0.$$

Решением первого из этих уравнений является любая функция, голоморфная в D и, скажем, удовлетворяющая условию Липшица в $\bar{D}=D+\Gamma$, решением второго уравнения — любая функция, регулярная в $C\bar{D}$ *), удовлетворяющая условию Липшица в $CD=C\bar{D}\cup\Gamma$ и равная нулю на бесконечности.

6.4. Сингулярное уравнение с ядром Гильберта **). В общем случае такое уравнение имеет вид

$$(A_0u)(s)=a(s)u(s)+\frac{b(s)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma+$$
$$+(Tu)(s)=f(s),\quad (6.55)$$

где T — оператор, вполне непрерывный в пространстве $L_p(-\pi,\pi)$. Условие (6.52) для этого уравнения принимает вид

$$a^2(s)+b^2(s)\neq 0,\quad s\in[-\pi,\pi].$$

*) CD — дополнение области D до комплексной плоскости.

**) Именно такие уравнения рассматривал Ф. Нетер в [51].

Если это условие выполнено, то для оператора (6.55) двусторонний регуляризатор определяется выражением

$$(B_0u)(s) = \\ = \frac{1}{a^2(s)+b^2(s)}\left[a(s)\,u(s) - \frac{b(s)}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma\right]. \qquad (6.56)$$

Индекс оператора A_0 дается формулой

$$\operatorname{Ind} A_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\arg\frac{a(s)-ib(s)}{a(s)+ib(s)}. \qquad (6.57)$$

6.5. Дополнительные замечания. Практически важен вопрос о том, при каких условиях решения уравнения (6.50) не только суммируемы с той или иной степенью, но удовлетворяют еще условию Липшица с некоторым положительным показателем.

Пусть данные функции $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ удовлетворяют на контуре Γ условию Липшица с показателем α, $0<\alpha<1$, а оператор T имеет вид

$$(Tu)(t) = \int\limits_{\Gamma} K(t,\zeta)\,u(\zeta)\,d\zeta,$$

причем ядро $K(t,\zeta)$ ограничено и удовлетворяет неравенству

$$|K(t_1,\zeta)-K(t_2,\zeta)| \leqslant N\,|t_1-t_2|^{\alpha},$$

в котором N не зависит от t_1, t_2 и ζ. Тогда любое решение уравнения (6.50), суммируемое на Γ со степенью, большей единицы, удовлетворяет на Γ условию Липшица с показателем α.

В построениях настоящего параграфа играло существенную роль то обстоятельство, что оператор Коши S удовлетворяет алгебраическому уравнению $S^2-I=0$.

З. И. Халилов [38] рассмотрел операторы общего вида (не обязательно сингулярные), удовлетворяющие тому же уравнению $S^2-I=0$.

Операторы, удовлетворяющие произвольному алгебраическому уравнению

$$p_0I+p_1S+p_2S^2+\ldots+p_nS^n=0,$$

изучены в работе Д. Пшеворской-Ролевич [52]. Здесь p_0, p_1, ..., p_n постоянные, причем $p_n \neq 0$.

Уместно поставить еще один вопрос: остается ли в силе теорема 6.2, если коэффициенты оператора (6.50) не непрерывны? В работе [14] рассмотрен случай, когда Γ — единичная окружность $T=0$, $a \in L_{p_1}(\Gamma)$, $b \in L_{p_1}(\Gamma)$, $p_1 > 1$. Доказывается, что в этих условиях оператор A (формула (6.50)) действует из $L_p(\Gamma)$ в $L_{p_2}(\Gamma)$, где $p > \frac{p_1}{p_1 - 1}$ и $p_2 = \frac{pp_1}{p + p_1}$; оператор A ограничен как оператор из $L_p(\Gamma)$ в $L_{p_2}(\Gamma)$, причем

$$\|A\| \leqslant \|a\|_{L_{p_1}} + \|b\|_{L_{p_1}} \cdot \|S\|_{L_p}.$$

Если даже символ оператора A не вырождается, так что

$$|a(t) \pm b(t)| \geqslant M = \text{const} > 0, \tag{6.58}$$

то этот оператор все же может быть не нормально разрешимым, а индекс этого оператора может быть и бесконечным.

В работе И. Б. Симоненко [34] выявлен класс разрывных коэффициентов, не нарушающих теоремы 6.2. Именно, пусть коэффициенты $a(t)$ и $b(t)$ измеримы и ограничены и пусть выполнено неравенство (6.58). Пусть, далее, существует число $\delta > 0$ со следующим свойством: какова бы ни была точка $t_0 \in \Gamma$, существует на Γ такая окрестность указанной точки, что в этой окрестности колебание функции

$$\arg \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}$$

меньше, чем $\pi - \delta$. Если $a(t)$ и $b(t)$ удовлетворяют всем перечисленным условиям, то теорема 6.2 остается справедливой для уравнения (6.50).

§ 7. Метод Карлемана для замкнутого контура

Замечательный метод решения одномерных сингулярных интегральных уравнений был предложен Т. Карлеманом [47]. Сам Карлеман рассмотрел только случай, когда контур Γ разомкнутый и представляет собой отрезок вещественной оси. Однако метод допускал распространение на многие другие случаи; метод Карлемана был широко использован и обобщен в работах Ф. Д. Гахова [5], Н. И. Мусхелишвили, И. Н. Векуа, Н. П. Векуа, Д. А. Квеселава, Б. В. Хведелидзе (см. [4], [25], [41]) и мн. др. В настоящем параграфе мы коротко изложим сущность метода Карлемана для случая замкнутого контура.

7.1. Сведение сингулярного уравнения к краевой задаче. Рассмотрим простейшее сингулярное уравнение

$$a(t)\,u(t)+b(t)\,(Su)(t)=f(t). \tag{6.59}$$

Допустим, что его символ не вырождается, так что выполнено условие (6.50), и что коэффициенты $a(t)$ и $b(t)$ удовлетворяют условию Липшица с положительным показателем. Относительно свободного члена примем, что $f\in L_p(\Gamma)$. Для простоты примем, что Γ — односвязный замкнутый контур *). Пусть этот контур ограничивает область D^+ изнутри и область D^- извне (рис. 3).

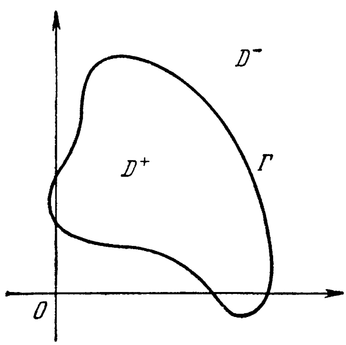

Рис. 3.

Введем в рассмотрение интеграл типа Коши

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{u(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta;\quad z\notin\Gamma. \tag{6.60}$$

Формула (6.60) определяет две голоморфные функции комплексной переменной z в соответствии с тем, находится ли z в D^+ или в D^- Будем обозначать эти функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$. Отметим, что $\Phi^-(\infty)=0$. По предельным формулам (6.16) уравнение (6.59) легко приводится к следующему:

$$\Phi^+(t)-\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\,\Phi^-(t)=\frac{f(t)}{a(t)+b(t)},\qquad t\in\Gamma. \tag{6.61}$$

---

*) Полное решение уравнения (6.59) по методу Карлемана для случая односвязного замкнутого контура дал Ф. Д. Гахов (см. [5]). Случай контура, ограничивающего многосвязную область, см. [40]. В [25] рассмотрен еще более общий случай, когда Γ — совокупность конечного числа замкнутых кривых, не ограничивающая области. Л. Г. Магнарадзе [18] показал, что метод Карлемана применим и тогда, когда $a(t)$ и $b(t)$ принадлежат классу I_∞ (см. стр. 171).

Таким образом, сингулярное уравнение (6.59) сведено к следующей краевой задаче теории функций комплексной переменной: найти голоморфные в областях D^+ и D^- соответственно функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, краевые значения которых связаны линейным уравнением. Эту задачу разные авторы называют *задачей Римана, Гильберта, Римана — Гильберта*; в [25] она названа «задачей сопряжения».

7.2. Решение краевой задачи. Обозначим через m индекс уравнения*) (6.59), определяемый формулой (6.54). Поместив начало координат внутри D^+, можно положить

$$\ln\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}=\mu(t)+m\ln t, \tag{6.62}$$

где $\mu(t)$ на контуре Γ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица с положительным показателем.

Введем новую функцию комплексной переменной z,

$$F(z)=\Phi(z)\,e^{-\psi(z)},\quad \psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\mu(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta; \tag{6.63}$$

значения функции $F(z)$ в областях D^+ и D^- будем обозначать через $F^+(z)$ и $F^-(z)$. Очевидно, $F^-(\infty)=0$. Уравнение (6.61) принимает вид

$$F^+(t)-t^mF^-(t)=\frac{e^{-\omega(t)}t^{m/2}f(t)}{\sqrt{a^2(t)-b^2(t)}}, \tag{6.64}$$

где

$$\omega(t)=\frac{1}{2}(S\mu)(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\mu(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta.$$

Дальнейшее зависит от индекса m.

1) *Если* $m=0$, *то задача* (6.64) *имеет единственное решение*

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{e^{-\omega(\zeta)}f(\zeta)}{\sqrt{a^2(\zeta)-b^2(\zeta)}}\,\frac{d\zeta}{\zeta-z},$$

*) То есть индекс оператора, стоящего в левой части уравнения.

что приводит к решению уравнения (6.59):

$$u(t)=\frac{a(t)}{a^2(t)-b^2(t)}f(t)-\\ -\frac{b(t)\,e^{\omega(t)}}{\pi i\sqrt{a^2(t)-b^2(t)}}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{-\omega(\zeta)}f(\zeta)}{\sqrt{a^2(\zeta)-b^2(\zeta)}}\frac{d\zeta}{\zeta-t}. \tag{6.65}$$

В этом случае решение уравнения (6.59) существует и единственно.

2) *Если* $m>0$, *то решение существует, но не единственно.* Убедиться в этом можно так: будем искать такое решение уравнения (6.64), в котором $F^-(z)=O\left(|z|^{-m-1}\right)$, $z\to\infty$. Положив

$$F_1(z)=\begin{cases} F^+(z), & z \text{ внутри } \Gamma,\\ z^mF^-(z), & z \text{ вне } \Gamma,\end{cases}$$

найдем, что $F_1(z)$ удовлетворяет уравнению

$$F_1^+(t)-F_1^-(t)=\frac{e^{-\omega(t)}t^{m/2}f(t)}{\sqrt{a^2(t)-b^2(t)}} \tag{6.66}$$

и $F_1^-(\infty)=0$; единственное решение этой новой задачи имеет вид

$$F_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{-\omega(\zeta)}\zeta^{m/2}f(\zeta)}{\sqrt{a^2(\zeta)-b^2(\zeta)}}\frac{d\zeta}{\zeta-z} \tag{6.66$_1$}$$

и доставляет нам частное решение задачи (6.64)

$$F^+(z)=F_1^+(z),\quad F^-(z)=z^{-m}F_1^-(z).$$

К нему можно добавить общее решение соответствующей однородной задачи

$$F_0^+(t)-t^mF_0^-(t)=0. \tag{6.67}$$

На бесконечности функция $F_0^-(z)$ должна обращаться в нуль, и легко найти, что общее решение (6.67) имеет вид

$$F_0^+(z)=\sum_{k=0}^{m-1}\gamma_kz^k,\quad F_0^-(z)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\gamma_k}{z^{m-k}}. \tag{6.68}$$

где $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{m-1}$ — произвольные постоянные. Частное решение уравнения (6.59) можно построить по формуле

$$u_0(t) = \frac{a(t)}{a^2(t) - b^2(t)} f(t) - \\ - \frac{b(t)\, e^{\omega(t)}}{\pi i t^{m/2} \sqrt{a^2(t) - b^2(t)}} \int_\Gamma \frac{e^{-\omega(\zeta)} \zeta^{m/2} f(\zeta)}{\sqrt{a^2(\zeta) - b^2(\zeta)}} \frac{d\zeta}{\zeta - t}. \tag{6.69}$$

Мы получим общее решение уравнения (6.59), прибавив к $u_0(t)$ произвольное решение однородного уравнения

$$a(t)\varphi(t) + b(t)(S\varphi)(t) = 0. \tag{6.70}$$

Это уравнение имеет ровно m линейно независимых решений, которые можно получить, исходя из формул (6.68); подробнее об их построении см. [5], [25]. Обозначая эти решения через $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_m(t)$, получаем общее решение уравнения (6.59) в виде

$$u(t) = u_0(t) + \sum_{k=1}^{m} c_k \varphi_k(t), \tag{6.71}$$

где c_k — произвольные постоянные, а $u_0(t)$ определяется формулой (6.69).

3) *Если $m < 0$, то однородное уравнение* (6.70) *имеет только тривиальное решение* $\varphi(t) \equiv 0$. *Сопряженное с ним однородное уравнение имеет ровно $|m|$ линейно независимых решений. Уравнение* (6.59) *имеет не более одного решения, которое существует тогда и только тогда, когда функция $f(t)$ удовлетворяет следующим условиям*:

$$\int_\Gamma \frac{e^{-\omega(\zeta)} \zeta^{-m/2-k}}{\sqrt{a^2(\zeta) - b^2(\zeta)}} f(\zeta)\, d\zeta = 0; \qquad k = 1, 2, \ldots, |m|. \tag{6.72}$$

Если условия (6.72) выполнены, то решение уравнения (6.59) дается правой частью формулы (6.68). К сформулированным только что результатам можно прийти так. Пусть $m < 0$ и пусть решение существует. В уравнении (5.64) положим

$$F_1^+(z) = F^+(z), \quad F_1^-(z) = z^m F^-(z). \tag{6.73}$$

Тогда $F_1^-(\infty) = 0$; уравнение (6.64) принимает вид (6.66); последнее уравнение имеет единственное решение (6.66_1). Из (6.73) вытекает, что на бесконечности $F_1(z) = O\left(|z|^{-|m|-1}\right)$, а это имеет место тогда и только тогда, когда выполнены условия (6.72).

Равенства (6.72) суть условия ортогональности функции $f(t)$ к нулям оператора, сопряженного с оператором задачи (6.59). Отсюда легко найти выражение для этих нулей; обозначая их через $\psi_k(t)$, имеем

$$\overline{\psi_k(t)} = \frac{e^{-\omega(t)}t^{-m/2-k}}{\sqrt{a^2(t)-b^2(t)}}\frac{dt}{ds}; \quad ds = |dt|, \quad k = 1, 2, \ldots, |m|. \tag{6.74}$$

Из всего сказанного выше вытекает, в частности, такой результат. Пусть коэффициенты оператора

$$Au = a(t)\,u(t) + b(t)\,(Su)(t)$$

с невырождающимся символом удовлетворяют условию Липшица с положительными показателями и пусть $\operatorname{Ind} A = m$. Тогда оператор A имеет m нулей, если $m > 0$, и не имеет нетривиальных нулей, если $m \leqslant 0$. В статье [11] этот результат распространен на случай, когда коэффициенты $a(t)$ и $b(t)$ только непрерывны.

Пример 7.1. Пусть Γ — окружность $|\zeta| = 1$. Рассмотрим уравнение

$$\cos\vartheta u(t) + \frac{\sin\vartheta}{\pi}\int\limits_\Gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta = f(t); \quad e^{i\vartheta} = t. \tag{6.75}$$

Здесь

$$a(t) = \cos\vartheta = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right), \quad b(t) = i\sin\vartheta = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

Применяя метод Карлемана, введем функцию $\Phi(z)$ по формуле (6.60). Тогда

$$u(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t),$$
$$(Su)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta = \Phi^+(t) + \Phi^-(t),$$

и данное уравнение принимает вид

$$t\Phi^+(t) - \frac{1}{t}\Phi^-(t) = f(t),$$

или

$$\Phi^+(t) - \frac{1}{t^2}\Phi^-(t) = \frac{1}{t}f(t). \tag{6.76}$$

Индекс уравнения (6.75) равен

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} d\arg\frac{\cos\vartheta - i\sin\vartheta}{\cos\vartheta + i\sin\vartheta} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} d\arg\frac{1}{t^2} = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} d\vartheta = -2.$$

Из результатов настоящего параграфа вытекает, что уравнение (6.75) имеет не более одного решения, которое существует тогда и только тогда, когда функция $f(t)$ удовлетворяет двум условиям ортогональности вида (6.72). Проверим это непосредственно.

В нашем примере

$$\frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)} = \frac{1}{t^2}.$$

Формула (6.62) дает $\mu(t) = 0$ и, следовательно, $F(z) = \Phi(z)$. Далее, $a^2(t) - b^2(t) = 1$, и уравнение (6.64) совпадает с (6.76). Введем функцию $\Phi_1(z)$; полагая

$$\Phi_1^+(z) = \Phi^+(z), \qquad \Phi_1^-(z) = \frac{1}{z^2}\Phi^-(z),$$

получаем из уравнения (6.76)

$$\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = \frac{1}{t} f(t).$$

Единственное решение этого уравнения, равное нулю на бесконечности, есть

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)}\, d\zeta.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} \Phi^+(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)}\, d\zeta, \quad |z| < 1,\\ \Phi^-(z) &= \frac{z^2}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)}\, d\zeta, \quad |z| > 1. \end{aligned}\right\} \tag{6.77}$$

Из формулы (6.60) следует, что $\Phi(\infty) = 0$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы ряд Лорана функции

$$\int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta - z)}\, d\zeta$$

в окрестности точки $z = \infty$ начинался с члена, содержащего z^{-3}. При достаточно больших z

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta^n}{z^{n+1}}$$

и для разрешимости уравнения (6.75) необходимо и достаточно выполнение двух равенств

$$\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta}\, d\zeta = 0, \qquad \int_\Gamma f(\zeta)\, d\zeta = 0. \tag{6.78}$$

Покажем, что эти равенства означают ортогональность функции f к нулям оператора, сопряженного с оператором уравнения (6.75). Эти нули суть решения уравнения

$$\cos\vartheta v(t) + \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \frac{\sin\sigma v(\zeta)}{\bar t - \bar\zeta}\,\frac{d\bar t}{d\vartheta}\, d\sigma = 0; \tag{6.79}$$

здесь $\zeta = e^{i\sigma}$. Заменив все его члены сопряженными и разделив на $\frac{dt}{d\vartheta}$, мы приведем уравнение (6.79) к виду

$$\cos\vartheta\overline{v(t)}\,\frac{d\vartheta}{dt} - \frac{1}{\pi}\int_\Gamma \frac{\sin\sigma\overline{v(\zeta)}}{\zeta - t}\,\frac{d\sigma}{d\zeta}\, d\zeta = 0.$$

Введем новую неизвестную:

$$w(t) = \sin\vartheta\overline{v(t)}\,\frac{d\vartheta}{dt}. \tag{6.80}$$

Тогда

$$\cos\vartheta w(t) - \frac{\sin\vartheta}{\pi}\int_\Gamma \frac{w(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta = 0; \tag{6.81}$$

индекс уравнения (6.81) равен

$$\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma d\arg\frac{\cos\vartheta + i\sin\vartheta}{\cos\vartheta - i\sin\vartheta} = \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma d\arg e^{2i\vartheta} = 2.$$

По методу Карлемана положим

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{w(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta = 0.$$

Уравнение (6.81) преобразуется в следующее:

$$\Omega^+(t) - t^2\Omega^-(t) = 0,$$

которое показывает, что функции $\Omega^+(z)$ и $t^2\Omega^-(t)$ аналитически продолжают одна другую через контур Γ и что на бесконечности функция $\Omega^+(z)$ может иметь полюс не выше первого порядка. В таком случае (ср. формулу (6.68))

$$\Omega^+(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z, \quad \Omega^-(z) = \frac{\gamma_0}{z^2} + \frac{\gamma_1}{z},$$

где γ_0 и γ_1 — произвольные постоянные. Теперь

$$w(t) = \Omega^+(t) - \Omega^-(t) = \gamma_0\left(1 - \frac{1}{t^2}\right) + \gamma_1\left(t - \frac{1}{t}\right) = \\ = 2i\gamma_0 \frac{\sin\vartheta}{t} + 2i\gamma_1 \sin\vartheta.$$

Таким образом, уравнение (6.81) имеет два линейно независимых решения

$$w_1(t) = \frac{\sin\vartheta}{t}, \quad w_2(t) = \sin\vartheta.$$

По формуле (6.80) находим два решения уравнения (6.79), однородного, сопряженного с (6.75):

$$v_1(t) = \frac{1}{\bar{t}} \frac{d\bar{t}}{d\vartheta}, \quad v_2(t) = \frac{d\bar{t}}{d\vartheta},$$

и ясно, что условия (6.78) можно представить в виде

$$(f, v_1) = \int_\Gamma f(\zeta)\overline{v_1(\zeta)}\, d\sigma = 0, \quad (f, v_2) = \int_\Gamma f(\zeta)\overline{v_2(\zeta)}\, d\sigma = 0.$$

В заключение найдем формулу, выражающую решение уравнения (6.75), если это решение существует. Имеем $u(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t)$. По формулам (6.77)

$$\Phi^+(t) = \frac{f(t)}{2t} + \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta - t)}\, d\zeta,$$

$$\Phi^-(t) = -\frac{tf(t)}{2} + \frac{t^2}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta - t)}\, d\zeta;$$

отсюда

$$u(t) = f(t)\cos\vartheta - \frac{t\sin\vartheta}{\pi}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta(\zeta - t)}\, d\zeta,$$

что согласуется с общей формулой (6.69).

Большое число работ посвящено применению метода Карлемана к сингулярным интегральным уравнениям «со сдвигом». Это — уравнения, которые, кроме обычного сингулярного интеграла Коши, содержат еще сингулярный интеграл вида

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta - \alpha(t)}\, d\zeta,$$

где функция $\alpha(t)$ взаимно однозначно отображает контур Γ на самого себя. Относящиеся сюда результаты довольно подробно изложены в [5], изд. 2-е.

§ 8. Системы сингулярных уравнений с интегралом по замкнутому контуру

8.1. Сингулярный оператор системы. Будем рассматривать сингулярную систему следующего вида:

$$\sum_{k=1}^{n} \{a_{jk}(t)\,u_k(t) + b_{jk}(t)\,(\boldsymbol{S}u_k)(t) + (\boldsymbol{T}_{jk}u_k)(t)\} = f_j(t) \qquad (6.82)$$

$$(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Здесь $a_{jk}(t)$ и $b_{jk}(t)$ — функции, непрерывные на контуре Γ, относительно которого мы примем, что он замкнутый и удовлетворяет допущениям п. 2.1, § 2. Через $\boldsymbol{S}$, как обычно, обозначаем сингулярный оператор Коши, через $\boldsymbol{T}_{jk}$ — оператор, вполне непрерывный в $L_p(\Gamma)$. Будем считать, что как данные функции $f_j(t)$, так и искомые $u_j(t)$ принадлежат тому же пространству $L_p(\Gamma)$.

Систему (6.82) можно записать в виде одного уравнения, по виду совпадающего с уравнением (6.50). Для этого введем матрицы n-го порядка $a(t)$, $b(t)$, T с элементами $a_{jk}(t)$, $b_{jk}(t)$, T_{jk} $(j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ соответственно и векторы $u(t)$, $f(t)$ с составляющими $u_1(t)$, $u_2(t)$, $\ldots$, $u_n(t)$ и $f_1(t)$, $f_2(t)$, $\ldots$, $f_n(t)$. Теперь система (6.82) записывается в виде

$$a(t)\,u(t) + b(t)\,(\boldsymbol{S}u)(t) + (\boldsymbol{T}u)(t) = f(t). \qquad (6.83)$$

Векторы $u(t)$ и $f(t)$ можно рассматривать как элементы банахова пространства $L_p(\Gamma)$, которое состоит из n-компонентных векторов, заданных почти всюду на Γ и имеющих компоненты, суммируемых с p-й степенью; норму в $L_p(\Gamma)$ можно определить, например, формулой

$$\| u \|_{L_p(\Gamma)} = \sum_{k=1}^{n} \| u_k \|_{L_p(\Gamma)}. \qquad (6.84)$$

В пространстве $L_p(\Gamma)$ оператор S ограничен, а оператор T вполне непрерывен.

8.2. Символ. Оператор, определяемый левой частью уравнения (6.83), обозначим буквой A. *Символической матрицей*, или просто *символом* этого оператора (а также уравнения (6.83)), назовем матрицу

$$\Phi_A(t, \theta) = a(t) + b(t)\theta, \tag{6.85}$$

где, как и в § 6, независимая переменная θ принимает только два значения: $+1$ и -1. Символическая матрица (6.85) обладает всеми свойствами 1) — 5) § 6, только под единицей (свойство 1) и нулем (свойство 2) следует понимать соответственно единичную и нулевую матрицу. Умножение матриц, вообще говоря, не коммутативно, поэтому утверждение § 6 о полной непрерывности оператора $A_1A_2 - A_2A_1$ (A_1 и A_2 — сингулярные операторы) не переносится на случай матричных сингулярных операторов.

Говорят, что символ (6.85) *вырождается*, если хотя бы при одной паре значений $t \in \Gamma$ и $\theta = \pm 1$ определитель матрицы $\Phi_A(t, \theta)$ обращается в нуль. Если же при любых $t \in \Gamma$, $\theta = \pm 1$ этот определитель отличен от нуля, то говорят, что символ (6.85) *не вырождается*.

Переменная θ принимает только два значения, поэтому любую матрицу-функцию $\Psi(t, \theta)$ можно представить в виде линейной функции от θ:

$$\Psi(t, \theta) = \alpha(t) + \beta(t)\theta.$$

Если при этом $\Psi(t, \theta)$ непрерывна как функция от t, то $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ также непрерывны, и матрицу $\Psi(t, \theta)$ можно рассматривать как символ некоторого матричного сингулярного оператора.

8.3. Теоремы Нетера. Если символ (6.85) не вырождается, то оператор (6.83) допускает двустороннюю регуляризацию: регуляризатором, одновременно и левым и правым, является сингулярный оператор, символическая матрица которого равна $[\Phi_A(t, \theta)]^{-1}$. Отсюда вытекает, что для системы (6.82) с непрерывной и невырождающейся символической матрицей справедлива теорема Нетера (теорема 6.2); при этом индекс этой системы (индекс оператора A уравнения

(6.83)) вычисляется по формуле

$$\operatorname{Ind} A = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d \arg \det \left\{ [\Phi(t, +1)]^{-1} [\Phi(t, -1)] \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d \arg \left\{ \det [a(t) + b(t)]^{-1} \det [a(t) - b(t)] \right\}. \quad (6.86)$$

Теорему Нетера для сингулярных систем впервые установил Ж. Жиро [49], а несколько позднее Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа [26], см. также [4] и [25]. Упомянутые авторы исходили из соображений, отличных от приведенных выше; в частности, в [26] дано распространение метода Карлемана на системы сингулярных уравнений. Отметим, что, в отличие от одного уравнения, система вида

$$a(t) u(t) + b(t)(Su)(t) = f(t)$$

решается в квадратурах только в исключительных случаях; так будет, например, если матрицы $a(t)$ и $b(t)$ рационально зависят от t (см. [4], стр. 44—49).

В случае пространства $L_2(\Gamma)$ доказано (см. [10], [12]), что условие невырождения символической матрицы не только достаточно, но и необходимо для того, чтобы система одномерных сингулярных уравнений допускала регуляризацию. Формулу (6.86) впервые получили Н. И. Мусхелишвили и Н. И. Векуа в [26]; их рассуждения изложены также в [4] и в [25]. Более простыми средствами можно вывести формулу (6.86), используя некоторые топологические факты; один такой вывод дан в [24]. Справедливо следующее утверждение:

Пусть функции $a_{jk}(t)$, $b_{jk}(t)$, $f_j(t)$ *удовлетворяют на* Γ *условию Липшица с показателем* α, $0 < \alpha < 1$, *и пусть* T_{jk} *суть интегральные операторы вида*

$$(T_{jk} u)(t) = \int_{\Gamma} K_{jk}(t, \zeta) u(\zeta) d\zeta,$$

ядра которых $K_{jk}(t, \zeta)$ *ограничены и удовлетворяют неравенству*

$$|K_{jk}(t_1, \zeta) - K_{jk}(t_2, \zeta)| \leqslant N |t_1 - t_2|^{\alpha},$$

где N *не зависит от* t_1, t_2 *и* ζ. *Тогда любое решение системы* (6.82), *суммируемое на* Γ *со степенью, большей* *единицы, удовлетворяет на Г условию Липшица с показателем α.*

Пример 8.1. На приводимом ниже примере будет проиллюстрировано применение метода Карлемана к системам сингулярных уравнений в том случае, когда матрицы $a(t)$ и $b(t)$ рациональные. Пусть Г — окружность $|\zeta| = 1$. Рассмотрим систему

$$\frac{1+\cos\vartheta}{2}u_1(t) + \frac{1}{2}\sin\vartheta u_2(t) + $$

$$+\frac{1-\cos\vartheta}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{u_1(\zeta)}{\zeta - t}d\zeta - \frac{\sin\vartheta}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{u_2(\zeta)}{\zeta - t}d\zeta = f_1(t); \qquad (6.87_1)$$

$$-\frac{\sin\vartheta}{2}u_1(t) + \frac{1+\cos\vartheta}{2}u_2(t) + $$

$$+\frac{\sin\vartheta}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{u_1(\zeta)}{\zeta - t}d\zeta + \frac{1-\cos\vartheta}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{u_2(\zeta)}{\zeta - t}d\zeta = f_2(t). \qquad (6.87_2)$$

Здесь, как и в примере § 7, $t = e^{i\vartheta}$. В данном случае

$$a(t) = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\vartheta}{2} & \frac{\sin\vartheta}{2} \\ -\frac{\sin\vartheta}{2} & \frac{1+\cos\vartheta}{2} \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} \frac{1-\cos\vartheta}{2} & -\frac{\sin\vartheta}{2} \\ \frac{\sin\vartheta}{2} & \frac{1-\cos\vartheta}{2} \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$a(t) + b(t) = I, \quad a(t) - b(t) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что символическая матрица системы (6.87) не вырождается, и для этой системы верна теорема Нетера (теорема 6.2). Более того, формула (6.86) показывает, что индекс нашей системы равен нулю, и для нее верны теоремы Фредгольма (теоремы 1.2—1.4 из гл. II).

Займемся решением системы (6.87). Обозначим через u и f векторы с составляющими u_1, u_2 и f_1, f_2 соответственно. Введем в рассмотрение вектор-функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{u(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Из системы (6.87) вытекает, что функция $\Phi(z)$ удовлетворяет соотношению

$$\Phi^+(t) - \delta(t)\Phi^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma, \qquad (6.88)$$

в котором для краткости положено

$$\delta(t) = a(t) - b(t) = \begin{pmatrix} \frac{1+t^2}{2t} & -\frac{1-t^2}{2it} \\ \frac{1-t^2}{2it} & \frac{1+t^2}{2t} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим сперва однородную задачу, когда $f(t) \equiv 0$. В этом случае

$$\Phi^+(t) - \delta(t)\Phi^-(t) = 0.$$

Это равенство показывает, что функция $\Phi^+(z)$ аналитически продолжима на всю плоскость; на бесконечности она ограничена, потому что при $z = \infty$ множитель $\delta(z)$ имеет полюс первого порядка, а множитель $\Phi^-(z)$ — нуль того же порядка. Но тогда $\Phi^+(z) = \alpha = \mathrm{const}$ и $\Phi^-(z) = \delta^{-1}(z)\alpha$. Обозначим через α_1 и α_2 составляющие вектора α. Легко проверить, что

$$\delta^{-1}(z) = \begin{pmatrix} \frac{z^2+1}{2z} & -\frac{z^2-1}{2iz} \\ \frac{z^2-1}{2iz} & \frac{z^2+1}{2z} \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$\Phi^-(z) = \left(\frac{z^2-1}{2z}\alpha_1 - \frac{z^2-1}{2iz}\alpha_2,\ \frac{z^2-1}{2iz}\alpha_1 + \frac{z^2-1}{2z}\alpha_2\right).$$

Из условия $\Phi^-(\infty) = 0$ вытекает, что

$$\alpha_1 + i\alpha_2 = 0.$$

Таким образом, однородная система имеет одно нетривиальное решение, которому соответствуют аналитические вектор-функции

$$\Phi^+(z) = (1, i), \quad \Phi^-(z) = (1, i)\frac{1}{z}.$$

Индекс системы равен нулю, и сопряженная однородная система тоже имеет только одно нетривиальное решение. Если так, то неоднородная система (6.87) разрешима тогда и только тогда, когда вектор $f(t)$ ортогонален к упомянутому решению сопряженного уравнения.

Обе части уравнения (6.88) умножим на ядро Коши $\frac{1}{2\pi i}\frac{dt}{t-z}$, где $z \in D^+$, и проинтегрируем по Г. Мы получим тогда

$$\Phi^+(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\delta(t)\Phi^-(t)}{t-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)}{t-z}\,dt.$$

Функция $\delta(z)\Phi^-(z)$ регулярна вне Γ, включая бесконечно удаленную точку, и последний интеграл равен значению этой функции при $z=\infty$. Отсюда

$$\Phi^+(z)-\beta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)}{t-z}\,dt,\quad z\in D^+, \tag{6.89}$$

где

$$\beta=[\delta(z)\Phi^-(z)]_{z=\infty}.$$

Проинтегрируем теперь соотношение (6.88), предварительно умножив его на ядро Коши, в котором $z\in D^-$. Это приведет нас к новому соотношению

$$-\delta(z)\Phi^-(z)+\beta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)}{t-z}\,dt,\quad z\in D^-.$$

Умножив это соотношение слева на матрицу $\delta^{-1}(z)$, найдем

$$\Phi^-(z)=\delta^{-1}(z)\left[\beta-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{f(t)}{t-z}\,dt\right],\quad z\in D^-. \tag{6.90}$$

Правая часть формулы (6.90) в общем случае имеет на бесконечности полюс первого порядка. Условие $\Phi^-(\infty)=0$ заставляет требовать, чтобы члены с первой и с нулевой степенью z исчезли. Эти требования приводят к равенствам:

$$\beta_2=i\beta_1,\quad \int\limits_{\Gamma}[f_2(t)-if_1(t)]\,dt=0. \tag{6.91}$$

Здесь β_1 и β_2 — составляющие вектора β. Первое из равенств (6.91) означает, что вектор β определяет решение соответствующей однородной задачи, второе равенство есть упомянутое выше условие ортогональности, которому должен быть подчинен вектор $f(t)$. Нетрудно найти выражение для решения однородного сопряженного уравнения, а также формулу, определяющую искомый вектор $u(t)$. Мы предоставляем это сделать читателю.

§ 9. Случай разомкнутого контура

9.1. Пример. Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{u(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta=f(t);\quad -1<t<1. \tag{6.92}$$

Будем считать, что функция $f(t)$ удовлетворяет условию Липшица на сегменте $[-1,1]$. От неизвестной функции $u(\zeta)$ потребуем, чтобы она удовлетворяла условию Липшица с одним и тем же показателем на любом сегменте $[-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$, где ε — положительное число, и чтобы она была суммируема на промежутке $-1 < t < 1$.

Уравнение (6.92) будем решать методом Карлемана. Положим

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{+1}\frac{u(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta, \quad z \bar{\in} [-1, 1].$$

Функция $\Phi(z)$ голоморфна в плоскости, разрезанной по сегменту $[-1, +1]$, и равна нулю на бесконечности; она имеет предельные значения (вообще говоря, различные) на промежутке $(-1, +1)$, когда $z \to t$, $t \in (-1, +1)$, сверху или снизу. Эти предельные значения обозначим соответственно через $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$. Для этих величин справедливы предельные формулы (6.16); в таком случае уравнение (6.92) можно заменить таким:

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = f(t); \quad -1 < t < 1.$$

Выберем какую-нибудь ветвь функции $\sqrt{1-z^2}$ (например ту, для которой $\sqrt{1-z^2} > 0$ на верхнем берегу разреза $-1 < z < 1$) и положим $F(z) = \Phi(z)\sqrt{1-z^2}$. Тогда

$$F^+(t) + F^-(t) = \sqrt{1-t^2}\, f(t); \quad -1 < t < 1.$$

На бесконечности функция $F(z)$ ограничена, поэтому общее решение последнего уравнения есть

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}\, f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + c,$$

c — произвольная постоянная. Отсюда

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i\sqrt{1-z^2}}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}\, f(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{c}{\sqrt{1-z^2}}.$$

Значение $u(t)$ найдем по формуле $u(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t)$:

$$u(t) = \frac{1}{\pi i\sqrt{1-t^2}}\int_{-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}\, f(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta + \frac{C}{\sqrt{1-t^2}}; \quad C = 2c. \tag{6.93}$$

Опираясь на свойства интеграла типа Коши (подробно об этом см. [25]), нетрудно доказать, что при любом значении произвольной постоянной C функция (6.93) удовлетворяет всем наложенным на нее выше требованиям. Постоянной C можно распорядиться так, чтобы решение удовлетворяло тому или иному дополнительному требованию. Так, если мы потребуем, чтобы $u(t)$ была ограничена при $t \to 1$, то необходимо

$$C = \frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1+\zeta}{1-\zeta}} f(\zeta)\, d\zeta$$

и, следовательно,

$$u(t) = \frac{1}{\pi i} \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1+\zeta}{1-\zeta}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta. \tag{6.94}$$

Можно доказать [25], что последняя функция на самом деле ограничена при $t \to 1$. Требование ограниченности при $t \to -1$ привело бы нас к значению

$$C = -\frac{1}{\pi i} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-\zeta}{1+\zeta}} f(\zeta)\, d\zeta$$

и к решению

$$u(t) = \frac{1}{\pi i} \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-\zeta}{1+\zeta}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta. \tag{6.95}$$

Задача: найти решение уравнения (6.92), ограниченное на обоих концах $t = -1$ и $t = +1$, — разрешима лишь тогда, когда свободный член $f(t)$ удовлетворяет некоторому условию орто онaльности. В этом случае можно, например, воспользоваться формулой (6.94) и дополнительно потребовать, чтобы интеграл в этой формуле обратился в нуль при $t = -1$:

$$\int_{-1}^{1} \frac{f(\zeta)}{\sqrt{1-\zeta^2}}\, d\zeta = 0. \tag{6.96}$$

Можно доказать, что условие (6.96) достаточно для того, чтобы любая из формул (6.93) и (6.94) давала решение, ограниченное на обоих концах $t = +1$ и $t = -1$ промежутка интегрирования

9.2. Общий случай *). Пусть Γ представляет собой совокупность конечного числа n простых разомкнутых ляпуновских дуг. Концы этих дуг, занумерованные в каком угодно

*) Общий случай изучен Н. И. Мусхелишвили и Д. А. Квеселава [27]; см. также [25].

порядке, обозначим через $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$. Рассмотрим уравнение

$$a(t)\,u(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{u(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta=f(t). \tag{6.97}$$

Примем, что функции $a(t)$, $b(t)$ и $f(t)$ удовлетворяют на Γ условию Липшица с некоторым показателем $\alpha>0$. Допустим еще, что выражение $a^2(t)-b^2(t)$ нигде на Γ не обращается в нуль. Относительно искомой функции пока потребуем, чтобы она удовлетворяла условию Липшица с положительным показателем на любой внутренней замкнутой части контура Γ, а вблизи любого из концов c_k она удовлетворяла неравенству

$$|u(t)|\leqslant\frac{\mathrm{const}}{|t-c_k|^{\beta_k}},\qquad 0\leqslant\beta_k<1.$$

Функция, удовлетворяющая таким требованиям, очевидно, суммируема на Γ. Более определенные требования на решение будут наложены ниже.

По методу Карлемана введем функцию

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{u(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta.$$

Тогда уравнение (6.97) заменится таким:

$$\Phi^+(t)-G(t)\,\Phi^-(t)=g(t), \tag{6.98}$$

где

$$G(t)=\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)},\qquad g(t)=\frac{f(t)}{a(t)+b(t)}.$$

Очевидно,

$$G,\ g\in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)\quad\text{и}\quad G(t)\neq 0\quad\text{на }\Gamma.$$

Дальнейшее основано на некоторой классификации концов c_k. Выберем некоторую непрерывную на Γ ветвь многозначной функции $\ln G(t)$ и положим

$$\gamma_k=\pm\frac{1}{2\pi i}\ln G(c_k); \tag{6.99}$$

знак плюс берется, если c_k есть конец соответствующей дуги, знак минус — если c_k есть начало дуги. Подберем целые числа μ_k так, чтобы

$$-1<\mathrm{Re}\,(\gamma_k)+\mu_k<1. \tag{6.100}$$

Если $\operatorname{Re}(\gamma_k)$ — целое число, то μ_k определяется единственным образом: $\mu_k = -\operatorname{Re}(\gamma_k)$. В этом случае конец c_k назовем *особенным*. Остальные концы назовем ***неособенными***. В каждом из неособенных концов можно выбрать μ_k двумя способами, так что либо $-1 < \operatorname{Re}(\gamma_k)+\mu_k < 0$, либо $0 < \operatorname{Re}(\gamma_k)+\mu_k < 1$. Нумерацию концов c_k выберем так, чтобы концы $c_1, c_2, \ldots, c_m$ были неособенными, а концы $c_{m+1}, \ldots, c_{2n}$ — особенными. На искомое решение уравнения (6.97) наложим теперь следующее важное требование: это *решение должно быть ограничено в заранее заданных неособенных концах* $c_1, c_2, \ldots, c_q$; $q \leqslant m$. Для задачи, поставленной таким образом, справедливы следующие утверждения:

1. *Любое ее решение* (а следовательно, и любое решение уравнения (6.92)) *ограничено во всех особенных концах.*

2. *Решая нашу задачу, следует выбирать числа* μ_k *таким образом, чтобы*

$$0 < \operatorname{Re}(\gamma_k)+\mu_k < 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, q),$$
$$-1 < \operatorname{Re}(\gamma_k)+\mu_k < 0 \qquad (k = q+1\ \ q+2, \ldots, m);$$

в особенных концах, как мы видели, $\mu_k = -\operatorname{Re}(\gamma_k)$. Положим

$$\varkappa = -\sum_{k=1}^{2n} \mu_k. \tag{6.101}$$

Наша задача, поставленная для однородного уравнения

$$a(t)\,v(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{v(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta = 0, \tag{6.102}$$

имеет $\varkappa$ *линейно независимых решений, если* $\varkappa > 0$, *и только тривиальное решение, если* $\varkappa \leqslant 0$.

3. *Для неоднородного уравнения* (6.97) *задача разрешима тогда и только тогда, когда свободный член* $f(t)$ *удовлетворяет некоторым условиям ортогональности. Если эти условия записать в виде*

$$\int_\Gamma f(t)\,w_j(t)\,dt = 0, \tag{6.103}$$

то $w_j(t)$ суть решения однородного уравнения

$$a(t)w'(t)-\frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{w(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta=0, \qquad (6.104)$$

ограниченные в неособенных концах $c_{q+1}, c_{q+2}, \ldots, c_m$.

4. *Индекс задачи равен $\varkappa$.*

Самое решение можно построить так. Положим

$$\chi(z)=\prod_{k=1}^{2n}(z-c_k)^{\mu_k}\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{\ln G(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\right\}. \qquad (6.105)$$

Функция $\chi(z)$ называется *канонической функцией задачи.* Она ограничена в концах $c_1, c_2, \ldots, c_q$, а также в особенных концах; ее предельные значения, так же как и предельные значения функции $[\chi(z)]^{-1}$, суммируемы на Γ; она удовлетворяет соотношению

$$\chi^+(t)=G(t)\chi^-(t); \qquad t\in\Gamma.$$

Поделив равенство (6.98) на $\chi^+(t)$, получим

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi^+(t)}-\frac{\Phi^-(t)}{\chi^-(t)}=\frac{g(t)}{\chi^+(t)}.$$

Отсюда

$$\Phi(z)=\frac{\chi(z)}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{g(\zeta)}{\chi^+(\zeta)}\frac{d\zeta}{\zeta-t}+\chi(z)Q(z), \qquad (6.106)$$

где $Q(z)$—функция, голоморфная на всей конечной плоскости. Условие $\Phi(\infty)=0$ приводит к тому, что при $\varkappa>0$ функция $Q(z)$ — полином степени $\leqslant\varkappa-1$, а при $\varkappa\leqslant 0$ необходимо $Q(z)\equiv 0$. Если $Q(z)$ определено таким образом, то при $\varkappa\geqslant 0$ формула (6.106) решает задачу; при $\varkappa<0$ эта формула решает задачу тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{g(\zeta)\zeta^k}{\chi^+(\zeta)}\,d\zeta=0 \qquad (k=0, 1, \ldots, -\varkappa-1). \qquad (6.107)$$

9.3. Дополнительные замечания. Рассмотрим теперь более общее уравнение

$$a(t)u(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{u(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta+\int\limits_{\Gamma}K(t,\zeta)u(\zeta)\,d\zeta=f(t), \qquad (6.108)$$

где $K(t, \zeta)$ удовлетворяет на Γ по обеим переменным условию Липшица с показателем α; функции $a(t)$, $b(t)$, $f(t) \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$. По-прежнему будем искать решение, ограниченное в заранее заданных неособенных концах $c_1, c_2, \ldots, c_q$. Перенеся второй интеграл направо и применив изложенный выше прием, мы осуществим регуляризацию уравнения (6.108). В таком случае поставленная нами для уравнения (6.108) задача нормально разрешима и имеет конечный индекс. Доказывается, что индекс новой задачи по-прежнему определяется формулой (6.101); если необходимые и достаточные условия разрешимости записать в виде (6.103), то на этот раз $w_j(t)$ суть решения однородного уравнения

$$a(t)w(t) - \frac{b(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{w(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta + \int_\Gamma K(\zeta, t)\,w(\zeta)\,d\zeta = 0, \qquad (6.109)$$

ограниченные в концах $c_{q+1}, \ldots, c_m$.

В работе Б. В. Хведелидзе [41] развивается теория, аналогичная вышеизложенной, но с той разницей, что решение строится в пространстве функций, суммируемых с некоторой степенью $p > 1$ и с весом, определяемым выбором неособенных концов.

В работах Н. И. Ахиезера [2] и С. А. Фрейдкина [36] рассмотрены некоторые случаи, когда контур Γ состоит из счетного множества отрезков вещественной оси.

Системы сингулярных интегральных уравнений с интегрированием по разомкнутому контуру изучены в книге Н. П. Векуа [4]. Этот автор использует несколько иной подход: перейдя по методу Карлемана к задаче сопряжения, он затем произвольным образом дополняет Γ до гладкого замкнутого контура, ограничивающего односвязную область, и на дополнительной части контура ставит условие аналитической продолжимости вектора $\Phi(z)$; это условие имеет вид

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = 0.$$

Теперь задача сведена к задаче сопряжения с разрывным коэффициентом при $\Phi^-(t)$ и с разрывным свободным членом; последняя задача и исследуется. В качественном отношении для систем получаются те же результаты, что и для одного уравнения.

§ 10. Уравнения Трикоми и Геллерстедта

10.1. Постановка задачи. Краевые задачи для дифференциальных уравнений в частных производных смешанного эллиптико-гиперболического типа, в частности уравнения газовой динамики, иногда приводят к интегральным уравнениям, которые, кроме обычного сингулярного интеграла, содержат еще интегралы, ядра которых несуммируемы по обеим переменным, хотя и не являются сингулярными.

Интегральное уравнение Ф. Трикоми [35] может быть приведено к виду

$$u(x)-\lambda\int_0^1\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{x+t-2tx}\right)u(t)\,dt=f(x). \tag{6.110}$$

Второе слагаемое $(x+t-2tx)^{-1}$ в ядре непрерывно, если хотя бы одна из переменных x и t меняется строго внутри промежутка $(0, 1)$, но если $x=t=0$ или $x=t=1$, это слагаемое делается бесконечным, и притом так, что оно несуммируемо в квадрате $0\leqslant x,\ t\leqslant 1$. Несколько сложнее уравнение Геллерстедта [48]

$$u(x)-\lambda\int_{-1}^{1}K(x, t)\,u(t)\,dt=f(x), \tag{6.111}$$

где

$$K(x, t)=\begin{cases}\dfrac{1}{t-x}+\left(\dfrac{1-tx_0}{x_0-t}\right)^{\alpha}\dfrac{1}{1-xt}; & -1\leqslant t\leqslant x_0,\\[2ex] -\dfrac{1}{t-x}+\left(\dfrac{1-tx_0}{t-x_0}\right)^{\alpha}\dfrac{1}{1-xt}; & x_0\leqslant t\leqslant 1.\end{cases} \tag{6.112}$$

Здесь x_0 и α — постоянные, причем $-1\leqslant x_0\leqslant 1$ и $0<\alpha<1$. При $x_0=1$ уравнение Геллерстедта переходит в уравнение Трикоми — достаточно в уравнении (6.111) сделать замену

$$x_1=\frac{x+1}{2},\quad t_1=\frac{t+1}{2}.$$

Метод Карлемана позволяет (см. [48]) решить до конца уравнение (6.111). Мы рассмотрим здесь более простое уравнение (6.111), для которого применение метода Карлемана может быть упрощено ([21], см. также [22]); по поводу общего уравнения (6.111) мы отсылаем читателя к статье Геллерстедта [48].

Будем считать, что $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица с некоторым положительным показателем на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$. Неизвестную $u(x)$ будем искать в классе функций, удовлетворяющих следующим условиям: а) на всяком отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, где $0 < a < b < 1$, $u(x)$ удовлетворяет условию Липщица с положительным показателем; б) произведения $u(x)\ln x$ и $u(x)\ln(1-x)$ суммируемы на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 1$.

10.2. Сведение к краевой задаче. Пусть z — произвольная точка комплексной плоскости. Положим

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{z+t-2zt}\right) u(t)\,dt. \tag{6.113}$$

Очевидно, $\Phi(z)$ голоморфна как в верхней, так и в нижней полуплоскости.

Обозначим через $\Phi^+(x)$ и $\Phi^-(x)$ предельные значения $\Phi(z)$, когда z стремится к точке x действительной оси соответственно из верхней или из нижней полуплоскости. Уравнение (6.110) переходит в следующее:

$$(1 - i\pi\lambda)\Phi^+(x) - (1 + i\pi\lambda)\Phi^-(x) = f(x), \quad 0 < x < 1. \tag{6.114}$$

Из (6.113) легко усмотреть, что

$$\Phi\left(\frac{z}{2z-1}\right) = (2z-1)\Phi(z). \tag{6.115}$$

Дробно-линейное преобразование $\zeta = \frac{z}{2z-1}$ переводит верхнюю полуплоскость в нижнюю и наоборот; отрезок (0, 1) переходит при этом в два луча $(0, -\infty)$ и $(\infty, 1)$. Заменяя в (6.114) x через $\frac{x}{2x-1}$ и пользуясь соотношением (6.115), мы получим

$$(1 - i\pi\lambda)\Phi^-(x) + (1 + i\pi\lambda)\Phi^+(x) = \frac{1}{2x-1} f\left(\frac{x}{2x-1}\right), \quad x < 0 \text{ или } x > 1. \tag{6.116}$$

Положим теперь

$$G(x)=\begin{cases}\dfrac{1+i\pi\lambda}{1-i\pi\lambda}, & 0<x<1,\\[2mm] \dfrac{1-i\pi\lambda}{1+i\pi\lambda}, & x<0 \text{ или } x>1;\end{cases}$$

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{1-i\pi\lambda}, & 0<x<1,\\[2mm] \dfrac{f\left(\dfrac{x}{2x-1}\right)}{(1+i\pi\lambda)(2x-1)}, & x<0 \text{ или } x>1.\end{cases}$$

Уравнения (6.114) и (6.116) можно соединить в одно:

$$\Phi^+(x)-G(x)\Phi^-(x)=h(x),$$
$$-\infty<x<\infty,\quad x\neq 0,\quad x\neq 1. \tag{6.117}$$

10.3. Решение однородной задачи. Решим предварительно соответствующую однородную задачу. Найдем функцию $\chi(z)$, голоморфную как в верхней, так и в нижней полуплоскости, ограниченную на бесконечности и удовлетворяющую на действительной оси уравнению

$$\chi^+(x)=G(x)\chi^-(x)$$

или, что то же,

$$\ln\chi^+(x)-\ln\chi^-(x)=\ln G(x).$$

Одно из решений последнего уравнения есть

$$\ln\chi(x)=\frac{1}{2\pi i}\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{N}\frac{\ln G(t)}{t-x}\,dt.$$

Последний интеграл легко вычисляется: обозначая $\theta=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\lambda\pi$, $-\frac{1}{2}<\theta<\frac{1}{2}$, имеем

$$\ln\chi^+(z)=2\theta\ln\frac{1-z}{z}+i\pi\theta,\quad \ln\chi^-(z)=2\theta\ln\frac{1-z}{z}-i\pi\theta.$$

Под $\ln\frac{1-z}{z}$ следует понимать ту ветвь логарифма, которая голоморфна в плоскости, разрезанной вдоль лучей $(-\infty, 0)$

и $(1, \infty)$, и которая принимает действительные значения на отрезке $(0, 1)$. Теперь

$$\chi^+(z) = e^{i\pi\theta}\left(\frac{1-z}{z}\right)^{2\theta}, \quad \chi^-(z) = e^{-i\pi\theta}\left(\frac{1-z}{z}\right)^{2\theta}.$$

10.4. Решение неоднородной задачи. Разделив уравнение (6.117) на $\chi^+(z)$, мы приведем его к виду

$$\frac{\Phi^+(z)}{\chi^+(z)} - \frac{\Phi^-(z)}{\chi^-(z)} = \frac{h(z)}{\chi^+(z)},$$

одно из решений последнего уравнения есть

$$\Phi(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(t)}{\chi(t)}\,\frac{dt}{t-z}.$$

Чтобы найти общее решение, рассмотрим однородное уравнение

$$\frac{\Phi_0^+(x)}{\chi^+(x)} - \frac{\Phi_0^-(x)}{\chi^-(x)} = 0.$$

Это уравнение показывает, что функция $F(x) = \Phi_0(z)/\chi(z)$ голоморфна на всей плоскости, кроме, может быть, точек $z = 0$ и $z = 1$. Допуская, что произведения $u(x)\ln x$ и $u(x)\ln(1-x)$ суммируемы, мы легко найдем, что при $\theta > 0$ $F(z) = \frac{a}{1-z}$, а при $\theta < 0$ $F(z) = a/z$, где a—произвольная постоянная.

Теперь общее решение уравнения (6.117) принимает вид

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{\chi(z)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(t)}{\chi^+(t)}\,\frac{dt}{t-z} + a\,\frac{\chi(z)}{z}, \qquad \theta < 0,\\ \Phi(z) &= \frac{\chi(z)}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{h(t)}{\chi^+(t)}\,\frac{dt}{t-z} + a\,\frac{\chi(z)}{1-z}, \qquad \theta > 0.\end{aligned} \tag{6.118}$$

Интеграл в (6.118) разобьем на три интеграла по промежуткам $(-\infty, 0)$, $(1, \infty)$ и $(0, 1)$; в первых двух заменим t через $\frac{t}{2t-1}$. Далее $u(x)$ определим по формуле

$$u(x) = \Phi^+(x) - \Phi^-(x), \qquad 0 < x < 1.$$

Произведя необходимые вычисления, мы придем к решению Трикоми

$$u(x)=\frac{1}{1+\lambda^2\pi^2}\left\{f(x)+\lambda\left(\frac{1-x}{x}\right)^{2\theta}\int_0^1\left(\frac{t}{1-t}\right)^{2\theta}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{x+t-2xt}\right)f(t)\,dt\right\}+\frac{A}{x^{1+2\theta^*}(1-x)^{-2\theta^*}},$$

где $\operatorname{tg}\theta^*\pi=\lambda\pi$, $-1<\theta^*<0$ и A — произвольная постоянная.

§ 11. Уравнения с вырождающимся символом

11.1. Неограниченная регуляризация. Одномерные сингулярные уравнения с символом, вырождающимся в конечном числе точек, в настоящее время довольно хорошо изучены. Первые результаты в этом направлении были получены Д. И. Шерманом [44], [45]. С точки зрения задачи Римана этим же вопросом занимались Л. А. Чикин ([43], см. также [4]) и Б. В. Хведелидзе [41]. В работе З. Пресдорфа [28] предшествующие результаты были существенно улучшены, изложены с более отчетливой операторной точки зрения и распространены на системы сингулярных уравнений с вырождающейся символической матрицей. В этой работе выяснено, что такого рода сингулярные системы допускают регуляризацию с помощью *неограниченного* регуляризатора; свойства операторов, допускающих неограниченную регуляризацию, исследованы в статье [28]. А. Е. Косулин [15] исследовал уравнения с вырождающимся символом в пространствах обобщенных функций; этому будет посвящен следующий параграф. В настоящем параграфе в основном будут изложены результаты работ [28] и [29].

Прежде всего, отметим некоторые общие факты, касающиеся операторов (или уравнений), допускающих неограниченную регуляризацию.

Говорят, что оператор A допускает *неограниченную регуляризацию*, если существует неограниченный оператор B, область определения которого включает в себя область значений оператора A (т. е. $D(B)\supset R(A)$), и такой, что

$$BAu=u+Tu,\qquad u\in D(A),\tag{6.119}$$

где T — вполне непрерывный оператор.

Справедливы следующие утверждения.

1. *Для того чтобы замкнутый оператор допускал регуляризацию, ограниченную или неограниченную, необходимо и достаточно, чтобы этот оператор имел конечное число нулей.*

2. *Если замкнутый оператор допускает неограниченную регуляризацию, то он не является нормально разрешимым.*

3. *Если замкнутый оператор допускает ограниченную регуляризацию, то он не допускает неограниченной регуляризации, и наоборот.*

11.2. Общее сингулярное уравнение. Рассмотрим теперь сингулярное интегральное уравнение

$$Au = a(t)\,u(t) + b(t)\,Su + \int\limits_{\Gamma} K(t, \zeta)\,u(\zeta)\,d\zeta = f(t). \qquad (6.120)$$

Как и выше, здесь

$$Su = \int\limits_{\Gamma} \frac{u(\zeta)}{\zeta - t}\,d\zeta;$$

будем считать, что Γ — достаточно гладкий контур, разбивающий комплексную плоскость на две области: внутреннюю D^+ и внешнюю D^-. Примем, что функции $a(t)$, $b(t)$ и $K(t, \zeta)$ удовлетворяют условию Липшица с положительным показателем на всем контуре Γ. Пусть, далее, $f \in L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$; решение u будем искать в том же пространстве. Обозначим

$$\delta(t) = a(t) - b(t), \qquad \sigma(t) = a(t) + b(t)$$

и будем ниже рассматривать следующие два случая.

I. Функция $\delta(t)$ имеет на Γ один корень $t = \alpha$ целой кратности m; функция $\sigma(t)$ всюду на Γ отлична от нуля.

II. Функция $\delta(t)$ всюду на Γ отлична от нуля; функция $\sigma(t)$ имеет на Γ один корень β целой кратности m. Потребуем еще, чтобы в некоторой окрестности корня $t = \alpha$ (соответственно $t = \beta$) функции $a(t)$, $b(t)$ и $K(t, \zeta)$ имели m производных по t, причем m-е производные от этих функций должны удовлетворять условию Липшица с показателем $\lambda > \frac{p-1}{p}$.

Доказывается, что в случае I существует неограниченный регуляризатор

$$B^{(1)} = B_4^{(1)} B_3^{(1)} B_2^{(1)} B_1^{(1)}, \tag{6.121}$$

где

$$\left.\begin{aligned} B_1^{(1)} u &= a(t)\, u(t) - b(t)\, Su, \\ B_2^{(1)} u &= \frac{(t-\alpha)^m}{\delta(t)}\, u(t), \\ B_3^{(1)} u &= u(t) - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}\, u^{(k)}(\alpha)(t-\alpha)^k, \\ B_4^{(1)} u &= \frac{u(t)}{(t-\alpha)^m \sigma(t)}. \end{aligned}\right\} \tag{6.122}$$

В случае II также существует неограниченный регуляризатор $B^{(2)}$, получаемый из $B^{(1)}$ заменой α на β и перестановкой функции $\delta(t)$ и $\sigma(t)$:

$$B^{(2)} = B_4^{(2)} B_3^{(2)} B_2^{(2)} B_1^{(2)}, \tag{6.123}$$

где

$$\left.\begin{aligned} B_1^{(2)} &= B_1^{(1)}, \qquad B_2^{(2)} = \frac{(t-\beta)^m}{\sigma(t)}\, I, \\ B_3^{(2)} u &= u(t) - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}\, u^{(k)}(\beta)(t-\beta)^k, \\ B_4^{(2)} u &= \frac{u(t)}{(t-\beta)^m \delta(t)}. \end{aligned}\right\} \tag{6.124}$$

Раз существует неограниченный регуляризатор, то как в случае I, так и в случае II однородное уравнение, получаемое из (6.120) при $f(t) \equiv 0$, имеет только конечное число линейно независимых решений; это же утверждение верно и для сопряженного уравнения. Далее, для неоднородного уравнения (6.120) условие ортогональности $f(t)$ к решениям однородного сопряженного уравнения перестает быть достаточным условием разрешимости (но оно остается необходимым).

11.3. Системы сингулярных уравнений. Пусть в уравнении (6.120) $a(t)$, $b(t)$ и $K(t, \zeta)$ — квадратные матрицы порядка n. Обозначим на этот раз

$$\left.\begin{aligned} c(t) &= a(t) + b(t), & d(t) &= a(t) - b(t), \\ \sigma(t) &= \det c(t), & \delta(t) &= \det d(t). \end{aligned}\right\} \tag{6.125}$$

По-прежнему будем рассматривать два случая, которые в обозначениях (6.125) формулируются буквально так же, как и для одного уравнения. Примем также, что матрицы $a(t)$, $b(t)$ и $K(t, \zeta)$ удовлетворяют условиям гладкости, сформулированным выше для аналогичных коэффициентов. Тогда, как в случае I, так и в случае II существуют неограниченные регуляризаторы $\boldsymbol{B}^{(1)}$ и $\boldsymbol{B}^{(2)}$; они по-прежнему определяются формулами (6.121) и (6.123), где на этот раз

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{B}_1^{(1)}u &= a(t)\,\tilde{d}(t)\,u(t) - b(t)\,\tilde{d}(t)\,(\boldsymbol{S}u)(t), \\ \boldsymbol{B}_2^{(1)}u &= \frac{(t-\alpha)^m}{\delta(t)}\,u(t), \\ \boldsymbol{B}_3^{(1)}u &= u(t) - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}\,u^{(k)}(\alpha)\,(t-\alpha)^k, \\ \boldsymbol{B}_4^{(1)}u &= \frac{c^{-1}(t)}{(t-\alpha)^m}\,u(t). \end{aligned}\right\} \tag{6.126}$$

Знаком $\sim$ обозначена союзная матрица, т. е. матрица, составленная из алгебраических дополнений элементов данной матрицы и затем транспонированная. Далее,

$$\left.\begin{aligned} &\boldsymbol{B}_1^{(2)}u = a(t)\,\tilde{c}(t)\,u(t) - b(t)\,\tilde{c}(t)\,(\boldsymbol{S}u)(t), \\ &\boldsymbol{B}_2^{(2)}u = \frac{(t-\beta)^m}{\sigma(t)}\,u(t), \qquad \boldsymbol{B}_3^{(2)}u = u(t) - \boldsymbol{P}u, \\ &\boldsymbol{B}_4^{(2)}u = \frac{d^{-1}(t)}{(t-\beta)^m}\,u(t). \end{aligned}\right\} \tag{6.127}$$

Оператор $\boldsymbol{P}$ в выражении для $\boldsymbol{B}_3^{(2)}$ определяется следующим образом: обозначим через γ_k коэффициенты, определяемые соотношениями

$$\left[\frac{d^\nu}{dt^\nu} \sum_{k=1}^{m} \frac{\gamma_k}{t^k}\right]_{t=\alpha} = u^{(\nu)}(\alpha), \qquad \nu = 1, 2, \ldots, m.$$

Тогда

$$(Pu)(t)=\sum_{k=1}^{m}\frac{\gamma_k}{t^k}.$$

Качественные выводы, сформулированные выше для одного уравнения и вытекающие из существования неограниченного регуляризатора, остаются в силе и для систем.

Воздействуя на обе части уравнения (6.120) неограниченным регуляризатором $B^{(1)}$ (соответственно $B^{(2)}$), мы сводим это уравнение к некоторому уравнению типа Фредгольма. В работах [28] и [45] исследован вопрос об эквивалентности обоих уравнений.

§ 12. Сингулярные уравнения в обобщенных функциях *)

В работах А. Е. Косулина [15], В. С. Рогожина [32], [33] и некоторых других исследованы одномерные сингулярные уравнения в пространствах обобщенных функций [6]. Следует отметить, что впервые в пространствах обобщенных функций стали рассматривать не одномерные, а многомерные сингулярные уравнения; по-видимому, первая из работ такого сорта принадлежит Ж. Хорвату [50]. В настоящем параграфе мы приведем результаты статьи [15] как более полные.

12.1. Уравнение с невырождающимся символом. Мы будем рассматривать сингулярное уравнение вида

$$a(t)\,u(t)+b(t)\,(Su)(t)=f(t) \tag{6.128}$$

в предположении, что Γ — замкнутый бесконечно дифференцируемый контур, делящий плоскость на две области, внутреннюю D^+ и внешнюю D^-. В качестве основного пространства возьмем счетно-нормированное пространство Φ функций, бесконечно дифференцируемых на Γ; система норм в Φ вводится так: если $u\in\Phi$, то

$$\|u\|_k=\max_{t\in\Gamma}\{|u(t)|,\ |u'(t)|,\ \ldots,\ |u^{(k)}(t)|\}$$
$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{6.129}$$

Ниже будем считать, что $a,\ b\in\Phi$.

---

*) Необходимые сведения по теории обобщенных функций можно найти в [7], [8], [42], [46], [53], [54].

Рассмотрим сперва случай, когда $f \in \Phi$ и символ уравнения не вырождается. Тогда уравнение (6.128) естественно рассматривать в пространстве основных функций. В этом пространстве оказывается верной теорема Нетера (§ 6). Более того, однородное уравнение

$$a(t)\,u(t) + b(t)\,(Su)(t) = 0 \tag{6.130}$$

имеет в Φ m линейно независимых решений, если $m > 0$, и только тривиальное решение, если $m \leqslant 0$. Здесь m — индекс уравнения (6.128), определяемый формулой (6.54). Решения уравнений (6.128) и (6.130), принадлежащие пространству Φ, будем ниже называть классическими.

Обозначим через Φ' пространство обобщенных функций, т. е. пространство линейных функционалов в Φ, непрерывных в топологии (6.129). Допустим теперь, что $f \in \Phi'$. Тогда искомое $u(t)$ также принадлежит пространству Φ'. То обстоятельство, что обобщенная функция $u(t)$ удовлетворяет уравнению (6.128), означает следующее: какова бы ни была функция $\varphi \in \Phi$, справедливо тождество

$$\left(u,\ \overline{a(t)}\,\varphi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\bar{t}-\bar{\zeta}}\,d\bar{\zeta}\right) = (f,\ \varphi). \tag{6.131}$$

Здесь круглыми скобками обозначено значение данного функционала на данной функции; так $(f,\ \varphi)$ есть значение функционала f на функции φ.

Сохраним пока предположение, что *символ уравнения не вырождается*. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *Уравнение* (6.130), *а также сопряженное с ним однородное уравнение, имеет в пространстве* Φ' *только классические решения.*

2. *Для того чтобы уравнение* (6.128) *было разрешимо в пространстве* Φ', *необходимо и достаточно, чтобы свободный член* $f(t)$ *был ортогонален ко всем решениям однородного уравнения, сопряженного с уравнением* (6.130).

12.2. Уравнение с вырождающимся символом. Пусть теперь символ уравнения вырождается, причем имеет место либо случай I, либо случай II предшествующего параграфа. Уравнение (6.130), так же как и сопряженное с ним однородное уравнение, может иметь как классические решения, так и решения — обобщенные функции, являющиеся функционалами из Φ'. Число тех и других решений конечно.

Пусть уравнение Фредгольма, полученное воздействием неограниченного регуляризатора B на уравнение (6.130), имеет вид

$$u(t)+\int_{\Gamma} P(t, \zeta)\, u(\zeta)\, d\zeta=0. \tag{6.132}$$

Рассмотрим уравнение

$$v(t)+\int_{\Gamma} \overline{P(\zeta, t)}\, v(\zeta)\, d\zeta=0, \tag{6.133}$$

сопряженное с уравнением (6.132). Это уравнение имеет некоторое количество $p>0$ решений $\tilde{v}_j(t)$, не принадлежащих области определения оператора B^*, сопряженного с регуляризатором B. Обозначим еще через $v_j(t)$, $j=1, 2, \ldots, s$, классические решения однородного уравнения, сопряженного с (6.130).

Справедливы следующие утверждения:

1. Пусть $f \in \Phi$. Для того чтобы уравнение (6.128) было разрешимо в Φ, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$\left.\begin{aligned} &(f, v_j)=0, \qquad j=1, 2, \ldots, s; \\ &(Bf, \tilde{v}_j)=0, \qquad j=1, 2, \ldots, p. \end{aligned}\right\} \tag{6.134}$$

2. Пусть $f \in \Phi'$. Для того чтобы уравнение (6.128) было разрешимо в Φ', необходимо и достаточно, чтобы

$$(f, v_j)=0, \qquad j=1, 2, \ldots, s. \tag{6.135}$$

ГЛАВА VII

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ *)

§ 1. Интегральные уравнения теории потенциала

1.1. Интегральные уравнения задач Дирихле и Неймана и их исследование в случае односвязной границы. Этот пункт посвящен интегральным уравнениям наиболее распространенных задач теории потенциала — *задачам Дирихле и Неймана* — для тех случаев, когда конечная или бесконечная область, в которой решается задача, лежит в трехмерном евклидовом пространстве и ограничена односвязной замкнутой поверхностью S, удовлетворяющей так называемым *условиям Ляпунова.* Эти условия состоят в следующем:

1) В каждой точке поверхности существуют определенная касательная плоскость и нормаль;

2) Если θ — угол между нормалями в точках поверхности M_1 и M_2 и r — расстояние между этими точками, то найдутся такие два числа $A > 0$ и α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, что выполняется неравенство

$$|\theta| \leqslant Ar^{\alpha};$$

3) Существует число d, одно и то же для всех точек поверхности, обладающее свойством: параллели к нормали в любой точке M поверхности пересекаются с частью

*) Приложения интегральных уравнений к задачам математической физики, гидродинамики и теории упругости излагаются с разной степенью полноты и подробности в книгах [2]—[14]. При составлении настоящей главы больше других использованы книги [4], [6] и [7].

поверхности, находящейся внутри сферы радиуса d с центром в точке M, только один раз.

Конечную область, находящуюся внутри S, мы будем обозначать через Ω_i, ее дополнение — через Ω_e. Напомним, что *задача Дирихле* *) состоит в отыскании гармонической функции, принимающей на границе S заданные значения

$$u|_S = f(M). \tag{7.1}$$

Если задача решается в области Ω_i, то говорят о *внутренней* задаче Дирихле, если в Ω_e, то о *внешней*.

Если на границе S задана нормальная производная функции

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = \varphi(M) \tag{7.2}$$

и гармоническая функция u ищется в области Ω_i, то эта задача называется *внутренней задачей Неймана*. Задача об отыскании гармонической функции в Ω_e, удовлетворяющей условию (7.2), носит название *внешней* задачи Неймана.

Напомним также, что функция $u(M)$ называется гармонической в бесконечной области Ω_e, если она гармоническая в любой конечной области, содержащейся в Ω_e, и $u(M) \to 0$, когда точка M удаляется на бесконечность.

Обозначим через $V(M)$ *потенциал простого слоя*

$$V(M) = \int_S \frac{\rho(M_1)}{r}\, dS_1, \tag{7.3}$$

где r — расстояние между точками M и M_1, dS_1 — элемент площади поверхности S и $\rho(M_1)$ — непрерывная плотность, распределенная по поверхности S. Мы всегда будем считать, что вектор $\mathbf{r} = \overline{MM_1}$ направлен от точки M к точке M_1.

Через $W(M)$ обозначим *потенциал двойного слоя*

$$W(M) = \int_S \sigma(M_1) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n_1}\, dS_1, \tag{7.4}$$

где n_1 — внешняя нормаль к поверхности S в точке M_1 и $\sigma(M)$ — непрерывная плотность потенциала, распределенная по поверхности S.

*) См. [1], гл. III, § 4.

Потенциалы (7.3) и (7.4) являются непрерывными гармоническими функциями как в Ω_i, так и в Ω_e. При этом потенциал простого слоя (7.3) непрерывен при переходе через поверхность, а потенциал двойного слоя при переходе точки M через поверхность S терпит разрыв. Предельные значения $W(M)$ на поверхности S, полученные изнутри и снаружи области Ω, обозначим соответственно через W_i и W_e. Тогда имеют место равенства:

$$W_i(M) = -2\pi\sigma(M) - \int_S \sigma(M_1)\frac{\cos(r, n_1)}{r^2}\,dS_1, \tag{7.5}$$

$$W_e(M) = 2\pi\sigma(M) - \int_S \sigma(M_1)\frac{\cos(r, n_1)}{r^2}\,dS_1, \tag{7.6}$$

где M — произвольная точка поверхности S.

В формулах (7.5) и (7.6) слагаемое

$$\overline{W(M)} = -\int_S \sigma(M_1)\frac{\cos(r, n_1)}{r^2}\,dS_1 \tag{7.7}$$

называется *прямым значением потенциала* $W(M)$; оно получается непосредственной подстановкой в формулу (7.4) координат точки M, лежащей на S.

Пусть $\frac{\partial V_i}{\partial n}$, $\frac{\partial V_e}{\partial n}$ — нормальные производные потенциала простого слоя, вычисленные предельным переходом на границу S соответственно изнутри и извне области Ω. Эти значения определяются равенствами

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = 2\pi\rho(M) + \int_S \rho(M_1)\frac{\cos(r, n)}{r^2}\,dS_1, \tag{7.8}$$

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = -2\pi\rho(M) + \int_S \rho(M_1)\frac{\cos(r, n)}{r^2}\,dS_1. \tag{7.9}$$

Выражение

$$\frac{\partial V}{\partial n} = \int_S \rho(M_1)\frac{\cos(r, n)}{r^2}\,dS_1 \tag{7.10}$$

называется *прямым значением нормальной производной* потенциала простого слоя.

С помощью равенств (7.5) — (7.9) решение задач Дирихле и Неймана сводится к решению интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Решение задачи Дирихле ищется в виде потенциала двойного слоя $W(M)$. Граничное условие в случае внутренней задачи примет вид

$$W_i(M) = f(M),$$

где $f(M)$ — заданная непрерывная функция точки границы M. Используя равенство (7.5), получим следующее интегральное уравнение для плотности $\sigma(M)$:

$$\sigma(M) + \frac{1}{2\pi} \int_S \sigma(M_1) \frac{\cos(r, n_1)}{r^2} dS_1 = -\frac{1}{2\pi} f(M). \tag{7.11}$$

Решив это уравнение, мы, очевидно, найдем потенциал $W(M)$ по формуле (7.4).

В случае внешней задачи граничное условие приводит к уравнению

$$\sigma(M) - \frac{1}{2\pi} \int_S \sigma(M_1) \frac{\cos(r, n_1)}{r^2} dS_1 = \frac{1}{2\pi} f(M). \tag{7.12}$$

Рассмотрим также более общее уравнение

$$\sigma(M) - \frac{\lambda}{2\pi} \int_S \sigma(M_1) \frac{\cos(r, n_1)}{r^2} dS_1 = \pm \frac{1}{2\pi} f(M), \tag{7.13}$$

где λ — численный параметр.

Рассмотрим теперь задачу Неймана. Решение этой задачи ищется в виде потенциала простого слоя (7.3). При этом в случае внутренней задачи должно выполняться условие

$$\frac{\partial V_i}{\partial n} = g,$$

где g — заданная непрерывная функция. В случае внешней задачи граничное условие примет вид

$$\frac{\partial V_e}{\partial n} = g.$$

Используя равенства (7.8) и (7.9), устанавливаем, что плотность потенциала $\rho(M)$ должна удовлетворять интегральному уравнению

$$\rho(M)+\frac{1}{2\pi}\int_S \rho(M_1)\frac{\cos(r, n)}{r^2}\,dS_1=\frac{1}{2\pi}g(M) \tag{7.14}$$

в случае внутренней задачи и уравнению

$$\rho(M)-\frac{1}{2\pi}\int_S \rho(M_1)\frac{\cos(r, n)}{r^2}\,dS_1=-\frac{1}{2\pi}g(M) \tag{7.15}$$

в случае внешней задачи (n — нормаль к S в точке M и r — расстояние между M и M_1).

Рассмотрим также более общее уравнение с параметром λ

$$\rho(M)+\frac{\lambda}{2\pi}\int_S \rho(M_1)\frac{\cos(r, n)}{r^2}\,dS_1=\pm\frac{1}{2\pi}g(M). \tag{7.16}$$

Доказывается, что если M и M_1 принадлежат S, то ядра уравнений (7.13) и (7.16) удовлетворяют неравенствам

$$\left|\frac{\cos(r, n_1)}{r^2}\right|<\frac{c}{r^{2-\alpha}}, \qquad \left|\frac{\cos(r, n)}{r^2}\right|<\frac{c}{r^{2-\alpha}},$$

где $\alpha>0$ — постоянная в условиях Ляпунова. Последние неравенства показывают, что ядра уравнений (7.13) и (7.16) имеют слабую особенность и, следовательно, к этим уравнениям применима теория Фредгольма *).

Уравнение (7.16) является сопряженным по отношению к уравнению (7.13). Таким образом, внешняя задача Неймана и внутренняя задача Дирихле описываются при помощи сопряженных интегральных уравнений. Аналогичное утверждение справедливо и для внутренней задачи Неймана и внешней задачи Дирихле.

Доказывается, что $\lambda=-1$ не является характеристическим числом уравнений (7.13) и (7.16), т. е. однородные уравнения

$$\sigma(M)+\frac{1}{2\pi}\int_S \sigma(M_1)\frac{\cos(r, n_1)}{r^2}\,dS_1=0 \tag{7.11$_1$}$$

*) См. гл. II, § 6.

и

$$\rho(M) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_S \rho(M_1) \frac{\cos(r, n)}{r^2} dS_1 = 0 \qquad (7.15_1)$$

имеют только тривиальные (нулевые) решения.

Таким образом, *интегральные уравнения внутренней задачи Дирихле и внешней задачи Неймана разрешимы при любых непрерывных граничных функциях* $f(M)$ *и* $g(M)$.

В случае $\lambda = 1$ (внутренняя задача Неймана и внешняя задача Дирихле) *однородные уравнения*

$$\sigma(M) - \frac{1}{2\pi} \int\limits_S \sigma(M_1) \frac{\cos(r, n_1)}{r^2} dS_1 = 0, \qquad (7.12_1)$$

$$\rho(M) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_S \rho(M_1) \frac{\cos(r, n)}{r^2} dS_1 = 0 \qquad (7.14_1)$$

будут иметь нетривиальные решения, *т. е. значение* $\lambda = 1$ *будет характеристическим числом для уравнений* (7.13) *и* (7.16). *Единственным нетривиальным решением однородного уравнения* (7.12$_1$) *является постоянная*. Согласно теории Фредгольма для разрешимости сопряженного неоднородного уравнения (7.14) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_S g(M_1)\, dS_1 = 0. \qquad (7.17)$$

Таким образом, для разрешимости внутренней задачи Неймана необходимо и достаточно, чтобы граничная функция $g(M)$ удовлетворяла условию (7.17).

Вопрос о разрешимости внешней задачи Дирихле будет изложен в п. 1.3 настоящего параграфа.

1.2. Задача Робена. Рассмотрим подробнее уравнение

$$\rho(M) + \frac{1}{2\pi} \int\limits_S \rho(M_1) \frac{\cos(r, n)}{r^2} dS_1 = 0. \qquad (7.14_1)$$

Как было указано выше, это уравнение имеет нетривиальные решения.

Задача об отыскании этих решений носит название *задачи Робена*. Так же как и в предыдущем пункте, мы предполагаем, что область Ω ограничена одной замкнутой поверхностью, удовлетворяющей условию Ляпунова.

Уравнение (7.14_1) имеет только одно нетривиальное решение $\rho_0(M)$, все остальные получаются из него умножением на произвольную постоянную.

Функцию $\rho_0(M)$ можно строить методом последовательных приближений.

Пусть $f(M)$ — произвольная непрерывная функция, заданная на S. Положим $\rho_0^{(0)}(M) = f(M)$ и определим $\rho_0^{(1)}(M)$ по формуле

$$\rho_0^{(1)}(M) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_S \rho_0^{(0)}(M_1)\frac{\cos(r, n)}{r^2}\,dS_1.$$

Аналогично

$$\rho_0^{(n)}(M) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_S \rho_0^{(n-1)}(M_1)\frac{\cos(r, n)}{r^2}\,dS_1 \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Последовательность $\{\rho_0^{(k)}(M)\}$ сходится равномерно к непрерывной функции $\rho_0(M)$, удовлетворяющей уравнению (7.14_1). При этом справедливо равенство

$$\int\limits_S \rho_0(M)\,dS = \int f(M)\,dS.$$

1.3. Внешняя задача Дирихле. Вернемся теперь к интегральному уравнению внешней задачи Дирихле

$$\sigma(M) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_S \sigma(M_1)\frac{\cos(r, n_1)}{r^2}\,dS_1 = \frac{1}{2\pi} f(M), \qquad (7.12)$$

являющемуся частным случаем уравнения

$$\sigma(M) - \frac{\lambda}{2\pi}\int\limits_S \sigma(M_1)\frac{\cos(r, n_1)}{r^2}\,dS_1 = \frac{1}{2\pi} f(M) \qquad (7.13)$$

при $\lambda = 1$.

Так как однородное уравнение, соответствующее (7.12), имеет нетривиальное решение $\sigma(M) = C$, то для разрешимости уравнения (7.12) необходимо и достаточно, чтобы правая часть этого уравнения была ортогональна собственным функциям уравнения (7.14_1).

В п. 1.2 изложен способ нахождения собственных функций уравнения (7.14_1). Пусть $\rho_0(M)$ — такая функция. Тогда для разрешимости уравнения (7.12) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\int_S f(M)\,\rho_0(M)\,dS = 0. \tag{7.18}$$

Нетрудно выяснить причину того, что уравнение (7.12) не всегда разрешимо. Решение внешней задачи Дирихле в виде потенциала двойного слоя (7.4) убывает на бесконечности как $1/R^2$, где R — расстояние от начала координат до точки M. Однако известно, что произвольная гармоническая функция убывает на бесконечности всего лишь как $1/R$.

Можно получить интегральное уравнение, разрешимое при любой граничной функции $f(M)$. Для этого ищем решение в следующем виде:

$$w^*(M) = W(M) + \frac{1}{R}\int_S \sigma(M_1)\,dS_1, \tag{7.19}$$

где R — расстояние от начала координат, расположенного внутри S, до точки M.

Граничное условие

$$w_e^* = f(M)$$

будет удовлетворено, если плотность $\sigma(M)$ будет решением уравнения

$$\sigma(M) - \frac{1}{2\pi}\int_S \sigma(M_1)\frac{\cos(r, n_1)}{r^2} + \frac{1}{2\pi R}\int_S \sigma(M_1)\,dS_1 = \frac{1}{2\pi} f(M).$$

Это уравнение оказывается разрешимым при любой непрерывной $f(M)$.

Таким образом, решение внешней задачи Дирихле в рассмотренном случае можно всегда найти в виде (7.19).

1.4. Случай несвязной границы. Пусть граница области Ω состоит из нескольких замкнутых поверхностей, удовлетворяющих условиям Ляпунова (см. п. 1.1).

Рассмотрим сначала случай конечной области, ограниченной извне поверхностью S_0, а изнутри поверхностями S_1, S_2, ..., S_l.

Для рассматриваемого типа областей внешние задачи Дирихле и Неймана сводятся к l внутренним задачам для областей, ограниченных поверхностями $S_1, S_2, \ldots, S_l$, и одной внешней задаче для бесконечной области, ограниченной поверхностью S_0. Полную границу области Ω по-прежнему обозначим через S. Решение внутренней задачи Неймана ищется в виде потенциала простого слоя (7.3). Поскольку формулы (7.8) и (7.9) не зависят от того, является S односвязной или многосвязной, то и интегральное уравнение для плотности

$$\rho(M)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_S \rho(M_1)\frac{\cos(r, n)}{r^2}\,dS_1=\frac{1}{2\pi}g(M) \qquad (7.14)$$

должно удовлетворяться и для случая многосвязной области. Для разрешимости этого уравнения необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int\limits_S g(M)\,dS=0.$$

Это условие не отличается от условия (7.17). Для случая многосвязной области отметим, что в последнем равенстве интегрировать надо по всей совокупности поверхностей S_0, $S_1, \ldots, S_l$.

Обратимся теперь к внутренней задаче Дирихле. Если искать решение в виде потенциала двойного слоя (7.4), то получится интегральное уравнение

$$\sigma(M)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_S \sigma(M_1)\frac{\cos(r, n_1)}{r^2}\,dS_1=-\frac{1}{2\pi}f(M), \qquad (7.11)$$

рассмотренное для случая односвязной области.

Это уравнение разрешимо не для всякой непрерывной функции $f(M)$. Поскольку сопряженное однородное уравнение

$$\rho(M)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_S \rho(M_1)\frac{\cos(r, n)}{r^2}\,dS_1=0 \qquad (7.15_1)$$

имеет нетривиальные решения, то для разрешимости уравнения (7.11) необходимо и достаточно, чтобы правая часть (7.11) была ортогональна собственным функциям уравнения (7.14).

Обозначим через $\rho_k(M)$ $(k=1, \ldots, l)$ какое-нибудь ненулевое решение уравнения

$$\rho(M)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S_k}\rho(M_1)\frac{\cos(r, n)}{r^2}dS_1=0 \qquad (k=1, \ldots, l).$$

Короче говоря, через $\rho_k(M)$ $(k=1, \ldots, l)$ обозначено решение задачи Робена для контура S_k.

Для разрешимости уравнения (7.11) и, следовательно, для того чтобы решение задачи Дирихле для рассматриваемой области можно было представить в виде потенциала двойного слоя (7.4), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\int\limits_{S_k} f(M)\rho_k(M)\,dS=0 \qquad (k=1, \ldots, l). \tag{7.20}$$

Если контур S_0 области Ω отсутствует, т. е. область Ω бесконечна, то для разрешимости уравнения (7.11) также необходимо и достаточно выполнение условий (7.20).

1.5. Смешанная задача теории потенциала. Пусть ищется гармоническая внутри области Ω функция $u(M)$, удовлетворяющая на границе S краевому условию

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}+p(M)u\right|_S=f(M), \tag{7.21}$$

где $p(M)$ и $f(M)$ — заданные непрерывные функции точки границы S. Эта задача называется *смешанной задачей теории потенциала.*

Пусть

$$p(M)>0 \tag{7.22}$$

и S — замкнутая поверхность, удовлетворяющая условиям Ляпунова (см. п. 1.1).

Решение задачи ищется в виде потенциала простого слоя (7.3). С помощью равенства (7.8) и условия (7.21) для плотности $\rho(M)$ получается интегральное уравнение

$$\rho(M)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S}\rho(M_1)\left[\frac{\cos(r, n)}{r^2}+p(M)\frac{1}{r}\right]dS_1=\frac{1}{2\pi}f(M), \tag{7.23}$$

которое оказывается разрешимым при любой правой части если выполнено неравенство (7.22). Здесь, как и ранее, считается, что вектор r направлен от точки M_1 к точке M. Если $p(M)$ не удовлетворяет неравенству (7.22), то уравнение (7.23), вообще говоря, неразрешимо.

1.6. Распределение характеристических чисел интегральных уравнений теории потенциала. Рассмотрим теперь уравнения

$$\sigma(M) - \frac{\lambda}{2\pi}\int\limits_S \sigma(M_1)\frac{\cos(r, n_1)}{r^2}\,dS_1 = 0, \tag{7.24}$$

$$\rho(M) + \frac{\lambda}{2\pi}\int\limits_S \rho(M_1)\frac{\cos(r, n)}{r^2}\,dS_1 = 0, \tag{7.25}$$

являющиеся однородными уравнениями, соответствующими уравнениям (7.13) и (7.16).

Доказывается, что характеристические числа этих уравнений вещественны и расположены на лучах $\lambda \geqslant 1$ и $\lambda < -1$ для областей, ограниченных односвязными поверхностями типа Ляпунова. В случае многосвязной области $\lambda = -1$ также может быть характеристическим значением.

Для области, ограниченной односвязной поверхностью, в случае уравнения (7.24) характеристическому значению $\lambda = 1$ соответствует собственная функция, равная постоянной. В случае уравнения (7.25) собственные функции, соответствующие значению $\lambda = 1$, будут решениями задачи Робена.

1.7. Распространение на пространства многих измерений. Понятия и методы теории потенциала, изложенные в пп. 1.1 — 1.6, обобщаются на случай многих пространственных переменных $m > 3$. Гармонической в бесконечной области m-мерного пространства в этом случае называется функция $u(M)$, удовлетворяющая уравнению Лапласа и убывающая на бесконечности как $1/R^{m-2}$ (R — расстояние от M до начала координат). Пусть S — поверхность, удовлетворяющая условиям Ляпунова, M — любая точка пространства, M_1 — точка поверхности S, r — расстояние между точками M и M_1.

Интегралы

$$V(P) = \int\limits_S \rho(M_1)\frac{dS_1}{r^{m-2}}$$

и

$$W(P)=\int\limits_S \sigma(M_1)\frac{\partial \dfrac{1}{r^{m-2}}}{\partial n_1}\,dS_1,$$

где n_1 — направление внешней нормали в точке M, называются соответственно *потенциалами простого и двойного слоя*; их плотности $\rho(M_1)$ и $\sigma(M_1)$ считаются непрерывными.

Если решение задачи Дирихле искать в виде потенциала двойного слоя, то получаются интегральные уравнения

$$\sigma(M)\pm\frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{m/2}}\int\limits_S \sigma(M_1)\frac{\cos(r, n_1)}{r^{m-1}}\,dS_1=\mp\frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{m/2}}f(M),$$

где $M\in S$ и Γ — эйлеров интеграл второго рода. Верхний знак соответствует внутренней задаче, нижний — внешней.

Решение задачи Неймана ищется в виде потенциала простого слоя. Тогда интегральное уравнение для плотности будет иметь вид

$$\rho(M)\pm\frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{m/2}}\int\limits_S \rho(M_1)\frac{\cos(r, n)}{r^{m-1}}\,dS_1=\pm\frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{m/2}}\varphi(M),$$

где n — направление внешней нормали в точке M; внутренней задаче соответствует верхний знак, внешней — нижний знак.

Исследование полученных уравнений показывает, что в рассматриваемом случае внутренняя задача Дирихле и внешняя задача Неймана всегда разрешимы. Для разрешимости внутренней задачи Неймана необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int\limits_S \varphi(M_1)\,dS_1=0.$$

Решение внешней задачи Дирихле можно искать в виде

$$u(M)=\int\limits_S \sigma(M_1)\frac{\partial \dfrac{1}{r^{m-2}}}{\partial n_1}\,dS_1+\frac{1}{R^{m-2}}\int\limits_S \sigma(M_1)\,dS_1,$$

где R — расстояние от точки M до некоторой фиксированной точки M_0, расположенной внутри S. Это представление приводит к интегральному уравнению

$$\sigma(M) - \frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{m/2}} \int_S \sigma(M_1)\left[\frac{\cos(r, n_1)}{r^{m-1}} - \frac{1}{R^{m-2}}\right] dS_1 = \frac{\Gamma(m/2)}{\pi^{m/2}} f(M),$$

которое разрешимо при любой непрерывной $f(M)$.

В случае двух пространственных переменных основные задачи теории потенциала будут разобраны в следующем параграфе.

§ 2. Применение теории функций комплексного переменного к плоским задачам теории потенциала

2.1. Задача Дирихле для односвязной плоской области. Пусть D — плоская односвязная конечная область, ограниченная гладким контуром L с непрерывной кривизной. Гармоническую функцию, принимающую на L заданные значения $u(t)$, где t—комплексная координата точки $\in L$ и $u(t)$— непрерывная функция, обозначим через $U(x, y)$. Эта функция является вещественной частью некоторой аналитической функции $\varphi(z)$. Функцию $\varphi(z)$ будем искать в виде интеграла типа Коши

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \tag{7.26}$$

с вещественной плотностью $\mu(\zeta)$, где ζ — точка контура L и z — любая точка внутри D.

Устремляя z к некоторой точке t контура L, получим, согласно свойствам интегралов типа Коши, следующее равенство:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2}\mu(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta.$$

Учитывая, что $\operatorname{Re}\varphi(t) = u(t)$, найдем, что искомая плотность $\mu(t)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \int_L \mu(\zeta) \operatorname{Im}\left(\frac{d\zeta}{\zeta - t}\right) = 2u(t).$$

Поскольку

$$\operatorname{Im}\left(\frac{d\zeta}{\zeta-t}\right)=-\frac{\cos(r,\nu)}{r}\,d\sigma,$$

где r — расстояние от точки ζ до точки t (направление r выбирается от ζ к t), $d\sigma$ — элемент длины контура L и ν — внешняя нормаль к L, то для плотности $\mu(t)$ получаем следующее интегральное уравнение:

$$\mu(t)-\frac{1}{\pi}\int\limits_L \mu(\zeta)\frac{\cos(r,\nu)}{r}\,d\sigma=2u(t), \tag{7.27}$$

ядро которого $\dfrac{\cos(\nu,r)}{r}$ непрерывно. Доказывается, что это уравнение разрешимо при любой правой части. Решив это уравнение, мы по формуле (7.26) найдем аналитическую функцию $\varphi(z)$, вещественная часть которой является гармонической функцией, принимающей на контуре L заданные значения $u(t)$.

Рассмотрим теперь бесконечную область D', лежащую вне D. В этом случае функцию $\varphi(z)$ можно искать в таком виде

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \mu(\zeta)\,d\zeta, \tag{7.28}$$

где $\mu(\zeta)$ по-прежнему предполагается вещественной. Тогда для плотности $\mu(\zeta)$ получим уравнение

$$\mu(t)+\frac{1}{\pi}\int\limits_L \mu(\zeta)\frac{\cos(r,\nu)}{r}\,d\sigma-\frac{1}{\pi}\int\limits_L \mu(\zeta)\,d\sigma=-2u(t).$$

Это уравнение имеет единственное решение при любой правой части. Подставив $\mu(\zeta)$ в формулу (7.28) и отделив вещественную часть функции $\varphi(z)$, мы получим решение внешней задачи Дирихле для заданной непрерывной граничной функции $u(t)$. С помощью решения задачи Дирихле может быть найдена функция $w=\omega(z)$, реализующая конформное отображение односвязной области D на круг $|w|<1$.

Пусть $z=a$ — точка области D, которая переходит в центр круга $w=0$, и пусть $\psi(z)=\dfrac{\omega(z)}{z-a}$. Обозначив

$\varphi(z)=\ln\psi(z)$, мы получим, что на контуре $\operatorname{Re}\{\varphi(t)\}=-\ln|t-a|$. Найдя $\varphi(t)$, мы легко найдем $\omega(z)$. Итак, для отыскания функции $\omega(z)$ достаточно решить задачу Дирихле с граничной функцией $u(t)=-\ln|t-a|$.

Пример 2.1. Рассмотрим эллипс $x=a\cos\theta$; $y=b\sin\theta$. Потребуем, чтобы при конформном отображении центр эллипса перешел в центр круга. Для функции $\varphi(t)$ получаем условие на контуре:

$$\operatorname{Re}\{\varphi(t)\}=-\ln|t|.$$

Полагая

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\mu(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta,$$

придем к интегральному уравнению

$$\mu(t)+\frac{b}{2\pi a}\int\limits_0^{2\pi}\mu(\zeta)\frac{d\tau}{1-\varepsilon^2\cos^2\frac{\theta+\tau}{2}}=-2\ln|t|,\qquad \varepsilon^2=\frac{a^2-b^2}{a^2}=\frac{c^2}{a^2}.$$

Решение этого уравнения можно получить в виде ряда

$$\mu(\zeta)=-\ln\frac{a+b}{2}-2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\,\frac{c^{2k}}{(a+b)^{2k}+(a-b)^{2k}}\cos 2k\theta.$$

Отсюда находим, что

$$\omega(z)=\frac{2z}{a+b}\,e^{-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\frac{c^{2k}}{(a+b)^{2k}+(a-b)^{2k}}F_{2k}(z)},$$

где

$$F_{2k}(z)=\left(z+\sqrt{z^2-c^2}\right)^{2k}+\left(z-\sqrt{z^2-c^2}\right)^{2k}.$$

2.2. Задача Дирихле для многосвязных областей. Пусть D — конечная $(n+1)$-связная область, контур которой L состоит из замкнутых кривых $L_0, L_1, L_2, \ldots, L_n$, причем контур L_0 ограничивает область D извне. Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — некоторые фиксированные точки, расположенные соответственно внутри областей, ограниченных кривыми $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Ищется гармоническая внутри D функция $U(x, y)$, принимающая на контуре значения заданной непрерывной функции $u(t)$. Пусть $\varphi(z)$ — искомая аналитическая внутри D функция, вещественная часть которой равна $U(x, y)$.

Функция $\varphi(z)$ может быть представлена в виде

$$\varphi(z)=\sum_{k=1}^{n} A_k \ln(z-z_k)+\varphi^*(z), \tag{7.29}$$

где $\varphi^*(z)$ — однозначная функция, регулярная в D. Достаточно найти $\varphi^*(z)$ и коэффициенты A_k $(k=1, \ldots, n)$.

На контуре функция φ^* удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re}\{\varphi^*(t)\}=u(t)-\sum_{k=1}^{n} A_k \ln|t-z_k|.$$

Функцию $\varphi^*(z)$ ищем в виде интеграла типа Коши

$$\varphi^*(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta \tag{7.30}$$

с вещественной плотностью $\mu(\zeta)$. Плотность $\mu(\zeta)$ должна удовлетворять интегральному уравнению

$$\mu(t)-\frac{1}{\pi}\int_L \mu(\zeta)\frac{\cos(r, \nu)}{r}\,d\sigma=2u(t)-2\sum_{k=1}^{n} A_k \ln|t-z_k|, \tag{7.31}$$

которое оказывается разрешимым не при всех правых частях.

Так как $\frac{1}{\pi}$ — характеристическое число ядра $\frac{\cos(r, \nu)}{r}$ ранга n, то числа A_k должны быть определены из условия ортогональности правой части собственным функциям сопряженного интегрального уравнения. Можно указать метод, при котором нет необходимости находить собственные функции сопряженного уравнения. Для этого уравнение (7.31) заменяется уравнением

$$\mu(t)-\frac{1}{\pi}\int_L\left(\frac{\cos(r, \nu)}{r}+a(t, \zeta)\right)\mu(\zeta)\,d\sigma= \\ =2u(t)-2\sum_{k=1}^{n} A_k \ln|t-z_k|, \tag{7.32}$$

где $a(t, \zeta)$ — функция, равная единице, если точки t и ζ принадлежат одной и той же внутренней кривой L_k $(k=1, \ldots, n)$, и нулю в остальных случаях. Уравнение (7.32) разрешимо единственным образом. Решив это уравнение, подчиним A_k требованию, чтобы

$$\int\limits_{L_k} \mu(\zeta)\,d\sigma = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n). \tag{7.33}$$

Система (7.33) представляет собой систему n неоднородных линейных уравнений относительно коэффициентов A_k. Она оказывается всегда разрешимой. Выбрав, таким образом, A_k, получим, что уравнения (7.32) и (7.31) совпадут, после чего по формулам (7.30) и (7.29) находится решение задачи.

Если область D бесконечна, т. е. D является внешностью n контуров $L_1, L_2, \ldots, L_n$, то формула (7.29) сохраняет силу и коэффициенты $A_1, \ldots, A_n$ удовлетворяют дополнительному условию

$$A_1 + \ldots + A_n = 0. \tag{7.34}$$

Функция $\varphi^*(z)$ ищется в данном случае в виде

$$\varphi^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi} \int\limits_L \mu(\zeta)\,d\sigma. \tag{7.35}$$

Это приводит к уравнению

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \int\limits_L \mu(\zeta) \frac{\cos(r, \nu)}{r}\,d\sigma - \frac{1}{\pi} \int\limits_L \mu(\zeta)\,d\sigma = -2u(t) + 2 \sum_{k=1}^{n} A_k \ln|t - z_k|, \tag{7.36}$$

которое имеет $n - 1$ собственных функций.

Коэффициенты A_k находятся из условия (7.34) и условия ортогональности правой части и $(n-1)$-й линейно независимой собственной функции сопряженного однородного уравнения. Для того чтобы избежать нахождения собственных функций, заменим уравнение (7.36) уравнением

$$\mu(t) + \frac{1}{\pi} \int\limits_L \mu(\zeta) \left(\frac{\cos(r, \nu)}{r} + b(t, \zeta) \right) d\sigma - \frac{1}{\pi} \int\limits_L \mu(\zeta)\,d\sigma = -2u(t) + 2 \sum_{k=1}^{n} A_k \ln|t - z_k|, \tag{7.37}$$

где $b(t, \zeta)$ — функция, равная единице, когда t и ζ принадлежат одной и той же кривой L_k $(k=1, \ldots, n-1)$, и нулю во всех остальных случаях.

Уравнение (7.37) оказывается разрешимым при любой правой части. Решая это уравнение и найдя A_k $(k=1, \ldots, n)$ из условий

$$\int\limits_{L_k} \mu(\zeta)\, d\sigma = 0 \qquad (k=1, \ldots, n-1)$$

и условия (7.34), мы получим после подстановки в (7.35) функцию $\varphi^*(z)$. Тогда, отделяя вещественную часть функции $\varphi(z)$ (формула (7.29)), находим искомое решение.

2.3. Задача Неймана. Задача Неймана состоит в том, чтобы найти гармоническую в области D функцию $U(x, y)$, если на контуре L известны значения ее нормальной производной $F(\zeta)$ *).

Для разрешимости задачи Неймана необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\int\limits_{L} F(\zeta)\, d\sigma = 0.$$

Пусть $V(x, y)$ — гармоническая функция, сопряженная с $U(x, y)$, и пусть $\varphi(z) = U + iV$. Тогда для $\varphi(z)$ справедливо равенство (7.29), где $\varphi^*(z)$ — однозначная, регулярная в D функция и

$$A_k = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_k} F(t)\, d\sigma.$$

Пусть $\varphi^*(z) = U^* + iV^*$. Тогда на контуре L

$$\frac{\partial U^*}{\partial \nu} = F(t) - \sum_{k=1}^{n} A_k \frac{\partial \ln |t - z_k|}{\partial \nu} = F^*(t).$$

---

*) Мы предполагаем здесь и ниже, что контур L удовлетворяет условиям п. 2.2.

Выбрав на каждом из контуров L_k ($k=0, 1, \ldots, n$) по точке t_k, мы получим на этих контурах

$$V^* = \int_{t_k}^{t} F^*(\zeta)\, d\sigma + b_k, \tag{7.38}$$

где b_k — неопределенная постоянная.

Рассмотрим функцию $-i\varphi^*(z) = V^* - iU^*$, вещественная часть которой задана с точностью до постоянного слагаемого, своего для каждого из контуров L_k ($k=0, 1, \ldots, n$), по формуле (7.38). Задача об определении аналитической функции, регулярной в многосвязной области по заданной на каждом из контуров $L_0, L_1, \ldots, L_n$ с точностью до постоянного слагаемого b_k ($k=0, 1, \ldots, n$) вещественной части этой функции, называется *видоизмененной задачей Дирихле*. Таким образом, задача Неймана свелась к видоизмененной задаче Дирихле для функции $-i\varphi^*(z)$. Известно, что эта последняя задача имеет единственное решение, если зафиксировать одну из постоянных $b_0, b_1, \ldots, b_n$. Остальные постоянные определяются тогда единственным образом из условия однозначности искомой функции. Покажем, что решение видоизмененной задачи Дирихле может быть сведено к решению интегрального уравнения.

Положим $-i\varphi^*(z) = \psi(z)$. Тогда

$$\operatorname{Re}\{\psi(t)\} = f(t) + b_k \qquad (t \in L), \tag{7.39}$$

где $f(t)$ — заданная функция правой части равенства (7.38). Функция $\psi(z)$ ищется в виде интеграла типа Коши (7.30). В случае конечной области для определения плотности $\mu(\zeta)$ получается уравнение

$$\mu(t) - \frac{1}{\pi}\int_L \left(\frac{\cos(r, \nu)}{r} + a(t, \zeta)\right)\mu(\zeta)\, d\sigma = 2f(t), \tag{7.32$_1$}$$

левая часть которого совпадает с левой частью уравнения (7.32) предыдущего пункта. Решив эти уравнения и положив

$$b_0 = 0; \; b_k = \frac{1}{2\pi}\int_{L_k} \mu(\zeta)\, d\sigma \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

мы получим, что решения последнего уравнения и уравнения (7.37) совпадают.

Если область D бесконечна, то $\mu(\zeta)$ будет удовлетворять уравнению

$$\mu(t)+\frac{1}{\pi}\int\limits_L\left(\frac{\cos(r,\nu)}{r}+b(t,\zeta)\right)\mu(\zeta)\,d\sigma-\frac{1}{\pi}\int\limits_L\mu(\zeta)\,d\sigma=-2f(t). \quad (7.36_1)$$

Это уравнение отличается лишь правой частью от уравнения (7.36). Решив последнее уравнение, положим

$$b_k=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_k}\mu(\zeta)\,d\sigma-\frac{1}{2\pi}\int\limits_L\mu(\zeta)\,d\sigma \qquad (k=1,\ \ldots,\ n).$$

Интеграл (7.30) дает решение рассматриваемой задачи и в этом случае.

2.4. Конформное отображение многосвязных областей. Рассмотрим задачу об отображении кольцевидной области D, ограниченной двумя гладкими замкнутыми кривыми L_0 (внешняя граница) и L_1 (внутренняя граница), на круговое кольцо $R<|w|<1$ так, чтобы кривой L_0 взаимно однозначно соответствовала окружность $|w|=1$, а кривой L_1—окружность $|w|=R$. Пусть $w=\omega(z)$ — искомая отображающая функция. Поместим начало координат внутри L_1. Тогда функция

$$\varphi(z)=\ln\frac{\omega(z)}{z}$$

регулярна в D. Функция $\varphi(z)$ удовлетворяет краевым условиям:

$$\operatorname{Re}\varphi(t)=\begin{cases}-\ln|t| & \text{при}\quad t\in L_0,\\ -\ln|t|+\ln R & \text{при}\quad t\in L_1.\end{cases} \qquad (7.40)$$

Следовательно, для нахождения $\varphi(z)$ надо решить видоизмененную задачу Дирихле с условиями (7.40) ($b_0=0$, $b_1=\ln R$ и $f(t)=-\ln|t|$). Доказывается, что существует одно и только одно значение $R<1$, при котором найденная с помощью решения указанной видоизмененной задачи Дирихле функции $w=\varphi(z)$ область отображается конформно на кольцо $R<|w|<1$.

Аналогичным образом сводится к решению видоизмененной задачи Дирихле задача о конформном отображении многосвязной области на плоскость с разрезами, параллельными мнимой оси. К этой же задаче сводятся задачи об отображении многосвязной области на плоскость, разрезанную вдоль дуг концентрических окружностей или вдоль отрезков прямых, проходящих через одну точку.

2.5. Функция Грина и ядро Шварца. Пусть D — область типа, рассмотренного в п. 2.2, ограниченная контурами L_0, L_1, ..., L_n, и пусть $z=x+iy$ и $\zeta=\xi+i\eta$ — произвольные точки этой области. Пусть $G(x, y; \xi, \eta)$ — функция Грина для этой области *).

Функция $G(x, y; \xi, \eta)$ симметрична и является гармонической как по (x, y), так и по (ξ, η). Если точка (ξ, η) попадает на контур L, то $G(x, y; \xi, \eta)=0$. Функция Грина представляется в виде

$$G(x, y; \xi, \eta)=g(x, y; \xi, \eta)-\ln r,$$

где r — расстояние от точки (x, y) до точки (ξ, η) и $g(x, y; \xi, \eta)$ — гармоническая в D функция от (ξ, η) и (x, y), обращающаяся в $\ln r$ на контуре L.

Функцию $G(x, y; \xi, \eta)$ будем обозначать через $G(z; \zeta)$. Вещественную функцию $H(z; \zeta)$, сопряженную с $G(z; \zeta)$ по (x, y), можно построить, например, по формуле

$$H(z; \zeta)=\int_a^z -\frac{\partial G}{\partial y}\,dx+\frac{\partial G}{\partial x}\,dy,$$

где a — фиксированная точка области D. *Комплексной функцией Грина* называется функция

$$M(z; \zeta)=G(z; \zeta)+iH(z; \zeta).$$

$M(z; \zeta)$ — аналитическая, но нерегулярная функция от z и неаналитическая функция ζ.

Комплексная функция Грина $M(z; \zeta)$ многозначна, так как она содержит слагаемое $-\ln(z-\zeta)$ и, кроме того, в случае многосвязной области может менять свое значение при обходе в плоскости вокруг любого из внутренних

*) См. [1], гл. III, § 6.

контуров $L_1, \ldots, L_n$. Комплексная функция Грина может быть представлена в виде

$$M(z;\ \zeta) = M_0(z;\ \zeta) + \sum_{k=1}^{n} b_k(\zeta) \ln(z - z_k) - \ln(\zeta - z), \quad (7.41)$$

где z_k $(k = 1, \ldots, n)$ — фиксированные точки, лежащие внутри L_k, $M_0(z;\ \zeta)$ — регулярная в D функция z и $b_k(\zeta)$ — гармоническая в D функция точки ζ, равная единице на L_k и нулю на L_j $(j \neq k)$.

Функции $b_k(\zeta)$ определяются по формулам

$$b_k(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_k} \frac{\partial G}{\partial \nu_1}\, d\sigma,$$

где ν_1 — направление внутренней нормали к L_k в точке z. Пусть $\zeta \in L$ и ν — направление внутренней нормали к контуру L в точке ζ.

Дифференцируя (7.41) по ν, получим

$$T(z;\ \zeta) = \frac{\partial M_0}{\partial \nu} + \sum_{k=1}^{n} a_k(\zeta) \ln(z - z_k) - \frac{1}{\zeta - z} \frac{\partial \zeta}{\partial \nu}, \quad (7.42)$$

где

$$T(z;\ \zeta) = \frac{\partial M(z;\ \zeta)}{\partial \nu} \quad (7.43)$$

и

$$a_k(\zeta) = \frac{\partial b_k(\zeta)}{\partial \nu}.$$

Функция $T(z;\ \zeta)$ называется *ядром Шварца*. Ядро Шварца является аналитической функцией z, многозначной, если область D многосвязная. Как функция ζ ядро Шварца является неаналитической и однозначной.

Кроме того,

$$\operatorname{Re} T(z;\ \zeta) = \frac{\partial G}{\partial \nu}$$

и для одной из ветвей ядра Шварца

$$\operatorname{Im} T(a;\ \zeta) = 0.$$

Пусть $F(z) = u(z) + iv(z)$ — аналитическая функция, не имеющая внутри D особых точек, с однозначной и непрерывной вплоть до контура действительной частью. Тогда справедлива формула

$$\frac{1}{2\pi}\int_L u(\zeta)\,T(z;\ \zeta)\,d\sigma = F(z) - iv(a),$$

где a — некоторая фиксированная точка внутри D.

Пусть $t=\omega(z)$ конформно отображает область D плоскости z на область D' плоскости t и пусть $M'(t;\ \tau)$—комплексная функция Грина области D'. Тогда комплексная функция Грина области D определяется формулой

$$M(z;\ \zeta) = M'(\omega(z),\ \omega(\zeta)).$$

Соотношение между ядрами Шварца при таком преобразовании имеет вид

$$T(z;\ \zeta)\,d\sigma = T'(\omega(z),\ \omega(\zeta))\,d\sigma', \quad d\sigma' = |d\tau|.$$

Для круга $|t|<1$ ядро Шварца равно

$$T(t;\ \tau) = \frac{\tau+t}{\tau-t}. \tag{7.44}$$

§ 3. Бигармоническое уравнение и плоская задача теории упругости

3.1. Применение функции Грина. Постановка и исследование плоской задачи теории упругости. Бигармоническим уравнением называется уравнение вида

$$\Delta^2 W = \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 W}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = 0. \tag{7.45}$$

Функция, удовлетворяющая уравнению (7.45), называется *бигармонической*. Всякая бигармоническая функция может быть выражена через две аналитические функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ комплексной переменной z

$$W(x,\ y) = \operatorname{Re}\{\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\}. \tag{7.46}$$

Функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)=\chi'(z)$ называются *функциями Гурса*. К краевым задачам для бигармонического уравнения приводит, в частности, плоская задача теории упругости при отсутствии массовых сил.

Пусть u, v — компоненты смещений плоской деформации, параллельной плоскости x, y; σ_x, τ_{xy}, σ_y — компоненты напряжений. Уравнениям плоской теории упругости можно удовлетворить, полагая

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial y}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 W}{\partial y^2},$$

где так называемая *функция Эри* $W(x, y)$ удовлетворяет уравнению (7.45) (т. е. является бигармонической).

Обозначим плоскую область, в которой решается уравнение (7.45), через D, а ее контур через L. Область D может быть многосвязной.

Пусть L_0 — внешний контур и $L_1, \ldots, L_n$ — внутренние контуры, ограничивающие D.

Рассмотрим две краевые задачи плоской теории упругости:

1) на контуре L заданы смещения u и v;

2) на контуре L заданы внешние усилия с составляющими X_ν и Y_ν.

Используя представление (7.46) и обозначая $\chi'(z) = \psi(z)$, можно свести эти задачи к определению двух аналитических функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, которые должны в каждой точке $\zeta \in L$ удовлетворить граничному равенству

$$\varkappa\varphi(\zeta) - \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} = g(\zeta). \tag{7.47}$$

Здесь $g(z) = 2\mu(u + iv)$ — заданная функция точки контура L, μ и $\varkappa = \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$ — упругие постоянные ($\varkappa > 1$) в случае первой задачи.

Во второй задаче

$$g(z) = -f(z) - b_k \quad \text{на} \quad L_k \quad (b_k = \text{const}) \tag{7.48}$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n),$$

где $f(z) = i\int\limits_{s_0}^{s} (X_\nu - iY_\nu)\, ds$ и $\varkappa = -1$. Постоянные b_k должны быть определены так, чтобы смещения были однозначными.

В случае односвязной области функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ должны быть регулярны в области D. В случае многосвязной области $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ должны иметь вид

$$\left.\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_{k=1}^{n} B_k \ln(z - z_k) + \varphi^*(z), \\ \psi(z) &= -\varkappa \sum_{k=1}^{n} \overline{B}_k \ln(z - z_k) + \psi^*(z), \end{aligned}\right\} \tag{7.49}$$

где $\varphi^*(z)$ и $\psi^*(z)$ — регулярные аналитические функции, B_k — постоянные и z_k — фиксированная точка, расположенная внутри области, ограниченной контуром L_k ($k = 1, 2, \ldots, n$).

Пусть функция $z = \omega(t)$ конформно отображает область D на область D^* с достаточно гладким контуром γ и пусть для области D^* известно ядро Шварца $T(t, \tau)$ (см. формулу (7.42), где $t \in D^*$ и $\tau \in \gamma$). Обозначим

$$\Phi(t) = \varphi(\omega(t)); \quad \Psi(t) = \psi(\omega(t)) \quad \text{и} \quad G(\tau) = g(\omega(\tau)). \tag{7.50}$$

Граничное условие (7.47) на контуре γ примет вид

$$\varkappa\Phi(\tau) - \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}} \overline{\Phi'(\tau)} - \overline{\Psi(\tau)} = G(\tau). \tag{7.51}$$

Это равенство эквивалентно двум уравнениям

$$\varkappa\Phi(t) - \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}} \overline{\Phi'(\tau)}\, T(t, \tau)\, d\sigma = A(t), \tag{7.52}$$

$$\Psi(t) + \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega(\tau)}}{\omega'(\tau)} \Phi'(\tau)\, T(t, \tau)\, d\sigma = B(t), \tag{7.53}$$

где $d\sigma$ — элемент длины γ и

$$\left.\begin{aligned} A(t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} G(\tau)\, T(t, \tau)\, d\sigma, \\ B(t) &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\gamma} \overline{G(\tau)}\, T(t, \tau)\, d\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{7.54}$$

Если известна $\Phi'(\tau)$, то равенство (7.53) определяет $\Psi(t)$.

Введем новую функцию $\vartheta(t)$ по формуле

$$\vartheta(t) = \Phi'(t) - l\omega'(t), \tag{7.55}$$

где постоянная l должна удовлетворять соотношению

$$l-\frac{1}{2\varkappa}\bar{l}=\frac{1}{2\varkappa}\frac{\overline{\Phi'(a)}}{\overline{\omega'(a)}} \tag{7.56}$$

(a — произвольная фиксированная точка области D).

С помощью равенства (7.52) получается следующее уравнение для граничного значения $\vartheta(\tau)$:

$$\vartheta(t_0)-\frac{1}{4\pi\varkappa}\int_\gamma \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\omega(\tau)-\omega(t_0)}{\overline{\omega'(\tau)}}T(\tau_0,\ \tau)\right]\overline{\vartheta(\tau)}\,d\sigma=$$
$$=\frac{1}{\varkappa}A'(t_0),\quad (t_0\in\gamma). \tag{7.57}$$

Если воспользоваться формулой (7.42) и ввести в D^* регулярную функцию $K(t,\ \tau)$ переменной t по формуле

$$K(t,\ \tau)=\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\left[\frac{\omega(\tau)-\omega(t)}{\overline{\omega'(\tau)}}T(t,\ \tau)\right]+$$
$$+\frac{\omega'(t)}{4\pi}\sum_{k=1}^{n}a_k(\tau)\ln(t-t_k),$$

где t_k — точка внутри γ_k (γ_k — отображение L_k), то уравнение (7.57) примет вид

$$\vartheta(\tau_0)-\frac{1}{\varkappa}\int_\gamma K(\tau_0,\ \tau)\overline{\vartheta(t)}\,d\sigma=\frac{1}{\varkappa}A'(\tau_0),\quad (\tau_0\in\gamma). \tag{7.58}$$

Если отделить в этом уравнении вещественную и мнимую части и принять в качестве неизвестных $\mathrm{Re}\{\vartheta(\tau)\}$ и $\mathrm{Im}\{\vartheta(\tau)\}$, то уравнение (7.58) превращается в систему двух уравнений Фредгольма. Доказывается, что уравнение (7.58) разрешимо при любой правой части. В случае первой краевой задачи по формуле (7.56) однозначно определяется l и затем по формулам (7.55), (7.52), (7.53) находятся $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$, после чего задачу можно считать решенной. В случае второй краевой задачи ($\varkappa=-1$) функция $\Phi'(t)$ определяется с точностью до слагаемого $i\alpha\omega'(t)$, где α — действительная постоянная. При этом необходимо выполнение условия

$$\int_L Y_\nu\,dx-X_\nu\,dy=0.$$

3.2. Случай односвязной области. Пусть односвязная область D отображается на единичный круг $|t| < 1$ при помощи достаточно гладкой функции $z = \omega(t)$. Тогда уравнение (7.58) примет вид

$$\vartheta(t) - \frac{1}{2\pi i \varkappa} \int_\gamma \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\omega(t) - \omega(\tau)}{\overline{\omega'(\tau)}(\tau - t)} \right] \overline{\vartheta(t)}\, d\tau = \frac{1}{\varkappa} A'(t), \quad (7.59)$$

где $\vartheta(t) = \Phi'(t) - l\omega'(t)$, $l = \frac{1}{\varkappa} \frac{\overline{\Phi'(0)}}{\omega(0)}$ и

$$A(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma G(\tau) \frac{d\tau}{\tau - t}.$$

Это уравнение было получено Н. И. Мусхелишвили.

Если $\omega(t)$ — рациональная функция, то ядро интегрального уравнения (7.59) вырожденное и, следовательно, это уравнение решается в конечном виде.

3.3. Применение интегралов типа Коши. Уравнения Н. И. Мусхелишвили. Допустим, что упругая среда заполняет конечную односвязную область D с достаточно гладким контуром L. Задача сводится к тому, чтобы определить две аналитические функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, регулярные в D и удовлетворяющие на контуре L условию:

$$\varphi(\zeta) + \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} = f(\zeta), \quad (7.60)$$

где $f(\zeta)$ — заданная непрерывная функция точки контура ζ.

Для граничного значения $\varphi(\zeta)$ Н. И. Мусхелишвили было получено уравнение

$$\overline{\varphi(t)} - \frac{1}{\pi} \int_L \overline{\varphi(\zeta)}\, d\vartheta - \frac{1}{\pi} \int_L \varphi(\zeta) e^{-2i\vartheta}\, d\vartheta = A(t), \quad (7.61)$$

где t — произвольная точка контура L и ϑ — полярный угол, определяемый равенством

$$\zeta - t = re^{i\vartheta} \qquad (r = |\zeta - t|).$$

В этом уравнении

$$A(t) = -\frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения.

При выводе уравнения (7.61) Н. И. Мусхелишвили были использованы интегралы типа Коши. Отделяя в уравнении (7.61) вещественную и мнимую части, получим систему двух интегральных уравнений Фредгольма для $\operatorname{Re}\{\varphi(\zeta)\}$ и $\operatorname{Im}\{\varphi(\zeta)\}$, решив которую, мы найдем затем граничные значения $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$. Доказывается, что любое решение уравнения (7.61) аналитически продолжимо внутрь D, и, следовательно, $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ можно представить, например, по формулам Коши.

Уравнение (7.61) имеет решение не при всех правых частях. Если

$$\operatorname{Re}\int_L \overline{f(\zeta)}\,d\zeta \neq 0,$$

то уравнение (7.61) не имеет решения.

Пусть начало координат находится внутри области D. Заменим уравнение (7.61) следующим уравнением:

$$\overline{\varphi(t)} - \frac{1}{\pi}\int_L \overline{\varphi(\zeta)}\,d\vartheta - \frac{1}{\pi}\int_L \varphi(\zeta)\,e^{-2i\vartheta}\,d\vartheta + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta}\,d\zeta + \frac{1}{2\pi i}\int_L \left(\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2}\,d\zeta + \frac{\overline{\varphi(\zeta)}}{\bar{\zeta}^2}\,\overline{d\zeta}\right) = A(t). \quad (7.62)$$

Всякое решение этого уравнения аналитически продолжимо на всю область D. Это уравнение разрешимо при любой правой части. Если

$$\operatorname{Re}\int_L \overline{f(\zeta)}\,d\zeta = 0, \quad (7.63)$$

то решения уравнений (7.61) и (7.62) совпадают.

Аналогично рассматривается и первая краевая задача плоской теории упругости, для которой граничное условие имеет вид

$$\varkappa\varphi(\zeta) - \zeta\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} = g(\zeta),$$

где $\varkappa > 1$.

Указанный здесь анализ проводится в более сложной форме для многосвязных областей. Интегральные уравнения (7.61) и (7.62) сохраняют свой вид.

3.4. Уравнения Лауричелла — Шермана. Допустим, что выполнены условия, сформулированные в начале предыдущего пункта. Будем искать аналитические регулярные функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, удовлетворяющие условию (7.60) в виде

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta, \tag{7.64}$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\zeta-z}\,d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar\zeta\omega(\zeta)}{(\zeta-z)^2}\,d\zeta+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(\zeta)\,d\bar\zeta}{\zeta-z}, \tag{7.65}$$

где $\omega(\zeta)$ — искомая функция точки контура. Пусть выполнено условие (7.63).

Для функции $\omega(\zeta)$ получается так называемое уравнение Лауричелла

$$\omega(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(\zeta)\,d\ln\frac{\zeta-t}{\bar\zeta-\bar t}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\omega(\zeta)}\,d\,\frac{\zeta-t}{\bar\zeta-\bar t}=f(t), \tag{7.66}$$

записанное в комплексной форме. Это уравнение в общем случае неразрешимо. Д. И. Шерман заменил его следующим уравнением:

$$\omega(t)+\frac{1}{\pi}\int_L \omega(\zeta)\,d\vartheta-\frac{1}{\pi}\int_L \overline{\omega(\zeta)}\,e^{2i\vartheta}\,d\vartheta+$$
$$+\left(\frac{1}{t-a}-\frac{1}{\bar t-\bar a}+\frac{t-a}{(\bar t-\bar a)^2}\right)\frac{1}{\pi i}\operatorname{Re}\int_L \frac{\omega(\zeta)\,d\zeta}{(\zeta-a)^2}=f(t), \tag{7.67}$$

где a — внутренняя точка D и $\zeta-t=re^{i\vartheta}$ $(r=|\zeta-t|)$. Последнее уравнение разрешимо при любых правых частях. При этом всякое решение уравнения (7.67) удовлетворяет уравнению (7.66), найденную функцию $\omega(t)$ следует подставить в (7.64) и (7.65), после чего задачу можно считать решенной.

3.5. Периодическая задача теории упругости. Пусть упругая среда заполняет всю плоскость, за исключением бесконечного ряда одинаковых и периодически расположенных вырезов D, ограниченных контуром L, подверженных действию одинаковых внешних сил. Допустим, что главный вектор сил, приложенных к каждому вырезу, равен нулю.

Можно считать, что все данные задачи периодичны по $\bar{x}$ с периодом a.

Задача сводится к нахождению периодических по x функций $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$, удовлетворяющих контурному условию:

$$\varphi_0(\zeta) - (\zeta - \bar{\zeta})\overline{\varphi_0'(\zeta)} + \overline{\psi_0(\zeta)} = f(\zeta) \qquad (\zeta \in L).$$

Введем с помощью замены $z = \frac{a}{2\pi i}\ln t$ функции

$$\Phi(t) = \varphi_0\left(\frac{a}{2\pi i}\ln t\right) \quad \text{и} \quad \Psi(t) = \psi_0\left(\frac{a}{2\pi i}\ln t\right).$$

Тогда для граничных значений $\Phi(t)$ получим следующее интегральное уравнение:

$$\overline{\Phi(\tau_0)} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\Phi(\tau)}\, d\ln\frac{\tau - \tau_0}{\bar{\tau} - \bar{\tau}_0} +$$
$$+ \frac{1}{\pi i}\int_L \Phi(\tau)\, d\,\frac{\tau\ln|\tau| - \tau_0\ln|\tau_0|}{\tau - \tau_0} + \frac{i}{2\pi}\overline{\ln\tau_0}\times$$
$$\times \operatorname{Re}\left\{\int_L \frac{\Phi(\tau)}{(\tau - c)^2}\, d\tau\right\} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\Phi(\tau)}}{\bar{\tau} - \bar{c}}\, d\bar{\tau} = A(\tau_0), \qquad (7.68)$$

где c — произвольная точка внутри L, τ_0 — произвольная точка контура L. Правая часть $A(\tau_0)$ является предельным значением интеграла $\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{F(\tau)}{\tau - t'}\, d\tau$, при условии, что точка t', расположенная внутри L, стремится к τ_0. Наконец, $F(\tau) = f\left(\frac{a}{2\pi i}\ln\tau\right)$.

Уравнение (7.68) эквивалентно системе двух уравнений Фредгольма.

Уравнение (7.68) разрешимо при любой $F(\tau)$. Функция $\Phi(\tau_0)$, удовлетворяющая уравнению (7.68), аналитически продолжима во всю внешность кривой L; при этом она ограничена на бесконечности. Функция

$$\Psi(\tau_0) = \overline{F(\tau_0)} - \overline{\Phi(\tau_0)} + 2\tau_0\ln|\tau_0|\Phi'(\tau_0)$$

аналитически продолжима во всю внешность кривой L и равна нулю на бесконечности.

3.6. Распределение характеристических чисел интегральных уравнений теории упругости. Рассмотрим уравнение (7.58). Полагая

$$\vartheta(\tau) = p(\tau) + iq(\tau), \quad K(\tau_0, \tau) = R(\tau_0, \tau) + iS(\tau_0, \tau),$$
$$\frac{1}{\varkappa} A'(\tau) = A_1(\tau) + iA_2(\tau); \quad \frac{1}{\varkappa} = \lambda$$

и отделяя в уравнении (7.58) действительную и мнимую части, получим систему интегральных уравнений Фредгольма:

$$\left.\begin{aligned} &p(\tau_0) - \lambda \int\limits_{\gamma} \{R(\tau_0, \tau)\, p(\tau) + S(\tau_0, \tau)\, q(\tau)\} d\sigma = A_1(\tau_0), \\ &q(\tau_0) - \lambda \int\limits_{\gamma} \{S(\tau_0, \tau)\, p(\tau) - R(\tau_0, \tau)\, q(\tau)\}\, d\sigma - A_2(\tau_0). \end{aligned}\right\} \tag{7.69}$$

Все характеристические числа этой системы по абсолютной величине превосходят единицу. Поскольку для задач теории упругости

$$|\lambda| = |1/\varkappa| \leqslant 1,$$

то ряд последовательных приближений для системы (7.69) и для уравнения (7.58) будет сходящимся.

§ 4. Потенциалы уравнения теплопроводности

4.1. Интегральные уравнения задач теплопроводности, Уравнение теплопроводности для двух пространственных переменных, как известно, имеет вид *)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2} \frac{\partial U}{\partial t}. \tag{7.70}$$

Это уравнение следует решить в некоторой области переменных (x, y) и во все моменты времени $t > 0$. Предположим, что контур L, ограничивающий область D, является достаточно гладким. Ищется решение уравнения (7.70), удовлетворяющее:

1) начальному условию

$$U|_{t=0} = F(x, y) \tag{7.71}$$

$F(x, y)$ — заданная непрерывная функция);

*) См. [1], гл. VI.

2) краевому условию

$$U|_L = f(s, t), \tag{7.72}$$

где $f(s, t)$ — заданная функция точки s контура L и времени t.

Задача (7.70) — (7.72) называется *первой краевой задачей для уравнения теплопроводности*. Эта задача сводится с помощью тепловых потенциалов к некоторому интегральному уравнению. Пусть σ — параметр точки контура L, ν — внешняя нормаль к L в точке σ и r — расстояние от σ до точки (x, y) (вектор $\boldsymbol{r}$ считается направленным от σ к (x, y)).

Тепловым потенциалом двойного слоя называется интеграл

$$W(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t d\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{t-\tau} \frac{\partial}{\partial\nu} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\sigma, \tag{7.73}$$

где $\mu(\sigma, t)$ — непрерывная функция (плотность), определенная при $t \geqslant 0$, $\sigma \in L$. Предполагается, что $\mu(\sigma, 0) = 0$.

Потенциал (7.73) обладает следующими свойствами:

1) При всех (x, y), лежащих как вне, так и внутри L, функция $W(x, y, t)$ бесконечно дифференцируема и удовлетворяет уравнению (7.70).

2) $W(x, y, 0) = 0$.

3) Предельные значения на контуре L потенциала (7.73) W_i и W_e, полученные соответственно изнутри и извне, определяются равенствами

$$W_i = -\mu(s, t) + \\ + \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t d\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(\nu, r)\, d\sigma, \tag{7.74}$$

$$W_e = \mu(s, t) + \\ + \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t d\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r \cos(\nu, r)\, d\sigma, \tag{7.75}$$

где s — произвольная точка контура L.

4) Нормальная производная потенциала (7.73) непрерывна при переходе через контур L.

Решение задачи (7.70) — (7.72) ищется в виде

$$U(x, y, t) = U_0(x, y, t) + W(x, y, t), \tag{7.76}$$

где

$$U_0(x, y, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \iint\limits_D F(\xi, \eta)\, e^{-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a^2 t}}\, d\xi\, d\eta \tag{7.77}$$

и $W(x, y, t)$ — тепловой потенциал (7.73).

Для искомой плотности $\mu(s, t)$ получается интегральное уравнение

$$\mu(s, t) - \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2}\, e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}\, r\cos(\nu, r)\, d\sigma = -g(s, t), \tag{7.78}$$

где r — расстояние между точками s и σ и

$$g(s, t) = f(s, t) - \lim_{(x, y)\to s} U_0(x, y, t).$$

В случае внешней задачи (область D расположена вне контура L) решение (7.70) — (7.72) ищется в том же виде (7.76). Интегральное уравнение для плотности $\mu(s, t)$ выглядит для этого случая так:

$$\mu(s, t) + \frac{1}{4\pi a^2}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2}\, e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}\, r\cos(\nu, r)\, d\sigma = g(s, t). \tag{7.79}$$

Часто встречается для уравнения (7.70) задача с краевым условием:

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \nu} + h(\sigma)\, U\right|_L = f(\sigma, \tau) \tag{7.80}$$

($h(\sigma)$ — заданная непрерывная положительная функция), заменяющим условие (7.72).

Эта задача сводится к интегральному уравнению с помощью *теплового потенциала простого слоя*:

$$V(x, y, t)=\frac{1}{2\pi}\int_0^t d\tau\int_L \frac{\rho(\sigma, \tau)}{t-\tau}e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}d\sigma, \qquad (7.81)$$

где достаточно гладкая плотность $\rho(\sigma, t)$ обращается в нуль при $t=0$.

Потенциал (7.81) при $t>0$ есть непрерывно дифференцируемая вне контура L функция своих переменных, удовлетворяющая уравнению (7.70). Потенциал (7.81) непрерывен при переходе через контур и предельные значения на контуре L его нормальной производной, полученной соответственно предельным переходам изнутри и снаружи, имеют вид

$$\frac{\partial V}{\partial n_i}=\rho(s, t)-\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_0^t d\tau\int_L \frac{\rho(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2}e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}r\cos(r, n)\,d\sigma, \qquad (7.82)$$

$$\frac{\partial V}{\partial n_e}=-\rho(s, t)-\frac{1}{4\pi a^2 t}\int_0^t d\tau\int_L \frac{\rho(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2}e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}r\cos(r, n)\,d\sigma, \qquad (7.83)$$

где n — направление внешней нормали в точке $s\in L$.

Решение задачи (7.70) — (7.71) с краевым условием (7.80) ищется в виде

$$U(x, y, t)=U_0(x, y, t)+V(x, y, t), \qquad (7.84)$$

где $U_0(x, y, t)$ определяется по формуле (7.77).

Интегральное уравнение для плотности $\rho(\sigma, t)$ будет следующим:

$$\pm\rho(s, t)-\frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t d\tau\int_L \frac{\rho(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2}e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}r\cos(r, n)\,d\sigma+ \frac{h(s)}{2\pi}\int_0^t d\tau\int_L \frac{\rho(\sigma, \tau)}{t-\tau}e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}}d\sigma = f(s, t)-\frac{\partial U_0}{\partial n}-h(s)U_0, \qquad (7.85)$$

где знак плюс отвечает внутренней области, знак минус — внешней области.

Интегральные уравнения (7.78), (7.79), (7.85) сохраняют свой вид для многосвязных областей D.

Для трехмерной области D, ограниченной поверхностью S, тепловые потенциалы выглядят следующим образом: потенциал простого слоя

$$V(x, y, z, t) = \int_0^t d\tau \iint_S \frac{\rho(\sigma, \tau)}{[4\pi(t-\tau)]^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\sigma; \quad (7.86)$$

потенциал двойного слоя

$$W(x, y, z, t) = \int_0^t d\tau \iint_S \frac{\mu(\sigma, \tau)}{[4\pi(t-\tau)]^{3/2}} \frac{\partial}{\partial\nu} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} d\sigma. \quad (7.87)$$

С помощью этих потенциалов можно свести основные краевые задачи для трехмерного уравнения теплопроводности к интегральным уравнениям.

4.2. Исследование интегральных уравнений теплового потенциала и сходимость метода последовательных приближений. Рассмотрим интегральные уравнения (7.78) и (7.79) в предположении, что контур L выпуклый, но не обязательно гладкий. Положим

$$\frac{\cos(r, \nu)}{r} d\sigma = d\alpha,$$

где $d\alpha$ — угол, образованный двумя бесконечно близкими радиусами-векторами, проведенными из точки s к концам дуги $d\sigma$, и будем считать, что интеграл $\int |d\alpha|$ конечен. Это справедливо, например, для негладких выпуклых контуров. При этом предположении уравнения (7.78) и (7.79) можно записать в несколько ином виде. Приведем более общее уравнение, для которого уравнения (7.78) и (7.79) являются частными случаями при $\lambda = \pm 1$:

$$\mu(s, t) - \frac{\lambda}{4\pi a^2} \int_0^t d\tau \int_L \frac{\mu(\sigma, \tau)}{(t-\tau)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r^2 d\alpha = \mp g(s, t). \quad (7.88)$$

Последовательные приближения для этого уравнения сходятся при $|\lambda| \leqslant 1$, и решение будет иметь вид

$$\mu(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \mu_n(s, t), \tag{7.89}$$

где $\mu_0(s, t) = g(s, t)$,

$$\mu_n(s, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^t d\tau \int_L \frac{\mu_{n-1}(s, t)}{(\tau - t)^2} e^{-\frac{r^2}{4a^2(t-\tau)}} r^2 d\alpha.$$

Ряд (7.89) сходится равномерно для $0 \leqslant t \leqslant t_0$, где t_0 — любое фиксированное число. Пусть модуль функции $g(s, t)$ ограничен при всех s и t некоторым постоянным числом A.

Тогда ряд (7.89) сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем

$$q(t_0) = \max_{0 \leqslant t \leqslant t_0} \frac{1}{\pi} \int_L e^{-\frac{r^2}{4a^2 t}} d\alpha < 1.$$

Точнее, имеет место оценка

$$|\mu_n(s, t)| < Aq^n(t_0).$$

Если контур L гладкий, с непрерывной кривизной, то оценка $|\mu_n(s, t)|$ такова:

$$|\mu_n(s, t)| < \frac{A(pt)^{n/2}}{\Gamma(n/2 + 1)},$$

где Γ — эйлерова функция, а постоянная p зависит от вида контура L.

§ 5. Обобщенный алгорифм Шварца

5.1. Общая формулировка и сходимость алгорифма в плоской задаче теории потенциала. Пусть D — многосвязная область, ограниченная контурами $L_0, L_1, \ldots, L_n$ *). Рассмотрим задачу Дирихле для этой области. Пусть $U(x, y)$ — искомая гармоническая функция и $f_k(\zeta)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ —

*) См. начало п. 2.2.

заданные ее значения на контуре L_k. Исходя из формулы (7.29), функцию $U(x, y)$ можно представить в виде

$$U(x, y) = \sum_{k=0}^{n} U_k(x, y) + \sum_{k=1}^{n} A_k \ln|z - z_k|, \tag{7.90}$$

где $U_k(x, y)$ — функции, гармонические вне контура $L_k (k = 0, 1, \ldots, n)$, z_k — произвольная фиксированная комплексная точка внутри $L_k (k = 1, \ldots, n)$, A_k — постоянные и $z = x + iy$.

Представление (7.90) не является однозначным; к каждой из функций $U_k(x, y)$ можно добавить постоянную a_k, лишь бы

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = 0.$$

Обозначим через $u_k(\zeta)$ значение функции $U_k(x, y)$ на контуре L_k и через $D_k (k = 0, 1, \ldots, n)$ — область, лежащую вне L_k. Пусть $G_k(z, \zeta)$ — функция Грина области D_k. Тогда функции $u_k(\zeta) (k = 0, 1, \ldots, n)$ должны удовлетворять системе интегральных уравнений

$$u_m(z) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} u_k(\zeta) \frac{\partial G_k(z; \zeta)}{\partial \nu} d\sigma = f_m(z) - \sum_{k=1}^{n} A_k \ln|z - z_k|, \tag{7.91}$$

где $z \in L_m$, $\zeta \in L_k$ и ν — внешняя нормаль к $L_k (m = 0, 1, \ldots, n)$.

Система (7.91) разрешима не при любой правой части.

Пусть $l_k(\zeta)$ — произвольные непрерывные функции, подчиненные единственному условию

$$\frac{1}{2\pi} \int_{L_k} l_k(\zeta)\, d\sigma = 1.$$

Система (7.91) заменяется системой следующего вида:

$$u_m(z) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} u_k(\zeta) \left[\frac{\partial G_k(z; \zeta)}{\partial \nu} - l_k(\zeta) \right] d\sigma = f_m(z) - \sum_{k=1}^{n} A_k \ln|z - z_k|, \quad (m = 0, 1, \ldots, n). \tag{7.92}$$

Эта система оказывается разрешимой при любой правой части.

Пусть $W_m(z)$—решение системы (7.92), когда правая часть равна $f_m(z)$, и $W_{km}(z)$ — решение системы (7.92) с правой частью $\ln|z - z_k|$. Тогда решение $U_m(z)$ этой системы запишется в виде

$$U_m(z) = W_m(z) - \sum_{k=1}^{n} A_k W_{km}(z).$$

Постоянные A_k находятся из условий, что величина

$$A = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} U_k(\zeta)\, l_k(\zeta)\, d\sigma \tag{7.93}$$

должна быть одинакова для всех значений $m = 0, 1, \ldots, n$. Равенства (7.93) являются системой $(n+1)$ уравнений с $(n+1)$ неизвестными $A, A_1, \ldots, A_n$.

Решив эту систему, получим решение задачи Дирихле в виде

$$U(x, y) = \sum_{k=0}^{m} U_k(x, y) + \sum_{k=1}^{n} A_k \ln|z - z_k| - A.$$

Для видоизмененной задачи Дирихле *) $A_k = 0$. Для этой задачи функции $U_k(x, y)$ можно определить из системы

$$U_m(z) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} U_k(\zeta) \left[\frac{\partial G_k(z;\, \zeta)}{\partial \nu} - l_k(\zeta) \right] d\sigma = f_m(z). \tag{7.94}$$

Величины b_m определяются по формулам

$$b_m = -\frac{1}{2\pi} \sum_{k \neq m} \int_{L_k} U_k(\zeta)\, l_k(\zeta)\, d\sigma.$$

Допустим теперь, что контур L_0 отсутствует. Положим в системе (7.94)

$$l_k(\zeta) = \left. \frac{\partial G_k(z;\, \zeta)}{\partial \nu} \right|_{z=\infty}$$

*) См. п. 2.3 настоящей главы.

и введем в эту систему параметр λ. Система примет вид

$$u_m(z)+\frac{\lambda}{2\pi}\sum_{k\neq m}\int_{L_k} u_k(\zeta)\left[\frac{\partial G_k(z;\zeta)}{\partial\nu}-\frac{\partial G_k(\infty;\zeta)}{\partial\nu}\right]d\sigma=f_m(z) \tag{7.95}$$

$$(m=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\ z\in L_m).$$

Решение этой системы ищется в виде

$$u_m(z)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\lambda^r u_{mr}(z). \tag{7.96}$$

Функции $u_{mr}(z)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$\left.\begin{aligned} u_{m0}(z)&=f_m(z),\\ u_{mr}(z)&=\frac{1}{2\pi}\sum_{k\neq m}\int_{L} u_{k,\,r-1}(\zeta)\left[\frac{\partial G_k(z;\zeta)}{\partial\nu}-\frac{\partial G_k(\infty;\zeta)}{\partial\nu}\right]d\sigma. \end{aligned}\right\} \tag{7.97}$$

Если контуры $L_1,\ \ldots,\ L_n$ достаточно далеки друг от друга, то ряд (7.96) сходится при $\lambda=1$.

Пусть $U_{mr}(z)$ — гармоническая в D_m функция, контурные значения которой на L_m определяются по формулам (7.97). Тогда на контуре L_m имеют место соотношения

$$U_{m0}(z)=f_m(z),\quad U_{mr}(z)=\sum_{k\neq m}[U_{k,\,r-1}(z)-U_{k,\,r-1}(\infty)]. \tag{7.98}$$

Таким образом, для решения задачи Дирихле можно применять следующий метод, называемый *обобщенным алгорифмом Шварца.*

В качестве нулевого приближения строится в D_m гармоническая функция $U_{m0}(z)$, контурные значения которой совпадают с заданными на контуре значениями $f_m(z)$. Затем, зная $U_{m0}(z),\ \ldots,\ U_{m,\,r-1}(z)$, функции $U_{mr}(z)$ строим так: из $U_{k,\,r-1}(z)$ $(k\neq m)$ вычитаем их значения на бесконечности и затем суммируем по всем $k\neq m$. По контурным значениям $U_{m,\,r}(z)$ с помощью функции Грина для области D_m находится функция $U_{mr}(z)$ в D_m. Искомая гармоническая функция $U(z)$ является суммой ряда

$$U(z)=\sum_{r=0}^{\infty}(-1)^r\sum_{m=1}U_{mr}(z),$$

который сходится абсолютно, если контуры L_k $(k=1, \ldots, n)$ достаточно далеки друг от друга.

В случае двусвязной области процесс упрощается. Пусть $f_1(z)=f(z)$ и $f_2(z)=0$. Формулы (7.98) дают на L_1 $U_{10}(z)=f(z)$, $U_{1r}(z)=U_{2,r-1}(z)-U_{2,r-1}(\infty)$, на L_2 $U_{20}(z)=0$, $U_{2r}(z)=U_{1,r-1}(z)-U_{1,r-1}(\infty)$. Из этих формул вытекает, что $U_{1r}(z)$ при r нечетном и $U_{2r}(z)$ при r четном равны нулю. Обозначая

$$U_{1r}(z)=U_r(z), \quad U_{2r}(z)=V_r(z),$$

получим

$$U(z)=U_0(z)-V_1(z)+U_2(z)-V_3(z)+\ldots$$

В случае конечной многосвязной области обобщенный алгорифм Шварца применяется без изменений. В этом случае достаточно принять $l_0(\zeta)=0$.

5.2. Применение к трехмерным задачам. Обобщенный алгорифм применяется и в пространственном случае. Пусть область D ограничена внешней поверхностью S_0 и внутренними поверхностями $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Пусть D_m — та из областей, ограниченных поверхностью S_m, которая содержит D.

Функция $U(M)$, гармоническая в D, может быть единственным образом представлена в виде суммы функций $U_m(z)$, гармонических в области D_m:

$$U(M)=\sum_{m=1}^{n}U_m(M),$$

где

$$U_m(M)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_m}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial\nu}-U\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\nu}\right)dS$$

(ν — внешняя нормаль к S_m).

Пусть $f_m(M)$ — заданные значения $U(M)$ на поверхности S_m $(m=0, 1, \ldots, n)$ и пусть $G_m(M; M_1)$ — функция Грина для области D_m. Тогда для значений $U_m(M)$ на контуре L_m получим систему уравнений

$$U_m(M) + \frac{1}{4\pi} \sum_{k \neq m} \int\limits_{S_k}\int U_k(M_1) \frac{\partial G_k(M; M_1)}{\partial \nu} dS = f_m(M), \tag{7.99}$$

где $M \in S_m$ и $m = 0, 1, \ldots, n$.

Эта система всегда имеет единственное решение. После введения параметра λ система (7.99) принимает вид

$$u_m(M) + \frac{\lambda}{4\pi} \sum_{k \neq m} \int\limits_{S_k}\int u_k(M_1) \frac{\partial G_k(M; M_1)}{\partial \nu} dS = f_m(M) \text{на } L_m,$$

решение которой ищется в виде

$$u_m(M) = \sum_{r=0}^{+\infty} (-1)^r \lambda^r u_{mr}(M).$$

Функции $u_{mr}(M)$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$u_{m0}(M) = f(M),$$

$$u_{mr}(M) = \frac{1}{4\pi} \sum_{k \neq m} \int\limits_{S_k}\int u_{k,r-1}(M_1) \frac{\partial G(M; M_1)}{\partial \nu} dS.$$

Пусть $U_{mr}(M)$ — функции, гармонические в D, предельные значения которых на S_m определяются из последних соотношений. Функции $U_{mr}(M)$ удовлетворяют соотношениям: на S_m —

$$U_{m0}(M) = f_m(M); \quad U_{mr}(M) = \sum_{k \neq m} U_{k,r-1}(M).$$

Последовательные приближения обобщенного алгорифма Шварца для задачи Дирихле в пространственном случае строятся следующим образом: нулевым приближением служат функции $U_{m0}(M)$, $(m = 1, 2, \ldots, n)$, гармонические в D_m и равные $f_m(M)$ на поверхностях S_m. Если известны гармонические функции $U_{m0}(M), U_{m1}(M), \ldots, U_{m,r-1}(M)$, то гармоническая в D_m функция $U_{mr}(M)$ должна на поверхности S_m принимать значения суммы $\sum\limits_{k \neq m} U_{k,r-1}(M)$. Если область D двухсвязная, то обобщенный алгорифм Шварца сходится.

Методами функционального анализа доказана сходимость обобщенного алгорифма Шварца для широкого класса краевых задач и для таких областей, что ограничивающие их контуры $L_0, L_1, \ldots, L_n$ расположены как угодно близко друг к другу.

5.3. Применение к теории упругости. Пусть ставится задача об определении напряженного состояния в многосвязной области D, ограниченной изнутри контурами $L_1, L_2, \ldots$ $\ldots, L_n$ и извне контуром L_0. Допустим, что на границе L заданы составляющие внешних сил, действующих на упругую среду. Задача сводится к определению бигармонической внутри D функции $W(x, y)$ по заданным на контуре L с точностью до произвольных постоянных значениям ее первых производных *)

$$\left.\frac{\partial W}{\partial x}+i\frac{\partial W}{\partial y}\right|_{L_k}=f_k(z)+B_k \quad (k=0, 1, \ldots, n), \qquad (7.100)$$

где z — комплексная координата точки контура, $f_k(z)$ — заданные граничные функции и B_k — постоянные, которые должны быть выбраны так, чтобы были однозначны смещения (одна из постоянных может быть выбрана произвольной). Пусть главный вектор и главный момент сил, приложенных к каждому из контуров L_k, равны нулю. Обозначим через D_0 область, лежащую внутри L_0, и через D_k $(k=1, \ldots, n)$ область вне контура L_k.

Бигармоническую функцию $W(x, y)$ можно представить в виде суммы

$$W(x, y)=W_0(x, y)+W_1(x, y)+\ldots+W_n(x, y), \qquad (7.101)$$

где $W_0, W_1, \ldots, W_n$ — бигармонические функции, регулярные соответственно в областях $D_0, D_1, \ldots, D_n$.

Допустим, что задача может быть решена для каждой из областей D_k $(k=0, 1, \ldots, n)$. Дело сводится к построению величин

$$\frac{\partial W_k}{\partial x}+i\frac{\partial W_k}{\partial y}=g_k(z) \qquad (7.102)$$

на контуре L_k $(k=0, 1, \ldots, n)$.

---

*) См. п. 3.1.

Известно, что для односвязной области решение бигармонического уравнения с контурным условием

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\,\frac{\partial U}{\partial y} = g(z)$$

может быть определено в любой внутренней точке $z = x + iy$ по формуле

$$\frac{\partial U}{\partial x} + i\,\frac{\partial U}{\partial y} = \int\limits_L [M_1(x,\ y;\ \zeta)\, g(\zeta) + M_2(x,\ y;\ \zeta)\, \overline{g(\zeta)}]\, d\zeta, \tag{7.103}$$

где ζ — точка границы области, M_1 и M_2 — известные непрерывные внутри области функции, полностью определяемые этой областью. Оператор правой части (7.103) обозначим через $M(z,\ g)$. Соответственно операторы M для областей $D_0,\ D_1,\ \ldots,\ D_n$ и граничного условия (7.102) будем обозначать через $M_k(z;\ g_k)$ $(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n)$.

Включим постоянные B_k правой части (7.100) в функции $f_k(z)$. Система интегральных уравнений для функций $g_k(z)$ запишется в виде

$$\text{на } L_m\text{:}\ \ g_m(z) + \sum_{k \neq m} M_k(z;\ g_k) = f_m(z) \qquad (m = 0,\ 1,\ \ldots,\ n). \tag{7.104}$$

Эта система оказывается разрешимой не при любой правой части.

Система (7.94) заменяется следующей системой интегральных уравнений:

$$\text{на } L_m\text{:}\ \ g_m(z) + \sum_{k \neq m} \{M_k(z;\ g_k) - N_k(g_k)\} = f_m(z), \tag{7.105}$$

где

$$N_k(g_k) = \int\limits_{L_k} [\alpha_k(\zeta)\, g_k(\zeta) + \beta_k(\zeta)\, \overline{g_k(\zeta)}]\, d\zeta, \tag{7.106}$$

а $\alpha_k(\zeta)$ и $\beta_k(\zeta)$ — непрерывные функции ζ, удовлетворяющие условиям:

$$\int\limits_{L_k} \alpha_k(\zeta)\, d\zeta = 1, \qquad \int\limits_{L_k} \beta_k(\zeta)\, d\zeta = 0.$$

Система (7.105) разрешима при любой правой части. Решив эту систему и найдя $g_m(z)$ $(m=0, 1, \ldots, n)$, получим, что

$$B_m = \sum_{k \neq m} N_k(g_k).$$

Построив функции $W_0, W_1, \ldots, W_n$, искомую функцию можно найти по формуле (7.101). В качестве $N_k(g)$ можно взять

$$N_k(g) = M_k(\infty, g) \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$
$$N_0(g) = M_0(a, g),$$

где a — произвольная точка внутри L_0.

Если контуры $L_0, L_1, \ldots, L_n$ расположены достаточно далеко друг от друга, то систему (7.105) можно решать методом последовательных приближений, в результате чего приходят к обобщенному алгорифму Шварца для плоской задачи теории упругости.

§ 6. Применение теории симметричных интегральных уравнений

6.1. Задача Штурма — Лиувилля. Рассмотрим обыкновенный линейный дифференциальный оператор

$$L(y) = \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x)y, \tag{7.107}$$

заданный при $x \in [a, b]$.

Пусть $p(x) \geqslant 0$. Будем рассматривать функции $y(x)$, которые на краях сегмента $[a, b]$ удовлетворяют условиям:

$$\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0, \qquad \gamma y(b) + \delta y'(b) = 0. \tag{7.108}$$

Предположим, что единственная функция $y(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$L(y) = 0$$

и граничным условиям, есть тождественный нуль. Рассмотрим теперь уравнение

$$L(y) + \lambda r(x) y = 0, \tag{7.109}$$

где $r(x)$ — непрерывная положительная функция и λ — численный параметр. Требуется найти значения λ, при которых существует ненулевое решение уравнения (7.109), удовлетворяющее граничным условиям (7.108).

Пусть $G(x, s)$ — функция Грина оператора $L(y)$ с условиями (7.108). Положим

$$\sqrt{r(x)}\,y(x) = \varphi(x) \quad \text{и} \quad \sqrt{r(x)\,r(s)}\,G(x, s) = K(x, s).$$

Функция $\varphi(x)$, отличающаяся от искомой $y(x)$ известным множителем $\sqrt{r(x)}$, удовлетворяет следующему интегральному уравнению с симметричным ядром:

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\,\varphi(s)\,ds = 0. \qquad (7.110)$$

Характеристические числа этого уравнения есть искомые значения параметра λ. Характеристические числа этого уравнения простые.

Пример 1. Пусть $L(y) = y''$, $r(x) = 1$; предельные условия (7.108) имеют вид

$$y(0) = y(l) = 0.$$

Функция Грина для оператора y'' имеет вид

$$G(x, s) = \begin{cases} \dfrac{(l-s)\,x}{l} & \text{при} \quad x \leqslant s, \\ \dfrac{(l-x)\,s}{l} & \text{при} \quad s \leqslant x. \end{cases} \qquad (7.111)$$

Для этого случая характеристические числа уравнения (7.110) будут

$$\lambda_n = n^2\pi^2$$

и собственные функции, соответствующие этим числам, будут равны

$$y_n(x) = \sqrt{2}\sin n\pi x.$$

Пример 2. В условиях первого примера рассмотрим граничные условия вида

$$y(0) = 0; \quad y(1) + hy'(1) = 0.$$

Характеристические числа соответствующего интегрального уравнения (7.110) будут квадратами корней уравнения

$$\operatorname{tg}\mu + h\mu = 0.$$

6.2. Собственные колебания струны. Уравнение колебания струны, плотности $\rho(x)$, находящейся под действием натяжения T и занимающей в положении равновесия отрезок

$[0, l]$ оси x, будет иметь вид

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = F(x, t),$$

$u(x, t)$ — отклонение и $F(x, t)$ — распределенная сила, действующая на струну *). Положим $F(x, t) = 0$ и будем искать периодические по времени решения этого уравнения, обращающиеся в нуль на концах отрезка $[0, l]$:

$$u(x, t) = v(x)\sin(\nu t + \varepsilon).$$

Функция $v(x)$ должна удовлетворять однородному интегральному уравнению

$$v(x) - \frac{\nu^2}{T}\int_0^l \rho(s) G(x, s) v(s)\, ds = 0,$$

где $G(x, s)$ определяется по формуле (7.111).

Последнее уравнение можно привести к симметричному. Умножая обе части последнего равенства на $\sqrt{\rho(x)}$ и обозначая

$$v(x)\sqrt{\rho(x)} = \varphi(x), \quad G(x, s)\sqrt{\rho(x)\rho(s)} = K(x, s),$$

получим уравнение

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^l K(x, s)\varphi(s)\, ds = 0, \tag{7.112}$$

ядро которого симметрично. Это — уравнение вида (7.110). Его характеристические числа положительны. Найдя характеристические числа λ_n этого уравнения, найдем также частоты собственных колебаний струны, равные

$$\frac{\nu_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\lambda_n T}.$$

Для струны единичной длины ($l = 1$) и плотности, меняю-

---

*) См. [1], гл. II.

щейся по линейному закону $\rho(x)=\rho_0(1+x)$, положим

$$\lambda=\frac{\nu^2\rho_0}{T},\quad \varphi(x)=\sqrt{1+x}\,v(x)$$

и

$$K(x,\ s)=\sqrt{(1+x)(1+s)}\,G(x,\ s).$$

Тогда уравнение примет вид (7.112). С ошибкой, меньшей 2%, можно считать $\lambda_1=6{,}398$ и $\lambda_2=49{,}9$.

6.3. Устойчивость сжатого стержня. Уравнение изогнутой упругой оси стержня в случае, когда стержень сжимается силами, приложенными к его концам, имеет вид

$$E\frac{d^2}{dx^2}\left[J(x)\frac{d^2y}{dx^2}\right]+P\frac{d^2y}{dx^2}=0, \tag{7.113}$$

где $J(x)$—момент инерции в сечении с абсциссой x, E—модуль Юнга и P — величина действующих на концы стержня сил. Если концы стержня закреплены шарнирно, то

$$y(0)=y(l)=y''(0)=y''(l)=0$$

(стержень расположен вдоль отрезка $[0,\ l]$ оси x).

Обозначим $\frac{P}{E}=\lambda$ и $\frac{d^2y}{dx^2}=u$. Уравнение (7.113) принимает вид

$$\frac{d}{dx}\left(J^2(x)\frac{du}{dx}\right)+J(x)J''(x)u+\lambda J(x)u=0. \tag{7.114}$$

Граничные условия для функции u будут выглядеть следующим образом:

$$u(0)=u(l)=0. \tag{7.115}$$

Пусть $v(x)=u(x)\sqrt{J(x)}$. Функция $v(x)$ удовлетворяет симметричному интегральному уравнению

$$v(x)-\lambda\int_0^l K(x,\ s)\,v(s)\,ds=0, \tag{7.112$_1$}$$

где

$$K(x,\ s)=\begin{cases}\dfrac{x(l-s)}{l\sqrt{J(x)J(s)}} & \text{при}\quad x\leqslant s,\\[2ex] \dfrac{s(l-s)}{l\sqrt{J(x)J(s)}} & \text{при}\quad x\geqslant s.\end{cases}$$

Первое характеристическое число λ_1 может быть определено с недостатком по формуле

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{A_2}}, \quad \text{где} \quad A_2 = 2\int_0^l dx \int_0^s K^2(x, s)\, ds.$$

Соответственно критическая сила будет равна

$$P_1 = E\lambda_1 \approx E/\sqrt{A_2}.$$

6.4. Собственные колебания мембраны. Пусть мембрана в положении равновесия занимает конечную область D плоскости XOY, ограниченную достаточно гладким контуром L.

Задача о колебании закрепленной по краю мембраны сводится к нахождению тождественно не равных нулю решений волнового уравнения *)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

с нулевым граничным условием

$$u|_L = 0$$

и заданных начальном смещении и начальной скорости.

Решение такой задачи можно представить в виде ряда

$$U = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(A_n \cos a\sqrt{\lambda_n}\, t + B_n \sin a\sqrt{\lambda_n}\, t\right) \Phi_n(x, y),$$

где $\Phi_n(x, y)$ суть ненулевые решения уравнения

$$\Delta\Phi_n + \lambda_n \Phi_n = 0 \qquad (7.116)$$

при краевом условии

$$\Phi_n|_L = 0. \qquad (7.117)$$

Числа λ_n должны быть подобраны так, чтобы существовали нетривиальные решения уравнения (7.116) и граничного условия (7.117).

Пусть $G(P, Q)$ — функция Грина оператора Лапласа для области D в случае задачи Дирихле **).

---

*) См. [1], гл. II, § 5.
**) См. [1], гл. III, § 6.

Функции Φ_n являются нетривиальными решениями интегрального уравнения

$$\Phi(P) - \lambda \int\limits_D\int G(P, Q)\Phi(Q)\,d\xi\,d\eta = 0, \qquad (7.118)$$

где P — точка с координатами (x, y) и Q — точка с координатами (ξ, η).

Собственные числа и собственные функции задачи о колебании мембраны являются собственными числами и собственными функциями симметричного интегрального уравнения (7.118). Это — уравнение со слабой особенностью *).

Уравнение (7.118) имеет счетное множество собственных чисел $\lambda_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ и собственных функций. Если область D есть прямоугольник, ограниченный прямыми $x = 0$; $x = l$; $y = 0$; $y = m$, то собственные числа будут равны

$$\lambda_{\sigma,\tau} = \pi^2(\sigma^2/l^2 + \tau^2/m^2) \qquad (\sigma,\ \tau = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

причем σ и τ одновременно не обращаются в нуль.

6.5. Давление жесткого штампа на упругое полупространство. Рассмотрим полупространство $z < 0$. Допустим, что на часть S ограничивающей его плоскости $z = 0$ давит абсолютно жесткое тело, которое прижимается силой Q, параллельной оси z. Предполагается, что трение отсутствует. Оставшаяся часть плоскости S' свободна от действия внешних сил. Требуется определить поля напряжений и смещений в полупространстве. Эта задача сводится к некоторому интегральному уравнению первого рода.

Пусть $z = \varphi(x, y)$ есть уравнение части поверхности штампа, соприкасающейся с полупространством. Определим на S функцию

$$\Phi(x, y) = ax + by + c - \varphi(x, y),$$

где величина $ax + by + c$ характеризует жесткое перемещение штампа.

Граничные условия задачи позволяют свести дело к нахождению одной гармонической функции $\varphi_0(x, y)$.

*) См. гл. II.

удовлетворяющей следующим краевым условиям:

$$\text{на } S:\quad \varphi_0 = \Phi(x, y),$$

$$\text{на } S':\ \frac{\partial\varphi_0}{\partial z} = 0.$$

Функция $\varphi_0(x, y)$ ищется в виде

$$\varphi_0(x, y, z) = \iint\limits_S \mu(\xi, \eta)\frac{d\xi\, d\eta}{r},$$

где $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z^2$ и $\mu(\xi, \eta)$ — искомая функция. Краевое условие дает симметричное интегральное уравнение первого рода

$$\iint\limits_S \frac{\mu(\xi, \eta)}{r}\, d\xi\, d\eta = \Phi(x, y) \quad \text{на} \quad S.$$

Решение этого уравнения единственно и система фундаментальных функций ядра $1/r$ полная. После нахождения характеристических чисел и собственных функций симметричного ядра $1/r$ функция $\mu(\xi, \eta)$ находится обычным способом в виде ряда, который сходится в среднем.

§ 7. Приложения сингулярных интегральных уравнений

7.1. Смешанная задача теории потенциала. Пусть требуется найти гармоническую функцию внутри плоской области D, если на одной части контура L этой области заданы значения искомой функции, а на другой части — значения ее производной. Эта задача является частным случаем общей задачи Гильберта, в которой ищется гармоническая функция при условии, что на контуре известна некоторая линейная комбинация функции и ее нормальной производной.

Пусть на каждой из замкнутых кривых, образующих контур L, есть как дуги, на которых задана функция, так и дуги, на которых задана нормальная производная. Пусть $\gamma_1, \gamma_3, \ldots, \gamma_{2n-1}$ — дуги контура, на которых дана искомая гармоническая функция, и пусть на этих дугах

$$u = f(s), \tag{7.119}$$

где s — длина дуги контура. Через $\gamma_2, \gamma_4, \ldots, \gamma_{2n}$ обозначим те дуги контура, на которых дана нормальная производная.

Пусть на этих дугах

$$\frac{\partial U}{\partial n} = f_1(s), \tag{7.120}$$

где n — внешняя нормаль к контуру.

Для решения задачи достаточно найти значения функции $U(x, y)$ на дугах $\gamma_2, \gamma_4, \ldots, \gamma_{2n}$. Тогда рассматриваемая задача, носящая название *задачи Пуанкаре*, сведется к задаче Дирихле для многосвязной области (см. пп. 2.2 и 5.1 настоящей главы).

Обозначим через $V(x, y)$ гармоническую функцию, сопряженную $U(x, y)$. Задача Пуанкаре может быть сформулирована следующим образом. Найти аналитическую функцию $\varphi(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ $(z = x + iy)$, если на одних частях контура задана ее действительная часть, а на других — мнимая:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{на } \gamma_{2k-1}\text{:} & U = f(s), \\ \text{на } \gamma_{2k}\text{:} & V = f^*(s) + C_k \end{array}\right\} \quad (k = 1, \ldots, n),$$

где C_k — произвольные постоянные и

$$f^*(s) = \int_{\alpha_k}^{s} f_1(s)\,ds \qquad (\alpha_k \text{ — начало дуги } \gamma_{2k}).$$

Пусть $T(z;\ \zeta)$ — ядро Шварца области D. Имеет место представление:

$$\frac{1}{2\pi} T(z;\ \zeta)\,d\sigma = \frac{1}{\pi i}\,\frac{d\zeta}{\zeta - z} + P(z;\ \zeta)\,d\sigma,$$

где $P(z;\ \zeta)$ — функция, непрерывная по совокупности переменных z и ζ в замкнутой области $\overline{D}$ и регулярная относительно z в области D. Обозначим

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_{2k-1}} f(\sigma)\,T(z;\ \zeta)\,d\sigma.$$

Для определения значений искомой функции $U(x, y)$ на контурах $\gamma_2, \gamma_4, \ldots, \gamma_{2n}$ получается следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\text{на } \gamma_{2m}\text{:} \quad -\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n} U(\sigma)\operatorname{Re}\left(\frac{d\zeta}{\zeta-t}\right)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_{2k}} U(\sigma)\operatorname{Im}\{P(t;\ \zeta)\}\,d\sigma=$$
$$=f^*(s)-\operatorname{Im}\{\omega(t)\}+C'_m, \qquad (m=1,\ \ldots,\ n), \qquad (7.121)$$

где $C'_m=C_m-C$ и C — произвольная постоянная.

Решив это уравнение, мы найдем $\varphi(z)$ с помощью формулы

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L U(\sigma)\,T(z;\ \zeta)\,d\sigma+iC.$$

Отделив в этой формуле вещественную часть, найдем $U(x,\ y)$. Уравнение (7.121) есть сингулярное уравнение, которое можно свести к уравнению Фредгольма *).

7.2. Смешанная задача для полуплоскости. Рассмотрим полуплоскость $y>0$. Пусть на конечных отрезках $\gamma_2,\ \gamma_4,\ \ldots,\ \gamma_{2n}$ ее границы $y=0$ задано значение нормальной производной гармонической в верхней полуплоскости функции, а на остальной части границы задана сама функция.

Обозначим через z комплексную координату точки верхней полуплоскости. Обозначим значение искомой гармонической функции $U(x,\ y)$ на отрезках $\gamma_1,\ \gamma_3,\ \ldots,\ \gamma_{2n-1}$ через $f(\xi)$. Пусть по-прежнему началом отрезка γ_{2k} будет точка α_k, а концом — точка β_k $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Если обозначить через $u(\xi)$ искомые значения функции $U(x,\ y)$ на отрезках $\gamma_2,\ \gamma_4,\ \ldots,\ \gamma_{2n}$, то для $u(\xi)$ получится сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_{\gamma_2+\ldots+\gamma_{2n}}\frac{u(\xi)\,d\xi}{\xi-t}=B(t), \qquad (7.122)$$

где t — произвольная точка на одном из отрезков γ_{2k} и

$$B(t)=-f^*(t)+\operatorname{Im}\{\omega(t)\}-C'_m \qquad (t\in\gamma_{2m}).$$

*) См. гл. VI, § 9.

Функции $f^*(t)$, $\omega(t)$ и постоянные C'_m определяются так же, как и в предыдущем пункте. Общее решение уравнения (7.122) имеет вид

$$\text{на } \gamma_{2m}: \quad u(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{\prod\limits_{k=1}^{n}(t-\alpha_k)(\beta_k-t)}} \times$$
$$\times \int\limits_{\gamma_2+\ldots+\gamma_{2n}} B(\xi)\sqrt{\prod_{k=1}^{n}(\xi-\alpha_k)(\beta_k-\xi)}\,\frac{d\xi}{\xi-t} +$$
$$+\frac{Q_{n-1}(t)}{\sqrt{(-1)^{n-1}\prod\limits_{k=1}^{n}(t-\alpha_k)(\beta_k-t)}}, \qquad (7.123)$$

где $Q_{n-1}(t)$ — полином $(n-1)$-й степени с вещественными коэффициентами. Формула (7.123) содержит $2n$ произвольных постоянных (n коэффициентов полинома $Q_{n-1}(t)$ и n произвольных постоянных C'_m, входящих в $B(t)$). Эти постоянные могут быть выбраны так, чтобы функция $u(t)$ была непрерывна.

7.3. Соприкасание двух упругих полуплоскостей. Пусть две упругие полуплоскости — верхняя $(y>0)$ и нижняя $(y<0)$ — соприкасаются без трения вне отрезка $-a \leqslant x \leqslant a$. Отрезок $|x| \leqslant 1$ является бесконечно узкой щелью. К обеим полуплоскостям со стороны щели приложены одинаковые нормальные растягивающие усилия интенсивности h. Требуется определить поле напряжений в обеих полуплоскостях при условии, что напряжения исчезают на бесконечности.

Задача сводится к определению аналитической в верхней (нижней) полуплоскости функции $\Phi(z)$, удовлетворяющей на оси x следующим граничным условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{Re}\{\Phi(z)\} = 0 \quad \text{при} \quad y=0 \quad \text{и} \quad |x|>a, \\ &\operatorname{Im}\{\Phi(z)\} = -\frac{h}{2} \quad \text{при} \quad y=0 \quad \text{и} \quad |x|<a. \end{aligned}\right\} \qquad (7.124)$$

Таким образом, функция $\Phi(z)$ является решением задачи Пуанкаре (см. п. 1). Для нахождения $\Phi(z)$ составляется сингулярное интегральное уравнение (7.121). Решив это уравнение, найдем

$$\Phi(z) = \frac{ih}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1\right). \tag{7.125}$$

Функция $\Phi(z)$ для нижней полуплоскости будет такой же.

Для того чтобы найти поле смещений и поле напряжений, достаточно знать функции Гурса $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ *). Эти функции определяются с помощью формулы (7.125) следующими равенствами:

$$\varphi'(z) = i\Phi(z),$$

$$\psi(z) = \varphi(z) - z\varphi'(z).$$

Этот же метод применим и в более общем случае, когда на общей границе двух упругих плоскостей имеется несколько щелей.

7.4. Давление жесткого штампа на упругую полуплоскость. Рассмотрим задачу о жестком штампе, действующем на упругую полуплоскость $y < 0$.

Пусть контур штампа, вдавленного в полуплоскость, имеет уравнение $y = f(x)$ при $|x| \leqslant a$. Предположим еще, что участки границы $|x| > a$ свободны от напряжений и штамп вдавлен силами, нормальными к его границе. Требуется определить поле напряжений в полуплоскости.

Пусть по-прежнему $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — функции Гурса и пусть $\varphi'(z) = p(x, y) + iq(x, y)$. Функция $\psi(z)$ определяется соотношением

$$z\varphi'(z) + \psi(z) = \varphi(z).$$

Для $p(x, y)$ можно получить следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \frac{p(\xi)\,d\xi}{\xi - t} = \frac{2\mu}{\varkappa + 1} f'(t), \tag{7.126}$$

где μ и $\varkappa$ — упругие постоянные полуплоскости $y < 0$ и t — любая точка отрезка $(-a, a)$ (если $t \notin (-a, a)$, то $p = 0$).

*) См. п. 3.1.

Решение уравнения (7.126) дается формулой

$$p(t) = p_0(t) + \frac{A}{\sqrt{a^2 - t^2}}, \tag{7.127}$$

где

$$p_0(t) = -\frac{2\mu}{\pi(\varkappa + 1)\sqrt{a^2 - t^2}} \int_{-a}^{a} \frac{f'(\xi)\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi - t} d\xi.$$

Постоянную A можно определить, если известен главный вектор P усилий, приложенных к штампу:

$$A = \frac{P}{2\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-a}^{a} p_0(t)\, dt.$$

После этого $\varphi'(z)$ определится по формуле

$$\varphi'(z) = -\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(\xi, 0)}{\xi - z} d\xi.$$

Для случая плоского штампа $f(\xi) = \text{const}$,

$$p(t) = \frac{P}{2\pi\sqrt{a^2 - t^2}} \quad \text{и} \quad \varphi'(z) = -\frac{P}{2\pi\sqrt{a^2 - z^2}}.$$

В случае, когда на полуплоскость давит несколько штампов, задача решается принципиально так же, с несколько более громоздкими вычислениями.

7.5. Смешанная задача теории упругости. Рассмотрим некоторую плоскую, вообще говоря, многосвязную область D, заполненную упругой средой. Пусть на одной части контура, обозначаемой через M, заданы смещения, а на дополнительной части контура L заданы силы, действующие на среду области D. Весь контур $C = L + M$ считается достаточно гладким. Допустим, что часть контура L состоит из нескольких не связанных между собой дуг $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$, причем комплексные координаты начала и конца дуги γ_k будут обозначаться соответственно через α_k и β_k ($k = 1, \ldots, n$). Задача об определении напряжений в такой среде называется смешанной задачей теории упругости. Задача сводится к нахождению функций Гурса $\varphi(z)$ и $\psi(z)$.

Согласно формулам (7.47) и (7.48) на контуре должны быть выполнены следующие условия:

$$\varkappa\varphi(\zeta)-\zeta\overline{\varphi'(\zeta)}-\overline{\psi(\zeta)}=2\mu(u+iv) \quad \text{при} \quad \zeta\in M, \tag{7.128}$$

$$\varphi(\zeta)+\zeta\overline{\varphi'(\zeta)}+\overline{\psi(\zeta)}=i\int(X_\nu+iY_\nu)\,ds+b_k \quad \text{при} \quad \zeta\in\gamma_k. \tag{7.129}$$

Если ввести две функции $\delta(\zeta)$ и $f(\zeta)$ по формулам

$$\delta(\zeta)=\begin{cases} 0 & \text{на} \quad M, \\ \varkappa+1 & \text{на} \quad L, \end{cases}$$

$$f(\zeta)=\begin{cases} -i\int(X_\nu+iY_\nu)\,ds & \text{на} \quad L, \\ 2\mu(u+iv) & \text{на} \quad M, \end{cases}$$

то условия (7.128) и (7.129) можно будет записать в виде одного равенства:

$$\varkappa\varphi(\zeta)-\delta(\zeta)\varphi(\zeta)-\zeta\overline{\varphi'(\zeta)}-\overline{\psi(\zeta)}=f(\zeta)+C(\zeta). \tag{7.130}$$

Пусть $T(z;\zeta)$ — ядро Шварца области D и $P(z;\zeta)=$ $=\frac{1}{4\pi}T(z;\zeta)-\frac{1}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{d\sigma}$, где $d\sigma$ — дифференциал дуги контура C *).

Для искомой функции $\varphi(\zeta)$ получается следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$(\varkappa-1)\varphi(t)-\frac{\varkappa+1}{\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta=\Phi(t), \tag{7.131}$$

где t — точка на L и

$$\Phi(t)=\frac{\varkappa+1}{4\pi}\int\limits_L\varphi(\zeta)P(t;\zeta)\,d\sigma-$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_C\overline{\varphi(\zeta)}K(t;\zeta)\,d\sigma+2F(t)+2\sum_{k=1}^{n}b_kF_k(t). \tag{7.132}$$

---

*) См. п. 2.5.

При этом

$$F(z)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{C} f(\zeta)\,T(z;\,\zeta)\,d\sigma, \quad F_k(z)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\gamma_k} T(z;\,\zeta)\,d\sigma$$

и

$$K(z,\,\zeta)=\frac{d}{d\sigma}\left\{[(\zeta-z)\,T(z;\,\zeta)-zT(a;\,\zeta)]\,\frac{d\sigma}{d\bar{\zeta}}\right\}, \qquad (7.133)$$

где a — произвольная фиксированная точка области D.

Правая часть уравнения (7.131) содержит под знаками интегралов неизвестную функцию. Однако ядра этих интегралов могут иметь только слабые особенности. Решение уравнения (7.131), непрерывное в точках α_k $(k=1,\,\ldots,\,n)$, может быть представлено в виде

$$\varphi(t)=-\frac{\varkappa-1}{4\pi}\Phi(t)-$$
$$-\frac{\varkappa+1}{4\varkappa i}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{t-\alpha_k}{t-\beta_k}\right)^m\int\limits_{L}\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{\zeta-\beta_k}{\zeta-\alpha_k}\right)^m\frac{\Phi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-t}\,\frac{\Phi(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-t}, \qquad (7.134)$$

где $m=\frac{1}{2\pi i}\ln\left(-\frac{1}{\varkappa}\right)$.

Постоянные b_k, входящие в формулы (7.129) и (7.132), могут быть выражены так, чтобы решение (7.134) было непрерывным и в точках β_k. Пользуясь выражением (7.134) для вещественной и мнимой частей функции $\varphi(\zeta)$, можно получить систему двух интегральных уравнений Фредгольма, которая всегда разрешима. Функция $\varphi(z)$ может быть найдена по ее контурным значениям с помощью интеграла Коши.

Если область D конформно отображается на круг с помощью рациональной функции, то смешанная задача теории упругости для этой области решается в квадратурах.

7.6. Задача об обтекании дуги заданной формы. Пусть дана на плоскости комплексной переменной z гладкая незамкнутая дуга AB, которая обтекается потоком, компоненты скорости которого на бесконечности равны U и V. Обозначим через α и β комплексные координаты точек A и B. Пусть $w(z)=\varphi(x,\,y)+i\psi(x,\,y)$ — комплексный потенциал скоростей потока. Требуется найти аналитическую вне дуги AB

функцию $w(z)$, удовлетворяющую условиям:

$$\lim_{z\to\infty}[w'(z)-(U-iV)]=0, \tag{7.135}$$

$$\operatorname{Im} w(z)=\text{const}, \quad \text{если} \quad z\in AB. \tag{7.136}$$

Кроме того, предполагается, что скорость потока конечна во всех точках дуги, за исключением, может быть, точки A. Пусть

$$\omega(z)=w'(z)-(U-iV). \tag{7.137}$$

Функция $\omega(z)$ ищется в виде интеграла типа Коши

$$\omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{AB}\frac{T(\zeta)\,d\sigma}{\zeta-z}, \tag{7.138}$$

где $d\sigma=|d\zeta|$ и ζ — переменная точка дуги AB. Функцию $T(\zeta)$ называют *вихревой функцией*.

Для вихревой функции справедливо следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{AB}\frac{T(\zeta)\sin(r,n)}{r}\,d\sigma=V\cos\vartheta-U\sin\vartheta, \tag{7.139}$$

где (r, n) — угол между направлением вектора $t-\zeta$ (t — точка дуги AB) и нормалью в точке с комплексной координатой t; ϑ — угол между касательной к кривой AB в точке t и осью x.

Уравнение (7.139) имеет бесчисленное множество решений. Требование конечности скорости потока в точке B приводит к условию:

$$T(\beta)=0. \tag{7.140}$$

Решение уравнения (7.139), удовлетворяющее условию (7.140), подставляется в формулу (7.138).

В случае, когда AB — отрезок $(-a, a)$ действительной оси, уравнение (7.139) принимает вид

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{T(\zeta)\,d\zeta}{\zeta-t}=-V.$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию:

$$T(a)=0,$$

имеет вид

$$T(t) = -2V\sqrt{\frac{a-t}{a+t}}.$$

Тогда функция $\omega(z)$ будет равна

$$\omega(z) = iV - V\sqrt{\frac{a-z}{a+z}}$$

и

$$w'(z) = U - V\sqrt{\frac{a-z}{a+z}}.$$

Точное решение задачи может быть получено также в случае, когда AB — дуга окружности.

ГЛАВА VIII

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЯДРАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ РАЗНОСТИ АРГУМЕНТОВ

§ 1. Общие сведения

1.1. Основное уравнение и его частные случаи. В этой главе описываются свойства уравнений, являющихся частными случаями уравнения

$$\mu\varphi - \boldsymbol{k}\varphi \equiv \mu\varphi(x) - \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \int_{-\infty}^{\infty} k_j(x-t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \quad (8.1)$$
$$-\infty < x < \infty,$$

в котором $b_j(x)$ — ограниченные измеримые функции, стремящиеся к конечным пределам при $x \to \pm\infty$, $\mu = \text{const}$. Уравнения вида (8.1) и транспонированные к ним не совсем точно называют *уравнениями с ядрами, зависящими от разности аргументов*. Важнейшими частными случаями уравнения (8.1) являются следующие уравнения:

1. Уравнения Вольтерра*)

$$\mu\varphi(x) - \int_0^x k(x-t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \quad x > 0$$

$$\left(j = 1,\ b_1(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}\ k(x),\ f(x) = 0 \text{ при } x < 0\right). \quad (8.2)$$

2. Уравнение на всей оси

$$\mu\varphi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} k(x-t)\,\varphi(t)\,dt = f(x) \quad (j = 1,\ b_1(x) = 1). \quad (8.3)$$

*) Эти уравнения рассмотрены в § 3 гл. I.

3. Уравнение Винера—Хопфа

$$\mu\varphi(x) - \int_0^\infty k(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x) \tag{8.4}$$

$$\left(j=1,\ b_1(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\quad f(x)=0 \text{ при } x<0\right).$$

4. Парное уравнение

$$\begin{gathered}\mu\varphi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x), \quad x<0,\\ \mu\varphi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} k_2(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x), \quad x>0\end{gathered} \tag{8.5}$$

$$\left(j=2,\ b_1(-x)=b_2(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x<0\end{cases}\right).$$

5. Уравнение на конечном промежутке

$$\begin{gathered}\mu\varphi(x) - \int_0^T k(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x), \quad 0\leqslant x\leqslant T\\ \left(j=1,\ b_1(x)=\begin{cases}1, & x\in[0,\ T],\\ 0, & x\bar{\in}[0,\ T]\end{cases}\right).\end{gathered} \tag{8.6}$$

Уравнения, транспонированные к (8.1), (8.2) и (8.5), имеют соответственно вид

$$k\varphi = \mu\varphi(x) - \sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} b_j(t)\,k_j(t-x)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \tag{8.1$_1$}$$

$$-\infty < x < \infty,$$

$$\mu\varphi(x) - \int_x^\infty k(t-x)\varphi(t)\,dt = f(x), \quad x>0, \tag{8.2$_1$}$$

$$\mu\varphi(x) - \int_{-\infty}^{0} k_1(t-x)\varphi(t)\,dt - \int_0^\infty k_2(t-x)\varphi(t)\,dt = f(x),$$

$$-\infty < x < \infty. \tag{8.5$_1$}$$

Уравнения, транспонированные к (8.3), (8.4), (8.6), получаются из них заменой ядер $k(x-t)$ ядрами $k(t-x)$.

Интерес к уравнениям (8.1) — (8.6) вызван тем, что эти уравнения возникают при решении ряда важных задач ([16], [17], [23], [25], [26], [27], [28], [29], [46]).

1.2. Символ. Условия нормальной разрешимости. Свойства уравнения (8.1) во многом определяются поведением его символа

$$\sigma(x, \lambda) = \mu - \sum_{j=1}^{n} b_j(x) K_j(\lambda), \tag{8.7}$$

где

$$K_j(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} k_j(x) e^{i\lambda x}\, dx$$

есть преобразование Фурье ядра $k_j(x)$. Имеет место следующая

Теорема 1.1 ([30]). *Если ядра $k_j(x)$ уравнения* (8.1) *суммируемы на всей оси, то*:

a) *для того чтобы уравнение* (8.1) *было нормально разрешимым в пространстве $L_p(-\infty, \infty)$, $1 < p < \infty$, и имело конечный индекс, необходимо и достаточно, чтобы предельные значения символа при $x \to \pm\infty$ нигде не обращались в нуль*:

$$\sigma(\pm\infty, \lambda) = \mu - \sum_{j=1}^{n} b_j(\pm\infty) K_j(\lambda) \neq 0, \qquad -\infty < \lambda < \infty. \tag{8.8}$$

b) *При выполнении указанного условия индекс уравнения в любом из этих пространств определяется формулой*

$$\chi_\mu = \frac{1}{2\pi} \arg \frac{\sigma(-\infty, \lambda)}{\sigma(+\infty, \lambda)} \Bigg|_{-\infty}^{\infty}. \tag{8.9}$$

c) *Если μ совпадает с каким-либо из значений функций $\sigma(\pm\infty, \lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, то либо оператор $\mu I - \boldsymbol{k}$ (I-тождественный оператор) не нормально разрешим, либо пространства нулей операторов $\mu I - \boldsymbol{k}$ и $(\mu I - \boldsymbol{k})^*$ бесконечномерны.*

d) *Одним из регуляризаторов* (см. гл. VI, § 5) *оператора* (8.1) *при выполнении* (8.8) *служит оператор*

$$R\varphi = \begin{cases} \frac{1}{\mu}\varphi(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} q_-(x-t)\varphi(t)\,dt, & x < 0, \\ \frac{1}{\mu}\varphi(x) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} q_+(x-t)\varphi(t)\,dt, & x > 0, \end{cases} \tag{8.10}$$

где функции $q_\pm(x) \in L(-\infty, \infty)$ *и определяются своими преобразованиями Фурье*:

$$Q_\pm(\lambda) = \frac{\frac{1}{\mu}\sum\limits_{j=1}^{n} b_j(\pm\infty) K_j(\lambda)}{\mu - \sum\limits_{j=1}^{n} b_j(\pm\infty) K_j(\lambda)}.$$

Все сформулированные свойства остаются без существенных изменений, если для некоторого h

I. $e^{-hx}k_j(x) \in L(-\infty, \infty)$,

II. $e^{-hx}f(x)$, $e^{-hx}\varphi(x) \in L_p(-\infty, \infty)$.

Дело в том, что в этом случае заменой (обратимой) $\varphi(x) = e^{hx}\varphi_1(x)$, $f(x) = e^{hx}f_1(x)$ уравнение (8.1) приводится к уравнению

$$\mu\varphi_1(x) - \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \int\limits_{-\infty}^{\infty} k_{j1}(x-t)\varphi_1(t)\,dt = f_1(x),$$

в котором ядра $k_{j1}(x) = e^{-hx}k_j(x) \in L(-\infty, \infty)$. Более широкий класс уравнений, для которых имеет место теорема, аналогичная 1.1, рассмотрен в [32].

1.3. Уравнения, решаемые элементарно. В случае, когда функции $K_j(\lambda)$ рациональны, а коэффициенты $b_j(x)$ кусочно постоянные, уравнение (8.1) решается элементарно, например с помощью описываемого ниже метода [31]. Другой метод решения описан в [36].

Уравнение (8.1) с кусочно постоянными коэффициентами $b_j(x)$ можно переписать в виде

$$\varphi(x) + \int_{-\infty}^{\infty} n_j(x-t)\,\varphi(t)\,dt = f(x),$$

$$\alpha_j < t < \alpha_{j+1}, \quad -\infty = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_s = +\infty; \tag{8.1'}$$

промежутки (α_j, α_{j+1}) выбираются так, что на них все $b_j(x)$ постоянны. Функции $n_j(x)$ являются линейными комбинациями функций $k_j(x)$, и, следовательно, их преобразования Фурье $N_j(\lambda)$ также рациональны.

Пусть

$$1 + N_j(\lambda) = \frac{\prod\limits_{\nu=1}^{p_j} \left(\lambda - \alpha_{\nu j}^+\right)^{p_{\nu j}} \prod\limits_{\nu=1}^{q_j} \left(\lambda - \alpha_{\nu j}^-\right)^{q_{\nu j}}}{\prod\limits_{\nu=1}^{r_j} \left(\lambda - \beta_{\nu j}^+\right)^{r_{\nu j}} \prod\limits_{\nu=1}^{s_j} \left(\lambda - \beta_{\nu j}^-\right)^{s_{\nu j}}},$$

$$\sum p_{\nu j} + \sum q_{\nu j} = \sum r_{\nu j} + \sum s_{\nu j},$$

$\operatorname{Im}\alpha_{\nu j}^+$, $\operatorname{Im}\beta_{\nu j}^+ > 0$, $\operatorname{Im}\alpha_{\nu j}^-$, $\operatorname{Im}\beta_{\nu j}^- < 0$. Решение уравнения (8.1_1) представимо в виде

$$\varphi(x) = Rf + \sum_{\nu=1}^{p_j} e^{-i\alpha_{\nu j}^- x} \left(\sum_{k=0}^{p_{\nu j}-1} M_{\nu jk} x^k \right) + \\ + \sum_{\nu=1}^{q_j} e^{-i\alpha_{\nu j}^+ x} \left(\sum_{k=0}^{q_{\nu j}-1} N_{\nu jk} x^k \right),$$

$$\alpha_j < x < \alpha_{j+1}, \quad 0 < j < s-1. \tag{8.11}$$

Для промежутка $(-\infty, \alpha_1)$ $[(\alpha_{s-1}, +\infty)]$, соответствующего $j=0$ $[j=s-1]$, исчезает вторая (первая) сумма. $R\varphi$ — оператор того же вида, что и (8.1), но с ядрами $a_j(x-t)$, преобразования Фурье которых определяются из соотношений

$$1 + A_j(\lambda) = [1 + N_j(\lambda)]^{-1}.$$

Коэффициенты $M_{\nu jk}$, $N_{\nu jk}$ определяются подстановкой (8.11) в уравнение (8.1). При этом получается система линейных алгебраических уравнений, эквивалентная исходному уравнению. В качестве примера на применение описанного метода рассмотрим уравнение

$$\varphi(t) + 4\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-|t-\tau|}\varphi(\tau)\,d\tau + \int_{1}^{\infty} e^{-|t-\tau|}\varphi(\tau)\,d\tau\right) = \\ = \frac{2}{3}e^{5t} + \frac{e^t}{3}(3 + 2e^{-6}) \equiv f_1, \quad t < 0,$$

$$\varphi(t) + 3\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-2|t-\tau|}\varphi(\tau)\,d\tau + \int_{1}^{\infty} e^{-2|t-\tau|}\varphi(\tau)\,d\tau\right) = \\ = \frac{3}{7}e^{-5t} + \frac{e^{-2t}}{7}(3 + 7e^{-3}) \equiv f_2, \quad t > 0.$$

Продолжая $\varphi(t)$ нулем на отрезок $[0, 1]$, запишем уравнение в виде (8.1$_1$)

$$\begin{aligned} &\varphi(t) + 4\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-\tau|}\varphi(\tau)\,d\tau = f_1(t), && t < 0, \\ &\varphi(t) = 0, && 0 < t < 1, \\ &\varphi(t) + 3\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t-\tau|}\varphi(\tau)\,d\tau = f_2(t), && t > 1. \end{aligned}$$

Простые вычисления дают $1 + N_0(\lambda) = \frac{\lambda^2 + 9}{\lambda^2 + 1}$, $1 + N_2(\lambda) = \frac{\lambda^2 + 16}{\lambda^2 + 4}$, $N_1(\lambda) = 0$. Отсюда

$$1 + A_0(\lambda) = [1 + N_0(\lambda)]^{-1} = 1 - \frac{8}{\lambda^2 + 9},$$

$$1 + A_2(\lambda) = [1 + N_2(\lambda)]^{-1} = 1 - \frac{12}{\lambda^2 + 4}, \quad A_1(\lambda) = 0.$$

Следовательно,

$$R\varphi = \begin{cases} \varphi - \dfrac{4}{3}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-3|t-\tau|}\varphi(\tau)\,d\tau, & t < 0, \\ \varphi, & 0 < t < 1, \\ \varphi - \dfrac{3}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t-\tau|}\varphi(\tau)\,d\tau, & t > 1. \end{cases}$$

Нулями функций $1+N_0(\lambda)$, $1+N_2(\lambda)$ являются числа:

$$\alpha_{10}^{+}=3i,\quad \alpha_{10}^{-}=-3i;\quad \alpha_{12}^{+}=4i,\quad \alpha_{12}^{-}=-4i.$$

Далее, если $t<0$, то

$$Rf=f_1-\frac{4}{3}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{-3|t-\tau|}f_1(\tau)\,d\tau+\int_{1}^{\infty} e^{-3|t-\tau|}f_2(\tau)\,d\tau\right]=e^{5t}+ae^{3t}.$$

Если $t>1$, то

$$Rf=f_2-\frac{3}{2}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{-4|t-\tau|}f_1(\tau)\,d\tau+\int_{1}^{\infty} e^{-4|t-\tau|}f_2(\tau)\,(d\tau)\right]=e^{-5t}+be^{-4t}.$$

Через a и b здесь обозначены числа, точные значения которых нам не важны. Согласно (8.11)

$$\varphi(t)=e^{5t}+Ae^{3t},\qquad t<0,$$
$$\varphi(t)=e^{-5t}+Be^{-4t},\quad t>1.$$

Подстановка в исходное уравнение приводит к соотношениям: $2A+5e^{-2}B=0$, $5A+2e^{-5}B=0$, из которых вытекает, что $A=B=0$. Следовательно, решением уравнения является функция

$$\varphi(t)=\begin{cases} e^{5t}, & t<0,\\ e^{-5t}, & t>1.\end{cases}$$

Попутно устанавливается, что однородное уравнение нетривиальных решений не имеет.

1.4. Уравнения, приводящиеся к виду (8.1). Отметим несколько типов уравнений, которые простыми подстановками приводятся к уравнению вида (8.1) (см. [42]).

а) Подстановкой $x=e^{-t}$, $y=e^{-\tau}$ уравнение

$$\varphi(x)-\int_0^A \frac{1}{y}k\left(\frac{x}{y}\right)\varphi(y)\,dy=f(x),\quad 0<x<A,$$

приводится к виду

$$\varphi_1(t)-\int_{-\ln A}^{\infty} k_1(t-\tau)\,\varphi_1(\tau)\,d\tau=f_1(t), \tag{8.12}$$

в котором $\varphi_1(t)=\varphi(e^{-t})$, $f_1(t)=f(e^{-t})$, $k_1(t)=k(e^{-t})$. При $A=\infty$ получается уравнение на всей оси; при $A=1$ — уравнение на полуоси. Уравнение с ядром $\frac{1}{x}k\left(\frac{x}{y}\right)$ той же подстановкой приводится к виду (8.12), где теперь $\varphi_1(t)=e^{-t}\varphi(e^{-t})$,

$$f_1(t)=e^{-t}\varphi(e^{-t}),\quad k_1(t)=k(e^{-t}).$$

b) Часто встречающееся в теории электричества парное уравнение вида

$$\int_0^\infty k_1(xy)\,\varphi(y)\,dy=f(x),\qquad 0\leqslant x<1,$$

$$\int_0^\infty y^\alpha k_2(xy)\,\varphi(y)\,dy=g(x),\qquad 1\leqslant x<\infty,$$

подстановками $x=e^{-t}$, $y=e^\tau$ приводится к виду

$$\int_{-\infty}^\infty q_2(t-\tau)\,\varphi_1(\tau)\,d\tau=g_1(t),\qquad -\infty<t<\infty,$$

$$\int_{-\infty}^\infty q_1(t-\tau)\,\varphi_1(\tau)\,d\tau=f_1(t),\qquad 0<t<\infty,$$

где $\varphi_1(\tau)=\varphi(e^\tau)$, $q_1(t)=e^{-t}k_1(e^{-t})$, $q_2(t)=e^{-(\alpha+1)t}k_2(e^{-t})$, $g_1(t)=e^{-(\alpha+1)t}g(e^{-t})$, $f_1(t)=e^{-t}(e^{-t})$.

c) Уравнение $\varphi(x)=f(x)+\int_0^\infty y^{-1-\alpha}(x+y)^\alpha\varphi(y)\,dy$, $0<x<\infty$, заменой $x=e^t$, $y=e^\tau$, $\varphi_1(t)=\varphi(e^t)\,e^{-\frac{\alpha t}{2}}$, $f_1(t)=f(e^t)\,e^{-\frac{\alpha t}{2}}$ приводится к уравнению

$$\varphi_1(t)=f_1(t)+\int_{-\infty}^\infty\left[2\operatorname{ch}\frac{t-\tau}{2}\right]^\alpha\varphi_1(t)\,dt.$$

d) Если $k(x)$ — однородная функция степени α, то тем же приемом, что в c), уравнение

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^\infty y^{-(\alpha+1)}k(x+y)\,\varphi(y)\,dy$$

приводится к виду

$$\varphi_1(t) = f_1(t) + \int_{-\infty}^{\infty} k\left[2\operatorname{ch}\frac{t-\tau}{2}\right]^a \varphi_1(t)\,dt$$

при прежних φ_1 и f_1.

Эти же преобразования годятся и для преобразования уравнения с ядром $x^{-\alpha}y^{-1}k(x+y)$, где $k(x)$ — однородная функция степени α.

1.5. Пространства функций. В дальнейшем под E^+ понимается любое из следующих пространств:

$L_p(0, +\infty)$ — пространство функций, суммируемых на $(0, \infty)$ в степени p;

$M(0, +\infty)$ — пространство функций, ограниченных (в существенном) на полуоси $(0, \infty)$;

$C(0, +\infty)$ — пространство функций, ограниченных и непрерывных в $(0, \infty)$;

$C_u(0, +\infty)$ — пространство функций, равномерно непрерывных на $(0, \infty)$;

$C_0(0, +\infty)$ — пространство непрерывных функций, стремящихся к нулю при $x \to +\infty$.

Через $E(E(a, b))$ обозначено любое из аналогичных пространств для всей оси $(-\infty, +\infty)$ (для промежутка $[a, b]$). Через E' обозначается пространство функций $f(x)$ таких, что для $x > 0$ $f(x) \in E^+$, а для $x < 0$ $f(-x) \in E^+$. Через $e^{hx}E\left(e^{hx}E^+, e^{hx}E'\right)$ обозначается пространство функций $f(x)$ таких, что $e^{-hx}f(x) \in E$ (соответственно E^+, E^-). Для всех пространств $E\left(E^+, E'\right)$, кроме L_p при $p > 1$, при суммируемых ядрах $k(x)$ интегралы

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x-t)\varphi(t)\,dt \left(\int_0^{\infty} k(x-t)\varphi(t)\,dt\right) \tag{8.13}$$

понимаются в обычном смысле (Лебега); для пространств L_p, $p > 1$, — в смысле

$$\underset{A\to+\infty}{\text{L.i.m.}} \int_{-A}^{A} \left(\underset{A\to+\infty}{\text{L.i.m.}} \int_0^{A}\right).$$

где L.i.m. — предел в смысле среднего p-й степени. Указанные только что интегральные операторы ограничены во всех пространствах $E(E^+, E')$ и их нормы не превосходят $\|k\|_L$. В пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ ($L_2(0, +\infty)$) эти операторы ограничены также при условии, что $k(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ и имеет ограниченное преобразование Фурье $K(\lambda)$. Норма оператора при этом равна $\sup|K(\lambda)|$. (О других условиях ограниченности операторов (8.13) см. [24], [45].)

В § 6 при описании свойств уравнений с ядрами различного экспоненциального роста при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ потребуются так называемые *пространства* $\{\alpha, \beta\}$ ([7], [42], [48]). По определению $f(x) \in \{\alpha, \beta\}$, если $e^{-\alpha x} f(x) \in L_2(0, +\infty)$, $e^{-\beta x} f(x) \in L_2(-\infty, 0)$.

Простейшие свойства этих пространств:

1. Если $\alpha \leqslant \alpha_1$, $\beta_1 \leqslant \beta$, то $\{\alpha, \beta\} \in \{\alpha_1, \beta_1\}$.

2. Если $f_k(x) \in \{\alpha_k, \beta_k\}$, то $\sum f_k(x) \in \{\max \alpha_k, \min \beta_k\}$.

3. $\{\alpha, \alpha\} \cap \{\beta, \beta\} = \{\min(\alpha, \beta), \max(\alpha, \beta)\}$.

4. Если $k(x) \in \{\alpha, \beta\}$, а $\varphi(x) \in \{\alpha_1, \beta_1\}$, то интеграл (8.13) имеет смысл лишь при условии, что $\alpha_1 \leqslant \beta$ и $\alpha \leqslant \beta_1$. При этом он принадлежит пространству $\{\max(\alpha_1, \alpha), \min(\beta_1, \beta)\}$.

5. Если $f(x) \in \{\alpha, \beta\}$, $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$, то для $f(x)$ определено преобразование Фурье

$$F(\zeta) = F_y f = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{i\zeta x}\, dx, \quad \operatorname{Im} \zeta = y.$$

Если $\alpha < \beta$, то $F(\zeta)$ голоморфна в полосе $\alpha < \operatorname{Im} \zeta < \beta$ и равномерно ограничен по y интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x + iy)|^2\, dx, \qquad \alpha \leqslant y \leqslant \beta.$$

Обратно, если функция $F(\zeta)$ удовлетворяет этим условиям, то она является преобразованием Фурье функции

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+iy}^{\infty+iy} e^{-i\zeta x} F(\zeta)\, d\zeta \in \{\alpha, \beta\}.$$

Класс таких функций $F(\zeta)$ обозначается $\{\{\alpha, \beta\}\}$.

Примеры пространств $\{\alpha, \beta\}$:

1. $\{0, 0\} = L_2(-\infty, \infty)$.
2. $\{\alpha, \alpha\} = e^{\alpha x} L_2(-\infty, \infty)$; если $f(x) \in \{\alpha, \alpha\}$, то $F(\lambda + i\alpha) \in L_2(-\infty, \infty)$.
3. $\{-\alpha, \alpha\} = e^{-\alpha|x|} L_2(-\infty, \infty)$.
4. $\{\alpha, +\infty\}$ ($\{-\infty, \alpha\}$) состоит из функций, равных нулю при $x < 0$ (при $x > 0$) и принадлежащих $e^{\alpha x} L(0, +\infty)$ при $x > 0$ ($e^{\alpha x} L_2(-\infty, 0)$ при $x < 0$). Преобразования Фурье функций из $\{\alpha, +\infty\}$ (из $\{-\infty, \alpha\}$) голоморфны в полуплоскости $\operatorname{Im} \zeta > \alpha$ ($\operatorname{Im} \zeta < \alpha$).

§ 2. Примеры

2.1. Основная задача теории излучения [41], [46]. Эта задача, состоящая в определении интенсивности излучения, сводится в случае изотропной плоско-параллельной рассеивающей среды к решению интегрального уравнения

$$B(\tau) = \frac{\lambda}{2} \int_0^{\tau_0} B(\tau') \operatorname{Ei}(|\tau - \tau'|)\, d\tau' + g(\tau), \qquad 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_0,$$

где $\operatorname{Ei} x = \int\limits_1^\infty \frac{e^{-xy}\, dy}{y}$, λ — параметр, характеризующий рассеивающую способность среды; $g(\tau)$ — известная функция, определяемая действием источников излучения; τ_0 — так называемая оптическая глубина среды; $B(\tau)$ — искомая функция, через которую легко выражается интенсивность излучения.

Если оптическая глубина бесконечна (так полагают при изучении рассеяния в звездных атмосферах), то получается уравнение Винера — Хопфа. Если источников излучения нет, то $g(\tau) \equiv 0$ и задача сводится к однородному уравнению. К аналогичному уравнению сводится задача о рассеянии нейтронов [26].

2.2. Задача о линейном сглаживании и предсказании [17], [23], [62]. Пусть сигнал на входе линейной стационарной системы равен сумме полезного сигнала $s(t)$ и помехи $n(t)$, которые предполагаются стационарными случайными функциями. Система преобразует входной сигнал в сигнал на выходе $x_{\text{вых}}(t)$, который представляется в виде

$$x_{\text{вых}}(t) = \int_0^\infty [s(t-\tau) + n(t-\tau)]\, w(\tau)\, d\tau,$$

где $w(\tau)$ — импульсная переходная функция, определяемая конструкцией системы. Требуется определить переходную функцию $w(\tau)$ так, чтобы величина $\varepsilon(t) = s(t+T) - x_{\text{вых}}(t)$ имела минимальное математическое ожидание (при $T = 0$ — чистое сглаживание, при $n(t) \equiv 0$ — чистое предсказание). Эта задача сводится к интегральному уравнению первого рода относительно неизвестной функции $w(\tau)$. Если вероятностные характеристики полезного сигнала и помехи известны для всего прошлого (от $-\infty$ до t), то получается уравнение Винера — Хопфа

$$\psi(t+T)=\int_0^\infty \varphi(t-\tau)\,w(\tau)\,d\tau, \qquad t>0.$$

Если же эти характеристики известны лишь для конечного промежутка времени $[t-T_0, t]$, то получается уравнение на конечном промежутке

$$\psi(t+T)=\int_0^{T_0} \varphi(t-\tau)\,w(\tau)\,d\tau, \qquad 0\leqslant t\leqslant T_0.$$

В этих уравнениях $\psi(t)$ и $\varphi(t)$ — известные функции, которые просто выражаются через корреляционные и взаимокорреляционные функции полезного сигнала и помехи.

2.3. Береговая рефракция электромагнитных волн [16]. Это задача о набегании электромагнитных волн с моря на сушу. Пусть берег — прямолинейный бесконечный. Направим ось Ox в глубь суши, ось Oy вдоль берега и допустим, что набегающая волна имеет вид $F^0(x)\,e^{isy}$, а искомое поле на поверхности суши имеет вид $F(x)\,e^{isy}$. Для искомой функции $F(x)$ получается уравнение

$$F(x)=2P^0(x)+\pi\alpha i\int_0^\infty H_0^{(1)}(m\,|x-t|)\,F(t)\,dt, \qquad x>0.$$

Здесь $H_0^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода, α и m — некоторые коэффициенты.

2.4. Задача теории наследственной упругости [29], [56]. Определение деформации $\varepsilon(t)$ по заданному напряжению $\sigma(t)$ для линейно напряженного тела сводится в теории наследственной упругости к уравнению

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma(t)}{E}+\chi\int_0^t k(t-\tau)\,\varepsilon(\tau)\,d\tau, \qquad t>0,$$

в котором E и χ — постоянные, характеризующие упругие свойства среды; $k(t-\tau)$ — ядро релаксации, характеризующее наследственные свойства среды; t — время, прошедшее от начала деформации.

2.5. Потенциал проводящего диска. Задача об определении потенциала $v(\rho, z)$ заряженного проводящего диска сводится к уравнениям:

$$\int_0^\infty f(u) J_0(\rho u)\, du = g(\rho), \qquad 0 < \rho < 1,$$

$$\int_0^\infty u f(u) J_0(\rho u)\, du = 0, \qquad \rho > 1$$

$$\left(\text{при этом } v(\rho, z) = \int_0^\infty f(u) J_0(\rho u)\, e^{-uz}\, du\right).$$

Подстановка $u = e^{-\tau}$, $\rho = e^t$ преобразует эти уравнения к виду

$$\int_{-\infty}^\infty f_1(\tau) J_0(e^{t-\tau})\, e^{t-\tau}\, d\tau = g_1(t), \qquad -\infty < t < 0,$$

$$\int_{-\infty}^\infty f_1(\tau) J_0(e^{t-\tau})\, e^{2(t-\tau)}\, d\tau = 0, \qquad 0 < t < \infty,$$

$f_1(t) = f(e^{-t})$, $g_1(t) = e^t g(e^t)$ ([40], стр. 423).

§ 3. Уравнения на полуоси с суммируемыми ядрами [22]

3.1. Условия разрешимости. При описании свойств уравнения

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^\infty k(x-t)\varphi(t)\, dt, \qquad 0 < x < \infty, \tag{8.14}$$

мы будем часто предполагать выполненными условия:

A. $k(x) \in L(-\infty, \infty)$.

B. $1 - K(\lambda) \neq 0$, $-\infty < \lambda < \infty$.

В этих условиях для уравнения (8.14) справедливо все сказанное в § 1 по поводу уравнения (8.1). Указанные там свойства здесь существенно дополняются.

Теорема 3.1. *В любом из пространств* E^+ (см. § 1) *уравнение* (8.14) *нормально разрешимо и имеет конечный индекс, определяемый формулой*

$$\chi = -\frac{1}{2\pi} \arg [1 - K(\lambda)] \Big|_{-\infty}^{\infty}.$$

Обратно, *если в каком-нибудь пространстве* E^+ *уравнение* (8.14) *нормально разрешимо и имеет конечный индекс и если при этом выполнено условие* A, *то и условие* B *необходимо должно быть выполнено.*

Замечание. В пространстве L_2 $(0, \infty)$ теорема 3.1 верна при следующих предположениях: $k(x) \in L_2(-\infty, \infty)$, функция $K(\lambda)$ непрерывна и $K(\pm\infty) = 0$ [9].

Теорема 3.2. *Число линейно независимых решений однородного уравнения*

$$\varphi(x) = \int_0^\infty k(x-t)\,\varphi(t)\,dt \tag{8.14$_1$}$$

равно χ, *если* $\chi > 0$, *и нулю, если* $\chi \leqslant 0$. *Эти решения одни и те же в любом из пространств* E^+, *причем эти решения*:

a) *суммируемы, абсолютно непрерывны и стремятся к нулю при* $x \to +\infty$;

b) *могут быть выбраны так, что*

$$\varphi_{k+1} = \frac{d\varphi_k}{dx}, \qquad \varphi_k(0) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, \chi - 2;$$

$$\frac{d\varphi_{\chi-1}}{dx} = \gamma(x), \qquad \varphi_{\chi-1}(0) \neq 0,$$

где функция $\gamma(x)$ *определена ниже соотношениями* (8.17), (8.18), (8.20).

О функциях, удовлетворяющих условиям a) и b), говоряг, что они образуют D-цепочку длины χ.

Из теорем 3.1 и 3.2 вытекают такие следствия:

Если $\chi = 0$, то уравнение (8.14) однозначно разрешимо в E^+ при любой правой части из E^+. Если $\chi > 0$, то уравнение (8.14) по-прежнему разрешимо при любой $f \in E^+$, но решение его не будет единственным. Наконец, если $\chi < 0$, то однородное уравнение, транспонированное с (8.14$_1$), имеет $|\chi|$ линейно независимых решений. Для разрешимости в E^+ неоднородного уравнения (8.14) необходимо и достаточно, чтобы его правая часть $f(x)$ удовлетворяла условиям:

$$\int_0^\infty f(x)\,\psi_j(x)\,dx = 0 \qquad (j = 0, 1, \ldots, |\chi| - 1), \tag{8.15}$$

где $\psi_j(x)$ — базис решений транспонированного однородного уравнения.

3.2. Факторизация. Все известные методы решения уравнения (8.14) имеют в своей основе так называемую *факторизацию* функции $[1-K(\lambda)]^{-1}$, т. е. представление этой функции в виде произведения функций, голоморфных в некоторых полуплоскостях. В случае суммируемых ядер имеет место следующее утверждение о факторизации.

Теорема 3.3. *Пусть $k(x) \in L(-\infty, \infty)$ и $1-K(\lambda) \neq 0$ для $-\infty < \lambda < \infty$. Если индекс $\chi \geqslant 0$, то имеет место единственная факторизация*

$$[1-K(\lambda)]^{-1} = \sigma_-(\lambda)\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\chi} \sigma_+^0(\lambda), \tag{8.16}$$

при которой функции $\sigma_-(\lambda)$, $\sigma_+^0(\lambda)$ голоморфны соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, непрерывны вплоть до границ своих полуплоскостей и не имеют в них нулей.

Для упрощения записи введем обозначение

$$\sigma_+(\lambda) = \left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\chi} \sigma_+^0(\lambda).$$

Для множителей $\sigma_\pm(\lambda)$ имеют место представления:

$$\sigma_+(\lambda) = 1 + \int_0^\infty \gamma(x)\, e^{i\lambda x}\, dx, \qquad \sigma_-(\lambda) = 1 + \int_0^\infty \gamma_\tau(x)\, e^{i\lambda x}\, dx,$$
$$\gamma(x),\quad \gamma_\tau(x) \in L(0, +\infty). \tag{8.17}$$

В предположениях теоремы 3.3 множители $\sigma_\pm(\lambda)$ выражаются через $K(\lambda)$ с помощью формул:

$$\ln \sigma_+(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln[1-K(\mu)]}{\mu-\lambda}\, d\mu, \qquad \operatorname{Im}\lambda > 0, \tag{8.18}$$

$$\ln \sigma_-(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln[1-K(\mu)]}{\mu-\lambda}\, d\mu, \qquad \operatorname{Im}\lambda < 0. \tag{8.18$_1$}$$

В обеих формулах выбраны ветви логарифма, исчезающие при $\lambda \to \infty$, и интегралы понимаются в смысле главного значения. В тех же предположениях функция $\ln[1-K(\lambda)]$ представима интегралом Фурье суммируемой функции:

$$\ln[1-K(\lambda)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} l(x)\,dx, \qquad l \in L(-\infty, \infty).$$

Через функцию $l(x)$ множители $\sigma_\pm$ выражаются по формулам:

$$\sigma_+(\lambda) = e^{\int_0^\infty l(x) e^{i\lambda x}\,dx}, \qquad \sigma_-(\lambda) = e^{\int_{-\infty}^0 l(x) e^{i\lambda x}\,dx}. \tag{8.19}$$

Функции $\gamma(x)$ и $\gamma_\tau(x)$ определяются формулами:

$$\begin{aligned} \gamma(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty+hi}^{\infty+hi} e^{-i\lambda x}[\sigma_+(\lambda)-1]\,d\lambda, \\ \gamma_\tau(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty-hi}^{\infty-hi} e^{-i\lambda x}[\sigma_-(\lambda)-1]\,d\lambda, \end{aligned} \tag{8.20}$$

применимыми в том случае, когда при некотором $h>0$ интегралы справа существуют хотя бы в смысле главного значения (например, это так, если $\sigma_\pm(\lambda) = 1 + \frac{c}{\lambda} + O\left(\frac{1}{|\lambda|^\alpha}\right)$, $\alpha > 1$).

В частном, но важном случае, когда функция $K(\lambda)$ рациональна, факторизация проводится элементарно.

Пусть, например,

$$k(x) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=0}^{r_j-1} a_{jk} x^k e^{-i\lambda_j x} \theta(x) + \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=0}^{q_j-1} b_{jk} x^k e^{-i\mu_j x} \theta(-x),$$

$$\operatorname{Im}\lambda_j < 0, \qquad \operatorname{Im}\mu_j > 0, \qquad \theta(x) = \begin{cases} 0, & x<0, \\ 1, & x>0. \end{cases}$$

Тогда

$$[1-K(\lambda)]^{-1} = \frac{\prod_{j=1}^{r} (\lambda-\lambda_j)^{r_j} \prod_{j=1}^{q} (\lambda-\mu_j)^{q_j}}{\prod_{j=1}^{p} (\lambda-\alpha_j)^{p_j} \prod_{j=1}^{s} (\lambda-\beta_j)^{s_j}}, \quad \operatorname{Im}\alpha_j < 0, \ \operatorname{Im}\beta_j > 0.$$

$$\sum s_j + \sum p_j = \sum r_j + \sum q_j.$$

Если $m_+ = \sum_{j=1}^{q} q_j$, $n_+ = \sum_{j=1}^{s} s_j$, то факторизующие **множители** имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \sigma_+(\lambda) &= \frac{\prod\limits_{j=1}^{q} (\lambda - \lambda_j)^{q_j} (\lambda - i)^{m_+ - n_+}}{\prod\limits_{j=1}^{p} (\lambda - \alpha_j)^{p_j}}, \\ \sigma_-(\lambda) &= \frac{\prod\limits_{j=1}^{r} (\lambda - \mu_j)^{r_j} (\lambda - i)^{n_+ - m_+}}{\prod\limits_{j=1}^{s} (\lambda - \beta_j)^{s_j}}, \end{aligned}\right\} \qquad (8.17_1)$$

функции $\gamma(x)$ и $\gamma_\tau(x)$ получаются разложением $\sigma_+(\lambda)$ и $\sigma_-(\lambda)$ на простейшие дроби. Если

$$\sigma_+(\lambda) = 1 + \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p_j} \frac{A_{jk}}{(\lambda - \alpha_j)^k}, \qquad \sigma_-(\lambda) = 1 + \sum_{j=1}^{s} \sum_{k=1}^{s_j} \frac{B_{jk}}{(\lambda - \beta_j)^k},$$

то

$$\left.\begin{aligned} \gamma(x) &= \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{p_j} \frac{i^k}{(k-1)!} A_{jk} x^{k-1} e^{-i\alpha_j x}, \\ \gamma_\tau(x) &= \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{s_j} \frac{(-i)^k}{(k-1)!} B_{jk} x^{k-1} e^{i\beta_j x}. \end{aligned}\right\} \qquad (8.20_1)$$

Другие примеры элементарно выполняемой факторизации даны в [22], [25], [27].

3.3. Решение неоднородного уравнения.

Теорема 3.4. *Пусть индекс* χ *уравнения* (8.14) *неотрицателен и пусть* $\gamma(x)$ *и* $\gamma_\tau(x)$ — *функции, определяющие факторизацию функции* $[1 - K(\lambda)]^{-1}$ (см. (8.17)—(8.20)). *Одно из решений уравнения* (8.14) (*единственное при* $\chi = 0$) *в любом из пространств* E^+ *дается формулой*

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^\infty \gamma(x, t) f(t)\, dt, \qquad (8.21)$$

в которой резольвентное ядро $\gamma(x, t)$ *определяется равенством*

$$\gamma(x, t) = \gamma(x-t) + \gamma_\tau(t-x) + \int\limits_0^{\min(x, t)} \gamma(x-r)\gamma_\tau(t-r)\,dr$$

$$(\gamma(t),\ \gamma_\tau(t) \equiv 0 \text{ для } t < 0). \tag{8.22}$$

Если ядро $k(x)$ четное, то $\chi = 0$, $\gamma(x) = \gamma_\tau(x)$ и

$$\gamma(x, t) = \gamma[\,|x-t|\,] + \int\limits_0^{\min(x, t)} \gamma(x-r)\gamma(t-r)\,dr. \tag{8.22$_1$}$$

Если ядро эрмитово, т. е. $k(-t) = \overline{k(t)}$, то $\chi = 0$, $\gamma_\tau(x) = \overline{\gamma(x)}$ и

$$\gamma(x, t) = \gamma(x-t) + \overline{\gamma(t-x)} + \int\limits_0^{\min(x, t)} \gamma(x-r)\overline{\gamma(t-r)}\,dr. \tag{8.22$_2$}$$

Теорема 3.5. *Пусть индекс* χ *уравнения* (8.14) *отрицателен и выполнены условия разрешимости* (8.15). *Тогда единственное решение уравнения* (8.14) *дается формулой*

$$\varphi(x) = f(x) + \int\limits_0^\infty \gamma_\tau(t, x) f(t)\,dt, \tag{8.21$_1$}$$

в которой $\gamma_\tau(t, x)$ — *резольвента транспонированного уравнения.*

Из предыдущих формул видно, что резольвента $\gamma(x, t)$ (или $\gamma_\tau(x, t)$) полностью определяется функциями $\gamma(x)$ и $\gamma_\tau(x)$, определяемыми по формулам (8.17)—(8.20).

Замечание. В пространстве $L(-\infty, \infty)$ преобразование Фурье решения неоднородного уравнения (8.14) может быть представлено формулой

$$\Phi(\lambda) = \sigma_+ p_+ \left[\sigma_- F(\lambda)\right], \tag{8.21$_2$}$$

где $F(\lambda)$ — преобразование Фурье свободного члена, а p_+ — оператор, соотносящий функции вида

$$\Omega(\lambda) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x}\omega(x)\,dx, \qquad \omega \in L,$$

функцию

$$p_+\Omega = \int_0^\infty e^{i\lambda x}\omega(x)\,dx.$$

Другими словами: если $\Omega = \Omega^+ - \Omega^-$, $\Omega^+(\Omega^-)$ голоморфная в верхней (нижней) полуплоскости функция, то $p_+\Omega = \Omega^+$ (см. примеры в § 5).

3.4. Решение однородного уравнения.

Теорема 3.6. *Пусть индекс уравнения* (8.14) *положителен. Тогда полную систему линейно независимых решений однородного уравнения* (8.14_1) *в любом из пространств* E^+ *образуют функции* $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., $g_\chi(x)$, *преобразования Фурье которых равны соответственно*

$$\begin{gathered} G_1(\lambda) = i\,\frac{\sigma_+(\lambda)}{\lambda - i}, \quad G_2(\lambda) = i^2\,\frac{\sigma_+(\lambda)}{(\lambda - i)^2}, \ \ldots, \\ G_\chi(\lambda) = i^k\,\frac{\sigma_+(\lambda)}{(\lambda - i)^\chi}. \end{gathered} \tag{8.23}$$

Базис решений $\varphi_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, \chi - 1$, описанный в теореме 3.3, получается из функций $g_k(x)$ по формулам

$$\varphi_s(x) = \sum_{k=0}^{s} C_s^k g_{\chi-k}, \qquad s = 0, 1, \ldots, \chi - 1.$$

Функции g_k и φ_k можно определить также из систем уравнений:

$$\frac{dg_1}{dx} = g_1(x) + \gamma(x); \quad \frac{dg_k}{dx} = g_k(x) + g_{k-1}(x);$$

$$g_k(0) = 0, \qquad k = 2, 3, \ldots, \chi, \quad g_1(0) = 1;$$

$$\frac{d\varphi_k}{dx} = \varphi_{k+1}(x); \quad \varphi_k(0) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, \chi - 2;$$

$$\frac{d\varphi_{\chi-1}}{dx} = \gamma(x), \quad \varphi_{\chi-1}, \quad (0) = 1.$$

Методы приближенного решения уравнения (8.14) излагаются, например, в работах [13], [14], [18], [21].

Уравнения (8.1) с ядрами, суммируемыми с весом, рассмотрены в работах [1], [7], [38], [39], [44], [47], [48], [50] (см. также §§ 6, 7).

§ 4. Парные уравнения с суммируемыми ядрами и транспонированные к ним [11]

4.1. Приведение парного уравнения к эквивалентному уравнению на полуоси. Парное уравнение

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x), \qquad x<0, \\ \varphi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} k_2(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x), \qquad x>0, \end{aligned}\right\} \tag{8.24}$$

здесь рассматривается в следующих предположениях:

A_1. $k_1(x)$, $k_2(x) \in L(-\infty, \infty)$.

B_1. $1 - K_j(\lambda) \neq 0$, $j = 1, 2$, $-\infty < \lambda < \infty$.

C_1. Правая часть и решение принадлежат одному из пространств типа E' (см. п. 1.5).

В этих условиях уравнение (8.24) сводится к эквивалентному уравнению на полуоси.

Если положить

$$g(x) = \varphi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t)\varphi(t)\,dt - f(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{8.25}$$

то:

a) функция $\varphi(x)$ однозначно определяется функцией $g(x)$ по формуле

$$\varphi(x) = f(x) + g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} q(x-t)\,[g(t) + f(t)]\,dt, \tag{8.26}$$

где $q(x) \in L(-\infty, \infty)$ и имеет преобразование Фурье, равное

$$Q(\lambda) = \frac{K_1(\lambda)}{1 - K_1(\lambda)}. \tag{8.27}$$

b) Функция $g(x)$ удовлетворяет уравнению на полуоси

$$g(x) - \int_0^{\infty} k_0(x-t)\,g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} k_0(x-t)\,f(t)\,dt, \tag{8.28}$$

$$x>0, \quad g(x)=0, \quad x<0,$$

в котором

$$k_0(x) \in L(-\infty, \infty) \quad \text{и} \quad K_0(\lambda) = \frac{K_2(\lambda) - K_1(\lambda)}{1 - K_1(\lambda)}. \tag{8.29}$$

Уравнения (8.24) и (8.28) эквивалентны в том смысле, что их решения взаимно однозначно соответствуют друг другу по формулам (8.25), (8.26). При этом если φ, $f \in E'$, то $g \in E^+$, и обратно, если $g \in E^+$, $f \in E'$, то $\varphi \in E'$.

4.2. Формула для индекса и свойства базиса решений однородного уравнения. Теоремы 3.1—3.2 остаются справедливыми и для уравнения (8.24), если заменить функцию $K(\lambda)$ функцией $\dfrac{K_2(\lambda) - K_1(\lambda)}{1 - K_1(\lambda)}$, а пространство E^+ — пространством E'.

Формула для индекса принимает вид

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \arg \frac{1 - K_1(\lambda)}{1 - K_2(\lambda)} \Bigg|_{-\infty}^{\infty}. \tag{8.30}$$

Несколько изменяются свойства базиса решений однородного уравнения: такие нетривиальные решения существуют, если $\chi > 0$.

Однородное уравнение имеет во всех пространствах E' одни и те же решения. Можно выделить базис решений φ_0, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\chi-1}$ таких, что:

a) функции φ_k ($k = 0, 1, \ldots, \chi - 2$) суммируемы, абсолютно непрерывны и стремятся к нулю при $x \to \pm\infty$;

b) функция $\varphi_{\chi-1}$ суммируема, стремится к нулю при $x \to \pm\infty$ и становится абсолютно непрерывной после вычитания из нее функции $\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0; \end{cases}$

c) $$\varphi_{k+1} = \frac{d\varphi_k}{dx} \qquad (k = 0, 1, \ldots, \chi - 1),$$

$$\frac{d}{dx}[\varphi_{\chi-1}(x) - \theta(x)] \in L(-\infty, \infty).$$

Этот базис получается из аналогичного базиса решений однородного уравнения (8.28) с помощью преобразования (8.26).

4.3. Уравнение, транспонированное к парному. Уравнение

$$\varphi(x)-\int_{-\infty}^{0} k_1(t-x)\varphi(t)\,dt-\int_{0}^{\infty} k_2(t-x)\varphi(t)\,dt=f(x), \quad (8.31)$$

$$-\infty < x < \infty,$$

в предположениях A_1, B_1, C_1 (см. начало параграфа) эквивалентно уравнению

$$\varphi(x)=f(x)+\int_{-\infty}^{\infty} q(t-x)f(t)\,dt+\int_{0}^{\infty} k_0(t-x)\varphi(t)\,dt, \quad (8.32)$$

$$-\infty < x < \infty,$$

в котором $q(x)$ и $k_0(x)$ имеют прежний смысл (см. выше).

В правую часть (8.32) входят лишь значения $\varphi(x)$ для $x > 0$. Решив это уравнение для $x > 0$, мы найдем из него же значения $\varphi(x)$ для $x < 0$. Таким образом, и решение транспонированного уравнения сводится к решению уравнения на полуоси.

Теорема 4.1. *Если выполнены условия* A_1, B_1, *то уравнение* (8.31) *нормально разрешимо в любом из пространств* E *и имеет конечный индекс*

$$\chi_{\tau}=\frac{1}{2\pi}\arg\frac{1-K_2(\lambda)}{1-K_1(\lambda)}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}. \quad (8.33)$$

Если в каком-нибудь из пространств E *уравнение* (8.31) *нормально разрешимо, имеет конечный индекс и если при этом выполнено условие* A_1, *то и условие* B_1 *необходимо должно быть выполнено.*

Теорема 4.2. *Во всех пространствах* E *однородное уравнение* (8.31) *имеет одни и те же решения. Число линейно независимых решений равно* χ_{τ}, *если* $\chi_{\tau} > 0$, *и нулю, если* $\chi_{\tau} \leqslant 0$. *Эти решения суммируемы, абсолютно непрерывны и исчезают на бесконечности. Их можно выбрать так, чтобы*

$$\psi_j(x)=\int_{-\infty}^{x}\psi_{j+1}(x)\,dx \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ \chi_{\tau}-1). \quad (8.34)$$

§ 5. Примеры

В этом параграфе рассмотрены некоторые примеры, иллюстрирующие общие построения предыдущих двух параграфов.

Пример 5.1. Пусть требуется решить уравнение

$$\varphi(x)+4\int_0^\infty e^{-|x-t|}\varphi(t)\,dt=e^{-x},\qquad 0<x<\infty. \tag{8.35}$$

В этом уравнении $K(\lambda)=\dfrac{8}{\lambda^2+1}$; $1+K(\lambda)=\dfrac{\lambda^2+9}{\lambda^2+1}$.

Поскольку символ $1+K(\lambda)$ рационален, то естественно воспользоваться более простыми формулами (8.17_1) и (8.20_1):

$$\sigma_+(\lambda)=\frac{\lambda+i}{\lambda+3i},\qquad \sigma_-(\lambda)=\frac{\lambda-i}{\lambda-3i}$$

и $\gamma(x)=-2e^{-3x}$, $\gamma_\tau(x)=-2e^{-3x}$ (ядро четное). По формуле (8.22_1)

$$\gamma(x,t)=-2e^{-3|x-t|}+4\int_0^{\min(x,t)} e^{-3(x-r)}e^{-3(t-r)}\,dr=$$
$$=-\frac{2}{3}e^{-3(x+t)}-\frac{4}{3}e^{-3|x-t|}.$$

По формуле (8.21)

$$\varphi(x)=e^{-x}-\frac{2}{3}\int_0^\infty\left[2e^{-3|x-t|}+e^{-3(x+t)}\right]e^{-t}\,dt=\frac{e^{-3x}}{2}.$$

Индекс уравнения χ равен разности между числом полюсов и числом нулей функции $1+K(\lambda)$ в верхней полуплоскости. В нашем случае $\chi=0$. Поэтому однородное уравнение не имеет решений, а неоднородное разрешимо всегда.

Данный пример можно решить еще проще, если воспользоваться формулой (8.21_1):

$$\Phi(\lambda)=\sigma_+(\lambda)\,P_+\,[\sigma_-(\lambda)\,F(\lambda)].$$

В рассматриваемом случае $F(\lambda)=\dfrac{i}{\lambda+i}$, $\sigma_-(\lambda)\,F(\lambda)=\dfrac{i}{2(\lambda+i)}+$ $+\dfrac{i}{2(\lambda-3i)}$. Следовательно, $P_+[\sigma_-F]=\dfrac{i}{2(\lambda+i)}$. Поэтому $\Phi(\lambda)=\dfrac{i}{2(\lambda+3i)}$ и $\varphi(x)=\dfrac{1}{2}e^{-3x}$.

Пример 5.2. Рассмотрим уравнение вида (8.14), в котором символ

$$1-K(\lambda)=e^{-\frac{1}{\lambda^2+\alpha^2}},\qquad \alpha>0. \tag{8.36}$$

Функции $\sigma_{\pm}(\lambda)$ найдем по формулам (8.18), (8.18$_1$)

$$\ln \sigma_{+}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{(\mu^2+\alpha^2)(\mu-\lambda)} = \frac{-1}{2\alpha i(\lambda+\alpha i)},$$

$$\ln \sigma_{-}(\lambda) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mu}{(\mu^2+\alpha^2)(\mu-\lambda)} = \frac{1}{2\alpha i(\lambda-\alpha i)}.$$

(Функции $\sigma_{\pm}(\lambda)$ можно проще найти из разложения

$$[1-K(\lambda)]^{-1} = \exp\left[-\frac{1}{2\alpha i(\lambda+\alpha i)}\right]\exp\left[\frac{1}{2\alpha i(\lambda-\alpha i)}\right].\Big)$$

Далее,

$$\sigma_{+}(\lambda) = 1 + \left[e^{\frac{i}{2\alpha(\lambda+\alpha i)}} - 1\right] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{(2\alpha)^k(\lambda+\alpha i)^k}.$$

Полученный ряд является преобразованием Фурье функции

$$\gamma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}e^{-\alpha x}}{(2\alpha)^k k!(k-1)!} = -i\sqrt{\frac{1}{2\alpha x}}\,e^{-\alpha x}J_1\left(i\sqrt{\frac{2x}{\alpha}}\right),$$

где J_1 — функция Бесселя.

Решение уравнения в любом пространстве E^+ дается формулами (8.21) и (8.22$_1$).

Предположим, что правая часть $f(x) \in L(0, \infty)$ и что ее преобразование Фурье $F(\lambda)$ имеет лишь конечное число простых полюсов $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ с вычетами $B_1, B_2, \ldots, B_s$. В этом случае функция $\sigma_{-}(\lambda)F(\lambda) - \sum_{k=1}^{s} \frac{B_k\sigma_{-}(\beta_k)}{\lambda-\beta_k}$ голоморфна в нижней полуплоскости, так что

$$P_{+}[\sigma_{-}(\lambda)F(\lambda)] = \sum_{k=1}^{s} \frac{B_k\sigma_{-}(\beta_k)}{\lambda-\beta_k}.$$

По формуле (8.21$_2$)

$$\Phi(\lambda) = \sigma_{+}(\lambda)\sum_{k=1}^{s} \frac{B_k\sigma_{-}(\beta_k)}{\lambda-\beta_k}$$

и

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{s}B_k\sigma_-(\beta_k)\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix\lambda}\frac{\sigma_+(\lambda)}{\lambda-\beta_k}\,d\lambda=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{s}B_k e^{\frac{1}{2\alpha i(\beta_k-\alpha i)}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ix\lambda}\frac{e^{-\frac{1}{2\alpha i(\lambda+\alpha i)}}}{\lambda-\beta_k}\,d\lambda=$$

$$=\sum_{k=1}^{s}B_k e^{\frac{1}{2\alpha i(\beta_k-\alpha i)}-i\beta_k x}\times$$

$$\times\left[1-i\int_0^x\sqrt{\frac{1}{2\alpha t}}\,J_1\left(i\sqrt{\frac{2t}{\alpha}}\right)e^{-(\alpha-i\beta_k)t}\,dt\right].\qquad(8.37)$$

Пример 5.3. Рассмотрим парное уравнение

$$\begin{aligned}\varphi(x)+\frac{3}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|x-t|}\varphi(t)\,dt&=e^{x},\qquad x<0,\\ \varphi(x)-\frac{5}{6}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-3|x-t|}\varphi(t)\,dt&=2e^{-x},\qquad x>0.\end{aligned}\qquad(8.38)$$

Согласно сказанному в предыдущем параграфе это уравнение эквивалентно уравнению Винера — Хопфа (8.28). В нашем случае

$$K_1(\lambda)=-\frac{3}{\lambda^2+1},\qquad K_2(\lambda)=\frac{5}{\lambda^2+9},$$

$$K_0(\lambda)=\frac{8}{\lambda^2+9},\quad 1-K_0(\lambda)=\frac{\lambda^2+1}{\lambda^2+9}.$$

Преобразование Фурье правой части уравнения, эквивалентного уравнению (8.28), равно

$$F_1(\lambda)=F(\lambda)K_0(\lambda)=\frac{8}{\lambda^2+9}\left[\frac{2i}{\lambda+i}-\frac{i}{\lambda-i}\right].$$

Факторизующие множители для функции $[1-K_0(\lambda)]^{-1}$ таковы: $\sigma_+(\lambda)=\frac{\lambda+3i}{\lambda+i}$, $\sigma_-(\lambda)=\frac{\lambda-3i}{\lambda-i}$ (см. пример 5.1). По формуле (8.21_2) преобразование Фурье решения уравнения (8.28) равно

$$G(\lambda)=\sigma_+P_+[\sigma_-F_1].$$

Так как $\sigma_- F_1 = -\frac{3}{2}\frac{i}{\lambda+3i}+\frac{4i}{\lambda+i}-\frac{5}{2}\frac{i}{\lambda-i}-\frac{2}{(\lambda-i)^2}$, то

$p_+[\sigma_- F_1] = -\frac{3}{2}\frac{i}{\lambda+3i}+\frac{4i}{\lambda+i}$ и $G(\lambda)=\frac{5}{2}\frac{i}{\lambda+i}-\frac{8}{(\lambda+i)^2}$.

Далее из (8.26) следует, что преобразование Фурье решения уравнения (8.38) выражается формулой (если $f \in L(-\infty, \infty)$)

$$\Phi(\lambda) = \frac{F(\lambda)+G(\lambda)}{1-K_1(\lambda)} = -\frac{69}{4}\frac{i}{\lambda+2i}+\frac{25}{4}\frac{i}{\lambda-2i}+\frac{16i}{3(\lambda+i)}.$$

Следовательно,

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\frac{69}{4}e^{-2x}+\frac{16}{3}e^{-x}, & x>0, \\ -\frac{25}{4}e^{2x}, & x<0. \end{cases}$$

Индекс уравнения (8.38) равен нулю, так как его ядра четные. Найденное решение единственно.

Пример 5.4. Найти решения однородного уравнения

$$\varphi(x) - \int_0^\infty k(x-t)\varphi(t)\,dt = 0,$$

где

$$k(x) = \begin{cases} \frac{48}{5}e^{-2x}-\frac{50}{3}e^{-3x}, & x>0. \\ \frac{1}{15}e^{3x}, & x<0. \end{cases}$$

Символ уравнения равен

$$1-K(\lambda) = \frac{(\lambda+i)(\lambda+2i)^2}{(\lambda-2i)(\lambda^2+9)}.$$

Следовательно, индекс уравнения равен 2 (разности чисел полюсов и нулей символа в верхней полуплоскости). Факторизующие множители (см. 8.17_1) равны соответственно

$$\sigma_+(\lambda) = \frac{(\lambda-i)^2(\lambda+3i)}{(\lambda+2i)^2(\lambda+i)}, \quad \sigma_-(\lambda) = \frac{(\lambda-2i)(\lambda-3i)}{(\lambda-i)^2}.$$

Согласно (8.23) преобразованиями Фурье решений уравнения являются функции:

$$G_1(\lambda) = i\frac{\sigma_+(\lambda)}{\lambda-i} = i\frac{(\lambda-i)(\lambda+3i)}{(\lambda+2i)^2(\lambda+i)},$$

$$G_2(\lambda) = i^2\frac{\sigma_+(\lambda)}{(\lambda-i)^2} = -\frac{\lambda+3i}{(\lambda+2i)^2(\lambda+i)}.$$

Обращая преобразование Фурье, получим

$$g_1(x) = -4e^{-x} + 5e^{-2x} + 3xe^{-2x},$$
$$g_2(x) = 2e^{-x} - 2e^{-2x} - xe^{-2x}.$$

Решениями, образующими D-цепочку, являются функции:

$$\varphi_0(x) = g_2(x),$$
$$\varphi_1(x) = g_2(x) + g_1(x) = -2e^{-x} + 3e^{-2x} + 2xe^{-2x}.$$

§ 6. Парные уравнения с ядрами экспоненциального роста [8], [48]

6.1. Сведение к краевой задаче. Относительно ядер уравнения

$$\begin{aligned} \varphi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x), \qquad x < 0, \\ \varphi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} k_2(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x), \qquad x > 0, \end{aligned} \tag{8.39}$$

в этом пункте предполагается, что:

A_2. $k_1(x) \in \{\alpha_1, \beta_1\}$, $k_2(x) \in \{\alpha_2, \beta_2\}$ *).

B_2. Их преобразования Фурье $F_{\alpha_i}k_i$, $F_{\beta_i}k_i$ ограничены, удовлетворяют условию Гёльдера и исчезают на бесконечности.

Решение $\varphi(x)$ разыскивается в классе $\{\min(\beta_1, \beta_2), \max(\alpha_1, \alpha_2)\}$ — это максимально широкий класс, в котором имеют смысл интегралы в (8.39).

Свободный член при этом необходимо принадлежит классу

$$\{\max(\alpha_2, \min(\beta_1, \beta_2)), \quad \min(\beta_1, \max(\alpha_1, \alpha_2))\}.$$

Например, если $\alpha_i = \beta_i$, то $f(x)$, $\varphi(x) \in \{0, 0\} = L_2(-\infty, \infty)$; если $\alpha_i = \beta_i = \alpha$, то $f(x)$, $\varphi(x) \in \{\alpha, \alpha\} = e^{\alpha x}L_2$; если $-\alpha_i = \beta_i = h$, то $f(x)$, $\varphi(x) \in e^{h|x|}L_2$.

Уравнение Винера — Хопфа (8.14) получается как частный случай уравнения (8.39), когда $f(x) = 0$ для $x < 0$ и $k_1(x) \equiv 0$. В этом случае $k_1(x) \in \{-\infty, \infty\}$. Решение $\varphi(x)$ разыскивается в пространстве $\{\beta_2, +\infty\}$, а свободный член $f(x) \in \{\max(\alpha_2, \beta_2), \infty\}$.

---

*) О пространствах $\{\alpha, \beta\}$ и $\{\{\alpha, \beta\}\}$ см. п. 1.5.

Наиболее разработанный метод решения уравнения (8.39) в указанной постановке заключается в сведении его к эквивалентной граничной задаче Римана теории аналитических функций ([26], [27], [28]). В зависимости от соотношений между числами α_i, β_i возникают различные граничные задачи (на одной или нескольких прямых линиях). В некоторых случаях эти задачи, а вместе с ними и уравнение (8.39), решаются в замкнутой форме. Здесь будут рассмотрены два случая с целью демонстрации техники сведения уравнения к граничной задаче. Эта техника схематически состоит из двух этапов. Первый из них заключается в подготовке уравнения к применению преобразования Фурье.

С этой целью выгодно преобразовать уравнение (8.39) так, чтобы каждое из входящих в него равенств выполнялось на всей оси. Положим

$$\psi_+(x)=\begin{cases}\varphi(x)-\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}k_1(x-t)\varphi(t)\,dt+f_-(x), & \text{если } x>0,\\ 0, & \text{если } x<0;\end{cases}$$

$$\psi_-(x)=\begin{cases}\varphi(x)-\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}k_2(x-t)\varphi(t)\,dt-f_+(x), & \text{если } x<0,\\ 0, & \text{если } x>0;\end{cases}$$

$$f_+(x)=\begin{cases}f(x), & x>0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\qquad f_-(x)=\begin{cases}-f(x), & x<0,\\ 0, & x>0.\end{cases}$$

С помощью функций $\psi_\pm(x)$ уравнение (8.39) перепишется в виде

$$\begin{gathered}\varphi(x)-\int_{-\infty}^{\infty}k_1(x-t)\varphi(t)\,dt+f_-(x)=\psi_+(x),\\ \varphi(x)-\int_{-\infty}^{\infty}k_2(x-t)\varphi(t)\,dt-f_+(x)=\psi_-(x)\\ (-\infty<x<\infty).\end{gathered}\tag{8.40}$$

Функции $\psi_{\pm}(x)$ неизвестны (для $x>0$ и $x<0$ соответственно). О них лишь известно, что

$$\psi_-(x)\in\{-\infty,\ \min(\beta_2,\ \max(\alpha_1,\ \alpha_2))\},$$
$$\psi_+(x)\in\{\max(\alpha_1,\ \min(\beta_1,\ \beta_2)),\ \infty\}.$$

(Для уравнения Винера — Хопфа $\psi_+(x)\equiv 0$, $\psi_-(x)\in\{-\infty,\ \min(\beta_2,\ \alpha_2)\}$.)

Дальнейшая обработка существенно зависит от соотношений между числами α_i, β_i.

6.2. Случай 1. $\max(\alpha_1,\ \alpha_2)=\min(\beta_1,\ \beta_2)=\alpha$. При этом предположении все члены уравнения (8.40) принадлежат одному и тому же пространству $\{\alpha,\ \alpha\}$. Точнее, $\varphi(x)\in\{\alpha,\ \alpha\}$; f_-, $\psi_-\in\{-\infty,\ \alpha\}\subset\{\alpha,\ \alpha\}$; $f_+\psi_+\in\{\alpha,\ +\infty\}\subset\{\alpha,\ \alpha\}$.

Теперь можно перейти ко второму этапу — применению преобразования Фурье к соотношениям (8.40). В результате преобразования получим

$$\begin{aligned}&[1-K_1(\zeta)]\,\Phi(\zeta)+F_-(\zeta)=\Psi_+(\zeta),\\&[1-K_2(\zeta)]\,\Phi(\zeta)-F_+(\zeta)=\Psi_-(\zeta).\end{aligned}\tag{8.41}$$

(Если $k_i\in L_2(-\infty,\ \infty)$, то $\zeta=\lambda$ и получается задача на вещественной оси *).) Для уравнения Винера — Хопфа получим

$$[1-K(\zeta)]\,\Phi_+(\zeta)-F_+(\zeta)=\Psi_-(\zeta).\tag{8.41$_1$}$$

Исключая $\Phi(\zeta)$ из (8.41), получаем уравнение для двух неизвестных функций $\Psi_{\pm}(\zeta)$

$$\Psi_+(\zeta)=\frac{1-K_1(\zeta)}{1-K_2(\zeta)}\,\Psi_-(\zeta)+\\+\frac{[1-K_1(\zeta)]\,F_+(\zeta)-[1-K_2(\zeta)]\,F_-(\zeta)}{1-K_2(\zeta)}.\tag{8.42}$$

Получается следующая задача: найти функции $\Psi_+(\zeta)\in\{\{\alpha,\ \infty\}\}$, $\Psi_-(\zeta)\in\{\{-\infty,\ \alpha\}\}$ так, чтобы выполнялось равенств (8.42) и чтобы $\dfrac{\Psi_+(\zeta)-F_-(\zeta)}{1-K_1(\zeta)}=\Phi(\zeta)\in\{\{\alpha,\ \alpha\}\}$. Заметим, что последнее условие выполняется автоматически, если $1-K_1(\zeta)\neq 0$, $\zeta=\lambda+i\alpha$.

---

*) Этот случай был изучен в работе [34], в которой впервые было показано, что уравнение (8.40) сводится к краевой задаче на вещественной оси.

Полученную задачу более подробно можно сформулировать таким образом: требуется найти кусочно голоморфную функцию $\Psi(\zeta)$ с линией скачков $\zeta=\lambda+i\alpha$, $-\infty<\lambda<\infty$, так, чтобы удовлетворялось уравнение (8.42) и чтобы:

1. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x+iy)|^2 dx \leqslant C = \text{const}$ для всех y.

2. Функция $\left|\frac{\Psi_+(\zeta)-F_-(\zeta)}{1-K_1(\zeta)}\right|^2$ была суммируема вдоль линии $\zeta=\lambda+i\alpha$, $-\infty<\lambda<\infty$.

Решение этой задачи удается получить в замкнутом виде. Если $\Psi_+(x)$ — ее решение, то решение $\varphi(x)$ уравнения (8.39) определяется формулой

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\zeta x}\frac{\Psi_+(\zeta)-F_-(\zeta)}{1-K_1(\zeta)}\,d\zeta. \tag{8.43}$$

Для уравнения Винера — Хопфа

$$\varphi(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-i\zeta x}\frac{\Psi_-(\zeta)+F_+(\zeta)}{1-K(\zeta)}\,d\zeta. \tag{8.43$_1$}$$

Окончательный результат дает

Теорема 6.1. *Если выполнены условия* A_2 *и* B_2 (*см. начало этого параграфа*) *и, кроме того, функции* $1-K_i(\zeta)$, $i=1, 2$, *не обращаются в нуль на прямой* $\zeta=\lambda+\alpha i$, $-\infty<\lambda<\infty$, *то при условии, что*

$$\chi=\frac{1}{2\pi}\arg\frac{1-K_1(\zeta)}{1-K_2(\zeta)}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}\geqslant 0, \tag{8.44}$$

все решения уравнения (8.39) *даются формулами* ([6], [7]):

$$\Psi_+(\zeta)=X^+(\zeta)\,[\Omega^+(\zeta)]+\frac{P_{\chi-1}(\zeta)}{[\zeta-(\alpha-1)i]^{\chi}}, \tag{8.45}$$

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty+\alpha i}^{\infty+\alpha i}\ln\left[\left(\frac{\tau-(\alpha+1)i}{\tau-(\alpha-1)i}\right)^{-\chi}G(\tau)\right]\frac{d\tau}{\tau-z}, \tag{8.46}$$

$$\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty+\alpha i}^{\infty+\alpha i}\frac{g(\tau)\,d\tau}{X^+(\tau)(\tau-z)};\quad X^+(\zeta)=e^{\Gamma^+(\zeta)}, \tag{8.47}$$

где Γ^+, Ω^+ — *предельные значения функций* $F^+(z)$ *и* $\Omega^+(z)$ *при* $z \to \zeta + i0$, $\zeta = \lambda + i\alpha$; $G(\tau)$ и $g(\tau)$ — *коэффициент и свободный член задачи* (8.42); $P_{\chi-1}(\zeta)$ — *произвольный многочлен степени не выше* $\chi - 1$ *при* $\chi > 0$ *и нуль при* $\chi = 0$. *Если* $\chi < 0$, *то для разрешимости уравнения* (8.39) *необходимо и достаточно выполнение условий*

$$\int\limits_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha} \frac{g(\tau)\,d\tau}{X^+(\tau)\,[\tau-(\alpha-1)\,i]^k} = 0 \qquad (k = 0,\ 1,\ \ldots,\ |\chi|-1). \tag{8.48}$$

При выполнении этих условий решение единственно и дается приведенными выше формулами с $P_{\chi-1} \equiv 0$.

6.3. Случай 2. $\alpha = \max(\alpha_1, \alpha_2) < \min(\beta_1, \beta_2) = \beta$ *). Этот случай значительно сложнее предыдущего. Теперь $\varphi \in \{\beta, \alpha\}$; f_+, $\psi_+ \in \{\beta, \infty\}$; f_-, $\psi_- \in \{-\infty, \alpha\}$.

Представив функцию φ в виде $\varphi = \varphi_+ - \varphi_-$ (см. стр. 299), перепишем уравнение (8.40) в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\varphi_+(x) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t)\,\varphi_+(t) - \psi_+(x)\right] - \\
&\quad - \left[\varphi_-(x) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t)\,\varphi_-(t)\,dt - f_-(x)\right] = 0, \\
&\left[\varphi_+(x) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} k_2(x-t)\,\varphi_+(t) - f_+(x)\right] - \\
&\quad - \left[\varphi_-(x) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} k_2(x-t)\,\varphi_-(t)\,dt - \psi_-(x)\right] = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{8.49}$$

В каждом из этих соотношений группа членов с «+» функциями (с«—» функциями) принадлежит пространству $\{\beta, \beta\}$ (пространству $\{\alpha, \alpha\}$).

Обозначим эти группы для первого из уравнений через $\omega_+(x)$ и $\omega_-(x)$. Тогда $\omega^+(x) - \omega^-(x) = 0$, $-\infty < x < \infty$.

---

*) Однородные уравнения Винера — Хопфа в пространствах $e^{hx}E^+$ при близких предположениях относительно ядер подробно исследованы в работе [22].

Из этого соотношения следует (см. 1.5), что $\omega^+(x), \omega^-(x) \in \in \{\alpha, \beta\}$.

Пусть $F_y\omega_+ = \Omega_1(\lambda + iy)$, $\alpha \leqslant y \leqslant \beta$, $-\infty < \lambda < \infty$ — преобразование Фурье функции ω_+. Тогда $\Omega_1(\zeta) \in \{\{\alpha, \beta\}\}$ (см. § 1).

При этом $F_\beta\omega_+ = \Omega_1(\lambda + i\beta)$, а $F_\alpha\omega_- = \Omega_1(\lambda + i\alpha)$. В подробной записи

$$\left.\begin{aligned} &[1 - K_1(\zeta)]\,\Phi_+(\zeta) - \Psi_+(\zeta) = \Omega_1(\zeta), \quad \zeta = \lambda + i\beta; \\ &[1 - K_1(\zeta)]\,\Phi_-(\zeta) - F_-(\zeta) = \Omega_1(\zeta), \quad \zeta = \lambda + i\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{8.50}$$

Те же рассуждения, примененные ко второму уравнению, дают

$$\left.\begin{aligned} &[1 - K_2(\zeta)]\,\Phi_+(\zeta) - F_+(\zeta) = \Omega_2(\zeta), \quad \zeta = \lambda + i\beta; \\ &[1 - K_2(\zeta)]\,\Phi_-(\zeta) - \Psi_-(\zeta) = \Omega_2(\zeta), \quad \zeta = \lambda + i\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{8.50$_1$}$$

Уравнение (8.40), таким образом, свелось к задаче: найти функции Φ_+, $\Psi_+ \in \{\{\beta, \infty\}\}$,

$$\Phi_-, \ \Psi_- \in \{\{-\infty, \alpha\}\}, \quad \Omega_1, \ \Omega_2 \in \{\{\alpha, \beta\}\},$$

удовлетворяющие соотношениям (8.50) — (8.50$_1$). Эта задача сводится к двум последовательно решаемым задачам Римана и может быть решена в замкнутом виде (см. [48]). Окончательный результат исследования дает

Теорема 6.2. *Если выполнены условия* A_2, B_2 *и функции*

$$1 - K_1(\lambda + i\alpha), \ 1 - K_2(\lambda + i\beta) \qquad (-\infty < \lambda < \infty),$$

нигде не обращаются в нуль, то однородное уравнение имеет в пространстве $\{\beta, \alpha\}$ *точно* $\max(0, \nu, \chi)$ *линейно независимых решений, где*

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \arg \frac{1 - K_1(\lambda + i\alpha)}{1 - K_2(\lambda + i\beta)} \Bigg|_{-\infty}^{\infty},$$

а ν — *число общих нулей функций* $1 - K_i(\zeta)$, $i = 1, 2$, *в полосе* $\alpha < \operatorname{Im}\zeta < \beta$. *Если* $\chi - \nu \geqslant 0$, *то неоднородное уравнение разрешимо для любой правой части* $f(x) \in \{\beta, \alpha\}$; *если же* $\chi - \nu < 0$, *то для разрешимости неоднородного уравнения правая часть должна удовлетворять* $|\chi - \nu|$ *необходимым и достаточным условиям разрешимости.*

Через функции $\Phi_{\pm}(\zeta)$ *решение* $\varphi(x)$ *выражается формулой*

$$\varphi=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty+i\beta}^{\infty+i\beta}\Phi_+(\zeta)e^{-i\zeta x}d\zeta-\int_{-\infty+i\alpha}^{\infty+i\alpha}\Phi_-(\zeta)e^{-i\zeta x}d\zeta\right].$$

Если $\max(\alpha_1, \alpha_2)>\min(\beta_1, \beta_2)$, то уравнение (8.39) приводится к краевым задачам, решение которых не удалось, в общем случае, представить в замкнутой форме (за исключением случая $\alpha_2\leqslant\beta_2<\alpha_1\leqslant\beta_1$) (см. [7], [48]).

Уравнение

$$\varphi(x)-\int_{-\infty}^{0}k_1(x-t)\varphi(t)\,dt-\int_{0}^{\infty}k_2(x-t)\varphi(t)\,dt=f(t),$$
$$-\infty<x<\infty,$$

теми же приемами приводится к краевым задачам. Если $k_1(x)$, $k_2(x)$ удовлетворяют прежним условиям, то решение $\varphi(x)$ следует искать в классе $\{\beta_2, \alpha_1\}$, а свободный член брать из класса $\{\max(\beta_2, \alpha_1, \alpha_2), \min(\alpha_2. \beta_1, \beta_2)\}$.

Например, пусть $\alpha_2\leqslant\beta_2=\alpha_1\leqslant\beta_1$. Тогда

$$\varphi(x)\in\{\beta_2, \beta_2\},\quad f(x)\in\{\beta_2, \alpha_2\}.$$

Запишем уравнение в виде

$$\left[\varphi_+(x)-\int_{-\infty}^{\infty}k_2(x-t)\varphi_+(t)\,dt\right]-$$
$$-\left[\varphi_-(x)-\int_{-\infty}^{\infty}k_1(x-t)\varphi_-(t)\,dt\right]=f(x).$$

Все слагаемые в нем принадлежат классу $\{\beta_2, \beta_2\}$ (см. § 1).

Применяя преобразование Фурье F_{β_2}, получим задачу: найти функции $\Phi_+(\zeta)\in\{\{\beta_2, +\infty\}\}$, $\Phi_-(\zeta)\in\{\{-\infty, \beta_2\}\}$, если

$$[1-K_2(\zeta)]\,\Phi_+(\zeta)-[1-K_1(\zeta)]\,\Phi_-(\zeta)=F(\zeta),$$
$$\zeta=\lambda+i\beta_2,\quad -\infty<\lambda<\infty.$$

Эта задача рассматривалась выше (см. случай I для парного уравнения). Решение уравнения представляется формулой (8.49) с заменой α на β_2. По поводу остальных возможных случаев см. [7], [46].

§ 7. Метод Винера — Хопфа [3], [44] *)

7.1. Описание метода. Указанный метод был исторически первым методом решения уравнения (8.14). Изложенные выше более новые методы решения этого уравнения обладают некоторыми преимуществами по сравнению с методом Винера — Хопфа: они позволяют рассматривать уравнение (8.14) в более широких классах функций и приводят к более простым задачам теории аналитических функций. Несмотря на это, изложение метода Винера — Хопфа целесообразно, потому что, во-первых, он может быть применен к решению ряда задач для дифференциальных уравнений в частных производных [27], [49] и, во-вторых, этот метод довольно широко используется при изучении физических задач (см. [25], [26]).

Метод Винера — Хопфа состоит в том, что интегральное уравнение сводится к следующей задаче: найти функции $\Phi_+(z)$ и $\Phi_-(z)$, голоморфные в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > \alpha$ и $\operatorname{Im} z < \beta$, $\alpha < \beta$, соответственно, если в общей полосе голоморфности $\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$ они связаны соотношением

$$A(z)\Phi_+(z) + B(z)\Phi_-(z) + C(z) = 0 \tag{8.51}$$

и если известно поведение искомых функций на бесконечности. $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$ — известные функции, голоморфные в полосе $\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$. Схема решения этой задачи: если функция $\frac{A(z)}{B(z)}$ имеет в указанной полосе конечное число нулей, то при некоторых дополнительных условиях ее можно представить в виде

$$\frac{A(z)}{B(z)} = \frac{X_+(z)}{X_-(z)} \prod_{j=1}^{k} (z - \alpha_j), \tag{8.52}$$

где α_j — все нули этой функции в полосе $\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$; X_+ и X_- — функции, голоморфные в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > \alpha$, $\operatorname{Im} z < \beta$ и не имеющие нулей в этих полуплоскостях. Подстановка в (8.51) дает

$$X_+(z) \prod_{j=1}^{k} (z - \alpha_j)\Phi_+(z) + X_-(z)\Phi_-(z) + \frac{C(z)X_-(z)}{B(z)} = 0. \tag{8.53}$$

*) Изложение метода имеется в [25], [27], [40], [42].

В определенных условиях (см. [27], [44]) свободный член можно представить в виде разности $\Omega_+(z) - \Omega_-(z)$ функций, голоморфных в прежних полуплоскостях. Тогда

$$X_+(z)\prod_{j=1}^{k}(z-\alpha_j)\Phi_+(z)+\Omega_+(z)=-X_-(z)\Phi_-(z)+\Omega_-(z).$$

Левая и правая части этого равенства голоморфны соответственно при $\operatorname{Im} z > \alpha$ и $\operatorname{Im} z < \beta$. Если из условий задачи вытекает, что обе части имеют степенной рост на бесконечности, например, порядков n и m, то по теореме Лиувилля они являются многочленами степени не выше $\chi = [\min(n, m)]$. Решение задачи дается формулами:

$$\Phi_+(z) = X_+^{-1}(z)\frac{P(z)-\Omega_+(z)}{\prod_{j=1}^{k}(z-\alpha_j)},$$

$$\Phi_-(z) = X_-^{-1}(z)[-P(z)+\Omega_-(z)].$$

Здесь $P(z)$ — произвольный многочлен степени χ.

Отметим теперь условия, при которых имеют место представление (8.52) и представление свободного члена уравнения (8.53) в виде разности функций, голоморфных в указанных выше полуплоскостях:

a) Свободный член

$$F(z) = \frac{C(z)X_-(z)}{B(z)}$$

уравнения (8.53) представим в виде разности двух функций, голоморфных в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > \alpha$ и $\operatorname{Im} z < \beta$ соответственно, если функция $F(z)$ непрерывна в полосе $\alpha \leqslant \operatorname{Im} \leqslant \beta$, голоморфна внутри этой полосы и если при $\operatorname{Re} z \to 0$ $F(z) = O\left(|z|^{-\sigma}\right)$, $\sigma > 0$.

b) Разложение (8.52) имеет место, если функция

$$F(z) = \ln\frac{A(z)}{B(z)\prod_{j=1}^{k}(z-\alpha_j)}$$

удовлетворяет условиям пункта a).

Другие условия имеются в [3], [22], [42]. Примеры разложений приведены в [22], [25], [27], [42]. В [27] имеется обширная библиография по методу Винера — Хопфа.

7.2. Сведение уравнения (8.14) к краевой задаче. Пусть ядро $k(x)$ и свободный член $f(x)$ этого уравнения таковы, что:

a) $k(x) \in e^{-h|x|}L_2(-\infty, \infty)$ (или $k(x) \in e^{-h|x|}L(-\infty, \infty)$);

b) $f(x) \in e^{\mu x}L_2(0, \infty)$, где $\mu < h$.

Если в этих условиях разыскивается решение уравнения $\varphi(x) \in e^{\mu x}L_2(0, \infty)$, то уравнение (8.14) эквивалентно задаче рассмотренного в п. 7.1 типа

$$[1 - K(z)]\,\Phi_+(z) - \Psi_-(z) = F_+(z), \quad \mu < \operatorname{Im} z < h, \tag{8.54}$$

с дополнительным условием $|\Phi_+(z)| \to 0$ при $|z| \to \infty$. $K(z)$, $\Phi_+(z)$, $F_+(z)$, — как всегда, преобразования Фурье ядра, решения и свободного члена уравнения (8.14).

7.3. Пример. Найти решение уравнения

$$\varphi(x) - \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-|x-t|}\varphi(t)\,dt = Ae^{\alpha x}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Так как $e^{\alpha x} \in e^{\mu x}L_2(0, +\infty)$ для любого $\mu > \alpha$ и так как $e^{-|x|} \in e^{-h|x|}L_2(-\infty, \infty)$ при любом $h < 1$, то в качестве h можно взять любое число, удовлетворяющее неравенству $\alpha < h < 1$. Условие (8.54) имеет здесь вид

$$\frac{z^2}{1+z^2}\Phi_+(z) - \Psi_-(z) = \frac{Ai}{z-\alpha i}, \quad 0 < \alpha < \operatorname{Im} z < h < 1.$$

В данном случае

$$X_+(z) = \frac{z^2}{z+i}, \quad X_-(z) = z - i.$$

Функция $C(z)\,X_-(z) = \dfrac{A(z-i)}{z-\alpha i} = Ai\left[1 + \dfrac{i(\alpha-1)}{z-\alpha i}\right]$. Отсюда $\dfrac{z^2}{z+i}\Phi_+(z) + \dfrac{A(\alpha-i)}{z-\alpha i} = (z-i)\,\Psi_-(z) + Ai$. Так как $\Phi_+(z) \to 0$ при $|z| \to \infty$, то левая часть растет на бесконечности медленнее, чем z. Согласно ранее сказанному отсюда следует, что левая часть постоянна для всех z. Следовательно,

$$\Phi_+(z) = \frac{A(\alpha-1)(z+i)}{z^2(z-\alpha i)} + C\frac{z+i}{z^2}, \quad C = \text{const}.$$

Обращая преобразование Фурье, получим

$$\varphi(x) = C(1+x) + A(\alpha-1)\left[\frac{1}{\alpha^2}(\alpha+1)e^{\alpha x} - \frac{1}{\alpha^2}\right].$$

§ 8. Уравнения с вырождающимся символом [7]

8.1. Задача Римана. В предыдущих параграфах (§§ 1, 3, 4, 6) предполагалось, что выполнены условия типа B, обеспечивающие нормальную разрешимость соответствующих уравнений и конечность их индекса. Это условие состояло в том, что символ уравнения нигде не обращался в нуль. Ниже излагаются некоторые факты, имеющие место при нарушении условия B. Теория для этого случая в настоящее время еще далека от завершения. Изучены лишь простейшие случаи нарушения условия B. Основным средством исследования здесь служит теория краевой задачи Римана в так называемом «исключительном» случае (по терминологии Ф. Д. Гахова), т. е. в случае, когда ее коэффициент имеет нули и полюсы.

Ниже излагаются необходимые для дальнейшего положения этой теории. Постановка задачи такова:

Задача R. Требуется найти функции $\Phi^{\pm}(\zeta)$, удовлетворяющие условиям:

a) $\Phi^+(\zeta) \in \{\{0, \infty\}\}$, $\Phi^-(\zeta) \in \{\{-\infty, 0\}\}$ (см. § 1), $\Phi^{\pm}(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to \infty$;

b) их предельные значения на вещественной оси связаны соотношением

$$\Phi^+(\lambda) = G(\lambda)\Phi^-(\lambda) + g(\lambda), \quad -\infty < \lambda < \infty. \tag{8.55}$$

Относительно коэффициента $G(\lambda)$ и свободного члена предполагается следующее:

$$\text{I.} \qquad G(\lambda) = \frac{\prod_{i=1}^{r}(\lambda - a_i)^{\alpha_i} p_+(\lambda) p_-(\lambda)}{\prod_{i=1}^{s}(\lambda - b_i)^{\beta_i} q_+(\lambda) q_-(\lambda)} G_1(\lambda), \tag{8.56}$$

где α_i, β_i — целые неотрицательные числа; a_i, b_i — вещественные числа; $p_+(\lambda)$, $q_+(\lambda)$, $p_-(\lambda)$, $q_-(\lambda)$ — многочлены степеней m_+, n_+, m_-, n_- соответственно, нули которых лежат в верхней $(+)$ и нижней $(-)$ полуплоскостях; $G_1(\lambda)$ удовлетворяет условию Гёльдера, $G_1(\infty)=1$ и $\arg G_1(\lambda)\,|_{-\infty}^{\infty}=0$.

II. Обозначим: $\chi=m_+-n_+$, $h=n_--m_-$, $n=\sum\limits_{i=1}^{s}\beta_i$, $m=\sum\limits_{i=1}^{r}\alpha_i$, $\nu=n-\chi+h-m$. Пусть

$$g(\lambda)=\frac{g_1(\lambda)}{\prod\limits_{i=1}^{s}(\lambda-b_i)^{\beta_i}},$$

а функция $g_1(\lambda)$ такова, что

$$\frac{g_1(\lambda)\,q_-(\lambda)}{p_-(\lambda)\,e^{\Gamma^+(\lambda)}}=Q(\lambda)+\psi(\lambda),$$

где $Q(\lambda)$ — многочлен степени не выше $n+h-1$, если $\nu\geqslant 0$, и степени не выше $m+\chi-1$ в противном случае; $\psi(\lambda)\in L_2(-\infty,\infty)$; определение $\Gamma^+(\lambda)$ см. ниже.

Решение задачи (8.55) дается следующими формулами, в которых $P_k(z)$ — произвольный многочлен степени не выше k, если $k\geqslant 0$, и $P_k(z)\equiv 0$, если $k<0$.

Однородная задача: а) Если $\nu\geqslant 0$ ($G(\lambda)$ имеет на бесконечности нуль порядка ν), то

$$\left.\begin{aligned}\Phi_0^+(z)&=\frac{\prod\limits_{j=1}^{r}(z-a_j)^{\alpha_j}\,p_-(z)\,e^{\Gamma^+(z)}}{q_-(z)}\,P_{\chi-n-1}(z),\\ \Phi_0^-(z)&=\frac{\prod\limits_{j=1}^{s}(z-b_j)^{\beta_j}\,q_+(z)\,e^{\Gamma^-(z)}}{p_+(z)}\,P_{\chi-n-1}(z),\end{aligned}\right\}\quad(8.57)$$

где $\Gamma^\pm(z)$ — предельные значения функции

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G_1(\lambda)\,d\lambda}{\lambda-z}\quad\text{при}\quad \operatorname{Im} z\to\pm 0.$$

Задача имеет точно $\max(0, \chi - n)$ линейно независимых решений.

b) Если $\nu < 0$ ($G(\lambda)$ имеет на бесконечности рост порядка $\lambda^{|\nu|}$), то

$$\left.\begin{aligned} \Phi_0^+(z) &= \frac{\prod\limits_{j=1}^{r}(z-a_j)^{\alpha_j} p_-(z)}{q_-(z)} e^{\Gamma^+(z)} P_{\chi-n+\nu-1}(z), \\ \Phi_0^-(z) &= \frac{\prod\limits_{j=1}^{s}(z-b_j)^{\beta_j} q_+(z)}{p_+(z)} e^{\Gamma^-(z)} P_{\chi-n+\nu-1}(z). \end{aligned}\right\} \tag{8.58}$$

Задача имеет точно $\max(0, \chi - n + \nu)$ линейно независимых решений.

Неоднородная задача: а) Если $\nu \geqslant 0$, то

$$\Phi^+(z) = Y^+(z) + \Phi_0^+(z), \quad \Phi^-(z) = Y^-(z) + \Phi_0^-(z), \tag{8.59}$$

где $\Phi_0^\pm(z)$ определяются формулами (8.58), а

$$\left.\begin{aligned} Y^+(z) &= \frac{p_-(z) e^{\Gamma^+(z)}}{\prod\limits_{j=1}^{s}(z-b_j)^{\beta_j} q_-(z)} [\Omega^+(z) + Q(z) - Q_\rho(z)], \\ Y^-(z) &= \frac{q_+(z) e^{\Gamma^-(z)}}{\prod\limits_{j=1}^{r}(z-a_j)^{\alpha_j} p_+(z)} [\Omega^-(z) - Q_\rho(z)], \end{aligned}\right\} \tag{8.60}$$

$\Omega^\pm(z)$ — значения функции

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\lambda)\, d\lambda}{\lambda - z}$$

при $\operatorname{Im} z \gtrless 0$, $Q_\rho(z)$ — интерполяционный многочлен Эрмита степени $\rho = m + n - 1$, построенный по условиям (при наличии соответствующих производных):

$$\frac{d^k}{dz^k}[\Omega^+(z) + Q(z) - Q_\rho(z)] = 0, \tag{8.61}$$

$$z = b_j, \quad j = 1, 2, \ldots, s; \quad k = 0, 1, \ldots, \beta_j - 1,$$

$$\frac{d^k}{dz^k}[\Omega^-(z) - Q_\rho(z)] = 0,$$

$$z = a_j; \quad j = 1, 2, \ldots, r; \quad k = 0, 1, \ldots, \alpha_j - 1$$

(по-другому: многочлен $Q_\rho(z)$ подбирается так, чтобы функции $Y^\pm(\lambda) \in L_2(-\infty, \infty)$). Для существования многочлена $Q_\rho(z)$ с требуемыми свойствами (при $\chi - n \geqslant 0$) достаточно, чтобы функции $g_1(\lambda)$ и $G_1(\lambda)$ имели в точках a_j и b_j производные порядков α_j, β_j соответственно (см. [6]).

Если $\chi - n < 0$, то функции $Y^\pm$, вообще говоря, не ограничены на бесконечности. В этом случае решение существует для свободных членов $g(\lambda)$, удовлетворяющих дополнительным $|\chi - n|$ условиям, обеспечивающих исчезание $Y^\pm(z)$ на бесконечности (см. [6], стр. 121).

b) Если $\nu < 0$, то

$$\Phi^+(z) = Y_1^+(z) + \Phi_0^+(z), \quad \Phi^-(z) = Y_1^-(z) + \Phi_0^-(z), \tag{8.62}$$

где $\Phi_0^\pm(z)$ — решение соответствующей однородной задачи (для $\nu < 0$);

$$\left.\begin{aligned} Y_1^+(z) &= \frac{p_-(z)\, e^{\Gamma^+(z)}}{\prod\limits_{i=1}^{s} (z - b_i)^{\beta_i} q_-(z)} [\Omega^+(z) - Q_\rho(z)], \\ Y_1^-(z) &= \frac{q_+(z)\, e^{\Gamma^-(z)}}{\prod\limits_{i=1}^{r} (z - a_i)^{\alpha_i} p_+(z)} [\Omega^-(z) - Q(z) - Q_\rho(z)]. \end{aligned}\right\} \tag{8.63}$$

Многочлен Q_ρ определяется аналогично предыдущему.

Если $\chi - n + \nu < 0$, то решение существует лишь и только лишь для свободных членов $g(\lambda)$, удовлетворяющих дополнительным $|\chi - n + \nu|$ условиям.

Вывод: *Если назвать число χ индексом задачи, то по сравнению с нормальным случаем* (см. [6]), *число линейно независимых решений уменьшается на суммарное число полюсов коэффициента $G(\lambda)$ (на конечном расстоянии и в точке $z = \infty$). Нули коэффициента не оказывают влияния на число решений. Число условий разрешимости увеличивается также на суммарное число полюсов.*

В дальнейшем предполагается, что коэффициенты и свободные члены задач, к которым сводятся рассматриваемые интегральные уравнения, удовлетворяют всем условиям, сформулированным в постановке задачи.

Решения всех рассматриваемых ниже уравнений разыскиваются среди функций из L_2, для которых решения соответствующих краевых задач исчезают на бесконечности.

8.2. Уравнение Винера — Хопфа второго рода. Пусть в уравнении

$$\varphi(x) - \int_0^\infty k(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x), \quad x > 0, \tag{8.64}$$

ядро $k(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ и имеет ограниченное и исчезающее на бесконечности преобразование Фурье $K(\lambda)$. Пусть, далее, символ уравнения $1 - K(\lambda)$ обращается в нуль в конечном числе точек вещественной оси и пусть, в обозначениях и предположениях задачи R,

$$[1 - K(\lambda)]^{-1} = \frac{p_+(\lambda)\,p_-(\lambda)}{\prod\limits_{j=1}^{s}(\lambda - b_j)^{\beta_j}\,q_+(\lambda)\,q_-(\lambda)}\,G_1(\lambda). \tag{8.65}$$

Методом, описанным в § 6, уравнение (8.64) сводится к эквивалентной граничной задаче

$$\Phi^+(\lambda) = \frac{\Phi^-(\lambda)}{1-K(\lambda)} + \frac{F(\lambda)}{1-K(\lambda)}. \tag{8.66}$$

Если $\Phi^+(\lambda)$, $\Phi^-(\lambda)$ — решение этой задачи, то

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^+(\lambda)\,e^{-i\lambda x}\,d\lambda. \tag{8.67}$$

Теорема 8.1. *Если коэффициент и свободный член задачи* (8.66) *удовлетворяют всем условиям задачи* R, *то число* $\nu = 0$ *и*

a) *при* $\chi - n \geqslant 0$ *однородное уравнение имеет точно* $\chi - n$ *линейно независимых решений из* $L_2(0, \infty)$, *преобразования Фурье которых даются формулами* (8.67) *с* $\alpha_j = 0$. *Если* $\chi - n < 0$, *то однородное уравнение имеет лишь тривиальное решение.*

b) *Неоднородное уравнение безусловно разрешимо, если* $\chi - n \geqslant 0$. *Если* $\chi - n < 0$, *то неоднородное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть* *удовлетворяет дополнительным* $|\chi - n|$ *условиям. При выполнении этих условий решение единственно. В случае разрешимости преобразования Фурье решения даются формулами* (8.59), (8.60), (8.61).

8.3. Уравнение Винера — Хопфа первого рода. Уравнение

$$\int_0^\infty k(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x), \quad 0 < x < \infty, \tag{8.68}$$

эквивалентно задаче

$$\Phi^+(\lambda) = \frac{\Phi^-(\lambda)}{K(\lambda)} + \frac{F(\lambda)}{K(\lambda)}. \tag{8.69}$$

Предположим, что функция $K(\lambda)$ такова, что, в обозначениях и предположениях задачи R,

$$[K(\lambda)]^{-1} = \frac{p_+(\lambda)\,p_-(\lambda)}{\prod_{j=1}^{s}(\lambda - b_j)^{\beta_j}\,q_+(\lambda)\,q_-(\lambda)}\,G_1(\lambda).$$

Теорема 8.1_1. *Пусть* $K(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda^k}$ *при* $\lambda \to \infty$, *где* $k > 0$ — *целое число. При условии выполнения всех требований число* $\nu = -k < 0$ *и*

a) *однородное уравнение имеет точно* $\max(0, \chi - n - k)$ *линейно независимых решений. Преобразования Фурье решений выражаются формулами* (8.58).

b) *Неоднородное уравнение при* $\chi - n - k \geqslant 0$ *безусловно разрешимо. Если же* $\chi - n - k < 0$, *то правая часть должна удовлетворять* $|\chi - n - k|$ *необходимым и достаточным условиям разрешимости. При их выполнении уравнение имеет единственное решение. Во всех случаях разрешимости преобразование Фурье* $\Phi^+(\lambda)$ *решения дается формулами* (8.62) — (8.63) (*в этом случае* $\nu = -k < 0$).

В данном случае интерполяционный многочлен Q_ρ, $\rho = n - 1$, строится по условиям:

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}[\Omega^+(\lambda) - \Omega_\rho(\lambda)]_{\lambda = b_j} = 0$$

$$(j = 1, 2, \ldots, s;\ k = 0, 1, \ldots, \beta_j - 1).$$

Решение уравнения дается той же формулой (8.67).

8.4. Парное уравнение второго рода

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \quad x < 0, \\ \varphi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} k_2(x-t)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \quad x > 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.70}$$

приводится к эквивалентной краевой задаче R

$$\omega^+(\lambda) = \frac{1 - K_1(\lambda)}{1 - K_2(\lambda)}\,\omega^-(\lambda) + \frac{K_2(\lambda) - K_1(\lambda)}{1 - K_2(\lambda)}\,F(\lambda) \tag{8.71}$$

с дополнительным условием:

$$\Phi(\lambda) = \frac{F(\lambda) + \omega^+(\lambda)}{1 - K_1(\lambda)} \in L_2(-\infty, \infty). \tag{8.72}$$

Если это условие выполнено, то

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda t}\, \frac{\omega^+(\lambda) + F(\lambda)}{1 - K_1(\lambda)}\, d\lambda. \tag{8.73}$$

Предположим, что функции $1 - K_i(\lambda)$, $i = 1, 2$, имеют вещественные нули целого порядка. Пусть

$$\left.\begin{aligned} 1 - K_1(\lambda) = \prod_{j=1}^{r} (\lambda - a_j)^{\alpha_j} \prod_{j=1}^{p} (\lambda - c_j)^{\gamma_j} K_{11}(\lambda), \\ 1 - K_2(\lambda) = \prod_{j=1}^{s} (\lambda - b_j)^{\beta_j} \prod_{j=1}^{p} (\lambda - c_j)^{\gamma_j} K_{12}(\lambda), \end{aligned}\right\} \tag{8.74}$$

α_j, γ_j, β_j — целые положительные числа.

Через c_j обозначены общие нули функций $1 - K_i(\lambda)$, $i = 1, 2$; γ_i — меньшая из кратностей точки c_j как нуля этих функций.

Пусть, далее, коэффициент задачи (8.71) представим в форме

$$G(\lambda) = \frac{\prod_{j=1}^{r} (\lambda - a_j)^{\alpha_j} p_+(\lambda)\, p_-(\lambda)}{\prod_{j=1}^{s} (\lambda - b_j)^{\beta_j} q_+(\lambda)\, q_-(\lambda)}\, G_1(\lambda), \tag{8.75}$$

где $G_1(\lambda)$ удовлетворяет требованиям, указанным в постановке задачи R (в рассматриваемом случае $G(\infty)=1$ и число $\nu=0$).

Кроме условий, наложенных на коэффициенты задачи, добавляется теперь еще условие (8.72). Для его выполнения достаточно, чтобы выполнялись $l=\sum_{j=1}^{p}\gamma_j$ дополнительных условий

$$\frac{d^k}{d\lambda^k}[\omega^+(\lambda)+F(\lambda)]_{\lambda=c_j}=0 \tag{8.76}$$

$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ p;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ \gamma_j-1)$$

(при условии дифференцируемости входящих в него функций).

Теорема 8.2. *Если все перечисленные условия выполнены, то* $\nu=0$ *и*

a) *однородное уравнение* (8.70) *имеет в* $L_2(-\infty,\ \infty)$ $\max(0,\ \chi-n-l)$ *линейно независимых решений. Функции* $\omega_0^{\pm}(\lambda)$, *определяющие это решение* (см. (8.71)), *имеют вид*

$$\left.\begin{aligned}\omega_0^+(z)&=\prod_{j=1}^{r}(z-a_j)^{\alpha_j}\prod_{j=1}^{p}(z-c_j)^{\gamma_j}\times\\&\qquad\times p_-(z)\,q_-^{-1}(z)\,e^{\Gamma^+(z)}P_{\chi-n-l-1}(z),\\\omega_0^-(z)&=\prod_{j=1}^{s}(z-b_j)^{\beta_j}\prod_{j=1}^{p}(z-c_j)^{\gamma_j}\times\\&\qquad\times q_+(z)\,p_+^{-1}(z)\,e^{\Gamma^-(z)}P_{\chi-n-l-1}(z).\end{aligned}\right\} \tag{8.77}$$

b) *Неоднородное уравнение безусловно разрешимо, если* $\chi-n-l\geqslant 0$, *а при* $\chi-n-l<0$ *разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть удовлетворяет дополнительным условиям, обеспечивающим исчезание функций* $Y^{\pm}$ *на бесконечности. В случае разрешимости решение дается формулой* (8.73), *где*

$$\omega^+(z)=\omega_0^+(z)+Y^+(z). \tag{8.78}$$

В работе [7] теми же методами рассмотрены парное уравнение первого рода и уравнение, транспонированное к парному. Уравнения с вырождающимися символами и ядрами экспоненциального роста исследованы в работах [38], [39]. В статьях [19], [35] (см. также [50]) уравнения с вырождающимися символами рассмотрены в пространствах обобщенных функций.

§ 9. Примеры

Пример 1. Рассмотрим уравнение Винера — Хопфа второго рода

$$\varphi(x)-\frac{5}{4}\int_0^\infty k(x-t)\,\varphi(t)\,dt=f(x),\qquad x>0,\tag{8.79}$$

где

$$k(x)=\begin{cases}e^{-2x}, & x>0,\\ e^{2x}, & x<0,\end{cases}\qquad K(\lambda)=\frac{4}{\lambda^2+4},$$

$$f(x)=\frac{2}{3}e^{-x}-\frac{5}{4}e^{-2x},\quad x>0,\quad F(\lambda)=\frac{2i}{3(\lambda+i)}-\frac{5i}{4(\lambda+2i)}.$$

Эквивалентная задача имеет вид

$$\Phi^+(\lambda)=\frac{\lambda^2+4}{\lambda^2-1}\Omega^-+\frac{\lambda^2+4}{\lambda^2-1}F(\lambda).\tag{8.80}$$

В рассматриваемом случае $G_1(\lambda)=1$, следовательно, $e^{\Gamma^\pm(z)}=1$, $p_+(\lambda)=\lambda-2i$, $p_-(\lambda)=\lambda+2i$, $q_+(\lambda)=q_-(\lambda)=1$, $b_1=1$, $b_2=-1$, $\beta_1=\beta_2=1$, $n_+=n_-=0$, $m_+=m_-=1$, $\chi=m_+-n_+=1$, $n=2$, $\chi-n=-1<0$, $\rho=m+n-1=1$. Так как $\chi-n<0$, то однородное уравнение имеет только тривиальное решение. Для построения функции Y^+ рассмотрим функцию

$$\frac{g_1(\lambda)\,q_-(\lambda)}{p_-(\lambda)\,e^{\Gamma^+(\lambda)}}=i\left[-\frac{7}{12}-\frac{2i}{\lambda+i}+\frac{5i}{\lambda+2i}\right].$$

Следовательно, $\Omega^+(\lambda)=\dfrac{2}{\lambda+i}-\dfrac{5}{\lambda+2i}$. По формуле (8.60)

$$Y^+(\lambda)=\frac{\lambda+2i}{\lambda^2-1}\left[\frac{2}{\lambda+i}-\frac{5}{\lambda+2i}-Q_1(\lambda)\right].$$

Интерполяционный многочлен $Q_1(\lambda)=A\lambda+B$ определяется из условий $Q_1(\pm 1)=\psi^+(\pm 1)$. Для определения коэффициентов A и B получается система уравнений

$$\frac{2}{1+i}-\frac{5}{1+2i}-A-B=0,$$

$$\frac{2}{-1+i}-\frac{5}{-1+2i}+A-B=0,$$

из которой находим $A=0$, $B=i$. Отсюда $Y^+(\lambda)=-\frac{i}{\lambda+i}$, и так как однородная задача имеет только тривиальное решение, то $\Phi^+(\lambda)=Y^+(\lambda)=-\frac{i}{\lambda+i}$. Следовательно, $\varphi(x)=e^{-x}$, $x>0$.

При данной функции $f(x)$ неоднородная задача оказалась разрешимой. В общем случае условие разрешимости имеет вид $Y^+(\lambda)\in L_2(-\infty,\infty)$.

Пример 2. Найти решение уравнения Винера — Хопфа первого рода

$$\int_0^\infty k(x-t)\varphi(t)\,dt=f(x),\quad 0<x<\infty; \tag{8.81}$$

$$k(x)=e^x+4xe^x-2x^2e^x \text{ для } x<0 \text{ и } k(x)=0 \text{ для } x>0.$$

$$K(\lambda)=i\left[\frac{1}{\lambda-i}+\frac{4i}{(\lambda-i)^2}-\frac{4}{(\lambda-i)^3}\right];\ f(x)=e^{-x} \text{ для } x>0,$$
$$f(x)=0 \text{ для } x<0.$$

Эквивалентная задача имеет вид

$$\Phi^+(\lambda)=-i\frac{(\lambda-i)^3}{(\lambda+i)^2}\Phi^-(\lambda)-i\frac{(\lambda-i)^3}{(\lambda+i)^2}F(\lambda);\ F(\lambda)=\frac{i}{\lambda+i}. \tag{8.82}$$

В этой задаче $p_+=(\lambda-i)^3$, $p_-=1$; $q_+=1$; $q_-=i(\lambda+i)^2$, $G_1(\lambda)=1$, $e^{\Gamma^\pm(\lambda)}=1$, $n_+=3$, $n_-=0$, $m_+=0$, $m_-=2$; $m=n=0$; $\chi=3-0=3$, $K(\lambda)\sim\frac{1}{\lambda}$ и $k=1$; $\nu=-k=-1<0$, $\chi-n-k=2$. Однородное уравнение, следовательно, имеет два решения. Функция

$$\frac{g_1(\lambda)q_-(x)}{p_-(\lambda)e^{\Gamma^+(\lambda)}}=(\lambda-i)^3F(\lambda)=i(\lambda+i)^2+6(\lambda+i)+12i-\frac{8}{\lambda+i};$$

$$\Omega^+(\lambda)=\frac{-8}{\lambda+i}.$$

Согласно сказанному на стр. 309 главная часть (на бесконечности) этого выражения может иметь порядок $m+\chi-1=2$ $(\nu<0)$; это условие здесь выполнено. Решение однородной задачи находится по формулам (8.58):

$$\Phi_0^+(\lambda)=\frac{1}{(\lambda+i)^2}(A\lambda+B),\quad \Phi_0^-=\frac{1}{(\lambda-i)^3}(A\lambda+B).$$

Решения неоднородной задачи находятся по формулам (8.62), (8.63) ($Q_\rho\equiv 0$, так как $m+n-1<0$)

$$\Phi^+(\lambda)=\Phi_0^+(\lambda)+\frac{8i}{(\lambda+i)^2(\lambda+i)}.$$

Следовательно,

$$\varphi(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} - 4x^2 e^{-x}.$$

Пример 3. Выяснить условия, при которых резрешимо уравнение

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(x) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-\tau|}\varphi(\tau)\,d\tau = f(x), \quad x < 0;\\ &\varphi(x) - (1-i)\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\tau)}\,\theta(x-\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau = f(x), \quad x > 0;\\ &\theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0,\\ 0, & x < 0,\end{cases}\end{aligned}\right\} \tag{8.83}$$

$$1 - K_1(\lambda) = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1}, \quad 1 - K_2(\lambda) = \frac{\lambda - 1}{\lambda + i}.$$

Соответствующая задача

$$\omega^+ = \frac{\lambda + 1}{\lambda - i}\,\omega^- + (i+1)\,F(\lambda). \tag{8.84}$$

Имеем $p_+(\lambda) = p_-(\lambda) = 1$, $q_+(\lambda) = \lambda - i$, $q_-(\lambda) = 1$, $G_1 = -1$, $\Gamma^{\pm} = 1$. $m_+ = m_- = n_- = 0$, $n_+ = 1$, $\chi = -1$, $h = 0$, $l = 1$, $\chi - n - l = -2$, $m = 1$, $n = 0$, $\nu = 0$.

Выражение

$$\frac{(i+1)\,F(\lambda)\,q_-(\lambda)}{p_-(\lambda)\,e^{\Gamma^+}} \equiv (i+1)\,F(\lambda) = Q(\lambda) + \psi(\lambda),$$

где согласно предыдущему $Q(\lambda)$ — многочлен степени не выше $n + h - 1 = -1$, т. е. $Q \equiv 0$.

Пусть $(i+1)\,F(\lambda) = \Omega_+(\lambda) - \Omega_-(\lambda)$. Так как $\chi - n - l = -2 < 0$, то однородная задача имеет только тривиальное решение. Решение неоднородной задачи имеет вид (по формулам (8.60))

$$\omega^+ = \Omega_+ - Q_\rho, \quad \omega^- = \frac{\lambda - i}{\lambda + 1}\,[\Omega^- - Q_\rho],$$

где Q_ρ — многочлен степени $m + n - 1 = 0$. Кроме того, должно быть $\omega^{\pm}(\lambda) \in L_2$, следовательно, $Q_\rho = 0$. Поэтому $F(\lambda)$ должна быть такой, что

1. $\omega^+ + F(\lambda)\,|_{\lambda=1} = 0$ (см. 8.76),
2. $\dfrac{\omega^+ + F(\lambda)}{1 - K_1(\lambda)} \in L_2$ (см. 8.72).

Оба эти условия будут удовлетворены, если $\omega^+(\lambda)+F(\lambda)$ делится на λ^2-1. Так как $\omega^+=\Omega_+$, то это условие сводится к тому, что

$$\Omega_+ + \frac{1}{1+i}[\Omega_+ - \Omega_-] = \frac{\Omega_+(2+i)-\Omega_-}{i+1} \tag{8.85}$$

делится на λ^2-1.

Например, это условие выполнено, если

$$F(\lambda)=\frac{1}{i+1}\left[\frac{\lambda+1}{(2+i)(\lambda+i-2)}-\frac{\lambda+1}{(\lambda-i)^2}\right].$$

В этом случае

$$\frac{\omega^+ + F(\lambda)}{1-K_1} = -\frac{4(\lambda+i)}{(\lambda+i-2)^2(\lambda-i)}.$$

Выполняя обращения, получим

$$\varphi(x)=2(1-i)e^x\theta(-x)+(1-3i)e^{-x}(\cos 2x+i\sin 2x)\theta(x)+$$
$$+2(1+i)xe^{-x}(\cos 2x+i\sin 2x)\theta(x).$$

§ 10. Системы уравнений на полуоси [10]

10.1. Основные предположения. В этом параграфе излагаются основные положения теории систем интегральных уравнений вида

$$\varphi(x)-\int_0^\infty k(x-t)\varphi(t)\,dt=f(x),\quad x>0. \tag{8.86}$$

Здесь $\varphi(x)$ и $f(x)$ — n-мерные векторы-столбцы

$$\begin{pmatrix}\varphi_1(x)\\ \varphi_2(x)\\ \vdots\\ \varphi_n(x)\end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix}f_1(x)\\ f_2(x)\\ \vdots\\ f_n(x)\end{pmatrix},$$

$$k(x) - n\times n\text{-матрица}\quad \begin{pmatrix}k_{11}(x) & k_{12}(x) & \dots & k_{1n}(x)\\ k_{21}(x) & k_{22}(x) & \dots & k_{2n}(x)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ k_{n1}(x) & k_{n2}(x) & \dots & k_{nn}(x)\end{pmatrix}.$$

Теория таких систем наиболее полно развита в следующих предположениях.

A. Элементы матрицы $k(x)$ суммируемы на всей оси.

B. $\det[I - K(\lambda)] \neq 0$, $-\infty < \lambda < \infty$, где I — единичная матрица, а

$$K(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} k(x)\,dx$$

— преобразование Фурье матрицы $k(x)$.

C. Компоненты правой части $f(x)$ и решения $\varphi(x)$ принадлежат одному из пространств E^+ (см. п. 1.5). Пространство n-мерных вектор-функций с компонентами из E^+ в дальнейшем обозначается через E_n^+.

Если элементы матрицы $k(x)$ принадлежат пространству $e^{\alpha x}L(-\infty, \infty)$ (т. е. $k_{ij}(x)e^{-\alpha x} \in L(-\infty, \infty)$), то умножением на $e^{-\alpha x}$ уравнение сводится к уравнению с суммируемой матрицей, при этом следует предполагать, что $f(x)$, $\varphi(x) \in e^{\alpha x}E_n^+$.

Теория систем (8.86) во многом аналогична теории скалярного уравнения (8.14), особенно в своей экзистенциальной части. Техника же решения системы намного сложнее, чем в случае одного уравнения. Элементарное решение системы возможно лишь в редких случаях.

10.2. Факторизация матриц-функций. В основе теории систем (8.86) лежит *факторизация матриц-функций* (ср. § 3).

Левой стандартной факторизацией неособенной непрерывной матрицы функции $\mathfrak{M}(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, называется представление ее в виде

$$\mathfrak{M}(\lambda) = \mathfrak{N}_+(\lambda)\,\mathfrak{N}(\lambda)\,\mathfrak{N}_-(\lambda), \tag{8.87}$$

где $\mathfrak{N}(\lambda)$ — диагональная матрица-функция —

$$\mathfrak{N}(\lambda) = \left\| \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{\varkappa_j} \delta_{jk} \right\|,$$

δ_{jk} — символ Кронекера, $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \ldots \geqslant \varkappa_n$ — некоторые целые числа, а матрицы $\mathfrak{N}_+(\lambda)$ и $\mathfrak{N}_-(\lambda)$ допускают продолжения, голоморфные внутри и непрерывные вплоть до границы, соответственно в верхней и нижней полуплоскостях, притом определители этих продолжений отличны от нуля (каждый в своей полуплоскости). Если поменять местами множители $\mathfrak{N}_{\pm}(\lambda)$, то получится *правая стандартная факторизация*.

Различные левые (правые) факторизации данной матрицы отличаются друг от друга лишь множителями $\mathfrak{N}_{\pm}(\lambda)$, числа же χ_j у них одни и те же. Эти числа называются *левыми* (*правыми*) *индексами* матрицы-функции.

Теорема 10.1. *Если матрица* $\mathfrak{M}(\lambda)$ *удовлетворяет условиям* A *и* B п. 10.1, *то матрица* $I - \mathfrak{M}(\lambda)$ *допускает стандартную факторизацию. При этом*

$$\mathfrak{N}_{\pm}(\lambda) = I + \int_0^{\infty} n_{\pm}(x) e^{\pm i\lambda x}\, dx, \tag{8.88}$$

где $n_{\pm}(x)$ — *матрицы с элементами из* $L(0, \infty)$.

Из теоремы Винера ([3], [10]) следует, что если матрица $I - \mathfrak{M}(\lambda)$ удовлетворяет условиям теоремы 10.1, то им же удовлетворяет матрица $[I - \mathfrak{M}(\lambda)]^{-1}$.

Факторизация матриц проводится намного сложнее, чем факторизация функции (§ 3). Известно лишь немного случаев, когда она может быть проведена элементарными средствами. Например, это так для треугольных матриц-функций ([10], § 11) и для матриц с рациональными элементами ([2], § 5-а, [5], [63]).

Вопросы, связанные с факторизацией, в весьма общем виде подробно изучены в работе [12]. Там же имеется обширная библиография по этим вопросам.

10.3. Условия разрешимости.

Теорема 10.2. *Пусть выполнены условия* A *и* B (см. 10.1). *Тогда*:

a) *если среди левых индексов матрицы* $[I - K(\lambda)]^{-1}$ *нет отрицательных, то система разрешима в любом из пространств* E_n^+ *для любой правой части из этого же пространства. Если все левые индексы равны нулю, то решение единственно.*

b) *Если среди левых индексов матрицы* $[I - K(\lambda)]^{-1}$ *имеются отрицательные, то система* (8.86) *разрешима в любом из пространств* E_n^+ *лишь и только лишь при условии, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \psi_j(x)\, dx = 0, \tag{8.89}$$

где $\psi_j(x)$ — *любое решение транспонированной однородной системы*:

$$\psi(x) - \int_0^\infty k'(t-x)\,\psi(t)\,dt = 0.$$

Здесь $k'(x)$ — *транспонированная к* $k(x)$ *матрица.*

c) *Если среди левых индексов матрицы* $[I - K(\lambda)]^{-1}$ *имеются положительные и* χ_p — *наименьший из них, то однородная система имеет во всех пространствах* E_n^+ *одни и те же решения. Число* α *линейно независимых решений равно сумме положительных левых индексов матрицы* $[I - K(\lambda)]^{-1}$, *т. е.* $\alpha = \sum_{i=1}^{p} \chi_i$. *Эти решения можно выбрать так, чтобы они образовали* p D-*цепочек* (см. § 3) *длин* $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_p$.

d) *Для транспонированного уравнения*

$$\psi(x) - \int_0^\infty k'(t-x)\,\psi(t)\,dt = f(x) \tag{8.90}$$

имеют место те же утверждения с тем отличием, что для него левыми индексами будут числа $-\chi_n \geqslant -\chi_{n-1} \geqslant \ldots \ldots \geqslant -\chi_1$. *Число решений транспонированного уравнения равно* $\beta = -\sum_{s=q}^{n} \chi_s$, *где* χ_q — *первый из отрицательных индексов матрицы* $[I - K(\lambda)]^{-1}$.

В терминах функционального анализа эти факты с некоторыми дополнениями формулируются так:

Теорема 10.3. *Оператор, определенный левой частью уравнения* (8.86), *при выполнении условий* A *и* B *нормально разрешим и имеет конечный индекс в любом из пространств* E_n^+. *Во всех этих пространствах он имеет одно и то же подпространство нулей, размерность которого равна сумме положительных левых индексов матрицы* $[I - K(\lambda)]^{-1}$. *Размерность подпространства нулей сопряженного оператора равна абсолютной величине суммы отрицательных левых индексов.*

Индекс оператора (8.86) *в любом пространстве* E_n^+ *равен*

$$\chi = -\frac{1}{2\pi} \arg\det [I - K(\lambda)] \Big|_{-\infty}^{\infty} = \sum_{i=1}^{n} \chi_i. \tag{8.91}$$

Если выполнено условие A, *то для того, чтобы оператор* (8.86) *был нормально разрешимым и имел конечный индекс, необходимо и достаточно выполнение условия* B.

Решение системы выражается формулами (8.21), (8.22) из § 3 с заменой в них функций соответствующими матрицами или векторами. Более подробно:

a) Если все левые индексы равны нулю (при этом система однозначно разрешима), то факторизация имеет вид

$$[I - K(\lambda)]^{-1} = \sigma_+(\lambda)\, \sigma_-(\lambda), \tag{8.92}$$

где матрицы $\sigma_\pm(\lambda)$ выражаются формулами

$$\sigma_\pm(\lambda) = I + \int_0^\infty \gamma_\pm(x)\, e^{\pm i\lambda x}\, dx, \tag{8.93}$$

$\gamma_\pm(x)$ — суммируемые матрицы. Решение системы в любом пространстве E_n^+ выражается по формулам (8.21), (8.22), в которых теперь $\gamma(x, t)$ — $(n \times n)$-матрица-функция, а $f(x)$ — вектор-столбец.

b) Пусть имеются ненулевые левые индексы и выполнены условия разрешимости. Левая стандартная факторизация имеет вид (8.87).

Пусть

$$\tilde{\sigma}_+(\lambda) = \mathfrak{N}_+(\lambda) \left\| \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{\chi_j^+} \delta_{jk} \right\|,$$

$$\tilde{\sigma}_-(\lambda) = \left\| \left(\frac{\lambda - i}{\lambda + i}\right)^{\chi_j^-} \delta_{jk} \right\| \mathfrak{N}_-(\lambda),$$

где

$$\chi_j^+ = \begin{cases} \chi_j, & \text{если } \chi_j > 0, \\ 0, & \text{если } \chi_j \leqslant 0, \end{cases} \qquad \chi_j^- = \begin{cases} 0, & \text{если } \chi_j \geqslant 0, \\ \chi_j, & \text{если } \chi_j < 0. \end{cases}$$

Так введенные матрицы снова удовлетворяют соотношению (8.92), а матрицы

$$\sigma_+(\lambda)=\tilde{\sigma}_+(\lambda)\tilde{\sigma}_+^{-1}(\infty),\qquad \sigma_-(\lambda)=\tilde{\sigma}_-(\lambda)\tilde{\sigma}_-^{-1}(\infty)$$

представимы в виде (8.93). Одно из решений системы (8.86) по-прежнему выражается формулами (8.21), (8.22).

c) Решение однородной системы (8.87) строится следующим образом: пусть χ_p — наименьший положительный левый индекс матрицы $[I-K(\lambda)]^{-1}$, и $\Phi_1(\lambda)$, $\Phi_2(\lambda)$, ..., $\Phi_p(\lambda)$ — первые p векторов-столбцов матрицы

$$\tilde{\sigma}_+(\lambda)=\mathfrak{N}_+(\lambda)\left\|\left(\frac{\lambda-i}{\lambda+i}\right)^{\chi_j^+}\delta_{jk}\right\|.$$

Тогда общее решение однородной системы имеет своим преобразованием Фурье вектор-столбец

$$\Phi(\lambda)=\sum_{j=1}^{p}\left[\sum_{k=1}^{\chi_j}a_k^{(j)}(\lambda-i)^{-k}\right]\Phi_j(\lambda), \tag{8.94}$$

где $a_k^{(j)}$ — произвольные числа (напомним, что любое решение однородной системы суммируемо). Функции φ_{j0}, φ_{j1}, ..., φ_{j,χ_j-1}, $j=1, 2, \ldots, p$, имеющие своими преобразованиями Фурье функции

$$i(\lambda-i)^{-1}\Phi_j(\lambda),\ \ldots,\ i^{\chi_j}(\lambda-i)^{-\chi_j}\Phi_j(\lambda),$$

образуют те p D-цепочек, о которых говорилось в теореме 2 настоящего параграфа.

10.4. Парные уравнения. Пусть $k_j(x)$, $j=1, 2$, — $(n\times n)$-матрицы, а $\varphi(x)$ и $f(x)$ — n-мерные векторы-столбцы. Пусть выполнены следующие условия:

A_1. Элементы матрицы $k_1(x)$ и $k_2(x)$ суммируемы на всей оси.

B_1. $\det[I-K_j(\lambda)]\neq 0$, $-\infty<\lambda<\infty\,(j=1, 2)$, где $K_j(\lambda)$ — преобразование Фурье матрицы $k_j(x)$.

C_1. Правая часть — $f(x)$ и искомая вектор-функция принадлежат одному и тому же пространству E_n. Тогда система парных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x), \quad x < 0, \\ \varphi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} k_2(x-t)\varphi(t)\,dt = f(x), \quad x > 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.95}$$

с помощью однозначно обратимого в любом пространстве E'_n преобразования

$$g(x) = \varphi(x) - \int_{-\infty}^{\infty} k_1(x-t)\varphi(t)\,dt - f(x), \quad -\infty < x < \infty,$$

переводится в систему уравнений на полуоси

$$g(x) - \int_{0}^{\infty} k_0(x-t)\,g(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} k_0(x-t)\,f(x)\,dt, \tag{8.96}$$
$$0 < x < \infty,$$

в которой матричное ядро $k_0(x)$ суммируемо и имеет своим преобразованием Фурье матрицу

$$K_0(\lambda) = [K_2(\lambda) - K_1(\lambda)]\,[I - K_1(\lambda)]^{-1}. \tag{8.97}$$

Если $g(x)$ — решение системы (8.96), то решение системы (8.95) дается формулой

$$\varphi(x) = f(x) + g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} q(x-t)\,[f(t) + g(t)]\,dt, \tag{8.98}$$
$$-\infty < x < \infty,$$

где суммируемое матричное ядро $q(x)$ имеет преобразованием Фурье функцию $Q(\lambda) = K_1(\lambda)\,[I - K_1(\lambda)]^{-1}$.

Таким образом, система (8.95) сводится к системе (8.86). Все результаты, установленные для системы (8.86), без существенных изменений переносятся на системы (8.95) (§ 4). При их формулировке следует лишь матрицу $K(\lambda)$ заменить матрицей $K_0(\lambda)$. Отметим здесь только формулу для индекса системы (8.95)

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \arg \frac{\det[I - K_1(\lambda)]}{\det[I - K_2(\lambda)]}\Bigg|_{-\infty}^{\infty}. \tag{8.99}$$

Система, транспонированная к (8.95),

$$\varphi(x) - \int_{-\infty}^{0} k_1(t-x)\,\rho(t)\,dt - \int_{0}^{\infty} k_2(t-x)\,\varphi(t)\,dt = f(x), \tag{8.100}$$

$$-\infty < x < \infty,$$

в сделанных предположениях эквивалентна системе

$$\varphi(x) = f(x) + \int_{-\infty}^{\infty} q(t-x)\,f(t)\,dt +$$

$$+ \int_{0}^{\infty} k^0(t-x)\,\varphi(t)\,dt, \qquad -\infty < x < \infty, \tag{8.101}$$

где матрица $q(x)$ имеет прежний смысл, а матрица $k^0(x)$ имеет преобразование Фурье, равное $[I - K_1(\lambda)]^{-1}[K_2(\lambda) - K_1(\lambda)]$. Система (8.101) фактически является системой уравнений на полуоси, так как в правую ее часть входят значения $\varphi(x)$ только для $x > 0$. Решив эту систему для $x > 0$, мы получим из нее же значения $\varphi(x)$ для $x < 0$.

О системах уравнений с ядрами различного экспоненциального поведения на бесконечности см. [20]. О решении систем, ядра которых имеют рациональное преобразование Фурье, см. [37]. Системы уравнений вида (8.1) рассмотрены в [33].

10.5. Ядра, экспоненциально убывающие на бесконечности.

Теорема 10.4 [43]. *Если элементы матрицы $k(x)$ принадлежат пространству $e^{-h|x|}L(-\infty, \infty)$, т. е. если*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{h|x|}\,|k(x)|\,dx < \infty$$

и если

$$\det[I - K(\lambda \pm ih)] \neq 0, \qquad -\infty < \lambda < \infty,$$

то всякое решение системы (8.86) *с компонентами из пространства $e^{hx}E_n^+$ допускает асимптотическое представление*

$$\varphi(x) = \left\{ \sum_{j=1}^{m} e^{i\alpha_j x} P_{jk}(x) \right\}_{k=\overline{1,n}} + o\left(e^{-hx}\right), \quad x \to +\infty, \tag{8.102}$$

где α_j, $j=1, 2, \ldots, m$, *— все различные нули функции* $\det[I-K(\lambda)]$ *в полосе* $-h<\operatorname{Im}\lambda<h$; p_j *— их кратности*; $P_{jk}(x)$ *— многочлены степени* $\leqslant p_j-1$ *с произвольными коэффициентами.*

Аналогично, если матрицы $k_1(x)$, $k_2(x)\in e^{h|x|}L(-\infty, \infty)$ и $\det[I-K_j(\lambda\pm ih)]\neq 0$, то всякое решение $\varphi(x)=\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)\}$ каждой из однородных систем (8.95) или (8.100) допускает асимптотическое представление

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x) &= \left\{\sum_{j=1}^{m_2} e^{-i\alpha_j^{(2)}x}P_{jk}^{(2)}(x)\right\}_{k=\overline{1, n}} + o\left(e^{-hx}\right), \qquad x\to+\infty, \\ \varphi(x) &= \left\{\sum_{j=1}^{m_1} e^{-i\alpha_j^{(1)}x}P_{jk}^{(1)}(x)\right\}_{k=\overline{1, n}} + o\left(e^{hx}\right), \qquad x\to-\infty, \end{aligned}\right\} \tag{8.102$_1$}$$

где $\alpha_j^{(r)}$, $r=1, 2$; $j=1, 2, \ldots, m_r$, — все различные нули функции $\det[I-K_r(\lambda)]$ в полосе $-h<\operatorname{Im}\lambda<h$; $p_j^{(r)}$ — их кратности; $P_{jk}^{(r)}(x)$ — многочлены степени не выше $p_j^{(r)}-1$.

Асимптотическое поведение решений одного уравнения исследовано в более ранних, чем [43], работах [3] и [22], в первой из них лишь вкратце, а во второй весьма детально.

§ 11. Уравнения на конечном промежутке

В этом параграфе рассматриваются уравнения вида

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^T k(x-y)\varphi(y)\,dy, \quad 0<x<T<\infty. \tag{8.103}$$

Если ядро $k(x)$ суммируемо в промежутке $(-T, T)$, то интегральный оператор вполне непрерывен в любом из пространств $L_p(0, T)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, $C(0, T)$ и к этому уравнению приложима теория Фредгольма (см. гл. V).

Поскольку в уравнение входят значения ядра $k(x)$ лишь для $(-T, T)$, то можно продолжить ядро любым образом вне этого промежутка. В дальнейшем считается, что ядро продолжено на всю ось с сохранением суммируемости.

11.1. Сведение к краевой задаче. В пространстве $L_2(0, T)$ уравнение сводится к краевой задаче Римана для двух пар неизвестных функций [4]. Найти функции $\Omega^{\pm}(z)$, $\Phi^{\pm}(z)$ по условиям:

1. Функции Ω^+, Φ^+ (Ω^-, Φ^-) аналитичны в верхней (нижней) полуплоскости, причем функции $\Omega^{\pm}(\lambda)$ исчезают на бесконечности.

2. Для предельных значений этих функций на вещественной оси имеют место соотношения

$$\left.\begin{aligned} \Omega^+(\lambda) + e^{-i\lambda T}\Omega^-(\lambda) + [1 - K(\lambda)]\Phi^-(\lambda) = F(\lambda), \\ \Omega^+(\lambda) + \Omega^-(\lambda) + [1 - K(\lambda)]\Phi^+(\lambda) = e^{i\lambda T}F(\lambda). \end{aligned}\right\} \qquad (8.104)$$

Если эта задача разрешима, то решение уравнения (8.103) дается формулой

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi^-(\lambda)\, e^{-i\lambda x}\, d\lambda, \qquad x > 0.$$

Для задач вида (8.104) при частных предположениях относительно коэффициентов иногда удается построить решение в замкнутой форме (см. [5], [2]).

11.2. Ядра с рациональными преобразованиями Фурье. В случае, когда преобразование Фурье ядра рационально, уравнение (8.103) весьма просто решается в замкнутом виде [4]. В предположении, что $1 - K(\lambda) \neq 0$, $-\infty < \lambda < \infty$, преобразование Фурье решения уравнения (8.103) дается формулой

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{1 - K(\lambda)}\left\{F(\lambda) - \Omega^+(\lambda) - e^{-i\lambda T}\Omega^-(\lambda)\right\}, \qquad (8.105)$$

в которой

$$\Omega^{\pm}(\lambda) = \sum_j \sum_{k=1}^{p_j^{\pm}} \frac{M_{jk}^{\pm}}{\left(\lambda - b_j^{\mp}\right)^k},$$

$b_j^+\left(b_j^-\right)$ — полюсы функции $1 - K(\lambda)$, лежащие в верхней (нижней) полуплоскости; $p_j^{\pm}$ — их кратности. Постоянные $M_{jk}^{\pm}$ могут быть определены из условий:

$$\frac{d^s}{d\lambda^s}\left[\Omega^+(\lambda) + e^{-i\lambda T}\Omega^-(\lambda) - F(\lambda)\right]_{\lambda = a_j^+} = 0$$
$$\left(s = 0, 1, \ldots, q_j^+ - 1\right),$$
$$\frac{d^s}{d\lambda^s}\left[\Omega^+(\lambda) + e^{-i\lambda T} - F(\lambda)\right]\Big|_{\lambda = a_j^-} = 0$$
$$\left(s = 0, 1, \ldots, q_j^- - 1\right),$$

где $a_j^+ (a_j^-)$ — нули функции $1 - K(\lambda)$, лежащие в верхней (нижней) полуплоскости; $q_j^\pm$ — их кратности, или подстановкой решения в исходное уравнение.

Этот прием годится и для решения уравнений первого рода. Все формулы остаются в силе, следует лишь всюду заменить функцию $1 - K(\lambda)$ функцией $K(\lambda)$ (в этом случае решения будут обобщенными функциями: в них войдут функции $\delta^{(s)}(x)$ и $\delta^{(s)}(T - x)$).

11.3. Замена дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами. Другой прием решения, подробно изложенный в [17], заключается в замене уравнения (8.103) дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами: если $1 - K(\lambda) = \frac{M(\lambda)}{N(\lambda)}$, где $M(\lambda)$ и $N(\lambda)$ — многочлены степеней m и n соответственно, то решение уравнения (8.103) (если оно существует) удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$M\left(i \frac{d}{dx}\right)\varphi(x) = N\left(i \frac{d}{dx}\right) f(x), \qquad 0 < x < T. \tag{8.106}$$

Решение этого уравнения содержит m произвольных постоянных, которые определяются подстановкой решения в уравнение. При этом для определения постоянных получается система линейных алгебраических уравнений, эквивалентная исходному уравнению. Этот прием также применим к уравнениям первого рода, но в этом случае решение его следует искать в виде

$$\varphi(x) = Y(x, C_1, \ldots, C_m) + \sum_{k=0}^{n-m-1} \left[A_k \delta^{(k)}(x) + B_k \delta^{(k)}(x - T)\right].$$

Здесь Y — общее решение уравнения (8.106). Произвольные постоянные и коэффициенты A_k, B_k определяются подстановкой решения в уравнение. При отыскании обобщенных решений правую часть $f(x)$ следует представить в виде

$$f(x) = f(x)[\theta(x) - \theta(x - 1)], \quad \theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

и при дифференцировании ее учесть, что $\theta^{(k)}(x) = \delta^{(k-1)}(x)$. О других методах решения см. [23], [31], [36] и § 1 этой главы.

11.4. Собственные значения. В этом пункте приводится ряд результатов о собственных значениях уравнения (8.108). В основном эти результаты относятся к случаю, когда $K(\lambda) \geqslant 0$, т. е. к случаю, когда интегральный оператор в уравнении положителен. Всюду собственные значения нумеруются в порядке убывания.

Теорема 11.1 ([59]). *Пусть*: a) $K(\lambda)$ — *неотрицательная, четная и убывающая при* $\lambda > 0$ *функция*;

b) *если* λ, $\mu \to \infty$ *и* $\lambda \sim \mu$, *то* $K(\lambda) \sim K(\mu)$.

Если же $\lambda = o(\mu)$, *то и* $K(\lambda) = o[K(\mu)]$. *Тогда собственные значения уравнения*

$$\lambda\varphi(x) = \int_S k(x-y)\varphi(y)\,dy, \qquad x \in S, \tag{8.107}$$

в котором S — *объединение конечного числа интервалов, имеют асимптотическое представление*

$$\lambda_n \sim K\left(\frac{\pi n}{\operatorname{mes} S}\right). \tag{8.108}$$

Это утверждение имеет место и для любого ядра, преобразование Фурье которого при $\lambda \to \infty$ асимптотически равно функции, удовлетворяющей условиям теоремы.

В [59] рассмотрен более общий случай, когда S — любое измеримое по Жордану множество.

Из теоремы 11.1 получается, в частности, следующее утверждение:

Если S — ограниченное измеримое множество, $k|x| = |x|^\alpha$, где α — нецелое число > -1, λ_n — собственные числа уравнения (8.107), то

$$\lambda_n \sim \frac{2^{1+\alpha}}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)} \left\{\frac{\operatorname{mes} S}{\pi n}\right\}^{1+\alpha}. \tag{8.109}$$

Такая же асимптотика имеет место для положительно определенных ядер, преобразования Фурье которых асимптотически (при $\lambda \to \infty$) равны преобразованию Фурье ядра $|x|^\alpha$ ([52], [54], [59]).

Например ([54]), если $k(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)c\,|x|^{\alpha-1} + b(x)$, где $c > 0$, $\alpha > \frac{1}{2}$ — нецелое число, $b(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\beta > \alpha$, то собственные числа уравнения

$$\lambda\varphi(x) = \int_{-T}^{T} k(x-t)\,\varphi(t)\,dt, \qquad -T < x < T, \tag{8.110}$$

имеют асимптотическое представление

$$\lambda_n \sim 2\Gamma(\alpha)\,c\left(\frac{2T}{n\pi}\right)^{\alpha}, \qquad n \to \infty.$$

Теорема 11.2 [61]. *Пусть $K(\lambda)$ — ограниченная, неотрицательная, четная функция и $\Gamma(\lambda) = -\ln K(\lambda)$; тогда:*

a) *если $\Gamma(\lambda)$ непрерывна и возрастает для больших λ и $\lambda^{-1}\Gamma(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$, то собственные числа уравнения $\lambda\varphi(x) = \int_{-1}^{1} k(x-y)\,\varphi(y)\,dy$ имеют асимптотическое представление*

$$\lambda_n \sim K\left[\frac{n\pi}{2} + o(n)\right].$$

b) *Если $\Gamma(\lambda) \sim \alpha\lambda$, $0 < \alpha < \infty$, то*

$$\ln\lambda_n \sim -n\pi\frac{\mathbf{K}\left[\operatorname{sch}\dfrac{\pi}{\alpha}\right]}{\mathbf{K}\left[\operatorname{th}\dfrac{\pi}{\alpha}\right]}, \tag{8.111}$$

где

$$K(\nu) = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \nu^2\sin^2\theta)^{-1/2}\,d\theta.$$

c) *Если $\Gamma(\lambda)$ выпукла для больших λ и $\lambda^{-1}\Gamma(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to +\infty$, то $\ln\lambda_n \sim -\Gamma(\sigma_n)$, где σ_n — единственный корень уравнения $\Gamma(\sigma) = 2n\ln\frac{n}{\sigma}$, $0 < \sigma < n$.*

d) *Если* $\ln\Gamma(\lambda) \sim \alpha\ln\lambda$, $\alpha > 1$, то $\ln\lambda_n \sim -(2-2/\alpha)\,n\ln n$.

e) *Если* $\dfrac{\ln\Gamma(\lambda)}{\ln\lambda} \to \infty$ при $\lambda \to \infty$, то $\ln\lambda_n \sim -2n\ln n$ ([59]).

Обозначим через $k_\alpha(x, y)$ ядро, определенное следующим образом. Если α — четное положительное число, то $k_\alpha(x, y)$ есть функция Грина дифференциального оператора

$$Ly = (-1)^{\alpha/2} y^{(\alpha)}; \quad y^{(s)}(-1) = y^{(s)}(1) = 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant \alpha/2 - 1.$$

Если $0 < \operatorname{Re} \alpha < 2$, $x, y \in (-1, 1)$, то

$$k_\alpha(x, y) = \frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}}{\Gamma(\alpha)} |x - y|^{\alpha - 1} \max(0, x - y) - \\ - \frac{\sin\frac{\alpha\pi}{2}}{\pi\Gamma(\alpha)} (1 - y^2)^{\alpha/2} \int_{-1}^{x} \frac{(x - t)^{\alpha - 1}}{(1 - t^2)^{\alpha/2}(t - y)} dt$$

(если $y < x$, то интеграл понимается в смысле главного значения), при этом $k_\alpha(x, y) = k_\alpha(y, x)$. Для чисел $\alpha = 2k + \beta$, $k = 0, 1, \ldots, 0 \leqslant \operatorname{Re} \beta < 2$ и $x < y$ ядро $k_\alpha(x, y)$ получается аналитическим продолжением функции $k_\alpha(x, y)$ по α. Для $x > y$ указанное ядро получается аналитическим продолжением функции $k_\alpha(y, x)$.

Для $\alpha = 1$

$$k_1(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1 - xy + [(1 + x^2)(1 - y^2)]^{1/2}}{1 - xy - [(1 - x^2)(1 - y^2)]^{1/2}}.$$

Для $\alpha = 2$

$$k_2(x, y) = \frac{1}{2} [1 + \min(x, y)][1 - \max(x, y)].$$

Теорема 11.3 ([58]). *Пусть преобразование Фурье четной вещественной функции $k(x) \in L_p(-\infty, \infty)$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, удовлетворяет условиям:*

1. $\max\limits_{|\lambda| > \delta} K(\lambda) < M$ *для любого* $\delta > 0$.
2. $\lim\limits_{\lambda \to 0} |\lambda|^{-\alpha} [M - K(\lambda)] = c, \quad 0 < c < \infty, \quad 0 < \alpha < \infty.$

Тогда положительные собственные значения $\lambda_{n, A}$ уравнений

$$\lambda\varphi(x) = A \int_{-1}^{1} k[A(x - y)] \varphi(y) dy, \qquad -1 < x < 1, \qquad (8.112)$$

допускают представление

$$\lambda_{n, A} = M - \frac{c}{\lambda_n A^\alpha} + o(A^{-\alpha}), \qquad (8.113)$$

где λ_n — собственные значения описанного выше положительного определенного ядра $k_\alpha(x, y)$.

При $\alpha = 2$ из этой теоремы следует, что

$$\lambda_{n, A} = M - \frac{c^2\pi^2 n^2}{8A^2} + o\left(A^{-2}\right).$$

Отметим один частный, но важный для некоторых приложений результат [51]: все собственные значения уравнения

$$\lambda\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-T}^{T}\varphi(y)\frac{\sin(x-y)}{x-y}\,dy, \qquad -T \leqslant x \leqslant T, \tag{8.114}$$

простые и при $T \to \infty$ имеют представление

$$\lambda_n \sim 1 - \frac{4\sqrt{\pi}\,8^n}{n!\,e^{2T}}T^{n+1/2}.$$

(В [55] имеются таблицы первых восьми собственных чисел для $T = 0{,}5$; $1{,}0$; $2{,}9$; $8{,}0$.)

Собственные функции, соответствующие четным (нечетным) значениям n, являются четными (нечетными) функциями. Собственные функции $\varphi_n(x)$ выражаются через собственные функции задачи

$$(1 - x^2)\frac{d^2u}{dx^2} - 2x\frac{du}{dx} + (\chi - x^2)u = 0,$$

u непрерывна в $[-1, 1]$, соотношением $\varphi_n(x) = u_n(x/T)$ (u_n нумеруются в порядке возрастания собственных чисел задачи) ([55], [61]).

Преобразование Фурье ядра уравнения (8.114) совпадает с характеристической функцией интервала $(-T, T)$. В [53] рассмотрено уравнение вида (8.107) в предположении, что преобразование Фурье его ядра совпадает с характеристической функцией некоторого ограниченного открытого множества.

В заключение отметим еще два предложения общего характера.

Теорема 11.4 ([60]). *Пусть $k(x) = e^{\gamma(x)}$, $x \geqslant 0$, где $\gamma(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая вещественная функция, для которой*:

a) $\gamma''(x) > 0$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} x\gamma'(x) = \infty$.

c) $\gamma''(x) = o\left(\gamma'^2\right)$.

Тогда уравнение (8.110) *с ядром* $k(|x-y|)$ *имеет собственные значения, асимптотически равные* $\pm\frac{[k(2T)]^2}{k'(2T)}$ *при* $T\to\infty$. *Эти собственные значения простые и соответствующие им собственные функции стремятся к* $\sqrt{k(2x)}$ *и* $\operatorname{sign} x\sqrt{k(2x)}$ *соответственно. Остальные собственные значения имеют порядок* $o\left(\frac{[k(2T)]^2}{k'(2T)}\right)$ *при* $T\to\infty$.

Теорема 11.5 [15]. *Пусть ядро уравнения* (8.110) *представимо в виде*

$$k(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\lambda x}f(\lambda)\,d\lambda,\qquad f(\lambda)\in L(-\infty,\infty).$$

Пусть $N(a, b)$ — *число собственных значений уравнения, лежащих в промежутке* (a, b), $ab>0$. *Если лебеговы меры множеств* $[f(x)=a]$, $[f(x)=b]$ *равны нулю, то*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{N(a,b)}{2T}=\frac{1}{2\pi}\operatorname{mes}[a<f(x)<b].$$

ГЛАВА IX

МНОГОМЕРНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Теория сингулярных интегральных уравнений, в которых интеграл распространен по многообразию m (где $m > 1$) *) измерений, в течение довольно долгого времени развивалась сравнительно медленно. Однако в самые последние годы интерес к ним резко возрос. В 1962 г. была напечатана монография [18], содержащая в основном изложение работ ее автора; из работ других авторов более видное место в ней занимают работы А. П. Кальдерона и А. Зигмунда. Одновременно или несколько позже появился ряд работ разных авторов, в которых в одних случаях разрешен, а в других поставлен ряд важных вопросов теории многомерных сингулярных уравнений. Так, для уравнений с гладким замкнутым многообразием интегрирования и с невырождающимся символом полностью решена проблема индекса; исследован в основном случай многообразия интегрирования с краем; исследованы и получили интересные приложения сингулярные интегро-дифференциальные уравнения; начато исследование уравнений с вырождающимся символом; многое сделано для изучения многомерных сингулярных уравнений в обобщенных функциях.

В настоящей главе мы не будем касаться приложений многомерных сингулярных уравнений. Некоторые приложения указаны в книге [18]; в статьях [28] и [43] многомерные сингулярные уравнения применяются в задаче Коши для уравнений гиперболического типа. В своей книге [15] В. Д. Купрадзе широко применяет многомерные сингулярные интегральные уравнения к задачам трехмерной теории упругости.

*) Для краткости мы называем такие уравнения «многомерными».

Наконец, следует отметить обзорную статью М. С. Аграновича [1], в которой с помощью многомерных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений исследуются краевые задачи для эллиптических систем весьма общего вида.

На литературу, приведенную в монографии [18], здесь мы, как правило, ссылок делать не будем.

§ 1. Простейшие понятия и теоремы

1.1. Обозначения. Введем следующие обозначения: E_m — евклидово пространство m измерений; $x, y, z, \ldots$ — точки этого пространства. Декартовы координаты точки x обозначаются через $x_1, x_2, \ldots, x_m$, аналогично для точек $y, z, \ldots$ Далее, $r = |x-y|$, $\theta = \frac{y-x}{r}$; точка θ пробегает сферу радиуса единица и с центром в начале координат (единичную сферу). Эту сферу мы всегда ниже будем обозначать через S.

Иногда нам придется рассматривать единичную сферу в $(m+1)$-мерном евклидовом пространстве E_{m+1}. Эту сферу будем обозначать буквой Σ и будем называть римановой сферой для пространства E_m; последнее переводится в свою риманову сферу с помощью стереографического преобразования ($\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m, \xi_{m+1}$ — декартовы координаты точки на сфере Σ):

$$\xi_k = \frac{2x_k}{x^2+1}, \quad k = 1, 2, \ldots, m; \quad \xi_{m+1} = \frac{x^2-1}{x^2+1};$$

$$x^2 = |x|^2 = \sum_{k=1}^{m} x_k^2. \tag{9.1}$$

Если ξ и η — точки римановой сферы, соответствующие по формулам (9.1) точкам x и y пространства E_m, и ρ — расстояние между ξ и η:

$$\rho^2 = |\xi-\eta|^2 = \sum_{k=1}^{m} (\xi_k - \eta_k)^2,$$

то

$$r^2 = \frac{1}{4}\rho^2(x^2+1)(y^2+1). \tag{9.2}$$

1.2. Сингулярный интеграл. Пусть D — область пространства E_m. Эта область может быть конечной или бесконечной; она может совпадать с пространством E_m — этот случай особо интересен. Мы будем рассматривать сингулярные интегралы вида

$$\int_D u(y) \frac{f(x, \theta)}{r^m} dy, \tag{9.3}$$

которые будем определять формулой

$$\int_D u(y) \frac{f(x, \theta)}{r^m} dy = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{D \setminus (r<\varepsilon)} u(y) \frac{f(x, \theta)}{r^m} dy, \tag{9.4}$$

где через dy обозначен элемент объема в пространстве E_m.

Разумеется формула (9.4) имеет смысл лишь в том случае, когда предел справа существует. Точка x называется *полюсом* сингулярного интеграла (9.3), функция $f(x, \theta)$ — его *характеристикой*, функция $u(y)$ — его *плотностью*. Определение (9.4) находится в согласии с определением главного значения интеграла в смысле Коши: особая точка x вырезается шаром с центром в точке x и произвольно малым радиусом ε, и интегрирование совершается по оставшейся области; если полученный таким образом интеграл имеет предел, когда $\varepsilon \to 0$, то этот предел и принимается за сингулярный интеграл (9.3).

Во всем последующем мы всегда будем предполагать, что характеристика удовлетворяет условию

$$\int_S f(x, \theta)\, dS = 0. \tag{9.5}$$

Легко убедиться, что сингулярный интеграл (9.4), как правило, не существует, если условие (9.5) не выполнено.

1.3. Условия существования сингулярного интеграла. Сформулируем некоторые условия, при которых интеграл (9.3) существует и обладает теми или иными аналитическими свойствами. Ниже D означает открытую область, а $\bar{D}$ — замкнутую область, полученную из D присоединением точек ее границы.

Теорема 1.1. *Пусть в замкнутой области D плотность $u(y)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем α, $0 < \alpha < 1$, так что*

$$|u(y) - u(x)| \leqslant Cr^{\alpha}, \qquad C = \text{const},$$

а на бесконечности (если область D — бесконечной меры) — *условию* $u(y) = O(|y|^{-k})$, $k = \text{const} > 0$. *Пусть, далее, характеристика ограничена и непрерывна по* θ *и* x. *Тогда интеграл* (9.3) *существует при любом* $x \in D$ *и представляет собой функцию от* x, *непрерывную в* D.

Теорема 1.2. *Пусть плотность удовлетворяет условиям теоремы* 1.1, *а характеристика ограничена и непрерывно дифференцируема по декартовым координатам точек* x *и* θ. *Тогда интеграл* (9.3) *удовлетворяет условию Липшица с тем же показателем* α *в любой конечной внутренней подобласти* $D' \in D$.

Более сильная теорема будет приведена в § 3.

Прежде чем сформулировать следующую теорему, введем некоторые определения. Будем говорить, что $u \in A_{\alpha, k}$, если функция $u(x)$ определена всюду в E_m и удовлетворяет условиям: $u(x) = O(|x|^{-k})$ при достаточно больших x и

$$|u(y) - u(x)| \leqslant C(x^2 + 1)^{-k/2} r^{\alpha}, \qquad r \leqslant 1. \tag{9.6}$$

Далее, скажем, что $u \in A'_{\alpha, k}$, если $u(x)$ удовлетворяет неравенству (9.6), а на бесконечности — условию

$$u(x) = O(|x|^{-k} \ln |x|).$$

В обоих определениях C, α и k — положительные постоянные, причем $\alpha < 1$.

Теорема 1.3. *Пусть характеристика удовлетворяет условиям теоремы* 1.2 *и* $k < m$. *Тогда сингулярный интегральный оператор*

$$v(x) = \int_{E_m} \frac{f(x, \theta)}{r^m} u(y)\, dy \tag{9.7}$$

переводит функцию $u \in A_{\alpha, k}$ *в функцию* $v \in A'_{\alpha, k}$.

Теорема 1.4 [29]. *Пусть при некотором* p, $1 < p < \infty$, *характеристика удовлетворяет неравенству*

$$\int_S |f(x, \theta)|^{p'} dS \leqslant C = \text{const}, \quad 1/p + 1/p' = 1. \tag{9.8}$$

Если $u \in L_p(E_m)$, *то сингулярный интеграл* (9.7) *существует при почти всех* $x \in E_m$; *при этом также* $v(x) \in L_p(E_m)$, *и в пространстве* $L_p(E_m)$ *сингулярный опе-*

ратор (9.7) *ограничен: существует такая постоянная* *) A_p, *что*

$$\|v\|_p = \left\{ \int_{E_m} |v(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} \leqslant$$
$$\leqslant A_p \left\{ \int_{E_m} |u(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} = A_p \|u\|_p. \qquad (9.9)$$

Допустим, что плотность и характеристика удовлетворяют условиям теоремы 1.1. Вырежем точку x областью σ_ε произвольной формы. Пусть $r = \alpha(\varepsilon, x, \theta)$ — уравнение границы этой области и пусть существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\alpha(\varepsilon, x, \theta)}{\varepsilon} = \beta(x, \theta) > 0,$$

причем стремление к пределу — равномерное относительно θ, тогда верна формула

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{D \setminus \sigma_\varepsilon} \frac{f(x, \theta)}{r^m} u(y) \, dy =$$
$$= \int_D \frac{f(x, \theta)}{r^m} u(y) \, dy - u(x) \int_S f(x, \theta) \ln \beta(x, \theta) \, dS; \qquad (9.10)$$

в этой формуле первый член справа есть сингулярный интеграл, определенный формулой (9.4).

Пусть D — конечная область пространства E_m, x — переменная точка этой области, $\bar{D}$ — замкнутая область, полученная из D присоединением точек ее границы. Рассмотрим интеграл

$$w(x) = \int_D \frac{\varphi(x, \theta)}{r^{m-1}} u(y) \, dy. \qquad (9.11)$$

Теорема 1.5. *Пусть функция* $\varphi(x, \theta)$ *имеет в* $\bar{D}$ *непрерывные первые производные по декартовым координатам точек* x *и* θ, *а* $u \in L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$. *Тогда интеграл* (9.11) *имеет обобщенные производные* $\frac{\partial w}{\partial x_k} \in L_p(\Omega)$;

---

*) Она может зависеть от p.

эти производные даются формулой (вектор r направлен от точки x к точке y)

$$\frac{\partial w}{\partial x_k} = \int\limits_D \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\frac{\varphi(x, \theta)}{r^{m-1}}\right] u(y)\,dy - u(x)\int\limits_S \varphi(x, \theta)\cos(r, x_k)\,dS. \tag{9.12}$$

Если $u(y)$ *удовлетворяет в* $\bar{D}$ *условию Липшица с показателем* α, $0 < \alpha < 1$, *то производные* $\frac{\partial w}{\partial x_k}$ *непрерывны в* D.

§ 2. Символ

2.1. Сингулярный оператор. Сингулярные интегралы будем пока рассматривать как операторы, действующие в некотором заданном банаховом пространстве функций, определенных в E_m. Ниже понятие сингулярного оператора будет расширено. Пусть E — такое пространство. *Сингулярным оператором* в пространстве E мы назовем оператор A, определяемый формулой вида

$$(Au)(x) = a(x)\,u(x) + \int\limits_{E_m} \frac{f(x, \theta)}{r^m}\,u(y)\,dy + (Tu)(x); \tag{9.13}$$

здесь T — оператор, вполне непрерывный в E.

2.2. Символ сингулярного оператора. *Символом* сингулярного оператора A назовем функцию $\Phi_A(x, \theta)$ точек $x \in E_m$ и $\theta \in S$, удовлетворяющую, при тех или иных ограничениях, наложенных на $a(x)$ и $f(x, \theta)$, следующим трем требованиям:

1) символ любого вполне непрерывного оператора равен нулю;

2) символ суммы двух сингулярных операторов равен сумме их символов;

3) символ произведения двух сингулярных операторов равен произведению их символов.

2.3. Формулы, определяющие символ. Символ оператора A можно определить формулой

$$\Phi_A(x, \theta) = a(x) + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{E_m} \frac{f\left(x, \frac{y}{|y|}\right)}{|y|^m}\,e^{-i(y, z)}\,dy; \qquad \theta = \frac{z}{|z|}. \tag{9.14}$$

Предел в правой части формулы (9.14) существует при довольно широких предположениях относительно характеристики. Достаточно, например, чтобы

$$\int_S |f(x,\ \theta)|^2 dS < \infty. \tag{9.15}$$

Можно указать еще две формулы для символа, более простые по структуре, чем формула (9.14). Одна из них такова:

$$\Phi_A(x,\ \theta) = a(x) + \int_S \left[\ln\frac{1}{\cos\gamma} - \frac{i\pi}{2}\operatorname{sign}\cos\gamma\right] f(x,\ \theta')\,dS'; \tag{9.16}$$

здесь γ — угол между векторами, проведенными из начала координат в точки θ и θ', интегрирование в (9.16) совершается по переменной точке θ'.

Обозначим через $Y_{n,m}^{(k)}(\theta)$ систему ортогональных и нормированных в метрике $L_2(S)$ m-мерных сферических функций. Через n обозначим порядок сферической функции, так что n меняется от нуля до бесконечности; номер k меняется от единицы до $k_{n,m} = (2n+m-2)\frac{(n+m-3)!}{(m-2)!\,n!}$, где $k_{m,n}$ есть число линейно независимых m-мерных сферических функций порядка m [42]. Разложим характеристику в ряд по сферическим функциям

$$f(x,\ \theta) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_{n,m}} a_n^{(k)}(x)\,Y_{n,m}^{(k)}(0). \tag{9.17}$$

Член с $n=0$ отсутствует в силу тождества (9.5). Символ оператора (9.13) определяется также следующим рядом:

$$\Phi(x,\ \theta) = a(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_{n,m}} \gamma_{n,m} a_n^{(k)}(x)\,Y_{n,m}^{(k)}(\theta), \tag{9.18}$$

где

$$\gamma_{n,m} = \frac{i^n \pi^{m/2}\Gamma(n/2)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}. \tag{9.19}$$

Для исследования свойств символа важны оценки, верные для больших n и вытекающие из формулы Стирлинга:

$$\gamma_{n,m} = O(n^{-m/2}), \qquad \frac{1}{\gamma_{n,m}} = O(n^{m/2}). \tag{9.20}$$

Из формулы (9.18), очевидно, вытекает следующее: если символ задан формулой вида

$$\Phi(x, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_{m,n}} b_n^{(k)}(x) Y_{n,m}^{(k)}(\theta),$$

то соответствующая характеристика определяется рядом

$$f(x, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_{m,n}} \frac{b_n^{(k)}(x)}{\gamma_{n,m}} Y_{n,m}^{(k)}(\theta).$$

При $m=2$ этот ряд удалось просуммировать [10] и получить для характеристики следующую формулу:

$$f(x, \theta) = -\frac{1}{4\pi i} \frac{d}{d\theta} [\Phi(x, \theta+\pi) - \Phi(x, \theta)] -$$

$$- \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\pi} \operatorname{ctg}(\theta-\psi) \frac{d}{d\psi} [\Phi(x, \psi+\pi) + \Phi(x, \psi)]\, d\psi. \tag{9.21}$$

Символ, определенный формулой (9.14), очевидным образом удовлетворяет требованиям 1) и 2), сформулированным выше. Требование 3), которое мы будем называть *правилом умножения символов*, выполняется при определенных ограничениях на $a(x)$ и $f(x, \theta)$; эти ограничения в свою очередь зависят от того банахова пространства, в котором рассматривается сингулярный оператор $\dot{A}$. Правило умножения символов будет подробно рассмотрено в § 3.

2.4. Некоторые новые понятия. Пусть $g(x, \theta)$ — произвольная функция точек x и θ, где x пробегает некоторое множество M, а θ — единичную сферу S. Мы будем считать, что $g(x, \theta)$ как функция точки θ продолжена на все пространство E_m, кроме начала координат и бесконечно удаленной точки, таким образом, что эта функция сохраняет постоянное значение на любом луче, проходящем через начало координат. Обычно мы будем рассматривать продолженную так функцию как функцию, заданную в шаровом слое Ω, определяемом неравенствами $\rho_1 \leqslant |\theta| \leqslant \rho_2$, где ρ_1 и ρ_2 — произвольно, но раз и навсегда зафиксированные положительные числа.

Будем говорить, что при фиксированном x функция $g(x, \theta)$ принадлежит пространству $W_p^{(l)}(S)$, если, будучи продолжена так, как указано выше, она принадлежит пространству $W_p^{(l)}(\Omega)$. При этом под $W_p^{(l)}(\Omega)$ мы понимаем пространство С. Л. Соболева [24], [25], если l целое, и пространство Л. Н. Слободецкого [23], если l нецелое. Норму в $W_p^{(l)}(S)$ зададим естественным равенством

$$\| g \|_{W_p^{(l)}(S)} = \| g \|_{W_p^{(l)}(\Omega)}. \tag{9.22}$$

Далее, будем говорить, что функция $g(x, \theta)$ равномерно (на множестве M) принадлежит пространству $W_p^{(l)}(S)$, и обозначать это символически $g \mathbin{\hat{\in}} W_p^{(l)}(S)$, если $g \in W_p^{(l)}(S)$ при любом $x \in M$ и если

$$\| g \|_{W_p^{(l)}(S)} \leqslant C,$$

где C не зависит от x.

В последующем будем считать, что в операторе A внеинтегральный коэффициент $a(x)$ ограничен.

Теорема 2.1. *Если в операторе* (9.13) *характеристика* $f \mathbin{\hat{\in}} W_2^{(l)}(S)$, $l \geqslant 0$, *то символ* $\Phi_A \mathbin{\hat{\in}} W_2^{(l+m/2)}(S)$. *Обратно, если* $\Phi_A \mathbin{\hat{\in}} W_2^{(\chi)}(S)$, $\chi \geqslant \frac{m}{2}$, *то* $f \mathbin{\hat{\in}} W_2^{(\chi-m/2)}(S)$.

В таком виде эта теорема содержится в [1]. Соответствующая теорема для целых показателей дана в [18].

2.5. Изменение символа при замене независимых переменных. Пусть в пространстве E_m координаты x_k заменены координатами x'_k по формулам

$$x_k = x_k(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n). \tag{9.23}$$

Обозначим через $\mathfrak{A}$ якобиеву матрицу преобразования (9.23), вычисленную в фиксированной точке x. Как и выше, будем считать, что θ — произвольная точка пространства E_m, отличная от начала координат и от бесконечно удаленной точки, и что рассматриваемые нами функции от θ постоянны на лучах, проходящих через начало. Тогда, обозначая через

$\Phi(x, \theta)$ и $\breve{\Phi}(x', \theta)$ символ некоторого сингулярного оператора до и после применения преобразования (9.23), имеем

$$\breve{\Phi}(x', \theta) = \Phi\left(x, (\mathfrak{A}^*)^{-1}\theta\right). \tag{9.24}$$

Формула упрощается, если в данной точке матрица ортогональная, — в этом случае, очевидно,

$$\breve{\Phi}(x', \theta) = \Phi(x, \mathfrak{A}\theta). \tag{9.25}$$

2.6. Интегральное представление оператора через его символ. Понятие символа позволяет расширить понятие сингулярного оператора следующим образом. Будем рассматривать оператор вида

$$(Au)(x) = a(x)\,u(x) + \int_{E_m} \frac{f(x, \theta)}{r^m}\,u(y)\,dy. \tag{9.26}$$

При некоторых предположениях относительно символа этого оператора можно доказать, что оператор (9.26) допускает представление

$$(Au)(x) = \int_{\Pi} \Phi(x, \theta)\,dE(\theta)\,u. \tag{9.27}$$

Поясним обозначения последней формулы. В ней

$$dE(\theta) = \prod_{k=1}^{m-1} dE_k(\vartheta_k),$$

где $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-1}$ — угловые координаты точки θ. Далее

$$dE_k(\vartheta_k) = \mathcal{F}^{-1}\,dE'_k(\vartheta_k)\,\mathcal{F},$$

где $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье, а $E'_k(\vartheta_k)$ есть спектральная функция оператора умножения на ϑ_k. Наконец, Π — параллелепипед, определяемый неравенствами:

$$0 \leqslant \vartheta_k \leqslant \pi, \quad 1 \leqslant k \leqslant m-2, \quad -\pi \leqslant \vartheta_{m-1} \leqslant \pi. \tag{9.28}$$

Под *простейшим сингулярным оператором* с символом $\Phi(x, \theta)$ будем далее понимать оператор, определяемый формулой (9.27). В общем случае под сингулярным оператором будем понимать сумму двух операторов: простейшего сингулярного и вполне непрерывного.

§ 3. Сингулярные операторы в $L_p(E_m)$

3.1. Условия ограниченности сингулярного оператора.
Теорема 3.1. *Оператор* (9.27) *ограничен в* $L_p(E_m)$, $1<p<\infty$, *если его символ* $\Phi(x,\theta)\,\hat{\in}\, W_2^{(l)}(S)$, *где*

$$l \geqslant \frac{m-1}{p}+1,\quad 1<p<2;\quad l\geqslant\frac{m+1}{2},\quad 2\leqslant p<\infty.$$

Заметим, что одна теорема об ограниченности сингулярного оператора в $L_p(E_m)$, но сформулированная в терминах характеристики, а не символа, дана в § 1 (теорема 1.4).

Для $p=2$ справедливы также следующие две теоремы.

Теорема 3.2. *Если символ* $\Phi(x,\theta)$ *и его производные*

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta_1},\ \frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta_2},\ \ldots,\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial\vartheta_1\,\partial\vartheta_2},\ \ldots,\ \frac{\partial^{m-2}\Phi}{\partial\vartheta_1\,\partial\vartheta_2\ldots\partial\vartheta_{m-2}}$$

измеримы по совокупности точек (x,θ), *непрерывны при фиксированном* x *и ограничены независимо от* x, *а производная*

$$\frac{\partial^{m-1}\Phi}{\partial\vartheta_1\,\partial\vartheta_2\ldots\partial\vartheta_{m-1}}$$

существует как обобщенная по *С. Л. Соболеву и удовлетворяет неравенству*

$$\int\limits_{\Pi}\left|\frac{\partial^{m-1}\Phi}{\partial\vartheta_1\,\partial\vartheta_2\ldots\partial\vartheta_{m-1}}\right|^2 d\vartheta_1\,d\vartheta_2\ldots d\vartheta_{m-1}\leqslant C=\mathrm{const},$$

то сингулярный оператор ограничен в $L_2(E_m)$.

Теорема 3.3. *Если символ* $\Phi(\theta)$ *не зависит от полюса и в существенном ограничен* *), *то сингулярный оператор* $A=\mathcal{F}^{-1}\Phi(\theta)\mathcal{F}$ *ограничен в* $L_2(E_2)$ *и*

$$\|A\|=\operatorname{supess}|\Phi(\theta)|. \tag{9.29}$$

Отметим еще одно соотношение, связывающее, в некотором смысле, норму сингулярного оператора с его символом. Пусть A — сингулярный оператор с символом $\Phi_A(x,\theta)$ и

*) Как известно, это означает, что рассматриваемая функция станет ограниченной, если подходящим образом изменить ее значение на множестве меры нуль; через supess обозначается нижняя грань supremum'ов функции при всевозможных таких изменениях.

T — произвольный вполне непрерывный в $L_2(E_m)$ оператор. Обозначим через ξ образ точки x при стереографическом отображении пространства E_m на риманову сферу Σ, и пусть символ непрерывен как функция обеих точек ξ и θ, когда ξ пробегает сферу Σ, а θ — сферу S. Тогда ([8], [14])

$$\inf \| A + T \|_{L_2(E_m)} = \max_{\substack{x \in E_m \\ \theta \in S}} | \Phi_A(x, \theta) |, \tag{9.30}$$

inf берется по всевозможным операторам T, вполне непрерывным в $L_2(E_m)$.

О некоторых обобщениях равенства (9.30) см. [1].

Приведем еще теорему [41] об ограниченности сингулярного оператора в пространствах функций, суммируемых в некоторой степени и с некоторым весом. Обозначим через $L_p(\rho, E_m)$ пространство функций, суммируемых в степени p с весом $\rho(x)$; как известно, норма в этом пространстве определяется формулой

$$\| u \|^p = \int_{E_m} \rho(x) | u(x) |^p \, dx.$$

Сингулярные операторы в пространствах с весом изучаются также в статье [6].

Теорема 3.4. *Пусть символ сингулярного оператора A удовлетворяет условиям теоремы* 3.1 (или условиям одной из теорем 3.2 или 3.3 при $p = 2$) *и, кроме того, характеристика оператора A ограничена. Если постоянная β такова, что $-m < \beta < m(p-1)$, то оператор A ограничен в пространстве $L_p\left(|x|^\beta, E_m\right)$.*

Укажем еще, не входя в подробности, что в работах [22] и [36] изучается вопрос об ограниченности многомерных сингулярных операторов в пространствах Орлича.

3.2. Разложение простейшего сингулярного оператора в ряд. Следующая теорема устанавливает условия, при которых простейший сингулярный оператор можно разложить в ряд по сингулярным операторам, характеристики которых суть сферические функции.

Теорема 3.5. *Пусть A — простейший сингулярный оператор, символ которого $\Phi_A(x, \theta) \in W_2^{(l)}(S)$, где*

$$l \geqslant \frac{m-1}{p} + 2, \quad 1 < p < 2; \quad l \geqslant \frac{m+3}{2}, \quad 2 \leqslant p < \infty.$$

Разложению символа в ряд по сферическим функциям

$$\Phi_A(x,\ \theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_{n,m}} a_n^{(k)}(x)\,Y_{n,m}^{(k)}(\theta) \tag{9.31}$$

соответствует разложение оператора A в сходящийся в норме $L_p(E_m)$ ряд

$$A=a_0^{(1)}(x)\,I+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_{n,m}} a_n^{(k)}(x)\,A_n^{(k)}, \tag{9.32}$$

где I — тождественный оператор, а $A_n^{(k)}$ — простейший сингулярный оператор с символом $Y_{n,m}^{(k)}(\theta)$:

$$\left(A_n^{(k)}u\right)(x)=\frac{1}{\gamma_{n,m}}\int\limits_{E_m}\frac{Y_{n,m}^{(k)}(\theta)}{r^m}\,u(y)\,dy.$$

3.3. Правило умножения символов.

Теорема 3.6. *Пусть A и B — сингулярные операторы, символы которых $\Phi_A(x,\ \theta)$ и $\Phi_B(x,\ \theta)$ удовлетворяют условиям теоремы 3.4. Пусть еще эти символы равномерно относительно θ непрерывны на римановой сфере. Тогда оператор $AB-BA$ вполне непрерывен в $L_p(E_m)$ и символ произведения AB равен произведению $\Phi_A(x,\ \theta)\,\Phi_B(x,\ \theta)$.*

3.4. Оператор, сопряженный с сингулярным. Если сингулярный оператор A ограничен в $L_p(E_m)$, то существует сопряженный оператор A^*, действующий в $L_{p'}(E_m)$, $1/p+1/p'=1$, и ограниченный в этом пространстве. Представляют интерес те условия, при которых A^* также есть сингулярный оператор в смысле определения, данного в конце § 2. Следующие две теоремы выясняют эти условия.

Теорема 3.7. *Пусть A — простейший сингулярный оператор, символ которого $\Phi(\theta)$ не зависит от полюса. Тогда сопряженный оператор A^* есть простейший сингулярный оператор с символом $\overline{\Phi(\theta)}$.*

Теорема 3.8. *Пусть A — сингулярный оператор, символ которого $\Phi_A(x,\ \theta)$ удовлетворяет следующим условиям:* 1) $\Phi_A\,\widehat{\in}\,W_2^{(l)}(S)$, *где* $l\geqslant\frac{m-1}{q}+2,\ q=\min(p,\ p')$,

2) *символ непрерывен на римановой сфере равномерно относительно* θ. *Тогда сопряженный оператор* A^* *есть сингулярный оператор с символом* $\Phi_{A^*}(x, \theta) = \overline{\Phi_A(x, \theta)}$.

§ 4. Сингулярные интегралы на многообразии

4.1. Определение сингулярного оператора и его символа. Пусть Γ — ляпуновское компактное многообразие m измерений; ξ и η — точки на многообразии Γ; ρ — расстояние между ξ и η, определенное, например, в смысле внутренней метрики многообразия; $d_\eta\Gamma$ — элемент меры на Γ. Будем рассматривать интегралы вида

$$\int_\Gamma K(\xi, \eta)\, u(\eta)\, d_\eta\Gamma, \tag{9.33}$$

в которых ядро $K(\xi, \eta)$ удовлетворяет ряду требований, формулируемых ниже.

Зададим число $\varepsilon > 0$. Зафиксируем точку $\xi \in \Gamma$ и рассмотрим множество Γ_ε тех точек $\eta \in \Gamma$, для которых $\rho < \varepsilon$. Потребуем, прежде всего, чтобы на множестве $\Gamma \setminus \Gamma_\varepsilon$ ядро $K(\xi, \eta)$ было суммируемо.

Если ε достаточно мало, то множество Γ_ε можно взаимно однозначно отобразить на некоторую область D евклидова пространства E_m. Можно при этом потребовать, чтобы якобиева матрица отображения удовлетворяла условию Липшица с некоторым положительным показателем. Наконец, потребуем, чтобы в точке ξ преобразование было конформным. Нужное нам преобразование можно осуществить, например, так: в точке ξ построим касательную плоскость к Γ; за y примем ортогональную проекцию точки $\eta \in \Gamma_\varepsilon$ на эту плоскость. Будем ниже считать, что преобразование $\eta \to y$ именно так и выбрано.

Обозначим через x и y образы точек ξ и η при упомянутом отображении. Положим еще

$$K(\xi, \eta)\, d_\eta\Gamma = L(x, y)\, dy, \qquad u(\eta) = v(y).$$

Предположим еще, что ядро $L(x, y)$ допускает представление

$$L(x, y) = \frac{f(x, \theta)}{r^m} + \frac{M(x, y)}{r^\mu}, \qquad \mu = \text{const} < m,$$

где $M(x, y)$ — ограниченная функция, а r и θ определяются, как в § 1. Заметим, что точки θ пробегают единичную сферу S, расположенную в касательной плоскости к Γ.

По определению положим

$$\int_{\Gamma} K(\xi, \eta)\, u(\eta)\, d_\eta\Gamma = \int_{\Gamma\setminus\Gamma_\varepsilon} K(\xi, \eta)\, u(\eta)\, d_\eta\Gamma + \\ + \int_D \frac{f(x, \theta)}{r^m} v(y)\, dy + \int_D \frac{M(x, y)}{r^\mu} v(y)\, dy. \qquad (9.34)$$

Символ интеграла (9.33) в точке ξ примем по определению равным символу, порождаемому характеристикой $f(x, \theta)$ (формулы (9.16) и (9.18)). Символ оператора умножения на функцию примем равным этой функции, символ вполне непрерывного оператора считаем равным нулю. При таком определении для многообразия без края верны все теоремы §§ 1—3. Входящие в эти теоремы условия непрерывности на римановой сфере заменяются аналогичным условием на Γ.

Данное здесь определение символа является локальным: чтобы определить символ, надо зафиксировать точку $\xi \in \Gamma$, затем в касательной плоскости, проходящей через эту точку, построить единичную сферу с центром в ξ и на этой сфере выбрать систему координат. Генерально, т. е. сразу на всем многообразии, символ можно построить лишь тогда, когда на Γ можно ввести правильную координатную сетку. В этом случае можно указать способ выбора системы координат на S, не зависящий от положения точки ξ, и символ можно рассматривать как функцию двух независимых точек $\xi \in \Gamma$ и $\theta \in S$. Кроме рассмотренного выше случая евклидова пространства, такое положение будет, если, например, Γ есть тор. В общем же случае правильную координатную сетку на многообразии построить нельзя, и нельзя рассматривать ξ и θ как точки независимые. В этом случае символ на всем многообразии приходится определять как функцию его линейного элемента; напомним, что линейным элементом многообразия называется совокупность из его точки и произвольного направления, лежащего в касательной плоскости, проведенной через данную точку.

4.2. Другое определение сингулярного оператора. Данное нами выше определение сингулярного интеграла на многообразии равносильно следующему определению, данному Р. Сили ([38], см. также [17]).

Будем исходить из некоторого банахова пространства B функций, заданных на многообразии Г. Пусть $\varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$ — произвольные достаточно гладкие функции, подчиненные следующему условию: носитель *) каждой из этих функций заключен внутри ляпуновской сферы и, следовательно, допускает описанное выше отображение на некоторую замкнутую область евклидова пространства E_m. Пусть A — оператор, заданный на некотором множестве функций, каждая из которых определена на Г. Оператор A назовем сингулярным, если он обладает следующими двумя свойствами: 1) если носители функций φ и ψ не пересекаются, то оператор $\varphi A \psi$ вполне непрерывен; 2) если носители функций φ и ψ пересекаются, причем оба носителя лежат в одной и той же ляпуновской сфере, то $\varphi A \psi = \tilde{A} + T$, где T — вполне непрерывный в B оператор, а $\tilde{A}$ переходит после отображения на евклидово пространство в сингулярный оператор вида (9.26).

§ 5. Регуляризация и теоремы Фредгольма

В этом параграфе будем понимать под Г либо евклидово пространство E_m, либо компактное ляпуновское m-мерное многообразие без края. Пусть τ — произвольный линейный элемент многообразия Г; если на этом многообразии можно ввести правильную координатную сетку, то τ можно рассматривать как пару независимых точек $\xi \in \Gamma$ и $\theta \in S$. Пусть A — сингулярный оператор, символ которого $\Phi_A(\tau)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.8. Пусть еще $\Phi_A(\tau)$ нигде не обращается в нуль; в этом случае будем говорить, что символ $\Phi_A(\tau)$ не вырождается. Можно доказать, что тогда $[\Phi_A(\tau)]^{-1}$ также удовлетворяет условиям теоремы 3.7, если только $l \geqslant m/2+1$. Построим сингулярный оператор B с символом $\Phi_B(\tau) = [\Phi_A(\tau)]^{-1}$: A и B будем рассматривать как операторы в $L_p(\Gamma)$. По теореме 3.1 оператор B (так же как и оператор A) ограничен в $L_p(\Gamma)$, а по теореме 2.5 $BA = I + T'$,

*) То есть замыкание множества точек, на которых данная функция отлична от нуля.

$AB = I + T''$, где T' и T'' — операторы, вполне непрерывные в $L_p(\Gamma)$. Это значит, что B является двусторонним регуляризатором для A; но тогда для сингулярного уравнения

$$Au = g(\xi), \qquad g \in L_p(\Gamma), \tag{9.35}$$

справедлива теорема Нетера (теорема 6.2 гл. VI). Оказывается, однако, что *индекс оператора A равен нулю* и, следовательно, для уравнения (9.35) справедливы теоремы Фредгольма (см. § 1 гл. II), которые в данном случае сводятся к следующему: уравнения $Au = 0$ и $A^*u = 0$ имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений; неоднородное уравнение (9.35) разрешимо тогда и только тогда, когда $f(\xi)$ ортогональна ко всем решениям уравнения $A^*u = 0$. Отсюда, в частности, следует, что уравнение (9.35) разрешимо, и притом единственным образом, при любой $f \in L_p(\Gamma)$, если соответствующее однородное уравнение $Au = 0$ не имеет нетривиальных решений.

Для $p = 2$ И. Ц. Гохберг [7], [8] доказал, что невырождение символа не только достаточно, но и необходимо для того, чтобы сингулярный оператор допускал регуляризацию. На случай произвольного p эта теорема распространена в [14].

§ 6. Системы сингулярных уравнений

6.1. Матричный сингулярный оператор. Будем рассматривать системы сингулярных уравнений вида

$$\sum_{k=1}^{h} A_{jk}u_k = g_k(x), \tag{9.36}$$

где $g_k \in L_p(\Gamma)$ и A_{jk} — сингулярные операторы.

Примем, что либо $\Gamma = E_m$, либо Γ есть m-мерное многообразие, удовлетворяющее условиям § 4. Систему (9.36) можно записать в виде одного уравнения

$$Au = g, \tag{9.37}$$

если ввести *матричный сингулярный оператор*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} \dots & A_{2n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \\ A_{n1} & A_{n2} \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \tag{9.38}$$

и векторы-столбцы u и g с компонентами $u_1, u_2, \ldots, u_n$ и $g_1, g_2, \ldots, g_n$ соответственно.

6.2. Символическая матрица. Обозначим через $\Phi_{jk}(\tau)$ символ оператора A_{jk}; здесь τ — линейный элемент многообразия Γ. Будем считать, что $\Phi_{jk}(\tau)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.8. Матрица

$$\Phi_A(\tau) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(\tau) & \Phi_{12}(\tau) & \ldots & \Phi_{1n}(\tau) \\ \Phi_{21}(\tau) & \Phi_{22}(\tau) & \ldots & \Phi_{2n}(\tau) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Phi_{n1}(\tau) & \Phi_{n2}(\tau) & \ldots & \Phi_{nn}(\tau) \end{pmatrix} \tag{9.39}$$

называется *символической матрицей*, или просто символом, оператора A. Сумме и произведению матричных сингулярных операторов вида (9.39) соответствует сумма и произведение (в том же порядке) их символов.

Будем рассматривать случай, когда символическая матрица (9.39) не вырождается, так что

$$\inf |\det \Phi_A(\tau)| > 0. \tag{9.40}$$

Тогда сингулярный оператор B с символической матрицей $\Phi_B(\tau) = [\Phi_A(\tau)]^{-1}$ является двусторонним регуляризатором для оператора A; раз этот последний допускает двустороннюю регуляризацию, то для уравнения (9.37) (или, что то же, для системы (9.36)) справедлива теорема Нетера.

6.3. Индекс. В отличие от случая одного уравнения, индекс сингулярной многомерной системы в общем случае не равен нулю. Исследованию индекса многомерной системы посвящено довольно много работ *). Здесь мы изложим основные результаты этих работ, а затем остановимся на случаях; когда индекс системы равен нулю.

Будем рассматривать систему (9.36). Если $n > m$, т. е. порядок системы больше, чем размерность многообразия интегрирования, то можно построить новую сингулярную систему порядка m, индекс которой равен индексу данной

*) См. [2], [4], [5], [19], [20], [27], [39]. Весьма общие и полные результаты, относящиеся к системам более общим, чем системы сингулярных интегральных уравнений, даны в замечательной работе М. Г. Атийа и И. М. Зингера [26]. Построения этих двух авторов весьма неэлементарны; укажем здесь, например, что разбору основной теоремы М. Атийа и И. Зингера посвящены два тома семинара Анри Картана [40].

системы. С другой стороны, если $n < m$, то, введя дополнительные уравнения

$$u_j = 0, \qquad j = n+1,\ n+2,\ \ldots,\ m,$$

мы получим систему порядка m, индекс которой опять совпадает с индексом данной системы. Достаточно поэтому изучать системы, порядок которых совпадает с размерностью многообразия интегрирования.

Итак, пусть $n = m$. Символическая матрица системы имеет вид

$$\Phi_A(\tau) = \begin{pmatrix} \Phi_{11}(\tau) & \Phi_{12}(\tau) & \ldots & \Phi_{1m}(\tau) \\ \Phi_{21}(\tau) & \Phi_{22}(\tau) & \ldots & \Phi_{2m}(\tau) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Phi_{m1}(\tau) & \Phi_{m2}(\tau) & \ldots & \Phi_{mm}(\tau) \end{pmatrix}, \tag{9.41}$$

и для этой матрицы справедливо неравенство (9.40). Рассмотрим, например, первую строку матрицы (9.41). Ее элементы суть функции, вообще говоря, комплекснозначные; отделим в них действительные и мнимые части и положим

$$\Phi_{1k}(\tau) = \Phi'_{1k}(\tau) + i\Phi''_{1k}(\tau),$$

где функции $\Phi'_{1k}(\tau)$ и $\Phi''_{1k}(\tau)$ уже вещественные. Сумма

$$\Phi_1^2(\tau) = \sum_{k=1}^{m} \left\{\Phi'^2_{1k}(\tau) + \Phi''^2_{1k}(\tau)\right\} = \sum_{k=1}^{m} |\Phi_{1k}(\tau)|^2$$

строго положительна — в противном случае было бы нарушено неравенство (9.40). Положим

$$\varphi_{2k-1}(\tau) = \frac{\Phi'_{1k}(\tau)}{\Phi_1(\tau)}, \quad \varphi_{2k}(\tau) = \frac{\Phi''_{1k}(\tau)}{\Phi_1(\tau)} \tag{9.42}$$

и рассмотрим вектор-функцию

$$\varphi(\tau) = \{\varphi_1(\tau),\ \varphi_2(\tau),\ \ldots,\ \varphi_{2m}(\tau)\}. \tag{9.43}$$

Она реализует непрерывное отображение $(2m-1)$-мерного пространства линейных элементов многообразия Γ в $(2m-1)$-мерную сферу. *Если Γ есть поверхность, ограничивающая область $(m+1)$-мерного евклидова пространства E_{m+1}, то индекс системы* (9.36) *равен степени отображения* (9.43). Из этого утверждения, между прочим, следует, что индекс сингулярной системы равен нулю, если ее порядок ниже размерности многообразия интегрирования.

Укажем теперь несколько случаев, когда индекс сингулярной системы (мы будем называть его также индексом соответствующей символической матрицы) равен нулю. Мы не предполагаем ниже, что $n=m$.

1. $\Gamma=E_m$ и символическая матрица не зависит от x.

2. Символическая матрица — эрмитова или кососимметрическая.

3. Символическая матрица имеет вид

$$\Phi(\tau)=I-\psi(\tau),$$

где I — единичная матрица, а собственные числа матрицы $\psi(\tau)$ строго меньше единицы при любом τ.

4. Нижние грани модулей миноров

$$\delta_1=\Phi_{11},\quad \delta_2=\begin{vmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12}\\ \Phi_{21} & \Phi_{22}\end{vmatrix},\ \ldots,\ \delta_n=\begin{vmatrix}\Phi_{11} & \Phi_{12} & \ldots & \Phi_{1n}\\ \Phi_{21} & \Phi_{22} & \ldots & \Phi_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \Phi_{n1} & \Phi_{n2} & \ldots & \Phi_{nn}\end{vmatrix} \tag{9.44}$$

строго положительны.

5. В комплексной ζ-плоскости существует гладкая кривая, соединяющая точки $\zeta=0$ и $\zeta=\infty$ и не имеющая общих точек с множеством собственных чисел символической матрицы (9.39).

6. Пусть Γ — либо двумерная плоскость, либо двумерный тор, так что на Γ можно ввести правильную координатную сетку. В этом случае пространство $\tilde{\Gamma}$ линейных элементов есть прямое произведение поверхности Γ и единичной окружности; каждый линейный элемент определяется заданием точки $\zeta=e^{i\theta}$ единичной окружности и точки $x\in\Gamma$; символическую матрицу системы (9.36) можно записать в виде $\Phi(x, \zeta)$. Зафиксировав x, можно к матрице $\Phi(x, \zeta)$ применить *левую стандартную факторизацию*, т. е. представить ее в виде

$$\Phi(x, \zeta)=\Phi_+(x, \zeta)\,\Phi_0(x, \zeta)\,\Phi_-(x, \zeta), \tag{9.45}$$

где $\Phi_+(x, \zeta)$ и $\Phi_-(x, \zeta)$ допускают аналитическое продолжение соответственно внутрь и вне единичной окружности плоскости ζ и имеют определители, которые не обращаются в нуль в указанных областях, а $\Phi_0(x, \zeta)$ — диагональная матрица:

$$\Phi_0(x, \zeta)=\left(\zeta^{\varkappa_j}\delta_{jk}\right)_{j,\,k=1}^{j,\,k=n};$$

числа $\varkappa_j$, называемые ***левыми частными индексами*** матрицы $\Phi(x, \zeta)$,—целые и не зависят от ζ. Аналогично вводятся ***правая стандартная факторизация*** и ***правые частные индексы***. Если левые (или правые) частные индексы матрицы не зависят от x, то ее индекс равен нулю. В частности, на торе равен нулю индекс символической матрицы, не зависящей от полюса.

7. Факторизацию можно иногда применить и к символической матрице многомерной системы. Пусть на Γ можно ввести правильную координатную сетку. Символическая матрица имеет вид $\Phi(x, \theta)$, где $x \in \Gamma$, а $\theta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_{m-1})$ — точка единичной $(m-1)$-мерной сферы, причем координата ϑ_{m-1} меняется в пределах $[0, 2\pi]$. Полагая $\zeta = e^{i\vartheta_{m-1}}$ и фиксируя остальные аргументы, можно к матрице $\Phi(x, \theta)$ применить стандартную факторизацию. Если при этом левые (или правые) частные индексы все равны нулю, то $\operatorname{Ind}\Phi = 0$.

8. Пусть τ — произвольный линейный элемент многообразия Γ (его размерность может быть какой угодно) и $\Phi(\tau)$ — символическая матрица системы (9.36). Положим $\Phi(\tau) = \Phi_1(\tau) + i\Phi_2(\tau)$, где матрицы Φ_1 и Φ_2 самосопряженные. Если хотя бы одна из этих матриц определенная, то $\operatorname{Ind}\Phi = 0$.

§ 7. Сингулярные уравнения в пространствах Липшица

Приведенные в §§ 5 и 6 результаты позволяют, в известных условиях, утверждать, что сингулярное уравнение (или система) имеет решение, суммируемое со степенью $p > 1$. Между тем представляют интерес те случаи, когда можно утверждать, что решение обладает некоторой гладкостью, например, удовлетворяет условию Липшица с положительным показателем. В книге [18] приведены такого рода результаты; они улучшены в статьях [17], которым мы ниже в основном и следуем.

Будем рассматривать m-мерное замкнутое ляпуновское многообразие Γ и пространство $\operatorname{Lip}_\alpha(\Gamma)$ функций, заданных на Γ и удовлетворяющих условию Липшица с показателем α, где $0 < \alpha < 1$. Норма в $\operatorname{Lip}_\alpha(\Gamma)$ задается формулой

$$\|u\| = \max_{x \in \Gamma} |u(x)| + \sup_{x, y \in \Gamma} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}. \tag{9.46}$$

Пусть A — сингулярный оператор с характеристикой $f(\tau)$, коэффициентом $a(x)$ при внеинтегральном члене и символом $\Phi_A(\tau)$; здесь τ — линейный элемент многообразия Γ. Будем считать, что $a(x) \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$. Ниже мы всегда можем рассматривать $f(\tau)$ и $\Phi_A(\tau)$ на некоторой части многообразия Γ, которая взаимно однозначно и достаточно гладко отображается на область евклидова пространства; в таком случае τ можно рассматривать как совокупность двух независимых точек $x \in \Gamma$ и $\theta \in S$. В соответствии с этим мы будем обозначать характеристику и символ через $f(x, \theta)$ и $\Phi_A(x, \theta)$ соответственно.

Теорема 7.1. *Если* $f(x, \theta) \,\hat{\in}\, W_1^{(1)}(S)$ *и*

$$\|f(y, \theta) - f(x, \theta)\|_{L_1(S)} \leqslant B|x - y|^\alpha, \quad B = \mathrm{const},$$

то оператор A *ограничен в* $\mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$.

Для $m = 2$ теорема 7.1 может быть усилена.

Теорема 7.2. *Если* $\Phi_A(x, \theta) \,\hat{\in}\, W_2^{(l)}(S)$, $l \geqslant m/2 + 1$, *и*

$$\|\Phi_A(y, \theta) - \Phi_A(x, \theta)\|_{W_2^{(l-1)}(S)} \leqslant B|x - y|^\alpha, \quad B = \mathrm{const},$$

то оператор A *ограничен в* $\mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$.

Теорема 7.3. *Пусть* A_1 и A_2—*сингулярные операторы на* Γ. *Если* $\Phi_{A_j}(x, \theta) \,\hat{\in}\, W_2^{(l)}(S)$, $l \geqslant \dfrac{m+3}{2}$; $j = 1, 2$, *и*

$$\|\Phi_{A_j}(y, \theta) - \Phi_{A_j}(x, \theta)\|_{W_2^{(l-1)}(S)} \leqslant B|x - y|^\alpha, \quad j = 1, 2,$$

то символ произведения A_1A_2 *равен произведению* $\Phi_{A_1}(x, \theta) \times \times \Phi_{A_2}(x, \theta)$.

Теорема 7.4. *Пусть* $g \in \mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$, $\inf|\Phi_A(x, \theta)| > 0$ *и* $f(x, \theta) \,\hat{\in}\, W_2^{(1+\varepsilon)}(S) \cap C^{(1)}(S)$, $\varepsilon > 0$. Пусть, далее,

$$|f(y, \theta) - f(x, \theta)| \leqslant B|x - y|^\beta, \quad \beta > \alpha,$$

$$\|f(y, \theta) - f(x, \theta)\|_{W_2^{(1+\varepsilon)}(S)} \leqslant B_h|h|^\alpha, \quad B_h \to 0, \quad (h \to 0).$$

Тогда любое суммируемое с квадратом решение уравнения (9.35) *принадлежит пространству* $\mathrm{Lip}_\alpha(\Gamma)$.

Все приведенные в этом параграфе результаты естественным образом распространяются на системы сингулярных уравнений.

Отметим еще, что при весьма специальных предположениях относительно характеристики сингулярные уравнения в классах липшицевых функций изучал Жиро [31]. Метод Жиро распространил на некоторые классы сингулярных систем В. Д. Купрадзе [15].

§ 8. Сингулярные уравнения на цилиндре [21]

Рассматривается m-мерный цилиндр, развертка которого представляет собой полосу Ω в m-мерном евклидовом пространстве, определяемую неравенствами

$$|x_j| \leqslant \frac{1}{2}, \quad j=1, 2, \ldots, k; \quad -\infty < x_j < \infty, \tag{9.47}$$
$$j=k+1, k+2, \ldots, m.$$

Обозначим еще $x^{(1)}=(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots, 0)$,

$$x^{(2)}=(0, 0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_m),$$
$$n=(n_1, n_2, \ldots, n_k, 0, 0, \ldots, 0),$$

где n_j — целые числа. Обозначим, далее, через Ω_1 k-мерный куб $|x_j| \leqslant \frac{1}{2}$, $j=1, 2, \ldots, k$, и через Ω_2 — евклидово пространство $m-k$ измерений. Введем пространство $L_2(\Omega_2)$ вектор-функций $v=\{v_n(x^{(2)})\}$ с нормой

$$\|v\|^2=\sum_n \int_{\Omega_2} |v_n(x^{(2)})|^2 dx^{(2)}.$$

Преобразование Фурье в Ω определяется формулой

$$\mathscr{F}v=\{\hat{v}_n(x^{(2)})\}; \quad \hat{v}_n(x^{(2)})=$$
$$=(2\pi)^{-\frac{m-k}{2}} \int_{\Omega} v(y^{(1)}, y^{(2)}) \exp\{-2\pi i(n, y^{(1)})-i(x^{(2)}, y^{(2)})\}\, dy.$$

Устанавливаются следующие свойства преобразования Фурье: 1) оно изометрично; 2) имеет место формула обращения

$$v(x^{(1)}, x^{(2)})=(2\pi)^{-\frac{m-k}{2}} \sum_n \int_{\Omega_2} \hat{v}_n(y^{(2)}) \exp(2\pi i(n, x^{(1)})+$$
$$+i(x^{(2)}, y^{(2)}))\, dy^{(2)};$$

8) пусть звездочка означает свертку двух функций по точке $x^{(2)}$ и пусть $u(x^{(1)}, x^{(2)})$ и $v(x^{(1)}, x^{(2)})$ периодичны по каждой из координат $x_1, x_2, \ldots, x_k$ с периодом единица. Тогда

$$\mathcal{F}(u * v) = \left\{(2\pi)^{\frac{m-k}{2}} \tilde{u}_n(x^{(2)}) \tilde{v}_n(x^{(2)})\right\}.$$

Пусть $\Phi(x) = \Phi(x^{(1)}, x^{(2)})$ — однородная функция нулевого порядка, так что $\Phi(x) = \Phi(\theta)$, $\theta = \frac{x}{|x|}$. Мы следующим образом определим сингулярный оператор A с символом $\Phi(\theta)$, не зависящим от полюса. Обозначим через $\mathcal{F}_2$ преобразование Фурье в $\Omega_2 = E_{m-k}$. Если $u \in L_2(\Omega)$, то положим

$$u_n(x^{(2)}) = \int_{\Omega_1} u(x^{(1)}, x^{(2)})\, e^{-2\pi i (n, x^{(1)})}\, dx^{(1)}.$$

Наконец, положим $\Phi_n(x_2) = \Phi(2\pi n, x_2)$. Теперь сингулярный оператор A определяется формулой

$$Au = \sum_n e^{2\pi i (n, x^{(1)})} \mathcal{F}_2^{-1} \Phi_n \mathcal{F}_2 u_n. \tag{9.48}$$

Доказывается, что оператор (9.48) ограничен в $L_p(\Omega)$ при любом p, $1 < p < \infty$, если символ $\Phi(\theta)$ имеет непрерывные производные по декартовым координатам точки θ до порядка m включительно. Если $p = 2$, то оператор A ограничен, если только символ ограничен, причем $\|A\| = \operatorname{supess} |\Phi(\theta)|$.

Определим теперь сингулярный оператор с символом, зависящим от полюса. Пусть $\Phi(x, \theta)$, $x \in \Omega$, $\theta \in S$, — функция, периодическая по каждой из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$ с периодом единица, и пусть $\Phi(x, \theta) \in W_2^{(l)}(S)$, где $l \geqslant \frac{5m}{2} - 1$ и l — целое. Через $A_{\nu, m}^{(k)}$ обозначим сингулярный оператор с символом $Y_{\nu, m}^{(k)}(\theta)$. Функцию Φ разложим в ряд

$$\Phi(x, \theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_{\nu, m}} a_\nu^{(k)}(x)\, Y_{\nu, m}^{(k)}(\theta). \tag{9.49}$$

Сингулярным оператором с символом $\Phi(x, \theta)$ назовем оператор A, определяемый соотношением

$$A = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{k_{\nu, m}} a_\nu^{(k)}(x)\, A_\nu^{(k)} + T, \tag{9.50}$$

где T — любой оператор, вполне непрерывный в рассматриваемом пространстве $L_p(\Omega)$. Доказывается, что при сделанных относительно символа допущениях ряд (9.50) сходится по норме.

При таком определении сингулярного оператора оказывается справедливым правило умножения символов. Коль скоро это правило установлено, дальнейшая теория строится, как обычно (см. § 5).

§ 9. Сингулярные уравнения в пространствах обобщенных функций

Многомерные сингулярные интегральные уравнения изучались в работах Н. С. Хорвата [32] — [35], Б. Мальгранжа [37] и Н. Я. Крупника [11] — [14]. Ниже излагаются некоторые из результатов названных авторов.

В [35] рассмотрены интегралы вида

$$Ku = \int_{E_m} \frac{f(\theta)}{r^m} u(y)\, dy, \tag{9.51}$$

где $f \in L^{(p)}(S)$, $p > 1$.

Доказывается, что при этом условии оператор K переводит любую функцию $u(y)$, бесконечно дифференцируемую и с компактным носителем, в некоторую обобщенную функцию. Ее свертка с любой обобщенной функцией D'_{L^q} опять есть обобщенная функция *) из D'_{L^q}; здесь q — любое число из промежутка $1 < q < \infty$.

В [37] доказывается, что оператор (9.51) при том же условии $f \in L^{(p)}(S)$ отображает пространство $W_p^{(k)}(E_m)$ в то же самое пространство при любом k, $0 \leqslant k \leqslant \infty$. При этом

---

*) Напомним, что

$$D'_{L^q} = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_q^{(-k)}(E_m),$$

где $W_q^{(-k)}$ есть пространство, дуальное к соболевскому пространству $W_{q_1}^{(k)}$, $1/q + 1/q_1 = 1$. Подробнее см. [37].

под $W_p^{(0)}$ понимается пространство L_p, а под $W_p^{(\infty)}$ — пересечение

$$W_p^{(\infty)} = \bigcap_{k=1}^{\infty} W_p^{(k)}.$$

В статьях [11] — [13] вводится новое пространство M основных функций. Это — счетно нормированное пространство комплекснозначных бесконечно дифференцируемых в E_m функций, для которых каждое из произведений

$$(1+|x|)^{m-\frac{1}{1+k}} D^q u(x); \quad |q| \leqslant k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{9.52}$$

ограничено. Здесь приняты следующие обозначения: q — мультииндекс, т. е. упорядоченный набор из m целых неотрицательных индексов: $q=(q_1, q_2, \ldots, q_m)$; далее, $|q| = q_1 + q_2 + \ldots + q_m$ и

$$D^q u = \frac{\partial^{|q|} u}{\partial x_1^{q_1} \partial x_2^{q_2} \ldots \partial x_m^{q_m}}.$$

Система норм в M задается формулой

$$\|u\|_k = \sup_{x \in E_m,\ |q| \leqslant k} (1+|x|)^{m-\frac{1}{1+k}} |D^{|q|} u(x)| \tag{9.53}$$

$$(k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Через M' обозначим пространство обобщенных функций, дуальное с M.

Рассматриваются сингулярные операторы

$$Au = a(x) u(x) + \int_{E_m} \frac{f(x, \theta)}{r^m} u(y)\, dy \tag{9.54}$$

и

$$Bu = a(x) u(x) + \int_{E_m} \frac{f(y, \theta)}{r^m} u(y)\, dy. \tag{9.55}$$

Следует указать, что в пространствах M и M' разность $A - B$ в общем случае не вполне непрерывна, даже если характеристика f бесконечна дифференцируема.

Доказывается, что каждый из операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ непрерывен в M, если $a(x)$ и $f(x, \theta)$ бесконечно дифференцируемы по x и любая из производных ограничена независимо от θ. Далее, символом каждого из операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ назовем функцию $\Phi(x, \theta)$, определяемую формулой (9.16). Справедлива

Теорема 9.1. *Пусть при любой $\theta \in S$ символ $\Phi(x, \theta)$ бесконечно дифференцируем по x, причем $D_x^q\Phi \,\hat{\in}\, W_2^{(l)}(S)$, $l \geqslant m + \left[\frac{m}{2}\right] + 2$, $|q| > 2$, а при $|q| \leqslant 2$ функции $D_x^q\Phi$ имеют непрерывные производные порядка $m + \left[\frac{m}{2}\right] + 1$ по декартовым координатам точки θ. Пусть, наконец, каждая из производных $D_x^q\Phi$ непрерывна по совокупности переменных θ и ξ (ξ — образ точки x при стереографическом отображении E_m на риманову сферу). Если символ нигде не обращается в нуль, то каждый из операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ нормально разрешим и имеет равный нулю индекс как в M, так и в M'.*

Аналогичная теорема верна и для матричных сингулярных операторов с той естественной разницей, что индекс уже не обязательно равен нулю. В этом случае доказывается, что индекс любого из операторов $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ в каждом пространстве M и M' совпадает с индексом оператора $\boldsymbol{A}$ в L_2.

§ 10. Уравнения с вырождающимся символом

Многомерные сингулярные интегральные уравнения с вырождающимся символом почти еще не изучены. Ясно только, что общее решение следует искать в классах обобщенных функций. В настоящем параграфе мы изложим некоторые из результатов статьи [16а], одной из первых в интересующем нас направлении.

Будем рассматривать сингулярное уравнение на евклидовой двумерной плоскости E_2. Введем полярные координаты ρ, θ; $0 \leqslant \rho < \infty$, $0 < \theta < 2\pi$. Пусть l — неотрицательное целое число. Через $L_2^{(l)}(S)$ обозначим гильбертово пространство функций, заданных на единичной окружности S, 2π-периодических по θ, абсолютно непрерывных вместе со своими производными порядка $\leqslant l-1$ на единичной окружности и имеющих суммируемую с квадратом l-ю производную. Норму в $L_2^{(l)}(S)$ зададим формулой

$$|\varphi|_l^2 = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{l} \left| \frac{\partial^k \varphi}{\partial \theta^k} \right|^2 d\theta; \tag{9.56}$$

скалярное произведение в $L_2^{(l)}(S)$ будем обозначать квадратными скобками:

$$[\varphi, \psi]_l = \int_0^{2\pi} \sum_{k=0}^{l} \frac{\partial^k \varphi}{\partial \theta^k} \frac{\partial^k \overline{\psi}}{\partial \theta^k} d\theta. \tag{9.57}$$

Через $L_2^{(-l)}(S)$, как обычно, обозначим пространство, дуальное с $L_2^{(l)}(S)$ относительно скалярного произведения $[\ ,\ ]_0$.

Функции, определенные на плоскости E_2, будем трактовать как абстрактные функции переменной ρ со значениями в том или ином функциональном пространстве. В частности, рассмотрим гильбертово пространство $H_2^{(l)}$, где l — любое целое число, функций от ρ со значениями в $L_2^{(l)}(S)$, со скалярным произведением и нормой

$$(u, v)_l = \int_0^{\infty} [u, v]_l \rho\, d\rho; \quad \|u\|_l^2 = \int_0^{\infty} |u|_l^2 \rho\, d\rho. \tag{9.58}$$

Нетрудно видеть, что пространства $H_2^{(l)}$ и $H_2^{(-l)}$ дуальны относительно скалярного произведения $(u, v)_0$. Пусть $\Phi(\theta) \in L_2^{(l)}(S)$, $l \geqslant 0$. Тогда сингулярный оператор $A = \mathcal{F}^{-1}\Phi\mathcal{F}$, где $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье, определен и ограничен в каждом из пространств $H_2^{(l)}$ и $H_2^{(-l)}$.

Пусть символ $\Phi(\theta)$ имеет точки θ_j, $j = 1, 2, \ldots, N$, нулями кратностей l_j; при $\theta \neq \theta_j$ пусть $\Phi(\theta) \neq 0$. Положим $l = \max l_j$.

Рассмотрим уравнение

$$Au = f. \tag{9.59}$$

Если $f \in L_2(E_2)$, то, как можно доказать, это уравнение имеет решение $u \in H_2^{(-l)}$. Такое решение — не единственное: общее решение однородного уравнения

$$Au = 0 \tag{9.60}$$

имеет вид

$$u=\sum_{j=1}^{N}\sum_{k=0}^{l_j-1}\mathcal{F}^{-1}\left[c_{kj}(\rho)\,\delta^{(k)}(\theta-\theta_j)\right]. \tag{9.61}$$

Здесь δ — функция Дирака, а $c_{kj}(\rho)$ — произвольные квадратично суммируемые в промежутке $(0, \infty)$ функции.

Раз решение уравнения (9.59) не единственно, то можно подчинить это решение некоторым дополнительным условиям. Зададим произвольные символы $\Phi_k(\theta)\in L_2^{(l)}(S)$ и произвольные функции $\psi_k(\rho)\in L_2\ (0, \infty)$ $(k=1, 2, \ldots, s)$, где $s=\sum\limits_{j=1}^{N} l_j$. Обозначим через A_k сингулярные операторы с символами $\Phi_k(\theta)$, так что $A_k=\mathcal{F}^{-1}\Phi\mathcal{F}$, и станем искать решение уравнения (9.59), удовлетворяющее условиям:

$$[A_k u,\ 1]_0=\psi_k(\rho) \qquad (k=1, 2, \ldots, s). \tag{9.62}$$

Обозначим через B квадратную матрицу

$$B=(B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_N), \tag{9.63}$$

где B_j — прямоугольная матрица порядка $l_j\times s$:

$$B_j=\begin{Vmatrix}\Phi_1(\theta_j) & \ldots & \Phi_1^{(l_j-1)}(\theta_j)\\ \Phi_2(\theta_j) & \ldots & \Phi_2^{(l_j-1)}(\theta_j)\\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\\ \Phi_s(\theta_j) & \ldots & \Phi_s^{(l_j-1)}(\theta_j)\end{Vmatrix}. \tag{9.64}$$

Уравнение (9.59) при дополнительных условиях (9.62) имеет решение, и притом единственное, тогда и только тогда, когда $\det B\neq 0$. Если это условие выполнено, то упомянутое решение непрерывно зависит от f и ψ_k.

В статье [16] рассмотрены еще некоторые корректные задачи для уравнения (9.59) с вырождающимся символом. Рассмотрен также случай, когда символ «слабо» зависит от x.

§ 11. Сингулярные интегро-дифференциальные уравнения

Теория многомерных сингулярных интегро-дифференциальных (СИД) уравнений стала интенсивно развиваться в самые последние годы. Понятие СИД-оператора и его символа впервые появилось в статье А. П. Кальдерона и А. Зигмунда [30];

первой работой, в которой были даны первые более или менее общие результаты, была статья А. С. Дынина [9]. Современное состояние вопроса изложено в обзорной статье М. С. Аграновича [1] и в статье Р. Т. Сили [39]. Ниже излагаются некоторые из результатов статьи [1].

Пусть, как и в § 9, q означает мультииндекс $q=(q_1, q_2, \ldots, q_m)$, а D^q — оператор дифференцирования

$$D^q = \frac{\partial^{|q|}}{\partial x_1^{q_1} \partial x_2^{q_2} \ldots \partial x_m^{q_m}}.$$

Пусть, далее, A_q — некоторые сингулярные операторы, вообще говоря, матричные. СИД-оператором порядка s назовем *) оператор

$$A = \sum_{|q|=s} A_q D^q + T, \tag{9.65}$$

где оператор T — «почти порядка $s-1$» в $W_2^{(s)}(E_m)$. Последнее означает следующее: при любом $\varepsilon > 0$ существует разложение $T = T'_\varepsilon + T''_\varepsilon$, где T'_ε есть ограниченный оператор из $W_2^{(s)}(E_m)$ в $L_2(E_m)$ с нормой, меньшей ε, а T''_ε есть ограниченный оператор из $W_2^{(s)}(E_m)$ в $W_2^{(1)}(E_m)$.

Пусть $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ — декартовы координаты точки θ и $\theta^q = \theta_1^{q_1}\theta_2^{q_2} \ldots \theta_m^{q_m}$. Если $\Phi_q(x, \theta)$ — символ сингулярного интегрального оператора A_q, то символ СИД-оператора (9.65) принимается по определению равным функции

$$\Phi(x, \theta) = \sum_{|q|=s} \Phi_q(x, \theta)\theta^q. \tag{9.66}$$

Следует отметить, что по отношению к $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ символ (9.66) есть однородная функция степени s; символ сингулярного интегрального оператора, очевидно, есть однородная функция нулевой степени от $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$. Нетрудно доказать, что оператор (9.65) допускает представление

$$A = A_0(-\Delta)^{s/2} + T, \tag{9.67}$$

*) В [1] дано несколько более общее определение.

где Δ — оператор Лапласа в E_m и A_0 — сингулярный интегральный оператор с символом $\Phi(x, \theta)|\theta|^{-s}$; наоборот, если A_0—сингулярный интегральный оператор с символом $\Phi_0(x, \theta)$, то формула (9.67) определяет СИД-оператор с символом $\Phi_0(x, \theta)|\theta|^s$. Так же легко доказывается, что при некоторых условиях гладкости, наложенных на символы $\Phi_q(x, \theta)$, оператор (9.65) ограниченно действует из $W_2^{(l)}(E_m)$ в $W_2^{(l-s)}(E_m)$, где l — целое число, определенным образом зависящее от степени гладкости символов $\Phi_q(x, \theta)$. СИД-*оператор* на компактном достаточно гладком многообразии без края можно определить аналогично тому, как это было сделано в конце § 4 для сингулярного интегрального оператора *); мы не будем здесь останавливаться на этом подробнее.

СИД-оператор называется *эллиптическим*, если его символ не вырождается.

Пусть A — СИД-оператор порядка s на компактном достаточно гладком многообразии Γ без края и пусть символ оператора A удовлетворяет определенным условиям гладкости. Выбирается целое число l, некоторым образом связанное с характером гладкости символа. Основной результат теории СИД-операторов состоит в следующем: *для того чтобы СИД-оператор был нетеровым из $W_2^{(l)}(\Gamma)$ в $W_2^{(l-s)}(\Gamma)$, необходимо и достаточно, чтобы он был эллиптическим.*

§ 12. Сингулярные уравнения на многообразии с краем

Эта задача изучается в статьях [1] и [3]. Ниже излагаются некоторые простейшие результаты статьи [3].

Пусть Γ — конечная область пространства E_m, ограниченная достаточно гладкой поверхностью $\partial\Gamma$. Очевидно, можно Γ рассматривать как m-мерное многообразие с краем $\partial\Gamma$. Рассмотрим оператор вида

$$Au = \int_\Gamma A(x, x-y)\, u(y)\, dy, \tag{9.68}$$

где ядро $A(x, \theta)$ (оно может быть и обобщенной функцией) определено для $x \in \Gamma$ и $\theta \in E_m$. Доопределим функцию u

*) См. [1], стр. 51.

вне Г, положив ее там равной нулю. Тогда можно считать, что интеграл (9.68) распространен по всему пространству E_m. Будем считать, что преобразование Фурье $\Phi_A(x, \theta)$ ядра $A(x, \theta)$ по переменной θ есть положительно однородная функция от θ некоторого вещественного порядка α:

$$\Phi_A(x, \lambda\theta) = \lambda^\alpha \Phi_A(x, \theta); \qquad \lambda > 0. \tag{9.69}$$

Функцию $\Phi_A(x, \theta)$ назовем символом оператора A, а число α — порядком этого оператора.

Мы будем также рассматривать суммы вида $A+T$, где A — только что описанный оператор, а T — оператор, в некотором смысле «подчиненный» A; можно, например, считать, что T — оператор того же типа, что и A, но порядка $\alpha' < \alpha$.

Будем придерживаться следующего «правила сложения символов». Если складываются два оператора типа (9.68) одного и того же порядка, то их символы складываются, если же слагаемое T подчинено слагаемому A, то принимаем, что символ суммы $A+T$ равен символу «старшего» слагаемого A.

Рассмотрим теперь уравнение

$$(A+T)\,u = f(x) \tag{9.70}$$

и будем считать, что $u \in W_2^{(s)}(\Gamma)$, $f \in W_2^{(s-\alpha)}(\Gamma)$, где s — некоторое фиксированное число.

Решающую роль при исследовании уравнения (9.70) играет факторизация его символа, т. е. разложение символа на множители с описываемыми ниже свойствами.

Пусть точка θ имеет декартовы координаты $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$. Обозначим через θ' точку $(m-1)$-мерного евклидова пространства; будем писать $\theta = (\theta', \theta_m)$ и $f(x, \theta) = f(x, \theta', \theta_m)$, где f — любая функция. Допустим, что при $\theta \neq 0$ и при любом $x \in \overline{\Gamma} = \Gamma \cup \partial\Gamma$ символ Φ отличен от нуля. Зафиксируем точку $x \in \partial\Gamma$ и введем местную систему координат, в которой касательная плоскость к $\partial\Gamma$ в точке x имеет уравнение $x_m = 0$. Доказывается, что имеет место разложение символа на множители

$$\Phi(x, \theta) = \Phi_+(x, \theta', \theta_m)\,\Phi_-(x, \theta', \theta_m), \tag{9.71}$$

где $\Phi_+(x, \theta, \theta_m)$ и $\Phi_-(x, \theta, \theta_m)$ суть однородные функции от θ, причем $\Phi_+(x, \theta, \theta_m)$ допускает аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\theta_m > 0$, а $\Phi_-(x, \theta, \theta_m)$ — в нижнюю полуплоскость $\operatorname{Im}\theta_m < 0$. При этом каждая из упомянутых функций отлична от нуля в соответствующей полуплоскости.

В общем случае порядок однородности каждой из функций Φ_+ и Φ_- зависит от x. В [3] рассмотрен случай, когда порядок $\varkappa$ функции Φ_- постоянный, и притом целый. Тогда порядок однородности функции Φ_-, равный $\alpha - \varkappa$, также постоянный (но не обязательно целый).

Дальнейшее зависит от знака числа $\varkappa$. Предполагается, что символ удовлетворяет некоторым условиям гладкости, а множители в разложении (9.71) обладают некоторыми аналитическими свойствами, которые мы здесь не станем формулировать из-за их громоздкости. Если $\varkappa > 0$, то к уравнению (9.70) можно добавить $\varkappa$ краевых условий на границе $\partial\Gamma$ области Γ; входящие в эти условия операторы должны удовлетворять некоторому алгебраическому условию, аналогичному известному условию Я. Б. Лопатинского. Тогда задача оказывается нетеровой в соответствующим образом выбранной паре пространств.

Если $\varkappa = 0$, то никаких краевых условий ставить не надо: оператор (9.68) нетеров.

Если $\varkappa < 0$, то нетеровой оказывается задача, в которой к левой части уравнения (9.69) добавляется сумма вида

$$\sum_{k=1}^{|\varkappa|} G_k \rho_k,$$

где ρ_k — новые неизвестные функции, а G_k — операторы свертки, подчиненные условию типа условия Я. Б. Лопатинского.

ГЛАВА X

НЕЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В настоящее время теория нелинейных интегральных уравнений является частью общей теории нелинейных операторных уравнений. По существу, все известные утверждения о нелинейных интегральных уравнениях являются простыми следствиями общих теорем, а специфика конкретного уравнения выражается лишь в общих свойствах (непрерывность, полная непрерывность, потенциальность и др.) интегральных операторов, входящих в уравнение. В связи с этим § 1 главы посвящен общим свойствам интегральных операторов. Отметим сразу же, что все сказанное выше относится и к системам интегральных уравнений.

Теория нелинейных операторных уравнений в функциональных пространствах является большой главой нелинейного функционального анализа. Изложить даже основные факты этой теории в небольшой главе не представляется возможным. В связи с этим перед авторами возникла трудная задача отбора небольшого по объему материала, который давал бы достаточное представление об основных задачах теории нелинейных интегральных уравнений и методах их решения. В частности, необходимо было обойтись без тех разделов, которые требуют громоздких выкладок.

В § 2 изложены основные теоремы существования решений; в § 3 изучается зависимость решений от параметра.

§ 1. Нелинейные интегральные операторы

1.1. Основные понятия теории нелинейных операторов. В настоящем параграфе изучаются различные классы нелинейных интегральных операторов, действующих в пространствах измеримых функций, определенных на некотором ограниченном замкнутом множестве конечномерного пространства.

Простейшим и наиболее важным классом нелинейных интегральных операторов являются *операторы Урысона*. Оператором Урысона называется интегральный оператор вида

$$Au(x) = \int_{\Omega} K[x, t, u(t)]\, dt; \tag{10.1}$$

здесь $K(x, t, u)$ — ядро оператора (10.1) — определенная при $x, t \in \Omega$, $-\infty < u < \infty$ функция, почти при всех $x, t \in \Omega$ непрерывная по u и при всех $u \in (-\infty, \infty)$ измеримая по совокупности переменных x, t на $\Omega \times \Omega$. Оператор Урысона определен на измеримых функциях $u(x)$, для которых функция $K[x, t, u(t)]$ суммируема на Ω по t почти при всех $x \in \Omega$; значение $Au(x)$ оператора (10.1) на каждой такой функции является измеримой функцией.

Частным случаем операторов Урысона являются *операторы Гаммерштейна*. Эти операторы имеют вид

$$Au(x) = \int_{\Omega} K(x, t) f[t, u(t)]\, dt, \tag{10.2}$$

где $f(t, u)$ — определенная при $t \in \Omega$, $-\infty < u < \infty$ функция, почти при всех $t \in \Omega$ непрерывная по u и при всех $u \in (-\infty, \infty)$ измеримая по t на Ω, а $K(x, t)$ — измеримая по совокупности переменных функция, определенная на $\Omega \times \Omega$. Оператор Гаммерштейна представим в виде произведения

$$A = Kf \tag{10.3}$$

нелинейного *оператора суперпозиции*

$$fu(t) = f[t, u(t)] \tag{10.4}$$

и линейного интегрального оператора

$$Ku(x) = \int_{\Omega} K(x, t) u(t)\, dt \tag{10.5}$$

с ядром $K(x, t)$.

Более сложными интегральными операторами являются операторы вида

$$Au(x)=F\Big\{x,\ u(x),\ \int_\Omega K_1[x,\ t,\ u(t)]\,dt,\ \ldots$$
$$\ldots,\ \int_\Omega K_n[x,\ t,\ u(t)]\,dt\Big\}. \qquad (10.6)$$

Этот оператор является суперпозицией операторов Урысона $A_1, \ldots, A_n$ (соответственно с ядрами $K_1(x, t, u), \ldots$ $\ldots, K_n(x, t, u)$) и нелинейного оператора

$$F(u, u_1, \ldots, u_n)(x)=F[x, u(x), u_1(x), \ldots, u_n(x)]. \qquad (10.7)$$

Из других видов нелинейных интегральных операторов отметим *операторы Ляпунова — Лихтенштейна*. Эти операторы имеют вид

$$Au(x)=\sum_{k_1, \ldots, k_l}\int_\Omega \ldots \int_\Omega K_{[k_1, \ldots, k_l]}(x, t_1, \ldots, t_l)\,u(t_1)^{k_1}\ldots$$
$$\ldots u(t_l)^{k_l}\,dt_1 \ldots dt_l; \qquad (10.8)$$

здесь $[k_1, \ldots, k_l]$ — некоторые наборы целых неотрицательных чисел, $K_{[k_1, \ldots, k_l]}(x, t_1, \ldots, t_l)$ — измеримые по совокупности переменных функции.

Исследование уравнений с нелинейными интегральными операторами существенно упрощается, если известны пары $\{E_1, E_2\}$ таких банаховых пространств, что нелинейный оператор действует из E_1 в E_2 и обладает «хорошими» свойствами (непрерывности, компактности и др.). Как и в случае линейных операторов, задача описания таких пар является чрезвычайно сложной. В настоящем параграфе приводятся простейшие условия, при выполнении которых заданный интегральный оператор действует из одного пространства L_p, вообще говоря, в другое пространство L_q и является непрерывным, вполне непрерывным и т. д.

Напомним основные определения, относящиеся к нелинейным операторам. Для простоты ограничимся операторами, определенными на всем пространстве.

Действующий из E_1 в E_2 оператор A называется *непрерывным в точке* $u_0 \in E_1$, если

$$\lim_{\|u-u_0\|_{E_1} \to 0} \|Au - Au_0\|_{E_2} = 0.$$

Оператор A называется *непрерывным*, если он непрерывен в каждой точке пространства E_1. Естественно, из непрерывности нелинейного оператора в одной точке пространства не вытекает непрерывность этого оператора на всем пространстве.

Действующий из E_1 в E_2 оператор A называется *ограниченным*, если он преобразует ограниченные множества в ограниченные; *компактным*, если он преобразует ограниченные множества пространства E_1 в компактные множества пространства E_2. Компактные операторы являются ограниченными.

Для нелинейных операторов свойства непрерывности и компактности не связаны: оператор может быть компактным и не обладать свойством непрерывности, непрерывным и не обладать свойством компактности. Действующий из E_1 в E_2 оператор A называется *вполне непрерывным*, если он одновременно непрерывен и компактен.

Для операторов со значениями в L_q, $q < \infty$, удобно ввести еще одно определение. Действующий из L_p в L_q $(q < \infty)$ оператор A назовем *абсолютно ограниченным*, если он преобразует ограниченные множества пространства L_p в множества пространства L_q с равностепенно непрерывными нормами *). Компактные операторы, действующие из L_p в L_q, $q < \infty$, являются абсолютно ограниченными. Обратное, вообще говоря, не верно.

1.2. Операторы Урысона со значениями в пространстве C. Изучение нелинейных интегральных операторов начнем с исследования оператора Урысона со значениями в пространстве C непрерывных функций.

---

*) Говорят, что нормы функций множества $\mathfrak{M}$ из L_q $(q < \infty)$ *равностепенно абсолютно непрерывны*, если

$$\lim_{\operatorname{mes} D \to 0} \sup_{u \in \mathfrak{M}} \|P_D u\|_{L_q} = 0;$$

здесь P_D — оператор умножения на характеристическую функцию множества $D \subset \Omega$.

Теорема 1.1. *Пусть функция* $K(x, t, u)$ $(x, t \in \Omega, -\infty < u < \infty)$ *почти при всех* $x, t \in \Omega$ *непрерывна по* u *и при всех* u *измерима на* $\Omega \times \Omega$ *по совокупности переменных* x, t. *Пусть при любом* $h > 0$ *выполняется неравенство*

$$|K(x, t, u)| \leqslant R_h(x, t) \qquad (|u| \leqslant h), \tag{10.9}$$

где $R_h(x, t)$ — *измеримая по совокупности переменных функция, удовлетворяющая условию*

$$\int_\Omega R_h(x, t)\, dt \leqslant k(h) < \infty \qquad (0 < h < \infty), \tag{10.10}$$

и пусть, кроме того,

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in \Omega} \int_\Omega \max_{|u_i| \leqslant h,\ |u_1 - u_2| \leqslant \delta} |K(x, t, u_1) - K(x, t, u_2)|\, ds = 0. \tag{10.11}$$

Пусть, наконец, для любого измеримого множества D *и любого* $x_0 \in \Omega$ *справедливо равенство*

$$\lim_{x \to x_0} \int_D K(x, t, u)\, dt = \int_D K(x_0, t, u)\, dt. \tag{10.12}$$

Тогда оператор Урысона A *с ядром* $K(x, t, u)$ *действует из пространства* L_∞ *в пространство* C *и непрерывен.*

Теорема 1.2. *Пусть функция* $K(x, t, u)$ $(x, t \in \Omega, -\infty < u < \infty)$ *почти при всех* $x, t \in \Omega$ *непрерывна по* u *и при всех* u *измерима на* $\Omega \times \Omega$ *по совокупности переменных* x, t. *Пусть при любом* $h > 0$ *выполнено неравенство*

$$|K(x, t, u)| \leqslant R_h(x, t) \qquad (|u| \leqslant h), \tag{10.13}$$

где $R_h(x, t)$ — *измеримая по совокупности переменных функция, удовлетворяющая условию:*

$$\int_\Omega R_h(x, t)\, dt \leqslant k(h) < \infty \qquad (0 < h < \infty). \tag{10.14}$$

Пусть, наконец, для любого $h>0$ и любого $x_0 \in \Omega$ справедливо равенство

$$\lim_{x \to x_0} \int_\Omega \max_{|u| \leqslant h} |K(x, t, u) - K(x_0, t, u)|\, dt = 0. \qquad (10.15)$$

Тогда оператор Урысона A с ядром $K(x, t, u)$ действует из пространства L_∞ в пространство C и вполне непрерывен.

Условия теорем 1.1—1.2, в частности, выполнены, если $K(x, t, u)$ непрерывна по совокупности переменных. Таким образом, оператор Урысона с непрерывным ядром действует из L_∞ в C и вполне непрерывен.

Теорема 1.3. *Пусть функция $K(x, t, u)$ $(x, t \in \Omega, -\infty < u < \infty)$ почти при всех $x, t \in \Omega \times \Omega$ непрерывна по u, а при всех u измерима на $\Omega \times \Omega$ по совокупности переменных x, t. Пусть функция $K(x, t, u)$ удовлетворяет неравенству*

$$|K(x, t, u)| \leqslant R(x, t) + k|u|^p, \qquad (10.16)$$

где $R(x, t)$ — измеримая по совокупности переменных функция, удовлетворяющая условию

$$\int_\Omega R(x, t)\, dt \leqslant k_1 < \infty, \qquad (10.17)$$

и пусть при любом $h>0$

$$\lim_{\delta \to 0} \sup_{x \in \Omega} \int_\Omega \max_{|u_1| \leqslant h,\ |u_1 - u_2| \leqslant \delta} |K(x, t, u_1) - K(x, t, u_2)|\, dt = 0. \qquad (10.18)$$

Пусть, далее, для любого измеримого подмножества $D \subset \Omega$, любого $u \in (-\infty, \infty)$ и каждого $x_0 \in \Omega$ выполняется равенство

$$\lim_{x \to x_0} \int_D K(x, t, u)\, dt = \int_D K(x_0, t, u)\, dt.$$

Пусть, наконец, для любой неотрицательной функции z из L_p

$$\lim_{\operatorname{mes} D \to 0} \sup_{|u| \leqslant z} \sup_{x \in \Omega} \left| \int_D K[x, t, u(t)]\, dt \right| = 0. \qquad (10.19)$$

Тогда оператор Урысона A *с ядром* $K(x, t, u)$ *действует из пространства* L_p *в пространство* C *и непрерывен.*

Теорема 1.4. *Пусть функция* $K(x, t, u)$ $(x, t \in \Omega, -\infty < u < \infty)$ *почти при всех* $x, t \in \Omega$ *непрерывна по* u *и при всех* u *измерима на* $\Omega \times \Omega$ *по совокупности переменных* x, t. *Пусть функция* $K(x, t, u)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|K(x, t, u)| \leqslant R(x, t) + k|u|^p, \tag{10.20}$$

где $R(x, t)$ — *измеримая по совокупности переменных функция, удовлетворяющая условию*

$$\int_\Omega R(x, t)\,dt \leqslant k_1 < \infty, \tag{10.21}$$

и пусть при любом $h > 0$

$$\lim_{x \to x_0} \int_\Omega \max_{|u| \leqslant h} |K(x, t, u) - K(x_0, t, u)|\,dt = 0. \tag{10.22}$$

Пусть, наконец,

$$\lim_{\operatorname{mes} D \to 0} \sup_{\|u\|_{L_p} \leqslant 1} \sup_{x \in \Omega} \left| \int_D K[x, t, u(t)]\,dt \right| = 0. \tag{10.23}$$

Тогда оператор Урысона A *с ядром* $K(x, t, u)$ *действует из пространства* L_p *в пространство* C *и вполне непрерывен.*

Допустим, что функция $K(x, t, u)$ удовлетворяет неравенству

$$|K(x, t, u)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} R_k(x, t)|u|^{\delta_k}, \tag{10.24}$$

где $0 = \delta_0 < \delta_1 < \ldots < \delta_n = p$, а $R_k(x, t)$ $(x, t \in \Omega)$ — неотрицательные измеримые по совокупности переменных функции. Тогда ясно, что функция $K(x, t, u)$ удовлетворяет соотношениям (10.16)—(10.18), если

$$\int_\Omega R_k(x, t)^{\frac{p}{p-\delta_k}}\,dt \leqslant c_k < \infty \qquad (k = 0, \ldots, n-1),$$

$$\operatorname*{vrai\,max}_{t \in \Omega} |R_n(x, t)| \leqslant c_n < \infty. \tag{10.25}$$

Далее выполнено условие (10.19), если

$$\lim_{\operatorname{mes} D\to 0}\ \sup_{x\in\Omega}\int_D R_0(x,\ t)\,dt = 0, \tag{10.26}$$

и условие (10.23), если

$$\lim_{\operatorname{mes} D\to 0}\ \sup_{x\in\Omega}\int_D R_k(x,\ t)^{\frac{p}{p-\delta_k}}\,dt = 0 \quad (k=0,\ \ldots,\ n-1) \tag{10.27}$$

и если $R_n(x,\ t)\equiv 0$.

1.3. Операторы Гаммерштейна со значениями в пространствах L_q. Исследование оператора Гаммерштейна

$$Au(x) = \int_\Omega K(x,\ t)\,f\,[t,\ u(t)]\,dt \tag{10.28}$$

удобно проводить, исходя из расщепления (10.3) в суперпозицию нелинейного оператора $fu(t) = f\,[t,\ u(t)]$ и линейного интегрального оператора K с ядром $K(x,\ t)$. На этом пути различные признаки непрерывности и полной непрерывности оператора получаются объединением признаков непрерывности нелинейного оператора f с признаками непрерывности и полной непрерывности линейного оператора K. На этом же пути можно получить и более тонкие утверждения.

Приведем основные утверждения, относящиеся к операторам суперпозиции.

Говорят, что функция $f(t,\ u)$ $(t\in\Omega,\ -\infty<u<\infty)$ удовлетворяет *условиям Каратеодори*, если она почти при всех $t\in\Omega$ непрерывна по u и при всех $u\in(-\infty,\ \infty)$ измерима по t на Ω.

Теорема 1.5. *Пусть функция $f(t,\ u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори.*

Тогда оператор суперпозиции

$$fu(t) = f\,[t,\ u(t)] \tag{10.29}$$

действует из L_p в L_q в том и только том случае, когда функция $f(t,\ u)$ удовлетворяет неравенству (если $p<\infty$)

$$|f(t,\ u)| \leqslant a(t) + b\,|u|^{p/q}, \tag{10.30}$$

где $a(t) \in L_q$, b — *постоянная, или неравенствам (если* $p = \infty$)

$$|f(t, u)| \leqslant a_h(t) \qquad (|u| \leqslant h), \tag{10.31}$$

где $a_h(t) \in L_q$, $0 < h < \infty$.

Теорема 1.6. *Пусть функция* $f(t, u)$ *удовлетворяет условиям Каратеодори, а оператор суперпозиции* $fu = f[t, u(t)]$ *действует из* L_p *в* L_q.

Тогда оператор f *непрерывен в том и только том случае, если выполнено одно из условий:*

a) $q < \infty$;

b) $q = \infty$, $p < \infty$, $f(t, u) \equiv a(t)$;

c) $q = p = \infty$, *функция* $f(t, u)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leqslant \varphi_h(u - v) \qquad (|u|, |v| \leqslant h), \tag{10.32}$$

где $\varphi_h(z)$ *при любом* $h > 0$ — *непрерывная по* z *функция,* $\varphi_h(0) = 0$.

Теорема 1.7. *Пусть функция* $f(t, u)$ *удовлетворяет условиям Каратеодори, а оператор суперпозиции* $fu = f[t, u(t)]$ *действует из* L_p *в* L_q, *причем* $q < \infty$.

Тогда оператор f *является абсолютно ограниченным в том и только том случае, когда функция* $f(t, u)$ *удовлетворяет неравенству*

$$M[f(t, u)] \leqslant a(t) + b|u|^{p/q}, \tag{10.33}$$

где $a(t) \in L_q$, b — *постоянная,* $M(u)$ — *непрерывная функция, удовлетворяющая условию:*

$$\lim_{u \to \infty} \frac{M(u)}{u} = \infty. \tag{10.34}$$

Различные признаки непрерывности, регулярности, полной непрерывности линейных интегральных операторов приведены в гл. V, § 1.

Приведем теперь общие утверждения об операторах Гаммерштейна.

Теорема 1.8. *Пусть функция* $f(t, u)$ *удовлетворяет условиям Каратеодори, а* $K(x, t)$ — *измеримая по совокупности переменных функция. Пусть оператор* $fu = f[t, u(t)]$

действует из L_p в L_r, а интегральный оператор K с ядром $K(x, t)$ действует из L_r в L_q.

Тогда:

I. *Оператор Гаммерштейна $A = Kf$ действует из L_p в L_q;*

II. *Оператор A непрерывен, если выполнено одно из условий*:

a) $r < \infty$;

b) $r = \infty$, *оператор K регулярен*;

III. *Оператор A вполне непрерывен, если выполнено одно из условий*:

a) $r < \infty$, *оператор K вполне непрерывен*;

b) $r < \infty$, *оператор f абсолютно ограничен, оператор K регулярен*;

c) $r = \infty$, *оператор K регулярен.*

1.4. Непрерывность оператора Урысона со значениями в пространствах L_q. Для оператора Урысона непрерывность не является следствием того факта, что он действует из L_p в L_q (ср. п. 1.4 гл. V). Известны простые и удобные достаточные признаки непрерывности действующих из L_p в L_q нелинейных интегральных операторов. Здесь приводятся два простейших.

Теорема 1.9. *Пусть функция $K(x, t, u)$ $(x, t \in \Omega, -\infty < u < \infty)$ почти при всех $x, t \in \Omega \times \Omega$ непрерывна по u, а при всех u измерима на $\Omega \times \Omega$ по совокупности переменных x, t. Пусть оператор Урысона A_0 с ядром*

$$K_0(x, t, u) = \max_{|v| \leqslant u} |K(x, t, v)| \tag{10.35}$$

действует из L_p в L_q, причем $q < \infty$.

Тогда оператор Урысона A с ядром $K(x, t, u)$ действует из L_p в L_q и непрерывен.

Из этой теоремы, в частности, следует, что действующий из L_p в L_q $(q < \infty)$ оператор Урысона A с ядром $K(x, t, u)$ непрерывен, если $K(x, t, u)$ неотрицательна и монотонна по u.

Теорема 1.10. *Пусть функция $K(x, t, u)$ $(x, t \in \Omega, -\infty < u < \infty)$ почти при всех $x, t \in \Omega \times \Omega$ непрерывна по u, а при всех u измерима по совокупности переменных*

*x, t на $\Omega\times\Omega$. Пусть оператор Урысона **A** с ядром $K(x, t, u)$ действует из L_p в L_q ($q<\infty$) и пусть выполнены условия:*

а) *при любом $h>0$ функция*

$$R_h(x, t)=\max_{|u|\leqslant h}|K(x, t, u)| \tag{10.36}$$

суммируема по t почти при всех $x\in\Omega$;

b) *при любом $h>0$*

$$\lim_{\operatorname{mes} D\to 0}\ \sup_{|u|\leqslant h}\|P_D A u\|_{L_q}=0; \tag{10.37}$$

с) *для любой неотрицательной функции $z(x)$ из L_p*

$$\lim_{\operatorname{mes} D\to 0}\ \sup_{|u|\leqslant z}\left\|\int_D K[x, t, u(t)]\,dt\right\|_{L_q}=0. \tag{10.38}$$

*Тогда оператор **A** непрерывен.*

Ограничения а) и b) этой теоремы выполнены, если при любом $h>0$ функция (10.36) удовлетворяет условию:

$$\int_\Omega R_h(x, t)\,dt\in L_q. \tag{10.39}$$

Отметим в заключение еще одну теорему о непрерывности оператора Урысона — *принцип мажоранты.*

Теорема 1.11. *Пусть функции $K(x, t, u)$ и $K_0(x, t, u)$ (x, $t\in\Omega$, $-\infty<u<\infty$) почти при всех x, $t\in\Omega\times\Omega$ непрерывны по u, а при всех u измеримы на $\Omega\times\Omega$ по совокупности переменных x, t, причем*

$$|K(x, t, u)|\leqslant K_0(x, t, u). \tag{10.40}$$

*Пусть оператор Урысона **B** с ядром $K_0(x, t, u)$ действует из L_p в L_q, где $q<\infty$, и непрерывен.*

*Тогда оператор **A** с ядром $K(x, t, u)$ также действует из L_p в L_q и непрерывен.*

1.5. Полная непрерывность операторов Урысона со значениями в пространстве L_q.

Теорема 1.12. *Пусть функция $K(x, t, u)$ (x, $t\in\Omega$, $-\infty<u<\infty$) почти при всех x, $t\in\Omega\times\Omega$ непрерывна по u, а при всех u измерима на $\Omega\times\Omega$ по совокупности переменных x, t. Пусть оператор Урысона **A** с ядром*

$K(x, t, u)$ действует из L_p в L_q $(q < \infty)$ и пусть выполнены условия:

a) *при любом $h > 0$ функция*

$$R_h(x, t) = \max_{|u| \leqslant h} |R(x, t, u)| \tag{10.41}$$

суммируема по t почти при всех $x \in \Omega$;

b) *при любом $h > 0$*

$$\lim_{\operatorname{mes} D \to 0} \sup_{|u| \leqslant h} \|P_D A u\|_{L_q} = 0; \tag{10.42}$$

c) *для некоторого $a > 0$*

$$\lim_{\operatorname{mes} D \to 0} \sup_{\|u\|_{L_p} \leqslant a} \left\| \int_D K[x, t, u(t)]\, dt \right\|_{L_q} = 0. \tag{10.43}$$

Тогда оператор A вполне непрерывен.

К сожалению, принцип мажоранты (см. теорему 1.11) для свойства полной непрерывности не имеет места.

1.6. Частные признаки. В пп. 1.4 и 1.5 были приведены общие признаки непрерывности и полной непрерывности операторов Урысона. Эти признаки сводят исследование непрерывности и полной непрерывности к проверке того, что заданный оператор Урысона действует из L_p в L_q. Здесь приводится одно частное, более обозримое утверждение.

Теорема 1.13. *Пусть функция $K(x, t, u)$ $(x, t \in \Omega, -\infty < u < \infty)$ почти при всех $x, t \in \Omega \times \Omega$ непрерывна по u, при всех u измерима на $\Omega \times \Omega$ по совокупности переменных и удовлетворяет неравенству*

$$|K(x, t, u)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} R_k(x, t) f_k(t, u), \tag{10.44}$$

где $f_k(t, u)$ $(k = 0, \ldots, n)$ — неотрицательные функции, удовлетворяющие условиям Каратеодори, а $R_k(x, t)$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ — неотрицательные измеримые по совокупности переменных функции. Пусть оператор суперпозиции $f_k u = f_k[t, u(t)]$ действует из L_p в L_{r_k}, где r_k — некоторое число из $[1, \infty]$, и линейный интегральный оператор $\boldsymbol{R}_k$ с ядром $R_k(x, t)$ действует из L_{r_k} в L_q. Пусть $q < \infty$.

Тогда:

I. *Оператор Урысона* A *с ядром* $K(x, t, u)$ *действует из* L_p *в* L_q *и непрерывен*;

II. *Оператор* A *вполне непрерывен, если при каждом* $k = 0, 1, \ldots, n$ *выполнено одно из условий*:

a) *оператор* f_k *абсолютно ограничен*;

b) $r_k > 1$, *оператор* R_k *вполне непрерывен.*

1.7. Операторы со значениями в пространстве L_∞. Утверждения пп. 1.4 — 1.6 для операторов со значениями в L_∞ неверны. Приведем простые признаки непрерывности и полной непрерывности таких операторов.

Теорема 1.14. *Пусть функция* $K(x, t, u)$ $(x, t \in \Omega, -\infty < u < \infty)$ *почти при всех* $x, t \in \Omega \times \Omega$ *непрерывна по* u, *при всех* u *измерима на* $\Omega \times \Omega$ *по совокупности переменных и при любом* $h > 0$

$$\lim_{\delta \to 0} \left\| \int_\Omega \max_{\substack{|u_i| \leqslant h, \\ |u_1 - u_2| \leqslant \delta}} |K(x, t, u_1) - K(x, t, u_2)| \, dx \right\|_{L_\infty} = 0. \tag{10.45}$$

Пусть оператор Урысона A *с ядром* $K(x, t, u)$ *действует из* L_p *в* L_∞ *и либо* $p = \infty$, *либо* $p < \infty$ *и для любой неотрицательной функции* $z(x)$ *из* L_p

$$\lim_{\operatorname{mes} D \to 0} \sup_{|u| \leqslant z} \left\| \int_D K[x, t, u(t)] \, dt \right\|_{L_\infty} = 0. \tag{10.46}$$

Тогда A *непрерывен.*

Теорема 1.15. *Пусть функция* $K(x, t, u)$ $(x, t \in \Omega, -\infty < u < \infty)$ *почти при всех* $x, t \in \Omega \times \Omega$ *непрерывна по* u, *при всех* u *измерима на* $\Omega \times \Omega$ *по совокупности переменных и для любых* $\varepsilon, h > 0$ *можно указать такое разбиение* $D_0 \cup D_1 \cup \ldots \cup D_l$ *множества* Ω, *что* $\operatorname{mes} D_0 = 0$ *и*

$$\int_\Omega \max_{|u| \leqslant h} |K(x', t, u) - K(x'', t, u)| \, dt < \varepsilon \tag{10.47}$$

$$(x', x'' \in D_k, \quad k = 1, \ldots, l).$$

Пусть оператор Урысона $\boldsymbol{A}$ *с ядром* $K(x, t, u)$ *действует из* L_p *в* L_∞ *и либо* $p=\infty$, *либо* $p<\infty$ *и для некоторого* a

$$\lim_{\operatorname{mes} D\to 0}\ \sup_{\|u\|_{L_p}\leqslant a}\left\|\int_D K[x, t, u(t)]\,dt\right\|_{L_\infty}=0. \tag{10.48}$$

Тогда $\boldsymbol{A}$ *вполне непрерывен.*

Приведем теперь частный признак.

Теорема 1.16. *Пусть функция* $K(x, t, u)$ $(x, t\in\Omega\times\Omega, -\infty<u<\infty)$ *почти при всех* $x, t\in\Omega\times\Omega$ *непрерывна по* u, *при всех* u *измерима на* $\Omega\times\Omega$ *по совокупности переменных и удовлетворяет неравенству*

$$|K(x, t, u)|\leqslant\sum_{k=0}^{n}R_k(x, t)\,f_k(t, u), \tag{10.49}$$

где $f_k(t, u)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ — *неотрицательные функции, удовлетворяющие условиям Каратеодори, а* $R_k(x, t)$ $(k=0, 1, \ldots, n)$ — *неотрицательные измеримые по совокупности переменных функции. Пусть оператор суперпозиции* $f_k u=f_k[t, u(t)]$ *действует из* L_p *в* L_{r_k}, *где* r_k — *некоторое число из* $[1, \infty]$, *и линейный интегральный оператор* $\boldsymbol{R}_k$ *с ядром* $R_k(x, t)$ *действует из* L_{r_k} *в* L_∞.

Тогда:

I. *Оператор Урысона* $\boldsymbol{A}$ *с ядром* $K(x, t, u)$ *действует из* L_p *в* L_∞.

II. *Оператор* $\boldsymbol{A}$ *непрерывен, если функция* $K(x, t, u)$ *удовлетворяет условию*:

$$\lim_{\delta\to 0}\left\|\int_\Omega \max_{\substack{|u_i|\leqslant h,\\ |u_1-u_2|\leqslant\delta}}|K(x, t, u_1)-K(x, t, u_2)|\,dt\right\|_{L_\infty}=0 \tag{10.50}$$

$$(0<h<\infty),$$

и либо $p=\infty$, *либо* $p<\infty$ *и для каждого такого* k, *что* $r_k=\infty$,

$$\lim_{\operatorname{mes} D\to 0}\left\|\int_D R_k(x, t)\,dt\right\|_{L_\infty}=0. \tag{10.51}$$

III. *Оператор* A *вполне непрерывен, если для каждых* ε, $h > 0$ *можно указать такое разбиение* $D_0 \cup D_1 \cup \ldots \cup D_l$ *множества* Ω, *что* $\operatorname{mes} D_0 = 0$ *и*

$$\int\limits_{\Omega} \max_{|u| \leqslant h} |K(x', t, u) - K(x'', t, u)| \, dt < \varepsilon \tag{10.52}$$

$$(x', x'' \in D_k, \quad k = 1, \ldots, l),$$

и если при каждом $k = 0, 1, \ldots, n$ *выполняется одно из условий*:

a) *оператор* f_k *абсолютно ограничен*;

b) $r_k > 1$, *оператор* R_k *вполне непрерывен.*

1.8. Непрерывность и полная непрерывность других интегральных операторов. Изучение нелинейных интегральных операторов более общих, чем операторы Урысона, часто удается свести к изучению суперпозиций операторов Урысона и нелинейных операторов суперпозиции. Различные признаки непрерывности и компактности таких операторов можно получить объединением соответствующих признаков для операторов Урысона и операторов суперпозиции.

Рассмотрим, например, оператор

$$Au(x) = F\left[x, \int\limits_{\Omega} K(x, t) u(t) \, dt\right]. \tag{10.53}$$

Допустим, что линейный интегральный оператор K с ядром $K(x, t)$ действует из L_p в L_r, а нелинейный оператор суперпозиции $\mathfrak{F}u(x) = F[x, u(x)]$ действует из L_r в L_q. Тогда оператор $A = \mathfrak{F}K$ непрерывен, если K и $\mathfrak{F}$ непрерывны, и вполне непрерывен, если K вполне непрерывен, а $\mathfrak{F}$ непрерывен или если K регулярен, а $\mathfrak{F}$ абсолютно ограничен (см. п. 1.1 гл. V и п. 1.1 гл. VI).

Аналогичные утверждения можно сформулировать для более общего, чем (10.53), нелинейного интегрального оператора

$$Au(x) = \\ = F\left\{x, \int\limits_{\Omega} K_1[x, t, u(t)] \, dt, \ldots, \int\limits_{\Omega} K_n[x, t, u(t)] \, dt\right\}. \tag{10.54}$$

Исследование непрерывности и полной непрерывности операторов Ляпунова не представляет труда. Оно сводится к исследованию непрерывности и полной непрерывности линейных интегральных операторов

$$K_{[k_1, \ldots, k_l]} u(x) = \\ = \int_\Omega \ldots \int_\Omega K_{[k_1, \ldots, k_l]}(x, t_1, \ldots, t_l) u(t_1, \ldots, t_l) dt_1 \ldots dt_l \tag{10.55}$$

(эти операторы удобно рассматривать на кросс-произведениях пространств L_p, например на пространстве L_p функций l переменных) и к исследованию сходимости рядов

$$Au(x) = \sum_{k_1, \ldots, k_l} K_{[k_1, \ldots, k_l]} \{u(t_1)^{k_1} \ldots u(t_l)^{k_l}\}(t). \tag{10.56}$$

1.9. Производные нелинейных операторов. Пусть A — нелинейный оператор, действующий из E_1 в E_2. Оператор A называется *дифференцируемым (по Фреше) в точке* u_0, если приращение $A(u_0+h) - Au_0$ оператора A представимо в виде

$$A(u_0+h) - Au_0 = Bh + \omega(u_0, h), \tag{10.57}$$

где B — действующий из E_1 в E_2 линейный непрерывный оператор, а $\omega(u_0, h)$ — оператор, удовлетворяющий условию:

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|\omega(u_0, h)\|_{E_2}}{\|h\|_{E_1}} = 0. \tag{10.58}$$

Оператор B называется *производной (Фреше)* оператора A в точке u_0 и обозначается обычно через $A'(u_0)$.

Если оператор A дифференцируем в каждой точке E_1, то $A'(u)$ можно рассматривать как оператор, определенный на E_1 со значениями в пространстве линейных непрерывных операторов, действующих из E_1 в E_2. Если при этом оператор $A'(u)$ непрерывен, то говорят, что A непрерывно дифференцируем.

Во всех известных признаках дифференцируемости производная нелинейного интегрального оператора

$$Au(x) = \int_\Omega K[x, t, u(t)]\, dt \tag{10.59}$$

в точке u_0 является интегральным оператором

$$A'(u_0)h(x)=\int_{\Omega} K_0(x,\ t)\,h(t)\,dt, \tag{10.60}$$

причем *)

$$K_0(x,\ t)=\lim_{u\to 0}\mathrm{as}\,\frac{K[x,\ t,\ u_0(t)+u]-K[x,\ t,\ u_0(t)]}{u}. \tag{10.61}$$

Отметим здесь, кстати, что никакая гладкость по u ядра $K(x,\ t,\ u)$ оператора Урысона A, действующего из L_p в L_q, не обеспечивает дифференцируемости оператора A (даже в том случае, когда линейный интегральный оператор с ядром $K'_u[x,\ t,\ u_0(t)]$ действует из L_p в L_q). Здесь необходимы существенные дополнительные ограничения.

1.10. Производные оператора Гаммерштейна. Исследование дифференцируемости оператора Гаммерштейна

$$Au(x)=\int_{\Omega} K(x,\ t)\,f[t,\ u(t)]\,dt \tag{10.62}$$

сводится, вообще говоря, к исследованию дифференцируемости оператора суперпозиции

$$fu=f[t,\ u(t)]. \tag{10.63}$$

Допустим, что f действует из L_p в L_r, $r<\infty$. Тогда производная f (если она существует) имеет вид

$$f'(u)h=a(t)\,h(t), \tag{10.64}$$

где

$$a(t)=\lim_{u\to 0}\mathrm{as}\,\frac{f[t,\ u_0(t)+u]-f[t,\ u_0(t)]}{u}. \tag{10.65}$$

Таким образом, если оператор суперпозиции (10.63) действует из L_p в L_r и дифференцируем в точке u_0, то существует предел (10.65), причем либо $p<r$ и $a(t)\equiv 0$, либо $p\geqslant r$ и $a(t)\in L_{\frac{pr}{p-r}}$. Более того, если функция $f(t,\ u)$ зависит от u нелинейно, то $p>r$. Перечисленные условия не являются достаточными для дифференцируемости в точке u_0.

*) Через lim as обозначается предел по мере.

Теорема 1.17. *Пусть функция $f(t, u)$ $(t \in \Omega, -\infty < u < \infty)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Пусть $p > r$, $u_0 \in L_p$, $f[t, u_0(t)] \in L_r$ и существует предел*

$$a(t) = \operatorname*{lim\,as}_{u \to 0} \frac{f[t, u_0(t) + u] - f[t, u_0(t)]}{u}, \tag{10.66}$$

причем $a(t) \in L_{\frac{pr}{p-r}}$. Пусть, наконец, либо $p < \infty$ и выполнено неравенство

$$|f[t, u_0(t) + u] - f[t, u_0(t)]| \leqslant a_0(t)|u| + b_0|u|^{p/r}, \tag{10.67}$$

где $a_0(t) \in L_{\frac{pr}{p-r}}$, b_0 — постоянная, либо $p = \infty$.

Тогда оператор суперпозиции $fu = f[t, u(t)]$ действует из L_p в L_r, непрерывен и дифференцируем в точке u_0, причем

$$f'(u_0)h = a(t)h(t). \tag{10.68}$$

Теорема 1.18. *Пусть функция $f(t, u)$ $(t \in \Omega, -\infty < u < \infty)$ почти при всех $t \in \Omega$ имеет непрерывную по u производную $f'_u(t, u)$ и при всех $u \in (-\infty, \infty)$ измерима по t. Пусть оператор суперпозиции $fu = f[t, u(t)]$ действует из L_p в L_r, причем $p > r$.*

Тогда f дифференцируем в каждой точке пространства L_p в том и только том случае, когда оператор суперпозиции $gu = f'_u[t, u(t)]$ действует из L_p в $L_{\frac{pr}{p-r}}$. При этом оператор f непрерывно дифференцируем.

Предыдущие теоремы относились к операторам суперпозиции со значениями в L_r, где $r < \infty$. Для операторов со значениями в L_∞ исследование дифференцируемости существенно упрощается. Приведем простейшие утверждения.

Теорема 1.19. *Пусть функция $f(t, u)$ $(t \in \Omega, -\infty < u < \infty)$ удовлетворяет условиям Каратеодори и при любом $h > 0$ функция $a_h(t) = \max\limits_{|u| \leqslant h} |f(t, u)|$ принадлежит L_∞. Пусть $u_0 \in L_\infty$, причем существует предел*

$$a(t) = \lim_{u \to 0} \frac{f[t, x_0(t) + u] - f[t, x_0(t)]}{u} \tag{10.69}$$

равномерно относительно $t \in \Omega$.

Тогда оператор суперпозиции $fu = f[t, u(t)]$ *действует из* L_∞ *в* L_∞ *и дифференцируем в точке* x_0, *причем*

$$f'(u_0)h = a(t)h(t). \tag{10.70}$$

Теорема 1.20. *Пусть функция* $f(t, u)$ $(t \in \Omega, -\infty < u < \infty)$ *почти при всех* $t \in \Omega$ *имеет равномерно относительно* $t \in \Omega$ *непрерывную по* u *производную* $f'_u(t, u)$ *и при всех* $u \in (-\infty, \infty)$ *измерима по* t. *Пусть* $f(t, 0) \in L_\infty$.

Тогда оператор суперпозиции $fu = f[t, u(t)]$ *действует из* L_∞ *в* L_∞ *и непрерывно дифференцируем, причем*

$$f'(u)h = f'_u[t, u(t)]h(t). \tag{10.71}$$

Теоремы 1.19—1.20 применимы, конечно, и для исследования операторов суперпозиции, действующих из C в C, так как такие операторы всегда можно рассматривать и как операторы, действующие из L_∞ в L_∞.

Объединяя признаки дифференцируемости оператора суперпозиции с условиями непрерывности линейных интегральных операторов, можно получать различные признаки дифференцируемости операторов Гаммерштейна. Приводимые ниже утверждения содержат и более тонкие признаки.

Теорема 1.21. *Пусть функция* $f(t, u)$ *удовлетворяет условиям Каратеодори,* $u_0 \in L_p$, $f[t, u_0(t)] \in L_r$ $(p \geqslant r)$, *и существует предел*

$$a_0(t) = \lim_{u \to 0} \frac{f[t, u_0(t) + u] - f[t, u_0(t)]}{u}. \tag{10.72}$$

Пусть оператор суперпозиции $ah = a[t, h(t)]$, *где*

$$a(t, u) = \begin{cases} \dfrac{f[t, u_0(t) + u] - f[t, u_0(t)]}{u}, & \text{если } u \neq 0, \\ a_0(t), & \text{если } u = 0, \end{cases} \tag{10.73}$$

действует из L_p *в* $L_{\frac{pr}{p-r}}$. *Пусть линейный интегральный оператор* K *с ядром* $K(x, t)$ *действует из* L_r *в* L_q, *причем выполнено одно из условий:*

a) $p > r$;

b) $1 < p = r < \infty$, *K регулярен и вполне непрерывен*;

c) $p = r = \infty$, *K регулярен и вполне непрерывен.*

Тогда оператор Гаммерштейна $A = Kf$ *действует из* L_p *в* L_q, *непрерывен и дифференцируем в точке* u_0, *причем*

$$A'(u_0)h(x) = \int_{\Omega} K(x, t) f'_u[t, u_0(t)]\, h(t)\, dt. \qquad (10.74)$$

Теорема 1.22. *Пусть функция* $f(t, u)$ *имеет почти при всех* $t \in \Omega$ *непрерывную по* u *производную* $f'_u(t, u)$ *и при всех* $u \in (-\infty, \infty)$ *измерима по* t, *а функция* $K(x, t)$ $(x, t \in \Omega)$ *измерима по совокупности переменных. Пусть оператор суперпозиции* $fu = f[t, u(t)]$ *действует из* L_p *в* L_r, *где* $p \geqslant r$, *оператор суперпозиции* $gu = f'_u[t, u(t)]$ *действует из* L_p *в* $L_{\frac{pr}{p-r}}$, *а линейный интегральный оператор* K *с ядром* $K(x, t)$ *действует из* L_r *в* L_q. *Пусть, наконец, выполнено одно из условий*:

a) $r < p$;

b) $1 < r = p < \infty$, *K регулярен и вполне непрерывен*;

c) $r = p = \infty$, *K регулярен и вполне непрерывен.*

Тогда оператор Гаммерштейна $A = Kf$ *действует из* L_p *в* L_q, *непрерывен и непрерывно дифференцируем, причем*

$$A'(u)\, h(x) = \int_{\Omega} K(x, t) f'_u[t, u(t)]\, h(t)\, dt. \qquad (10.75)$$

1.11. Вспомогательные теоремы об операторе суперпозиции. Анализ дифференцируемости и непрерывной дифференцируемости операторов Урысона сводится обычно к исследованию непрерывности некоторых специальным образом конструируемых операторов суперпозиции, действующих в специальных пространствах непрерывных функций двух переменных.

Пусть $p \in [1, \infty]$. Обозначим через N_p пространство функций $u(x, t)$ $(x, t \in \Omega)$ двух переменных, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\| u(x, t) \|_{N_p} = \Big\| \operatorname{vrai\,max}_{x \in \Omega} | u(x, t) | \Big\|_{L_p}; \qquad (10.76)$$

N_p является банаховым пространством. Функции $u(t)$ из пространства L_p ниже нам удобно рассматривать как не зависящие от x функции из N_p.

Пусть p, $q \in [1, \infty]$. Обозначим (см. п. 2.3 гл. V) через $B_{p,q}$ пространство функций $k(x, t)$ $(x, t \in \Omega)$ двух переменных, для которых имеет смысл и конечна норма

$$\|k(x, t)\|_{B_{p,q}} = \sup_{\|u\|_{L_p}, \|v\|_{L_{q'}} \leqslant 1} \int_\Omega \int_\Omega |k(x, t) u(t) v(x)| \, dt \, dx. \tag{10.77}$$

Через $\overset{0}{B}_{p,q}$ обозначим подпространство функций $k(x, t)$ пространства $B_{p,q}$, для которых

$$\lim_{\text{mes}\, D \to 0} \sup_{\|u\|_{L_p}, \|v\|_{L_{q'}} \leqslant 1} \int_\Omega \int_D |k(x, t) u(t) v(x)| \, dt \, dx = \lim_{\text{mes}\, D \to 0} \sup_{\|u\|_{L_p}, \|v\|_{L_{q'}} \leqslant 1} \int_D \int_\Omega |k(x, t) u(t) v(x)| \, dt \, dx = 0. \tag{10.78}$$

Напомним, что функции $k(x, t)$ из $B_{p,q}$ — это ядра регулярных интегральных операторов, действующих из L_p в L_q. Подпространство $\overset{0}{B}_{p,q}$, если $p = 1$ или $q = \infty$, содержит только нулевую функцию; если же $p > 1$ и $q < \infty$, то функции из $\overset{0}{B}_{p,q}$ — это ядра регулярных интегральных операторов K, для которых K и $|K|$ — вполне непрерывные операторы.

Приводимые ниже теоремы содержат различные достаточные признаки действующего из N_p в $B_{p,q}$ оператора суперпозиции

$$Qu(x, t) = Q[x, t, u(x, t)]. \tag{10.79}$$

Теорема 1.23. *Пусть функция $Q(x, t, u)$ почти при всех $x, t \in \Omega \times \Omega$ непрерывна по u, а при всех u измерима по совокупности переменных x, t. Пусть $Q(x, t, 0) \in B_{p,q}$ и*

$$|Q(x, t, u) - Q(x, t, v)| \leqslant \sum_{j=1}^{m} S_j(x, t) g_j(t, w, u - v) \tag{10.80}$$

$$(|u|, |v| \leqslant w),$$

где $S_j \in B_{\frac{pr_j}{p - r_j}, q}$; функции $g_j(t, w, z)$ почти при всех $t \in \Omega$ непрерывны по совокупности переменных w, z, при всех

w, z измеримы по t, удовлетворяют условию $g_j(t, w, 0)=0$, причем оператор суперпозиции $g_j(w, h)=g_j[t, w(t), h(t)]$ определен при w, $h \in L_p$ и его значения принадлежат L_{r_j}. Пусть, наконец, при каждом j выполнено одно из условий:

a) $r_j < \infty$;

b) $r_j = \infty$, $S_j \in B^0_{p,q}$.

Тогда оператор $Qu = Q[x, t, u(x, t)]$ действует из N_p в $B_{p,q}$ и непрерывен.

Отметим, что оператор $g_j(w, h) = g_j[t, w(t), h(t)]$ определен при w, $h \in L_p$ и его значения принадлежат L_{r_j} в том и только том случае, когда функция $g_j(t, w, h)$ удовлетворяет неравенству

$$|g_j(t, w, h)| \leqslant g_j(t) + a|w|^{p/r_j} + b|h|^{p/r_j}, \tag{10.81}$$

где $g_j(t) \in L_{r_j}$; a, b — постоянные.

Условия теоремы 1.23 во многих случаях проверяются с трудом. Приведем здесь частное, но более обозримое утверждение.

Теорема 1.24. *Пусть функция $Q(x, t, u)$ почти при всех x, $t \in \Omega \times \Omega$ имеет непрерывную по u производную $Q'_u(x, t, u)$ и при всех u измерима по совокупности переменных x, t. Пусть $Q(x, t, 0) \in B_{p,q}$ и функция $Q'_u(x, t, u)$ удовлетворяет неравенству*

$$|Q'_u(x, t, u)| \leqslant \sum_{j=1}^{m} S_j(x, t)\, g_j(t, u), \tag{10.82}$$

где $S_j \in B_{\frac{pr_j}{p+r_j}, q}$; функции $g_j(t, u)$ удовлетворяют условиям Каратеодори, причем каждый оператор суперпозиции $g_j u = g_j[t, u(t)]$ действует из L_p в $L_{\frac{pr_j}{p-r_j}}$, $r_j \leqslant p$.

Тогда оператор $Qu = Q[x, t, u(x, t)]$ действует из N_p в $B_{p,q}$ и непрерывен.

Значительно больший интерес представляют признаки непрерывности оператора суперпозиции (10.79), в которых нет предположения о квалифицированной оценке приращения функции $Q(x, t, u)$. Ниже приводятся основные из таких признаков.

Теорема 1.25. *Пусть функция $Q(x, t, u)$ почти при всех $x, t \in \Omega \times \Omega$ непрерывна по u, а при всех u измерима по совокупности переменных x, t. Пусть оператор суперпозиции $Qu = Q[x, t, u(x, t)]$ действует из N_p в $B^0_{p,q}$, причем $p > 1$, $q < \infty$.*

Тогда оператор Q непрерывен.

Теорема 1.26. *Пусть функция $Q(x, t, u)$ почти при всех $x, t \in \Omega \times \Omega$ непрерывна по u, при всех u измерима по совокупности переменных x, t и удовлетворяет неравенству*

$$|Q(x, t, u)| \leqslant \sum_{j=1}^{m} S_j(x, t)\, g_j(t, u), \tag{10.83}$$

где $S_j(x, t) \in B_{\frac{pr_j}{p+r_j}, q}$, а функции $g_j(t, u)$ $(j = 1, \ldots, m)$ удовлетворяют условиям Каратеодори, причем оператор суперпозиции $g_j u = g_j[t, u(t)]$ действует из L_p в L_{r_j}. Пусть, наконец, $p > 1$, $q < \infty$ и при каждом $j = 1, \ldots, m$ выполнено одно из условий:

a) $r_j < \infty$;

b) $r_j = \infty$, $S_j \in B^0_{p,q}$.

Тогда оператор суперпозиции $Qu = Q[x, t, u(x, t)]$ действует из N_p в $B_{p,q}$ и непрерывен.

Теоремы 1.25 — 1.26 неприменимы, если $p = 1$ или $q = \infty$. Оказывается, что действующий из N_1 в $B_{1,q}$ оператор суперпозиции (10.79) непрерывен лишь в том случае, когда функция $Q(x, t, u)$ не зависит от u. Для операторов суперпозиции со значениями в $B_{p,\infty}$ теоремы, аналогичные теоремам 1.25 — 1.26, также неверны; общий признак непрерывности таких операторов дает следующие утверждения.

Теорема 1.27. *Пусть функция $Q(x, t, u)$ почти при всех $x, t \in \Omega \times \Omega$ непрерывна по u, а при всех $u \in (-\infty, \infty)$ измерима по совокупности переменных x, t на $\Omega \times \Omega$ и при любом $h > 0$ функция*

$$L_h(x, t) = \max_{|u| \leqslant h} |Q(x, t, u)|$$

принадлежит $B_{1,\infty}$. *Пусть, кроме того, при любом* $h > 0$

$$\lim_{\delta\to 0} \operatorname{vrai\,max}_{x\in\Omega} \int_\Omega \max_{|u_i|\leqslant h,\ |u_1-u_2|\leqslant\delta} |Q(x, t, u_1) - Q(x, t, u_2)|\, dt = 0.$$

Тогда оператор Q *действует из* N_∞ *в* $B_{\infty,\infty}$ *и непрерывен.*

Теорема 1.28. *Пусть функция* $Q(x, t, u)$ *почти при всех* $x, t \in \Omega\times\Omega$ *непрерывна по* u, *а при всех* $u \in (-\infty, \infty)$ *измерима по совокупности переменных* x, t *на* $\Omega\times\Omega$ *и удовлетворяет неравенству*

$$|Q(x, t, u)| \leqslant R(x, t) + b|u|^{p-1}, \qquad (10.84)$$

где $R(x, t) \in B_{p',\infty}$, b — *постоянная*, $1 < p < \infty$. *Пусть, кроме того, выполнены условия:*

a) *для любого* $h > 0$

$$\lim_{\delta\to 0} \operatorname{vrai\,max}_{x\in\Omega} \int_\Omega \max_{|u_i|\leqslant h,\ |u_1-u_2|\leqslant\delta} |Q(x, t, u_1) - Q(x, t, u_2)|\, dt = 0;$$

b) *выполняется равенство*

$$\lim_{\operatorname{mes} D\to\infty} \left\| \int_D |R(x, t)|^{p'}\, dt \right\|_{L_\infty} = 0.$$

Тогда оператор Q *действует из* N_p *в* $B_{p,\infty}$ *и непрерывен.*

1.12. Дифференцируемость оператора Урысона.

Теорема 1.29. *Пусть функция* $K(x, t, u)$ *почти при всех* $x, t \in \Omega\times\Omega$ *непрерывна по* u, *а при всех* $u \in (-\infty, \infty)$ *измерима на* $\Omega\times\Omega$ *по совокупности переменных* x, t. *Пусть* $u_0 \in L_p$,

$$\int_\Omega K[x, t, u_0(x, t)]\, dt \in L_q$$

и почти при всех $x, t \in \Omega\times\Omega$ *существует предел*

$$K_0(x, t) = \lim_{u\to 0} \operatorname{as} \frac{K[x, t, u_0(t) + u] - K[x, t, u_0(t)]}{u}.$$

Пусть оператор суперпозиции $Hu = H[x, t, u(x, t)]$, *где*

$$H(x, t, u) = \begin{cases} \dfrac{K[x, t, u_0(t) + u] - K[x, t, u_0(t)]}{u}, & \text{если } u \neq 0, \\ K_0(x, t), & \text{если } u = 0, \end{cases}$$

действует из L_p *в* $B_{p,q}$ *и непрерывен в точке* 0.

Тогда оператор Урысона A *с ядром* $K(x, t, u)$ *действует из* L_p *в* L_q *и дифференцируем в точке* u_0, *причем*

$$A'(u_0)h(x) = \int_\Omega K_0(x, t)h(t)\,dt. \qquad (10.85)$$

Применяя различные признаки непрерывности операторов суперпозиции к оператору H, можно получить различные достаточные условия дифференцируемости операторов Урысона.

1.13. Непрерывная дифференцируемость операторов Урысона.

Теорема 1.30. *Пусть функция* $K(x, t, u)$ *почти при всех* $x, t \in \Omega \times \Omega$ *имеет непрерывную по* u *производную* $K'_u(x, t, u)$ *и при всех* $u \in (-\infty, \infty)$ *измерима по совокупности переменных* x, t *на* $\Omega \times \Omega$. *Пусть оператор* A *с ядром* $K(x, t, u)$ *действует из* L_p *в* L_q, *а оператор суперпозиции* $Qu = Q[x, t, u(x, t)]$ *действует из* N_p *в* $B_{p,q}$ *и непрерывен.*

Тогда A *непрерывно дифференцируем, причем*

$$A'(u)h(x) = \int_\Omega K'_u[x, t, u(t)]h(t)\,dt. \qquad (10.86)$$

1.14. Производные старших порядков. Пусть A — нелинейный оператор, действующий из одного банахова пространства E_1 в другое E_2. Допустим, что приращение $A(u_0 + h) - A(u_0)$ оператора A представимо в виде

$$A(u_0 + h) - Au_0 = \sum_{k=1}^{n} B_k h + \omega(u_0, h), \qquad (10.87)$$

где

$$B_k h = \widehat{B}_k(h_1, \ldots, h_k), \qquad (10.88)$$

а $\hat{B}_k(h_1, \ldots, h_k)$ — линейный по каждому переменному $h_1, \ldots, h_k$ и непрерывный по совокупности переменных оператор; $\omega(u_0, h)$ — оператор, удовлетворяющий условию

$$\lim_{\|h\|_{E_1}\to 0} \frac{\|\omega(u_0, h)\|_{E_2}}{\|h\|^n_{E_1}} = 0. \qquad (10.89)$$

Тогда говорят, что A *n раз дифференцируем в точке* u_0; операторы $k!B_k$ называются *производными* оператора A в точке u_0 и обозначаются через $A^{(k)}(u_0)$.

Приведем две теоремы о старших производных интегральных операторов.

Теорема 1.31. *Пусть функция $f(t, u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Пусть $u_0 \in L_p$, $f[t, u_0(t)] \in L_r$ и*

$$f[t, u_0(t)+u] - f[t, u_0(t)] = \sum_{k=1}^{n} a_k(t)\, u^k + w(t, u)\, u^n, \qquad (10.90)$$

где $a_k(t) \in L_{\frac{pr}{p-rk}}$, а $w(t, 0) = 0$ и оператор суперпозиции $wu = w[t, u(t)]$ действует из L_p в $L_{\frac{pr}{p-rn}}$. Пусть линейный интегральный оператор K с ядром $K(x, t)$ действует из L_r в L_q. Пусть, наконец, выполнено одно из условий:

a) $p > nr$;

b) $p = nr$, *оператор K регулярен и вполне непрерывен.*

Тогда оператор Гаммерштейна $A = Kf$ действует из L_p в L_q, непрерывен и имеет в точке u_0 производные до n-го порядка, причем

$$A^{(k)}(u_0)\, h(x) = \int_\Omega K(x, t)\, a_k(t)\, h^k(t)\, dt \quad (k = 1, \ldots, n). \qquad (10.91)$$

Теорема 1.32. *Пусть функция $K(x, t, u)$ $(x, t \in \Omega, -\infty < u < \infty)$ измерима по x, t на $\Omega \times \Omega$ при всех $u \in (-\infty, \infty)$ и непрерывна по u почти при всех x, $t \in \Omega \times \Omega$. Пусть $u_0 \in L_p$,*

$$\int_\Omega K[x, t, u_0(t)]\, dt \in L_q \qquad (10.92)$$

и

$$K[x, t, u_0(t)+u]-K[x, t, u_0(t)] = \\ = \sum_{k=1}^{n} K_k(x, t)u^k + W(x, t, u)u^n, \qquad (10.93)$$

где $W(x, t, 0) \equiv 0$. *Пусть* $K_k(x, t) \in B_{\frac{p}{k}, q}$ $(k=1, \ldots, n)$ *и оператор суперпозиции* $Wu = W[x, t, u(t)]$ *действует из* L_p *в* $B_{p, q}$ *и непрерывен.*

Тогда оператор Урысона A *с ядром* $K(x, t, u)$ *действует из* L_p *в* L_q, *непрерывен и имеет в точке* u_0 *производные до порядка* n, *причем*

$$A^{(k)}(u_0)h(x) = \int_\Omega K_k(x, t)h^k(t)\,dt \qquad (k=1, \ldots, n). \qquad (10.94)$$

1.15. Аналитические операторы. Действующий из пространства E_1 в пространство E_2 оператор A называется *аналитическим в точке* u_0, если его приращение $A(u_0+h)-Au_0$ допускает представление

$$A(u_0+h)-Au_0 = \sum_{k=1}^{\infty} B_k h, \qquad (10.95)$$

где B_k — операторы вида (10.88), а ряд в правой части сходится по норме равномерно в некотором шаре $\|h\| \leqslant \rho$. Аналитический в точке u_0 оператор A имеет в точке u_0 производные $A^{(k)}(u_0)$ всех порядков, причем $A^{(k)}(u_0) = k!\,B_k$. Нетрудно видеть, что аналитический в точке u_0 оператор A аналитичен и в некоторой окрестности точки u_0.

Все приведенные в этом параграфе определения и утверждения относились как к вещественным, так и к комплексным пространствам. Приведем одно важное утверждение, которое для вещественных пространств неверно — *в комплексном пространстве аналитичность оператора* A *в точке* u_0 *вытекает из его дифференцируемости в точке* u_0 *и ее окрестности.*

В качестве примера рассмотрим оператор Урысона

$$Au(x) = \int_\Omega K[x, t, u(t)]\,dt. \qquad (10.96)$$

Пусть

$$K(x,\ t,\ u)=\sum_{k=0}^{\infty} K_k(x,\ t)\,u^k, \tag{10.97}$$

где $K_k(x,\ t)$ — измеримая по совокупности переменных функция и

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{\sup_{x\in\Omega} \int_\Omega |K(x,\ t)|\,dt} < 1/a. \tag{10.98}$$

Тогда оператор A определен на шаре $\|u\| < a$ пространства L_∞ и аналитичен. Оператор Урысона аналитичен в пространствах L_p лишь в тех случаях, когда его ядро является многочленом по u степени не выше p.

В естественных условиях аналитичен оператор Ляпунова — Лихтенштейна

$$Au(x)=\sum_{k_1,\ldots,\ k_l} \int_\Omega \ldots \int_\Omega K_{[k_1,\ldots,\ k_l]}(x,\ t_1,\ \ldots,\ t_l)\,u(t_1)^{k_1}\ldots$$

$$\ldots u(t_l)^{k_l}\,dt_1\ldots dt_l. \tag{10.99}$$

1.16. Асимптотически линейные операторы. Действующий из E_1 в E_2 нелинейный оператор A называется *асимптотически линейным*, если он допускает представление

$$Au=Bu+\omega(u), \tag{10.100}$$

где B — действующий из E_1 в E_2 линейный непрерывный оператор, а оператор $\omega(u)$ удовлетворяет условию:

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\|\omega(u)\|_{E_2}}{\|u\|_{E_1}}=0. \tag{10.101}$$

Оператор B называется при этом *асимптотической производной* или *производной на бесконечности* и обозначается через $A'(\infty)$.

Приведем условия асимптотической линейности оператора суперпозиции и интегральных операторов.

Теорема 1.33. *Пусть функция $f(t,\ u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори и пусть существует предел*

$$g(t)=\lim_{u\to\infty} \frac{f(t,\ u)}{u}. \tag{10.102}$$

Пусть, кроме того, выполнено одно из условий:

а) $p=r$, $g(t)\in L_\infty$ *и выполняется неравенство*

$$|f(t,u)-g(t)u|\leqslant a(t)+b(t)|u|^k, \tag{10.103}$$

где $a(t)\in L_r$, $b(t)\in L_{\frac{p}{1-k}}$, $0<k<1$;

b) $p>r$, $g(t)\in L_{\frac{pr}{p-r}}$ *и выполняется неравенство*

$$|f(t,u)-g(t)u|\leqslant a(t)+b(t)|u|, \tag{10.104}$$

где $a(t)\in L_r$, $b(t)\in L_{\frac{pr}{p-r}}$.

Тогда оператор суперпозиции $fu=f[t,u(t)]$ *асимптотически линеен и*

$$f'(\infty)h(t)=g(t)h(t). \tag{10.105}$$

Теорема 1.34. *Пусть функция* $f(t,u)$ *удовлетворяет условиям Каратеодори, причем существует предел*

$$g(t)=\lim_{u\to\infty}\frac{f(t,u)}{u}, \tag{10.106}$$

а $K(x,t)$ — *измеримая по совокупности переменных функция. Пусть оператор суперпозиции* $fu=f[t,u(t)]$ *действует из* L_p *в* L_r, *где* $r\leqslant p$, $g(t)\in L_{\frac{pr}{p-r}}$, *а интегральный оператор* $\boldsymbol{K}$ *действует из* L_r *в* L_q. *Пусть выполнено одно из условий:*

а) $r<p$ *и функция* $f(t,u)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|f(t,u)-g(t)u|\leqslant a(t)+b(t)|u|, \tag{10.107}$$

где $a(t)\in L_r$, $b(t)\in L_{\frac{pr}{p-r}}$;

в) $r=p=\infty$ *и функция* $f(t,u)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|f(t,u)-g(t)u|\leqslant a(t)+b(t)|u|, \tag{10.108}$$

где $a(t)\in L_r$, $b(t)\in L_\infty$, *а оператор* $\boldsymbol{K}$ *регулярен и вполне непрерывен;*

c) *$r=p$ и функция $f(t, u)$ удовлетворяет неравенству*

$$|f(t, u)-g(t)u| \leqslant a(t)+b(t)|u|^k, \qquad (10.109)$$

где $a(t)\in L_r$, $b(t)\in L_{\frac{p}{1-k}}$, $0<k<1$.

Тогда оператор Гаммерштейна $A=Kf$ действует из L_p в L_q и асимптотически линеен, причем

$$A'(\infty)u(x)=\int_\Omega K(x, t)g(t)u(t)\,dt. \qquad (10.110)$$

Исследование асимптотической линейности операторов Урысона является более трудной задачей. В приложениях обычно стараются установить неравенство вида

$$|K(x, t, u)-K_\infty(x, t)u| \leqslant \sum_{j=1}^{m} S_j(x, t)g_j(t, u). \qquad (10.111)$$

Если операторы Гаммерштейна

$$B_j u(x)=\int_\Omega S_j(x, t)\,g_j[t, u(t)]\,dt \qquad (10.112)$$

как операторы из L_p в L_q имеют ненулевую асимптотическую производную и если $K_\infty(x, t)\in B_{p,q}$, то оператор Урысона с ядром $K(x, t, u)$ действует из L_p в L_q, асимптотически линеен и

$$A'(\infty)u(x)=\int_\Omega K_\infty(x, t)u(t)\,dt. \qquad (10.113)$$

1.17. Дополнительные замечания. Подробное изложение приведенных в параграфе признаков непрерывности, полной непрерывности, дифференцируемости и других свойств нелинейных интегральных операторов читатель найдет в монографии [11]; некоторые признаки изложены также в монографиях [2], [8], [9], [10], [12].

Отметим, что изложенные в параграфе теоремы об операторах, действующих в L_p $(1\leqslant p<\infty)$, применимы лишь к операторам с подстепенными нелинейностями — изучение операторов с другими нелинейностями (например, экспоненциальными) требует перехода к пространствам функций, отличным от пространств L_p, — пространствам Орлича, Лоренца, Марцинкевича и др. Приведенные в этом параграфе теоремы о непрерывности, полной непрерывности, дифференцируемости операторов Гаммерштейна и Урысона являются частными случаями общих теорем, относящихся к операторам, действующим в общих пространствах функций; эти общие теоремы изложены в [6].

В некоторых случаях приходится рассматривать операторы, определенные не на всем пространстве, а лишь на некоторой его части (например, на множестве всех неотрицательных функций или на множестве функций $u(t)$, удовлетворяющих неравенству $u_1(t) \leqslant u(t) \leqslant u_2(t)$. Для операторов, определенных на таких множествах, справедливы аналоги изложенных в параграфе теорем (см., например, [6], [12]).

§ 2. Существование и единственность решения

2.1. Постановка задачи. В этом параграфе в основном изучаются уравнения вида

$$u(x) = \mu \int_{\Omega} K[x, t, u(t)]\, dt + f(x), \tag{10.114}$$

где Ω — ограниченное замкнутое множество конечномерного пространства ненулевой лебеговой меры, $K[x, t, u]$, $f(x)$, $(x, t \in \Omega,\ u \in (a, b))$ — заданные функции, μ — параметр, $u(x)$ — искомая функция.

Как правило (см § 1), нелинейный интегральный оператор

$$Au(x) = \int_{\Omega} K[x, t, u(t)]\, dt, \tag{10.115}$$

определенный первым слагаемым правой части уравнения (10.114), действует в некоторых банаховых пространствах E измеримых на Ω функций и обладает рядом «хороших» свойств (непрерывен, вполне непрерывен, дифференцируем и т. д.). Если при этом $f(x) \in E$, то удобно рассматривать уравнение (10.114) как нелинейное операторное уравнение

$$u = \mu A u + f \tag{10.116}$$

в E. Следует помнить, что при переходе к уравнению (10.116) в E будут «потеряны» решения, не принадлежащие E (если такие решения существуют). Если операторное уравнение

(10.116) можно рассматривать в разных пространствах, то выбор пространства E определяется тем, решения с какими свойствами нас интересуют.

В этом параграфе нас будут интересовать условия существования хотя бы одного решения и условия однозначной разрешимости уравнения (10.116). В тех случаях, когда уравнение (10.116) имеет тривиальное нулевое решение, будет рассмотрен вопрос о существовании второго ненулевого решения. Будет рассмотрен также вопрос об условиях существования неотрицательных решений.

Решения уравнения (10.116) — это неподвижные точки оператора $A_1 u = \mu A u + f$. Поэтому основным методом доказательства существования решений у уравнений (10.116) и, следовательно, у уравнения (10.114) является применение принципов неподвижных точек. Наиболее часто употребляемыми в анализе принципами неподвижных точек являются принцип Банаха сжатых отображений (см. п. 2.2) и принцип Шаудера (см. п. 2.3). В этом параграфе также указываются теоремы существования решения у уравнения (10.114), основанные на других принципах неподвижной точки.

2.2. Уравнения с операторами, удовлетворяющими условию Липшица. Говорят, что оператор A, действующий в банаховом пространстве E, удовлетворяет на множестве $M \subset E$ *условию Липшица* с постоянной q, если

$$\|Au - Av\| \leqslant q \|u - v\| \qquad (u,\ v \in M). \qquad (10.117)$$

Если при этом $q < 1$, то оператор A называется *оператором сжатия*. Напомним, что линейный ограниченный оператор удовлетворяет неравенству (10.117) при $q = \|A\|$.

Принцип сжатых отображений: *если оператор сжатия A преобразует в себя замкнутое множество $M \subset E$ $(AM \subset M)$, то он имеет в M единственную неподвижную точку u^*. Эта неподвижная точка может быть получена как предел последовательных приближений*

$$u_n = Au_{n-1} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots), \qquad (10.118)$$

где u_0 — произвольный элемент M. Быстрота сходимости метода (10.118) *характеризуется неравенством*

$$\|u_n - u^*\| \leqslant \frac{q^n}{1-q} \|u_1 - u_0\| \quad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \qquad (10.119)$$

Применяя принцип сжатых отображений, легко получить следующие утверждения.

Теорема 2.1. *Пусть функция* $K(x, t, u)$ *непрерывна по совокупности переменных* $x, t \in \Omega$, $|u| \leqslant \rho$ *и пусть*

$$\left|\frac{\partial K(x, t, u)}{\partial u}\right| \leqslant C \qquad (x, t \in \Omega, |u| \leqslant \rho).$$

Тогда уравнение

$$u(x) = \mu \int_{\Omega} K[x, t, u(t)]\, dt \tag{10.120}$$

имеет единственное непрерывное решение $u^*(x)(x \in \Omega)$, *удовлетворяющее неравенству* $|u(x)| \leqslant \rho$, *если*

$$|\mu| \cdot C \cdot \operatorname{mes} \Omega < 1,$$

$$|\mu| \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} \max_{|u| \leqslant \rho} |K(x, t, u)|\, dt \leqslant \rho. \tag{10.121}$$

Если $u_0(x)$ — *произвольная непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству* $|u_0(x)| \leqslant \rho(x \in \Omega)$, *то последовательные приближения*

$$u_n(x) = \mu \int_{\Omega} K[x, t, u_{n-1}(t)]\, dt \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{10.122}$$

равномерно на Ω *сходятся к* $x^*(t)$.

Теорема 2.2. *Пусть оператор* (10.115) *действует в пространстве* $L_p(\Omega)(p > 1)$. *Пусть, далее, для всех* u_1, u_2 *и* $x, t \in \Omega$ *выполняется неравенство*

$$|K(x, t, u_1) - K(x, t, u_2)| \leqslant K_1(x, t)|u_1 - u_2|,$$

где $K_1(x, t)$ *измерима и*

$$\Lambda^p = \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} K_1^{\frac{p}{p-1}}(x, t)\, dt \right)^{p-1} dx < \infty.$$

Тогда при $|\mu| < \frac{1}{\Lambda}$ *и при* $f \in L_p$ *уравнение* (10.114) *имеет в* $L_p(\Omega)$ *единственное решение.*

2.3. Уравнения с вполне непрерывными операторами. Принцип Шаудера: *если вполне непрерывный оператор* **A** *преобразует ограниченное выпуклое замкнутое* *множество $M \subset E$ в себя, то **A** имеет в M по крайней мере одну неподвижную точку.*

В приложениях принципа Шаудера важно, во-первых, уметь устанавливать полную непрерывность изучаемого оператора (см. § 1) и, во-вторых, уметь устанавливать существование инвариантных для данного оператора выпуклых множеств.

Из принципа Шаудера немедленно вытекает, что уравнение (10.114) при малых μ имеет по крайней мере одно решение в пространстве E, если оператор (10.115) вполне непрерывен в E и если $f \in E$. Более точные теоремы содержат оценки допустимых значений μ.

Теорема 2.3. *Пусть функция $K(x, t, u)$ $(x, t \in \Omega, |u| < \infty)$ непрерывна по u и удовлетворяет неравенству*

$$|K(x, t, u)| \leqslant K_1(x, t)(a + b|u|^\alpha) \qquad (x, t \in \Omega, |u| < \infty),$$

где a, b, $\alpha > 0$ и

$$\int_\Omega \int_\Omega |K_1(x, t)|^{\alpha+1}\, dx dt < \infty.$$

Тогда уравнение (10.114) *имеет при всех достаточно малых по абсолютной величине μ и $f(x) \in L_{\alpha+1}$ решение $\overset{*}{u}_\mu(x) \in L_{\alpha+1}$. Если $\alpha < 1$, то решения существуют при всех μ.*

Теорема 2.4. *Пусть функция $K(x, t, u)$ непрерывна по совокупности переменных x, $t \in \Omega$, $|u| \leqslant a$.*

Тогда при

$$|\mu| \leqslant \frac{a}{\operatorname{mes}\Omega \cdot \max\limits_{\substack{x,\, t \in \Omega \\ |u| \leqslant a}} |K(x, t, u)|}$$

интегральное уравнение (10.120) *имеет по крайней мере одно непрерывное решение $\overset{*}{u}_\mu(x)$, удовлетворяющее неравенству $|\overset{*}{u}_\mu(x)| \leqslant a$.*

Теорема 2.5. *Пусть функция $K(x, t, u)$ непрерывна по совокупности переменных x, $t \in \Omega$, $|u| < \infty$. Положим*

$$\varphi(r) = \max_{x,\, t \in \Omega,\, u \leqslant r} |K(x, t, u)|,$$

$$\Lambda = \sup_{0 < r < \infty} \frac{r}{\varphi(r) \cdot \operatorname{mes}\Omega}.$$

Тогда при $|\mu| < \Lambda$ *интегральное уравнение* (10.120) *имеет по крайней мере одно непрерывное решение* $u_\mu^*(x)$.

В частности, если

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\varphi(r)}{r} = 0, \tag{10.123}$$

то интегральное уравнение (10.120) разрешимо при любом μ. В этом случае разрешимо при любом μ уравнение (10.114) при любой непрерывной $f(x)$.

В заключение отметим, что в ряде случаев для доказательства теорем существования удобно пользоваться следующим принципом неподвижной точки.

Оператор $A(u, \lambda)$ $(u\in E,\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1)$ назовем *вполне непрерывным*, если он непрерывен по совокупности переменных и если каждое множество $\{v\colon\ v = A(u, \lambda),\ \|u\|\leqslant r,\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1\}$ компактно в E.

Пусть для всех решений $u(\lambda)$ всех уравнений

$$u = A(u, \lambda) \qquad (0\leqslant\lambda\leqslant 1)$$

с вполне непрерывным оператором $A(u, \lambda)$ установлена общая априорная оценка

$$\|u(\lambda)\|\leqslant R_0 \qquad (0\leqslant\lambda\leqslant 1).$$

Пусть оператор $A(u, 1)$ удовлетворяет условию

$$\|A(u, 1)\| < R_0 \qquad (\|u\| = R_0).$$

Тогда уравнение

$$u = A(u, 0)$$

имеет по крайней мере одно решение.

2.4. Использование односторонних оценок. Непосредственным обобщением принципа Шаудера для случая гильбертова пространства является следующий принцип:

Пусть вполне непрерывный оператор A удовлетворяет условию:

$$(Au, u)\leqslant(u, u) \qquad (\|u\| = R). \tag{10.124}$$

Тогда в шаре $\|u\|\leqslant R$ *найдется по крайней мере одно решение уравнения* $u = Au$.

Проиллюстрируем этот принцип теоремой существования для системы нелинейных интегральных уравнений

$$u_i(x)=\int_\Omega K_i(x,\ t)\,f_i[t,\ u_1(t),\ \ldots,\ u_n(t)]\,dt \qquad (10.125)$$

$$(i=1,\ \ldots,\ n)$$

с непрерывными симметричными положительно определенными ядрами $K_i(x,\ t)$ и непрерывными по совокупности переменных функциями $f_i(t,\ u_1,\ \ldots,\ u_n)$. Пусть функции $f_i(t,\ u_1,\ \ldots,\ u_n)$ удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{i=1}^{n} u_i f_i(t,\ u_1,\ \ldots,\ u_n)\leqslant a\sum_{i=1}^{n} u_i^2+b \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

где $a<1/\lambda_0$, а λ_0 — наибольшее из собственных значений ядер $K_i(x,\ t)$.

Тогда система (10.125) имеет по крайней мере одно непрерывное решение.

2.5. Уравнения с асимптотически линейными операторами. Предположим, что нелинейный оператор (10.115) вполне непрерывен в некотором функциональном пространстве E и асимптотически линеен (см. стр. 395). Пусть его асимптотическая производная $A'(\infty)$ — интегральный оператор

$$A'(\infty)\,u(x)=\int_\Omega B(x,\ t)\,u(t)\,dt. \qquad (10.126)$$

Теорема 2.6. *Если число* $1/\mu$ *не является собственным значением оператора* (10.126), *то уравнение* (10.114) *имеет по крайней мере одно решение в* E.

Например, пусть непрерывная функция $K(x,t,u)$ удовлетворяет неравенству

$$|K(x,\ t,\ u)-K_0(x,\ t)\,u|\leqslant a+b\,|u|^{1-\varepsilon}. \qquad (10.127)$$

Тогда при любой непрерывной $f(x)$ уравнение (10.114) имеет по крайней мере одно непрерывное решение при таких μ, что $1/\mu$ не есть собственное значение ядра $K_0(x,\ t)$.

2.6. Вариационные методы. Пусть определенный на L_2 функционал $F(u)$ *дифференцируем* в каждой точке $u\in L_2$ в том смысле, что его приращение можно представить в виде

$$F(u+h)-F(u)=(v,\ h)+o(\|h\|).$$

Оператор $\mathbf{\Gamma}$, определенный равенством

$$\mathbf{\Gamma} u = v,$$

называют тогда *градиентом функционала* F и пишут $\mathbf{\Gamma} = \operatorname{grad} F$. Оператор, являющийся градиентом некоторого функционала, называют *потенциальным.*

Для уравнений с потенциальными операторами теоремы существования удобно доказывать вариационным методом. Этот метод заключается в том, что решения уравнения

$$\mathbf{\Gamma} u = \theta \tag{10.128}$$

истолковываются как точки экстремума функционала $F(u)$. Поэтому каждая теорема о существовании экстремума у функционала $F(u)$ является одновременно теоремой о существовании решений уравнения (10.128).

Приведем один признак существования точки минимума у нелинейного функционала $F(u)$. Пусть

$$\lim_{\|u\| \to \infty} F(u) = \infty; \tag{10.129}$$

далее, пусть

$$F(u) = \beta(u, u) + F_1(u), \tag{10.130}$$

где β — неотрицательное число, а $F_1(u)$ — слабо непрерывный функционал *); тогда функционал $F(u)$ в некоторой точке принимает свое минимальное значение.

При изучении интегральных уравнений основная трудность заключается в приведении интегрального уравнения к уравнению с потенциальным оператором.

Рассмотрим уравнение Гаммерштейна

$$u(x) = \int_{\Omega} K(x, t) f[t, u(t)]\, dt \tag{10.131}$$

с непрерывным положительно определенным ядром $K(x, t)$ и непрерывной по совокупности переменных функцией $f(t, u)$.

Пусть

$$K(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} e_i(x) e_i(t).$$

*) Если u_n слабо сходится к u^*, то $F_1(u_n) \to F_1(u^*)$.

Определим на L_2 оператор H равенством

$$Hu(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} e_i(x) \int_{\Omega} e_i(t) u(t) \, dt.$$

Можно показать, что функционал

$$F(u) = \frac{1}{2}(u, u) - \int_{\Omega} \left[\int_{0}^{Hu(x)} f(t, u) \, du \right] dt \qquad (10.132)$$

представим в виде (10.130). Поэтому $\operatorname{grad} F$ в некоторой точке обращается в нуль, если выполнено условие (10.129); для этого достаточно, чтобы функция $f(t, u)$ удовлетворяла неравенству

$$\int_{0}^{u} f(t, u) \, du \leqslant \frac{a}{2} u^2 + b \qquad (t \in \Omega, |u| < \infty), \quad (10.133)$$

где $a < 1/\lambda_0$, λ_0 — наибольшее собственное значение ядра $K(x, t)$.

Таким образом, если неравенство (10.133) выполнено, то в L_2 существует по крайней мере одно решение $u^* = u^*(x)$ уравнения

$$\operatorname{grad} F(u) \equiv u - Hf(t, Hu) = 0. \qquad (10.134)$$

Непрерывная функция

$$v(x) = Hu(x)$$

в этом случае будет решением уравнения Гаммерштейна (10.131).

Таким образом, доказана

Теорема 2.7. *Если выполнено неравенство* (10.133), *то уравнение* (10.131) *имеет по крайней мере одно непрерывное решение.*

Более сложен анализ уравнения (10.131), если положительно определенное симметричное ядро $K(x, t)$ не ограничено.

Теорема 2.8. *Пусть ядро $K(x, t)$ удовлетворяет условию*

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} |K(x, t)|^p \, dx \, dt < \infty,$$

где $p \geqslant 2$, *и пусть функция* $f(t, u)$ *удовлетворяет неравенству* (10.133) *и условию*

$$|f(t, u)| \leqslant a + b\,|u|^{p-1} \qquad (t \in \Omega, -\infty < u < \infty).$$

Тогда уравнение (10.131) *имеет по крайней мере одно решение.*

Вариационные методы применимы и в том случае, когда симметричное ядро $K(x, t)$ имеет конечное число отрицательных собственных значений, наименьшее по абсолютной величине из которых обозначим через λ_-.

Теорема 2.9. *Пусть симметричное ядро* $K(x, t)$ *непрерывно и имеет конечное число отрицательных собственных значений. Пусть* $f(t, u)$ *удовлетворяет неравенству*

$$-\int_0^u f(t, u)\,du \geqslant au^2 - c \qquad (t \in \Omega, -\infty < u < \infty),$$

где $a\,|\lambda_-| > {}^1/_2$.

Тогда уравнение (10.131) *имеет по крайней мере одно непрерывное решение.*

2.7. Существование ненулевых решений. В большинстве приведенных выше теорем утверждалось, что нелинейные интегральные уравнения имеют по крайней мере одно решение. Следует подчеркнуть, что в существенно нелинейных задачах (типа задач о формах потери устойчивости упругих систем, задач о волнах и т. д.) единственность решения является исключительным фактом. Часто бывает, что одно из решений известно, а требуется отыскать другое решение. В подобных ситуациях приведенные выше теоремы непосредственно не применимы.

Будем считать для простоты, что изучаемое уравнение $u = Au$ имеет нулевое решение. Для отыскания признаков существования ненулевых решений могут быть применены топологические методы, изложение которых выходит за рамки настоящего справочника. Мы ограничимся формулировкой лишь одного простого общего принципа.

Теорема 2.10. *Пусть* A — *вполне непрерывный оператор и* $AT \subset T$, *где* $T = \{u, \|u\| \leqslant r\}$. *Пусть* $A\theta = \theta$ *и* A *дифференцируем в нуле* θ. *Пусть, наконец,* 1 *не является* *собственным значением оператора* $A'(\theta)$, *а сумма кратностей больших, чем* 1, *собственных значений оператора* $A'(\theta)$ *нечетна.*

Тогда оператор A *имеет в шаре* T *по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.*

Эта теорема удобна в сочетании с признаками полной непрерывности и дифференцируемости нелинейных интегральных операторов (см. § 1). Приведем простейшие следствия теоремы 2.10.

Теорема 2.11. *Пусть* $K(x, t, u)$ *непрерывна по совокупности переменных и*

$$|K(x, t, u)| \leqslant a + b|u|^{1-\varepsilon} \qquad (x, t \in \Omega, \ -\infty < u < \infty),$$

пусть функция $K(x, t, u)$ *при малых и непрерывно дифференцируема по* u. *Пусть* 1 *не является собственным значением ядра* $K'_u(x, t, 0)$, *а сумма кратностей больших, чем* 1, *собственных значений этого ядра нечетна.*

Тогда уравнение

$$u(x) = \int_{\Omega} K[x, t, u(t)]\, dt$$

имеет по крайней мере одно ненулевое непрерывное решение.

2.8. Существование положительного решения. В этом пункте мы ограничимся изучением интегрального уравнения

$$u(x) = \int_{\Omega} K[x, t, u(t)]\, dt, \qquad (10.135)$$

ядро которого $K(x, t, u)$ непрерывно по совокупности переменных и удовлетворяет условию:

$$K(x, t, u) \geqslant 0 \qquad (x, t \in \Omega, \ u \geqslant 0). \qquad (10.136)$$

В этом случае интегральный оператор A, определенный правой частью уравнения (10.135), преобразует в себя конус K неотрицательных функций пространства $C(\Omega)$ и вполне непрерывен.

Для исследования уравнения (10.135) могут быть применены общие методы теории нелинейных операторов, оставляющих инвариантным конус в банаховом пространстве, Теорема 2.12. *Пусть*

$$K(x, t, u) \leqslant a + G(x, t)u \qquad (x, t \in \Omega, \ u \geqslant 0), \qquad (10.137)$$

причем наибольшее собственное значение λ *неотрицательного ядра* $G(x, t)$ *удовлетворяет неравенству* $\lambda < 1$.

Тогда уравнение (10.135) *имеет по крайней мере одно непрерывное неотрицательное решение.*

Предположим теперь, что уравнение (10.135) имеет нулевое решение. Возникает вопрос о существовании неотрицательных решений, отличных от тождественного нуля (см. п. 2.7). Для доказательства существования ненулевых неотрицательных решений удобно применять принципы неподвижной точки для так называемых операторов сжатия и растяжения конуса. Мы приведем здесь упрощенные формулировки этих принципов.

Пусть оператор A оставляет инвариантным конус K в банаховом пространстве E (см. гл. V, § 4). Будем говорить, что A является *сжатием конуса* K, если $u - Au \overline{\in} K$ при ненулевых u из K, имеющих малую норму, и если $Au - u \overline{\in} K$ при $u \in K$, имеющих большую норму. Аналогично оператор A является *растяжением конуса*, если $Au - u \overline{\in} K$ при ненулевых u из K, имеющих малую норму, и $u - Au \in K$ при $u \in K$, имеющих большую норму.

Теорема 2.13. *Если вполне непрерывный положительный оператор* A *является растяжением или сжатием конуса, то он имеет в* K *по крайней мере одну ненулевую неподвижную точку.*

Приведем непосредственные следствия этой теоремы для уравнения (10.135).

Теорема 2.14. *Пусть* $K(x, t, u)$ *удовлетворяет условию теоремы* 2.12. *Пусть*

$$K(x, t, u) \geqslant G_1(x, t)u \qquad (0 \leqslant u \leqslant r),$$

причем непрерывное ядро $G_1(x, t)$ *положительно и его наибольшее собственное значение больше* 1.

Тогда уравнение (10.135) *имеет по крайней мере одно положительное решение.*

Теорема 2.15. *Пусть*

$$K(x, t, u) \leqslant G_2(x, t)u \qquad (0 \leqslant u \leqslant r),$$

причем все собственные значения ядра $G_2(x, t)$ меньше, чем 1. *Пусть*

$$K(x, t, u) \geqslant G_3(x, t)u - a \quad (x, t \in \Omega, u \geqslant 0),$$

причем ядро $G_3(x, t)$ положительно и его наибольшее собственное значение больше, чем 1. *Наконец, пусть ядро $K(x, t, u)$ удовлетворяет неравенству*

$$\sup_{x, y, t \in \Omega, u > 0} \frac{K(x, t, u)}{K(y, t, u)} < \infty. \qquad (10.138)$$

Тогда уравнение (10.135) *имеет по крайней мере одно положительное решение.*

Отметим, что условие (10.138) всегда выполнено, если $K(x, t, u) = K(x, t)f(t, u)$, а ядро $K(x, t)$ непрерывно и положительно.

2.9. Уравнения с вогнутыми нелинейностями. Важную главу нелинейного анализа составляет теория так называемых *вогнутых* операторов.

В применении к интегральным уравнениям эта теория позволяет получить простые признаки единственности ненулевого неотрицательного решения. Приведем основную теорему теории вогнутых операторов в одном из наиболее простых вариантов.

Пусть нелинейный оператор A *положителен* и *монотонен* в том смысле, что он оставляет инвариантным конус K и что из $v - u \in K$ вытекает $Av - Au \in K$.

Пусть u_0 — некоторый фиксированный ненулевой элемент из K. Оператор A называется *u_0-вогнутым*, если для любого ненулевого $u \in K$ можно указать такие положительные α и β, что

$$\alpha u_0 \leqslant Au \leqslant \beta u_0,$$

и если для каждого ненулевого $u \in K$ и любого $\gamma \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$A(\gamma u) \geqslant \gamma_1 Au,$$

где $\gamma_1 > \gamma$.

Теорема 2.16. *Положительный монотонный и u_0-вогнутый оператор не может иметь в конусе K больше, чем одну неподвижную точку.*

В следующей теореме будем считать, что конус K *нормален* в том смысле, что из $\theta \leqslant u \leqslant v$ вытекает неравенство $\|u\| \leqslant C\|v\|$, где C — постоянная. Напомним, что конусы неотрицательных функций в пространствах L_p и C нормальны.

Теорема 2.17. *Пусть уравнение $u = Au$ с положительным монотонным u_0-вогнутым оператором A имеет в K ненулевое решение u^*.*

Тогда последовательные приближения

$$u_{n+1} = Au_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходятся к u^* при любом ненулевом начальном приближении $u_1 \in K$.

Применение сформулированных теорем к нелинейным интегральным уравнениям требует отыскания условий u_0-вогнутости интегральных операторов.

Снова ограничимся простейшими утверждениями.

Теорема 2.18. *Пусть ядро $K(x, t, u)$ непрерывно по совокупности переменных вместе со своей производной $K'_u(x, t, u)$ $(x, t \in \Omega,\ 0 \leqslant u \leqslant \infty)$.*

Пусть функции K, K'_u неотрицательны, причем $K'_u(x, t, u)$ убывает при возрастании u.

Тогда интегральный оператор (10.115) *u_0-вогнут на конусе неотрицательных функций, где $u_0(x) \equiv 1$.*

Приведем в заключение пункта одну общую теорему об уравнениях с нелинейностями типа u^α, где $\alpha \in (-1, 1)$.

Теорема 2.19. *Пусть $K(x, t)$ — положительная непрерывная по совокупности переменных $x, t \in \Omega \times \Omega$ функция. Пусть $f(t, u)$ — непрерывная по совокупности переменных $t \in \Omega$, $u \geqslant 0$ функция, неотрицательная при $u \geqslant 0$ и строго положительная при $u > 0$ почти при всех t. Пусть, наконец, выполнено одно из двух условий:*

1) *$f(t, u)$ не убывает по u, а $\dfrac{f(t, u)}{u^\alpha}$, где α — некоторое число из* $(0, 1)$, *не возрастает по u;*

2) *$f(t, u)$ не возрастает при возрастании u, а $u^\alpha f(t, u)$, где α — некоторое число из* $(0, 1)$, *возрастает по u.*

Тогда уравнение (10.135) *имеет единственное положительное решение $u^*(x)$. Это решение является равномерным* *пределом последовательных приближений*

$$u_n(x) = \int_{\Omega} K(x, t) f[t, u_{n-1}(t)]\, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $u_0(t)$ — *произвольная ненулевая неотрицательная функция.*

2.10. Уравнения с параметром. Как уже отмечалось выше, уравнения вида

$$\lambda u = Au \tag{10.139}$$

с вполне непрерывным оператором A при больших значениях λ имеют решение. В ряде задач интерес представляют лишь ненулевые решения. Подобная ситуация возникает, например, при изучении нелинейных интегральных уравнений теории колебаний. По аналогии с теорией линейных интегральных уравнений ненулевые решения нелинейных уравнений (10.139) называют *собственными функциями* нелинейного оператора A, а соответствующие значения λ — *собственными значениями.*

Из принципа Шаудера немедленно вытекает

Теорема 2.20. *Пусть* $A\theta \neq \theta$, *где* A — *вполне непрерывный оператор. Тогда* A *имеет континуум собственных функций.*

Эту теорему можно дополнить замечанием о том, что из $A\theta \neq \theta$ вытекает существование собственных функций, соответствующих всем достаточно большим по абсолютной величине значениям λ.

Задача существенно осложняется, если $A\theta = \theta$. Некоторые утверждения, относящиеся к этому случаю, указаны в пп. 2.7 и 2.8, где шла речь об отличных от нулевого решениях уравнений. Мы приведем здесь несколько теорем о существовании собственных функций, соответствующих некоторым неизвестным нам собственным значениям λ.

Теорема 2.21. *Пусть вполне непрерывный оператор* A *дифференцируем в нуле* θ *и пусть линейный оператор* $A'(\theta)$ *имеет по крайней мере одно нечетнократное вещественное собственное значение.*

Тогда оператор A *имеет континуум собственных функций.*

Эта теорема будет несколько расширена в следующем параграфе.

Применение двух последних теорем требует лишь проверки полной непрерывности и дифференцируемости в одной точке интегральных операторов. Такие условия приведены в § 1.

Для доказательства существования собственных функций у потенциальных операторов могут быть применены вариационные соображения, основанные на том, что *оператор градиента дифференцируемого в окрестности нуля гильбертова пространства и слабо непрерывного функционала имеет континуум собственных функций.* В применении к интегральным операторам

$$Au(x) = \int_{\Omega} K(x, t) f[t, u(t)]\, dt \tag{10.140}$$

этот принцип немедленно приводит к следующим утверждениям.

Теорема 2.22. *Пусть ядро $K(x, t)$ симметрично, непрерывно и положительно определено, а функция $f(t, u)$ непрерывна по совокупности переменных.*

Тогда оператор (10.140) *имеет континуум собственных функций.*

Теорема 2.23. *Пусть симметричное положительно определенное ядро $K(x, t)$ удовлетворяет неравенству*

$$\int_{\Omega}\int_{\Omega} |K(x, t)|^p\, dx\, dt < \infty,$$

где $p \geqslant 2$. Пусть непрерывная функция $f(t, u)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(t, u)| \leqslant a + b|u|^{p-1}.$$

Тогда оператор (10.140) *имеет континуум собственных функций.*

Вариационные соображения применимы и к исследованию операторов A с ядрами, имеющими собственные значения разных знаков.

Теорема 2.24. *Пусть ядро $K(x, t)$ непрерывно, симметрично и имеет конечное число отрицательных соб-*

ственных значений. Пусть непрерывная функция $f(t, u)$ *удовлетворяет неравенству*

$$uf(t, u) \geqslant \alpha u^2 - \beta \qquad (t \in \Omega, \ -\infty < u < \infty),$$

где $\alpha > 0$.

Тогда оператор (10.140) *имеет континуум собственных функций.*

Разнообразные теоремы могут быть доказаны для положительных операторов. Приведем одну из наиболее простых для оператора (10.114).

Теорема 2.25. *Пусть непрерывная по совокупности переменных функция* $K(x, t, u)$ *удовлетворяет неравенству*

$$K(x, t, u) \geqslant G(x, t)\,u \qquad (x, t \in \Omega, \ u > 0),$$

где $G(x, t)$ — *положительное непрерывное ядро.*

Тогда оператор A *имеет континуум собственных функций.*

Предположение о положительности ядра $G(x, t)$ можно заменить различными несколько более сложными, но менее ограничительными условиями. Например, для справедливости последней теоремы достаточно считать, что для любого множества $\Omega_0 \subset \Omega$, $\operatorname{mes}\Omega_0 > 0$ выполняется соотношение

$$\int_{\Omega} G(x, t)\,dt \leqslant \alpha(\Omega_0) \int_{\Omega_0} G(x, t)\,dt \qquad (x \in \Omega).$$

Из теоремы 2.16 вытекает, что у u_0-вогнутого положительного оператора каждому собственному значению может соответствовать не более чем одна положительная собственная функция. Отсюда вытекает, что собственные значения, которым соответствуют положительные собственные функции u_0-вогнутых положительных операторов, образуют интервал.

2.11. Дополнительные замечания. Простейшие теоремы существования для нелинейных интегральных уравнений указаны в курсе Ф. Трикоми [21]. Ряд общих теорем о нелинейных уравнениях см. у Л. В. Канторовича и Г. П. Акилова [8]. Топологические и вариационные методы доказательства теорем существования для нелинейных интегральных уравнений изложены в книге М. А. Красносельского [9]. Вариационным методам посвящена книга М. М. Вайнберга [2]. Методы исследования положительных решений нелинейных уравнений изложены в книге М. А. Красносельского [10] (см. также М. Г. Крейн и М. А. Рутман [13]).

§ 3. Продолжение и ветвление решений нелинейных интегральных уравнений

3.1. Постановка задачи. В этом параграфе изучается зависимость решений нелинейных интегральных уравнений от различных параметров, входящих в эти уравнения. Основные утверждения мы будем иллюстрировать на примере уравнения

$$u(x) = \int_{\Omega} K[x,\ t,\ u(t);\ \lambda]\,dt, \tag{10.141}$$

где Ω — ограниченное замкнутое множество конечномерного пространства, а λ — скалярный или векторный параметр.

Уравнение (10.141), как и многие другие задачи, можно записать в виде

$$f(u,\ \lambda) = 0, \tag{10.142}$$

где u — элемент банахова пространства E, параметр λ — элемент банахова пространства Λ, а $f(u,\ \lambda)$ — оператор со значениями в третьем банаховом пространстве F.

Будем считать, что

$$f(u_0,\ \lambda_0) = 0, \tag{10.143}$$

т. е. u_0 является решением уравнения (10.142) при $\lambda = \lambda_0$. Нас будут интересовать близкие к u_0 решения $u(\lambda)$ уравнения (10.142) при близких к λ_0 значениях параметра λ. Если такие решения $u(\lambda)$ существуют, то их называют *неявными функциями* (или *абстрактными неявными функциями*), определяемыми уравнением (10.142).

В основных невырожденных случаях, как видно из дальнейшего, неявная функция определена в некоторой окрестности точки λ_0, однозначна, непрерывна и обладает «хорошими» свойствами. Для приложений важны и различные вырожденные случаи: может оказаться, что неявная функция многозначна (даже бесконечнозначна) при всех близких к λ_0 значениях λ, неявная функция может оказаться определенной не при всех близких к λ_0 значениях λ и т. д.

Ниже приводятся основные теоремы о существовании и свойствах неявной функции; для аналитических случаев обсуждается вопрос о построении неявной функции.

Основные построения параграфа относятся как к уравнениям в вещественных, так и к уравнениям в комплексных банаховых пространствах.

3.2. Основная теорема о неявной функции. Во всем параграфе предполагается, что оператор $f(u, \lambda)$ определен при $\|u-u_0\|_E \leqslant r_1$, $\|\lambda-\lambda_0\| \leqslant r_2$, где r_1 и r_2 — некоторые положительные числа, и непрерывен по совокупности переменных вместе со своей производной $f'_u(u, \lambda)$. Напомним, что производная $f'_u(u, \lambda)$ — это линейный непрерывный оператор, действующий из E в F; поэтому непрерывность производной $f'_u(u, \lambda)$ нужно понимать в смысле непрерывности по норме операторов:

$$\lim_{\lambda \to \lambda_1,\ u \to u_1} \sup_{\|h\|_E \leqslant 1} \|f'_u(u, \lambda) h - f'_u(u_1, \lambda_1) h\|_F = 0.$$

Особую роль при исследовании неявных функций играет производная $f'_u(u_0, \lambda_0)$. *Невырожденность* задачи о неявной функции означает, что оператор $f'_u(u_0, \lambda_0)$ имеет непрерывный обратный

$$\Gamma = [f'_u(u_0, \lambda_0)]^{-1}, \tag{10.144}$$

определенный на всем F.

Теорема 3.1. *Пусть выполнено условие* (10.143). *Пусть существует оператор* (10.144). *Тогда уравнение* (10.142) *определяет в некоторой окрестности* $\|\lambda-\lambda_0\| \leqslant \delta$ *точки* λ_0 *однозначную неявную функцию* $u(\lambda)$. *Эта неявная функция непрерывна.*

В качестве примера рассмотрим уравнение (10.141). Будем считать, что ядро $K(x, t, u; \lambda)$ непрерывно по совокупности переменных вместе со своей производной $K'_u(x, t, u; \lambda)$. Пусть непрерывная функция $u_0(x)$ является решением уравнения (10.141) при $\lambda = \lambda_0$:

$$u_0(x) \equiv \int_\Omega K[x, t, u_0(t); \lambda_0]\, dt. \tag{10.145}$$

Уравнение (10.141) можно записать в виде (10.142), где и E и F есть пространство C непрерывных на Ω функций, а

$$f(u,\ \lambda) = u(x) - \int_\Omega K[x,\ t,\ u(t);\ \lambda]\,dt. \qquad (10.146)$$

Очевидно,

$$f'_u(u_0,\ \lambda_0)h = h(x) - \int_\Omega K'_u\left[x,\ t,\ u_0(t);\ \lambda_0\right] h(t)\,dt.$$

Поэтому все условия теоремы 3.1 выполнены, если 1 не является собственным значением ядра $K'_u\left[x,\ t,\ u_0(t);\ \lambda_0\right]$. Значит, из того факта, что 1 не является собственным значением указанного ядра, вытекает, что уравнение (10.141) имеет единственное непрерывное решение $u(x,\ \lambda)$ $(x \in \Omega)$, близкое к $u_0(x)$ при близких к λ_0 значениях λ. Функция $u(x,\ \lambda)$ непрерывна по совокупности переменных.

Из теоремы 3.1 можно получить более общие выводы о решениях уравнения (10.141), если воспользоваться более тонкими признаками непрерывности и дифференцируемости нелинейных интегральных операторов (см. § 1).

Отметим еще, что неявная функция может быть получена как предел последовательных приближений

$$u_{n+1}(\lambda) = u_n(\lambda) - \Gamma f[u_n(\lambda);\ \lambda] \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots) \qquad (10.147)$$

при начальном приближении

$$u_0(\lambda) \equiv u_0. \qquad (10.148)$$

Приближения (10.147) в окрестности точки λ_0 сходятся равномерно со скоростью геометрической прогрессии.

3.3. Дифференциальные свойства неявной функции. Уже в предыдущем пункте мы воспользовались понятием частной производной оператора, значения которого определялись двумя переменными. В этом пункте и ряде дальнейших мы будем пользоваться частными производными высших порядков. Определения этих частных производных мы здесь не приводим (см. [8], [14]). Ограничимся лишь замечанием, что эти частные производные вводятся естественным образом. Без дополнительных оговорок будем ниже считать, что все рассматриваемые частные производные непрерывно зависят от всех входящих в них переменных и параметров в окрестности точки $\{u_0,\ \lambda_0\}$.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.1. *Пусть оператор* $f(u, \lambda)$ *в некоторой окрестности точки* $\{u_0, \lambda_0\}$ *имеет все частные производные до порядка* k. *Тогда существующая в силу теоремы* 3.1 *неявная функция* $u(\lambda)$ *имеет производные до порядка* k.

Вычисление производных можно проводить последовательным формальным дифференцированием тождества

$$f[u(\lambda);\ \lambda] \equiv 0. \tag{10.149}$$

Дифференцируя это тождество один раз, получаем

$$f'_u[u(\lambda),\ \lambda]\,u'(\lambda) + f'_\lambda[u(\lambda),\ \lambda] \equiv 0,$$

откуда

$$u'(\lambda) = -\Gamma(\lambda) f'_\lambda[u(\lambda),\ \lambda], \tag{10.150}$$

где

$$\Gamma(\lambda) = \{f'_u[u(\lambda),\ \lambda]\}^{-1}. \tag{10.151}$$

Существование при близких к λ_0 значениях λ оператора (10.151) вытекает из существования оператора (10.144) и из непрерывной зависимости $f'_u[u(\lambda);\ \lambda]$ от λ.

Аналогично можно получить формулы

$$\begin{gathered} u''(\lambda) = -\Gamma(\lambda)\{f''_{u^2}[u(\lambda),\ \lambda][u'(\lambda),\ u'(\lambda)] + \\ + 2f''_{u\lambda}[u(\lambda),\ \lambda]\,u'(\lambda) + f''_{\lambda^2}[u(\lambda),\ \lambda]\}, \end{gathered} \tag{10.152}$$

$$\begin{gathered} u'''(\lambda) = -\Gamma(\lambda)\{f'''_{u^3}[u(\lambda),\ \lambda][u'(\lambda),\ u'(\lambda),\ u'(\lambda)] + \\ + 3f'''_{u^2\lambda}[u(\lambda),\ \lambda][u'(\lambda),\ u'(\lambda)] + 3f'''_{u\lambda^2}[u(\lambda),\ \lambda]\,u'(\lambda) + \\ + f'''_{\lambda^3}[u(\lambda),\ \lambda] + 3f''_{u^2}[u(\lambda),\ \lambda][u'(\lambda),\ u''(\lambda)] + \\ + 3f''_{u\lambda}[u(\lambda),\ \lambda]\,u''(\lambda)\}. \end{gathered} \tag{10.153}$$

Для вычисления производных (особенно в случае, когда ищутся производные в фиксированной точке) часто применяется *метод неопределенных коэффициентов*. В этом методе неявную функцию $u(\lambda)$ ищут в виде

$$u(\lambda) = u_0 + D_1(\lambda - \lambda_0) + \ldots + \frac{1}{k!} D_k(\lambda - \lambda_0) + \omega(\lambda - \lambda_0), \tag{10.154}$$

где

$$D_j(\mu) = \overline{D}_j(\mu, \ldots, \mu), \tag{10.155}$$

а $\overline{D}_j(\mu_1, \ldots, \mu_j)$ — непрерывный по совокупности переменных и линейный по каждой из переменных оператор, и

$$\omega(\lambda - \lambda_0) = o(\|\lambda - \lambda_0\|^k). \tag{10.156}$$

Подставляя (10.154) в (10.149) и приравнивая нулю члены каждого j-го порядка малости по $\lambda - \lambda_0$, получим k уравнений, из которых определяются операторы

$$D_j(\lambda - \lambda_0) = u^{(j)}(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0). \tag{10.157}$$

Отметим, что при фактических вычислениях функцию (10.154) удобно подставлять не в (10.149), а в эквивалентное тождество

$$u - u_0 = \Gamma\left\{f(u;\ \lambda) - f'_u(u_0;\ \lambda)(u - u_0)\right\}. \tag{10.158}$$

Тогда уравнения для определения операторов D_j превратятся в последовательность рекуррентных формул. Кроме этого, при вычислении производных до порядка k в выражении (10.154) можно положить $\omega(\lambda - \lambda_0) \equiv 0$.

В качестве примера рассмотрим снова уравнение (10.141). Для простоты будем считать λ скалярным параметром. Будем считать также, что справедливо тождество (10.145) и что 1 не является собственным значением ядра $K'_u[x, t, u_0(t);\ \lambda_0]$. Будем считать, что функция $K(x, t, u;\ \lambda)$ k раз непрерывно дифференцируема по переменным u, λ. Тогда имеет место равенство

$$K[x, t, u_0(x) + v;\ \lambda_0 + \nu] - K[x, t, u_0(t);\ \lambda_0] =$$
$$= \sum_{m+l=1}^{k} K_{m,l}(x, t)\nu^m v^l + \omega(x, t, v;\ \nu),$$

где ω содержит члены высшего порядка малости, а ядра $K_{m,l}(x, t)(x, t \in \Omega)$ непрерывны по совокупности переменных.

Тогда уравнение (10.141) можно заменить эквивалентным

$$v(x)=\sum_{m+l=1}^{k}(\lambda-\lambda_0)^m\int_{\Omega}K_{m,l}(x,\ t)\,[v(t)]^l\,dt+\omega_1, \tag{10.159}$$

где ω_1 содержит все члены высшего порядка малости.

Решение уравнения

$$v(x)=\int_{\Omega}K'_u\left[x,\ t,\ u_0(t);\ \lambda_0\right]v(t)\,dt+h(x)$$

определяется равенством

$$v(x)=h(x)+\int_{\Omega}R(x,\ t)\,h(t)\,dt,$$

где $R(x,\ t)$ — непрерывное ядро. Поэтому уравнение (10.159) может быть записано в следующей эквивалентной форме *):

$$v(x)=\sum_{m+l=1}^{k}{}'\,(\lambda-\lambda_0)^m\int_{\Omega}\Pi_{m,\,l}(x,\ t)\,[v(t)]^l\,dt+\omega_2, \tag{10.160}$$

где

$$\Pi_{m,\,l}(x,\ t)=K_{m,\,l}(x,\ t)+\int_{\Omega}R(x,\ \tau)\,K_{m,\,l}(\tau,\ t)\,d\tau, \tag{10.161}$$

а ω_2 — снова члены высшего порядка малости. Уравнение (10.160) находится в таком же отношении к уравнению (10.141), как уравнение (10.153) к уравнению (10.142).

Будем искать решения уравнения (10.141) (или, что то же, уравнения (10.160)) в виде $u(x;\ \lambda)=u_0(x)+v(x;\ \lambda)$, где

$$v(x;\ \lambda)=(\lambda-\lambda_0)\,v_1(x)+\ldots+(\lambda-\lambda_0)^k\,v_k(x)+ \\ +o(|\lambda-\lambda_0|^k). \tag{10.162}$$

Подставим правую часть последнего равенства в (10.160) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $\lambda-\lambda_0$.

---

*) Символ $\sum\limits_{m+l=1}^{k}{}'$ означает, что в сумме нет слагаемого, соответствующего индексам $m=0$ и $l=1$.

Получим рекуррентные соотношения:

$$v_1(x) = \int_\Omega \Pi_{10}(x, t)\,dt, \tag{10.163}$$

$$v_2(x) = \int_\Omega \{\Pi_{02}(x, t)v_1^2(t) + \Pi_{11}(x, t)v_1(t) + \Pi_{20}(x, t)\}\,dt, \tag{10.164}$$

$$v_3(x) = \int_\Omega \{2\Pi_{02}(x, t)v_1(t)v_2(t) + \Pi_{11}(x, t)v_2(t) + \\ + \Pi_{03}(x, t)v_1^3(t) + \Pi_{12}(x, t)v_1^2(t) + \Pi_{21}(x, t)v_1(t) + \\ + \Pi_{30}(x, t)\}\,dt, \tag{10.165}$$

$$v_4(x) = \int_\Omega \{\Pi_{02}(x, t)\left[v_2^2(t) + 2v_1(t)v_3(t)\right] + \Pi_{11}(x, t)v_3(t) + \\ + 3\Pi_{03}(x, t)v_1^2(t)v_2(t) + 2\Pi_{12}(x, t)v_1(t)v_2(t) + \\ + \Pi_{21}(x, t)v_2(t) + \Pi_{04}(x, t)v_1^4(t) + \Pi_{13}(x, t)v_1^3(t) + \\ + \Pi_{22}(x, t)v_1^2(t) + \Pi_{31}(x, t)v_1(t) + \Pi_{40}(x, t)\}\,dt, \tag{10.166}$$

. . . .

Как видно, сложность рекуррентных формул быстро растет.

3.4. Аналитичность решения. Предположим, что оператор $f(u;\ \lambda)$ аналитичен по совокупности переменных. Тогда неявная функция $u(\lambda)$ в условиях теоремы 3.1 также аналитична в окрестности точки λ_0. Отыскание коэффициентов разложения неявной функции в бесконечный ряд равносильно отысканию ее последовательных производных. Поэтому для построения разложения аналитической неявной функции в ряд может быть применен описанный в предыдущем пункте метод неопределенных коэффициентов.

В ряде задач существенную роль играют оценки радиусов ρ тех окрестностей $\|\lambda - \lambda_0\| \leqslant \rho$, в которых сходятся разложения в степенные ряды неявных функций. По поводу таких оценок отправляем читателя к работам [19], [20]. По-видимому наиболее тонкие оценки получены А. Е. Гельманом [3].

3.5. Уравнение разветвления. Продолжим исследование неявных функций, определяемых уравнением

$$f(u;\ \lambda)=0. \tag{10.167}$$

Как и выше, будем считать, что

$$f(u_0,\ \lambda_0)=0. \tag{10.168}$$

В этом и последующих пунктах рассматривается *вырожденный* случай, когда оператор $f'_u(u_0,\ \lambda_0)$ не имеет непрерывного обратного.

Исследование неявных функций в вырожденных случаях является существенно более сложной задачей. Общие методы исследования вырожденных случаев разработаны А. М. Ляпуновым [15], Э. Шмидтом [22], А. И. Некрасовым [20], Н. Н. Назаровым [19] и другими авторами.

Мы ограничимся уравнениями (10.167) частного вида

$$u=A(u;\ \lambda), \tag{10.169}$$

где оператор A *вполне непрерывен* в том смысле, что он непрерывен по совокупности переменных в некоторой окрестности точки $\{u_0,\ \lambda_0\}$ и что компактно множество его значений на этой окрестности. Здесь предполагается, что значения оператора A принадлежат тому же пространству E, которое пробегает аргумент u.

Равенство (10.168) перепишется в виде

$$u_0=A(u_0;\ \lambda_0). \tag{10.170}$$

Из общей теории нелинейных операторов (см. [9]) вытекает, что производная $A'_u(u_0,\ \lambda_0)$ нелинейного вполне непрерывного оператора является линейным вполне непрерывным оператором. Поэтому вырожденность задачи о неявной функции, определяемой уравнением (10.169), равносильна тому, что 1 является собственным значением оператора $A'_u(u_0,\ \lambda_0)$.

Каждое ненулевое собственное значение линейного вполне непрерывного оператора имеет конечный порядок. Обозначим через n порядок собственного значения 1 оператора $B=A'_u(u_0;\ \lambda_0)$. Пусть $e_1,\ \ldots,\ e_n$ образуют базис в подпространстве соответствующих собственных векторов. Из общей теории линейных вполне непрерывных операторов вытекает, что 1 является собственным значением того же порядка n сопряженного оператора B^*; через $f_1, \ldots, f_n$ обозначим базис подпространства собственных функционалов.

Выберем в E^* такой набор функционалов $g_1, \ldots, g_n$, что

$$g_i(e_j) = \delta_{ij}, \tag{10.171}$$

и в E такой набор элементов $h_1, \ldots, h_n$, что

$$f_i(h_j) = \delta_{ij}. \tag{10.172}$$

Введем в рассмотрение линейный оператор

$$Du = \sum_{i=1}^{n} g_i(u) h_i. \tag{10.173}$$

Как легко видеть, уравнение (10.169) равносильно системе из одного векторного уравнения

$$u = A(u, \lambda) + D(u - u_0) - \sum_{j=1}^{n} \xi_j h_j \tag{10.174}$$

и из n скалярных уравнений

$$\xi_j = g_j(u - u_0) \quad (j = 1, \ldots, n). \tag{10.175}$$

Здесь $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — вспомогательные скалярные переменные.

Так как нас интересует решение u уравнения (10.169), близкое к u_0, то интерес представляют лишь такие решения системы (10.174) — (10.175), которым соответствуют малые $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

Рассмотрим более подробно уравнение (10.174). При $\lambda = \lambda_0$, $\xi_1 = \ldots = \xi_n = 0$ это уравнение имеет решение $u = u_0$. Будем рассматривать набор $\mu = \{\lambda; \xi_1, \ldots, \xi_n\}$ как один векторный параметр. Тогда уравнение (10.174) можно переписать в виде

$$u = T(u; \mu), \tag{10.176}$$

где T — вполне непрерывный оператор. Легко видеть, что

$$T'_u(u_0; \mu_0) = A'_u(u_0; \lambda_0) + D, \tag{10.177}$$

где $\mu_0 = \{\lambda_0; 0, \ldots, 0\}$. Простая проверка показывает, что 1 не является собственным значением оператора $T'_u(u_0; \mu_0)$. Поэтому к уравнению (10.176) может быть применена основная теорема 3.1 о неявной функции. Иначе говоря, из уравнения (10.174) может быть определено решение

$$u = u(\lambda;\ \xi_1, \ldots, \xi_n) \qquad (\|\lambda - \lambda_0\| \leqslant \rho,\ |\xi_j| \leqslant \rho). \qquad (10.178)$$

Поэтому система (10.174) — (10.175) может быть заменена равенством (10.178) и n скалярными уравнениями

$$\xi_j = g_j\,[u(\lambda;\ \xi_1, \ldots, \xi_n) - u_0] \qquad (j = 1, \ldots, n). \qquad (10.179)$$

Система уравнений (10.179) называется *уравнениями разветвления Ляпунова — Шмидта*. Отыскание неявной функции в вырожденных случаях равносильно отысканию малых решений $\xi_1(\lambda), \ldots, \xi_n(\lambda)$ системы (10.179) и подстановке их в (10.178).

Сделаем несколько разочаровывающих замечаний.

Система (10.179) при $\lambda = \lambda_0$ имеет очевидное нулевое решение $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0$. Поэтому хотелось бы для ее исследования применить основную теорему 3.1 о неявной функции. Этого сделать, к сожалению, нельзя, так как линеаризованная система тождественно равна нулю. Поэтому исследование системы (10.179) требует специальных построений.

Второе замечание связано с тем, что решение (10.178) в явном виде можно найти лишь в совершенно исключительных случаях. Поэтому и уравнения системы (10.179) в явном виде, как правило, не выписываются.

Эти разочаровывающие замечания не мешают, однако, успешно изучать уравнение разветвления. Это связано с тем, что общие методы изучения (метод диаграммы Ньютона — см., например, СМБ, Математический анализ, II, гл. III, § 2; метод исключения — см., например, С. Лефшец, Геометрическая теория дифференциальных уравнений, и другие) систем нелинейных уравнений требуют в основных случаях либо приближенных формул для функций, входящих в уравнения, либо знания некоторого числа коэффициентов разложения этих функций по формулам Тейлора. Для приближенного построения правых частей уравнений (10.179) можно воспользоваться приближенными выражениями функций (10.178), отыскивая их методом (10.147) последовательных приближений. Для построения разложений правых частей уравнений (10.179) по степеням $\lambda - \lambda_0$, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ достаточно найти разложения функций (10.178) по этим же переменным. Здесь можно применить метод неопределенных коэффициентов, описанный в п. 3.3.

3.6. Метод Некрасова — Назарова. Как было выяснено в предыдущем пункте, исследование уравнения разветвления (10.179) является трудной и громоздкой задачей. Возникает естественный вопрос о возможности непосредственного построения близких к u_0 решений уравнения (10.167) или, в частности, (10.169). Такой метод был предложен и разработан в работах А. И. Некрасова и Н. Н. Назарова [19], [20], а затем других авторов.

Мы продолжим исследование уравнения (10.169). Параметр λ будем считать скалярным. Оператор $A(u;\ \lambda)$ будем считать *аналитическим в точке* $\{u_0;\ \lambda_0\}$ в том смысле, что

$$A(u;\ \lambda) - A(u_0;\ \lambda_0) = \sum_{m+l=1}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^m B_{ml}(u - u_0), \tag{10.180}$$

где

$$B_{ml}(u) = \overline{B}_{ml}(u,\ \ldots,\ u), \tag{10.181}$$

$\overline{B}_{ml}(u_1,\ \ldots,\ u_l)$ — непрерывный по совокупности переменных и линейный по каждому переменному оператор; ряд (10.180) сходится равномерно в некоторой окрестности точки $\{x_0,\ \lambda_0\}$. При этих предположениях правые части уравнения разветвления являются аналитическими по совокупности переменных $\lambda - \lambda_0$, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ функциями (как в случае комплексного, так и в случае вещественного пространства).

В основных случаях решения $\xi_1(\lambda), \ldots, \xi_n(\lambda)$ системы (10.179) могут быть представлены (см., например, [1]) рядами по целым или дробным степеням $\lambda - \lambda_0$. Допустим, что

$$\xi_j(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{jk}\mu^k \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n), \tag{10.182}$$

где

$$\mu = (\lambda - \lambda_0)^{1/p}, \tag{10.183}$$

а p — некоторое натуральное число. Тогда и решение $u(\lambda)$ уравнения (10.169) можно представить рядом

$$u(\lambda) = u_0 + \sum_{k=1}^{\infty} u_k\mu^k, \tag{10.184}$$

который сходится равномерно при достаточно малых μ.

Для определения неизвестных элементов-коэффициентов u_k Некрасов и Назаров предлагают применять метод неопределенных коэффициентов. Для этого ряд (10.184) подставляется в уравнение (10.169) и правая часть разлагается в ряд по степеням μ. Приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях μ в левой и правой частях дает бесконечную систему уравнений, которой должны удовлетворять коэффициенты u_k. Простой подсчет показывает, что получающаяся система имеет вид

$$\begin{aligned} u_1 &= A'_u(u_0;\ \lambda_0)\, u_1 + h_0, \\ u_2 &= A'_u(u_0;\ \lambda_0)\, u_2 + h_1(u_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_k &= A'_u(u_0;\ \lambda_0)\, u_k + h_{k-1}(u_1,\ \ldots,\ u_{k-1}), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{10.185}$$

Априори неясно, в ряды по каким дробным $\frac{1}{p}$ или по целым степеням приращения $\lambda - \lambda_0$ раскладываются решения $u(\lambda)$ уравнения (10.169). По-видимому, проще всего отыскивать p методом проб. Ясно, что при разных p системы (10.185) будут различными.

Допустим, что удается найти решение $\{u_1,\ u_2,\ \ldots\}$ системы (10.185). Отсюда еще не вытекает, что ряд (10.184) с найденными коэффициентами будет решением уравнения (10.169). Более того, не ясно, будет ли указанный ряд сходиться при каких-либо ненулевых μ. В связи с этим ряд (10.184) называют *формальным решением* уравнения (10.169).

Легко доказывается, что формальное решение превращается в настоящее решение, если ряд (10.184) сходится при малых μ. Для доказательства сходимости и одновременно для отыскания области сходимости обычно применяется метод мажорантных числовых рядов. Ограничимся ссылкой на работы А. И. Некрасова и Н. Н. Назарова [19], [20], в которых проведен анализ для интегральных уравнений, и на более поздние работы [4, 5].

Известны и утверждения другого типа о сходимости формальных решений (см. [18]). Приведем один результат для уравнений в комплексных пространствах: *если решение* u_0 *является изолированным решением уравнения* (10.169) *при* $\lambda = \lambda_0$, *то все формальные решения* (10.184) *являются настоящими.*

Перейдем к анализу системы (10.185).

Первое уравнение этой системы линейное. Так как 1 является собственным значением линейного вполне непрерывного оператора $A'_u(u_0;\ \lambda_0)$, то оно разрешимо не при всех h_0. Если уравнение неразрешимо, то число p выбрано неверно. Допустим, что первое уравнение разрешимо. Тогда его решение имеет вид

$$u_1 = u_1^* + c_1^{(1)} e_1 + \ldots + c_n^{(1)} e_n, \tag{10.186}$$

где $e_1, \ldots, e_n$—базис собственных векторов оператора $A'_u(u_0;\ \lambda_0)$, отвечающих собственному значению 1, а $c_1^{(1)}, \ldots, c_n^{(1)}$ — произвольные постоянные, которые подлежат определению.

Перейдем ко второму уравнению системы (10.185). Это снова линейное уравнение, свободный член которого зависит от параметров $c_1^{(1)}, \ldots, c_n^{(1)}$. Условия разрешимости этого уравнения дают систему из n скалярных уравнений, из которых можно определить, вообще говоря, постоянные $c_1^{(1)}, \ldots, c_n^{(1)}$. Таким образом, условия разрешимости второго уравнения системы позволяют полностью определить u_1.

Второе уравнение определяет решение u_2 снова с точностью до некоторых произвольных постоянных $c_1^{(2)}, \ldots, c_n^{(2)}$. Значения этих произвольных постоянных определяются из условий разрешимости третьего уравнения.

Этот процесс можно продолжить; он в абсолютном большинстве случаев позволяет последовательно найти все коэффициенты u_k. При этом, как правило, уравнения для определения произвольных постоянных $c_1^{(k)}, \ldots, c_n^{(k)}$ в выражениях для u_k при всех k, начиная с некоторого, определяются из систем линейных алгебраических уравнений. *Во всех таких случаях формальные решения являются настоящими решениями.*

Применение метода неопределенных коэффициентов требует, таким образом, решения линейных интегральных уравнений и последовательного решения систем скалярных уравнений.

Отметим еще, что определение произвольных постоянных в выражениях для u_k может потребовать привлечения условий разрешимости нескольких последовательных уравнений системы (10.185).

3.7. Точки бифуркации. Исследование вырожденного случая существенно упрощается, если известно одно решение рассматриваемого уравнения не при одном фиксированном значении параметра, а при всех его значениях.

Продолжим изучение уравнения вида

$$u = A(u, \lambda), \tag{10.187}$$

где λ (для простоты) — скалярный параметр. Будем считать, что нам известно решение $u(\lambda)$, а интерес представляют решения, отличные от $u(\lambda)$. Эти решения u будем искать в форме

$$u = u(\lambda) + v. \tag{10.188}$$

Тогда v будет определяться уравнением

$$v = T(v, \lambda), \tag{10.189}$$

где

$$T(v, \lambda) = A[u(\lambda) + v; \lambda] - u(\lambda). \tag{10.190}$$

Уравнение (10.189) имеет нулевое решение при всех значениях λ.

Число λ_0 называется ***бифуркационным значением параметра λ или точкой бифуркации***, если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такое $\lambda \in (\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$, при котором уравнение (10.189) имеет ненулевое решение $v(\lambda)$, удовлетворяющее условию $\|v(\lambda)\| < \varepsilon$. Подчеркнем, что в определении точки бифуркации ничего не говорится о том, при скольких значениях λ уравнение (10.189) имеет малые ненулевые решения. Например, для уравнения вида $v = \frac{1}{\lambda} Tv$ с линейным оператором T каждое его собственное значение λ_0 будет точкой бифуркации; если λ_0 является изолированным собственным значением, то при близких к λ_0 и отличных от λ_0 значениях λ уравнение ненулевых решений не имеет. В других задачах ненулевые решения существуют лишь при значениях λ, отличных от λ_0.

Во всем пункте мы будем считать, что оператор A, а вместе с ним и оператор T — вполне непрерывные и достаточно гладкие.

Теорема 3.3. *Пусть λ_0 — точка бифуркации. Тогда* 1 *является собственным значением линейного оператора* $T'_v(0, \lambda_0)$.

Конечно, эта теорема содержит лишь необходимое условие для того, чтобы число λ_0 было точкой бифуркации.

Теорема 3.3 позволяет отбирать значения λ_0, «подозрительные на точки бифуркации». В приложениях, как правило, 1 является собственным значением оператора $T'_v(0;\ \lambda)$ лишь при отдельных изолированных значениях параметра λ. Если эти значения параметра удается найти, то каждое из них нужно подвергнуть специальному дополнительному анализу.

В качестве примера рассмотрим уравнение (10.141) специального вида

$$v(x) = \lambda \int_{\Omega} K[x,\ t,\ v(t)]\,dt. \tag{10.191}$$

Будем считать, что $K(x,\ t,\ 0) \equiv 0$; тогда уравнение (10.191) при всех значениях λ имеет нулевое решение. Будем также предполагать, что ядро $K(x,\ t,\ u)$ вместе со своей производной $K'_u(x,\ t,\ u)$ непрерывно по совокупности переменных $x,\ t \in \Omega$; $|u| < \rho$. Тогда интегральное уравнение (10.191) можно рассматривать как операторное уравнение (10.189) в пространстве C непрерывных на Ω функций с вполне непрерывным оператором

$$T(v;\ \lambda) = \lambda \int_{\Omega} K[x,\ t,\ v(t)]\,dt. \tag{10.192}$$

Очевидно,

$$T'_v(0;\ \lambda)\,h = \lambda \int_{\Omega} K'_u(x,\ t,\ 0)\,h(t)\,dt; \tag{10.193}$$

единица является собственным значением при не более чем счетном числе значений параметра λ — когда $1/\lambda$ совпадает с одним из собственных значений ядра $K'_u(x,\ t,\ 0)$.

Дальнейшие рассуждения относятся к вещественным пространствам.

Пусть $\lambda = 1$ — собственное значение оператора $T'_v(0,\ \lambda_0)$ и пусть λ_0 — изолированное подозрительное на бифуркационное значение параметра. Простые рассуждения показывают, что при всех близких к λ_0 и бо́льших, чем λ_0, значениях λ будет одинаковым число $(-1)^{\beta(\lambda)}$, где $\beta(\lambda)$ — сумма кратностей вещественных собственных значений оператора $T'_v(0,\ \lambda)$ больших, чем 1. Это общее значение чисел $(-1)^{\beta(\lambda)}$ обозначим через $(-1)^{\beta(\lambda_0+0)}$. Аналогично определим число $(-1)^{\beta(\lambda_0-0)}$.

Теорема 3.4. *Пусть*

$$(-1)^{\beta(\lambda_0-0)} \neq (-1)^{\beta(\lambda_0+0)}. \tag{10.194}$$

Тогда λ_0 является точкой бифуркации.

Подчеркнем, что теорема 3.4 использует лишь свойства линеаризованного в нуле уравнения.

Из теоремы 3.4 немедленно вытекает следующее более частное утверждение.

Теорема 3.5. *Пусть производная $T'_v(0, \lambda)$ имеет вид*

$$T'_v(0, \lambda) = \lambda B, \tag{10.195}$$

где B — линейный вполне непрерывный оператор. Пусть μ_0 — ненулевое нечетнократное собственное значение оператора B. Тогда число

$$\lambda_0 = 1/\mu_0 \tag{10.196}$$

является точкой бифуркации.

Простые примеры показывают, что число (10.196) может не быть точкой бифуркации, если собственное значение μ_0 оператора B имеет четную кратность.

Теорема 3.5 непосредственно применима к исследованию уравнения (10.191). Из нее вытекает, что число (10.196) является точкой бифуркации для задачи о малых ненулевых решениях уравнения (10.191), если μ_0 — нечетнократное собственное значение ядра $K'_u(x, t, 0)$.

В качестве второго примера рассмотрим интегральное уравнение

$$v(x) = \lambda\rho(x)\int_0^1 G(x, t)\,v(t)\,dt\left\{1 - \left[\int_0^1 G'_x(x, t)\,v(t)\,dt\right]^2\right\}^{1/2}, \tag{10.197}$$

где $G(x, t)$ — функция Грина дифференциального оператора $-y''$ при граничных условиях $y(0) = y(1) = 0$ (см. стр. 79), а $\rho(x)$ — положительная непрерывная функция. Решения этого уравнения определяют формы потери устойчивости сжатого стержня переменной жесткости $\rho(x)$; параметр λ пропорционален нагрузке. Нулевое решение уравнения (10.197) описывает прямолинейное состояние стержня. Точки бифуркации — критические нагрузки. Уравнение (10.197) можно рассматривать как операторное уравнение в пространстве C непрерывных на $[0, 1]$ функций. Из теоремы 3.5 вытекает, что точки бифуркации — критические значения параметра λ совпадают с теми значениями λ, при которых линеаризованное уравнение

$$v(x) = \lambda\rho(x)\int_0^1 G(x, t)\,v(t)\,dt \tag{10.198}$$

имеет ненулевое решение, так как все собственные значения ядра $\rho(x)G(x, t)$ простые. Сформулированное утверждение является обоснованием известного метода Эйлера отыскания критических нагрузок в задаче потери устойчивости сжатого стержня.

3.8. Дополнительные замечания о точках бифуркации. Как мы выяснили в предыдущем пункте, исследование изолированного подозрительного на точку бифуркации значения λ_0 параметра λ является сложной задачей, если не выполнено условие (10.194). Здесь приходится прибегать либо к общим методам (см. пп. 3.5—3.6) построения неявных функций в вырожденных случаях, либо применять специальные приемы.

Одна из общих теорем о точках бифуркации связана с понятием индекса γ нулевой точки вполне непрерывного векторного поля $v - \boldsymbol{A}(v;\ \lambda_0)$. Оказывается, что *если среди трех чисел*

$$(-1)^{\beta(\lambda_0 - 0)},\quad \gamma,\quad (-1)^{\beta(\lambda_0 + 0)} \tag{10.199}$$

хотя бы два различны, то λ_0 — точка бифуркации. Это утверждение содержит, конечно, теорему 3.4. Для вычисления индекса γ разработаны эффективные методы (см., например, [7], [9], [16]), описание их выходит за рамки настоящего справочника.

Напомним, что оператор $\boldsymbol{T}$ называется *потенциальным*, если он является градиентом некоторого функционала. Мы предположим здесь, что вполне непрерывный оператор $\boldsymbol{T}$—градиент равномерно дифференцируемого и слабо непрерывного функционала в вещественном гильбертовом пространстве. Как показал Л. А. Люстерник, производные оператора $\boldsymbol{T}$ являются самосопряженными операторами.

Теорема 3.6. *Пусть* $T(0)=0$. *Пусть* $T'(0)$ *положительно определен. Тогда каждое ненулевое собственное значение* λ_0 *оператора* $T'(0)$ *является точкой бифуркации для уравнения* $v=\frac{1}{\lambda}T(v)$.

Подчеркнем, что в этой теореме не играет роли кратность собственных значений. Известное доказательство теоремы 3.6 использует топологические построения.

В качестве примера рассмотрим интегральное уравнение

$$v(x)=\frac{1}{\lambda}\int_{\Omega}K(x,\ t)f[t,\ v(t)]\,dt \tag{10.200}$$

с непрерывным положительно определенным ядром $K(x,\ t)$ и функцией $f(t,\ u)$, непрерывной вместе со своей производной $f'_u(t,\ u)$. Допустим, что $f(t,\ 0)\equiv 0$. Из теорем 3.3 и 3.6 вытекает, что бифуркационные значения задачи о малых решениях уравнения (10.200) совпадают с собственными значениями ядра $K(x,\ t)f'_u(t,\ 0)$.

Более тонкие применения теорем 3.3—3.6 к нелинейным интегральным уравнениям можно получить, если применить более сложные признаки дифференцируемости, потенциальности и т. д. интегральных операторов в различных функциональных пространствах.

За недостатком места мы вынуждены отказаться от более полного анализа точек бифуркации и отправить читателя к монографиям [9] и [10].

Сделаем лишь еще одно замечание, относящееся к случаю, когда уравнения (10.181) и (10.183) рассматриваются в комплексном пространстве, когда λ — комплексный параметр и, наконец, когда оператор A аналитичен. В этом случае каждое изолированное подозрительное на точку бифуркации значение λ_0 является точкой бифуркации (см. [17]).

БИБЛИОГРАФИЯ

К главам I—III

1. Ахиезер Н. И., Щербина В. А., Об обращении некоторых сингулярных интегралов, Зап. матем. отд. физ.-матем. ф-та ХГУ и Харьк. матем. о-ва **25**, 191—198 (1957).
2. Гольдман М. А., Крачковский С. Н, Некоторые свойства вполне непрерывного оператора в пространстве Гильберта, Изв. АН Латв. ССР **10**, 39, 93—106 (1950).
3. Гольдман М. А., Крачковский С. Н., О главной части вполне непрерывного оператора, ДАН СССР **70**, № 6, 945—948 (1950).
4. Гольдман М. А., Крачковский С. Н., О нуль-элементах линейного оператора в его области Фредгольма, ДАН СССР **86**, № 1, 15—17 (1952).
5. Гохберг И. Ц, Маркус А. С., Об одном характеристическом свойстве ядра линейного оператора, ДАН СССР **105**, № 5, 893—896 (1955).
6. Гохберг И. Ц., Маркус А. С., Об устойчивости некоторых свойств нормально разрешимых операторов, Матем. сб. **40** (82), № 4, 453—466 (1956).
7. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г., Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов, УМН **XII**, вып. 2 (74), 43—118 (1957).
8. Гурса Э., Курс математического анализа (перев. с франц), т. III, ч. II, ГТТИ, 1934.
9. Крачковский С. Н., О ядре наименьшей нормы с правыми главными функциями данного ядра, квадратично суммируемого в смысле Лебега, Изв. АН Латв. ССР, № 3, 75—98 (1947).
10. Крачковский С. Н., Об условии Лалеско, Изв. АН Латв. ССР, № 4, 101—108 (1947).
11. Крачковский С. Н., Каноническое представление нуль-элементов линейного оператора в его области Фредгольма, ДАН СССР **88**, № 2, 201—204 (1953).
12. Крачковский С. Н., О свойствах линейного оператора, связанных с его обобщенной областью Фредгольма, ДАН СССР **91**, № 5, 1011—1013 (1953).
13. Крачковский С. Н., О расширенной области сингулярности оператора $T_\lambda = E - \lambda A$, ДАН СССР **96**, № 6, 1101—1104 (1954).

14. Лебедев Н. Н., Скальская И. П., Уфлянд Я. С, Сборник задач по математической физике, Гостехиздат, 1955.
15. Ловитт У. В., Линейные интегральные уравнения (перев. с англ.), Гостехиздат, 1957.
16. Маркус А. С., Об одной теореме Ф. Риса, Уч. зап. Кишиневск. ун-та **17,** 73—75 (1955).
17. Маркус А. С., Об одном свойстве ядра линейного оператора, Уч. зап. Кишиневск. ун-та **29,** 25—27 (1957).
18. Михлин С. Г., Некоторые элементарные краевые задачи для волнового уравнения, Труды Сейсмологич. ин-та АН СССР, 1940.
19. Михлин С. Г., О сходимости рядов Фредгольма, ДАН СССР **42,** № 9, 387—390 (1944).
20. Михлин С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, Физматгиз, 1959.
21. Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л, Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений, «Наука», СМБ, 1965.
22. Петровский И. Г., Лекции по теории интегральных уравнений, ГТТИ, изд. 2-е, 1951.
23. Привалов И. И., Интегральные уравнения, ОНТИ, 1935.
24. Рис Ф., О линейных функциональных уравнениях (перев. с немецк.) УМН **1,** 175—199 (1936).
25. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV, ГТТИ, 1951.
26. Снеддон И., Преобразование Фурье (перев. с англ.), ИЛ, 1955.
27. Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье (перев. с англ.), Гостехиздат, 1948.
28. Трикоми Ф., Интегральные уравнения (перев. с англ), ИЛ, 1960.
29. Carleman T., Zur Theorie der linearen Integralgleichungen, Math. Zeitschrift **9,** H. 3/4, 196—217 (1921).
30. Schmeidler Werner, Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik. I. Lineare Integralgleichungen, Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1955.

К главе IV

1. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, «Наука», 1967.
2. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, Гостехиздат, 1950.
3. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Гостехиздат, 1950.
4. Красносельский М. А., Положительные решения операторных уравнений, Физматгиз, 1962.
5. Крейн М. Г., Рутман М. А., Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, УМН **3,** вып. 1 (1948).

6 Мухтаров С. Н., Стеценко В. Я., О некоторых свойствах уравнений с неразложимыми линейными операторами, ДАН Таджикской ССР 8, № 2 (1965).
7. Стеценко В. Я., Об одном итерационном методе отыскания спектрального радиуса линейного положительного оператора, Матем. сб., 67 (109): 2 (1965).
8. Урысон П. С., Труды по топологии и другим областям математики, т. 1, Гостехиздат, 45—77, 1951.
9. Entsch R., Über Integralgleichungen mit positiven Kern, Journal für reine und angewandte Mathematik 141, 235—244, 1912.
10. Frechet M., Sud l'allure asymptotique des densités itérés dans les probabilites en chaîne, Bull. de Soc. Mathem. de France 62, 68—83 (1934).

К главе V

1. Банах С., Курс функціонального аналізу, Киев, 1948 (на украинском языке).
2. Гохберг И. Ц и Крейн М. Г., Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, «Наука», 1965.
3. Гохберг И. Ц. и Крейн М. Г., Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее применения, «Наука», 1967.
4. Гурса Э., Курс математического анализа, т. 3, ч. 1, 1933.
5. Данфорд Н., Шварц Д. Т., Линейные операторы. Общая теория, ИЛ, 1963.
6. Забрейко П. П., Нелинейные интегральные уравнения, Труды семинара по функциональному анализу, вып. 8, Воронеж, 1966.
7. Забрейко П. П., О спектральном радиусе операторов Вольтерра, УМН 22, 1, 167—168 (1967).
8. Канторович Л. В., Об интегральных операторах, УМН 11, № 2 (1956).
9. Канторович Л. В., Акилов Г. П, Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.
10. Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г., Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Гостехиздат, 1950.
11. Красносельский М. А., Положительные решения операторных уравнений, Физматгиз, 1962.
12. Красносельский М. А., Забрейко П. П, Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, «Наука», 1966.
13. Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б, Выпуклые функции и пространства Орлича, Физматгиз, 1959.
14. Крейн М. Г., Рутман М. А., Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, УМН 3, вып. 1 (1948).
15. Михлин С. Г., Лекции по линейным интегральным уравнениям, Физматгиз, 1959.
16. Радон И., О линейных функциональных преобразованиях, УМН 1 (1936).

17. Рисс Ф., Надь С., Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954.
18. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. 4, 1957.
19. Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Новосибирск, 1965.
20. Стеценко В. Я, Об оценке спектра некоторых классов линейных операторов, ДАН СССР **157**, № 5 (1964).
21. Трикоми Ф., Интегральные уравнения, ИЛ, 1960.
22. Харди Г. Г., Литтльвуд Дж., Полиа Г. Г., Неравенства, ИЛ, 1948.
23. Zaanen A. C, Linear analysis, New York — Amsterdam, 1953.

К главе VI

1. Аткинсон Ф. В., Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах, Матем. сб. **28** (70), № 1, 3—14 (1951).
2. Ахиезер Н. И., О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов, Изв. АН СССР **9**, 275—290 (1945).
3. Бабаев А. А., Салаев В. В., Об одном аналоге теоремы Племеля — Привалова в случае негладких кривых и ее применения, ДАН СССР **161**, № 2, 267—269 (1965).
3a. Бабенко К. И., О сопряженных функциях, ДАН СССР **62**, № 2, 157—160 (1948).
4. Векуа Н. П., Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, ГТТИ, 1950.
5. Гахов Ф. Д., Краевые задачи, изд. 1-е, Физматгиз, 1958; изд. 2-е, Физматгиз, 1963.
6. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Пространства основных и обобщенных функций, Физматгиз, 1958.
7. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, 1958.
8. Геронимус Я. Л., О некоторых интегральных уравнениях, ДАН СССР **98**, № 1, 5—7 (1954).
9. Гохберг И. Ц., Об одном применении теории нормированных колец к сингулярным интегральным уравнениям, УМН **7**, № 2 (48), 149—156 (1952).
10. Гохберг И. Ц., О системах сингулярных интегральных уравнений, Уч. зап. Кишиневск. ун-та **11**, 56—60 (1954).
11. Гохберг И. Ц., О числе решений однородного сингулярного интегрального уравнения с непрерывными коэффициентами, ДАН СССР **122**, № 3, 327—330 (1958).
12. Гохберг И. Ц., О границах применимости теорем Нетера, Уч. зап. Кишиневск. ун-та **17**, 35—44 (1955).
13. Зигмунд А., Тригонометрические ряды, т. 1 (перев. с англ.), «Мир», 1965.
14. Карцивадзе Н. И., О сингулярном интегральном операторе с разрывными коэффициентами, ДАН СССР **109**, № 3, 450—452 (1956).
15. Косулин А. Е., Одномерные сингулярные уравнения в обобщенных функциях, ДАН СССР **163**, § **5**, 1054—1057 (1965).

16 Крейн С. Г. (ред.), Функциональный анализ, СМБ. «Наука», 1964.
17. Магнарадзе Л Г., Об одном обобщении теоремы Племеля — Привалова, Сообщ АН Груз. ССР **8**, № 8, 509—516 (1947).
18 Магнарадзе Л. Г., Об одной линейной граничной задаче Римана — Гильберта, Сообщ. АН Груз. ССР **8**, № 9—10, 585—590 (1947).
19 Магнарадзе Л. Г., Об одном обобщении теоремы И. И Привалова и его приложении к некоторым граничным задачам теории функций и к сингулярным интегральным уравнениям, ДАН СССР **68**, № 4, 657—660 (1949).
20 Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, Гостехиздат, 1950.
21. Михлин С. Г., Об интегральном уравнении Ф Трикоми, ДАН СССР **59**, № 6, 1053—1056 (1948).
22. Михлин С. Г., Сингулярные интегральные уравнения, УМН **3**, № 3 (25), 29—112 (1948).
23. Михлин С. Г., Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, Физматгиз, 1962
24 Михлин С. Г., О вычислении индекса системы одномерных сингулярных уравнений, ДАН СССР **168**, № 6, 1248—1250 (1966).
25. Мусхелишвили Н. И, Сингулярные интегральные уравнения, изд 1-е, Гостехиздат, 1946; изд. 2-е, Физматгиз, 1962.
26. Мусхелишвили Н И., Векуа Н. П, Краевая задача Римана для нескольких неизвестных функций и ее приложение к системам сингулярных интегральных уравнений, Труды Тбил. матем ин-та **12**, 1—46 (1943).
27 Мусхелишвили Н. И., Квеселава Д. А., Сингулярные интегральные уравнения с ядрами типа Коши на разомкнутых контурах, Труды Тбил. матем. ин-та **11**, 141—172 (1942).
28. Пресдорф З., Операторы, допускающие неограниченную регуляризацию, Вестн ЛГУ, серия матем., мех. и астр., № 13, вып. 3, 59—67 (1965).
29. Пресдорф З., К теории систем сингулярных интегральных уравнений с вырождающейся символической матрицей I, Вестн. ЛГУ, серия матем., мех и астр., № 19, вып. 4, 58—73 (1963).
30 Привалов И. И, Интеграл Коши, Саратовск. ун-т, 1919.
31. Привалов И. И, Граничные свойства аналитических функций, Гостехиздат, 1950.
32. Рогожин В С., Краевая задача Римана в пространстве обобщенных функций и полиномы Фабера, ДАН СССР **152**, № 6, 1308—1311 (1963).
33 Рогожин В С., Общая теория решения краевых задач в пространстве обобщенных функций, ДАН СССР **164**, № 2, 277—280 (1965).
34. Симоненко И. Б., Краевая задача Римана с измеримым коэффициентом, ДАН СССР **135**, № 3, 538—541 (1960).
35. Трикоми Ф., О линейных уравнениях смешанного типа (перев. с итал.), Гостехиздат, 1947.

36. Фрейдкин С. А, Решение одного класса сингулярных интегральных уравнений, Уч. зап. Кишиневск. ун-та **11**, 13—17 (1954).
37. Фрейдкин С. А, Краевая задача Римана и сингулярные интегральные уравнения с кусочно постоянными коэффициентами в случае счетного множества интервалов, Уч. зап. Кишиневск. ун-та **70**, 27—38 (1964).
38. Халилов З И., Линейные сингулярные уравнения в унитарном кольце, Матем. сб. **25** (67), № 2, 169—188 (1949).
39. Харазов Д. Ф, Хведелидзе Б. В., Некоторые замечания к теории сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши, Сообщ. АН Груз ССР **28**, № 2, 129—135 (1962).
40. Хведелидзе Б. В., О краевой задаче Пуанкаре теории логарифмического потенциала для многосвязной области, Сообщ. АН Груз ССР **2**, №№ 7, 10, 571—578, 865—872 (1941).
41. Хведелидзе Б. В., Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения, Труды Ин-та математики АН Груз. ССР **23**, 3—158 (1956).
42. Хермандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными (перев. с англ.), «Мир», 1965.
43. Чикин Л. А., Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярные интегральные уравнения, Уч. зап. Казанск. ун-та **113**, № 10, 57—105 (1953).
44. Шерман Д. И., О приемах решений некоторых сингулярных интегральных уравнений, Прикл. матем. и мех. XII, № 4, 423—452 (1948).
45. Шерман Д. И., Об одном случае регуляризации сингулярных уравнений, Прикл. матем. и мех. **15**, 75—82 (1951).
46. Шилов Г. Е., Математический анализ. Второй специальный курс, «Наука», 1965.
47. Carleman T., Sur la résolution de certaines équations intégrales, Arkiv för Mathematik, Astronomi och Physik **16**, № 26 (1922).
48. Gellerstedt S., Quelques problèmes mixtes pour l'équation $y^m z_{xx}+z_{yy}=0$. Arkiv för Mathematik, Astronomi och Physik **26**, H. 1, № 3 (1938).
49. Giraud G., Sur une classe d'équations intégrales où figurent des valeurs principales d'intégrales simples, Ann. Sci. de l'École Norm. Sup., 3-e série **56**, 119—172 (1939).
50. Horváth J., Sur l'itération de la transformée de Hilbert d'une distribution complexe, C. R. Acad. Sci. **237**, № 23, 1480—1482 (1953).
51. Nöther F., Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, Math. Ann. **82**, 42—63 (1921).
52. Przeworska-Rolewicz D., Équations avec opérations algébriques, Studia Mathem. **22**, 337—367 (1963).
53. Schwartz L., Théorie des distributions, tt. I, II. Paris, 1950.
54. Soboleff S. L., Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations lineaires hyperboliques normales, Матем сб. **1 (43)**, № 1, 39—72 (1936).

К главе VII

1. Бабич В. М и др., Линейные уравнения математической физики, СМБ, «Наука», 1964.
2. Векуа И. Н, Новые методы решения эллиптических уравнений, Гостехиздат, 1948.
3. Гурса Э., Курс математического анализа, т. III, ч. 2, ОНТИ, 1934.
4. Гюнтер Н. М., Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики (перев. с франц.), Гостехиздат, 1953.
5. Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, т. 1, ГТТИ, 1933; т. 2, Гостехиздат, 1945.
6. Михлин С. Г., Интегральные уравнения, изд. 2-е, Гостехиздат, 1949.
7. Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд-во АН СССР, 1949.
8. Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, Физматгиз, 1962.
9. Мюнтц Г. М., Интегральные уравнения, ГТТИ, 1934.
10. Привалов И. И., Интегральные уравнения, ГТТИ, 1937.
11. Смирнов В. И, Курс высшей математики, т. IV, Гостехиздат, 1951.
12. Соболев С. Л., Уравнения математической физики, Гостехиздат, 1954.
13. Тихонов А. Н., Самарский А. А., Уравнения математической физики, «Наука», 1966.
14. Трикоми Ф., Интегральные уравнения (перев. с англ.), ИЛ, 1960.

К главе VIII

1. Беркович Ф. Д., Об одном интегральном уравнении на полуоси, Изв. вузов, «Математика», № 1, 13—14 (1966).
2. Векуа Н. П, Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, Гостехиздат, 1950
3. Винер Н, Пэли Р., Преобразование Фурье в комплексной области, «Наука», 1964.
4. Ганин М. П., Об одном интегральном уравнении Фредгольма с ядром, зависящим от разности аргументов, Изв. вузов, «Математика», № 2, 31—34 (1963).
5. Гахов Ф. Д., Краевая задача Римана для системы n-пар функций, УМН VII, вып. 4, 3—54 (1952).
6. Гахов Ф. Д, Краевые задачи, Физматгиз, 1958.
7. Гахов Ф. Д, Смагина В. И., Исключительные случаи интегральных уравнений типа свертки и уравнения первого рода, Изв. АН СССР сер. матем. **26**, № 3, 361—390 (1962).
8. Гахов Ф. Д., Черский Ю. И., Особые интегральные уравнения типа свертки, Изв. АН СССР **20**, № 1, 32—52 (1956).
9. Гохберг И. Ц., О границах применимости теорем Ф. Нетера, Уч. зап. Кишиневск. ун-та **XVII**, физ.-мат., 35—44 (1965).

10. Гохберг И. Ц. и Крейн М. Г., Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, УМН **XIII**, вып. 2, 3—72 (1958).
11. Гохберг И. Ц. и Крейн М. Г., О парном интегральном уравнении и его транспонированном, Теоретическая и прикладная математика, Изд. Львовского ун-та **1**, 58—78 (1959).
12. Гохберг И. Ц, Задачи факторизации в нормированных кольцах функций от изометрических и симметрических операторов и сингулярные интегральные уравнения, УМН **XIX**, вып. 1, 71—124 (1964).
13. Гохберг И. Ц. и Фельдман И. А., О приближенном решении некоторых классов линейных уравнений, ДАН СССР **160**, № 4, 750—754 (1965).
14. Гохберг И. Ц. и Фельдман И. А, О методе редукции для систем уравнений типа Винера — Хопфа, ДАН СССР **165**, № 2, 268—271 (1965).
15. Гренандер У. и Сеге Г., Теплицевы формы и их приложения, ИЛ, М., 1961.
16. Гринберг Г. А. и Фок В. А., К теории береговой рефракции электромагнитных волн, Исслед. по распространению радиоволн, Сб. II (под ред. Б. А. Введенского), Изд-во АН СССР, М.—Л., 1948.
17. Давенпорт В. Б. и Рут В. Л., Введение в теорию случайных сигналов и шумов, ИЛ, М., 1960.
18. Домбровская И. Н., О приближенном решении общего сингулярного интегрального уравнения, Матем. записки Уральского ун-та, т. IV, тетр. 2, 38—45 (1963).
19. Дыбин В. Б., Исключительный случай интегральных уравнений типа свертки в классе обобщенных функций, ДАН СССР **161**, № 4, 753—756 (1965).
20. Зарипов Р. Х., Система особых интегральных уравнений типа свертки, Изв. вузов, «Математика», № 2, 93—105 (1958).
21. Иванов В. В. и Карагодова Е. А., Приближенное решение уравнений типа свертки методом Галеркина, Украинский матем. журнал **13**, № 1, 28—38 (1961).
22. Крейн М. Г., Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, УМН **XIII**, вып. 5, 3—103 (1958).
23. Ленинг Дж. Х. и Бэттин Р. Г., Случайные процессы в задачах автоматического управления, ИЛ, М., 1958.
24. Михлин С. Г., Интегралы Фурье и кратные сингулярные интегралы, Вестн. ЛГУ, сер. матем, мех. и астр., № 7, вып. 2, 143—155 (1957).
25. Морс Ф. М. и Фешбах Г., Методы теоретической физики, т. 1, ИЛ, 1958.
26. Некоторые математические задачи нейтронной физики, Изд. МГУ, 1960.
27. Нобл Б., Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных, ИЛ, 1962.
28. Писаренко В. Ф., Розанов Ю. А., О некоторых задачах для стационарных процессов, приводящих к интегральным

уравнениям, родственным уравнению Винера — Хопфа, Проблемы передачи информации, вып. 14, 113—135, Изд-во АН СССР, 1963.
29. Работнов Ю. Н., Равновесия упругой среды с последействием, Прикл. матем. и мех. **XII**, № 1, 58 (1948).
30. Раковщик Л. С., К теории уравнений типа свертки, УМН **18**, вып. 4, 171—177 (1963).
31. Раковщик Л. С., Об эффективном решении некоторых уравнений типа свертки, Труды Ленинградского инж.-экон. ин-та, вып. 63, 69—77 (1966).
32. Раковщик Л. С., Интегральные уравнения с почти разностными ядрами, Вестн. ЛГУ, сер. матем. и астр., № 3, вып. 3, 52—72 (1961).
33. Раковщик Л. С., К вычислению индекса системы почти разностных интегральных уравнений, Сиб. матем. журнал (СМЖ) **5**, 4, 904—909 (1964).
34. Рапопорт И. М., О некоторых «парных» интегральных и интегродифференциальных уравнениях, Сб. трудов Ин-та математики АН СССР, № 12, 102—118 (1949).
35. Самко С. Г., Общее сингулярное уравнение в исключительном случае, Дифференциальные уравнения **1**, № 8, 1108—1115 (1965).
36. Симоненко И. Б., О некоторых интегро-дифференциальных уравнениях типа свертки, Изв. вузов, «Математика», № 2 (1959).
37. Симоненко И. Б., О некоторых системах интегральных уравнений типа свертки, Изв. вузов, «Математика», № 6, 119—130 (1962).
38. Смагина В. И., Исключительные случаи уравнений типа свертки и соответствующие уравнения первого рода в классе функций показательного роста. Уравнения класса А, ДАН БССР **7**, № 1, 12—16 (1963).
39. Смагина В. И., Исключительные случаи уравнений типа свертки и соответствующие уравнения первого рода в классе функций показательного роста. Уравнения класса Б, ДАН БССР **6**, № 2, 76—79 (1963).
40. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. IV, Гостехиздат, М.—Л., 1951.
41. Соболев В. В., Перенос лучистой энергии в атмосфере звезд и планет, Гостехиздат, М., 1956.
42. Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, М.—Л., 1948.
43. Фельдман И. А, Об асимптотике решений систем интегральных уравнений типа Винера — Хопфа, Сиб. матем. журнал **6**, № 3, 596—615 (1965).
44. Фок В. А., О некоторых интегральных уравнениях математической физики, Матем. сб. **14**, 1—2, 3—48 (1943).
45. Хермандер Л., Оценки для операторов инвариантных относительно сдвига, ИЛ, М., 1962.
46. Чандрасекар С., Перенос лучистой энергии, ИЛ, 1959.
47. Чеботарев Г. Н., О кольцах функций, интегрируемых с весом, Изв. вузов, «Математика», № 5, 133—145 (1963).
48. Черский Ю. И., Уравнения типа свертки, Изв. АН СССР, сер. матем. **22**, № 3, 361—378 (1958).

49. Черский Ю И, К решению смешанных задач для уравнений в частных производных, Дифференциальные уравнения **1**, № 5, 647—662 (1965).
50. Asplund E., The Wiener — Horf equation in an algebra of Beurling, Acta Math. **108**, 89—111.
51. Fuchs W. H. I., On the eigenvalues of an integral equation arising in the theory band limited signals, J. Math. Analysis and appl. **9**, 317—330 (1964).
52. Kac M., Distribution of eigenvalues of certain integral equations, Michigan Math. J. **3**, 141—148 (1955—1956).
53. London H. I., The eigenvalue behavior of certain convolution equations, Trans. Amer. Math. Soc. **115**, № 3, 242—256 (1965).
54. Rosenblatt M., Some results on the asymptotic behavior of eigenvalues for a class of integral equations with Translation kernels, Journ. of Math. and Mech. **12**, № 4, 619—628 (1963).
55. Slepian D., Pollak H. O., Prolate Spheroidal Wave Functions. Fourier analysis and uncertainty I, Bell. Syst. tech. Journ. **XL**, № 1, 40—63 (1961).
56. Volterra V., Leçons sur les fonctions des lignes, Paris, Gauthier — Villars, 1913.
57. Wadom H., Equations of Wiener — Hopf type, Illinois, Journ. of Mathem., № 2, 261—270 (1958).
58. Widom H., Extreme eigenvalues of translation kernels, Trans. Amer. Math. Soc. **100**, № 2, 252—276 (1961).
59. Widom H., Asymptotic behavior of the eigenvalues of certain integral equations, Trans. Amer. Math. Soc. **109**, № 2, 278—295 (1963).
60. Widom H., Rapidly increasing Kernels, Proc. Amer. Math. Soc. **14**, № 3, 501—506 (1963).
61. Widom H., Asymptotic behavior of the eigenvalues of certain integral equations II, Archiv for rational Mech. and Analysis **17**, № 3, 215—229 (1964).
62. Wiener N., The interpolation, extrapolation and smoothing of stationary time series, New York, 1949.
63. Youla D., On the factorization of rational matrices, IRE Trancs. inform. theory, IT-7, № 3, 172—188 (1961).

К главе IX

1. Агранович М. С., Эллиптические сингулярные интегро-дифференциальные операторы, УМН **20**, № 5 (125), 3—120 (1965).
2. Берикашвили Н А., Об индексе систем сингулярных интегральных уравнений на двумерных многообразиях, Сообщ. АН Груз. ССР **34**, № 2, 257—264 (1964).
3. Вишик М. И., Эскин Г. И., Уравнения в свертках в ограниченной области, УМН **20**, № 3 (123), 89—152 (1965).
4. Вольперт А. И., Об индексе системы двумерных сингулярных интегральных уравнений, ДАН СССР **142**, № 4, 776—778 (1962).
5. Вольперт А. И., Эллиптические уравнения на сфере и двумерные сингулярные интегральные уравнения, Матем. сб. **59** (101), дополнительный, 195—214 (1962).

6. Гегелиа Т. Г., Об ограниченности сингулярных операторов, Сообщ. АН Груз ССР **XX**, № 6, 517—523 (1958).
7. Гохберг И. Ц, К теории многомерных сингулярных интегральных уравнений, ДАН СССР **132**, № 6, 1279—1282 (1952).
8. Гохберг И. Ц., Некоторые вопросы теории многомерных сингулярных интегральных уравнений, Изв. Молд. фил. АН СССР, № 10 (76), 39—50 (1960).
9. Дынин А. С, Сингулярные операторы произвольного порядка на многообразии, ДАН СССР **141**, № 2, 285—287 (1961).
10. Ицкович И. А., Обращение формулы Жиро, Уч. зап. Кишиневск. ун-та **11**, 7—11 (1954).
11. Крупник Н. Я, О непрерывности многомерного сингулярного оператора в пространстве основных и обобщенных функций, Уч. зап. Кишиневск. ун-та **50**, 111—117 (1962).
12. Крупник Н. Я., О многомерных сингулярных операторах в пространствах основных и обобщенных функций, ДАН СССР **157**, № 1 (1964).
13. Крупник Н. Я., О многомерных сингулярных операторах в пространствах основных и обобщенных функций, Уч. зап. Кишиневск. ун-та **70**, 39—48 (1964).
14. Крупник Н. Я., О многомерных сингулярных интегральных уравнениях, УМН **20**, № 6 (126), 119—123 (1965).
15. Купрадзе В. Д, Методы потенциала в теории упругости, Физматгиз, 1963.
16. Мазья В. Г., Пламеневский Б. А, а) О сингулярных уравнениях с символом, обращающимся в нуль, ДАН СССР **160**, № 6, 1250—1253 (1965); б) О задаче Коши для гиперболических сингулярных интегральных уравнений типа свертки, Вестн. ЛГУ, сер. матем., мех. и астр. № 19, вып. 4, 161—163 (1965).
17. Михайлова-Губенко Н. М., Сингулярные интегральные уравнения в пространствах Липшица; I. Вестн. ЛГУ № 1, 51—63 (1966); II. Вестн. ЛГУ, № 7, 45—57 (1966).
18. Михлин С. Г., Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, Физматгиз, 1962.
19. Михлин С. Г., К вопросу об индексе системы сингулярных уравнений, ДАН СССР **152**, № 3, 555—558 (1963).
20. Михлин С. Г., Об индексе системы сингулярных интегральных уравнений, Материалы к совм. Сов.-Амер. симпозиуму по уравн. в частн. произв, Новосибирск (1963).
21. Пламеневский Б. А., а) Сингулярные интегральные уравнения на бесконечном цилиндре, ДАН СССР **158**, № 4, 780—783 (1964); б) О сингулярных интегральных операторах на группе, ДАН СССР **164**, № 1, 47—50 (1965).
22. Симоненко И. Б., Ограниченность сингулярных операторов в пространствах Орлича, ДАН СССР **130**, № 5, 984—987 (1960).
23. Слободецкий Л. Н., Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных, Уч. зап. Ленингр. педаг. ин-та им. Герцена **197**, 54—112 (1958).
24. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. V, Физматгиз, 1959.

25. Соболев С. Л., Некоторые приложения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ, 1950.
26. Atiyah M. F., Singer I. M., The index of elliptic operators on compact manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. **69**, № 3 (1963).
27. Bojarski B., On the endex problem for systems of singular integral equations, Bull. Acad. Polon. scienc., ser. math., astr. et phys. **11**, № 10 (1963).
28. Calderon A. P., Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations, Amer. Journ. of Mathem. **80**, № 1, 16—36 (1958).
29. Calderon A. P., Zygmund A., On singular integrals, Amer. Journ. of Mathem. **78**, № 2, 289—309 (1956).
30. Calderon A. P., Zygmund A., Singular integral operators and differential equations, Amer. Journ. of Mathem. **79**, № 4, 901—921 (1957).
31. Giraud G, Equations à intégrals principales, Ann. Sc. de l'Ecole Norm. Sup. **51**, fasc. 3, 4, 251—372 (1934).
32. Horvath J., Sur l'itération de la transformée de Hilbert d'une distribution complexe, C. R. Acad. Sci. **237**, № 23, 1480—1482 (1953).
33. Horvàth J., Transfomadas de Hilbert de distribuciones, 2° symposium sobre algunos problemas matematicas que se estan estudiando en Latino America, Montevideo, 61—70 (1954).
34. Horvàth J., Hilbert transforms of distributions in R^n, Proc. Internat. Congr. Math. **2**, Amsterdam, 122—123 (1954).
35. Horvàth J., Sungular integrals and spherical harmonics, Trans. Amer. Math. Soc. **82**, № 1, 52—63 (1956).
36. Koizumi Sumiyuki, On singular integrals, I, II, III, Proc. Japan. Acad. **34**, № 4, 193—198; № 5, 235—240; № 9, 594—598 (1958).
37. Malgrange Bernard, a) Opérateurs intégraux singuliers, théorèmes d'interpolation dans les espaces L^p. b) Multiplicateurs de L^p. c) Multiplicateurs de L^p. d) Multiplicateurs de L^p. a) Noyaux valeurs principales. f) Noyaux valeurs principales. g) Calcul symbolique approximatif. Sémin. Schwartz. Fac. sciences Paris. 1959—1960, 4 annee, Paris (1960).
38. Seeley R. T., Singular integrals on compact manifolds, Amer. Journ. of Mathem. **81**, № 3, 658—690 (1959).
39. Seeley R. T., Integro-differential operators on vector bundles, Trans. Amer. Math. Soc. **117**, № 5, 167—204 (1965).
40. Séminaire Henri Cartan, Théorème d'Atiyah — Singer sur l'indice d'un opérateur differentiel elliptique, fasc. 1 et 2, Paris (1965).
41. Stein E. M., Note on singular integrals, Proc. Amer. Math. Soc. **8**, № 2, 250—254 (1957).
42. Erdélyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F. G., Higher transcendental functions, v. 2, 1953.
43. Yamaguti Másaya, Sur l'inégalite d'energie pour le système hyperbolique, Proc. Japan. Acad. **35**, № 1, 37—41 (1959).

К главе X

1. Бохнер С, Мартин У., Функции многих комплексных переменных, ИЛ, 1951.
2. Вайнберг М. М., Вариационные методы исследования нелинейных операторов, Гостехиздат, 1956.
3. Гельман А. Е., Теоремы о неявной абстрактной функции, ДАН СССР **132**, № 3, 501—503 (1960).
4. Гельман А. Е., Об аналитических решениях существенно нелинейных уравнений, ДАН СССР **144**, № 1, 19—20 (1962).
5. Гельман А. Е, О простых решениях операторных уравнений в случае ветвления, ДАН СССР **152**, № 5, 1142—1144 (1963).
6. Забрейко П. П., Нелинейные интегральные операторы, Труды семинара по функциональному анализу, вып. 8, Воронеж (1966).
7. Забрейко П. П. и Красносельский М. А., О вычислении индекса неподвижной точки вполне непрерывного векторного поля, СМЖ **5**, № 3 (1964).
8. Канторович Л. В., Акилов Г. П., Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.
9. Красносельский М. А., Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, 1956.
10. Красносельский М. А., Положительные решения операторных уравнений, Физматгиз, 1962.
11. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е И., Соболевский П. Е., Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций, Физматгиз, 1966.
12. Красносельский М. А. и Рутицкий Я. Б., Выпуклые функции и пространства Орлича, Физматгиз, 1959.
13. Крейн М. Г., Рутман М. А., Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха, УМН **3**, вып. 1 (1948).
14. Люстерник Л. А., Соболев В. И, Элементы функционального анализа, Физматгиз, 1966.
15. Ляпунов А. М., Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoides d'une masse liquide homogene douée d'un mouvement de rotation, Записки Академии наук, С.-Петербург, 1906.
16. Меламед В. Б., О вычислении вращения вполне непрерывного векторного поля в критическом случае, СМЖ **2**, № 3 (1961).
17. Меламед В. Б., О точках бифуркации одного класса уравнений, ДАН СССР **152**, № 4 (1963).
18. Меламед В. Б., О формальных решениях некоторых нелинейных уравнений, СМЖ **6**, № 1 (1965).
19. Назаров Н. Н., Интегральные уравнения типа Гаммерштейна, Труды САГУ **33**, Ташкент (1941).
20. Некрасов А. И., Точная теория установившихся волн на поверхности тяжелой жидкости, Изд-во АН СССР, 1950.
21. Трикоми Ф., Интегральные уравнения, ИЛ, 1960.
22. Schmidt E., Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, III Teil. Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichungen und die Verzweigung ihrerer Lösungen, Math. Ann. **65** (1908).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ